



**HAL**  
open science

# Opérateurs unidimensionnels et quasi-unidimensionnels en mécanique quantique

Hakim Boumaza

► **To cite this version:**

Hakim Boumaza. Opérateurs unidimensionnels et quasi-unidimensionnels en mécanique quantique. Mathématiques [math]. Université Sorbonne Paris Nord (Paris 13), 2023. tel-04518650

**HAL Id: tel-04518650**

**<https://theses.hal.science/tel-04518650>**

Submitted on 24 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

---

Synthèse de travaux scientifiques

en vue de l'obtention de  
**l'habilitation à diriger des recherches**

présentée à

**l'Université Sorbonne Paris Nord**

en

**Mathématiques**

par

**Hakim BOUMAZA**

---

**Opérateurs unidimensionnels et quasi-unidimensionnels en  
mécanique quantique.**

---

soutenue publiquement le 21 février 2023 devant le jury composé de :

Jean-Marie Barbaroux	Université de Toulon	Rapporteur
Thomas Duyckaerts	Université Sorbonne Paris Nord	Président
Clotilde Fermanian Kammerer	Université Paris Est - Créteil Val de Marne	Examinatrice
Alain Joye	Université Grenoble Alpes	Examineur
Francis Nier	Université Sorbonne Paris Nord	Rapporteur
Nicolas Raymond	Université d'Angers	Examineur
Hermann Schulz-Baldes	Friedrich-Alexander Universität	Rapporteur



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Cadres physique et mathématique . . . . .	9
1.1.1	La localisation d'Anderson . . . . .	9
1.1.2	Le modèle d'Anderson . . . . .	11
1.1.3	Définitions mathématiques de la localisation . . . . .	14
1.2	Mise en perspective des travaux présentés . . . . .	16
1.2.1	Des exposants de Lyapounov à la localisation . . . . .	16
1.2.2	La densité d'états intégrée . . . . .	28
1.2.3	Opérateurs aléatoires unitaires . . . . .	32
1.2.4	L'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Opérateurs de Schrödinger aléatoires quasi-unidimensionnels</b>	<b>45</b>
2.1	Exposants de Lyapounov . . . . .	45
2.1.1	Cocycles linéaires . . . . .	45
2.1.2	Exposants de Lyapounov et théorème d'Oseledets . . . . .	47
2.1.3	Exposants de Lyapounov dans le cas symplectique . . . . .	50
2.1.4	Groupe de Fürstenberg . . . . .	51
2.2	Séparabilité des exposants de Lyapounov : une approche algébrique . . . . .	52
2.2.1	Théorème de Fürstenberg . . . . .	52
2.2.2	Le critère de Goldsheid-Margulis et ses applications . . . . .	59
2.2.3	Raffinement dans le cas continu : un critère de densité dans les groupes de Lie . . . . .	70
2.3	De la séparabilité des exposants de Lyapounov à la localisation . . . . .	82
2.3.1	Théorie de Kotani . . . . .	82
2.3.2	Critère de localisation pour les modèles quasi-unidimensionnels de type Schrödinger . . . . .	85
2.3.3	Résultats de localisation pour les modèles de la Section 2.2 . . . . .	95
2.4	Perspectives de recherches futures . . . . .	96
<b>3</b>	<b>La densité d'états intégrée pour des opérateurs quasi-unidimensionnels</b>	<b>105</b>
3.1	Généralités sur la densité d'états intégrée . . . . .	105
3.2	Formule de Thouless et régularité Höldérienne . . . . .	109
3.3	Le cas des interactions ponctuelles . . . . .	113
3.4	Queues de Lifschitz . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Opérateurs aléatoires unitaires</b>	<b>125</b>
4.1	Modèle de scattering zipper aléatoire . . . . .	125
4.2	Séparabilité des exposants de Lyapounov . . . . .	128
4.3	Théorie de Kotani dans le cadre unitaire . . . . .	134

4.4	Perspectives de recherches futures . . . . .	137
<b>5</b>	<b>L'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique sur la droite réelle</b>	<b>141</b>
5.1	L'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique . . . . .	141
5.1.1	Présentation du modèle . . . . .	141
5.1.2	Le spectre de bande dans le régime semiclassique . . . . .	143
5.1.3	Comptage des bandes spectrales dans l'image du potentiel . . .	149
5.1.4	Estimations uniformes des largeurs des bandes spectrales et des trous spectraux . . . . .	150
5.2	Densité d'états intégrée de l'opérateur d'Airy - Schrödinger périodique	154
5.3	Perspectives de recherches futures . . . . .	166

# Remerciements

Lors de la rédaction des remerciements de ma thèse de doctorat, j'avais comparé cet exercice académique à une longue traversée en solitaire. S'il est vrai qu'un apprenti chercheur doit faire seul ce saut dans l'inconnu, il apprend aussi à s'entourer et est guidé par nombre de ses prédécesseurs plus expérimentés. C'est à cette époque déjà lointaine que j'ai pu faire la connaissance de la plupart de celles et ceux qui me font aujourd'hui l'honneur d'être membres du jury de ma soutenance d'Habilitation à Diriger des Recherches.

Je remercie tout d'abord Francis Nier qui a été le premier à relire mon manuscrit et à rédiger un rapport sur celui-ci. Merci également pour tes précieux conseils qui m'ont permis d'en améliorer la qualité. Je remercie ensuite Hermann Schulz-Baldes qui a accepté de relire mon long mémoire en français, langue qu'il maîtrise parfaitement mais qui n'est ni sa langue maternelle, ni sa langue de travail. Je suis très honoré que tu aies accepté d'écrire un rapport sur mes travaux. Tes articles ont nourri ma recherche depuis mes débuts en thèse et bien après encore, que ce soit sur les exposants de Lyapounov ou sur ton modèle de scattering zipper qui m'occupe depuis plusieurs années déjà. Je remercie Jean-Marie Barbaroux qui a accepté sans hésiter d'écrire un rapport sur mon mémoire envoyé pourtant en pleine période estivale. Merci également pour m'avoir fait rencontrer ton étudiant Sylvain avec qui nous explorons aujourd'hui les opérateurs de Dirac aléatoires. C'est également un grand plaisir pour moi de compter Alain Joye parmi les membres de mon jury. Je me souviens encore de nos premières discussions mathématiques à Lausanne avec Olivier Bourget et de ta patience quand nous venions avec Laurent Marin te poser des questions dans ton bureau à Grenoble. Tu m'as fait découvrir le pendant unitaire de mes modèles et je m'inspire toujours de tes travaux dans ma recherche actuelle. Je suis également très heureux de la présence de Clotilde Fermanian dans mon jury. Il y a plus de six ans, tu m'as fait confiance pour prendre ta suite à la co-organisation du séminaire "tournant" et depuis, c'est toujours un plaisir de travailler avec Stéphane Nonnenmacher et Mathieu Lewin. Ainsi, j'ai eu l'occasion de rencontrer nombre de chercheuses et chercheurs qui m'ont ouvert l'esprit à des mathématiques nouvelles. Merci également à Nicolas Raymond de participer à ce jury. Nous nous croisons régulièrement à des conférences ou séminaires depuis toutes ces années et j'ai toujours beaucoup appris de tes exposés. Il serait d'ailleurs temps que j'ajoute un champ magnétique dans mes modèles! Je remercie enfin Thomas Duyckaerts. Depuis ton arrivée au LAGA tu as toujours été là pour répondre à mes interrogations. Merci pour tes conseils avisés et tes encouragements constants.

Je réalise en écrivant ces lignes à quel point la rédaction d'un mémoire d'habilitation est très différente de celle d'une thèse de doctorat. Il s'agit moins de présenter des mathématiques pour elles-mêmes que de raconter comment nos recherches s'articulent et en quoi elles sont le fruit de nos rencontres avec d'autres chercheurs et chercheuses. Je ne serai pas arrivé jusque-là si je n'avais pas rencontré des collabo-

ratrices et collaborateurs aux grandes qualités humaines et mathématiques : Günter Stolz à qui je dois mon apprentissage du métier de chercheur, Laurent Marin, Hatem Najjar, Sylvain Zalczer, Olivier Bourget et Constanza Rojas-Molina. Je te remercie Constanza pour ton amitié et pour tous ces moments d'échanges. Merci également de m'avoir associé à ton projet ANR. Grâce à ton efficacité hors pair, nos deux écoles d'été se sont parfaitement déroulées. Parmi mes collaborateurs, une place particulière revient à Olivier Lafitte. J'ai commencé par passer des années à l'aider à encadrer notre filière ingénieur et à remplir toutes sortes de rapports et de tableaux Excel avant que nous nous disions enfin que nous aimerions mieux collaborer mathématiquement. Au début, nous pensions nous lancer dans l'écriture d'un petit papier, mais nous nous sommes finalement embarqués dans un projet au long cours qui nous occupe depuis bien des années. Je suis plutôt fier de faire partie de ceux qui auront su canaliser le flot incessant de tes idées. Un grand merci à toi pour ton amitié indéfectible, pour nos discussions passionnantes sur la société et l'histoire et pour toutes les facettes du métier que tu m'auras fait découvrir très tôt dans ma carrière.

Depuis mon arrivée au LAGA, j'ai pu profiter d'un environnement de travail de grande qualité qui est avant tout le fruit des efforts de ses membres pour pallier des conditions matérielles qui ne sont pas toujours idéales. J'ai été accueilli dans l'équipe PMEDP par Frédéric Klopp, qui en plus de m'avoir appris tant sur les modèles aléatoires, m'aura permis de travailler au fil du temps aux côtés d'Alain Grigis, Jean-Marc Delort, David Dos Santos, Emmanuel Schenck, Thomas Duyckaerts, Giona Veronelli, Anne-Sophie De Suzzoni, Francis Nier, Jacek Jendrej, Caterina Valcu. Merci également à Hatem Zaag qui m'apprend le métier d'encadrement d'une thèse avec toutes ses subtilités insoupçonnées. Enfin, Maher Zerzeri, un véritable ami avec qui je partage la même vision de notre métier d'enseignant et de chercheur. Il est grand temps que tu me laisses te rendre service comme tu le fais trop souvent pour moi.

C'est également le moment de citer Emmanuel Audusse et Charles De Clercq du bureau D409. Quand les astres sont alignés et que nous parvenons à nous y retrouver tous les trois, c'est jour de fête à Villetaneuse ! Charles, il faudra que l'on songe à aller déguster ce ramen au Kodawari Tsukiji ; cela fait tout de même trois ans que nous en parlons... Manu, finalement j'attendrai encore quelques mois pour venir prendre ce café chez toi. J'aurai alors le bonheur de rencontrer ton petit dernier.

J'aimerai encore remercier toutes celles et ceux avec qui je prends plaisir à échanger, qui m'ont soutenu ou conseillé durant les quinze dernières années : Anne Boutet de Monvel, Jean-Jacques Sansuc, Yoshiaki Maeda, François Germinet, Peter Hislop, Peter Müller, Mostafa Sabri, Eman Hamza, François Vigneron, Laurence Halpern, Marion Darbas, Laurent Tournier, Eric Hoffbeck, Philippe Souplet, Farrell Brumley, Anne Quéguigner, Benoît Rittaud, Emmanuel Roy, Didier Gamblin, Julien Barral, Marc Bonino, Jérôme Le Rousseau et tous les autres qui me pardonneront de ne pas être cités dans cette liste. Je n'oublie pas non plus l'équipe administrative, maillon essentiel dans notre activité et en particulier Yolande Jimenez, véritable pilier du laboratoire. Je pense à Michael Fortier de Buncey qui nous a quittés bien trop tôt. Le hasard de la vie avait voulu qu'après avoir été en classe ensemble en Alsace au lycée, nous nous étions retrouvés avec bonheur comme collègues au LAGA. Je n'oublierai jamais ta bonne humeur communicative.

Il y a également les vieux amis, mathématiciens ou non, qui m'accompagnent depuis bien longtemps et sont toujours là dans les moments importants. Je pense à Benoît, Marie et Valentin, Jérôme et Marion, Vincent et Cécile, Joseph, Bertrand et Amélie, Jérémie et Sophie, Sébastien, Anne, Fabrice, Aurélien et Anaïs, David et Céline, Germain et Julien, Laetitia et Christophe, Céline et Sébastien et tous les petits

venus au monde depuis dont certains sont déjà bien grands. Bien sûr, mon vieil ami Florent Schaffhauser garde toujours sa place à part comme étant celui avec qui j'ai construit mon parcours d'étudiant puis de chercheur et qui m'aura fait voyager au bout du monde, de Tokyo jusqu'à Bogota.

Si la distance nous sépare entre l'Alsace, le Pas-de-Calais, Istanbul et la région parisienne, elle n'entame en rien le lien qui m'unit à ma famille : mes parents qui sont toujours aussi fiers de leurs enfants et petits-enfants, Magali et Tania qui n'hésitent jamais à traverser la France ou l'Europe pour venir nous voir, Corinne et ses enfants, Amélie, Jérémie et Paul qui ne sont depuis longtemps plus les petits bouts de chou que j'allais garder avec tant de plaisir. Je veux aussi remercier mon oncle Norbert et ma tante Denise qui m'ont transmis la mémoire d'une autre génération que celle de mes parents et qui sont pour moi les grands-parents que je n'ai pas connu.

Mes ultimes et plus profonds remerciements vont à ma compagne, Béatrice. Tu as été là depuis le début de cette aventure de presque vingt ans et tu m'as soutenu de manière infaillible, même lorsque je t'ai demandé l'impossible en partant deux années trop loin de toi. Ensemble nous avons construit notre foyer avec nos deux merveilleux enfants : notre grande fille Charlotte qui a fait de moi un Papa, le plus beau des titres, et notre petit garçon Loïc qui nous fait revivre huit ans après sa soeur, le bonheur de toutes les premières fois. J'ai découvert avec vous trois un monde bien plus vaste et passionnant que celui des mathématiques où je m'évade trop souvent, mais dont vous me ramenez toujours.





# Chapitre 1

## Introduction

Mes recherches depuis ma thèse se sont principalement focalisées sur l'étude des opérateurs de Schrödinger en dimension 1, qu'ils soient à valeurs scalaires ou à valeurs matricielles, aléatoires ou non. Afin d'expliquer mon intérêt pour ces opérateurs, revenons sur le problème qui m'avait été posé au début de ma thèse de doctorat :

Prouver la localisation d'Anderson en dimension 2 à toutes les énergies et pour un potentiel d'Anderson faisant intervenir des variables aléatoires de Bernoulli.

Pour mieux comprendre l'énoncé de ce problème, prenons tout d'abord le temps de présenter ce qu'est la localisation d'Anderson du point de vue de la physique, puis définissons le modèle d'Anderson avant de donner différentes définitions de la localisation d'Anderson du point de vue mathématique. La Section 1.1.1 qui suit reprend en grande partie la présentation faite dans [Bou14a].

## 1.1 Cadres physique et mathématique

### 1.1.1 La localisation d'Anderson

Depuis ma thèse de doctorat, mes travaux portent principalement sur l'étude du phénomène de la localisation d'Anderson que l'on retrouve dans différents modèles aléatoires.

La physique de la matière condensée, qui étudie les solides ayant une structure cristalline, nous apprend que les électrons sont distribués parmi tous les atomes du solide. A l'équilibre, le principe de Pauli affirme que deux électrons, ceux-ci étant des fermions, ne peuvent pas partager le même état quantique, ce qui implique que tous les électrons du solide ne peuvent être au niveau fondamental. Les niveaux d'énergie les plus bas se remplissent donc jusqu'à atteindre le niveau d'énergie de Fermi. Lorsque l'on soumet le solide à un changement de température ou à un potentiel électrique, certains électrons sont excités et leur énergie augmente au-delà du niveau de Fermi. Ces électrons se déplacent dans le solide et produisent un transport électronique.

Cette description du transport électronique est valable pour un solide dont la structure cristalline est périodique et ne contient donc pas d'impuretés. Toutefois,

dans la nature, les cristaux idéaux n'existent pas, ils contiennent toujours des impuretés. Celles-ci peuvent être de différentes natures. Par exemple, on peut observer la présence d'atomes ionisés dans le réseau cristallin ou, dans le cas où le cristal n'est pas constitué d'atomes tous identiques mais est issu d'un alliage entre plusieurs matériaux, il se peut que le réseau ne soit plus parfaitement périodique, mais qu'il y ait par-ci par-là un atome qui ne se trouve pas à la bonne place. Enfin, certains atomes sont parfois légèrement déplacés par rapport à leur position idéale sur le réseau périodique. Dans tous ces cas, les propriétés physiques du cristal sont modifiées.

Comment peut-on modéliser ces impuretés dans un cristal et leur impact sur le transport électronique? Le premier à avoir proposé un modèle expliquant les effets du désordre sur le comportement quantique des électrons dans un réseau cristallin contenant des impuretés est le physicien américain Philip Warren Anderson dans un article fondateur de 1958 ([And58]). En introduisant des termes aléatoires dans l'équation de Schrödinger, deux nouveaux phénomènes furent mis en évidence : la localisation d'Anderson et l'existence d'une transition de phase en dimension 3 et au-delà.

Le phénomène de localisation d'Anderson peut s'énoncer ainsi : à une énergie fixée, au-delà d'une certaine quantité de désordre dans le cristal, la diffusion des électrons cesse et tout électron excité va rester confiné dans une région localisée au lieu de se diffuser dans le cristal. Le cristal cesse d'être un conducteur pour devenir un isolant.

Une explication possible de la localisation d'Anderson est donnée par l'interprétation ondulatoire suivante : à tout électron excité dans le cristal est associée une onde et à chaque collision de l'électron avec une impureté du cristal, son onde associée se disperse. On pourrait s'attendre à ce que, lorsque le désordre augmente, le libre parcours moyen (la distance moyenne parcourue par l'électron entre deux collisions) diminue continûment. Mais ce n'est pas ce qui se produit. Après une certaine quantité critique d'impuretés, la diffusion de l'électron s'arrête d'un coup. Ce brusque arrêt a lieu lorsque le libre parcours moyen devient plus court que la longueur d'onde de l'électron : si l'onde est dispersée avant même une première période, on ne peut plus vraiment la considérer comme une onde... Précisons que le phénomène de localisation dépasse le cadre de la mécanique quantique. On peut l'observer dans d'autres situations où une onde se propage dans un milieu désordonné. Cela peut être le cas d'une onde lumineuse, de micro-ondes ou d'ondes acoustiques.

L'article d'Anderson [And58] prédit aussi l'existence d'une transition de phase isolant/conducteur dès lors que la dimension du réseau cristallin est supérieure ou égale à 3. Quelle que soit la quantité de désordre dans le cristal, il existe une énergie en-dessous de laquelle il y a localisation d'Anderson et au-dessus de laquelle il y a diffusion des électrons excités. Pour les cristaux unidimensionnels et bidimensionnels, cette transition n'existe pas : à toute énergie, le phénomène de localisation d'Anderson apparaît dès lors qu'il y a du désordre. Pour le modèle d'Anderson, il y a donc une dimension critique, en l'occurrence 3, pour laquelle le comportement du système change drastiquement. L'existence d'une telle dimension critique était déjà connue pour le modèle d'Ising dans lequel elle est égale à 2 comme l'a démontré Peierls dans [Pei36]. Précisons que la non-existence d'une transition de phase est bien démontré mathématiquement en dimension 1 mais que cela reste une conjecture en dimension 2. Nous reviendrons sur ce point après avoir présenté le modèle d'Anderson du point de vue mathématique.

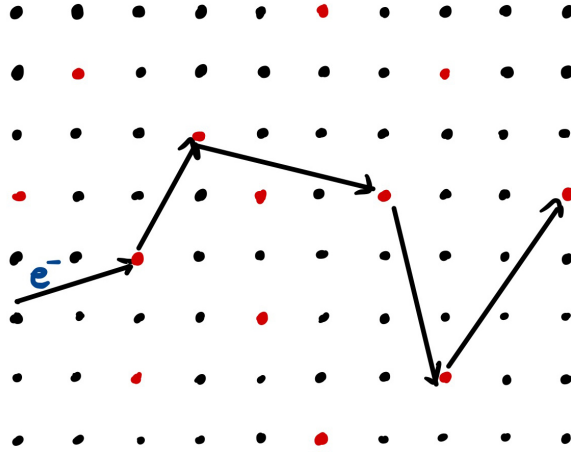


Fig. 1. Déplacement d'un électron dans un milieu désordonné

### 1.1.2 Le modèle d'Anderson

On souhaite étudier l'évolution d'un électron dans un cristal. Soit  $d \geq 1$  un entier. Si le cristal est parfait, les atomes sont distribués sur un réseau périodique, par exemple  $\mathbb{Z}^d$ . Au point  $x \in \mathbb{R}^d$ , l'électron ressent un potentiel de la forme  $qf(x - n)$  dû à un atome de charge  $q$  situé en  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Le potentiel total ressenti par l'électron dans le cristal est donc

$$V(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} qf(x - n)$$

où  $f$  est une fonction à support dans le cube unité  $[0, 1]^d$ .

Il y a plusieurs façons de modéliser le désordre dans un cristal. Par exemple, on peut considérer que la position des impuretés dans le réseau est aléatoirement décalée par rapport aux points de  $\mathbb{Z}^d$ , ce décalage suivant une loi de Poisson. Une autre manière de concevoir le désordre dans le cristal est de considérer les modèles quasi-périodiques. Toutefois, n'ayant pas abordé ces modèles dans mes recherches (hormis un mémoire de DEA sur les opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques en dimension 1), je n'en parlerai pas dans ce mémoire.

Une autre approche est l'idée originale d'Anderson qui est de considérer que la charge des atomes du cristal est une variable aléatoire. Plus précisément, soit  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$  un espace de probabilité complet et posons

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\Omega}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathcal{A}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathbb{P}} \right). \quad (1.1)$$

Nous identifions les coordonnées  $\omega_n$  de  $\omega \in \Omega$  à des variables aléatoires  $\omega^{(n)}$  sur  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ ,  $\omega^{(n)}$  représentant par exemple la charge de l'atome au site  $n \in \mathbb{Z}^d$ .

L'idée d'Anderson conduit à considérer un potentiel ressenti au point  $x$  de la forme

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^d, V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega^{(n)} f(x - n).$$

A priori les  $\omega^{(n)}$  peuvent ne prendre qu'un nombre fini de valeurs, mais on peut aussi considérer le cas où les  $\omega^{(n)}$  ont une loi continue, ce qui s'avère plus simple du point de vue mathématique. Ce point sera éclairé dans le cas de la dimension 1 lorsque je présenterai le groupe de Fürstenberg dans la Section 2.1.

Cette idée conduit à introduire une famille aléatoire d'opérateurs de Schrödinger :

$$\forall \omega \in \Omega, H_\omega = -\Delta_d + V_{\text{per}} + \lambda V_\omega, \quad (1.2)$$

agissant sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et auto-adjoint sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R}^d)$ , où  $\Delta_d$  est le Laplacien usuel en dimension  $d$ ,  $V_{\text{per}}$  est un opérateur de multiplication par une fonction  $\mathbb{Z}^d$ -périodique déterministe,  $V_\omega$  est l'opérateur de multiplication par la fonction  $V_\omega$  introduite plus haut et  $\lambda$  est un réel positif qui mesure l'intensité du désordre. La famille d'opérateurs  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est appelée le **modèle d'Anderson continu**.

L'analogue discret de ce modèle est donné par :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \forall n \in \mathbb{Z}^d, (h_\omega u)_n = - \sum_{\|m-n\|_1=1} u_m + \lambda \omega^{(n)} u_n, \quad (1.3)$$

agissant sur  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  et où pour tout  $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\|n\|_1 = |n_1| + \dots + |n_d|$ . Là encore,  $\lambda$  est un réel positif qui mesure l'intensité du désordre. La famille d'opérateurs  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est appelée le **modèle d'Anderson discret**.

On peut voir  $H_\omega$  et  $h_\omega$  comme les Hamiltoniens qui décrivent l'évolution en mécanique quantique d'un électron, dans un milieu continu pour  $H_\omega$ , sur un réseau discret pour  $h_\omega$ . Cette évolution est décrite via l'équation de Schrödinger :

$$H_\omega \psi = i\partial_t \psi, \quad \psi(0) = \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad (1.4)$$

et est donnée au travers du sous-groupe à un paramètre unitaire  $e^{-itH_\omega}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = e^{-itH_\omega} \psi_0. \quad (1.5)$$

Dans la suite de ce mémoire, nous précisons les hypothèses sur le potentiel  $V_\omega$  lorsque cela sera nécessaire pour énoncer des théorèmes précis sur les familles  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  ou  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Les résultats prendront la forme de propriétés de  $H_\omega$  ou de  $h_\omega$  vraies pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ .

Nous pouvons déjà remarquer que ces deux familles d'opérateurs aléatoires sont  $\mathbb{Z}^d$ -ergodiques. Pour  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , cela est lié à la forme particulière du potentiel  $V_\omega$ . Plus précisément, la  $\mathbb{Z}^d$ -ergodicité de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est une conséquence de l'hypothèse *i.i.d.* faite sur la famille de variables aléatoires  $\{\omega^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$  et du fait que les supports des translats du potentiel à un site  $f$  ne se superposent pas.

Rappelons brièvement la définition de cette propriété des familles d'opérateurs aléatoires. Soit  $\Gamma$  un réseau dans  $\mathbb{R}^d$  (souvent  $\mathbb{Z}^d$ ). Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité complet et  $\{\tau_i\}_{i \in \Gamma}$  un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure  $\mathbb{P}$ . Un ensemble  $A \in \mathcal{A}$  est dit invariant sous l'action de  $\{\tau_i\}_{i \in \Gamma}$  lorsque  $\tau_i^{-1}A = A$  pour tout  $i \in \Gamma$ . Alors  $\{\tau_i\}_{i \in \Gamma}$  est dit  $\Gamma$ -ergodique si tout ensemble invariant est de mesure nulle ou égale à 1.

**Définition 1.1.1.** On dit qu'une famille mesurable d'opérateurs auto-adjoints  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\Gamma$ -ergodique lorsqu'il existe un groupe de transformations  $\{\tau_i\}_{i \in \Gamma}$  ergodique et une famille d'opérateurs unitaires  $\{U_i\}_{i \in \Gamma}$  telle que :

$$\forall i \in \Gamma, \forall \omega \in \Omega, H_{\tau_i \omega} = U_i H_\omega U_i^*.$$

L'intérêt de l'ergodicité est qu'alors, pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $i \in \Gamma$ ,  $\sigma(H_{\tau_i \omega}) = \sigma(H_\omega)$ , ce qui conduit, à l'aide du théorème de Pastur, à l'existence d'un ensemble déterministe égal au spectre de  $H_\omega$  P-presque sûrement. Cet ensemble déterministe est appelé le spectre presque sûr de la famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Plus précisément, le théorème de Kirsch-Martinelli nous assure que pour une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoints, leurs spectres purement ponctuel, singulier continu et absolument continu sont indépendants de  $\omega$  presque sûrement.

L'existence des différents types de spectres presque-sûr est essentielle pour pouvoir démontrer des propriétés spectrales presque-sûrement indépendantes de  $\omega$  pour les familles  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

Pour plus de précisions sur les notions de mesurabilité ainsi que sur l'existence des différents spectres presque-sûr, nous renvoyons à [CL90] et à la première partie de [Dis+08] écrite par Werner Kirsch.

Terminons cette section en donnant la structure des spectres presque-sûrs pour les modèles d'Anderson discret et continu. Notons dans les deux cas  $\nu$  la loi commune des variables aléatoires  $\omega^{(n)}$ . Alors, pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\sigma(h_\omega) = [-2d, 2d] + \lambda \text{supp } \nu \quad (1.6)$$

et

$$\sigma(H_\omega) = \overline{\bigcup_{L \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{\substack{\tilde{\omega} \text{ admissible} \\ \text{et } LZ^d\text{-périodique}}} \sigma(H_{\tilde{\omega}})} \quad (1.7)$$

où une suite  $\tilde{\omega} \in \Omega$  est dite *admissible* lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\omega}^{(n)} \in \text{supp } \nu$ , et  $\tilde{\omega}$  est dite  *$LZ^d$ -périodique* lorsque pour tout  $m \in LZ^d$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\omega}^{(n+m)} = \tilde{\omega}^{(n)}$ .

La formule donnant le spectre-sûr dans le cas continu est moins explicite que celle dans le cas discret. Toutefois, dans le cas où la loi commune  $\nu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de support borné, mettons  $\text{supp } \nu = [q_-, q_+]$  avec  $q_- < q_+$ , un argument de min-max couplé au théorème des valeurs intermédiaires permet d'obtenir la formule plus explicite suivante (voir [Sto01]) :

$$\sigma(H_\omega) = \bigcup_{q \in [q_-, q_+]} \sigma(-\Delta_d + V_{\text{per}} + q\lambda f_{\text{per}}) \quad (1.8)$$

où  $f_{\text{per}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(\cdot - n)$  est la périodisée du potentiel à un site  $f$ .

Rappelons que, sous des hypothèses raisonnables sur  $V_{\text{per}}$ , le spectre de l'opérateur périodique  $-\Delta_d + V_{\text{per}}$  est un spectre de bandes (voir pour plus de détails la Section 5.1.2). Avec la perturbation aléatoire  $V_\omega$ , le spectre presque-sûr, dans le cas où  $\nu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, est encore un spectre de bandes, mais celles-ci "débordent" du spectre non perturbé. Nous verrons à la Section 1.2.1 que déterminer le type spectral dans ces bandes est une question compliquée. Elle admet une réponse mathématique dans certains cas, mais en général elle fait surtout l'objet de conjectures difficiles.

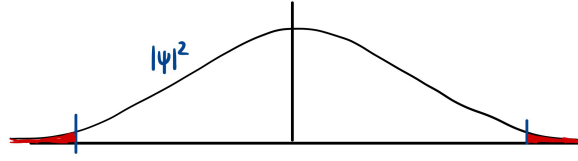


Fig. 2. Décroissance exponentielle de la densité de probabilité de présence.

### 1.1.3 Définitions mathématiques de la localisation

Il y a plusieurs définitions mathématiques pour traduire le phénomène de localisation d'Anderson pour une famille d'opérateurs aléatoires. Rappelons que  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace de probabilité complet et que l'on considère une famille d'opérateurs aléatoires auto-adjoints  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  sur un espace de Hilbert qui sera l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d)$  dans le cas continu ou l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  dans le cas discret.

**Définition 1.1.2.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que la famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est **spectralement localisée dans  $I$**  lorsque le spectre de  $H_\omega$  dans  $I$  est non vide et purement ponctuel pour  $P$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ .

Cette première définition exprime principalement que pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $H_\omega$  n'a pas de spectre continu dans  $I$ . Le théorème R.A.G.E. (voir [RS79; AW15]) nous assure alors qu'il n'y pas d'états diffusifs pour  $H_\omega$  et ce presque sûrement en  $\omega$ . Mais cela ne donne pas une idée claire du comportement des fonctions propres associées aux valeurs propres dans  $I$ . Pour cela nous allons donner une seconde définition plus précise et qui traduit mieux l'idée d'état localisé et pas seulement non diffusif.

**Définition 1.1.3.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que la famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a la propriété de **localisation d'Anderson dans  $I$**  ou encore y est **exponentiellement localisée** lorsque :

1. le spectre de  $H_\omega$  dans  $I$  est non vide et purement ponctuel pour  $P$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,
2. les fonctions propres associées aux valeurs propres dans  $I$  décroissent exponentiellement vers 0 à l'infini.

Rappelons que le module au carré d'une fonction propre de  $H_\omega$  représente une densité de probabilité de présence pour la particule dont cette fonction propre est la fonction d'onde. La décroissance exponentielle de cette probabilité de présence correspond à une probabilité exponentiellement faible pour la particule de se trouver loin d'une position moyenne. La particule est donc bien localisée.

Dans le deuxième point de la définition 1.1.3, la décroissance exponentielle à l'infini des fonctions propres signifie plus précisément, dans le cas continu, que si pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $H_\omega \psi_\omega = E_\omega \psi_\omega$  avec  $\psi_\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $E_\omega \in I$ , alors

$$\exists C > 0, \exists m > 0, \exists x_{0,\omega} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{1}_{[x-1, x+1]^d} \psi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{-m \|x - x_{0,\omega}\|},$$

pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , où  $\|x\|$  désigne la norme euclidienne (par exemple) de  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Le point  $x_{0,\omega}$  est appelé centre de localisation.

En particulier  $C$  et  $m$  peuvent être choisies presque sûrement indépendantes de  $\omega$ . La constante  $m$  est l'inverse d'une longueur et  $\ell = \frac{1}{m}$  est appelée **longueur de**

**localisation** pour  $\psi_\omega$ . La longueur de localisation  $\ell$  est presque sûrement constante, contrairement aux valeurs propres et aux fonctions propres qui elles sont dépendantes de  $\omega$ .

Dans le cas discret, la décroissance exponentielle à l'infini des fonctions propres signifie que, si pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $h_\omega u_\omega = E_\omega u_\omega$  avec  $u_\omega \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  et  $E_\omega \in I$ , alors

$$\exists C > 0, \exists m > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^d, |u_\omega(n)| \leq C e^{-m\|n\|_1},$$

pour presque tout  $\omega \in \Omega$ .

Remarquons que si  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est exponentiellement localisée dans  $I$ , P-presque sûrement le spectre ponctuel de  $H_\omega$  est dense dans  $I$ . Ce phénomène est tout à fait surprenant en comparaison des spectres observés au niveau des atomes ou des molécules ou dans les milieux périodiques sans désordre. Ces spectres, comme par exemple celui de l'hydrogène, font apparaître en général des valeurs propres isolées et éventuellement une composante absolument continue. Les opérateurs de Schrödinger périodiques dont le potentiel périodique vérifie des hypothèses raisonnables (voir [RS78]) ont un spectre purement absolument continu et aucune valeur propre. Le fait d'obtenir un ensemble dense de valeurs propres se retrouve principalement dans les modèles où il y a un désordre, soit de nature aléatoire comme ici, soit par exemple dans les opérateurs quasi-périodiques.

La définition que l'on vient de donner de la localisation d'Anderson est une définition stationnaire, ne mettant en jeu que l'Hamiltonien  $H_\omega$  et non pas le sous-groupe à un paramètre associé. La définition suivante tient compte de la dynamique en temps des paquets d'ondes et se trouve être la définition généralement privilégiée par les physiciens qui étudient le phénomène de localisation.

**Définition 1.1.4.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que la famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  (respectivement  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ ) est **dynamiquement localisée** dans  $I$  lorsque :

1. le spectre de  $H_\omega$  (resp.  $h_\omega$ ) dans  $I$  est non vide pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ ,
2. pour tout intervalle compact  $I_0 \subset I$  et tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\forall p \geq 0, \mathbb{E} \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{p}{2}} e^{-itH_\omega} \mathbf{1}_{I_0}(H_\omega) \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) < +\infty \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{1}_{I_0}(H_\omega)$  désigne le projecteur spectral sur  $I_0$  associé à  $H_\omega$  et  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance prise par rapport à la mesure de probabilité P ;

respectivement, pour tout  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ,

$$\forall p \geq 0, \mathbb{E} \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(1 + \|\cdot\|_1)^p e^{-ith_\omega} \mathbf{1}_I(h_\omega) u\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}^2 \right) < +\infty \quad (1.10)$$

Précisons que dans cette définition,  $e^{-itH_\omega}$  et  $\mathbf{1}_{I_0}(H_\omega)$  (resp.  $e^{-ith_\omega}$  et  $\mathbf{1}_I(h_\omega)$ ) sont définis via le calcul fonctionnel pour les opérateurs auto-adjoints.

Dans le cas discret il n'est pas nécessaire de projeter spectralement sur un sous-intervalle compact de  $I$  car le spectre presque-sûr de  $h_\omega$  est déjà compact si le support de la loi commune des variables aléatoires  $\omega^{(n)}$  est lui-même borné, hypothèse que



l'on fera pour tous les modèles que nous étudierons par la suite. Dans le cas continu, le spectre presque-sûr n'est pas compact.

La définition 1.1.4 est de nature dynamique et suit l'évolution des paquets d'ondes au cours du temps. Elle nous dit que les solutions de l'équation de Schrödinger (1.4) sont localisées dans l'espace au voisinage de leur position initiale et ce, uniformément au cours du temps. Cela traduit l'absence de transport quantique.

Plus précisément, notons  $|x|$  l'opérateur de position, soit l'opérateur de multiplication par  $x \mapsto (1 + \|x\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Pour tout état  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , si on note  $\psi_I(t)$  l'évolution de la projection spectrale de  $\psi$  à l'instant  $t$ , solution de (1.4) avec comme condition initiale  $\psi_0 = \mathbf{1}_{I_0}(H_\omega)\psi$ , alors les moments de l'opérateur de position sont bornés en  $t$  :

$$\exists C_{\psi,I} > 0, \forall p \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \langle \psi_I(t), |x|^p \psi_I(t) \rangle \leq C_{\psi,I}.$$

A contrario, on dira qu'il y a du transport quantique dans un intervalle  $I'$  lorsque

$$\exists \alpha > 0, \exists p \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \langle \psi_{I'}(t), |x|^p \psi_{I'}(t) \rangle \geq |t|^\alpha. \quad (1.11)$$

Enfin, précisons que la localisation dynamique implique la localisation d'Anderson (voir [DS01 ; Sto01]). Il est aussi possible de définir des notions de localisation encore plus fortes. Pour une présentation quasi exhaustive de ces notions nous renvoyons à la troisième partie de [Dis+08] écrite par Abel Klein.

## 1.2 Mise en perspective des travaux présentés

### 1.2.1 Des exposants de Lyapounov à la localisation

Le modèle d'Anderson est activement étudié car il fait l'objet de deux conjectures importantes : celle de l'existence d'une transition de phase isolant/conducteur en dimension supérieure ou égale à 3 et celle qui affirme que cette transition n'existe pas en dimension 1 ou 2.

Du point de vue mathématique, assez peu de réponses sont apportées à ces conjectures, malgré un effort soutenu de la communauté depuis la fin des années 70. La question de la nature du spectre pour le modèle d'Anderson n'est pas aisée. En effet, si le Laplacien a un spectre purement absolument continu, l'opérateur de multiplication par  $V_\omega$  est (dans le cas discret) une matrice aléatoire diagonale et son spectre est donc discret. Les deux effets se contrebalancent lorsque l'on regarde le spectre de la somme de ces deux opérateurs. De nombreux résultats mathématiques sont de nature perturbative et incluent un coefficient mesurant la taille du désordre devant le terme  $V_\omega$ . Lorsque ce paramètre est grand, le potentiel aléatoire l'emporte sur le Laplacien et a priori il y aura localisation. Lorsque ce paramètre est petit, c'est l'inverse. Intuitivement, plus le désordre est grand, plus il y a de chance de voir apparaître des états localisés.

Le cas de la dimension 1 d'espace à valeurs scalaires est le seul à être complètement résolu à ce jour : quel que soit l'aléa apparaissant au travers des variables aléatoires  $\omega^{(n)}$  dans (1.2) et (1.3) et quelle que soit la valeur du paramètre de désordre

$\lambda > 0$ , il y a localisation à toutes les énergies dans le cas discret ([KS80; CKM87]) et à toutes les énergies hors d'un ensemble discret dans le cas continu ([DSS02]).

Dans le cas continu et toujours en dimension 1, les premiers résultats de localisation ont été obtenus pour des modèles dont le potentiel n'est pas exactement le potentiel d'Anderson tel que nous l'avons présenté, mais un processus aléatoire de type brownien ou "bruit blanc". Il s'agit de l'article de Goldsheid, Molchanov et Pastur en 1977 (voir [GMP77]) puis de l'article de Carmona en 1982 (voir [Car82]). Ce type de modèle a été un temps écarté au profit des modèles d'Anderson "classiques", mais depuis peu, un retour aux sources a lieu dans les travaux de Dumaz et Labbé qui ont repris cette étude du point de vue probabiliste dans [DL20; DL21a; DL21b].

En dimension supérieure, la localisation est démontrée pour de nombreux modèles, soit pour toutes les énergies dès lors que le désordre est assez grand, soit pour les énergies proches du bas du spectre ou des bords des bandes spectrales, pour toute valeur strictement positive du paramètre de désordre. En dimension supérieure à 2, il y a toujours un effet de balance entre la taille de l'intervalle d'énergie sur lequel il y a localisation et la taille du paramètre mesurant le désordre.

Le premier résultat de localisation en dimension arbitraire est celui de Fröhlich et Spencer dans [FS83] où ils introduisent la technique de l'analyse multi-échelle pour démontrer l'annulation de la conductivité à toute énergie pour un paramètre de désordre grand, dans le cas d'un opérateur d'Anderson discret et pour un aléa donné par des variables aléatoires à densité. Cette démonstration a été simplifiée par Klein et von Dreifus dans [DK89].

Dans le cas continu, à ma connaissance, le premier résultat de localisation en dimension  $d \geq 2$  est un résultat de localisation au bas du spectre pour un potentiel à un site constant dû à Martinelli et Holden ([MH84]). Il sera suivi de plusieurs résultats du même type, par Martinelli et Scoppola [MS85] ou Kotani et Simon [KS87b] qui se basent sur l'adaptation de la méthode d'analyse multi-échelle au cas des opérateurs continus (voir [Frö+85]). Puis viendront les résultats de localisation au bas du spectre pour des potentiels à un site généraux et de l'aléa régulier obtenus par Combes et Hislop [CH94], puis par Klopp [Klo95].

Si l'on revient à l'origine du modèle d'Anderson, à savoir étudier le transport électronique dans des métaux contenant des impuretés, comme par exemples des alliages, il est essentiel d'obtenir des résultats dans le cas où les variables aléatoires  $\omega^{(n)}$  du potentiel d'Anderson sont des variables de Bernoulli. Mais très peu de résultats de localisation existent dans ce cadre. Le premier de ces résultats est celui de Carmona, Klein et Martinelli pour un modèle d'Anderson discret en dimension 1 [CKM87]. Puis vint l'article de Klein, Lacroix et Speis [KLS90] traitant de la localisation pour un modèle discret en dimension 1 mais à valeurs matricielles. Le cas continu en dimension 1 n'a été résolu qu'en 2002 avec l'article de Damanik, Sims et Stolz [DSS02]. Dans ces trois articles, le fait d'avoir des modèles en dimension 1 conduit à de la localisation à toute énergie (hors d'un ensemble discret dans [DSS02]) et à ne pas avoir besoin d'introduire un paramètre de grand désordre.

En dimension supérieure, Bourgain et Kenig ont démontré en 2005 dans [BK05] la localisation en bas du spectre pour un opérateur continu, là encore sans rien supposer sur un paramètre de désordre. Leur preuve repose sur une adaptation de l'analyse multi-échelle dite "bootstrap", ainsi que sur un principe de continuation uniforme qui n'était valide que pour les opérateurs continus. La localisation pour les opérateurs d'Anderson-Bernoulli discrets en dimension  $d \geq 2$  est restée ouverte

jusqu'à il y a peu avec un premier résultat de Ding et Smart en dimension 2 (voir [DS20]). Ils sont parvenus à démontrer un principe de continuation uniforme adapté à la forme du réseau  $\mathbb{Z}^2$  et reposant sur une combinatoire subtile. Ce résultat vient d'être étendu à la dimension 3 par Li et Zhang en 2022 [LZ22].

La question de la transition métal/isolant en dimension  $d \geq 3$ , et par là l'existence d'états délocalisés ou plus simplement de spectre absolument continu, est largement ouverte. Pour le modèle d'Anderson classique, elle est totalement ouverte ce qui n'est pas en contradiction avec les résultats de localisation existant. Nous savons sous quelles hypothèses la localisation apparaît, mais nous ne savons pas si en dehors des intervalles de localisation il y a réellement existence d'états délocalisés ou non.

Il existe d'autres modèles pour lesquels cette transition est démontrée mathématiquement. Caractérisée à l'aide de coefficients de transport, elle a par exemple été obtenue par Germinet, Klein et Schencker pour l'Hamiltonien de Landau aléatoire au voisinage de chaque niveau de Landau dans [GKS07]. Elle apparaît également dans le cas d'un modèle de polymère étudié par Jitomirskaya, Schulz-Baldes et Stolz [JSS03].

Cette transition est également démontrée pour le modèle d'Anderson sur le réseau de Bethe, tout d'abord par Klein dans [Kle98] sous la forme d'existence de spectre absolument continu pour un petit désordre. Puis, plusieurs résultats de délocalisation sur les graphes quantiques ont été obtenus, parmi lesquels Aizenmann, Sims et Warzel [ASW06], Aizenmann et Warzel [AW13] ou Anantharaman et Sabri [AS19].

Le cas de la dimension 2 est particulier. Nous restreignons notre discussion au cas des opérateurs d'Anderson-Bernoulli. A priori, en dimension 2, il n'y a pas de transition localisation/délocalisation ce qui fait que la dimension critique pour cette transition est la dimension 3. Il est donc conjecturé que la localisation ait lieu à toutes les énergies indépendamment de la valeur du paramètre du désordre, comme en dimension 1. Toutefois, il n'est pas impossible que le spectre restant purement ponctuel à toutes les énergies, les fonctions propres ne soient plus exponentiellement décroissantes aux grandes énergies et que cela introduise une transition au niveau du transport quantique comme dans le cas de l'Hamiltonien de Landau évoqué plus haut (voir [GKS07]). La seule chose connue est la localisation au bas du spectre dans les cas continu et discret [BK05; DS20].

La question de la localisation en dimension 2 pour le modèle d'Anderson Bernoulli à toutes les énergies a été le point de départ de ma thèse de doctorat. Bien entendu, cette question s'est révélée bien trop ardue pour être abordée de front et la première simplification possible est de considérer non pas le modèle d'Anderson sur tout  $\mathbb{R}^2$  mais seulement sur une bande continue  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ .

Reprenons les notations introduites en (1.1). On considère l'opérateur agissant sur  $L^2(\mathbb{R} \times [0, 1]) \otimes \mathbb{C}$  et défini pour tout  $\omega \in \Omega$  par

$$H_{bc,\omega} = -\Delta_2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega^{(n)} V(x - n, y), \quad (1.12)$$

avec conditions de Dirichlet aux bords  $\mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\mathbb{R} \times \{1\}$  et  $V$  est à support dans  $[0, 1]^2$ .

A priori, la question de la localisation à toutes les énergies pour  $\{H_{bc,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  présente des difficultés comparables à celles rencontrées dans l'étude de l'opérateur

d'Anderson-Bernoulli sur  $\mathbb{R}^2$ , du fait que les deux problèmes relèvent de la théorie des équations aux dérivées partielles et que l'on ne peut donc pas les aborder à l'aide d'outils spécifiques à la dimension 1.

Toutefois, avec  $\{H_{bc,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ , il est possible d'opérer une discrétisation dans la direction bornée  $[0, 1]$  de la bande. Pour cela on fait une transformée de Fourier en la seconde variable, ce qui conduit à regarder un modèle continu dans une direction et discret dans la seconde, agissant donc sur un espace  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$  au lieu de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Formellement, on s'est donc ramené à un opérateur d'Anderson continu en dimension 1 dont le potentiel est matriciel de taille infinie. Bien entendu, ce modèle est encore essentiellement un modèle en dimension 2 et pour passer à un modèle unidimensionnel, on se restreint à une taille finie pour le potentiel matriciel en ne conservant qu'un intervalle borné de fréquences de Fourier dans la deuxième variable. On obtient alors un modèle d'Anderson en dimension 1 dont le potentiel est matriciel de taille quelconque mais finie. Il agit donc sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ , où  $N \geq 1$  est un entier. Cela transforme le problème d'équation aux dérivées partielles initial en un problème de système différentiel pour lequel nous allons pouvoir utiliser les techniques issues des systèmes dynamiques en dimension 1 que sont les matrices de transfert et les exposants de Lyapounov. L'espoir est alors d'obtenir la localisation pour ce modèle unidimensionnel à valeurs matricielles avec des intervalles de localisation et des longueurs de localisation au mieux indépendants de  $N$ , au pire avec un bon contrôle sur ces quantités lorsque  $N$  tend vers l'infini. Nous verrons dans la suite que cet espoir est très loin de se concrétiser, en particulier lorsque l'on abordera la question du comportement de la densité d'états intégrée au bas du spectre dans la Section 3.4.

L'étude de ce modèle d'Anderson-Bernoulli en dimension 1 dont le potentiel est à valeurs matricielles entre dans un cadre plus général que nous définissons maintenant.

**Définition 1.2.1.** Soient  $N \geq 1$  un entier et  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité complet. Nous appelons **modèle quasi-unidimensionnel** toute famille mesurable d'opérateurs agissant sur  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$  (modèle discret) ou  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  (modèle continu) et indexée par  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Dans cette définition, nous aurions pu préciser "modèle quasi-unidimensionnel aléatoire" car nous ne regardons que le cas de familles aléatoires. Toutefois, ce type de définition pourrait aussi être transposée à tout opérateur agissant sur  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$  où  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  voire à des familles d'opérateurs quasi-périodiques agissant sur ces espaces et dépendant d'un paramètre de fréquence par exemple. Nous faisons le choix de ne considérer que le cas aléatoire dès la définition car nous ne traiterons que de ce cas dans la suite.

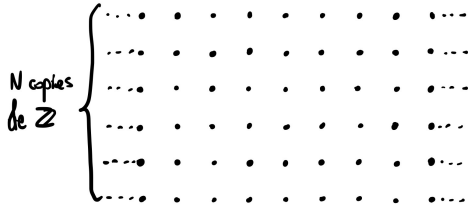


Fig. 3. Cas discret :  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$

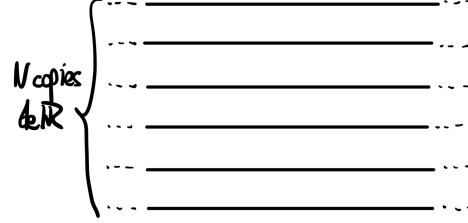


Fig. 4. Cas continu :  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$

Un modèle quasi-unidimensionnel peut être vu comme agissant sur  $N$  copies de  $\mathbb{Z}$  (cas discret) ou  $N$  copies de  $\mathbb{R}$  (cas continu). Dans la suite, les modèles étudiés coupleront ces  $N$  copies au travers de potentiels matriciels non diagonaux. Cela fait que ces modèles quasi-unidimensionnels ne se ramèneront pas trivialement à une somme directe de modèles unidimensionnels à valeurs scalaires.

La définition adoptée pour la notion de modèle quasi-unidimensionnel recouvre un grand nombre de situations possibles. Parmi celles-ci, je retiens quatre types de modèles dont je parlerai dans la suite de ce mémoire.

1. **Le type Schrödinger discret** : les opérateurs agissent sur  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$  et sont de la forme

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N, \forall n \in \mathbb{Z}, (h_\omega u)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega(n)} u_n$$

où  $(V_{\omega(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , prenant ses valeurs dans l'espace des matrices symétriques réelles de taille  $N \times N$ . Ce type inclut les modèles d'Anderson unidimensionnel et quasi-unidimensionnels présentés à la Section 2.2.

2. **Le type Schrödinger continu** : les opérateurs agissent sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  et sont de la forme

$$H_\omega = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V_{\text{per}} + V_\omega$$

où  $V_{\text{per}}$  est un potentiel d'interaction périodique et  $V_\omega$  est un potentiel aléatoire, les deux prenant leurs valeurs dans l'espace des matrices symétriques réelles de taille  $N \times N$ . Ce type inclut les modèles d'Anderson continus ainsi que les modèles d'interactions ponctuelles (formellement pour ces derniers), unidimensionnels ou quasi-unidimensionnels, que nous étudierons à la Section 2.2.

3. **Le type unitaire** : au Chapitre 4 nous présentons le modèle de scattering zipper aléatoire qui agit sur  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$  et qui est donné par une famille aléatoire d'opérateurs unitaires à coefficients matriciels.
4. **Le type Dirac** : les opérateurs agissent sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  et sont de la forme

$$D_\omega = \left( \begin{array}{cc} 0 & -\frac{d}{dx} \otimes I_N \\ \frac{d}{dx} \otimes I_N & 0 \end{array} \right) + V_{\text{per}} + V_\omega$$

où  $V_{\text{per}}$  est un potentiel périodique, combinaison linéaire de matrices de Pauli tensorisées et  $V_\omega$  est un potentiel aléatoire, produit tensoriel de matrices de Pauli et de blocs matriciels aléatoires. Ce modèle, en cours d'étude en collaboration avec Sylvain Zalczer, sera présenté dans la Section 2.4.

Les modèles de type Schrödinger, discrets ou continus, décrivent le transport électronique dans  $N$  couches unidimensionnelles, a priori en interaction. Un électron peut donc “sauter” d’une couche à l’autre et sur chaque couche il peut ou non rencontrer en chaque point entier une impureté.

Pour aborder la question de la localisation d’Anderson pour des modèles quasi-unidimensionnels de type Schrödinger, on peut commencer par regarder les conditions de la décroissance exponentielle des fonctions propres pour ces modèles. Nous sommes alors amenés à étudier le comportement asymptotique d’une équation linéaire d’ordre 2, soit aux différences finies dans le cas discret, soit différentielle dans le cas continu.

Soit  $N \geq 1$ . Soit  $E \in \mathbb{R}$ . Dans le cas discret on étudie le comportement asymptotique exponentiel des suites  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$  qui vérifient

$$h_\omega u = Eu \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{Z}, -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega^{(n)}} u_n = E u_n. \quad (1.13)$$

Dans le cas continu on étudie le comportement asymptotique exponentiel des fonctions  $u \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  qui vérifient

$$H_\omega u = Eu \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, -u''(x) + (V_{\text{per}} + V_\omega)(x)u(x) = Eu(x). \quad (1.14)$$

Nous ne cherchons pas un équivalent précis de  $u$  à l’infini mais simplement à savoir si asymptotiquement  $u$  se comporte comme une exponentielle. Cette remarque permet de ramener l’étude du comportement asymptotique exponentiel en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) de  $u$  à l’étude des sauts successifs du site  $n$  au site  $n+1$  (resp.  $-n$  à  $-n-1$ ) pour tout entier naturel  $n$ . Cela conduit à introduire la notion de matrice de transfert et à appliquer l’idée de transformer une équation linéaire d’ordre 2 en un système d’ordre 1.

Tout d’abord, dans le cas discret, l’équation (1.13) est équivalente au système

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\omega^{(n)}} - E & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Posons alors :

$$T_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} V_{\omega^{(n)}} - E & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , la matrice  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  est appelée **matrice de transfert** de  $n$  à  $n+1$ . La suite  $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de matrices aléatoires dans  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ , le groupe symplectique d’ordre  $N$  (voir définition 2.1.8). Si on suppose de plus que  $(V_{\omega^{(n)}})_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors la suite  $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n \in \mathbb{Z}}$  l’est aussi.

Par itération de (1.15), le comportement asymptotique en  $+\infty$  de  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  se ramène à celui du produit  $T_{\omega^{(n)}}(E) \cdots T_{\omega^{(0)}}(E)$ , et celui en  $-\infty$  se ramène au produit  $(T_{\omega^{(-n+1)}}(E))^{-1} \cdots (T_{\omega^{(-1)}}(E))^{-1}$  via

$$\forall n \geq 0, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E) \cdots T_{\omega^{(0)}}(E) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

et

$$\forall n < 0, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = (T_{\omega(-n+1)}(E))^{-1} \cdots (T_{\omega(-1)}(E))^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Dans le cas continu, l'équation (1.14) est équivalente au système différentiel

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ V_{\text{per}} + V_\omega - E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on introduit alors la **matrice de transfert** de  $n$  à  $n + 1$ , que l'on note encore  $T_{\omega^{(n)}}(E)$ , comme étant l'application qui envoie une solution  $(u, u')$  du système (1.19) au temps  $n$  sur la solution au temps  $n + 1$ . La matrice de transfert  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  est ainsi définie par la relation

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u'(n+1) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E) \begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Comme  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  est la solution d'un système Hamiltonien d'ordre 1 au temps 1,  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  appartient à  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ . De plus, on supposera que le processus  $(V_{\omega^{(n)}})_{n \in \mathbb{Z}}$  est tel que la suite  $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de matrices aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Ce sera le cas pour les modèles d'Anderson quasi-unidimensionnels ou à interactions ponctuelles étudiés dans la suite.

Nous sommes donc ramenés, dans les cas discret et continu, à étudier le comportement asymptotique d'une suite de matrices aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous verrons à la Section 2.1 comment associer à une telle suite de matrices aléatoires un ou des exposants de Lyapounov via une formule du type :

$$\gamma(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} (\log (||T_{\omega^{(n)}}(E) \cdots T_{\omega^{(0)}}(E)||)). \quad (1.21)$$

Cet exposant mesure le taux de croissance ou de décroissance exponentielle à l'infini du produit des matrices de transfert. La décroissance exponentielle des fonctions propres étudiées se ramène donc dans un premier temps à la stricte positivité des exposants de Lyapounov. Nous verrons à la Section 2.3.1 que cette stricte positivité n'implique que l'absence de spectre absolument continu et que pour réellement obtenir de la localisation d'Anderson il faut travailler bien plus. Mais, dans une première approche naïve, la stricte positivité des exposants de Lyapounov est la question à étudier.

Intuitivement, pour espérer obtenir dans la formule (1.21) une limite strictement positive, il faut s'assurer que lorsque le paramètre aléatoire varie, un grand nombre de produits de matrices de transfert ont une norme suffisamment grande pour qu'en moyenne et après division par  $n$ , la limite ne soit pas nulle. Par exemple, si tous les produits de matrices de transfert sont bornés, la limite dans (1.21) sera automatiquement nulle. Il nous faut donc étudier l'ensemble qui contient tous les produits de matrices de transfert lorsque le paramètre aléatoire varie.

Nous avons supposé plus haut que les matrices de transfert sont indépendantes et identiquement distribuées. Notons  $\mu_E$  la loi commune de ces matrices de transfert.

Le support de  $\mu_E$  nous donne l'ensemble des valeurs que peut prendre une matrice de transfert lorsque l'on fait varier le paramètre aléatoire. Si l'on veut ensuite faire des produits de telles matrices, l'objet algébrique naturel à considérer est le groupe engendré par le support de  $\mu_E$ .

**Définition 1.2.2.** *Le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  associé à la suite de matrices de transfert  $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n \in \mathbb{Z}}$  est l'adhérence du groupe engendré par le support de la loi commune des  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  :*

$$G_{\mu_E} = \overline{\langle \text{supp } \mu_E \rangle}.$$

Nous choisissons d'inclure l'adhérence pour la topologie induite par la topologie usuelle sur l'espace des matrices dans la définition du groupe de Fürstenberg car cela permet d'en faire un sous-groupe fermé du groupe linéaire  $GL_N(\mathbb{R})$ , donc un groupe de Lie. Dans la suite il est essentiel que le groupe de Fürstenberg soit muni d'une structure de groupe de Lie linéaire, cela permettant d'utiliser toutes les techniques propres à ces groupes, en particulier d'utiliser leur algèbre de Lie.

La stricte positivité des exposants de Lyapounov se ramène à l'étude de la "taille" du groupe de Fürstenberg. Si ce groupe est suffisamment gros en un sens à préciser, il y aura stricte positivité et séparabilité des exposants de Lyapounov. Nous détaillons à la Section 2.2 les propriétés topologiques et géométriques que doit vérifier le groupe de Fürstenberg pour s'assurer de cette positivité des exposants de Lyapounov.

Revenons à notre question initiale, la localisation d'Anderson pour des modèles d'Anderson unidimensionnels ou quasi-unidimensionnels mettant en jeu des variables aléatoires de Bernoulli.

Le premier résultat de localisation pour un modèle d'Anderson-Bernoulli en dimension 1 est celui de Carmona, Klein et Martinelli pour un modèle discret à valeurs scalaires dans [CKM87]. Le deuxième résultat est celui de Klein, Lacroix et Speis pour un modèle quasi-unidimensionnel discret dans [KLS90]. Le troisième résultat de référence est celui de Damanik, Sims et Stolz pour un modèle continu à valeurs scalaires dans [DSS02].

De ces trois articles, on peut extraire un schéma général de preuve de la localisation pour les modèles d'Anderson-Bernoulli en dimension 1 :

1. Démontrer que le groupe de Fürstenberg satisfait aux hypothèses d'un théorème de type Fürstenberg assurant non seulement la séparabilité des exposants de Lyapounov mais aussi l'existence d'une mesure invariante permettant d'exprimer ces exposants sous forme d'une intégrale (voir Théorème 2.3.8).
2. Dédire de cette représentation intégrale la régularité Höldérienne des exposants de Lyapounov sur tout intervalle d'énergies où le groupe de Fürstenberg satisfait aux bonnes hypothèses (voir Théorème 2.3.9).
3. En déduire, à l'aide d'une formule de Thouless adaptée au modèle étudié, la même régularité Höldérienne pour la densité d'états intégrée (voir Théorème 3.2.4).
4. En se basant sur cette régularité Höldérienne de la densité d'états intégrée, obtenir une estimée de Wegner faible adaptée à l'aléa de Bernoulli (voir Théorème 2.3.10).
5. Appliquer enfin un schéma d'analyse multi-échelle.



Dans les trois cas, le point de départ est l'étude du groupe de Fürstenberg et on peut extraire un résultat du type :

Si le groupe de Fürstenberg vérifie les hypothèses permettant d'appliquer un théorème assurant la stricte positivité des exposants de Lyapounov, il y a localisation pour la famille ergodique d'opérateurs étudiée.

J'ai démontré dans [Bou09b] un tel critère algébrique permettant d'obtenir la localisation, aussi bien d'Anderson que dynamique, dans le cas des opérateurs d'Anderson - Bernoulli continus quasi-unidimensionnels. Je détaille la présentation de ce résultat dans la Section 2.3.2 du Chapitre 2.

Notons ici que dans le cas de l'aléa de Bernoulli, l'emploi de l'analyse multi-échelle s'impose a priori. C'était tout du moins le cas à l'époque où les résultats de [CKM87; KLS90; DSS02] ainsi que mes résultats de localisation obtenus dans [Bou09b; Bou13] ont été publiés. Je reviendrai sur ce point à la fin de cette section, mais précisons déjà qu'il est possible en général d'aborder la question de la localisation autrement que par le biais de l'analyse multi-échelle.

L'analyse multi-échelle est une technique de démonstration par récurrence sur la taille d'un cube de volume fini qui permet le contrôle de la fonction de Green associée à l'opérateur restreint à ce cube. Plus précisément, elle permet de contrôler la décroissance des termes hors diagonaux de cette fonction de Green lorsque l'on s'éloigne de la diagonale, et ce avec une probabilité proche de 1. C'est une technique inspirée directement de la méthode KAM utilisée en systèmes dynamiques. Son champ d'application est vaste et permet aussi bien de traiter des opérateurs aléatoires que des opérateurs quasi-périodiques. Elle a été introduite dans [FS83] puis continuellement améliorée jusqu'à aboutir à une forme relativement définitive présentée dans [GK01; Kle08].

Toutefois, sa mise en oeuvre peut se révéler ardue et, si on se restreint au cas du modèle d'Anderson, il peut être plus aisé d'utiliser la méthode des moments fractionnaires introduite par Aizenmann et Molchanov en 1993 dans le cas discret (voir [AM93]) et étendue au cas continu en 2003 (voir [Sto+05]). Cette méthode a été spécifiquement développée pour traiter de la localisation pour des modèles aléatoires de type Anderson. Pour une présentation élémentaire de cette technique dans le cadre de la dimension 1 nous renvoyons à [HSS10].

La méthode des moments fractionnaires repose sur une estimée des puissances strictement plus petites que 1 de la norme des termes hors diagonaux de la résolvante. La méthode des moments fractionnaires donne une démonstration plus rapide et des estimées plus précises pour la localisation dynamique, mais pour l'appliquer, il faut supposer que les variables aléatoires intervenant dans le potentiel d'Anderson ont une densité vérifiant certaines propriétés. Ceci exclut le cas des variables de Bernoulli qui nous intéresse ici.

Une fois obtenu un critère de localisation qui se ramène aux propriétés algébriques du groupe de Fürstenberg, il reste à étudier ce groupe pour les modèles qui nous intéressent, ce qui est fait en détails dans la Section 2.2.

Dans le cas scalaire ( $N = 1$ ), le théorème de Fürstenberg assure que l'exposant de Lyapounov est strictement positif dès lors que le groupe de Fürstenberg est non compact et fortement irréductible (voir Définition 2.2.1). En montrant ces deux propriétés, la localisation est obtenue dans le cas discret dans [CKM87]. Le même théorème de Fürstenberg est utilisé pour démontrer la localisation dans le cas continu à va-

leurs scalaires dans [DSS02]. Dans ce cas, la vérification des hypothèses du théorème de Fürstenberg conduit à devoir exclure un ensemble discret d'énergies.

Dans le cas discret quasi-unidimensionnel il serait possible en théorie de vérifier les hypothèses de la généralisation du théorème de Fürstenberg au cas des suites de matrices dans le groupe symplectique obtenue par Guivarch et Raugi dans [GR85], en démontrant que le groupe de Fürstenberg est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p$  (voir définitions 2.2.5 et 2.2.8). Mais il est très difficile de les vérifier à la main et il est nettement plus simple d'appliquer le critère de Goldsheid et Margulis (voir [GM89]) dont on déduit que si le groupe de Fürstenberg est Zariski-dense dans le groupe symplectique, alors il est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p$ . C'est dans ce même article [GM89] que les auteurs démontrent que le groupe de Fürstenberg associé au modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel est Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Ce résultat sera utilisé dans [KLS90] pour démontrer la localisation pour ce modèle. Le critère de Goldsheid et Margulis constitue un premier raffinement algébrique utile (voire nécessaire) pour étudier le groupe de Fürstenberg dans le cas quasi-unidimensionnel ( $N \geq 1$ ).

Pour obtenir un premier résultat sur le groupe de Fürstenberg associé à un modèle quasi-unidimensionnel continu, il faudra attendre 2007 et l'article [BS07] écrit avec Günter Stolz. Cet article traite de la positivité des exposants de Lyapounov pour un modèle d'Anderson-Bernoulli continu et quasi-unidimensionnel dans le cas de deux couches en interactions ( $N = 2$ ). L'étude de la Zariski-densité du groupe de Fürstenberg est calquée sur la construction de Goldsheid et Margulis dans le cas discret et conduit à l'existence d'un ensemble dénombrable, a priori dense, d'énergies à exclure (voir détails à la Section 2.2.2.4). Cela est suffisant pour conclure à l'absence de spectre absolument continu mais ne l'est pas pour démarrer le schéma de preuve par analyse multi-échelle présenté plus haut. La principale difficulté dans l'étude de ce modèle tient au fait que les matrices de transfert ne sont pas aussi simples que dans le cas discret puisqu'elles apparaissent sous la forme d'exponentielles de matrices dans lesquelles les paramètres aléatoires et l'énergie ne sont pas découplés. Cela nous conduit à des restrictions sur le domaine d'énergie pour n'avoir à travailler qu'avec des matrices elliptiques et pouvoir utiliser un argument de fréquences rationnellement liées dans des cosinus et sinus et de trajectoires denses sur le tore pour construire certains éléments du groupe de Fürstenberg. C'est ce point qui induit l'ensemble dénombrable et non discret d'énergies à éviter.

En parallèle de ce premier résultat, j'ai obtenu avec Stolz dans [BS07] un résultat de positivité des exposants de Lyapounov pour un modèle d'interactions ponctuelles quasi-unidimensionnel pour  $N = 2$ , puis un résultat analogue dans le cas  $N = 3$  publié dans [Bou09a]. Pour ce modèle, intermédiaire entre les cas discret et continu, les matrices de transfert sont un produit de deux matrices, une exponentielle de matrice qui ne dépend que de l'énergie et une matrice ressemblant aux matrices de transfert dans le cas discret ne faisant intervenir que l'aléa. Cela permet d'obtenir un résultat de positivité des exposants de Lyapounov à toutes les énergies hors d'un ensemble discret (car le modèle reste fondamentalement continu), en adaptant là encore la construction faite par Goldsheid et Margulis.

Pour dépasser la difficulté rencontrée dans [BS07], il a fallu trouver un nouveau raffinement algébrique permettant de prouver la Zariski-densité hors d'un ensemble discret d'énergies. Ce raffinement est donné par un résultat abstrait sur les groupes de Lie topologiquement parfaits et est dû à Breuillard et Gelander (voir [BG03] et Théorème 2.2.16). Ce théorème affirme que dans un tel groupe de Lie il existe un voisinage de l'identité dans lequel l'exponentielle est un difféomorphisme entre l'al-

gèbre de Lie et le groupe de Lie (ainsi le logarithme est bien défini) et qu'un nombre fini d'éléments dans ce voisinage engendrent un sous-groupe dense si et seulement si leurs logarithmes engendrent l'algèbre de Lie toute entière ("engendrer" signifie ici que l'on s'autorise les crochets de Lie et les combinaisons linéaires). Ce résultat permet de montrer la densité du groupe du Fürstenberg (donc le fait qu'il est égal au groupe symplectique puisqu'il est fermé pour la topologie usuelle) et non plus seulement la Zariski-densité.

En utilisant ce critère de Breuillard et Gelander, l'étude du groupe de Fürstenberg se fait en quatre étapes :

1. On calcule explicitement les matrices de transfert.
2. On construit des éléments du groupe de Fürstenberg qui sont dans le voisinage de l'identité donné par le théorème de Breuillard et Gelander.
3. On calcule les logarithmes de ces éléments.
4. On démontre que ces logarithmes engendrent l'algèbre de Lie du groupe symplectique.

En appliquant ces étapes au modèle d'Anderson-Bernoulli étudié dans [BS07], j'ai obtenu dans [Bou07] le fait que le groupe de Fürstenberg est égal au groupe symplectique d'ordre 2 pour toute énergie plus grande que 2 (pour être dans le cas elliptique) et hors d'un ensemble discret d'énergies. Dans [Bou07], j'ai toujours des matrices de transfert qui sont des exponentielles liant l'aléa et l'énergie ce qui oblige à se restreindre au cas elliptique (où le calcul de l'exponentielle ne conduit qu'à des coefficients en sinus et cosinus) pour pouvoir utiliser un argument d'approximation diophantienne simultanée et pour obtenir que des puissances bien choisies des matrices de transfert sont dans le voisinage de l'identité de Breuillard et Gelander. Ces puissances vont induire des termes parasites dans les expressions des logarithmes du fait d'un problème de détermination principale ( $\log(\exp(M)) \neq M$ ). Ces termes parasites font que la démonstration du fait que les logarithmes engendrent l'algèbre de Lie du groupe symplectique d'ordre 2 doit se faire complètement à la main et que cette construction ne semble pas pouvoir s'étendre à un  $N \geq 1$  quelconque.

Pour espérer obtenir un résultat de localisation pour  $N \geq 1$  arbitraire dans les cas des opérateurs d'Anderson-Bernoulli continus quasi-unidimensionnels, on se résout à introduire un paramètre de grand désordre. En effet, les résultats de [CKM87; GM89; DSS02; BS07; Bou07; Bou09a] sont tous valides sans qu'aucun paramètre de mesure du désordre ne soit introduit. Le paramètre  $\ell > 0$  introduit dans [Bou09b] permet de calculer le groupe de Fürstenberg associé à la famille  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  définie en (2.7). En choisissant  $\ell > 0$  suffisamment petit et l'énergie pas trop grande, on parvient à démontrer que les matrices liant l'énergie et l'aléa, dont les matrices de transfert sont l'exponentielle, sont dans l'image par le logarithme du voisinage de l'identité donné par le théorème de Breuillard et Gelander. De là, on en déduit immédiatement les points 2 et 3 de notre construction. Le calcul des logarithmes est immédiat puisque sur le voisinage de Breuillard et Gelander l'exponentielle est un difféomorphisme et il n'y a plus de termes parasites dans ces logarithmes. On peut alors aisément reconstruire l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$  de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  avec ces logarithmes et achever le calcul du groupe de Fürstenberg. Le fait que le groupe de Fürstenberg est égal à  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  est valable pour toutes les énergies dans un intervalle compact dépendant du paramètre de désordre  $\ell$  et cet intervalle ne contient donc aucune énergie critique, comme dans le cas discret. De plus, cet intervalle tend vers toute la droite réelle lorsque  $\ell$  tend vers 0.

Enfin, en remarquant que le fait que les logarithmes engendrent l'algèbre de Lie du groupe symplectique est une condition purement algébrique, j'en ai déduit dans [Bou13] que l'on peut étendre la construction faite dans [Bou09b] pour un potentiel d'interaction  $V_0$  particulier à un potentiel d'interaction constant mais générique dans l'espace des matrices symétriques réelles. Cette fois il faut par contre exclure un ensemble fini d'énergies qui correspond aux éventuels zéros d'un polynôme réel en une variable (voir Section 2.2.3.4).

Il peut paraître surprenant que l'approche algébrique, au travers des groupes et algèbres de Lie, soit présente de manière aussi centrale dans l'étude d'opérateurs différentiels aléatoires. Deux raisons peuvent être invoquées pour expliquer cela. Tout d'abord, pour aborder les modèles d'Anderson-Bernoulli dont l'aléa est singulier, il n'est pas possible de se reposer uniquement sur des techniques classiques d'analyse harmonique comme par exemple la moyennisation spectrale. Ensuite, la présence de potentiels à valeurs matricielles implique que quelque part dans l'analyse faite, des questions de non-commutativité vont se poser. Il n'est a priori pas évident de traiter ces questions uniquement par le prisme de l'analyse et il n'est donc pas si surprenant qu'apparaisse la structure d'algèbre de Lie avec ses crochets de Lie qui traduisent la non-commutativité. Enfin, une autre difficulté liée à ces modèles à valeurs matricielles tient à l'absence de monotonie de la famille ergodique d'opérateurs (au sens des formes quadratiques associées) par rapport au paramètre aléatoire  $\omega$ . Cela implique que l'on ne peut pas obtenir directement une estimée de Wegner et va dans le sens d'obtenir une telle estimée par le chemin détourné de la régularité de la densité d'états intégrée, obtenue en dimension 1 à l'aide d'une formule de Thouless. Nous en reparlerons dans la Section 2.3.2, mais là encore, cela indique que le point de départ d'une preuve de la localisation pour des modèles quasi-unidimensionnels est l'étude des exposants de Lyapounov associés, donc du groupe de Fürstenberg.

L'analyse multi-échelle est une procédure difficile à mettre en oeuvre et qui nécessite la démonstration de plusieurs estimées intermédiaires comme celle de Wegner ou l'estimée de pas initial. Dans le cas des opérateurs unidimensionnels, il est légitime de se demander si une approche plus directe fondée uniquement sur l'étude de la suite des matrices de transfert et sur la preuve d'inégalités de grandes déviations pour cette suite, peut conduire à la localisation. Cette démarche a été adoptée avec succès dans [Buc+19a; Buc+19b] et dans [JZ19] et donne une démonstration plus élémentaire de la localisation en dimension 1. Notons également la démonstration purement dynamique de la localisation d'Anderson dans [GK21] qui repose sur une version paramétrique du théorème de Fürstenberg. Mentionnons enfin une preuve récente de la localisation pour une généralisation du modèle discret quasi-unidimensionnel dans [MS21] qui s'appuie sur les mêmes techniques que [Buc+19a; JZ19].

Je termine cette section en mentionnant le fait que je n'ai pas du tout évoqué les modèles proches du modèle d'Anderson que sont les modèles de Poisson ou de déplacement aléatoire. Bien que plusieurs résultats de localisation existent pour ces modèles, mes travaux ne s'inscrivant pas dans ces cadres, je n'en parlerai pas dans ce mémoire.

### 1.2.2 La densité d'états intégrée

Au Chapitre 3, nous étudierons la mesure densité d'états ainsi que sa fonction de répartition, la densité d'états intégrée, pour des opérateurs de type Schrödinger à valeurs matricielles.

La densité d'états intégrée est une fonction de comptage des niveaux d'énergie situés sous une valeur fixée d'énergie  $E$ . Ce nombre correspond au nombre maximal d'électrons d'énergie plus petite que  $E$  d'après le principe d'exclusion de Pauli. Pour des opérateurs dont le spectre est continu ou dense, la question de l'existence d'une telle fonction se pose car une définition naïve conduit inmanquablement à définir une fonction valant l'infini en tout point au-delà du bas du spectre. Pour contourner cette difficulté, on définit la densité d'états intégrée à l'aide d'une limite thermodynamique.

Plus précisément, considérons un opérateur  $H$  auto-adjoint agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  (respectivement  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ), pour  $d \geq 1$ . Commençons par restreindre  $H$  à des cubes de volume fini dans  $\mathbb{R}^d$  (respectivement  $\mathbb{Z}^d$ ). Soit  $L$  un entier plus grand que 1 et soit  $\Lambda = [-L, L]^d \subset \mathbb{R}^d$  (respectivement  $\{-L, \dots, L\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ ) le cube centré en 0 et de côté  $2L$  (respectivement de côté ayant  $2L + 1$  points). Soit  $H^{(\Lambda)}$  la restriction de  $H$  agissant sur  $L^2(\Lambda)$  avec conditions de Dirichlet au bord de  $\Lambda$ .

La **densité d'état intégrée** de  $H$  est la fonction croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $E \mapsto N(E)$  où pour tout réel  $E$ ,  $N(E)$  est défini comme la limite thermodynamique :

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \# \left\{ \lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H^{(\Lambda)}) \right\}$$

où  $|\Lambda|$  est le volume de  $\Lambda$ .

Cette définition pose un double problème d'existence. On doit tout d'abord prouver que le cardinal  $\#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H^{(\Lambda)})\}$  est fini pour tout  $E$  fixé, puis on doit prouver l'existence de la limite.

On peut bien entendu étendre la définition de la densité d'états intégrée à une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoints comme nous le ferons à la définition 3.1.2. Dans ce cas, la limite obtenue est presque sûrement indépendante du paramètre aléatoire, ce qui est une conséquence de la preuve d'existence qui utilise le théorème ergodique de Birkhoff.

Au Chapitre 3, à la Section 3.1, je présente un résultat d'existence de la densité d'états intégrée et de la mesure densité d'états pour une classe de familles ergodiques d'opérateurs de type Schrödinger sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et à valeurs matricielles, publié dans [Bou08], valable en dimension  $d \geq 1$  quelconque.

Si l'existence de la densité d'états intégrée est démontrée dans un grand nombre de cas (voir [KM07; Ves08] pour une vue d'ensemble sur le sujet) la question de sa régularité est plus délicate. Dans le cas du modèle d'Anderson discret en dimension 1, le résultat de base est la continuité de la densité d'état intégrée et remonte aux résultats de Avron-Simon [AS83], Delyon-Souillard [DS84] et Le Page [Le 84]. Toujours pour le modèle d'Anderson discret en dimension 1, Craig et Simon prouvent la régularité log-Höldérienne de la densité d'états intégrée dans [CS83b]. Ces résultats ne supposent aucune régularité particulière sur la loi des variables aléatoires intervenant dans le potentiel d'Anderson, que l'on appelle encore la distribution de simple site.

En supposant que la distribution de simple site est à densité dans un espace de Sobolev convenable, Simon et Taylor montrent dans [ST85] que la densité d'états

intégrée pour le modèle d'Anderson discret unidimensionnel est de classe  $C^\infty$ . Ce résultat sera précisé dans [CK86] par Campiano et Klein qui démontrent que la densité d'états intégrée est de classe  $C^k$  pour le même modèle, où  $k$  est lié à la régularité Sobolev de la distribution de simple site. Les mêmes auteurs, rejoints par Bovier et Perez généralisent ce résultat au cas du modèle d'Anderson discret en dimension quelconque dans [Bov+88].

Dans le cas du modèle d'Anderson continu en dimension quelconque, les propriétés de régularité de la densité d'états intégrée découlent généralement d'une estimée de Wegner qui se démontre au préalable et qui nécessite que la distribution de simple site soit à densité afin de pouvoir utiliser la technique de moyennisation spectrale. Par cette approche et sous des hypothèses relativement générales, Combes, Hislop, Klopp et Nakamura démontrent dans [Com+02] le caractère localement Lipschitzien de la densité d'états intégrée. Ce résultat est amélioré par les mêmes auteurs (sans Nakamura) dans [CHK03] pour obtenir la continuité Höldérienne de la densité d'états intégrée à toutes les énergies. Enfin, dans [CHK07], Combes, Hislop et Klopp obtiennent un résultat sans doute optimal en dimension  $d \geq 2$  : si la distribution de simple site est  $\alpha$ -Höldérienne, la densité d'états intégrée est aussi  $\alpha$ -Höldérienne. De plus si la distribution de simple site est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sans hypothèse supplémentaire, la densité d'états intégrée est globalement Lipschitzienne.

Dans le cas des modèles d'Anderson discrets quasi-unidimensionnels, citons les résultats de Klein et Speis dans [KS88a] qui prouvent sous le même type d'hypothèses de régularité Sobolev pour la distribution de simple site que [CK86], le caractère  $C^k$  ou  $C^\infty$  de la densité d'états intégrée. Pour le même modèle, Klein, Lacroix et Speis améliorent ce résultat en simplifiant les hypothèses sur la distribution de simple site et en obtenant également un résultat d'analyticité pour la densité d'états intégrée dans [KLS89]. Citons enfin le résultat de Glaffig [Gla90] qui ne suppose que les variables aléatoires de la première couche régulières et qui autorise celles des autres couches à être aussi singulières que des variables de Bernoulli. Il obtient sous ces hypothèses minimales, le caractère  $C^\infty$  de la densité d'états intégrée.

En dimension  $d = 1$ , que ce soit pour des modèles d'Anderson discrets ou continus, à valeurs scalaires ou matricielles, il est possible d'étudier la régularité de la densité d'états intégrée indépendamment d'une estimée de Wegner, estimée qui se trouve au coeur des démonstrations de plusieurs des résultats cités précédemment comme [Com+02; CHK03; CHK07]. Au contraire, la régularité de la densité d'états intégrée est un ingrédient de la preuve d'estimées de Wegner en dimension 1. Cette inversion de l'ordre dans lequel on démontre les choses fait que la dimension 1 est la seule pour laquelle on peut obtenir des résultats de régularité pour la densité d'états intégrée dans le cas où la distribution de simple site est de Bernoulli. Précisons que [BK05], dont nous avons déjà parlé dans la partie sur les résultats de localisation d'Anderson, ne contient pas de résultat sur la densité d'états intégrée. Le premier résultat dans le cas d'un aléa de Bernoulli est celui de Carmona, Klein et Martinelli dans [CKM87] qui démontre que pour un modèle d'Anderson-Bernoulli discret, la densité d'états intégrée est Hölder continue, avant d'en déduire une estimée de Wegner faible du type (2.47). Leur approche est reprise par Klein, Lacroix et Speis dans le cas discret quasi-unidimensionnel pour obtenir le même résultat de régularité dans [KLS90]. Cette démarche est encore reprise pour le modèle d'Anderson-Bernoulli continu à valeurs scalaires par Damanik, Sims et Stolz dans [DSS02]. Mes travaux sur la densité d'états intégrée, et plus généralement sur l'obtention d'un critère de localisation d'Anderson et dynamique pour des opérateurs

d'Anderson-Bernoulli quasi-unidimensionnels de type Schrödinger sont la synthèse entre les techniques de [KLS90] et [DSS02], elles-mêmes reprises de [CKM87]. C'est donc dans cette continuité de résultats de régularité de la densité d'états intégrée que s'inscrit le Théorème 3.2.4 que je présente dans le Chapitre 3 et que j'ai publié dans [Bou08]. Dans celui-ci, sous réserve d'hypothèses sur le groupe de Fürstenberg, j'obtiens la continuité Höldérienne de la densité d'états intégrée. Ce résultat de régularité Höldérienne est également valable dans le cas des interactions ponctuelles comme démontré dans [Bou09a].

Un autre aspect intéressant dans l'étude de la densité d'états intégrée est celui du comportement asymptotique de celle-ci au bord du spectre. Dans le cas d'un opérateur de Schrödinger périodique, le comportement attendu de la densité d'état intégrée au bas du spectre presque-sûr  $E_0$  est le suivant :

$$\exists c > 0, N(E) \simeq c(E - E_0)^{\frac{d}{2}}. \quad (1.22)$$

En 1963, Lifshitz (voir [Lif63; Lif65]) conjecture que pour une famille ergodique d'opérateurs de Schrödinger aléatoires, la densité d'états intégrée a le comportement asymptotique suivant :

$$\exists c_1, c_2 > 0, N(E) \simeq c_1 \exp(-c_2(E - E_0)^{-\frac{d}{2}}), \quad (1.23)$$

lorsque  $E$  tend vers  $E_0$ . L'équivalent (1.23) est appelé *queues de Lifschitz* ("Lifshitz tails" en anglais) et l'exposant  $-d/2$  est appelé *exposant de Lifschitz* de la famille d'opérateurs (pour plus de détails, voir [PF92, IV.9.A] ou [Kir89]).

La présence de ce comportement asymptotique au bas du spectre est fortement liée à la présence de localisation d'Anderson pour la famille ergodique d'opérateurs étudiée. En effet, il exprime que les états propres du système se raréfient au bas du spectre ce qui semble indiquer que le spectre ne peut plus être continu a priori, mais seulement purement ponctuel. Bien entendu il ne s'agit là que d'une interprétation heuristique des queues de Lifschitz, mais celle-ci peut être à la base d'une approche rigoureuse de la localisation d'Anderson (voir par exemple [DS01; Ves02]).

Le résultat de régularité höldérienne de la densité d'états intégrée obtenu dans [Bou08] marque une étape importante dans la preuve de localisation d'Anderson pour les modèles d'Anderson-Bernoulli quasi-unidimensionnels que j'ai étudiés, mais il ne donne bien entendu aucune information quant au comportement asymptotique de la densité d'états intégrée au bas du spectre presque-sûr. C'est pourquoi j'ai entamé en 2011 une collaboration avec Hatem Najar afin de démontrer un résultat de queues de Lifschitz pour des familles d'opérateurs de Schrödinger quasi-unidimensionnels. Cette collaboration a abouti à la publication d'un tel résultat dans [BN15].

L'article [BN15] traite de familles d'opérateurs de type Anderson à valeurs matricielles agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$ , pour  $d \geq 1$  et  $D \geq 1$  arbitraires. Nous y avons démontré que sous une hypothèse de non-dégénérescence du bas du spectre (voir (3.25)), la densité d'états intégrée y présente bien un comportement de queues de Lifshitz. L'exposant de Lifshitz obtenu est égal à  $-d/2$  et cet exposant est indépendant de  $D$ . Cela prouve que le comportement asymptotique de la densité d'états intégrée au bas du spectre pour un modèle d'Anderson quasi- $d$ -dimensionnel est le même que pour un modèle d'Anderson  $d$ -dimensionnel à valeurs scalaires. Nous démontrons

également que dans le cas des opérateurs d'Anderson quasi-unidimensionnels, donc pour  $d = 1$ , l'hypothèse de non-dégénérescence est toujours vérifiée et ce pour tout  $D \geq 1$  et pour tout potentiel d'interaction périodique à valeurs dans les matrices symétriques réelles. Ainsi, pour de tels opérateurs d'Anderson, l'exposant de Lifschitz est toujours égal à  $-1/2$ .

Le fait que l'exposant de Lifshitz  $-d/2$  ne dépende pas de  $D \geq 1$  signifie qu'en regardant uniquement le comportement asymptotique au bas du spectre de la densité d'états intégrée, on ne peut pas distinguer un modèle d'Anderson à valeurs matricielles d'un modèle à valeurs scalaires.

Comme expliqué précédemment dans le cas du modèle d'Anderson-Bernoulli sur une bande continue en dimension 2 (voir (1.12)), une des motivations possibles de l'étude des modèles d'Anderson à valeurs matricielles est que l'on peut espérer, lorsque l'on fait "tendre"  $D$  vers l'infini, obtenir des informations sur le modèle d'Anderson  $(d + 1)$ -dimensionnel à partir d'un modèle d'Anderson quasi- $d$ -dimensionnel. En particulier, l'objectif initial était d'obtenir un résultat de localisation pour tout  $D \geq 1$  (avec dans l'idéal un bon contrôle en  $D$  des intervalles et longueurs de localisation) et d'en déduire un résultat de localisation pour le modèle sur une bande continue (1.12). Une telle stratégie a été envisagée dans le cas du modèle d'Anderson discret à valeurs matricielles dans [BGV15; BGV17]. Rappelons que la présence de queues de Lifschitz est un signe fort de la présence de la localisation d'Anderson au bas du spectre. Dans l'idée d'une preuve de la localisation d'Anderson reposant sur les queues de Lifschitz, nous aurions espéré pour notre modèle d'Anderson à valeurs matricielles agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$  une dépendance de l'exposant de Lifschitz en  $D$  qui l'aurait fait tendre vers  $-(d + 1)/2$  lorsque  $D$  tend vers l'infini. Mais, le fait que l'on démontre au Théorème 3.4.1 ([BN15, Theorem 5]) que l'exposant de Lifschitz ne dépend pas de  $D$  et vaut  $-d/2$ , est un argument en faveur du fait que l'on ne peut espérer une preuve de la localisation en dimension  $d + 1$  à partir de la localisation pour des opérateurs quasi- $d$ -dimensionnels. Tout du moins, cette approche par approximation n'est pas compatible avec une preuve de la localisation via les queues de Lifschitz.

Remarquons d'ailleurs que notre résultat donné au Théorème 3.4.1 justifie le choix de terminologie "quasi- $d$ -dimensionnel" (ou "quasi-unidimensionnel" pour  $d = 1$ ) pour les opérateurs en dimension  $d$  à valeurs matricielles. Du point de vue du comportement de la densité d'états intégrée au bas du spectre, ces opérateurs se comportent comme des opérateurs en dimension  $d$  plutôt que comme des opérateurs en dimension  $d + 1$ .

Il existe de nombreux résultats d'existence de queues de Lifschitz pour différentes familles ergodiques d'opérateurs de Schrödinger aléatoires. Pour un historique des premiers résultats, nous renvoyons à [Kir89] qui cite en particulier ceux pour des potentiels gaussiens ou de Poisson dans le cas continu ([Nak77; Pas77]). Nous pouvons également citer dans le cas discret, [Sim87], et dans le cas continu, [KM83; KS86] ou encore [Klo01; Klo02] dans le cas des queues de Lifschitz internes (aux bords des bandes spectrales et pas seulement au bas du spectre) et en dimension quelconque.

A notre connaissance, le résultat de queues de Lifschitz pour un modèle d'Anderson - Bernoulli à valeurs matricielles obtenu dans [BN15] est le premier résultat publié pour des opérateurs à valeurs matricielles.

Terminons en mentionnant que la densité d'états joue un rôle important en physique de la matière condensée puisque celle-ci caractérise le spectre du matériau



étudié et qu'elle se mesure expérimentalement, contrairement à la fonction d'onde. Dans la plupart des articles de physiciens traitant de matériaux condensés, le potentiel intervenant dans l'opérateur de Schrödinger associé au système étudié est rarement écrit explicitement. En lieu et place de ce potentiel, est mesurée ou calculée par approximation via un nombre fini de fonctions de Bloch, la densité d'états. La courbe obtenue pour cette densité d'états est alors interprétée pour dégager des propriétés physiques et caractériser les matériaux étudiés. Nous retrouvons cette approche dans un grand nombre d'articles traitant de situations physiques très variées. Citons par exemple [Kar19; GGM00; MM14a; Yan+17] que nous citons déjà dans notre article avec Olivier Lafitte [BL21] sur lequel nous reviendrons en détails dans le Chapitre 5.

### 1.2.3 Opérateurs aléatoires unitaires

Au Chapitre 4, je présente les résultats obtenus en collaboration avec Laurent Marin sur le modèle de scattering zipper aléatoire.

Un scattering zipper est un système obtenu par concaténation d'évènements de diffusion ayant chacun un nombre pair fixé de canaux sortants et entrants. Le nombre de canaux sortant est égal au nombre de canaux entrants pour chaque évènement de diffusion et pour tous les évènements pris séparément.

Plus précisément, un scattering zipper est décrit par une suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de matrices de diffusion dans le sous-ensemble  $U(2L)_{\text{inv}}$  du groupe unitaire  $U(2L)$  défini en (4.1). L'opérateur de scattering zipper  $\mathbb{U}$  associé à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est l'opérateur agissant sur  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$  et défini par :

$$\mathbb{U} = \mathbb{V} \mathbb{W}, \quad (1.24)$$

où les deux opérateurs unitaires  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{W}$  agissent sur  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$  et sont donnés par

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & s_0 & & & & \\ & & & s_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \circ S_g^L, \quad \mathbb{W} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & s_{-1} & & & & \\ & & & s_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

où  $S_g$  est l'opérateur de shift défini par

$$S_g : \begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto (v_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Le modèle de scattering zipper n'est pas associé à un opérateur auto-adjoint comme l'est le modèle d'Anderson, mais à un opérateur unitaire. Les opérateurs unitaires partagent nombre de propriétés spectrales avec les opérateurs auto-adjoints du fait qu'ils sont tous les deux des cas particuliers d'opérateurs normaux pour lesquels le théorème spectral est valide. L'outil clé permettant de passer des propriétés spectrales et dynamiques des opérateurs auto-adjoints à celles des opérateurs unitaires est la transformée de Cayley présentée à la Section 4.2 du Chapitre 4. Une différence importante entre opérateurs auto-adjoints et unitaires est qu'un opérateur

auto-adjoint peut être borné ou non tandis qu'un opérateur unitaire sera toujours borné.

Le décalage des blocs entre  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{W}$  dans le produit définissant  $\mathbb{U}$  permet de considérer le modèle de scattering zipper comme une version à blocs matriciels à la fois du modèle de Blatter-Browne introduit dans [BB88] pour comprendre l'effet tunnel de Zener dans les diodes du même nom, et le modèle de Chalker-Coddington sur une bande étudié dans [ABJ10]. En effet, l'opérateur  $\mathbb{U}$  a la même structure de bande que celle que l'on retrouve dans le modèle de Blatter-Browne et dans celui de Chalker-Coddington quasi-unidimensionnel, mais avec une taille arbitrairement grande pour la largeur de la bande diagonale. Remarquons que puisque l'opérateur  $\mathbb{U}$  est un opérateur unitaire de bande, les résultats généraux de [BHJ03] s'appliquent à lui. Pour éviter toute confusion, remarquons enfin que le modèle de scattering zipper est très différent du modèle de Chalker-Coddington sur tout le réseau  $\mathbb{Z}^2$  puisqu'il est unidimensionnel et non bidimensionnel.

Le modèle de scattering zipper peut aussi être vu comme une version des matrices CMV à valeurs matricielles. Les matrices CMV sont l'analogue unitaire des matrices de Jacobi et ont été introduites initialement dans l'étude des polynômes orthogonaux sur le cercle unité (voir [Sim05a ; Sim05b] pour une revue complète sur ce vaste sujet). Elles doivent leur nom aux initiales des auteurs de l'article [CMV03] qui les a popularisées, bien que ces matrices étaient déjà connues auparavant. D'autre part, Schulz-Baldes a étudié dans [Sch07] une généralisation des matrices de Jacobi à coefficients matriciels.

Le scattering zipper a été introduit par Marin et Schulz-Baldes ([MS13]) dans le but de définir un analogue unitaire aux matrices de Jacobi à coefficients matriciels qui partage avec les matrices CMV leurs propriétés spectrales et une manière simple de représenter leurs coefficients. En particulier, la factorisation en deux opérateurs diagonaux par blocs des matrices CMV (voir [CMV03]) est utilisée pour définir le scattering zipper, sans avoir à recourir à une interprétation en termes de polynômes orthogonaux sur le disque unité.

Nous pouvons résumer cette discussion en un diagramme dans lequel les flèches horizontales représentent le passage d'un opérateur à valeurs scalaires à un opérateur à valeurs matricielles et les flèches verticales représentent le passage d'un modèle auto-adjoint à son analogue unitaire.

$$\begin{array}{ccc} \text{Matrices de Jacobi} & \longrightarrow & \text{Matrices de Jacobi à coefficients matriciels} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Matrices CMV} & \longrightarrow & \text{Scattering zipper} \end{array}$$

Du point de vue spectral, le théorème de Verblunsky affirme que toute suite dans le disque unité ouvert est la suite de coefficients de Verblunsky associée à une unique mesure de probabilité sur le cercle unité (voir [Sim05a]). Ainsi, à chaque opérateur CMV, on peut associer une unique mesure de probabilité sur le cercle unité qui est la mesure spectrale de l'opérateur considéré. Dans [DPS08], les auteurs considèrent un analogue des matrices CMV à coefficients matriciels qui correspond au cas particulier des scattering zippers dont toutes les phases sont égales à  $I_L$ , la matrice identité de taille  $L$ . Toutefois, cette première version à valeurs matricielles des matrices CMV ne satisfait pas l'analogue d'un théorème de Verblunsky. L'une des raisons de Marin

et Schulz-Baldes pour introduire le scattering zipper a été de combler ce manque. En effet, il est démontré dans [MS13] que pour tout scattering zipper, il existe une unique mesure de probabilité à valeurs matricielles sur le cercle unité  $S^1$  qui est la mesure spectrale du scattering zipper considéré. En cela, les scattering zippers vérifient bien un théorème de Verblunsky.

Dans [BM15], nous avons introduit avec Laurent Marin, une version aléatoire du scattering zipper. Pour cela on utilise la représentation des éléments de  $U(2L)_{\text{inv}}$  donnée dans [MS13] :

$$U(2L)_{\text{inv}} = \{S(\alpha, U, V) \in U(2L) \mid \alpha^* \alpha < I_L \text{ et } U, V \in U(L)\} ,$$

où

$$S(\alpha, U, V) = \begin{pmatrix} \alpha & \rho(\alpha)U \\ V\tilde{\rho}(\alpha) & -V\alpha^*U \end{pmatrix}$$

et

$$\rho(\alpha) = (I_L - \alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\rho}(\alpha) = (I_L - \alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}} .$$

Dans cette écriture, la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  correspondant à la suite  $(S_n = S(\alpha_n, U_n, V_n))_{n \in \mathbb{Z}}$  définissant  $\mathbb{U}$  est appelée la suite des coefficients de Verblunsky de  $\mathbb{U}$ . Pour introduire de l'aléatoire dans le scattering zipper, nous allons tirer aléatoirement les phases  $U$  et  $V$ .

Soient  $\Omega_0 = U(L) \times U(L)$ ,  $\mathcal{B}_0$  la tribu borélienne sur  $U(L) \times U(L)$  muni de sa topologie usuelle de groupe de Lie et  $\mathbb{P}_0 = \nu_L \otimes \nu_L$  où  $\nu_L$  est la mesure de Haar sur  $U(L)$ . On définit ensuite l'espace de probabilité :

$$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_0, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_0, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_0 \right)$$

dont on va noter plus explicitement les éléments ainsi : pour  $\omega \in \Omega$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on note

$$\omega_n = (U_n(\omega), V_n(\omega)) \in \Omega_0.$$

Soit  $\omega \in \Omega$  et soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de matrices dans  $\mathcal{M}_L(\mathbb{C})$  indépendantes de  $\omega$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_n^* \alpha_n < I_L$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$S_n(\omega) = S(\alpha_n, U_n(\omega), V_n(\omega)) \in U(2L)_{\text{inv}}.$$

où la suite  $((U_n(\omega), V_n(\omega)))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* sur l'espace de probabilité  $(\Omega_0, \mathcal{B}_0, \mathbb{P}_0)$ .

Une fois définie une telle suite de matrices aléatoires indépendantes dans  $U(2L)_{\text{inv}}$ , on peut définir, pour tout  $\omega \in \Omega$ , les opérateurs  $\mathbb{V}_\omega$ ,  $\mathbb{W}_\omega$  et  $\mathbb{U}_\omega = \mathbb{V}_\omega \mathbb{W}_\omega$  comme dans (1.24) et (1.25).

On appelle *scattering zipper aléatoire* associé à la suite  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ , la famille d'opérateurs  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

Afin d'obtenir une propriété de  $2\mathbb{Z}$ -ergodicité pour la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , nous faisons l'hypothèse suivante.

**Hypothèse A.** La suite des coefficients de Verblunsky  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, égale à une matrice  $\alpha \neq 0$  vérifiant  $\alpha^* \alpha < I_L$ .

L'hypothèse A assure également que les matrices indépendantes  $S_n(\omega)$  sont identiquement distribuées.

Pour le scattering zipper aléatoire, nous avons démontré dans [BM15] les résultats suivants. On note  $\gamma_1(z), \dots, \gamma_L(z)$  les exposants de Lyapounov associés à  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  tels que définis au Chapitre 4.

**Théorème 1.2.3.** *Sous l'hypothèse A, pour tout  $z \in \mathbb{S}^1$ ,*

$$\gamma_1(z) > \gamma_2(z) > \dots > \gamma_L(z) > 0.$$

En utilisant ce théorème et en adaptant des résultats issus de la théorie de Kotani, on déduit également l'absence de spectre absolument continu presque-sûr pour la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , ensemble noté  $\Sigma_{\text{ac}}$ .

**Théorème 1.2.4.** *Sous l'hypothèse A,  $\Sigma_{\text{ac}} = \emptyset$ .*

Ce résultat découle d'un autre plus général liant la multiplicité du spectre absolument continu de  $\mathbb{U}_\omega$  au nombre d'exposants de Lyapounov s'annulant en un point donné. Pour  $j \in \{1, \dots, L\}$ , on pose

$$Z_j = \left\{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \exists l_1, \dots, l_{2j} \in \{1, \dots, 2L\}, \gamma_{l_1}(z) = \dots = \gamma_{l_{2j}}(z) = 0 \right\}.$$

**Théorème 1.2.5.** *Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  soit ergodique. Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , la multiplicité du spectre absolument continu de  $\mathbb{U}_\omega$  dans  $Z_j$  est au plus  $2j$ .*

Des résultats de stricte positivité de l'exposant de Lyapounov positif sont déjà connus pour des modèles d'opérateurs de bande unitaire (voir [BHJ03; HS07]). L'article de Bourget, Howland et Joye [BHJ03] a été l'un des premiers à présenter l'étude de modèles unitaires à un canal de diffusion et il a été suivi par d'autres articles d'Alain Joye sur le sujet comme [Joy04] et [Joy05]. Pour une présentation synthétique de ces résultats ainsi que des modèles physiques associés, nous renvoyons au texte d'Alain Joye, [Joy11]. Notons que les modèles unitaires considérés dans ces premiers articles sont tous à coefficients scalaires et non à coefficients matriciels comme dans le cadre du scattering zipper.

L'introduction, dans [BM15], de paramètres aléatoires dans l'opérateur déterministe de scattering zipper introduit dans [MS13] est entre autre motivée par le fait que l'on veut pouvoir considérer ce modèle comme un analogue ayant un nombre arbitraire de canaux de diffusion d'entrée et de sortie du modèle de Chalker-Coddington quasi-unidimensionnel dont les phases sont aléatoires (voir [ABJ10]). Dans ce modèle, les phases apparaissent comme des coefficients diagonaux de matrices  $2 \times 2$  qui sont elles-mêmes les blocs diagonaux définissant la matrice infinie de l'opérateur de Chalker-Coddington quasi-unidimensionnel. Dans le scattering zipper aléatoire, les phases  $(U_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(V_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont à valeurs matricielles dans  $U(L)$ . Ainsi, choisir ces phases aléatoires comme étant distribuées suivant la mesure de Haar sur  $U(L)$  est une généralisation directe des phases choisies suivant la mesure de Haar sur le cercle unité dans [ABJ10].

Comme nous l'avons déjà expliqué, le modèle de scattering zipper aléatoire est une généralisation au cas d'opérateurs unitaires quasi-unidimensionnels des modèles de matrices CMV qui sont purement unidimensionnels. Si l'on compare avec

les modèles d'Anderson quasi-unidimensionnels, l'hypothèse A peut être comprise comme étant l'hypothèse de simple site pour le potentiel d'Anderson : un potentiel déterministe à support compact constant que l'on translate le long de  $\mathbb{Z}$  et seules les variables aléatoires qui le multiplient diffèrent en chaque point du réseau  $\mathbb{Z}$ . Ici  $\alpha$  est l'analogie du potentiel déterministe qui est constant le long de  $\mathbb{Z}$  et seules les phases qui le multiplient dans l'expression de  $S_n(\omega)$  varient lorsque  $n$  parcourt  $\mathbb{Z}$ . Il n'est donc pas surprenant que l'hypothèse A assure l'ergodicité de  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , tout comme l'hypothèse de simple site assure l'ergodicité dans le cas du modèle d'Anderson quasi-unidimensionnel.

On peut aller plus loin dans la relation au modèle d'Anderson quasi - unidimensionnel en voyant le modèle de scattering zipper aléatoire comme une version unitaire de ce dernier. Il existe déjà une version unitaire du modèle d'Anderson à valeurs scalaires pour laquelle Hamza, Joye et Stolz ont démontré la localisation dans [HJS09]. Le scattering zipper aléatoire peut donc également jouer le rôle de version quasi-unidimensionnelle du modèle d'Anderson unitaire.

Comme nous le verrons à la Section 4.4, il reste un grand nombre de questions ouvertes dans l'étude du modèle de scattering zipper aléatoire, ce modèle ayant peu été étudié jusque-là.

#### 1.2.4 L'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique

Au Chapitre 5, je présente les résultats obtenus en collaboration avec Olivier Lafitte dans [BL18; BL21] et portant sur l'étude semiclassique du spectre et de la densité d'états intégrée associés à un opérateur de Schrödinger périodique en dimension 1 particulier.

Dans [BL18], nous introduisons l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique sur la droite réelle et nous décrivons son spectre de bande. Cet opérateur est un exemple de modèle résoluble explicitement avec un potentiel périodique qui n'est pas dérivable en ses extrema. Nous déterminons complètement le comportement de la première bande spectrale lorsque le paramètre semiclassique varie et non pas uniquement dans la limite semiclassique. Puis, nous regardons plus précisément les bandes spectrales et les trous spectraux qui se situent dans l'image du potentiel périodique (et borné) considéré. Précisons que les estimées obtenues pour les bords des bandes, les longueurs des bandes et celles des trous spectraux sont valides pour des valeurs d'un paramètre semiclassique situées dans des intervalles fixes, déterminés par une suite de constantes explicites qui sont des zéros de solutions de l'équation d'Airy et de leurs dérivées.

Pour les opérateurs de Schrödinger périodiques, le comportement semiclassique du bas du spectre ainsi que des longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux est bien connu lorsque le potentiel périodique est analytique ou  $C^\infty$ . D'autres résultats classiques décrivent les bandes spectrales près du minimum d'un potentiel de classe au moins  $C^2$  comme par exemple le papier fondateur de Harrell [Har79]. Nous introduisons un opérateur de Schrödinger périodique dont le potentiel n'est pas régulier aux points où il est extrémal et pour lequel nous pouvons encore déterminer le comportement semiclassique du bas du spectre ainsi que des longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux.

Soit  $\mathbf{H}$  l'opérateur de Schrödinger périodique agissant sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R})$  et défini par

$$\mathbf{H} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \phi + \mathbf{V}(x) \quad (1.27)$$

où  $\hbar > 0$  est un réel et  $\mathbf{V}$  est la fonction 2-périodique égale à  $\mathbf{V}(x) = |x| - 1$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Nous appelons  $\mathbf{H}$  l'opérateur d'**Airy-Schrödinger périodique** sur  $\mathbb{R}$ .

Le potentiel  $\mathbf{V}$  est périodique et localement intégrable puisque continu, on peut donc appliquer les résultats connus sur les opérateurs périodiques (voir [RS78]) qui affirment que l'opérateur  $\mathbf{H}$  a un spectre purement absolument continu et que ce spectre est une réunion d'intervalles

$$\sigma(\mathbf{H}) = \bigcup_{p \geq 0} [\mathbf{E}_{\min}^p, \mathbf{E}_{\max}^p],$$

où  $\mathbf{E}_{\min}^p$  et  $\mathbf{E}_{\max}^p$  sont appelés les bords de bandes spectrales. Pour  $p \geq 0$ ,  $[\mathbf{E}_{\min}^p, \mathbf{E}_{\max}^p]$  est la  $p$ -ième bande spectrale et  $(\mathbf{E}_{\max}^p, \mathbf{E}_{\min}^{p+1})$  est le  $p$ -ième trou spectral. La caractérisation précise de ces bords de bandes sera donnée à la Section 5.1.2.

Le spectre d'un opérateur de Schrödinger dont le potentiel est un puits linéaire (typiquement la fonction valeur absolue) est bien connu : il est réduit à son spectre ponctuel et les valeurs propres sont données par les valeurs absolues des zéros de la fonction d'Airy  $Ai$  et de sa dérivée. Le potentiel de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique est la périodisation d'un puits linéaire tronqué. On peut donc penser que chaque bande spectrale de  $\mathbf{H}$  contiendra un zéro de  $Ai$  ou de sa dérivée. C'est effectivement le cas et ce résultat est donné dans le premier point du Théorème 5.1.10.

Les solutions de l'équation d'Airy  $u'' = xu$  jouent un rôle central dans notre analyse du spectre de bandes de l'opérateur  $\mathbf{H}$  ce qui explique le nom que nous avons donné à cet opérateur. Nous introduisons des notations liées à ces solutions et qui nous permettront de formuler des énoncés précis dans la suite.

Soit  $\{-a_j\}_{j \geq 1}$  l'ensemble des zéros de la fonction d'Airy  $Ai$  et soit  $\{-\tilde{a}_j\}_{j \geq 1}$  l'ensemble des zéros de sa dérivée  $Ai'$  où les réels  $-a_j$  et  $-\tilde{a}_j$  sont rangés dans l'ordre décroissant. Ces deux ensembles de zéros sont inclus dans  $(-\infty, 0]$ . De plus, ces zéros sont entrelacés : pour tout  $j \geq 1$ ,  $-a_j \in (-\tilde{a}_{j+1}, -\tilde{a}_j)$ .

Afin de regrouper en une suite les deux suites de zéros de  $Ai$  et  $Ai'$ , on pose

$$\forall j \geq 0, a_{2j} = \tilde{a}_{j+1} \text{ et } a_{2j+1} = a_{j+1}. \quad (1.28)$$

Toutefois, ce ne sont pas seulement les fonctions d'Airy classiques  $Ai$  et  $Bi$  ainsi que leurs dérivées qui vont nous servir. Nous utiliserons principalement les solutions canoniques  $u$  et  $v$  de l'équation d'Airy qui sont les solutions satisfaisant aux conditions initiales

$$u(0) = 1, u'(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(0) = 0, v'(0) = 1,$$

et dont le Wronskien vaut 1.

Nous aurons besoin d'étudier les zéros de ces solutions canoniques et nous notons :

1.  $\{-\tilde{c}_{2j}\}_{j \geq 0}$  et  $\{-\tilde{c}_{2j+1}\}_{j \geq 0} \cup \{0\}$  les ensembles des zéros de respectivement  $u$  et  $u'$ ,
2.  $\{-c_{2j+1}\}_{j \geq 0} \cup \{0\}$  et  $\{-c_{2j}\}_{j \geq 0}$  les ensembles des zéros de respectivement  $v$  et  $v'$ .

Les propriétés de ces suites de zéros ainsi que des résultats de localisation précise de ces zéros sont obtenus dans [BL18, Section 3.1] et reposent sur les liens entre les solutions de l'équation d'Airy et les fonctions de Bessel fractionnaires. Elles reposent également sur les développements asymptotiques donnés dans [ASR88] pour ces fonctions de Bessel fractionnaires.

Dans la suite, un entier dépendant de  $h$  va nous être utile pour énoncer un résultat de comptage de bandes spectrales. Soit  $k_0 \in \mathbb{N}$  l'unique entier tel que

$$c_{k_0} < h^{-\frac{2}{3}} < \tilde{c}_{k_0} \quad \text{ou} \quad \tilde{c}_{k_0} \leq h^{-\frac{2}{3}} < c_{k_0+1} \quad \text{lorsque} \quad h < c_0^{-\frac{3}{2}}. \quad (1.29)$$

A l'aide de cet entier, nous pouvons énoncer un résultat de décompte des bandes spectrales dans l'image de  $\mathbf{V}$  :

si  $h < c_0^{-\frac{3}{2}}$  alors les  $k_0 + 1$  premières bandes spectrales sont incluses dans l'image du potentiel  $\mathbf{V}$ , soit l'intervalle  $[-1, 0]$ .

Nous pouvons également montrer qu'aucun des trous spectraux dans  $\sigma(\mathbf{H}) \cap [-1, 0]$  n'est vide, ce qui est consistant avec les résultats classiques autour de la conjecture de Bethe-Sommerfeld (voir [Par08]).

Un exemple de comptage de niveaux d'énergie dans l'image du potentiel peut être trouvé dans [Flü99], dans le cas simple d'un potentiel à trou rectangulaire, qui se trouve ne pas être périodique. Ainsi [Flü99] compte des valeurs propres et pas des bandes spectrales. Notons que [Flü99] ne donne pas de valeurs explicites pour la taille du trou rectangulaire pour déterminer l'entrée d'une valeur propre dans l'image du potentiel. Grâce à l'entier  $k_0$  et au fait qu'il est déterminé uniquement par les zéros de  $u$ ,  $v$  et de leurs dérivées, nous avons une image "dynamique" de l'entrée des bandes dans l'image de  $\mathbf{V}$  lorsque l'on fait bouger le paramètre semiclassique  $h$ .

L'un des objectifs de l'analyse semiclassique est de démontrer des estimées de quantités qui dépendent de  $h$  lorsque  $h$  tends vers 0. Si une constante intervenant dans une telle estimée est valide pour toute valeur du paramètre semiclassique dans un intervalle fixe  $(0, h_0]$  avec  $h_0 > 0$ , l'intervalle  $(0, h_0]$  est un intervalle de validité de l'approximation semiclassique pour cette estimée. Cette notion d'intervalle de validité dans le contexte de l'analyse semiclassique suit la discussion faite dans [HL07] à propos de la validité de l'analyse semiclassique de leur modèle.

Dans la littérature, de nombreux résultats d'analyse semiclassique donnent des estimées uniformes en  $h \in (0, h_0]$  (voir par exemple [Rob87; Oliv97]). Une constante explicite  $h_0$  est par exemple donnée dans [HMR87], même si, en général, la constante n'est pas explicite. Il existe enfin de nombreux livres sur le sujet qui reprennent ces discussions autour de l'analyse semiclassique, nous citerons par exemple [DS99; Mar02].

Dans notre article avec Olivier Lafitte, nous donnons des valeurs explicites de  $h_0$  pour des estimées sur les bords des bandes spectrales et par conséquent sur les

longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux. Les estimées sur les bords de bandes prennent la forme suivante. Soit  $E_p$  l'un des deux bords de la  $p$ -ième bande spectrale  $[E_{\min}^p, E_{\max}^p]$ . Si  $E_p$  est dans l'image de  $\mathbf{V}$ , nous montrons qu'il existe une constante explicite  $h_0(p) > 0$ , des constantes universelles  $C_p > 0$  et  $\lambda_p \neq 0$  telles que pour tout  $h \in (0, h_0(p))$ ,

$$\left| E_p - \left( -1 + \alpha_p h^{\frac{2}{3}} + \lambda_p h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \alpha_p)^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \leq C_p h^{\frac{5}{3}} (1 - \alpha_p h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \alpha_p)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.30)$$

où  $\alpha_p$  est défini en (1.28). De plus, (1.30) s'étend à  $h = 0$  par continuité en  $h$  de  $E_p$  (en posant  $E_p(0) = -1$ ) et de par le fait que les autres quantités en jeu admettent des limites finies lorsque  $h$  tend vers 0.

Les constantes  $h_0(p) > 0$  seront exprimées en fonctions des zéros  $c_p$ ,  $\tilde{c}_p$  et  $\alpha_p$ . Nous donnerons les résultats plus précis sur les longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux que nous avons obtenus dans [BL18] au Chapitre 5.

Avant de passer à la présentation de [BL21], je résume les résultats obtenus dans [BL18].

1. Nous avons obtenu des estimées des largeurs des bandes spectrales et des trous spectraux qui font intervenir des constantes universelles dans des intervalles précis de valeurs pour le paramètre semiclassique pour un opérateur de Schrödinger dont le potentiel est périodique et paire et non dérivable en ces extrema. Ces estimées reposent sur une analyse précise des fonctions spéciales solutions de l'équation d'Airy.
2. Comme dans le cas de potentiels plus réguliers (au moins  $C^2$ ), les bandes spectrales sont exponentiellement fines dans la limite semiclassique, mais leur largeur reste un peu plus grande que dans le cas régulier.
3. Grâce à des estimées très précises sur les fonctions spéciales étudiées, tous nos résultats sont énoncés pour  $h \in [0, h_0)$  où  $h_0$  est explicite et ne dépend que de l'indice de la bande spectrale étudiée au travers des zéros des solutions de l'équation d'Airy considérées. Ces résultats sont beaucoup plus difficiles à obtenir que des résultats analogues dans la limite semiclassique, car nous nous imposons de conserver des estimées uniformes jusqu'à la limite de l'intervalle de validité de l'approximation semiclassique.
4. Nous sommes parvenus à compter le nombre de bandes spectrales et de trous spectraux situés dans l'image du potentiel  $\mathbf{V}$  en fonction de la valeur du paramètre semiclassique.

Dans [BL21], nous calculons, dans le régime semiclassique, une formule explicite pour la densité d'états intégrée associée à l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique sur la droite réelle. Pour y parvenir, nous commençons par étudier en détails le spectre de l'opérateur de Schrödinger dont le potentiel est la restriction du potentiel périodique d'Airy-Schrödinger à un nombre fini de périodes. Pour cet opérateur restreint, nous montrons que son spectre est constitué uniquement de valeurs propres qui se situent toutes dans les bandes spectrales de l'opérateur d'Airy-Schrödinger. Toujours dans le régime semiclassique, nous comptons précisément le nombre de valeurs propres qui se trouvent dans chaque bande spectrale. Précisons enfin que



les résultats de [BL21], tout comme ceux de [BL18] sont donnés dans un régime semi-classique que l'on caractérise par des constantes explicites, à savoir des zéros de solutions de l'équation d'Airy et de leur dérivées.

Nous cherchons donc à étudier la densité d'états intégrée de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique sur la droite réelle. Comme cet opérateur a un spectre de bandes et aucune valeur propre, nous sommes à nouveau obligé de passer par une limite thermodynamique pour définir la densité d'états intégrée comme ce fût le cas à la Section 1.2.2 pour définir la densité d'états intégrée associée à une famille d'opérateurs d'Anderson.

Plus précisément, nous commençons par considérer la restriction de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique à un nombre fini de périodes. Pour obtenir aisément un potentiel pair avec des notations les plus simples possibles, nous nous restreignons à un nombre impair de périodes et nous considérons l'opérateur de Schrödinger  $H_{2N+1}$  de domaine

$$D(H_{2N+1}) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid \psi(-(2N+1)L_0) = \psi((2N+1)L_0)\}$$

où  $N \geq 0$  est un entier et  $L_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . Sur ce domaine,  $H_{2N+1}$  est défini par

$$H_{2N+1} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{2N+1}, \quad (1.31)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite,  $m$  la masse d'un électron et  $V_{2N+1}$  est l'opérateur de multiplication par :

$$V_{2N+1} : x \mapsto \sum_{k=-N}^N V(x - 2kL_0) \quad (1.32)$$

où  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \times \left( \frac{|x|}{L_0} - 1 \right) & \text{si } x \in [-L_0, L_0] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (1.33)$$

$V_0 \in \mathbb{R}_+^*$  étant un potentiel de référence. Notons que  $V_{2N+1}$  est une fonction paire, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sauf en ses extrema.

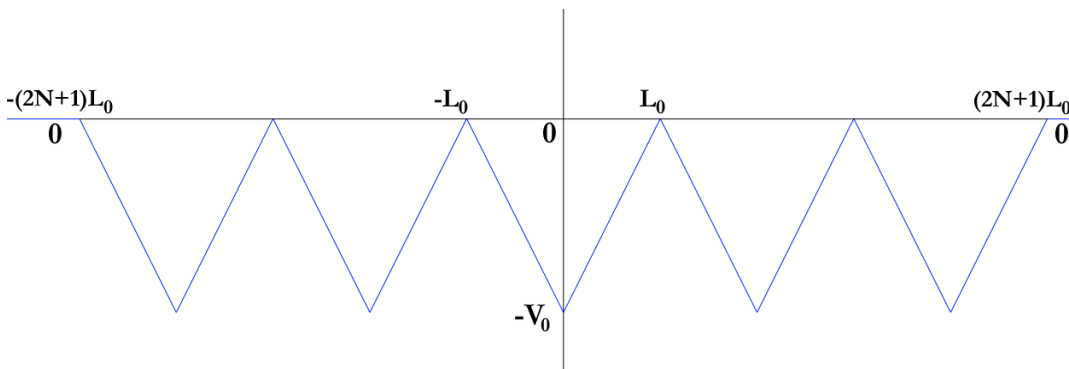


Fig. 5. Le potentiel  $V_{2N+1}$  pour  $N = 2$ .

Puisque la définition du domaine de  $H_{2N+1}$  inclus les conditions de Dirichlet en  $\pm(2N+1)L_0$ , nous pouvons prendre comme définition de la densité d'états intégrée associée à l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique la définition suivante.

La densité d'états intégrée associée à l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $E \mapsto I(E)$ , où  $I(E)$ , pour  $E \in \mathbb{R}$ , est défini par

$$I(E) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2N+1)L_0} \#\{\lambda \leq E ; \lambda \in \sigma(H_{2N+1})\}. \quad (1.34)$$

L'existence de la limite dans (1.34) est démontrée en même temps que l'on en donne une valeur explicite au Théorème 5.2.2. Elle repose sur le fait que le cardinal dans (1.34) se comporte de manière affine en  $N$ .

Les fonctions propres de l'opérateur  $H_{2N+1}$  sont les fonctions d'ondes décrivant le transport électronique dans un milieu décrit par un potentiel constitué de  $2N+1$  puits de forme triangulaire. Nous démontrons au Théorème 5.2.1 que  $H_{2N+1}$  a exactement  $2N+2$  valeurs propres dans chaque bande spectrale de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique et qu'il n'en a aucune dans les trous spectraux. Précisons que ce résultat de comptage de valeurs propres est valable dans le régime semiclassique pour ce qui est du nombre de valeurs propres dans les bandes, mais que l'absence de valeurs propres dans les trous spectraux est valable pour toute valeur du paramètre semiclassique. L'article [BL21] a d'abord été motivé par l'obtention de ce résultat de comptage des valeurs propres. En effet, à l'issue de [BL18], nous nous sommes posé la question de comment pouvait se placer les valeurs propres d'un opérateur d'Airy-Schrödinger à puits multiples en nombre fini, cas qui correspond aux "vrais" modèles physiques et non à l'approximation consistant à prendre des systèmes sur toute la droite réelle. Après avoir obtenu le résultat de décompte des valeurs propres, nous nous sommes rendu compte que l'on pouvait en déduire une formule explicite pour la densité d'états intégrée de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique. Ainsi, ce qui constitue finalement le résultat principal de [BL21] n'est que le corollaire de la solution à notre problème initial. Comme nous le verrons d'ailleurs plus en détails au Chapitre 5, le Théorème 5.2.1 qui nous donne le décompte et la localisation des valeurs propres de  $H_{2N+1}$ , est bien plus difficile à démontrer que le Théorème 5.2.2 qui nous donne la formule explicite de la densité d'états intégrée de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique.

Tous les résultats donnés dans [BL21] dans le cas d'un nombre impair de puits restent vrais pour un potentiel ayant un nombre pair de puits. Seuls quelques changements doivent être opérés pour adapter les démonstrations rédigées dans le cas impair. Il faut aussi translater le potentiel de sorte qu'il ait un nombre pair de puits tout en restant une fonction paire.

Pour des résultats généraux sur l'analyse semiclassique d'opérateurs à puits multiples avec des minima singuliers, nous renvoyons à [Yaf18]. Les résultats contenus dans cet article s'appliquent à l'opérateur  $H_{2N+1}$ . Toutefois, dans notre étude de  $H_{2N+1}$ , nous sommes capable d'avoir des résultats précis de comptage et de localisation des valeurs propres. Nos résultats ne sont pas seulement valides dans la limite semiclassique, mais également pour des valeurs d'un paramètre semiclassique plus grand (comme nous le verrons au Chapitre 5, notre paramètre semiclassique tendra non pas vers 0 mais vers l'infini) que des constantes explicites, valeurs pour lesquelles nous pouvons contrôler un nombre fini de bandes par les résultats de [BL18].

Cette amélioration par rapport aux résultats généraux de [Yaf18] est rendue possible par le fait que l'équation aux valeurs propres associée à  $H_{2N+1}$  conduit à des solutions explicites exprimables à l'aide de fonctions spéciales, solutions de l'équation d'Airy, et indépendantes du paramètre semiclassique.

Nous avons déduit la formule explicite de la densité d'états intégrée d'un décompte direct des valeurs propres sous une énergie fixée. Toutefois, nous aurions pu également avoir l'idée d'utiliser la formule de Shubin qui nous dit que la densité d'états intégrée est égale à la quasi-impulsion divisée par  $\pi$  (voir [Shu79, Theorem 4.3]). Cette formule est valide pour des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques et périodiques en dimension 1, dont le symbole a une partie réelle positive. Il ne s'applique donc pas directement à l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique puisque son potentiel n'est pas  $C^\infty$ . Si la formule de Shubin pouvait s'appliquer à notre modèle, il aurait alors suffi de calculer une formule explicite de la quasi-impulsion, donc du déterminant de Hill, pour obtenir une formule explicite pour la densité d'états intégrée. Remarquons tout de même que la formule que nous obtenons au Théorème 5.2.2 est très similaire à celle que l'on trouve dans l'article de Schenk et Shubin (voir [SS87, équation 1.23]) pour des potentiels périodiques de classe  $C^\infty$ , à une expression explicite du déterminant de Hill près. Ils obtiennent une expression du déterminant de Hill pour un potentiel périodique  $C^\infty$  quelconque, à un terme de reste près (voir [SS87, équation 1.21]) qui met en jeu la fonction  $\sigma$  définie en [SS87, équation 1.4] via [SS87, équation 1.9] et [SS87, équation 1.20]. Dans la cas de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique nous ne pouvons pas définir la fonction  $\sigma$  comme ils le font, du fait que l'on ne peut pas dériver le potentiel en certains points et nous ne pouvons donc pas utiliser [SS87, équation 1.5]. Finalement, dans le cas particulier de notre opérateur d'Airy-Schrödinger périodique, nous sommes capables de refaire à la main l'analyse générale faite dans [SS87] pour un opérateur dont le potentiel n'est pas  $C^\infty$ . Notons que de notre formule explicite pour la densité d'états intégrée, nous pourrions retrouver une formule exacte pour le déterminant de Hill et pour la quasi-impulsion de notre opérateur.

Bien que la théorie de Floquet pour les opérateurs de Schrödinger périodiques ne requiert aucune hypothèse particulière de régularité pour le potentiel hormis son caractère localement intégrable (voir [RS78]), la plupart des travaux sur la densité d'états intégrée des opérateurs de Schrödinger périodiques qui précèdent [BL21], que ce soit en dimension 1 ou supérieure, requièrent des potentiels qui sont au moins de classe  $C^2$  à leurs minima (voir [Ivr19; Kar00; PS09; Sob06]). Ces résultats mathématiques prennent généralement la forme d'asymptotiques pour la densité d'états intégrée pour de grandes énergies. A l'aide de notre formule explicite pour la densité d'états intégrée, nous obtenons également le comportement asymptotique aux hautes énergies. Nous pouvons alors comparer ce comportement asymptotique dans le cas d'un potentiel qui n'est pas régulier à ses extrema avec les résultats précédents dans le cas de potentiels plus réguliers. Nous pouvons aussi comparer ce comportement asymptotique avec celui pour des potentiels singuliers comme par exemple le modèle de Kronig-Penney qui fait apparaître de l'aléa (voir [KS00]).

En utilisant les notations introduites dans la Section 5.2 du Chapitre 5, nous remarquons que le comportement asymptotique de  $I$  pour  $c$  et  $-E$  grands est différent de celui donné par les résultats de [SS87] tels que présentés dans [Sob06], pour un potentiel  $C^\infty$ . Ceux-ci conduisent à une densité d'états intégrée qui se comporte comme  $E^{\frac{1}{2}}$  pour  $E$  grand, ce qui diffère de notre cas où l'on obtient un comportement asymp-

totique de l'ordre de  $E^{\frac{3}{2}}$ . La non différentiabilité du potentiel à ses extrema conduit à un comportement asymptotique différent du cas régulier. En dimension plus grande que 1 le même type de différences peut s'observer dans des articles tels que [Ivr19], [Kar00] ou [PS09] où le potentiel (ou une perturbation périodique dans le cas de [Ivr19]) a des propriétés de régularité plus fortes que dans notre cas.

Les résultats de [Ivr19; Kar00; PS09; Sob06] sur la densité d'états intégrée sont énoncés pour des potentiels périodiques généraux ayant une certaine régularité. Dans [Kar00] cette régularité est donnée au travers du comportement asymptotique des coefficients de Fourier du potentiel. Ces résultats prennent la forme d'asymptotiques précises en l'énergie. Les résultats pour les puits multiples dans [Yaf18] sont donnés pour un potentiel  $C^2$  qui est  $C^3$  dans un voisinage d'une énergie non critique et conduit à des estimées sur la densité d'états intégrée dans la limite semiclassique. Dans [BL21], comme nous regardons un exemple particulier pour lequel les équations aux valeurs propres sont explicitement résolubles, nous obtenons mieux qu'un comportement asymptotique pour la densité d'états intégrée comme dans [Ivr19; Kar00; PS09; Sob06] ou une estimée comme dans [Yaf18], nous obtenons une formule explicite.

Dans le cas où le potentiel est moins régulier que  $C^2$ , nous nous référons encore à [Yaf18]. En particulier la formule obtenue au Théorème 5.2.2 est compatible avec les minorations et majorations données dans [Yaf18, Propositions 6.6 et 6.7]. Notons que les résultats de [Yaf18] sont énoncés dans la limite semiclassique, donc pour un paramètre semiclassique "suffisamment grand". Aucune borne inférieure sur le paramètre semiclassique n'est donnée pour expliciter le domaine de validité de [Yaf18, Propositions 6.6 et 6.7]. Dans notre résultat, la formule donnée au Théorème 5.2.2 est valide pour tout  $c$  supérieur à la constante  $c_0$ , cette constante étant explicitement connue comme zéro d'une fonction spéciale.

Un autre cas intéressant de potentiel singulier est celui des modèles aléatoires comme le modèle de Kronig-Penney. Pour ce dernier, nous renvoyons aux résultats de [KS00] où une asymptotique en  $\frac{\sqrt{E}}{\pi}$  pour  $E$  grande est donnée pour la densité d'états intégrée. Cette asymptotique est égale à un facteur 2 près (ce facteur étant égal à la période du potentiel), à la dérivée de l'asymptotique en  $\frac{4}{3\pi} E^{\frac{3}{2}}$  de la densité d'états intégrée pour l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique. Nous remarquons alors que la dérivée seconde faible du potentiel  $V$  est égale au potentiel de Kronig-Penney avec des coefficients constants et déterministes égaux à  $\pm 2$ . Cela illustre les résultats de [KS88b, Theorem 4.1 et Theorem 6.2C] qui, au travers des fonctions  $m$  de Weyl-Titchmarsh et de la fonction  $w$  de Kotani, relie la densité d'états intégrée au potentiel. La dérivée par rapport à l'énergie de la densité d'états intégrée associée à un potentiel  $V$  se compare à la densité d'états intégrée associée à la dérivée seconde faible de  $V$ .

Nous terminons cette section introductive sur les articles [BL18] et [BL21] par une discussion replaçant nos résultats dans le cadre des articles issus de la communauté des physiciens spécialistes en physique du solide.

Dans les cas étudiés par la communauté des physiciens, le potentiel donnant naissance aux modes de Bloch est rarement explicité, et la fonction jugée pertinente à étudier dans presque tous les papiers que nous avons lus est la densité d'états dont la densité d'états intégrée est la fonction de répartition. Une expression exacte de la densité d'états intégrée et donc de la densité d'états par dérivation est intéressante pour les expériences numériques conduites par les physiciens dans la mesure où elle

peut jouer le rôle de cas test. Par exemple, dans [MM14b], ils utilisent comme cas test pour la densité d'états intégrée et pour la densité d'états le cas très simple d'une particule dans une boîte vide. Cela correspond à l'expression connue de la densité d'états intégrée pour le Laplacien avec un potentiel nul. En donnant une formule exacte pour la densité d'états intégrée pour un potentiel périodique non constant, nous donnons ainsi une autre référence possible permettant de comparer et de tester des méthodes numériques.

Le potentiel triangulaire de l'opérateur d'Airy-Schrödinger à puits multiples apparaît dans certains modèles physiques comme par exemple [LF86] dans lequel les auteurs affirment être capables d'étudier tout potentiel affine par morceaux. Leur approche utilise les matrices de transfert, mais en pratique ils n'effectuent des calculs de valeurs propres numériquement que pour quelques exemples particuliers de potentiels affines par morceaux et n'obtiennent aucun résultat asymptotique. Ainsi, au-delà de notre intérêt pour la densité d'états intégrée associée à l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique, une autre motivation pour étudier le spectre de l'opérateur d'Airy-Schrödinger à puits multiples est de donner un traitement mathématique complet d'un exemple d'opérateur de Schrödinger dont le potentiel est affine par morceaux. Nos résultats pour le modèle d'Airy-Schrödinger à puits multiples peuvent être perçus comme le pendant mathématique des résultats numériques obtenus par certains physiciens.

# Chapitre 2

## Opérateurs de Schrödinger aléatoires quasi-unidimensionnels

Dans ce premier chapitre, je présente les résultats de mes articles [Bou07; BS07; Bou09a; Bou09b; Bou10; Bou13]. Ces articles portent sur le phénomène de localisation d'Anderson que l'on a présenté du point de vue physique à la Section 1.1.1 et dont on a donné des définitions mathématiques plus précises à la Section 1.1.3.

Les opérateurs étudiés dans ces articles sont des opérateurs unidimensionnels à valeurs matricielles et les preuves de la localisation d'Anderson pour ces opérateurs reposent sur les propriétés de leurs exposants de Lyapounov. Je définis donc à la Section 2.1 la notion d'exposants de Lyapounov associés à un opérateur de Schrödinger en dimension 1 ou plus généralement à un cocycle linéaire, et je rappelle la définition du groupe de Fürstenberg, objet algébrique central à étudier pour démontrer la séparabilité des exposants de Lyapounov.

Dans la Section 2.2, je reprends les modèles de mes articles [Bou07; BS07; Bou09a; Bou09b; Bou10; Bou13] et je présente les critères algébriques adaptés à chacun d'eux pour obtenir les propriétés voulues pour leurs groupes de Fürstenberg.

Enfin, dans la Section 2.3, je présente un résultat général pour les opérateurs de Schrödinger aléatoires quasi-unidimensionnels qui affirme que si le groupe de Fürstenberg satisfait aux hypothèses présentées à la Section 2.1, alors il y a localisation d'Anderson dans les différents sens définis à la Section 1.1.3.

**Hypothèse 1.** *Dans toute la suite de ce chapitre,  $d = 1$ .*

### 2.1 Exposants de Lyapounov

#### 2.1.1 Cocycles linéaires

Soit  $N \geq 1$  un entier naturel. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité complet. Nous commençons par introduire l'exposant de Lyapounov dominant d'une suite de matrices aléatoires de  $GL_N(\mathbb{R})$ . Cela signifie que pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$ , on tire au hasard dans  $GL_N(\mathbb{R})$  une matrice selon la probabilité  $P$ .

Plus précisément, on considère tout d'abord une application  $A : \Omega \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{R})$  mesurable et on considère également une transformation mesurable  $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ , bijective et d'inverse  $\tau^{-1}$  mesurable. Pour  $n \geq 0$ ,  $\tau^n$  désigne la composée  $n$  fois de  $\tau$  par elle-même et pour  $n < 0$ ,  $\tau^n$  désigne la composée de  $\tau^{-1}$  par elle-même  $n$  fois. À ce stade de la construction, les matrices  $A(\tau^n(\omega))$  ne sont pas indépendantes a priori.

Une façon de considérer des produits de matrices aléatoires est d'introduire le cocycle linéaire engendré par le couple  $(A, \tau)$ .

**Définition 2.1.1.** Soient  $A : \Omega \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{R})$  et  $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$  deux applications mesurables,  $\tau$  étant supposée de plus bijective et d'inverse mesurable. On appelle cocycle linéaire engendré par  $(A, \tau)$  l'application  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{R})$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \omega \in \Omega, \Phi(n, \omega) = \begin{cases} A(\tau^{n-1}(\omega)) \cdots A(\omega) & \text{si } n > 0 \\ I_N & \text{si } n = 0 \\ (A(\tau^n(\omega)))^{-1} \cdots (A(\tau^{-1}(\omega)))^{-1} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

où  $I_N$  désigne la matrice identité dans  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ .

Précisons que les suites de matrices de transfert construites à la Section 1.2.1 peuvent s'écrire avec ce formalisme des cocycles linéaires. En effet, si on reprend  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$  un espace de probabilité complet et

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\Omega}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathcal{A}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathbb{P}} \right),$$

il suffit de considérer l'application shift

$$\tau : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \Omega \\ (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \rightarrow & (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}. \end{array} \quad (2.1)$$

Alors  $\tau$  préserve la mesure  $\mathbb{P}$  et le groupe de transformations  $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est ergodique. Puis, on définit l'application  $A : \Omega \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  par :

$$\forall \omega \in \Omega, A(\omega) = T_{\omega(0)}(E).$$

On a alors bien  $A(\tau^n(\omega)) = T_{\omega(n)}(E)$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  (voir (1.16) et (1.20)).

Dans la suite de ce mémoire, nous ne traiterons que du cas des cocycles associés à des suites de matrices de transfert. Nous allons donc faire des hypothèses supplémentaires sur  $(A, \tau)$ .

**Hypothèse 2.** L'application  $\tau$  préserve la mesure  $\mathbb{P}$  et le groupe de transformations  $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est ergodique. De plus, on suppose que la suite  $(A(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées.

### 2.1.2 Exposants de Lyapounov et théorème d'Oseledets

Nous pouvons à présent définir les exposants de Lyapounov dominants en plus et en moins l'infini associés à un cocycle linéaire de générateur  $(A, \tau)$ .

**Définition 2.1.2.** *On suppose que les applications  $\log^+ \|A\|$  et  $\log^+ \|A^{-1}\|$  sont dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors les limites suivantes appartiennent à  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  :*

$$\gamma^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|\Phi(n, \cdot)\|) \quad \text{et} \quad \gamma^- = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{|n|} \mathbb{E}(\log \|\Phi(n, \cdot)\|) \quad (2.2)$$

Nous les appelons les exposants de Lyapounov dominants en  $+\infty$  et en  $-\infty$  associés au cocycle linéaire  $\Phi$  de générateur  $(A, \tau)$ .

Par équivalence des normes en dimension finie,  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  ne dépendent pas du choix de la norme sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ . Précisons que  $\log^+$  désigne la partie positive de la fonction logarithme, soit  $\max(\log, 0)$ . L'existence des limites dans (2.2) provient de la sous-additivité de la suite  $(\mathbb{E}(\log \|\Phi(n, \cdot)\|))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Il se trouve que les exposants de Lyapounov dominants peuvent aussi être obtenus comme une limite presque-sûre et pas uniquement comme une limite en espérance. C'est l'objet du théorème de Fürstenberg-Kesten (voir [FK60]) que l'on peut obtenir par une preuve directe, comme cela est fait dans [BL85], ou que l'on peut voir comme une conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman ([Kin73]).

**Théorème 2.1.3** (Fürstenberg-Kesten, [FK60]). *Soit  $\Phi$  un cocycle linéaire de générateur  $(A, \tau)$  vérifiant l'Hypothèse 2. On suppose de plus que les applications  $\log^+ \|A\|$  et  $\log^+ \|A^{-1}\|$  sont dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , les limites suivantes existent et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|\Phi(n, \omega)\| = \gamma^+ \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{|n|} \log \|\Phi(n, \omega)\| = \gamma^-$$

où  $\gamma^\pm$  sont les exposants de Lyapounov dominants en  $\pm\infty$ .

Le théorème de Fürstenberg-Kesten peut se voir comme une loi forte des grands nombres dans le cadre non-commutatif des produits de matrices. En effet, la présence du logarithme ramène le produit des matrices à une somme (c'est au moins vrai en majorant par le produit des normes). D'ailleurs dans le cas où les matrices aléatoires sont toutes diagonales, ce théorème relève directement de la loi forte des grands nombres appliquée à chaque coefficient diagonal du produit.

Le coefficient de Lyapounov dominant, lorsqu'il est non nul, permet de comprendre le comportement asymptotique exponentiel global de la suite de matrices aléatoires étudiée. Toutefois, il ne permet pas d'étudier plus finement le comportement asymptotique de la suite  $\|\Phi(n, \omega)v\|$  pour un vecteur  $v \in \mathbb{R}^N$  quelconque. En effet, l'espace  $\mathbb{R}^N$  se décompose en plusieurs sous-espaces dans lesquels la dynamique exponentielle est donnée par une famille d'exposants de Lyapounov que nous allons définir à présent. Ce sera l'objet du théorème d'Oseledets.

Avant cela nous faisons quelques rappels sur les puissances extérieures de  $\mathbb{R}^N$  pour  $N$  un entier fixé.



**Définition 2.1.4.** Pour  $p \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\wedge^p \mathbb{R}^N$  est l'espace vectoriel des formes  $p$ -linéaires alternées sur le dual  $(\mathbb{R}^N)^*$ . L'espace vectoriel  $\wedge^p \mathbb{R}^N$  est appelé puissance extérieure  $p$ -ième de l'espace  $\mathbb{R}^N$ .

Pour  $u_1, \dots, u_p$  dans  $\mathbb{R}^N$  et  $f_1, \dots, f_p$  dans  $(\mathbb{R}^N)^*$ , on pose :

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_p)(f_1, \dots, f_p) = \det((f_i(u_j))_{i,j})$$

Tout vecteur de la forme  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$  est appelé  $p$ -vecteur décomposable. A l'aide de ces vecteurs  $p$ -décomposables, on peut définir une base de l'espace  $\wedge^p \mathbb{R}^N$  de la manière suivante : si  $(u_1, \dots, u_N)$  est une base de  $\mathbb{R}^N$ , alors  $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq N\}$  est une base de  $\wedge^p \mathbb{R}^N$ .

Nous aurons à étudier dans la suite le comportement asymptotique des normes de suites de matrices dont on voudra prendre la  $p$ -ième puissance extérieure. Voyons comment un élément du groupe linéaire  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$  agit sur  $\wedge^p \mathbb{R}^N$ . Si  $M \in \text{GL}_N(\mathbb{R})$  on définit un automorphisme  $\wedge^p M$  de  $\wedge^p \mathbb{R}^N$  en le définissant sur les vecteurs  $p$ -décomposables par :

$$(\wedge^p M)(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = Mu_1 \wedge \dots \wedge Mu_p$$

On a alors la propriété de multiplicativité :  $\wedge^p(MN) = (\wedge^p M)(\wedge^p N)$ .

Dans la suite, les normes des  $\wedge^p M$  seront des normes matricielles supposées être sous-multiplicatives.

A l'aide de ces définitions et notations, nous pouvons maintenant définir les  $N$  exposants de Lyapounov associés à une suite de matrices aléatoires dans  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.1.5.** Soit  $\Phi$  un cocycle linéaire de générateur  $(A, \tau)$  vérifiant l'Hypothèse 2. On suppose de plus que les applications  $\log^+ \|A\|$  et  $\log^+ \|A^{-1}\|$  sont dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ . Les exposants de Lyapounov  $\gamma_1^\pm, \dots, \gamma_N^\pm$  associés à ce cocycle sont définis de façon inductive par  $\gamma_1^\pm = \gamma^\pm$  (les exposants de Lyapounov dominants) et pour  $p \in \{2, \dots, N\}$ ,

$$\sum_{i=1}^p \gamma_i^\pm = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \mathbb{E}(\log \|\wedge^p \Phi(n, \cdot)\|).$$

On peut voir que les sommes  $\sum_{i=1}^p \gamma_i^\pm$  sont en fait les exposants de Lyapounov dominants associés aux cocycles  $\wedge^p \Phi$  lorsque  $p$  varie. Ainsi, les limites existent et ces sommes appartiennent à  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

On peut donner une caractérisation de ces exposants de Lyapounov en fonction de la suite des valeurs singulières des matrices  $\Phi(n, \omega)$ , soit les racines carrées des valeurs propres des matrices  ${}^t(\Phi(n, \omega))(\Phi(n, \omega))$ .

**Proposition 2.1.6.** Si pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda_1(n, \omega) \geq \dots \geq \lambda_N(n, \omega) > 0$  sont les valeurs singulières de  $\Phi(n, \omega)$ , alors, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\forall p \in \{1, \dots, N\}, \gamma_p^\pm = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \mathbb{E}(\log \lambda_p(n, \cdot)) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \lambda_p(n, \omega)$$

En particulier, cette proposition justifie la numérotation des exposants de Lyapounov et le vocable d'exposant de Lyapounov dominant puisqu'elle implique que  $\gamma_1^\pm \geq \dots \geq \gamma_N^\pm$ . On en trouve la démonstration dans [BL85] ou dans [Arn98].

Nous pouvons à présent énoncer le théorème d'Oseledets qui décompose l'espace  $\mathbb{R}^N$  en sous-espaces sur lesquels le comportement asymptotique exponentiel du cocycle considéré est donné par les exposants de Lyapounov que l'on vient de définir. Nous donnons l'énoncé pour les exposants de Lyapounov en  $+\infty$ , l'énoncé est en tout point analogue en  $-\infty$ .

**Théorème 2.1.7** (Oseledets, [Ose68]). *Soit  $\Phi$  un cocycle linéaire de générateur  $(A, \tau)$  vérifiant l'Hypothèse 2. On suppose de plus que l'application  $\log^+ \|A\|$  est dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ .*

*Soient  $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_N$  les exposants de Lyapounov associés en  $+\infty$ . Notons  $r$  le nombre d'exposants de Lyapounov distincts de valeurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  et appelons multiplicité de  $\lambda_i$  le nombre d'exposants de Lyapounov prenant cette valeur.*

*Il existe alors une suite décroissante de sous-espaces mesurables de  $\mathbb{R}^N$ ,  $(\mathcal{V}_i^\omega)_{1 \leq i \leq r+1}$  telle que*

1.  $\{0\} = \mathcal{V}_{r+1}^\omega \subset \mathcal{V}_r^\omega \subset \dots \subset \mathcal{V}_1^\omega \subset \mathbb{R}^N$ .
2.  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \left( x \in \mathcal{V}_i^\omega \setminus \mathcal{V}_{i+1}^\omega \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|\Phi(n, \omega)x\|) = \lambda_i \right)$ .
3.  $\dim(\mathcal{V}_i^\omega) - \dim(\mathcal{V}_{i+1}^\omega)$  est égal à la multiplicité de  $\lambda_i$ .

Ce théorème nous permettra de discuter d'une première approche de la localisation exponentielle à la Section 2.3.

Il est aussi possible de procéder dans l'autre sens pour définir les exposants de Lyapounov. On commence par définir comme exposant de Lyapounov au point  $\omega \in \Omega$  pour le cocycle linéaire  $\Phi$  de générateur  $(A, \tau)$ , tout réel  $\gamma(\omega)$  tel qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^N$  tel que la limite suivante existe et vaut  $\gamma(\omega)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|\Phi(n, \omega)x\| = \gamma(\omega).$$

On définit ici un exposant en  $+\infty$  on peut bien entendu faire de même en  $-\infty$ . Avec cette définition, il n'est pas nécessaire de faire l'Hypothèse 2 sur le cocycle, il n'est d'ailleurs nécessaire de faire aucune hypothèse supplémentaire pour définir  $\gamma$ .

Par contre, si on suppose de plus que  $\tau$  préserve la mesure  $\mathbb{P}$  et que  $\log^+ \|A\|$  est  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ , alors la limite existe pour presque-tout  $\omega \in \Omega$  et elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs  $\gamma_1(\omega) > \gamma_2(\omega) > \dots > \gamma_{k(\omega)}(\omega)$ , ce nombre  $k(\omega)$  étant majoré par  $N$ . La limite  $\gamma(\omega)$  prend la valeur  $\gamma_i(\omega)$  avec une multiplicité  $m_i(\omega)$  qui vaut la dimension du sous-espace de  $\mathbb{R}^N$  sur lequel la limite vaut  $\gamma_i(\omega)$  et on a  $m_1(\omega) + \dots + m_{k(\omega)}(\omega) = N$ . Ce résultat est dû à Oseledets ([Ose68]) et nous en empruntons ici la présentation à [Wil17].

Enfin, si on suppose l'ergodicité de  $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , alors les quantités  $\gamma$ ,  $\gamma_i$ ,  $k$  et  $m_i$  ne dépendent presque-sûrement plus de  $\omega$  et on retrouve le contenu du théorème d'Oseledets tel que nous l'avons présenté.

### 2.1.3 Exposants de Lyapounov dans le cas symplectique

Dans les modèles qui nous intéressent dans la suite, nous sommes amenés à étudier des suites de matrices de transfert qui sont naturellement dans le groupe symplectique du fait du caractère Hamiltonien du flot de ces modèles.

**Définition 2.1.8.** *Le groupe des matrices symplectiques d'ordre  $2N$  est le sous-groupe de  $GL_{2N}(\mathbb{R})$  constitué des matrices  $M$  vérifiant :*

$${}^tMJM = J$$

où  $J$  est la matrice d'ordre  $2N$  définie par  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . On le note  $Sp_N(\mathbb{R})$ . Dans la définition de  $J$ ,  $I$  est la matrice identité  $N \times N$ .

La définition des exposants de Lyapounov donnée à la Définition 2.1.5 dans le cadre du groupe linéaire est toujours valide dans le cadre des cocycles linéaires à valeurs dans  $Sp_N(\mathbb{R})$ . Nous avons même deux propriétés supplémentaires dans ce cadre, à condition de supposer le caractère *i.i.d.* des  $\Phi(n, \cdot)$  lorsque  $n$  varie dans  $\mathbb{Z}$ . La première est que si  $\log^+ \|A\|$  est dans  $L^1(\Omega, P)$  alors, on a aussi  $\log^+ \|A^{-1}\|$  dans  $L^1(\Omega, P)$  et tous les exposants de Lyapounov sont finis. De plus,

$$\forall n < 0, \mathbb{E}(\|\Phi(n, \cdot)\|) = \mathbb{E}(\|(\Phi(-n, \cdot))^{-1}\|) = \mathbb{E}(\|\Phi(-n, \cdot)\|)$$

et  $\gamma^- = \gamma^+$ . De même, pour tout  $i \in \{1, \dots, 2N\}$ ,  $\gamma_i^- = \gamma_i^+$ . En effet, la première égalité vient du caractère *i.i.d.* (et serait fausse sans les espérances) et la seconde inégalité vient du fait que pour une matrice symplectique, sa norme est égale à la norme de son inverse. Dans la suite, dans le cas symplectique, nous pourrions donc omettre les exposants  $+$  et  $-$  sans ambiguïté.

La seconde est une propriété de symétrie spécifique à  $Sp_N(\mathbb{R})$ .

**Proposition 2.1.9.** *Si  $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{2N}$  sont les exposants de Lyapounov associés à un cocycle linéaire à valeurs dans  $Sp_N(\mathbb{R})$  vérifiant l'Hypothèse 2, alors pour tout  $1 \leq i \leq N$  :*

$$\gamma_{2N-i+1} = -\gamma_i.$$

Cette propriété de symétrie nous dit que les exposants de Lyapounov associés à une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires symplectiques peuvent se regrouper par paires et il suffit donc d'étudier les  $N$  premiers exposants,  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ .

Nous terminons cette section de généralités sur les exposants de Lyapounov par un point de vocabulaire.

**Définition 2.1.10.** *On dit que les exposants de Lyapounov sont séparés lorsqu'ils sont distincts :*

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{2N}.$$

En particulier, dans le cas des suites de matrices aléatoires dans  $Sp_N(\mathbb{R})$ , si les exposants de Lyapounov sont séparés, du fait de la relation de symétrie, les  $N$  premiers sont strictements positifs et les  $N$  suivants strictements négatifs :

$$\gamma_1 > \dots > \gamma_N > 0 > \gamma_{N+1} > \dots > \gamma_{2N}.$$

### 2.1.4 Groupe de Fürstenberg

La question de la décroissance exponentielle des fonctions propres associées aux valeurs propres des opérateurs d'Anderson se ramène dans un premier temps à la positivité stricte de leur exposant de Lyapounov dominant. Comme nous allons le voir dans la Section 2.3, la démonstration de la localisation d'Anderson demande en fait beaucoup plus d'efforts que la seule preuve de la positivité stricte de l'exposant dominant. Toutefois, le critère de localisation que nous présenterons implique uniquement un objet algébrique que l'on peut introduire intuitivement dès à présent.

Commençons tout d'abord par une remarque simple. Si on se donne un cocycle linéaire  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{R})$  engendré par  $(A, \tau)$  et tel que  $\Phi$  soit uniformément borné en  $n$  (et intégrable en  $\omega$ ), alors ses exposants de Lyapounov dominants et par suite tous ses exposants de Lyapounov sont nuls. Pour espérer obtenir un exposant dominant non nul, le cocycle  $\Phi$  se doit d'être au moins non borné en  $n$ . Intuitivement, à l'aide des différentes réalisations du cocycle lorsque  $\omega$  varie, on veut pouvoir considérer un grand nombre de produits de matrices distincts, suffisamment pour qu'en espérance on obtienne des suites de produits qui soient "grandes" en norme. Il en est de même pour les produits des inverses si l'on veut étudier le comportement en  $-\infty$ .

L'objet algébrique qui intervient naturellement pour répondre à ce problème est alors le groupe engendré par les matrices  $A(\tau^n(\omega))$  lorsque  $\omega$  et  $n$  varient. Plus précisément, si on considère que ces matrices forment une suite de variables aléatoires  $A(\tau^n(\cdot))$  à valeurs dans  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$  qui sont indépendantes et identiquement distribuées, le groupe à considérer est celui qui est engendré par ces matrices pour  $n = 0$ , soit les  $A(\omega)$ , lorsque  $\omega$  varie. Notons  $\mu$  la loi de la variable aléatoire  $A$  à valeurs dans  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ . C'est aussi la loi commune des variables aléatoires  $A(\tau^n(\cdot))$  lorsque  $n$  parcourt  $\mathbb{Z}$ . Notons également  $\text{supp } \mu$  le support de la loi  $\mu$ .

**Définition 2.1.11** (Groupe de Fürstenberg). *Soit  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A, \tau)$  tel que la suite  $(A(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$ . Le groupe de Fürstenberg associé à  $\Phi$  est l'adhérence du sous-groupe engendré par le support de  $\mu$ . Il est noté  $G_\mu$  et*

$$G_\mu = \overline{\langle \text{supp } \mu \rangle}.$$

Dans cette définition, l'adhérence est prise au sens de la topologie usuelle induite par celle de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  sur  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ . Prendre l'adhérence permet de définir  $G_\mu$  comme un sous-groupe fermé de  $\text{GL}_N(\mathbb{R})$  ce qui fait de lui un groupe de Lie linéaire. Ce point sera essentiel dans l'analyse que nous en ferons dans la suite.

Notons que de part sa définition, plus le support de  $\mu$  est grand, plus le groupe de Fürstenberg contient d'éléments. Dans le cas où  $\mu$  est la loi commune d'une suite de matrices de transfert dont certains coefficients sont aléatoires, comme cela est le cas pour les matrices de transfert associées aux modèles d'Anderson présentés à la Section 1.2.1, plus la loi commune des coefficients aléatoires a un grand support, plus le support de  $\mu$  sera grand.

Dans le cas des modèles d'Anderson, le cas où le groupe de Fürstenberg est le plus petit a priori est celui où les variables aléatoires suivent une loi de Bernoulli. Nous écartons bien entendu le cas où le support de leur loi commune est un singleton, les modèles considérés n'étant plus vraiment aléatoires dans ce cas. Cela explique que dans le cas unidimensionnel, la localisation est plus difficile à démontrer

lorsque les variables aléatoires suivent une loi de Bernoulli que lorsqu'elles suivent une loi plus régulière comme une loi à densité.

## 2.2 Séparabilité des exposants de Lyapounov : une approche algébrique

### 2.2.1 Théorème de Fürstenberg

Comme nous l'avons expliqué à la Section 2.1.4, nous voulons donner un sens au fait que le groupe de Fürstenberg soit suffisamment "gros" pour que cela implique la positivité stricte de l'exposant de Lyapounov dominant. Nous allons même pouvoir affiner cela en donnant des définitions qui impliqueront la séparation des exposants de Lyapounov.

Nous commençons par donner des résultats généraux de séparabilité des exposants de Lyapounov dans  $GL_N(\mathbb{R})$  avant de modifier légèrement ces résultats pour les adapter au cas de  $Sp_N(\mathbb{R})$ .

#### 2.2.1.1 Suites de matrices aléatoires dans $GL_N(\mathbb{R})$

##### 2.2.1.1.1 Théorème de Fürstenberg.

Avant d'énoncer le théorème de Fürstenberg, nous définissons une propriété qui exprime qu'une partie de  $GL_N(\mathbb{R})$  est "grosse" au sens géométrique.

**Définition 2.2.1.** Soit  $S$  une partie de  $GL_N(\mathbb{R})$  :  $S$  est dite **fortement irréductible** s'il n'existe pas de famille finie  $V_1, \dots, V_k$  de sous-espaces stricts de  $\mathbb{R}^N$  telle que :

$$\forall M \in S, M(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k.$$

Ainsi, une partie  $S$  fortement irréductible contient suffisamment de transformations pour pouvoir faire bouger toute réunion finie de sous-espaces stricts.

**Théorème 2.2.2** (Fürstenberg [Fur63]). Soit  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A, \tau)$  tel que la suite  $(A(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $GL_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$ . Notons  $G_\mu$  son groupe de Fürstenberg. Supposons

- (i)  $\log^+ \|A\| \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ ,
- (ii) pour tout  $M \in G_\mu$ ,  $|\det(M)| = 1$ ,
- (iii)  $G_\mu$  n'est pas compact,
- (iv)  $G_\mu$  est fortement irréductible.

Alors, il existe  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \neq 0$ ,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|\Phi(n, \omega)x\|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|\Phi(n, \omega)\|) = \gamma.$$

En particulier l'exposant de Lyapounov dominant de  $\Phi$  est strictement positif.

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons à [BL85].

Sous cette première forme, le théorème de Fürstenberg est suffisant pour traiter le cas de modèles pour lesquels les matrices de transfert sont dans  $GL_2(\mathbb{R})$  et pour lesquelles la question de la stricte positivité ne se pose que pour un seul exposant de Lyapounov, l'exposant dominant. Pour illustrer cette remarque, nous présentons deux exemples de la littérature, les modèles d'Anderson-Bernoulli unidimensionnels à valeurs scalaires dans les cas discret et continu.

### 2.2.1.1.2 Exemple 1 : Modèle d'Anderson-Bernoulli discret $1d$ à valeurs scalaires.

Nous allons appliquer le théorème de Fürstenberg à un premier exemple de suite de matrices aléatoires *i.i.d.* dans  $GL_2(\mathbb{R})$  issu du modèle d'Anderson discret en dimension 1 et à valeurs scalaires.

Soit  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$  un espace de probabilité complet et soit  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires *i.i.d.* sur cet espace, de loi commune  $\nu$  telle qu'il existe  $a \neq b$ ,  $\{a, b\} \subset \text{supp } \nu$  et  $\text{supp } \nu$  est borné.

Posons

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\Omega}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathcal{A}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathbb{P}} \right).$$

Considérons  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  la famille ergodique d'opérateurs aléatoires de spectre presque-sûr  $[-2, 2] + \text{supp } \nu$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega, h_\omega : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \mapsto & (-(u_{n+1} + u_{n-1}) + \omega^{(n)}u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \quad (2.3)$$

Nous avons omis cette fois le paramètre  $\lambda$  qui mesure l'intensité du désordre car comme nous allons voir dans la suite, en dimension 1 et pour des opérateurs à valeurs scalaires, ce paramètre ne joue aucun rôle.

Les matrices de transfert associées à  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  sont données par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall E \in \mathbb{R}, T_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} \omega^{(n)} - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la suite  $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de matrices aléatoires dans  $SL_2(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$  induite par la loi  $\nu$  des variables aléatoires  $\omega^{(n)}$ .

Puisque les matrices de transfert sont *i.i.d.*, le groupe de Fürstenberg est donné par

$$\forall E \in \mathbb{R}, G_{\mu_E} = \overline{\langle \{T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \text{supp } \nu\} \rangle}.$$

Tout d'abord, les matrices dans  $G_{\mu_E}$  sont toutes de déterminant 1. Pour montrer que  $G_{\mu_E}$  n'est pas compact, nous allons exhiber une suite non bornée dans  $G_{\mu_E}$ . Par hypothèse sur la loi de  $\omega^{(0)}$ , on a

$$\left\langle \left( \begin{array}{cc} a - E & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} b - E & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle \subset G_{\mu_E}.$$

Puis,

$$\begin{pmatrix} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mu_E}$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n(a-b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mu_E}$$

qui contient donc une suite non bornée puisque  $a - b \neq 0$ .

Si  $P(\mathbb{R}^2)$  désigne l'espace projectif de  $\mathbb{R}^2$  et si pour  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\bar{x}$  désigne sa classe dans  $P(\mathbb{R}^2)$ , on peut montrer (voir [BL85]) que la forte irréductibilité de  $G_{\mu_E}$  est équivalente (sous les hypothèses (ii) et (iii) du théorème de Fürstenberg) à :

$$\forall \bar{x} \in P(\mathbb{R}^2), \#\{M\bar{x} \mid M \in G_{\mu_E}\} \geq 3.$$

Soit  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \neq 0$ . Supposons que  $x_2 \neq 0$ . Alors, on montre par simple résolution de systèmes que pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , les vecteurs  $Ax$ ,  $A^2x$  et  $A^3x$  sont non colinéaires deux à deux ce qui permet de construire 3 éléments distincts dans  $\{M\bar{x} \mid M \in G_{\mu_E}\}$ . Si  $x_2 = 0$  alors  $x_1 \neq 0$  et on considère  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_{\mu_E}$  puis les vecteurs  $Bx$ ,  $B^2x$  et  $B^3x$  qui sont non colinéaires deux à deux.

Ainsi, le théorème de Fürstenberg s'applique et nous assure que l'exposant de Lyapounov associé à  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est strictement positif. On a plus précisément :

$$\forall E \in \mathbb{R}, \gamma(E) > 0.$$

Comme nous le verrons à la Section 2.3, cela impliquera la localisation d'Anderson dans tout le spectre presque-sûr de  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

### 2.2.1.1.3 Exemple 2 : Modèle d'Anderson-Bernoulli continu $1d$ à valeurs scalaires.

Nous présentons brièvement les résultats de Damanik, Sims et Stolz ([DSS02]) concernant la positivité de l'exposant de Lyapounov associé à un modèle d'Anderson-Bernoulli unidimensionnel continu à valeurs scalaires.

Reprenons les mêmes hypothèses probabilistes que dans le modèle discret que nous venons de présenter et considérons la famille ergodique d'opérateurs  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  définie par

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \forall \omega \in \Omega, H_\omega : \quad u &\mapsto -u'' + \left( V_{\text{per}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega^{(n)} f(\cdot - n) \right) u \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $V_{\text{per}}$  est un opérateur de multiplication par une fonction  $\mathbb{Z}$ -périodique déterministe localement intégrable et où  $f$  est une fonction non nulle intégrable et à support dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Pour ce modèle, il est prouvé dans [DSS02] qu'il existe un ensemble discret  $M \subset \mathbb{R}$  tel que pour tout  $E \in \mathbb{R} \setminus M$ , le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  associé à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est non compact et fortement irréductible. Il en découle que pour tout  $E \in \mathbb{R} \setminus M$ ,  $\gamma(E) > 0$ .

L'existence d'un ensemble discret d'énergies pour lesquelles les hypothèses du théorème de Fürstenberg ne sont pas vérifiées se retrouvera dans tous nos modèles continus. Cet ensemble discret est vide en général pour les modèles discrets.

La démonstration du résultat de positivité stricte de l'exposant de Lyapounov dominant associé à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est nettement plus délicate que dans le cas discret. Pour les détails nous renvoyons directement à [DSS02]. La principale difficulté qui apparaît avec les modèles continus est que les matrices de transfert n'ont plus une forme explicite comme dans le cas discret, mais nécessite de résoudre un système différentiel sur les intervalles  $[n, n+1]$ . Il s'agit alors d'essayer de trouver une expression des solutions intervenant dans les matrices de transfert qui permet de vérifier les hypothèses du théorème de Fürstenberg. Dans [DSS02], l'idée est de considérer tout d'abord les solutions de Floquet de  $-u'' + V_{\text{per}}u = Eu$  puis de s'en servir pour construire des solutions de Jost de  $-u'' + (V_{\text{per}} + f)u = Eu$ . On se sera auparavant ramené au cas où  $a = 0$  et  $b = 1$  et on est donc amené à résoudre sur un intervalle  $[n, n+1]$  soit  $-u'' + V_{\text{per}}u = Eu$ , soit  $-u'' + (V_{\text{per}} + f)u = Eu$  pour déterminer les deux matrices de transfert qui sont contenues dans le groupe de Fürstenberg.

Dans le premier cas, la matrice de transfert obtenue sera celle d'une rotation, dans le second elle sera une combinaison linéaire de rotations. L'idée est alors de partir d'un vecteur unitaire dans le plan et de lui appliquer la deuxième matrice de transfert. En choisissant bien la direction  $\theta_0$  du vecteur unitaire initial, on obtient un nouveau vecteur de norme strictement supérieure à 1 et de direction  $\theta_1$ . En appliquant à nouveau la deuxième matrice de transfert on obtient un nouveau vecteur dont la norme dépend de  $\theta_1$ . En le tournant à l'aide de la première matrice de transfert, on peut modifier  $\theta_1$  en une nouvelle direction de sorte que lorsque l'on applique la seconde matrice de transfert on obtienne un nouveau vecteur de norme strictement plus grande que le deuxième vecteur obtenu. Ainsi de suite on parvient à construire une suite non bornée de vecteurs à partir d'un vecteur unitaire. On a donc construit une suite non bornée dans le groupe de Fürstenberg qui de ce fait est non compact.

Pour la forte irréductibilité, il suffit d'utiliser la matrice de transfert qui est une rotation et on peut alors construire une infinité de directions distinctes par itération à partir d'une direction initiale bien choisie.

L'ensemble discret d'énergies critiques  $M$  est obtenu comme ensemble des zéros des coefficients de réflexion et de transmission des solutions de Jost construites, ces coefficients dépendant analytiquement de  $E$  et  $f$  étant supposée non nulle.

Si le théorème de Fürstenberg suffit à démontrer la stricte positivité de l'exposant de Lyapounov dominant pour ce modèle d'Anderson continu, la vérification de ses hypothèses est nettement plus subtile que dans le cas discret. Nous verrons dans la suite que lorsque l'on passe aux modèles quasi-unidimensionnels, il faudra trouver de nouveaux critères algébriques pour s'en sortir.

#### 2.2.1.1.4 $p$ -forte irréductibilité et $p$ -contractivité.

Si la propriété de forte irréductibilité permet d'étudier la stricte positivité de l'exposant de Lyapounov dominant et suffit à étudier le cas de cocycles dans  $GL_2(\mathbb{R})$ ,



elle ne permet pas de préciser si les autres exposants de Lyapounov sont distincts les uns des autres ou non et qu'en est-il de leur stricte positivité éventuelle. Pour cela, nous allons non seulement avoir besoin d'affiner la définition de la forte irréductibilité, mais aussi d'introduire une notion d'ensemble contractant qui va généraliser l'hypothèse de non-compacité dans le théorème de Fürstenberg.

**Définition 2.2.3.** Soit  $p \in \{1, \dots, N\}$ . On dit qu'une partie  $S$  de  $GL_N(\mathbb{R})$  est ***p-fortement irréductible*** s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces stricts de  $\wedge^p \mathbb{R}^N$ ,  $V_1, \dots, V_k$  telle que :

$$(\wedge^p M)(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

pour tout  $M \in S$ .

Cette définition va remplacer l'hypothèse de forte irréductibilité dans l'énoncé du théorème de séparation des exposants de Lyapounov dans  $GL_N(\mathbb{R})$ . La seconde hypothèse nécessaire sera celle de contractivité. Donnons la définition d'ensemble contractant.

**Définition 2.2.4.** L'indice d'un sous-ensemble  $T$  de  $GL_N(\mathbb{R})$  est le plus petit entier  $r$  tel qu'il existe une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $T$  telle que  $(\|M_n\|^{-1} M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice de rang  $r$ .

Une partie de  $GL_N(\mathbb{R})$  est dite ***contractante*** lorsqu'elle est d'indice 1.

Rappelons qu'une mesure de probabilité  $P$  sur l'espace projectif  $P(\mathbb{R}^N)$  est dite propre lorsque pour tout hyperplan  $H$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $P(\{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^N), x \in H \setminus \{0\}\}) = 0$ .

Si  $T \subset GL_N(\mathbb{R})$  est un ensemble contractant, pour toute mesure de probabilité  $P$  propre sur  $P(\mathbb{R}^N)$ , il existe une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $T$  telle que  $M_n P$  converge faiblement vers une mesure de Dirac.

En effet, soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $T$  telle que  $(\|M_n\|^{-1} M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $M$  de rang 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  tel que  $Mx \neq 0$ , on a  $M_n \bar{x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M \bar{x}$ . Mais, puisque  $P$  est propre et puisque  $\{x \in \mathbb{R}^N, Mx = 0\}$  est un hyperplan, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \bar{x} = M \bar{x} \quad \text{pour } P - \text{presque tout } \bar{x}.$$

Ainsi, si  $\text{Im } M = \text{Vect}(z)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \bar{x} = \bar{z} \quad \text{pour } P - \text{presque tout } \bar{x}.$$

Cela signifie que  $M_n P$  converge faiblement vers  $\delta_{\bar{z}}$  et justifie le terme de contractant pour la partie  $T$ .

On peut voir cette propriété comme l'analogue de la non-compacité dans le cas où  $N = 2$ . En effet, en supposant que toutes les matrices du groupe de Fürstenberg ont un déterminant de module 1 (hypothèse (ii) du Théorème 2.2.2), la non-compacité de  $G_\mu$  est équivalente à son caractère contractant.

Supposons  $G_\mu$  contractant. Soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $G_\mu$  telle que  $(\|M_n\|^{-1} M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $M$  de rang 1. Alors,

$$\begin{aligned} 0 = |\det(M)| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |\det(\|M_n\|^{-1} M_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n\|^{-2} |\det(M_n)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n\|^{-2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En particulier,  $\|M_n\|$  tend vers  $+\infty$  et  $G_\mu$  est non borné donc non compact.

Réciproquement, si  $G_\mu$  est non-contractant, comme c'est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ , il est forcément d'indice 2 puisqu'il ne peut être d'indice 0 ou 1. Soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G_\mu$ . La suite  $(\|M_n\|^{-1}M_n)$  est une suite d'éléments de la sphère unité qui est compacte, on peut donc en extraire une sous-suite convergente, soit  $(\|M_{n_m}\|^{-1}M_{n_m})$ , vers une limite  $M$ . Comme  $G_\mu$  est d'indice 2,  $M$  est de rang 2 donc elle est inversible. Alors par (2.5),

$$0 \neq |\det(M)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|M_{n_m}\|^{-2}.$$

En particulier,  $(\|M_{n_m}\|)_{m \in \mathbb{N}}$  est convergente, donc il en est de même pour la suite  $(M_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ . De toute suite de  $G_\mu$  on peut extraire une sous-suite convergente, donc  $G_\mu$  est compact.

Pour s'adapter à la définition des exposants de Lyapounov faisant intervenir les puissances extérieures de  $\mathbb{R}^N$ , nous précisons la définition d'ensemble contractant.

**Définition 2.2.5.** Soient  $T$  une partie de  $GL_N(\mathbb{R})$  et  $p$  un entier dans  $\{1, \dots, N-1\}$ . On dit que  $T$  est  $p$ -contractant s'il existe une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $T$  telle que la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\wedge^p M_n}{\|\wedge^p M_n\|} = M$$

et soit une matrice de rang 1.

### 2.2.1.1.5 Critère de séparabilité des exposants de Lyapounov dans $GL_N(\mathbb{R})$ .

On peut maintenant énoncer un critère de séparation des exposants de Lyapounov dans  $GL_N(\mathbb{R})$ . Ce théorème est repris de [BL85] et est initialement dû à Guivarch et Raugi (voir [GR85]).

**Théorème 2.2.6** (Guivarch et Raugi, [GR85]). Soit  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A, \tau)$  tel que la suite  $(A(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $GL_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$ . Notons  $G_\mu$  son groupe de Fürstenberg. Soit  $p$  un entier dans  $\{1, \dots, N\}$ . Supposons que  $G_\mu$  est  $p$ -contractant et  $p$ -fortement irréductible et que  $\log^+ \|A\|$  est dans  $L^1(\Omega, P)$ . Alors :

1.  $\gamma_p > \gamma_{p+1}$ .
2. Pour tout élément non nul  $x$  de  $\wedge^p \mathbb{R}^N$  et pour  $P$ -presque tout  $\omega$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\wedge^p (\Phi(n, \omega))x\| = \sum_{i=1}^p \gamma_i.$$

Si les hypothèses de  $p$ -forte irréductibilité et de  $p$ -contractivité sur  $G_\mu$  sont vérifiées pour tout  $p$  on obtient la séparabilité des exposants de Lyapounov.

### 2.2.1.2 Suites de matrices aléatoires dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la Section 1.2.1, les matrices de transfert qui vont apparaître dans les modèles d'Anderson quasi-unidimensionnels, ne seront pas uniquement dans  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  mais plus précisément dans le groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Nous voulons donc obtenir un critère de séparation des exposants de Lyapounov analogue à celui obtenu dans  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ . Malheureusement, l'action de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  sur  $\wedge^2 \mathbb{R}^{2N}$  n'est pas irréductible (donc *a fortiori* pas  $p$ -fortement irréductible). En effet, l'espace engendré par  $\sum_{i=1}^N e_i \wedge e_{N+i}$  est invariant par tout élément de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . La notion de  $p$ -irréductibilité n'est donc pas adaptée au cadre symplectique. Nous allons donc raffiner cette définition pour l'adapter à nos besoins.

Nous introduisons la sous-variété  $p$ -lagrangienne de  $\mathbb{R}^{2N}$ . Soit  $(e_1, \dots, e_{2N})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2N}$ .

**Définition 2.2.7.** *Pour tout  $p$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , soit  $L_p$  le sous-espace de  $\wedge^p \mathbb{R}^{2N}$  engendré par  $\{Me_1 \wedge \dots \wedge Me_p \mid M \in \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})\}$ . On l'appelle le sous-espace  $p$ -lagrangien de  $\mathbb{R}^{2N}$ .*

L'espace projectif  $P(L_p)$  est l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension  $p$  dans  $\mathbb{R}^{2N}$  pour la forme symplectique canonique.

**Définition 2.2.8.** *Soient  $T$  une partie de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  et  $p$  un entier dans  $\{1, \dots, N\}$ . On dit que  $T$  est  $L_p$ -fortement irréductible s'il n'existe pas d'union finie  $W$  de sous-espaces stricts de  $L_p$  telle que  $\wedge^p M(W) = W$  pour tout  $M \in T$ .*

Par sous-espace strict, on entend sous-espace de  $L_p$  différent de  $L_p$  et de  $\{0\}$ . Le fait de se restreindre à des sous-espaces stricts de  $L_p$  permet d'éviter l'écueil sur lequel butait la première définition.

On peut alors énoncer le théorème nous donnant le principal critère de séparation des exposants de Lyapounov.

**Théorème 2.2.9** ([BL85]). *Soit  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A, \tau)$  tel que la suite  $(A(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$ . Notons  $G_\mu$  son groupe de Fürstenberg. Soit  $p$  un entier dans  $\{1, \dots, N\}$ . Supposons que  $G_\mu$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible et que  $\log^+ \|A\|$  est dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors :*

1.  $\gamma_p > \gamma_{p+1}$ .
2. Pour tout élément non nul  $x$  de  $L_p$  et pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\wedge^p (\Phi(n, \omega))x\| = \sum_{i=1}^p \gamma_i.$$

Ce résultat va surtout nous intéresser sous la forme du corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.10.** *Soit  $\Phi : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A, \tau)$  tel que la suite  $(A(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$ . Notons  $G_\mu$  son groupe de Fürstenberg. Supposons que  $G_\mu$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout*

$p \in \{1, \dots, N\}$  et que  $\log^+ \|A\|$  est dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors, les exposants de Lyapounov associés à  $\Phi$  sont séparés et en particulier :

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_N > 0.$$

Le lien est fait entre d'une part une propriété dynamique associée à un cocycle linéaire à valeurs dans le groupe symplectique, en l'occurrence la séparation de ses exposants de Lyapounov, et des propriétés plus géométriques d'un objet algébrique associé à ce cocycle, le sous-groupe de Fürstenberg. Cela constitue un critère très utile en pratique, puisqu'il permet de ne pas avoir à étudier directement des limites de produits matriciels, mais plus simplement de se ramener à des produits finis de telles matrices dans le groupe de Fürstenberg.

## 2.2.2 Le critère de Goldsheid-Margulis et ses applications

### 2.2.2.1 Le critère de Goldsheid-Margulis

Lorsque l'on souhaite vérifier les hypothèses du Corollaire 2.2.10 sur des exemples concrets d'opérateurs d'Anderson quasi-unidimensionnels, on se heurte à une réelle difficulté. Même dans le cas du modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel présenté par Goldsheid et Margulis dans [GM89] dont les matrices de transfert sont explicites et d'une forme relativement simple, les hypothèses de  $p$ -contractivité et surtout de  $L_p$ -forte irréductibilité ne se vérifient pas directement.

C'est pour cette raison que Goldsheid et Margulis ont introduit dans [GM89] un critère permettant de vérifier plus simplement qu'un sous-groupe du groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ .

Nous commençons par rappeler la définition de la densité au sens de la topologie de Zariski dans un groupe de Lie linéaire. Nous garderons en tête que nous souhaitons appliquer ces définitions et résultats au groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ .

Définissons tout d'abord la topologie de Zariski sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ . On identifie pour cela  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}^{N^2}$ . Alors, pour  $S$  une partie quelconque de  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_{N^2}]$ , on pose :

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{N^2} \mid \forall P \in S, P(x) = 0\}.$$

L'ensemble  $V(S)$  est constitué des zéros communs aux polynômes de  $S$ . On l'appelle l'ensemble algébrique affine défini par  $S$ . On peut alors prouver qu'une intersection quelconque d'ensembles algébriques affines en est encore un, ainsi que pour les réunions finies.

Ces ensembles algébriques affines sont donc les fermés d'une topologie sur  $\mathbb{R}^{N^2}$  que l'on appelle topologie de Zariski. La topologie de Zariski est celle pour laquelle les fermés sont les zéros communs de familles de polynômes.

Si on regarde la topologie de Zariski sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , cela revient à regarder des polynômes en les  $N^2$  coefficients matriciels. La topologie de Zariski sur  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  est la topologie induite par la topologie de Zariski que l'on vient de définir. Il en sera de même pour la topologie de Zariski sur tout sous-groupe de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ , comme par

exemple  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  (qui est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$  pour être tout à fait précis) ou le sous-groupe de Fürstenberg associé à une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires.

On peut maintenant définir l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.2.11.** *L'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble  $G$  de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  est le plus petit fermé de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  pour la topologie de Zariski qui contient  $G$ . On le note  $\mathrm{Cl}_Z(G)$ . Un sous-ensemble  $G' \subset G$  est dit Zariski-dense dans  $G$  lorsque  $\mathrm{Cl}_Z(G') = G$ .*

En d'autres termes, si  $G$  est un sous-ensemble de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ ,  $\mathrm{Cl}_Z(G)$  est l'ensemble des zéros dans  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  des polynômes nuls sur  $G$ . Ainsi  $G'$  est Zariski-dense dans  $G$  si tout polynôme nul sur  $G'$  est aussi nul sur  $G$ .

L'exemple classique de sous-ensemble Zariski-dense dans un autre est  $\mathbb{Z}$  qui est Zariski-dense dans  $\mathbb{R}$ .

Une propriété importante de l'adhérence de Zariski est qu'elle préserve la structure de groupe : si  $G$  est un sous-groupe fermé de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ , alors son adhérence de Zariski  $\mathrm{Cl}_Z(G)$  est encore un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ .

Comme de plus l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble est aussi un fermé pour la topologie usuelle, on en déduit que l'adhérence de Zariski d'un sous-groupe de Lie de  $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  est encore un groupe de Lie linéaire. Cela sera essentiel pour pouvoir considérer l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski du sous-groupe de Fürstenberg.

Nous disposons maintenant des définitions élémentaires nous permettant de présenter le critère de Goldsheid et Margulis.

**Théorème 2.2.12** (Goldsheid et Margulis, [GM89]). *Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Si  $G$  est Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ , alors  $G$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ .*

Un énoncé un peu plus général et la démonstration se trouvent dans [GM89]. Remarquons que ce critère donne une idée plus claire et plus quantitative de l'intuition initiale qui nous faisait penser que pour obtenir des exposants de Lyapounov strictement positifs et séparés, il fallait montrer que le groupe de Fürstenberg est "gros". Si on avait déjà obtenu que la  $p$ -contractivité (grosseur "topologique") et la  $L_p$ -forte irréductibilité (grosseur "géométrique") impliquaient la séparabilité des exposants de Lyapounov, nous avons à présent une notion plus immédiate à manipuler : si le groupe de Fürstenberg est algébriquement "gros" au sens où il est Zariski-dense dans le groupe symplectique, alors il y a séparabilité des exposants de Lyapounov. Ce critère permet surtout de ramener le problème de dynamique de la séparabilité et de la positivité stricte des exposants de Lyapounov à un problème algébrique de reconstruction d'un groupe de Lie. Le point clé est le fait que l'adhérence de Zariski d'un groupe de Lie linéaire est encore un groupe de Lie linéaire. Comme nous le verrons par la suite, le fait que l'on travaillera le plus souvent dans le groupe symplectique qui est connexe, permettra en plus de ramener la plupart des calculs au niveau des algèbres de Lie, ce qui est encore plus simple car les calculs algébriques dans un groupe deviennent des calculs d'algèbre linéaire, au crochet de Lie près.

### 2.2.2.2 Application au modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel

Toujours dans [GM89], se trouve également la preuve de la séparabilité des exposants de Lyapounov associés à l'opérateur d'Anderson-Bernoulli discret quasi-

unidimensionnel dont nous présentons un résumé maintenant.

Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{\mathbb{P}}_i)$  un espace de probabilité complet et posons

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}_N, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_N, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{P}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathbb{P}}_N \right) \quad (2.6)$$

On souhaite étudier la famille d'opérateurs  $\{h_\omega^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega, h_\omega^{(N)} : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \\ (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \mapsto & -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega^{(n)}} u_n \end{array} \quad (2.7)$$

où

$$V_{\omega^{(n)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & \omega_N^{(n)} \end{pmatrix}$$

et  $(\omega_1^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (\omega_N^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  sont des suites de variables aléatoires réelles *i.i.d.* sur respectivement  $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\mathcal{A}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_1), \dots, (\tilde{\Omega}_N, \tilde{\mathcal{A}}_N, \tilde{\mathbb{P}}_N)$  et de lois communes respectives  $\nu_1, \dots, \nu_N$  dont le support contient au moins 2 points (par exemple 0 et 1 si ce sont des variables de Bernoulli). On pose également  $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)})$  de loi  $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N$ .

Les matrices de transfert associées à  $\{h_\omega^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  sont données par

$$T_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} V_{\omega^{(n)}} - E & -I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices de transfert forment une suite de matrices *i.i.d.* dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  de loi commune  $\mu_E$  et on peut donc considérer le sous-groupe de Fürstenberg associé  $G_{\mu_E}$  qui du fait du caractère *i.i.d.* vaut

$$G_{\mu_E} = \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \mathrm{supp}(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N) \rangle}.$$

D'après l'hypothèse faite sur les supports des  $\nu_i$  on a

$$G_{\{0,1\}}(E) := \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N \rangle} \subset G_{\mu_E}$$

et il suffit donc de montrer que le sous-groupe engendré par  $2^N$  matrices,  $G_{\{0,1\}}(E)$ , est Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Notons  $X(E)$  son adhérence de Zariski dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  et  $\mathfrak{a}(E)$  l'algèbre de Lie de  $X(E)$ . Rappelons que l'algèbre de Lie de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  est donnée par

$$\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -{}^t a \end{pmatrix}, a \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), b_1 \text{ et } b_2 \text{ symétriques} \right\}.$$

Pour  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $E_{ij}$  la matrice dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  avec un coefficient 1 à l'intersection de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne, et 0 ailleurs. On pose aussi

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, X_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{ij} = {}^t X_{ij}, Z_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire sur des crochets de Lie de ces trois matrices permet de montrer que  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$  est engendrée par

$$\{X_{ij}, Y_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1\}.$$

De là, nous sommes ramenés à démontrer que, pour tout  $E \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha(E)$  contient toutes les matrices  $X_{ij}$  et  $Y_{ij}$  pour  $i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1$ . On fixe  $E \in \mathbb{R}$  et on procède par étapes successives.

Tout d'abord, on prouve que les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix}$$

où  $D$  est diagonale, sont dans  $X(E)$ . Pour cela on choisit  $T_1$  et  $T_2$  dans  $G_{\{0,1\}}(E)$  associées à deux réalisations  $V_1$  et  $V_2$  de  $V_{\omega(0)}$ .  $X(E)$  étant un groupe, il est stable par inversion et produit. On a donc :

$$B := T_1 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} I & V_1 - V_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in G_{\{0,1\}}(E).$$

Fixons  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On peut choisir  $V_1$  et  $V_2$  de sorte que

$$B = \begin{pmatrix} I & E_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z} : B^n = \begin{pmatrix} I & nE_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ . Soit  $P$  un polynôme dans  $\mathbb{R}[X_{1,1}, \dots, X_{2N,2N}]$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{Z}, P(B^n) = 0$ . On fixe  $X_{jj} = 1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, 2N\}$  et  $X_{r,l} = 0$  pour  $r \neq l$  excepté pour  $X_{i,N+i}$  et on considère :

$$\tilde{P} : X_{i,N+i} \mapsto P \left( \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & X_{i,N+i} & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \right)$$

qui est un polynôme en une variable avec une infinité de racines, les  $n \in \mathbb{Z}$ . Donc  $\tilde{P}$  est le polynôme nul et :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \tilde{P}(\alpha) = 0$ . Cela signifie que  $P$  s'annule sur toutes les matrices  $\begin{pmatrix} I & \alpha E_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ . Par définition de l'adhérence de Zariski,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} I & \alpha E_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E).$$

Comme on a fixé un  $i$  arbitraire, on a :  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} I & \alpha_1 E_{11} \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I & \alpha_N E_{NN} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \alpha_1 E_{11} + \dots + \alpha_N E_{NN} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E).$$

Cela implique que  $\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$  pour toute matrice diagonale  $D$ .

Nous avons beaucoup détaillé cette première étape car c'est celle où intervient la topologie de Zariski. Les autres étapes sont une suite de va et vient entre  $X(E)$  et son algèbre de Lie : l'obtention d'éléments dans  $X(E)$  permet de déduire des éléments contenus dans son algèbre de Lie et par combinaisons linéaires et crochets de Lie on obtient de nouveaux éléments dans l'algèbre de Lie. En en prenant l'exponentielle on récupère des éléments dans  $X(E)$  que l'on n'aurait pas pu construire facilement à l'aide uniquement du produit et de l'inverse.

Pour illustrer ce type de va et vient, détaillons une seconde étape. Une fois la première étape terminée, on déduit par dérivation au point  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  que

$$\begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E) \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$$

pour toutes matrices diagonales  $D_1$  et  $D_2$ . En sommant et en prenant pour  $D_1$  et  $D_2$  l'identité et son opposé, on obtient en particulier que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

Mais, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \cos(t)I & \sin(t)I \\ -\sin(t)I & \cos(t)I \end{pmatrix} \in X(E).$$

Pour  $t = \frac{\pi}{2}$  on obtient  $J \in X(E)$ .

Partant de matrices dans  $X(E)$ , on construit de nouvelles matrices dans  $X(E)$  en utilisant l'adhérence de Zariski, puis on en déduit des matrices dans  $\mathfrak{a}(E)$  qui par combinaison linéaire donne  $J$  dans  $\mathfrak{a}(E)$  dont on déduit par exponentiation que  $J \in X(E)$ .

Un autre outil clé dans cette construction est que comme nous sommes dans un groupe de Lie linéaire, si  $z \in \mathfrak{a}(E)$  et  $A \in X(E)$ , alors  $AzA^{-1} \in \mathfrak{a}(E)$ . Cela permet de combiner les éléments construits dans  $X(E)$  avec ceux construits dans  $\mathfrak{a}(E)$  pour obtenir de nouveaux éléments dans  $\mathfrak{a}(E)$  puis dans  $X(E)$  par exponentiation. Nous ne détaillons pas plus la construction algébrique, les principales idées étant déjà illustrées dans les deux premières étapes que nous avons présentées.

Finalement nous obtenons que  $\mathfrak{a}(E) = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$  et par connexité de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  que  $X(E) = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Cela nous permet de déduire que le groupe de Fürstenberg associé à la famille  $\{h_\omega^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  est Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . On déduit de cela que les exposants de Lyapounov associés sont séparés et en particulier ils sont tous strictement positifs et ce pour toute énergie  $E \in \mathbb{R}$ .

En appliquant le théorème d'Oseledets, pour chaque énergie  $E$  fixée, et pour  $P$ -presque tout  $\omega$ , on peut construire  $N$  solutions de  $h_\omega^{(N)} u = Eu$  qui sont exponentiellement décroissantes vers 0 en  $+\infty$ . On peut faire de même en  $-\infty$  avec  $N$  solutions a priori distinctes des  $N$  obtenues en  $+\infty$ . En effet, dans ce cas les exposants de Lyapounov sont tous de multiplicité 1.



### 2.2.2.3 Application a un modèle d'interactions ponctuelles

Je vais maintenant présenter une deuxième application du critère de Goldsheid et Margulis en résumant le résultat que j'ai obtenu et publié en 2009 dans [Bou09a] ainsi que celui obtenu avec Günter Stolz dans [BS07]. Ceux-ci étaient déjà présents dans ma thèse, mais je souhaite les résumer ici afin d'illustrer le critère de Goldsheid et Margulis dans le cadre d'un modèle quasi-unidimensionnel qui est formellement continu mais en réalité intermédiaire entre le discret et le continu.

Soit  $N \geq 1$  un entier. On reprend les notations introduites en (2.6). On étudie  $N$  opérateurs de Schrödinger unidimensionnels continus et déterministes, couplés avec des interactions ponctuelles aléatoires aux points entiers. De façon formelle, un tel modèle est représenté par la famille d'opérateurs de Schrödinger aléatoires suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, H_{P,\omega} = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^{(n)} \delta_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \omega_N^{(n)} \delta_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ . Les nombres  $c_1, \dots, c_N$  sont des réels non nuls,  $\delta_n$  est la distribution de Dirac en  $n$  et  $I_N$  est la matrice identité d'ordre  $N$ . De plus,  $V_0$  désigne l'opérateur de multiplication par la matrice tridiagonale dont les coefficients diagonaux sont nuls et ceux sur les sous et sur diagonales valent 1.

Les suites  $(\omega_1^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (\omega_N^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  sont des suites de variables aléatoires réelles définies sur  $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{\mathbb{P}}_i)$ , *i.i.d.* et de loi commune  $\nu_i$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Ces suites sont supposées indépendantes les unes des autres.

Ainsi, la suite  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}} = ((\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)}))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  de loi commune  $\nu = \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N$ . On suppose enfin que  $\text{supp } \nu \subset \mathbb{R}^N$  est borné et est générateur au sens où le sous-ensemble  $\{x - y \mid x, y \in \text{supp } \nu\}$  engendre  $\mathbb{R}^N$ . Un tel exemple de distribution de variables aléatoires est celui où les composantes  $\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)}$  sont des variables aléatoires réelles indépendantes et dont le support contient au moins 2 points (par exemple 0 et 1 si ce sont des variables de Bernoulli). C'est cet exemple que nous aurons à l'esprit dans la suite.

La définition des opérateurs  $H_{P,\omega}$  dans (2.8) est formelle du fait de la présence des distributions de Dirac. Il convient donc d'en donner une définition précise. Pour cela on suit [Alb+05] et on pose pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$H_{P,\omega} = \bigoplus_{i=1}^N H_{\omega_i} + V_0 \quad (2.9)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $H_{\omega_i}$  est l'opérateur agissant sur  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  de domaine :

$$D(H_{\omega_i}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f, f' \text{ sont absolument continues sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f'' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}, f'(n^+) = f'(n^-) + c_i \omega_i^{(n)} f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.10)$$

où les dérivées à gauche et à droite  $f'(n^-)$  et  $f'(n^+)$  en tout point entier  $n$  sont supposées exister. Sur ce domaine, l'opérateur agit par  $H_{\omega_i}f = -f''$ .

Ces opérateurs sont auto-adjoints et bornés inférieurement car la mesure  $\nu$  est à support borné (voir [Alb+05]). De plus l'opérateur de multiplication  $V_0$  est borné et auto-adjoint car réel. Donc comme perturbation bornée d'un opérateur auto-adjoint, l'opérateur  $H_{P,\omega}$  défini par (2.9) est auto-adjoint pour tout  $\omega$ . Enfin, la famille d'opérateurs aléatoires  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mathbb{Z}$ -ergodique et son spectre presque-sûr est inclus dans  $\mathbb{R}$ .

Dans ce modèle, les paramètres aléatoires interviennent ponctuellement en chaque entier, au travers de conditions d'interface exprimées sur les dérivées des fonctions propres. Cela explique que l'on parle d'interactions ponctuelles. Ce modèle s'avère très proche d'un modèle discret comme le modèle d'Anderson discret quasi unidimensionnel étudié dans [GM89] ou [KLS90]. Du point de vue de l'aléa, on retrouve la même dépendance des matrices de transfert que dans le cas discret, celui-ci n'intervenant qu'aux points entiers. En revanche, le fait de considérer un Laplacien continu en dimension 1 au lieu d'un Laplacien discret change la dépendance des matrices de transfert vis-à-vis du paramètre d'énergie, ce qui conduit à l'existence d'énergies critiques où les exposants de Lyapounov pourraient s'annuler. Ces énergies critiques n'existent pas dans le cas discret comme nous l'avons vu à la Section 2.2.2.2.

Pour déterminer les matrices de transfert associées à  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ , on considère pour  $E \in \mathbb{R}$  le système différentiel  $H(\omega)u = Eu$  dont les solutions sont des fonctions  $u = (u_1, \dots, u_N) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$  vérifiant  $-u'' + V_0u = Eu$  sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et telles que chaque fonction coordonnée  $u_i$  satisfait aux conditions aux bords :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall n \in \mathbb{Z}, u'_i(n^+) = u'_i(n^-) + c_i \omega_i^{(n)} u_i(n).$$

Si  $u$  est une telle solution, la matrice de transfert  $T_{\omega^{(n)}}^{[n, n+1]}(E)$  de  $n^+$  à  $(n+1)^+$  est définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} u((n+1)^+) \\ u'((n+1)^+) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}^{[n, n+1]}(E) \begin{pmatrix} u(n^+) \\ u'(n^+) \end{pmatrix}.$$

La suite  $\left(T_{\omega^{(n)}}^{[n, n+1]}(E)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de matrices *i.i.d.* dans  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$  dont on note la loi commune  $\mu_E$ . Comme dans le cas du modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel, on peut calculer explicitement les matrices de transfert. Pour cela on commence par résoudre le système différentiel libre sur l'intervalle ouvert  $]n, n+1[$ . Par 1-périodicité de  $V_0$ , il suffit de le faire sur l'intervalle  $]0, 1[$ . On obtient alors la matrice de transfert de  $n^+$  à  $(n+1)^-$  :

$$T_{]n, n+1[}(E) = T_{]0, 1[}(E) = \exp \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ V_0 - EI_N & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons aussi, pour toute matrice  $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , la matrice  $M(Q) \in \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$  définie par  $M(Q) = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ Q & I_N \end{pmatrix}$ . Alors, en utilisant les conditions aux bords, la matrice de transfert de  $(n+1)^-$  à  $(n+1)^+$  n'est autre que  $M(\text{diag}(c_1 \omega_1^{(n)}, \dots, c_N \omega_N^{(n)}))$ . Finalement, la matrice de transfert de  $n^+$  à  $(n+1)^+$  est le produit des matrices de transfert

de  $n^+$  à  $(n+1)^-$  et de  $(n+1)^-$  à  $(n+1)^+$ .

$$T_{\omega^{(n)}}^{]n, n+1[}(E) = M(\text{diag}(c_1 \omega_1^{(n)}, \dots, c_N \omega_N^{(n)})) T_{]0, 1[}(E).$$

Le premier facteur contient la partie aléatoire et est indépendant de l'énergie  $E$ . Le second facteur est déterministe et ne dépend que de  $E$ .

Enfin, le caractère *i.i.d.* des matrices de transfert permet d'obtenir la description interne suivante pour le groupe de Fürstenberg :

$$G_{\mu_E} = \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}^{]0, 1[}(E) \mid \omega^{(0)} \in \text{supp } \nu \rangle}.$$

Dans le cas où  $N = 2$  nous avons obtenu avec Günter Stolz dans [BS07] le résultat suivant.

**Théorème 2.2.13.** *Il existe un sous-ensemble discret  $\mathcal{S}_{P,2}$  de  $\mathbb{R}$ , tel que pour tout nombre réel  $E \notin \mathcal{S}_{P,2}$ ,  $G_{\mu_E}$  est Zariski-dense dans  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Ainsi*

$$\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,2}, \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0.$$

Dans la preuve de ce théorème, la première chose à faire est de calculer explicitement l'exponentielle de matrice dans  $T_{]0, 1[}(E)$ . Cela conduit à séparer la démonstration en plusieurs cas suivant la valeur de l'énergie  $E$ . En effet, pour  $E > 1$ , si

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors

$$T_{]0, 1[}(E) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} R_{\alpha, \beta} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

où  $\alpha = \sqrt{E-1}$ ,  $\beta = \sqrt{E+1}$ , et

$$R_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & \frac{1}{\beta} \sin \beta \\ -\alpha \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Pour  $E \in ]-1, 1[$ , on obtient la même expression en changeant dans  $R_{\alpha, \beta}$  les cosinus et sinus de  $\alpha$  par des cosinus et sinus hyperboliques. Pour  $E < -1$  on obtient encore la même expression en changeant dans  $R_{\alpha, \beta}$  tous les cosinus et sinus par des cosinus et sinus hyperboliques.

Avec cette forme explicite des matrices de transfert, on peut procéder à une preuve en plusieurs étapes du fait que l'adhérence de Zariski de  $G_{\mu_E}$  est égale à  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$  pour toutes les énergies  $E$  sauf celles dans un ensemble discret que l'on obtient en cours de démonstration. Tout d'abord, en exploitant la définition de l'adhérence de Zariski et en utilisant l'hypothèse faite sur le support de  $\nu$ , on montre que pour toute matrice diagonale  $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix}$  est dans l'algèbre de Lie de  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ . Ainsi  $M(Q)$  est dans  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$  pour toute matrice diagonale  $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Puis, on utilise la propriété de conjugaison dans les groupes de Lie linéaires pour conjuguer  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix}$  par des puissances de  $R_{\alpha, \beta}$  et rester dans le groupe  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ . En choisissant

quatre telles puissances on obtient une famille de quatre matrices dans l'algèbre de Lie de  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$  dont on montre qu'elle est libre dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  hormis pour un ensemble discret de valeurs de  $E$ . Ces valeurs de  $E$  sont celles pour lesquelles s'annule le déterminant  $4 \times 4$  formé par les quatre colonnes dont les coefficients sont les coefficients non nuls des quatre matrices considérées. Ainsi, on obtient un sous-espace de dimension 4 contenu dans l'algèbre de Lie de  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$  et en prenant des matrices particulières dans cet espace, on peut en obtenir de nouvelles par crochet de Lie. Puis on considère alors une nouvelle famille de 6 matrices dont les coefficients non nuls sont complémentaires des coefficients non nuls de la première famille de 4 matrices considérée et qui sont encore dans l'algèbre de Lie de  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ . Là encore, on doit exclure un ensemble discret de valeurs de  $E$  pour lesquelles un déterminant  $6 \times 6$  s'annule. On obtient alors une famille libre de 10 matrices dans l'algèbre de Lie de  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ . Comme l'algèbre de Lie de  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$  est de dimension 10 on a bien montré l'égalité de ces deux algèbres de Lie et par connexité de  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$ , l'égalité  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E}) = \text{Sp}_2(\mathbb{R})$ . D'où le résultat voulu par le critère de Goldsheid et Margulis.

Dans [Bou09a], j'ai étendu ce résultat à  $N = 3$  en obtenant au passage un résultat intéressant de propagation de l'aléa au sens où lorsque  $N = 3$ , on peut cesser de supposer que  $c_2$  ne s'annule pas et on peut donc avoir éventuellement une couche du milieu déterministe.

**Théorème 2.2.14.** *Supposons  $N = 3$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1$  et  $c_2$  non nuls. Il existe alors un ensemble discret  $\mathcal{S}_{P,3} \subset \mathbb{R}$  tel que pour tout  $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,3}$ ,  $G_{\mu_E}$  est Zariski-dense dans  $\text{Sp}_3(\mathbb{R})$ . Ainsi*

$$\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,3}, \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > \gamma_3(E) > 0.$$

La démonstration de ce résultat est très similaire au cas  $N = 2$ , si ce n'est que cette fois-ci il faut considérer quatre cas distincts pour les énergies,  $E < -\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2} < E < 1$ ,  $1 < E < \sqrt{2}$  et  $E > \sqrt{2}$ . A la première étape on obtient à nouveau que  $M(Q)$  est dans  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$  pour toute matrice diagonale  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et si  $c_2 = 0$  on obtient ce résultat pour  $Q$  diagonale avec un second coefficient diagonal nul. Mais cela n'affecte nullement le reste de la construction qui fait cette fois intervenir un déterminant  $8 \times 8$  puis un déterminant  $13 \times 13$  pour obtenir finalement une famille libre de 21 matrices dans l'algèbre de Lie de  $\text{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ , sachant que la dimension de  $\text{Sp}_3(\mathbb{R})$  est 21. A nouveau les valeurs discrètes de  $E$  que l'on doit exclure sont celles pour lesquelles les deux déterminants s'annulent.

Le fait que l'on puisse choisir  $c_2 = 0$  dans le Théorème 2.2.14 signifie que l'on est en présence d'un phénomène de propagation de l'aléa. Essayons de donner une explication plus précise de ce phénomène. Si  $c_2 = 0$ , ou encore si  $H_{\omega_2}$  est déterministe, on conserve le résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov dans le cas  $N = 3$ . Toutefois, la théorie de Kotani (voir Section 2.3) nous enseigne que la non annulation des exposants de Lyapounov est liée à la présence d'aléa dans le modèle considéré. Heuristiquement, si la deuxième couche dans notre modèle devient déterministe, nous ne devrions pas avoir séparabilité des exposants de Lyapounov. Mais, la première couche et la troisième couche sont couplées à la deuxième au travers du potentiel déterministe  $V_0$  et l'aléa des première et troisième couches est en quelque sorte transporté sur la deuxième. A notre connaissance il n'y a que deux autres articles dans lesquels on observe ce phénomène, celui de Glaffig, [Gla90], et celui de Goldsheid, [Gol95].

Dans [Gla90], Glaffig prouve le caractère  $C^\infty$  de la densité d'états intégrée d'un opérateur de Schrödinger aléatoire quasi-unidimensionnel pour lequel l'aléa est très

fort sur la première couche au sens où la loi commune des variables aléatoires  $\omega_1^{(n)}$  (avec nos notations) est à densité dans un certain espace de Sobolev. Sur les autres couches, les variables aléatoires peuvent être seulement des variables de Bernoulli donc avec des lois singulières. Ces hypothèses devraient a priori induire une régularité au mieux Höldérienne; c'est ce que l'on obtient dans le cas Bernoulli, voir Section 3.2. Toutefois, Glaffig obtient une densité d'états intégrée  $C^\infty$ , donc tout se passe comme si le couplage des différentes couches permettait à la forte régularité de la première de se propager aux autres.

Dans [Gol95] le phénomène observé est plus comme celui que nous constatons au Théorème 2.2.14. En effet, Goldscheid obtient la Zariski densité du groupe de Fürstenberg pour le modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel en ne supposant de l'aléa que sur les première et deuxième couche et il autorise les autres couches à être déterministe. Le couplage des couches et la forme simple des matrices de transfert dans le cas discret permet d'obtenir une propagation de l'aléa aux autres couches depuis les deux premières.

#### 2.2.2.4 Application a un modèle d'Anderson-Bernoulli à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, je présente un exemple de modèle d'Anderson-Bernoulli continu et quasi-unidimensionnel, dans le cas où le nombre de couches est 2. Il s'agit là encore d'un modèle étudié avec Günter Stolz et paru dans [BS07], je vais donc seulement présenter brièvement le résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov contenu dans cet article, afin de faire la transition avec les méthodes algébriques plus avancées présentées à la Section 2.2.3.

Comme précédemment, nous reprenons les notations introduites en (2.6) avec cette fois  $N = 2$ .

Dans [BS07], nous avons obtenu un premier résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov pour le modèle d'Anderson-Bernoulli continu quasi-unidimensionnel suivant :

$$\forall \omega \in \Omega, H_\omega^{(2)} = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n) & 0 \\ 0 & \omega_2^{(n)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ , où  $(\omega_1^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\omega_2^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  sont deux suites de variables aléatoires *i.i.d.* sur respectivement  $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\mathcal{A}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_1)$  et  $(\tilde{\Omega}_2, \tilde{\mathcal{A}}_2, \tilde{\mathbb{P}}_2)$  qui sont elles-même indépendantes entre elles. On suppose que le support des deux lois communes de ces variables aléatoires contient  $\{0, 1\}$ .

**Théorème 2.2.15.** *Il existe un ensemble dénombrable  $\mathcal{C}$  tel que, pour tout  $E \in ]2, +\infty[ \setminus \mathcal{C}$ , le groupe de Fürstenberg de  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$  est Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Ainsi*

$$\forall E \in ]2, +\infty[ \setminus \mathcal{C}, \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0.$$

D'après le caractère *i.i.d.* des variables aléatoires, les matrices de transfert seront elles aussi *i.i.d.* de loi commune  $\mu_E$  et le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  est donc engendré par les matrices de transfert de 0 à 1. De plus comme le support des deux lois communes contient  $\{0, 1\}$ , il suffit de considérer 4 matrices de transfert, celles correspondant aux  $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}) \in \{0, 1\}^2$ .

Pour  $E \in \mathbb{R}$  fixé, la matrice de transfert  $T_{\omega^{(0)}}(E)$  est de la forme  $\exp \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ V_{\omega^{(0)}} - EI_2 & 0 \end{pmatrix}$  où  $V_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 \\ 1 & \omega_2^{(0)} \end{pmatrix}$  et  $I_2$  est la matrice identité d'ordre 2. Il faut donc calculer une exponentielle de matrice qui cette fois dépend de  $\omega$ , contrairement au cas du modèle d'interactions ponctuelles. Cela complique fortement les calculs dans la suite. On a

$$V_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 \\ 1 & \omega_2^{(0)} \end{pmatrix} = S_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{\omega^{(0)}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\omega^{(0)}} \end{pmatrix} S_{\omega^{(0)}}^{-1},$$

où les matrices  $S_{\omega^{(0)}}$  sont orthogonales et les valeurs propres de  $V_{\omega^{(0)}}$ ,  $\lambda_1^{\omega^{(0)}} \leq \lambda_2^{\omega^{(0)}}$ , sont réelles. On peut calculer ces valeurs propres et ces matrices orthogonales pour les différentes valeurs de  $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^2$ . La plus grande valeur propre obtenue est 2 (pour  $\omega^{(0)} = (1, 1)$ ).

On introduit aussi les matrices définies par blocs :

$$R_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} S_{\omega^{(0)}} & 0 \\ 0 & S_{\omega^{(0)}} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on suppose que  $E > 2$  pour que  $E$  soit strictement supérieur à toutes les valeurs propres de toutes les matrices  $M_{\omega^{(0)}}$ . En utilisant l'abréviation  $r_i := \sqrt{E - \lambda_i^{\omega^{(0)}}$ ,  $i = 1, 2$ , on obtient l'expression suivante pour les matrices de transfert :

$$T_{\omega^{(0)}}(E) = R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \cos(r_1) & 0 & \frac{1}{r_1} \sin(r_1) & 0 \\ 0 & \cos(r_2) & 0 & \frac{1}{r_2} \sin(r_2) \\ -r_1 \sin(r_1) & 0 & \cos(r_1) & 0 \\ 0 & -r_2 \sin(r_2) & 0 & \cos(r_2) \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1}. \quad (2.12)$$

Pour  $E < 2$  on peut bien sûr expliciter aussi les matrices de transfert comme on vient de le faire. Suivant la position de  $E$  par rapport aux valeurs propres  $\lambda_i^{\omega^{(0)}}$ , certains sinus et cosinus sont transformés en des sinus hyperboliques et des cosinus hyperboliques. Le problème est que les arguments que l'on va utiliser à la première étape sont uniquement adaptés au cas elliptique (présence uniquement de sinus et cosinus) et non pas au cas hyperbolique (présence uniquement de cosinus et sinus hyperboliques) ou intermédiaire (présence des deux types de sinus et cosinus).

On fixe donc  $E \in ]2, +\infty[$ . Pour  $\omega^{(0)} = (0, 0)$  on a comme matrice de transfert

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & 0 & \frac{1}{\alpha_1} \sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2) & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \sin(\alpha_2) \\ -\alpha_1 \sin(\alpha_1) & 0 & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1}$$

où  $\alpha_1 = \sqrt{E - \lambda_1^{(0,0)}} = \sqrt{E - 1}$  et  $\alpha_2 = \sqrt{E - \lambda_2^{(0,0)}} = \sqrt{E + 1}$ .

Soit  $\mathcal{C}_1$  l'ensemble dénombrable des énergies telles que  $2\pi$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  soient rationnellement indépendants. On suppose maintenant que  $E \in ]2, +\infty[ \setminus \mathcal{C}_1$ . L'indépendance rationnelle de  $(2\pi, \alpha_1, \alpha_2)$  implique par densité des trajectoires sur le tore

$\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$  qu'il existe une suite d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$(n_k \alpha_1, n_k \alpha_2) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (2.13)$$

avec convergence dans  $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ . Comme le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  est fermé pour la topologie usuelle, on en conclut en regardant les puissances  $n_k$ -ième de la matrice de transfert et en passant à la limite que

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in G_{\mu_E}.$$

Cela permet d'obtenir une première matrice dans le groupe de Fürstenberg. On peut faire de même avec une autre suite  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que  $(m_k \alpha_1, m_k \alpha_2) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (0, \frac{\pi}{2})$  et

on obtient une autre matrice. En refaisant de même pour  $\omega^{(0)} = (1, 1)$  on obtient encore deux autres matrices dans le groupe de Fürstenberg et un nouvel ensemble dénombrable d'énergies à exclure. On peut alors les multiplier entre elles ainsi que leurs inverses et construire de nouvelles matrices dans le groupe de Fürstenberg. Par dérivation en l'identité, on obtient des matrices dans l'algèbre de Lie de  $G_{\mu_E}$  que l'on va conjuguer par des matrices du groupe pour obtenir de nouvelles matrices dans l'algèbre de Lie et ainsi de suite. Au prix de longs calculs explicites on parvient à construire 10 matrices dans l'algèbre de Lie qui forment une famille libre en dehors d'un ensemble discret d'énergies à exclure qui correspond aux zéros d'un certain déterminant. Cela donne bien l'égalité de l'algèbre de Lie du groupe de Fürstenberg et de celle du groupe  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$  qui est de dimension 10.

On remarque qu'ici nous n'utilisons pas la Zariski-densité à la première étape comme dans les cas discret ou à interactions ponctuelles, mais un argument de densité de trajectoires sur le tore  $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$  d'où le fait que l'on ait à exclure un ensemble dénombrable d'énergies.

Comme nous le verrons à la Section 2.3 le Théorème 2.2.15 est suffisant du point de vue de la théorie de Kotani pour démontrer l'absence de spectre absolument continu dans le spectre presque-sûr de la famille  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$ . En revanche, le fait de n'exclure qu'un ensemble dénombrable d'énergies est insuffisant pour appliquer le Théorème 2.3.7 qui permet de passer de la séparabilité des exposants de Lyapounov à la localisation d'Anderson. En effet, dans notre construction, rien ne nous dit que cet ensemble dénombrable  $\mathcal{C}$  n'est pas dense dans  $]2, +\infty[$  et qu'on ne puisse donc pas trouver d'intervalle d'énergies sur lequel on a la Zariski-densité du groupe de Fürstenberg. Nous allons donc voir à la Section 2.2.3.2 comment raffiner les techniques algébriques utilisées dans la preuve de ce théorème pour obtenir qu'en fait le groupe de Fürstenberg est dense au sens de la topologie usuelle dans  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$  pour des énergies dans  $]2, +\infty[$  et hors d'un ensemble discret.

## 2.2.3 Raffinement dans le cas continu : un critère de densité dans les groupes de Lie

### 2.2.3.1 Le résultat de Breuillard et Gelfand

Prouver qu'un sous-groupe de  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$  est Zariski-dense dans  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$  est un problème constructif qui peut se révéler difficile à mettre en œuvre comme nous

l'avons déjà vu aux sections 2.2.2.2, 2.2.2.3 ou 2.2.2.4. A la Section précédente, le fait d'avoir des matrices de transfert données par des exponentielles de matrices dans lesquelles se mélangent les paramètres aléatoires et le paramètre d'énergie rend la construction explicite délicate et nous ne pouvons plus vraiment nous inspirer de la construction faite dans le cas discret quasi-unidimensionnel ou dans le cas du modèle à interactions ponctuelles. Pour améliorer le résultat obtenu au Théorème 2.2.15, il a donc fallu trouver un nouveau critère algébrique permettant d'obtenir la densité et par conséquent la Zarsiki-densité d'un sous-groupe dans un groupe de Lie ayant des propriétés raisonnables de semi-simplicité et de connexité. Nous allons donc présenter dans cette section un critère permettant de ramener la question de savoir si un sous-groupe d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  engendré par un nombre fini d'éléments est dense, à un problème de reconstruction de l'algèbre de Lie de  $G$ .

Rappelons que le groupe dérivé d'un groupe de Lie  $G$  est le sous-groupe noté  $[G, G]$  engendré par les commutateurs  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ , pour  $g, h \in G$ .

On dit alors qu'un groupe de Lie connexe  $G$  est topologiquement parfait lorsque son groupe dérivé  $[G, G]$  est dense dans  $G$ . Avec cette définition, nous pouvons énoncer le théorème de Breuillard et Gelfand.

**Théorème 2.2.16** (Breuillard et Gelfand, [BG03]). *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe réel topologiquement parfait, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il existe alors un voisinage de l'identité  $\mathcal{O} \subset G$ , sur lequel  $\log = \exp^{-1}$  est un difféomorphisme bien défini et tel que  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}$  engendrent un sous-groupe dense dans  $G$  si et seulement si  $\log(g_1), \dots, \log(g_m)$  engendrent  $\mathfrak{g}$ .*

Le terme "engendrer" est utilisé ici au sens des algèbres de Lie donc en tenant compte à la fois des combinaisons linéaires et du crochet de Lie.

Ce résultat peut paraître tout à fait naturel dans la mesure où l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie étant son espace tangent à l'élément neutre et que deux groupes de Lie connexes ayant même algèbre de Lie sont égaux. Le fait que l'on ait seulement la densité du sous-groupe engendré et pas l'égalité avec  $G$  vient du fait que leurs algèbres de Lie ne sont pas égales. L'algèbre de Lie de  $G$  est seulement engendrée par les générateurs du sous-groupe et a priori l'algèbre de Lie du groupe engendré par les  $g_i$  n'est pas forcément égale à l'algèbre de Lie engendrée par les logarithmes de ces générateurs. Il reste toutefois étonnant qu'un résultat qui semble aussi intuitif n'ait été obtenu qu'en 2003, mais en regardant de plus près sa démonstration (voir [BG03]) on comprend qu'il n'est pas aussi simple que cela a démontré et qu'il repose sur un résultat énoncé par Zassenhaus et démontré par Kazhdan et Margulis.

Rappelons que le groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  est connexe et semi-simple. Or un groupe de Lie semi-simple connexe  $G$  vérifie toujours  $[G, G] = G$ , il est donc topologiquement parfait. On pourra donc appliquer le théorème suivant avec  $G = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  qui est le groupe dans lequel se trouve les matrices de transfert de la plupart des modèles que j'ai étudié, à l'exception du scattering zipper aléatoire étudié au Chapitre 4. Notons toutefois que dans le cas du scattering zipper aléatoire, on pourra encore se ramener au groupe symplectique à l'aide de la transformée de Cayley et d'une décomposition en partie réelle et imaginaire par blocs (voir la Section 4.2).

Le Théorème 2.2.16 nous donne un plan clair à suivre lorsque l'on veut montrer qu'un sous-groupe du groupe symplectique est dense dans le groupe symplectique. Il faut commencer par construire des éléments de notre sous-groupe (le groupe de Fürstenberg dans notre cas) qui sont dans le voisinage  $\mathcal{O}$  donné par le Théorème 2.2.16 lorsqu'on l'applique au groupe symplectique, puis on calcule les logarithmes



de ces éléments. On considère alors l'algèbre de Lie engendrée par ces logarithmes et on montre qu'elle est égale à l'algèbre de Lie du groupe symplectique.

Comme nous le verrons dans la suite, à chacune de ces trois étapes, nous rencontrerons des difficultés particulières. Pour trouver des éléments du groupe de Fürstenberg dans  $\mathcal{O}$  dans les modèles que nous étudions nous utiliserons plusieurs approches : de l'approximation diophantienne simultanée tout d'abord, puis l'usage d'un paramètre de grand désordre ensuite. Pour le calcul des logarithmes, on se heurte à la difficulté de trouver la bonne détermination pour le logarithme matriciel. Enfin la reconstruction de l'algèbre de Lie se fera à nouveau au cas par cas, comme dans les premiers exemples que nous avons déjà présentés. La principale différence tient au fait que l'on ne fera plus de va et vient entre l'algèbre de Lie et le groupe, mais que l'on restera uniquement dans l'algèbre de Lie pour n'utiliser que les combinaisons linéaires et le crochet de Lie.

### 2.2.3.2 Raffinement pour le modèle d'Anderson-Bernoulli à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Comme à la Section 2.2.2.3, il s'agit d'un modèle que j'ai étudié durant ma thèse et dont l'article correspondant ([Bou07]) est paru en mai 2007 donc à la toute fin de ma thèse.

Dans [Bou07] j'ai repris l'étude de la famille ergodique d'opérateurs  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$  définie en 2.11 en essayant d'obtenir cette fois un ensemble d'énergies critiques (pour lesquelles les exposants de Lyapounov ne sont pas séparés a priori) qui ne soit plus dénombrable et dense, mais discret. Le caractère dénombrable provient de l'usage de l'indépendance rationnelle pour trois réels dans (2.13). A l'aide du Théorème 2.2.16, nous avons un moyen de contourner l'usage de l'indépendance rationnelle et de l'argument de densité sur le tore en utilisant un théorème d'approximation diophantienne simultanée qui permet de construire les éléments désirés non par un passage à la limite mais à l'aide de puissances finies des matrices de transfert.

Dans [Bou07], j'ai obtenu le résultat suivant qui améliore le Théorème 2.2.15.

**Théorème 2.2.17.** *Il existe un ensemble discret  $\mathcal{S}$  tel que, pour tout  $E \in ]2, +\infty[ \setminus \mathcal{S}$ , le groupe de Fürstenberg de  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$  est dense (et a fortiori Zariski-dense) dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Ainsi*

$$\forall E \in ]2, +\infty[ \setminus \mathcal{S}, \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0.$$

Notons que puisque le groupe de Fürstenberg est défini comme l'adhérence du sous-groupe engendré par le support de la loi commune des matrices de transfert, il est fermé pour la topologie usuelle. Ainsi, si pour une énergie donnée il est dense dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ , il lui est en fait égal pour cette énergie.

Comme expliqué à la toute fin de la Section 2.2.3, le Théorème 2.2.16 nous donne la conduite à suivre pour démontrer la densité et donc l'égalité entre le groupe de Fürstenberg et le groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Tout d'abord, il nous faut construire, à partir des matrices de transfert dont on a donné l'expression en (2.12), des matrices dans le voisinage  $\mathcal{O}$  de  $I_4$  donné par le Théorème 2.2.16 appliqué au groupe  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Nous ne voulons pas utiliser cette fois un argument de passage à la limite comme dans (2.13). Nous allons donc utiliser un argument d'approximation diophantienne simultanée qui repose sur le théorème suivant dû à Dirichlet.

**Théorème 2.2.18** (Dirichlet). Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  des réels et  $M > 1$  un entier. Il existe alors  $y, x_1, \dots, x_N$  dans  $\mathbb{Z}$  vérifiant  $1 \leq y \leq M$  et tels que, pour tout  $i = 1, \dots, N$  :

$$|\alpha_i y - x_i| < M^{-\frac{1}{N}}.$$

Nous supposons  $E > 2$  afin de pouvoir travailler avec des matrices de transfert elliptiques, dont l'expression (2.12) ne fait intervenir que des cosinus et des sinus et aucun cosinus hyperbolique ou sinus hyperbolique. Ce point est crucial dans la suite et explique que l'on ne parvient pas à obtenir de résultat pour  $E \leq 2$  avec notre méthode.

On fixe  $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^2$ . Soit alors  $M > 1$  un entier. On applique le Théorème 2.2.18 avec  $\alpha_1 = \frac{r_1}{2\pi}$  et  $\alpha_2 = \frac{r_2}{2\pi}$ . Il existe donc  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq y \leq M$  et  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$\left| \frac{r_1}{2\pi} y - x_1 \right| < M^{-\frac{1}{2}}, \quad \left| \frac{r_2}{2\pi} y - x_2 \right| < M^{-\frac{1}{2}}$$

soit encore

$$|r_1 y - 2x_1 \pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{2}}, \quad |r_2 y - 2x_2 \pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{2}}$$

On a alors :

$$(T_{\omega^{(0)}}(E))^y = R_{\omega^{(0)}} \left( \begin{array}{cccc} \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \frac{1}{r_1} \sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \frac{1}{r_2} \sin(yr_2 - 2x_2\pi) \\ -r_1 \sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & -r_2 \sin(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) \end{array} \right) R_{\omega^{(0)}}^{-1}$$

par  $2\pi$ -périodicité des fonctions sinus et cosinus.

Puis, soit  $\varepsilon > 0$ . Alors en prenant  $M$  suffisamment grand,  $M^{-\frac{1}{2}}$  sera suffisamment petit pour que :

$$\left\| \left( \begin{array}{cccc} \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \frac{1}{r_1} \sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \frac{1}{r_2} \sin(yr_2(E) - 2x_2\pi) \\ -r_1 \sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & -r_2 \sin(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) \end{array} \right) - I_4 \right\| < \varepsilon$$

Par orthogonalité des matrices de passage  $R_{\omega^{(0)}}$ , il vient

$$\|(T_{\omega^{(0)}}(E))^y - I_4\| < \varepsilon$$

Si l'on suppose  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $B(I_4, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ , ce qui revient à prendre  $M$  assez grand, il nous suffit de poser  $y = m_{\omega^{(0)}}(E)$  pour avoir trouvé  $m_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathbb{N}^*$  tel que  $1 \leq m_{\omega^{(0)}}(E) \leq M$  et :

$$(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)} \in \mathcal{O}.$$

Précisons que  $\mathcal{O}$  ne dépend que du groupe semi-simple  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Il est donc ici indépendant du choix de  $E$  et de  $\omega^{(0)}$ . Il en est donc de même de l'entier  $M > 1$ . Ainsi, bien que l'entier  $m_{\omega^{(0)}}(E)$  dépend de  $E$  et de  $\omega^{(0)}$ , on peut toujours le prendre dans un intervalle d'entiers  $\{1, \dots, M\}$  qui sera lui indépendant de  $E$  et  $\omega^{(0)}$ . Ce sont alors les entiers "d'ajustement"  $x_1$  et  $x_2$  qui dépendent de  $E$  et  $\omega^{(0)}$ .

La seconde étape consiste à calculer les logarithmes des matrices  $T_{\omega^{(0)}}(E)^{m_{\omega^{(0)}}(E)}$  dont on vient de montrer qu'elles sont dans  $\mathcal{O}$ . Bien entendu, si ces matrices s'écrivent bien sous forme d'une exponentielle, rien ne nous dit que leur logarithme est bien dans  $\log \mathcal{O}$  et a priori

$$\log(T_{\omega^{(0)}}(E)^{m_{\omega^{(0)}}(E)}) \neq m_{\omega^{(0)}}(E) \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ V_{\omega^{(0)}} - EI_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le calcul du logarithme de  $(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)}$ ,  $M$  pouvant être choisi arbitrairement grand, on peut toujours supposer que cette matrice est dans la boule ouverte de centre  $I_4$  et de rayon 1. Ainsi on peut utiliser le développement en série entière du logarithme matriciel et exprimer les cosinus et sinus à l'aide de l'exponentielle complexe. Cela nous ramène à calculer, au niveau des coefficients, des logarithmes complexes de la forme  $\text{Ln}(e^{\pm im_{\omega^{(0)}}(E)r_l})$  où  $\text{Ln}$  est la détermination principale du logarithme complexe. Cette étape exclut un ensemble discret d'énergies, celles pour lesquelles  $r_l$  est dans  $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Un calcul des arguments via l'arcsinus et en utilisant les propriétés de la fonction partie entière nous conduit à une formule relativement explicite pour  $\log(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)}$ , valide pour  $E > 2$  et hors d'un premier ensemble discret :

$$R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{\omega^{(0)}}(E) - \frac{2\pi x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{\omega^{(0)}}(E) - \frac{2\pi x_2}{r_2} \\ -m_{\omega^{(0)}}(E)r_1^2 + 2\pi r_1 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{\omega^{(0)}}(E)r_2^2 + 2\pi r_2 x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \quad (2.14)$$

où si  $E$  désigne la partie entière,  $x_l = \frac{1}{2}E \left( \frac{m_{\omega^{(0)}}(E)r_l}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$  pour  $l = 1, 2$ .

La dernière étape consiste à démontrer que l'algèbre de Lie engendrée par ces logarithmes est égale à l'algèbre de Lie de  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Comme dans la Section 2.2.2.4 il s'agit d'écrire les quatre matrices de la forme (2.14) qui correspondent aux valeurs de  $\omega^{(0)}$  dans  $\{0, 1\}^2$  et de les combiner à l'aide de combinaisons linéaires ou du crochet de Lie. Puis, une fois certaines matrices obtenues, on vérifie à l'aide de déterminants  $4 \times 4$  et  $6 \times 6$  qui sont non nuls hors d'ensembles discrets de valeurs pour  $E$ , que l'on a obtenu un sous-espace de dimension 4 et un autre qui lui est orthogonal et de dimension 6. Finalement l'algèbre de Lie engendrée par les logarithmes calculés à la seconde étape est de dimension 10 donc égale à l'algèbre de Lie de  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$ .

Comme on peut le voir dans les détails donnés dans [Bou07], dès le début des calculs, les expressions des crochets de Lie sont compliquées car les matrices de passages  $R_{\omega^{(0)}}$  dépendent aussi de l'aléa et rien ne se simplifie vraiment. Les déterminants considérés contiennent donc un très grand nombre de termes et il ne sont pas tout à fait explicites puisque dépendant de l'entier  $m_{\omega^{(0)}}(E)$  dont on sait juste qu'il est majoré par  $M$ . Toutefois cela suffit à conduire l'analyse voulue et en explicitant seulement certains termes des déterminants, on parvient à justifier que ces déterminants, analytiques en  $E$ , ne sont pas identiquement nuls. D'où les deux ensembles discrets, les zéros de ces déterminants, qui se rajoutent au premier ensemble discret introduit lors du calcul du logarithme. La réunion des trois forme l'ensemble  $\mathcal{S}$  du Théorème 2.2.17.

Au vu des calculs effectués dans cette approche et au vu de ceux déjà effectués aux Sections 2.2.2.3 et 2.2.2.4, il est absolument clair que l'on peut difficilement poursuivre avec cette approche très explicite des calculs pour aborder le cas d'opérateurs

quasi-unidimensionnels dont les potentiels matriciels sont dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  pour  $N \geq 1$  quelconque. Il y a aussi dans le cas des Théorèmes 2.2.15 et 2.2.17 la limitation au cas  $E > 2$  pour avoir des matrices de transfert elliptiques et pouvoir utiliser des arguments du type densité de trajectoires sur le tore ou approximation diophantienne simultanée. Pour contourner ces difficultés et obtenir un résultat plus général, il y aura bien entendu un prix à payer : nous allons devoir introduire un paramètre d'intensité du désordre qui n'était pas présent dans nos premiers résultats, tout comme il n'est pas présent dans les résultats sur l'opérateur discret quasi-unidimensionnel. Cela reste toutefois raisonnable compte tenu de la discussion que nous avons déjà faite dans la Section 1.2.1 et qui explique que dans la plupart des résultats existant en dimension strictement supérieure à 1, un paramètre d'intensité du désordre est introduit pour obtenir la localisation d'Anderson à grand désordre.

### 2.2.3.3 Un modèle d'Anderson-Bernoulli à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

Dans cette Section, je présente le modèle d'Anderson-Bernoulli quasi - unidimensionnel de taille quelconque pour lequel j'ai pu démontrer la localisation d'Anderson dans [Bou09b].

Soit  $N \geq 1$  un entier. A nouveau, reprenons les notations introduites en (2.6). Pour chaque  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on considère une suite  $(\omega_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  de variables aléatoires réelles définies sur  $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{\mathbb{P}}_i)$ , *i.i.d.* et de loi commune  $\nu_i$  telle que  $\{0, 1\} \subset \text{supp } \nu_i$  et  $\text{supp } \nu_i$  est borné. Ces suites sont supposées indépendantes les unes des autres. Ainsi, la suite  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}} = ((\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)}))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  de loi commune  $\nu = \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N$ .

On introduit, pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout réel  $\ell > 0$ , l'opérateur

$$H_{\omega, \ell}^{(N)} = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^{(n)} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(x - \ell n) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & c_N \omega_N^{(n)} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(x - \ell n) & \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ . Les nombres  $c_1, \dots, c_N$  sont des réels non nuls,  $V_0$  désigne l'opérateur de multiplication par la matrice tridiagonale dont les coefficients diagonaux sont nuls et ceux sur les sous et sur diagonales valent 1,  $\mathbf{1}_{[0, \ell]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \ell]$  et  $I_N$  est la matrice identité d'ordre  $N$ .

Le réel  $\ell > 0$  peut être vu comme un paramètre mesurant l'intensité du désordre. En effet, dans un intervalle de longueur fixe, plus  $\ell$  est petit plus cet intervalle fixe va "contenir" de variables aléatoires de la suite  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ , celles-ci se trouvant en chaque point du réseau  $\ell \mathbb{Z}$ . Par exemple l'intervalle  $[0, 1]$  va contenir  $E(\frac{1}{\ell})$  variables aléatoires. Ainsi lorsque  $\ell$  décroît vers 0, l'aléa rempli de plus en plus les intervalles bornés de  $\mathbb{R}$ .

A l'aide d'un changement de variable, nous aurions aussi pu faire apparaître un paramètre  $\lambda = \frac{1}{\ell^2}$  devant le potentiel matriciel, comme dans la définition du modèle d'Anderson continu que nous avons donné dans l'introduction en (1.2). Il se trouve qu'il est plus simple de calculer les matrices de transfert directement avec le paramètre  $\ell$  comme nous l'avons fait.

La famille  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\ell\mathbb{Z}$ -ergodique et, comme perturbation bornée de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$ , les  $H_{\omega,\ell}^{(N)}$  sont auto-adjoints sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Ainsi, leurs spectres sont inclus dans  $\mathbb{R}$  et il en est de même du spectre presque-sûr de  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ .

Avant d'énoncer un résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov pour la famille d'opérateurs  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ , il nous faut introduire un certain nombre de notations supplémentaires.

Soit  $\mathcal{O}$  le voisinage de  $I_{2N}$  dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  donné par le théorème de Breuillard et Gelfand (Théorème 2.2.16) appliqué au groupe symplectique d'ordre  $N$ . On pose

$$d_{\log \mathcal{O}} = \max\{R > 0 \mid B(0, R) \subset \log \mathcal{O}\},$$

où  $B(0, R)$  est la boule ouverte centrée en 0 et de rayon  $R > 0$  pour la topologie induite sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$  de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  par la norme matricielle associée à la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{2N}$ .

Pour  $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \dots, \omega_N^{(0)}) \in \{0, 1\}^N$ , soit

$$M_{\omega^{(0)}} = V_0 + \mathrm{diag}(c_1 \omega_1^{(0)}, \dots, c_N \omega_N^{(0)}).$$

La matrice  $M_{\omega^{(0)}}$  est symétrique réelle, ses valeurs propres notées  $\lambda_1^{\omega^{(0)}}, \dots, \lambda_N^{\omega^{(0)}}$  sont donc réelles. On pose encore,

$$\lambda_{\min} = \min_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{\omega^{(0)}}, \quad \lambda_{\max} = \max_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{\omega^{(0)}} \quad (2.16)$$

et  $\lambda_0 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2}$ . On définit aussi

$$\ell_C := \ell_C(N) = \min\left(1, \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{\lambda_0}\right) \quad (2.17)$$

et pour tout  $\ell < \ell_C$ ,

$$I(\ell, N) = \left[ \lambda_{\max} - \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{\ell}, \lambda_{\min} + \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{\ell} \right]. \quad (2.18)$$

Nous pouvons enfin énoncer le résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov obtenu dans [Bou09b].

**Théorème 2.2.19.** *Soit  $N \geq 1$ . Pour tout  $\ell < \ell_C$  et pour tout  $E \in I(N, \ell)$ , le groupe de Firstenberg de  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  est égal à  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ . Ainsi, les exposants de Lyapounov positifs de  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  vérifient*

$$\forall E \in I(N, \ell), \gamma_1(E) > \dots > \gamma_N(E) > 0.$$

Comme nous allons le voir à présent, le réel  $\ell_C$  et l'intervalle  $I(N, \ell)$  pour  $\ell < \ell_C$  sont définis de telle sorte l'on puisse appliquer le Théorème 2.2.16 au groupe de Fürstenberg de  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ .

Avant cela, nous donnons l'expression des matrices de transfert associées à la famille  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ . Soit  $E \in \mathbb{R}$ . La famille  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  étant  $\ell\mathbb{Z}$ -ergodique, on considère pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  la matrice de transfert de  $\ell n$  à  $\ell(n+1)$  qui est définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} u(\ell(n+1)) \\ u'(\ell(n+1)) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E) \begin{pmatrix} u(\ell n) \\ u'(\ell n) \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

où  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$  est une solution du système différentiel d'ordre 2,  $H_{\omega, \ell}^{(N)}u = Eu$ . Mais, sur l'intervalle  $[\ell n, \ell(n+1)]$ , ce système peut se résoudre explicitement car il est à coefficients constants. Pour  $E \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\omega^{(n)} \in \tilde{\Omega}^{\otimes N}$ , on pose

$$M_{\omega^{(n)}}(E) = V_0 + \text{diag}(c_1\omega_1^{(n)}, \dots, c_N\omega_N^{(n)}) - EI_N. \quad (2.20)$$

Alors, si on définit également

$$X_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ M_{\omega^{(n)}}(E) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R}), \quad (2.21)$$

en résolvant le système à coefficients constants  $H_{\omega, \ell}^{(N)}u = Eu$  sur  $[\ell n, \ell(n+1)]$ , il vient :

$$\forall \ell > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall E \in \mathbb{R}, T_{\omega^{(n)}}(E) = \exp(\ell X_{\omega^{(n)}}(E)). \quad (2.22)$$

Le fait de pouvoir écrire les matrices de transfert  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  comme une exponentielle de matrice est très important dans la suite, en particulier pour pouvoir appliquer le Théorème 2.2.16. Nous reviendrons plus en détail à la Section 2.4 sur les difficultés liées au cas où le potentiel matriciel n'est pas constant par morceaux comme c'est le cas ici. La principale de ces difficultés est qu'alors les matrices de transfert ne peuvent plus s'écrire comme des exponentielles de matrices, mais seulement comme des exponentielles ordonnées de matrices, ce qui complique fortement les choses, à commencer par le calcul de leur logarithme. Pour les propriétés de ces exponentielles ordonnées, nous renvoyons à l'ouvrage de Dollard et Friedman, [DF11].

Notons  $\mu_E$  la loi commune des matrices *i.i.d.*  $T_{\omega^{(n)}}(E)$ , donnée par  $\mu_E = (T_{\omega^{(0)}}(E))_* \nu$ . Nous avons alors la description interne du groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  associé à la famille  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  :

$$\forall E \in \mathbb{R}, G_{\mu_E} = \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \text{supp } \nu \rangle}.$$

Puisque  $\{0, 1\}^N \subset \text{supp } \nu$ , on a aussi

$$\overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N \rangle} \subset G_{\mu_E}.$$

Nous allons appliquer le Théorème 2.2.16 au groupe  $\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N \rangle$  engendré par  $2^N$  éléments et nous allons montrer que l'algèbre de Lie engendrée par les logarithmes de ces  $2^N$  générateurs est égale à  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ .

Ainsi, le groupe  $\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N \rangle$  sera dense dans  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  et par conséquent, on aura le résultat voulu sur le groupe de Fürstenberg.

Le Théorème 2.2.16 nous donne le plan de notre démonstration.

1. Nous construisons  $\ell_C$  et  $I(N, \ell)$  de sorte que pour tout  $\ell \in ]0, \ell_C[$  et tout  $E \in I(\ell, N)$ ,  $T_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathcal{O}$ , pour tout  $\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N$ , où  $\mathcal{O}$  est le voisinage de  $I_{2N}$  donné par 2.2.16 appliqué à  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ .
2. Pour  $\ell < \ell_C$ , on calcule  $\log T_{\omega^{(0)}}(E)$ .
3. On démontre enfin que l'algèbre de Lie engendrée par ces logarithmes,

$$\mathrm{Lie}\{\log T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N\} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}),$$

l'algèbre de Lie de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ .

Le dernier point sera une conséquence du lemme algébrique suivant que nous ne démontrons pas ici mais qui est démontré en détails dans [Bou09b].

**Lemme 2.2.20.** Soient  $N \geq 1$  et  $E \in \mathbb{R}$ .

L'algèbre de Lie engendrée par l'ensemble  $\{X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N\}$  est égale à  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ .

La démonstration de ce lemme est assez proche de celle faite à la Section 2.2.2.2 pour le cas du modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel et repose à nouveau sur le fait que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$  est engendrée par les matrices dans

$$\{X_{ij}, Y_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1\}$$

où l'on a repris les notations de la Section 2.2.2.2. La différence avec la construction faite dans le cas discret quasi-unidimensionnel est qu'ici nous ne travaillons que dans l'algèbre de Lie sans aucun aller-retour avec le groupe sous-jacent. Toute la construction des  $X_{ij}$  et  $Y_{ij}$  pour  $|i - j| \leq 1$  se fait à l'aide de crochets de Lie et de combinaisons linéaires bien choisies.

Revenons à la première étape de la démonstration du Théorème 2.2.19. Tout d'abord, les valeurs propres de  $X_{\omega^{(0)}}(E)^t X_{\omega^{(0)}}(E)$  sont  $1, (\lambda_1^{\omega^{(0)}} - E)^2, \dots, (\lambda_N^{\omega^{(0)}} - E)^2$ , d'où :

$$\|X_{\omega^{(0)}}(E)\| = \max \left( 1, \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i^{\omega^{(0)}} - E| \right),$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme matricielle associée à la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{2N}$ .

Puisque le voisinage  $\mathcal{O}$  ne dépend que de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ , donc uniquement de  $N$ , on cherche à construire un intervalle de valeurs de  $E$  tel que, pour  $\ell$  assez petit,

$$\forall \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N, 0 < \ell \|X_{\omega^{(0)}}(E)\| < d_{\log \mathcal{O}}, \quad (2.23)$$

ou encore

$$0 < \ell \max \left( 1, \max_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i^{\omega^{(0)}} - E| \right) < d_{\log \mathcal{O}}. \quad (2.24)$$

Supposons que  $\ell \leq d_{\log \mathcal{O}}$  et posons  $r_\ell = \frac{1}{\ell} d_{\log \mathcal{O}} \geq 1$ . Alors, du fait que  $r_\ell \geq 1$ , l'ensemble :

$$I(\ell, N) = \left\{ E \in \mathbb{R} \mid \max \left( 1, \max_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i^{\omega^{(0)}} - E| \right) \leq r_\ell \right\} \quad (2.25)$$

peut s'écrire comme l'intersection suivante,

$$I(\ell, N) = \bigcap_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \bigcap_{1 \leq i \leq N} [\lambda_i^{\omega^{(0)}} - r_\ell, \lambda_i^{\omega^{(0)}} + r_\ell]. \quad (2.26)$$

Avec les définitions de  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_0$  données en (2.16), si  $\lambda_0 < r_\ell$ ,  $I(\ell, N) \neq \emptyset$  et plus précisément,  $I(\ell, N) = [\lambda_{\max} - r_\ell, \lambda_{\min} + r_\ell]$ .

Cet intervalle est centré en  $\frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{2}$  et est de longueur  $2r_\ell - 2\lambda_0 > 0$  qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $\ell$  tend vers  $0^+$ .

De plus,  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  et  $d_{\log \mathcal{O}}$  ne dépendant que de  $N$ ,  $I(\ell, N)$  ne dépend que de  $\ell$  et  $N$  et la condition  $\lambda_0 < r_\ell$  est équivalente à

$$\ell < \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{\lambda_0} = \ell_C.$$

Nous venons donc de construire  $\ell_C$  et  $I(N, \ell)$  de sorte que

$$\forall \ell < \ell_C, \forall E \in I(\ell, N), 0 < \ell \|X_{\omega^{(0)}}(E)\| \leq d_{\log \mathcal{O}}. \quad (2.27)$$

Or, rappelons que de part la définition de  $\mathcal{O}$  via le Théorème 2.2.16,  $\exp$  est un difféomorphisme de  $\log \mathcal{O}$  sur  $\mathcal{O}$ . Donc, pour tout  $E \in I(\ell, N)$ ,  $\log T_{\omega^{(0)}}(E) = \ell X_{\omega^{(0)}}(E)$ , ce qui nous fait franchir immédiatement la deuxième étape de notre démonstration.

Pour la troisième étape, il suffit d'appliquer le Lemme 2.2.20 pour obtenir :

$$\forall \ell > 0, \forall E \in \mathbb{R}, \text{Lie}\{\ell X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N\} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}). \quad (2.28)$$

Nous pouvons donc enfin appliquer le Théorème 2.2.16 pour obtenir que

$$\forall \ell < \ell_C, \forall E \in I(\ell, N), \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N \rangle} = \text{Sp}_N(\mathbb{R}) \quad (2.29)$$

dont on déduit le Théorème 2.2.19.

Comme nous pouvons le voir dans cette construction, les différentes étapes sont bien plus claires et naturelles que dans les constructions effectuées précédemment aux Sections 2.2.2.4 et 2.2.3.2. A l'aide du paramètre  $\ell$ , nous pouvons éviter d'utiliser l'approximation diophantienne simultanée pour obtenir des éléments dans  $\mathcal{O}$  et nous n'avons pas à nous restreindre à un cas elliptique pour les matrices de transfert. Il n'y a également aucune difficulté dans le calcul des logarithmes car cette fois-ci, on peut choisir  $\ell$  de sorte que les logarithmes calculés sont bien dans  $\log \mathcal{O}$ . Enfin, la construction algébrique de l'algèbre de Lie peut se faire pour tout  $N \geq 1$  car les logarithmes ont une expression algébrique suffisamment simple. Nous n'avons donc plus à faire une construction à la main de sous-familles libres dont on montre la liberté à l'aide de déterminants. D'ailleurs, cette absence de déterminants dans notre construction fait que contrairement aux Théorèmes 2.2.13, 2.2.14 et 2.2.17, il n'y a ici aucun ensemble discret d'énergies critiques à exclure. Par contre l'intervalle sur lequel nous avons la séparabilité dépend du paramètre  $\ell$ , mais il a le bon goût de tendre vers toute la droite réelle lorsque  $\ell$  tend vers  $0^+$ .



### 2.2.3.4 Extension à un potentiel d'interaction générique

L'utilisation du théorème de Breuillard et Gelfand pour obtenir la séparabilité des exposants de Lyapounov nous amène à démontrer une propriété algébrique sur une algèbre de Lie engendrée par un nombre fini de matrices. Comme expliqué dans [Bre06], il s'agit là d'une condition ouverte et mieux, les  $n$ -uplets d'éléments de  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  qui n'engendrent pas un sous-groupe dense sont contenus dans une sous-variété analytique fermée. Cela m'a amené à penser que l'on pouvait perturber le potentiel d'interaction  $V_0$  dans (2.15) tout en conservant le fait que le groupe de Fürstenberg est égal à  $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$  pour toute énergie dans  $I(N, \ell)$  pour  $\ell \in ]0, \ell_C[$ .

Voici le résultat obtenu avec cette approche dans [Bou13] et présenté une première fois plus succinctement dans [Bou10]. Nous reprenons le modèle (2.15) en remplaçant la matrice  $V_0$  par une matrice  $V$  symétrique réelle quelconque de taille  $N \geq 1$ . On note  $S_N(\mathbb{R})$  l'espace des matrices symétriques réelles de taille  $N \times N$ .

**Théorème 2.2.21.** *Pour presque tout  $V \in S_N(\mathbb{R})$ , il existe un ensemble fini  $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$  et un réel  $\ell_C(N, V) > 0$  tels que, pour tout  $\ell \in ]0, \ell_C(N, V)[$ , il existe un intervalle compact  $I(N, V, \ell) \subset \mathbb{R}$  dans lequel les  $N$  exposants de Lyapounov positifs  $\gamma_1(E), \dots, \gamma_N(E)$  de  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  vérifient :*

$$\forall E \in I(N, V, \ell) \setminus \mathcal{S}_V, \quad \gamma_1(E) > \dots > \gamma_N(E) > 0. \quad (2.30)$$

Dans ce théorème, la généricité s'entend au sens de la mesure de Lebesgue sur  $S_N(\mathbb{R})$  identifiée à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}$ . Il s'agit là de l'énoncé tel que présenté dans [Bou13]. Toutefois, la démonstration de ce théorème implique un résultat plus fort qui est la Zariski généricité, au sens où on peut choisir  $V$  dans un ouvert Zariski dense de  $S_N(\mathbb{R})$ .

Nous constatons dans ce résultat le retour d'un ensemble discret, et même fini, d'énergies critiques pour lesquelles la séparabilité des exposants de Lyapounov n'est pas assurée par l'usage successif des Théorèmes 2.2.16, 2.2.12 et 2.2.9. Celui-ci provient cette fois d'un ensemble de zéros d'un polynôme qui apparaît dans la construction qui suit.

Comme à la Section 2.2.3.3, dont nous conservons les notations introduites pour le groupe de Fürstenberg et pour les matrices de transfert, la démonstration repose sur le fait de construire  $\ell_C(N, V)$ ,  $I(N, V, \ell)$  et à présent l'ensemble fini  $\mathcal{S}_V$  tels que pour tout  $\ell \in ]0, \ell_C(N, V)[$ ,

$$\forall E \in I(N, V, \ell) \setminus \mathcal{S}_V, \quad G_{\mu_E} = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R}).$$

Cette construction étant très similaire à celle faite à la Section 2.2.3.3, nous ne détaillons ici que l'argument de généricité qui permet de passer de  $V_0$  à  $V \in S_N(\mathbb{R})$  générique pour le potentiel d'interaction.

Les matrices de transfert s'écrivent sous forme exponentielle,

$$T_{\omega^{(0)}}(E) = \exp(\ell X_{\omega^{(0)}}(E, V)).$$

Nous voulons montrer que, pour  $\ell$  suffisamment petit et  $E$  pas trop grand, les logarithmes des  $T_{\omega^{(0)}}(E)$  valent  $\ell X_{\omega^{(0)}}(E, V)$ . Nous sommes ensuite ramenés à déterminer pour quelles valeurs de  $E$  et  $V$  la famille  $\{X_{\omega^{(0)}}(E, V)\}_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N}$ , notée  $\{X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)\}$ , engendre  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$\mathcal{V}_k = \left\{ (X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k \mid (X_1, \dots, X_k) \text{ n'engendre pas } \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \right\}. \quad (2.31)$$

Comme engendrer l'algèbre  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$  est une condition algébrique du type non annulation d'une famille finie de déterminants (finie car, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_m]$  est noethérien), il existe  $Q_1, \dots, Q_{r_k} \in \mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k]$  tels que :

$$\mathcal{V}_k = \left\{ (X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k \mid Q_1(X_1, \dots, X_k) = 0, \dots, Q_{r_k}(X_1, \dots, X_k) = 0 \right\}. \quad (2.32)$$

Ici, on fait l'identification  $\mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k] \simeq \mathbb{R}[T_1, \dots, T_{k(2N^2+N)}]$ . Soient  $E \in \mathbb{R}$  et

$$\mathcal{V}_{(E)} = \left\{ V \in \mathfrak{S}_N(\mathbb{R}) \mid \{X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)\} \text{ n'engendre pas } \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \right\}. \quad (2.33)$$

On montre que  $\text{Leb}_{\frac{N(N+1)}{2}}(\mathcal{V}_{(E)}) = 0$ . En effet, soit

$$f_E : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_N(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^{2N} \\ V & \mapsto & (X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)) \end{array}. \quad (2.34)$$

Alors,  $f_E$  est polynômiale en les  $\frac{N(N+1)}{2}$  coefficients définissant  $V$  et on a :

$$V \in \mathcal{V}_{(E)} \Leftrightarrow (Q_1 \circ f_E)(V) = 0, \dots, (Q_{r_{2N}} \circ f_E)(V) = 0, \quad (2.35)$$

chaque  $Q_i \circ f_E$  étant polynômiale en les  $\frac{N(N+1)}{2}$  coefficients définissant  $V$ . Or, on a démontré à la Section 2.2.3.3 que  $V_0 \notin \mathcal{V}_{(E)}$ . Donc, il existe  $i_0 \in \{1, \dots, r_{2N}\}$  tel que  $(Q_{i_0} \circ f_E)(V_0) \neq 0$  et, comme la fonction  $Q_{i_0} \circ f_E$  est polynômiale et non identiquement nulle,

$$\text{Leb}_{\frac{N(N+1)}{2}}(\{V \in \mathfrak{S}_N(\mathbb{R}) \mid (Q_{i_0} \circ f_E)(V) = 0\}) = 0, \quad (2.36)$$

et, par inclusion,

$$\text{Leb}_{\frac{N(N+1)}{2}}(\mathcal{V}_{(E)}) = 0. \quad (2.37)$$

Enfin, soit  $\mathcal{V} = \bigcap_{E \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_{(E)}$ . Alors  $\mathcal{V}$  est de mesure de Lebesgue nulle et si  $V \notin \mathcal{V}$ , il existe  $E_0 \in \mathbb{R}$  tel que la famille  $\{X_1(E_0, V), \dots, X_{2N}(E_0, V)\}$  engendre  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ . Donc, il existe  $i_0 \in \{1, \dots, r_{2N}\}$  tel que  $(Q_{i_0} \circ f)(E_0, V) \neq 0$  où :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathfrak{S}_N(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^{2N} \\ (E, V) & \mapsto & (X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)) \end{array}. \quad (2.38)$$

Or, pour  $V$  fixé,  $E \mapsto (Q_{i_0} \circ f)(E, V)$  est polynômiale et non identiquement nulle, elle n'a donc qu'un ensemble fini  $\mathcal{S}_V$  de zéros et, pour tout  $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_V$ ,  $(Q_{i_0} \circ f)(E, V) \neq 0$ , soit encore,

$$\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_V, \{X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)\} \notin \mathcal{V}_{2N}. \quad (2.39)$$

Donc, nous avons bien obtenu que  $\mathcal{V}$  est de mesure de Lebesgue nulle et que si  $V \notin \mathcal{V}$ , il existe  $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$  fini tel que pour tout  $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_V$ ,  $\{X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)\}$  engendre  $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ .

De là, on termine la démonstration du Théorème 2.2.21 de la même manière que l'on a démontré le Théorème 2.2.19. On fixe  $V \in S_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}$  et on applique le Théorème 2.2.16 en définissant au départ le réel  $\ell_{\mathbb{C}}(N, V)$  et l'intervalle  $I(N, V, \ell)$  de sorte que les logarithmes des  $T_{\omega^{(0)}}(E)$  valent  $\ell X_{\omega^{(0)}}(E, V)$  et soient dans  $\log \mathcal{O}$ .

Comme nous venons de le voir, c'est la nature algébrique des objets en jeu qui permet de démontrer un résultat générique en  $V$  et la finitude de l'ensemble des énergies critiques. Nous pouvons résumer simplement les idées utilisées en rappelant que l'ensemble des zéros d'un polynôme à une variable non nul est fini et que plus généralement, l'ensemble des zéros d'un polynôme à plusieurs variables non nul est de mesure de Lebesgue nulle.

## 2.3 De la séparabilité des exposants de Lyapounov à la localisation

Dans cette section, nous allons voir comment la séparabilité des exposants, ou plus précisément les hypothèses du Corollaire 2.2.10, impliquent la localisation d'Anderson et plus généralement la localisation dynamique. Avant de présenter un tel critère de localisation pour les opérateurs quasi-unidimensionnels continus de type Schrödinger à la Section 2.3.2, nous faisons un détour par la théorie de Kotani du spectre absolument continu. Nous présentons à la Section 2.3.1 ce que l'on peut obtenir concernant le comportement des fonctions propres à l'infini à l'aide uniquement de la positivité stricte des exposants de Lyapounov et du théorème d'Oseledets. Enfin, à la Section 2.3.3 nous reprenons les divers modèles présentés à la Section 2.2 pour leur appliquer notre critère de localisation.

### 2.3.1 Théorie de Kotani

La théorie de Kotani est un ensemble de résultats dûs principalement à Shiniichi Kotani dans les années 80. Ces résultats permettent de caractériser, pour des opérateurs de Schrödinger en dimension 1, le spectre absolument continu à l'aide des exposants de Lyapounov. Avant d'en présenter certains, revenons au théorème d'Oseledets et voyons quelle information il nous donne sur les fonctions propres des opérateurs de Schrödinger considérés.

Pour simplifier la discussion, on se place dans le cas  $N = 1$  des opérateurs à valeurs scalaires. Dans ce cas, nous pouvons énoncer une forme déterministe simple du théorème d'Oseledets.

**Théorème 2.3.1** (Oseledets dans  $SL_2(\mathbb{R})$ ). *Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $SL_2(\mathbb{R})$  telle que*

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_n\| = 0.$$

$$(ii) \gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\|T_n \cdots T_1\|) > 0.$$

*Alors il existe un sous-espace  $V_- \subset \mathbb{R}^2$  de dimension 1 tel que*

$$1. \forall v \in V_-, v \neq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\|T_n \cdots T_1 v\|) = -\gamma.$$

$$2. \forall v \notin V_-, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\|T_n \cdots T_1 v\|) = \gamma.$$

Pour les modèles d'Anderson unidimensionnels à valeurs scalaires, discrets ou continus, on a obtenu l'existence d'un ensemble discret  $\mathcal{S}$  (vide dans le cas des opérateurs discrets) tel que :  $\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}, \gamma(E) > 0$ .

Fixons  $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ . Par le théorème d'Oseledets dans  $SL_2(\mathbb{R})$ , il existe P-presque sûrement uniquement des solutions exponentiellement croissantes ou exponentiellement décroissantes aux équations  $h_\omega u = Eu$  ou  $H_\omega u = Eu$ . Une solution exponentiellement décroissante (en  $+\infty$ ), ne s'obtient que pour une condition initiale  $v_{+\infty} \in V_-^+$ . Toute autre condition initiale conduit à une solution exponentiellement croissante en  $+\infty$ .

Toujours par le théorème d'Oseledets, une solution exponentiellement décroissante en  $-\infty$ , ne s'obtient que pour une condition initiale  $v_{-\infty} \in V_-^-$ . Ainsi, pour obtenir un vecteur propre dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  ou dans  $L^2(\mathbb{R})$ , il faut avoir  $\text{Vect}(v_{+\infty}) = \text{Vect}(v_{-\infty})$ . Ceci n'est pas du tout évident a priori.

Il convient également de faire attention au fait que ce que l'on vient d'affirmer dépend de  $E$ . Si  $E$  varie dans un ensemble non dénombrable (par exemple un intervalle de  $\mathbb{R}$ ), l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels pour tout  $E$  hors de  $\mathcal{S}$  l'exposant de Lyapounov n'est pas strictement positif, pourrait être de mesure non nulle. Par exemple, on ne peut pas affirmer que P-presque sûrement, pour tout  $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ , toute solution de  $h_\omega u = Eu$  ou de  $H_\omega u = Eu$  est exponentiellement croissante ou décroissante. Cela nécessite une analyse plus poussée. Par contre, comme nous allons le voir maintenant, cela implique déjà l'absence de spectre absolument continu presque-sûr.

Notons que la discussion que nous venons de mener s'applique aussi pour  $N \geq 1$  quelconque. On doit alors discuter du comportement asymptotique des solutions dans les directions  $\mathcal{V}_i^\omega$  données par le Théorème 2.1.7. La dichotomie exponentielle est alors une conséquence, dans le cas où les exposants de Lyapounov sont séparés, du fait qu'ils se regroupent par paires d'exposants de signe opposé.

Soit  $N \geq 1$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et soit  $\{T_x\}_{x \in \mathbb{R}}$  (respectivement,  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ) un groupe de transformations inversibles ergodiques sur  $\Omega$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow S_N(\mathbb{R})$  mesurable et bornée. On pose dans le cas continu :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}, V_\omega(x) = f(T_x \omega).$$

et dans le cas discret,

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{Z}, V_\omega(n) = f(T_n \omega).$$

On considère la famille ergodique d'opérateurs de Schrödinger aléatoires  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  agissant pour chaque  $\omega \in \Omega$  sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  par :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N, H_\omega u = -u'' + V_\omega u$$

et dans le cas discret, la famille ergodique d'opérateurs de Schrödinger aléatoires  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  agissant pour chaque  $\omega \in \Omega$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N$  par :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N, (h_\omega u)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_\omega(n)u_n.$$

Nous pouvons associer aux familles  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  des exposants de Lyapounov qui se regroupent par paires d'exposants de signe opposé et dont on note  $\gamma_1(E) \geq \dots \geq \gamma_N(E)$  les exposants positifs (dans les cas discret et continu).

*Notation.* Soit  $\Omega_{\text{Lyap}}$  un sous-ensemble de  $\Omega$  tel que :

1.  $P(\Omega_{\text{Lyap}}) = 1$ ,
2. pour tout  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$  les limites définissant les exposants de Lyapounov existent en  $\pm\infty$  et pour chaque  $p$  elles sont égales en  $+\infty$  et  $-\infty$ ,
3. pour tout  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ , ces limites sont indépendantes de  $\omega$ .

On rappelle également que si  $S \subset \mathbb{R}$ , l'adhérence essentielle de  $S$  est définie par :

$$\overline{S}^{\text{ess}} = \{E \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0, \text{Leb}(S \cap (E - \epsilon, E + \epsilon)) > 0\}.$$

Pour  $j \in \{1, \dots, N\}$ , on pose

$$Z_j = \{E \in \mathbb{R} \mid \exists l_1, \dots, l_{2j} \in \{1, \dots, 2N\}, \gamma_{l_1}(E) = \dots = \gamma_{l_{2j}}(E) = 0\}.$$

Dans [KS88b], Kotani et Simon démontrent le résultat suivant qui est un analogue du théorème d'Ishii-Pastur pour les opérateurs quasi-unidimensionnels de type Schrödinger.

**Théorème 2.3.2** ([KS88b]). *Pour tout  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ , la multiplicité du spectre absolument continu de  $H_\omega$  (respectivement  $h_\omega$ ) dans  $Z_j$  est au plus  $2j$ .*

**Corollaire 2.3.3.** *Si pour Lebesgue-presque tout  $E \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1(E) \geq \dots \geq \gamma_N(E) > 0$ , alors  $\Sigma_{\text{ac}} = \emptyset$ .*

Si nous sommes dans les hypothèses du Corollaire 2.3.3, le théorème R.A.G.E. (voir [RS79; AW15]) nous assure alors qu'il n'y pas d'états diffusifs pour  $H_\omega$  (respectivement  $h_\omega$ ) et ce presque sûrement en  $\omega$ .

La démonstration du Théorème 2.3.2 repose en partie sur le théorème d'Oseledets qui permet d'obtenir la proposition suivante :

**Proposition 2.3.4.** *Soit  $j \in \{1, \dots, N\}$  et soit  $E \in Z_j$  fixé. Soit  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ . Alors, tout sous-espace de*

$$\{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N \mid H_\omega u = Eu, u \notin L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N \text{ et } \varphi \text{ est polynomialement bornée} \}$$

*est de dimension au plus  $2j$  et tout sous-espace de*

$$\{\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^N \mid h_\omega^N \varphi = E\varphi, \varphi \notin \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N \text{ et } \varphi \text{ est polynomialement bornée} \}$$

*est de dimension au plus  $2j$ .*

La démonstration du Théorème 2.3.2 repose également sur un analogue à valeurs matricielles du lemme de Sch'nol. Soit  $P_{\text{bdd},c}$  (respectivement  $P_{\text{bdd},d}$ ) l'ensemble des nombres réels  $E$  tels que l'équation  $H_\omega u = Eu$  (respectivement  $h_\omega \varphi = E\varphi$ ) admette une solution non triviale et polynomialement bornée.

**Proposition 2.3.5.** *Pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\sigma(H_\omega) = \overline{P_{\text{bdd},c}}$  et  $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd},c}}(H_\omega) = 0$ , où  $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd},c}}(H_\omega)$  est le projecteur spectral sur  $\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd},c}$  associé à l'opérateur auto-adjoint  $H_\omega$ .*

*De même, pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\sigma(h_\omega) = \overline{P_{\text{bdd},d}}$  et  $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd},d}}(h_\omega) = 0$ , où  $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd},d}}(h_\omega)$  est le projecteur spectral sur  $\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd},d}$  associé à l'opérateur auto-adjoint  $h_\omega$ .*

Nous renvoyons à [KS88b] pour les démonstrations des Propositions 2.3.4 et 2.3.5.

Les résultats liant les zéros des exposants de Lyapounov et le spectre absolument continu sont en fait plus profonds que ceux déjà énoncés. On reprend les notations introduites précédemment.

**Théorème 2.3.6** (Kotani et Simon, [KS88b]). 1. L'ensemble  $Z_j$  est le support essentiel du spectre absolument continu de multiplicité  $2j$ .

2. Il n'y a pas de spectre absolument continu de multiplicité impaire.

3. On a

$$\Sigma_{\text{ac}} = \overline{Z_N^{\text{ess}}} = \overline{\{E \in \mathbb{R} \mid \gamma_1(E) = \dots = \gamma_{2N}(E) = 0\}^{\text{ess}}}.$$

Là encore, nous renvoyons à [KS88b] pour les démonstrations de ces résultats. Le cas scalaire ( $N = 1$ ) était déjà contenu dans les résultats de l'article [Kot84] de Kotani, qui marque le point de départ de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de Kotani. Kotani va encore plus loin dans ses résultats en montrant que si  $Z_N$  est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors la famille des potentiels  $V_\omega$  est déterministe en un sens qu'il précise. Je ne donne pas de résultats plus précis à ce sujet, puisque je n'ai pas eu l'occasion de les étudier plus en détail dans mes recherches.

Je reviendrai sur d'autres aspects de la théorie de Kotani au Chapitre 3 puisque les fonctions introduites dans [KS88b] (et dans [Kot84] dans le cas scalaire) permettent d'obtenir une formule de Thouless qui relie les exposants de Lyapounov à la densité d'états.

### 2.3.2 Critère de localisation pour les modèles quasi-unidimensionnels de type Schrödinger

A partir du moment où l'on a obtenu la séparabilité et par là-même la stricte positivité des exposants de Lyapounov pour une famille ergodique d'opérateurs de Schrödinger aléatoires, on se retrouve face à deux chemins. Le premier, celui que l'on a déjà emprunté, permet d'obtenir l'absence de spectre absolument continu par le biais de la théorie de Kotani. Le second, que nous allons détailler à présent, est celui qui mène à la localisation d'Anderson et à la localisation dynamique. Pour cela nous allons donner les grandes lignes de la marche à suivre pour obtenir un théorème qui, à partir d'hypothèses sur le groupe de Fürstenberg, assure les propriétés de localisation voulues pour une famille  $\mathbb{Z}$ -ergodique d'opérateurs aléatoires quasi-unidimensionnels.

Le résultat présenté, portant sur des opérateurs quasi-unidimensionnels de type Schrödinger, est le principal résultat de l'article [Bou09b]. C'est également le principal résultat théorique de ce chapitre.

Nous présentons un critère de localisation pour des opérateurs de la forme :

$$H_\omega = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - \ell n), \quad (2.40)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ , où  $N \geq 1$  est un entier,  $I_N$  est la matrice identité d'ordre  $N$  et  $\ell > 0$  est un nombre réel.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité complet et soit  $\omega \in \Omega$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $x \mapsto V_\omega^{(n)}(x)$  sont à valeurs dans l'espace des matrices réelles symétriques, à support dans  $[0, \ell]$  et uniformément bornées en  $x, n$  et  $\omega$ .

On suppose également que la suite  $(V_\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* sur  $\Omega$ . On suppose enfin que le potentiel  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - \ell n)$  est tel que la famille d'opérateurs  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  soit  $\ell\mathbb{Z}$ -ergodique.

Comme perturbations bornées de  $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$ , les opérateurs  $H_\omega$  sont auto-adjoints sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$  et ainsi, pour tout  $\omega \in \Omega$ , le spectre de  $H_\omega$  est inclus dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  le spectre presque-sûr de la famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

Nous montrons que sous certaines hypothèses portant sur le groupe de Fürstenberg de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , cette famille d'opérateurs présente de la localisation dynamique, donc de la localisation d'Anderson, sur certains intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Pour  $E \in \mathbb{R}$ , soit  $G_{\mu_E}$  le groupe de Fürstenberg de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Voici le principal résultat démontré dans [Bou09b].

**Théorème 2.3.7** (Critère de localisation). *Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact tel que  $\Sigma \cap I \neq \emptyset$  et soit  $\tilde{I}$  un intervalle ouvert contenant  $I$  et tel que pour tout  $E \in \tilde{I}$ ,  $G_{\mu_E}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p$  dans  $\{1, \dots, N\}$ . Alors,  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a la propriété de localisation dynamique et de localisation d'Anderson sur  $I$ .*

La démonstration de ce théorème, telle que détaillée dans [Bou09b], suit le plan suivant :

1. Le fait que le groupe de Fürstenberg soit  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p$  dans  $\{1, \dots, N\}$  implique non seulement la séparabilité des exposants de Lyapounov mais également l'existence d'une formule intégrale pour ces exposants. Cette formule intégrale permet de démontrer la régularité Höldérienne des exposants de Lyapounov.
2. A l'aide d'une formule de Thouless, on déduit la même régularité Höldérienne pour la densité d'états intégrée associée à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .
3. La régularité Höldérienne de la densité d'états intégrée implique une estimée de Wegner faible, adaptée au cas de l'aléa de Bernoulli.
4. Armé de l'estimée de Wegner, on peut alors appliquer un schéma d'analyse multi-échelle. Celui-ci nécessite encore de démontrer une estimée de pas initial.

Il s'agit de la démarche adoptée dans le cas continu à valeurs scalaires par Damanik, Sims et Stolz dans [DSS02] et dans le cas discret quasi-unidimensionnel par Klein, Lacroix et Speis dans [KLS90]. Dans la suite, nous mélangeons les résultats de ces deux références pour démontrer le Théorème 2.3.7.

**Étape 1.** Commençons par détailler quelque peu le premier point. Le résultat suivant est démontré dans [BL85, Proposition 3.4].

**Théorème 2.3.8** ([BL85]). *Soient  $E$  un réel et  $\Phi_E : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A_E, \tau)$  tel que la suite  $(A_E(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à*

valeurs dans  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu_E$ . Notons  $G_{\mu_E}$  son groupe de Fürstenberg. Soit  $p$  un entier dans  $\{1, \dots, N\}$ . Supposons que  $G_{\mu_E}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible et que  $\log^+ \|A_E\|$  est dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ . Alors, il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_E$ -invariante sur  $\mathbb{P}(L_p) = \{\bar{x} \in \mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{R}^{2N}) \mid x \in L_p\}$ , notée  $\nu_{p,E}$ , telle que :

$$\int_{\text{Sp}_N(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(L_p)} \log \frac{\|\wedge^p Mx\|}{\|x\|} d\mu_E(M) d\nu_{p,E}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p \gamma_i(E) \quad (2.41)$$

Rappelons brièvement ce qu'est une mesure invariante dans ce contexte. Soit  $G$  un groupe localement compact qui agit sur un espace topologique  $B$ . On se donne une mesure  $\mu$  sur  $G$  et une mesure  $\nu$  sur  $B$ . On définit alors la **pseudo-convolution** de ces deux mesures comme étant l'unique mesure  $\mu * \nu$  sur  $B$  définie par :

$$\mu * \nu(f) = \int_{G \times B} f(gb) d\mu(g) d\nu(b)$$

pour toute fonction  $f$  sur  $B$  mesurable et bornée.

Fixons une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $G$ . Une mesure  $\nu$  sur  $B$  est dite  **$\mu$ -invariante** lorsque :  $\mu * \nu = \nu$ .

Le fait que l'on ait une représentation intégrale des exposants de Lyapounov mettant en jeu la mesure  $\nu_{p,E}$ , implique que pour étudier la régularité en fonction de  $E$  de ces exposants il suffit d'étudier la régularité de cette mesure vue comme fonction de  $E$ . En appliquant cette démarche, j'ai obtenu dans [Bou08] le théorème général suivant de régularité Höldérienne des exposants de Lyapounov.

**Théorème 2.3.9.** Soient  $E$  un réel et  $\Phi_E : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{R})$  un cocycle linéaire engendré par  $(A_E, \tau)$  tel que la suite  $(A_E(\tau^n(\cdot)))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ , indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $\mu_E$ . Notons  $G_{\mu_E}$  son groupe de Fürstenberg. On fixe un intervalle compact  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et on suppose que pour tout  $E \in I$  :

1.  $\log^+ \|A_E\|$  est dans  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ .
2.  $G_{\mu_E}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ .
3. Il existe  $C_1 > 0, C_2 > 0$  indépendantes de  $n, \omega, E$  telles que pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$  :

$$\|\wedge^p A_E(\tau^n(\omega))\|^2 \leq \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C_2. \quad (2.42)$$

4. Il existe  $C_3 > 0$  indépendante de  $n, \omega, E$  telle que pour tous  $E, E' \in I$  et tout  $p \in \{1, \dots, N\}$  :

$$\|\wedge^p A_E(\tau^n(\omega)) - \wedge^p A_{E'}(\tau^n(\omega))\| \leq C_3 |E - E'|. \quad (2.43)$$

Il existe alors deux réels  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  tels que :

$$\forall p \in \{1, \dots, N\}, \forall E, E' \in I, |\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C |E - E'|^\alpha.$$



Pour prouver ce résultat, on utilise un résultat sur les cocycles négatifs comme énoncé dans [CL90, Proposition IV 3.5]. C'est sur ce point précis que l'on utilise la séparabilité des exposants de Lyapounov induite par la seconde hypothèse du Théorème 2.3.9.

On a aussi besoin d'estimations sur les opérateurs de Laplace sur les espaces de Hölder comme dans [CL90, Proposition V 4.13], qui utilisent les estimées (2.42) et (2.43). Finalement en utilisant la décomposition de ces opérateurs de Laplace faisant intervenir la mesure invariante qui est donnée dans [CL90, Proposition IV 3.12] on peut démontrer la continuité Höldérienne de  $E \mapsto \nu_{p,E}$  sur  $I$ .

A ce stade de la démonstration du Théorème 2.3.7, une part importante du travail est de démontrer que les matrices de transfert associées à la famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifient les estimées (2.42) et (2.43). Si cela est relativement évident dans le cas des opérateurs discrets quasi-unidimensionnels de type Schrödinger, du fait du caractère très explicite des matrices de transfert, les estimées sont moins évidentes dans le cas continu et relèvent d'estimées a priori sur des solutions d'équations différentielles. Pour cela on renvoie à [Bou08, Lemma2 et Lemma 3].

Signalons que par un argument plus élémentaire, les exposants de Lyapounov sont toujours continus dès lors qu'ils sont donnés par la formule intégrale (2.41) et que sont vérifiées les inégalités (2.42) et (2.43) : pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ ,  $E \mapsto \gamma_p(E)$  est continue sur  $I$ .

Tout d'abord, on démontre la continuité de la fonction

$$\psi_{p,E} : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{P}(L_p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (E, \bar{x}) & \longmapsto & \psi_{p,E}(\bar{x}) = \mathbb{E} \left( \log \frac{\|(\wedge^p A_E(\tau^n(\omega)))x\|}{\|x\|} \right) \end{array}$$

pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ . On utilise seulement les estimées (2.42) et (2.43) à ce stade. Ensuite on démontre la continuité faible de  $E \mapsto \nu_{p,E}$  en utilisant le théorème de Banach-Alaoglu et l'unicité de la mesure  $\mu_E$ -invariante  $\nu_{p,E}$ . En combinant ces deux propriétés de continuité et en remarquant que la formule intégrale des exposants de Lyapounov donnée au Théorème 2.3.8 se reformule en

$$\gamma_1(E) + \dots + \gamma_p(E) = \nu_{p,E}(\psi_{p,E}),$$

on obtient la continuité des exposants de Lyapounov.

**Étape 2.** Nous reviendrons plus en détails sur le deuxième point, la régularité Höldérienne pour la densité d'états intégrée associée à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , au Chapitre 3 consacré à l'étude de la densité d'états intégrée. En quelques mots, il s'agit de montrer que la somme des exposants de Lyapounov positifs est liée à la densité d'états (la mesure dont la densité d'états intégrée est la fonction de répartition) au travers d'une formule de Thouless (voir Théorème 3.2.3) puis d'utiliser les propriétés de la transformée de Hilbert inverse pour en déduire que la densité d'états intégrée et la somme des exposants de Lyapounov ont la même régularité.

**Étape 3.** Pour un modèle d'Anderson continu (1.2) ou discret (1.3) en dimension quelconque, une estimée de Wegner est obtenue lorsqu'il existe une constante  $C_W > 0$  et des exposants réels  $\alpha, \beta > 0$  tels que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et tout cube  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  (ou  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ),

$$\mathbb{P} \left( \left\{ H_\omega^\Lambda \text{ a une valeur propre dans } I \right\} \right) \leq C_W |I|^\alpha \cdot |\Lambda|^\beta \quad (2.44)$$

où pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $H_\omega^\Lambda$  est la restriction de  $H_\omega$  au cube  $\Lambda$  avec conditions au bord de Dirichlet (ou de Neumann ou encore périodiques) et  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue, soit dans  $\mathbb{R}$  pour  $I$  soit dans  $\mathbb{R}^d$  pour  $\Lambda$  (ou le cardinal de  $\Lambda$  si  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ).

Une telle estimée est un ingrédient essentiel dans la mise en place de l'analyse multi-échelle que nous allons préciser au point suivant. Remarquons également que (2.44) implique la régularité Höldérienne de la densité d'états intégrée comme nous le verrons plus en détail au Chapitre 3. Par contre, pour obtenir la régularité de la densité d'états (la dérivée de la densité d'états intégrée) à partir de (2.44), il est nécessaire d'avoir une estimation linéaire en l'énergie, *i.e.*  $\alpha = 1$ . L'estimée de Wegner (2.44) joue également un rôle central dans les résultats de statistiques spectrales, et dans ce contexte, il est nécessaire d'avoir des estimées linéaires en l'énergie et en le volume de  $\Lambda$ . Dans ce cas on parle d'estimée de Wegner optimale.

Par exemple, on peut démontrer une estimée de Wegner optimale pour un opérateur d'Anderson  $h_\omega$  discret et scalaire avec des variables aléatoires à densité :

$$\mathbb{E} \left( \text{Tr} \left( \mathbf{1}_I \left( h_\omega^\Lambda \right) \right) \right) \leq C_W \cdot |I| \cdot |\Lambda| \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{1}_I \left( h_\omega^\Lambda \right)$  est le projecteur spectral de  $h_\omega^\Lambda$  sur l'intervalle  $I$ . Précisons que (2.45) est liée à (2.44) via l'inégalité de Markov qui implique qu'en général,

$$\mathbb{P} \left( \left\{ h_\omega^\Lambda \text{ a une valeur propre dans } I \right\} \right) \leq \mathbb{E} \left( \text{Tr} \left( \mathbf{1}_I \left( h_\omega^\Lambda \right) \right) \right).$$

L'estimée de Wegner optimale (2.45) est également obtenue sous des hypothèses supplémentaires sur l'aléa dans le cas continu. Pour ces résultats, nous renvoyons à [KM07; His08; Ves08]. En général, la démonstration d'une estimée de Wegner repose sur l'utilisation de la moyennisation spectrale, ce qui explique l'hypothèse de régularité sur l'aléa au sens où on demande à ce que les variables aléatoires qui définissent le potentiel d'Anderson aient une loi à densité. Un autre ingrédient des démonstrations d'estimées de Wegner est la monotonie par rapport au paramètre aléatoire  $\omega$ . Cette monotonie n'est pas indispensable (voir [Ves10; Leo+15]) mais simplifie grandement les démonstrations. En effet, une estimée de Wegner mesure en quelque sorte les variations des valeurs propres de  $H_\omega^\Lambda$  en fonction de  $\omega$ . Estimer le "volume" de l'image réciproque de  $I$  par les fonctions valeurs propres est alors plus aisé si celles-ci varient de façon monotone.

Enfin, dans [GK13], les auteurs obtiennent une estimée de Wegner améliorée,

$$\mathbb{E} \left( \text{Tr} \left( \mathbf{1}_I \left( h_\omega^\Lambda \right) \right) \right) \leq C_W \cdot N(I) \cdot |\Lambda| \quad (2.46)$$

où  $N(\cdot)$  est la densité d'états intégrée associée à  $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Cette estimation leur permet de traiter certains cas non couverts par les hypothèses de leur résultat général de statistiques spectrales contenu dans [GK14].

Toutefois, dans le cas des opérateurs d'Anderson-Bernoulli, une estimée de Wegner telle que (2.44) ne peut être vérifiée pour tout intervalle  $I$ . En effet, si les variables aléatoires présentes dans le potentiel d'Anderson suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ , alors l'évènement  $\{H_\omega^\Lambda \text{ a une valeur propre dans } I\}$  a une probabilité minorée par  $2^{-|\Lambda|}$  et pour  $I$  de longueur trop petite, (2.44) ne peut être valide. L'hypothèse de régularité des variables aléatoires n'est donc pas seulement technique.

Dans le cas de l'aléa de Bernoulli, il reste toutefois possible de démontrer une forme plus faible de l'estimée de Wegner pour le modèle d'Anderson. Soit  $L \in \mathbb{N}^*$  et soit, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $H_\omega^{(L)}$  la restriction de  $H_\omega$  à  $L^2([-\ell L, \ell L]) \otimes \mathbb{C}^N$  avec conditions de Dirichlet aux bords. J'ai obtenu dans [Bou09b] le théorème suivant.

**Théorème 2.3.10.** *Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact et  $\tilde{I}$  un intervalle ouvert,  $I \subset \tilde{I}$ , tel que, pour tout  $E \in \tilde{I}$ ,  $G_{\mu_E}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ . Alors, pour tout  $\beta \in (0, 1)$  et tout  $\kappa > 0$ , il existe  $L_0 \in \mathbb{N}$  et  $\xi > 0$  tels que,*

$$(W) \quad \mathbb{P} \left( d \left( E, \sigma(H_\omega^{(L)}) \right) \leq e^{-\kappa(\ell L)^\beta} \right) \leq e^{-\xi(\ell L)^\beta}, \quad (2.47)$$

pour tout  $E \in I$  et tout  $L \geq L_0$ .

La preuve du Théorème 2.3.10 repose sur les outils spécifiques à la dimension 1. Contrairement au cas de variables aléatoires à densité, ici la régularité de la densité d'états intégrée n'est pas une conséquence de l'estimée de Wegner, mais un ingrédient clé de sa démonstration. En dimension 1, la régularité Höldérienne de la densité d'états intégrée est obtenue directement à partir de celle des exposants de Lyapounov et de la formule de Thouless comme expliqué à l'étape 2.

On commence par démontrer, sous les hypothèses du Théorème 2.3.10, que la probabilité qu'il existe une valeur propre de  $H_\omega^{(L)}$  dans un intervalle  $[E - \varepsilon, E + \varepsilon]$  associée à une fonction propre normalisée et dont les dérivées aux bords de  $[-\ell L, \ell L]$  sont contrôlées par  $\varepsilon$ , est majorée par un multiple de  $L$  et de  $\varepsilon^\alpha$  où  $\alpha$  est l'exposant de continuité Höldérienne de la densité d'états intégrée. Ce premier résultat repose donc sur la continuité Höldérienne de la densité d'états intégrée mais également sur des estimations a priori des solutions du système différentiel déterministe  $-u'' + Vu = 0$  où  $V$  est une fonction localement intégrable à valeurs matricielles. Sont également utilisés dans cette première démonstration le fait que le potentiel d'Anderson est invariant en loi par translation et la loi des grands nombres pour faire le lien entre une suite d'évènements donnée et la densité d'états intégrée.

La suite de la démonstration du Théorème 2.3.10 repose alors sur l'estimation des probabilités des intersections de l'évènement dans (2.47) avec une famille d'évènements pour lesquels les normes des produits de matrices de transfert permettant de passer d'un bord à l'autre de  $[-\ell L, \ell L]$  sont strictement minorées par une constante strictement positive de la forme  $e^{\theta(\ell L)^\beta}$ . En faisant le lien entre le comportement des fonctions propres et les normes des produits de matrices de transfert on se ramène ainsi à l'estimation de la probabilité démontrée au début de la preuve et on termine ainsi la preuve de l'estimée de Wegner faible. On utilise également au passage le caractère Lipschitzien des matrices de transfert vues comme fonctions de l'énergie, ce qui est le cas dans le modèle considéré.

Là encore, l'usage des matrices de transfert fait que la démonstration de l'inégalité (2.47) est tout à fait spécifique à la dimension 1.

**Étape 4.** La dernière étape de la démonstration du Théorème 2.3.7 est la mise en place de l'analyse multi-échelle. Comme nous l'avons déjà expliqué dans le Chapitre 1, il s'agit d'un procédé de démonstration par récurrence sur les tailles des cubes auxquels on restreint la famille aléatoire d'opérateurs étudiés.

L'idée est la suivante : la décroissance exponentielle des fonctions propres est impliquée par celle de la norme de la résolvante des opérateurs restreint à des cubes de

plus en plus en grand. Pour démontrer que la norme de la résolvante locale décroît exponentiellement avec la taille des cubes, on commence par montrer une majoration de cette norme par un terme exponentiellement petit dans un cube de taille initiale. A partir de là on étend cette domination exponentielle de la norme de la résolvante à tous les cubes d'une taille plus grande, a priori puissance positive de la taille initiale. Pour cela il faut démontrer que l'on conserve presque-sûrement une estimation exponentielle de la résolvante. En particulier, les estimées que l'on veut pour la résolvante doivent être uniformes en l'énergie lorsque celle-ci se trouve dans un intervalle compact. Il faut donc s'assurer lorsque l'on passe d'une échelle de cubes à une plus grande échelle que l'on évite les éventuelles énergies qui feraient exploser la norme de la résolvante : celles dans le spectre de l'opérateur restreint. C'est là qu'intervient l'estimée de Wegner (2.47) : elle nous assure qu'avec une probabilité exponentiellement proche de 1, les énergies dans l'intervalle considéré sont au moins à une distance strictement positive du spectre de l'opérateur restreint.

L'analyse multi-échelle ou MSA pour "Multi-Scale Analysis" en anglais, requiert plusieurs ingrédients pour fonctionner que nous allons détailler maintenant. Nous reprenons les notations de [Bou09b] qui sont inspirées des articles de Klein ([Kle08]) et de Germinet et Klein ([GK01])

On commence par énoncer une propriété qui assure l'existence de fonctions propres généralisées en un sens à préciser pour  $H_\omega$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ , et soit  $\nu > \frac{1}{4}$ . On définit les espaces à poids  $\mathcal{H}_\pm$  par :

$$\mathcal{H}_\pm = L^2(\mathbb{R}, \langle x \rangle^{\pm 4\nu} dx) \otimes \mathbb{C}^N,$$

où  $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On définit sur  $\mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-$  la forme sesquiliénaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-}$  par :

$$\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-, \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-} = \int_{\mathbb{R}} {}^t \phi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

**Définition 2.3.11.** Une fonction mesurable  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$  est une fonction propre généralisée pour  $H_\omega$  associée à la valeur propre généralisée  $\lambda$  si  $\psi \in \mathcal{H}_- \setminus \{0\}$  et :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_+(\omega), \langle H(\omega)\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-} = \bar{\lambda} \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-}.$$

Soit  $T$  l'opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$  donné par la multiplication par  $\langle x \rangle^{2\nu}$ . On note  $\mathbb{1}_I(H_\omega)$  le projecteur spectral de  $H_\omega$  sur un intervalle  $I$  et on définit la propriété de "Strong Generalized Eigenfunction Expansion".

**Définition 2.3.12.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. On dit que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie la propriété (SGEE) sur  $I$  si, pour un  $\nu > \frac{1}{4}$  et pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ ,

- (i) l'ensemble  $\mathcal{D}_+(\omega) = \{\phi \in D(H_\omega) \cap \mathcal{H}_+ \mid H_\omega \phi \in \mathcal{H}_+\}$  est dense dans  $\mathcal{H}_+$  et est un coeur pour  $H_\omega$ ,
- (ii) il existe une fonction  $f$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , strictement positive sur  $\sigma(H_\omega)$  telle que :

$$\mathbb{E} \left( \left( \text{Tr}_{\mathcal{H}}(T^{-1} f(H_\omega) \mathbb{1}_I(H_\omega) T^{-1}) \right)^2 \right) < \infty.$$

On introduit des notations pour les restrictions de  $H_\omega$  à des intervalles de  $\mathbb{R}$  de longueur finie non nécessairement centrés en 0. Pour  $x \in \mathbb{Z}$  et  $L \geq 1$ , soit  $I_L(x) = [x - \ell L, x + \ell L]$ , centré en  $x$  et de longueur  $2\ell L$ . Soit  $\mathbf{1}_{x,L}$  la fonction caractéristique de  $I_L(x)$  et soit  $\mathbf{1}_x$ , la fonction caractéristique de  $I_1(x)$ . Pour  $L \in 3\mathbb{N}^*$ , on pose aussi,

$$\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} = \mathbf{1}_{x,L} - \mathbf{1}_{x,L-2} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{x,L}^{\text{in}} = \mathbf{1}_{x,\frac{L}{3}}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  et tout  $L \geq 1$ , soit  $H_\omega^{(x,L)}$  la restriction de  $H_\omega$  à  $L^2(I_L(x)) \otimes \mathbb{C}^N$  avec conditions de Dirichlet aux bords et, pour  $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)})$ , soit  $R^{(x,L)}(E)$  la résolvante de  $H_\omega^{(x,L)}$  en  $E$ ,  $R^{(x,L)}(E) = (H_\omega^{(x,L)} - E)^{-1}$ . Soit enfin  $E_\omega^{(x,L)}$  le projecteur spectral de  $H_\omega^{(x,L)}$ . Avec toutes ces notations, on peut énoncer une inégalité de type Simon-Lieb.

**Définition 2.3.13.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact. On dit que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a la propriété (SLI) s'il existe une constante  $C_I$  telle que, étant donnés  $L, L', L'' \in \mathbb{N}$  et  $x, y, y' \in \mathbb{Z}$ , avec  $I_{L''}(y) \subset I_{L'-2}(y') \subset I_{L-2}(x)$ , pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ , si  $E \in I$ ,  $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)}) \cup \sigma(H_\omega^{(y',L')})$ , on a :

$$\|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{y,L''}\| \leq C_I \|\mathbf{1}_{y',L'}^{\text{out}} R^{(y',L')}(E) \mathbf{1}_{y,L''}\| \|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{y',L'}^{\text{out}}\|.$$

La propriété (SLI) permet d'estimer comment les résolvantes restreintes  $R^{(x,L)}(E)$  varient en norme lorsque l'on passe d'un intervalle donné à un intervalle plus long le contenant. Ce type d'estimée est aussi appelée "Geometric Resolvent Inequality" dans la littérature. On peut maintenant énoncer une estimée pour les fonctions propres généralisées en terme de résolvantes restreintes appelée "Eigenfunction Decay Inequality".

**Définition 2.3.14.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact. On dit que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a la propriété (EDI) s'il existe une constante  $\tilde{C}_I$  telle que, pour P-presque tout  $\omega \in \Omega$ , étant donnée une valeur propre généralisée  $E \in I$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  et tout  $L \in \mathbb{N}$  avec  $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)})$ ,

$$\|\mathbf{1}_x \psi\| \leq \tilde{C}_I \|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_x\| \|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} \psi\|.$$

La propriété suivante est une estimée du nombre moyen de valeurs propres de  $H_\omega^{(x,L)}$ .

**Définition 2.3.15.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact. On dit que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a la propriété (NE) s'il existe une constante finie  $\hat{C}_I$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  et tout  $L \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E} \left( \text{tr}_{\mathcal{H}}(\mathbb{1}_I(H_\omega^{(x,L)})) \right) \leq \hat{C}_I \ell L.$$

La dernière propriété nécessaire pour faire fonctionner l'analyse multi-échelle est d'une nature différente. Il s'agit d'une propriété probabiliste d'indépendance d'intervalles éloignés les uns des autres. Un événement  $A \in \mathcal{A}$  est dit basé sur  $I_L(x)$  s'il est déterminé par des conditions portant sur  $H_\omega^{(x,L)}$ . Etant donné  $d_0 > 0$ , on dit que  $I_L(x)$  et  $I_{L'}(x')$  sont  $d_0$ -non recouvrant si  $d(I_L(x), I_{L'}(x')) > d_0$ .

**Définition 2.3.16.** On dit que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a la propriété (IAD) s'il existe  $d_0 > 0$  tel que tout couple d'évènements basés sur des intervalles  $d_0$ -non recouvrant sont indépendants.

Avant de donner la définition de l'ensemble de l'analyse multi-échelle  $\Sigma_{\text{MSA}}$ , il nous faut une dernière définition.

**Définition 2.3.17.** Soient  $\gamma, E \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \Omega$ . Pour  $x \in \mathbb{Z}$  et  $L \in 3\mathbb{N}^*$ , on dit que l'intervalle  $I_L(x)$  est  $(\omega, \gamma, E)$ -bon si  $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)})$  et

$$\|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{x,L}^{\text{in}}\| \leq e^{-\gamma \ell^{\frac{L}{3}}}.$$

On suppose que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie la propriété (IAD) et on rappelle que  $\Sigma$  est le spectre presque-sûr de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

**Définition 2.3.18.** L'ensemble  $\Sigma_{\text{MSA}}$  pour  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est l'ensemble des  $E \in \Sigma$  pour lesquels il existe un intervalle ouvert  $I$  tel que  $E \in I$  et, étant donné  $\zeta \in ]0, 1[$  et  $\alpha_0 \in (1, \zeta^{-1})$ , il existe une échelle de longueur  $L_0 \in 6\mathbb{N}$  et un nombre réel  $\gamma > 0$ , tels que si on pose  $L_{k+1} = \max\{L \in 6\mathbb{N} \mid L \leq L_k^{\alpha_0}\}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \forall E' \in I, I_L(x) \text{ ou } I_L(y) \text{ est } (\omega, \gamma, E')\text{-bon}\}) \geq 1 - e^{-L_k^\zeta}.$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $|x - y| > L_k + d_0$ .

Nous pouvons à présent énoncer le théorème d'analyse multi-échelle de Germinet et Klein pour une famille d'opérateurs mettant en jeu des mesures de probabilité singulières comme  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Ce théorème est démontré dans [GK01] dont les résultats s'appliquent au cas de l'estimée de Wegner faible et de l'aléa de Bernoulli.

**Théorème 2.3.19** (Germinet et Klein, [GK01]). Supposons que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  a les propriétés (IAD), (SLI), (NE) et vérifie une estimée de Wegner (W) telle que (2.47) sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ . Si, étant donné  $\gamma > 0$ , pour tout  $E \in I$ , il existe un entier  $L_\gamma(E)$ , borné sur les sous-intervalles compact de  $I$ , tel que, pour  $E_0 \in \Sigma \cap I$  donné, on a :

$$P(\{\omega \in \Omega \mid I_{L_0}(0) \text{ est } (\omega, \gamma, E_0)\text{-bon}\}) \geq 1 - e^{-\delta \ell L_0}, \quad (2.48)$$

pour  $L_0 \in \mathbb{N}$ ,  $L_0 > L_\gamma(E)$  et  $\delta > 0$ , alors  $E_0 \in \Sigma_{\text{MSA}}$ .

L'inégalité (2.48) est aussi connue sous le nom d'estimée de pas initial ou encore "Initial Length Scale Estimate" (ILSE).

Il reste à établir le lien entre l'analyse multi-échelle et la localisation d'Anderson ainsi que la localisation dynamique. Ce lien est donné dans le théorème suivant, que l'on trouve dans [Kle08, Theorem 6.1]. Notons  $\Sigma_{\text{LA}}$  l'ensemble des énergies  $E \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  présente la propriété de localisation d'Anderson (voir Définition 1.1.3). Notons également  $\Sigma_{\text{LD}}$  l'ensemble des énergies  $E \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  présente la propriété de localisation dynamique (voir Définition 1.1.4).

**Théorème 2.3.20** (Klein, [Kle08]). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle sur lequel  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie les propriétés (SGEE) et (EDI). Alors :

$$\Sigma_{\text{MSA}} \cap I \subset \Sigma_{\text{LA}} \cap \Sigma_{\text{LD}} \cap I.$$

On peut finalement résumer les ingrédients d'une preuve par analyse multi-échelle de la localisation d'Anderson et dynamique :

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{(\text{IAD}) + (\text{SLI}) + (\text{NE}) + (\text{W}) + (\text{ILSE})}_{\downarrow} \\
 \underbrace{(\text{MSA}) + (\text{SGEE}) + (\text{EDI})}_{\downarrow} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Localisation d'Anderson et dynamique}}
 \end{array} \tag{2.49}$$

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact et  $\tilde{I}$  un intervalle ouvert,  $I \subset \tilde{I}$ , tel que, pour tout  $E \in \tilde{I}$ ,  $G_{\mu_E}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ . Tout d'abord, si on reprend la démonstration de [GK04, Theorem A.1], on constate que le potentiel d'Anderson n'apparaît qu'au travers d'estimées sur sa valeur absolue. Ainsi, en remplaçant la valeur absolue par une norme matricielle, on obtient immédiatement que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie les propriétés (SLI), (EDI), (NE) et (SGEE) sur  $I$ . En utilisant à nouveau l'indépendance des  $V_\omega^{(n)}$  et le fait que le potentiel d'Anderson dans  $H_\omega$  est invariant en loi par translation, on obtient également que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie la propriété (IAD). Enfin, le Théorème 2.3.10 nous dit que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie une estimée de Wegner (W) sur  $I$ .

Pour démontrer le Théorème 2.3.7, en vertu du Théorème 2.3.20 et du paragraphe précédent, il suffit de démontrer une estimée de pas initial (ILSE) pour  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Ceci est fait dans [Bou09b] où j'ai obtenu le résultat suivant.

**Proposition 2.3.21.** *Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert tel que, pour tout  $E \in I$ ,  $G_{\mu_E}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ . Soit  $E \in I$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  et  $L_0 \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $L \geq L_0$ ,  $L \in 3\mathbb{N}^*$ ,*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid I_L(0) \text{ est } (\omega, \gamma_1(E) - \varepsilon, E) - \text{bon}\}) \geq 1 - e^{-\delta \ell L}. \tag{2.50}$$

La démonstration de cette estimée de pas initial repose tout d'abord sur le calcul du noyau de Green de  $H_\omega^{(L)}$  qui fait intervenir les solutions matricielles  $U_\pm$  de  $H_\omega U = EU$  telles que :

$$U_+(\ell L) = U_-(-\ell L) = 0 \quad \text{et} \quad U'_+(\ell L) = U'_-(-\ell L) = I_N$$

et leur Wronskien. Estimer la norme du noyau de Green de  $H_\omega^{(L)}$  revient donc à estimer les normes de  $U_\pm$  et du Wronskien, ce qui se fait à l'aide des estimées que l'on obtient sur les produits de matrices de transfert (voir [Bou09b, Proposition 3] et sa démonstration). Ces estimées sur les produits de matrices de transfert sont des conséquences de la séparabilité des exposants de Lyapounov. Enfin, on passe des estimées sur le noyau de Green à celles sur la résolvante à l'aide du test de Schur.

Nous venons de donner les principales étapes de la démonstration du Théorème 2.3.7 que nous allons maintenant pouvoir appliquer aux différents modèles étudiés aux sections 2.2.3.2, 2.2.3.3 et 2.2.3.4.

### 2.3.3 Résultats de localisation pour les modèles de la Section 2.2

Rappelons tout d'abord que le Théorème 2.3.7 est une adaptation au cas continu du critère de localisation pour les opérateurs quasi-unidimensionnels de type Schrödinger discrets démontré par Klein, Lacroix et Speis dans [KLS90]. Le critère dans le cas discret s'applique donc aux modèles (2.3) et (2.7), même si dans le cas scalaire (2.3), le résultat de localisation est connu depuis Frölich et Spencer [FS83].

Comme nous l'avons rappelé aux sections 2.2.1 et 2.2.2.2, le groupe de Fürstenberg pour les opérateurs (2.3) et (2.7) est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p$  pour toute énergie réelle (dans le cas scalaire il satisfait simplement aux hypothèses du théorème de Fürstenberg). Donc il y a localisation d'Anderson pour ces deux modèles sur toute la droite réelle. Il y a également localisation dynamique mais cela sera montré plus tard lorsqu'il sera prouvé que l'emploi de l'analyse multi-échelle implique la localisation dynamique et pas seulement la localisation d'Anderson (voir [DS01 ; Sto01]).

Passons aux modèles continus. Damanik, Sims et Stolz ont obtenu dans [DSS02] la localisation d'Anderson et dynamique pour tout intervalle réel hors d'un ensemble discret d'énergies pour le modèle d'Anderson-Bernoulli à valeurs scalaires (2.4).

En ce qui concerne le modèle  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$ , j'ai pu obtenir dans [Bou09b] le résultat de localisation suivant.

**Théorème 2.3.22.** *Il existe un ensemble discret  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$  tel que, pour tout intervalle compact  $I \subset ]2, +\infty[ \setminus \mathcal{S}$  vérifiant  $\Sigma \cap I \neq \emptyset$ , il y a localisation d'Anderson et dynamique pour  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$  dans  $I$ .*

Bien entendu ce résultat découle immédiatement du Théorème 2.2.17 qui assure que sur tout intervalle compact inclus dans  $]2, +\infty[ \setminus \mathcal{S}$ , le groupe de Fürstenberg associé à  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour  $p \in \{1, 2\}$  puisqu'il est dense et a fortiori Zariski-dense dans  $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ . Les hypothèses du Théorème 2.3.7 sont alors vérifiées sur tout intervalle compact inclus dans  $]2, +\infty[ \setminus \mathcal{S}$  qui rencontre  $\Sigma$ .

Remarquons que l'on comprend mieux, au vu des hypothèses du Théorème 2.3.7, la nécessité de passer de notre premier résultat de séparation des exposants de Lyapounov pour  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$ , le Théorème 2.2.15, au résultat du Théorème 2.2.17. En effet, l'ensemble dénombrable  $\mathcal{C}$  qui intervient dans l'énoncé du Théorème 2.2.15 peut tout à fait être dense dans  $]2, +\infty[$  ce qui interdirait l'existence d'un intervalle dans  $]2, +\infty[ \setminus \mathcal{C}$ . Or pour s'appliquer, le Théorème 2.3.7 a besoin d'un intervalle non réduit à un singleton sur lequel le groupe de Fürstenberg a les propriétés voulues. Par contre, comme nous l'avons déjà mentionné, nous pouvons appliquer le Théorème 2.3.2 avec le résultat du Théorème 2.2.15 pour obtenir l'absence de spectre absolument continu presque-sûr pour  $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega \in \Omega}$ .

Dans [Bou13], j'ai obtenu le Théorème 2.2.21 grâce auquel j'ai pu appliquer le critère de localisation à la famille  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ . Cela conduit, en reprenant les notations introduites aux sections 2.2.3.3 et 2.2.3.4, au résultat de localisation suivant.

**Théorème 2.3.23.** *Pour presque tout potentiel  $V \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ , il existe*



- un ensemble fini  $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$ ,
- un réel  $\ell_C(N, V) > 0$

tels que, pour tout  $\ell \in ]0, \ell_C(N, V)[$ , il existe un intervalle compact  $I(N, V, \ell) \subset \mathbb{R}$  tel que si  $I \subset I(N, V, \ell) \setminus \mathcal{S}_V$  est un intervalle ouvert avec  $\Sigma \cap I \neq \emptyset$ , il y a localisation d'Anderson et dynamique pour  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  dans  $I$ .

Précisons que le résultat de localisation pour  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  est valide pour  $V = V_0$  où  $V_0$  désigne l'opérateur de multiplication par la matrice tridiagonale dont les coefficients diagonaux sont nuls et ceux sur les sous et sur diagonales valent 1. Ce cas particulier est obtenu dans [Bou09b, Theorem 2].

Rappelons également que par construction, l'intervalle  $I(N, V, \ell)$  tend vers la droite réelle toute entière lorsque  $\ell$  tend vers 0 par valeurs positives. Le spectre presque-sûr de  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  étant indépendant de  $\ell$  (voir [Bou13, Appendix A]), la condition  $\Sigma \cap I \neq \emptyset$  pour  $I \subset I(N, V, \ell) \setminus \mathcal{S}_V$  peut bien être vérifiée pour  $\ell$  suffisamment petit.

## 2.4 Perspectives de recherches futures

Mes travaux sur les opérateurs quasi-unidimensionnels de type Schrödinger laissent en suspens plusieurs questions que je ne suis pas parvenu à aborder ces dernières années, faute d'idée nouvelle ou de temps. Dans la dernière section de ce chapitre je vais en présenter un certain nombre.

1. Le résultat de localisation pour un modèle d'Anderson-Bernoulli continu et quasi-unidimensionnel le plus général que je suis parvenu à obtenir est le Théorème 2.3.23. Dans ce théorème, plusieurs points demanderaient à être améliorés.

Le premier de ceux-ci est l'**emploi du paramètre de grand désordre**  $\ell$  pour pouvoir traiter le cas  $N \geq 1$  quelconque. Dans le cas  $N = 2$ , ce paramètre n'était pas nécessaire, tout comme il ne l'est pas pour le modèle d'Anderson-Bernoulli discret quasi-unidimensionnel (2.7). S'il simplifie considérablement la preuve de la densité du groupe de Fürstenberg dans le groupe symplectique, du fait qu'il permet d'éviter les difficultés liées aux logarithmes matriciels, il n'est pas absurde de penser que son usage pour un modèle unidimensionnel est un artifice technique. Dans [DSS02] ils n'utilisent pas de tel paramètre non plus et je pense qu'il doit être possible de s'en passer dans le modèle (2.15), même si je n'y suis jamais parvenu. Dans ma thèse j'avais essayé d'approfondir la piste usant de l'approximation diophantienne simultanée au cas  $N \geq 1$  quelconque, mais je butai déjà sur les problèmes de logarithmes.

Le second point est celui de la forme du potentiel à un site dans le modèle (2.15). Il serait normal de considérer un potentiel à un site et un potentiel d'interaction périodique qui ne soient pas constants, comme dans le cas continu à valeurs scalaires traité dans [DSS02]. Mais, dans le cas quasi-unidimensionnel cela pose un sérieux problème de nature algébrique. En effet, si on considère un **potentiel à un site ou un potentiel d'interaction non constant**, les matrices de transfert ne sont plus des exponentielles de matrices, mais deviennent des exponentielles ordonnées. Or, s'il peut déjà être délicat de calculer des logarithmes d'exponentielles de matrices, du

fait des problèmes de détermination principale, calculer des logarithmes d'exponentielles ordonnées et ensuite déterminer l'algèbre de Lie engendrée par ces logarithmes semble tout à fait hors de portée. Il s'agit là d'un vrai frein à l'obtention d'une généralisation au cas quasi-unidimensionnel des résultats de [DSS02].

Le troisième point concerne tout aussi bien le modèle (2.11) que le modèle (2.15) une fois débarassé du paramètre de grand désordre  $\ell$ . Il s'agit alors de **lever la restriction au cas elliptique** qui impose  $E > 2$  dans le cas  $N = 2$  et qui apparaîtrait a priori si on parvenait à obtenir une démonstration de la localisation indépendante de  $\ell$  pour (2.15). Là encore, la localisation dans le cas continu unidimensionnel à valeurs scalaires est valable sur tout  $\mathbb{R}$  hors d'un ensemble discret d'énergies critiques et il n'y a aucune raison de se restreindre à une demi-droite dans  $\mathbb{R}$ . La densité du groupe de Fürstenberg dans le groupe symplectique doit être vraie pour toute énergie réelle dans le cas continu quasi-unidimensionnel, sauf peut-être pour des énergies dans un ensemble discret.

D'autres questions ouvertes sont liées de près aux modèles d'Anderson-Bernoulli quasi-unidimensionnels continus que j'ai étudié.

Une question importante est celle du **comportement des exposants de Lyapounov aux énergies critiques** que l'on obtient après emploi du théorème de Breuillard et Gelander. Ces énergies sont celles pour lesquelles on ne parvient pas à démontrer que le groupe de Fürstenberg est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p$ . Cela n'interdit pourtant pas d'avoir des exposants de Lyapounov séparés en une telle énergie, ou au moins des exposants strictement positifs. Le plus probable reste que, soit certains exposants s'annulent tandis que d'autres non, soit certains exposants successifs sont égaux en de telles énergies critiques. Déterminer cela est déjà difficile en soi. Plus difficile encore est l'étude de la régularité de ces exposants au voisinage d'une énergie critique. En effet, si l'on parvient à démontrer la régularité Höldérienne pour les exposants de Lyapounov au voisinage d'une énergie critique on peut encore démarrer la stratégie de preuve utilisée pour démontrer le critère de localisation du Théorème 2.3.7. Pour obtenir cette régularité Höldérienne, il faut alors faire une preuve directe, sans pouvoir recourir à la formule intégrale donnée par le théorème de Guivarch et Raugi (voir Théorème 2.3.8). Pour cela il faut sans doute revenir directement à l'étude de la chaîne de Markov sous-jacente qui est utilisée dans la démonstration du théorème de Fürstenberg ou sa généralisation par Guivarch et Raugi. Nous reparlerons de cela dans la cinquième partie de cette section dédiée à la question de la régularité des exposants de Lyapounov pour une chaîne d'Ising aléatoire. Nous pouvons tout de même déjà dire qu'il s'agit d'un problème particulièrement ardu et que très peu de résultats de ce type existent. Ces résultats sont obtenus par exemple sous des hypothèses très restrictives de positivité (voir [GGG17]).

Une autre question intéressante, peut-être un peu moins dans le cas des modèles d'Anderson que dans le cas unitaire dont nous parlerons au Chapitre 4, est de voir si on peut **adapter la méthode des moments fractionnaires au cas des opérateurs quasi-unidimensionnels**. Cela a été fait dans le cas unidimensionnel à valeurs scalaires dans [HSS10], mais le passage au cas quasi-unidimensionnel pose des questions techniques intéressantes, essentiellement liées à un fait simple : pour une matrice inversible, en général,  $\|A^{-1}\| \neq \|A\|^{-1}$ . Cette observation élémentaire conduit à plusieurs estimations difficiles à adapter depuis [HSS10] dans le cas d'opérateurs de Schrödinger à valeurs matricielles. Bien entendu utiliser la méthode des moments fractionnaires excluerait le cas Bernoulli et c'est pour cela que j'ai utilisé l'analyse

multi-échelle tout au long de mes recherches sur les modèles d'Anderson-Bernoulli.

J'ai déjà évoqué vers la fin de la Section 1.2.1 une autre approche plus récente de la localisation pour des opérateurs unidimensionnels à valeurs scalaires qui est fondée sur des estimées de grandes déviations (voir [JZ19; Buc+19a; Buc+19b]). Il serait également intéressant de voir comment adapter cette approche au cas quasi-unidimensionnel.

Enfin, une autre question que je me suis posée, sans avoir eu le temps de vraiment m'y consacrer pour le moment, est de savoir si on peut encore traiter par le formalisme des matrices de transfert le cas où, dans le modèle d'Anderson, les variables aléatoires ne sont plus attachées au réseau  $\mathbb{Z}$ , mais à un ensemble dénombrable plus général qui pourrait même éventuellement contenir des points d'accumulation. A priori il n'est même pas évident que l'on conserve dans ce cas un modèle ergodique et on sera sans doute obligé de s'inspirer des résultats de Rojas-Molina, Germinet et Müller pour des modèles où l'aléa est porté par un ensemble de Delone (voir [GMR15]) ou des résultats de Rojas-Molina dans le cas apériodique (voir [Roj21]).

**2. Pour le modèle à interactions ponctuelles (2.9)** étudié dans [Bou09a], je n'ai jamais publié de résultat de localisation. Comme nous le verrons à la Section 3.3, j'ai publié pour ce modèle, dans les cas  $N = 2$  et  $N = 3$  des résultats de régularité Höldérienne de la densité d'états intégrée, mais je n'ai jamais démontré que le Théorème 2.3.7 peut être étendu au cas des interactions ponctuelles. Il n'est pas évident que l'on puisse obtenir une estimée de Wegner comme (2.47) ou une estimée du type (2.44) dans ce cas, car nous n'avons alors plus les estimées a priori utilisées dans la preuve de l'estimée de Wegner (voir [Bou09b, Lemma 6 et Lemma 7]). Toutefois, il reste envisageable d'obtenir des estimées sur les matrices de transfert des modèles à interactions ponctuelles sans avoir recours aux estimées a priori, comme cela a été fait pour les estimées nécessaires à la régularité Höldérienne des exposants de Lyapounov dans [Bou09a, Proposition 2].

Bien entendu, il serait également intéressant d'étendre les résultats de Zariski-densité du groupe de Fürstenberg obtenus pour  $N = 2$  et  $N = 3$  au cas de  $N \geq 1$  quelconque. Je voudrais alors conserver des résultats indépendants d'un paramètre de grand désordre et valable pour toutes les énergies réelles en dehors d'un éventuel ensemble discret d'énergies critiques. Les matrices de transfert associées à ce modèle font intervenir l'énergie et l'aléa de manière découplée, ce qui permet d'envisager de n'avoir aucune restriction sur le domaine d'énergie comme dans les preuves pour  $N = 2$  et  $N = 3$ . Par contre, nos constructions dans ces deux cas étant faites à la main et utilisant des calculs de déterminants explicites, pour le cas général il faudrait revoir complètement cette approche.

**3. Une fois obtenue la localisation pour une famille d'opérateurs  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  dans un intervalle donné, la question naturelle est celle des **statistiques spectrales des valeurs propres** dans cet intervalle. Dans la suite de cette discussion, on se place en dimension 1 bien que plusieurs résultats cités sont valables en dimension supérieure.**

Rappelons que dans la région de localisation, il n'y a que du spectre purement ponctuel, adhérence d'une suite dense de valeurs propres. Si on restreint l'opérateur  $H_\omega$  à un intervalle de longueur finie  $L > 0$  avec conditions de Dirichlet aux bords, le spectre de cet opérateur restreint  $H_\omega^{(L)}$  est ponctuel, constitué uniquement de valeurs propres réelles. L'existence de la densité d'états intégrée implique que l'écart moyen entre deux de ses valeurs propres est approximativement de l'ordre de l'inverse de  $L$

lorsque  $L$  est grande, ces valeurs propres sont donc proches les unes des autres. On parle alors de statistiques linéaires des valeurs propres.

Soient  $E \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \Omega$ . On considère le processus ponctuel associé aux valeurs propres renormalisées selon l'espace moyen en  $\frac{1}{L}$ ,

$$\tilde{\zeta}_{E,\omega}^L = \sum_{n \geq 0} \delta_{L(E_{n,\omega}^L - E)}$$

où  $\{E_{n,\omega}^L\}_{n \geq 0}$  désigne l'ensemble dénombrable des valeurs propres de l'opérateur  $H_\omega^{(L)}$ .

Si on se place au voisinage d'une énergie  $E$  dans un intervalle où il y a localisation d'Anderson, deux valeurs propres suffisamment éloignées l'une de l'autre seront presque indépendantes et on s'attend à ce que le processus ponctuel  $\{\tilde{\zeta}_{E,\omega}^L\}_{\omega \in \Omega}$  converge en loi vers un processus de Poisson lorsque  $L$  tend vers l'infini. Si un modèle aléatoire présente des intervalles où il y a délocalisation et si  $E$  est prise dans un tel intervalle, il est attendu que le processus ponctuel  $\{\tilde{\zeta}_{E,\omega}^L\}_{\omega \in \Omega}$  converge en loi vers un processus de type "ensemble gaussien orthogonal" ou GOE en anglais. Cette dichotomie est connue comme la conjecture des statistiques spectrales et permettrait, si elle était démontrée, de caractériser la localisation ou la délocalisation au travers des statistiques spectrales locales des valeurs propres (voir [Mir00; EK16]).

Dans une région de localisation, le phénomène de convergence du processus  $\{\tilde{\zeta}_{E,\omega}^L\}_{\omega \in \Omega}$  vers un processus de Poisson a été tout d'abord démontré par Molchanov dans [Mol81] pour un modèle aléatoire de Schrödinger continu en dimension 1, dont le potentiel est un processus gaussien (le même modèle pour lequel la localisation a été démontrée pour la première fois dans [GMP77]). Pour le modèle d'Anderson discret en dimension quelconque, il faut attendre 1996 et l'article de Minami [Min96] qui pose les bases de l'analyse moderne de ce phénomène à l'aide de l'estimée portant son nom. Cette estimée permet de mesurer la probabilité qu'au moins deux valeurs propres de  $H_\omega^{(L)}$  sont dans un intervalle donné.

Depuis, un grand nombre de résultats de statistiques locales des valeurs propres ont été obtenus pour divers modèles, principalement dans le cas des opérateurs de Schrödinger mais également pour les matrices CMV (voir [KS09]). En dimension 1, notons les résultats de convergence vers des processus de Poisson obtenus par Klopp dans [Klo14], aussi bien pour le modèle d'Anderson que pour un modèle de déplacement aléatoire.

A la même époque, Germinet et Klopp présentent dans [GK14] un résultat général de statistiques locales des valeurs propres et d'indépendance asymptotique des valeurs propres de  $H_\omega^{(L)}$  pour des opérateurs aléatoires de type Schrödinger. Si, pour une telle famille d'opérateurs, on peut obtenir à la fois une estimée de Wegner et une estimée de Minami, alors le processus  $\{\tilde{\zeta}_{E,\omega}^L\}_{\omega \in \Omega}$  converge en loi vers un processus de Poisson lorsque  $L$  tend vers l'infini, dès lors que  $E$  est dans un intervalle de localisation. Si de plus on peut obtenir une estimée de décorrélation, alors les valeurs propres renormalisées proches d'énergies de référence suffisamment éloignées sont asymptotiquement indépendantes. Ces estimées de décorrélation sont difficiles à obtenir, mais Shirley est parvenu à en démontrer dans le cas de la dimension 1, pour des opérateurs discrets ([Shi15]) ou continus ([Shi17]) incluant les modèles d'Anderson classiques.

A l'aide du cadre défini par Germinet et Klopp dans [GK14], on peut aborder des modèles dont les potentiels aléatoires sont ou se ramènent à des opérateurs de rang 1. Pour aborder des opérateurs aléatoires dont le potentiel aléatoire est de rang supérieur, il est nécessaire d'obtenir des estimées de Minami généralisées, comme cela est fait dans [TV14] dans le cas discret et dans [HK15] dans les cas discret et continu. Dans [HK15], Hislop et Krishna démontrent que le processus  $\{\zeta_{E,\omega}^L\}_{\omega \in \Omega}$  converge en loi vers un processus de Poisson composé dans le cas discret, ce processus étant caractérisé par le fait que la mesure de Lévy associée est supportée par un nombre fini d'entiers déterminé par le rang du potentiel. Dans le cas continu, le support de la mesure de Lévy peut être infini, mais sera au plus l'ensemble des entiers naturels. Les résultats de [HK15] sont complétés par l'obtention d'une estimée de décorrélation et par la preuve de l'indépendance asymptotique des valeurs propres renormalisées, toujours pour des potentiels de rang arbitraire, par Hislop, Krishna et Shirley dans [HKS21].

Je pense que les résultats de [HK15] et [HKS21] s'appliquent avec un minimum de vérifications supplémentaires au cas du modèle  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  défini en (2.15) et pour lequel j'ai déjà obtenu un intervalle de localisation dans lequel les appliquer. Cela avec une grosse restriction : dans presque tous les résultats existants de statistiques locales des valeurs propres ou d'indépendance asymptotique, il est nécessaire que les variables aléatoires intervenant dans le potentiel aléatoire soit des variables à densité dont la densité vérifie certaines hypothèses supplémentaires. Cela exclut le cas des variables de Bernoulli, et si je veux pouvoir appliquer les résultats de [HK15] et [HKS21], je devrais supposer les variables aléatoires  $\omega_i^{(n)}$  intervenant dans  $H_{\omega,\ell}^{(N)}$  comme étant à densité. Avec cette hypothèse de régularité supplémentaire sur les variables aléatoires, je devrais obtenir que le processus  $\{\zeta_{E,\omega}^L\}_{\omega \in \Omega}$  associé à  $\{H_{\omega,\ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$  converge en loi vers un processus de Poisson composé dont le support de la mesure de Lévy peut être infini. Toutefois, en adaptant au cadre des opérateurs quasi-unidimensionnels les techniques récentes de Dietlein et Elgart ([DE21]), il est peut-être possible d'obtenir que le processus limite obtenu soit en fait un processus de Poisson, ou au moins un processus de Poisson composé dont la mesure de Lévy est à support fini.

Une autre question autrement plus difficile mais que j'aimerais aborder un jour est celle de l'étude des statistiques locales des valeurs propres dans le cas de l'aléa de Bernoulli. A ma connaissance, il n'existe qu'un seul résultat de ce type, celui de Bourgain dans [Bou14c]. Il y obtient, pour le modèle d'Anderson-Bernoulli discret en dimension 1 et à valeurs scalaires, la convergence du processus associé aux valeurs propres renormalisées vers un processus de Poisson. Précisons qu'il renormalise les valeurs propres non pas par la taille de l'intervalle mais directement par la densité d'états intégrée en  $E - E_0$  où  $E$  parcourt le spectre de l'opérateur restreint et  $E_0$  est l'énergie à laquelle on regarde le processus. Ce résultat n'est par contre valable que pour certaines valeurs du paramètre de grand désordre placé devant le potentiel aléatoire, ces valeurs respectant des conditions algébriques précises provenant de l'usage des résultats de [Bou14b]. Un premier résultat éventuellement accessible serait de généraliser le résultat de Bourgain au cas discret quasi-unidimensionnel. Le cas continu, unidimensionnel ou quasi-unidimensionnel semble pour le moment hors de portée, les techniques de Bourgain étant vraiment particulières et adaptées au cas discret.

4. Depuis un an, nous avons démarré avec Sylvain Zalczer une collaboration pour étudier la **localisation pour un opérateur de Dirac aléatoire quasi-unidimensionnel**. Nous souhaitons généraliser les résultats de localisation dynamique que Sylvain a obtenus pour un modèle de Dirac aléatoire unidimensionnel à valeurs scalaires dans [Zal21].

Plus précisément, il considère une famille ergodique d'opérateurs aléatoires de la forme

$$H_\omega = D_0 + V_{\text{per}} + V_\omega$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$  où  $D_0 = \frac{d}{dx} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est l'opérateur de Dirac libre, jouant un rôle analogue au Laplacien des opérateurs de Schrödinger. Le potentiel  $V_{\text{per}}$  est une fonction 1-périodique combinaison linéaire de matrices de Pauli. Le potentiel aléatoire  $V_\omega$  est un potentiel d'Anderson dont le potentiel à un site est encore une combinaison linéaire de matrices de Pauli.

Par analogie avec les résultats que j'ai obtenu pour le modèle d'Anderson quasi-unidimensionnel à potentiel d'interaction générique  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ , l'idée est de généraliser le modèle étudié dans [Zal21] à un opérateur de Dirac quasi-unidimensionnel agissant sur  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^{2N}$  et de la forme,

$$D_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} \otimes I_N \\ \frac{d}{dx} \otimes I_N & 0 \end{pmatrix} + V_{\text{per}} + V_\omega$$

où  $V_{\text{per}}$  est encore un potentiel périodique, combinaison linéaire de matrices de Pauli tensorisées. Par exemple, on pourra prendre pour  $V_{\text{per}}$  le cas d'un potentiel constant de la forme

$$V_{\text{per}} = (\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 I_2) \otimes V,$$

où  $V$  est une matrice symétrique réelle générique au sens de la mesure de Lebesgue.

Le potentiel aléatoire sera également une combinaison linéaire de produits tensoriels de matrices de Pauli avec une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont des potentiels d'Anderson de la forme

$$V_\omega = (\beta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 I_2) \otimes \hat{V}_\omega$$

où

$$\hat{V}_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^{(n)} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(\cdot - \ell n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \omega_N^{(n)} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(\cdot - \ell n) \end{pmatrix}$$

avec des hypothèses analogues à celles du modèle (2.15).

Les premiers calculs effectués semblent indiquer des comportement différents du point de vue de la séparabilité des exposants de Lyapounov suivant que certains des coefficients  $\alpha_i$  ou  $\beta_i$  soient nuls ou non.

5. Un dernier projet de recherche lié aux questions de localisation et d'exposants de Lyapounov est l'**étude de la régularité de l'exposant de Lyapounov pour une chaîne d'Ising aléatoire**. Nous avons débuté en 2016 une collaboration avec Günter Stolz

sur ce sujet afin de compléter un point non résolu dans son article avec Chapman [CS15].

Soit  $n \geq 1$ . Une chaîne de spins  $XY$  anisotropique est décrite par l'Hamiltonien auto-adjoint

$$H_n = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \left( (1 + \eta_j) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1 - \eta_j) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right) + \sum_{j=1}^n v_j \sigma_j^z \quad (2.51)$$

agissant sur le produit tensoriel de  $n$  copies de  $\mathbb{C}^2$ ,  $\otimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2$ . Les suites de réels  $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  représentent respectivement la force de couplage, l'anisotropie et le champ magnétique externe. Enfin,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

sont les matrices de Pauli. La chaîne de spins est dite anisotropique lorsque la suite  $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est non nulle.

L'Hamiltonien  $H_n$  se ramène, après une transformation de Jordan-Wigner détaillée dans [CS15], à un opérateur d'Anderson discret généralisé dont les entrées sont des matrices  $2 \times 2$  et pour lequel on peut utiliser le formalisme des matrices de transfert.

Le modèle d'Ising que nous voulions étudier avec Günter Stolz correspond à une suite  $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$  constante égale à 1, une suite  $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  constante égale à  $\eta \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  et à une suite  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  formée de variables aléatoires *i.i.d.*. Avec ces hypothèses, Chapman et Stolz démontrent la localisation en dehors de l'énergie  $E = 0$  pour laquelle ils montrent que l'exposant de Lyapounov correspondant est encore strictement positif, mais sans avoir la réductibilité du groupe de Fürstenberg à cette énergie.

Notre but est donc d'étudier plus précisément l'exposant de Lyapounov associé à la suite de matrices de transfert

$$T_n(E) = \begin{pmatrix} v_n & -\frac{E}{v_n} \\ E v_n & \frac{1-E^2}{v_n} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où les  $v_n$  sont *i.i.d.*, de loi commune  $\mu_E$  à densité supportée dans un compact de  $(0, \infty)$ .

Le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  est non-compact et fortement irréductible pour  $E \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (voir [CS15]), l'exposant de Lyapounov  $\gamma(E)$  associé est donc strictement positif et localement Hölder continu hors de  $E = 0$ . Par un calcul direct,  $\gamma(0) = |\mathbb{E}(\log v_1)|$ , mais on ne peut pas conclure à la continuité Hölderienne au voisinage de  $E = 0$ , puisque le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_0}$  est réductible. Nous n'avons donc plus de représentation intégrale pour  $\gamma(0)$  mettant en jeu une mesure invariante grâce à laquelle on peut suivre la démonstration de la régularité Hölderienne des exposants de Lyapounov comme décrite à l'étape 1 de la Section 2.3.2.

L'absence de preuve de localisation dynamique en  $E = 0$  pour l'Hamiltonien à une particule que l'on étudie implique que l'on ne peut pas en déduire la localisation dynamique à plusieurs particules pour la chaîne  $XY$  anisotropique (2.51) (voir [CS15; Abd+17]).

Pour démontrer la continuité, puis la continuité Höldérienne de l'exposant de Lyapounov au voisinage de  $E = 0$ , notre idée était de suivre une démonstration directe en revenant à un argument de chaîne de Markov à la base de la démonstration du théorème de Fürstenberg. Pour ce faire, nous avons voulu adapter les idées de [GGG17], mais leur modèle est très spécifique et utilise en particulier une hypothèse de positivité que nous n'avons pas ici. Cette absence de positivité rend l'étude de la chaîne de Markov très compliquée et pour le moment nous n'avons pas réussi à faire aboutir cette démarche.





# Chapitre 3

## La densité d'états intégrée pour des opérateurs quasi-unidimensionnels

Dans ce chapitre, je présente les résultats obtenus dans les articles [Bou08; Bou09a] ainsi qu'un résultat de [BN15]. Les deux premiers articles traitent de la densité d'états intégrée pour des modèles d'Anderson-Bernoulli continus à valeurs matricielles.

Dans la Section 3.1 je présente la définition et les principales étapes de la preuve de l'existence de la densité d'états intégrée pour le modèle d'Anderson-Bernoulli à valeurs matricielles tel que présentées dans [Bou08].

Dans la Section 3.2 je reviens au cadre des opérateurs quasi-unidimensionnels et présente une formule de Thouless qui lie la densité d'états à la somme des exposants de Lyapounov positifs. J'explique également comment cette formule de Thouless permet de déduire de la régularité Höldérienne des exposants de Lyapounov obtenue au Théorème 2.3.9, la même régularité Höldérienne pour la densité d'états intégrée. Ces résultats sont eux aussi issus de [Bou08].

Dans la Section 3.3, je présente le résultat de régularité obtenu dans le cas des interactions ponctuelles obtenu dans [Bou09a].

Enfin, dans la Section 3.4, je présente un résultat d'asymptotique de Lifschitz au bas du spectre obtenu en collaboration avec Hatem Najar et publié dans [BN15].

### 3.1 Généralités sur la densité d'états intégrée

On veut définir une fonction de comptage des niveaux d'énergie pour un système quantique décrit par un opérateur de Schrödinger continu. Du point de vue mathématique, cela pose problème car le spectre d'un tel opérateur continu est en général soit un intervalle, soit, dans le cas d'une famille ergodique d'opérateurs de Schrödinger aléatoires, un ensemble dense. Plus généralement, agissant sur un espace de Hilbert de dimension infinie, le comptage des niveaux d'énergies dans un intervalle donné ou de manière équivalente, sous une énergie fixée, peut conduire à obtenir l'infini comme valeur.

Toutefois, ce problème n'est pas de nature physique car il est lié au fait que l'opérateur ou la famille d'opérateurs étudiés sont définis sur  $\mathbb{R}^d$  tout entier alors qu'un système physique est défini sur un domaine borné. En restreignant nos opérateurs à un domaine borné, on revient au cas où le spectre est composé de valeurs propres isolées que l'on peut donc compter. Pour définir la fonction de comptage dans le cas

des opérateurs définis sur  $\mathbb{R}^d$  il faut alors définir une quantité indépendante asymptotiquement du volume du domaine borné auquel on se restreint de façon à pouvoir faire ensuite tendre ce volume vers l'infini. Nous allons donc diviser la fonction de comptage des opérateurs restreint à un domaine borné par le volume de ce domaine et faire tendre le volume du domaine vers l'infini. Cette limite thermodynamique nous permettra de définir une fonction de répartition appelée densité d'états intégrée associée à une mesure appelée densité d'états.

Dans [Bou08] j'ai étudié l'existence de la densité d'états intégrée et sa régularité pour des opérateurs d'Anderson continus à valeurs matricielles de la forme :

$$H_\omega = -\Delta_d \otimes I_D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_\omega^{(n)}(x - \ell n) \quad (3.1)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$ , où  $d$  et  $D$  sont des entiers naturels,  $\ell$  est un réel strictement positif,  $I_D$  est la matrice identité d'ordre  $D$  et  $\Delta_d$  est le Laplacien continu en dimension  $d$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité complet et soit  $\omega \in \Omega$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $x \mapsto V_\omega^{(n)}(x)$  sont à valeurs dans les matrices symétriques, à support dans  $[0, 1]^d$  et uniformément bornées en  $x, n$  et  $\omega$ . On pose aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_\omega^{(n)}(x - \ell n)$$

et on note  $V_\omega$  l'opérateur de multiplication maximal par  $x \mapsto V_\omega(x)$ . La fonction  $x \mapsto V_\omega(x)$  est uniformément bornée sur  $\mathbb{R}$  en  $x$  et en  $\omega$ . Le potentiel  $V_\omega$  sera aussi choisi de sorte que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  soit  $\ell\mathbb{Z}^d$ -ergodique. En tant que perturbation bornée de  $-\Delta_d \otimes I_D$ ,  $H_\omega$  est auto-adjoint sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$ .

Fixons  $\omega \in \Omega$ . On veut définir une fonction de la variable réelle qui compte le nombre de valeurs spectrales de  $H_\omega$  en-dessous d'une énergie  $E$  fixée. Pour définir cette fonction, on commence par restreindre  $H_\omega$  à des cubes de volume fini dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $L$  un entier plus grand que 1 et soit  $\Lambda = [-\ell L, \ell L]^d \subset \mathbb{R}^d$  le cube centré en 0 et de côté  $2\ell L$ . On pose :

$$H_\omega^{(\Lambda)} = -\Delta_d^{(\Lambda)} \otimes I_D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_\omega^{(n)}(x - \ell n) \quad (3.2)$$

la restriction de  $H_\omega$  agissant sur  $L^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^D$  avec conditions de Dirichlet au bord de  $\Lambda$ .

**Remarque 3.1.1.** Le paramètre  $\ell > 0$  n'apparaît pas dans la présentation faite dans [Bou08], mais le rajouter ne change rien aux démonstrations de cet article. De plus, cela nous est utile pour appliquer les résultats de [Bou08] au modèle  $\{H_{\omega, \ell}^{(N)}\}_{\omega \in \Omega}$ .

**Définition 3.1.2.** La *densité d'état intégrée* de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est la fonction croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $E \mapsto N(E)$  où pour tout réel  $E$ ,  $N(E)$  est défini comme la limite thermodynamique :

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \# \left\{ \lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_\omega^{(\Lambda)}) \right\} \quad (3.3)$$

où  $|\Lambda|$  est le volume de  $\Lambda$ .

Il y a un double problème d'existence dans l'expression (3.3). On doit tout d'abord prouver que le cardinal  $\#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_\omega^{(\Lambda)})\}$  est fini pour tout  $E$  fixé et on doit ensuite prouver l'existence de la limite. La réponse à ces deux problèmes est donnée par l'existence d'un noyau  $L^2$  pour le sous-groupe à un paramètre  $(e^{-tH_\omega^{(\Lambda)}})_{t>0}$ . Ce noyau est obtenu à l'aide d'une formule de Feynman-Kac mettant en jeu une exponentielle ordonnée que j'ai obtenue dans [Bou08, Proposition 1].

Commençons par présenter une formule de Feynman-Kac à valeurs matricielles pour le semi-groupe à un paramètre  $(e^{-tH_\omega})_{t>0}$  dont on déduit ensuite une formule de Feynman-Kac pour  $(e^{-tH_\omega^{(\Lambda)}})_{t>0}$ .

Soit  $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \geq 0$  on considère la fonction coordonnée :

$$X_t : \begin{array}{l} W \longrightarrow \mathbb{R} \\ w \longmapsto X_t(w) = w(t) \end{array}$$

Soit  $\mathcal{W}$  la plus petite  $\sigma$ -algèbre sur  $W$  pour laquelle les applications  $X_t$  sont mesurables. Pour  $s, t \geq 0$  et  $x, y \in \mathbb{R}^d$  on note par  $W_{s,x,t,y}$  la mesure de Wiener conditionnelle, définie sur  $(W, \mathcal{W})$ , associée au mouvement brownien partant de  $x$  au temps  $s$  et arrivant en  $y$  au temps  $t$ .

Dans [BR04] on peut trouver la formule suivante pour le noyau intégral de  $e^{-tH_\omega}$  pour  $t > 0$  et  $\omega \in \Omega$  fixés :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, K_t(x, y) = \int \exp_{\text{ord}} \left( - \int_0^t V_\omega(w(s)) ds \right) dW_{0,x,t,y}(w). \quad (3.4)$$

où  $\exp_{\text{ord}}$  est l'exponentielle ordonnée de Dyson (voir [DF11]). De cette formule, on déduit l'existence d'un noyau intégral pour  $e^{-tH_\omega^{(\Lambda)}}$  pour  $t > 0$  et  $\omega \in \Omega$  fixés. On note  $T_\Lambda(w)$  l'instant de première sortie de  $\Lambda$  du chemin  $w \in W$  :

$$T_\Lambda(w) = \inf\{t > 0, X_t(w) \notin \Lambda\}. \quad (3.5)$$

Puisque l'on utilise des conditions de Dirichlet au bord de  $\Lambda$  pour définir  $H_\omega^{(\Lambda)}$ , on peut utiliser les résultats sur les mouvements browniens tués (voir [Kni81]) qui conduisent au résultat suivant, que j'ai obtenu dans [Bou08].

**Proposition 3.1.3.** *Pour tout  $t > 0$ ,  $e^{-tH_\omega^{(\Lambda)}}$  a un noyau intégral donné par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, K_t^{(\Lambda)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left( \int \chi_{\{t < T_\Lambda(w)\}}(w) \exp_{\text{ord}} \left( - \int_0^t V_\omega(X_s(w)) ds \right) dW_{0,x,t,y}(w) e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \right) \quad (3.6)$$

et  $K_t^{(\Lambda)}$  est dans  $L^2(\Lambda^2) \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{D}}(\mathbb{C})$  pour tout  $t > 0$ .

De cette formule de Feynman-Kac, on déduit l'existence de la densité d'états intégrée pour  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

Puisque le noyau  $K_t^{(\Lambda)}$  est dans  $L^2$ , on en déduit que pour tout  $t > 0$ , l'opérateur  $e^{-tH_\omega^{(\Lambda)}}$  est Hilbert-Schmidt sur  $L^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^D$ . En particulier il est compact et son spectre est de la forme :

$$\{e^{-t\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)}}, j \geq 0\}$$

où  $(\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)})_{j \geq 0}$  est une suite croissante de nombres réels bornée inférieurement et qui tend vers  $+\infty$ . Cette suite n'est autre que le spectre de  $H_\omega^{(\Lambda)}$ . En particulier, pour  $E \in \mathbb{R}$  fixé :

$$\#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_\omega^{(\Lambda)})\} = \#\{\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)} \leq E\} < +\infty.$$

Cela répond au premier problème soulevé pour démontrer l'existence de  $N(E)$ .

Il reste à démontrer que la suite  $\left(\frac{1}{|\Lambda|} \#\{\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)} \leq E\}\right)_{L \geq 1}$  converge vers un nombre réel indépendant de  $\omega$  :  $N(E)$ . Pour cela on introduit la mesure de comptage des valeurs propres de  $H_\omega^{(\Lambda)}$  :

$$n_{\Lambda,\omega} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j \geq 0} \delta_{\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)}} \quad (3.7)$$

où  $\delta_{\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)}}$  est la mesure de Dirac en  $\lambda_{\omega,j}^{(\Lambda)}$ . J'ai alors obtenu dans [Bou08, Proposition 2],

**Proposition 3.1.4.** *La suite de mesures  $(n_{\Lambda,\omega})_{L \geq 1}$  converge vaguement vers une mesure  $n$  indépendante de  $\omega$  lorsque  $L$  tend vers l'infini et ce pour P-presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ . De plus, la transformée de Laplace de cette mesure limite est donnée par :  $\forall t > 0$ ,*

$$L(n)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int \int_{\Omega} \text{Tr}_{\mathbb{C}^D} \exp_{\text{ord}} \left( - \int_0^t V_\omega(X_s(w)) ds \right) d\omega dW_{0,0,t,0}(w), \quad (3.8)$$

où  $\text{Tr}_{\mathbb{C}^D}$  est la trace usuelle des matrices  $D \times D$ .

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant, adapté d'un résultat de B. Simon (voir [Sim05c, Theorem 3.9]).

**Lemme 3.1.5.** *Soit  $H$  un opérateur auto-adjoint agissant sur  $L^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^D$  où  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  est un compact. Supposons que pour tout  $t > 0$  l'opérateur  $e^{-tH}$  est de classe trace et qu'il possède un noyau intégral  $K_t$ . Alors :*

$$\text{Tr}(e^{-tH}) = \int_{\Lambda} \text{Tr}_{\mathbb{C}^D} K_t(x, x) dx.$$

L'existence repose également sur le théorème ergodique de Birkhoff ce qui explique pourquoi la mesure limite  $n$  obtenue est P-presque sûrement indépendante de  $\omega$ .

**Définition 3.1.6.** *La mesure  $n$  est appelée **densité d'états** associée à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .*

De la Proposition 3.1.4, on déduit l'existence de la densité d'états intégrée et son lien avec la densité d'états.

**Corollaire 3.1.7.** *Pour tout  $E \in \mathbb{R}$ , la limite :*

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{|L|} \#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_\omega^{(L)})\}$$

*existe et est P-presque sûrement indépendante de  $\omega$ . La fonction  $E \mapsto N(E)$  est la fonction de répartition de la densité d'états  $n$  :*

$$\forall E \in \mathbb{R}, N(E) = n((-\infty, E]).$$

La densité d'états caractérise le spectre presque-sûr  $\Sigma$  de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  :

$$\text{supp } n = \Sigma. \quad (3.9)$$

En particulier,  $N$  est constante hors de  $\Sigma$  et croissante sur  $\Sigma$ .

## 3.2 Formule de Thouless et régularité Höldérienne

Le résultat d'existence de la densité d'états et de la densité d'états intégrée obtenu au Corollaire 3.1.7 est valable en toute dimension  $d \geq 1$ . Par contre, pour obtenir un résultat de régularité de la densité d'états intégrée qui ne dépend pas a priori d'une estimée de Wegner, mais qui la précède, nous allons nous restreindre au cas de la dimension  $d = 1$  (voir discussion Section 1.2.2).

En combinant les résultats de [KS88b] et de [DSS02], j'ai démontré dans [Bou08] une formule de Thouless qui fait le lien entre la densité d'états et la somme des exposants de Lyapounov positifs. Ce lien se fait au travers d'une fonction dite de Kotani (voir [Kot84]) et en usant d'outils de l'analyse harmonique.

Avant de définir la fonction  $w$  de Kotani on définit les fonctions  $m$  de Weyl-Titchmarsh. Soit  $\mathbb{C}_+$  le demi-plan supérieur complexe  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  et  $\mathbb{C}_-$  le demi-plan inférieur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$ . Soit  $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ . On fixe  $\omega \in \Omega$ . Il existe alors une unique fonction  $x \mapsto F_+(x, E)$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_D(\mathbb{C})$  (respectivement  $x \mapsto F_-(x, E)$ ) satisfaisant :

$$-F_+'' + V_\omega F_+ = E F_+, \quad F_+(0, E) = I_D, \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \|F_+(x, E)\|^2 dx < +\infty$$

respectivement :

$$-F_-'' + V_\omega F_- = E F_-, \quad F_-(0, E) = I_D, \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 \|F_-(x, E)\|^2 dx < +\infty.$$

Pour la démonstration de l'existence de ces fonctions, voir [Bou08, Proposition 5].

Pour  $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$  on définit les fonctions  $m$  de Weyl-Titchmarsh,  $M_+$  et  $M_-$  associées à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  comme étant les dérivées en  $x = 0$  des fonctions  $F_\pm$  :

$$M_+(E) = \frac{d}{dx} F_+(x, E)|_{x=0} \quad \text{et} \quad M_-(E) = -\frac{d}{dx} F_-(x, E)|_{x=0}. \quad (3.10)$$

A  $\omega \in \Omega$  fixé, les fonctions  $F_{\pm}$  et  $M_{\pm}$  permettent de calculer le noyau de Green de la résolvante de  $H_{\omega}$  hors de la droite réelle.

Soit  $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ . Alors  $(H_{\omega} - E)^{-1}$  a un noyau intégral continu  $G_E(\cdot, \cdot, \omega)$  donné par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, G_E(x, y, \omega) = \begin{cases} -F_-(x)(M_+ + M_-)^{-1} {}^t F_+(y) & \text{si } x \leq y \\ -F_+(x)(M_+ + M_-)^{-1} {}^t F_-(y) & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

Ce résultat est démontré dans [KS88b, Theorem 3.2].

On peut à présent définir la fonction  $w$  de Kotani. C'est cette fonction qui fera le lien entre les exposants de Lyapounov et la densité d'états intégrée. En effet, la limite tangentielle vers la droite réelle de sa partie réelle sera la somme des exposants de Lyapounov positifs, tandis que sa partie imaginaire (toujours en limite tangentielle) sera égale à  $\pi$  fois la densité d'états intégrée.

**Définition 3.2.1.** Soit  $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ . On définit la fonction  $w$  de Kotani par :

$$w(E) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(\text{Tr}(M_+(E) + M_-(E))).$$

La fonction  $w$  a les propriétés suivantes, démontrées dans [KS88b, Theorem 6.2C] :

**Proposition 3.2.2.** Pour  $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$  :

1.  $w(E) = \mathbb{E}(\text{Tr}(M_+(E))) = \mathbb{E}(\text{Tr}(M_-(E)))$ .
2.  $\frac{d}{dE} w(E) = \mathbb{E}(\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega)))$ .
3.  $-\text{Re } w(E) = (\gamma_1 + \dots + \gamma_D)(E)$ .
4.  $\mathbb{E}(\text{Tr}(\text{Im } M_{\pm}(E)^{-1})) = -\frac{2\text{Re } w(E)}{\text{Im } E} = \frac{2(\gamma_1 + \dots + \gamma_D)(E)}{\text{Im } E}$ .

Dans le point 3, précisons que la formule :

$$\gamma_1(E) + \dots + \gamma_D(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log || \wedge^D (T_{\omega^{(n-1)}}(E) \cdots T_{\omega^{(0)}}(E)) ||)$$

où  $T_{\omega^{(n)}}(E)$  désigne la matrice de transfert de  $n$  à  $n+1$  pour tout  $n \geq 0$ , a un sens pour tout  $E \in \mathbb{C}$ .

Mentionnons que [KS88b] ne considère que le cas de familles  $\mathbb{R}$ -ergodiques d'opérateurs de Schrödinger tandis que  $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mathbb{Z}$ -ergodique. Pour contourner cette limitation, on peut utiliser la méthode de suspension de Kirsch présentée dans [Kir85]. Cette méthode permet de construire à partir de  $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  une famille d'opérateurs  $\{\hat{H}_{\hat{\omega}}\}_{\hat{\omega} \in \hat{\Omega}}$  définie sur un espace de probabilités plus grand et qui est  $\mathbb{R}$ -ergodique. La famille  $\{\hat{H}_{\hat{\omega}}\}_{\hat{\omega} \in \hat{\Omega}}$  est également construite de sorte que les exposants de Lyapounov et la densité d'états intégrée existent si et seulement si ils existent pour  $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  et dans ce cas ils sont identiques pour les deux familles d'opérateurs.

En utilisant une formule qui fait le lien entre la densité d'états  $n$  et la famille de mesures spectrales associées à  $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  démontrée dans [Bou08, Proposition 3], j'ai obtenu dans [Bou08, Proposition 9] la formule suivante :

$$\forall E \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathbb{E}(\text{Tr } G_E(0, 0, \omega)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{dn}(E')}{E' - E}. \quad (3.11)$$

En combinant le point 2 de la Proposition 3.2.2, la formule (3.11) puis en faisant une intégration par parties pour faire apparaître la densité d'états intégrée, on obtient, après une application de la convergence dominée et de la continuité à droite de la densité d'états intégrée, la formule qui fait le lien entre la partie imaginaire de  $w$  et  $E \mapsto N(E)$  :

$$\forall E \in \mathbb{R}, \lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Im } w(E + ia) = \pi N(E). \quad (3.12)$$

D'autre part, en exploitant le fait que les exposants de Lyapounov vus comme fonctions de  $E \in \mathbb{C}$  sont sous-harmoniques (voir [CS83a]) et en utilisant le point 3 de la Proposition 3.2.2, on a un résultat analogue pour la partie réelle de  $w$ .

Pour Lebesgue-presque tout  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Re } w(E + ia) = -(\gamma_1 + \dots + \gamma_D)(E). \quad (3.13)$$

De plus, si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle sur lequel  $E \mapsto -(\gamma_1 + \dots + \gamma_D)(E)$  est continue, alors (3.13) est vraie pour tout  $E \in I$ .

On peut adapter au cas des opérateurs de Schrödinger à valeurs matricielles les résultats d'analyse harmonique démontrés dans [Kot84] valables dans le cas des opérateurs de Schrödinger à valeurs scalaires. On introduit tout d'abord l'espace des fonctions de Herglotz :

$$\mathcal{H} = \{h : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+ \mid h \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}_+\}.$$

On considère alors le sous-espace de  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{H} \mid w, w', -iw \in \mathcal{H}\}.$$

J'ai démontré dans [Bou08, Proposition 8] que la fonction de Kotani  $w$  est dans cet espace  $\mathcal{W}$ .

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour démontrer une formule de Thouless adaptée au cas des opérateurs de Schrödinger aléatoires continus à valeurs matricielles. Puisque  $-(\gamma_1 + \dots + \gamma_D)$  et  $\pi N$  sont respectivement, dans la limite tangentielle, les parties réelles et imaginaires de la fonction  $w$  qui est dans l'espace  $\mathcal{W}$ , l'analyse harmonique développée pour cet espace par Kotani dans [Kot84] nous donne que ces deux fonctions sont liées par une relation intégrale.

**Théorème 3.2.3 (Formule de Thouless).** *Pour Lebesgue-presque tout  $E \in \mathbb{R}$ , on a :*

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_D)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log \left( \left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \text{dn}(E') \quad (3.14)$$

où  $\alpha$  est un nombre réel indépendant de  $E$  et  $\text{dn}$  est la densité d'états. De plus, si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle sur lequel  $E \mapsto -(\gamma_1 + \dots + \gamma_D)(E)$  est continue, alors (3.14) est vraie pour tout  $E \in I$ .



Le point de départ de la démonstration de la formule de Thouless est le fait que comme  $w \in \mathcal{W}$ , par les résultats de Kotani dans [Kot84], et en utilisant également (3.12),

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, w(z) = w(i) + \int_{\mathbb{R}} \log \left( \frac{E' - i}{E' - z} \right) dn(E'). \quad (3.15)$$

En passant à la partie réelle, puis en prenant la limite tangentielle vers la droite réelle (soit  $z = E + ia$  avec  $a > 0$  qui tend vers 0), on obtient la formule de Thouless en utilisant finalement (3.13).

Comme pour les opérateurs d'Anderson discrets ou continus à valeurs scalaires ([CKM87; DSS02]), ou discrets à valeurs matricielles ([KS88b]), on peut utiliser la formule de Thouless pour démontrer que la densité d'états intégrée a la même régularité Höldérienne que les exposants de Lyapounov. C'est l'objet du résultat principal de [Bou08].

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $I$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et soit  $\tilde{I}$  un intervalle ouvert contenant  $I$ . On suppose  $d = 1$  et  $D \geq 1$  dans la définition de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Si le groupe de Fürstenberg  $G_{\mu_E}$  de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est  $p$ -contractant et  $L_p$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, D\}$  et tout  $E \in \tilde{I}$ , alors la densité d'états intégrée associée à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est Höldérienne sur  $I$ .*

Ce théorème permet d'établir l'étape 3 de la démonstration du critère de localisation pour les opérateurs quasi-unidimensionnels continus de type Schrödinger (Théorème 2.3.7).

La démonstration du Théorème 3.2.4 repose sur la formule de Thouless et sur les propriétés de la transformée de Hilbert que l'on rappelle ici.

Si  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , sa transformée de Hilbert est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$(T\psi)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{\psi(t)}{x-t} dt. \quad (3.16)$$

Les deux propriétés de la transformée de Hilbert dont on a besoin sont les suivantes. Soit  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  :

1.  $T^2\psi(x) = -\psi(x)$  pour Lebesgue-presque tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Si  $\psi$  est Höldérienne sur l'intervalle  $[x_0 - a, x_0 + a]$ ,  $a > 0$ , alors  $T\psi$  est Höldérienne sur l'intervalle  $[x_0 - \frac{a}{2}, x_0 + \frac{a}{2}]$ .

Tout d'abord, l'application  $E' \mapsto \log \left( \left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right)$  est  $n$ -intégrable sur  $\mathbb{R}$  ce qui par intégration par parties implique que  $E \mapsto N(E)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $E_0 \in I$  fixé et soit  $a > 0$  tel que  $[E_0 - 4a, E_0 + 4a] \subset \tilde{I}$ . On applique la formule de Thouless en séparant l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  en deux, l'une sur  $[E_0 - 4a, E_0 + 4a]$  et l'autre sur son complémentaire dans  $\mathbb{R}$ . En intégrant à nouveau par parties, on fait apparaître des termes de bords et la transformée de Hilbert de  $E \mapsto \psi(E) = N(E)\chi_{\{|E-E_0| \leq 4a\}} \in L^2(\mathbb{R})$ . Cela permet de démontrer que, sur tout intervalle compact inclus dans  $]E_0 - 4a, E_0 + 4a[$ ,  $T\psi$  a la même régularité Höldérienne que celle donnée pour la somme des exposants de Lyapounov au Théorème 2.3.9. En particulier  $T\psi$  est Höldérienne sur  $[E_0 - 2a, E_0 + 2a]$ . D'où  $T^2\psi$  est Höldérienne sur  $[E_0 - a, E_0 + a]$  et par continuité de  $E \mapsto N(E)$ ,

$$\forall E \in [E_0 - a, E_0 + a], (T^2\psi)(E) = -N(E).$$

Ainsi  $E \mapsto N(E)$  est Höldérienne sur  $[E_0 - a, E_0 + a]$ . Or  $I$  est compact, il peut donc être recouvert par un nombre fini d'intervalles  $]E_0 - a, E_0 + a[ \subset \tilde{I}$  avec  $E_0 \in I$ . Donc,  $E \mapsto N(E)$  est Höldérienne sur  $I$ .

Pour plus de détails sur la démonstration du Théorème 3.2.4, nous renvoyons à [Bou08, Theorem 4].

En appliquant le Théorème 3.2.4 au modèle d'Anderson-Bernoulli quasi - unidimensionnel à potentiel d'interaction générique étudié à la Section 2.2.3.4 et en utilisant le Théorème 2.2.21, on obtient le résultat suivant de régularité de la densité d'états intégrée pour les opérateurs quasi-unidimensionnels de type Schrödinger du type étudié ([Bou13, Proposition 6.2]).

**Théorème 3.2.5.** *Pour presque tout potentiel  $V \in S_D(\mathbb{R})$ , il existe*

- un ensemble fini  $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$ ,
- un réel  $\ell_C(D, V) > 0$

tels que, pour tout  $\ell \in ]0, \ell_C(D, V)[$ , il existe un intervalle compact  $I(D, V, \ell) \subset \mathbb{R}$  tel que la densité d'états intégrée associée à  $\{H_{\omega, \ell}^{(D)}\}_{\omega \in \Omega}$  est Hölderienne sur  $I(D, V, \ell)$ .

### 3.3 Le cas des interactions ponctuelles

Dans cette courte Section, je présente les résultats d'existence et de régularité de la densité d'états intégrée pour le modèle d'interactions ponctuelles (2.9) que j'ai publié dans [Bou09a].

Tout d'abord, j'adapte au cas des interactions ponctuelles la preuve de l'existence de la densité d'états et de la densité d'états intégrée donnée à la Section 3.1. La seule chose à faire est de démontrer une formule de Feynman-Kac pour les modèles à interactions ponctuelles et à valeurs matricielles. Cette formule s'obtient en combinant les idées de [FM03] et celles déjà présentées et issues de [Bou08].

En remarquant que les exponentielles ordonnées qui apparaissent dans (3.4) et (3.6) deviennent des exponentielles de matrices usuelles dans le cadre des interactions ponctuelles, on obtient, pour l'opérateur (2.9)

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D, \forall x \in \mathbb{R}, e^{-tH_{p, \omega}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} K_t(x, y) f(y) dy \quad (3.17)$$

avec

$$\forall t > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, K_t(x, y) = \int e^{-tV_0} d\mu_{x, y, \omega}(w) \quad (3.18)$$

où pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\mu_{x, y, \omega}$  est une mesure finie sur l'espace  $W_{x, y}$  des chemins continus  $w$  sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  tels que  $w(0) = x$  et  $w(1) = y$ .

Soit  $L$  un entier plus grand que 1 et soit  $\Lambda = [-L, L]^d \subset \mathbb{R}^d$  le cube centré en 0 et de côté  $2L$ . Notons  $H_{p, \omega}^{(\Lambda)}$  la restriction de  $H_{p, \omega}$  agissant sur  $L^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^D$  avec conditions de Dirichlet au bord de  $\Lambda$ . Comme pour (3.6) on introduit  $T_\Lambda(w)$  l'instant de première sortie de  $\Lambda$  du chemin  $w \in W$  :

$$T_\Lambda(w) = \inf\{t > 0, X_t(w) \notin \Lambda\}. \quad (3.19)$$

En utilisant [Kni81] comme dans [Bou08], on obtient

$$\forall f \in L^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^D, \forall x \in D, e^{-tH_{P,\omega}^{(\Lambda)}} f(x) = \int_{\Lambda} K_t^{(\Lambda)}(x, y) f(y) dy \quad (3.20)$$

avec

$$\forall t > 0, \forall x, y \in \Lambda, K_t^{(\Lambda)}(x, y) = \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \int \chi_{\{t < T_{\Lambda}(w)\}} e^{-tV_0} d\mu_{x,y,\omega}(w). \quad (3.21)$$

A nouveau, pour tout  $t > 0$ ,  $K_t^{(\Lambda)}$  est dans  $L^2(\Lambda^2) \otimes \mathcal{M}_D(\mathbb{C})$ , ce qui permet de reprendre la fin de la démonstration de l'existence de la densité d'états et de la densité d'états intégrée que l'on a faite à la Section 3.1.

L'existence de la densité d'états et de la densité d'états intégrée étant établie pour les opérateurs quasi-unidimensionnels de type Schrödinger à interactions ponctuelles, se pose alors la question de la régularité de cette dernière. Il se trouve que tant la formule de Thouless présentée au Théorème 3.2.3 que le résultat de régularité Hölderienne des exposants de Lyapounov (voir Théorème 2.3.9) et de la densité d'états intégrée (voir Théorème 3.2.4) sont valides pour la famille d'opérateurs  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ .

En effet, j'ai démontré dans [Bou09a, Proposition 2] que les estimées (2.42) et (2.43) du Théorème 2.3.9 sont vérifiées par la suite des matrices de transfert associées à  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ . Ainsi, les exposants de Lyapounov associés à  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  sont Hölder continus. Puis, pour démontrer le théorème de régularité Hölderienne de la densité d'états intégrée, la démarche suivie pour la famille  $\{H_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  définie en (3.1) s'applique encore. Celle-ci est basée sur l'obtention d'une formule de Thouless et les propriétés de la transformée de Hilbert.

Pour obtenir une formule de Thouless pour  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ , il faut essentiellement adapter les résultats de Kotani et Simon dans [KS88b] au cadre des interactions ponctuelles. Plus précisément, il suffit d'obtenir l'analogue de [KS88b, Theorem 2.1.a] dans ce cadre, ce que j'ai fait dans [Bou09a, Proposition 3]. On peut ensuite dérouler les différentes étapes de l'obtention de la formule de Thouless pour démontrer la validité du Théorème 3.2.3 pour la famille  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ .

Finalement, en combinant les Théorèmes 2.2.14 et 3.2.4, on obtient le résultat suivant (voir [Bou09a, Theorem 6]).

**Théorème 3.3.1.** *Supposons que  $D = 3$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ , et  $c_1$  et  $c_3$  sont des réels non nuls. Il existe un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$  noté  $\mathcal{S}_{P,3}$  tel que, si  $I \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,3}$  est un intervalle compact, la densité d'états intégrée associée à  $\{H_{P,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  est Hölderienne sur  $I$ .*

## 3.4 Queues de Lifschitz

Dans cette dernière section du Chapitre 3, je présente les résultats obtenus en collaboration avec Hatem Najjar dans [BN15].

Soient  $d \geq 1$  et  $D \geq 1$  des entiers. Pour tout  $i \in \{1, \dots, D\}$ , soit  $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{P}_i)$  un espace de probabilité complet. Posons

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{\Omega}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}_D), \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_D), \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{P}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{P}_D) \right),$$

qui est également un espace de probabilité complet.

Dans [BN15] nous nous sommes intéressés au problème des asymptotiques de Lifschitz au bas du spectre pour une famille ergodique d'opérateurs de la forme

$$\forall \omega \in \Omega, H_\omega = -\Delta_d \otimes I_D + W + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} V_1(\cdot - n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_D^{(n)} V_D(\cdot - n) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$ , où  $\Delta_d$  est le Laplacien continu en dimension  $d$  et  $I_D$  est la matrice identité d'ordre  $D$ . Posons :

$$H = -\Delta_d \otimes I_D + W \quad \text{et} \quad V_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} V_1(\cdot - n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_D^{(n)} V_D(\cdot - n) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (H1)  $W : \mathbb{R}^d \rightarrow S_D(\mathbb{R})$  est  $\mathbb{Z}^d$ -périodique, mesurable et bornée. L'espace  $S_D(\mathbb{R})$  est celui des matrices symétriques réelles.
- (H2)  $V_1, \dots, V_D$  sont des fonctions de variables réelles, positives, mesurables, bornées et à support dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ . De plus pour tout  $i \in \{1, \dots, D\}$ , on suppose l'existence d'un cube non vide  $\mathcal{C}_i \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$  non réduit à un point tel que  $V_i > \mathbb{1}_{\mathcal{C}_i}$ , où  $\mathbb{1}_{\mathcal{C}_i}$  est la fonction caractéristique du cube  $\mathcal{C}_i$ .
- (H3) Pour tout  $i \in \{1, \dots, D\}$ ,  $(\omega_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}^d}$  est une famille de variables aléatoires *i.i.d.* sur  $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{\mathbb{P}}_i)$ , bornées et dont le support de leur loi commune notée  $\nu_i$  contient 0 et n'est pas réduit à un singleton. On suppose également que,

$$\forall i \in \{1, \dots, D\}, \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \tilde{\mathbb{P}}_i(\omega_i^{(0)} \leq \epsilon)|}{\log \epsilon} = 0. \quad (3.24)$$

- (H4) Le bas du spectre de  $H$  est non-dégénéré au sens où : si  $E_0(\theta)$  est la première valeur propre de Floquet de l'opérateur périodique  $H$  (voir (3.30)) et si  $\theta^0 \in \mathbb{T}^*$  est un minimum de  $\theta \mapsto E_0(\theta)$ , il existe  $\delta > 0$ ,  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^*, |\theta - \theta^0| < \delta \Rightarrow C_1 |\theta - \theta^0|^2 \leq E_0(\theta) - E_0(\theta^0) \leq C_2 |\theta - \theta^0|^2. \quad (3.25)$$

Remarquons que l'on peut supposer que les variables aléatoires  $\omega_i^{(n)}$  sont de Bernoulli puisque dans ce cas l'hypothèse (H3) est encore vérifiée. De plus, en ajoutant une matrice diagonale convenable au potentiel d'interaction périodique  $W$ , on peut toujours supposer que les  $\omega_i^{(n)}$  sont positives puisqu'elles sont par ailleurs bornées.

La famille  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mathbb{Z}^d$ -ergodique et on note  $\Sigma$  son spectre presque-sûr. Quitte à ajouter une matrice scalaire de la forme  $\lambda I_D$  à  $W$ , on peut toujours supposer que  $\inf \Sigma = 0$ .

Nous supposerons également qu'il existe au moins un  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que  $W(x)$  n'est pas une matrice diagonale de sorte que nous ne puissions pas écrire  $H_\omega$  comme une

somme directe  $\otimes_{i=1}^D H_{\omega,i}$  d'opérateurs  $H_{\omega,i}$  agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}$  et pour lesquels le résultat de queues de Lifschitz que nous avons obtenu est déjà connu.

Le modèle (3.22) est un cas particulier du modèle (3.1) étudié à la Section 3.1 pour lequel le potentiel se sépare en deux parties, l'une déterministe et périodique,  $W$ , et une partie aléatoire  $V_\omega$  qui apparaît sous la forme d'une matrice aléatoire dont les coefficients diagonaux sont des potentiels d'Anderson-Bernoulli scalaires. Nous savons en particulier que la densité d'états intégrée associée à  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  existe et nous la notons comme auparavant,  $N : E \rightarrow N(E)$ .

Je peux à présent énoncer le résultat principal que nous avons obtenu dans [BN15].

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  définie par (3.22). On suppose les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) vérifiées et on suppose également que  $\inf \Sigma = 0$ . Alors,*

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log (N(E) - N(0^+))|}{\log(E)} = -\frac{d}{2}. \quad (3.26)$$

*En particulier cette limite ne dépend pas de  $D$ .*

Je présenterai les grandes lignes de la démonstration plus loin. Auparavant, si on se place dans le cas des opérateurs quasi-unidimensionnels, on peut montrer que l'hypothèse (H4) est toujours vérifiée. Ce sera l'objet des Propositions 3.4.3 et 3.4.4. Par ailleurs, il est immédiat que la famille définie en (2.15) et où l'on remplace la matrice  $V_0$  par une matrice  $V$  symétrique réelle quelconque de taille  $D \geq 1$  vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3). Nous obtenons donc également le résultat suivant :

**Théorème 3.4.2.** *La densité d'états intégrée associée à la famille  $\ell\mathbb{Z}$ -ergodique  $\{H_{\omega,\ell}^{(D)}\}_{\omega \in \Omega}$  présente un comportement de queues de Lifschitz au bas du spectre presque-sûr  $E_0$ , au sens où*

$$\lim_{E \rightarrow E_0^+} \frac{\log |\log (N(E) - N(E_0^+))|}{\log(E - E_0)} = -\frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

*En particulier cette limite ne dépend pas de  $D$ .*

Avant de donner les principales idées de la démonstration du Théorème 3.4.1, je présente le résultat de non-dégénérescence du bas du spectre de  $H$  en dimension 1. Commençons par quelques rappels de théorie de Floquet dans le cas des opérateurs à valeurs matricielles.

La décomposition de Floquet pour les opérateurs de Schrödinger périodiques à valeurs scalaires comme présentée par exemple dans [RS78, Section XIII.6], s'adapte parfaitement au cadre des opérateurs de Schrödinger périodiques à valeurs matricielles tel que  $H$  (3.23). Cela est fait en détails dans [BN15] et je rappelle juste quelques notations et résultats pour la suite.

Pour  $y \in \mathbb{R}^d$ , soit  $\tau_y$  l'opérateur de translation par  $y$  défini pour  $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  par  $(\tau_y u)(x) = u(x - y)$ . La  $\mathbb{Z}^d$ -périodicité de  $W$  implique l'invariance de  $H$  par conjugaison par  $\tau_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}^d$ , donc  $H$  est un opérateur  $\mathbb{Z}^d$ -périodique.

Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Une maille fondamentale du réseau  $\mathbb{Z}^d$  est donnée par

$$C_0 = \left\{ x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \mid \forall j \in \{1, \dots, d\}, -\frac{1}{2} \leq x_j \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Si  $C_0^*$  est la maille conjuguée de  $C_0$ , c'est une maille fondamentale pour le réseau dual  $(\mathbb{Z}^d)^* \simeq 2\pi\mathbb{Z}^d$  et  $C_0^*$  s'identifie au tore  $\mathbb{T}^* = \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d$ .

Pour  $\theta \in \mathbb{T}^*$  on note  $\mathcal{D}'_\theta$  l'espace des distributions  $\theta$ -quasipériodiques sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^D$ . Il s'agit de l'espace des distributions  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\tau_n u = e^{-in \cdot \theta} u$ . Soit alors  $\mathcal{H}_\theta = (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D) \cap \mathcal{D}'_\theta$ , muni de la norme de  $L^2(C_0) \otimes \mathbb{C}^D$ .

Puis, pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on considère les espaces  $\mathcal{H}_\theta^k = (H^k_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D) \cap \mathcal{D}'_\theta$ , où  $H^k_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$  est l'espace des distributions localement dans l'espace de Sobolev  $H^k(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$ . On définit enfin l'espace

$$\mathcal{H} = \{u \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{T}^*)) \otimes \mathbb{C}^D \mid \forall (x, \theta, n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^* \times \mathbb{Z}^d, u(x+n, \theta) = e^{in \cdot \theta} u(x, \theta)\},$$

muni de la norme

$$\forall u \in \mathcal{H}, \|u\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{T}^*)} \int_{\mathbb{T}^*} \|u(\cdot, \theta)\|_{L^2(C_0) \otimes \mathbb{C}^D} d\theta.$$

Définissons sur cet espace un opérateur de Fourier. Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$ . On définit  $Uu \in \mathcal{H}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \theta \in \mathbb{T}^*, (Uu)(x, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{in \cdot \theta} (\tau_n u)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{in \cdot \theta} u(x - n). \quad (3.28)$$

L'opérateur  $U$  est unitaire et on montre que  $U$  et  $H$  commutent. On peut alors suivre [RS78] pour en déduire que  $H$  admet une décomposition de Floquet

$$UHU^* = \int_{\mathbb{T}^*}^{\oplus} H_\theta d\theta, \quad (3.29)$$

où  $H_\theta$  est l'opérateur auto-adjoint  $H$  agissant sur  $\mathcal{H}_\theta$  et de domaine  $\mathcal{H}_\theta^2$ .

De cette décomposition de Floquet, on déduit comme dans [RS78] que  $H_\theta$  est à résolvante compacte (puisque  $H$  est elliptique), donc son spectre est discret et on note

$$E_0(\theta) \leq E_1(\theta) \leq \dots \leq E_j(\theta) \leq \dots \quad (3.30)$$

les valeurs propres de  $H_\theta$ , appelées *valeurs propres de Floquet* de  $H$ .

L'ensemble  $E_j(\mathbb{T}^*)$  est un intervalle fermé appelé la  $j$ -ième bande spectrale de  $H$  et le spectre de  $H$  est donné par

$$\sigma(H) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j(\mathbb{T}^*).$$

Si  $d \geq 2$ , les bandes spectrales peuvent s'intersecter, mais ce n'est pas le cas en dimension 1 sauf éventuellement en un point au bord. La principale différence avec

le cas scalaire est que dans le cas à valeurs matricielles les multiplicités des valeurs propres de Floquet sont a priori supérieures aux multiplicités dans le cas où  $D = 1$ , comme cela a été illustré récemment dans [Vel21b]. Nous allons le voir directement par le calcul dans la preuve de la Proposition 3.4.3 où l'on suppose  $W$  constant. Notons que c'est ce cas qui nous intéresse finalement le plus pour l'application faite au comportement de queues de Lifschitz pour  $\{H_{\omega,\ell}^{(D)}\}_{\omega \in \Omega}$  vue au Théorème 3.4.2.

**Proposition 3.4.3.** *Soit  $H$  défini par (3.23) et supposons  $W \in S_D(\mathbb{R})$  constant. Soit  $\theta^0 \in \mathbb{T}^*$  un minimum de  $\theta \mapsto E_0(\theta)$  où  $E_0(\theta)$  est la première valeur propre de Floquet de  $H$ . Alors,*

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^*, E_0(\theta) - E_0(\theta^0) = |\theta - \theta^0|^2.$$

*En particulier, le bas du spectre de  $H$  est non-dégénéré.*

Donnons quelques idées de la preuve. Pour une preuve complète on renvoie à [BN15, Proposition 1].

Puisque  $W$  est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée et on note  $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_{D-1}$  ses valeurs propres réelles. On montre alors par un calcul direct que les valeurs propres de Floquet sont égales à  $E_j(\theta) = \theta^2 + \lambda_j$ , pour tout  $j \in \{0, \dots, D-1\}$  et on a bien :  $E_0(\theta) \leq \dots \leq E_{D-1}(\theta)$ . Donc  $E_0(\theta)$  est la première valeur propre de Floquet de  $H$  et son minimum est atteint en  $\theta^0 = 0$  et vaut  $\lambda_0$ . Finalement,

$$E_0(\theta) - E_0(\theta^0) = E_0(\theta) - E_0(0) = \theta^2 + \lambda_0 - \lambda_0 = \theta^2 = |\theta - \theta^0|^2.$$

On déduit au passage que les valeurs propres de Floquet ont la même multiplicité que  $\lambda_j$  vu comme valeur propre de  $W$ .

Nous pouvons maintenant donner un résultat plus général de non-dégénérescence du bas du spectre de  $H$  dans le cas de la dimension 1.

**Proposition 3.4.4.** *Soit  $H$  défini par (3.23) pour  $d = 1$ . Soit  $\theta^0 \in \mathbb{T}^*$  un minimum de  $\theta \mapsto E_0(\theta)$  où  $E_0(\theta)$  est la première valeur propre de Floquet de  $H$ . Alors, il existe  $\delta > 0$ ,  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que*

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^*, |\theta - \theta^0| < \delta \Rightarrow C_1 |\theta - \theta^0|^2 \leq E_0(\theta) - E_0(\theta^0) \leq C_2 |\theta - \theta^0|^2. \quad (3.31)$$

La démonstration de ce résultat est longue et technique et est faite en détails dans [BN15, Proposition 2]. Donnons-en quelques étapes.

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  le produit scalaire canonique sur  $L^2([0, 1]) \otimes \mathbb{R}^D$  et  $\|\cdot\|_D$  la norme associée. On se place dans le cas des matrices à valeurs réelles pour simplifier les notations dans la suite.

Soient  $\psi_1, \dots, \psi_{2D} \in H^2([0, 1]) \otimes \mathbb{R}^D$  solutions de  $H_{\theta^0} \psi = E_0(\theta^0) \psi$  avec conditions aux bords quasi-périodiques et conditions initiales en 0 :

$\psi_j(0) = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 0)$  avec un 1 à la  $j$ -ième place et  $\psi'_j(0) = 0$  si  $j \in \{1, \dots, D\}$ ;  $\psi_j(0) = 0$  et  $\psi'_j(0) = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 0)$  avec un 1 à la  $j$ -ième place si  $j \in \{D+1, \dots, 2D\}$ . Posons alors

$$\mathcal{S}(\cdot, \theta^0) = \left( \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi'_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \psi_{2D} \\ \psi'_{2D} \end{pmatrix} \right) \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$$

la matrice fondamentale du système différentiel d'ordre 1 associé à  $H_{\theta^0}\psi = E_0(\theta^0)\psi$  :

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{D}} \\ W(x) - E_0(\theta^0)I_{\mathbb{D}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}.$$

On utilise la matrice  $\mathcal{S}(\cdot, \theta^0)$  pour définir un nouveau produit scalaire sur l'espace  $\mathcal{H}_{\theta^0}^1 \otimes \mathbb{R}^2$  via :

$$\forall f, g \in \mathcal{H}_{\theta^0}^1 \otimes \mathbb{R}^2, \langle f, g \rangle_{\theta^0} = \int_0^1 \langle \mathcal{S}(x, \theta^0)f(x), \mathcal{S}(x, \theta^0)g(x) \rangle_{\mathbb{R}^{2\mathbb{D}}} dx. \quad (3.32)$$

Pour  $f \in \mathcal{H}_{\theta}^1 \otimes \mathbb{R}^2$ , on pose

$$\bar{H}_{\theta}f = \frac{d}{dx}f - \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{D}} \\ W(x) - E_0(\theta^0)I_{\mathbb{D}} & 0 \end{pmatrix} f \quad (3.33)$$

et on définit enfin

$$\forall u \in \mathcal{H}_{\theta^0}^2, \tilde{H}_{\theta} \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right) = \mathcal{S}(\cdot, \theta^0)^{-1} \cdot \bar{H}_{\theta} \cdot \mathcal{S}(\cdot, \theta^0) \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right). \quad (3.34)$$

On peut montrer par un calcul mettant en jeu les quatre blocs de  $\mathcal{S}(x, \theta^0)$  que, pour tout  $u \in \mathcal{H}_{\theta^0}^2$ ,

$$\left\langle \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right)', \tilde{H}_{\theta} \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right) \right\rangle_{\theta^0} = \left\| \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right)' \right\|_{\theta^0}^2 - (E_0(\theta) - E_0(\theta^0)) \left( \frac{1}{4} \left\| \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right) \right\|_{\theta^0}^2 - \frac{1}{2} \left\langle \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right)' \right\rangle_{\theta^0} + \|u'\|_{\mathbb{D}}^2 \right). \quad (3.35)$$

On peut montrer que pour  $\theta$  proche de  $\theta^0$ ,

$$\frac{1}{4} \left\| \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right) \right\|_{\theta^0}^2 - \frac{1}{2} \left\langle \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right)' \right\rangle_{\theta^0} + \|u'\|_{\mathbb{D}}^2 > 0. \quad (3.36)$$

On utilise également le fait que comme  $E_0(\cdot)$  n'est pas constante et que  $\theta^0$  est un minimum de cette fonction, par Taylor, il existe  $p \geq 2$  un entier et  $\alpha > 0$  tels que

$$E_0(\theta) - E_0(\theta^0) = \alpha|\theta - \theta^0|^p + o(|\theta - \theta^0|^p).$$

Par une discussion sur la valeur de  $p$  on fini par obtenir que, pour  $\theta$  proche de  $\theta^0$ ,

$$\left\langle \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right)', \tilde{H}_{\theta} \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right) \right\rangle_{\theta^0} \geq 0. \quad (3.37)$$

En combinant (3.35) et (3.37) et en utilisant (3.36), on obtient la majoration de  $E_0(\theta) - E_0(\theta^0)$  dans (3.31).

Pour démontrer la minoration dans (3.31), on remarque tout d'abord que la formule (3.35) est valide pour tout potentiel d'interaction  $W$ . En particulier elle l'est pour  $W = 0$  et dans ce cas, les calculs fait dans la démonstration de la Proposition 3.4.3 nous donnent  $E_0(\theta) = \theta^2$ ,  $\theta^0 = 0$  et  $\mathcal{S}(\cdot, \theta^0) = I_{2\mathbb{D}}$ . On note  $\tilde{H}_{\theta,0}$  l'opérateur  $\tilde{H}_{\theta}$  correspondant à  $W = 0$ . On a alors par un calcul direct,

$$\left\langle \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right)', \tilde{H}_{\theta-\theta^0,0} \left( \begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix} \right) \right\rangle_{2\mathbb{D}} = \|u''\|_{\mathbb{D}}^2 - \frac{1}{2}|\theta - \theta^0|^2 \cdot \|u'\|_{\mathbb{D}}^2. \quad (3.38)$$



En injectant cette expression dans (3.35), il vient

$$\|u''\|_{\mathbb{D}}^2 - \frac{1}{2}|\theta - \theta^0|^2 \|u'\|_{\mathbb{D}}^2 = \left\| \left( \frac{u}{u'} \right)' \right\|_{2\mathbb{D}}^2 - |\theta - \theta^0|^2 \left( \frac{1}{4} \left\| \left( \frac{u}{u'} \right) \right\|_{2\mathbb{D}}^2 - \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{u}{u'} \right), \left( \frac{u}{u'} \right)' \right\rangle_{2\mathbb{D}} + \|u'\|_{\mathbb{D}}^2 \right). \quad (3.39)$$

Puis, en exploitant l'expression de  $\mathcal{S}(x, \theta^0)$  sous forme d'exponentielle ordonnée, on peut montrer que

$$\left\| \left( \frac{u}{u'} \right)' \right\|_{\theta^0}^2 \geq \|u''\|_{\mathbb{D}}^2. \quad (3.40)$$

On déduit alors de (3.40) et de la majoration déjà obtenue que pour  $\theta$  proche de  $\theta^0$ ,

$$\begin{aligned} \|u''\|_{\mathbb{D}}^2 - \frac{1}{2}|\theta - \theta^0|^2 \|u'\|_{\mathbb{D}}^2 \\ \leq \left\| \left( \frac{u}{u'} \right)' \right\|_{\theta^0}^2 - (E_0(\theta) - E_0(\theta^0)) \left( \frac{1}{4} \left\| \left( \frac{u}{u'} \right) \right\|_{\theta^0}^2 - \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{u}{u'} \right), \left( \frac{u}{u'} \right)' \right\rangle_{\theta^0} + \|u'\|_{\mathbb{D}}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

En combinant les inégalités obtenues jusque-là et en testant sur  $u = {}^t(a, 0, \dots, 0)$  pour  $a > 0$  un réel, on obtient la minoration, valable pour  $\theta$  proche de  $\theta^0$ ,

$$E_0(\theta) - E_0(\theta^0) \geq \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4} \left\| \left( \frac{a}{0} \right) \right\|_{\theta^0}^2} |\theta - \theta^0|^2 = \frac{1}{\|\psi_1\|_{\mathbb{D}}^2} |\theta - \theta^0|^2. \quad (3.42)$$

En posant  $C_1 = \frac{1}{\|\psi_1\|_{\mathbb{D}}^2}$  qui est indépendante de  $\theta$  (mais pas de  $\theta^0$ ), on obtient la minoration voulue dans (3.31).

Il n'est pas évident que le caractère non-dégénéré du bas du spectre est toujours vrai pour  $d \geq 1$  et  $D \geq 1$  quelconques. Cela a bien été démontré dans [KS87a] pour tout  $d \geq 1$  et  $D = 1$ , mais la preuve de Kirsch et Simon repose fortement sur l'existence d'un état fondamental strictement positif dont on peut donc prendre l'inverse. Lorsque  $D \geq 1$  et  $d = 1$ , on travaille avec un système différentiel d'ordre 1 dont on peut définir la matrice fondamentale qui est inversible et qui va prendre la place de l'état fondamental de Kirsch et Simon. Cela n'est plus possible en dimension  $d \geq 2$ .

Passons à la démonstration du Théorème 3.4.1. On démontre séparément une minoration et une majoration. Commençons par la minoration qui prend la forme suivante.

**Proposition 3.4.5.** *On suppose que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4). Alors*

$$\liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log \left| \log \left( N(E) - N(0^+) \right) \right|}{\log E} \geq -\frac{d}{2}. \quad (3.43)$$

Tout d'abord, comme 0 est l'infimum de  $\Sigma$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $N(\varepsilon) - N(0) = N(\varepsilon) - N(-\varepsilon)$ . Ainsi, pour démontrer (3.43), il suffit de minorer  $N(\varepsilon) - N(-\varepsilon)$ .

Pour  $L \geq 1$  un entier, on définit le cube

$$C_L = \left\{ x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \mid \forall j \in \{1, \dots, d\}, -\frac{L}{2} \leq x_j \leq \frac{L}{2} \right\}.$$

Si  $H_\omega^{(C_L)}$  désigne la restriction de  $H_\omega$  au cube  $C_L$  avec conditions de Dirichlet au bord, on montre que pour  $L$  suffisamment grand,  $H_\omega^{(C_L)}$  a un grand nombre de valeurs propres dans l'intervalle  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  et ce avec une probabilité proche de 1. Pour cela on construit une famille de fonctions propres approchées associées aux valeurs propres de  $H_\omega^{(C_L)}$  dans  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Ces fonctions propres sont construites à partir d'une fonction propre de Floquet  $\tilde{f}$  de  $-\Delta_d \otimes I_D + W$  associée à la valeur propre de Floquet 0 (valeur de  $\theta$  où  $\theta \mapsto E_0(\theta)$  atteint son minimum) et vérifiant une estimée du type

$$\|(-\Delta_d \otimes I_D + W)\tilde{f}(\cdot, \theta)\|_{L^2(C_0) \otimes \mathbb{C}^D} \leq C|\theta|^2.$$

Cela est possible du fait de l'hypothèse (H4). En localisant cette fonction propre de Floquet en  $\theta$  et en imposant à la variable aléatoire  $\omega_1^{(n)}$  d'être petite pour  $n$  dans un cube bien choisi (c'est là qu'intervient l'hypothèse (H3)), on obtient alors, en intégrant en  $\theta$ , une fonction propre de  $H_\omega^{(C_L)}$ . Enfin, en translatant en  $x$  cette fonction propre de  $H_\omega^{(C_L)}$  en plusieurs points et en localisant ces translatés, on obtient plusieurs fonctions propres de  $H_\omega$  deux à deux orthogonales.

Pour les détails de la démonstration nous renvoyons à la Section 6.1 de [BN15].

Pour la majoration on démontre le résultat suivant qui, combiné à la Proposition 3.4.5, donne bien le Théorème 3.4.1.

**Proposition 3.4.6.** *Supposons que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  vérifie les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4). Alors*

$$\limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0^+))|}{\log E} \leq -\frac{d}{2}.$$

Pour démontrer cette majoration, nous effectuons deux réductions successives afin de nous ramener à des opérateurs de référence pour lesquels le comportement de la densité d'états intégrée est bien établi. La première de ces réductions est une discrétisation des opérateurs  $H_\omega$  à l'aide d'une base de Wannier.

Soit  $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$  un sous-espace fermé, invariant par les  $\mathbb{Z}^d$ -translations, i.e., pour tout  $n \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\Pi^\mathcal{E} = \tau_n^* \Pi^\mathcal{E} \tau_n$ , où  $\Pi^\mathcal{E}$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{E}$ . Puisque  $\Pi^\mathcal{E}$  est  $\mathbb{Z}^d$ -périodique, il admet une décomposition de Floquet,

$$\Pi^\mathcal{E} = \int_{\mathbb{T}^*}^{\oplus} \Pi_\theta^\mathcal{E} \, d\theta,$$

où  $\Pi_\theta^\mathcal{E}$  est l'opérateur  $\Pi^\mathcal{E}$  agissant sur  $\mathcal{H}_\theta$ . Ainsi,  $\Pi_\theta^\mathcal{E}$  est une projection orthogonale agissant sur  $L^2(C_0) \otimes \mathbb{C}^D$ . La famille  $(\Pi_\theta^\mathcal{E})_{\theta \in \mathbb{T}^*}$  est continue en  $\theta$  et est donc de rang constant. Si on fixe  $\theta \in \mathbb{T}^*$ , on peut trouver une base orthonormée  $(w_{m,0})_{m \in M}$  de l'image de  $\Pi_\theta^\mathcal{E}$ , où  $M \subset \mathbb{N}$  est un ensemble d'indices indépendant de  $\theta$ . En prenant l'image de cette base orthonormée par  $U^*$ , on obtient une autre base orthonormée notée  $(\tilde{w}_{m,0})_{m \in M}$ . Si, enfin, on pose pour tout  $n \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\tilde{w}_{m,n} = \tau_n(\tilde{w}_{m,0})$ , alors

$(\tilde{w}_{m,n})_{(m,n) \in M \times \mathbb{Z}^d}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{E}$ , appelée *base de Wannier* de  $\mathcal{E}$ . Les vecteurs  $(\tilde{w}_{m,0})_{m \in M}$  sont appelés les *générateurs de Wannier* de  $\mathcal{E}$ .

Soit  $J_0$  l'ensemble des indices des valeurs propres de Floquet de  $H$  qui s'annulent pour des valeurs  $\theta \in \mathbb{T}^*$ . Notons pour  $j \in J_0$ ,  $w_j(\cdot, \theta)$  une fonction propre de Floquet associée à la valeur propre de Floquet  $E_j(\theta)$  de  $H$ . On note alors  $\Pi_0(\theta)$  la projection orthogonale sur l'espace engendré par  $(w_j(\cdot, \theta))_{j \in J_0}$  dans l'espace  $\mathcal{H}_\theta$  et on pose

$$\Pi_0 = U^{-1} \left( \int_{\mathbb{T}^*} \Pi_0(\theta) d\theta \right) U : L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D.$$

$\Pi_0$  est une projection orthogonale dans  $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^D$  qui est de plus  $\mathbb{Z}^d$ -periodique. Pour estimer la densité d'états intégrée de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  au bas du spectre, il suffit d'estimer celle de l'opérateur discrétisé  $H_\omega^0 = \Pi_0 H_\omega \Pi_0$ .

**Proposition 3.4.7.** *Supposons que  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  satisfait aux hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4). Il existe alors  $\varepsilon > 0$  et  $C > 1$  tels que, pour  $0 \leq E \leq \varepsilon$ ,*

$$0 \leq N(E) - N(0^+) \leq N_{\mathcal{E}_0}(C \cdot E), \quad (3.44)$$

où  $N_{\mathcal{E}_0}$  est la densité d'états intégrée associée à la famille d'opérateurs discrétisés  $\{H_\omega^0\}_{\omega \in \Omega}$  et où pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $H_\omega^0 = \Pi_0 H_\omega \Pi_0$ .

La démonstration de ce résultat repose sur la notion de base de Wannier que nous avons présentée plus haut.

Il reste donc à obtenir une estimée de la densité d'états intégrée associée à  $\{H_\omega^0\}_{\omega \in \Omega}$ . Pour cela, on définit des approximations périodiques des opérateurs  $H_\omega$  en posant pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$H_{\omega,k} = -\Delta_d \otimes I_D + W + \sum_{n \in C_k \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{\beta \in (2k+1)\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} V_1(\cdot - (n+\beta)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_D^{(n)} V_D(\cdot - (n+\beta)) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

On démontre que les densités d'états intégrées associées aux opérateurs  $\Pi_0 H_{\omega,k} \Pi_0$  convergent en un sens à préciser vers la densité d'états intégrée de  $\Pi_0 H_\omega \Pi_0$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. Or il est possible de contrôler les densités d'états des opérateurs discrets et périodiques  $\Pi_0 H_{\omega,k} \Pi_0$ , ce qui permet en deux étapes d'approximation de contrôler la densité d'états intégrée de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

On note  $N_{\omega,k}$  la densité d'états intégrée associée à  $H_{\omega,k}$  et définie par

$$N_{\omega,k}(E) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\{\theta \in \mathbb{T}^*, E_{\omega,k,j}(\theta) \leq E\}} d\theta. \quad (3.46)$$

où  $E_{\omega,k,j}$  est la  $j$ -ième valeur propre de Floquet de  $H_{\omega,k}$ . Soit  $dN_{\omega,k}$  la dérivée de  $N_{\omega,k}$  au sens des distributions. Nous avons le résultat de convergence suivant.

**Proposition 3.4.8.** *1. Pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle dN_{\omega,k}, \varphi \rangle = \langle dN, \varphi \rangle.$$

2. En tout point de continuité  $E$  de  $N$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_{\omega,k}(E)) = N(E)$ .

La Proposition 3.4.8 permet donc d'obtenir, à partir du contrôle a priori des densités d'états intégrées des  $\Pi_0 H_{\omega,k} \Pi_0$ , un contrôle de  $N_{\mathcal{E}_0}$ . Puis, par la Proposition 3.4.7, on en déduit un contrôle de la densité d'états intégrée de  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  au bas du spectre ce qui permet de terminer la démonstration de la Proposition 3.4.6.

Comme dit plus haut, la combinaison des Propositions 3.4.5 et 3.4.6 nous donne le Théorème 3.4.1. En l'appliquant pour  $d = 1$  et en utilisant la Proposition 3.4.4 (ou même la Proposition 3.4.3), on obtient finalement le Théorème 3.4.2 qui nous dit que l'opérateur d'Anderson-Bernoulli quasi-unidimensionnel que j'ai étudié dans [Bou13] présente pour tout potentiel d'interaction  $V$  le phénomène de queues de Lifschitz.

Cela termine ce chapitre sur les résultats que j'ai obtenus autour de la densité d'états intégrée.



# Chapitre 4

## Opérateurs aléatoires unitaires

Dans ce chapitre, je présente les résultats obtenus en collaboration avec Laurent Marin dans l'article [BM15]. Cet article fait suite à l'article de Laurent Marin et Hermann Schulz-Baldes [MS13] dans lequel est introduit le modèle de scattering zipper déterministe. L'objet de notre collaboration dans [BM15] a été d'introduire de l'aléatoire dans ce modèle et d'en déduire la séparabilité des exposants de Lyapounov et l'absence de spectre absolument continu presque-sûr.

### 4.1 Modèle de scattering zipper aléatoire

Soit  $L \geq 1$  un entier. Un scattering zipper décrit des événements de diffusion consécutifs dont chacun a un nombre fixe de  $2L$  canaux entrants et de  $2L$  canaux sortants. À chaque événement de diffusion est associée une matrice unitaire. Plus précisément, un scattering zipper est décrit par une suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de matrices de diffusion dans le sous-ensemble  $U(2L)_{\text{inv}}$  du groupe unitaire  $U(2L)$  défini par :

$$U(2L)_{\text{inv}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(2L) \mid \alpha, \gamma, \delta \in \mathcal{M}_L(\mathbb{C}) \text{ et } \beta \in GL_L(\mathbb{C}) \right\}. \quad (4.1)$$

L'opérateur de scattering zipper  $\mathbb{U}$  associé à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est l'opérateur agissant sur  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$  et défini par :

$$\mathbb{U} = \mathbb{V} \mathbb{W}, \quad (4.2)$$

où les deux opérateurs unitaires  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{W}$  agissent sur  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$  et sont donnés par

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & s_0 & & \\ & & s_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \circ S_g^L, \quad \mathbb{W} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & s_{-1} & & \\ & & s_1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

où l'opérateur de shift  $S_g$  est défini en (1.26). Cela correspond au fait que les blocs de taille  $2L \times 2L$  dans  $\mathbb{V}$  sont translatés vers la gauche à partir de la diagonale de  $L$  colonnes par rapport à ceux de  $\mathbb{W}$ . Cela permet de mélanger les sous-blocs  $L \times L$  dans les matrices de diffusion et fait que l'action de  $\mathbb{U}$  ne se découple pas trivialement en l'action de  $\mathbb{V}$  et de  $\mathbb{W}$ . Précisons l'action de  $\mathbb{U}$  sur les fonctions d'ondes.

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et soit  $\phi = (\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$  une solution de  $\mathbb{U}\phi = z\phi$ . Posons  $\psi = \mathbb{W}\phi$ . Alors,  $\mathbb{V}\psi = z\phi$  et  $\phi = z^{-1}\mathbb{V}\psi$ . Si on revient aux matrices de diffusion,

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = z^{-1} S_2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = S_3 \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = z^{-1} S_4 \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \dots \quad (4.4)$$

Que ce soit pour l'étude des propriétés spectrales de  $\mathbb{U}$  faite dans [MS13] ou pour pouvoir introduire de l'aléa dans sa définition, il faut décrire plus en détail la structure des éléments de  $U(2L)_{\text{inv}}$ . Nous allons écrire ces éléments sous forme "polaire", faisant apparaître des phases unitaires qui seront les variables aléatoires de notre modèle.

L'inversibilité du bloc de taille  $L \times L$  qui se situe à droite en haut de chaque matrice de diffusion  $S_n$  est l'unique hypothèse supplémentaire faite sur les matrices unitaires dans  $U(2L)_{\text{inv}}$ . Cette hypothèse d'inversibilité assure que la diffusion des fonctions d'ondes de  $\mathbb{U}$  est effective au sens où  $\mathbb{U}$  ne se décompose pas en une somme d'au moins deux opérateurs unitaires. L'inversibilité d'un seul bloc  $L \times L$  suffit du fait que l'on a fait une translation de  $L$  colonnes dans la définition de  $\mathbb{V}$  par rapport aux colonnes de  $\mathbb{W}$ . On peut montrer que du fait que les éléments de  $U(2L)_{\text{inv}}$  sont unitaires, la condition  $\beta$  inversible est équivalente à la condition  $\alpha^*\alpha < I_L$ . On peut aller plus loin et obtenir la représentation suivante, démontrée dans [MS13] :

$$U(2L)_{\text{inv}} = \{S(\alpha, U, V) \in U(2L) \mid \alpha^*\alpha < I_L \text{ et } U, V \in U(L)\}, \quad (4.5)$$

où

$$S(\alpha, U, V) = \begin{pmatrix} \alpha & \rho(\alpha)U \\ V\tilde{\rho}(\alpha) & -V\alpha^*U \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

et

$$\rho(\alpha) = (I_L - \alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\rho}(\alpha) = (I_L - \alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Dans cette écriture, la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  correspondant à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est appelée la suite des *coefficients de Verblunsky* de  $\mathbb{U}$ , par analogie avec le cas des matrices CMV, comme nous l'avons déjà expliqué à la Section 1.2.3.

A l'aide de l'écriture (4.6) des matrices de diffusion, on peut introduire des paramètres aléatoires dans la définition de  $\mathbb{U}$  de façon à définir une famille ergodique d'opérateurs aléatoires unitaires. Pour cela, nous allons choisir aléatoirement les phases unitaires  $U$  et  $V$ .

Soient  $\Omega_0 = U(L) \times U(L)$ ,  $\mathcal{B}_0$  la tribu borélienne sur  $U(L) \times U(L)$  muni de sa topologie usuelle de groupe de Lie et  $\mathbb{P}_0 = \nu_L \otimes \nu_L$  où  $\nu_L$  est la mesure de Haar sur  $U(L)$ . Alors,  $\mathbb{P}_0$  est une mesure de probabilité sur  $\Omega_0$ .

**Remarque 4.1.1.** *Remarquons dès à présent que l'on aurait pu choisir une probabilité quelconque sur  $\Omega_0$  mais que dans ce cas nous ne sommes pas assurés de pouvoir démontrer le Théorème 4.2.2. Comme nous le verrons dans la suite, seule la démonstration de ce théorème et plus précisément celle de la Proposition 4.2.3 nécessite pour le moment cette hypothèse de forte régularité de la probabilité  $\mathbb{P}_0$ .*

On définit ensuite l'espace de probabilité :

$$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_0, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_0, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_0 \right)$$

dont on va noter plus explicitement les éléments ainsi : pour  $\omega \in \Omega$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on note

$$\omega_n = (U_n(\omega), V_n(\omega)) \in \Omega_0.$$

Soit  $\omega \in \Omega$  et soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de matrices dans  $\mathcal{M}_L(\mathbb{C})$  indépendante de  $\omega$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_n^* \alpha_n < I_L$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$S_n(\omega) = S(\alpha_n, U_n(\omega), V_n(\omega)) \in U(2L)_{\text{inv}},$$

où la suite  $((U_n(\omega), V_n(\omega)))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* sur l'espace de probabilité  $(\Omega_0, \mathcal{B}_0, \mathbb{P}_0)$ . Ainsi  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de matrices aléatoires indépendantes dans  $U(2L)_{\text{inv}}$ , mais pas nécessairement identiquement distribuées puisque dépendant de la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Une fois définie une telle suite de matrices aléatoires indépendantes dans  $U(2L)_{\text{inv}}$ , on peut définir, pour tout  $\omega \in \Omega$ , les opérateurs  $\mathbb{V}_\omega$ ,  $\mathbb{W}_\omega$  et  $\mathbb{U}_\omega = \mathbb{V}_\omega \mathbb{W}_\omega$  comme dans (4.2) et (4.3).

On appelle *scattering zipper aléatoire* associé à la suite  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ , la famille d'opérateurs  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

Comme nous l'avons déjà vu dans le cadre auto-adjoint, pour pouvoir étudier des propriétés spectrales pour  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , il est nécessaire que ces propriétés ne dépendent  $\mathbb{P}$ -presque sûrement pas du paramètre  $\omega \in \Omega$ . C'est à nouveau une conséquence de l'ergodicité de la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  lorsque celle-ci l'est. Ce n'est pas le cas si la suite des coefficients de Verblunsky  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est quelconque. Pour s'assurer de l'ergodicité de la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , nous faisons l'hypothèse très forte suivante.

**Hypothèse A.** La suite des coefficients de Verblunsky  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, égale à une matrice  $\alpha \neq 0$  vérifiant  $\alpha^* \alpha < I_L$ .

**Remarque 4.1.2.** L'hypothèse A implique également que la suite  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$  est identiquement distribuée. Ainsi, sous cette hypothèse,  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires dans  $U(2L)_{\text{inv}}$ . Ce caractère *i.i.d.* est important pour pouvoir définir les exposants de Lyapounov et étudier leurs propriétés.

On définit la translation de 2,  $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ , par :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{Z}, (\tau(\omega))_n = \omega_{n+2}.$$

L'application  $\tau$  est ergodique sur  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ . On déduit de cela et de l'hypothèse A que la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  est  $2\mathbb{Z}$ -ergodique.

La  $2\mathbb{Z}$ -ergodicité remplace la  $\mathbb{Z}$ -ergodicité que l'on a rencontrée dans les modèles d'Anderson. Cela est dû au fait que les matrices  $S_n$  sont choisies dans  $U(2L)$  et que les blocs de  $\mathbb{V}$  sont translatés de seulement  $L$  colonnes et non pas  $2L$  par rapport à celles de  $\mathbb{W}$ . La superposition induite sur les blocs de  $\mathbb{V}$  et de  $\mathbb{W}$  est une obstruction à la  $\mathbb{Z}$ -ergodicité que l'on peut "ignorer" en se plaçant dans le réseau  $2\mathbb{Z}$ .

On note de manière usuelle  $S^1$  le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . Puisque  $\mathbb{U}_\omega$  est unitaire pour tout  $\omega \in \Omega$ , son spectre  $\sigma(\mathbb{U}_\omega)$  est inclus dans  $S^1$ . De plus, par la  $2\mathbb{Z}$ -ergodicité de la



famille  $\{\mathbf{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , il existe  $\Sigma \subset \mathbb{S}^1$  tel que, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\Sigma = \sigma(\mathbf{U}_\omega)$ . C'est le spectre presque-sûr de  $\{\mathbf{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

Il existe de même  $\Sigma_{\text{pp}}$ ,  $\Sigma_{\text{ac}}$  et  $\Sigma_{\text{sc}}$  sous-ensembles de  $\mathbb{S}^1$ , les spectres presque-sûrs purement ponctuel, absolument continu et singulier continu de  $\{\mathbf{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . C'est en effet une propriété générale des familles ergodiques d'opérateurs, qui ne dépend pas du fait que les opérateurs considérés soient auto-adjoints ou unitaires. Il est juste nécessaire qu'un théorème spectral s'applique à ces opérateurs pour pouvoir définir leurs projecteurs spectraux. C'est bien le cas pour les opérateurs unitaires et plus généralement pour les opérateurs normaux (voir [Lax02, Chapter 31]).

## 4.2 Séparabilité des exposants de Lyapounov

Dans cette section, je présente le résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov pour le modèle de scattering zipper aléatoire obtenu dans [BM15, Theorem 1]. Au préalable et afin de fixer les notations, je donne l'expression des matrices de transfert associées à  $\{\mathbf{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  et je redéfini dans le cadre unitaire les exposants de Lyapounov.

A l'aide du formalisme des matrices de transfert, nous ramenons l'étude du comportement asymptotique d'une solution  $\phi$  de

$$\mathbf{U}_\omega \phi = z\phi, \quad \text{pour } z \in \mathbb{S}^1, \quad (4.8)$$

à celui du comportement asymptotique d'un produit de matrices aléatoires.

Dans (4.4) on constate que l'action de  $S_n$  sur  $\phi$  et  $\psi$  dépend de la parité de  $n$  et que les canaux "sortants" de  $S_n$  le font à gauche et à droite, ce qui empêche d'écrire une relation simple entre les canaux à gauche de  $S_n$  et ceux à droite de  $S_n$ . Ainsi, nous sommes amenés à réécrire (4.4) de façon à contourner cette difficulté.

Au lieu de regarder les relations "entrées-sorties" de la matrice de diffusion  $S_n$ , on cherche une nouvelle matrice qui permet d'exprimer  $\begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix}$  en fonction de  $\begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$  pour  $\phi$  une solution de (4.8) et  $\psi = \mathbb{W}\phi$ . Cela se fait en transformant les matrices de diffusion  $S_n$  appartenant à  $\mathbf{U}(2L)_{\text{inv}}$  en des éléments du groupe de Lorentz.

Le groupe de Lorentz  $\mathbf{U}(L, L)$  de signature  $(L, L)$  est défini comme étant l'ensemble des matrices de tailles  $2L \times 2L$  qui préservent la forme

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_L & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_L \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

au sens où :  $T \in \mathbf{U}(L, L) \Leftrightarrow T^* \mathcal{L} T = \mathcal{L}$ .

L'application de  $\mathbf{U}(2L)_{\text{inv}}$  dans  $\mathbf{U}(L, L)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(2L)_{\text{inv}} &\rightarrow \mathbf{U}(L, L) \\ \varphi : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \gamma - \delta \beta^{-1} \alpha & \delta \beta^{-1} \\ -\beta^{-1} \alpha & \beta^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une bijection. Soit  $z \in \mathbb{S}^1$ . Si  $\phi$  est une solution de (4.8) et  $\psi = \mathbb{W}\phi$ , alors on a les relations suivantes, démontrées dans [MS13] :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} \phi_{2n} \\ \psi_{2n} \end{pmatrix} = \varphi(z^{-1} S_{2n}(\omega)) \begin{pmatrix} \psi_{2n-1} \\ \phi_{2n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \psi_{2n+1} \\ \phi_{2n+1} \end{pmatrix} = \varphi(S_{2n+1}(\omega)) \begin{pmatrix} \phi_{2n} \\ \psi_{2n} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Soit encore,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} \phi_{2n+2} \\ \psi_{2n+2} \end{pmatrix} = \varphi(z^{-1}S_{2n+2}(\omega)) \cdot \varphi(S_{2n+1}(\omega)) \begin{pmatrix} \phi_{2n} \\ \psi_{2n} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} \phi_{2n+1} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix} = \varphi(z^{-1}S_{2n+1}(\omega)) \cdot \varphi(S_{2n}(\omega)) \begin{pmatrix} \phi_{2n-1} \\ \psi_{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Ces relations conduisent à introduire l'application  $T(z, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{U}(L, L)$ ,

$$\forall \omega \in \Omega, T(z, \omega) = \begin{pmatrix} V_0(\omega) & 0 \\ 0 & (U_0(\omega))^* \end{pmatrix} \hat{T}_0(z) \begin{pmatrix} V_1(\omega) & 0 \\ 0 & (U_1(\omega))^* \end{pmatrix} \hat{T}_1 \quad (4.13)$$

avec

$$\hat{T}_0(z) = \begin{pmatrix} z^{-1}\tilde{\rho}^{-1} & \tilde{\rho}^{-1}a^* \\ \alpha\tilde{\rho}^{-1} & z\rho^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{T}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}^{-1} & \tilde{\rho}^{-1}a^* \\ \alpha\tilde{\rho}^{-1} & \rho^{-1} \end{pmatrix},$$

Dans ce cas, on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall z \in \mathbb{S}^1, \forall n \in \mathbb{Z}, T(z, \tau^n(\omega)) = \varphi(z^{-1}S_{2n}(\omega)) \cdot \varphi(S_{2n-1}(\omega)). \quad (4.14)$$

La matrice  $T(z, \tau^n(\omega))$  est la  $n$ -ième matrice de transfert associée à l'opérateur  $\mathbb{U}_\omega$ .

La suite  $(T(z, \tau^n(\omega)))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires dans  $\mathbb{U}(L, L)$  du fait du caractère *i.i.d.* de la suite  $((U_n(\omega), V_n(\omega)))_{n \in \mathbb{Z}}$  dans  $\Omega$  et du fait de l'hypothèse A. Pour avoir la même loi pour les matrices de transfert, il est bien nécessaire de considérer un produit de deux matrices successives  $\varphi(z^{-1}S_{2n}(\omega)) \cdot \varphi(S_{2n-1}(\omega))$  et non pas juste une matrice. On retrouve ici l'obstruction à la  $\mathbb{Z}$ -ergodicité de  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  qui conduit à la  $2\mathbb{Z}$ -ergodicité.

Comme précédemment dans le cas des matrices de transfert associées aux modèles d'Anderson étudiés au Chapitre 2, les matrices de transfert  $T(z, \cdot)$  engendrent un cocycle  $\Phi$  sur le système dynamique ergodique  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}, (\tau^n)_{n \in \mathbb{Z}})$  défini par  $\Phi(z, \cdot, \cdot) : \Omega \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}(L, L)$  et

$$\Phi(z, \omega, n) = \begin{cases} T(z, \tau^{n-1}(\omega)) \dots T(z, \omega) & \text{si } n > 0 \\ I_{2L} & \text{si } n = 0 \\ (T(z, \tau^n(\omega)))^{-1} \dots (T(z, \tau^{-1}(\omega)))^{-1} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

A partir de ce cocycle on peut définir les exposants de Lyapounov associés à la famille ergodique  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $z \in \mathbb{S}^1$ . Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , les limites suivantes existent et sont égales :*

$$\Psi(z, \omega) := \lim_{n \rightarrow +\infty} ((\Phi(z, \omega, n))^* \Phi(z, \omega, n))^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} ((\Phi(z, \omega, n))^* \Phi(z, \omega, n))^{1/2|n|}. \quad (4.15)$$

Pour tout  $k \in \{1, \dots, 2L\}$ , soit  $\lambda_k(z, \omega)$  la  $k$ -ième valeur propre de  $\Psi(z, \omega)$ , les valeurs propres étant rangées dans l'ordre croissant. Il existe alors des réels  $\lambda_k(z) \geq 0$  tels que, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\lambda_k(z, \omega) = \lambda_k(z)$ .

En effet, d'après [Arn98, Remark 3.4.10], on peut appliquer [Arn98, Theorem 3.4.11] sur  $\mathbb{C}^{2L}$  au lieu de  $\mathbb{R}^{2L}$ .

Dans la suite, on notera  $\Omega_{\text{Lyap}}$  un sous-ensemble de  $\Omega$  qui vérifie :

- (i)  $\mathbb{P}(\Omega_{\text{Lyap}}) = 1$ ,
- (ii) pour tout  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$  les limites (4.15) existent,
- (iii) pour tout  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, 2L\}$ ,  $\lambda_k(z, \omega) = \lambda_k(z)$ .

On peut alors définir les exposants de Lyapounov associés à la famille ergodique  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  comme étant les réels  $\gamma_k(z)$  définis par :

$$\forall z \in \mathbb{S}^1, \forall k \in \{1, \dots, 2L\}, \gamma_k(z) := \log(\lambda_k(z)).$$

L'appartenance des matrices de transfert au groupe de Lorentz implique une relation de symétrie sur les exposants de Lyapounov qui est la même que dans le cas où les matrices de transfert sont dans le groupe symplectique :

$$\forall k \in \{0, \dots, L\}, \gamma_{2L-k+1}(z) = -\gamma_k(z).$$

Cela n'est pas surprenant du fait que comme nous allons le détailler à la fin de cette section, le groupe de Lorentz et le groupe symplectique complexe sont conjugués via la transformée de Cayley. Les matrices dans ces groupes partagent donc certaines propriétés.

En particulier, les exposants de Lyapounov se regroupent encore par paires d'exposants opposés :

$$\gamma_1(z) \geq \dots \geq \gamma_L(z) \geq 0 \geq \gamma_{L+1}(z) = -\gamma_L(z) \geq \dots \geq \gamma_{2L}(z) = -\gamma_1(z). \quad (4.16)$$

Ainsi, dans la suite nous n'étudierons que les  $L$  premiers exposants, les exposants positifs.

Ces premières propriétés des exposants de Lyapounov nous conduisent au premier résultat démontré dans [BM15].

**Théorème 4.2.2.** *Sous l'hypothèse A, pour tout  $z \in \mathbb{S}^1$ ,*

$$\gamma_1(z) > \gamma_2(z) > \dots > \gamma_L(z) > 0.$$

Pour démontrer ce théorème, la démarche est la même que dans le cas des différents modèles d'Anderson étudiés dans la Section 2.2. L'idée est d'appliquer le critère de Goldsheid - Margulis au groupe de Fürstenberg associé à la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  que l'on peut définir comme étant le sous-groupe fermé de  $U(L, L)$  :

$$G_{\mu_z} = \overline{\langle \text{supp} \mu_z \rangle} \subset U(L, L),$$

engendré par le support de  $\mu_z$ , la loi commune des matrices de transfert  $T(z, \tau^n(\omega))$ . L'adhérence est prise au sens de la topologie sur  $U(L, L)$  induite par la topologie usuelle sur  $\mathcal{M}_{2L}(\mathbb{C})$ .

Le fait que dans le cadre unitaire, le groupe de Fürstenberg soit un sous-groupe du groupe de Lorentz et non pas du groupe symplectique nécessite quelques explications quant au fait que le critère de Fürstenberg s'applique bien. Nous supposons donc acquis le résultat de la Proposition 4.2.3, à savoir que le groupe de Fürstenberg est égal au groupe de Lorentz pour tout  $z$  dans  $S^1$ .

Pour passer des résultats sur les exposants de Lyapounov dans le cadre symplectique au cadre du groupe de Lorentz, nous suivons la stratégie de Asch, Bourget et Joye dans [ABJ10, Theorem 6.1]. Soit  $z \in S^1$ . En supposant le résultat de la Proposition 4.2.3,  $G_{\mu_z} = U(L, L)$ .

Par la transformée de Cayley, le groupe  $U(L, L)$  est unitairement équivalent au groupe symplectique complexe. Plus précisément, si  $C \in \mathcal{M}_{2L}(\mathbb{C})$  est la matrice

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_L & -iI_L \\ I_L & iI_L \end{pmatrix},$$

et si  $J$  est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_L \\ I_L & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$U(L, L) = \text{CSp}_L(\mathbb{C})C^*,$$

où

$$\text{Sp}_L(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_{2L}(\mathbb{C}) \mid M^*JM = J\}.$$

Nous en déduisons que pour tout  $z \in S^1$ ,  $G_{\mu_z}$  est unitairement équivalent au groupe  $\text{Sp}_L(\mathbb{C})$ .

Pour pouvoir appliquer directement les résultats de [BL85], il nous reste à passer du groupe symplectique complexe au groupe symplectique réel. Là encore, nous suivons [ABJ10] et introduisons l'application qui sépare les parties réelles et imaginaires d'une matrice à coefficients complexes et les placent dans des blocs :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2L}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{4L}(\mathbb{R}) \\ A + iB & \mapsto & \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \end{array}$$

Finalement,  $\pi(C^* \cdot U(L, L) \cdot C) \subset \text{Sp}_{2L}(\mathbb{R})$ .

On déduit alors de [ABJ10, Lemma 6.3] que  $\pi(C^* \cdot U(L, L) \cdot C)$  est  $L_{2p}$ -fortement irréductible pour tout  $p \in \{1, \dots, L\}$ . Puis, à l'aide d'une permutation des lignes et des colonnes, on déduit de la matrice diagonale par blocs donnée dans [ABJ10, Lemma 6.4], un élément de  $U(L, L)$  avec  $2L$  valeurs singulières distinctes, ce qui nous assure que  $\pi(C^* \cdot U(L, L) \cdot C)$  est également  $2p$ -contractant pour tout  $p \in \{1, \dots, L\}$ .

Nous pouvons donc appliquer le Corollaire 2.2.10 au groupe  $\pi(C^* \cdot U(L, L) \cdot C)$  pour obtenir que les exposants de Lyapounov associés à  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  sont séparés et par là-même les  $L$  premiers exposants sont strictement positifs d'après (4.16).

Il nous reste donc à montrer la proposition suivante.

**Proposition 4.2.3.** *Pour tout  $z \in S^1$ ,  $G_{\mu_z} = U(L, L)$ .*

Pour cela, nous commençons par décrire les générateurs du groupe de Fürstenberg. Puisque  $(T(z, \tau^n(\omega)))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite *i.i.d.* dans  $U(L, L)$ , en utilisant l'hypothèse A et le fait que le support de la mesure de Haar est le groupe unitaire  $U(L)$  tout entier, on a :

$$G_{\mu_z} = \overline{\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & (U_0)^* \end{pmatrix} \hat{T}_0(z) \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & (U_1)^* \end{pmatrix} \hat{T}_1 \mid (U_0, V_0, U_1, V_1) \in U(L)^4 \right\} \right\rangle}. \quad (4.17)$$

Puis, par connexité du groupe de Lorentz  $U(L, L)$ , pour montrer la Proposition 4.2.3, il suffit de montrer l'égalité des algèbres de Lie de ces deux groupes de Lie. L'algèbre de Lie de  $U(L, L)$  est donnée par

$$\mathfrak{u}(L, L) = \text{Lie}(U(L, L)) = \{T \in \mathcal{M}_{2L}(\mathbb{C}) \mid T^* \mathcal{L} + \mathcal{L} T = 0\},$$

soit encore,

$$\mathfrak{u}(L, L) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2L}(\mathbb{C}) \mid A^* = -A, D^* = -D, (A, B, D) \in \mathcal{M}_L(\mathbb{C}) \right\}.$$

Notons  $\mathfrak{g}(z) := \text{Lie}(G_{\mu_z})$ .

Pour  $U_0 = V_0 = U_1 = V_1 = I_L$ , on a  $\hat{T}_0(z) \hat{T}_1 \in G_{\mu_z}$ . D'où,  $(\hat{T}_0(z) \hat{T}_1)^{-1}$  est également dans  $G_{\mu_z}$ . En prenant cette fois  $U_1 = V_1 = I_L$ , en laissant  $U_0, V_0$  parcourir le groupe  $U(L)$  et en multipliant à droite par  $(\hat{T}_0(z) \hat{T}_1)^{-1}$ , il vient,

$$\forall (U_0, V_0) \in U(L)^2, \begin{pmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & U_0^* \end{pmatrix} \in G_{\mu_z}.$$

A cette étape, on utilise de manière cruciale le fait que le support de la mesure de Haar est  $U(L)$  tout entier. Nous discuterons de cela dans la Section 4.4.

De la première étape, on déduit que  $U(L) \oplus U(L) \subset G_{\mu_z}$  ce qui implique que  $\text{Lie}(U(L)) \oplus \text{Lie}(U(L)) \subset \mathfrak{g}(z)$  dont on déduit, puisque

$$\text{Lie}(U(L)) = \{A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{C}) \mid A^* = -A\},$$

$$\mathfrak{a}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A^* = -A, D^* = -D, (A, D) \in \mathcal{M}_L(\mathbb{C})^2 \right\} \subset \mathfrak{g}(z).$$

La construction des blocs diagonaux des matrices dans  $\mathfrak{g}(z)$  est donc obtenue très rapidement du fait que l'on a supposé un aléa très régulier pour nos phases unitaires  $U$  et  $V$ . Il s'agit ensuite de construire les blocs non-diagonaux.

Pour cela, on commence par reprendre  $V_0 = U_0 = I_L$  puis pour  $j \in \{1, \dots, L\}$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,  $V_1 = \text{diag}(1, \dots, 1, e^{it}, 1, \dots, 1)$  avec  $e^{it}$  à la  $j$ -ième place et  $U_1 = I_L$ . On dérive en  $t = 0$  pour obtenir

$$\forall j \in \{1, \dots, L\}, i \hat{T}_1^{-1} \begin{pmatrix} E_{jj} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{T}_1 \in \mathfrak{g}(z),$$

où  $E_{kl} \in \mathcal{M}_L(\mathbb{C})$  est la matrice élémentaire dont les coefficients valent tous 0 sauf le coefficient  $(k, l)$  qui vaut 1. En sommant sur  $j$  il vient,

$$i\hat{T}_1^{-1} \begin{pmatrix} I_L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{T}_1 \in \mathfrak{g}(z).$$

soit encore

$$i \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\rho}^{-2}\alpha^* \\ -\alpha\tilde{\rho}^{-2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(z).$$

Nous avons donc des matrices dans  $\mathfrak{g}(z)$  avec des blocs hors de la diagonale. En utilisant la non nullité de  $\alpha$  et l'inversibilité de  $\tilde{\rho}^{-2}$ , en usant des crochets de Lie, on obtient l'existence d'un couple d'indices  $(j_0, k_0) \in \{1, \dots, L\}^2$  et de  $c \in \mathbb{C}$ , avec  $c \neq 0$  tels que

$$i \begin{pmatrix} 0 & cE_{k_0j_0} \\ -cE_{j_0k_0} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(z). \quad (4.18)$$

En utilisant de bonnes combinaisons de crochets de Lie on peut alors montrer successivement que

$$\forall (j, k) \in \{1, \dots, L\}^2 \setminus \{(j_0, k_0)\}, \begin{pmatrix} 0 & E_{kj} \\ E_{jk} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(z) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & iE_{kj} \\ -iE_{jk} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(z), \quad (4.19)$$

puis

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{k_0j_0} \\ E_{j_0k_0} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(z), \quad (4.20)$$

et enfin

$$\begin{pmatrix} 0 & iE_{k_0j_0} \\ -iE_{j_0k_0} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(z). \quad (4.21)$$

Alors, si on note

$$\mathfrak{a}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \middle| B \in \mathcal{M}_L(\mathbb{C}) \right\},$$

comme les éléments de  $\mathfrak{g}(z)$  construits en (4.19), (4.20) et (4.21) forment une base de  $\mathfrak{a}_2$ , il vient

$$\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}(z).$$

Finalement, puisque  $\mathfrak{u}(L, L) = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}(z)$  on obtient bien  $\mathfrak{u}(L, L) = \mathfrak{g}(z)$  ce qui démontre la Proposition 4.2.3.

Pour plus de détails sur les étapes de construction des éléments dans  $\mathfrak{g}(z)$ , nous renvoyons à la démonstration de [BM15, Proposition 2].

**Remarque 4.2.4.** Dans le cas où  $\alpha = 0$ , on montre que  $\mathfrak{g}(z) = \mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{u}(L, L)$ . Ainsi l'hypothèse  $\alpha \neq 0$  est essentielle pour démontrer la Proposition 4.2.3.

### 4.3 Théorie de Kotani dans le cadre unitaire

Dans [BM15] nous avons également obtenu un résultat d'absence de spectre absolument continu presque-sûr pour la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ .

**Théorème 4.3.1.** *Sous l'hypothèse A, le scattering zipper aléatoire  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  n'a pas de spectre absolument continu presque-sûr :  $\Sigma_{ac} = \emptyset$ .*

Comme dans le cas auto-adjoint présenté dans [KS88b], le Théorème 4.3.1 découle d'un résultat plus général qui fait le lien entre la multiplicité du spectre absolument continu de  $\mathbb{U}_\omega$  et le nombre d'exposants de Lyapounov s'annulant à une énergie donnée.

Pour  $j \in \{1, \dots, L\}$ , on pose

$$Z_j = \left\{ z \in \mathbb{S}^1 \mid \exists l_1, \dots, l_{2j} \in \{1, \dots, 2L\}, \gamma_{l_1}(z) = \dots = \gamma_{l_{2j}}(z) = 0 \right\}.$$

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de coefficients de Verblunsky telle que le scattering zipper aléatoire associé  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  soit ergodique. Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , la multiplicité du spectre absolument continu de  $\mathbb{U}_\omega$  dans  $Z_j$  est au plus  $2j$ .*

**Remarque 4.3.3.** *Le Théorème 4.3.2 ne nécessite pas l'hypothèse A, mais seulement l'ergodicité a priori de la famille  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  (qui est bien entendu impliquée par l'hypothèse A).*

Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration du Théorème 4.3.2 dont on déduira rapidement le Théorème 4.3.1 à l'aide du Théorème 4.2.2. Pour cela, nous adaptons au cadre unitaire l'analogie du Théorème d'Ishii-Pastur démontré dans [KS88b, Theorem 5.4] dans le cas auto-adjoint et à valeurs matricielles.

Dans notre cadre unitaire (et donc discret), une suite  $\varphi \in (\mathbb{C}^L)^{\mathbb{Z}}$  est dite *polynomialement bornée* s'il existe  $C > 0$  et  $p \geq 1$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \|\varphi_n\|_{\mathbb{C}^L} \leq C(1 + |n|)^p,$$

où  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^L}$  est une norme quelconque sur  $\mathbb{C}^L$ . On démontre alors la proposition suivante [BM15, Proposition 3].

**Proposition 4.3.4.** *Soient  $j \in \{1, \dots, L\}$  et  $z \in Z_j$  fixés. Soit  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ . Alors tout sous-espace de l'espace*

$$\left\{ \varphi \in (\mathbb{C}^L)^{\mathbb{Z}} \mid \mathbb{U}_\omega \varphi = z\varphi, \varphi \notin \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^L \text{ et } \varphi \text{ est polynomialement bornée} \right\}$$

*est de dimension au plus  $2j$ .*

Nous donnons les principales étapes de la démonstration de cette proposition qui reprend la trame de la démonstration faite dans [KS88b, Lemma 5.5]. Nous définissons les sous-espaces suivants :

$$V_{\text{sol}}(z) = \left\{ \varphi \in (\mathbb{C}^L)^{\mathbb{Z}} \mid \mathbb{U}_\omega \varphi = z\varphi \right\},$$

$$V_{\text{P}}(z) = \left\{ \varphi \in V_{\text{sol}}(z) \mid \varphi \text{ est polynomialement bornée} \right\},$$

et

$$V_{\ell^2}(z) = \{\varphi \in V_{\text{sol}}(z) \mid \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^L\}.$$

Nous voulons montrer que

$$\dim V_{\text{P}}(z) \leq 2j + \dim V_{\ell^2}(z).$$

En adaptant au cadre du groupe de Lorentz la démonstration de [KS88b, Lemma 5.5] faite dans le cadre symplectique, nous sommes amenés à poser, pour  $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dans  $V_{\text{sol}}(z)$ ,

$$W(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}^* \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Alors,  $W$  est une forme antisymétrique non-dégénérée sur  $V_{\text{sol}}(z)$ . On en déduit que si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux sous-espaces de  $V_{\text{sol}}(z)$  tels que

$$\forall \varphi \in V_1, \forall \psi \in V_2, W(\varphi, \psi) = 0, \quad (4.22)$$

alors

$$\dim V_1 + \dim V_2 \leq 2L. \quad (4.23)$$

On pose enfin :

$$D_{\pm} = \{\varphi \in V_{\text{sol}}(z) \mid \varphi \text{ décroît exponentiellement en } \pm \infty\}.$$

Puisque  $z \in Z_j$ , parmi les  $2L$  exposants de Lyapounov, exactement  $2j$  s'annulent en  $z$ . Ainsi par le théorème d'Oseledets,

$$\dim D_{\pm} = L - j.$$

De plus,  $D_+ \cap D_- \subset V_{\ell^2}(z)$  d'où,

$$\dim (D_+ + D_-) \geq 2L - 2j - \dim V_{\ell^2}(z). \quad (4.24)$$

Si  $\varphi \in V_{\text{P}}(z)$  et  $\psi \in D_+ + D_-$ , par domination directe pour la limite

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}^* \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \lim_{|n| \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.25)$$

et pour la première égalité on utilise le fait que la suite  $\left( \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$  est constante pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $V_{\text{sol}}(z)$ , du fait que  $|z| = 1$  et  $T(z, \tau^n(\omega)) \in \text{U}(L, L)$ .

Donc, si  $\varphi \in V_{\text{P}}(z)$  et  $\psi \in D_+ + D_-$ ,  $W(\varphi, \psi) = 0$ . Cela implique, par (4.23),

$$\dim V_{\text{P}}(z) + \dim (D_+ + D_-) \leq 2L.$$

En combinant avec l'inégalité (4.24),

$$\dim V_{\text{P}}(z) \leq 2j + \dim V_{\ell^2}(z)$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 4.3.4.

Soit  $Z_{PB}$  l'ensemble des nombres complexes  $z \in \mathbb{S}^1$  tels que l'équation  $\mathbb{U}_{\omega} \varphi = z \varphi$  admette une solution polynomialement bornée non-triviale. Comme l'opérateur  $\mathbb{U}_{\omega}$  a une structure de bande, on peut lui appliquer les résultats de [BHJ03]. En particulier, [BHJ03, Lemma 5.4] et [BHJ03, Corollary 5.2] appliqués à la famille  $\{\mathbb{U}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  conduisent au résultat suivant.



**Proposition 4.3.5.** *Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ ,*

$$\sigma(\mathbf{U}_\omega) = \overline{Z_{PB}} = \overline{\{z \in \mathbb{S}^1 \mid \exists \varphi \in V_P(z) \setminus \{0\}\}}$$

et  $E_{\mathbb{S}^1 \setminus Z_{PB}}(\mathbf{U}_\omega) = 0$ , où  $E_{\mathbb{S}^1 \setminus Z_{PB}}(\mathbf{U}_\omega)$  est le projecteur spectral sur  $\mathbb{S}^1 \setminus Z_{PB}$  associé à l'opérateur unitaire  $\mathbf{U}_\omega$ .

Des Propositions 4.3.4 et 4.3.5, on déduit la proposition suivante qui précise l'énoncé du Théorème 4.3.2, au sens où elle donne l'ensemble de mesure pleine pour lequel le résultat est vrai, mais également au sens où elle ne suppose pas l'ergodicité de la famille  $\{\mathbf{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ . Celle-ci reste nécessaire pour pouvoir parler de spectre absolument continu presque-sûr dans le Théorème 4.3.2.

**Proposition 4.3.6.** *Pour tout  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ , la multiplicité du spectre absolument continu de  $\mathbf{U}_\omega$  dans  $Z_j$  est au plus  $2j$ .*

Pour démontrer cette proposition, on peut reprendre les étapes de [Cyc+87, Theorem 9.13] en les adaptant au contexte des opérateurs unitaires.

Soit  $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ . Pour  $\Delta$  un borélien de  $\mathbb{S}^1$ , on note  $E_\Delta(\mathbf{U}_\omega)$  le projecteur spectral sur  $\Delta$  associé à  $\mathbf{U}_\omega$  et par  $E_\Delta^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega)$  le projecteur spectral sur la partie absolument continue de  $\sigma(\mathbf{U}_\omega)$  dans  $\Delta$ .

Pour démontrer l'assertion de la Proposition 4.3.6, il faut démontrer que

$$\text{rg } E_{Z_j}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) \leq 2j.$$

Par la Proposition 4.3.5,  $E_{\mathbb{S}^1 \setminus Z_{PB}}(\mathbf{U}_\omega) = 0$ , d'où

$$E_{Z_j}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) = E_{Z_j \cap Z_{PB}}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) = E_{Z_j \cap Z_{PB} \cap S}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) + E_{Z_j \cap Z_{PB} \cap S^c}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega),$$

où  $S = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid \exists \varphi \in V_P(z) \cap V_{\ell^2}(z), \varphi \neq 0\}$ .

Si  $z \in S$ , alors  $z$  est une valeur propre de  $\mathbf{U}_\omega$ . Par ailleurs, comme l'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^L$  est séparable, il ne peut y avoir qu'un nombre au plus dénombrable de vecteurs propres de  $\mathbf{U}_\omega$  deux à deux orthogonaux. Donc,  $S$  étant dénombrable, sa mesure de Haar est nulle. D'où,

$$E_{Z_j \cap Z_{PB} \cap S}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) = 0 \quad \text{et} \quad E_{Z_j}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) = E_{Z_j \cap Z_{PB} \cap S^c}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega). \quad (4.26)$$

Mais, puisque  $z \in Z_j$ , par la Proposition 4.3.4,

$$\text{rg } E_{Z_j \cap Z_{PB} \cap S^c}(\mathbf{U}_\omega) \leq 2j$$

ce qui implique que

$$\text{rg } E_{Z_j \cap Z_{PB} \cap S^c}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) \leq 2j. \quad (4.27)$$

En combinant (4.26) et (4.27), on a bien démontré que

$$\text{rg } E_{Z_j}^{\text{ac}}(\mathbf{U}_\omega) \leq 2j.$$

On peut aller plus loin. Rappelons que  $\nu_1$  est la mesure de Haar sur  $U(1) = \mathbb{S}^1$ . On a alors le corollaire suivant,

**Corollaire 4.3.7.** *Si pour  $\nu_1$ -p.t.  $z \in \mathbb{S}^1$ ,  $\gamma_1(z) \geq \dots \geq \gamma_L(z) > 0$ , alors  $\Sigma_{ac} = \emptyset$ .*

Soit  $z \in \mathbb{S}^1$  tel que  $\gamma_L(z) > 0$ . Dans ce cas, aucun des exposants de Lyapounov ne s'annule en  $z$ , donc  $z \in Z_0$ . Par la Proposition 4.3.6,  $E_{Z_0}^{ac}(\mathbb{U}_\omega) = 0$ . Mais si  $\Delta$  est un borélien de  $\mathbb{S}^1$ , comme par hypothèse  $\nu_1(Z_0) = 1$ ,

$$E_{\Delta}^{ac}(\mathbb{U}_\omega) = E_{\Delta \cap Z_0}^{ac}(\mathbb{U}_\omega) = 0, \text{ pour } \mathbb{P}\text{-p.t } \omega \in \Omega.$$

Cela implique que  $\Sigma_{ac} = \emptyset$  par définition de  $\Sigma_{ac}$ .

Finalement, le Corollaire 4.3.7 et le Théorème 4.2.2 impliquent le Théorème 4.3.1 : le scattering zipper aléatoire  $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  n'a pas de spectre absolument continu presque-sûr.

Cela termine la présentation des résultats contenus dans [BM15].

## 4.4 Perspectives de recherches futures

Le modèle de scattering zipper et plus précisément sa version aléatoire n'a été que très peu étudié. Il n'y a, à ma connaissance, que deux articles qui considèrent précisément ce modèle, [MS13] et [BM15]. Cela en fait donc un modèle pour lequel de très nombreuses questions classiques restent ouvertes.

La première de ces questions ouvertes pour le scattering zipper aléatoire est celle de la **localisation d'Anderson et dynamique**. Le résultat de séparation pour les exposants de Lyapounov que nous avons obtenu avec Laurent Marin est un signe fort de la localisation d'Anderson. Comme nous l'avons vu au Théorème 2.3.7, le fait de montrer que le groupe de Fürstenberg associé à une famille ergodique d'opérateurs aléatoires quasi-unidimensionnels de type Schrödinger est suffisamment gros dans le groupe symplectique implique la localisation dynamique et par là-même la localisation d'Anderson. Il est tout à fait raisonnable de penser que l'on puisse démontrer un théorème analogue au Théorème 2.3.7 pour des familles ergodiques d'opérateurs unitaires quasi-unidimensionnels comme l'est le scattering zipper aléatoire.

Ce projet de recherche sur la localisation pour le modèle de scattering zipper aléatoire est l'objet de la thèse de doctorat d'Amine Khouildi dont le directeur est Hatem Zaag et dont je suis le co-directeur. Il aborde ce problème par la Méthode des Moments Fractionnaires qui est la méthode utilisée également dans les démonstrations de localisation d'Anderson pour d'autres modèles unitaires comme le modèle d'Anderson unitaire étudié dans [HJS09] ou le modèle de Chalker-Coddington étudié dans [ABJ10]. Il tente en particulier d'adapter les idées de [HJS09] au cas quasi-unidimensionnel.

Il serait toutefois possible d'envisager une approche par l'analyse multi-échelle pour étudier ce modèle unitaire comme l'ont fait Cedzich et Werner dans [CW21] dans le cadre de marches quantiques unitaires. Cela permettrait alors de traiter la question de la localisation pour un modèle de scattering zipper aléatoire dans lequel les phases unitaires feraient apparaître un aléa bien plus singulier qu'un tirage uniforme suivant la mesure de Haar.

Une dernière approche possible serait d'adapter les preuves portant sur les matrices CMV dans [Sto+05] et basées sur les inégalités de grandes déviations au cas quasi-unidimensionnel.

Si nous voulions adapter la démarche suivie dans le cadre des opérateurs d'Anderson - Bernoulli quasi-unidimensionnels, nous serions amenés à obtenir des résultats sur la **densité d'états intégrée** associée au scattering zipper aléatoire. Une première question à se poser est l'existence même de la densité d'états intégrée dans ce cadre, mais il me semble que les démonstrations usuelles d'existence devraient pouvoir s'adapter sans grande difficulté. Beaucoup moins évidente est la question de la régularité de la densité d'états intégrée. Il faudrait pour cela étudier tout d'abord la régularité Höldérienne des exposants de Lyapounov ce qui ne semble pas poser de réelle difficulté, puis démontrer une **formule de Thouless** analogue à celle obtenue dans [KS88b, Theorem A.1]. Nous avons commencé avec Laurent Marin à réfléchir à une démonstration d'une telle formule de Thouless pour le scattering zipper aléatoire, mais nous avons buté sur certaines difficultés. Il serait judicieux de s'y replonger plus longuement et avec peut être le regard neuf d'un doctorant ou d'un autre collaborateur, afin de démontrer une telle formule et d'aboutir à un résultat de régularité de la densité d'états intégrée qui devrait alors nous conduire assez rapidement vers une estimée de Wegner. De mon point de vue, l'obtention d'une formule de Thouless est pour le moment le principal obstacle à débloquer pour suivre la voie de l'analyse multi-échelle dans une preuve de la localisation d'Anderson et dynamique pour le scattering zipper aléatoire.

L'approche par l'analyse multi-échelle autorisant un aléa de type Bernoulli dans les variables aléatoires en jeu, une généralisation naturelle de notre résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov obtenu avec Laurent Marin serait de traiter le cas où les phases unitaires aléatoires auraient une forme plus particulière et contiendraient des coefficients faisant intervenir des **variables aléatoires de Bernoulli**. Plus précisément, je pense qu'il est possible de démontrer un résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov du type :

**Conjecture 4.4.1.** *Il existe un ensemble de mesure de Haar nulle  $\mathcal{V}$  dans  $U(L) \times U(L)$  tel que,*

- pour tout  $(U, V) \in (U(L) \times U(L)) \setminus \mathcal{V}$ ,
- pour toute suite  $((U_n(\omega), V_n(\omega)))_{n \in \mathbb{Z}} \in \Omega$  de la forme

$$U_n(\omega) = U \text{diag}(e^{i\theta_{n,\omega}^{(1)}}, \dots, e^{i\theta_{n,\omega}^{(L)}}) \text{ et } V_n(\omega) = V \text{diag}(e^{i\eta_{n,\omega}^{(1)}}, \dots, e^{i\eta_{n,\omega}^{(L)}})$$

où les  $(\theta_{n,\cdot}^{(i)})_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\eta_{n,\cdot}^{(i)})_{n \in \mathbb{Z}}$  sont des suites de variables aléatoires i.i.d. indépendantes entre elles, de lois communes respectives  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  telles que pour  $a \neq b$ ,  $\{a, b\}$  soit inclus dans le support de chaque  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ ,

si on pose  $S_n(\omega) = S(\alpha, U_n(\omega), V_n(\omega))$ , alors les exposants de Lyapounov associés au scattering zipper aléatoire défini par la suite de matrices aléatoires  $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont séparés.

Nous n'y sommes pas parvenu à l'époque avec Laurent Marin, mais il me semble tout à fait raisonnable qu'un tel résultat soit correct compte tenu des calculs menés sur le groupe de Fürstenberg associé au modèle de Chalker-Coddington dans [ABJ10].

Comme nous l'avons expliqué à la Section 2.4, la question naturelle qui se pose après avoir démontré la localisation d'Anderson est comment se répartissent les valeurs propres des opérateurs restreints à des cubes. Bien entendu, aucun résultat

de **statistique spectrale** n'est connu pour le scattering zipper aléatoire, la question même de la localisation n'étant pas encore traitée. A ma connaissance, il y a peu de résultats de statistique spectrale dans le cas des opérateurs unitaires aléatoires, la plupart des résultats connus l'étant pour des modèles auto-adjoints, soit des modèles d'Anderson, soit des modèles de déplacement ou de Poisson. Toutefois, il est heureux que l'un des rares articles publiés sur ce sujet dans le cas unitaire le soit pour le cas des matrices CMV dans le cas scalaire. Il s'agit des résultats de Killip et Stojiciu ([KS09]) qui ont obtenu les statistiques spectrales pour les opérateurs CMV dans différents régimes. Ils font le lien entre la vitesse de décroissance des coefficients de Verblunsky et le type de statistiques spectrales observées : pour des coefficients de Verblunsky qui décroissent rapidement, ils obtiennent un processus limite pour les valeurs propres renormalisées qui est un processus d'horloge avec espacement fixe de  $2\pi$ . Pour des coefficients de Verblunsky qui décroissent lentement, ils obtiennent à la limite un processus de Poisson. Dans un cas intermédiaire, ils obtiennent un processus dit de  $\beta$ -ensemble (voir [KS09, Theorem 1.7]).

Pour revenir à l'approche de la localisation d'Anderson par l'analyse multi-échelle comme initiée dans [CW21], notons que Cedzich et Werner présentent relativement rapidement les détails de la mise en place d'un schéma d'analyse multi-échelle dans le cadre unitaire. Avec Constanza Rojas-Molina et Olivier Bourget, nous avons le projet d'écrire plus en détails les différentes étapes et ingrédients de **l'analyse multi-échelle dans un cadre unitaire**. L'idée est ensuite de l'appliquer à la démonstration de la localisation d'Anderson et dynamique pour des marches quantiques dans un environnement de Bernoulli.



# Chapitre 5

## L'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique sur la droite réelle

Dans ce chapitre, je présente les résultats obtenus en collaboration avec Olivier Lafitte et publiés dans [BL18] et [BL21]. Nous avons également publié sous forme d'actes de conférence, [BL15] et [BL16]. Les résultats présentés dans [BL15] sont tous contenus dans [BL18]. Ceux contenus dans [BL16] n'ayant pas fait l'objet d'une publication sous forme d'article dans une revue, je ne les présenterai pas en détail dans ce chapitre, je les évoquerai juste dans les perspectives futures de recherche à la Section 5.3.

### 5.1 L'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique

#### 5.1.1 Présentation du modèle

Soit  $2L_0 \in \mathbb{R}_+^*$  une longueur caractéristique modélisant la distance entre deux ions rangés sur un réseau périodique de dimension 1. Le comportement d'un électron de masse  $m$  dans ce réseau périodique est modélisé par l'opérateur de Schrödinger périodique agissant sur l'espace de  $H^2(\mathbb{R})$  suivant :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V, \quad (5.1)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite et  $V$  est la fonction  $2L_0$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall z \in [-L_0, L_0], V(z) = V_0 \times \left( \frac{|z|}{L_0} - 1 \right),$$

$V_0 \in \mathbb{R}_+^*$  étant un potentiel de référence. Dans ce modèle, les ions sont situés aux points d'abscisses  $2nL_0$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ , ces points correspondant aux minima du potentiel  $V$ .

L'opérateur  $H$  est appelé *opérateur d'Airy-Schrödinger périodique* sur  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $V$  est périodique et localement intégrable, la théorie des opérateurs périodiques décrite en détails dans [RS78] assure que l'opérateur  $H$  a un spectre purement absolument continu et que ce spectre est une union d'intervalles, les bandes

spectrales :

$$\sigma(H) = \bigcup_{p \geq 0} [E_{\min}^p, E_{\max}^p],$$

où  $E_{\min}^p$  et  $E_{\max}^p$  sont les bords des bandes spectrales. Pour  $p \geq 0$ ,  $[E_{\min}^p, E_{\max}^p]$  est appelée la  $p$ -ième bande spectrale et  $(E_{\max}^p, E_{\min}^{p+1})$  est appelé le  $p$ -ième trou spectral.

Afin de décrire le spectre de  $H$ , nous considérons l'équation en  $\psi \in H^2(\mathbb{R})$ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(z)\psi = E\psi. \quad (5.2)$$

Puisque le potentiel  $V$  est affine sur chaque intervalle  $[nL_0, (n+1)L_0]$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , nous reconnaissons dans (5.2), après avoir translaté et mis à l'échelle la variable, l'équation d'Airy :  $u'' = zu$ .

Afin de mettre (5.2) sous forme canonique au sens de l'analyse semiclassique, nous introduisons un paramètre semiclassique  $h$ ,

$$h := \frac{\hbar}{L_0(2mV_0)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.3)$$

Nous introduisons également les notations suivantes : pour tout réel  $E$ , posons  $\mathbf{E} = \frac{E}{V_0}$  et en particulier, posons pour tout  $p \geq 0$ ,  $\mathbf{E}_{\min}^p = \frac{E_{\min}^p}{V_0}$  et  $\mathbf{E}_{\max}^p = \frac{E_{\max}^p}{V_0}$ .

Nous utilisons ces notations et le paramètre semiclassique  $h$  pour écrire l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique dans une forme analogue à celle de l'opérateur étudié dans [Har79].

Soit  $\mathbf{H}$  l'opérateur de Schrödinger périodique agissant sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R})$  et défini par

$$\mathbf{H} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} \phi + \mathbf{V}(x) \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{V}$  est la fonction 2-périodique égale à  $\mathbf{V}(x) = |x| - 1$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Alors, l'équation (5.2) est équivalente à :

$$\mathbf{H}\phi = \mathbf{E}\phi, \quad \phi \in H^2(\mathbb{R}). \quad (5.5)$$

Rappelons que  $u$  et  $v$  désignent les solutions canoniques de l'équation d'Airy (celles dont les conditions de Cauchy en 0 sont  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ).

Nous utiliserons également les fonctions classiques d'Airy,  $Ai$  et  $Bi$ . La fonction d'Airy  $Ai$  joue un rôle spécial parmi les solutions de  $u'' = xu$ . Elle engendre l'unique famille de solutions sous-dominantes de cette équation de Sturm. Elle est également l'unique solution de l'équation d'Airy dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et dont la transformée de Fourier vérifie  $\widehat{Ai}(0) = 1$ . La fonction  $Bi$  est la solution de l'équation d'Airy dont les conditions initiales vérifient  $Bi(0) = \sqrt{3}Ai(0)$  et  $Bi'(0) = -\sqrt{3}Ai'(0)$ .

Nous pouvons faire le lien entre  $(u, v)$  et  $(Ai, Bi)$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \pi(Bi'(0)Ai(x) - Ai'(0)Bi(x)) \quad (5.6)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \pi(Ai(0)Bi(x) - Bi(0)Ai(x)). \quad (5.7)$$

Ainsi,  $u$  et  $v$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}$ . De plus, elles sont strictement croissantes et positives sur  $(0, +\infty)$ . Les zéros de  $u$ ,  $v$  et de leurs dérivées sont donc tous des nombres négatifs ou nuls.

Rappelons que nous avons noté à la Section 1.2.4 les zéros de ces solutions canoniques de la manière suivante :

1.  $\{-\tilde{c}_{2j}\}_{j \geq 0}$  et  $\{-\tilde{c}_{2j+1}\}_{j \geq 0} \cup \{0\}$  les ensembles des zéros de respectivement  $u$  et  $u'$ ,
2.  $\{-c_{2j+1}\}_{j \geq 0} \cup \{0\}$  et  $\{-c_{2j}\}_{j \geq 0}$  les ensembles des zéros de respectivement  $v$  et  $v'$ .

Nous démontrons dans [BL18, Section 3.1] des estimations précises sur ces zéros dont on peut déduire entre autres :  $\forall p \geq 0, -\tilde{c}_p < -c_p$ .

Enfin, nous introduisons des notations pour les largeurs des bandes et trous spectraux. Soit  $p \geq 0$  un entier. On note

$$\delta_p = \mathbf{E}_{\max}^p - \mathbf{E}_{\min}^p$$

la largeur de la  $p$ -ième bande spectrale  $\mathbf{H}$  et

$$\gamma_p = \mathbf{E}_{\min}^{p+1} - \mathbf{E}_{\max}^p$$

la largeur du  $p$ -ième trou spectral.

## 5.1.2 Le spectre de bande dans le régime semiclassique

Les bords des bandes spectrales sont caractérisés à l'aide de la décomposition de Bloch pour les opérateurs de Schrödinger périodiques (voir [RS78, Chapitre XIII]).

Soit  $\omega \in [-1, 1]$ . Soit  $\mathbf{H}(\omega)$  la restriction de  $\mathbf{H}$  à l'espace  $H^2([-1, 1])$ , défini comme étant l'espace des fonctions  $\psi \in H^2(\mathbb{R})$  vérifiant les conditions aux bords quasi-périodiques

$$\psi(1) = e^{i(\pi\omega + \pi)}\psi(-1) \quad \text{et} \quad \psi'(1) = e^{i(\pi\omega + \pi)}\psi'(-1). \quad (5.8)$$

Alors,  $\mathbf{H}$  est l'intégrale directe des opérateurs  $\mathbf{H}(\omega)$  :

$$\mathbf{H} = \int_{[-1, 1]}^{\oplus} \mathbf{H}(\omega) d\omega.$$

Pour déterminer les bords des bandes spectrales de  $\mathbf{H}$ , nous résolvons l'équation (5.5) sur  $[-1, 1]$  en tenant compte des conditions aux bords (5.8). Une paire de solutions fondamentales est donnée par  $x \mapsto u(-h^{-\frac{2}{3}}\mathbf{E} + h^{-\frac{2}{3}}|x|)$  et  $x \mapsto \text{sign}(x) \cdot$



$v(-h^{-\frac{2}{3}}\mathbf{E} + h^{-\frac{2}{3}}|x|)$ . Nous sommes donc amenés à résoudre les quatre équations en  $\mathbf{X} = h^{-\frac{2}{3}}\mathbf{E}$  :

$$v'(-\mathbf{X})u'(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) - v'(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X})u'(-\mathbf{X}) = 0, \quad (5.9)$$

$$u(-\mathbf{X})v(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) - v(-\mathbf{X})u(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = 0, \quad (5.10)$$

$$v(-\mathbf{X})u'(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) - u(-\mathbf{X})v'(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = 0, \quad (5.11)$$

$$v'(-\mathbf{X})u(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) - u'(-\mathbf{X})v(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = 0. \quad (5.12)$$

La théorie générale des opérateurs de Schrödinger périodiques nous dit que l'ensemble des solutions de (5.9) et (5.10), après multiplication par  $h^{\frac{2}{3}}$ , est exactement  $\{\mathbf{E}_{\min}^0, \mathbf{E}_{\max}^1, \mathbf{E}_{\min}^2, \mathbf{E}_{\max}^3, \dots\}$  et que l'ensemble des solutions de (5.11) et (5.12), toujours après multiplication par  $h^{\frac{2}{3}}$ , est exactement  $\{\mathbf{E}_{\max}^0, \mathbf{E}_{\min}^1, \mathbf{E}_{\max}^2, \mathbf{E}_{\min}^3, \dots\}$ .

Il vient alors, d'après [RS78, Theorem XIII.90],

$$\sigma(\mathbf{H}) = \bigcup_{p \geq 0} [\mathbf{E}_{\min}^p, \mathbf{E}_{\max}^p].$$

Pour résoudre les équations (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12), il faut prendre garde aux valeurs du paramètre semiclassique  $h$  telles que

$$h^{-\frac{2}{3}} \in \{\tilde{c}_q - \tilde{c}_r, \mid q > r \geq 0\} := Z.$$

Lorsque  $h^{-\frac{2}{3}} \notin Z$ , aucun des réels  $h^{-\frac{2}{3}}\tilde{c}_p$  n'est une solution en  $-\mathbf{X}$  d'une des équations (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12).

Dans la suite, nous supposons que  $h^{-\frac{2}{3}} \notin Z$ .

Notons que nos résultats restent vrais pour  $h^{-\frac{2}{3}} \in Z$ , mais que ceux-ci sont alors vides d'intérêt.

Sous l'hypothèse  $h^{-\frac{2}{3}} \notin Z$ , les bords des bandes spectrales de  $\mathbf{H}$  sont solutions des quatre équations :

$$\frac{v'}{u'}(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = \frac{v'}{u'}(-\mathbf{X}), \text{ pour } \mathbf{X} \notin \{\tilde{c}_{2j+1} - h^{-\frac{2}{3}}\}_{j \geq 0} \cup \{\tilde{c}_{2j+1}\}_{j \geq 0}, \quad (5.13)$$

$$\frac{v}{u}(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = \frac{v}{u}(-\mathbf{X}), \text{ pour } \mathbf{X} \notin \{\tilde{c}_{2j} - h^{-\frac{2}{3}}\}_{j \geq 0} \cup \{\tilde{c}_{2j}\}_{j \geq 0}, \quad (5.14)$$

$$\frac{v'}{u'}(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = \frac{v}{u}(-\mathbf{X}), \text{ pour } \mathbf{X} \notin \{\tilde{c}_{2j+1} - h^{-\frac{2}{3}}\}_{j \geq 0} \cup \{\tilde{c}_{2j}\}_{j \geq 0}, \quad (5.15)$$

$$\frac{v}{u}(-h^{-\frac{2}{3}} - \mathbf{X}) = \frac{v'}{u'}(-\mathbf{X}), \text{ pour } \mathbf{X} \notin \{\tilde{c}_{2j} - h^{-\frac{2}{3}}\}_{j \geq 0} \cup \{\tilde{c}_{2j+1}\}_{j \geq 0}. \quad (5.16)$$

Pour étudier les solutions de ces quatre équations, nous allons étudier le comportement des fonctions  $\frac{v}{u}$  et  $\frac{v'}{u'}$ . Posons

$$\alpha = -\frac{Ai(0)}{Ai'(0)} > 0.$$

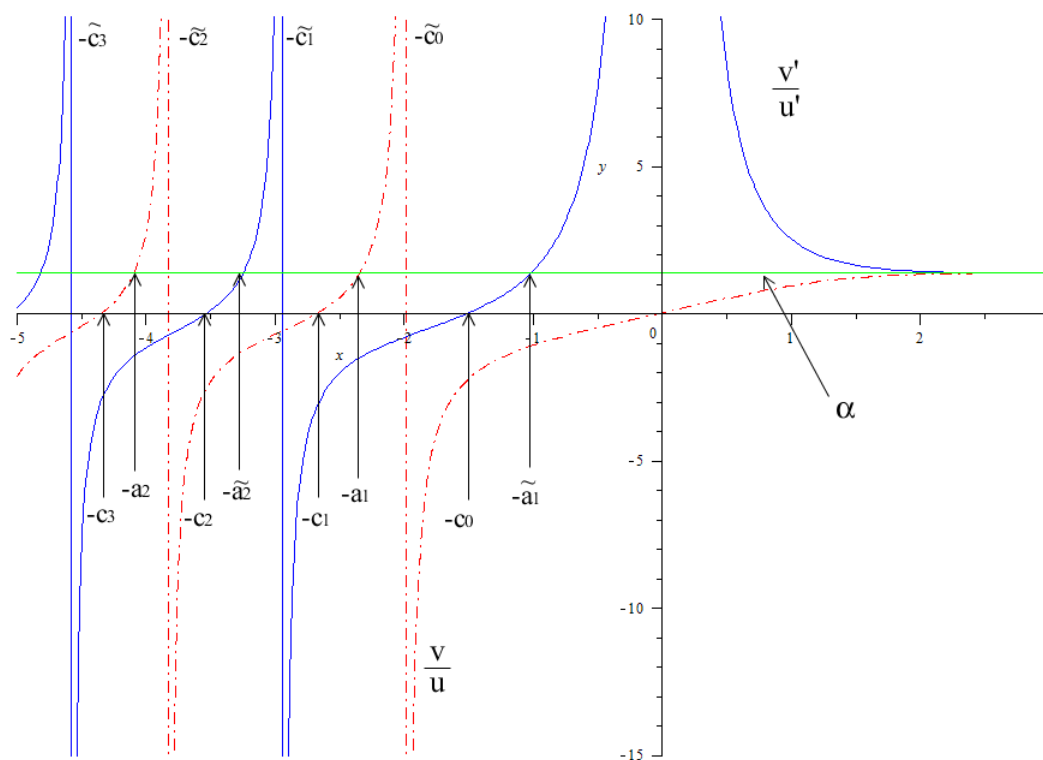


Fig. 6. Graphes de  $\frac{v}{u}$  et de  $\frac{v'}{u'}$ .

1. Sur tout intervalle  $(-\tilde{c}_{2j+2}, -\tilde{c}_{2j})$ , la fonction  $\frac{v}{u}$  est continue, strictement croissante et est une bijection de  $(-\tilde{c}_{2j+2}, -\tilde{c}_{2j})$  sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $(-\tilde{c}_0, +\infty)$ , elle est également continue, strictement croissante et est une bijection de  $(-\tilde{c}_0, +\infty)$  sur  $(-\infty, \alpha)$ .
2. Sur tout intervalle  $(-\tilde{c}_{2j+3}, -\tilde{c}_{2j+1})$ ,  $\frac{v'}{u'}$  est continue, strictement croissante et est une bijection de  $(-\tilde{c}_{2j+3}, -\tilde{c}_{2j+1})$  sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $(-\tilde{c}_1, 0)$  elle est également continue, strictement croissante et est une bijection de  $(-\tilde{c}_1, 0)$  sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $(0, +\infty)$  elle est enfin continue, strictement décroissante et est une bijection de  $(0, +\infty)$  sur  $(\alpha, +\infty)$ .

A la Figure 6, nous donnons le tracé des fonctions  $\frac{v}{u}$  et  $\frac{v'}{u'}$  et nous précisons où se trouvent les zéros de  $u, v, u', v'$  ainsi que ceux de  $A_i$  et de  $A_i'$ .

Sur la Figure 6, nous pouvons "résoudre" graphiquement les équations (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16). Il suffit de se donner un segment de longueur  $h^{-\frac{2}{3}}$  fixée, de le positionner parallèlement à l'axe des abscisses et de le faire glisser le long de l'axe des ordonnées jusqu'à ce que ses extrémités relient deux branches de courbes. Si l'on se restreint aux bandes spectrales situées dans l'image du potentiel  $\mathbf{V}$ , cela revient à prendre  $-\mathbf{X} \geq 0$  et l'extrémité droite du segment de longueur  $h^{-\frac{2}{3}}$  utilisé sera sur l'une des deux branches de courbes situées dans la partie de l'axe réel positif et situées de part et d'autre de la droite  $y = \alpha$ . Toute notre analyse ultérieure revient à donner un sens mathématique précis à cette résolution graphique.

Pour  $\mathbf{E} < -1$ , on montre que les équations (5.13), (5.14), (5.16) et (5.15) n'ont

pas de solutions. En effet, cela revient à avoir  $-\mathbf{X} > h^{-\frac{2}{3}}$  et dans ce cas on ne peut pas relier un point d'une des deux branches de courbe correspondant aux abscisses réelles positives à une branche de courbe correspondant aux abscisses réelles négatives avec un segment de longueur  $h^{-\frac{2}{3}}$ . Cela implique en particulier, compte tenu de la structure de spectre de bandes de  $\mathbf{H}$ ,

$$\forall h > 0, \sigma(\mathbf{H}) \subset [-1, +\infty). \quad (5.17)$$

Puis, afin de pouvoir localiser précisément les bords des bandes, il faut les identifier parmi les solutions des équations (5.13), (5.14), (5.16) et (5.15). Je vais laisser de côté la discussion sur l'identification du bas du spectre qui est un peu particulière comme cela est expliqué dans [BL18, Section 4.2]. Dans tous les cas, l'identification des bords des bandes spectrales nécessite l'introduction de fonctions auxiliaires définies ainsi : pour  $x \geq 0$  et  $z \in \mathbb{R}$ , on pose

$$f_x(z) = v'(x-z)u(x) - u'(x-z)v(x) = \pi (Bi'(x-z)Ai(x) - Ai'(x-z)Bi(x)) \quad (5.18)$$

et

$$g_x(z) = v(x-z)u(x) - u(x-z)v(x) = \pi (Bi(x-z)Ai(x) - Ai(x-z)Bi(x)). \quad (5.19)$$

Les fonctions  $f_x$  et  $g_x$  sont des solutions non nulles d'équations différentielles de la forme  $u'' = p(x)u$  qui satisfont aux hypothèses du théorème de Sturm (voir [CL55]), leurs zéros sont donc isolés sur la droite réelle. Nous notons

$$z_0(x) < z_2(x) < \dots < z_{2j}(x) < \dots$$

les zéros de  $f_x$  rangés dans l'ordre croissant. Puisque pour tout  $x$ , 0 est le premier zéro de  $g_x$ , on note

$$0 < z_1(x) < z_3(x) < \dots < z_{2j+1}(x) < \dots$$

les zéros de  $g_x$  rangés dans l'ordre croissant.

Soit maintenant  $j \geq 0$  un entier. Soit  $x \geq 0$  et soit  $\psi_{2j}(x)$  l'unique solution de l'équation d'inconnue  $z$ ,

$$\frac{v'}{u'}(z) = \frac{v}{u}(x), \quad z \in [-c_{2j}, -\tilde{a}_{j+1}). \quad (5.20)$$

De même, on note  $\psi_{2j+1}(x)$  l'unique solution de l'équation

$$\frac{v}{u}(z) = \frac{v}{u}(x), \quad z \in [-c_{2j+1}, -a_{j+1}). \quad (5.21)$$

Alors, à l'aide des variations de  $\frac{v}{u}$ , de  $\left(\frac{v'}{u'}\Big|_{[-c_{2j}, -\tilde{a}_{j+1})}\right)^{-1}$  et de  $\left(\frac{v'}{u'}\Big|_{[-c_{2j+1}, -a_{j+1})}\right)^{-1}$ , on démontre que pour tout  $k \geq 0$ , la fonction  $\psi_k$  est bien définie, continue et strictement croissante. Ces fonctions vont servir à identifier les solutions des équations reliant la branche de la courbe de  $\frac{v}{u}$  correspondant aux abscisses positives, et située donc sous la droite  $y = \alpha$ , aux autres branches. C'est le cas le plus difficile à étudier.

A l'aide des fonctions  $\psi_k$  on a le résultat suivant.

**Lemme 5.1.1.** *Soit  $k \geq 0$ . Alors, pour tout  $x \geq 0$ ,*

$$z_k(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad z_k(x) = x - \psi_k(x).$$

*En particulier,  $z_k$  est continue sur  $[0, +\infty)$ . De plus, pour tout  $k \geq 0$ , la fonction  $z_k$  est strictement croissante de  $[0, +\infty)$  dans  $[c_k, +\infty)$ .*

Ce lemme constitue a priori le résultat le plus technique de l'article [BL18]. Le point très difficile à prouver est le caractère croissant de la fonction  $z_k$  car elle est une différence de deux fonctions croissantes. Dans [BL18], la démonstration de cette croissance fait l'objet de deux annexes. L'idée pour étudier la croissance est d'utiliser le fait que ces fonctions  $z_k$  sont des zéros de solutions d'équations différentielles particulières et d'appliquer des lemmes de Sturm-Picone adaptés à notre problème. Ces lemmes de Sturm-Picone sont démontrés dans [BL18, Appendix B] et la longue démonstration de la monotonie de  $z_k$  fait l'objet de [BL18, Appendix C]. Il faut séparer les cas  $k$  pair et  $k$  impair et une preuve par récurrence se fait dans chaque cas en utilisant un lemme de Sturm-Picone différent dans à chaque fois.

Nous pouvons à présent passer au cas des solutions des équations reliant la branche de la courbe de  $\frac{u'}{v'}$  correspondant aux abscisses positives, et située donc au-dessus la droite  $y = \alpha$ , aux autres branches. Ce cas est plus simple. Si l'on note, pour  $j \geq 0$  et  $x \geq 0$ ,  $\psi^{2j}(x) \in (-a_{j+1}, -\tilde{c}_{2j}]$  l'unique solution de l'équation

$$\frac{v}{u}(z) = \frac{v'}{u'}(x), \quad z \in (-a_{j+1}, -\tilde{c}_{2j}] \quad (5.22)$$

et si l'on note  $\psi^{2j+1}(x) \in (-\tilde{a}_{j+2}, -\tilde{c}_{2j+1})$  l'unique solution de l'équation

$$\frac{v'}{u'}(z) = \frac{v'}{u'}(x), \quad z \in (-\tilde{a}_{j+2}, -\tilde{c}_{2j+1}), \quad (5.23)$$

on a le lemme suivant.

**Lemme 5.1.2.** *Pour tout  $k \geq 0$ , la fonction  $\psi^k$  est bien définie, continue et strictement décroissante sur  $[0, +\infty)$ .*

La fonction  $x \mapsto x - \psi^k(x)$  est strictement croissante puisque  $\psi^k$  est décroissante, la monotonie est donc nettement plus simple à obtenir que celle de  $z_k$  obtenue au Lemme 5.1.1.

Les fonctions  $z_k$  et  $x \mapsto x - \psi^k(x)$  nous permettent d'identifier et de localiser les solutions des équations (5.13), (5.14), (5.16) et (5.15).

**Proposition 5.1.3.** *Soit  $p \geq 0$  et supposons que  $h \leq \tilde{c}_p^{-\frac{3}{2}}$ . Alors, pour tout  $k \in \{0, \dots, p\}$ ,*

1. *si  $k = 2j$  est pair, (5.16) admet une unique solution  $\hat{\mathbf{X}}_{2j}$  vérifiant  $-\hat{\mathbf{X}}_{2j} \in [0, +\infty)$ ,  $-h^{-\frac{2}{3}} - \hat{\mathbf{X}}_{2j} \in (-a_{j+1}, -\tilde{c}_{2j}]$  et :*

$$-h^{-\frac{2}{3}} + \tilde{c}_{2j} \leq \hat{\mathbf{X}}_{2j} < -h^{-\frac{2}{3}} + a_{j+1}. \quad (5.24)$$

2. Si  $k = 2j + 1$  est impair, (5.13) admet une unique solution  $\hat{\mathbf{X}}_{2j+1}$  vérifiant  $-\hat{\mathbf{X}}_{2j+1} \in [0, +\infty)$ ,  $-h^{-\frac{2}{3}} - \hat{\mathbf{X}}_{2j+1} \in (-\tilde{a}_{j+2}, -\tilde{c}_{2j+1}]$  et :

$$-h^{-\frac{2}{3}} + \tilde{c}_{2j+1} \leq \hat{\mathbf{X}}_{2j+1} < -h^{-\frac{2}{3}} + \tilde{a}_{j+2}. \quad (5.25)$$

D'après le Lemme 5.1.2, pour tout  $k \geq 0$ , la fonction  $x \mapsto x - \psi^k(x)$  est strictement croissante et est une bijection continue de  $[0, +\infty)$  sur  $[\tilde{c}_k, +\infty)$ . Donc, si  $h^{-\frac{2}{3}} \geq \tilde{c}_p \geq \tilde{c}_k$ , il existe un unique  $x^k \geq 0$  tel que  $h^{-\frac{2}{3}} = x^k - \psi^k(x^k)$ . Posons  $\hat{\mathbf{X}}_k = -x^k$ . Alors, si  $k = 2j$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{2j}$  est l'unique solution de (5.16) telle que  $-\hat{\mathbf{X}}_{2j} \in [0, +\infty)$  et  $-h^{-\frac{2}{3}} - \hat{\mathbf{X}}_{2j} \in (-a_{j+1}, -\tilde{c}_{2j}]$ . De plus,

$$-a_{j+1} < -\hat{\mathbf{X}}_k - h^{-\frac{2}{3}} \leq -\tilde{c}_k < 0 \leq -\hat{\mathbf{X}}_k,$$

et on obtient (5.24). Le cas impair se traite de même.

Nous avons également le résultat suivant.

**Proposition 5.1.4.** *Supposons que  $h \leq c_p^{-\frac{3}{2}}$ . Alors, pour tout  $k \in \{0, \dots, p\}$ ,*

1. si  $k = 2j$  est pair, (5.15) admet une unique solution  $\check{\mathbf{X}}_{2j}$  vérifiant  $-\check{\mathbf{X}}_{2j} \in [0, +\infty)$ ,  $-h^{-\frac{2}{3}} - \check{\mathbf{X}}_{2j} \in [c_{2j}, -\tilde{a}_{j+1})$  et :

$$-h^{-\frac{2}{3}} + \tilde{a}_{j+1} < \check{\mathbf{X}}_{2j} \leq -h^{-\frac{2}{3}} + c_{2j}. \quad (5.26)$$

2. Si  $k = 2j + 1$  est impair, (5.14) admet une unique solution  $\check{\mathbf{X}}_{2j+1}$  vérifiant  $-\check{\mathbf{X}}_{2j+1} \in [0, +\infty)$ ,  $-h^{-\frac{2}{3}} - \check{\mathbf{X}}_{2j+1} \in [c_{2j+1}, -a_{j+1})$  et :

$$-h^{-\frac{2}{3}} + a_{j+1} < \check{\mathbf{X}}_{2j+1} \leq -h^{-\frac{2}{3}} + c_{2j+1}. \quad (5.27)$$

Soit  $k \in \{0, \dots, p\}$ . Puisque  $h \leq c_p^{-\frac{3}{2}}$ , on a  $h^{-\frac{2}{3}} \in [c_k, +\infty)$ . D'après le Lemme 5.1.1,  $z_k$  est continue et strictement croissante, donc il existe un unique réel  $x_k \geq 0$  tel que  $h^{-\frac{2}{3}} = z_k(x_k)$ . Posons  $\check{\mathbf{X}}_k = -x_k$ . Alors,  $\check{\mathbf{X}}_{2j}$  est l'unique solution de (5.15) telle que  $-\check{\mathbf{X}}_{2j} \in [0, +\infty)$  et  $-h^{-\frac{2}{3}} - \check{\mathbf{X}}_{2j} \in [c_{2j}, -\tilde{a}_{j+1})$ . De plus,

$$-c_k \leq -\check{\mathbf{X}}_k - h^{-\frac{2}{3}} < -\tilde{a}_{j+1}$$

et on obtient (5.26). Le cas impair se traite de même.

Des propositions 5.1.3 et 5.1.4 ainsi que de l'inégalité,  $c_k < \tilde{c}_k$  pour tout  $k \geq 0$  (dont on déduit  $\check{\mathbf{X}}_k < \hat{\mathbf{X}}_k$ ), on obtient le résultat d'identification des bords des bandes ainsi qu'une première estimation des trous spectraux de  $\mathbf{H}$ .

**Proposition 5.1.5.** *Soit  $p \geq 0$ . Supposons que  $h \leq \tilde{c}_p^{-\frac{3}{2}}$ .*

1. Pour tout  $k \in \{0, \dots, p\}$ ,  $\mathbf{E}_{\min}^{k+1} = h^{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{X}}_k$  et  $\mathbf{E}_{\max}^k = h^{\frac{2}{3}} \check{\mathbf{X}}_k$ .

2. Nous avons les estimées suivantes sur les trous spectraux :

$$\forall j \geq 1, \quad 0 < (\tilde{c}_{2j-1} - c_{2j-1})h^{\frac{2}{3}} \leq \mathbf{E}_{\min}^{2j} - \mathbf{E}_{\max}^{2j-1} \leq (\tilde{a}_{j+1} - a_j)h^{\frac{2}{3}}$$

et

$$\forall j \geq 0, \quad 0 < (\tilde{c}_{2j} - c_{2j})h^{\frac{2}{3}} \leq \mathbf{E}_{\min}^{2j+1} - \mathbf{E}_{\max}^{2j} \leq (a_{j+1} - \tilde{a}_{j+1})h^{\frac{2}{3}}.$$

en particulier, tous les trous spectraux dans  $\sigma(\mathbf{H})$  sont non vides.

Nous savons à présent de quelles équations sont solutions les différents bords des bandes spectrales. Cela permet d'obtenir dans un premier temps une image dynamique de l'entrée des bandes spectrales dans l'image du potentiel  $\mathbf{V}$  puis dans un second temps, des développements asymptotiques des bords des bandes spectrales en fonction du paramètre semiclassique.

### 5.1.3 Comptage des bandes spectrales dans l'image du potentiel

L'un de nos objectifs est d'obtenir une image dynamique de l'entrée des bandes spectrales renormalisées dans l'intervalle  $[-1, 0]$ , image du potentiel  $\mathbf{V}$ . Nous allons montrer que dès que le paramètre semiclassique  $h$  passe sous des valeurs données explicitement en fonction des zéros  $c_p$  et  $\tilde{c}_p$ , les bords des bandes entrent dans l'image du potentiel.

Tout d'abord, à l'aide d'une étude de fonction légèrement différente de celles faites pour  $\psi^k$  ou  $z_k$ , nous avons obtenus dans [BL18, Theorem 2.2] l'estimation suivante pour  $\mathbf{E}_{\min}^0$  :

$$\forall h > 0, \quad -1 < \mathbf{E}_{\min}^0 < \min\left(\frac{1}{2}, -1 + \tilde{a}_1 h^{\frac{2}{3}}\right). \quad (5.28)$$

Puis, lorsque  $h \geq c_0^{-\frac{3}{2}}$ , on démontre dans [BL18, Proposition 4.4.] que  $\mathbf{E}_{\max}^0 \geq 0$  et

$$\left[\min\left(-\frac{1}{2}, -1 + \tilde{a}_1 h^{\frac{2}{3}}\right), 0\right] \subset \left[\mathbf{E}_{\min}^0, \mathbf{E}_{\max}^0\right]. \quad (5.29)$$

Enfin nous démontrons dans [BL18, Proposition 4.2] que pour tout  $h < c_0^{-\frac{3}{2}}$ ,

$$-1 + \tilde{a}_1 h^{\frac{2}{3}} < \mathbf{E}_{\max}^0 < -1 + c_0 h^{\frac{2}{3}}. \quad (5.30)$$

Le résultat suivant donne l'initialisation du comptage des bandes spectrales incluses dans l'image de  $\mathbf{V}$ . C'est une conséquence directe de (5.28), de (5.29) et de (5.30).

**Théorème 5.1.6.** *Pour  $h \geq c_0^{-\frac{3}{2}}$ , il n'y a pas de trou spectral de  $\mathbf{H}$  dans  $[-1, 0]$ . Le premier trou spectral intersecte  $[-1, 0)$  dès que  $0 < h < c_0^{-\frac{3}{2}}$ .*

La valeur du paramètre semiclassique  $h = c_0^{-\frac{3}{2}}$  peut être interprétée comme valeur critique entre le régime semiclassique et le régime classique pour l'opérateur  $\mathbf{H}$ . Cette valeur est celle au-dessus de laquelle la première bande spectrale dépasse la valeur maximale du potentiel et où il est donc possible qu'il y ait diffusion de l'électron d'un puits de potentiel à un autre au sens classique. En-dessous de cette valeur, le passage d'un puits à un autre met en jeu l'effet tunnel puisqu'un trou spectral au moins intersecte l'image du potentiel.

On définit ensuite  $k_0 \in \mathbb{N}$  l'unique entier tel que

$$c_{k_0} < h^{-\frac{2}{3}} < \tilde{c}_{k_0} \quad \text{ou} \quad \tilde{c}_{k_0} \leq h^{-\frac{2}{3}} < c_{k_0+1} \quad \text{lorsque} \quad h < c_0^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.31)$$

Si  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière d'un nombre réel  $x$ ,  $k_0 = \lfloor \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} \rfloor$  ou  $k_0 = \lfloor \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} \rfloor - 1$ .

On démontre alors, compte tenu des Propositions 5.1.3 et 5.1.4, le résultat suivant de comptage des bandes spectrales renormalisées dans l'image du potentiel.

**Théorème 5.1.7.** *Soit  $h < c_0^{-\frac{3}{2}}$ . Les  $k_0 + 1$  premières bandes spectrales de  $\mathbf{H}$  sont incluses dans l'image de  $\mathbf{V}$ .*

De la démonstration du Théorème 5.1.7, nous avons déduit dans [BL18, Proposition 2.1] que le nombre de trous spectraux qui intersectent l'image du potentiel  $\mathbf{V}$  augmente d'un à chaque fois que le paramètre semiclassique passe sous l'un des  $c_p^{-\frac{3}{2}}$ ,  $p \geq 0$ . Pour compléter le résultat du Théorème 5.1.7, nous observons que les racines des solutions canoniques de l'équation d'Airy et de leurs dérivées caractérisent les valeurs du paramètre semiclassique  $h$  qui marquent soit l'entrée d'une bande spectrale dans l'image du potentiel, soit le moment où elle y est complètement incluse et où le trou spectral suivant entre dans l'image du potentiel.

**Proposition 5.1.8.** *Il existe une unique bande spectrale de  $\mathbf{H}$  dont l'un des deux bords est nul si et seulement si  $h \in \{c_p^{-\frac{3}{2}}, \tilde{c}_p^{-\frac{3}{2}}\}_{p \geq 0}$ .*

Nous avons également obtenu des résultats sur le comportement de la première bande spectrale lorsque le paramètre semiclassique tend vers l'infini donc dans la limite classique (voir [BL18, Theorem 2.3]).

### 5.1.4 Estimations uniformes des largeurs des bandes spectrales et des trous spectraux

La Proposition 5.1.5 nous permet d'identifier les bords des bandes spectrales parmi les solutions de (5.16), (5.15), (5.13) et (5.14). Par ailleurs, dans l'Annexe A de [BL18], nous démontrons des estimées uniformes pour les fonctions  $\frac{u}{v}$ ,  $\frac{u'}{v'}$ ,  $\frac{v}{u}$ ,  $\frac{v'}{u'}$  ainsi que leurs dérivées. Pour cela nous nous appuyons sur diverses études de fonctions ainsi que sur les développements asymptotiques des fonctions d'Airy classiques  $Ai$

et  $B_i$  que l'on trouve dans [ASR88, Section 10.4]. A l'aide de ces estimations uniformes, d'un emploi de la formule de Taylor, d'une identité remarquable sur les réels et d'une procédure d'estimation où l'on injecte des premières estimations simples dans les estimations uniformes pour les améliorer (procédure de type "bootstrap"), nous sommes parvenus à démontrer les estimées uniformes suivantes pour les bords des bandes spectrales de  $\mathbf{H}$ . Pour les détails de la preuve nous renvoyons aux démonstrations de [BL18, Theorem 2.2] et de [BL18, Proposition 6.1].

**Théorème 5.1.9.** *Soit  $j \geq 0$ .*

1. *Il existe une constante universelle  $M_{2j} > 0$  telle que pour tout  $h \in (0, \tilde{a}_{j+1}^{-\frac{3}{2}})$ ,*

$$\left| \mathbf{E}_{\min}^{2j} - \left( -1 + \tilde{a}_{j+1} h^{\frac{2}{3}} - \alpha \sqrt{3} \frac{(u'(-\tilde{a}_{j+1}))^2}{\tilde{a}_{j+1}} h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \leq M_{2j} h^{\frac{5}{3}} (1 - \tilde{a}_{j+1} h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \quad (5.32)$$

*et il existe une constante universelle  $\tilde{M}_{2j} > 0$  telle que pour tout  $h \in (0, c_{2j}^{-\frac{3}{2}}]$ ,*

$$\left| \mathbf{E}_{\max}^{2j} - \left( -1 + \tilde{a}_{j+1} h^{\frac{2}{3}} + \alpha \sqrt{3} \frac{(u'(-\tilde{a}_{j+1}))^2}{\tilde{a}_{j+1}} h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \leq \tilde{M}_{2j} h^{\frac{5}{3}} (1 - \tilde{a}_{j+1} h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.33)$$

2. *Il existe une constante universelle  $M_{2j+1} > 0$  telle que pour tout  $h \in (0, a_{j+1}^{-\frac{3}{2}})$ ,*

$$\left| \mathbf{E}_{\min}^{2j+1} - \left( -1 + a_{j+1} h^{\frac{2}{3}} - \alpha \sqrt{3} (u(-a_{j+1}))^2 h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - a_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \leq M_{2j+1} h^{\frac{5}{3}} (1 - a_{j+1} h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - a_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \quad (5.34)$$

*et il existe une constante universelle  $\tilde{M}_{2j+1} > 0$  telle que pour tout  $h \in (0, c_{2j+1}^{-\frac{3}{2}}]$ ,*

$$\left| \mathbf{E}_{\max}^{2j+1} - \left( -1 + a_{j+1} h^{\frac{2}{3}} + \alpha \sqrt{3} (u(-a_{j+1}))^2 h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - a_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \leq \tilde{M}_{2j+1} h^{\frac{5}{3}} (1 - a_{j+1} h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - a_{j+1})^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.35)$$

3. *Soit  $h \in (0, c_1^{-\frac{3}{2}}]$ . Pour tout  $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} \rfloor\}$ , (5.32) et (5.33) sont vérifiées lorsque  $p = 2j$  est pair et (5.34) et (5.35) sont vérifiées lorsque  $p = 2j + 1$  est impair.*

Le dernier point du Théorème 5.1.9 est une conséquence directe du décompte des bandes spectrales dans l'image du potentiel  $\mathbf{V}$  obtenu au Théorème 5.1.7 et du fait que la suite  $(c_p^{-\frac{3}{2}})_{p \geq 0}$  est strictement décroissante.



La démonstration du Théorème 5.1.9 est l'autre résultat, après celui de la croissance des fonctions  $z_k$ , qui aura nécessité le plus de travail dans [BL18]. Cela vient du fait que l'on a cherché à obtenir des estimations mettant en jeu des constantes explicites  $M_k$  et  $\tilde{M}_k$  tout en autorisant le paramètre semiclassique à s'approcher des bords des intervalles de validité des estimations définis à l'aides des zéros des solutions de l'équation d'Airy. Si nous n'avons pas montré formellement que les intervalles de validité obtenus sont optimaux ainsi que les constantes  $M_k$  et  $\tilde{M}_k$ , les simulations numériques faites pour obtenir ces constantes nous amène à penser que ces constantes "explorent" lorsque l'on dépasse les bords ouverts de validité  $\tilde{a}_{j+1}^{-3/2}$  et  $a_{j+1}^{-3/2}$ . Ainsi les intervalles de validité semblent être optimaux.

Des résultats pour  $h$  arbitrairement petit au lieu de  $h$  dans un intervalle donné a priori auraient été beaucoup plus simples à obtenir car ils n'auraient pas nécessité entre autre tout le travail sur les estimations uniformes fait dans [BL18, Appendix A], ni l'optimisation faite sur les constantes à chaque étape dans la démonstration de [BL18, Theorem 2.2].

A partir des estimées uniformes sur les bords des bandes obtenues au Théorème 5.1.9, on obtient des estimées uniformes sur les longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux qui sont inclus dans l'image du potentiel  $\mathbf{V}$ .

Soit  $p \geq 0$  un entier. On note  $\delta_p = \mathbf{E}_{\max}^p - \mathbf{E}_{\min}^p$  la largeur de la  $p$ -ième bande spectrale de  $\mathbf{H}$  et par  $\gamma_p = \mathbf{E}_{\min}^{p+1} - \mathbf{E}_{\max}^p$  la largeur du  $p$ -ième trou spectral de  $\mathbf{H}$ . Nous avons alors un premier résultat d'estimation des  $\delta_p$  dans le régime semiclassique ainsi que du comportement, dans la limite semiclassique, des bandes spectrales.

**Théorème 5.1.10.** 1. Soit  $p \geq 0$ . La  $p$ -ième bande spectrale translatée et renormalisée ,

$$[h^{-\frac{2}{3}}(1 + \mathbf{E}_{\min}^p), h^{-\frac{2}{3}}(1 + \mathbf{E}_{\max}^p)]$$

tends vers le singleton  $\{\mathfrak{a}_p\}$  lorsque  $h$  tends vers 0.

2. Il existe une constante universelle  $K_{2j} > 0$  telle que pour tout  $h \in (0, c_{2j}^{-\frac{3}{2}}]$ ,

$$\left| \delta_{2j} - 2\alpha\sqrt{3} \frac{(u'(-\mathfrak{a}_{2j}))^2}{\mathfrak{a}_{2j}} h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \mathfrak{a}_{2j})^{\frac{3}{2}}} \right| \leq K_{2j} h^{\frac{5}{3}} (1 - \mathfrak{a}_{2j} h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \mathfrak{a}_{2j})^{\frac{3}{2}}} \quad (5.36)$$

lorsque  $p = 2j$  est pair et il existe une constante universelle  $K_{2j+1} > 0$  telle que pour tout  $h \in (0, c_{2j+1}^{-\frac{3}{2}}]$ ,

$$\left| \delta_{2j+1} - 2\alpha\sqrt{3} (u(-\mathfrak{a}_{2j+1}))^2 h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \mathfrak{a}_{2j+1})^{\frac{3}{2}}} \right| \leq K_{2j+1} h^{\frac{5}{3}} (1 - \mathfrak{a}_{2j+1} h^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - \mathfrak{a}_{2j+1})^{\frac{3}{2}}} \quad (5.37)$$

lorsque  $p = 2j + 1$  est impair.

3. Soit  $h \in (0, c_0^{-\frac{3}{2}}]$ . Pour tout  $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} \rfloor\}$ , (5.36) est satisfaite lorsque  $p = 2j$  est pair et (5.37) est satisfaite lorsque  $p = 2j + 1$  est impair.

Des formules explicites des constantes universelles  $K_{2j}$  et  $K_{2j+1}$  sont déduites de celles pour  $M_{2j}$ ,  $\tilde{M}_{2j}$ ,  $M_{2j+1}$  et  $\tilde{M}_{2j+1}$  données dans la preuve de [BL18, Proposition 6.1]. Encore une fois, nous ne démontrons pas que ces constantes sont optimales tout comme nous ne démontrons pas que les intervalles de validité de ces estimées en  $h$  sont optimaux. Toutefois, des calculs numériques non publiés nous conduisent à penser que les intervalles de validité le sont.

Le premier point du Théorème 5.1.10 montre la convergence des bandes spectrales de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique vers les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger dont le potentiel est un puits linéaire donné par la fonction  $x \mapsto |x|$ . Notons également que pour cet opérateur, l'espace propre associé à la valeur propre  $a_{2j}$  est engendré par  $x \mapsto Ai(|x| - a_{2j})$  et l'espace propre associé à la valeur propre  $a_{2j+1}$  est engendré par  $x \mapsto \text{sign}(x) \cdot Ai'(|x| - a_{2j+1})$ .

En utilisant la formule de Taylor pour la fonction exponentielle, l'estimée (5.36) implique qu'il existe une constante universelle  $K'_{2j} > 0$  telle que, pour tout  $h \in (0, c_{2j}^{-\frac{3}{2}}]$ ,

$$\left| \delta_{2j} - 2\alpha\sqrt{3} \frac{(u'(-a_{2j}))^2}{a_{2j}} h^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}h^{-1} + 2a_{2j}h^{-\frac{1}{3}}} \right| \leq K'_{2j} h e^{-\frac{4}{3}h^{-1} + 2a_{2j}h^{-\frac{1}{3}}} \quad (5.38)$$

et nous avons une estimée similaire lorsque  $p$  est impair. Dans (5.38), le facteur  $\frac{4}{3}$  devant  $h^{-1}$  est la distance d'Agmon entre deux minima consécutifs du potentiel  $V$ . Ainsi, par rapport à un potentiel à double puits quadratique par exemple, (5.38) contient un terme supplémentaire égal à  $2a_{2j}h^{-\frac{1}{3}}$  pour l'effet tunnel.

Enfin, nous pouvons comparer nos largeurs de bandes obtenues pour un potentiel qui n'est pas  $C^1$  avec celles obtenues pour un potentiel  $C^2$ . Nous constatons que les bandes obtenues pour l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique sont plus larges que celles obtenues par exemple dans [Har79, Theorem 1.1] qui sont de largeur proportionnelle à un terme exponentiel égal à

$$h e^{-\frac{4}{3}h^{-1}(1-(2p+1)h)^{\frac{3}{2}}} \left( 1 + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{4}}\right) \right). \quad (5.39)$$

Nous nous attendions à cette différence de largeur pour les bandes spectrales, puisque a priori, la largeur des bandes dépend fortement de la régularité du potentiel.

Du Théorème 5.1.9, nous déduisons également des estimées sur les  $\gamma_p$ . En nous restreignant au premier ordre, nous obtenons que la largeur des trous spectraux est proche de la différence entre deux valeurs propres consécutives de l'opérateur de Schrödinger dont le potentiel est un puits linéaire, donné par la fonction  $x \mapsto |x|$ , à un facteur  $h^{\frac{2}{3}}$  près.

**Théorème 5.1.11.** 1. Pour tout  $p \geq 0$ , il existe une constante universelle  $\tilde{K}_p > 0$  telle que, pour tout  $h \in (0, a_{p+1}^{-\frac{3}{2}})$ ,

$$\left| \gamma_p - (a_{p+1} - a_p)h^{\frac{2}{3}} \right| \leq \tilde{K}_p e^{-\frac{4}{3}(h^{-\frac{2}{3}} - a_{p+1})^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.40)$$

2. Soit  $h \in (0, c_1^{-\frac{3}{2}}]$ . Pour tout  $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} \rfloor - 1\}$ , (5.40) est valide.

Remarquons que pour tout  $h > 0$ ,  $h \leq a_{\lfloor \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} \rfloor}^{-\frac{3}{2}}$ , ce qui justifie le second point du Théorème (5.1.11).

Notons aussi que dans [BL18, Proposition 6.2] nous démontrons des estimations précises pour les largeurs des trous spectraux, avec un terme de développement supplémentaire issu des estimations des bords de bandes obtenues au Théorème 5.1.9.

Pour tout  $\beta > 1$ , l'inégalité (5.40) montre que  $(p^\beta \gamma_p)_{p \geq 2}$  n'est pas borné lorsque  $h$  tends vers 0. Cela est attendu puisque d'après les résultats de Hochstadt, cela impliquerai que  $\mathbf{V}$  serait une fonction de classe  $C^\infty$  (voir [Hoc61]). En allant plus loin, une largeur exponentiellement petite des trous spectraux est caractéristique de l'analyticité du potentiel  $\mathbf{V}$  (voir [Tru77]), ce dont nous sommes bien loin avec notre potentiel qui n'est même pas de classe  $C^1$ .

## 5.2 Densité d' tats intégrée de l'opérateur d'Airy - Schrödinger périodique

Dans cette section, je présente les résultats obtenus dans [BL21] ainsi que les idées de certaines démonstrations.

Rappelons la définition de l'opérateur d'Airy-Schrödinger    $2N + 1$  puits pour  $N \geq 0$  un entier naturel. Nous considérons  $2L_0 \in \mathbb{R}_+^*$  une longueur caractéristique modélisant la distance entre deux ions dans un réseau unidimensionnel formé de  $2N + 1$  ions. Le mouvement des électrons dans ce réseau fini peut être étudié au travers de l'opérateur de Schrödinger  $H_{2N+1}$  de domaine

$$D(H_{2N+1}) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid \psi(-(2N + 1)L_0) = \psi((2N + 1)L_0)\}$$

et défini par

$$H_{2N+1} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{2N+1}, \quad (5.41)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite,  $m$  la masse d'un électron et  $V_{2N+1}$  est l'opérateur de multiplication par :

$$V_{2N+1} : x \mapsto \sum_{k=-N}^N V(x - 2kL_0) \quad (5.42)$$

où  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \times \left( \frac{|x|}{L_0} - 1 \right) & \text{si } x \in [-L_0, L_0] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (5.43)$$

$V_0 \in \mathbb{R}_+^*$  étant un potentiel de référence. Notons que  $V_{2N+1}$  est une fonction paire, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sauf en ses extrema.

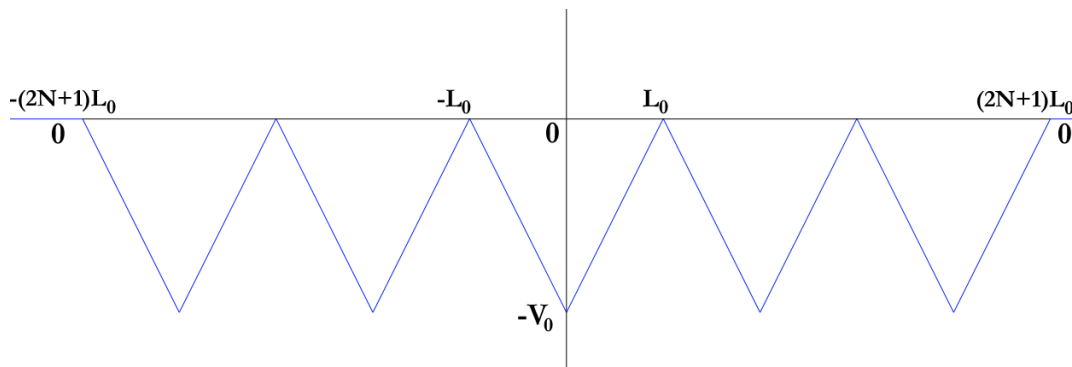


Fig. 7. Le potentiel  $V_{2N+1}$  pour  $N = 2$ .

Afin de décrire le spectre de l'opérateur  $H_{2N+1}$ , nous considérons l'équation :

$$H_{2N+1}\psi = E\psi, \quad E \in \mathbb{R}, \quad \psi \in D(H_{2N+1}). \quad (5.44)$$

Après une mise à l'échelle et une translation, l'équation (5.44) est équivalente à l'équation d'Airy sur chaque intervalle  $]kL_0, (k+1)L_0[$ , pour  $k \in \{-(2N+1), \dots, 2N\}$ . Ainsi, tout comme dans [BL18], nous considérons  $u$  et  $v$  les solutions canoniques de l'équation d'Airy qui satisfont :

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1.$$

Nous utilisons à nouveau les notations  $c_p$  et  $\tilde{c}_p$  pour désigner leurs zéros ainsi que ceux de leurs dérivées.

Nous introduisons alors notre paramètre semiclassique pour l'équation (5.44).

$$c = \left( \frac{2mL_0^2 V_0}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.45)$$

Ce paramètre semiclassique est relié au paramètre semiclassique  $h$  que nous avons introduit à la Section 5.1.1 par la relation

$$c = h^{-\frac{2}{3}}. \quad (5.46)$$

Comme nous allons le voir dans l'équation (5.50), ce paramètre semiclassique correspond à la hauteur de la barrière de potentiel. Dans ce cas, la limite semiclassique est donnée par  $c$  qui tends vers  $+\infty$ .

Dans la suite de notre analyse, en particulier pour le résultat de comptage des valeurs propres de  $H_{2N+1}$  dans les bandes spectrales de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique, il est plus aisé de travailler avec ce paramètre semiclassique plutôt que de travailler avec  $h$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le premier théorème démontré dans [BL21]. Celui-ci décrit le spectre de  $H_{2N+1}$  et le compare au spectre de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique  $H$  situé dans l'image du potentiel, l'intervalle  $[-V_0, 0]$ .

**Théorème 5.2.1.** 1. Le spectre de  $H_{2N+1}$  est égal à son spectre ponctuel et

$$\sigma(H_{2N+1}) \cap [-V_0, 0] \subset \sigma(H) \cap [-V_0, 0]. \quad (5.47)$$

2. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout  $c \geq c_p$  et tout  $i \in \{0, \dots, p\}$ ,

$$\# \left( \sigma(H_{2N+1}) \cap [E_{\min}^i, E_{\max}^i] \right) = 2N + 2. \quad (5.48)$$

Ainsi, toutes les valeurs propres de  $H_{2N+1}$  sont dans les bandes spectrales de  $H$ . En particulier, aucune valeur propre de  $H_{2N+1}$  ne se trouve dans les trous spectraux de  $H$ .

Rappelons également que pour  $c \geq c_p$ , toutes les bandes spectrales  $[E_{\min}^i, E_{\max}^i]$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  sont incluses dans l'intervalle  $[-V_0, 0]$  et ce d'après le Théorème 5.1.7.

Tout comme dans [BL18], les résultats du Théorème 5.2.1 sont énoncés pour des valeurs du paramètre semiclassique  $c$  plus grand qu'une constante explicite. Nous avons accès à des informations précises sur les  $p$  premières bandes spectrales dès lors que  $c \geq c_p$ . Nous faisons remarquer que les estimées nécessaires à la preuve du Théorème 5.2.1 deviennent très difficiles à obtenir lorsque  $c$  est proche de  $c_p$  alors qu'elles sont relativement simples à obtenir si l'on s'octroie la possibilité de prendre  $c$  arbitrairement grand. Cela se voit très bien dans la démonstration du Lemme 5.2.5 dont on présentera les idées plus bas et qui est faite en détails dans [BL21, Appendix B].

Nous passons maintenant à la présentation du second résultat de [BL21], une formule exacte pour la densité d'états intégrée de  $H$ . Nous rappelons la définition donnée dans la Section d'introduction 1.2.4. Puisque la définition du domaine de  $H_{2N+1}$  inclut les conditions de Dirichlet en  $\pm(2N+1)L_0$ , nous pouvons prendre comme définition de la densité d'états intégrée associée à l'opérateur  $H$  :

La densité d'états intégrée associée à l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $E \mapsto I(E)$ , où  $I(E)$ , pour  $E \in \mathbb{R}$ , est défini par

$$I(E) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2N+1)L_0} \#\{\lambda \leq E; \lambda \in \sigma(H_{2N+1})\}. \quad (5.49)$$

Pour déterminer l'expression de  $I(E)$ , il nous faut localiser et compter précisément les valeurs propres de  $H_{2N+1}$ .

Pour résoudre l'équation (5.44), nous changeons d'échelle en posant  $\mathbf{E} = c\frac{E}{V_0}$  et en définissant  $\mathbf{V}_{2N+1}$ , l'opérateur de multiplication par le potentiel redimensionné  $\mathbf{V}_{2N+1} : z \mapsto \sum_{k=-N}^N \mathbf{V}(z - 2k)$  où

$$\mathbf{V}(z) = \begin{cases} |z| - 1 & \text{si } z \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous posons également, pour tout  $p \geq 0$ ,  $\mathbf{E}_{\min}^p = c\frac{E_{\min}^p}{V_0}$  et  $\mathbf{E}_{\max}^p = c\frac{E_{\max}^p}{V_0}$ . Avec  $x = L_0z$  dans (5.44), cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{2N+1}\phi &:= -\frac{d^2}{dz^2}\phi + c^3\mathbf{V}_{2N+1}\phi = c^2\mathbf{E}\phi, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{R}, \\ \phi &\in H^2(\mathbb{R}), \quad \phi(-(2N+1)) = \phi(2N+1) \end{aligned} \quad (5.50)$$

qui définit l'opérateur redimensionné  $\mathbf{H}_{2N+1}$ . On définit de même l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique redimensionné  $\mathbf{H}$  dont les bandes spectrales sont les intervalles  $[\mathbf{E}_{\min}^p, \mathbf{E}_{\max}^p]$ .

Dans la suite, nous allons nous restreindre aux énergies  $\mathbf{E}$  dans l'image du potentiel de  $c\mathbf{V}_{2N+1}$ , l'intervalle  $[-c, 0]$ . En effet, par les résultats de [BL18] et en particulier le Théorème 5.1.9, nous avons une connaissance fine des bandes spectrales de  $\mathbf{H}$  dans cet intervalle.

Pour exprimer la densité d'états intégrée de  $\mathbf{H}$ , il nous faut introduire des notations supplémentaires. Soit  $\mathbf{E} \in [-c, 0]$ . Notons par  $U$  et  $V$  les fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$U(x) = v'(-c - \mathbf{E})u(x) - u'(-c - \mathbf{E})v(x) \quad (5.51)$$

et

$$V(x) = u(-c - \mathbf{E})v(x) - v(-c - \mathbf{E})u(x). \quad (5.52)$$

En particulier, le wronskien de  $U$  et  $V$  est égal à 1.

Ces fonctions  $U$  et  $V$  apparaissent dans les équations (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12) qui caractérisent les bords des bandes spectrales de  $\mathbf{H}$ . En effet, les bords des bandes spectrales de  $\mathbf{H}$  sont exactement les zéros de  $U, V$  et de leurs dérivées. Ainsi, le signe de  $UU'VV'$  change à chaque bord de bande spectral et uniquement en ces points, ce qui justifie l'introduction de la fonction suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \sigma(\mathbf{H}) & \rightarrow [0, \pi] \\ \mathbf{E} & \mapsto \text{Arg}((U'V + UV' + 2i\sqrt{-UU'VV'})(-\mathbf{E})) \end{cases} \quad (5.53)$$

où  $\text{Arg} : \mathbb{C} \rightarrow (-\pi, \pi]$  est la détermination principale de la fonction argument sur  $\mathbb{C}$ . Notons également par  $\varphi$  le prolongement de  $\varphi$  par 0 à  $\mathbb{R}$ . La valeur 0 de ce prolongement est cohérente avec les signes de  $UV'$  et  $U'V$  dans les bandes et trous spectraux. Ces signes sont précisés plus loin à la Table 5.1.

Nous pouvons à présent énoncer le second résultat principal de [BL21], qui nous donne, dans le régime semiclassique, une expression de la densité d'états intégrée de  $\mathbf{H}$  en fonction de  $\varphi$ .

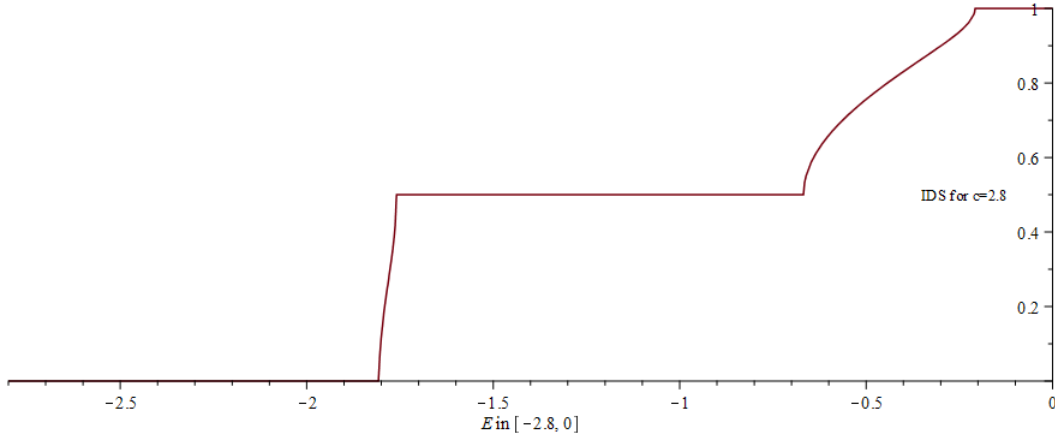


Fig. 8. La densité d'états intégrée sur  $[-c, 0]$  pour  $c = 2.8$ .

**Théorème 5.2.2.** *Supposons que  $c \geq c_0$ . Pour tout  $\mathbf{E} \in [-c, 0]$ , la densité d'états intégrée associée à  $\mathbf{H}$  est donnée par*

$$\mathbf{I}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}p(\mathbf{E}) + \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\varphi(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{1}_{[E_{\min}^{p(\mathbf{E})}, E_{\max}^{p(\mathbf{E})}]}(\mathbf{E}) & \text{si } p(\mathbf{E}) \text{ est pair} \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\varphi(\mathbf{E})\right) \cdot \mathbf{1}_{[E_{\min}^{p(\mathbf{E})}, E_{\max}^{p(\mathbf{E})}]}(\mathbf{E}) & \text{si } p(\mathbf{E}) \text{ est impair} \end{cases} \quad (5.54)$$

où  $p(\mathbf{E})$  est le plus petit entier tel que  $\mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\max}^{p(\mathbf{E})}$  et est donné par

$$p(\mathbf{E}) = \left\lfloor \frac{4}{3\pi}(c + \mathbf{E})^{\frac{3}{2}} \right\rfloor. \quad (5.55)$$

Le premier point du Théorème 5.2.1 est vrai pour toute valeur du paramètre semiclassique  $c$  et ne requiert donc pas que l'on soit dans le régime semiclassique. Toutefois, bien que  $\sigma(H) \cap [-V_0, 0]$  soit toujours non vide, ce résultat devient plus intéressant lorsque  $c > c_0$ , puisque dans ce cas la première bande spectrale est entièrement incluse dans  $[-V_0, 0]$  et le premier trou spectral intersecte cet intervalle comme nous l'avons montré au Théorème 5.1.6. Cette remarque combinée au fait que la formule exacte pour la densité d'états intégrée de  $\mathbf{H}$  démontrée au Théorème 5.2.2 est aussi valide dès lors que  $c \geq c_0$ , nous conduit à dire que  $c_0$  caractérise le régime semiclassique pour l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique.

**Remarque 5.2.3.** *Le Théorème 5.2.2 et le second point du Théorème 5.2.1 sont valides dans le régime semiclassique. Par contre, le premier point du Théorème 5.2.1 ne requiert pas le régime semiclassique.*

Sachant que le spectre de  $\mathbf{H}_{2N+1}$  est réduit à son spectre ponctuel puisque le support du potentiel  $\mathbf{V}_{2N+1}$  est compact, nous cherchons à déterminer les nombres réels  $\mathbf{E}$  dans  $[-c, 0]$  tels que (5.50) admette une solution  $\phi \in H^2(\mathbb{R})$  non identiquement nulle et telle que  $\phi(-(2N+1)) = \phi(2N+1)$ .

Pour cela on considère les fonctions définies pour tout  $z \in [-1, 1]$  par

$$U_{\text{paire}}(z) = U(c\mathbf{V}_{2N+1}(z) - \mathbf{E}) \text{ et } V_{\text{impaire}}(z) = \text{sign}(z)V(c\mathbf{V}_{2N+1}(z) - \mathbf{E})$$

qui forment une base de solutions  $C^1$  paires et impaires de l'équation (5.50) sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Dans chaque intervalle de la forme  $[2n - 1, 2n + 1]$  pour  $n \in \{-N, \dots, N\}$ , une solution  $\phi$  de (5.50) s'écrit

$$\forall z \in [2n - 1, 2n + 1], \phi(z) = A_n U_{\text{paire}}(z - 2n) + B_n V_{\text{impaire}}(z - 2n) \quad (5.56)$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont des réels. Puisque  $U_{\text{paire}}(\pm(2N + 1)) = U(-\mathbf{E})$  et  $V_{\text{impaire}}(\pm(2N + 1)) = \pm V(-\mathbf{E})$ , la continuité de  $\phi$  et de sa dérivée en  $2n + 1$  pour  $n \in \{-N + 1, \dots, N - 1\}$  donne

$$A_n U(-\mathbf{E}) + B_n V(-\mathbf{E}) = A_{n+1} U(-\mathbf{E}) - B_{n+1} V(-\mathbf{E}) \quad (5.57)$$

$$c(A_n U'(-\mathbf{E}) + B_n V'(-\mathbf{E})) = -c(A_{n+1} U'(-\mathbf{E}) - B_{n+1} V'(-\mathbf{E})) \quad (5.58)$$

Le signe moins devant  $B_{n+1}$  dans (5.57) et (5.58) provient de l'imparité de  $V_{\text{impaire}}$ .

Il vient alors, pour tout  $n \in \{-N + 1, \dots, N - 1\}$ ,

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (UV' + U'V)(-\mathbf{E}) & 2(VV')(-\mathbf{E}) \\ 2(UU')(-\mathbf{E}) & (UV' + U'V)(-\mathbf{E}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} := T_{\mathbf{E}} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

où  $T_{\mathbf{E}}$  est la matrice de transfert qui envoie la solution sur l'intervalle  $[2n - 1, 2n + 1]$  sur la solution sur l'intervalle  $[2n + 1, 2n + 3]$ . En particulier,

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = T_{\mathbf{E}}^{2N+1} \begin{pmatrix} A_{-N} \\ B_{-N} \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Sur l'intervalle  $[2N + 1, +\infty)$ , le potentiel  $\mathbf{V}_{2N+1}$  vaut 0 et puisque  $\phi$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\forall z \in [2N + 1, +\infty), \phi(z) = \phi(2N + 1)e^{-\lambda(z - (2N + 1))} \quad (5.61)$$

avec  $\lambda$  un réel positif tel que  $-\lambda^2 = c^2\mathbf{E}$ . En exploitant le caractère  $C^1$  de  $\phi$ , en fixant  $\phi(2N + 1) = 1$  et puisque  $\phi'(2N + 1) = -\lambda$ ,

$$A_N U(-\mathbf{E}) + B_N V(-\mathbf{E}) = 1 \quad (5.62)$$

$$c(A_N U'(-\mathbf{E}) + B_N V'(-\mathbf{E})) = -\lambda. \quad (5.63)$$

D'où,

$$\lambda(A_N U(-\mathbf{E}) + B_N V(-\mathbf{E})) = -c(A_N U'(-\mathbf{E}) + B_N V'(-\mathbf{E})). \quad (5.64)$$

La même analyse sur l'intervalle  $(-\infty, -(2N + 1)]$ , conduit aux expressions de  $A_{-N}$  et  $B_{-N}$ :

$$A_{-N} = \lambda \frac{1}{c^2} V(-\mathbf{E}) + \frac{1}{c} V'(-\mathbf{E}) \text{ et } B_{-N} = \lambda \frac{1}{c^2} U(-\mathbf{E}) + \frac{1}{c} U'(-\mathbf{E}). \quad (5.65)$$

En calculant  $T_{\mathbf{E}}^{2N+1}$ , nous pouvons donc également obtenir  $A_N$  et  $B_N$ .



Enfin, comme  $\lambda$  est positif,  $\frac{\lambda}{c} = (-\mathbf{E})^{\frac{1}{2}}$ . Cela conduit à introduire la fonction définie pour  $y \in [-c, 0]$  par :

$$\Phi(y) = (y + c)^{\frac{1}{2}} (A_N U(y + c) + B_N V(y + c)) + A_N U'(y + c) + B_N V'(y + c)$$

Alors, (5.64) est équivalente à l'équation en  $\mathbf{E}$ ,  $\Phi(-c - \mathbf{E}) = 0$ . Le changement de variable  $y = -c - \mathbf{E}$  nous amène à introduire, pour tout  $p \geq 0$ ,

$$Y_{\min}^p = -c - \mathbf{E}_{\min}^p \quad \text{et} \quad Y_{\max}^p = -c - \mathbf{E}_{\max}^p.$$

Nous remarquons que  $\mathbf{E} \in [\mathbf{E}_{\min}^p, \mathbf{E}_{\max}^p]$  si et seulement si  $y \in [Y_{\max}^p, Y_{\min}^p]$ .

Afin d'étudier les zéros de la fonction  $\Phi$ , nous commençons par en donner l'expression. Celle-ci varie selon que l'on soit dans un trou spectral, une bande spectrale d'indice pair ou une bande d'indice impair. C'est une conséquence des signes de  $U$ ,  $U'$ ,  $V$  et  $V'$  que l'on donne dans la Table 5.1. Ces signes influent sur l'expression de  $T_{\mathbf{E}}^{2N+1}$ .

$y$	$Y_{\max}^{4j+2}$	$Y_{\min}^{4j+2}$	$Y_{\max}^{4j+1}$	$Y_{\min}^{4j+1}$	$Y_{\max}^{4j}$	$Y_{\min}^{4j}$	$Y_{\max}^{4j-1}$	$Y_{\min}^{4j-1}$	$Y_{\max}^{4j-2}$	$Y_{\min}^{4j-2}$	$Y_{\max}^{4j-3}$	$Y_{\min}^{4j-3}$		
bande-trou	bande trou bande trou bande trou bande trou bande trou bande													
$U$	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-	-
$U'$	+	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-
$V$	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+
$V'$	-	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-	-	-	0

Signe de  $U, U', V, V'$  sur l'intervalle  $[Y_{\max}^{4j+2}, Y_{\min}^{4j-3}]$  pour  $j \geq 1$ .

Posons

$$a := (UV' + U'V)(-\mathbf{E}), \tag{5.66}$$

$$b_0 := \begin{cases} \sqrt{(UU')(-\mathbf{E})} & \text{si } (UU')(-\mathbf{E}) > 0 \\ i\sqrt{(-UU')(-\mathbf{E})} & \text{si } (UU')(-\mathbf{E}) \leq 0 \end{cases} \tag{5.67}$$

$$b_1 := \begin{cases} \sqrt{(VV')(-\mathbf{E})} & \text{si } (VV')(-\mathbf{E}) > 0 \\ i\sqrt{(-VV')(-\mathbf{E})} & \text{si } (VV')(-\mathbf{E}) \leq 0. \end{cases} \tag{5.68}$$

$$b := 2\sqrt{(UU'VV')(-\mathbf{E})} = 2b_0b_1. \tag{5.69}$$

$$\alpha(y + c) := \left( \sqrt{\frac{VV'}{-UU'}} (U' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}U)^2 \right) (y + c) \tag{5.70}$$

$$\beta(y + c) := \left( \sqrt{\frac{-UU'}{VV'}} (V' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}V)^2 \right) (y + c). \tag{5.71}$$

Alors,

$$T_{\mathbf{E}} := \begin{pmatrix} a & 2b_1^2 \\ 2b_0^2 & a \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

En combinant (5.60), (5.65) et l'expression de la matrice de transfert  $T_{\mathbf{E}}$ , on obtient l'expression of  $\Phi$ .

**1. Expression de  $\Phi$  dans les trous spectraux.** Pour  $y$  tel que  $-\mathbf{E}$  soit dans un trou spectral de  $\mathbf{H}$  et  $y \in [-c, 0]$  :

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \frac{1}{2^{2N}} \left[ ((U' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}U)(V' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}V))(y+c) \times ((a+b)^{2N+1} + (a-b)^{2N+1}) \right. \\ & \left. + \left( \frac{b_1}{b_0}(U' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}U)^2 + \frac{b_0}{b_1}(V' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}V)^2 \right) (y+c) \times ((a+b)^{2N+1} - (a-b)^{2N+1}) \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

**2. Expression de  $\Phi$  dans les bandes spectrales paires.** Définissons d'abord la fonction  $k$  :  $\sigma(\mathbf{H}) \cap [-c, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall y \in \sigma(\mathbf{H}) \cap [-c, 0], k(y) = \left( \sqrt{-\frac{VV'}{UU'}} \times \frac{U' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}U}{V' + (\cdot)^{\frac{1}{2}}V} \right) (y+c). \quad (5.74)$$

Alors, pour  $y$  tel que  $-\mathbf{E}$  soit dans une bande spectrale de  $\mathbf{H}$  d'indice pair et  $y \in [-c, 0]$ , puisque  $\beta(y+c) > 0$  :

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \frac{1}{2^{2N+1}} ((a+ib)^{2N+1} + (a-ib)^{2N+1})(y+c) \times (\alpha + \beta)(y+c) \\ & \times \left[ \frac{2k(y)}{1+(k(y))^2} + \frac{(k(y))^2 - 1}{(k(y))^2 + 1} \times \tan((2N+1)\text{Arg}(a+ib)(y+c)) \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

**3. Expression de  $\Phi$  dans les bandes spectrales impaires.** Pour  $y \in \sigma(\mathbf{H}) \cap [-c, 0]$ , on pose  $\tilde{k}(y) = \frac{1}{k(y)}$  (légitime car  $k(y)$  ne s'annule pas à l'intérieur des bandes impaires). Alors, pour  $y$  tel que  $-\mathbf{E}$  soit dans une bande spectrale de  $\mathbf{H}$  d'indice impair et  $y \in [-c, 0]$  :

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \frac{1}{2^{2N+1}} ((a+ib)^{2N+1} + (a-ib)^{2N+1})(y+c) \times (\alpha + \beta)(y+c) \\ & \times \left[ \frac{2\tilde{k}(y)}{1+(\tilde{k}(y))^2} + \frac{(\tilde{k}(y))^2 - 1}{(\tilde{k}(y))^2 + 1} \times \tan((2N+1)\text{Arg}(a+ib)(y+c)) \right]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

A l'aide de ces expressions pour  $\Phi$ , le résultat de comptage des zéros dans les bandes et trous spectraux donné au Théorème 5.2.1 se ramène à une étude de fonction pour chacune de ces expressions.

Tout d'abord, dans le cas des trous spectraux, les signes de  $U, U', V$  et  $V'$  conduisent assez rapidement au fait que la fonction  $\Phi$  ne s'y annule pas. Nous renvoyons à [BL21, Section III.C.1] pour l'étude détaillée. Notons que cette démonstration diffère

légèrement suivant que l'on soit dans le cas d'un nombre impair de puits ou dans le cas d'un nombre pair de puits pour le potentiel.

L'étude des variations et du signe de  $\Phi$  dans les bandes spectrales est nettement plus délicate. Pour localiser les zéros, nous utilisons le fait que la tangente qui apparaît dans les expressions (5.75) et (5.76) admet  $2N + 1$  singularités à l'intérieur d'une bande, à condition que la fonction argument qu'elle contient soit bien une bijection monotone. Nous commençons donc par introduire la fonction

$$\tilde{\varphi} : \begin{array}{ll} -c - \sigma(\mathbf{H}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \text{Arg}(a + ib)(y + c). \end{array} \quad (5.77)$$

dont nous résumons les propriétés dans la proposition suivante.

**Proposition 5.2.4.** *Soit  $p \geq 0$  et  $c \geq c_p$ . Alors, pour tout  $l \in \{0, \dots, p\}$ ,*

1. *si  $l = 2j$  est pair, la fonction  $\tilde{\varphi}$  est un homéomorphisme strictement décroissant de  $[Y_{\max}^{2j}, Y_{\min}^{2j}]$  sur  $[0, \pi]$ ,*
2. *si  $l = 2j + 1$  est impair, la fonction  $\tilde{\varphi}$  est un homéomorphisme strictement croissant de  $[Y_{\max}^{2j+1}, Y_{\min}^{2j+1}]$  sur  $[0, \pi]$ .*

La démonstration de la Proposition 5.2.4 repose sur le lemme suivant.

**Lemme 5.2.5.** *Soit  $p \geq 0$ ,  $c \geq c_p$  et  $h : [-c, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée pour tout  $y \in [-c, 0]$  par*

$$h(y) = -(UU')(y + c) - y(VV')(y + c) + (U'V')(y + c) + (y + c)(UV)(y + c). \quad (5.78)$$

*Alors, pour tout  $l \in \{0, \dots, p\}$ ,*

1. *si  $l = 2j$  est pair, pour tout  $y \in [Y_{\max}^{2j}, Y_{\min}^{2j}]$ ,  $h(y) > 0$ ,*
2. *si  $l = 2j + 1$  est impair, pour tout  $y \in [Y_{\max}^{2j+1}, Y_{\min}^{2j+1}]$ ,  $h(y) < 0$ .*

En effet, si on pose pour  $y \in [Y_{\max}^l, Y_{\min}^l]$ ,

$$f(y) = \left( \frac{2\sqrt{-UU'VV'}}{UV' + U'V} \right) (y + c),$$

alors  $f = \tan(2\tilde{\varphi})$ . Puis, on peut montrer que

$$\frac{d}{dy}f(y) = \frac{-h(y)}{(g(y))^2 \sqrt{-UU'VV'}(y + c)}$$

où, pour tout  $y \in [-c, 0]$ ,  $g(y) = (UV' + VU')(y + c)$ , dont la dérivée vaut  $2h$ . Ainsi, les variations de  $f$  et de  $g$  dépendent du signe de  $h$ .

La démonstration du Lemme 5.2.5 est particulièrement technique et repose sur des estimations très fines des fonctions d'Airy  $A_i$  et  $B_i$  que l'on déduit des développements asymptotiques donnés dans [ASR88].

L'idée est d'utiliser tout d'abord le résultat du Théorème 5.1.10 qui nous assure que les bandes spectrales sont exponentiellement petites et centrées en les zéros de

$Ai$  et de  $Ai'$ , les  $a_p$ . On commence donc par déterminer le signe de  $h(a_p)$ . Puis en utilisant les accroissements finis et la largeur exponentiellement petite des bandes spectrales, on montre que ce signe ne change pas dans la bande étudiée.

Pour en déterminer le signe, on peut écrire l'expression de  $h(a_p)$  en fonction de  $Ai$ ,  $Bi$  et de leurs dérivées. Pour  $p = 2j$ , cela donne :

$$h(-\tilde{a}_{j+1}) = \pi^2 \left[ (\tilde{a}_{j+1}(Bi(-\tilde{a}_{j+1}))^2 - (Bi'(-\tilde{a}_{j+1})))^2 (AiAi')(-\tilde{a}_{j+1} + c) \right. \quad (5.79)$$

$$\left. + \tilde{a}_{j+1}(Ai(-\tilde{a}_{j+1}))^2 (BiBi')(-\tilde{a}_{j+1} + c) \right] \quad (5.80)$$

$$- \frac{1}{\pi} (AiBi)(-\tilde{a}_{j+1}) \quad (5.81)$$

$$+ (AiBi')(-\tilde{a}_{j+1})(Ai'Bi')(-\tilde{a}_{j+1} + c) \quad (5.82)$$

$$- (BiBi')(-\tilde{a}_{j+1})(Ai'(-\tilde{a}_{j+1} + c))^2 \quad (5.83)$$

$$+ (-\tilde{a}_{j+1} + c)(AiBi')(-\tilde{a}_{j+1})(AiBi)(-\tilde{a}_{j+1} + c) \quad (5.84)$$

$$\left. - (-\tilde{a}_{j+1} + c)(BiBi')(-\tilde{a}_{j+1})(Ai(-\tilde{a}_{j+1} + c))^2 \right]. \quad (5.85)$$

On peut voir immédiatement dans cette expression que pour  $c$  grand, le terme dominant est (5.80) qui est positif, donc  $h(-\tilde{a}_{j+1})$  l'est aussi. Toutefois, dans le Lemme 5.2.5 on ne s'autorise pas des valeurs arbitrairement grandes de  $c$  mais seulement  $c \geq c_{2j}$ . Il faut donc également être capable de déterminer le signe de  $h(-\tilde{a}_{j+1})$  pour  $c = c_{2j}$ . C'est cela qui rend la démonstration du Lemme 5.2.5 particulièrement ardue.

Tout d'abord, on peut mettre à part le cas  $j = 0$  pour lequel on peut calculer des valeurs approchées des termes :  $-\tilde{a}_1 \simeq -1.088$ ,  $c_0 \simeq 1.515$  et  $h(-\tilde{a}_1) \simeq 1.428 > 0$ . On supposera donc  $j \geq 1$ . On utilise les développements asymptotiques donnés dans [ASR88] pour obtenir des approximations de chaque terme dans  $h(-\tilde{a}_{j+1})$ . Par exemple, en utilisant [ASR88, p. 10.4.95], on a

$$\left| -\tilde{a}_{j+1} - \left( - \left( \frac{3\pi}{8}(4j+3) \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right| \leq \frac{5}{48} \left( \frac{3\pi}{8}(4j+3) \right)^{-\frac{4}{3}}. \quad (5.86)$$

Puis en utilisant [ASR88, p. 10.4.97],

$$\left| Ai(-\tilde{a}_{j+1}) - \frac{(-1)^j}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3\pi}{8}(4j+3) \right)^{\frac{1}{6}} \right| \leq \frac{5}{48} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3\pi}{8}(4j+3) \right)^{-\frac{11}{6}}. \quad (5.87)$$

A l'aide d'estimées de ce type pour chaque terme, on fini par montrer dans [BL21, Appendix B] que  $h(-\tilde{a}_{j+1}) > 0$ .

On démontre ensuite que  $h$  reste strictement positive sur la bande spectrale  $[Y_{\max}^{2j}, Y_{\min}^{2j}]$ . Pour cela, on utilise [BL18, Theorem 2.5] qui implique que pour tout  $c \geq c_{2j}$ ,

$$[Y_{\max}^{2j}, Y_{\min}^{2j}] \subset [-\tilde{a}_{j+1} - \Lambda_{2j,c}, -\tilde{a}_{j+1} + \Lambda_{2j,c}] \quad (5.88)$$

où

$$\Lambda_{2j,c} := \left( \frac{(Bi'(-\tilde{a}_{j+1}))^2}{2\pi\tilde{a}_{j+1}} + \frac{K_{2j}}{(c - \tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-\frac{4}{3}(c - \tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.89)$$

La constante  $K_{2j}$  est définie dans la preuve de [BL18, Proposition 6.1], mais nous l'améliorons fortement dans [BL21] pour que sa dépendance en  $j$ , dont nous n'avons pas besoin dans les résultats de [BL18], soit adaptée à notre objectif de positivité.

Soit  $t \in [-1, 1]$ . Comme  $h$  est  $C^1$ , par le Théorème des accroissements finis, pour tout  $j \geq 1$  et tout  $c \geq c_{2j}$ ,

$$|h(-\tilde{a}_{j+1} + t\Lambda_{2j,c}) - h(-\tilde{a}_{j+1})| \leq \left( \sup_{y \in [Y_{\max}^{2j}, Y_{\min}^{2j}]} \left| \frac{dh}{dy}(y) \right| \right) \times |\Lambda_{2j,c}| \quad (5.90)$$

Il reste donc à contrôler la dérivée de  $h$  ce qui se fait à l'aide d'inégalités entre les fonctions classiques d'Airy et leur dérivées. Là encore, pour les détails nous renvoyons à [BL21, Appendix B].

Une fois le Lemme 5.2.5 démontré, la Proposition 5.2.4 se déduit immédiatement. A partir de cette proposition on peut entamer une étude de fonction pour  $\Phi$  qui permet, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, d'obtenir des zéros entre deux singularités de la fonction  $\mathbf{E} \mapsto \tan((2N+1)\varphi(\mathbf{E}))$ , ainsi que deux zéros aux bords, ce qui nous donne finalement  $2N+2$  zéros. L'étude de fonction est assez longue et le comptage des zéros se fait en plusieurs étapes, en partant des zéros de  $\mathbf{E} \mapsto \tan((2N+1)\varphi(\mathbf{E}))$  et en ajoutant progressivement les termes suivants pour arriver à l'expression de  $\Phi$ . A chaque terme rajouté cela augmente, diminue ou laisse inchangé le nombre de zéros de l'étape précédente. Cela est fait en détails dans [BL21, Section III.C.2].

La localisation des zéros, essentiellement entre deux singularités de la fonction  $\mathbf{E} \mapsto \tan((2N+1)\varphi(\mathbf{E}))$ , est également le point de départ de la démonstration du Théorème 5.2.2.

Soit  $\mathbf{E} \in [-c, 0]$ . Rappelons que, d'après le Théorème 5.1.9, la  $p$ -ième bande spectrale de  $\mathbf{H}$  est centrée en  $-c + \alpha_p$ . Ainsi, le nombre  $p(\mathbf{E})$  de bandes spectrales de  $\mathbf{H}$  inclus dans  $[-c, \mathbf{E}]$  (dont la longueur est  $c + \mathbf{E}$ ) est l'unique entier tel que

$$\alpha_{p(\mathbf{E})} \leq c + \mathbf{E} \leq \alpha_{p(\mathbf{E})+1}. \quad (5.91)$$

De là, (5.55) est une conséquence d'estimées sur les zéros de  $A_i$  et de  $A_i'$  de la forme : pour tout  $j \geq 0$ ,

$$\frac{2}{3}(\tilde{a}_{j+1})^{\frac{3}{2}} \in \left[ \frac{\pi}{4} + j\pi - \frac{7}{36(\frac{\pi}{6} + j\pi)}, \frac{\pi}{4} + j\pi + \frac{7}{36(\frac{\pi}{6} + j\pi)} \right]$$

et une estimée similaire pour les  $a_{j+1}$  (voir [BL21, Section IV]).

Soit  $\varphi$  définie en (5.53). On pose, pour tout  $m \in \{1, \dots, 2N\}$ ,

$$e_m^\pm = \varphi^{-1} \left( \frac{(2m \pm 1)\pi}{2(2N+1)} \right). \quad (5.92)$$

Dans une bande spectrale paire. Soit  $j \geq 0$ . Soit  $\mathbf{E} \in [\mathbf{E}_{\min}^{2j}, \mathbf{E}_{\max}^{2j}]$ . Puisque  $\varphi$  a des variations opposées sur  $[\mathbf{E}_{\min}^p, \mathbf{E}_{\max}^p]$  à celles de  $\tilde{\varphi}$  sur  $[Y_{\max}^p, Y_{\min}^p]$ ,  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[\mathbf{E}_{\min}^{2j}, \mathbf{E}_{\max}^{2j}]$ .

Soit alors  $m_{\mathbf{E}} \in \{1, \dots, 2N\}$  l'unique entier tel que  $\mathbf{E} \in [e_{m_{\mathbf{E}}}^-, e_{m_{\mathbf{E}}}^+]$  et posons  $m_{\mathbf{E}} = 0$  si  $\mathbf{E} \in [\mathbf{E}_{\min}^{2j}, e_1^-)$  et  $m_{\mathbf{E}} = 2N$  si  $\mathbf{E} \in (e_{2N}^+, \mathbf{E}_{\max}^{2j}]$ .

Lorsque l'on démontre le Théorème 5.2.1, on obtient que dans chaque intervalle  $(e_m^-, e_m^+)$  pour  $m \in \{1, \dots, 2N\}$ , il y a exactement une valeur propre de  $\mathbf{H}_{2N+1}$ , sauf pour  $m = m_{\pm}$  pour lequel il y a deux valeurs propres de  $\mathbf{H}_{2N+1}$ . Nous savons également qu'il n'y a pas de valeur propre de  $\mathbf{H}_{2N+1}$  dans  $[\mathbf{E}_{\min}^{2j}, e_1^-)$  et dans  $(e_{2N}^+, \mathbf{E}_{\max}^{2j}]$  ce qui justifie la définition de  $m_{\mathbf{E}}$ . Ainsi, il y a exactement  $m_{\mathbf{E}} + n_{\mathbf{E}}$  valeurs propres de  $\mathbf{H}_{2N+1}$  dans l'intervalle  $[\mathbf{E}_{\min}^{2j}, \mathbf{E}]$  avec  $n_{\mathbf{E}} \in \{0, 1, 2\}$ .

Or, comme  $\varphi$  est strictement croissante,

$$\frac{(2m_{\mathbf{E}} - 1)\pi}{2(2N + 1)} \leq \varphi(\mathbf{E}) \leq \frac{(2m_{\mathbf{E}} + 1)\pi}{2(2N + 1)}$$

et

$$\frac{2N + 1}{\pi} \varphi(\mathbf{E}) - \frac{1}{2} \leq m_{\mathbf{E}} \leq \frac{2N + 1}{\pi} \varphi(\mathbf{E}) + \frac{1}{2}. \quad (5.93)$$

D'où,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2N + 1)} (m_{\mathbf{E}} + n_{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2\pi} \varphi(\mathbf{E}). \quad (5.94)$$

Dans une bande spectrale impaire. L'argument est similaire, mais cette fois  $\varphi$  est strictement décroissante sur toute bande spectrale impaire.

Soit  $j \geq 0$  et soit  $\mathbf{E} \in [\mathbf{E}_{\min}^{2j+1}, \mathbf{E}_{\max}^{2j+1}]$ . On définit  $m_{\mathbf{E}}$  comme dans le cas pair si ce n'est que l'on échange les bornes de chaque sous-intervalle de  $[\mathbf{E}_{\min}^{2j+1}, \mathbf{E}_{\max}^{2j+1}]$  et que l'on pose  $m_{\mathbf{E}} = 2N$  si  $\mathbf{E} \in [\mathbf{E}_{\min}^{2j+1}, e_{2N}^+)$  et  $m_{\mathbf{E}} = 0$  si  $\mathbf{E} \in [e_1^-, \mathbf{E}_{\max}^{2j+1}]$ .

Le nombre de valeurs propres de  $\mathbf{H}_{2N+1}$  dans  $[\mathbf{E}, \mathbf{E}_{\max}^{2j+1}]$  est égal à  $m_{\mathbf{E}} + n_{\mathbf{E}}$  avec  $n_{\mathbf{E}} \in \{0, 1, 2\}$ . Puis, comme dans chaque bande spectrale il y a exactement  $2N + 2$  valeurs propres de  $\mathbf{H}_{2N+1}$ , il y a exactement  $2N + 2 - (m_{\mathbf{E}} + n_{\mathbf{E}})$  valeurs propres de  $\mathbf{H}_{2N+1}$  dans l'intervalle  $[\mathbf{E}_{\min}^{2j+1}, \mathbf{E}]$ .

On a encore une inégalité similaire à (5.93) si ce n'est que l'on échange les majorants et les minorants, d'où :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2N + 1)} (2N + 2 - (m_{\mathbf{E}} + n_{\mathbf{E}})) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \varphi(\mathbf{E}). \quad (5.95)$$

Enfin, comme  $\varphi$  est un homéomorphisme de chaque bande spectrale vers  $[0, \pi]$ , de (5.95) et (5.94), on obtient que si  $\mathbf{E}$  est dans un trou spectral de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{E})$  est égale à  $\frac{1}{2}p(\mathbf{E})$ , où  $p(\mathbf{E})$  est le nombre de bandes spectrales incluses dans  $[-c, \mathbf{E}]$ . En effet, chaque bande spectrale a une mesure totale égale à  $\frac{1}{2}$ . Cela termine la démonstration du Théorème 5.2.2.

Nous terminons cette section dévolue aux résultats de [BL21] en évoquant les approximations de  $\varphi$  présentées dans [BL21, Appendix A].

Tout d'abord, on remarque qu'en utilisant les signes de  $UV'$  et  $U'V$  dans les bandes spectrales et le fait que  $(U'V + UV' + 2i\sqrt{-UU'VV'})(-E)$  est toujours de module 1,

$$\forall E \in \sigma(\mathbf{H}), \varphi(E) = 2\text{Arctan} \left( \sqrt{\frac{-U'V}{UV'}} \right) (-E). \quad (5.96)$$

Des expressions de  $U, U', V$  et  $V'$  et en effectuant quelques calculs, on obtient alors

$$\varphi(E) \sim \text{Arctan} \left( \left( \frac{1 - \cos(\frac{4}{3}(c + E)^{\frac{3}{2}}) \cosh \frac{4}{3}(-E)^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos(\frac{4}{3}(c + E)^{\frac{3}{2}}) \cosh \frac{4}{3}(-E)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (5.97)$$

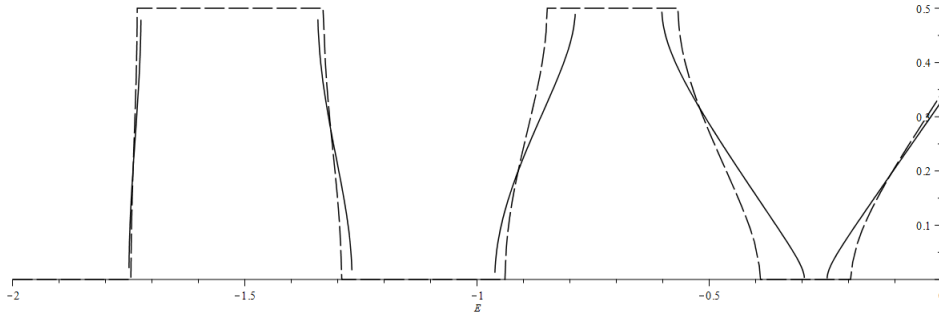


Fig. 9. La fonction  $\varphi$  et son approximation (5.97) sur  $[-2, 0]$  pour  $c = 15$ . La ligne continue représente l'approximation divisée par  $\pi$  et la ligne pointillée représente  $\varphi$  divisée par  $\pi$ .

Comme prévu, la Figure 9 illustre le fait que l'approximation (5.97) est meilleure pour les bandes spectrales loin de 0 que pour celles proches de 0.

Enfin, si on dérive (5.97) par rapport à  $E$ , on trouve une approximation pour la densité d'états  $\varphi'(E)$  :

$$\varphi'(E) \sim \frac{1}{1 + \cosh \frac{4}{3}(-E)^{\frac{3}{2}} \cos \frac{4}{3}(c + E)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.98)$$

### 5.3 Perspectives de recherches futures

Avec Olivier Lafitte, nous poursuivons notre collaboration sur l'étude des propriétés spectrales des opérateurs de Schrödinger unidimensionnels à potentiel périodique dont le potentiel n'est pas régulier, de fait non  $C^1$ , en ses extrema, ou au moins en ses minima.

Notre premier projet en cours sur ce sujet est l'étude d'un opérateur d'Airy-Schrödinger périodique pour lequel le potentiel ne serait plus donné par la valeur absolue sur la période centrée en 0 mais par un **potentiel plus général** de la forme  $x \mapsto V(|x|)$ .

Nous souhaitons donc étudier l'opérateur de Schrödinger périodique agissant sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbb{R})$  :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \bar{V}, \quad (5.99)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite et  $\bar{V}$  est la fonction  $2L_0$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall z \in [-L_0, L_0], \bar{V}(z) = V\left(\frac{|z|}{L_0}\right),$$

où  $V$  est une fonction de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Nous pensons pouvoir démontrer des estimations des bandes spectrales analogues à celles données au Théorème 5.1.9 en supposant que la fonction  $V$  est paire, qu'elle admet un unique minimum en 0 et qu'elle est analytique sur  $[-1, 1]$  ou au moins au voisinage de 0. Nous pourrions alors en déduire des estimées sur les longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux dans un cas relativement général.

Pour traiter ce cas plus général, l'idée est de revenir aux techniques de Harrell [Har79] en trouvant l'analogie pour notre modèle des fonctions cylindriques qu'il utilise pour approcher les solutions réelles. Une fois ces solutions approchées obtenues, il restera à montrer que leurs développements asymptotiques sont bien proches de ceux pour les vraies solutions ce qui nous obligera à regarder finement jusqu'où nos développements asymptotiques sont valables.

L'article [BP19] contient des résultats relativement généraux de ce type pour un potentiel dont les hypothèses sont proches de celui que nous voulons étudier, mais les auteurs n'obtiennent que des équivalents des longueurs des bandes spectrales et des trous spectraux, sans pousser plus loin le développement asymptotique. Les résultats qu'ils obtiennent sont dans le cas de la limite semiclassique.

Nous aimerions parvenir à obtenir, dans le cas général, des résultats dans le régime semiclassique avec un intervalle de validité explicite. Il est possible que cela s'avère trop compliqué et que nous obtenions finalement des développements asymptotiques dans le cas de la limite semiclassique comme dans [BP19].

Dans [BL18; BL21], nous étudions précisément le comportement du spectre de bandes de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique ainsi que de l'opérateur d'Airy-Schrödinger à puits multiples, lorsque les bandes se trouvent dans l'image du potentiel. Il serait également intéressant de voir si on peut **caractériser plus précisément les bandes qui se trouvent au-delà de la valeur maximale du potentiel**. Pour cela, il faudrait pouvoir identifier, parmi les solutions des équations (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16), celles qui correspondent au fait de "relier" deux branches de courbes situées dans la partie du plan d'abscisses négatives dans la Figure 6. Ce cas n'a pas été abordé de façon détaillée dans [BL18] et s'avère bien plus difficile à étudier du fait que l'on ne peut plus utiliser les comportements asymptotiques exponentiels des fonctions d'Airy en  $+\infty$  et que l'on doit s'accomoder uniquement des comportements oscillants en  $-\infty$ . Avoir une meilleure connaissance de ces bandes au-delà du maximum du potentiel permettrait éventuellement d'identifier la bande de valence pour l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique.



Une autre extension possible de l'étude du spectre de l'opérateur d'Airy-Schrödinger est le passage du cas unidimensionnel au **cas quasi-unidimensionnel**. Nous pourrions par exemple considérer un opérateur d'Airy-Schrödinger périodique à valeurs matricielles de la forme

$$H_{\text{quasi1d}} = H \otimes \mathbb{I}_N + V_{\text{per}} \quad (5.100)$$

où  $H$  est l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique défini en (5.1) et  $V_{\text{per}}$  est une fonction périodique à valeurs dans les matrices symétriques réelles. Nous pourrions supposer  $V_{\text{per}}$  de classe au moins  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ou juste  $C^2$  au voisinage de ses extrema en supposant qu'elle atteigne ses extrema aux mêmes points que  $V$ . Ainsi nous pourrions combiner nos résultats pour le potentiel  $V$  singulier avec les résultats classiques de la littérature dans le cas d'un potentiel périodique régulier.

En considérant cette extension au cas quasi-unidimensionnel, nous pourrions peut-être également compléter du point de vue semiclassique les résultats de Veliev [Vel21a] ou de Chelkak et Korotyaev [CK06].

Enfin, dans [BL16], nous avons commencé à regarder deux versions simples d'un **modèle d'Airy-Schrödinger périodique en dimension 2**. La première est donnée par l'opérateur

$$H_{3/2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{3/2}, \quad (5.101)$$

agissant sur  $H^2(\mathbb{R}^2)$ , où  $\Delta$  est le Laplacien sur  $\mathbb{R}^2$  et  $V_{3/2}$  est la fonction périodique définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, V_{3/2}(x, y) = V(x),$$

où  $V$  est le potentiel de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique (5.1).

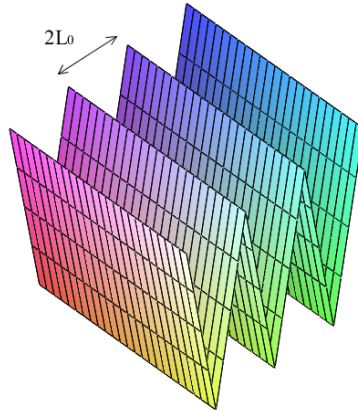


Fig. 10. Le potentiel  $V_{3/2}$

En utilisant une décomposition en produit tensoriel de  $H_{3/2}$ ,

$$H_{3/2} = (H_1 \otimes \text{Id}_y) + \left( \text{Id}_x \otimes \left( -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right),$$

on obtient

$$\sigma(H_{3/2}) = \sigma_{\text{ac}}(H_{3/2}) = [E_{\text{min}}^0, +\infty).$$

où  $E_{\min}^0$  est le bas du spectre de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique (5.1). Ainsi, les résultats de [BL18] sur le bas du spectre nous donnent une description complète de l'unique bande spectrale de  $\sigma(H_{3/2})$ . Le fait que les trous spectraux soient vides pour  $H_{3/2}$  est en accord avec les résultats de [Par08] sur la conjecture de Bethe-Sommerfeld.

Notons que la décomposition en produit tensoriel de  $H_{3/2}$  reste valable si on considère un potentiel  $V_{3/2}$  de la forme  $(x, y) \mapsto V(x) + W(y)$  avec  $V$  et  $W$  deux fonctions périodiques. Si ces deux fonctions sont des potentiels d'Airy-Schrödinger périodiques de deux périodes différentes  $L_0$  et  $L_1$ , il serait intéressant de voir quel est le spectre de  $H_{3/2}$ . Ce spectre sera la somme des spectres pour les deux opérateurs d'Airy-Schrödinger périodiques associés respectivement à  $V$  et à  $W$  et les éventuels recouvrements de leurs bandes spectrales respectives devraient être liés à la nature arithmétique du quotient  $\frac{L_0}{L_1}$ , comme ce que l'on peut observer dans [KF16].

Le second modèle en dimension 2 présenté dans [BL16] n'est plus un modèle que l'on peut décomposer en produits tensoriels d'opérateurs unidimensionnels.

On considère deux longueurs caractéristiques  $L_0$  et  $L$  et un potentiel de référence  $V_0$ . Soit

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_2, \quad (5.102)$$

agissant sur  $H^2(\mathbb{R}^2)$ , où  $\Delta$  est encore le Laplacien en dimension 2 et  $V_2$  est le potentiel périodique sur un réseau de  $\mathbb{R}^2$  de maille élémentaire  $[-L_0, L_0] \times [-L, L]$  sur laquelle il est défini par :

$$\forall (x, y) \in [-L_0, L_0] \times [-L, L], V_2(x, y) = V(x) \times \text{sign}(y). \quad (5.103)$$

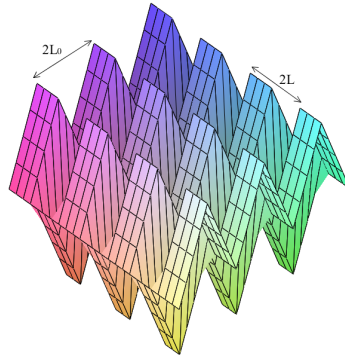


Fig. 11. Le potentiel  $V_2$

Les modes de Bloch qui correspondent aux bords des bandes spectrales de  $H_2$  sont solutions de l'équation  $H_2\psi = E\psi$  sur  $[-L_0, L_0] \times [-L, L]$ , avec conditions aux bords quasi-périodiques :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \psi(x + 2L_0, y + 2L) = e^{i(\frac{\pi}{L_0}\omega_1 + \frac{\pi}{L}\omega_2 + \pi)} \psi(x, y),$$

pour  $(\omega_1, \omega_2) \in \{(0, 0), (-L_0, 0), (0, L), (-L_0, L)\}$ .

On exploite alors la périodicité en la seconde variable de ces modes de Bloch pour effectuer une décomposition en série de Fourier partielle par rapport à celle-ci. Cela conduit à une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$\forall (x, y) \in [-L_0, L_0] \times [-L, L], \psi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^\pm(x) e^{i \frac{2n\pi}{L} y}, \quad (5.104)$$

où , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_n^\pm$  est une solution sur  $[-L_0, L_0]$  de :

$$H_1^\pm a_n^\pm = \left( E - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4n^2 \pi^2}{L^2} \right) a_n^\pm, \quad (5.105)$$

avec

$$H_1^\pm = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \pm V,$$

avec des conditions aux bords assurant que  $\psi$  est dans  $H^2(\mathbb{R}^2)$  et avec les conditions aux bords quasi-périodiques :

$$a_n^\pm(-L_0) = e^{i\omega \frac{\pi}{L_0}} a_n^\pm(L_0), \quad \omega \in [0, L_0].$$

On obtient alors le spectre de  $H_2$  en fonction des bandes spectrales de l'opérateur d'Airy-Schrödinger périodique.

**Théorème 5.3.1.**

$$\sigma(H_2) \subset \bigcup_{i,j \geq 0} \bigcup_{(n,q) \in \mathbb{Z}^2} B_{i,n}^+ \cap B_{j,q}^- \quad (5.106)$$

où

$$B_{i,n}^+ = [E_{\min}^i, E_{\max}^i] + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4n^2 \pi^2}{L^2} \text{ et } B_{j,q}^- = [E_{\min}^j, E_{\max}^j] + V_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4q^2 \pi^2}{L^2}.$$

Pour localiser plus précisément les bandes spectrales de  $H_2$  on peut essayer de déterminer si  $B_{i,n}^+ \cap B_{j,q}^-$  est vide ou non. Introduisons  $d_{i,j}^{n,q}$  la distance entre les intervalles  $B_{i,n}^+$  et  $B_{j,q}^-$ . En utilisant les estimées obtenues au Théorème 5.1.9, on obtient, en conservant les notations de [BL18; BL21] pour les zéros de  $A_i$  et  $A_i'$ ,

$$d_{i,j}^{n,q} = \left| \alpha_i - \alpha_j + \hbar^{-\frac{2}{3}} + 4\pi^2 \hbar^{\frac{4}{3}} \frac{L_0^2}{L^2} (q^2 - n^2) \right| + \mathcal{O} \left( e^{-\frac{4}{3}(\hbar^{-\frac{2}{3}} + \alpha_{\max(i,j)})^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (5.107)$$

Il faut donc analyser si cette distance est nulle ou non en fonction des tailles de  $L_0$  et  $L$ , comparées à une puissance du paramètre semiclassique. Une première discussion heuristique et qui reste à démontrer rigoureusement est la suivante : soit  $\varepsilon > 0$ ,

1. si  $\frac{L_0}{L} = \mathcal{O}(\hbar^{-\varepsilon})$ , pour tout  $i$  et tout  $j$  tels que  $\hbar^{-\frac{2}{3}} > |\alpha_i - \alpha_j|$ , et pour tout  $n$  et tout  $q$ ,  $B_{i,n}^+ \cap B_{j,q}^- = \emptyset$ .

2. Si  $\frac{L_0}{L} = \mathcal{O}(h^{-\frac{2}{3}+\varepsilon})$ , pour tout  $i$  et tout  $j$  et  $n \neq q$ , tels que  $h^{-\frac{2}{3}+\varepsilon} > \left| \frac{\alpha_i - \alpha_j}{4\pi^2(q^2 - n^2)} \right|$ ,

$$B_{i,n}^+ \cap B_{j,q}^- = \emptyset.$$

3. Si  $\frac{L_0}{L} = \mathcal{O}(h^{-\frac{2}{3}})$ , pour tout  $i, j, n$  et  $q$  tels que  $h^{-\frac{2}{3}} > \left| \frac{\alpha_i - \alpha_j}{1+4\pi^2(q^2 - n^2)} \right|$ ,

$$B_{i,n}^+ \cap B_{j,q}^- = \emptyset.$$

Cette première analyse nous dit que pour  $h$  assez petit, deux intervalles  $B_{i,n}^+$  et  $B_{j,q}^-$  loin du bas du spectre de  $H$ , sont toujours disjoints.

L'usage de la transformée de Fourier partielle selon la seconde variable est dans le même esprit que celle faite pour le modèle d'Anderson-Bernoulli sur une bande continue dans le plan présentée dans la Section 1.2.1 et qui nous a conduit à l'introduction des modèles quasi-unidimensionnels.

L'étude plus précise du spectre de  $H_2$  reste à faire et bien entendu, nous voudrions également étudier le spectre de bandes pour des opérateurs plus généraux que  $H_2$  mais faisant toujours intervenir un potentiel  $\mathbb{Z}^2$ -périodique dont les extrema présentent des singularités.



# Bibliographie

## Articles dans des revues à comité de lecture

- [Bou07] Hakim BOUMAZA. « Positivity of Lyapunov exponents for a continuous matrix-valued Anderson model ». In : *Math. Phys. Anal. Geom.* 10.2 (2007), p. 97-122. DOI : [10.1007/s11040-007-9023-6](https://doi.org/10.1007/s11040-007-9023-6).
- [Bou08] Hakim BOUMAZA. « Hölder continuity of the integrated density of states for matrix-valued Anderson models ». In : *Rev. Math. Phys.* 20.7 (2008), p. 873-900. DOI : [10.1142/S0129055X08003456](https://doi.org/10.1142/S0129055X08003456).
- [Bou09a] Hakim BOUMAZA. « A matrix-valued point interactions model ». In : *Lett. Math. Phys.* 87.1-2 (2009), p. 81-97. DOI : [10.1007/s11005-008-0289-9](https://doi.org/10.1007/s11005-008-0289-9).
- [Bou09b] Hakim BOUMAZA. « Localization for a matrix-valued Anderson model ». In : *Math. Phys. Anal. Geom.* 12.3 (2009), p. 255-286. DOI : [10.1007/s11040-009-9061-3](https://doi.org/10.1007/s11040-009-9061-3).
- [Bou10] Hakim BOUMAZA. « Absence de spectre absolument continu pour un opérateur d'Anderson à potentiel d'interaction générique ». In : *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* 348.3-4 (2010), p. 175-179. DOI : [10.1016/j.crma.2010.01.031](https://doi.org/10.1016/j.crma.2010.01.031).
- [Bou13] Hakim BOUMAZA. « Localization for an Anderson-Bernoulli model with generic interaction potential ». In : *Tohoku Math. J. (2)* 65.1 (2013), p. 57-74. DOI : [10.2748/tmj/1365452625](https://doi.org/10.2748/tmj/1365452625).
- [BL18] Hakim BOUMAZA et Olivier LAFITTE. « The band spectrum of the periodic Airy-Schrödinger operator on the real line ». In : *J. Differ. Equations* 264.1 (2018), p. 455-505. DOI : [10.1016/j.jde.2017.09.013](https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.013).
- [BL21] Hakim BOUMAZA et Olivier LAFITTE. « Integrated density of states : from the finite range to the periodic Airy-Schrödinger operator ». In : *J. Math. Phys.* 62.4 (2021), p. 043503, 22. DOI : [10.1063/5.0015181](https://doi.org/10.1063/5.0015181).
- [BM15] Hakim BOUMAZA et Laurent MARIN. « Absence of absolutely continuous spectrum for random scattering zippers ». In : *J. Math. Phys.* 56.2 (2015), p. 022701, 13. DOI : [10.1063/1.4906809](https://doi.org/10.1063/1.4906809).
- [BN15] Hakim BOUMAZA et Hatem NAJAR. « Lifshitz tails for continuous matrix-valued Anderson models ». In : *J. Stat. Phys.* 160.2 (2015), p. 371-396. DOI : [10.1007/s10955-015-1255-4](https://doi.org/10.1007/s10955-015-1255-4).

- [BS07] Hakim BOUMAZA et Günter STOLZ. « Positivity of Lyapunov exponents for Anderson-type models on two coupled strings ». In : *Electron. J. Differ. Equ.* 2007 (2007). Id/No 47, p. 18.

## Actes de conférences

- [BL15] Hakim BOUMAZA et Olivier LAFITTE. « An exactly solvable non C1 periodic potential ». In : *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2015 St-Petersbourg Russia*. IEEE, 2015, p. 62-66. DOI : [10.1109/DD.2015.7354833](https://doi.org/10.1109/DD.2015.7354833).
- [BL16] Hakim BOUMAZA et Olivier LAFITTE. « Description of the spectral bands for some 2D periodic Schrödinger operators ». In : *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2016 St-Petersbourg Russia*. IEEE, 2016, p. 79-83. DOI : [10.1109/DD.2016.7756818](https://doi.org/10.1109/DD.2016.7756818).

## Article de vulgarisation

- [Bou14a] Hakim BOUMAZA. *Désordre dans les cristaux et localisation d'Anderson*. Site de l'INSMI, année de la cristallographie. 2014. URL : <http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article992>.

## Bibliographie générale

- [Abd+17] Houssam ABDUL-RAHMAN et al. « Localization properties of the disordered XY spin chain ». In : *Ann. Phys., Berlin* 529.7 (2017). Id/No 1600280, p. 17. DOI : [10.1002/andp.201600280](https://doi.org/10.1002/andp.201600280).
- [ASR88] Milton ABRAMOWITZ, Irene A. STEGUN et Robert H. ROMER. « Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables ». In : *American Journal of Physics* 56.10 (1988), p. 958-958. DOI : [10.1119/1.15378](https://doi.org/10.1119/1.15378).
- [AM93] Michael AIZENMAN et Stanislav MOLCHANOV. « Localization at large disorder and at extreme energies : an elementary derivation ». In : *Commun. Math. Phys.* 157.2 (1993), p. 245-278. DOI : [10.1007/BF02099760](https://doi.org/10.1007/BF02099760).
- [ASW06] Michael AIZENMAN, Robert SIMS et Simone WARZEL. « Absolutely continuous spectra of quantum tree graphs with weak disorder ». In : *Commun. Math. Phys.* 264.2 (2006), p. 371-389. DOI : [10.1007/s00220-005-1468-5](https://doi.org/10.1007/s00220-005-1468-5).
- [AW13] Michael AIZENMAN et Simone WARZEL. « Resonant delocalization for random Schrödinger operators on tree graphs ». In : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 15.4 (2013), p. 1167-1222. DOI : [10.4171/JEMS/389](https://doi.org/10.4171/JEMS/389).
- [AW15] Michael AIZENMAN et Simone WARZEL. *Random operators. Disorder effects on quantum spectra and dynamics*. T. 168. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2015, p. xiv + 326. ISBN : 978-1-4704-1913-4.
- [Alb+05] Sergio ALBEVERIO et al. *Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner*. Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 2005, p. xiv + 488. ISBN : 0-8218-3624-2.
- [AS19] Nalini ANANTHARAMAN et Mostafa SABRI. « Quantum ergodicity on graphs : from spectral to spatial delocalization ». In : *Ann. Math. (2)* 189.3 (2019), p. 753-835. DOI : [10.4007/annals.2019.189.3.3](https://doi.org/10.4007/annals.2019.189.3.3).
- [And58] P. W. ANDERSON. « Absence of Diffusion in Certain Random Lattices ». In : *Phys. Rev.* 109 (5 mars 1958), p. 1492-1505. DOI : [10.1103/PhysRev.109.1492](https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492).
- [Arn98] Ludwig ARNOLD. *Random dynamical systems*. Berlin : Springer, 1998, p. xi + 586. ISBN : 3-540-63758-3.
- [ABJ10] Joachim ASCH, Olivier BOURGET et Alain JOYE. « Localization properties of the Chalker-Coddington model ». In : *Ann. Henri Poincaré* 11.7 (2010), p. 1341-1373. DOI : [10.1007/s00023-010-0056-1](https://doi.org/10.1007/s00023-010-0056-1).
- [AS83] Joseph AVRON et Barry SIMON. « Almost periodic Schrödinger operators. II : The integrated density of states ». In : *Duke Math. J.* 50 (1983), p. 369-391. DOI : [10.1215/S0012-7094-83-05016-0](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05016-0).



- [BGV15] Ilia BINDER, Michael GOLDSTEIN et Mircea VODA. « On fluctuations and localization length for the Anderson model on a strip ». In : *J. Spectr. Theory* 5.1 (2015), p. 193-225. DOI : [10.4171/JST/94](https://doi.org/10.4171/JST/94).
- [BGV17] Ilia BINDER, Michael GOLDSTEIN et Mircea VODA. « On the sum of the non-negative Lyapunov exponents for some cocycles related to the Anderson model ». In : *Ergodic Theory Dyn. Syst.* 37.2 (2017), p. 369-388. DOI : [10.1017/etds.2015.59](https://doi.org/10.1017/etds.2015.59).
- [BB88] Gianni BLATTER et Dana A. BROWNE. « Zener tunneling and localization in small conducting rings ». In : *Phys. Rev. B* 37 (8 mars 1988), p. 3856-3880. DOI : [10.1103/PhysRevB.37.3856](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.37.3856).
- [BP19] Jean-François BONY et Nicolas POPOFF. « Low-lying eigenvalues of semiclassical Schrödinger operator with degenerate wells ». In : *Asymptotic Anal.* 112.1-2 (2019), p. 23-36. DOI : [10.3233/ASY-181493](https://doi.org/10.3233/ASY-181493).
- [BL85] Philippe BOUGEROL et Jean LACROIX. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*. T. 8. Birkhäuser, Boston, MA, 1985.
- [BR04] L. BOULTON et A. RESTUCCIA. « The heat kernel of the compactified D=11 supermembrane with non-trivial winding ». In : *Nuclear Physics B* 724 (mai 2004), p. 380-396. DOI : [10.1016/j.nuclphysb.2005.07.004](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.07.004).
- [Bou14b] J. BOURGAIN. « An application of group expansion to the Anderson-Bernoulli model ». In : *Geom. Funct. Anal.* 24.1 (2014), p. 49-62. DOI : [10.1007/s00039-014-0260-0](https://doi.org/10.1007/s00039-014-0260-0).
- [Bou14c] Jean BOURGAIN. « On the local eigenvalue spacings for certain Anderson-Bernoulli Hamiltonians ». In : *Geometric aspects of functional analysis. Proceedings of the Israel seminar (GAFA) 2011–2013*. Cham : Springer, 2014, p. 85-96. ISBN : 978-3-319-09476-2; 978-3-319-09477-9. DOI : [10.1007/978-3-319-09477-9\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-09477-9_7).
- [BK05] Jean BOURGAIN et Carlos E. KENIG. « On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension ». In : *Invent. Math.* 161.2 (2005), p. 389-426. DOI : [10.1007/s00222-004-0435-7](https://doi.org/10.1007/s00222-004-0435-7).
- [BHJ03] Olivier BOURGET, James S. HOWLAND et Alain JOYE. « Spectral analysis of unitary band matrices ». In : *Commun. Math. Phys.* 234.2 (2003), p. 191-227. DOI : [10.1007/s00220-002-0751-y](https://doi.org/10.1007/s00220-002-0751-y).
- [Bov+88] Anton BOVIER et al. « Smoothness of the density of states in the Anderson model at high disorder ». In : *Commun. Math. Phys.* 114.3 (1988), p. 439-461. DOI : [10.1007/BF01242138](https://doi.org/10.1007/BF01242138).
- [Bre06] E. BREUILLARD. *Cours Peccot 2006, Propriétés qualitatives des groupes discrets*. 2006. URL : <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~breuilla/Peccot4.pdf>.
- [BG03] E. BREUILLARD et T. GELANDER. « On dense free subgroups of Lie groups ». In : *J. Algebra* 261.2 (2003), p. 448-467. DOI : [10.1016/S0021-8693\(02\)00675-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8693(02)00675-0).

- [Buc+19a] Valmir BUCAJ et al. « Localization for the one-dimensional Anderson model via positivity and large deviations for the Lyapunov exponent ». In : *Trans. Am. Math. Soc.* 372.5 (2019), p. 3619-3667. DOI : [10.1090/tran/7832](https://doi.org/10.1090/tran/7832).
- [Buc+19b] Valmir BUCAJ et al. « Positive Lyapunov exponents and a large deviation theorem for continuum Anderson models, briefly ». In : *J. Funct. Anal.* 277.9 (2019), p. 3179-3186. DOI : [10.1016/j.jfa.2019.05.028](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.05.028).
- [CK86] Massimo CAMPANINO et Abel KLEIN. « A supersymmetric transfer matrix and differentiability of the density of states in the one-dimensional Anderson model ». In : *Commun. Math. Phys.* 104 (1986), p. 227-241. DOI : [10.1007/BF01211591](https://doi.org/10.1007/BF01211591).
- [CMV03] M. J. CANTERO, L. MORAL et L. VELÁZQUEZ. « Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle ». In : *Linear Algebra Appl.* 362 (2003), p. 29-56. DOI : [10.1016/S0024-3795\(02\)00457-3](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00457-3).
- [Car82] Rene CARMONA. « Exponential localization in one dimensional disordered systems ». In : *Duke Math. J.* 49 (1982), p. 191-213. DOI : [10.1215/S0012-7094-82-04913-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-82-04913-4).
- [CKM87] Rene CARMONA, Abel KLEIN et Fabio MARTINELLI. « Anderson localization for Bernoulli and other singular potentials ». In : *Commun. Math. Phys.* 108 (1987), p. 41-66. DOI : [10.1007/BF01210702](https://doi.org/10.1007/BF01210702).
- [CL90] René CARMONA et Jean LACROIX. *Spectral theory of random Schrödinger operators*. Basel etc. : Birkhäuser Verlag, 1990, p. xxvi + 587. ISBN : 0-8176-3486-X.
- [CW21] C. CEDZICH et A. H. WERNER. « Anderson localization for electric quantum walks and skew-shift CMV matrices ». In : *Commun. Math. Phys.* 387.3 (2021), p. 1257-1279. DOI : [10.1007/s00220-021-04204-w](https://doi.org/10.1007/s00220-021-04204-w).
- [CS15] Jacob CHAPMAN et Günter STOLZ. « Localization for random block operators related to the XY spin chain ». In : *Ann. Henri Poincaré* 16.2 (2015), p. 405-435. DOI : [10.1007/s00023-014-0328-2](https://doi.org/10.1007/s00023-014-0328-2).
- [CK06] Dmitri CHELKAK et Evgeny KOROTYAEV. « Spectral estimates for Schrödinger operators with periodic matrix potentials on the real line ». In : *Int. Math. Res. Not.* 2006.7 (2006). Id/No 60314, p. 41. DOI : [10.1155/IMRN/2006/60314](https://doi.org/10.1155/IMRN/2006/60314).
- [CL55] Earl A. CODDINGTON et Norman LEVINSON. *Theory of ordinary differential equations*. New York, Toronto, London : McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955). 1955.
- [Com+02] J. M. COMBES et al. « The Wegner estimate and the integrated density of states for some random operators ». In : *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.* 112.1 (2002), p. 31-53. DOI : [10.1007/BF02829639](https://doi.org/10.1007/BF02829639).

- [CH94] J.-M. COMBES et P. D. HISLOP. « Localization for some continuous, random Hamiltonians in  $d$ -dimensions ». In : *J. Funct. Anal.* 124.1 (1994), p. 149-180. DOI : [10.1006/jfan.1994.1103](https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1103).
- [CHK03] Jean-Michel COMBES, Peter D. HISLOP et Frédéric KLOPP. « Hölder continuity of the integrated density of states for some random operators at all energies ». In : *Int. Math. Res. Not.* 2003.4 (2003), p. 179-209. DOI : [10.1155/S1073792803202099](https://doi.org/10.1155/S1073792803202099).
- [CHK07] Jean-Michel COMBES, Peter D. HISLOP et Frédéric KLOPP. « An optimal Wegner estimate and its application to the global continuity of the integrated density of states for random Schrödinger operators ». In : *Duke Math. J.* 140.3 (2007), p. 469-498. DOI : [10.1215/S0012-7094-07-14032-8](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-07-14032-8).
- [CS83a] W. CRAIG et B. SIMON. « Subharmonicity of the Lyapunov index ». In : *Duke Math. J.* 50 (1983), p. 551-560. DOI : [10.1215/S0012-7094-83-05025-1](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05025-1).
- [CS83b] Walter CRAIG et Barry SIMON. « Log Hölder continuity of the integrated density of states for stochastic Jacobi matrices ». In : *Commun. Math. Phys.* 90 (1983), p. 207-218. DOI : [10.1007/BF01205503](https://doi.org/10.1007/BF01205503).
- [Cyc+87] H. L. CYCON et al. *Schrödinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry*. Springer Study edition. Texts and Monographs in Physics. Berlin etc. : Springer-Verlag. ix, 319 p. 1987.
- [DS01] D. DAMANIK et P. STOLLMANN. « Multi-scale analysis implies strong dynamical localization ». In : *Geom. Funct. Anal.* 11.1 (2001), p. 11-29. DOI : [10.1007/PL00001666](https://doi.org/10.1007/PL00001666).
- [DPS08] David DAMANIK, Alexander PUSHNITSKI et Barry SIMON. « The analytic theory of matrix orthogonal polynomials ». In : *Surv. Approx. Theory* 4 (2008), p. 1-85.
- [DSS02] David DAMANIK, Robert SIMS et Günter STOLZ. « Localization for one-dimensional, continuum, Bernoulli-Anderson models. » In : *Duke Math. J.* 114.1 (2002), p. 59-100. DOI : [10.1215/S0012-7094-02-11414-8](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-02-11414-8).
- [DS84] François DELYON et Bernard SOUILLARD. « Remark on the continuity of the density of states of ergodic finite difference operators ». In : *Commun. Math. Phys.* 94 (1984), p. 289-291. DOI : [10.1007/BF01209306](https://doi.org/10.1007/BF01209306).
- [DE21] Adrian DIETLEIN et Alexander ELGART. « Level spacing and Poisson statistics for continuum random Schrödinger operators ». In : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 23.4 (2021), p. 1257-1293. DOI : [10.4171/JEMS/1033](https://doi.org/10.4171/JEMS/1033).
- [DS99] Mouez DIMASSI et Johannes SJÖSTRAND. *Spectral asymptotics in the semiclassical limit*. T. 268. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. Cambridge : Cambridge University Press, 1999. ISBN : 0-521-66544-2.
- [DS20] Jian DING et Charles K. SMART. « Localization near the edge for the Anderson Bernoulli model on the two dimensional lattice ». In : *Invent. Math.* 219.2 (2020), p. 467-506. DOI : [10.1007/s00222-019-00910-4](https://doi.org/10.1007/s00222-019-00910-4).

- [Dis+08] Margherita DISERTORI et al. *Random Schrödinger operators*. T. 25. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2008, p. xiv + 213. ISBN : 978-2-85629-254-9.
- [DF11] John D. DOLLARD et Charles N. FRIEDMAN. *Product integration with applications to differential equations. Foreword by Felix E. Browder. Appendix by P. R. Masani*. T. 10. Cambridge : Cambridge University Press, 2011, p. xxii + 253. ISBN : 978-0-521-17737-5.
- [DK89] Henrike von DREIFUS et Abel KLEIN. « A new proof of localization in the Anderson tight binding model ». In : *Commun. Math. Phys.* 124.2 (1989), p. 285-299. DOI : [10.1007/BF01219198](https://doi.org/10.1007/BF01219198).
- [DL20] Laure DUMAZ et Cyril LABBÉ. « Localization of the continuous Anderson Hamiltonian in 1-d ». In : *Probab. Theory Relat. Fields* 176.1-2 (2020), p. 353-419. DOI : [10.1007/s00440-019-00920-6](https://doi.org/10.1007/s00440-019-00920-6).
- [DL21a] Laure DUMAZ et Cyril LABBÉ. *Localization crossover for the continuous Anderson Hamiltonian in 1-d*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2102.09316](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2102.09316).
- [DL21b] Laure DUMAZ et Cyril LABBÉ. *The delocalized phase of the Anderson Hamiltonian in 1-d*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2102.05393](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2102.05393).
- [EK16] Alexander ELGART et Abel KLEIN. « An eigensystem approach to Anderson localization ». In : *J. Funct. Anal.* 271.12 (2016), p. 3465-3512. DOI : [10.1016/j.jfa.2016.09.008](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.09.008).
- [Flü99] Siegfried FLÜGGE. *Practical quantum mechanics. Translated from the German*. Reprint of the 1994 edition, originally published as Vol. 177 and 178 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 1971. Class. Math. Berlin : Springer, 1999. ISBN : 978-3-540-65035-5; 978-3-642-61995-3. DOI : [10.1007/978-3-642-61995-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61995-3).
- [FM03] E. FRANCHINI et M. MAIOLI. « Feynman integrals with point interactions ». In : *Comput. Math. Appl.* 46.5-6 (2003), p. 685-694. DOI : [10.1016/S0898-1221\(03\)90134-9](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)90134-9).
- [Frö+85] J. FRÖHLICH et al. « Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model ». In : *Commun. Math. Phys.* 101 (1985), p. 21-46. DOI : [10.1007/BF01212355](https://doi.org/10.1007/BF01212355).
- [FS83] Jürg FRÖHLICH et Thomas SPENCER. « Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy ». In : *Commun. Math. Phys.* 88 (1983), p. 151-184. DOI : [10.1007/BF01209475](https://doi.org/10.1007/BF01209475).
- [Fur63] H. FURSTENBERG. « Noncommuting random products ». In : *Trans. Am. Math. Soc.* 108 (1963), p. 377-428. DOI : [10.2307/1993589](https://doi.org/10.2307/1993589).
- [FK60] H. FURSTENBERG et H. KESTEN. « Products of random matrices ». In : *Ann. Math. Stat.* 31 (1960), p. 457-469. DOI : [10.1214/aoms/1177705909](https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909).
- [GGM00] Yi GAO, Yuri GEORGIEVSKII et Rudolph MARCUS. « On the theory of electron transfer reactions at semiconductor electrode/liquid interfaces ». In : *Journal of Chemical Physics* 112 (fév. 2000). DOI : [10.1063/1.480918](https://doi.org/10.1063/1.480918).

- [GGG17] Giuseppe GENOVESE, Giambattista GIACOMIN et Rafael Leon GREENBLATT. « Singular behavior of the leading Lyapunov exponent of a product of random  $2 \times 2$  matrices ». In : *Commun. Math. Phys.* 351.3 (2017), p. 923-958. DOI : [10.1007/s00220-017-2855-4](https://doi.org/10.1007/s00220-017-2855-4).
- [GK01] François GERMINET et Abel KLEIN. « Bootstrap multiscale analysis and localization in random media ». In : *Commun. Math. Phys.* 222.2 (2001), p. 415-448. DOI : [10.1007/s002200100518](https://doi.org/10.1007/s002200100518).
- [GK04] François GERMINET et Abel KLEIN. « A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition ». In : *Duke Math. J.* 124.2 (2004), p. 309-350. DOI : [10.1215/S0012-7094-04-12423-6](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-04-12423-6).
- [GKS07] François GERMINET, Abel KLEIN et Jeffrey H. SCHENKER. « Dynamical delocalization in random Landau Hamiltonians ». In : *Ann. Math. (2)* 166.1 (2007), p. 215-244. DOI : [10.4007/annals.2007.166.215](https://doi.org/10.4007/annals.2007.166.215).
- [GK13] François GERMINET et Frédéric KLOPP. « Enhanced Wegner and Minami estimates and eigenvalue statistics of random Anderson models at spectral edges ». In : *Ann. Henri Poincaré* 14.5 (2013), p. 1263-1285. DOI : [10.1007/s00023-012-0217-5](https://doi.org/10.1007/s00023-012-0217-5).
- [GK14] François GERMINET et Frédéric KLOPP. « Spectral statistics for random Schrödinger operators in the localized regime ». In : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 16.9 (2014), p. 1967-2031. DOI : [10.4171/JEMS/481](https://doi.org/10.4171/JEMS/481).
- [GMR15] François GERMINET, Peter MÜLLER et Constanza ROJAS-MOLINA. « Ergodicity and dynamical localization for Delone-Anderson operators ». In : *Rev. Math. Phys.* 27.9 (2015). Id/No 1550020, p. 36. DOI : [10.1142/S0129055X15500208](https://doi.org/10.1142/S0129055X15500208).
- [Gla90] Clemens GLAFFIG. « Smoothness of the integrated density of states on strips ». In : *J. Funct. Anal.* 92.2 (1990), p. 509-534. DOI : [10.1016/0022-1236\(90\)90061-0](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90061-0).
- [GM89] I. Ya. GOL'DSHEJD et G. A. MARGULIS. « Lyapunov indices of a product of random matrices ». In : *Russ. Math. Surv.* 44.5 (1989), p. 11-71. DOI : [10.1070/RM1989v044n05ABEH002214](https://doi.org/10.1070/RM1989v044n05ABEH002214).
- [GMP77] I. Ya. GOL'DSHEJD, S. A. MOLCHANOV et L. A. PASTUR. « A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operator ». In : *Funct. Anal. Appl.* 11 (1977), p. 1-8. DOI : [10.1007/BF01135526](https://doi.org/10.1007/BF01135526).
- [Gol95] I. Ya. GOLDSHEID. « Zariski closure of subgroups of the symplectic group and Lyapunov exponents of the Schrödinger operator on the strip ». In : *Commun. Math. Phys.* 174.2 (1995), p. 347-365. DOI : [10.1007/BF02099606](https://doi.org/10.1007/BF02099606).
- [GK21] Anton GORODETSKI et Victor KLEPTSYN. « Parametric Furstenberg theorem on random products of  $SL(2, \mathbb{R})$  matrices ». In : *Adv. Math.* 378 (2021). Id/No 107522, p. 82. DOI : [10.1016/j.aim.2020.107522](https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107522).

- [GR85] Yves GUIVARC'H et Albert RAUGI. « Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence ». In : *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* 69 (1985), p. 187-242. DOI : [10.1007/BF02450281](https://doi.org/10.1007/BF02450281).
- [HJS09] Eman HAMZA, Alain JOYE et Günter STOLZ. « Dynamical localization for unitary Anderson models ». In : *Math. Phys. Anal. Geom.* 12.4 (2009), p. 381-444. DOI : [10.1007/s11040-009-9068-9](https://doi.org/10.1007/s11040-009-9068-9).
- [HSS10] Eman HAMZA, Robert SIMS et Günter STOLZ. « A note on fractional moments for the one-dimensional continuum Anderson model ». In : *J. Math. Anal. Appl.* 365.2 (2010), p. 435-446. DOI : [10.1016/j.jmaa.2009.11.005](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.11.005).
- [HS07] Eman HAMZA et Günter STOLZ. « Lyapunov exponents for unitary Anderson models ». In : *J. Math. Phys.* 48.4 (2007), p. 043301, 16. DOI : [10.1063/1.2713996](https://doi.org/10.1063/1.2713996).
- [Har79] Evans M HARRELL. « The band-structure of a one-dimensional, periodic system in a scaling limit ». In : *Annals of Physics* 119.2 (1979), p. 351-369. DOI : [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90191-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90191-X).
- [HMR87] B. HELFFER, A. MARTINEZ et D. ROBERT. « Ergodicité et limite semi-classique. (Ergodicity and semi-classical limit) ». In : *Commun. Math. Phys.* 109 (1987), p. 313-326. DOI : [10.1007/BF01215225](https://doi.org/10.1007/BF01215225).
- [HL07] Bernard HELFFER et Olivier LAFITTE. « The semiclassical regime for ablation front models ». In : *Arch. Ration. Mech. Anal.* 183.3 (2007), p. 371-409. DOI : [10.1007/s00205-006-0006-8](https://doi.org/10.1007/s00205-006-0006-8).
- [His08] Peter D. HISLOP. « Lectures on random Schrödinger operators ». In : *Fourth summer school in analysis and mathematical physics. Topics in spectral theory and quantum mechanics, Cuernavaca, México, May 2005*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2008, p. 41-131. ISBN : 978-0-8218-4064-1.
- [HK15] Peter D. HISLOP et M. KRISHNA. « Eigenvalue statistics for random Schrödinger operators with non rank one perturbations ». In : *Commun. Math. Phys.* 340.1 (2015), p. 125-143. DOI : [10.1007/s00220-015-2426-5](https://doi.org/10.1007/s00220-015-2426-5).
- [HKS21] Peter D. HISLOP, Maddaly KRISHNA et Christopher SHIRLEY. « Decorrelation estimates for random Schrödinger operators with non rank one perturbations ». In : *J. Spectr. Theory* 11.1 (2021), p. 63-89. DOI : [10.4171/JST/336](https://doi.org/10.4171/JST/336).
- [Hoc61] Harry HOCHSTADT. « Asymptotic estimates for the Sturm-Liouville spectrum ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 14.4 (1961), p. 749-764. DOI : <https://doi.org/10.1002/cpa.3160140408>.

- [Ivr19] Victor IVRII. « Complete Semiclassical Spectral Asymptotics for Periodic and Almost Periodic Perturbations of Constant Operators ». In : *Microlocal Analysis, Sharp Spectral Asymptotics and Applications V : Applications to Quantum Theory and Miscellaneous Problems*. Cham : Springer International Publishing, 2019, p. 583-606. ISBN : 978-3-030-30561-1. DOI : [10.1007/978-3-030-30561-1\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-30561-1_34).
- [JSS03] S. JITOMIRSKAYA, H. SCHULZ-BALDES et G. STOLZ. « Delocalization in random polymer models ». In : *Commun. Math. Phys.* 233.1 (2003), p. 27-48. DOI : [10.1007/s00220-002-0757-5](https://doi.org/10.1007/s00220-002-0757-5).
- [JZ19] Svetlana JITOMIRSKAYA et Xiaowen ZHU. « Large deviations of the Lyapunov exponent and localization for the 1D Anderson model ». In : *Commun. Math. Phys.* 370.1 (2019), p. 311-324. DOI : [10.1007/s00220-019-03502-8](https://doi.org/10.1007/s00220-019-03502-8).
- [Joy04] Alain JOYE. « Density of states and Thouless formula for random unitary band matrices ». In : *Ann. Henri Poincaré* 5.2 (2004), p. 347-379. DOI : [10.1007/s00023-004-0172-x](https://doi.org/10.1007/s00023-004-0172-x).
- [Joy05] Alain JOYE. « Fractional moment estimates for random unitary operators ». In : *Lett. Math. Phys.* 72.1 (2005), p. 51-64. DOI : [10.1007/s11005-005-3256-8](https://doi.org/10.1007/s11005-005-3256-8).
- [Joy11] Alain JOYE. « Random unitary models and their localization properties ». In : *Entropy and the quantum II. 2nd Arizona school of analysis with applications, University of Arizona, Tucson, AZ, USA, March 15–19, 2010*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2011, p. 117-134. ISBN : 978-0-8218-6898-0.
- [Kar19] Saurav KAR. « Effect of Out-Tunneling Leakage and Electron-Hole Asymmetry on Modulation Response of Semiconductor Double Tunneling-Injection Quantum Dot Lasers ». Thèse de doct. Jan. 2019.
- [Kar00] Yulia E. KARPESHINA. « On the density of states for the periodic Schrödinger operator ». In : *Ark. Mat.* 38.1 (2000), p. 111-137. DOI : [10.1007/BF02384494](https://doi.org/10.1007/BF02384494).
- [KS09] Rowan KILLIP et Mihai STOICIU. « Eigenvalue statistics for CMV matrices : From Poisson to clock via random matrix ensembles ». In : *Duke Math. J.* 146.3 (2009), p. 361-399. DOI : [10.1215/00127094-2009-001](https://doi.org/10.1215/00127094-2009-001).
- [Kin73] J. F. C. KINGMAN. « Subadditive ergodic theory ». In : *Ann. Probab.* 1 (1973), p. 883-909. DOI : [10.1214/aop/1176996798](https://doi.org/10.1214/aop/1176996798).
- [Kir85] W. KIRSCH. « On a class of random Schrödinger operators ». In : *Adv. Appl. Math.* 6 (1985), p. 177-187. DOI : [10.1016/0196-8858\(85\)90010-7](https://doi.org/10.1016/0196-8858(85)90010-7).
- [KS86] W. KIRSCH et B. SIMON. « Lifshitz tails for periodic plus random potentials ». In : *J. Stat. Phys.* 42 (1986), p. 799-808. DOI : [10.1007/BF01010445](https://doi.org/10.1007/BF01010445).

- [Kir89] Werner KIRSCH. *Random Schrödinger operators*. Schrödinger operators, Proc. Nord. Summer Sch. Math., Sandbjerg Slot, Sønderborg Denmark 1988, Lect. Notes Phys. 345, 264-370. 1989.
- [KM83] Werner KIRSCH et Fabio MARTINELLI. « Large deviations and Lifshitz singularity of the integrated density of states of random Hamiltonians ». In : *Commun. Math. Phys.* 89 (1983), p. 27-40. DOI : [10.1007/BF01219524](https://doi.org/10.1007/BF01219524).
- [KM07] Werner KIRSCH et Bernd METZGER. « The integrated density of states for random Schrödinger operators ». In : *Spectral theory and mathematical physics. A festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday. Ergodic Schrödinger operators, singular spectrum, orthogonal polynomials, and inverse spectral theory. Based on the SimonFest conference, Pasadena, CA, USA, March 27-31, 2006*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2007, p. 649-696. ISBN : 978-0-8218-4249-2; 978-0-8218-3783-2.
- [KS87a] Werner KIRSCH et Barry SIMON. « Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators ». In : *J. Funct. Anal.* 75 (1987), p. 396-410. DOI : [10.1016/0022-1236\(87\)90103-0](https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90103-0).
- [Kle98] Abel KLEIN. « Extended states in the Anderson model on the Bethe lattice ». In : *Adv. Math.* 133.1 (1998), p. 163-184. DOI : [10.1006/aima.1997.1688](https://doi.org/10.1006/aima.1997.1688).
- [Kle08] Abel KLEIN. « Multiscale analysis and localization of random operators ». In : *Random Schrödinger operators*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2008, p. 221-259. ISBN : 978-2-85629-254-9.
- [KLS89] Abel KLEIN, Jean LACROIX et Athanasios SPEIS. « Regularity of the density of states in the Anderson model on a strip for potentials with singular continuous distributions ». In : *J. Stat. Phys.* 57.1-2 (1989), p. 65-88. DOI : [10.1007/BF01023635](https://doi.org/10.1007/BF01023635).
- [KLS90] Abel KLEIN, Jean LACROIX et Athanasios SPEIS. « Localization for the Anderson model on a strip with singular potentials ». In : *J. Funct. Anal.* 94.1 (1990), p. 135-155. DOI : [10.1016/0022-1236\(90\)90031-F](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90031-F).
- [KS88a] Abel KLEIN et Athanasios SPEIS. « Smoothness of the density of states in the Anderson model on a one-dimensional strip ». In : *Ann. Phys.* 183.2 (1988), p. 352-398. DOI : [10.1016/0003-4916\(88\)90238-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(88)90238-2).
- [KF16] F. KLOPP et A. A. FEDOTOV. « Stark-Wannier ladders and cubic exponential sums ». In : *Funct. Anal. Appl.* 50.3 (2016), p. 233-236. DOI : [10.1007/s10688-016-0152-1](https://doi.org/10.1007/s10688-016-0152-1).
- [Klo95] Frédéric KLOPP. « Localization for some continuous random Schrödinger operators ». In : *Commun. Math. Phys.* 167.3 (1995), p. 553-569. DOI : [10.1007/BF02101535](https://doi.org/10.1007/BF02101535).
- [Klo01] Frédéric KLOPP. « Internal Lifshits tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators. » In : *Duke Math. J.* 98.2 (2001), p. 335-396. DOI : [10.1215/S0012-7094-99-09810-1](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09810-1).



- [Klo02] Frédéric KLOPP. « Internal Lifshitz tails for Schrödinger operators with random potentials. » In : *J. Math. Phys.* 43.6 (2002), p. 2948-2958. DOI : [10.1063/1.1470706](https://doi.org/10.1063/1.1470706).
- [Klo14] Frédéric KLOPP. « Inverse tunneling estimates and applications to the study of spectral statistics of random operators on the real line ». In : *J. Reine Angew. Math.* 690 (2014), p. 79-113. DOI : [10.1515/crelle-2012-0026](https://doi.org/10.1515/crelle-2012-0026).
- [Kni81] Frank B. KNIGHT. *Essentials of Brownian motion and diffusion*. T. 18. Math. Surv. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1981.
- [KS00] Vadim KOSTRYKIN et Robert SCHRADER. « Global bounds for the Lyapunov exponent and the integrated density of states of random Schrödinger operators in one dimension ». In : *J. Phys. A, Math. Gen.* 33.46 (2000), p. 8231-8240. DOI : [10.1088/0305-4470/33/46/306](https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/46/306).
- [KS87b] S. KOTANI et B. SIMON. « Localization in general one-dimensional random systems. II : Continuum Schrödinger operators ». In : *Commun. Math. Phys.* 112 (1987), p. 103-119. DOI : [10.1007/BF01217682](https://doi.org/10.1007/BF01217682).
- [KS88b] S. KOTANI et B. SIMON. « Stochastic Schrödinger operators and Jacobi matrices on the strip ». In : *Commun. Math. Phys.* 119.3 (1988), p. 403-429. DOI : [10.1007/BF01218080](https://doi.org/10.1007/BF01218080).
- [Kot84] Shinichi KOTANI. *Ljapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators*. Stochastic analysis, Proc. Taniguchi Int. Symp., Katata & Kyoto/Jap. 1982, North-Holland Math. Libr. 32, 225-247 (1984). 1984.
- [KS80] Herve KUNZ et Bernard SOUILLARD. « Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires ». In : *Commun. Math. Phys.* 78 (1980), p. 201-246. DOI : [10.1007/BF01942371](https://doi.org/10.1007/BF01942371).
- [Lax02] Peter D. LAX. *Functional analysis*. Pure Appl. Math., Wiley-Intersci. Ser. Texts Monogr. Tracts. Chichester : Wiley, 2002. ISBN : 0-471-55604-1.
- [Le 84] Emile LE PAGE. *Repartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire. Distribution empirique des valeurs propres d'une matrice de Jacobi*. Probability measures on groups VII, Proc. Conf., Oberwolfach 1983, Lect. Notes Math. 1064, 309-367 (1984). 1984.
- [Leo+15] Karsten LEONHARDT et al. « Wegner estimate and localization for alloy-type models with sign-changing exponentially decaying single-site potentials ». In : *Rev. Math. Phys.* 27.4 (2015). Id/No 1550007, p. 45. DOI : [10.1142/S0129055X15500075](https://doi.org/10.1142/S0129055X15500075).
- [LZ22] Linjun LI et Lingfu ZHANG. « Anderson-Bernoulli localization on the three-dimensional lattice and discrete unique continuation principle ». In : *Duke Math. J.* 171.2 (2022), p. 327-415. DOI : [10.1215/00127094-2021-0038](https://doi.org/10.1215/00127094-2021-0038).

- [Lif65] Il'ya Mikhailovich LIFSHITZ. « Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems ». In : *Soviet Physics Uspekhi* 7.4 (1965), p. 549.
- [Lif63] IM LIFSHITZ. « Structure of the energy spectrum of impurity bands in disordered solid solutions ». In : *Sov. Phys. JETP* 17.1159 (1963), p. 54.
- [LF86] Wayne W. LUI et Masao FUKUMA. « Exact solution of the Schrodinger equation across an arbitrary one-dimensional piecewise-linear potential barrier ». In : *Journal of Applied Physics* 60.5 (1986), p. 1555-1559. DOI : [10.1063/1.337788](https://doi.org/10.1063/1.337788).
- [MS21] Davide MACERA et Sasha SODIN. *Anderson localisation for quasi - one - dimensional random operators*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2110.00097](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2110.00097).
- [MS13] Laurent MARIN et Hermann SCHULZ-BALDES. « Scattering zippers and their spectral theory ». In : *J. Spectr. Theory* 3.1 (2013), p. 47-82. DOI : [10.4171/JST/37](https://doi.org/10.4171/JST/37).
- [MS85] F. MARTINELLI et E. SCOPPOLA. « Remark on the absence of absolutely continuous spectrum for d-dimensional Schrödinger operators with random potential for large disorder or low energy ». In : *Commun. Math. Phys.* 97.3 (1985), p. 465-471. DOI : [10.1007/BF01213410](https://doi.org/10.1007/BF01213410).
- [MH84] Fabio MARTINELLI et Helge HOLDEN. « On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on  $L^2(\mathbb{R}^v)^+$  ». In : *Commun. Math. Phys.* 93 (1984), p. 197-217. DOI : [10.1007/BF01223744](https://doi.org/10.1007/BF01223744).
- [Mar02] André MARTINEZ. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Universitext. New York, NY : Springer, 2002. ISBN : 0-387-95344-2.
- [Min96] Nariyuki MINAMI. « Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model ». In : *Commun. Math. Phys.* 177.3 (1996), p. 709-725. DOI : [10.1007/BF02099544](https://doi.org/10.1007/BF02099544).
- [Mir00] Alexander D. MIRLIN. « Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems ». In : *Physics Reports* 326.5 (2000), p. 259-382. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00091-5](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00091-5).
- [Mol81] S. A. MOLCHANOV. « The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator ». In : *Commun. Math. Phys.* 78 (1981), p. 429-446. DOI : [10.1007/BF01942333](https://doi.org/10.1007/BF01942333).
- [MM14a] Declan MULHALL et Matthew MOELTER. « Calculating and visualizing the density of states for simple quantum mechanical systems ». In : *American Journal of Physics* 82 (juin 2014). DOI : [10.1119/1.4867489](https://doi.org/10.1119/1.4867489).
- [MM14b] Declan MULHALL et Matthew MOELTER. « Calculating and visualizing the density of states for simple quantum mechanical systems ». In : *American Journal of Physics* 82 (juin 2014). DOI : [10.1119/1.4867489](https://doi.org/10.1119/1.4867489).
- [Nak77] Shintaro NAKAO. « On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential ». In : *Jpn. J. Math., New Ser.* 3 (1977), p. 111-139.

- [Olv97] Frank W. J. OLVER. *Asymptotics and special functions*. Reprint. Wellesley, MA : A K Peters, 1997. ISBN : 1-56881-069-5.
- [Ose68] V. I. OSELEDETS. « A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems ». In : *Trans. Mosc. Math. Soc.* 19 (1968), p. 197-231.
- [Par08] Leonid PARNOVSKI. « Bethe-Sommerfeld conjecture ». In : *Ann. Henri Poincaré* 9.3 (2008), p. 457-508. DOI : [10.1007/s00023-008-0364-x](https://doi.org/10.1007/s00023-008-0364-x).
- [PS09] Leonid PARNOVSKI et Roman SHTERENBERG. « Asymptotic expansion of the integrated density of states of a two-dimensional periodic Schrödinger operator ». In : *Invent. Math.* 176.2 (2009), p. 275-323. DOI : [10.1007/s00222-008-0164-4](https://doi.org/10.1007/s00222-008-0164-4).
- [Pas77] L. A. PASTUR. « Behaviour of some Wiener integrals for  $t \rightarrow \infty$  and the density of states of the Schrödinger equation with random potential ». In : *Teor. Mat. Fiz.* 32 (1977), p. 88-95.
- [PF92] Leonid PASTUR et Alexander FIGOTIN. *Spectra of random and almost-periodic operators*. T. 297. Grundlehren Math. Wiss. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1992. ISBN : 3-540-50622-5.
- [Pei36] R. E. PEIERLS. « On Ising's model of ferromagnetism ». In : *Proc. Camb. Philos. Soc.* 32 (1936), p. 477-481. DOI : [10.1017/S0305004100019174](https://doi.org/10.1017/S0305004100019174).
- [RS78] Michael REED et Barry SIMON. *Methods of modern mathematical physics. IV : Analysis of operators*. New York - San Francisco - London : Academic Press. XV, 396 p. (1978). 1978.
- [RS79] Michael REED et Barry SIMON. *Methods of modern mathematical physics. III : Scattering theory*. New York, San Francisco, London : Academic Press. XV, 463 p. (1979). 1979.
- [Rob87] Didier ROBERT. *Analyse semi-classique de l'effet tunnel [d'après B. Helffer et J. Sjöstrand]. (Semiclassical analysis of the tunnel effect)*. Sémin. Bourbaki, 38ème année, Vol. 1985/86, Exp. No. 665, Astérisque 145/146, 257-281 (1987). 1987.
- [Roj21] C. ROJAS-MOLINA. « Random Schrödinger operators and Anderson localization in aperiodic media ». In : *Rev. Math. Phys.* 33.1 (2021). Id/No 2060010, p. 11. DOI : [10.1142/S0129055X20600107](https://doi.org/10.1142/S0129055X20600107).
- [SS87] Dieter SCHENK et M. A. SHUBIN. « Asymptotic expansion of the state density and the spectral function of a Hill operator ». In : *Math. USSR, Sb.* 56 (1987), p. 473-490. DOI : [10.1070/SM1987v056n02ABEH003047](https://doi.org/10.1070/SM1987v056n02ABEH003047).
- [Sch07] Hermann SCHULZ-BALDES. « Rotation numbers for Jacobi matrices with matrix entries ». In : *Math. Phys. Electron. J.* 13 (2007). Id/No 5, p. 40.
- [Shi15] Christopher SHIRLEY. « Decorrelation estimates for random discrete Schrödinger operators in dimension one and applications to spectral statistics ». In : *J. Stat. Phys.* 158.6 (2015), p. 1298-1340. DOI : [10.1007/s10955-014-1168-7](https://doi.org/10.1007/s10955-014-1168-7).

- [Shi17] Christopher SHIRLEY. « Decorrelation estimates for some continuous and discrete random Schrödinger operators in dimension one and applications to spectral statistics ». In : *J. Differ. Equations* 263.9 (2017), p. 5987-6024. DOI : [10.1016/j.jde.2017.07.010](https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.07.010).
- [Shu79] M. A. SHUBIN. « The spectral theory and the index of elliptic operators with almost periodic coefficients ». In : *Russ. Math. Surv.* 34.2 (1979), p. 109-157. DOI : [10.1070/RM1979v034n02ABEH002908](https://doi.org/10.1070/RM1979v034n02ABEH002908).
- [Sim87] Barry SIMON. « Internal Lifschitz tails ». In : *J. Stat. Phys.* 46.5-6 (1987), p. 911-918. DOI : [10.1007/BF01011147](https://doi.org/10.1007/BF01011147).
- [Sim05a] Barry SIMON. *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1 : Classical theory*. T. 54. Colloq. Publ., Am. Math. Soc. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2005. ISBN : 0-8218-3446-0.
- [Sim05b] Barry SIMON. *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 2 : Spectral theory*. T. 54. Colloq. Publ., Am. Math. Soc. Providence, RI : American Mathematical Society, 2005. ISBN : 0-8218-3675-7.
- [Sim05c] Barry SIMON. *Trace ideals and their applications*. 2nd ed. T. 120. Math. Surv. Monogr. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2005. ISBN : 0-8218-3581-5.
- [ST85] Barry SIMON et Michael TAYLOR. « Harmonic analysis on  $SL(2, \mathbb{R})$  and smoothness of the density of states in the one-dimensional Anderson model ». In : *Commun. Math. Phys.* 101 (1985), p. 1-19. DOI : [10.1007/BF01212354](https://doi.org/10.1007/BF01212354).
- [Sob06] Alexander V. SOBOLEV. « Asymptotics of the integrated density of states for periodic elliptic pseudo-differential operators in dimension one ». In : *Rev. Mat. Iberoam.* 22.1 (2006), p. 55-92. DOI : [10.4171/RMI/449](https://doi.org/10.4171/RMI/449).
- [Sto01] Peter STOLLMANN. *Caught by disorder. Bound states in random media*. T. 20. Boston : Birkhäuser, 2001, p. xvi + 166. ISBN : 0-8176-4210-2.
- [Sto+05] Günter STOLZ et al. « Fractional moment methods for Anderson localization in the continuum ». In : *XIVth international congress on mathematical physics (ICMP 2003), Lisbon, Portugal, 28 July – 2 August 2003. Selected papers based on the presentation at the conference*. Hackensack, NJ : World Scientific, 2005, p. 619-625. ISBN : 981-256-201-X.
- [TV14] Martin TAUTENHAHN et Ivan VESELIĆ. « Minami's estimate : beyond rank one perturbation and monotonicity ». In : *Ann. Henri Poincaré* 15.4 (2014), p. 737-754. DOI : [10.1007/s00023-013-0263-7](https://doi.org/10.1007/s00023-013-0263-7).
- [Tru77] E. TRUBOWITZ. « The inverse problem for periodic potentials ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 30.3 (1977), p. 321-337. DOI : <https://doi.org/10.1002/cpa.3160300305>.
- [Vel21a] O. A. VELIEV. « On the Schrödinger operator with a periodic PT-symmetric matrix potential ». In : *J. Math. Phys.* 62.10 (2021), p. 103501, 11. DOI : [10.1063/5.0064516](https://doi.org/10.1063/5.0064516).

- [Vel21b] OA VELIEV. « On the Bands of the Schrodinger Operator with a Matrix Potential ». In : *arXiv preprint arXiv :2109.00999* (2021).
- [Ves02] Ivan VESELIĆ. « Localization of random perturbations of periodic Schrödinger operators with regular Floquet eigenvalues ». In : *Ann. Henri Poincaré* 3.2 (2002), p. 389-409. DOI : [10.1007/s00023-002-8621-x](https://doi.org/10.1007/s00023-002-8621-x).
- [Ves08] Ivan VESELIĆ. *Existence and regularity properties of the integrated density of states of random Schrödinger operators*. T. 1917. Lect. Notes Math. Berlin : Springer, 2008. ISBN : 978-3-540-72689-0. DOI : [10.1007/978-3-540-72691-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72691-3).
- [Ves10] Ivan VESELIĆ. « Wegner estimates for sign-changing single site potentials ». In : *Math. Phys. Anal. Geom.* 13.4 (2010), p. 299-313. DOI : [10.1007/s11040-010-9081-z](https://doi.org/10.1007/s11040-010-9081-z).
- [Wil17] Amie WILKINSON. « What are Lyapunov exponents, and why are they interesting? » In : *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* 54.1 (2017), p. 79-105. DOI : [10.1090/bull/1552](https://doi.org/10.1090/bull/1552).
- [Yaf18] D. R. YAFAEV. « Passage through a potential barrier and multiple wells ». In : *St. Petersburg Math. J.* 29.2 (2018), p. 399-422. DOI : [10.1090/spmj/1499](https://doi.org/10.1090/spmj/1499).
- [Yan+17] Jinpeng YANG et al. « Fermi-level pinning appears upon weak electrode-organic contact without gap states : A universal phenomenon ». In : *Organic Electronics* 48 (juin 2017). DOI : [10.1016/j.orgel.2017.06.005](https://doi.org/10.1016/j.orgel.2017.06.005).
- [Zal21] Sylvain ZALCZER. *Localization for one-dimensional Anderson-Dirac models*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2109.14246](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2109.14246).