



HAL
open science

Méthodes numériques pour la tomographie par impédance électrique dans le cadre de l'électrocardiographie

Niami Nasr

► **To cite this version:**

Niami Nasr. Méthodes numériques pour la tomographie par impédance électrique dans le cadre de l'électrocardiographie. Analyse numérique [math.NA]. Université de Bordeaux, 2023. Français. NNT : 2023BORD0414 . tel-04521665

HAL Id: tel-04521665

<https://theses.hal.science/tel-04521665>

Submitted on 26 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ECOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Par **Niami Nasr**

Méthodes numériques pour la tomographie par impédance électrique dans le
cadre de l'électrocardiographie

Sous la direction de : **Lisl Weynans**

Soutenue le 14 décembre 2023

Membres du jury :

Mme. Marion Darbas	Professeure des Universités	Université Sorbonne Paris Nord	Rapporteuse
M. Philippe Moireau	Directeur de recherche	Inria et École Polytechnique	Rapporteur
Mme. Astrid Decoene	Professeure des Universités	Université de Bordeaux	Présidente
Mme. Lisl Weynans	Maîtresse de conférences	Université de Bordeaux	Directrice
M. Lorenzo Audibert	Chercheur/Ingénieur	EDF	Examineur
Mme. Juliette Leblond	Directrice de recherche	Inria	Examinatrice
M. Yves Coudière	Professeur des Universités	Université de Bordeaux	Examineur
Mme. Annabelle Collin	Maîtresse de conférences	Bordeaux INP	Examinatrice

Membres invités :

M. Jérémie Dardé	Maître de conférences	Université Paul Sabatier	Co-Encadrant
------------------	-----------------------	--------------------------	--------------

Résumé

La tomographie par impédance électrique (EIT) est une technique d'imagerie non invasive visant à reconstruire la distribution de conductivité électrique à l'intérieur d'un domaine en appliquant des courants électriques au bord du domaine à des électrodes et en mesurant les tensions résultantes. Mathématiquement, le problème, connu sous le nom de problème de Calderón ou problème inverse de conductivité, est un problème inverse fortement mal posé. L'inconnue principale de ce problème inverse est la conductivité, mais des manques d'information pour d'autres variables telles que la forme géométrique du domaine dans lequel nous visons à reconstruire la conductivité, ainsi que les positions des électrodes, peuvent influencer la qualité de la reconstruction. Par conséquent, nous considérons le problème EIT avec une géométrie inconnue mobile.

La résolution d'un tel problème peut être coûteuse en terme de calcul, en particulier lors de l'utilisation de méthodes numériques qui nécessitent un maillage adapté à cause des étapes de remaillage. Pour éviter celles-ci, nous proposons une approche par méthode de frontière immergée (IBM) pour la résolution numérique du modèle d'électrode complet en tomographie par impédance électrique. Cette méthode permet l'utilisation d'un maillage cartésien sans nécessiter une discrétisation précise de la frontière, ce qui s'avère utile dans les situations où la frontière est complexe et/ou changeante. Nous démontrons la convergence de notre méthode et en illustrons l'efficacité dans des problèmes directs et inverses en deux dimensions.

L'utilisation de méthodes de frontière immergée pour résoudre le problème direct permet également une parallélisation aisée de la méthode et le développement d'un code parallèle dédié au problème direct. Il est à noter que ce travail s'inscrit dans le contexte de l'imagerie électrocardiographique (ECGi). Pour l'ECGi, l'inconnue principale est l'activité électrique du cœur. L'objectif à long terme est d'évaluer si l'EIT peut fournir plus d'informations sur la conductivité des organes à l'intérieur du volume du torse. Dans cette thèse, notre méthode a été testée sur un modèle de torse très simplifié pour la reconstruction de la conductivité. D'autres tests ont été réalisés pour évaluer notre méthode en utilisant des données réelles issues de mesures sur des cuves.

Mots clés : Tomographie par impédance électrique, Méthode de frontière immergée.

Abstract

Electrical Impedance Tomography (EIT) is a non-invasive imaging technique that aims to reconstruct the electrical conductivity distribution inside a domain by applying electrical currents to the boundary of this domain and measuring the resulting voltages on the same boundary. It has several applications in the medical field, particularly in lung monitoring and stroke detection. Mathematically, the problem, known as Calderón's problem or the inverse conductivity problem, is a severely ill-posed inverse problem. The primary unknown in this inverse problem is the conductivity, but lack of information in other variables such as the geometrical shape of the domain in which we aim to reconstruct conductivity, as well as electrode positions, can affect the quality of the reconstruction. Therefore, we consider the EIT problem with a mobile unknown geometry.

The resolution of such a problem can be computationally expensive, especially when using numerical methods that demand adapted meshing. To avoid the remeshing step we propose an Immersed Boundary Method (IBM) approach for the numerical resolution of the Complete Electrode Model in Electrical Impedance Tomography. This method allows for the use of a Cartesian mesh without the need for precise discretization of the boundary, making it useful in situations where the boundary is complex and/or changing. We prove the convergence of our method and demonstrate its efficiency in two-dimensional direct and inverse problems.

Utilizing immersed boundary methods for solving the direct problem also allows for a straightforward parallelization of the method and the development of a parallel code dedicated to the direct problem. It's worth noting that this work is in the context of electrocardiographic imaging (ECGi). In ECGi the main unknown is the electrical activity of the heart. In the long run, the primary objective is to assess whether EIT can provide more information on the conductivity of organs within the torso volume. In this thesis, our method was tested against a very simplified torso model to reconstruct conductivity. Further tests were conducted to evaluate our method using real data from tank measurements.

Keywords : Electrical Impedance Tomography, Immersed Boundary Method.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Madame Marion Darbas et Monsieur Philippe Moireau pour avoir accepté de rapporter ma thèse.

Je remercie également Mesdames Juliette Leblond et Annabelle Collin, ainsi que Messieurs Lorenzo Audibert et Yves Coudière pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse en tant qu'examinateurs, ainsi que Madame Astrid Decoene pour avoir accepté de présider ce jury.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers Lisl Weynans et Jérémie Dardé pour leur encadrement tout au long de ma thèse. Je leur suis très reconnaissant de leur gentillesse et de leur bienveillance à mon égard, ainsi que de tout ce qu'ils m'ont apporté sur le plan scientifique au cours de ces trois années.

Table des matières

1	Introduction	3
2	La modélisation mathématique du problème direct de l'EIT	11
2.1	Éléments communs des modèles	11
2.2	Les conditions au bord	13
2.2.1	Le modèle "Continuum" ou "no-gap"	14
2.2.2	Le modèle "Shunt"	16
2.2.3	Le "Complete Electrode Model" (CEM)	17
2.3	Le CEM généralisé	19
3	Une méthode de frontière immergée pour le problème direct de l'EIT	25
3.1	Motivation et aperçu historique des méthodes de frontière immergée	26
3.2	Méthode de frontière immergée pour l'EIT	28
3.3	Convergence de la méthode de frontière immergée	37
3.3.1	Monotonie de la matrice de discrétisation.	38
3.3.2	Estimations des fonctions de Green discrètes et résultat de convergence	40
3.4	Résolution numérique du problème direct	46
4	Résolution du problème inverse de l'EIT à l'aide des méthodes de frontière immergée	55
4.1	Reconstruction des paramètres électriques dans une géométrie fixe	56
4.1.1	Reconstruction de la conductivité	56
4.1.2	Reconstruction des impédances de contact	64
4.2	Reconstruction des paramètres de géométrie	75
4.2.1	Reconstruction de la position des électrodes.	76
4.2.2	Reconstruction des paramètres de modélisation du bord	82
5	Aspects computationnels du problème direct de l'EIT	87
5.1	Code séquentiel	89
5.1.1	Assemblage	89
5.1.2	Résolution	91
5.2	Code parallèle avec MPI	93
5.2.1	Aperçu : parallélisation et méthode de frontière immergée	94
5.2.2	Architecture du code	96

5.2.3	Assemblage "Matrix-Free"	98
5.3	Liaison avec le solveur parallèle : PaStiX	99
5.3.1	Interfaçage avec PaStiX	100
5.4	visualisation	104
6	EIT et applications	107
6.1	L'EIT en imagerie médicale	107
6.2	Modélisation 2D du torse humain	109
6.3	Données réelles pour l'EIT	113
7	Conclusion et perspectives	119

Introduction

Au cours des dernières décennies, la tomographie par impédance électrique (EIT) a connu d'importants progrès, passant d'une technique expérimentale à une modalité d'imagerie utilisée en clinique. L'EIT est une méthode d'imagerie non invasive dans laquelle la conductivité électrique, la permittivité et l'impédance d'une partie du corps sont déduites à partir de mesures sur des électrodes de surface et utilisées pour former une image tomographique de cette partie. L'EIT est une méthode sûre qui ne nécessite pas de radiation, ce qui en fait une option attrayante pour la surveillance à long terme des patients, en particulier dans les unités de soins intensifs. De nombreuses études cliniques ont démontré l'efficacité de l'EIT en tant qu'alternative aux modalités d'imagerie conventionnelles, en particulier pour la surveillance de la ventilation et de la perfusion pulmonaires [63, 195]. Mathématiquement, le problème est connu sous le nom de problème de Calderón ou problème de conductivité inverse, qui est un problème inverse très mal posé [20, 31, 190].

Dans cette thèse, les études se concentrent principalement sur la résolution numérique du problème inverse de l'EIT, en particulier sur le développement d'une méthode numérique permettant de réduire les temps de calcul, dans le cadre d'un problème à géométrie mobile. On note que l'objectif à long terme est d'explorer l'utilisation de l'EIT pour évaluer la conductivité des organes dans le volume du torse dans un contexte électrocardiographique. En EIT, des électrodes (généralement entre 16 et 32 électrodes) sont fixées à la surface du corps. Un courant électrique est appliqué séquentiellement à travers des paires d'électrodes sélectionnées, et les tensions résultantes sont mesurées par les autres paires d'électrodes. La figure 1.1 montre une configuration expérimentale d'EIT, illustrant la disposition des électrodes sur la surface d'un objet Ω . On note que le courant alternatif appliqué a généralement une intensité de quelques milliampères et une fréquence de 10 à 100 kHz. L'injection de courant à travers des paires d'électrodes est répétée pour un nombre fini et linéairement indépendant de combinaisons de courant afin de générer un ensemble de données pour la reconstruction de la conductivité. Nous nous trouvons donc dans une situation où nous disposons d'observations ou de données sur les bords du domaine (les mesures de surface), et notre objectif est de reconstruire des informations dans le volume du domaine (la conductivité interne). D'un point de vue mathématique, il s'agit donc d'un problème inverse.

Dans la littérature et en pratique, il existe beaucoup d'exemples de problèmes inverses [75, 102] : le problème de rétro-diffusion inverse, ou inverse scattering, où il est demandé de trouver la forme d'un objet de diffusion, étant donnée l'intensité (et la phase) des ondes sonores ou électromagnétiques diffusées par cet objet. Les ouvrages de référence sur ces problèmes de scattering direct et inverse sont les suivants [42, 43, 110] ainsi que les articles de synthèse [41, 174]. Un autre exemple est l'équation

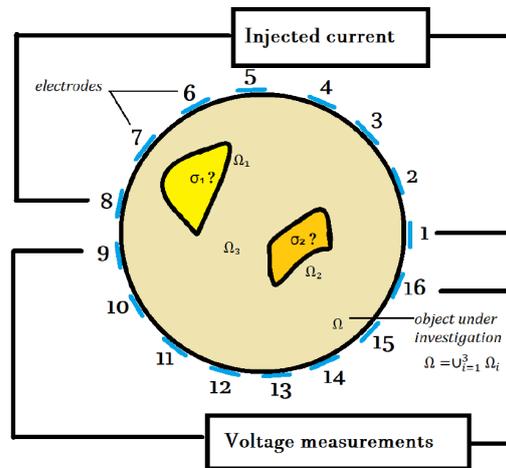


Fig. 1.1 : Configuration typique d'EIT, Thèse A. Velasco

intégrale d'Abel où l'on est dans la situation suivante : on laisse un élément de masse se déplacer le long d'une courbe σ , d'un point p_1 à un niveau $h > 0$ à un point p_0 à un niveau $h = 0$, sachant que la seule force agissant sur cet élément de masse est la force gravitationnelle. Le problème direct consiste à déterminer le temps T nécessaire à l'élément pour se déplacer de p_1 à p_0 lorsque la courbe σ est donnée. Dans le problème inverse, on mesure le temps $T = T(h)$ pour plusieurs valeurs de h , et on vise à déterminer la courbe σ . Un problème similaire, mais plus important, se pose en sismologie. On étudie le problème pour déterminer la distribution de la vitesse c de la Terre à partir de mesures des temps de propagation des ondes sismiques (voir [26]). Pour d'autres exemples de problèmes inverses conduisant à des équations intégrales d'Abel, nous renvoyons aux notes de cours de R. Gorenflo et S. Vessella [73], à la monographie [138], et aux articles [117, 203]. On a aussi l'équation de la chaleur inversée où le problème direct consiste à résoudre le problème classique de la valeur initiale aux limites suivant : étant donné la distribution initiale de température u_0 et le temps final T , déterminer $u(\cdot, T)$. Dans le problème inverse, on mesure la distribution de température finale $u(\cdot, T)$ et on tente de déterminer la température à des instants antérieurs $t < T$, par exemple, la température initiale $u(\cdot, 0)$. Pour plus d'informations, on se réfère aux monographies [11, 109, 138] ainsi qu'aux articles [27, 29, 40, 57, 58, 59, 130, 173]. Pour plus d'exemples on renvoie vers [75, 106].

Dans tous ces exemples, nous pouvons formuler le problème direct comme l'évaluation d'un opérateur K agissant sur un "modèle" x dans un espace de modèles X , et le problème inverse comme la solution de l'équation $K(x) = y$:

- Problème direct : étant donné x (et K), évaluer $K(x)$.
- Problème inverse : étant donné y (et K), trouver x tel que $K(x) = y$.

Afin de formuler un problème inverse, la définition de l'opérateur K , y compris son domaine et son codomaine, doit être donnée. La formulation sous forme d'équation d'opérateur nous permet de

distinguer les problèmes linéaires et non linéaires, de dimension finie et infinie. En général, l'évaluation de $K(x)$ signifie résoudre un problème aux limites pour une équation différentielle ou évaluer une intégrale. Pour des aspects plus généraux de la théorie de l'inversion, nous renvoyons à [3, 148].

L'EIT, connue mathématiquement comme le problème de Calderón, est un exemple de problème d'identification des paramètres pour une équation aux dérivées partielles. Parmi la vaste littérature sur les problèmes d'identification des paramètres, nous ne mentionnons que les articles classiques [108, 160, 161], les monographies [8, 11, 138], ainsi que l'article de synthèse [140].

On note par $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) notre domaine borné avec une frontière lisse $\partial\Omega$. On définit l'ensemble suivant

$$L^2_\diamond(\partial\Omega) = \{f \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} f dl = 0\}.$$

Le modèle le plus simple pour modéliser le problème direct de l'EIT est le modèle continuum dans lequel la distribution de courant $f = \sigma \nabla u \cdot \nu = \sigma \partial u / \partial \nu$ est connue sur tout le bord du domaine $\partial\Omega$. On a le modèle continuum suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla u \cdot \nu = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal unitaire en $x \in \partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . En pratique, $f(x)$ n'est pas connu pour tous les $x \in \partial\Omega$. En réalité, on connaît les courants envoyés le long de fils attachés à N électrodes discrètes qui sont, à leur tour, attachées à la frontière $\partial\Omega$. Par conséquent, il convient de noter qu'il existe plusieurs possibilités pour modéliser l'injection de courant à travers la frontière $\partial\Omega$. Par exemple, en imagerie géophysique, on ne peut couvrir qu'une petite partie de la surface terrestre avec des dispositifs de mesure. Il est donc intéressant de considérer des problèmes à données partielles. Un des modèles les plus précis pour les reconstructions numériques pour l'EIT est le *complete electrode model* qui modélise la présence d'électrodes actives sur le bord avec une impédance de contact. L'impédance de contact est une mesure de la résistance électrique associée à la surface de contact entre les électrodes et le bord du domaine.

On définit l'opérateur Neumann-Dirichlet par : $\Lambda : L^2_\diamond(\partial\Omega) \rightarrow L^2_\diamond(\partial\Omega)$, $\Lambda f = u|_{\partial\Omega}$, avec $u \in H^1_\diamond(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} u dl = 0\}$ l'unique solution de 1.1. Le problème de Calderón se formule de la manière suivante :

Déterminer la conductivité σ à partir de l'opérateur Neumann-Dirichlet $\Lambda : L^2_\diamond(\partial\Omega) \rightarrow L^2_\diamond(\partial\Omega)$ donné.

Une question qui se pose naturellement pour les problèmes inverses concerne l'unicité : "Les informations aux bords sont-elles suffisantes pour déterminer la quantité recherchée?" Dans le cas du problème de Calderón, on se demande si l'opérateur de Neumann-Dirichlet, noté Λ , permet de déterminer uniquement la conductivité σ , ou s'il existe la possibilité que deux valeurs différentes de σ correspondent au même opérateur Λ . En 2006, K. Astala et L. Päiväranta [5] ont montré que, en dimension deux d'espace, l'unicité est vraie dans la classe de conductivités $\sigma \in L^\infty(\Omega)$. En dimension supérieure ou égale à trois, l'unicité est démontrée dans des classes de conductivités plus régulières,

mais la question de l'unicité dans $L^\infty(\Omega)$ est toujours ouverte. Dans le cadre de cette thèse, nous examinons un problème qui prend en compte la manière physique d'injecter du courant, conduisant en quelque sorte à une version "dimension finie" de l'opérateur Neumann-Dirichlet Λ , où l'unicité est perdue (voir [36] où des perturbations "invisibles" de la conductivité sont construites dans un cadre proche de celui que nous utiliserons). Dans tous les cas, ce problème manque de stabilité dans le sens où des données de mesure proches peuvent correspondre à des conductivités très éloignées. C'est pour cela que le problème de Calderón [28] est un problème inverse mal posé.

L'approche la plus directe pour aborder le problème inverse consiste à chercher à minimiser l'erreur des moindres carrés pondérés, c'est-à-dire à chercher σ de manière à ce que la fonctionnelle qui évalue la différence entre les données réelles et les solutions du problème direct atteigne son minimum. La résolution d'un tel problème inverse mal posé nécessite généralement des techniques spécialisées et des méthodes de régularisation pour stabiliser la solution.

Premièrement, on peut utiliser des techniques de régularisation. Ces méthodes de régularisation introduisent des informations ou des contraintes supplémentaires pour stabiliser la solution. En particulier, on a la régularisation de Tikhonov; cette méthode ajoute un terme de pénalité au problème d'optimisation pour contrôler la régularité ou l'amplitude de la solution [188]. On a aussi la régularisation de la variation totale qui se fait en ajoutant un terme de régularisation, généralement sous la forme de la norme L^1 (valeur absolue) des gradients de l'image.

Une autre famille de méthodes sont les méthodes D-bar. Le nom "D-bar" provient de l'opérateur mathématique "D-barre" (ou "D-bar operator"). Ces méthodes sont largement utilisées pour l'EIT [136]. Les méthodes D-bar utilisent une transformée de Fourier non linéaire des données de mesure pour extraire des informations sur la distribution de la conductivité électrique à l'intérieur de l'objet. On dispose également de la méthode "Absolute Value" qui consiste à prendre les valeurs absolues des variations d'impédance [172].

On note aussi, qu'une alternative pour résoudre des problèmes inverses mal posés sont les méthodes d'inférence bayésienne, qui fournissent un cadre probabiliste. Elles impliquent la modélisation du problème avec des informations a priori, des fonctions de vraisemblance et des distributions a posteriori. Des techniques telles que la chaîne de Markov par Monte-Carlo (MCMC) et l'inférence variationnelle peuvent être utilisées pour l'inférence bayésienne. Pour des références concernant les chaînes de Markov, on renvoie à [69, 162, 176, 187]. Dans [95], Kaipio *et al.* ont étudié le problème inverse de l'EIT d'un point de vue bayésien.

Nous rappelons que notre objectif est de résoudre ce problème inverse numériquement à l'aide d'un algorithme efficace pour pouvoir reconstruire le paramètre de conductivité à l'intérieur du volume du torse humain. Nos travaux ont été menés dans un contexte électrocardiographique, sur lequel nous reviendrons plus en détail par la suite. Notre objectif principal est donc de reconstruire la conductivité. Cependant, il est également reconnu que la méthode d'imagerie par EIT est affectée par le manque de connaissance ou la méconnaissance des paramètres de géométrie, tels que la forme du bord et la position des électrodes [48, 49]. C'est pourquoi, tout au long de cette thèse, nous envisageons non

seulement le problème d'EIT avec la conductivité comme inconnue, mais nous considérons aussi un problème de reconstruction simultanée des paramètres de géométrie et de conductivité. Nous nous trouvons donc à résoudre un problème à géométrie mobile. La résolution du problème inverse d'EIT avec géométrie mobile a déjà été étudiée dans [48, 49], où une méthode d'éléments finis avec maillage adapté a été utilisée pour la résolution. Bien qu'une telle méthode avec maillage adapté se soit révélée très efficace pour la reconstruction simultanée de la conductivité et de la géométrie du bord, on se retrouve donc confronté à une étape de remaillage inévitable à chaque mise à jour des paramètres géométriques par l'algorithme du problème inverse, qui peut devenir facilement coûteux en terme de calcul. Pour éviter cette contrainte, nous proposons de résoudre le problème direct avec une méthode numérique de différences finies à frontière immergée sur une grille cartésienne.

Notre bord sera donc représenté implicitement et immergé dans la grille cartésienne par une fonction level-set. Les méthodes à frontière immergée sur grille cartésienne sont généralement utiles pour résoudre des problèmes issus de la mécanique des fluides, de la biologie, et de la chimie des matériaux. Que ce soit pour étudier l'écoulement autour d'un objet solide ou pour modéliser le comportement électrique de cellules biologiques, chaque fois qu'un problème implique une géométrie réaliste, il est naturel de prendre en compte la présence d'obstacles, d'interfaces ou de frontières de formes variées. Il s'agit fréquemment d'interfaces physiques séparant des milieux aux propriétés différentes, comme l'interface entre deux fluides, entre un fluide et un solide, ou entre une cellule biologique et le milieu extérieur. Dans le cas de l'EIT, l'interface sera le bord du domaine. L'utilisation d'une méthode de frontière immergée nous permettra de représenter notre bord de manière implicite, ce qui facilitera grandement sa manipulation. Cela sera particulièrement avantageux lorsque nous considérerons un problème à géométrie mobile et nous permettra d'éviter complètement l'étape de remaillage.

Un autre avantage de la discrétisation sur grille cartésienne est qu'elle permet une parallélisation aisée, et une utilisation de splitting directionnel pour la construction des méthodes numériques, ce qui les rend faciles à coder, et permet d'utiliser des bibliothèques de calcul efficaces comme par exemple PETSc [185] ou MPI [154]. Dans [39] la parallélisation d'une méthode de frontière immergée sur grille cartésienne à l'aide de PETSc était abordée. Un des intérêts que nous accordons, concerne cet aspect du développement en EIT. En effet, nous reconnaissons que la reconstruction des conductivités dans le volume du torse à l'aide de l'EIT nécessitera l'accès à un code capable de résoudre l'EIT avec une grande précision. Donc, l'un des objectifs à long terme est le développement de codes parallèles pour l'EIT en 3D. Jusqu'à présent, nos travaux se sont concentrés sur la résolution du problème en 2D.

Ce travail de thèse sur l'EIT s'inscrit dans une problématique à long terme liée à l'électrocardiographie. En imagerie électrocardiographique, le problème inverse d'ECGi vise à reconstruire l'activité électrique du cœur à partir de séries de mesures électriques effectuées sur le torse. Ce problème est représenté par un problème de Cauchy pour l'équation de Laplace, qui est connu pour être mal posé.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans le volume du torse} \\ u = u_T \text{ et } \sigma \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur la surface du torse,} \\ u = ? & \text{sur la surface du coeur,} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec u le potentiel électrique et σ la conductivité dans le volume du torse. L'approche classique pour le résoudre consiste à minimiser au sens des moindres carrés une fonctionnelle comportant un terme de régularisation [100]. L'ECGi est une technologie prometteuse qui peut éventuellement permettre de détecter des anomalies du rythme cardiaque comme la fibrillation ventriculaire qui est responsable chaque année de 50 000 morts soudaines par arrêt cardiaque en France, soit une toutes les 10 minutes. En général, les maladies liées aux anomalies au niveau du rythme cardiaque (appelée arythmies) sont difficiles à détecter. On distingue généralement trois types d'arythmies :

- tachycardie : quand le cœur bat très vite,
- bradycardie : quand le cœur bat lentement,
- fibrillation : quand le cœur bat irrégulièrement.

La fibrillation ventriculaire se caractérise par une désorganisation complète de l'activité électrique dans les ventricules, ce qui empêche le cœur de se contracter efficacement. Des thérapies efficaces existent, mais elles sont encore peu utilisées en pratique, car les mécanismes impliqués dans ces troubles du rythme cardiaque sont encore mal compris et les pathologies associées sont incorrectement caractérisées ou ne peuvent être détectées de manière préventive. Ces lacunes en termes de détection sont principalement dues aux limitations des techniques d'imagerie de l'activité électrique cardiaque. En effet, les cathéters intra-cardiaques permettent une caractérisation détaillée de l'activité électrique du cœur, mais ils sont trop invasifs pour être utilisés à grande échelle, et l'électrocardiogramme classique à 12 électrodes manque de précision.

L'ECGi propose une approche non invasive permettant de reconstruire l'activité électrique du cœur à partir de séries de mesures électriques effectuées sur le torse, en résolvant un problème inverse dans le volume situé entre le torse et le cœur. Des études expérimentales *in vivo* montrent que l'ECGI peut correctement reconstruire des motifs d'activation électrique réguliers, mais échoue dans des cas plus complexes, notamment pour des cœurs présentant des hétérogénéités des tissus [54]. Les erreurs dans la formulation du problème direct, notamment le manque de connaissance des valeurs de conductivité des différents organes et du mouvement relatif de ces organes, contribuent largement à ce manque de précision. En effet, en raison de la complexité du caractère anisotrope du domaine thoracique, le tenseur de conductivité, généralement noté σ_T , est souvent négligé [99], ce qui peut entraîner des imprécisions dans les reconstructions d'ECGI. Dans un objectif à long terme, l'utilisation de l'EIT pourrait permettre de recueillir des informations sur la conductivité des organes et leur position géométrique, et éventuellement utiliser ces informations dans le modèle d'ECGI.

Dans cette thèse, nous menons des études préliminaires dans le cadre de la reconstruction des conductivités des organes dans le volume du torse. Nous commençons par un test de reconstruction dans un modèle de torse simplifié en 2D. Nous reconnaissons que ce problème est extrêmement complexe, étant donné que l'anatomie du torse est très sophistiquée, comme on peut le voir dans la figure 1.2. Cette étude est suivie de la validation de notre méthode à l'aide de données réelles à libre accès générées par Hauptmann *et al.* dans [80].

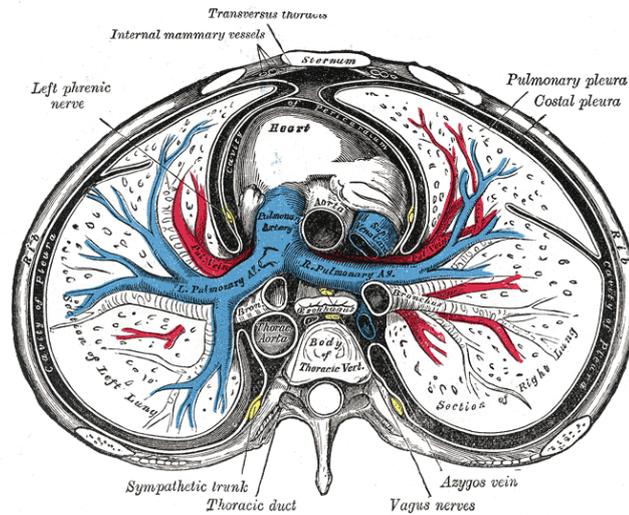


Fig. 1.2 : Coupe transversale du thorax montrant le contenu du médiastin moyen et postérieur.

En conclusion, l'objectif général de cette thèse est de développer des méthodes numériques pour l'EIT afin d'estimer les conductivités à l'intérieur du volume d'un domaine Ω . Plus précisément, nous allons mettre au point des méthodes numériques de différences finies avec une approche de frontières immergées pour résoudre le problème inverse de l'EIT. Nous discutons de l'utilité de ce type de méthode dans le contexte de l'EIT, en particulier en termes de coûts de calcul. À long terme, l'objectif est de pouvoir utiliser l'EIT afin de récupérer davantage d'informations sur les conductivités et la position des organes à l'intérieur du volume du torse. Dans le chapitre 2, nous présentons divers modèles pour modéliser le problème direct de l'EIT, en particulier notre modèle d'électrode complet généralisé que nous utilisons dans toute la suite du travail. Dans le chapitre 3, nous présentons notre méthode numérique de frontière immergée et démontrons sa convergence au premier ordre. Ensuite, dans le chapitre 4, nous abordons les problèmes inverses de conductivité et de forme, ainsi que leurs résultats de reconstruction. Dans le chapitre 5, nous présentons nos codes de développement informatique pour résoudre le problème direct à l'aide de méthodes de frontière immergée. Enfin, dans le chapitre 6, nous présentons nos tests avec le modèle simplifié de torse et les données réelles du réservoir d'eau.

La modélisation mathématique du problème direct de l'EIT

Dans ce chapitre, nous présentons différents modèles mathématiques utilisés pour le problème direct de l'EIT. L'objectif de ces modèles directs est de décrire le comportement d'un objet conducteur soumis à un courant électrique imposé à sa périphérie. Pour le problème direct, on s'intéresse particulièrement au potentiel électrique créé à l'intérieur de l'objet conducteur et résultant de cette injection de courant. Mathématiquement, les modèles directs reposent sur l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell [21], qui décrit la propagation des ondes électromagnétiques à l'intérieur de l'objet observé. Cela se traduit par une équation elliptique commune à tous les modèles, dans laquelle apparaît la conductivité du milieu interne de l'objet conducteur. Cependant, ces modèles diffèrent en ce qui concerne la modélisation de l'injection du courant à travers le bord. Certains modèles considèrent que le potentiel et la distribution de courant sont connus sur tout le bord, tandis que d'autres adoptent une approche plus réaliste en considérant un problème à données partielles modélisées grâce à la présence d'électrodes. On rappelle qu'en pratique, le courant est envoyé à travers un nombre N d'électrodes attachées à la frontière du domaine.

En partant des modèles les plus simples pour parvenir à des modèles plus réalistes, nous introduisons différentes conditions aux limites visant à modéliser l'injection du courant à travers le bord. Le dernier modèle introduit, le "complete electrode model" (ou modèle complet d'électrodes "CEM"), et ses variantes, sont ceux que nous utiliserons par la suite de cette thèse dans nos études numériques.

2.1 Éléments communs des modèles

Soit Ω le domaine conducteur d'intérêt, supposé borné dans l'espace \mathbb{R}^d , où $d = 2$ ou 3 , et ayant une frontière lisse $\partial\Omega$. On note par ν le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ et par ∂_ν la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$. On notera par σ la conductivité électrique de ce domaine conducteur, qui est de valeur positive, c'est-à-dire que $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$. La distribution de conductivité σ est supposée dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifie la propriété suivante : il existe deux constantes c tel que,

$$0 < c \leq \sigma(x), \text{ pour presque tout } x \text{ dans } \Omega. \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1. *Les fonctions et vecteurs sont considérés comme étant réels. Le cas complexe peut être déduit facilement.*

Pour les modèles qui considèrent la présence d'électrodes sur le bord du domaine, ces électrodes vont être définies comme des sous-domaines du bord. Dans le cas bi-dimensionnel, ce sont des segments définis sur le bord. Leur nature varie selon les modèles et les phénomènes physiques considérés. À travers la thèse, nous noterons ces électrodes par $E_m \subset \Omega$, où $m \in \{1, \dots, M\}$. Ces dernières sont strictement disjointes :

$$\overline{E_m} \cap \overline{E_l} = \emptyset \text{ pour } m \neq l. \quad (2.2)$$

On définit $E \subset \partial\Omega$ comme :

$$E = \bigcup_{m=1}^M E_m, \quad (2.3)$$

avec E_m la m -ième électrode, et $M \in \mathbb{N}$ le nombre total d'électrodes sur le bord. On note la partie du bord privée des électrodes par $E_c = \partial\Omega \setminus \overline{E}$.

Pour modéliser la propagation des champs électromagnétiques dans Ω , on considère le potentiel électrique scalaire u qui satisfait l'équation suivante :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0. \quad (2.4)$$

Basé sur l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell, on obtient l'équation aux dérivées partielles décrivant les ondes électromagnétiques à l'intérieur de l'objet observé.

En effet, les équations de Maxwell sont les lois fondamentales de tout phénomène électromagnétique. Pour un matériau linéaire, isotrope et non dispersif, le déplacement électrique \mathbf{D} et l'induction magnétique \mathbf{B} satisfont les relations suivantes :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.6)$$

où ε est la permittivité électrique, μ la perméabilité magnétique, et E et H représentent respectivement les champs électrique et magnétique. De plus, nous pouvons supposer que la perméabilité magnétique dans le vide est égale à μ_0 . Ainsi, on a les équations de Maxwell suivantes :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}), \quad (2.10)$$

où ρ représente la densité de charge et \mathbf{J} la densité de courant J qui est liée à \mathbf{E} et à la distribution de conductivité σ par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.11)$$

Étant donné que les systèmes d'EIT opèrent à de basses fréquences appliquées à des objets de petite taille, les dérivées temporelles dans les équations (2.9) et (2.10) peuvent être négligées [Bor02; Nim02]. Ainsi, le champ électrique est désormais irrotationnel et provient d'un potentiel électrique scalaire u :

$$\mathbf{E} = -\nabla u. \quad (2.12)$$

En prenant la divergence de l'équation (2.10) et en substituant les équations (2.11) et (2.12), nous obtenons respectivement :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = 0. \quad (2.14)$$

Par conséquent, nous obtenons l'équation elliptique (2.4) pour le potentiel électrique u dans le domaine Ω qui est commune à tous les modèles. Cependant, ces derniers diffèrent dans la modélisation des conditions aux bords.

2.2 Les conditions au bord

On rappelle la définition de l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, suivante [24] :

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq s, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

où α est un multi-indice, $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions). Dans la suite, on notera par $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$.

Dans cette section, on commence par introduire les modèles par ordre de complexité, en commençant par le modèle le plus simple, le modèle "continuum" qui considère le domaine d'intérêt sans tenir compte de la présence d'électrodes sur le bord. Il suppose que le courant circule librement à travers la frontière. Ensuite, nous examinerons des modèles plus réalistes qui prennent en compte la présence d'électrodes, en partant également des modèles plus simples pour aboutir au modèle d'électrodes complet (CEM) et aux modèles d'électrodes complet généralisé (CEM généralisé), que nous introduirons dans cette section.

2.2.1 Le modèle "Continuum" ou "no-gap"

Dans le modèle "no-gap" on considère que le courant s'applique sur tout le bord. Ce modèle est le plus simple à traiter mathématiquement. En effet, il est donné par

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

avec f une fonction dans $L^2(\partial\Omega)$. La condition au bord modélise la circulation libre du courant à travers tout le bord du domaine. Pour ce type d'équation elliptique munie d'une condition de Neumann inhomogène sur le bord, l'existence de la solution nécessite le fait que

$$\int_{\partial\Omega} f ds(x) = 0. \quad (2.16)$$

Cette condition signifie que f vérifie la loi de conservation de charge, qui est un principe fondamental en physique qui exprime que la charge électrique d'un système isolé est un invariant. Dans ce cas-là, (2.15) admet une solution dans $H^1(\Omega)$, cependant cette dernière n'est pas unique. Il n'est pas difficile de montrer que deux solutions de l'équation (2.15), sont égales à une constante près. C'est pourquoi il est naturel de considérer l'espace quotient $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ pour avoir une bonne formulation de (2.15). On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Pour une fonction de densité $f \in L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie la condition (2.16), le modèle (2.15) admet une unique solution u dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.*

Démonstration. On choisit de montrer l'existence et l'unicité dans l'espace suivant :

$$\mathbb{H} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \left| \int_{\partial\Omega} u ds(x) = 0 \right. \right\}. \quad (2.17)$$

Cela revient à montrer l'existence et l'unicité dans l'espace $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ (en ayant fixé la constante).

Soit $w \in \mathbb{H}$ une fonction test arbitraire. En multipliant la première équation de (2.15) et en intégrant sur Ω on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) w dx = 0.$$

En appliquant la formule de Green [159], on obtient :

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) w dx = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla w dx + \int_{\partial\Omega} \sigma (\partial_\nu u) w ds(x).$$

En utilisant la condition limite de Neumann, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla w dx = \int_{\partial\Omega} f w ds(x). \quad (2.18)$$

On définit

$$\begin{aligned} a : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, w) &\longmapsto \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla w \, dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \int_{\partial\Omega} f w \, ds(x) \end{aligned}$$

qui sont respectivement des formes bilinéaires et linéaires. Il est facile de prouver que a est continue et coercive en utilisant une inégalité de type Poincaré-Wirtinger adaptée à \mathbb{H} . Il est aussi facile de montrer que b est continue. Par conséquent, en utilisant le théorème de Lax-Milgram [24], on conclut que la formulation variationnelle (2.18) a une solution unique $u \in \mathbb{H}$. Montrons maintenant que u est bien solution de (2.15). Pour tout $v \in \mathbb{H}$, on a :

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} f v \, ds(x). \quad (2.19)$$

Considérons $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, et notons $c = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \varphi \, ds \in \mathbb{R}$. Posons $\tilde{\varphi} = \varphi - c$, alors $\tilde{\varphi} \in \mathbb{H}$ et $\nabla \tilde{\varphi} = \nabla \varphi$. Nous avons :

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dx$$

Cependant, en utilisant l'équation (2.19), nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dx = \int_{\partial\Omega} f \tilde{\varphi} \, ds(x) = \int_{\partial\Omega} f \varphi \, ds(x) - c \int_{\partial\Omega} f \, ds(x) = 0,$$

ce dernier point venant du fait que φ est à support compact, et de l'hypothèse $\int_{\partial\Omega} f \, ds(x) = 0$. Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

ce qui entraîne que $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$ dans Ω .

Nous utilisons ensuite la formule de Green : pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\langle \sigma \partial_\nu u, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v \, dx.$$

Nous posons alors,

$$c = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v \, dx,$$

et $\tilde{v} = v - c$. Comme précédemment, $\tilde{v} \in \mathbb{H}$ et $\nabla v = \nabla \tilde{v}$, donc

$$\langle \sigma \partial_\nu u, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla \tilde{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} f \tilde{v} \, ds(x) = \int_{\partial\Omega} f v \, ds(x),$$

puisque, $\int_{\partial\Omega} f ds(x) = 0$. On a donc

$$\langle \sigma \partial_\nu u, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On conclut que $\sigma \partial_\nu u = f$, et donc que si u satisfait (2.18) alors u satisfait également (2.15). \square

On note que le modèle continuum n'est pas le modèle le plus réaliste étant donné qu'en EIT expérimentale, un certain nombre d'électrodes, qu'on note par $\{E_m\}_{m=1}^M$, ($M \geq 2$) sont attachées à la surface extérieure de l'objet conducteur Ω . Un courant net $I_m \in \mathbb{C}$ circule à travers chaque E_m , et les potentiels résultants $U = [U_1, \dots, U_M]^T \in \mathbb{R}^M$ sont mesurés. Il est raisonnable de supposer qu'il n'y a pas de sources ou de puits à l'intérieur de l'objet. Par conséquent, tout schéma de courant significatif $I = [I_1, \dots, I_M]$ satisfait la loi de conservation du courant, c'est-à-dire $\sum_m I_m = 0$. Les modèles que nous présentons par la suite prennent en compte la présence d'électrodes sur le bord. Nous commençons par introduire le modèle "Shunt".

2.2.2 Le modèle "Shunt"

L'effet shunt fait référence à la formation de couches minces à haute résistance à l'interface entre l'électrode et l'objet [34]. Ces couches minces hautement résistives peuvent être le résultat de processus électrochimiques et provoquent des sauts de potentiel selon la loi d'Ohm. Cela peut avoir des conséquences importantes sur les mesures électriques, en particulier dans le cas de l'EIT. Le modèle "Shunt" suppose que les électrodes métalliques sont des conducteurs parfaits. On a le modèle "Shunt" suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = 0 & \text{sur } E_c, \\ u = U_m & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (2.20)$$

avec $U = (U_1, \dots, U_M)$ le potentiel mesuré à travers les électrodes, et $I = (I_1, \dots, I_M)$ les courants injectés à travers les électrodes. Ces potentiels sont des inconnues et font partie de notre solution. Comme on l'a déjà indiqué (2.20)₁ décrit la distribution du potentiel électrique u à l'intérieur du domaine Ω , (2.20)₂ exprime le fait que l'injection de courant est entièrement confiée aux électrodes, la condition aux limites (2.20)₃ représente le fait que chaque électrode E_m est un conducteur parfait, et enfin (2.20)₄ indique que l'intégrale de la densité de courant à travers l'électrode E_m est égale au courant net correspondant I_m . Le modèle "Shunt" présente l'inconvénient de ne plus être un problème de Neumann standard. Cependant, il peut être correctement formulé si nous incluons la loi de conservation de la charge pour les courants injectés à travers les électrodes, comme suit :

$$\sum_{m=1}^M I_m = 0 \Leftrightarrow I \in \mathbb{R}_\diamond^M,$$

avec

$$\mathbb{R}_\diamond^M = \left\{ V \in \mathbb{R}^M, \sum_{m=1}^M V_m = 0 \right\}. \quad (2.21)$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. *Étant donné un courant d'entrée $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$, l'équation (2.20) admet une unique solution dans*

$$\mathbb{V} = \{(w, W) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}_\diamond^m : w|_{E_m} = W_m, \text{ pour } m = 1, 2, \dots, M\}.$$

La preuve de cette proposition se trouve dans [50]. Les expériences montrent que ce modèle sous-estime la résistivité et donne de moins bons résultats lorsque la fréquence spatiale du courant est plus élevée. Les fréquences spatiales plus élevées sont censées contenir proportionnellement plus d'informations à proximité et autour du bord, ce qui conduit à l'hypothèse qu'il pourrait y avoir un effet résistif supplémentaire non pris en compte entre l'électrode et le bord du domaine [178]. Cette résistance à l'interface entre l'électrode et le bord du domaine est définie et prise en compte dans le modèle présenté dans la section suivante.

2.2.3 Le "Complete Electrode Model" (CEM)

Le modèle complet d'électrode (CEM) a été proposé à l'origine dans [33]. Il prend en compte la forme des électrodes ainsi que l'effet de shunt, c'est-à-dire l'effet qui provient d'une fine couche résistive qui apparaît à l'interface entre les électrodes et l'objet pendant les mesures [33, 179]. En effet, lorsqu'on place des électrodes en contact avec un objet conducteur (sur la peau par exemple), des couches très résistives et fines se forment aux interfaces électrode-objet. Ces couches peuvent avoir une résistance électrique non négligeable due à des facteurs tels que la rugosité de la surface, la propreté de la peau ou du matériau, et d'autres propriétés du contact. Pour tenir compte de cela, le CEM associe à chaque électrode une valeur d'impédance de contact. Le CEM s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = 0 & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \frac{1}{z_m}(u - U_m) = 0 & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.22)$$

Ici, z_m représente l'impédance de contact entre les électrodes E_m et le bord. Le vecteur d'impédances de contact est supposé être réel : $z = (z_1, \dots, z_M) \in \mathbb{R}^M$. Les composantes doivent satisfaire la condition suivante :

$$z_m \geq c, \quad \text{pour } m \in \{1, \dots, M\}$$

où c est une constante strictement positive. Comme dans le modèle "Shunt" la première ligne de l'équation (2.22) qui découle de l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell, la deuxième formule exprime le fait que l'injection de courant est exclusive aux électrodes. La troisième équation

de (2.22) modélise l'effet d'impédance de contact. Enfin, la quatrième équation de (2.22) indique que l'intégrale de la densité de courant à travers E_m est égale au courant net correspondant I_m .

On considère l'espace quotient $\mathcal{H}^s = (H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$, avec $s \in \mathbb{R}$. On dit que deux éléments (u, U) et (v, V) de $H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ sont égaux dans \mathcal{H}^s s'ils diffèrent d'une constante :

$$(u, U) \sim (v, V) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, u = v + c, U = V + c[1, \dots, 1]. \quad (2.23)$$

On précise que \mathcal{H}^s muni de la norme

$$\|(u, U)\|_{\mathcal{H}^s} = \inf_{c \in \mathbb{R}} (\|u - c\|_{H^s(\Omega)} + \|U - c[1, \dots, 1]\|_{\mathbb{R}^M}),$$

est un espace de Banach. On a donc la proposition suivante

Proposition 2.2.3. *Étant donné un courant d'entrée $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$, l'équation (2.22) admet une solution et une seule dans $\mathcal{H}^1 = (H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$.*

Le théorème de Lax-Milgram [24] est utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème direct du CEM. On rappelle qu'un modèle de courant doit satisfaire la loi de la conservation de charge, on note que $I = (I_1, \dots, I_M) \in \mathbb{R}_\diamond^M$. Cela assure l'existence d'une solution. La preuve du caractère bien posé et d'unicité du problème direct ont été discutées dans les articles [150] et [179].

Le CEM est connu pour prédire correctement les données expérimentales, il est donc largement utilisé dans la résolution numérique des problèmes directs et inverses liés à l'EIT [89, 193]. Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons non seulement à la résolution numérique du problème, mais nous souhaiterions également mener des études numériques de convergence pour la méthode numérique de frontière immergée que nous introduisons dans le chapitre 3. Pour faire cela, nous aurons besoin de solutions assez régulières de notre modèle, cependant, il est connu que (u, U) la solution de (2.22), manque de régularité (cela est dû aux conditions limites mixtes (2.22)₂, (2.22)₃ et (2.22)₄.) En effet, la solution appartient à $\mathcal{H}^{2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, mais n'appartient pas à \mathcal{H}^2 pour tous les courants d'entrée I à l'exception de celui qui est nul [50, 90]. Pour surmonter cette difficulté, une idée est de considérer le "smoothened" CEM introduit dans [90] qui consiste à remplacer la constante z_m par une fonction à support compact dans E_m et régulière. Les résultats de régularité standard s'appliquent alors, ce qui donne un potentiel u régulier. Étant donné que, dans la pratique, l'admittivité de surface (l'inverse de l'impédance de contact) est inconnue et qu'il n'existe aucune preuve claire soutenant l'idée qu'elle est constante, ce changement de modèle est raisonnable. Le principal inconvénient du modèle smoothened est une paramétrisation plus complexe des admittivités de contact. Néanmoins, quel que soit le choix de modélisation des impédances (ou de manière équivalente des admittivité), même dans le cas smoothened, il n'y a pas de solution explicite pour le problème, sauf dans des configurations géométriques très particulières. C'est pourquoi nous introduisons dans la section suivante le modèle CEM généralisé qui va nous permettre de construire des solutions explicites afin de tester numériquement l'ordre de convergence d'une méthode numérique de frontière immergée.

2.3 Le CEM généralisé

Ce modèle diffère légèrement du modèle standard de la section précédente, car nous autorisons des termes de source non nuls à l'intérieur et au bord du domaine. Cela sera utile dans l'étude de convergence numérique.

Avec les mêmes notations que dans les sections 2.1 et 2.2.3, on considère Ω le domaine d'intérêt et σ la conductivité du domaine. La particularité de notre modèle généralisé réside dans l'autorisation d'admittivités de contact variables spatialement. On note que l'admittivité de contact d'une électrode est une caractéristique spécifique qui concerne la capacité de l'interface électrode-objet à conduire des courants électriques. Pour modéliser cela, nous considérons $\xi_m \in \mathcal{Z}_m$, avec

$$\mathcal{Z}_m = \{\xi \in L^\infty(E_m), \xi \geq 0, \xi \neq 0\}.$$

Ces admittivités variables ont été introduites dans [90] comme un moyen d'obtenir de la régularité sur les solutions du modèle d'électrodes complet. Le modèle d'électrodes complet standard correspond au choix $\xi_m = \frac{1}{z_m}$, qui est effectivement dans \mathcal{Z}_m .

Soit $I \in \mathbb{R}^M$ représentant les courants d'entrée imposés aux électrodes, et $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$. Le modèle d'électrodes généralisé est le suivant : trouver $(u, U) \in \mathcal{H}^1$ tel que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m (u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.24)$$

Avant de montrer que le problème (2.24) est bien posé, nous précisons plusieurs points :

- Une application classique du théorème de la divergence montre que pour que le problème (2.24) admette une solution, il est nécessaire que I , f et g satisfassent la *condition de compatibilité*.

$$\sum_{m=1}^M I_m + \int_{\Omega} f \, dx + \int_{E_c} g \, ds(x) = 0. \quad (2.25)$$

Il s'agit simplement de la loi de conservation du courant appliquée à notre système d'équations. Dans le cas de l'EIT standard, où les termes source f et g sont nuls, nous retrouvons la condition suivante sur les courants appliqués aux électrodes

$$\sum_{m=1}^M I_m = 0 \Leftrightarrow I \in \mathbb{R}_\diamond^M.$$

- Supposons que $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ satisfait le système d'équations (2.24). Alors, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $(u + c, U + c[1, \dots, 1])$ satisfait également le système (2.24). Par conséquent, et

comme dans le cas du CEM classique, il est naturel de considérer l'espace quotient \mathcal{H}^1 pour la solution du CEM généralisé et afin d'identifier tous les éléments de $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ qui ne diffèrent que par une constante additive. Comme nous le verrons, cela rétablit l'unicité. Cependant, du point de vue numérique, il est nécessaire de faire un choix de constante. Pour éviter cela, nous présentons une formulation alternative bien posée dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$, qui sera abordée dans la suite de cette section.

- Dans l'esprit de [90], les conditions limites (2.24₂) et (2.24₃) peuvent être écrites simultanément : en effet, en désignant par $\mathbf{1}_{E_m}$ l'opérateur qui associe à une fonction $\xi \in L^\infty(E_m)$ son extension par zéro sur $\partial\Omega$, et en définissant l'opérateur

$$\Xi : (\xi_1, \dots, \xi_M) \in \prod_{m=1}^M L^\infty(E_m) \mapsto \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_{E_m} \xi_m \in L^\infty(\partial\Omega),$$

par conséquent (2.24₂) et (2.24₃) sont équivalentes à

$$\sigma \partial_\nu u + \Xi(\xi_1, \dots, \xi_M)(u - \Xi(U_1, \dots, U_M)) = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

- Dans les applications pratiques en EIT, les termes sources f et g sont tous les deux nuls, dans ce cas, la condition de compatibilité (2.25) devient la condition habituelle $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$. Néanmoins, des termes source non nuls seront utilisés dans notre étude lors des tests numériques, afin d'assurer la régularité de u et l'ordre de convergence de la méthode numérique qu'on présente dans la suite de cette thèse.

Étude mathématique du CEM généralisé

Nous allons maintenant montrer que le problème (2.24) est bien posé. Nous suivons les étapes standards utilisées dans le cas où $f = 0$ et $g = 0$, basées sur la formulation variationnelle du problème (2.24), que nous adaptons à notre contexte. Pour pouvoir faire cela, nous aurons besoin des résultats suivants :

Pour tout m dans $\{1, \dots, M\}$, soit $e_m \subset E_m$ de mesure de Lebesgue positive. On définit :

$$b : ((u, U), (v, V)) \in \left(H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M \right)^2 \mapsto \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_{m=1}^M \int_{e_m} (u - U_m)(v - V_m) \, ds(x),$$

et, pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ on note par

$$\|(v, V)\|_b^2 = b((v, V), (v, V)).$$

Lemme 2.3.1. *La forme bilinéaire b définit un produit scalaire sur \mathcal{H}^1 associé à la norme $\|\cdot\|_b$ qui est équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$. On en déduit que (\mathcal{H}^1, b) est un espace de Hilbert.*

Pour la preuve de ce lemme, nous renvoyons à [178]. On a la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *Supposons que f , I et g vérifient (2.25). Alors, le problème (2.24) admet une solution unique $(u, U) \in \mathcal{H}^1$.*

Démonstration. Considérons le problème variationnel suivant : trouver $(u, U) \in \mathcal{H}^1$ tel que, pour tout (v, V) dans \mathcal{H}^1 ,

$$B((u, U), (v, V)) = L((v, V)), \quad (2.26)$$

avec

$$B((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \xi_m (u - U_m) (v - V_m) \, ds(x),$$

et

$$L((v, V)) = \int_{\Omega} f v \, dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} g (v - V_m) \, ds(x) + \int_{E_c} g v \, ds(x) + I \cdot V.$$

Il est clair que B est bilinéaire et continue sur $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1$. Par définition de \mathcal{Z}_m , il existe $c > 0$ tel que pour tout m dans $\{1, \dots, M\}$, il existe $e_m \subset E_m$ de mesure de Lebesgue positive telle que $\xi_m \geq c$ sur e_m . Cette propriété combinée avec l'hypothèse (2.1) sur σ et le Lemme 2.3.1 implique facilement la coercivité de B .

D'autre part, pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ et toute constante c , nous avons, grâce à la condition de compatibilité (2.25),

$$L((v, V)) = L((v - c, V - c[1, \dots, 1])),$$

L est une forme bilinéaire continue sur \mathcal{H}^1 . Par conséquent, le lemme de Lax-Milgram [24] implique l'existence et l'unicité de $(u, U) \in \mathcal{H}^1$ satisfaisant (2.26).

Le fait que (2.24) implique (2.26) est standard, nous nous concentrons donc sur l'implication inverse et prouvons que $(u, U) \in \mathcal{H}^1$ solution de (2.26) satisfait (2.24). En choisissant $(v, V) \sim (\varphi, 0_{\mathbb{R}^M})$ dans (2.26), avec $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, cela implique immédiatement que $-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f$ dans Ω . En choisissant ensuite $(v, V) \sim (v_0, 0_{\mathbb{R}^M})$ avec $v_0 \in H^1(\Omega)$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma \nabla u v_0 + \sigma \nabla u \cdot \nabla v_0) \, dx = \sum_{m=1}^M \int_{E_m} (g - \xi_m (u - U_m)) v_0 \, ds(x) + \int_{E_c} g v_0 \, ds(x),$$

ce qui implique, grâce à la surjectivité de l'opérateur de trace $v_0 \in H^1(\Omega) \mapsto v_{0|\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et à la définition de la dérivée conormale $\sigma \partial_\nu u$, que u satisfait (2.24)₂ et (2.24)₃. En particulier, $\sigma \partial_\nu u$ appartient à $L^2(\partial\Omega)$.

Enfin, en choisissant $(v, V) \sim (0, V_0)$ avec $V_0 \in \mathbb{R}^M$, on obtient

$$I \cdot V_0 = \sum_{m=1}^M \int_{E_m} (g - \xi_m (u - U_m)) V_{0,m} \, ds(x) = \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u V_{0,m} \, ds(x) = W \cdot V_0,$$

avec $W \in \mathbb{R}^M$ définie par $W_m = \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x)$, ce qui conclut la démonstration. \square

Une formulation alternative bien posée dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$

Comme mentionné précédemment, le problème (2.24) est bien posé dans \mathcal{H}^1 . En d'autres termes, la solution de (2.24) est définie à une constante additive près. Du point de vue numérique, il est nécessaire de fixer cette constante, ce qui est généralement réalisé en imposant une contrainte sur U , telle que $U_1 = 0$ où $U \in \mathbb{R}_>^M$. La solution est alors recherchée dans $H^1(\Omega) \times \tilde{\mathbb{R}}$, avec $\tilde{\mathbb{R}} = \{U \in \mathbb{R}^M, U_1 = 0\}$, or $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_>^M$, rétablissant ainsi l'unicité. Théoriquement, la contrainte peut être imposée sur le potentiel u , mais cela ajoute des problèmes numériques lors de la résolution numérique du problème. Ici, nous proposons une autre approche consistant à modifier le problème (2.24) en un nouveau problème, qui sera bien posé dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$, et dont la solution sera dans la classe d'équivalence des solutions du problème (2.26). Notons que, par construction, aucune contrainte supplémentaire n'est imposée sur le nouveau problème pour obtenir une bonne formulation. Ainsi, il n'y a aucun traitement numérique particulier à effectuer.

— Formulation dont la solution vérifie $U_1 = 0$:

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Nous considérons le problème modifié :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

La condition (2.27)₄ est équivalente à :

$$\int_{E_1} \sigma \partial_\nu u ds(x) + \varepsilon U_1 = I_1, \quad \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) = I_m, \quad \forall m \in \{2, \dots, M\}.$$

En d'autres termes, une seule équation du problème initial (2.24) est modifiée.

Proposition 2.3.3. *Le problème (2.27) admet une solution unique $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$. De plus, si I, f et g vérifient la condition de compatibilité (2.25), $U_1 = 0$, et le couple (u, U) , considéré comme un élément de \mathcal{H}^1 , est solution de (2.24).*

Démonstration. Nous dotons $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ de son produit scalaire standard, avec la norme correspondante :

$$\|(u, U)\|_{H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|U\|_{\mathbb{R}^M}^2.$$

Tout d'abord, en adaptant la démonstration de la Proposition 2.3.2, il est facile de voir que le problème (2.27) est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$B_1((u, U), (v, V)) = L((v, V)), \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M. \quad (2.28)$$

avec

$$B_1((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \xi_m(u - U_m)(v - V_m) ds(x) + \varepsilon U_1 V_1$$

et

$$L((v, V)) = \int_{\Omega} f v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} g (v - V_m) ds(x) + \int_{E_c} g v ds(x) + I \cdot V.$$

De manière similaire, une adaptation mineure de la démonstration du Lemme 2.3.1 montre que

$$\|(u, U)\|_{b_1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \sum_{m=1}^M |u - U_m|^2 ds(x) + U_1^2,$$

est une norme sur $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ équivalente à la norme standard. Les hypothèses sur σ et ξ_m impliquent immédiatement la coercivité de la forme bilinéaire continue B_1 , tandis que la forme linéaire L est clairement continue sur $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$. Par conséquent, le théorème de Lax-Milgram [24] implique l'existence et l'unicité de la solution de (2.28).

On suppose maintenant que I , f et g vérifient (2.25). En choisissant $v = 1$ et $V = [1, \dots, 1]$, on obtient :

$$\varepsilon U_1 = \int_{\Omega} f dx + \int_{E_c} g ds(x) + \sum_{m=1}^M I_m = 0.$$

En conséquence, $U_1 = 0$, ce qui implique immédiatement que (u, U) satisfait le système d'équations (2.24), ce qui conclut la démonstration. \square

Nous constatons que résoudre le problème (2.27), qui est une légère variation de notre problème initial (2.24), permet de retrouver la solution unique de (2.24) satisfaisant la condition supplémentaire $U_1 = 0$. Notons que cela est valable pour toute valeur du paramètre positif ε , tant que I , f et g sont compatibles au sens de (2.25). Dans la suite de cette thèse, nous nous concentrerons toujours sur le problème (2.27).

Remarque 2.3.4. *Le choix de se concentrer sur la première électrode est complètement arbitraire. Une simple renumérotation des électrodes permettrait d'utiliser la même formulation pour imposer la condition de nullité sur n'importe quelle électrode.*

Remarque 2.3.5. *Le problème (2.27) est bien posé indépendamment de la compatibilité des données I , f et g . Si les données ne sont pas compatibles, alors (u, U) solution de (2.27) ne peut pas résoudre (2.24) car ce dernier n'a pas de solution. Comme on peut le voir dans la démonstration de la Proposition 2.3.3, si (u, U) est la solution de (2.24), nous avons toujours*

$$\varepsilon U_1 = \int_{\Omega} f dx + \int_{E_c} g ds(x) + \sum_{m=1}^M I_m. \quad (2.29)$$

En conséquence, si nous définissons $\tilde{I} \in \mathbb{R}^M$ par l'expression suivante :

$$\tilde{I}_1 = I_1 - \left(\int_{\Omega} f dx + \int_{E_c} g ds(x) + \sum_{m=1}^M I_m \right), \quad \tilde{I}_m = I_m, \quad m \neq 1,$$

nous constatons que (u, U) satisfait (2.24) avec les termes sources d'origine (I, f, g) remplacés par (\tilde{I}, f, g) . Ce deuxième ensemble de données satisfait évidemment la condition de compatibilité (2.25). On peut dire que le problème (2.27) corrige les données de sorte qu'elles satisfassent toujours

la condition de compatibilité.

Dans le cas de données compatibles, la valeur du paramètre ε n'a aucune influence sur la solution du problème (2.27) et peut être librement fixée à n'importe quelle valeur arbitraire. Du point de vue numérique, ce n'est pas le cas. En effet, la condition de compatibilité numérique n'a pas nécessairement à être exactement satisfaite par la formulation en différences finies, mais seulement à l'ordre de l'approximation, même si les données continues satisfont (2.25). Par conséquent, en raison de l'équation (2.29), la valeur de ε influence la valeur de U_1 . Cela provoque une interaction entre les deux termes du côté gauche de (2.27)₄ qui aura une influence sur l'amplitude de l'erreur numérique, mais pas sur l'ordre de convergence lui-même.

— En fixant $U \in \mathbb{R}_\diamond^M$:

Comme dernier point, nous notons qu'il est tout aussi facile de sélectionner (u, U) , solution de (2.24), satisfaisant la condition supplémentaire de moyenne nulle sur U , c'est-à-dire $U \in \mathbb{R}_\diamond^M$, sans imposer strictement cette condition (c'est-à-dire, avec un problème posé dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ et non dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}_\diamond^M$).

En effet, il suffit de résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) + \varepsilon \langle U \rangle = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Ici, nous avons défini $\langle U \rangle = \sum_{k=1}^M U_k$. La forme variationnelle correspondante est :

$$B_\diamond((u, U), (v, V)) = L((v, V)), \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M.$$

avec

$$B_\diamond((u, U), (v, V)) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \xi_m(u - U_m)(v - V_m) ds(x) + \varepsilon \langle U \rangle \langle V \rangle.$$

En suivant le même raisonnement utilisé précédemment, il n'est pas difficile de voir que (2.30) est bien posé dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$, et que si (I, f, g) satisfait (2.25), (u, U) solution de (2.30) satisfait les équations originales du CEM généralisé (2.24), avec en plus $\langle U \rangle = 0$.

Une méthode de frontière immergée pour le problème direct de l'EIT

Dans ce chapitre, nous considérons le CEM généralisé suivant introduit précédemment dans le chapitre 2 (équation (2.27)) : trouver $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \quad m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

et présentons sa discrétisation en utilisant une méthode de frontière immergée sur une grille cartésienne, en considérant le cas bi-dimensionnel où le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est immergé dans un domaine carré plus grand qu'on note par Ω_e (on a donc $\overline{\Omega} \subset \Omega_e$). Le domaine Ω_e est entièrement discrétisé avec une grille cartésienne, ce qui implique que certains points de discrétisation se trouvent dans $\Omega_e \setminus \overline{\Omega}$, une partie du domaine étendu où il n'y a pas de problème physique. Comme nous le détaillerons dans la suite, dans cette partie, nous considérerons le problème secondaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_e = 0 & \text{dans } \Omega_e \setminus \overline{\Omega} \\ u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \\ u_e = u & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

la fonction u étant le potentiel électrique, solution de l'équation (3.1).

La discrétisation d'un tel problème nécessite une stratégie particulière pour gérer la frontière qui sera "immergée" dans le domaine de discrétisation. Nous présentons tout d'abord notre méthode de frontière immergée. Ensuite, nous prouvons la convergence de la méthode à l'ordre 1 pour la solution. La preuve de convergence repose sur un principe du maximum discret. Ce dernier est utilisé pour fournir des estimations des coefficients de la matrice de discrétisation inverse. Mais premièrement, nous commençons ce chapitre par quelques rappels historiques sur les méthodes de frontière immergée et leur utilisation dans la littérature.

3.1 Motivation et aperçu historique des méthodes de frontière immergée

Notre objectif principal en EIT est de reconstruire la conductivité à l'intérieur d'un domaine Ω . Cependant, une configuration de mesure expérimentale contient souvent d'autres paramètres imprécisément connus : les informations sur les positions des électrodes, les impédances de contact aux interfaces électrode-objet et la forme du corps examiné peuvent être incomplètes. Ces imprécisions peuvent affecter de manière significative la qualité de la reconstruction, en particulier dans les applications médicales de l'EIT. En effet, l'EIT est connu pour être très sensible aux erreurs de modélisation de la configuration de mesure [9, 48, 49, 107]. Il est donc important de prendre en compte de telles incertitudes lors du développement de méthodes de reconstruction. Ainsi, certaines approches du problème de l'EIT consistent à résoudre le problème inverse de l'EIT pour une géométrie mobile, permettant ainsi de reconstruire également la géométrie du problème.

Dans les travaux de Dardé et al. [48, 49], une reconstruction simultanée du bord et de la conductivité a été abordée à l'aide d'une méthode numérique d'éléments finis à maillage adapté pour la résolution du problème direct. Dans ces études, un remaillage à chaque étape de mise à jour de la géométrie du bord était nécessaire. Cette étape de remaillage s'est révélée coûteuse numériquement. Dans de telles situations, l'utilisation de méthodes de frontière immergée peut permettre d'éviter complètement l'étape de remaillage. En effet, l'utilisation de méthodes de frontière immergée sur grilles cartésiennes permet de prendre en compte facilement les géométries mobiles de manière implicite, indépendamment du maillage utilisé.

En conséquence, nous élaborerons une méthode numérique sur grille cartésienne, adoptant une approche de frontière immergée similaire à celle présentée dans [39], pour la résolution du problème direct de l'EIT. Des fonctions level-set seront utilisées pour représenter la géométrie du bord et permettront de tenir compte de la présence de géométries complexes sur la grille cartésienne de façon implicite.

L'intérêt pour les méthodes de frontière immergée ou "Immersed boundary methods" (IBM) a commencé dès les années 1990, avec le premier article remontant aux travaux originels de Peskin (1972) [151], où le terme "immersed boundaries" a été introduit pour la première fois. Aujourd'hui, les IBM sont des méthodes numériques établies qui ont été utilisées pour la résolution de nombreux problèmes pour la mécanique des solides [155], les systèmes électromécaniques [2], la propagation des fissures [133], l'élasticité 3D [167] et la diffusion électromagnétique [144]. Ces méthodes sont devenues particulièrement populaires en mécanique des fluides [6, 97, 104, 105, 114, 119, 131, 132, 142, 181, 191, 207].

Dans notre contexte, on s'intéresse aux méthodes de frontière immergée pour des problèmes elliptiques avec des discontinuités à travers une interface. La première méthode de grille cartésienne pour les problèmes elliptiques a été conçue par Mayo en 1984 [125] et développée ultérieurement dans [126] et [124], où une équation intégrale a été conçue pour résoudre des problèmes d'interface elliptique

avec des coefficients définis par morceaux, avec une précision d'ordre deux en norme infinie. Ensuite, LeVeque et Li (1994) [113] ont développé la très connue "Immersed Interface Method" (IIM). Cette méthode repose sur des développements en série de Taylor de la solution de part et d'autre de l'interface. L'opérateur elliptique est discrétisé sur chaque point de la grille près de l'interface avec des formules prenant en compte les sauts à travers l'interface. Pour trouver ces formules, un système linéaire avec six inconnues doit être résolu pour chacun des points de la grille concernés. La méthode est également précise au second ordre en norme infinie. De nombreuses extensions de l'IIM ont été réalisées. Dans les lignes suivantes, nous évoquons brièvement les plus pertinentes dans le contexte de notre étude de problème elliptique. Li [115] a développé un algorithme IIM rapide pour les problèmes elliptiques avec des coefficients constants par morceaux. Cette version de l'IIM utilisait des inconnues auxiliaires exprimant la dérivée normale à l'interface. L'algorithme IIM rapide a été généralisé par Wiegmann et Bube dans [201] sous le nom de Explicit Jump Immersed Interface Method (EJIIM). L'EJIIM considère une discrétisation classique en différences finies et utilise des termes correctifs ajoutés au membre de droite du système linéaire pour tenir compte de l'interface. Les termes correctifs impliquent les sauts de la solution et ses dérivées d'ordre élevé à travers l'interface. Ensuite, Li et Ito [116] ont proposé de résoudre un problème d'optimisation quadratique pour chaque point près de l'interface afin de choisir les coefficients des différences finies sur un stencil à neuf points conduisant à un schéma préservant le principe du maximum (MIIM). Bethelsen a développé la Decomposed Immersed Interface Method (DIIM) [12]. Il a utilisé une procédure itérative pour calculer les termes de correction du membre de droite successifs prenant en compte les conditions de saut à l'interface, associés à un stencil d'interpolation à neuf points de chaque côté de l'interface.

Une autre classe de méthode cartésienne introduite par Zhou et al. est la méthode Matched Interface and Boundary (MIB) : [210], [209], [205]. Cette méthode peut fournir des schémas de différences finies d'ordre arbitrairement élevé. La solution de chaque côté de l'interface est étendue à des points fictifs de l'autre côté. Ces valeurs fictives sont calculées en imposant de manière itérative les conditions de saut d'interface d'ordre le plus bas. Enfin, Chern et Shu [35] ont proposé une méthode d'interface de couplage, où les discrétisations sur chaque sous-domaine sont couplées par une approche dimension par dimension en utilisant les conditions de saut. Toutes les méthodes citées ci-dessus sont précises au second ordre et peuvent être considérées comme des méthodes de différence finies. Cependant, des méthodes cartésiennes pour les problèmes d'interface elliptique existent également dans la communauté des volumes finis : Collela et son groupe ont notamment développé des méthodes dans un esprit de volume fini, où une reconstruction de l'interface est appliquée aux cellules proches de l'interface, afin de préserver les propriétés de conservativité ([93] et [127]). Parmi la communauté des éléments finis, citons quelques références : [7, 17, 18, 22, 30, 60, 81, 87, 92, 123, 143, 156].

Dans la partie suivante, nous présenterons en détail notre méthode de frontière immergée pour l'EIT basée sur une discrétisation par différences finies. Nous introduisons des inconnues supplémentaires aux intersections de l'interface avec la grille pour la discrétisation de l'opérateur elliptique. Ainsi, à l'image de la méthode MIB, nous traitons un problème elliptique avec un saut à travers l'interface. Cependant, pour notre méthode, et comme dans [39], les inconnues additionnelles prises en compte

pour la discrétisation de l'opérateur elliptique sont situées directement à l'interface, et non aux points du maillage de l'autre côté de celle-ci.

3.2 Méthode de frontière immergée pour l'EIT

Pour la méthode de frontière immergée, le domaine Ω est contenu dans le domaine carré plus grand Ω_e ($\bar{\Omega} \subset \Omega_e$). Ce dernier est entièrement discrétisé via une grille cartésienne. Nous nous retrouvons donc avec des points de discrétisation qui appartiennent à $\Omega_e \setminus \bar{\Omega}$. Dans cette situation, une première idée serait de simplement fixer la solution à zéro sur les degrés de liberté situés en dehors de Ω . Cependant, cela n'est pas une bonne idée dans le cas de notre approche, car nous avons besoin d'une continuité de la solution de part et d'autre de l'interface $\partial\Omega$ pour calculer des formules de quadrature sur les électrodes, comme nous le verrons plus loin. Nous choisissons donc une approche différente, qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles supplémentaire dans $\Omega_e \setminus \bar{\Omega}$, similaire au problème posé dans Ω . En conséquence, nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{dans } \Omega_e \setminus \bar{\Omega} \\ u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \\ u_e = u & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

La fonction u étant le potentiel électrique, solution de l'équation (3.1), il est clair que ce problème est bien posé dans $H^1(\Omega)$ et que sa solution dépend continument de u , et donc des termes sources (I, f, g) de l'EIT. De plus, elle héritera automatiquement de la régularité de u grâce aux résultats standards de régularité elliptique. En conclusion, notre objectif est maintenant de définir une méthode de frontière immergée pour reconstruire (u, U, u_e) , avec (u, U) solution de l'équation (3.1) et u_e solution de l'équation (3.2).

Description de l'interface

Pour améliorer la précision à proximité de l'interface, nous avons besoin d'informations géométriques supplémentaires, comme par exemple la distance par rapport à l'interface et la normale à l'interface. Ces informations peuvent être fournies facilement par la méthode de représentation implicite du domaine par des fonctions level-set, introduite par Osher et Sethian dans [146]. Nous renvoyons le lecteur vers [170], [171] et [145] pour des revues de cette méthode. On choisit donc de représenter l'interface par la méthode de level-set, plus précisément, pour $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 'level-set' scalaire qui satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \varphi(x) > 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi, Ω est le sous-domaine négatif de φ et $\partial\Omega$ coïncide avec l'isovaleur 0 de φ . On note qu'il existe une infinité de fonctions level-set associées à un domaine Ω . En général ce type de représentation du domaine permet une formulation très simple et pratique pour les études avec géométrie mobile [120]. Discutons d'abord de la manière dont les quantités géométriques attachées à Ω peuvent être directement calculées à partir des données d'une fonction level-set φ :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ le domaine concerné, supposé de classe C^1 , et $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\nabla\varphi \neq 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega$. Notons qu'une telle fonction existe toujours, comme conséquence d'un argument classique de partition de l'unité [4].

Le vecteur normal unitaire $\nu(x)$ à $\partial\Omega$, pointant vers l'extérieur de Ω , peut s'exprimer en termes de φ comme suit [39] :

$$\forall x \in \Gamma, \quad \nu(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}. \quad (3.4)$$

Classiquement, la fonction level-set est définie comme la fonction distance signée à l'interface :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \text{dist}_{\partial\Omega}(x) & \text{à l'extérieur de l'interface} \\ -\text{dist}_{\partial\Omega}(x) & \text{à l'intérieur de l'interface} \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\text{dist}_{\partial\Omega}(x) = \inf\{\text{dist}(x, y); y \in \partial\Omega\}$$

est l'infimum des distances d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ à $\partial\Omega$. l'interface sera implicitement représentée par l'iso-ligne zéro de cette fonction. Dans notre cas, nous n'allons pas utiliser cette définition, mais nous allons plutôt en proposer une autre dans la suite du chapitre (comme indiqué dans la remarque 3.4.2). Comme nous le verrons ultérieurement, dans certains cas, la nature mobile de notre problème et notre objectif de réaliser une reconstruction de forme dans la suite nous incitent à adopter une définition spécifique de la fonction de φ .

Notation des inconnues du problème discret

Nous considérons une grille cartésienne uniforme définie sur le carré Ω_e , de sorte que le domaine Ω soit complètement immergé à l'intérieur de cette grille. L'espacement de la grille est noté h . Chaque nœud de cette grille cartésienne est appelé un point de grille et est noté $M_{ij} = (x_i, y_j) = (ih, jh)$. Nous notons par u_{ij}^h l'approximation de la fonction u au point (x_i, y_j) . L'ensemble des points de grille situés à l'intérieur du domaine Ω_e est noté Ω_h . Dans le but de la discrétisation du CEM généralisé, nous devons définir des points supplémentaires sur l'interface $\partial\Omega$. Nous définissons le point d'interface $I_{i+1/2, j} = (x_{i+1/2, j}, y_j)$ comme l'intersection de la frontière $\partial\Omega$ et du segment $[M_{ij}M_{i+1j}]$, s'il existe. De même, le point d'interface $I_{i, j+1/2} = (x_i, y_{i, j+1/2})$ est défini comme l'intersection de l'interface et du segment $[M_{ij}M_{i, j+1}]$. À chaque point de l'interface, nous créons une inconnue supplémentaire qu'on note par $u_{i+1/2, j}^h$ ou $u_{i, j+1/2}^h$. L'ensemble des points d'interface est noté $\delta\Omega_h$. On dit qu'un point de la grille est irrégulier s'il a l'un de ses voisins qui est un point d'interface (Figure 3.1). En revanche, les points de la grille qui ne sont pas irréguliers sont appelés points de grille réguliers. L'ensemble des

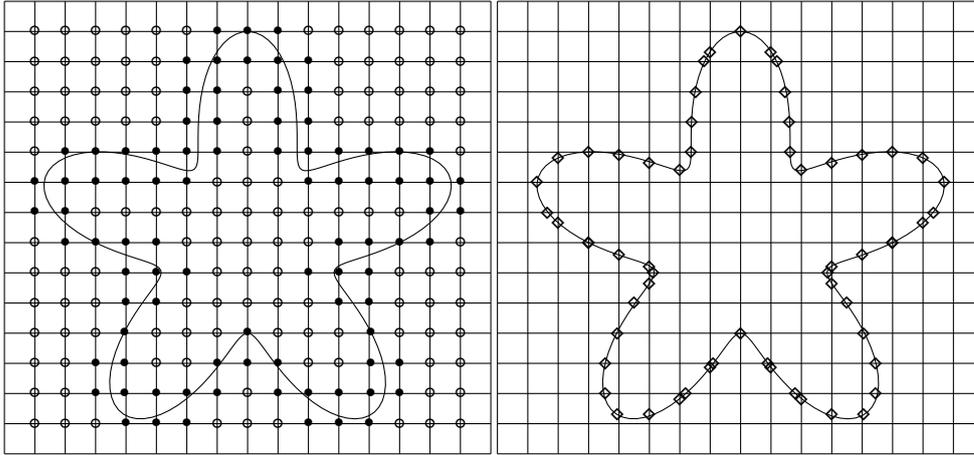


Fig. 3.1 : Gauche : Les points réguliers sont représentés par des cercles \circ , les points irréguliers (appartenant à Ω_h^*) sont représentés par des points \bullet , droite : les points d'interface (appartenant à $\delta\Omega_h$).

nœuds de grille irréguliers est noté par Ω_h^* . L'ensemble des valeurs associées aux électrodes est noté E_h . Dans certaines parties de ce chapitre, les points de la grille ou d'interface peuvent être désignés par des lettres telles que P ou Q plutôt que par des indices tels que $M_{i,j}$ si cela est plus pratique. Nous désignons également par x_P et y_P les coordonnées d'un point P .

Nous allons maintenant présenter en détail le schéma numérique, en commençant par la discrétisation de l'opérateur elliptique, puis des conditions de flux aux bords et enfin des conditions sur les électrodes.

Opérateur elliptique

Pour discrétiser l'opérateur elliptique (3.1)₁ (ou (3.2)₁) sur chaque point de la grille, qu'il soit du type régulier ou non, nous utilisons une configuration en cinq points. Ce stencil de cinq points comprend le point de grille $M_{i,j}$ et ses voisins les plus proches, qu'ils soient des points d'interface ou de la grille, dans chaque direction. Pour rendre cela explicite, nous désignons par u_S^h la valeur de la solution sur le point le plus proche dans la direction sud, avec les coordonnées (x_S, y_S) . De manière similaire, nous définissons u_N^h, u_W^h, u_E^h et leurs coordonnées associées $(x_N, y_N), (x_W, y_W), (x_E, y_E)$. La discrétisation s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\
 &\quad -\left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}.
 \end{aligned}$$

avec $\sigma_{i+1/2,j}$ la valeur de σ au point $(\frac{x_i + x_E}{2}, y_j)$. L'erreur de troncature de cette discrétisation est d'ordre deux sur les points de grille réguliers, et d'ordre zéro sur les points de grille irréguliers [39].

Conditions aux limites de flux

À chaque point d'interface, nous discrétisons les conditions aux limites (3.1)₂ ou (3.1)₃, selon si le point d'interface appartient ou non à une électrode. Par exemple, sur un point de frontière $I_{i+1/2,j}$, la discrétisation est la suivante :

$$\sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h + \xi_m(I_{i+1/2,j}) \left(u_{i+1/2,j}^h - U_m \right) = g_{i+1/2,j} \text{ si } I_{i+1/2,j} \in E_m, \quad (3.6)$$

$$\sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h = g_{i+1/2,j} \text{ sinon.} \quad (3.7)$$

avec $(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h$ représentant la dérivée normale discrétisée, dont nous allons détailler la construction juste après et qui dépend de la géométrie locale de l'interface. Comme illustré sur la Figure 3.2, l'intersection entre la normale à la frontière et la grille se situe généralement sur un segment : soit $[M_{i,j}, M_{i,j-1}]$, soit $[M_{i,j-1}, M_{i+1,j-1}]$, soit $[M_{i,j}, M_{i,j+1}]$, soit $[M_{i,j+1}, M_{i+1,j+1}]$. La dérivée normale discrète $(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h$ est calculée comme la dérivée normale de l'interpolant linéaire de la solution numérique sur le triangle composé du point d'interface $I_{i+1/2,j}$ et du segment avec lequel le vecteur normal intersecte la grille (donc un des segments mentionné précédemment). Si nous notons par K ce triangle, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) ses sommets, et u_1 , u_2 et u_3 les valeurs associées, les fonctions de base aux sommets pour l'interpolation linéaire s'écrivent comme suit :

$$\lambda_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{y_k - y_i}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)}, \\ \beta_j &= \frac{x_i - x_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)}, \\ \gamma_j &= \frac{x_k y_i - x_i y_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)}. \end{aligned}$$

En notant par (ν_x, ν_y) l'approximation de la normale au point d'interface on a l'approximation de la dérivée normale pour le point d'interface $I_{i+1/2,j}$ suivante :

$$(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h = (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3) \nu_x + (u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + u_3 \beta_3) \nu_y. \quad (3.8)$$

Cette discrétisation est d'ordre 1 car elle repose sur une interpolation linéaire [39].

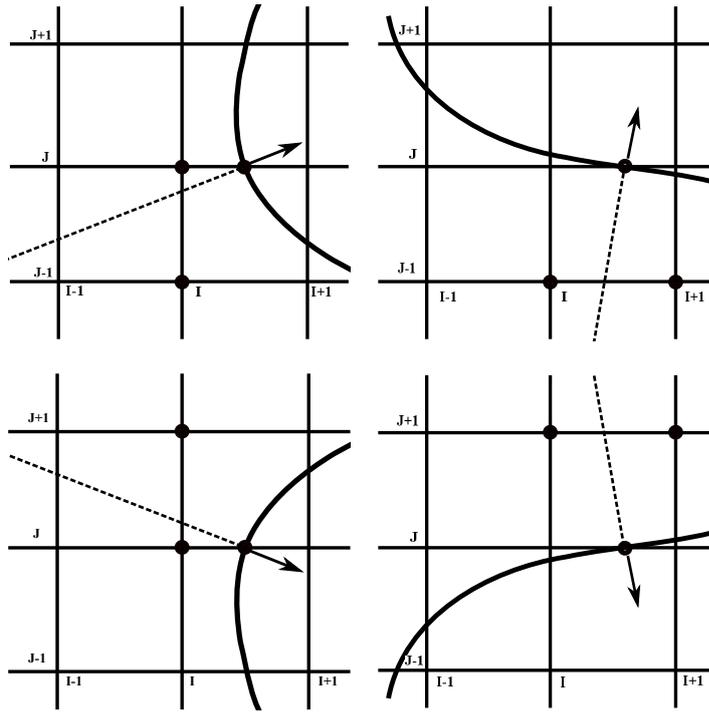


Fig. 3.2 : Les schémas possibles pour la discrétisation du flux d'ordre 1 du côté gauche de l'interface, avec les points impliqués dans la discrétisation signalés par des cercles noirs.

Les conditions intégrales sur les électrodes

Nous allons maintenant discrétiser (3.1)₄. En utilisant (3.1)₃, on réécrit (3.1)₄ de la manière suivante :

$$\int_{E_m} (\xi_m(U_m - u)) ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \int_{E_m} g, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.9)$$

Nous discrétisons (3.9) sur chaque électrode avec une formule de quadrature du premier ordre basée sur une fonction de Dirac discrète [175]. Cette fonction de Dirac discrète est, par construction, nulle en dehors des points irréguliers, positive partout et non nulle sur les points de grille irréguliers. Par conséquent, (3.9) peut être écrite comme suit :

$$\sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P (\xi_m(P)(U_m - u_P)) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P g(P), \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.10)$$

Les coefficients ω_P représentent les poids de la formule de quadrature du premier ordre telle qu'énoncée dans [175]. Dans le paragraphe suivant, nous présentons de manière générale la valeur de ces poids, avec les mêmes notations que dans le papier de Smereka [175].

On commence tout d'abord par définir la fonction de Dirac suivante : soit δ la fonction de Dirac usuelle en deux dimensions telle que,

$$\delta(x, y) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Remarque 3.2.1. *Bien évidemment, cette définition de la fonction de Dirac est incorrecte, puisque mathématiquement δ est la distribution d'ordre 0 définie par $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0, 0)$, pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Mais elle donne la bonne intuition menant à la définition des fonctions de Dirac discrètes.*

Rappelons que la fonction $\varphi(x, y)$ est la fonction level-set $\varphi(x, y)$, et notons par $\varphi_{i,j} = \varphi(x_i, y_j)$ la discrétisation sur une grille de taille de maillage h . Avec ces notations on écrit la longueur de l'arc de $\partial\Omega$ par :

$$I = \int_{\Omega} \delta(\varphi(x, y)) dx dy.$$

Notre objectif est de trouver une version discrète de δ notée $\tilde{\delta}_{i,j}$. En d'autres termes, on cherche à écrire

$$I = \sum_{i,j} h^2 \tilde{\delta}_{i,j} + O(h^p)$$

où $p > 0$. Dans l'article de Smereka [175], il est établi que cette longueur d'arc peut être calculée avec une précision du second ordre. Cependant, dans notre cas, nous nous contentons d'une implémentation de premier ordre ($p = 1$). Autrement dit, si

$$I = \int_{\partial\Omega} f(x, y) ds = \int_{\Omega} f(x, y) \delta(\varphi(x, y)) dx dy,$$

alors on cherche $\tilde{\delta}_{i,j}$ tel que :

$$I = \sum_{i,j} h^2 \tilde{\delta}_{i,j} f_{i,j} + O(h).$$

Si l'on désigne par g la fonction de Green pour l'équation de Laplace alors elle satisfait :

$$\Delta g(x, y) = \delta(\varphi(x, y)), \quad (3.12)$$

Le but maintenant est de trouver une écriture discrète de (3.12). En discrétisant le problème (3.12), on va pouvoir expliciter les valeurs du delta discret. Par exemple, en dimension 1D, Smereka [175] montre qu'en utilisant une écriture discrète de l'équation suivante :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \delta(x - \alpha) \text{ avec } g(0) = g(1) = 0$$

où $\delta(x)$ est la fonction Dirac discrète unidimensionnelle et $0 < \alpha < 1$, on déduit l'écriture discrète de δ . En effet, Smereka trouve que :

$$\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} = \tilde{\delta}_i.$$

où

$$\tilde{\delta}_i = \tilde{\delta}_i^+ + \tilde{\delta}_i^-$$

avec

$$\tilde{\delta}_i^+ = \begin{cases} \frac{(x_{i+1} - \alpha)}{h^2} & \text{si } x_i \leq \alpha < x_{i+1}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_i^- = \begin{cases} \frac{(\alpha - x_{i-1})}{h^2} & \text{si } x_{i-1} < \alpha < x_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et en déduit que le terme à droite est bien une écriture discrète de la fonction delta. La preuve de ce résultat est détaillée dans [175].

Dans le cas 2D la démarche est similaire, on note par $[q] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (q(\alpha + \epsilon\nu) - q(\alpha - \epsilon\nu))$ où $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ représente ici un point sur l'interface. Il est également utile de définir le saut dans la direction x de la manière suivante : $[q]_x = q(\alpha_x^+, \alpha_y) - q(\alpha_x^-, \alpha_y)$, ainsi que le saut dans la direction de y , $[q]_y = q(\alpha_x, \alpha_y^+) - q(\alpha_x, \alpha_y^-)$, où $\alpha^\pm = \alpha \pm \epsilon$.

En utilisant ces notations on réécrit (3.12) de la manière suivante :

$$\Delta g(x, y) = 0 \quad (3.13)$$

avec les conditions de saut au bord

$$[\partial_\nu g] = 1 \text{ et } [g] = 0. \quad (3.14)$$

où ∂_ν est la dérivée directionnelle dans la direction normale.

Pour les points réguliers, l'approximation standard avec des différences finies centrées donne que :

$$\Delta g(x_i, y_j) = \Delta_h g_{i,j} + O(h^2), \quad (3.15)$$

où (x_i, y_j) sont les emplacements sur la grille et Δ_h est le laplacien discret à cinq points :

$$\Delta_h g_{i,j} = \frac{g_{i+1,j} - 2g_{i,j} + g_{i-1,j}}{h^2} + \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{h^2}. \quad (3.16)$$

Pour les points irréguliers, Smereka [175] trouve la relation discrète suivante :

$$\Delta g(x_i, y_j) = \Delta_h g_{i,j} - \tilde{\delta}_{i,j} + O(h), \quad (3.17)$$

avec $\tilde{\delta}_{i,j}$ en deux dimensions représenté sous la forme suivante :

$$\tilde{\delta}_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} \quad (3.18)$$

avec

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} = \begin{cases} h_x^+ [\partial_x g]_x + \frac{1}{2} (h_x^+)^2 [\partial_{xx}^2 g]_x & \text{si } x_i \leq \alpha_x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} = \begin{cases} h_x^- [\partial_x g]_x - \frac{1}{2} (h_x^-)^2 [\partial_{xx}^2 g]_x & \text{si } x_{i-1} \leq \alpha_x < x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} = \begin{cases} h_y^+ [\partial_y g]_y + \frac{1}{2} (h_y^+)^2 [\partial_{yy}^2 g]_y & \text{si } y_j \leq \alpha_y < y_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} = \begin{cases} h_y^- [\partial_y g]_y + \frac{1}{2} (h_y^-)^2 [\partial_{yy}^2 g]_y & \text{si } y_{j-1} \leq \alpha_y < y_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $h_x^+ = x_{i+1} - \alpha_x$, $h_x^- = \alpha_x - x_{i-1}$ et h_y^+ , h_y^- sont définis de manière similaire. Nous soulignons que les termes $[\cdot]_x$ sont évalués en (α_x, y_j) et les termes $[\cdot]_y$ sont évalués en (x_i, α_y) .

Comme $\Delta g(x_i, y_j) = 0$, étant donné que (x_i, y_j) n'appartient pas à la frontière, on en déduit que pour tout point de grille (d'après (3.15) et (3.17)) on a :

$$\Delta_h g_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j} + O_I(h) + O(h^2) \quad (3.19)$$

$O_I(h)$ est différent de zéro uniquement aux points irréguliers. L'équation (3.19) est donc une forme discrète de l'équation (3.12).

On s'intéresse à une implémentation au premier ordre de (3.18). Cela peut être réalisé en négligeant les sauts pour les dérivées secondes et en évaluant $[\partial_x g]_x$ et $[\partial_y g]_y$ au premier ordre. On note par $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ le vecteur normal unitaire et par $t = (t_x, t_y)$ un vecteur unitaire tangent au bord $\partial\Omega$. Pour le problème en question on rappelle que $[\partial_\nu g] = 1$ et $[g] = 0$. Cela implique $[\partial_t g] = 0$. En combinant $[\partial_\nu g] = 1$ et $[\partial_t g] = 0$ on obtient donc que :

$$[g_x] = \nu_x \quad \text{et} \quad [g_y] = \nu_y. \quad (3.20)$$

D'après (3.20) et le fait que $[q]_x = [q] \text{sgn}[\nu_x]$ et $[q]_y = [q] \text{sgn}[\nu_y]$ on a que

$$[g_x]_x = |n_x| \quad \text{et} \quad [g_y]_y = |n_x| \quad (3.21)$$

Nous rappelons que notre interface est représentée comme l'ensemble de niveau zéro de $\varphi(x, y)$ et supposons que nous disposons d'une discrétisation $\varphi_{i,j}$ sur une grille de pas de maillage h . Nous avons les définitions suivantes :

$$D_x^+ \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h}, \quad D_x^- \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h}, \quad D_x^0 \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h};$$

on a aussi $D_y^+ \varphi_{i,j}$, $D_y^- \varphi_{i,j}$ et $D_y^0 \varphi_{i,j}$ définis de manière analogue et

$$\|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\| = \sqrt{(D_x^0 \varphi_{i,j})^2 + (D_y^0 \varphi_{i,j})^2} + \epsilon, \quad (3.22)$$

où ϵ est utilisé afin d'éviter toute division par zéro. En exploitant l'implémentation de la level-set et les définitions introduites précédemment, on peut dériver une approximation du premier ordre de l'équation (3.18). En utilisant le développement en série de Taylor, nous pouvons établir que :

$$h_x^\pm = \left| \frac{\varphi_{i\pm 1,j}}{D_x^\pm \varphi_{i,j}} \right| + O(h^2) \quad \text{et} \quad h_y^\pm = \left| \frac{\varphi_{i,j\pm 1}}{D_y^\pm \varphi_{i,j}} \right| + O(h^2) \quad (3.23)$$

De plus on a que :

$$v_x = \frac{\partial_x \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{D_x^0 \varphi_{i,j}}{|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}|} + O(h) \quad \text{et} \quad v_y = \frac{\partial_y \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{D_y^0 \varphi_{i,j}}{|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}|} + O(h) \quad (3.24)$$

Ces approximations sont d'ordre deux aux points de la grille; cependant, étant utilisées à l'interface, leur précision est d'ordre un. Si nous utilisons les approximations données par (3.23) et (3.24) dans (3.18) et ignorons les sauts dans les secondes dérivées, nous obtenons l'expression suivante d'ordre un pour la fonction delta discrète :

$$\tilde{\delta}_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} \quad (3.25)$$

avec

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j} D_x^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_x^+ \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i+1,j} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i-1,j} D_x^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_x^- \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i-1,j} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j+1} D_y^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_y^+ \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i,j+1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j-1} D_y^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_y^- \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i,j-1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, notre système d'équations discrétisées à l'aide d'une méthode de frontière immergée peut être représenté comme suit :

- L'opérateur elliptique : pour tout point de grille $M_{i,j}$ on a,

$$-\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h = -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h} = f_{i,j},$$

avec u_S^h , nous faisons référence à la valeur de la solution au point le plus proche dans la direction sud, avec les coordonnées (x_S, y_S) . De manière similaire, pour les directions Nord, Ouest et Est, nous utilisons respectivement u_N^h , u_W^h , u_E^h et leurs coordonnées associées (x_N, y_N) , (x_W, y_W) , (x_E, y_E) .

- Les conditions aux limites de flux : pour le point d'interface $I_{i+1/2,j}$ on a,

$$\sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h + \xi_m(I_{i+1/2,j}) \left(u_{i+1/2,j}^h - U_m\right) = g_{i+1/2,j} \quad \text{si } I_{i+1/2,j} \in E_m, \quad (3.26)$$

$$\sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h = g_{i+1/2,j} \quad \text{sinon.} \quad (3.27)$$

avec

$$(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h = (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3) \nu_x + (u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + u_3 \beta_3) \nu_y. \quad (3.28)$$

où

$$\lambda_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\alpha_j = \frac{y_k - y_i}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$$\beta_j = \frac{x_i - x_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$$\gamma_j = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)}.$$

- Les conditions intégrales sur les électrodes :

$$\sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P \left(\xi_m(P)(U_m - u_P)\right) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P g(P), \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.29)$$

avec les poids ω_P définis par les fonctions Dirac discrets introduits dans l'équation 3.25.

3.3 Convergence de la méthode de frontière immergée

Maintenant que nous avons établi les détails de notre méthode numérique de frontière immergée, le but est de démontrer sa convergence au premier ordre. Pour ce faire, nous commençons par montrer que la matrice de discrétisation est monotone. Ensuite, en utilisant des estimations de fonctions de Green discrètes, nous établissons le résultat de convergence.

3.3.1 Monotonie de la matrice de discrétisation.

On note par A_h la matrice de discrétisation du système linéaire décrit précédemment. Commençons par démontrer la propriété suivante, qui sera utile dans le raisonnement :

Lemme 3.3.1. *Soit v un vecteur défini sur la grille cartésienne, si le minimum de v se trouve sur un point du bord, alors en ce point, la dérivée normale discrète est négative. De plus, si cette dernière est nulle, alors les trois valeurs des points utilisés dans le stencil de discrétisation sont égales.*

Démonstration. L'approximation de la dérivée normale est constante dans l'espace car elle est calculée à partir d'une interpolation linéaire sur un triangle. Par conséquent, si le minimum de v se trouve sur un point de la frontière, alors en ce point là, la dérivée normale discrète est négative. \square

Proposition 3.3.2. *La matrice de discrétisation du système linéaire A_h , est monotone, c'est-à-dire que A_h est inversible et que toutes les valeurs de A_h^{-1} sont non négatives.*

Démonstration. Soit v un vecteur tel que tous les coefficients de $A_h v$ soient non négatifs ($A_h v \geq 0$). Montrons que tous les coefficients de v sont non négatifs. Pour cela, nous considérons le minimum de v dans l'ensemble du domaine : il peut s'agir soit d'une valeur de point de grille, soit d'une valeur de point d'interface, soit d'un potentiel d'électrode. Nous détaillons chacun de ces cas ci-dessous :

- Si le minimum est atteint sur un point de la grille :

Dans ce cas, nous notons (i_0, j_0) les indices de la plus petite composante de v . Nous supposons que le point de grille est un point de grille régulier. Sinon, la formule aurait des poids légèrement différents, mais le raisonnement serait le même. En utilisant l'hypothèse sur l'opérateur elliptique en ce point ($A_h v \geq 0$), nous pouvons écrire :

$$4v_{i_0, j_0} - v_{i_0+1, j_0} - v_{i_0-1, j_0} - v_{i_0, j_0+1} - v_{i_0, j_0-1} \geq 0,$$

or comme le minimum est atteint en v_{i_0, j_0} on a aussi l'inégalité suivante

$$4v_{i_0, j_0} - v_{i_0+1, j_0} - v_{i_0-1, j_0} - v_{i_0, j_0+1} - v_{i_0, j_0-1} \leq 0,$$

nous en déduisons que la discrétisation de l'opérateur elliptique en ce point est nulle et donc on a

$$v_{i_0+1, j_0} = v_{i_0-1, j_0} = v_{i_0, j_0+1} = v_{i_0, j_0-1} = v_{i_0, j_0}.$$

En répétant récursivement ce raisonnement sur les voisins de (i_0, j_0) , puis sur les voisins des voisins, etc., nous en déduisons que toutes les valeurs de v correspondant aux points de grille ou de frontière sont égales à v_{i_0, j_0} . Par conséquent, ce cas revient au cas où le minimum se trouve

sur un point d'interface.

- *Si le minimum se trouve sur un point d'interface qui n'appartient pas à une électrode :*

Sans perte de généralité, supposons que le minimum se trouve sur $I_{i+1/2,j}$, un point de l'interface. Sur ce point d'interface, nous avons les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\sigma \nabla v \cdot n)_{i+1/2,j}^h &\leq 0 \text{ d'après le Lemme 3.3.1 (car le minimum est atteint en ce point)} \\ (\sigma \nabla v \cdot n)_{i+1/2,j}^h &\geq 0 \text{ Parce que tous les coefficients de } A_h v \text{ sont non négatifs,} \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$(\sigma \nabla v \cdot n)_{i+1/2,j}^h = 0.$$

Par conséquent, les valeurs des points de grille impliqués dans la discrétisation de la dérivée normale sont égales au minimum. Cela signifie que toutes les valeurs des points de grille et des points de frontière sont égaux à ce minimum. Par conséquent, ce cas revient finalement à considérer le cas du minimum sur un point de frontière appartenant à une électrode.

- *Si le minimum se trouve sur un point de frontière appartenant à une électrode :*

Sans perte de généralité, supposons que le minimum se trouve sur $I_{i+1/2,j}$, un point de l'interface. Sur ce point de l'interface, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\sigma \nabla v \cdot n)_{i+1/2,j}^h &\leq 0, \\ (\sigma \nabla v \cdot n)_{i+1/2,j}^h + \xi_m(I_{i+1/2,j}) (v_{i+1/2,j}^h - V_m) &\geq 0, \end{aligned}$$

la première en raison du fait que le minimum est situé sur ce point, et la deuxième en raison du fait que tous les coefficients de $A_h v$ sont non négatifs. Par conséquent,

$$v_{i+1/2,j}^h - V_m \geq 0,$$

ce qui signifie que

$$V_m = v_{i+1/2,j}^h,$$

donc le potentiel associé à l'électrode E_m noté par V_m est également le minimum de v .

Par conséquent, ce cas revient à considérer que le minimum de v correspond à un potentiel d'électrode.

- *Si le minimum correspond à un potentiel d'électrode V_m avec $m \neq 1$:*

Sur cette électrode, nous avons la relation suivante :

$$\sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P \xi_m(P) (V_m - v_P) \geq 0,$$

par conséquent, tous les points d'interface appartenant à E_m sont égaux au minimum V_m .

En utilisant le raisonnement précédent, cela signifie que toutes les valeurs de v correspondant aux points de grille, aux points de frontière ou aux potentiels des électrodes sont égales au minimum.

— *Si le minimum correspond au potentiel de l'électrode V_1 :*

Sur cette électrode, nous avons la relation suivante :

$$\sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P \xi_1(P) (V_1 - v_P) + \varepsilon V_1 \geq 0,$$

ce qui signifie que

$$\varepsilon V_1 \geq 0.$$

La valeur minimale de v est non-négative, donc tous les coefficients de v sont non-négatifs.

Nous avons donc prouvé que si $A_h v$ est positif, alors v est également positif. Cette propriété a deux implications : A_h est inversible et toutes les valeurs de A_h^{-1} sont positive. \square

3.3.2 Estimations des fonctions de Green discrètes et résultat de convergence

Dans cette section, nous étudions la convergence des schémas numériques. Ce travail se fonde sur ce qui a été fait dans [200]. Nous allons utiliser par la suite une formulation qui considère la matrice de discrétisation de manière plus globale, par blocs correspondant à différentes zones de la grille plutôt que ligne par ligne. Cette formulation se fonde sur l'utilisation d'un principe du maximum discret et de fonctions de Green discrètes inspirées de l'article de Ciarlet [37], d'une manière légèrement reformulée pour être en accord avec la manière dont nous construisons les matrices de discrétisation.

On rappelle que les lettres P et Q représentent des indices dans le système linéaire, correspondant soit à des points de discrétisation (sur la grille ou sur le bord), soit à des valeurs d'électrodes. Par exemple, nous notons $u(P)$ le coefficient de la ligne de u ayant le même indice que le point P . De même, $A_h U(P)$ représente le coefficient de la P -ième ligne du tableau $A_h U$, et $A_h(P, Q)$ est le coefficient de la P -ième ligne et de la Q -ième colonne de la matrice A_h . Nous définissons également par $A_h(:, Q)$ et $A_h(P, :)$ la Q -ième colonne et la P -ième ligne de la matrice A_h .

Estimation des fonctions de Green discrètes

Les fonctions de Green discrètes sont une adaptation dans un contexte discret des fonctions de Green classiques, qui sont utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires. L'idée principale des fonctions de Green discrètes est similaire à celle des fonctions de Green continues : elles permettent de trouver une solution particulière d'un problème en utilisant une approche intégrale. Cependant, au lieu d'intégrales continues, les fonctions de Green discrètes utilisent des sommes discrètes. Elles ont été utilisées dans le passé pour montrer des propriétés de convergence de méthodes de différences finies avec une discrétisation moins précise sur le bord du domaine qu'à l'intérieur, par exemple dans [14, 198], ou pour obtenir des estimations ponctuelles de la convergence des dérivées discrètes de la solution numérique comme dans [23] ou [186], dans le cas de discrétisations uniformes à l'intérieur du domaine. Elles ont été également parfois utilisées pour étudier des méthodes d'éléments finis : [38], [53], [169] ou [194] par exemple et beaucoup plus rarement à notre connaissance dans le domaine des volumes finis, par exemple dans [52].

Pour analyser des schémas de type différences finies sur grilles cartésiennes, l'usage courant semble être d'utiliser des techniques inspirées des éléments finis ou des volumes finis, comme par exemple dans [62] ou [46] (même si dans cette référence la méthode n'est pas présentée comme une méthode de différences finies). Cependant, on perd dans cette analyse le caractère explicite de la formulation en différences finies, puisqu'il faut re-formuler la méthode comme une classe particulière d'éléments finis ou de volumes finis. De plus, on obtient alors en général des résultats en norme H^1 , qui donnent de l'information sur la convergence globale de la solution et de son gradient, mais au détriment d'une information plus locale avec la norme L^∞ . Cette information en norme L^∞ est particulièrement pertinente dans le cas de méthodes de frontières immergées, puisque c'est près des interfaces ou des frontières que se concentre la problématique de la précision de la méthode. En revanche, les hypothèses de régularité sur la solution sont souvent plus fortes lors d'une analyse de méthodes de différences finies à cause du calcul de l'erreur de troncature qui fait typiquement intervenir les dérivées de la solution jusqu'à l'ordre quatre pour une méthode classique centrée d'ordre deux. Dans la suite, on présente des estimations des fonctions de Green qui seront utilisées pour évaluer l'influence sur la convergence en norme L^∞ des erreurs d'approximation dans différentes zones du domaine de calcul.

Dans l'esprit de [37, 200], pour chaque $Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h$, définissons la fonction de Green discrète

$$G_h(\cdot, Q) = \left(G_h(P, Q) \right)_{P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h}$$

comme étant la solution du problème discret suivant :

$$\begin{cases} A_h G_h(\cdot, Q)(P) = \begin{cases} 0, & P \neq Q \\ 1, & P = Q \end{cases} \end{cases} \quad (3.30)$$

La matrice A_h étant monotone, toutes les valeurs de $G_h(\cdot, Q)$ sont positives. En fait, les fonctions de Green discrètes sont les colonnes de l'inverse de A_h . Nous pouvons écrire la solution du problème

discrétisé comme une somme des termes source multipliés par les valeurs des fonctions de Green discrètes :

$$u_h(P) = \sum_{Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) (A_h u_h)(Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Nous pouvons obtenir des bornes sur les fonctions de Green discrètes grâce au résultat suivant :

Proposition 3.3.3. Soient S et \tilde{S} deux sous-ensembles de points, W une fonction discrète, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} (A_h W)(P) \geq 0, & \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h \setminus \tilde{S}, \\ (A_h W)(P) \geq \alpha^{-i}, & \forall P \in S, \\ (A_h W)(P) \geq -(\beta^{-j}), & \forall P \in \tilde{S}. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{Q \in S} G_h(P, Q) \leq \alpha^i W(P) + \alpha^i \beta^{-j} \sum_{Q \in \tilde{S}} G_h(P, Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Démonstration. En utilisant la définition des fonctions de Green discrètes, nous pouvons écrire :

$$A_h W(P) \geq A_h \left(\alpha^{-i} \sum_{Q \in S} G_h(\cdot, Q) - \beta^{-j} \sum_{Q \in \tilde{S}} G_h(\cdot, Q) \right) (P), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Comme tous les coefficients de A_h^{-1} sont non-négatifs, cela conduit à :

$$W(P) - \alpha^{-i} \sum_{Q \in S} G_h(P, Q) + \beta^{-j} \sum_{Q \in \tilde{S}} G_h(P, Q) \geq 0, \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h,$$

et finalement, nous obtenons la borne suivante :

$$\sum_{Q \in S} G_h(P, Q) \leq \alpha^i W(P) + \alpha^i \beta^{-j} \sum_{Q \in \tilde{S}} G_h(P, Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

□

Résultat de convergence

Nous rappelons que notre objectif est d'obtenir des majorants pour les fonctions de Green discrètes associées à la matrice résultant de la discrétisation de (3.1)-(3.2), afin de pouvoir évaluer la convergence du schéma numérique. Nous supposons que les fonctions ξ_m sont suffisamment régulières pour que la solution u ait la régularité requise pour l'analyse suivante.

Proposition 3.3.4. *Pour h suffisamment petit, les bornes supérieures suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}\sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(\cdot, Q) &\leq O(1), \\ \sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(\cdot, Q) &\leq O(1), \\ \sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(\cdot, Q) &\leq O(h).\end{aligned}$$

Démonstration. Nous utilisons plusieurs fonctions discrètes dans le contexte de la proposition 3.3.3 afin d'obtenir des bornes pour les différents blocs de la matrice inverse A_h^{-1} .

— Nous définissons le vecteur W tel que $W \equiv 1$. Par conséquent, toutes les expressions du système linéaire s'annulent à l'exception de la formule de quadrature impliquant l'électrode E_1 :

$$\begin{aligned}-\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla W)\right)_{i,j}^h &= 0 \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h, \\ (\sigma \nabla W \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h - \xi_m(I_{i+1/2,j}) (W_m - W_{i+1/2,j}^h) &= 0 \quad \forall I_{i+1/2,j} \in \delta\Omega_h, \\ (\sigma \nabla W \cdot \nu)_{i,j+1/2}^h - \xi_m(I_{i,j+1/2}) (W_m - W_{i,j+1/2}^h) &= 0, \quad \forall I_{i,j+1/2} \in \delta\Omega_h, \\ \sum_{P \in E_m} \omega_P \xi_m(P) (W_m - W_P) &= 0 \quad \forall m \neq 1, \\ \sum_{P \in E_m} \omega_P \xi_m(P) (W_m - W_P) + \varepsilon W_1 &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, en notant par $G_h(\cdot, E_1)$ la fonction de Green discrète associée à l'électrode E_1 , nous obtenons :

$$G_h(\cdot, E_1) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.31)$$

— Nous considérons la solution exacte \bar{u} de (3.1)-(3.2), avec $f = 1$, $g = 1$, $I_m = 1 \quad \forall m \neq 1$, et I_1 telle que la condition de compatibilité (2.25) soit satisfaite. Nous définissons le vecteur \bar{W} comme la discrétisation de \bar{u} sur les points de la grille, les points du bord et les valeurs des électrodes. La discrétisation de l'opérateur elliptique et des flux est au moins d'ordre un, sauf pour les points

de la grille dans Ω_h^* où elle est seulement d'ordre zéro. Ainsi, pour h suffisamment petit, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}
& -\left(\nabla \cdot (\sigma \bar{W})\right)_{i,j}^h \geq \frac{1}{2}, \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*, \\
& -\left(\nabla \cdot (\sigma \bar{W})\right)_{i,j}^h \geq -C_1, \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h^*, \\
& (\sigma \nabla \bar{W} \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h - \xi_m(I_{i+1/2,j}) \left(\bar{W}_m - \bar{W}_{i+1/2,j} \right) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall I_{i+1/2,j} \in \delta\Omega_h, \\
& (\sigma \nabla \bar{W} \cdot \nu)_{i,j+1/2}^h - \xi_m(I_{i,j+1/2}) \left(\bar{W}_m - \bar{W}_{i,j+1/2} \right) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall I_{i,j+1/2} \in \delta\Omega_h \\
& \sum_{P \in E_m} \omega_P \xi_m(P) \left(\bar{W}_m - \bar{W}_P \right) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall m \neq 1 \\
& \sum_{P \in E_1} \omega_P \xi_m(P) \left(\bar{W}_1 - \bar{W}_P \right) + \varepsilon \bar{W}_1 \geq -2|I_1|,
\end{aligned}$$

avec C_1 une constante strictement positive. Cela peut également être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
(A_h \bar{W})(P) & \geq \frac{1}{2}, \quad \forall P \in (\Omega_h \setminus \Omega_h^*) \cup (E_h \setminus E_1), \\
(A_h \bar{W})(P) & \geq \frac{1}{2}, \quad \forall P \in \delta\Omega_h, \\
(A_h \bar{W})(P) & \geq -C_1, \quad \forall P \in \Omega_h^*, \\
(A_h \bar{W})(E_1) & \geq -2|I_1|,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\sum_{Q \in (\Omega_h \setminus \Omega_h^*) \cup (E_h \setminus E_1)} G_h(\cdot, Q) + \sum_{Q \in \delta\Omega_h} G_h(\cdot, Q) \leq 2\bar{W} + 2C_1 \sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(\cdot, Q) + 4|I_1|G_h(\cdot, E_1). \quad (3.32)$$

— Nous définissons le tableau \tilde{W} tel que $\tilde{W} = 1$ pour tous les points de Ω_h et $\tilde{W} = 0$ pour tous les points de $\delta\Omega_h \cup E_h$. En raison du saut des valeurs de \tilde{W} entre Ω_h et $\delta\Omega_h \cup E_h$, lorsque nous appliquons la discrétisation à \tilde{W} , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{W})\right)_{i,j}^h = 0 \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*, \\
& -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{W})\right)_{i,j}^h \geq \frac{C_2}{h^2} \quad \forall M_{i,j} \in \Omega_h^*, \\
& (\sigma \nabla \tilde{W} \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h - \xi_m(I_{i+1/2,j}) \left(\tilde{W}_m - \tilde{W}_{i+1/2,j} \right) \geq -\frac{C_3}{h} \quad \forall I_{i+1/2,j} \in \delta\Omega_h, \\
& (\sigma \nabla \tilde{W} \cdot \nu)_{i,j+1/2}^h - \xi_m(I_{i,j+1/2}) \left(\tilde{W}_m - \tilde{W}_{i,j+1/2} \right) \geq -\frac{C_3}{h}, \quad \forall I_{i,j+1/2} \in \delta\Omega_h \\
& \sum_{P \in E_m} \omega_P \xi_m(P) \left(\tilde{W}_m - \tilde{W}_P \right) + \varepsilon \delta_{m1} \tilde{W}_1 = 0 \quad \forall m,
\end{aligned}$$

avec C_2 et C_3 des constantes strictement positives. Nous obtenons donc :

$$\frac{C_2}{h^2} \sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq \tilde{W} + \frac{C_3}{h} \sum_{Q \in \delta\Omega_h} G_h(:, Q),$$

par suite on obtient :

$$\sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq \frac{h^2}{C_2} \tilde{W} + h \frac{C_3}{C_2} \sum_{Q \in \delta\Omega_h} G_h(:, Q). \quad (3.33)$$

En combinant 3.33 avec 3.32 on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in (\Omega_h \setminus \Omega_h^*) \cup (E_h \setminus E_1)} G_h(:, Q) + \sum_{Q \in \delta\Omega_h} G_h(:, Q) &\leq 2\tilde{W} + 2C_1 \frac{h^2}{C_2} \tilde{W} + 4|I_1| G_h(:, E_1) \\ &\quad + 2C_1 \frac{C_3}{C_2} h \sum_{Q \in \delta\Omega_h} G_h(:, Q), \end{aligned}$$

et pour h suffisamment petit, cela conduit à :

$$\sum_{Q \in (\Omega_h \setminus \Omega_h^*) \cup (E_h \setminus E_1)} G_h(:, Q) + \sum_{Q \in \delta\Omega_h} G_h(:, Q) \leq \bar{C} \quad (3.34)$$

avec \bar{C} une constante positive. En réinjectant cette inégalité dans l'équation (3.33), nous obtenons :

$$\sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq \frac{h^2}{C_2} \tilde{W} + h \frac{C_3}{C_2} \bar{C}. \quad (3.35)$$

Les inégalités (3.31), (3.34) et (3.35) fournissent les bornes de la proposition.

□

Proposition 3.3.5. *Si on note \bar{u} la solution exacte de (3.1)-(3.2) et u_h la solution numérique, l'erreur locale $|\bar{u}(P) - u_h(P)|$ satisfait, pour h suffisamment petit :*

$$|\bar{u}(P) - u_h(P)| \leq O(h). \quad (3.36)$$

Par conséquent, la solution numérique converge vers la solution exacte avec une précision du premier ordre pour la norme L^∞ .

Démonstration. Nous désignons par τ l'erreur de troncature, qui provient de la discrétisation de (3.1)-(3.2). Ce type d'erreur désigne l'erreur d'approximation suite à la troncature d'un développement en série.

Nous avons l'estimation suivante pour l'erreur de troncature :

$$\begin{aligned} |\bar{u}(P) - u_h(P)| &= \left| \sum_{Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) \tau(Q) \right| \\ &\leq \left| \sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(P, Q) \tau(Q) \right| + \left| \sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(P, Q) \tau(Q) \right| + \left| \sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) \tau(Q) \right|, \end{aligned}$$

ce qui, selon les résultats précédents, implique

$$\begin{aligned} |\bar{u}(P) - u_h(P)| &\leq O(1) \left| \sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(P, Q) \right| + O(h^2) \left| \sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(P, Q) \right| \\ &\quad + O(h) \left| \sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) \right| \\ &\leq O(1)O(h) + O(h^2)O(1) + O(h)O(1) = O(h). \end{aligned}$$

□

3.4 Résolution numérique du problème direct

Dans cette section, nous étudions la capacité de la méthode de frontière immergée proposée à calculer efficacement des solutions du problème de Tomographie d'Impédance Électrique (3.1) où plus précisément le problème (3.2). Pour aborder tout cela, nous devons d'abord introduire quelques notations et précisions sur les différentes configurations géométriques qui vont être utilisées à travers les études numériques dans cette thèse. Nous soulignons que les résultats de convergence annoncés dans la Section 3.3 sont effectivement observés en pratique pour des solutions suffisamment régulières. Nous observons aussi une convergence numérique du gradient de la solution dans nos simulations, mais cette convergence n'a pas encore été rigoureusement démontrée.

Notation et géométrie dans le cadre numérique

Notre but est de tester la résolution numérique du problème direct (et éventuellement du problème inverse) dans des domaines Ω quelconques. Pour cela, nous faisons le choix suivant de paramétrisation du bord :

On considère le vecteur suivant $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2N}] \in \mathbb{R}^{2N+1}$. On définit notre domaine Ω de la manière suivante :

$$\Omega = \{\rho[\cos(\theta), \sin(\theta)] \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq \rho < r(\theta)\}.$$

où

$$r(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos(k\theta) + \alpha_{k+N} \sin(k\theta)).$$

On a donc :

$$\partial\Omega = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\},$$

avec $\mathbf{u}(\theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta)]$.

Remarque 3.4.1. Dans les études numériques considérées dans ce chapitre, on choisit généralement $\Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2]$ donc les paramètres de forme $[\alpha_0, \dots, \alpha_{2N}]$ sont choisis de telle manière que $0 < r(\theta) < 2$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

Remarque 3.4.2. Cette paramétrisation correspond à une fonction Level-set φ particulière, qui vérifie la définition de la section 3.2. On définit φ comme suit :

Soit (x_c, y_c) le centre de notre géométrie qui est généralement fixé à $(0, 0)$, et, soit (x, y) un point de la grille cartésienne, on a,

$$\varphi(x, y) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r(\theta(x, y))$$

où $r(\theta(x, y))$ est la valeur du rayon de notre géométrie qui intersecte le point (x, y) et $\theta(x, y)$ l'angle d'orientation du point (x, y) entre 0 et 2π .

Notons qu'avec une telle paramétrisation de Ω , le vecteur unitaire sortant en un point $x = |x|[\cos(\theta_x), \sin(\theta_x)] \in \partial\Omega$, est donné par

$$\mathbf{v}(x) = \frac{1}{\rho(\theta_x)} [r(\theta_x)\mathbf{u}(\theta_x) - r'(\theta_x)\mathbf{v}(\theta_x)],$$

avec $\mathbf{v}(\theta) = [-\sin(\theta), \cos(\theta)]$ et $\rho(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$. Nous définissons également

$$\boldsymbol{\tau}(x) = \frac{1}{\rho(\theta_x)} [r'(\theta_x)\mathbf{u}(\theta_x) + r(\theta_x)\mathbf{v}(\theta_x)],$$

le vecteur tangent à $\partial\Omega$ en ce point x , de telle sorte que $(\mathbf{v}(x), \boldsymbol{\tau}(x))$ forme une base directe de \mathbb{R}^2 . Les M électrodes, qu'on note par, E_1, \dots, E_M sont paramétrées par deux vecteurs $(\Theta^1, \Theta^2) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ vérifiant

$$\Theta_1^1 < \Theta_1^2 < \Theta_2^2 < \dots < \Theta_M^2 < \Theta_1^1 + 2\pi,$$

tels que

$$E_m = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [\Theta_m^1, \Theta_m^2]\}.$$

Remarque 3.4.3. En pratique, la longueur des électrodes est souvent fixée : nous fixons généralement Θ^1 , choisissons une taille de longueur $L > 0$, et calculons Θ^2 en résolvant l'équation suivante :

$$L = \int_{\Theta_k^1}^{\Theta_k^2} \rho(\theta) d\theta. \quad (3.37)$$

Nous considérons trois géométries différentes pour Ω (voir figure 3.3) :

- Ω_1 est un disque de rayon 1.5, correspondant à $\alpha = [1.5]$,
- Ω_2 correspond au choix $\alpha = [1.51, 0.01, 0.05, 0.2, 0.035, 0.01, 0.1]$,
- Ω_3 correspond au choix $\alpha = [1.6, 0.002, 0.01, 0.003, 0.035, 0.2, 0.15]$.

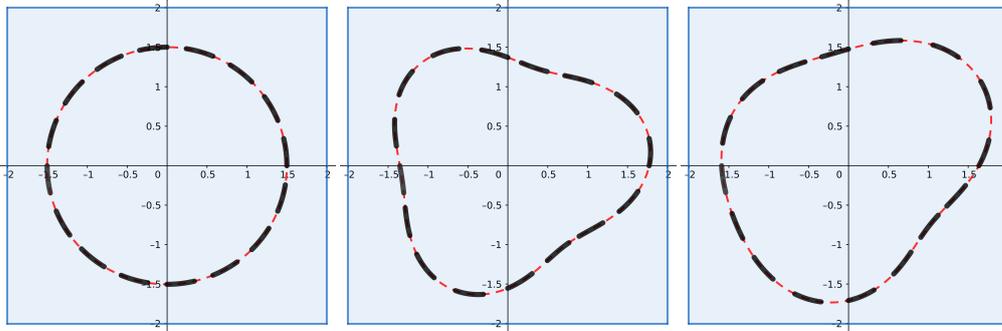


Fig. 3.3 : Les domaines Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 (en rouge) dans le carré de référence $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (en bleu), avec notre configuration habituelle de 16 électrodes (en noir gras).

Étude numérique

Pour vérifier que les taux de convergence prouvés dans la Section 3.3 sont effectivement observés en pratique, nous procédons comme suit : nous fixons dans (2.24),

$$\begin{cases} \Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2] \\ u(x, y) = \sin(x \times y) \\ U = 0_{\mathbb{R}^{16}}, \end{cases}$$

et nous calculons les termes sources correspondants f , g et I . En particulier, pour obtenir le vecteur de courants d'entrée I , nous calculons les intégrales correspondantes apparaissant dans (2.24)₄ en écrivant :

$$\int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) = \int_{E_m} (g - \xi_m(u - U_m)) dx$$

et en utilisant les formules de quadrature introduites dans la section 3.2, on calcule les valeurs de I .

Ensuite, nous utilisons la méthode de frontière immergée décrite dans la Section 3.2 pour obtenir une solution approchée u_h au problème (3.1) pour différentes valeurs du paramètre de maillage h . Pour tester également la convergence des dérivées, nous calculons une approximation du gradient qu'on note par $du_h = (du_x, du_y)$ à l'aide d'une formule de différenciation centrée classique (qui utilise donc le voisin de gauche et de droite du point concerné) :

$$du_h(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j)_E - u(x_i, y_j)_W}{h}.$$

Pour le paramètre ε dans (3.1)₄, nous avons choisi de présenter les résultats numériques de convergence pour la valeur de $\varepsilon \sim 10^{-10}$. Dans la figure 3.5, nous observons une convergence linéaire à la fois pour u et son gradient. On note que le changement de la valeur du paramètre ε ne modifie pas le comportement de convergence. Cependant, il affecte l'amplitude de l'erreur *pour un h fixé*. Cela est prévu, car la valeur de U_1 dépend de la condition de compatibilité numérique, et n'est donc pas exactement nulle. Il y a donc une interaction entre le terme εU_1 et le terme intégral dans la formule (3.1)₄ qui influence la valeur des deux termes.

Remarque 3.4.4. *La convergence linéaire de u_h vers u était attendue. La convergence linéaire du gradient n'est pas surprenante, car la construction de la méthode numérique est fondée sur une discrétisation du premier ordre des flux près de la frontière du domaine. Cependant, prouver cette convergence n'est pas évident et n'est pas standard dans le cadre des différences finies.*

Sur la Figure 3.4, nous présentons une comparaison des erreurs numériques pour la CEM généralisée, avec des admittivités variant spatialement et suffisamment régulières, et pour la CEM classique avec $\xi_m = \frac{1}{z_m}$ (on choisit $z_m=1$) et une conductivité égale à 1 dans Ω . Pour les admittivités variant spatialement on impose sur les extrémités de l'électrode (extrémité d'épaisseur $\pi/32$) la fonction Heavyside régularisée suivante :

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right) \right), & \text{si } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1, & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

avec $\varepsilon = \frac{\pi}{64}$. La géométrie considérée est la suivante :

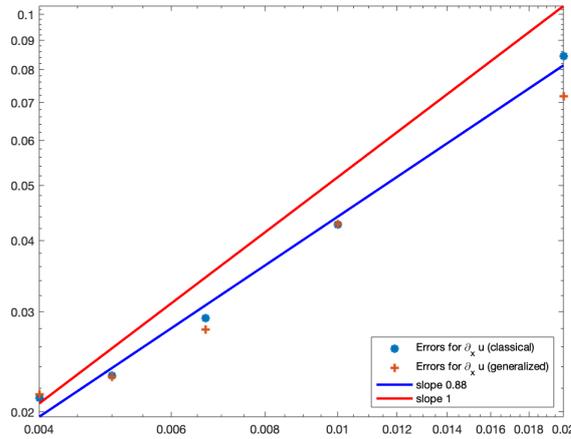
- $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$
- Un disque de rayon 0.5 correspondant à $\alpha = [0.5]$
- $M=4$ électrodes également espacées qui couvre la moitié du bord
- Le paramètre de discrétisation h varie de $\frac{1}{50}$ à $\frac{1}{250}$.

Le taux de convergence affiché sur la figure est calculé avec la CEM classique. Nous observons que l'amplitude des erreurs numériques pour les deux modèles ainsi que leur taux de convergence sont très proches.

Enfin, nous présentons quelques reconstructions du potentiel intérieur, avec

- $\Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2]$ et
- Une grille cartésienne de taille : 700×700 ,

dans les géométrie Ω_2 et Ω_3 voir figure 3.3, avec différentes conductivités et différents courants appliqués aux électrodes, voir figures 3.6 et 3.7. On observe une variation significative des champs électriques



(a) $\|du_{h,1} - \partial_x u\|_\infty$ comme fonction de h .

Fig. 3.4 : Étude de la convergence avec une solution manufacturée $u(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ et $U = 0.5 \exp(R^2) 1_{\mathbb{R}^4}$. Les points bleus représentent les erreurs numériques de la méthode CEM classique, les croix rouges représentent les erreurs numériques de la méthode CEM généralisée.

à l'intérieur du domaine en fonction de la conductivité. En effet, des conductivités plus élevées entraînent des amplitudes de champ électrique plus importantes. En revanche, la présence d'inclusions plus conductrices n'affecte pas de manière drastique l'amplitude du champ électrique. Par conséquent, pour résoudre un problème inverse, nous cherchons à capturer un phénomène d'amplitude relativement faible.

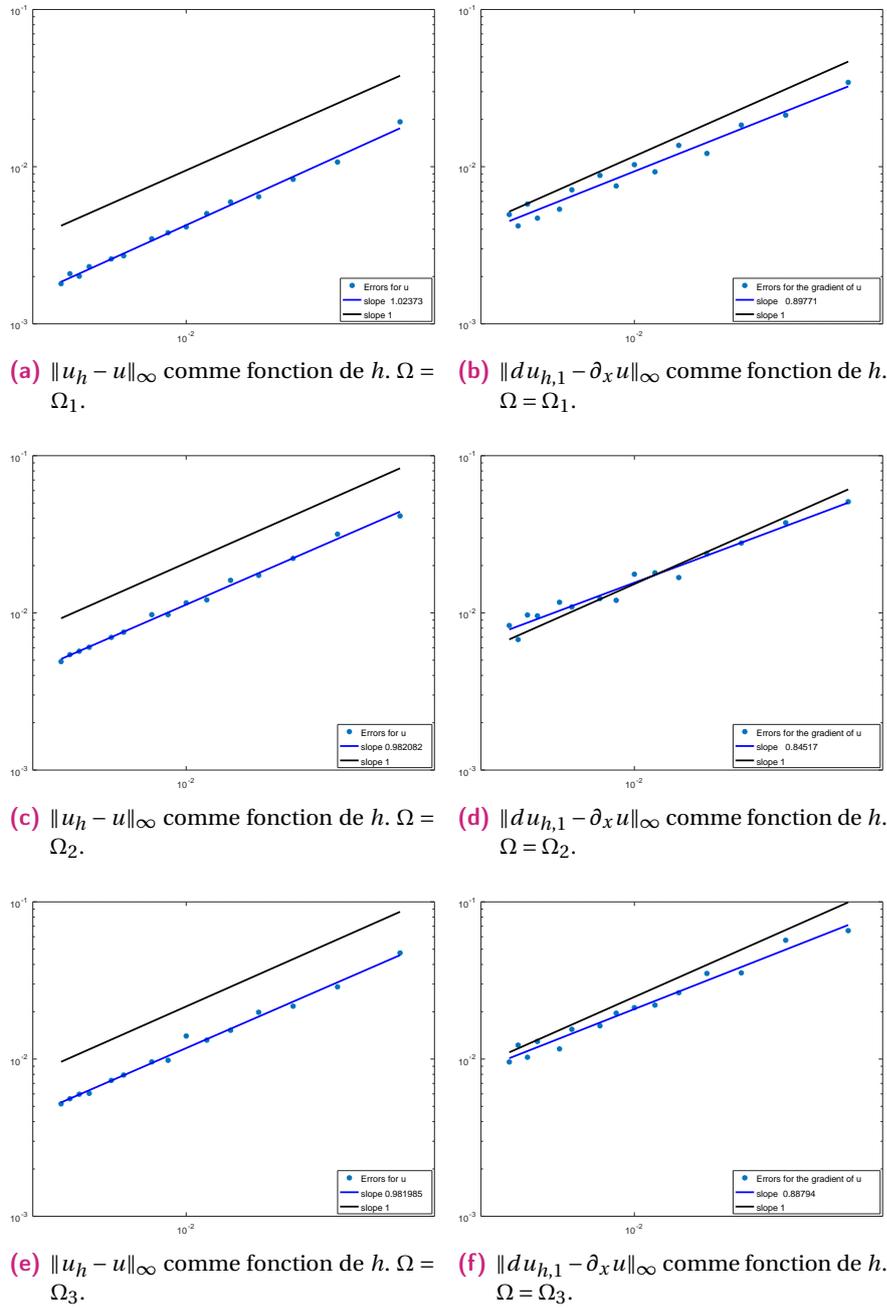


Fig. 3.5 : Étude de la convergence avec une solution manufacturée $u(x, y) = \sin(x \times y)$ et $U = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{16}}$ dans chaque domaine.

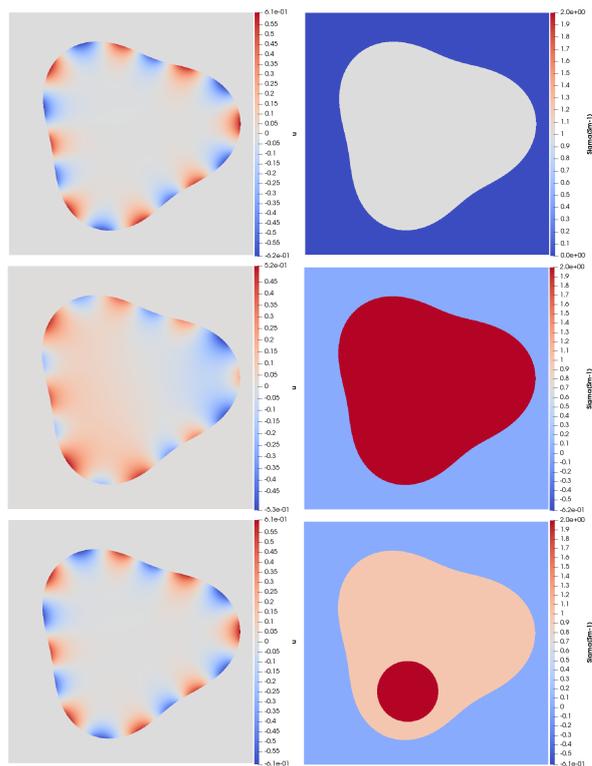


Fig. 3.6 : Résolution du Problème (3.1) dans le domaine Ω_2 avec un courant d'entrée $I_m = (-1)^m$. À gauche : potentiel interne. À droite : conductivité.

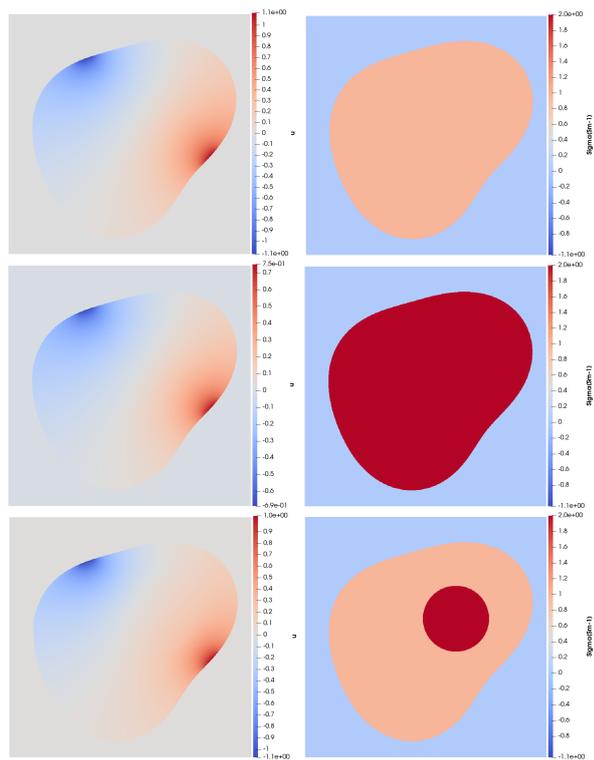


Fig. 3.7 : Résolution du Problème (3.1) dans le domaine Ω_3 avec un courant d'entrée $I_m = \delta_{m,8} - \delta_{m,14}$.
 À gauche : potentiel interne. À droite : conductivité.

Résolution du problème inverse de l'EIT à l'aide des méthodes de frontière immergée

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution du problème inverse de l'EIT en utilisant la méthode de frontière immergée du chapitre 3. Nous abordons d'abord la problématique classique, qui consiste à reconstruire la conductivité dans le volume d'un domaine Ω (section 4.1). Ensuite, nous examinons un problème à géométrie mobile, où nous reconstruisons les paramètres géométriques tout en supposant que la distribution de conductivité soit connue dans le volume du domaine Ω (section 4.2). Cette étude représente une première étape vers une reconstruction simultanée de la conductivité et de la forme géométrique du domaine, telle que dans [48]. En effet, bien que la distribution de conductivité soit la quantité d'intérêt principale en EIT, concrètement, une configuration expérimentale contient souvent d'autres inconnues : les informations sur les positions des électrodes, les impédances de contact aux interfaces électrode-objet et la forme du corps examiné peuvent être mal connues. Il est donc important de prendre en compte de telles incertitudes lors du développement des méthodes de reconstruction, car il est reconnu que l'EIT est très sensible aux erreurs liées à la modélisation de la configuration expérimentale [9, 107, 150] (voir aussi les analyses de sensibilité [47, 147, 158]).

Pour la résolution de nos problèmes inverses, nous aurons besoin de rappeler les deux modèles de problème direct introduits dans le chapitre 2. Le premier est le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = 0 & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = 0 & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

qui est bien posé dans $\mathcal{H}^1 = (H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$. En d'autres termes, la solution de (4.1) est définie à une constante additive près. Par suite, du point de vue numérique, il est nécessaire de fixer cette constante. Cela est généralement réalisé en imposant une contrainte sur U , telle que $U_1 = 0$ ou $U \in$

$\mathbb{R}_\diamond^M = \{V \in \mathbb{R}^M, \sum_{m=1}^M V_m = 0\}$. Pour éviter de faire un choix de constante on rappelle le modèle suivant déjà introduit dans le chapitre 2 (équation 2.27) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = 0 & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m (u - U_m) = 0 & \text{sur } E_m, m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Ce modèle est bien posé dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$. Il convient également de noter que tout au long de ce chapitre, nous examinons ces deux modèles en supposant que ξ_m est fixé à $\frac{1}{z_m}$, où z_m représente l'impédance de contact constante et positive associée à l'électrode E_m . Dans ce cas, le modèle (4.1) est exactement le CEM classique introduit dans la section 2.2.3 du chapitre 2.

4.1 Reconstruction des paramètres électriques dans une géométrie fixe

Dans cette section, nous supposons que les paramètres liés à la géométrie de l'objet sont connus. Notre principal objectif est de reconstruire la conductivité σ . Tout d'abord, dans la sous-section 4.1.1, nous faisons l'hypothèse que les impédances de contact sont connues et que leur valeur est fixée à 1 pour toutes les électrodes. Cependant, cette hypothèse n'est pas très réaliste, car en pratique, ces valeurs ne sont pas connues et varient généralement d'une électrode à l'autre [49, 90]. Ensuite, pour évaluer la capacité de notre méthode numérique à reconstruire les impédances de contact, nous supposons dans la sous-section 4.1.2 que tous les autres paramètres sont fixes, et nous nous concentrons uniquement sur la reconstruction des impédances de contact. Enfin, nous abordons la reconstruction simultanée des impédances de contact et de la conductivité.

4.1.1 Reconstruction de la conductivité

Nous nous concentrons maintenant sur la reconstruction de la conductivité σ : pour une famille de courants d'entrée (I^1, \dots, I^P) avec $P \in \mathbb{N}$, où chaque courant est dans R_\diamond^M , les potentiels des électrodes correspondantes (U^1, \dots, U^P) sont mesurés. Ces mesures peuvent éventuellement être affectées par du bruit et correspondent à la deuxième partie de la solution de l'équation (4.1), avec $\sigma = \sigma_*$. Nous choisissons d'imposer $U_1^p = 0$ pour tous les indices p dans $\{1, \dots, P\}$, afin de nous ramener à la formulation (4.2) de notre problème direct, qui est bien posée dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$ (dans ce cas, les potentiels sont également solutions de (4.2)). Pour simplifier les notations, nous regroupons tous les courants

d'entrée et les potentiels des électrodes correspondant à une certaine conductivité σ dans des matrices $M \times P$:

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I^1 & \dots & I^P \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} U^1, \dots, U^P \end{bmatrix}.$$

La matrice \mathcal{U} dépend linéairement des courants d'entrée \mathcal{I} et non-linéairement de la conductivité inconnue σ . Nous noterons cette dépendance en écrivant $\mathcal{U}(\sigma, \mathcal{I})$. Nous notons également

$$\mathcal{U}_{meas} \approx \mathcal{U}(\sigma_*, \mathcal{I}),$$

la matrice qui correspondrait idéalement à nos mesures réelles, mais en pratique elle n'est que proche de celles-ci, car les mesures sont toujours corrompues par du bruit. Le problème inverse de la conductivité peut être formulé de la manière suivante :

*Connaissant $(\mathcal{I}, \mathcal{U}_{meas})$, reconstruire σ_**

Plus précisément, nous cherchons à minimiser la différence entre la solution du problème direct (2.27), correspondant à une conductivité estimée σ , et les données mesurées, c'est-à-dire que nous cherchons σ de telle manière que la fonctionnelle suivante

$$F(\sigma) = \|\mathcal{U}(\sigma, \mathcal{I}) - \mathcal{U}_{meas}\|_2^2 \quad (4.3)$$

soit minimisée. Le problème étant mal posé [94, 95], une régularisation est nécessaire. Par conséquent, nous minimisons en réalité la fonctionnelle suivante :

$$F(\sigma) = \|\mathcal{U}(\sigma, \mathcal{I}) - \mathcal{U}_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} R(\sigma) \quad (4.4)$$

où R est une fonction de régularisation à préciser et $\epsilon > 0$ est un paramètre de régularisation. En d'autres termes, nous utilisons une régularisation déterministe de type Tikhonov pour notre problème.

Dans notre étude actuelle, nous utiliserons une approche relativement simple pour reconstruire σ_* : une méthode de minimisation par moindres carrés combinée avec une régularisation de Tikhonov. Nous choisissons délibérément cette approche, car notre objectif principal est de tester la capacité de notre *méthode directe* à fournir une approximation suffisamment bonne de la solution du problème (4.2) pour être efficacement utilisée dans un *algorithme standard pour le problème inverse de conductivité*. On note que d'autres méthodes plus sophistiquées existent pour reconstruire soit la conductivité, soit le support des inclusions à partir de mesures de frontière (continues ou similaires à celles des électrodes), on en cite quelques-unes [25, 32, 64, 65, 78, 79, 91, 94, 111, 137, 192], particulièrement les méthodes d'inversion statistique pour les problème inverse [112, 134, 135, 182, 183] comme dans [95] où Kaipio *et al.* examinent le problème de l'EIT dans le cadre de la statistique bayésienne.

Algorithme de reconstruction

Nous partons du principe que la conductivité est connue sur la frontière du domaine, plus précisément, on considère que les variations de conductivité ne concernent que l'intérieur du domaine. Désormais, nous faisons l'hypothèse que $\sigma_* \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$. De plus, nous supposons l'existence d'une *conductivité de référence connue* $\sigma_* \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ de telle sorte que $\sigma_* - \sigma_* \in H_0^1(\Omega)$.

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|\mathcal{U}(\sigma, I) - \mathcal{U}_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\sigma - \sigma_*\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (4.5)$$

La stratégie de minimisation est simple et repose sur le fait que l'application

$$M: \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I)),$$

où $(u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est la solution de (4.2) avec $f = g = 0$ pour une conductivité σ et un modèle de courant $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$, est Fréchet-différentiable [96]. Plus précisément, pour tout $\delta\sigma$ dans $L^\infty \cap H^1(\Omega)$ tel que $\sigma + \delta\sigma \geq \tilde{c} > 0$ p.p. dans Ω , on a

$$M(\sigma + \delta\sigma) = M(\sigma) + (\delta u, \delta U) + o(\|\delta\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad (4.6)$$

où $\delta u \in H^1(\Omega)$ et $\delta U \in \mathbb{R}^M$, $\delta U_1 = 0$, sont les seules solutions du problème variationnel suivant :
Trouver $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ tels que pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$, on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_m \int_{E_m} \xi_m (u - U_m) (v - V_m) \, ds(x) \\ + \varepsilon U_1 V_1 = - \int_{\Omega} \delta\sigma \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De manière équivalente on peut écrire le problème suivant :

Trouver $(\delta u, \delta U)$ satisfaisant l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \delta u) = -\nabla \cdot (\delta\sigma \nabla u(\sigma, I)) & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu (\delta u) = \xi_m (\delta U_m - \delta u) - (\delta\sigma) \partial_\nu u(\sigma, I) & \text{sur } E_m \\ \sigma \partial_\nu (\delta u) = -(\delta\sigma) \partial_\nu u(\sigma, I) & \text{sur } \partial\Omega \setminus \bar{E}, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu (\delta u) \, ds(x) + \varepsilon \delta U_1 = - \int_{E_m} (\delta\sigma) \partial_\nu (u(\sigma, I)) \, ds(x) & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Avec cette définition de la dérivée de Fréchet de notre solution par rapport à la conductivité, on peut définir une direction de descente.

Dans ce but, pour une conductivité donnée σ_n , nous définissons $(d_x u_n, d_y u_n)$ par :

$$d_x u_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial x} \right] \in L^2(\Omega)^d, \quad d_y u_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial y} \right] \in L^2(\Omega)^d. \quad (4.9)$$

Maintenant, avec $\mathcal{U}_{meas} = [U_{meas}^1, \dots, U_{meas}^P]$, on définit $(d_x \mathfrak{w}_n, d_y \mathfrak{w}_n)$ par

$$d_x \mathfrak{w}_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^1) - U_{meas}^1)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^P) - U_{meas}^P)}{\partial x} \right] \quad (4.10)$$

et

$$d_y \mathfrak{w}_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^1) - U_{meas}^1)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, U(\sigma_n, I^P) - U_{meas}^P)}{\partial y} \right]. \quad (4.11)$$

Enfin, nous définissons $\delta \sigma_n$ comme étant l'unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$-\Delta v + v = \epsilon(\Delta(\sigma_n - \sigma_*) - (\sigma_n - \sigma_*)) + d_x u_n^T d_x \mathfrak{w}_n + d_y u_n^T d_y \mathfrak{w}_n.$$

Alors, on peut prouver le résultat suivant.

Lemme 4.1.1. *Supposons que $\delta \sigma_n$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Il existe $T_n > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T_n)$,*

$$F(\sigma_n + t\delta \sigma_n) \leq F(\sigma_n).$$

On choisit de montrer ce lemme dans le cas $P = 1$, c'est-à-dire avec une seule configuration d'entrée de courant I . L'extension à plusieurs motifs de courant est directe. Nous fixons donc $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$ et $U_{meas} \in \mathbb{R}^M$ tel que $U_{meas,1} = 0$.

Démonstration. Soit $(u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ la solution de (4.2) pour une conductivité $\sigma \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ satisfaisant $\sigma \geq c > 0$ p.p. dans Ω . On rappelle que notre solution est Fréchet-différentiable par rapport à la conductivité (voir (4.6)). Nous avons par calcul direct que,

$$F(\sigma + \delta \sigma) = F(\sigma) + (\delta U, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas})_{\mathbb{R}^M} + \epsilon(\delta \sigma, \sigma - \sigma_*)_{H^1(\Omega)} + o(\|\delta \sigma\|_{L^\infty \cap H^1(\Omega)}). \quad (4.12)$$

Nous définissons maintenant (w, W) comme la solution unique de (2.27) avec $f = g = 0$ et le courant d'entrée $I = U(\sigma, I_{input}) - U_{meas}$, c'est-à-dire

$$w = u(\sigma, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas}), \quad W = U(\sigma, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas}).$$

En utilisant (4.7) et la formulation variationnelle du problème (4.2), nous obtenons que

$$(\delta U, U(\sigma, I_{input}) - U_{meas})_{\mathbb{R}^M} = - \int_{\Omega} \delta \sigma \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla w dx.$$

Par conséquent, pour $\delta \sigma$ dans $L^\infty \cap H^1(\Omega)$ tel que $\sigma + \delta \sigma \geq \tilde{c} > 0$ dans Ω , et $t \in (0, 1)$, nous avons

$$\begin{aligned} F(\sigma + t\delta \sigma) &= F(\sigma) + t \int_{\Omega} \left(\delta \sigma (\epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla w) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \nabla(\delta \sigma) \cdot \nabla(\sigma - \sigma_*) \right) dx + o(t \|\delta \sigma\|_{L^\infty \cap H^1(\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Notre objectif est maintenant de choisir $\delta\sigma$ de manière à ce que $F(\sigma + t\delta\sigma) \leq F(\sigma)$ pour $t > 0$ suffisamment petit. La formule précédente montre qu'il suffit de choisir $\delta\sigma$ de sorte que

$$\int_{\Omega} \left(\delta\sigma(\epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla w) + \epsilon \nabla(\delta\sigma) \cdot \nabla(\sigma - \sigma_*) \right) dx < 0.$$

Définissons v comme l'unique fonction de $H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout \tilde{v} dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \tilde{v} + v \tilde{v}) dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{G} \cdot \nabla \tilde{v} + f \tilde{v}) dx, \quad (4.14)$$

où

$$\mathbf{G} = \epsilon \nabla(\sigma - \sigma_*), \quad f = \epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla w.$$

Avec cette définition, nous avons

$$\int_{\Omega} \left(v(\epsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla w) + \epsilon \nabla v \cdot \nabla(\sigma - \sigma_*) \right) dx = -\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 < 0.$$

Par conséquent, en supposant que v appartient à $L^\infty(\Omega)$, nous pouvons choisir $\delta\sigma = v$, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous pouvons alors écrire l'algorithme suivant :

- Choisir $\sigma_0 \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ (par exemple, $\sigma_0 = \sigma_*$),
- Jusqu'à ce que le critère d'arrêt suivant soit atteint :

$$|F(\sigma_n + t_n \delta\sigma_n) - F(\sigma_n)| < \tau |\delta\sigma_n|, \text{ avec } \tau \text{ assez petit}$$

1. Pour une certaine conductivité σ_n , calculer $\delta\sigma_n$ comme décrit ci-dessus,
 2. Définir $\sigma_{n+1} = \sigma_n + t_n \delta\sigma_n$ avec $t_n = \operatorname{argmin}_{t \in [0, T_n]} F(\sigma_n + t \delta\sigma_n)$.
- Fin.

Notons qu'à chaque étape n de cet algorithme, nous devons résoudre P problèmes (4.2) pour calculer $d_x u_n$ et $d_y u_n$, puis à nouveau P problèmes (4.2) pour calculer $d_w w_n$ et $d_y w_n$, et enfin un unique problème de type Laplace pour calculer $\delta\sigma_n$, soit $2P + 1$ problèmes elliptiques. Heureusement, les $2P$ premiers problèmes sont exactement (4.2) avec une conductivité σ_n donnée et seul le membre de droite change, ce qui signifie que le système correspondant à inverser est le même pour les $2P$ problèmes. Ainsi, le calcul de $\delta\sigma_n$ est en réalité très rapide. Nos expériences numériques montrent que, pour des valeurs de t proches de zéro, la fonction $t \mapsto F(\sigma_n + t \delta\sigma_n)$ se comporte comme une fonction quadratique en t avec un seul minimum local. Nous recherchons donc t_n en utilisant la méthode de *Golden-section search* suivante :

Si on fixe notre intervalle de recherche à $[0, T_n]$, on définit $t_- = 0$ et $t_+ = T_n$, et on choisit t_l et t_r tels que $t_- < t_l < t_r < t_+$, avec

$$t_l = t^- + \frac{1}{a}(t^+ - t^-)$$

et

$$t_r = t^+ + \frac{1}{a-1}(t^- - t_l)$$

avec

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tant que le critère d'arrêt suivant : $|t_- - t_+| > \tau$, avec τ assez petit, n'est pas atteint, on fait :

- Si $F(\sigma_n + t_l \delta \sigma_n) < F(\sigma_n + t_r \delta \sigma_n)$ alors
 $t^+ \leftarrow t_r$, $t_r \leftarrow t_l$, $t_l \leftarrow t^+ + \frac{1}{a-1}(t^- - t_r)$
- Sinon
 $t^- \leftarrow t_l$, $t_l \leftarrow t_r$, $t_r \leftarrow t^+ + \frac{1}{a-1}(t^- - t_l)$

Remarque 4.1.2. Afin de calculer la valeur de $F(\sigma_n + t \delta \sigma_n)$, il est nécessaire de réaliser P résolutions supplémentaires du système linéaire en fixant σ à $\sigma_n + t \delta \sigma_n$ à chaque mise à jour de la valeur de t .

Résultat numérique

Nous rappelons les trois géométries suivantes (figure 4.1) pour Ω que l'on utilise à travers nos études numériques tout au long de ce manuscrit :

- Ω_1 est un disque de rayon 1.5, correspondant à $\alpha = [1.5]$,
- Ω_2 correspond au choix $\alpha = [1.51, 0.01, 0.05, 0.2, 0.035, 0.01, 0.1]$,
- Ω_3 correspond au choix $\alpha = [1.6, 0.002, 0.01, 0.003, 0.035, 0.2, 0.15]$.

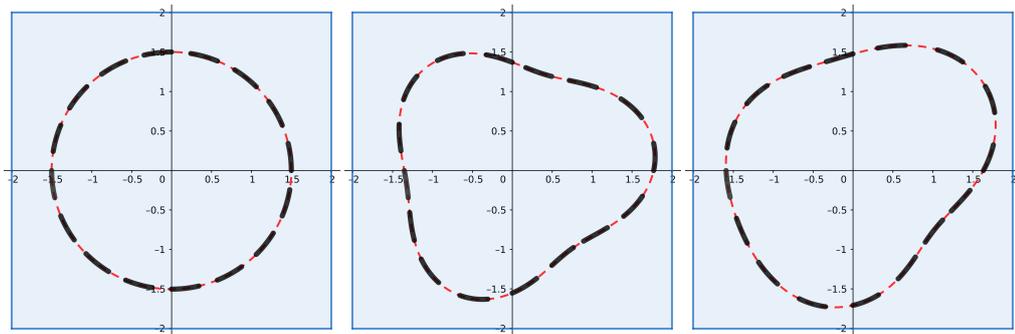


Fig. 4.1 : Les domaines Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 (en rouge) dans le carré de référence $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (en bleu), avec notre configuration habituelle de 16 électrodes (en noir gras).

Dans chaque test, la conductivité de fond σ_* est égale à un, et nous cherchons à reconstruire les scénarios suivants :

- Premier cas : nous plaçons une inclusion circulaire au centre.
- Deuxième cas : nous plaçons une inclusion similaire plus proche de la frontière.
- Troisième cas : nous plaçons deux inclusions de différentes amplitudes à l'intérieur du domaine.

La matrice de mesure \mathcal{U}_{meas} est obtenue en résolvant (4.2) en utilisant notre méthode numérique, avec un maillage très raffiné et pour $P = 15$ motifs de courants linéairement indépendants. La grille cartésienne utilisée pour calculer \mathcal{U}_{meas} diffère de celle utilisée pour reconstruire la conductivité afin d'éviter le "crime de l'inverse" [204]. Plus précisément, pour créer nos mesures manufacturées, nous fixons la taille de la grille cartésienne utilisée à 800×800 . Ensuite, nous perturbons les mesures avec un bruit gaussien additif, échelonné de sorte que l'amplitude relative du bruit soit définie à $\delta \in [0, 1]$ pour obtenir des données bruitées. Enfin, nous fixons le paramètre de régularisation à $\epsilon = 10^{-4}$.

Les figures 4.2 et 4.3 présentent des reconstructions dans les domaines géométriques Ω_1 et Ω_3 , avec différents niveaux de bruit gaussien ajoutés, discrétisées sur une grille cartésienne de taille 400×400 dans le carré $\Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Les inclusions considérées à l'intérieur des domaines sont toutes circulaires. Pour Ω_1 on a précisément les inclusions suivantes à reconstruire :

- une inclusion au centre de rayon 0.54 et d'amplitude 2
- une inclusion proche du bord de centre (-0.6, 0.4) de rayon 0.5 et d'amplitude 0.2
- deux inclusions, la première de rayon, 0.4, de centre (0.8, 0.3) et d'amplitude 1.5 tandis que la deuxième est de rayon 0.38, de centre (-0.3, -0.8) et d'amplitude 0.2

Et pour Ω_3 on a :

- une inclusion au centre de rayon 0.5 et d'amplitude 0.2
- une inclusion proche du bord de centre (-0.3, -0.8) de rayon 0.54 et d'amplitude 0.2
- deux inclusion, la première de rayon, 0.4 et de centre (0.8, 0.3) et d'amplitude 2 tandis que la deuxième de rayon, 0.38, de centre (-0.3, -0.8) et d'amplitude 0.2

On observe que les reconstructions sont correctes même avec cette approche de reconstruction très simple, ce qui signifie que nos méthodes de frontière immergée peuvent être utilisées efficacement dans le problème inverse de conductivité.

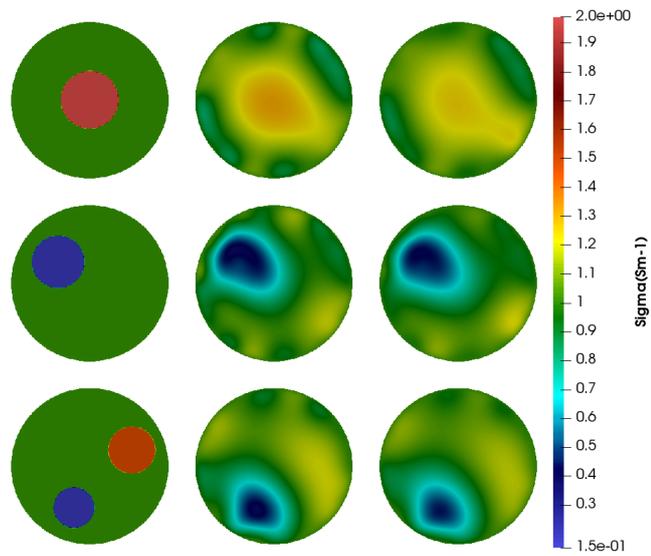


Fig. 4.2 : Reconstructions dans Ω_1 . Première colonne : conductivité recherchée. Deuxième colonne : conductivité reconstruite avec des données non-bruitées ($\delta = 0$). Troisième colonne : conductivité reconstruite avec des données bruitées ($\delta = 2.0\%$).

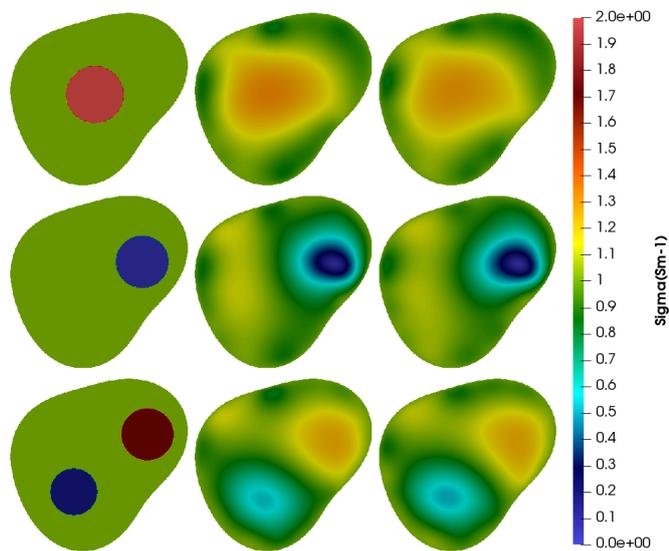


Fig. 4.3 : Reconstructions dans Ω_3 . Première colonne : conductivité recherchée. Deuxième colonne : conductivité reconstruite avec des données non-bruitées ($\delta = 0$). Troisième colonne : conductivité reconstruite avec des données bruitées ($\delta = 2.0\%$).

Dans les applications pratiques, les impédances de contact z_m sont inconnues et doivent également être reconstruites. Cela peut être réalisé sans difficultés supplémentaires en utilisant le fait que la solution (u, U) de (4.2) est différentiable au sens de Fréchet par rapport à z_m , avec une expression explicite pour la dérivée de Fréchet [196]. Dans la section suivante, nous visons à reconstruire non seulement la conductivité σ , mais aussi les valeurs des impédances de contact z_m ou des admittances de contact équivalentes ($1/z_m$).

4.1.2 Reconstruction des impédances de contact

Dans [141], une approche pour l'évaluation des caractéristiques des électrodes pour des études pratiques d'EIT a été proposée. En 2002, Vilhunen et al. dans [196] proposent une méthode pour estimer simultanément l'impédance de contact ainsi que les propriétés électriques internes. Dans cette section, notre but est de tester la capacité de notre méthode numérique de frontière immergée à réaliser une reconstruction simultanée de la conductivité et de l'impédance de contact. On commence par présenter l'algorithme, puis on présente les résultats numériques en deux étapes : une reconstruction de l'impédance de contact uniquement, comme test préliminaire, et ensuite une reconstruction simultanée de la conductivité et de l'impédance.

De manière similaire à la section précédente, on note par (U^1, \dots, U^P) les potentiels des électrodes mesurés correspondant à la deuxième partie de la solution de (4.1) avec $\sigma = \sigma_*$ et $z = z_*$ la conductivité et l'impédance de contact que nous cherchons à reconstruire. Pour fixer la constante, on pose $U_1^p = 0$ pour tous les indices p dans $\{1, \dots, P\}$. En conséquence, les potentiels sont considérés aussi comme la deuxième partie de la solution du problème (4.2). Comme précédemment, on note par \mathcal{U} la matrice de mesure qui dépend des courants d'entrée \mathcal{I} de la conductivité inconnue σ , ainsi que de l'impédance de contact z . On note cette dépendance par $\mathcal{U}(\sigma, z, \mathcal{I})$, et on note par

$$\mathcal{U}_{meas} \approx \mathcal{U}(\sigma_*, z_*, \mathcal{I}),$$

notre matrice qui correspond idéalement à nos mesures réelles. Le problème inverse peut être formulé de la manière suivante :

$$\text{connaissant } (\mathcal{I}, \mathcal{U}_{meas}), \text{ reconstruire } \sigma_* \text{ et } z_*.$$

Plus précisément, nous cherchons à minimiser la différence entre la solution du problème direct (4.2), correspondant à une conductivité σ et une impédance de contact z estimées, et les données mesurées, c'est-à-dire que nous cherchons σ et z de telle manière que la fonctionnelle suivante

$$F(\sigma, z) = \|\mathcal{U}(\sigma, z, \mathcal{I}) - \mathcal{U}_{meas}\|_2^2 \quad (4.15)$$

soit minimisée. Le problème étant mal posé, une régularisation est nécessaire. Par conséquent, nous minimisons en réalité la fonctionnelle suivante :

$$F(\sigma, z) = \|\mathcal{U}(\sigma, z, I) - \mathcal{U}_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} R(\sigma, z) \quad (4.16)$$

où R est une fonction de régularisation correctement choisie et $\epsilon > 0$ est un paramètre de régularisation. On choisit de minimiser :

$$F(\sigma, z) = \frac{1}{2} \|\mathcal{U}(\sigma, z, I) - \mathcal{U}_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|z - z_\star\|_{\mathbb{R}^M}^2. \quad (4.17)$$

avec σ_\star et z_\star la conductivité et l'impédance de contact de référence supposée connue.

Algorithme de reconstruction

Comme précédemment, la stratégie de minimisation est simple et repose sur le fait que l'application

$$M : (\sigma, z) \longrightarrow (u(\sigma, z, I), U(\sigma, z, I))$$

est différentiable au sens de Fréchet. Plus précisément, pour tout $(\delta\sigma, \delta z)$ dans $(L^\infty \cap H^1(\Omega)) \times \mathbb{R}^M$ tel que $\sigma + \delta\sigma \geq \tilde{c} > 0$ p.p. dans Ω et $z + \delta z > 0$, on a

$$M(\sigma + \delta\sigma, z + \delta z) = M(\sigma, z) + (\delta u, \delta U) + o(\|\delta\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}) + o(\|z\|_{\mathbb{R}^M}),$$

et la dérivée $(\delta u, \delta U)$ où $\delta u \in H^1(\Omega)$ et $\delta U \in \mathbb{R}^M$, $\delta U_1 = 0$, est l'unique solution du problème variationnel suivant :

Trouver $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ tels que pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$, on ait

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma \nabla u(\sigma, z, I) \cdot \nabla v \, dx + \sum_m \int_{E_m} z_m \cdot (u - U_m)(v - V_m) \, ds(x) + \epsilon U_1 V_1 \\ &= - \int_{\Omega} \delta\sigma \nabla u(\sigma, z, I) \cdot \nabla v \, dx - \sum_m \delta z_m \int_{E_m} (u(\sigma, z, I) - U_m(\sigma, z, I))(v - V_m) \, ds(x) \end{aligned}$$

Pour une conductivité σ_n et une impédance de contact z_n on définit $(\delta\sigma_n, \delta z_n)$ comme l'unique $(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ tel que

$$-\Delta v_1 + v_1 = \epsilon(\Delta(\sigma_n - \sigma_\star) - (\sigma_n - \sigma_\star)) + d_x u_n^T d_x w_n + d_y u_n^T d_y w_n. \quad (4.18)$$

et le vecteur $v_2 \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$(v_2)_m = -\epsilon((z_n)_m - (z_\star)_m) + \sum_{i=1}^P \int_{E_m} (u(\sigma_n, z_n, I_i) - U_m(\sigma_n, z_n, I_i))(w_i - (W_i)_m) \, ds(x), \quad (4.19)$$

avec

$$w_i = u(\sigma_n, z_n, U(\sigma_n, z_n, I_i) - U_{meas}), \quad W_i = U(\sigma_n, z_n, U(\sigma_n, z_n, I_i) - U_{meas}),$$

où U_{meas} est la donnée mesurée correspondant à l'entrée I_i , et $d_x u_n, d_x w_n, d_y u_n$ et $d_y w_n$ définis comme dans (4.9), (4.10) et (4.11) avec $\sigma = \sigma_n$ et $z = z_n$.

Lemme 4.1.3. *Supposons que $(\delta\sigma_n, \delta z_n)$ appartient à $L^\infty(\Omega) \times \mathbb{R}^M$. Il existe $T_n > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T_n)$,*

$$F(\sigma_n + t\delta\sigma_n, z_n + t\delta z_n) \leq F(\sigma_n, z_n).$$

La preuve de ce lemme suit les étapes identiques à celles de la preuve du lemme 4.1.1.

Nous avons alors l'algorithme suivant :

- Choisir $(\sigma_0, z_0) \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ (par exemple, $\sigma_0 = \sigma_*$, $z_0 = z_*$),
- Jusqu'à ce que le critère d'arrêt suivant soit atteint :

$$|F(\sigma_n + t_n\delta\sigma_n, z_n + t_n\delta z_n) - F(\sigma_n, z_n)| < \tau_\sigma(|\delta\sigma_n|) + \tau_z(|\delta z_n|) \text{ avec } \tau_\sigma, \tau_z \text{ assez petit}$$

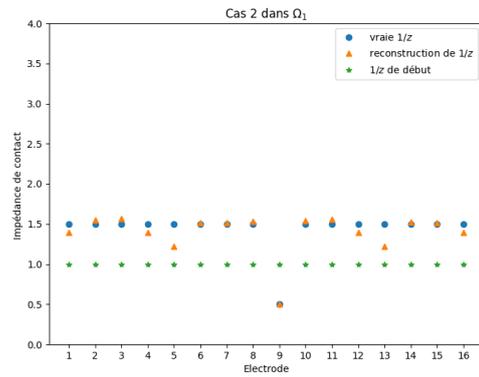
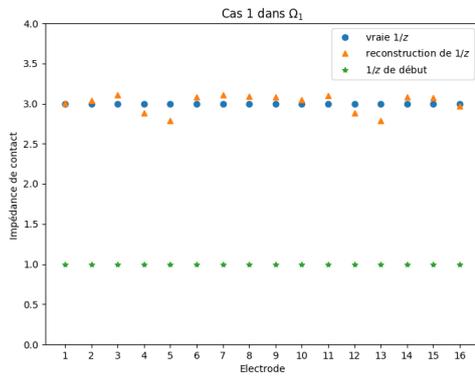
1. Pour une certaine conductivité σ_n , et une certaine impédance de contact z_n calculer $(\delta\sigma_n, \delta z_n)$ comme décrit ci-dessus,
2. Définir $(\sigma_{n+1}, z_{n+1}) = (\sigma_n + t_n\delta\sigma_n, z_n + t_n\delta z_n)$ with $t_n = \operatorname{argmin}_{t \in [0, T_n]} F(\sigma_n + t\delta\sigma_n, z_n + t\delta z_n)$.

- Fin.

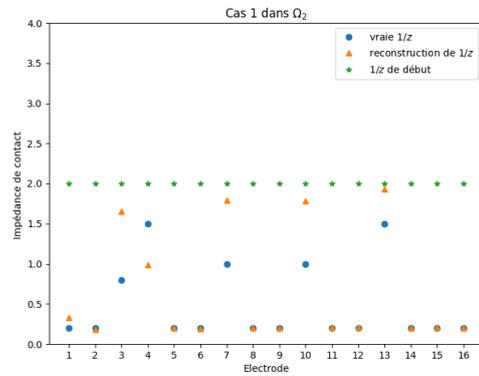
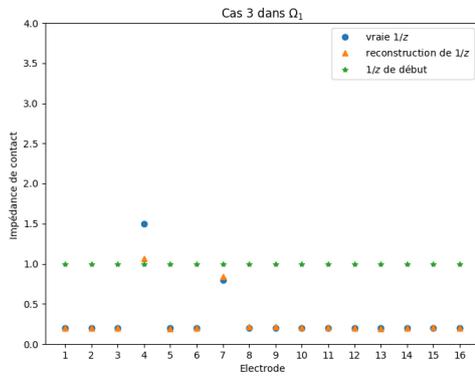
De manière similaire à la section précédente, numériquement, pour des valeurs de t proches de zéro, la fonction $t \mapsto F(\sigma_n + t\delta\sigma_n)$ se comporte comme une fonction quadratique en t avec un seul minimum local. Nous recherchons donc t_n en utilisant la méthode de *Golden-section search*.

Résultats numériques

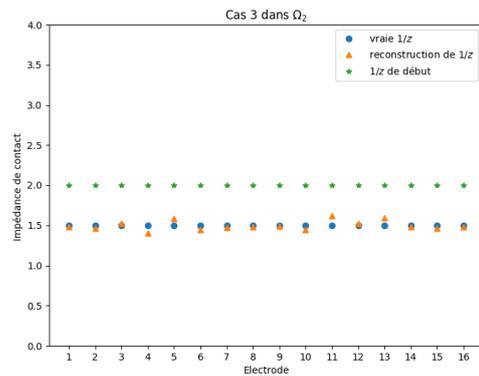
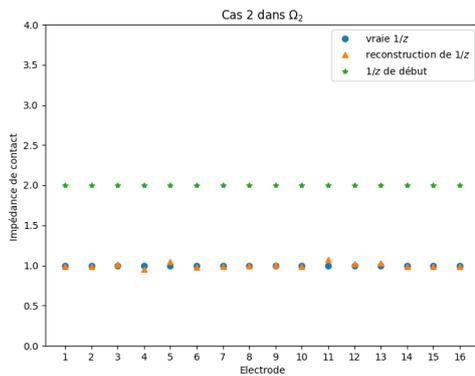
Nous sommes maintenant en mesure de présenter les résultats numériques pour la reconstruction de l'impédance de contact ou de l'admittance de contact dans les géométries présentées dans la figure 3.3. La matrice de mesure \mathcal{U}_{meas} est obtenue en résolvant (2.27) en utilisant notre méthode numérique, avec une grille cartésienne très raffinée et pour $P = 15$ motifs de courants linéairement indépendants. Cette grille cartésienne utilisée pour calculer \mathcal{U}_{meas} diffère de celle utilisée pour reconstruire la conductivité afin d'éviter l'*inverse crime*. Plus précisément, pour créer nos mesures manufacturées, on fixe la taille de la grille cartésienne utilisée à 800×800 . Pour obtenir des données bruitées, on choisit un bruit gaussien additif, échelonné de sorte que l'amplitude relative du bruit soit définie à $\delta \in [0, 1]$. Enfin, nous fixons le paramètre de régularisation à $\epsilon = 10^{-4}$. Dans les figures 4.4, on présente des résultats de reconstruction de l'impédance de contact, ou plus précisément de l'admittance de contact équivalente, dans les géométries Ω_1 et Ω_2 .



(a) Premier cas de reconstruction d'admittance de contact dans la géométrie Ω_1 , sans bruit ajouté. (b) Deuxième cas de reconstruction d'admittance de contact dans la géométrie Ω_1 , sans bruit ajouté.



(c) Troisième cas de reconstruction d'admittance de contact dans la géométrie Ω_1 , sans bruit ajouté. (d) Premier cas de reconstruction d'admittance de contact dans la géométrie Ω_2 , sans bruit ajouté.

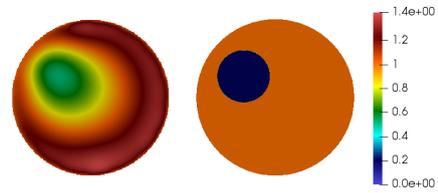


(e) Deuxième cas de reconstruction d'admittance de contact dans la géométrie Ω_2 , sans bruit ajouté. (f) Troisième cas de reconstruction d'admittance de contact dans la géométrie Ω_1 , sans bruit ajouté.

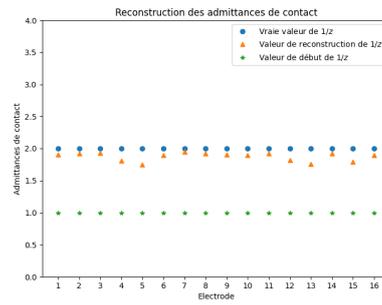
Fig. 4.4 : Reconstruction d'admittance de contact dans les géométries Ω_1 et Ω_2

On constate que nous arrivons à reconstruire les impédances de contact assez précisément, on note que pour notre problème inverse la taille de la grille est de 300×300 . De même pour que le problème de conductivité, pour chaque étape n de cet algorithme on résout $2 \times P$ problèmes (4.2) pour calculer l'intégrale dans l'équation 4.19.

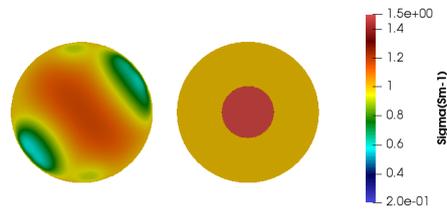
Nous sommes maintenant en mesure de faire une reconstruction simultanée de la conductivité et de l'impédance de contact. Avec les mêmes paramètres que précédemment, nous obtenons les reconstructions simultanées présentées sur les figures 4.5, 4.6 et 4.7 avec des données sans bruit, ainsi que dans les figures 4.8, 4.9 et 4.10 avec des données bruitées avec un taux de 2%. Pour générer les mesures nous avons considéré des inclusions de conductivité similaires à celles reconstruites dans la section 4.1, et des admittances de contact (ou de manière équivalente des impédances de contact) similaires à celles prises en compte dans la reconstruction précédente d'admittance de contact.



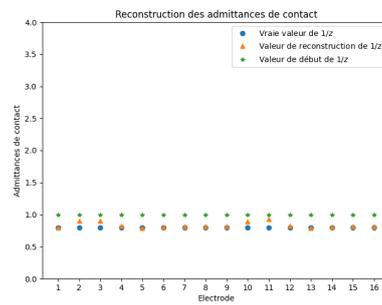
(a) Reconstruction de la conductivité (Cas 1)



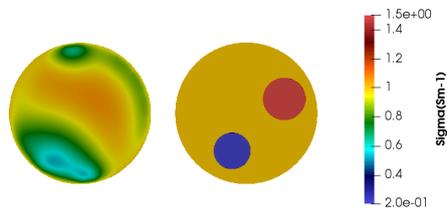
(b) Reconstruction des admittances de contact (Cas 1)



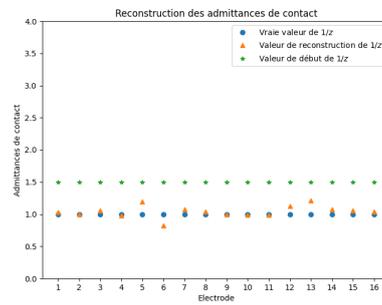
(c) Reconstruction de la conductivité (Cas 2)



(d) Reconstruction des admittances de contact (Cas 2)

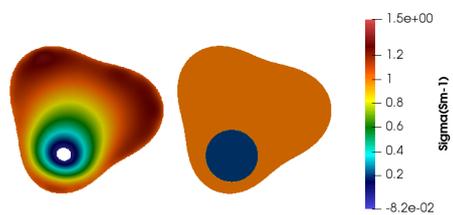


(e) Reconstruction de la conductivité (Cas 3)

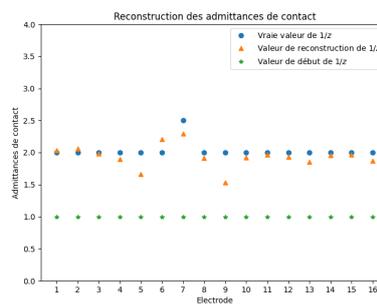


(f) Reconstruction des admittances de contact (Cas 3)

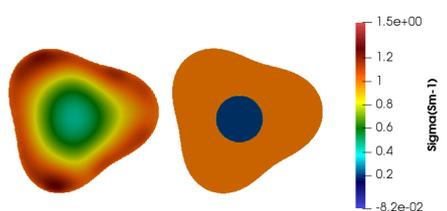
Fig. 4.5 : Reconstructions simultanées pour les différents cas dans la géométrie Ω_1 .



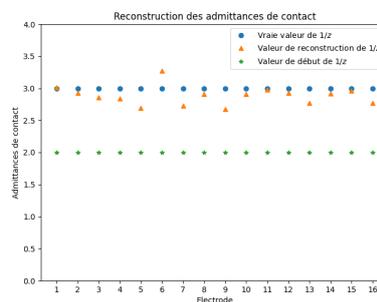
(a) Reconstruction de la conductivité (Cas 1)



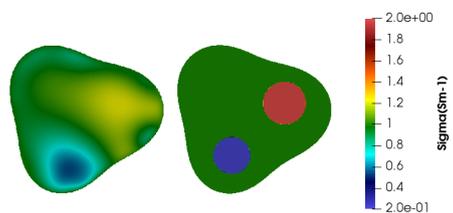
(b) Reconstruction des admittances de contact (Cas 1)



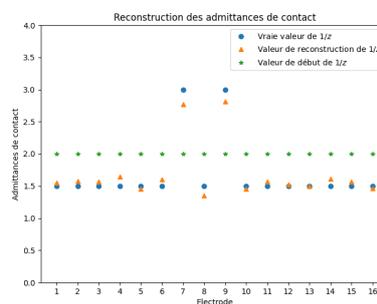
(c) Reconstruction de la conductivité (Cas 2)



(d) Reconstruction des admittances de contact (Cas 2)

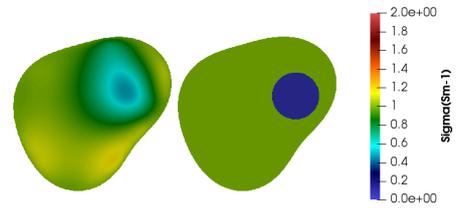


(e) Reconstruction de la conductivité (Cas 3)

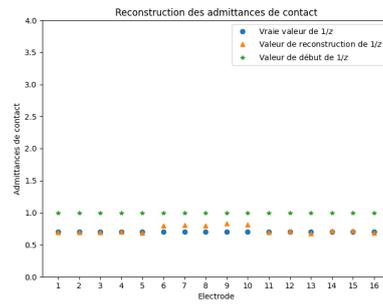


(f) Reconstruction des admittances de contact (Cas 3)

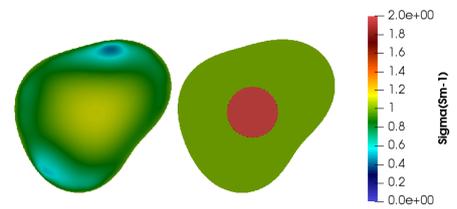
Fig. 4.6 : Reconstructions simultanées pour les différents cas dans la géométrie Ω_2 .



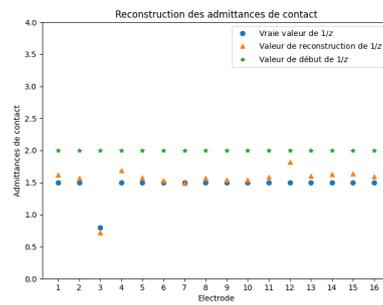
(a) Reconstruction de la conductivité (Cas 1)



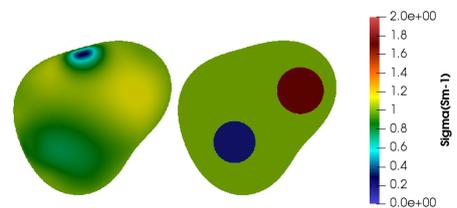
(b) Reconstruction des admittances de contact (Cas 1)



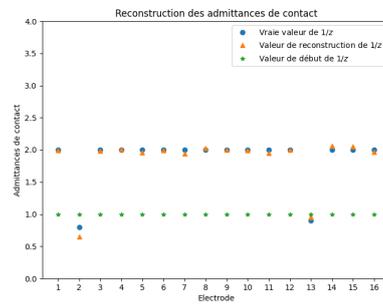
(c) Reconstruction de la conductivité (Cas 2)



(d) Reconstruction des admittances de contact (Cas 2)

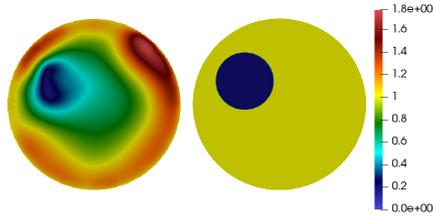


(e) Reconstruction de la conductivité (Cas 3)

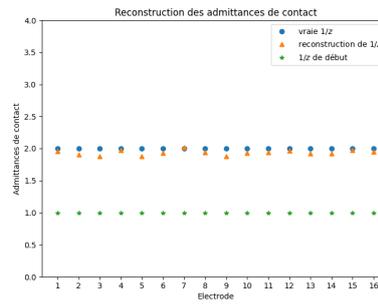


(f) Reconstruction des admittances de contact (Cas 3)

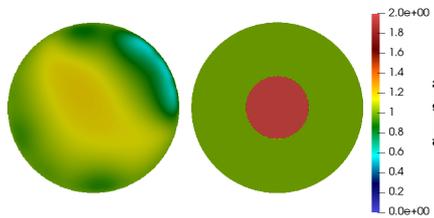
Fig. 4.7 : Reconstructions simultanées pour les différents cas dans la géométrie Ω_3 .



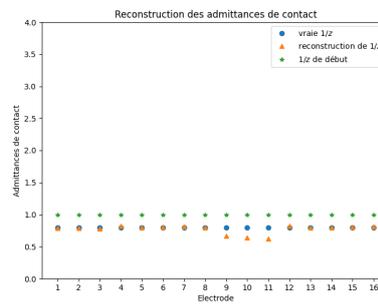
(a) Reconstruction de la conductivité (Cas 1)



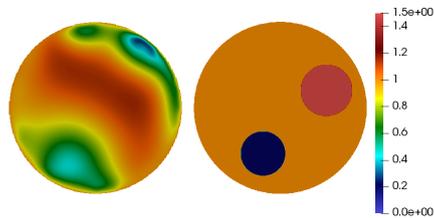
(b) Reconstruction des admittances de contact (Cas 1)



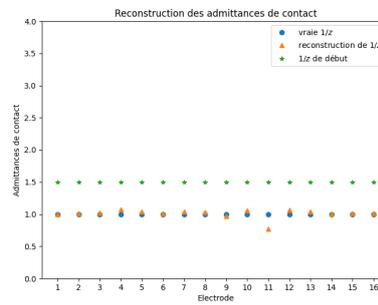
(c) Reconstruction de la conductivité (Cas 2)



(d) Reconstruction des admittances de contact (Cas 2)

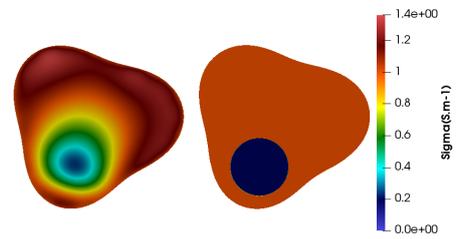


(e) Reconstruction de la conductivité (Cas 3)

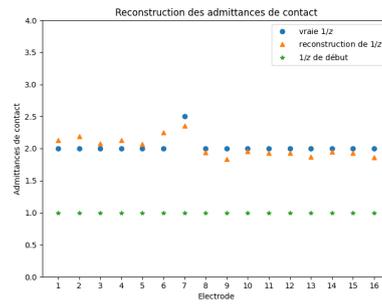


(f) Reconstruction des admittances de contact (Cas 3)

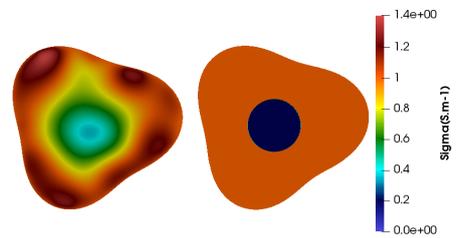
Fig. 4.8 : Reconstructions pour les différents cas dans la géométrie Ω_1 avec 0.02 de bruit. On observe la même qualité de reconstruction.



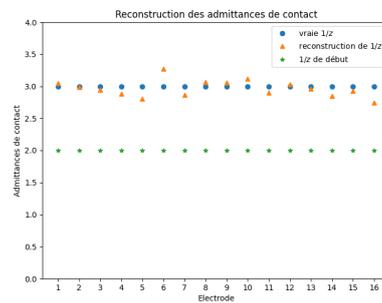
(a) Reconstruction de la conductivité (Cas 1)



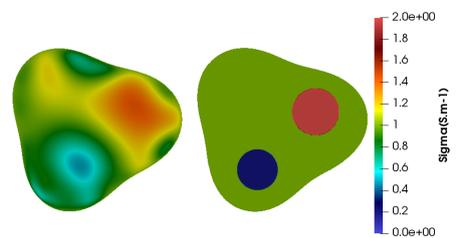
(b) Reconstruction des admittances de contact (Cas 1)



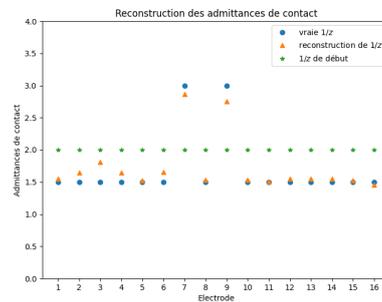
(c) Reconstruction de la conductivité (Cas 2)



(d) Reconstruction des admittances de contact (Cas 2)

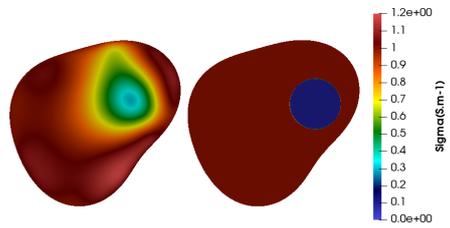


(e) Reconstruction de la conductivité (Cas 3)

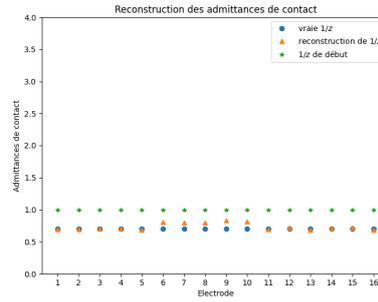


(f) Reconstruction des admittances de contact (Cas 3)

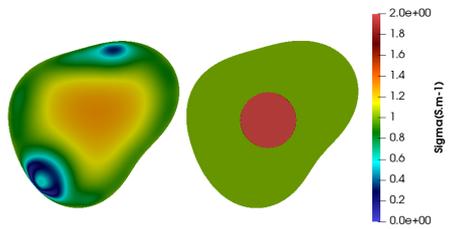
Fig. 4.9 : Reconstructions pour les différents cas dans la géométrie Ω_2 avec 0.02 de bruit. On observe la même qualité de reconstruction.



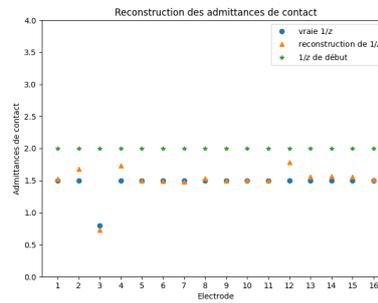
(a) Reconstruction de la conductivité (Cas 1)



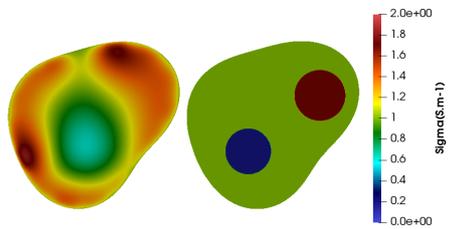
(b) Reconstruction des admittances de contact (Cas 1)



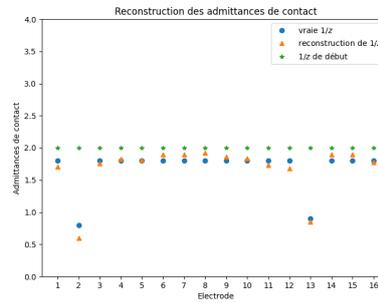
(c) Reconstruction de la conductivité (Cas 2)



(d) Reconstruction des admittances de contact (Cas 2)



(e) Reconstruction de la conductivité (Cas 3)



(f) Reconstruction des admittances de contact (Cas 3)

Fig. 4.10 : Reconstructions pour les différents cas dans la géométrie Ω_3 avec 0.02 de bruit. On observe la même qualité de reconstruction.

Comme le montrent nos tests numériques, notre algorithme parvient à effectuer une reconstruction simultanée des admittances de contact et de la conductivité dans les volumes des domaines Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 . En effet, lors de ces tests, nous observons systématiquement des reconstructions de bonne qualité, même lorsque les admittances de contact utilisées pour les mesures sont faibles, comme dans le cas 2 de la figure 4.5 et le cas 1 de la figure 4.7, où les admittances de contact étaient de 0.7 et 0.8

respectivement. Nous notons également que même en présence d'électrodes moins conductrices que les autres, comme dans les cas 2 et 3 de la figure 4.7, où certaines électrodes conduisent moins bien, nous parvenons toujours à obtenir une reconstruction indiquant la présence d'inclusions dans les volumes des domaines.

On note que, à travers nos tests numériques, si l'admittance de contact utilisée est très faible pour toutes les électrodes (par exemple de l'ordre de 0.5), alors dans ce cas, notre algorithme devient incapable de reconstruire les conductivités, mais réussit toujours à reconstruire les impédances. En réalité, ce constat n'est guère surprenant, car une admittance de contact très faible, ce qui correspond à une impédance de contact très élevée, entrave la circulation du courant électrique entre l'électrode et la surface du domaine. De manière plus précise, les courants électriques ont été empêchés d'entrer dans le domaine, ce qui signifie que dans la mesure effectuée, il n'y a en réalité aucune information provenant de l'intérieur du domaine. En conséquence, la reconstruction ou l'interprétation des propriétés électriques du matériau ou du système étudié devient plus complexe. Il est donc compréhensible qu'une admittance de contact réduite puisse avoir un impact négatif sur la qualité des mesures électriques et la précision des résultats obtenus [19].

4.2 Reconstruction des paramètres de géométrie

Il est bien établi que les incertitudes liées à la forme de la frontière extérieure, aux positions des électrodes et aux impédances de contact sont parmi les principales sources d'erreurs de modélisation dans les applications de l'EIT. Toutefois, si ces erreurs pouvaient être corrigées, l'EIT pourrait fournir des informations quantitatives précieuses, en particulier dans des applications médicales. Dans les travaux de Dardé *et al.* [48, 49], une méthode itérative a été introduite pour reconstruire simultanément la conductivité, la forme de la frontière extérieure et les impédances de contact d'un objet cylindrique tridimensionnel, en utilisant la méthode des éléments finis à maillage adapté dans le cadre du CEM de l'EIT. Avec cette méthode, un maillage adapté à la géométrie doit être généré à chaque mise à jour des paramètres géométriques. Il convient de noter que l'étape de remaillage est inévitable lorsqu'on utilise des méthodes basées sur des maillages adaptés pour des problèmes impliquant une géométrie mobile.

Nous rappelons que notre proposition pour contourner cette étape de remaillage, coûteuse numériquement, est l'utilisation de notre méthode de frontière immergée pour aborder un problème similaire à celui exposé dans les travaux de Dardé *et al.* [48, 49]. Plus précisément, notre objectif est de reconstruire les paramètres de forme tout en supposant que la conductivité et les impédances de contact sont connues, grâce à notre méthode directe de frontière immergée. L'utilisation de cette méthode serait pertinente, car elle nous permettrait de contourner entièrement les étapes de remaillage, simplifiant ainsi le processus de reconstruction géométrique. Nous choisissons de résoudre d'abord un "problème simplifié", Pour tester la capacité de notre méthode numérique à reconstruire certains paramètres de forme. Notre test préliminaire consiste à reconstruire la position des électrodes uniquement. Même si

ce problème a peu de sens d'un point de vue pratique, il est néanmoins pertinent pour notre méthode, car (2.24) est connue pour être très instable par rapport à la configuration géométrique, et notre méthode de frontière immergée n'est, par conception, pas précise en termes de géométrie de $\partial\Omega$. Après cela, on teste la capacité de notre méthode pour reconstruire le paramètre α , qui paramètre le bord du domaine.

On rappelle tout d'abord les paramètres liés à la géométrie de Ω (introduits dans la section 3.4 du chapitre 3) :

$$\partial\Omega = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\},$$

avec

$$\mathbf{u}(\theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta)],$$

et

$$r(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos(k\theta) + \alpha_{k+N} \sin(k\theta)).$$

où le paramètre de forme $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2N}] \in \mathbb{R}^{2N+1}$ est choisi de telle manière que $0 < r(\theta) < 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$. On rappelle aussi que les M électrodes, qu'on note par, E_1, \dots, E_M sont paramétrées par deux vecteurs $(\Theta^1, \Theta^2) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ vérifiant

$$\Theta_1^1 < \Theta_1^2 < \Theta_2^2 < \dots < \Theta_M^2 < \Theta_1^1 + 2\pi,$$

tels que

$$E_m = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [\Theta_m^1, \Theta_m^2]\}.$$

4.2.1 Reconstruction de la position des électrodes.

On commence par le "problème simplifié" qui sert à tester notre méthode numérique pour les reconstructions de forme : nous fixons α et cherchons à reconstruire Θ^1 et Θ^2 . Même si ce test n'a que peu de sens en pratique, il reste significatif. En effet, la forme générale de la frontière et la position des électrodes sont interconnectées, de sorte que toute ambiguïté dans la forme globale conduit à des ambiguïtés dans les positions des électrodes. Par conséquent, nous ne pouvons pas séparer le problème de la reconstruction générale de la frontière de celui qui consiste à reconstruire la position des électrodes. On a donc le problème inverse suivant :

Connaissant $(\mathcal{I}, \mathcal{U}_{meas})$, trouver les emplacements des électrodes : Θ^1 et Θ^2 .

On rappelle que tous les autres paramètres α , σ et z sont considérés connus. En adaptant les notations de la section 4.1, nous désignons par $U = U(\Theta^1, \Theta^2, I)$ (la deuxième partie de) la solution de (4.2) avec $f = g = 0$, $I \in \mathbb{R}_{>0}^M$, et les positions des électrodes déterminées par les angles Θ^1 et Θ^2 . Maintenant,

pour un ensemble de courants d'entrée $(I^1, \dots, I^P) \in (\mathbb{R}_>^M)^P$, nous notons les matrices de courant et de mesure par :

$$\mathcal{I} = [I^1, \dots, I^P], \quad \mathcal{U} = [U^1, \dots, U^P].$$

Nous définissons également \mathcal{U}_{meas} comme la matrice de mesures $M \times P$ potentiellement bruitée suivante, qui approche la matrice de mesure correspondant aux positions exactes des électrodes Θ_*^1 et Θ_*^2 :

$$\mathcal{U}_{meas} \approx \mathcal{U}(\Theta_*^1, \Theta_*^2, \mathcal{I}).$$

Notre stratégie est similaire à celle précédemment utilisée : nous cherchons à minimiser la fonctionnelle

$$F(\Theta^1, \Theta^2) = \|\mathcal{U}(\Theta^1, \Theta^2, I) - \mathcal{U}_{meas}\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Theta^1 - \Theta_*^1\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Theta^2 - \Theta_*^2\|_{\mathbb{R}^M}^2.$$

Comme précédemment, Θ_*^k doit être considéré comme une bonne estimation de l'emplacement réel de la k -ième électrode. Les dérivées partielles de la fonctionnelle par rapport aux paramètres Θ_k^1, Θ_k^2 ou même α sont déduites à partir de la notion de dérivée de forme obtenue dans [48], et en particulier de la formule d'échantillonnage [48, Corollaire 3.4].

Opérateur de mesure et dérivée de forme

L'idée consiste à dériver l'opérateur de mesure associé au CEM généralisé (4.2) avec $f = g = 0$ par rapport à un champ de vecteurs h associé à une certaine perturbation des variables de forme. Pour $h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)$, nous définissons

$$F[h] : x \in \partial\Omega \mapsto x + h(x)$$

et

$$\partial\Omega_h = F[h](\partial\Omega).$$

Pour un h suffisamment petit, $\partial\Omega_h$ est la frontière d'un domaine lisse Ω_h , qui est une perturbation de Ω . On note que Ω_h est recouvert par M électrodes bien séparées $E_{m,h}$ définies par

$$E_{m,h} = \{x + h(x), x \in E_m\}.$$

Pour tout $I \in \mathbb{R}_>^M$, nous notons par $(u(h), U(h))$ la solution de (4.2) avec (Ω, E_m) remplacé par $(\Omega_h, E_{m,h})$, et $f = g = 0$. On définit aussi l'opérateur de mesure

$$R : (h, I) \in \mathcal{B}_d \times \mathbb{R}_>^M \mapsto U(h),$$

avec

$$\mathcal{B}_d = \{h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d); \|h\|_{C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)} < d\},$$

d étant une constante fixe suffisamment petite. L'opérateur de mesure R est Fréchet-différentiable par rapport à h . On note qu'à l'aide d'une formule d'échantillonnage ([48, Corollaire 3.4]), on pourra calculer explicitement cette dérivée. Ces résultats sont regroupés dans le théorème suivant.

Theorem 4.2.1. *L'opérateur R est Fréchet-différentiable à l'origine par rapport à la première variable. En d'autres termes, il existe un opérateur bilinéaire borné*

$$R' : C^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_\diamond^M \mapsto \mathbb{R}^M$$

tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} \|R(h, \cdot) - R(0, \cdot) - R'h\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

De plus, on peut calculer chaque composante de $R'h$ en utilisant la formule d'échantillonnage suivante :

Pour I et \tilde{I} dans \mathbb{R}_\diamond^M , si on note (u, U) et (\tilde{u}, \tilde{U}) les solutions correspondantes de (2.27), alors

$$\begin{aligned} ((R'h)I) \cdot \tilde{I} &= - \sum_{m=1}^M \int_{\partial E_m} (h \cdot \nu_{\partial E_m})(U_m - u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &- \sum_{m=1}^M \frac{1}{z_m} \int_{E_m} h_\nu ((d-1)(U_m - u)H - \partial_\nu u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &- \int_{\partial\Omega} h_\nu (\sigma \nabla u)_\tau (\nabla \tilde{u})_\tau ds(x). \end{aligned}$$

Ici, H est la courbure moyenne, ν (resp. $\nu_{\partial E_m}$) est le vecteur normal sortant à Ω (resp. à E_m), et $h_\nu = h \cdot \nu$.

Pour la preuve du théorème, nous renvoyons à [48]. Le lemme suivant qui découle directement du Théorème 4.2.1 nous permettra de calculer des expressions explicites de la dérivée de notre fonctionnelle F par rapport à Θ^1 et Θ^2 .

Lemme 4.2.2. *Soit (\tilde{u}, \tilde{U}) la solution de (2.27) pour un certain modèle de courant $\tilde{I} \in \mathbb{R}_\diamond^M$, avec $f = g = 0$. Pour k dans $\{1, 2\}$ et m dans $\{1, \dots, M\}$, définissons $\mathbf{x}_m^k = r(\Theta_m^k)[\cos(\Theta_m^k), \sin(\Theta_m^k)]$.*

Nous avons, pour $m \in \{1, \dots, M\}$:

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta_m^1} \cdot \tilde{I} = \rho(\Theta_m^1)(U_m - u(\mathbf{x}_m^1))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^1)) \quad (4.20)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta_m^2} \cdot \tilde{I} = \rho(\Theta_m^2)(U_m - u(\mathbf{x}_m^2))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^2)), \quad (4.21)$$

avec,

$$\tau(x) = \frac{1}{\rho(\theta_x)} [r'(\theta_x)\mathbf{u}(\theta_x) + r(\theta_x)\mathbf{v}(\theta_x)],$$

Démonstration. Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur Θ^2 , les calculs avec Θ^1 étant similaires. Nous effectuons également les calculs pour un courant d'entrée unique $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$, l'extension à P courants d'entrée étant directe. On rappelle que pour tout $x \in \partial\Omega$, nous définissons $\theta(x)$ comme l'unique élément de $[-\pi, \pi[$ tel que $x = r(\theta(x))\mathbf{u}(\theta(x))$.

Soit $m \in \{1, \dots, M\}$ fixé, et $\eta \in \mathbb{R}$ suffisamment petit tel que

$$\Theta_m^1 < \Theta_m^2 + \eta < \Theta_{m+1}^1,$$

où, pour simplifier les notations, nous posons $\Theta_{M+1}^1 = \Theta_1^1 + 2\pi$. Nous définissons Θ_η^2 par

$$\Theta_{\eta,k}^2 = \Theta_k^2 + \delta_{km} \eta, \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}.$$

Nous définissons, pour une constante fixe $c > 0$,

$$\mathcal{H}_\eta = \left\{ h \in C^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^2), \begin{cases} h(\Theta_1^k) = 0 & \forall k \in \{1, \dots, M\}, \\ h(\Theta_2^k) = \delta_{km} \eta & \forall k \in \{1, \dots, M\}, \\ \|h\|_{C^1} \leq c\eta. \end{cases} \right\}$$

L'ensemble \mathcal{H}_η n'est pas vide : en effet, prenons $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ tel que $\text{supp}(\chi) \in]-1, 1[$ et $\chi(0) = 1$, puis définissons

$$\varphi_\eta(\theta) = \eta \chi\left(\frac{\theta - \Theta_m^2}{\Delta}\right)$$

où

$$\Delta = \max\left(\frac{\Theta_m^2 - \Theta_m^1}{2}, \frac{\Theta_{m+1}^1 - \Theta_m^2}{2}\right).$$

Ensuite, définissons $\omega_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, comme suit :

$$\omega_\eta : \theta \in [\Theta_1^1, \Theta_1^1 + 2\pi[\longrightarrow \theta + \varphi_\eta(\theta).$$

En choisissant une valeur suffisamment grande pour la constante c , le champ vectoriel

$$h : x \in \partial\Omega \longrightarrow r(\omega_\eta(\theta(x)))\mathbf{u}(\omega_\eta(\theta(x))) - r(\theta)\mathbf{u}(\theta(x)),$$

appartient à \mathcal{H}_η .

En outre, pour η suffisamment petit, pour tout h_η dans \mathcal{H}_η , on a $\partial\Omega_{h_\eta} = \partial\Omega$, $E_{k,h_\eta} = E_k$ pour tous les $k \in \{1, \dots, M\}$, $k \neq m$, et

$$E_{m,h_\eta} = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [\Theta_m^1, \Theta_m^2 + \eta]\}.$$

Nous avons $U(\Theta^1, \Theta_\eta^2, I) = R(h_\eta, I)$. Ensuite, des calculs sans véritable difficulté montrent que, pour tout h_η dans \mathcal{H}_η , pour tout x dans $\partial\Omega$, on a

$$h_\eta(x) = \left(\theta(x + h_\eta(x)) - \theta(x)\right)\rho(\theta(x))\tau(x) + o(\|h_\eta\|_{C^1}).$$

En appliquant le Théorème 4.2.1 avec $d = 2$, cela implique immédiatement que, pour tout $\tilde{I} \in \mathbb{R}_\diamond^M$ et (\tilde{u}, \tilde{U}) solution correspondante de (2.27), on a

$$(R^l(h_\eta)I) \cdot \tilde{I} = \eta \rho(\Theta_m^2)(U_m - u(\mathbf{x}_m^2))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^2)) + o(\|h_\eta\|_{C^1}).$$

Comme

$$\begin{aligned} & \left(U(\Theta^1, \Theta_\eta^2, I) - U(\Theta^1, \Theta^2, I) \right) \cdot \tilde{I} - \eta \rho(\Theta_m^2) (U_m - u(\mathbf{x}_m^2)) (\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^2)) \\ & = \left(R(h_\eta, I) - R(0, I) - R'(h_\eta) I \right) \cdot \tilde{I} + o(\|h_\eta\|_{C^1}), \end{aligned}$$

le Théorème 4.2.1 implique directement le Lemme 4.2.2.

□

Remarque 4.2.3. On note que la principale difficulté de cette formule d'échantillonnage réside dans les termes $u(\mathbf{x}_m^k)$ et $\tilde{u}(\mathbf{x}_m^k)$, qui correspondent à la valeur du potentiel intérieur aux extrémités des électrodes, et qui sont difficiles à calculer avec précision pour deux raisons : tout d'abord, d'un point de vue théorique, la trace du potentiel u au bord appartient à $H^{\frac{3}{2}-\epsilon}(\partial\Omega)$ pour tout $\epsilon > 0$, mais n'appartient pas à $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. Cette trace est donc continue sur $\partial\Omega$, mais elle varie rapidement aux bords des électrodes [88], ce qui rend le calcul des valeurs au bord des électrodes difficile. De plus, dans notre méthode de frontière immergée, les électrodes ne sont pas discrétisées de manière exacte, de sorte que cette valeur n'est pas directement disponible. Pour l'approcher, on utilise la formule d'interpolation linéaire avec les valeurs des points d'interface les plus proches situés à l'intérieur de l'électrode. Néanmoins, on note qu'avec cette approche, nous obtenons des résultats suffisamment précis pour reconstruire la position des électrodes, comme on va le voir dans la sous-partie suivante.

Résultats de reconstruction des positions des électrodes

On considère initialement que la longueur des électrodes n'est pas fixe, et on choisit de perturber soit le premier angle, soit le deuxième angle de la première électrode. Même si les autres électrodes sont non perturbées, nous laissons tous les angles libres dans notre algorithme. Dans ce cas, nous présentons des reconstructions avec Ω un disque de rayon 0.5 ($\alpha = [0.5]$) recouvert de 4 électrodes incluses dans $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et discrétisé par une grille cartésienne de taille 400×400 . Comme prévu, les électrodes E_2 , E_3 et E_4 , étant déjà à leurs positions correctes, ne sont presque pas déplacées par l'algorithme, tandis que la position de la première électrode est retrouvée comme le montre le tableau suivant :

Angles recherchés		Angles de départ		Reconstructions	
Θ_1^1	Θ_1^2	Θ_1^1	Θ_1^2	Θ_1^1	Θ_1^2
-2.35619	-1.85619	-3.141592	-1.85619	-2.356028	-1.85619
-3.141592	-2.64	-3.141592	-1.85619	-3.14159	-2.636460

Maintenant, supposons que la longueur des électrodes est fixe et connue. Dans ce cas, Θ^1 et Θ^2 ne sont pas indépendants l'un de l'autre mais sont liés par la relation :

$$L = \int_{\Theta_k^1}^{\Theta_k^2} \rho(\theta) d\theta. \quad (4.22)$$

avec L la longueur de l'électrode. Pour prendre cela en compte, nous décidons simplement que Θ_2 est désormais une fonction de Θ^1 donnée par la relation (4.22), et \mathcal{U} dépend uniquement de \mathcal{I} et de Θ^1 . Les dérivées sont alors obtenues par une simple combinaison du Lemme 4.2.2, avec la dérivation des fonctions composées, et du fait que l'équation (4.22) implique immédiatement que :

$$\frac{\partial \Theta_k^2}{\partial \Theta_l^1} = \delta_{kl} \frac{\rho(\Theta_l^1)}{\rho(\Theta_k^2)}.$$

Pour nos tests, nous choisissons $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$, discrétisé par une grille cartésienne de 400×400 , $N = 4$ et $\alpha = [0.8, 0.02, 0.001, 0.05, 0.001, 0.04, 0.001]$. Les résultats obtenus sont affichés dans les tableaux suivants :

	Positions recherchées		Positions initiales		Positions reconstruites	
	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2
E_1	-2.51327	-1.93817	-3.14159	-2.51358	-2.55152	-1.97563
E_2	-0.94247	-0.30516	-1.57079	-0.91229	-0.90298	-0.27141
E_3	0.62831	1.24343	0	0.57253	0.54018	1.14782
E_4	2.19911	2.84837	1.57079	2.18999	2.08957	2.72868

	Positions recherchées		Positions de départ		Positions reconstruites	
	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2
E_1	-2.35619	-1.78157	-3.14159	-2.51358	-2.24361	-1.66646
E_2	-0.78539	-0.17053	-1.57079	-0.91229	-0.70862	-0.10368
E_3	0.78539	1.41055	0	0.57253	0.83745	1.46474
E_4	2.19911	2.84837	1.57079	2.18999	2.23475	2.88755

Étant donné que notre méthode numérique a réussi la reconstruction des positions des électrodes, nous sommes à présent en mesure de nous focaliser sur le problème inverse géométrique plus général, qui vise à reconstruire le paramètre α .

4.2.2 Reconstruction des paramètres de modélisation du bord

On suppose que la longueur des électrodes est fixe, dans ce cas la position des électrodes est entièrement définie par le paramètre Θ^1 . Le problème inverse géométrique peut maintenant être résumé comme suit :

Connaissant $(\mathcal{I}, \mathcal{U}_{meas})$, déterminer le paramètre qui définit la frontière du domaine : α ,

en supposant que la conductivité σ et l'impédance de contact z sont connues. En adaptant les notations de la Section 4.1, nous désignons par $U = U(\alpha, \Theta^1, \Theta^2(\alpha, \theta^1), I)$ (la deuxième partie de) la solution de (2.27) avec $f = g = 0$, $I \in \mathbb{R}_>^M$, les positions des électrodes déterminées par les angles Θ^1 et Θ^2 , et la géométrie de bord déterminée par α . Nous définissons également \mathcal{U}_{meas} comme la matrice de mesures $M \times P$ potentiellement bruitée suivante, qui approche la matrice de mesure correspondant aux positions exactes des électrodes définie par Θ_*^1 et la géométrie du bord définie par α_* :

$$\mathcal{U}_{meas} \approx \mathcal{U}(\alpha_*, \Theta_*^1, \mathcal{I}).$$

Nous visons à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$F(\alpha, \Theta^1) = \|\mathcal{U}(\alpha, \Theta^1, \Theta^2(\alpha, \Theta^1), I) - \mathcal{U}_{meas}\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\alpha - \alpha_*\|_{\odot}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Theta^1 - \Theta_*^1\|_{\mathbb{R}^M}^2,$$

avec

$$\|\alpha\|_{\odot}^2 = \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^N k^2 (\alpha_k^2 + \alpha_{N+k}^2)$$

une norme équivalente à la norme H^1 du rayon. Comme précédemment, α_* doit être considéré comme une bonne estimation de la vraie valeur de α qu'on cherche à reconstruire et le vecteur Θ_*^1 doit être considéré comme une bonne estimation de l'emplacement réel des électrodes. Les dérivées partielles de la fonctionnelle par rapport à n'importe quel paramètre de forme sont facilement obtenues à partir de la dérivée de forme obtenue dans [48], et introduite par le théorème 4.2.1. Plus précisément, notons par $V(\alpha, \Theta^1) = U(\alpha, \Theta^1, \Theta^2(\alpha, \Theta^1))$, pour un paramètre de forme quelconque qu'on note par z nous avons la dérivée partielle de V par rapport à p suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} + \sum_{k=1}^M \frac{\partial U}{\partial \Theta_k^2} \cdot \frac{\partial \Theta_k^2}{\partial p}.$$

Remarque 4.2.4. Pour $p = \alpha$ on a :

- la première partie de la dérivée $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ est explicitée par la formule d'échantillonnage définie dans le théorème 4.2.1 et, $\frac{\partial U}{\partial \Theta_k^2}$ est explicité par le lemme 4.2.2.
- Il est clair que pour $m \in \{1, \dots, M\}$:

$$\frac{\partial \Theta_m^2}{\partial \alpha} \rho(\Theta_m^2) - \int_{\Theta_m^1}^{\Theta_m^2} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} d\theta = 0,$$

ce qui nous donne :

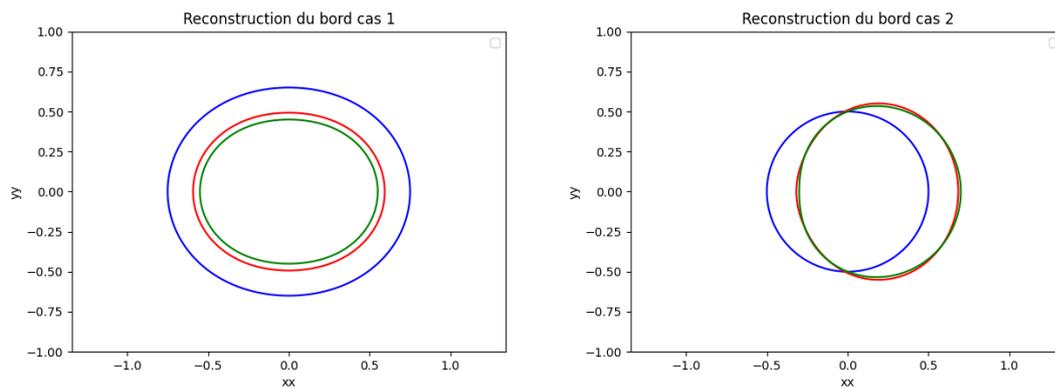
$$\frac{\partial \Theta_m^2}{\partial \alpha} = \frac{1}{\rho(\Theta_m^2)} \int_{\Theta_m^1}^{\Theta_m^2} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} d\theta.$$

Les tests présentés dans la suite utilisent un algorithme de descente de gradient très simple.

Résultat de reconstruction du paramètre α

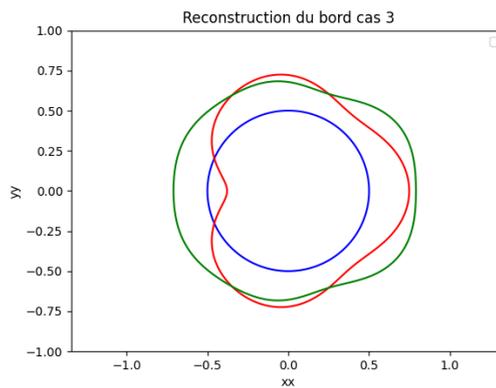
Pour les reconstructions suivantes, le paramètre Θ^1 sera fixé à $[-\pi, \frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}]$ pour toutes les géométries et le paramètre σ sera fixé à 1. On note aussi que toutes les géométries ont le même centre $(0,0)$. Pour générer les mesures, nous utilisons une grille cartésienne de taille 800×800 , et pour le problème inverse, une grille de taille 500×500 . Dans la figure 4.11, nous présentons trois cas de reconstruction du bord du domaine avec 4 électrodes sur le bord. Nous constatons que notre algorithme réussit à bien reconstruire les légères déformations de géométrie comme les cas 1 et 2 dans des domaines presque circulaires, mais la qualité des reconstructions se détériore dans les cas les plus exigeants, quand une grande déformation de la géométrie a lieu, comme on peut le voir dans le cas 3.

Dans la figure 4.12 on présente des reconstructions de 3 cas différents, mais maintenant avec 8 électrodes au bord du domaine, donc plus de mesures. On remarque qu'avec un nombre plus important d'électrodes, comme on peut le voir sur la figure 4.12, on obtient des résultats beaucoup plus précis même avec des déformations importantes du domaine initial. Il est à noter que notre méthode donne de bons résultats avec un nombre accru d'électrodes sur le bord, mais peut parfois échouer dans des cas encore plus complexes où la déformation est plus prononcée. Cela peut être dû à un problème de précision, et il pourrait être judicieux d'essayer des grilles encore plus fines pour faire les reconstructions, d'ailleurs cela demanderait un temps de calcul plus élevé. Soulignons également que le problème est instable et que les fonctions coût qu'on vise à minimiser ont une allure oscillante, ce qui suggère que nous pouvons occasionnellement atteindre un minimum local, limitant ainsi la qualité de la reconstruction.



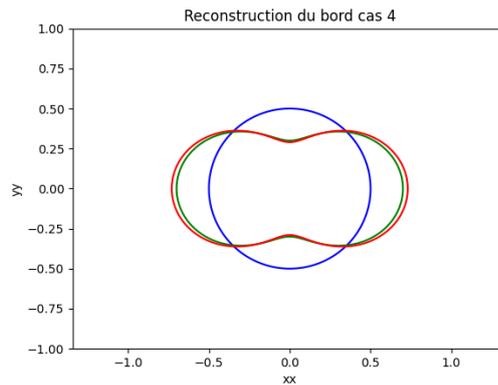
(a) cas 1 : reconstruction à l'aide de 4 électrodes

(b) cas 2 : reconstruction à l'aide de 4 électrodes

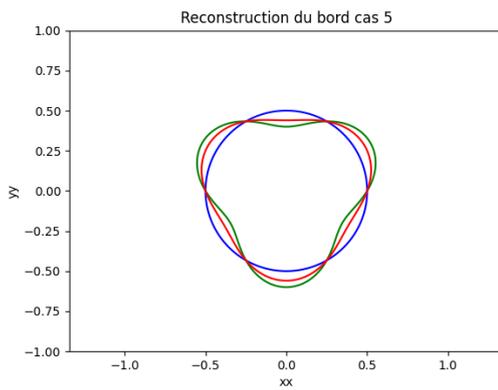


(c) cas 3 : reconstruction à l'aide de 4 électrodes

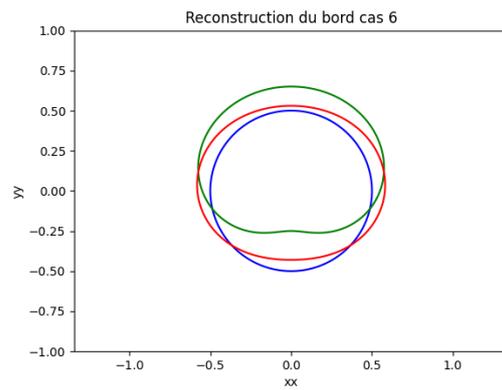
Fig. 4.11 : Reconstruction de la géométrie avec 4 électrodes : en bleu la géométrie de départ ; en vert la géométrie désirée ; en rouge la géométrie reconstruite. xx représente les coordonnées de x et yy celles de y .



(a) cas 4 : reconstruction à l'aide de 8 électrodes



(b) cas 5 : reconstruction à l'aide de 8 électrodes



(c) cas 5 : reconstruction à l'aide de 8 électrodes

Fig. 4.12 : Reconstruction de la géométrie du bord avec 8 électrodes : en bleu la géométrie de départ; en vert la géométrie désirés; en rouge la géométrie reconstruite. xx représente les coordonnées de x et yy celles de y .

Aspects computationnels du problème direct de l'EIT

Dans ce chapitre, nous exposons les travaux réalisés dans le but de développer un code efficace et robuste pour résoudre le problème direct de l'EIT en C++ en utilisant notre méthode numérique de frontière immergée développée dans le chapitre 3. On rappelle le modèle de problème direct suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \frac{1}{z_m}(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \quad m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où z_m est l'impédance de contact constante et positive liée à l'électrode E_m . Ce modèle est bien posé dans $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$ (voir proposition 2.3.3, chapitre 2). On rappelle aussi que notre domaine Ω est inclus dans un domaine carré que l'on note Ω_e , qui est lui-même entièrement discrétisé avec une grille cartésienne. Nous sommes donc amenés à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_e = 0 & \text{dans } \Omega_e \setminus \overline{\Omega} \\ u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \\ u_e = u & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

avec u solution de (5.1).

Il est important de noter que nous parlons exclusivement du problème direct dans ce chapitre, car c'est à ce stade que la majorité du temps de calcul est dépensée. Ceci s'explique par le fait que le problème inverse implique la résolution successive de nombreux problèmes directs comme on l'a déjà vu dans le chapitre 4. Par conséquent, l'optimisation du coût de calcul lié à la résolution d'un problème direct revêt une importance cruciale.

En effet, la discrétisation de (5.2) à l'aide de la méthode de frontière immergée nous conduit à la résolution d'un système linéaire

$$Ax = b$$

où la matrice A est une matrice creuse non symétrique. On sait que les résolutions numériques de ce type de systèmes linéaires sur des grilles cartésiennes de haute résolution peuvent entraîner des coûts de calcul élevés, notamment lorsque ces résolutions se succèdent. Pour cela, nous avons besoin

d'un code suffisamment robuste en termes de vitesse, écrit dans un langage de calcul capable de gérer des problèmes gourmands en termes de mémoire, sachant que l'objectif à long terme est de pouvoir résoudre ce problème en 3D, et non seulement en 2D. Ce choix de langage de programmation est donc assez important, et doit tenir compte de l'exigence en mémoire de notre problème. C'est pour cela que nous nous sommes dirigés vers le C++, qui est souvent considéré comme un choix judicieux pour de telles situations, pour les raisons suivantes [165] :

- Contrôle sur la mémoire : en C++, on a un contrôle direct sur la gestion de la mémoire, ce qui signifie que le fait d'allouer et de libérer la mémoire manuellement est possible. Cela permet d'optimiser l'utilisation de la mémoire en évitant les fuites de mémoire et en minimisant la fragmentation de la mémoire.
- Performance : le C++ est un langage compilé qui offre de bonnes performances. On peut donc optimiser l'utilisation de la mémoire et obtenir des temps d'exécution plus rapides en comparaison avec des langages de haut niveau, comme Python.
- Bibliothèques : le C++ dispose d'une vaste bibliothèque standard et de nombreuses bibliothèques tierces pour la manipulation de données et le calcul scientifique. On peut donc utiliser ces bibliothèques pour accélérer le développement de notre code sans sacrifier la performance.
- Extensibilité : si on a besoin d'ajouter des fonctionnalités spécifiques à notre code, le C++ offre une grande extensibilité. On a aussi le choix de créer des classes et des bibliothèques personnalisées pour répondre à nos besoins.

On renvoie vers les liens suivants pour plus d'informations sur le C++ : <http://www.cplusplus.com>, <http://cpp.developpez.com>.

Dans ce chapitre, nous présentons les deux codes développés au cours de cette thèse pour obtenir un code robuste permettant de résoudre le problème direct et inverse de l'EIT. Le premier est un code séquentiel développé en C++ pour le problème direct et inverse de l'EIT, tandis que le deuxième est un code parallèle pour le problème direct de l'EIT, également développé en C++. On note aussi que nous adoptons une approche orientée objet pour le développement. La programmation orientée objet (POO) est un paradigme de programmation qui repose sur le concept de "classe" et d'"objet" [166, 168, 184]. Elle est largement utilisée en C++ et dans de nombreux autres langages de programmation. La POO permet de modéliser l'organisation du code de manière à ce qu'il soit plus lisible, maintenable et réutilisable. Pour créer un objet, il faut d'abord créer une classe. Créer une classe consiste à définir les plans de l'objet. La notion de classe permet donc de définir de nouveaux types pouvant être utilisés avec les mêmes facilités que les types prédéfinis. Pour plus de détails sur la notion de classe et les concepts de programmation en C++, nous renvoyons au document suivant [165].

Nous sommes également intéressés par l'aspect de parallélisation. En effet, dans une situation où l'on doit résoudre de grands systèmes linéaires, la parallélisation est facilitée, car nous utilisons des grilles cartésiennes pour la discrétisation de notre problème. Nous commençons dans la section 5.1 par présenter la partie qui traite du problème direct de notre code séquentiel, puis nous discutons du code parallèle pour le problème direct de l'EIT dans la section 5.2. Avant cela, nous aimerions noter

que tous les calculs effectués dans ce chapitre ont été réalisés, par souci de faciliter les comparaisons, à l'aide d'un ordinateur Dell Precision 7550, qui dispose de six cœurs et de 16 Go de mémoire.

5.1 Code séquentiel

Tous les tests numériques présentés dans les chapitres précédents, notamment les chapitres 3 et 4, ont été générés à l'aide du code séquentiel développé en C++ présenté dans cette partie. Il utilise la bibliothèque open source Eigen [56] destinée à l'algèbre linéaire et à la manipulation de matrices et de vecteurs et qui offre des classes et des fonctions pour effectuer diverses opérations mathématiques sur des objets matriciels et la résolution de systèmes linéaires. On rappelle que notre objectif est de résoudre le système linéaire :

$$Au = b \quad (5.3)$$

où A est la matrice qui discrétise l'équation (5.2) à l'aide du schéma numérique de frontière immergée introduit dans le chapitre 3, et b est le terme source. On note que la matrice A est une matrice creuse presque symétrique à diagonale dominante comme on peut le voir sur la figure 5.1. La solution est stockée dans un vecteur u , qui va contenir dans l'ordre suivant : les valeurs des solutions pour les points d'interface, les valeurs des solutions associées aux électrodes ($U \in \mathbb{R}_\diamond^m$), et ensuite les valeurs associées aux points de la grille cartésienne.

Nous notons que les codes de calcul scientifique pour la résolution de systèmes linéaires suivent généralement une architecture classique. L'architecture de notre code séquentiel suit le plan classique et peut être décrite essentiellement comme suit : une classe 'Grille' qui gère la grille cartésienne et stocke toutes les informations liées à la grille, notamment les points d'interfaces, une classe 'Assemblage' pour l'assemblage du système linéaire, et une classe 'Solve' pour résoudre le problème. Cette structure est généralement adoptée dans les codes de calcul. Dans la sous-section suivante, nous discuterons de l'étape d'assemblage de notre matrice creuse.

5.1.1 Assemblage

Pour assembler la matrice, nous utilisons la fonction membre "setFromTriplets" de la classe "Sparse-Matrix" de Eigen, qui est basée sur un remplissage par triplet. Le terme "triplet" fait référence à un tableau de tableau qui stocke trois informations : l'indice de ligne, l'indice de colonne et la valeur d'un élément non nul dans une matrice creuse, donc un format de stockage COO (COOrdinates).

Dans la figure 5.2, nous présentons le temps de calcul nécessaire pour la partie d'assemblage de la matrice pour différentes tailles de grille de précision croissante. On note (N_x, N_y) les tailles de la grille pour les axes x et y respectivement. Dans nos études, nous considérons toujours une grille cartésienne uniforme telle que $N_x = N_y$, et nous notons par $h = L/N_x = L/N_y$ l'espacement de la grille avec L la longueur du carré dans lequel on discrétise notre problème. Comme on peut le voir sur la figure 5.2,

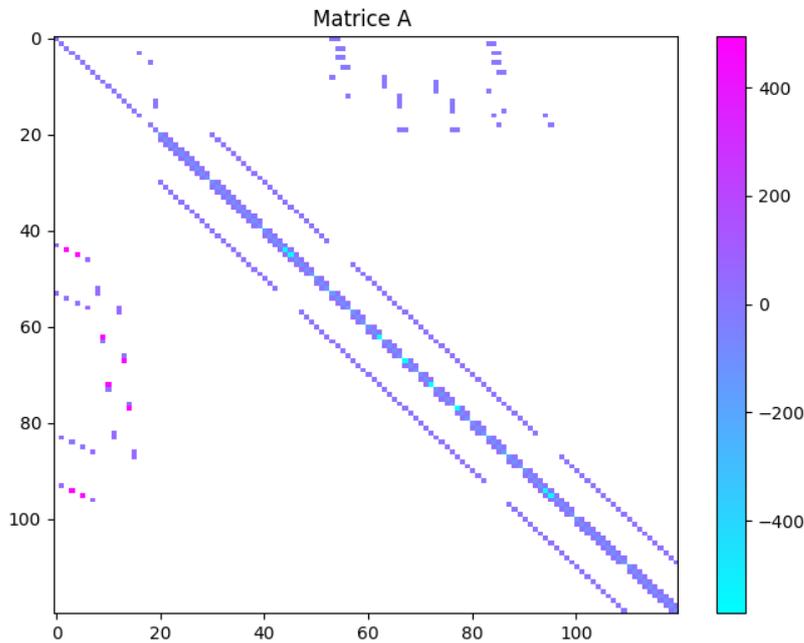


Fig. 5.1 : Matrice A pour une grille cartésienne de taille 10×10 avec Ω un disque de rayon 0.5 inclus dans $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$ (donc $L = 2$). On note que les termes extra-diagonaux correspondent aux contributions des points d'interface dans la discrétisation du laplacien pour les points de grilles irréguliers, en plus de la discrétisation de la dérivée normale aux points d'interface.

les temps d'exécution sont raisonnables pour les tailles de grille modestes, soit 3 millisecondes (ms) pour $h = 0.02$, 138 ms pour 0.0033, et 479 ms pour $h = 0.002$, mais explosent pour des grilles de taille d'espacement inférieures ou égales à $h = 0.001$ ($N_x = N_y = 2000$), atteignant l'ordre de 1921 ms. Cela est dû à la taille de la matrice, qui devient exigeante en termes de mémoire au-delà d'un certain seuil de taille de grille. En effet pour une grille cartésienne de taille $N_x = N_y = 2000$ le nombre d'éléments non nuls de la matrice creuse est de 2.0008891×10^{10} . Cela est certainement coûteux en termes de stockage mémoire.

Dans la partie suivante, nous discuterons de l'étape de résolution de notre système linéaire, qui est généralement l'étape la plus coûteuse en termes de temps de calcul. Notons que nous nous appuyons sur la bibliothèque Eigen pour cette étape de résolution.

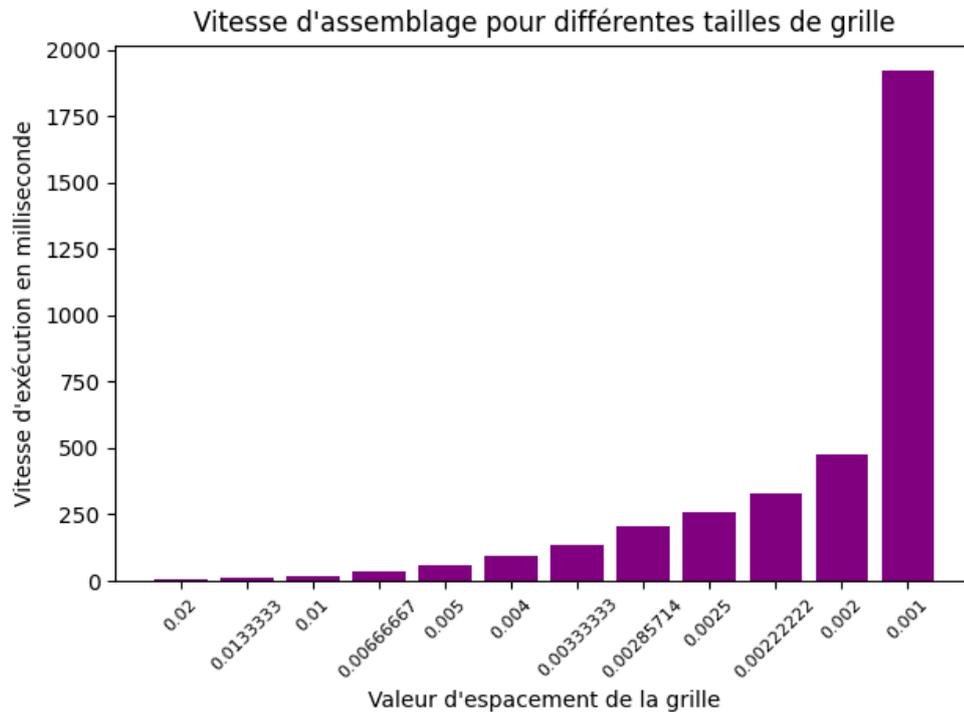


Fig. 5.2 : Sur l'axe des x , nous avons les valeurs de l'espacement de la grille cartésienne, variant de 0.02 à 0.001, donc en ordre croissant de précision. L'axe des y représente la vitesse d'exécution en millisecondes(ms). On note que pour ces tests Ω est un disque de rayon 0.5 inclus dans $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

5.1.2 Résolution

Pour résoudre un système linéaire, deux grandes familles de méthodes sont disponibles : les méthodes directes et les méthodes itératives. Les solveurs directs factorisent directement la matrice en un produit de matrices plus simples [10, 15, 51, 164]. Parmi les solveurs directs disponibles dans la bibliothèque Eigen, on peut citer, à titre d'exemple, `SimplicialLLT` (basé sur la décomposition de Cholesky) et `SparseLU` (solveur direct creux reposant sur la décomposition LU). Les avantages des solveurs directs sont principalement liés à la précision et à la stabilité. Si une précision très élevée est requise et que la matrice du système est bien conditionnée, opter pour un solveur direct peut être judicieux. Cependant, les solveurs directs peuvent présenter des limitations en termes de mémoire et de temps de calcul pour des matrices de grande taille [122].

D'autre part, les solveurs itératifs sont des méthodes numériques utilisées pour résoudre des systèmes d'équations linéaires en effectuant une séquence d'itérations successives pour converger vers la solution. Contrairement aux solveurs directs qui fournissent la solution exacte en un nombre fini d'étapes, les solveurs itératifs travaillent progressivement vers une solution en améliorant itérativement les

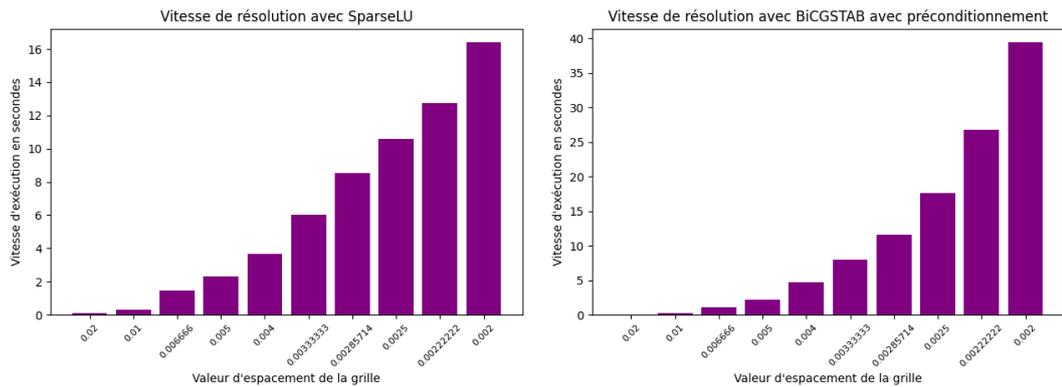
approximations successives. Ils démarrent avec une estimation initiale de la solution et mettent à jour cette estimation à chaque itération. L'idée fondamentale est de réduire l'erreur entre la solution actuelle et la solution réelle à chaque étape, en utilisant des critères de convergence prédéfinis. Les solveurs itératifs peuvent être plus adaptés pour résoudre de grands systèmes d'équations linéaires creux ou mal conditionnés, où les solveurs directs peuvent être considérés comme coûteux en termes de mémoire. Quelques exemples de solveurs itératifs disponibles dans Eigen incluent le gradient conjugué, GMRES (Generalized Minimal Residual) et BicgStab (BiConjugate Gradient Stabilized).

Remarque 5.1.1. *Il convient de noter que, pour les solveurs itératifs, l'étape de préconditionnement peut être essentielle dans certains cas. Le préconditionnement consiste à résoudre un problème équivalent mais mieux conditionné, ce qui peut accélérer la convergence des méthodes itératives. Formellement, cela revient à modifier le système linéaire original $Ax = b$ en le transformant en un système $M^{-1}Ax = M^{-1}b$, où M^{-1} est la matrice de préconditionnement.*

En résumé, si la précision et la stabilité sont cruciales et que la matrice est bien conditionnée, les solveurs directs peuvent être une bonne option, surtout si des résolutions du même système sont nécessaires à plusieurs reprises. Si la matrice est grande, creuse ou mal conditionnée, les solveurs itératifs peuvent offrir une meilleure efficacité en termes de mémoire et de temps [70]. En effet, les performances des différents types de solveurs dépendent énormément des caractéristiques de la matrice. On note que le système linéaire que nous considérons n'est pas entièrement symétrique, mais plutôt presque symétrique. Généralement, les solveurs directs sont efficaces en termes de rapidité de résolution, même lorsque l'on ne dispose pas d'une matrice parfaitement symétrique [71], donc on s'attend à ce que notre système soit résolu assez rapidement à l'aide des solveurs directs disponibles dans Eigen. Cependant, nous savons également que des résolutions consécutives du système linéaire seront nécessaires pour résoudre un problème inverse. Le fait d'avoir à résoudre plusieurs systèmes linéaires consécutifs favorise généralement l'utilisation de solveurs itératifs.

Pour comparer les vitesses de résolution des différents solveurs dans le cas de notre matrice, on présente sur la figure 5.3 suivante le temps de calcul en secondes pour la partie de résolution (factorisation et résolution dans le cas du solveur direct) en utilisant deux solveurs : un solveur direct SparseLU et un solveur itératif BiCGSTAB. On note que pour le solveur itératif, la matrice a été préconditionnée à l'aide du préconditionneur IncompleteLUT. Sans préconditionnement, la performance du BiCGSTAB se détériore significativement pour les grilles plus précises. On peut observer que le solveur direct SparseLU est plus rapide pour résoudre notre système linéaire. Cependant, quel que soit le solveur utilisé, la limite de résolution est atteinte aux alentours de la valeur de $h = 0,002$ (ce qui correspond à un nombre de 1000×1000 d'inconnues). Dans la figure 5.3 on observe clairement que le solveur direct SparseLU est plus performant. C'est la raison pour laquelle nous l'avons choisi pour nos études numériques dans le code séquentiel.

Malgré le fonctionnement efficace du code séquentiel pour des grilles de taille moyenne, le temps de calcul explose et devient coûteux pour des grilles de taille supérieure à 1000×1000 . Pour pouvoir augmenter la précision de notre résolution, spécifiquement pour des géométries en 2D et même



(a) Vitesse de factorisation et résolution avec SparseLU (b) Vitesse de résolution avec BiCGSTAB

Fig. 5.3 : Temps de calcul pour la résolution du système linéaire en utilisant deux solveurs différents, SparseLU et Bicgstab, pour Ω , qui est un disque de rayon 0,5 inclus dans $\Omega_e = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

éventuellement pour considérer le problème en 3D, il est naturel de vouloir augmenter les tailles de nos grilles cartésiennes. Pour aborder cette problématique, la conception d'un code parallèle semble être l'étape suivante naturelle. Cette parallélisation sera facilitée par l'emploi de grilles cartésiennes.

5.2 Code parallèle avec MPI

La parallélisation est une technique informatique qui vise à diviser un problème ou un calcul en plusieurs sous-tâches indépendantes, puis à les exécuter simultanément sur plusieurs processeurs ou cœurs de calcul [77, 154, 157, 202]. Cette approche permet d'accélérer le traitement des tâches en répartissant la charge de travail. Pour paralléliser la résolution numérique d'un système linéaire, on a recours à diverses méthodes, une de ces méthodes est la méthode de décomposition de domaine qui consiste à diviser le domaine global en plusieurs sous-domaines plus petits [13, 98, 103]. Chaque sous-domaine est résolu localement sur un processeur ou un nœud de calcul distinct, et les résultats locaux sont ensuite combinés pour obtenir la solution globale. Cette méthode est particulièrement avantageuse dans les cas de méthodes numériques utilisant des grilles structurées [153].

Une autre méthode consiste à utiliser des solveurs parallèles pour la résolution de systèmes linéaires, qu'il s'agisse de solveurs directs tels que la factorisation LU parallèle ou de méthodes itératives parallèles [98, 103, 164].

Dans cette section, nous présentons notre code parallèle en C++ qui résout numériquement (5.2) en 2D en utilisant notre méthode de frontière immergée. Deux axes principaux guident notre approche. Le premier repose sur la parallélisation par partitionnement de domaine : notre grille cartésienne est divisée en colonnes, chaque colonne étant sous la responsabilité d'un processeur. Pour la communication et la coordination entre les processeurs, nous utilisons la bibliothèque MPI (Message Passing Interface).

Le deuxième axe est le couplage avec le solveur parallèle Pastix (Parallel Sparse matrix package), une bibliothèque scientifique offrant un solveur parallèle haute performance pour les systèmes linéaires creux de grande taille.

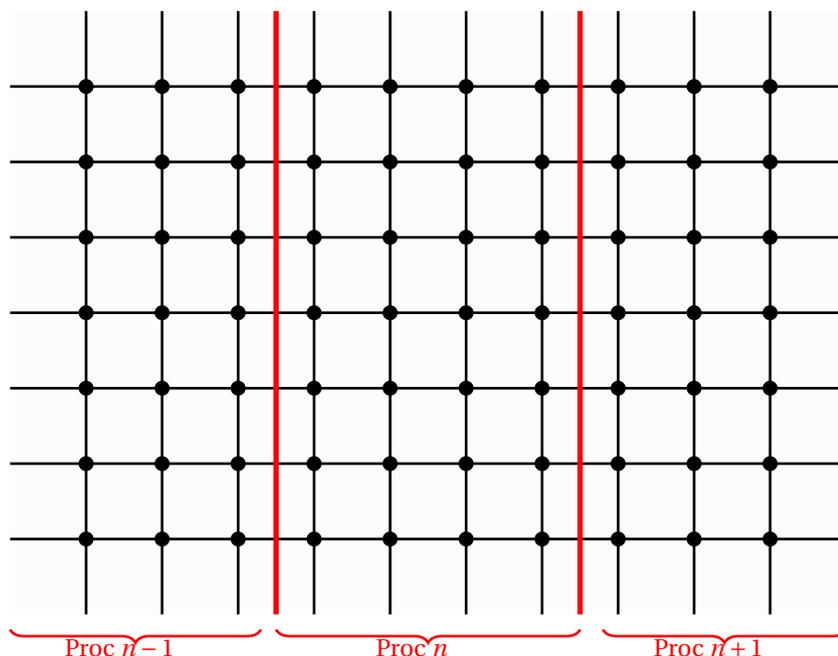


Fig. 5.4 : Partitionnement vertical d'une grille cartésienne, chaque colonne va être la propriété d'un processeur.

Dans ce qui suit, nous commençons par donner un bref aperçu des méthodes de parallélisation utilisées avec les méthodes de frontière immergée dans la littérature. Ensuite, nous introduirons l'architecture générale du code et discuterons de la phase d'assemblage et de résolution, notamment en ce qui concerne l'utilisation du solveur PaStiX et comment il a été intégré dans notre code. Enfin, nous aborderons une étude de convergence plus poussée que celle faite dans le chapitre 3, grâce à notre code parallèle.

5.2.1 Aperçu : parallélisation et méthode de frontière immergée

Pour mettre en œuvre des stratégies de parallélisation dans le contexte de résolution de système linéaire, nous avons recours aux bibliothèques de calcul parallèle. Il existe de nombreuses bibliothèques spécialisées conçues pour la résolution parallèle de systèmes linéaires. On a par exemple : MPI pour la communication entre processeurs [76], PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) [185] et Trilinos [189], qui sont des bibliothèques populaires pour la résolution de systèmes linéaires parallèles.

Pour les méthodes de frontière immergée sur grille cartésienne, la simplicité de la méthode garantit la facilité de parallélisation. En 1997 McQueen et Peskin dans [128] réalisent l'implémentation parallèle de la méthode de frontière immergée sur une machine à mémoire partagée telle que l'ordinateur Cray C-90. Dans [68], le solveur est parallélisé en utilisant une décomposition de domaine et MPI, où l'exactitude et l'efficacité du solveur sont examinées. Ensuite, dans [39], la méthode de frontière immergée pour une équation elliptique avec un saut à travers l'interface a été parallélisée à l'aide de la bibliothèque PETSc, et une étude numérique de la méthode parallélisée a été réalisée. On note aussi qu'il existe de nombreuses autres études qui abordent l'aspect de la parallélisation pour les méthodes de frontière immergée, parmi lesquelles on a [1, 74, 199, 211].

Dans notre travail, nous nous intéressons particulièrement à la bibliothèque MPI. Pour comprendre le fonctionnement de MPI, il est essentiel de saisir la notion de mémoire dans un système informatique, en particulier la mémoire RAM (Random Access Memory), qui sert à stocker temporairement les données et les programmes en cours d'exécution par le processeur. Chaque processus MPI fonctionne dans son propre espace mémoire distinct. Lorsqu'un programme MPI est en cours d'exécution, chaque processus réserve sa propre mémoire pour stocker ses données et ses variables locales. Chaque processus peut éventuellement exécuter des parties différentes d'un même programme. Dans ce scénario, l'échange de données entre deux ou plusieurs processus s'effectue grâce à des appels spécifiques à des sous-programmes MPI au sein du programme.

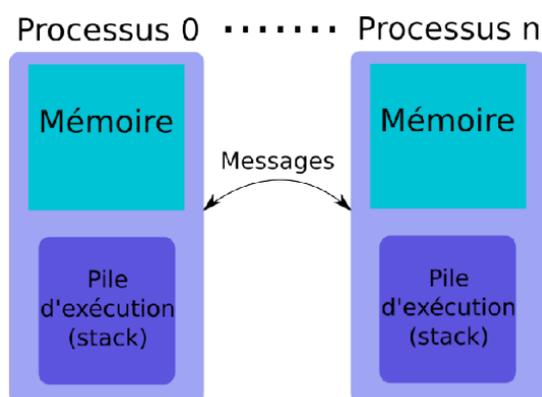


Fig. 5.5 : Schéma MPI : la mémoire est distribuée : Chaque nœud de calcul du cluster a sa propre mémoire vive (RAM) dédiée. Les données et les calculs sont répartis entre ces nœuds. Les nœuds de calcul communiquent par envoi/réception de messages. Ces messages sont utilisés pour échanger des informations entre les différents nœuds. Des exemples de routine de communications : `MPI_Send` et `MPI_Recv`. Pour plus d'information sur les communications MPI : <http://www.idris.fr/formations/mpi/>

Dans la sous-section suivante, nous présentons en détail la première partie de l'architecture de notre code parallèle, qui crée la grille cartésienne associée à un domaine Ω . Cela permettra de mieux comprendre le fonctionnement de l'étape de résolution parallèle du système linéaire.

5.2.2 Architecture du code

Le code traite le problème en 2D, mais il est conçu pour être facilement adapté en 3D. Nous commençons par présenter les classes les plus importantes. Cependant, avant d'aborder cela, nous aimerions présenter en détail la stratégie de partitionnement pour gérer une grille cartésienne. Dans ce contexte, nous avons opté pour une approche parallèle à mémoire séparée à l'aide de MPI.

Le partitionnement de la grille cartésienne sera de nature verticale (figure 5.4). Ainsi, chaque processeur sera responsable d'une portion du système linéaire. Ce partitionnement doit prendre en compte les particularités de notre méthode numérique de frontière immergée : la première étant la présence de points d'interface comme inconnues dans le système linéaire, et la deuxième étant que notre solution est composée de deux parties (u, U) où U représente les mesures à travers les électrodes. La présence des points d'interface ou des inconnues U , pourrait potentiellement perturber la numérotation locale sur les processeurs. Pour éviter cela, nous allons considérer que ces inconnues supplémentaires, qui ne sont pas affectées à des points de grille, sont une propriété de tous les processeurs.

Nous allons donc choisir de représenter nos solutions à l'aide d'une classe de vecteurs intitulée "EitBi-Vector". Cette classe crée des objets de type "EIT-bivecteur" : un vecteur constitué de deux tableaux contigus de tailles différentes, l'un pour les indices négatifs et l'autre pour les indices positifs. La partie contenant les éléments aux indices négatifs est la propriété de tous les processeurs (tous les processeurs ont accès à cette partie du vecteur), tandis que l'autre tableau aux indices positifs est réparti entre les processeurs. Cette classe est utilisée pour stocker des tableaux de solutions. Il convient de préciser que la partie aux indices négatifs du bivecteur est destinée à stocker la solution pour les points d'interface et les potentiels à travers les électrodes, tandis que la partie aux indices positifs stocke la solution pour les points de la grille. Cela nous permet de conserver une numérotation classique pour les points de la grille. Dans ce cas, l'ajout de points d'interface ne perturbe donc pas le partitionnement classique.

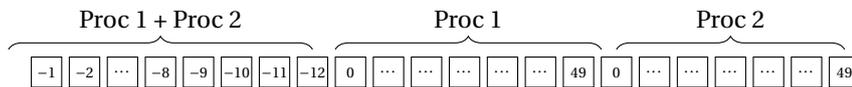


Fig. 5.6 : Exemple d'EIT-bivecteur : On considère ici une grille cartésienne de taille $N_x = 10, N_y = 10$, avec Ω un cercle de rayon 0.5, le problème est lancé en parallèle sur deux processeurs. Dans ce cas, nous aurons 8 points d'interface qui seront stockés dans le tableau, avec des indices allant de -1 à -8 et 4 électrodes numérotées de -9 à -12 . Ensuite, les 100 points de grille seront partagés entre 2 processeurs avec une numérotation locale standard.

Dans ce qui suit, nous présentons la liste des classes les plus importantes qui permettront de mieux comprendre la structure du code

- Classe Point : Classe générant des objets de type Point. Ces instances représentent des points de grille (réguliers ou irréguliers) ou des points d'interface. Un objet Point, noté P , recueille principalement les informations suivantes : la position du point dans la grille cartésienne, définie par les indices (i, j) , les coordonnées du point dans le carré $\Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2]$ désignées par (x_P, y_P) , le type du point : régulier (point de grille loin de l'interface), irrégulier (points de grille

proche de l'interface), point d'interface ou potentiel d'électrode. On enregistre aussi pour chaque Point P les voisins des quatre côtés (nord, sud, est, ouest) adapté a notre méthode de frontière immergée pour la discrétisation du laplacien. Dans le cas d'un point de type "interface", le stencil de discrétisation pour la condition aux bords est stocké, ainsi que l'indication de l'appartenance de ce point d'interface à une électrode, et si oui le numéro de cette électrode.

- Classe "Forme" : Cette classe génère des objets de type "Forme" qui représentent la géométrie du domaine. Ces objets stockent la valeur du paramètre α ainsi que la position des électrodes. La fonction "level-set" est une fonction membre de cette classe. En résumé, cette classe gère les aspects directement liés à la géométrie du domaine Ω .
- Classe "Grid" : Cette classe génère des objets de type "Grid" en prenant en entrée les dimensions de la grille ainsi qu'un pointeur de type "Forme". Ce type d'objet stocke plusieurs informations comme : les dimensions de la grille, les dimensions locales gérées par un processeur, l'espacement de la grille... En résumé, cette classe crée la grille cartésienne du point de vue parallèle, en utilisant un partitionnement vertical de la grille et en prenant en compte la géométrie représentée par l'object Form.

À l'aide de tous ces outils, nous pourrons créer une grille cartésienne associée à une géométrie Ω . Il convient également de noter qu'avec la création d'un objet "Grid" nous avons stocké toutes les informations nécessaires pour effectuer l'assemblage de la matrice. Comme on peut le voir sur la figure 5.7, l'étape de création de la grille cartésienne et du stockage de toutes les informations requises pour l'assemblage de la matrice fonctionne de manière assez efficace.

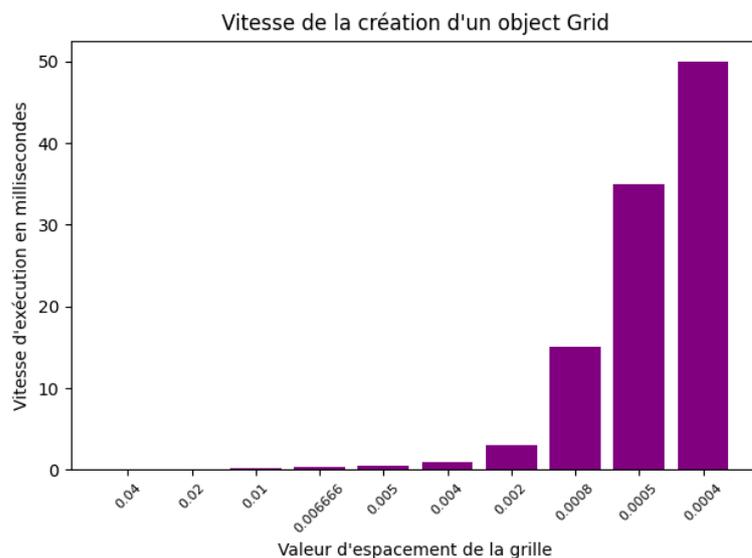


Fig. 5.7 : Temps d'exécution pour la création d'un objet "Grid" en millisecondes.

5.2.3 Assemblage "Matrix-Free"

Dans cette sous-section, nous abordons l'étape de l'assemblage de la matrice, par une méthode "Matrix-Free". En effet, l'approche "Matrix-Free" est une alternative visant à éviter la construction complète de la matrice globale. Au lieu de stocker la matrice complète en mémoire, nous calculons directement les produits matrice-vecteur sans avoir besoin de stocker la matrice elle-même. Cette approche est donc particulièrement bénéfique pour les problèmes de grande dimension. Notre objectif principal est d'optimiser le coût de calcul nécessaire pour accomplir cette tâche. C'est pour cela, notre première intuition nous a poussés vers l'adoption d'une approche de remplissage "Matrix-Free". Cependant, sa mise en œuvre peut être plus complexe et dépend des détails spécifiques du problème à résoudre. Il est important de souligner aussi que l'étape d'assemblage influencera directement notre sélection de solveur. Donc un assemblage "Matrix-Free" peut nous obliger à re-programmer certaines fonctionnalités essentielles, par exemple la partie de résolution.

Pour mettre en œuvre l'approche "Matrix-Free", nous avons créé une classe appelée "Matrix" avec la multiplication matrice-vecteur en tant que fonction membre de cette classe. Cela va être suivi du développement d'un solveur itératif tel que Bicgstab.

Remarque 5.2.1. *Dans la suite du développement de notre code, nous avons pris la décision d'intégrer la bibliothèque PaStiX (Parallel Sparse matrix package), qui offre un solveur parallèle de haute performance conçu pour résoudre des systèmes linéaires creux de très grande taille en utilisant des méthodes directes [82, 83]. Pour pouvoir exploiter la bibliothèque PaStiX, il est impératif que la matrice soit stockée entièrement sous forme de matrice creuse, en utilisant la bibliothèque SPM (Sparse Matrix Package). Cette dernière offre une gamme complète d'opérations de base pour la manipulation de matrices creuses, notamment aux formats CSC (Compressed Sparse Column), CSR (Compressed Sparse Row) et IJV (format de "triplet", rencontré dans le code séquentiel). On note donc que dans le code, il existe deux façons d'assembler la matrice. La première est la méthode "Matrix-free", et la deuxième passe par un assemblage SPM. Nous discuterons davantage de cette dernière dans la section suivante afin de présenter le solveur PaStiX et expliquer comment il est lié à notre code.*

Remarque 5.2.2. *Il convient à noter aussi qu'au stade de développement actuel du code parallèle, le solveur PaStiX représente notre solveur principal. Par conséquent, nous considérons l'étape d'assemblage à l'aide de SPM comme notre étape d'assemblage principale. L'étape "Matrix-Free" demande un préconditionnement qui n'est pas encore développé dans le code pour rendre l'étape de résolution plus efficace. Cependant, nous choisissons tout de même de la présenter, même si la partie du solveur associée n'est pas encore complètement développée.*

Nous représentons sur la figure 5.8 ci-dessous les temps de calcul en millisecondes pour une opération de multiplication matrice-vecteur pour différentes tailles de grille sur le proc 0. Comme on peut le voir sur la figure 5.8, notre produit matrice-vecteur démontre un grand potentiel en termes de temps de calcul, où l'on observe un temps d'exécution de 2.248 secondes pour un système linéaire avec

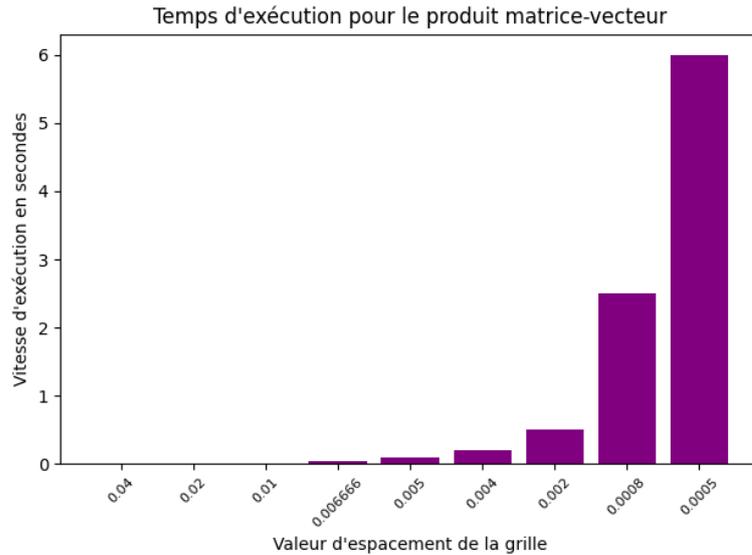


Fig. 5.8 : Temps de calcul pour un produit matrice-vecteur sur le processeur 0 en secondes, pour les grilles d'espacement de taille $h = 0.04, 0.02, 0.01$, le temps d'exécution est de l'ordre de fractions de secondes. sur le proc 0.

$N_x = N_y = 5000$ (donc $h = 0.0008$). Il est essentiel de noter que dans ce type d'assemblage, les solveurs itératifs sont généralement privilégiés, car ils ne nécessitent que le produit matrice-vecteur. Actuellement, dans notre code, on a l'option d'un solveur BiCGSTAB; cependant, il présente des performances limitées en l'absence de préconditionnement. Par conséquent, une étape de préconditionnement doit être implémentée pour améliorer son efficacité. À ce stade de développement, pour pouvoir résoudre notre système linéaire, nous avons décidé de nous diriger vers un solveur qui est déjà développé, optimisé et conçu pour la résolution parallèle de systèmes linéaires creux non symétriques. Dans la partie suivante, on présente la liaison d'un solveur parallèle conçu pour les grands systèmes linéaires creux : PaStiX. On note que pour pouvoir lier PaStiX de manière efficace à notre code, on doit bien adapter l'assemblage de la matrice à un format qui est accepté par le solveur PaStiX. On discute de l'interface développée pour pouvoir régler tout cela dans la section suivante.

5.3 Liaison avec le solveur parallèle : PaStiX

PaStiX a été conçu spécifiquement pour résoudre des systèmes linéaires de grande taille. Cette bibliothèque est optimisée pour les matrices creuses, qui sont couramment utilisées pour modéliser des problèmes de grande dimension. PaStiX utilise à la fois des algorithmes de factorisation directe et itérative pour résoudre ces systèmes linéaires qui peuvent être adaptées à différents types de problèmes et de matrices. PaStiX tire parti du parallélisme pour accélérer les calculs et prendre

en charge les calculs sur des architectures multi-cœurs et distribuées. Les algorithmes sont implémentés en simple ou double précision (réelle ou complexe) en utilisant LLt, LDLt et LU avec un pivot statique (pour les matrices non symétriques ayant une structure de symétrie). Ce solveur propose également certaines méthodes de compression à faible rang pour réduire l'empreinte mémoire et/ou le temps de résolution. Pour plus d'informations sur PaStiX, on réfère à [83] et au lien suivant : <https://solverstack.gitlabpages.inria.fr/pastix/>.

Dans cette section, nous expliquerons la manière dont la bibliothèque PaStiX a été intégrée à notre code à l'aide d'une interface de programmation (API "Application Programming Interface"). Par la suite, nous aborderons la vitesse de résolution et entreprendrons une étude de convergence similaire à celle réalisée dans le chapitre 3. Cette API a été développée dans le cadre du projet de fin d'étude pour la deuxième année d'école d'ingénieur en informatique à l'Enseirb-Matmeca Bordeaux INP avec un groupe de 8 étudiants.

5.3.1 Interfaçage avec PaStiX

Une API (Application Programming Interface) est un ensemble de règles, de protocoles et de définitions qui permettent à différents logiciels de communiquer entre eux. Elle définit les méthodes et les données qu'un programme peut utiliser pour demander des services à un autre logiciel ou système d'exploitation. En d'autres termes, une API agit comme une interface entre différentes applications informatiques, leur permettant de partager des données et de fonctionner ensemble de manière cohérente.

Dans notre cas, nous souhaitons avoir accès au solveur PaStiX et à ses fonctionnalités de manière simple et conviviale dans notre code. Pour atteindre cet objectif, une API (interface de programmation applicative) a été créée entre notre code et la bibliothèque PaStiX. L'API va nous permettre de simplifier l'utilisation d'un solveur complexe comme PaStiX, qui nécessite une initialisation particulière, en réduisant le nombre d'appels à des fonctions simples, qui initialise PaStiX de façons implicite. Plus précisément, le nombre d'arguments des fonctions de l'interface a été limité aux paramètres liés à notre modèle, tels que la conductivité σ , les paramètres géométriques comme α , le nombre d'électrodes, et la taille de la grille. L'interface a également été rendue intuitive grâce à une nomenclature explicite et cohérente dans l'ensemble du code.

Pour utiliser l'interface, il suffit de choisir le type de solveur, puis les paramètres spécifiques de sa simulation. Il est aussi important de noter qu'il est facile d'ajouter d'autres solveurs que PaStiX de manière aisée, car l'API a été conçue de manière modulaire. En effet, le but de cette interface n'est pas seulement de lier PaStiX, mais aussi d'unifier le fonctionnement de plusieurs solveurs aux fonctionnements très différents. On note donc que l'implémentation de l'interface se fait par l'utilisation d'une classe virtuelle pure en C++. Cela signifie que les classes concrètes implémentant cette interface doivent obligatoirement avoir des implémentations des fonctions dont le prototype se trouve dans l'interface, mais ne partagent aucun code commun. Cela vient du fait que les solveurs possèdent tous des comportements très différents et que les résultats ne sont pas forcément donnés sous la même forme. Il

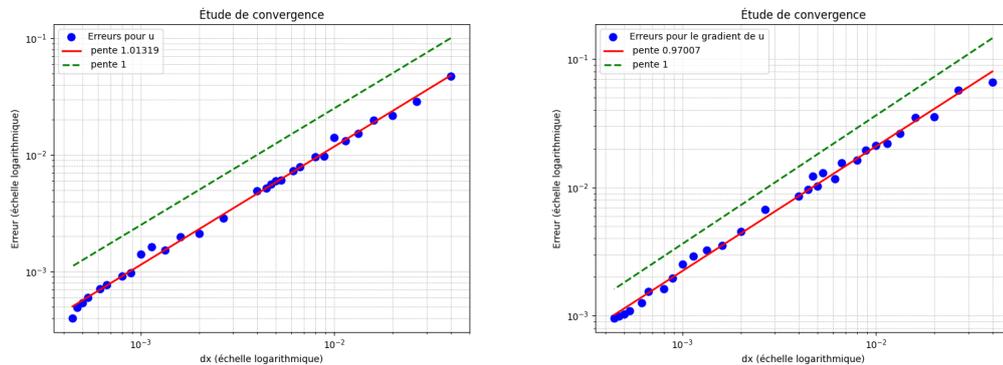
est donc impossible d'utiliser une fonction ayant un code commun pour la résolution ou même l'export des données. Cependant, des fonctions ont été créées pour factoriser le code au maximum et permettre l'ajout d'un nouveau solveur aussi simplement que possible. Par exemple, la fonction permettant de construire la matrice du système à partir des paramètres de la simulation pourra être utilisée dans la plupart des implémentations. Avec le solveur PaStiX intégré via l'API, nous présentons d'abord une étude de convergence du problème direct, similaire à celle dans le chapitre 3 à l'aide de notre code parallèle qui va nous permettre d'augmenter les tailles de grille pour l'étude de convergence.

Étude de convergence

Pour l'étude de convergence pour la solution de et son gradient (figure 5.9), nous calculons une approximation du gradient qu'on note par $du_h = (du_x, du_y)$ à l'aide d'une formule de différenciation centrée classique (qui utilise donc le voisin de gauche et de droite du point concerné) :

$$du_h(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j)_E - u(x_i, y_j)_W}{h}.$$

Pour notre étude on considère la solution manufacturée suivante $u(x, y) = \sin(x, y)$ et $U = 0_{\mathbb{R}^4}$. Pour le domaine Ω on considère le cercle de rayon 1.5 dans le carré $\Omega_e = [-2, 2] \times [-2, 2]$ l'espacement de la grille $h = L/n$ avec $L = 4$ varie entre $4/100$ et $4/9000$.



(a) Convergence pour la solution u

(b) Convergence pour la dérivée de la solution du_h

Fig. 5.9 : Étude de convergence pour la résolution de (5.1), on considère la solution manufacturée : $u(x, y) = \sin(x \times y)$ et $U = 0_{\mathbb{R}^4}$ dans un disque de rayon 1.5 incluse dans $[-2, 2] \times [-2, 2]$

Grâce à notre code parallèle, nous pouvons réaliser des études de convergence avec des tailles de grille beaucoup plus précises que celles effectuées précédemment dans le code séquentiel, où la taille maximale était de 1000×1000 . Dans la figure 5.10 suivante on observe le temps de résolution en millisecondes pour différentes dimensions de grille. On constate une amélioration de la capacité de résolution et de la vitesse par rapport au code séquentiel, où l'étape de résolution atteint les 15s pour une taille de grille 1000×1000 . Cependant, on note que la vitesse totale de l'exécution de notre code

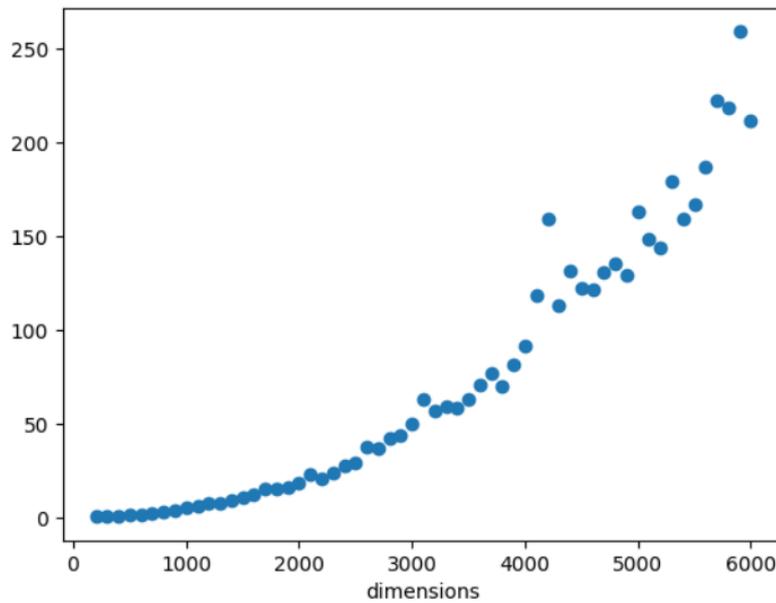


Fig. 5.10 : Temps de résolution (en ms) de notre système linéaire à l'aide du solveur parallèle PaStiX [139]

reste élevée, en effet pour une grille cartésienne de taille 4000×4000 lancée sur 6 processeurs : la partie d'assemblage à l'aide de la librairie SPM et la classe "Grid" atteint les alentours des 300ms, la partie résolution atteint les alentours des 150ms alors que l'exécution de tout le code est de 6.1s. Même si cela apporte une amélioration par rapport au code séquentiel, nous cherchons toujours à améliorer le temps de calcul total pour une résolution de problème direct, vu que notre but final est d'examiner le problème inverse en 3D. Pour ce faire, nous devons réexaminer toutes les étapes du code, notamment, l'interface avec PaStiX, afin d'explorer des possibilités d'optimisation. On note aussi que les communications MPI à travers le code peuvent être coûteux, car celles-ci peuvent entraîner des pertes de temps en communication. En conclusion, notre code dispose d'une capacité mémoire plus importante, mais il nécessite une optimisation et une analyse approfondie pour réduire les temps d'exécutions.

On note aussi que, l'implémentation d'autres solveurs doivent être effectuées pour la partie résolution. Nous notons aussi que d'autres tâches ne sont pas encore accomplies pour le code parallèle, en particulier la partie problème inverse qui n'est pas encore développée. Nous discuterons des prochaines étapes de développement dans la sous-partie suivante.

Perspectives de développement

Bien que nous ayons un code efficace qui fonctionne, nous disposons de perspectives de développement pour améliorer et maintenir le code. Tout d'abord, une optimisation du code doit être mise en

œuvre. Pour la partie résolution, nous aimerions intégrer la partie de préconditionnement pour les solveurs itératifs avec un remplissage "Matrix-Free".

Comme notre code parallèle ne traite que la partie directe du problème, l'étape suivante naturelle est de coder le problème inverse, ce qui nous permettra d'effectuer des tests avec des grilles beaucoup plus fines pour améliorer la qualité des reconstructions, notamment pour les tests que nous présenterons dans le chapitre suivant. On rappelle que le problème inverse nécessite des résolutions consécutives de notre système linéaire, ce qui soulève la question du choix optimal des solveurs. L'idée présentée dans la remarque suivante pourra aider à réduire ce nombre de résolutions.

Remarque 5.3.1. *En effet, on rappelle que notre matrice n'est pas parfaitement symétrique, mais plutôt presque symétrique. Nous anticipons donc que les solveurs directs seront efficaces en termes de rapidité de résolution. Cependant, pour le problème inverse, résoudre plusieurs systèmes linéaires consécutifs avec des matrices légèrement différentes les unes des autres peut rendre cette résolution directe coûteuse. En particulier, dans le contexte du problème inverse de la conductivité σ , que nous avons déjà traité dans le chapitre 4, section 4.1, si l'on note $A_\sigma = A(\sigma)$ et $A_{\delta\sigma} = A(\sigma + \delta\sigma)$ les matrices du système linéaire associées à une résolution du problème direct avec une conductivité égale à σ et $\sigma + \delta\sigma$ respectivement, et en supposant que $\sigma + \delta\sigma$ est une modification légère de σ , on peut approcher $A_{\delta\sigma}^{-1}$ de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} A_{\delta\sigma}^{-1} &= (A_\sigma + H)^{-1} \\ &= (A_\sigma (I + A_\sigma^{-1} H))^{-1} \\ &= (I + A_\sigma^{-1} H)^{-1} A_\sigma^{-1} \\ &= A_\sigma^{-1} + A_\sigma^{-1} H A_\sigma^{-1} + o(\|A_\sigma^{-1} H\|) A_\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

On pourra donc obtenir une valeur approchée de $A_{\delta\sigma}^{-1}$ à partir de A_σ^{-1} . Cela signifie qu'on pourra réduire le nombre de résolutions de chaque itération du problème inverse à une seule résolution associée à la matrice A_σ (vu que l'inverse de toutes les modifications légères de la matrice A_σ initiale peut être approché par l'inverse de A_σ).

Une autre tâche essentielle consistera à développer le code en 3D et non seulement en 2D. Depuis le début de la conception du code, cette transition a été prévue. En effet, une grande partie du code a été conçue de manière à pouvoir passer facilement en 3D, notamment la partie qui gère la grille cartésienne et qui stocke les informations de discrétisation. Plus précisément, à travers le code, nous disposons d'un paramètre : "EIT_DIM" qui stocke la dimension du problème. Le code ajuste son comportement en fonction de ce paramètre pour s'adapter à la dimension. Cependant, cette fonctionnalité doit être généralisée à l'ensemble du code.

Dernièrement, l'un des objectifs est de rendre notre code accessible à travers une interface graphique qui facilitera l'utilisation de notre code. Ce projet est actuellement en cours de développement, et nous le présenterons plus en détail dans la section suivante.

5.4 visualisation

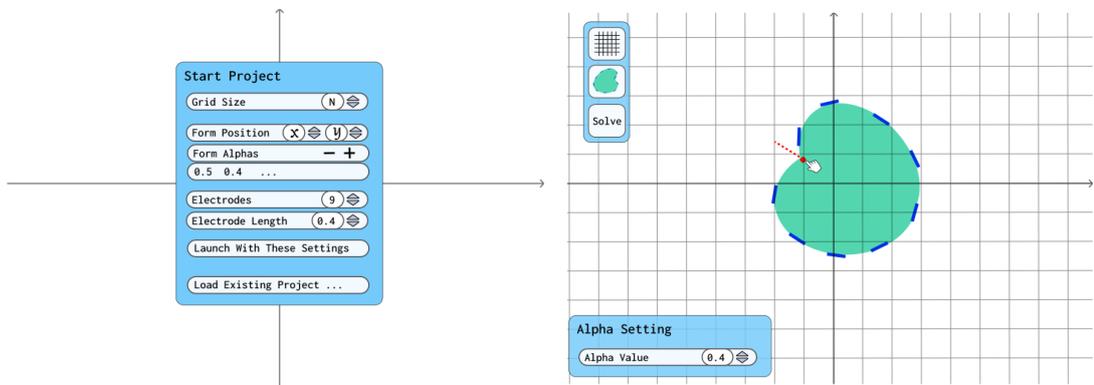
Pour rendre notre code plus accessible, nous nous sommes intéressés au développement d'une interface graphique qui permettrait de manipuler les paramètres de notre problème directement, de lancer un code et d'exporter la solution sans avoir à manipuler le code lui-même. De même que dans les sections précédentes, nous continuons à travailler sur une grille cartésienne en 2D. On note que cette partie est toujours en cours de développement et n'est pas encore complètement fonctionnelle.

L'objectif était de proposer une interface graphique permettant la visualisation de la géométrie sur la grille, mais également capable d'afficher et de visualiser les solutions calculées par le solveur. Nous avons le cahier des charges suivant :

- Affichage de la grille cartésienne.
- Affichage de la géométrie : Visualiser la géométrie donnée apposée sur la grille cartésienne.
- Modification de la forme de la géométrie : Un cliqué sur le bord de la forme doit afficher un menu de paramétrage des coefficients géométriques qui permettra la modification du paramètre α ou de la position et la longueur des électrodes.
- Affichage des solutions du problème direct sur la grille;
- Export de la solution sous forme de fichier .vtk;

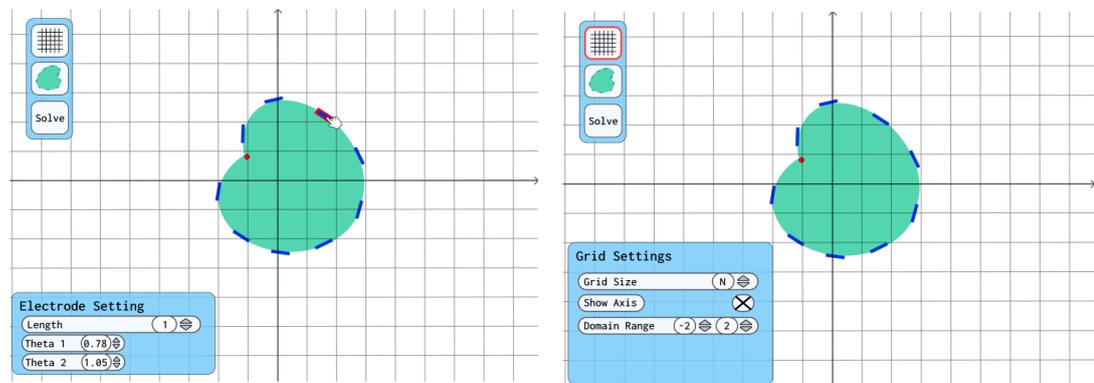
Le développement de cette interface a été fait en Javascript et JSON pour la connexion front-end - back-end, dans le contexte d'un projet de fin d'étude de deuxième année d'école d'ingénieur en informatique à l'Enseirb-Matmeca Bordeaux INP.

Dans la figure 5.11 suivante, nous présentons le prototype de notre interface graphique. Actuellement, dans l'interface, nous pouvons fixer les paramètres de géométrie, que ce soit le paramètre de bord α ou la position et la longueur des électrodes. De plus, nous pouvons définir la taille de la grille. Cependant, le développement de la résolution et l'export de la solution à travers cette interface n'ont pas encore été mis en œuvre. En conclusion, l'interface en est encore à ses premiers stades de développement.



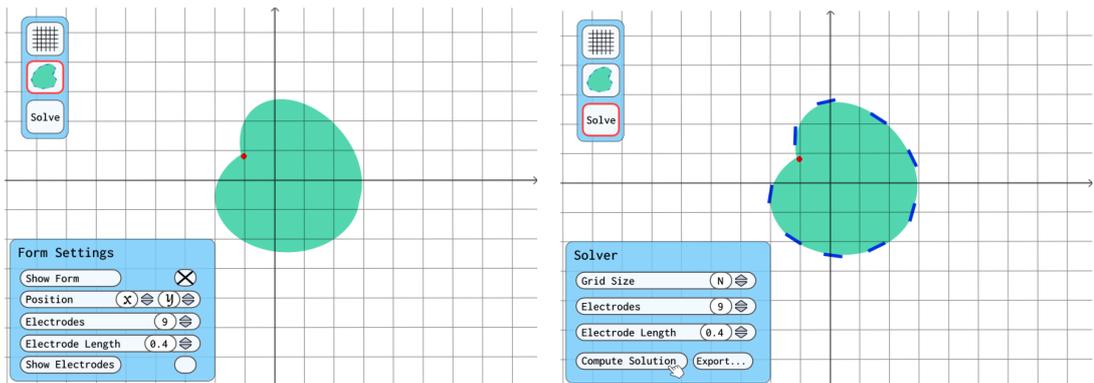
(a) Page de démarrage

(b) Modification de la forme par cliquer/glisser



(c) Modification des angles des électrodes

(d) Menu d'édition de la grille cartésienne



(e) Menu d'édition de la forme

(f) Menu du solveur

Fig. 5.11 : Spécifications fonctionnelles de prototype interface graphique

EIT et applications

Dans ce chapitre, nous explorons l'aspect applicatif de l'EIT et nous testons la capacité de reconstruction du problème inverse résolu avec notre méthode de frontière immergée face à des modèles géométriques réalistes ou à des mesures réelles. Puisque nous travaillons dans un contexte électrocardiographique, nous testons notre méthode face à un modèle simplifié du torse humain en 2D. Dans un deuxième temps, nous souhaitons également tester notre méthode avec des données réelles de mesures d'EIT en 2D. Pour cela, nous utilisons un ensemble de données en libre accès généré à partir d'un corps circulaire (un réservoir plat rempli de solution saline) avec diverses inclusions de matériaux conducteurs et résistifs (métal, plastique) [80]. Pour avoir accès à ces données, nous renvoyons vers le lien suivant https://www.fips.fi/EIT_dataset.php.

Nous présentons d'abord un petit aperçu des applications de l'EIT en imagerie médicale, puis dans la section nous résolvons un problème de reconstruction de conductivités dans un modèle simplifié de torse avec des données manufacturées. Enfin, dans la section 6.3 nous testons notre algorithme sur des données réelles et nous discutons des résultats.

6.1 L'EIT en imagerie médicale

L'EIT est une technique utilisée dans plusieurs domaines, comme l'ingénierie des matériaux, la nanotechnologie, le génie civil et dans de nombreux autres domaines de l'ingénierie. Ici, on s'intéresse aux applications de l'EIT en imagerie médicale.

L'imagerie médicale est un élément crucial de la recherche clinique ainsi que de l'identification et du traitement de nombreuses maladies et blessures. Actuellement, les formes d'imagerie les plus couramment utilisées sont l'échographie, l'imagerie par résonance magnétique (IRM) et la radiographie (y compris la tomodensitométrie, ou TDM). Dans toutes ces modalités, de l'énergie est déposée dans un volume de tissu, et l'énergie atténuée est capturée, enregistrée, et transformée en une forme utilisable [177]. Pour certaines méthodes d'imagerie, une certaine dose de radiation est administrée au patient, ce qui doit être surveillé et minimisé pour éviter une surexposition susceptible de provoquer des maladies [86]. Contrairement aux méthodes d'imagerie à risque, l'EIT vise à offrir une nouvelle modalité sans risque et abordable permettant d'imager des parties du corps et des tissus présentant des différences de conductivité. On peut citer quelques applications :

- Imagerie pulmonaire :

Plusieurs études sur l'imagerie pulmonaire par l'EIT ont été menées et rapportées. Meier *et al.* [129] ont étudié la pertinence de l'EIT sur des sujets animaux pour visualiser une lésion pulmonaire aiguë. Ils ont réalisé des études expérimentales d'EIT sur six porcs présentant une lésion pulmonaire aiguë induite par un lavage au sérum physiologique et ont examiné si la procédure d'EIT pouvait être adaptée pour surveiller l'effondrement pulmonaire. Des essais de pression expiratoire positive (PEEP) à dix niveaux de pression ont été réalisés, et les paramètres ventilatoires, d'échanges gazeux et hémodynamiques ont été automatiquement enregistrés. Des images d'EIT et de tomodensitométrie (CT) de la même coupe ont été prises simultanément à chaque niveau de PEEP, et les résultats ont été comparés. Les auteurs ont conclu que l'EIT est adaptée pour surveiller les effets dynamiques des variations de PEEP sur les changements régionaux du volume courant. Des études plus récentes sur le réglage de la pression positive en fin d'expiration (PEEP) [16, 101, 208] montrent aussi que l'EIT apporte une bonne assistance pour régler la respiration pulmonaire durant les opérations.

- La surveillance thermique :

L'EIT a également été utilisée pour la surveillance thermique du traitement par hyperthermie. Conway *et al.* en 1985 [45] et Conway en 1987 [44] ont présenté une méthode d'imagerie par impédance pour afficher les gradients thermiques induits pendant le traitement par hyperthermie. Ils ont présenté les résultats obtenus avec la méthode EIT appliquée aux expérimentations *in vitro* et *in vivo*. Une série temporelle d'images de conductivité a montré la distribution des changements thermiques et suggéré une résolution de température meilleure que 1 degré celsius. Ils ont rapporté que la résolution spatiale était limitée à environ 10% du diamètre du réseau circulaire en raison des 104 mesures indépendantes obtenues à partir de 16 électrodes utilisées dans le système d'EIT. Des études plus récentes montrent l'utilité de l'EIT pour la surveillance thermique : dans [61] l'EIT est utilisé pour l'ablation par radio-fréquence, et dans [149] K. D. Paulsen *et al.* suggèrent que l'EIT est un outil potentiellement utile pour la surveillance et l'évaluation du traitement par hyperthermie.

- Maladies pulmonaires :

L'EIT a également été appliquée aux maladies pulmonaires pédiatriques. Pham *et al.*, en 1994 [152], ont utilisé la technique de l'EIT pour étudier la distribution régionale de la ventilation dans les maladies pulmonaires néonatales et pédiatriques. L'EIT a été appliquée à des nourrissons qui respiraient spontanément pendant leur période néonatale, à 3 et 6 mois d'âge, durant leur sommeil, à mouvements oculaires non rapides, et des données sur la distribution de la ventilation régionale et les caractéristiques de remplissage régional ont été obtenues. Il est rapporté que les amplitudes d'impédance régionales augmentaient avec l'âge, mais la distribution de la ventilation régionale restait inchangée chez tous les nourrissons, quel que soit leur âge, avec une meilleure ventilation du poumon dépendant (postérieur). Ils ont également rapporté que la distribution de la ventilation régionale et les caractéristiques de remplissage régional demeuraient inchangées au cours des six premiers mois de la vie, et que les résultats obtenus sur la distribution de la ventilation régionale avec l'EIT étaient très similaires à ceux observés chez les sujets adultes.

- L'imagerie mammaire :

L'imagerie mammaire a été étudiée avec l'EIT par plusieurs groupes de recherche. Zain et Chelliah, en 2014 [206], ont appliqué la technique de l'EIT à cent cinquante patientes ayant passé une mammographie et âgées de plus de 40 ans. L'interprétation visuelle des images a été réalisée en utilisant la classification de l'imagerie mammaire par impédance électrique (BI-EIM) pour la détection d'anomalies. Une évaluation quantitative a été effectuée en comparant la conductivité électrique moyenne du sein à la norme, et les corrélations avec l'interprétation visuelle des images, réalisée par un radiologue, ont été déterminées à l'aide du test du Chi-carré.

- Activité cérébrale :

Holder *et al.*, en 1996 [85], ont rapporté dans leurs études sur l'EIT pour l'imagerie cérébrale des changements d'impédance de plusieurs pourcents sur une période de quelques dizaines de secondes, connus pour se produire lors de l'activité du cortex cérébral. Holder *et al.* ont conclu que l'EIT pourrait éventuellement être adaptée pour l'imagerie des réponses évoquées ou de l'épilepsie chez les sujets humains.

Actuellement, des dispositifs EIT commerciaux, tels que le Goe-MF II [55] ou le PulmoVista 500 [180], sont disponibles, mais ils sont encore considérés relativement nouveaux par rapport à d'autres équipements d'imagerie médicale disponibles commercialement.

Nous nous concentrons ici sur l'EIT dans le contexte de l'électrocardiographie, plus précisément dans le cadre de l'imagerie électrocardiographique (ECGi). L'ECGi est une méthode d'imagerie non invasive qui cherche à reconstruire l'activité électrique du cœur en utilisant des mesures électriques prises sur le torse, en résolvant un problème inverse. Des études *in vivo* ont montré que l'ECGi peut reconstruire avec précision les schémas d'activation électrique réguliers, mais échoue dans les cas d'arythmie [54]. L'une des raisons contribuant à ces imprécisions est le manque de connaissance de la conductivité des organes à l'intérieur du torse [54]. L'objectif de long terme de notre étude est d'utiliser l'EIT pour obtenir de meilleures estimations de ces conductivités. C'est pourquoi il est impératif de tester notre méthode avec des modèles géométriques plus réalistes en s'inspirant du torse humain. Dans la section suivante, nous présentons notre tentative de reconstruction de conductivité dans un modèle géométrique simplifié du torse.

6.2 Modélisation 2D du torse humain

Le torse est une partie anatomique du corps humain. Elle comprend la partie antérieure située entre la base du ventre (partie supérieure de l'abdomen) et le cou, les épaules ainsi que le thorax en font donc partie. Les organes internes sous-jacents sont les poumons et la trachée, l'œsophage, l'estomac et le cœur. Le torse est composé de muscles (grand et petits pectoraux, faisceau antérieur du deltoïde, grand droit des abdominaux...).

Chez l'homme, la plupart des organes vitaux, à l'exception du cerveau, sont logés dans le torse. On s'intéresse spécifiquement à la partie supérieure de la poitrine. Cette partie contient le cœur et les

poumons qui sont protégés par la cage thoracique. Dans la figure 6.1 on peut observer une image de reconstruction du torse à l'aide de l'EIT. Dans cette section, nous présentons un modèle géométrique

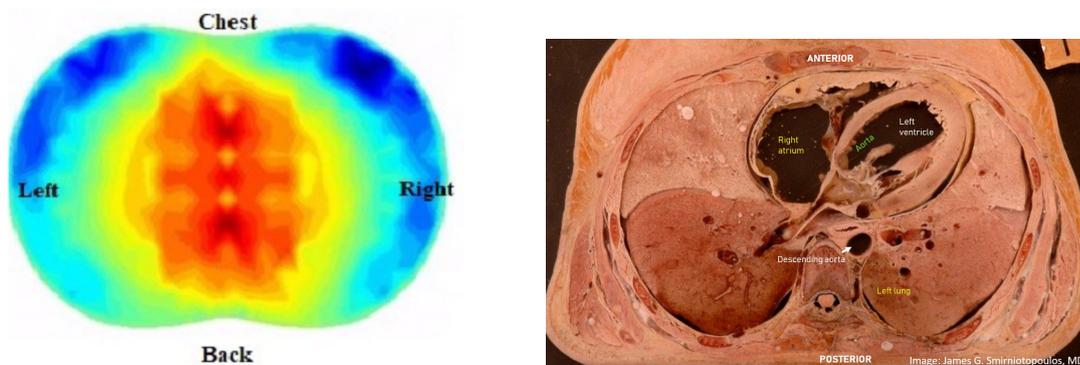


Fig. 6.1 : Reconstruction d'image thoracique par EIT [121] à droite , à gauche : une image réelle d'un torse humain.

simplifié du torse. Notre objectif est de reconstruire des inclusions représentant les organes vitaux en utilisant des mesures simulées. Il est important de noter que la création d'un modèle géométrique inspiré du torse humain constitue un véritable défi. En effet, le torse humain contient de multiples organes, tissus, muscles, os. On doit également prendre en considération le sang ainsi que les différentes phases de respiration : en phase d'inspiration, les poumons sont remplis d'air, ce qui affecte la valeur de la conductivité.

Pour créer notre modèle géométrique simplifié du torse, nous avons opté pour une géométrie similaire à une coupe transversale du torse, où nous avons placé des inclusions représentant les organes et les os présents. Plus précisément, nous avons considéré trois configurations d'inclusions dans un domaine Ω similaire à la géométrie du torse : tout d'abord, nous avons pris en compte uniquement les poumons à l'intérieur du torse, puis nous avons ajouté le cœur, et enfin, nous avons également pris en compte la présence de la colonne vertébrale. Ces reconstructions ont été effectuées initialement à une petite échelle, dans un petit carré $[-2, 2]$ en centimètre (voir Figure 6.2 pour les modèles géométriques). Ensuite, nous avons l'intention de refaire les mêmes reconstructions, mais à une échelle plus réaliste, dans un carré $[-30, 30]$ centimètre (voir Figure 6.3 pour les modèles géométriques).

Pour pouvoir créer nos mesures manufacturées, il nous faut choisir les conductivités des différents tissus considérés. On considère que l'unité des conductivités est en $mS.cm^{-1}$. Dans la littérature on peut voir que les valeurs des différents tissus est variable selon la valeur de la fréquence du courant injecté. On sait que les fréquences utilisées en EIT se situent généralement entre 1 kHz et 1 MHz [84]. Le tableau 6.1 montre les différentes conductivités des différents tissus[67]. Pour les trois géométries, nous considérons que la conductivité de l'arrière-plan est égale à celle du sang.

Pour les reconstructions, on considère 16 électrodes placées de manière équidistante sur la surface du torse, avec une impédance de contact de 0.5 pour toutes les électrodes. Les électrodes ont une longueur

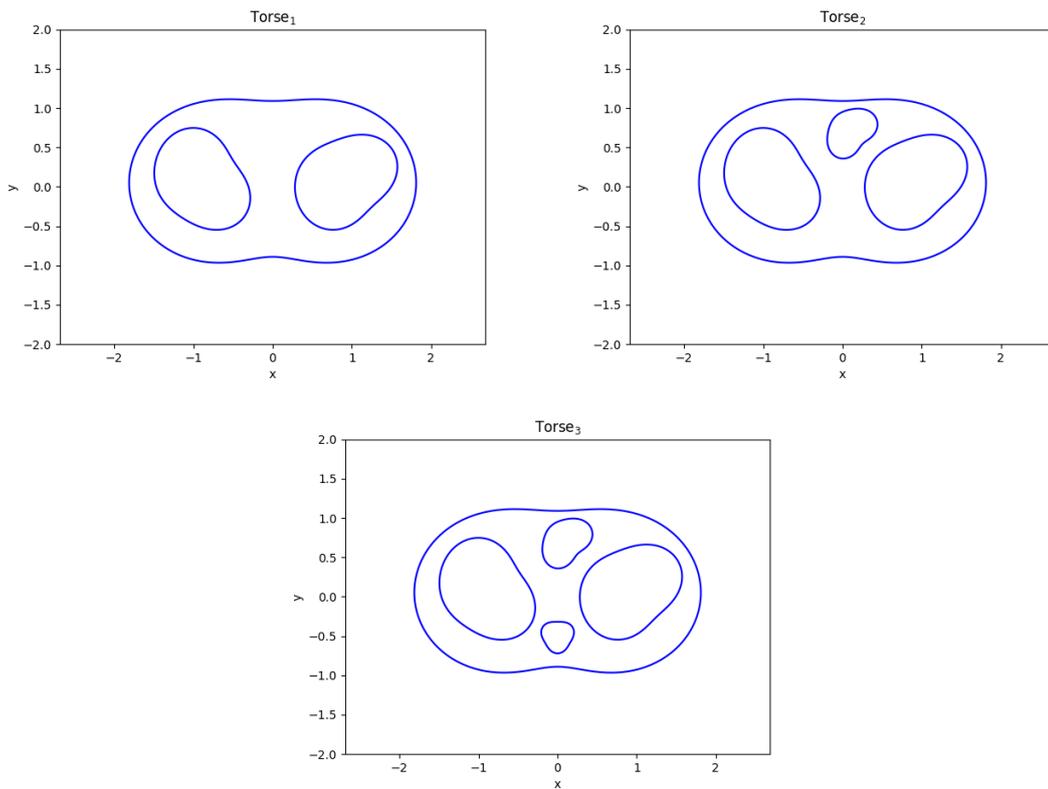


Fig. 6.2 : Trois modèles géométriques de reconstruction dans un carré de dimension $[-2, 2]$ cm.

Tissu	Conductivité (mS/cm)
Muscle	0.56 à 8
Sang	6.67
Poumon	0.42 à 1.38
Graisse	0.40
Os	0.06
Tissu cardiaque (myocarde)	2 à 4

Tab. 6.1 : Tableau des conductivités des tissus [66].

de 0.35 cm sur l'échelle $[-2, 2]$ et de 3.5cm sur l'échelle plus réaliste $[-30, 30]$. On peut observer dans les figures 6.4 et 6.5 les reconstructions pour les deux échelles, où les mesures ont été générées à l'aide d'une grille de taille 800×800 , tandis que la reconstruction a été effectuée à l'aide d'une grille de taille 400×400 dans le code séquentiel.

On constate que notre méthode rencontre des difficultés de reconstruction, notamment sur l'échelle plus réaliste $[-30, 30]$, où l'on perd en précision avec une grille de taille 400×400 pour la reconstruction. Ces résultats sont sans doute les limites de l'algorithme très simple et naïf que nous utilisons pour la reconstruction. Une reconstruction à l'aide d'un algorithme plus robuste, comme la variation totale

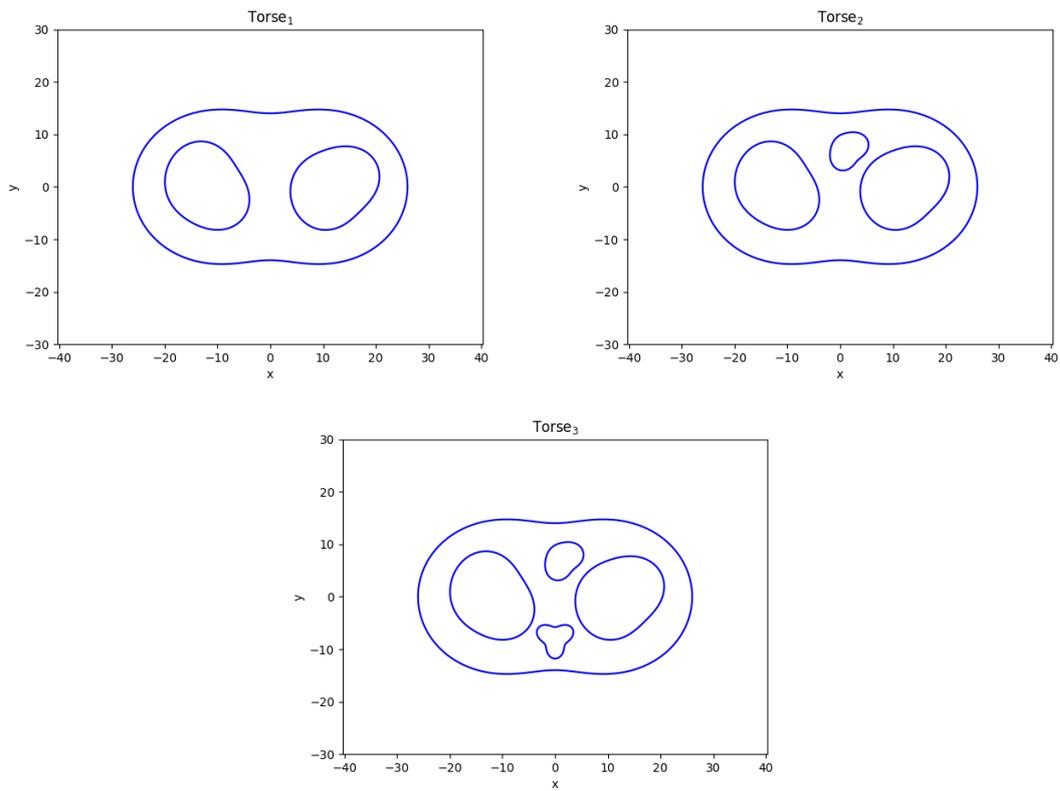


Fig. 6.3 : Trois modèles géométriques de reconstruction dans un carré de dimension $[-30, 30]$ cm.

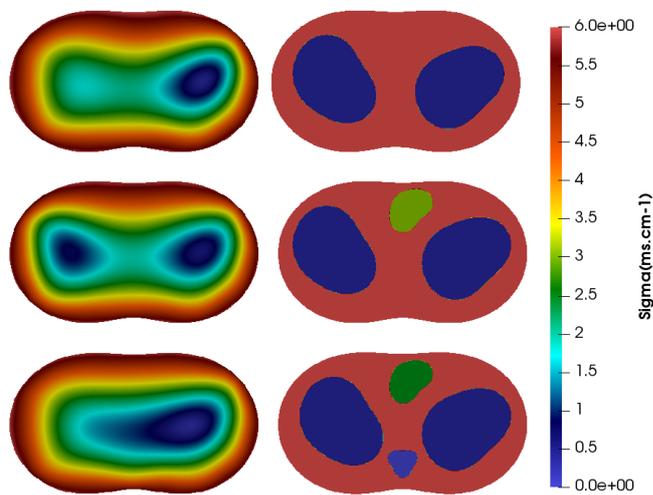


Fig. 6.4 : Reconstruction dans une géométrie simplifiée du torse, dans un carré $[-2, 2]$.

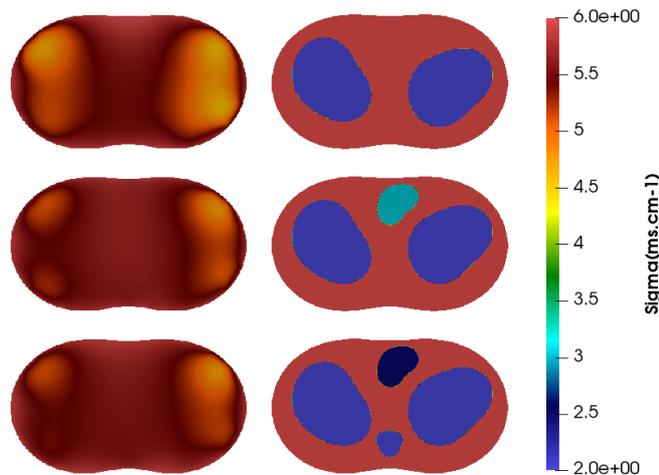


Fig. 6.5 : Reconstruction dans une géométrie simplifiée du torse, dans un carré $[-30, 30]$.

(TV), donnerait de meilleurs résultats. La TV est une approche de régularisation bien connue et largement utilisée, qui favorise les variations nettes dans les images reconstruites [163]. On note aussi qu'augmenter la précision pour la reconstruction pourra éventuellement aider dans la qualité de la reconstruction. Cela sera possible grâce au code parallèle présenté dans le chapitre 5 lorsque la partie problème inverse sera développée.

Dans la section suivante, nous visons à tester à nouveau notre méthode numérique en utilisant des données réelles pour la détection de matériaux dans un réservoir d'eau saline.

6.3 Données réelles pour l'EIT

Dans cette section, nous présentons notre travail avec les jeux de données expérimentaux disponibles en libre accès dans [80] pour tester notre méthode. En effet dans [80] Andreas Hauptmann *et al.* voulaient diffuser des données de mesures EIT issues de configurations expérimentales simples dans le but de les utiliser pour tester et développer des méthodes de reconstruction d'images. Les expériences ont été menées en utilisant un réservoir cylindrique plat rempli de solution saline. Des inclusions électroconductrices et résistives ont été insérées à l'intérieur du réservoir, ces inclusions s'étendent du fond du réservoir à la surface supérieure de la solution saline comme on peut le voir sur la Figure 6.8. On note aussi que les électrodes sur la surface interne du réservoir s'étendaient également du haut vers le bas. Les données de mesure sont adaptées à la tomographie d'impédance électrique bidimensionnelle (2D EIT). L'ensemble de données se compose de deux éléments principaux :

- Modèles de courant et mesures de tension.
- Photographies du réservoir et des cibles.

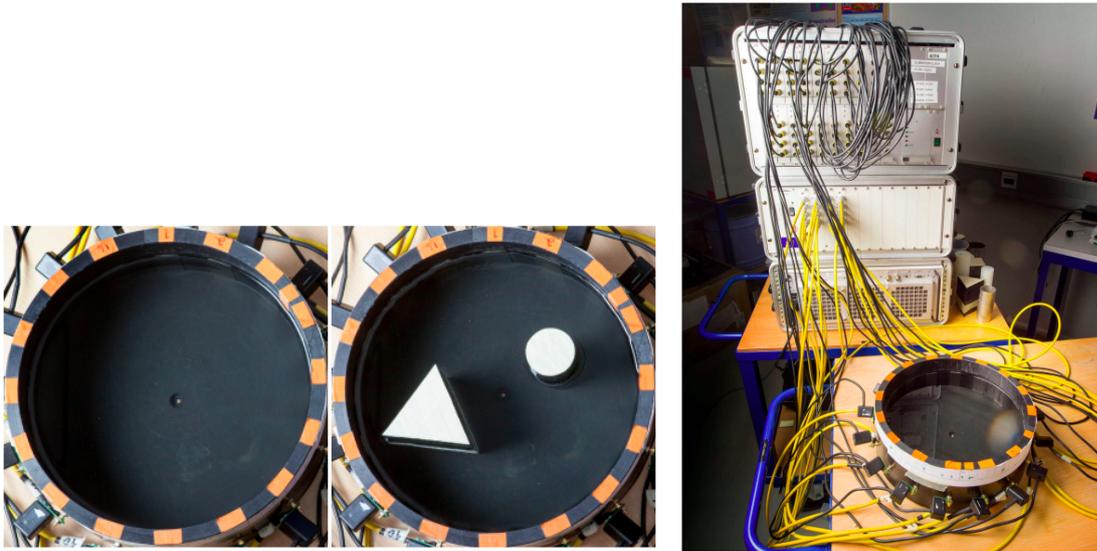


Fig. 6.6 : À gauche : une configuration expérimentale pour la collecte de données EIT en 2D avec une configuration homogène et une autre avec deux inclusions plastiques. À droite : le système de mesure KIT4 à l'Université de Eastern-Finland [80]. Images issues de [80]

Ces données ont été générées pour un ensemble de 37 cas d'inclusions croissantes en termes de complexité, commençant par des cas comportant une seule inclusion pour progresser vers des inclusions plus sophistiquées avec différentes valeurs de conductivité. Pour les mesures, un total de 79 injections de courant en paire ont été utilisées. Les courants injectés peuvent être classés en cinq types (voir figure 6.7) :

- Ensemble 1 : Injections adjacentes. Injections entre les électrodes $1 - 2, 2 - 3, \dots, 15 - 16, 16 - 1$.
- Ensemble 2 : Saut de 1. Injections entre les électrodes $1 - 3, 2 - 4, \dots, 14 - 16, 15 - 1, 16 - 2$.
- Ensemble 3 : Saut de 2. Injections entre les électrodes $1 - 4, 2 - 5, \dots, 13 - 16, 14 - 1, \dots, 16 - 3$.
- Ensemble 4 : Saut de 3. Injections entre les électrodes $1 - 5, 2 - 6, \dots, 12 - 16, 13 - 1, \dots, 16 - 4$.
- Ensemble 5 : Toutes contre 1. Injections entre les électrodes $i - 1$, où $i = 2, \dots, 16$.

Ici, la première électrode j dans la paire d'électrodes $j - k$ fait référence à l'électrode portant un courant positif, et la deuxième électrode k porte le courant négatif. Les injections de courant sont illustrées sur la figure 6.7.

Dans notre contexte, nous entreprenons la reconstruction simultanée de la conductivité et de l'impédance de contact en utilisant notre méthode à frontière immergée conjointement avec l'algorithme de descente de gradient. Notre démarche commence naturellement par aborder les cas les plus simples dans [80] : une configuration avec une inclusion proche du bord.

Voici les informations sur le dispositif expérimental utilisant le réservoir de forme cylindrique circulaire :

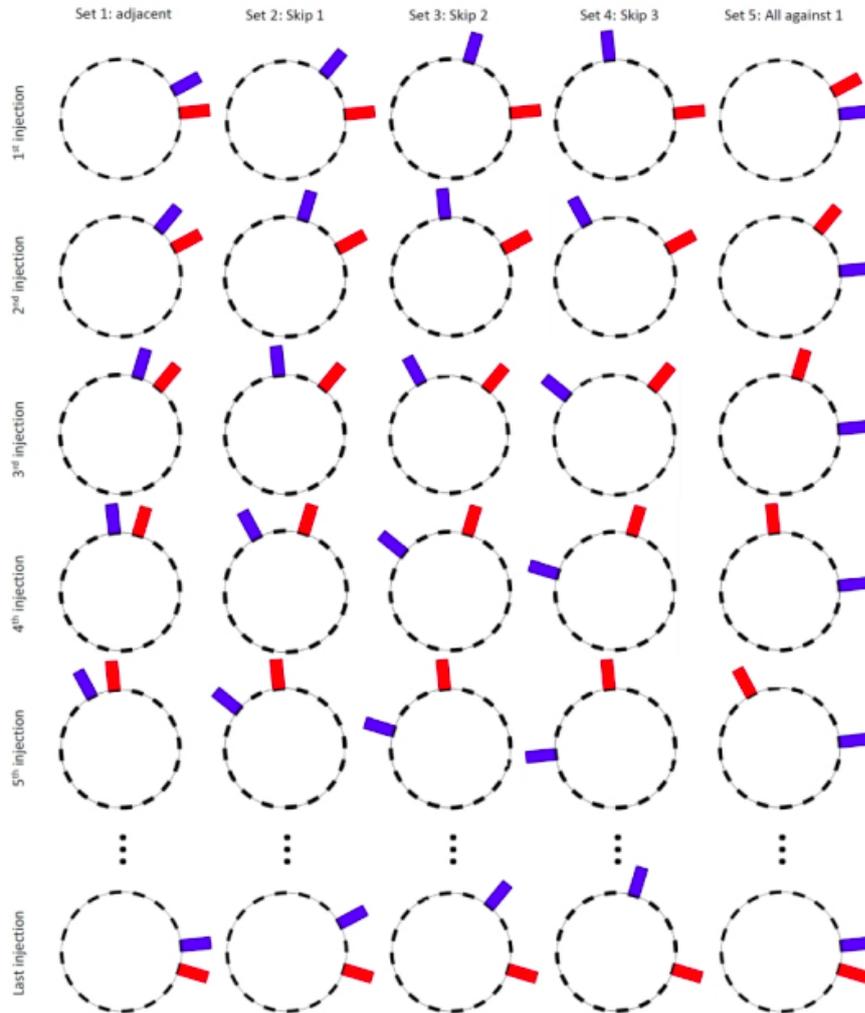


Fig. 6.7 : Schémas d'injection de courant utilisés dans les expériences. Les barres rouges et bleues sur les électrodes indiquent respectivement les courants positifs et négatifs circulant à travers les électrodes [80]

- Le diamètre du réservoir était de 28 cm.
- Les électrodes composées d'acier inoxydable étaient de hauteur 7 cm, largeur 2,5. Elle ont été fixées de manière équidistante sur la surface interne du réservoir.
- Le réservoir a été rempli de solution saline jusqu'à une hauteur de 7 cm, c'est-à-dire jusqu'au niveau supérieur des électrodes
- La valeur mesurée de la conductivité de l'eau était de 0.3ms.cm-1 et la température était de 19°C.
- Les amplitudes des courants étaient de 2mA et leurs fréquences étaient de 1 kHz.

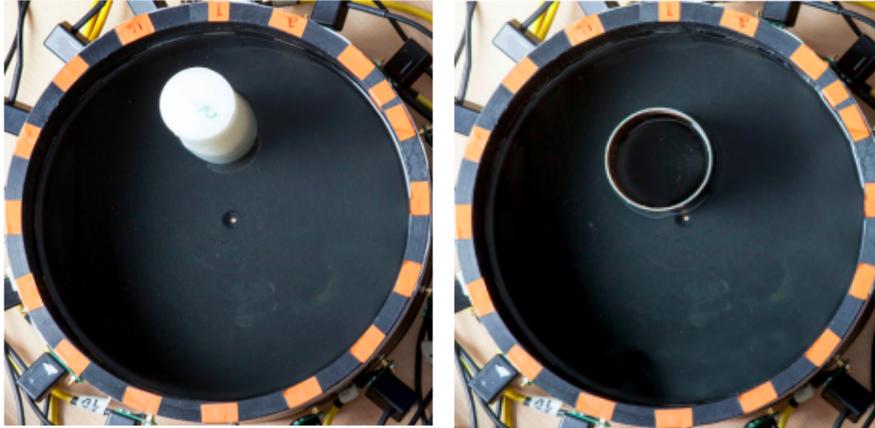


Fig. 6.8 : Les deux configurations d'inclusion considérées : à gauche, une inclusion circulaire en plastique, et à droite, une inclusion en métal.

Dans notre code nous avons considéré un disque de rayon 14cm dans un carré $[-20,20]$ où nous avons placé 16 électrodes de manière équidistante sur le bord du domaine de longueur 2.5cm avec une grille de taille 500×500 . Nous avons obtenu les reconstructions présentées sur la figure 6.9 :

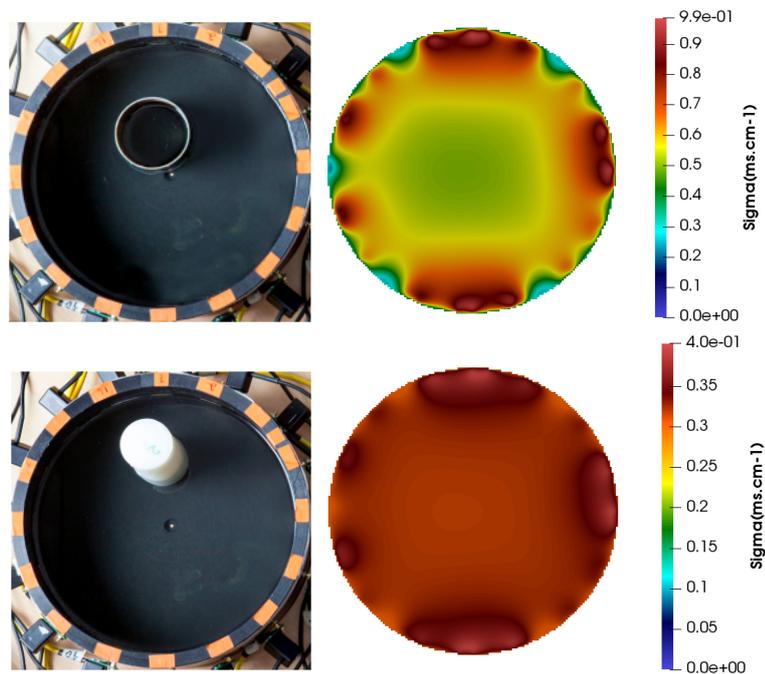


Fig. 6.9 : Reconstruction des cas présentés sur la figure 6.8 à l'aide de l'ensemble de données 1 avec 16 électrodes.

On note que les impédances de contact entre les électrodes et la solution saline étaient inconnues, elles ont été reconstruites simultanément avec la conductivité dans les tests que nous avons menés [197]. Comme on peut le voir sur la figure 6.9, notre méthode n'arrive pas à reconstruire les inclusions dans le volume du réservoir. Cela peut être dû au fait que nous utilisons un algorithme très simple pour la reconstruction. En effet, dans [80], deux exemples de reconstructions ont été réalisés où une reconstruction simultanée de la conductivité et de l'impédance de contact a été réalisée : l'un en utilisant une régularisation favorisant une "smoothness prior" [118], et l'autre en utilisant une régularisation TV isotropique [72]. Ces deux méthodes ont abouti à de bonnes reconstructions. On soupçonne que l'utilisation d'un algorithme de reconstruction plus robuste pour le problème inverse conduira à de meilleurs résultats. Nous notons également que l'augmentation de la précision avec laquelle nous résolvons le problème direct peut également avoir un impact sur la qualité des reconstructions. Après l'implémentation du problème inverse dans le code parallèle, nous pourrions tester les reconstructions avec des tailles de grille beaucoup plus importantes.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié le problème inverse de la tomographie par impédance électrique (EIT) dans le contexte électrocardiographique. L'EIT est une méthode d'imagerie non invasive qui permet de déduire la conductivité électrique et l'impédance d'une partie du corps à partir de mesures effectuées à l'aide d'électrodes de surface. Ces mesures sont ensuite utilisées pour créer une image topographique de la zone en question. Sur le plan expérimental, un ensemble d'électrodes (généralement entre 16 et 32 électrodes) est fixé à la surface du corps. Un courant électrique est appliqué séquentiellement à travers des paires d'électrodes sélectionnées, et les tensions résultantes sont mesurées sur les autres paires d'électrodes.

Nous cherchons à reconstruire la conductivité dans le volume du domaine d'intérêt. Mathématiquement, ce problème correspond au problème de Calderón, qui est un problème inverse très mal posé. Pour modéliser le problème direct, plusieurs modèles sont disponibles. Nous avons présenté les différents modèles dans l'ordre de complexité, en commençant par le modèle le plus simple, le modèle "continuum", puis en présentant des modèles plus réalistes qui prennent en compte la modélisation de l'injection de courant à travers des électrodes. Nous avons également exposé et expliqué les différentes possibilités pour modéliser l'injection de courant à travers la frontière du domaine. Nous nous sommes intéressés spécifiquement au modèle d'électrode complet (CEM), et en nous appuyant sur le CEM, nous avons proposé un CEM généralisé qui prend en considération des termes sources non nuls pour obtenir une solution régulière, utile pour les études numériques. Nous avons présenté une étude mathématique du modèle généralisé complet et montré que le problème est bien formulé.

Pour résoudre le problème direct, nous avons défini notre méthode numérique de frontière immergée sur une grille cartésienne. Notre frontière a été représentée de manière implicite et immergée dans la grille cartésienne à l'aide d'une fonction level-set. Nous avons montré que cette méthode converge à l'ordre 1 pour la solution, en utilisant le principe du maximum discret. Ensuite, nous avons mené une étude numérique de convergence pour valider nos résultats théoriques. Nous avons également effectué une étude de convergence numérique pour le gradient de la solution, qui s'est révélée converger également à l'ordre 1.

Pour le problème inverse, nous avons d'abord considéré le problème de la conductivité inverse, visant à reconstruire la conductivité à l'intérieur d'un domaine. Nous avons présenté notre algorithme de descente pour calculer la direction de descente, en choisissant une méthode très simple basée sur la différentiabilité de Fréchet de la solution du problème direct par rapport à la conductivité. Ensuite, nous avons présenté des exemples de reconstruction avec des données synthétiques que nous avons

créées nous-mêmes. Nous reconnaissons que dans un problème d'EIT, d'autres paramètres peuvent être inconnus, tels que l'impédance de contact, nous avons abordé le problème inverse de la reconstruction de l'impédance de contact avec un algorithme similaire à celui utilisé pour la conductivité. Ensuite, nous avons présenté une reconstruction simultanée de la conductivité et de l'impédance de contact. S'inspirant des études menées dans [48, 49], nous avons également considéré une étude de la reconstruction des paramètres de géométrie, qui peuvent aussi être considérés comme inconnus dans le problème de l'EIT, où le manque de connaissance de ces paramètres affecte la qualité de la reconstruction. Nous avons donc été confrontés à un problème de géométrie mobile. Une direction de descente a été calculée en se basant sur la notion de dérivée de forme obtenue à partir d'une formule d'échantillonnage. Le fait que notre méthode numérique utilise des grilles cartésiennes non adaptées a facilité notre étude de reconstruction et a évité une étape de remaillage qui aurait été inévitable si nous avions utilisé une méthode numérique requérant un maillage adapté. Nous avons présenté des reconstructions numériques des positions des électrodes, puis nous avons présenté les résultats de reconstruction du paramètre qui détermine la forme de la frontière du domaine. Nous avons observé que notre méthode parvient à reconstruire avec une précision satisfaisante les paramètres géométriques, mais dans des cas complexes impliquant des déformations importantes, la précision de la reconstruction diminue.

Dans le contexte de cette thèse, nous avons développé des codes de calcul scientifique dédiés à la résolution du problème de l'EIT. Le premier code développé est un code séquentiel pour le problème direct et inverse de l'EIT, qui a servi pour nos reconstructions et nos tests numériques tout au long de la thèse. Cependant, pour étendre nos études en 3D, un code plus puissant était nécessaire. Nous avons donc choisi de développer un code parallèle 2D en C++ en utilisant MPI, couplé avec le solveur parallèle PaStiX. Nous avons observé des améliorations en termes de capacité de résolution concernant la taille de la grille. Nous avons donc mené une étude de convergence avec des matrices de plus grande taille. Cependant, une optimisation du code est toujours nécessaire pour améliorer la vitesse de notre code.

Comme cette thèse a été menée avec pour visée applicative finale l'électrocardiographie, nous nous sommes intéressés à la reconstruction des conductivités dans le volume du torse humain. Dans une première étape vers cet objectif, nous avons présenté un modèle simplifié du torse humain avec des inclusions représentant les poumons et le cœur, dans une géométrie similaire à celle du torse. Pour tester davantage notre méthode, nous avons évalué sa capacité de reconstruction avec des données réelles accessibles concernant le volume d'un réservoir d'eau. Notre méthode a rencontré des difficultés face à ces scénarios plus réalistes. En effet, l'utilisation d'un algorithme de reconstruction simple limite notre habileté de reconstruction.

Les perspectives de travail sont nombreuses, notamment pour la partie développement de code, où nous avons les objectifs suivants :

- Premièrement L'optimisation du code parallèle : spécifiquement l'interfaçage avec PasTiX et les communications dans le code.

- Le but final est de pouvoir utiliser les informations reconstruite par l'EIT dans les modèles d'ECGI. Pour cela on a besoin d'un code qui considère notre problème en 3D avec les méthodes de frontière immergée.
- Implémentation de la partie problème inverse dans le code parallèle. Pour réduire le temps de calcul de notre problème inverse, une idée consiste à approcher l'inverse de la matrice du problème direct, ce qui permettrait de réduire le nombre de résolutions à une résolution par itération du problème inverse.

Pour le problème inverse, un algorithme de reconstruction plus robuste doit être développé. Nous nous intéressons précisément à l'algorithme bayésien, où le problème inverse est reformulé sous la forme d'une inférence statistique. Cela va permettre d'obtenir des reconstructions plus précises, notamment dans des cas réalistes. Nous pourrons ensuite les tester avec les données réelles en libre accès disponibles en 2D.

Bibliographie

- [1] Z. ALAN WEI, Z. CHARLIE ZHENG et X. YANG. "Computation of flow through a three-dimensional periodic array of porous structures by a parallel immersed-boundary method". In : *Journal of Fluids Engineering* 136.4 (2014), p. 040905.
- [2] A. ANDREYKIV et D. J. RIXEN. "Numerical modelling of electromechanical coupling using fictitious domain and level set methods". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 198.17 (2009). DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2636>.
- [3] G. ANGER. "Einige Betrachtungen über inverse Probleme, Identifikationsprobleme und inkorrekt gestellte Probleme". In : *Jahrbuch Überblicke Mathematik*. Berlin : Springer, 1982, p. 55-71.
- [4] A. V. ARHANGEL'SKII et al. *General Topology III*. Springer, 1995.
- [5] K. ASTALA et L. PÄÄIVÄRINTA. "Calderón's inverse conductivity problem in the plane". In : *Ann. Math.* 163 (2006), p. 265-299.
- [6] P. J. ATZBERGER, P. R. KRAMER et C. S. PESKIN. "A stochastic immersed boundary method for fluid-structure dynamics at microscopic length scales". In : *Journal of Computational Physics* 224.2 (2007), p. 1255-1292. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.11.015>.
- [7] I. BABUSKA. "The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients". In : *Computing* 5 (1970), p. 207-213.
- [8] H. BANKS et K. KUNISCH. *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*. Boston : Birkhäuser, 1989.
- [9] D. C. BARBER et B. H. BROWN. "Errors in reconstruction of resistivity images using a linear reconstruction technique". In : *Clinical Physics and Physiological Measurement* 9.4A (1988), p. 101. DOI : 10.1088/0143-0815/9/4A/017.
- [10] R. BARRETT, M. W. BERRY, T. F. CHAN et et AL. *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, 1994.
- [11] J. BAUMEISTER. *Stable Solutions of Inverse Problems*. Braunschweig : Vieweg, 1987.
- [12] P. A. BERTHELSEN. "A decomposed immersed interface method for variable coefficient elliptic equations with non-smooth and discontinuous solutions". In : *Journal of Computational Physics* 197.1 (2004), p. 364-386. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.12.003>.
- [13] D. P. BERTSEKAS et J. N. TSITSIKLIS. *Parallel and Distributed Computation : Numerical Methods*. Athena Scientific, 1997.

- [14] W.-J. BEYN. "The exact order of convergence for finite difference approximations to ordinary boundary value problems". In : *Mathematics of Computation* 33 (1979), p. 1213-1228.
- [15] P. BIENTINESI, P. D'AMBRA et S. FILIPPONE. *Direct Linear Algebra Algorithms for High-Performance Computers*. CRC Press, 2019.
- [16] P. BLANKMAN, D. HASAN, G. ERIK et D. GOMMERS. "Detection of 'best' positive end-expiratory pressure derived from electrical impedance tomography parameters during a decremental positive end-expiratory pressure trial". In : *Critical Care (London, England)* 18.03 (2014). DOI : 10.1186/cc13866.
- [17] D. BOFFI, N. CAVALLINI et L. GASTALDI. "The Finite Element Immersed Boundary Method with Distributed Lagrange Multiplier". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 53 (2014). DOI : 10.1137/140978399.
- [18] D. BOFFI et L. GASTALDI. "A finite element approach for the immersed boundary method". In : *Computers & Structures* 81.8 (2003). K.J Bathe 60th Anniversary Issue, p. 491-501. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00404-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00404-2).
- [19] K. G. BOONE et D. S. HOLDER. "Effect of skin impedance on image quality and variability in electrical impedance tomography : a model study". In : *Medical and Biological Engineering and Computing* 34.5 (1996), p. 351-354. DOI : 10.1007/BF02520003.
- [20] L. BORCEA. "Electrical impedance tomography". In : *Inverse Probl.* 18.6 (2002), r99-r136. DOI : 10.1088/0266-5611/18/6/201.
- [21] L. BORCEA. "Electrical impedance tomography". In : *Inverse Problems* 18.6 (2002). DOI : 10.1088/0266-5611/18/6/201.
- [22] J. H. BRAMBLE et J. T. KING. "A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces". In : *Advances in Computational Mathematics* 6 (1996), p. 109-138.
- [23] A. BRANDT. "Interior estimates for second-order elliptic differential (or finite-difference) equations via the maximum principle". In : *Israel Journal of Mathematics* 7 (1969), p. 95-121.
- [24] H. BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. English. Universitext. New York, NY : Springer, 2011. DOI : 10.1007/978-0-387-70914-7.
- [25] M. BRÜHL et M. HANKE. "Recent progress in electrical impedance tomography". In : *Inverse Probl.* 19.6 (2003). Special section on imaging. DOI : 10.1088/0266-5611/19/6/055.
- [26] K. BULLEN et B. BOLT. *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1985.
- [27] B. BUZBEE et A. CARASSO. "On the numerical computation of parabolic problems for preceding times". In : *Math. Comput.* 27 (1973), p. 237-266.
- [28] A. CALDERÓN. "On an inverse boundary value problem". In : *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics* 18.6 (1980). DOI : 10.1088/0266-5611/18/6/201.
- [29] A. CARASSO. "Error bounds in the final value problem for the heat equation". In : *SIAM J. Math. Anal.* 7 (1976), p. 195-199.

- [30] P. CHEN et J. ZOU. "Finite Element Methods and Their Convergence for Elliptic and Parabolic Interface". In : (1996).
- [31] M. CHENEY, D. ISAACSON et J. C. NEWELL. "Electrical impedance tomography". English. In : *SIAM Rev.* 41.1 (1999), p. 85-101. DOI : 10.1137/S0036144598333613.
- [32] M. CHENEY, D. ISAACSON, J. C. NEWELL, S. J. SIMSKE et J. C. GOBLE. "NOSER : An algorithm for solving the inverse conductivity problem". In : *International Journal of Imaging Systems and Technology* 2 (1990).
- [33] K.-S. CHENG, D. ISAACSON, J. C. NEWELL et D. GISSER. "Electrode models for electric current computed tomography". In : *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 36.9 (1989). DOI : 10.1109/10.35300.
- [34] K.-S. CHENG, D. ISAACSON, J. NEWELL et D. GISSER. "Electrode Models for Electric Current Computed Tomography". In : *IEEE transactions on bio-medical engineering* 36 (1989), p. 918-24. DOI : 10.1109/10.35300.
- [35] I.-L. CHERN et Y.-C. SHU. "A coupling interface method for elliptic interface problems". In : *Journal of Computational Physics* 225.2 (2007), p. 2138-2174. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.03.012>.
- [36] L. CHESNEL, N. HYVÖNEN et S. STABOULIS. "Construction of Indistinguishable Conductivity Perturbations for the Point Electrode Model in Electrical Impedance Tomography". In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 75.5 (2015), p. 2093-2109. DOI : 10.1137/15M1006404. eprint : <https://doi.org/10.1137/15M1006404>.
- [37] P. G. CIARLET. "Discrete maximum principle for finite-difference operators". In : *Aequationes Math.* 4 (1970). DOI : 10.1007/BF01844166.
- [38] P. CIARLET et R. VARGA. "Discrete variational Green's function - II. One dimensional problem". English. In : *Numerische Mathematik* 16.2 (1970), p. 115-128. DOI : 10.1007/BF02308864.
- [39] M. CISTERNINO et L. WEYNANS. "A parallel second order Cartesian method for elliptic interface problems". In : *Commun. Comput. Phys.* 12.5 (2012). DOI : 10.4208/cicp.160311.090112a.
- [40] D. COLTON. "The approximation of solutions to the backwards heat equation in a nonhomogeneous medium". In : *J. Math. Anal. Appl.* 72 (1979), p. 418-429.
- [41] D. COLTON. "The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves". In : *SIAM Review* 26 (1984), p. 323-350.
- [42] D. COLTON et R. KRESS. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York : Wiley-Interscience, 1983.
- [43] D. COLTON et R. KRESS. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. 2nd. New York : Springer, 1998.
- [44] J. CONWAY. "Electrical Impedance Tomography for Thermal Monitoring of Hyperthermia Treatment : An Assessment Using In Vitro and In Vivo Measurements". In : *Clinical Physics and Physiological Measurement* 8.Suppl. A (1987), p. 141-146.

- [45] J. CONWAY, M. S. HAWLEY, A. D. SEAGAR, B. H. BROWN et D. C. BARBER. “Applied Potential Tomography (APT) for Noninvasive Thermal Imaging During Hyperthermia Treatment”. In : *Electronics Letters* 21.19 (1985), p. 836-838.
- [46] G.-H. COTTET, B. MICHAUX, S. OSSIA et G. VANDERLINDEN. “A Comparison of Spectral and Vortex Methods in Three-Dimensional Incompressible Flows”. In : *Journal of Computational Physics - J COMPUT PHYS* 175 (2002), p. 702-712. DOI : 10.1006/jcph.2001.6963.
- [47] M. DARBAS, J. HELEINE, R. MENDOZA et A. C. VELASCO. “Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography”. In : *AIMS Mathematics* 6 (2021), p. 7333-7366. DOI : 10.3934/math.2021431.
- [48] J. DARDÉ, N. HYVÖNEN, A. SEPPÄNEN et S. STABOULIS. “Simultaneous reconstruction of outer boundary shape and admittivity distribution in electrical impedance tomography”. In : *SIAM J. Imaging Sci.* 6.1 (2013). DOI : 10.1137/120877301.
- [49] J. DARDÉ, N. HYVÖNEN, A. SEPPÄNEN et S. STABOULIS. “Simultaneous recovery of admittivity and body shape in electrical impedance tomography : an experimental evaluation”. In : *Inverse Probl.* 29.8 (2013). DOI : 10.1088/0266-5611/29/8/085004.
- [50] J. DARDÉ et S. STABOULIS. “Electrode modelling : the effect of contact impedance”. English. In : *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.* 50.2 (2016), p. 415-431. DOI : 10.1051/m2an/2015049.
- [51] T. A. DAVIS. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2006.
- [52] K. DOMELEVO et P. OMNES. “A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids”. In : <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2005047> 39 (2005). DOI : 10.1051/m2an:2005047.
- [53] A. DRAGANESCU, T. DUPONT et R. SCOTT. “Failure of the discrete maximum principle for an elliptic finite element problem”. In : *Math. Comput.* 74 (2005), p. 1-23. DOI : 10.1090/S0025-5718-04-01651-5.
- [54] J. DUCHATEAU, F. SACHER et T. PAMBRUN. “Performance and limitations of noninvasive cardiac activation mapping”. In : *Heart Rhythm* (2019). DOI : 10.1007/BF02510980.
- [55] T. DUDYKEYVICH, H. RICHTER, G. HAHN, I. FRERICHS, J. HINZ et G. HELLIGE. “Software and Operational Concept for EIT-Based Regional Lung Function Monitoring”. In : (2005).
- [56] *Eigen : A C++ Template Library for Linear Algebra*. <http://eigen.tuxfamily.org>.
- [57] L. ELDÉN. “Regularization of the backwards solution of parabolic problems”. In : *Inverse and Improperly Posed Problems in Differential Equations*. Sous la dir. de G. ANGER. Berlin : Akademie Verlag, 1979.
- [58] L. ELDÉN. “Time discretization in the backward solution of parabolic equations”. In : *Math. Comput.* 39 (1982), p. 53-84.
- [59] R. EWING. “The approximation of certain parabolic equations backwards in time by Sobolev equations”. In : *SIAM J. Math. Anal.* 6 (1975), p. 283-294.

- [60] R. E. EWING, Z. LI, T. LIN et Y. LIN. "The immersed finite volume element methods for the elliptic interface problems". In : *Mathematics and Computers in Simulation* 50.1 (1999), p. 63-76. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(99\)00061-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(99)00061-0).
- [61] F. FERRAIOLI, A. FORMISANO et R. MARTONE. "Effective Exploitation of Prior Information in Electrical Impedance Tomography for Thermal Monitoring of Hyperthermia Treatments". In : *IEEE Transactions on Magnetics* 45.3 (2009), p. 1554-1557. DOI : 10.1109/TMAG.2009.2012740.
- [62] J. FERREIRA et R. GRIGORIEFF. "On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes". In : *Applied Numerical Mathematics* 28.2 (1998), p. 275-292. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(98\)00048-8](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(98)00048-8).
- [63] I. FRERICHS, J. HINZ, P. HERRMANN, G. WEISSER, G. HAHN, M. QUINTEL et G. HELIGE. "Regional lung perfusion as determined by electrical impedance tomography in comparison with electron beam CT imaging". In : *IEEE transactions on medical imaging* 21.06 (2002). DOI : 10.1109/TMI.2002.800585.
- [64] H. GARDE et N. HYVÖNEN. "Series reversion in Calderón's problem". In : *Math. Comp.* 91.336 (2022). DOI : 10.1090/mcom/3729.
- [65] H. GARDE et S. STABOULIS. "Convergence and regularization for monotonicity-based shape reconstruction in electrical impedance tomography". In : *Numer. Math.* 135.4 (2017). DOI : 10.1007/s00211-016-0830-1.
- [66] J.-C. GERVAIS. "SYSTÈME DE TOMOGRAPHIE D'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE MODULAIRE ET RECONFIGURABLE RÉALISÉ À L'AIDE D'UN FPGA". Mém. de mast. 2013.
- [67] J.-C. GERVAIS, R. GUARDO et H. GAGNON. "Système de tomographie d'impédance électrique modulaire et reconfigurable réalisé à l'aide d'un FPGA". In : 2011.
- [68] R. GHAS, R. MITTAL et H. DONG. "A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows". In : *Journal of Computational Physics* 225.1 (2007), p. 528-553. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.12.007>.
- [69] W. GILKS, S. RICHARDSON et D. SPIEGELHALTER. *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. London : Chapman et Hall, 1996.
- [70] G. H. GOLUB. *Matrix Computations*. Third.
- [71] G. H. GOLUB et J. M. ORTEGA. *Scientific Computing and Differential Equations : An Introduction to Numerical Methods*. 1992.
- [72] G. GONZALEZ, J. HUTTUNEN, V. KOLEHMAINEN, A. SEPPÄNEN et M. VAUHKONEN. "Experimental Evaluation of 3D Electrical Impedance Tomography with Total Variation Prior". In : *Inverse Problems in Science and Engineering* 24.8 (2016), p. 1411-1431.
- [73] R. GORENFLO et S. VESSELLA. *Abel Integral Equations, Analysis and Applications*. T. 1461. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 1991.
- [74] B. E. GRIFFITH. *Simulating the blood-muscle-valve mechanics of the heart by an adaptive and parallel version of the immersed boundary method*. New York University, 2005.

- [75] C. GROETSCH. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Braunschweig Wiesbaden : Vieweg, 1993.
- [76] W. GROPP, E. LUSK et A. SKJELLUM. *Using MPI : Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface*. MIT Press, 1999.
- [77] G. HAGER et G. WELLEIN. *Introduction to High Performance Computing for Scientists and Engineers*. CRC Press, 2010.
- [78] B. HARRACH. “Recent progress on the factorization method for electrical impedance tomography”. In : *Comput. Math. Methods Med.* (2013). DOI : 10.1155/2013/425184.
- [79] B. HARRACH et M. ULLRICH. “Monotonicity-based shape reconstruction in electrical impedance tomography”. In : *SIAM J. Math. Anal.* 45.6 (2013). DOI : 10.1137/120886984.
- [80] A. HAUPTMANN, V. KOLEHMAINEN, N.-M. MACH, T. SAVOLAINEN, A. SEPPÄNEN et S. SILTANEN. “Open 2D Electrical Impedance Tomography data archive”. In : <https://arxiv.org/pdf/1704.01178.pdf> (2017).
- [81] L. HELTAI. “On the stability of the finite element immersed boundary method”. In : *Computers & Structures* 86.7 (2008), p. 598-617. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.08.008>.
- [82] P. HÉNON, P. RAMET et J. ROMAN. “On Finding Approximate Supernodes for an Efficient ILU(k) Factorization”. In : *Parallel Computing* 34 (2008), p. 345-362. DOI : 10.1016/j.parco.2007.11.001.
- [83] P. HÉNON, P. RAMET et J. ROMAN. “PaStiX : A High-Performance Parallel Direct Solver for Sparse Symmetric Definite Systems”. In : *Parallel Computing* 28.2 (2002), p. 301-321. DOI : 10.1016/S0167-8191(01)00124-0.
- [84] D. S. HOLDER. *Electrical Impedance Tomography : Methods, History and Applications*. 1st. Series in Medical Physics and Biomedical Engineering. UK : Institute of Physics Publishing Ltd., 2005.
- [85] D. S. HOLDER, A. RAO et Y. HANQUAN. “Imaging of Physiologically Evoked Responses by Electrical Impedance Tomography with Cortical Electrodes in the Anaesthetized Rabbit”. In : *Physiological Measurement* 17 (1996), A179-A186.
- [86] K. G. HOLLINGSWORTH. “Reducing Acquisition Time in Clinical MRI by Data Undersampling and Compressed Sensing Reconstruction”. In : *Physics in Medicine & Biology* 60.21 (2015), R297.
- [87] J.-S. HUH et J. A. SETHIAN. “Exact subgrid interface correction schemes for elliptic interface problems”. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105.29 (2008), p. 9874-9879. DOI : 10.1073/pnas.0707997105. eprint : <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.0707997105>.
- [88] N. HYVÖNEN. “Approximating idealized boundary data of electric impedance tomography by electrode measurements”. In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 19 (2011). DOI : 10.1142/S0218202509003759.

- [89] N. HYVÖNEN. “Complete electrode model of electrical impedance tomography : approximation properties and characterization of inclusions”. English. In : *SIAM J. Appl. Math.* 64.3 (2004), p. 902-931. DOI : 10.1137/S0036139903423303.
- [90] N. HYVÖNEN et L. MUSTONEN. “Smoothened complete electrode model”. English. In : *SIAM J. Appl. Math.* 77.6 (2017), p. 2250-2271. DOI : 10.1137/17M1124292.
- [91] M. IKEHATA. “Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements”. In : *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 8.4 (2000). DOI : 10.1515/jiip.2000.8.4.367.
- [92] H. JIANGUO et Z. JUN. “A mortar element method for elliptic problems with discontinuous coefficients”. In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 22.4 (2002), p. 549-576. DOI : 10.1093/imanum/22.4.549.
- [93] H. JOHANSEN et P. COLELLA. “A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson’s Equation on Irregular Domains”. In : *Journal of Computational Physics* 147.1 (1998), p. 60-85. DOI : <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5965>.
- [94] J. KAIPIO et E. SOMERSALO. *Statistical and computational inverse problems*. T. 160. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [95] J. P. KAIPIO, V. KOLEHMAINEN, E. SOMERSALO et M. VAUHKONEN. “Statistical inversion and Monte Carlo sampling methods in electrical impedance tomography”. In : *Inverse Problems* 16.5 (2000), p. 1487. DOI : 10.1088/0266-5611/16/5/321.
- [96] J. P. KAIPIO, V. KOLEHMAINEN, E. SOMERSALO et M. VAUHKONEN. “Statistical inversion and Monte Carlo sampling methods in electrical impedance tomography.” In : *Inverse Probl.* 16.5 (2000). DOI : 10.1088/0266-5611/16/5/321.
- [97] K. KAN, Z. YANG, P. LYU, Y. ZHENG et L. SHEN. “Numerical study of turbulent flow past a rotating axial-flow pump based on a level-set immersed boundary method”. In : *Renewable Energy* 168 (2021), p. 960-971. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.12.103>.
- [98] G. E. KARNIADAKIS et R. M. KIRBY II. *Parallel Scientific Computing in C++ and MPI : A Seamless Approach to Parallel Algorithms and their Implementation*. Cambridge University Press, 2003.
- [99] A. KAROUI. “Méthodes numériques pour la résolution de problèmes inverses en électrocardiographie”. French. NNT : 2021BORD0104. Thèse de doct. Université de Bordeaux, 2021.
- [100] A. KAROUI, L. BEAR, P. MIGERDITICHAN et N. ZEMZEMI. “Evaluation of Fifteen Algorithms for the Resolution of the Electrocardiography Imaging Inverse Problem Using ex-vivo and in-silico Data”. In : *Frontiers in Physiology* (2018).
- [101] J. KARSTEN, C. GRUSNICK, H. PAARMANN, M. HERINGLAKE et H. HEINZE. “Positive end-expiratory pressure titration at bedside using electrical impedance tomography in post-operative cardiac surgery patients”. In : *Acta Anaesthesiologica Scandinavica* 59.06 (2021). DOI : 10.1111/aas.12518.
- [102] J. KELLER. “Inverse problems”. In : *Am. Math. Mon.* 83 (1996), p. 107-118.
- [103] D. E. KEYES et al. *Parallel Algorithms for Matrix Computations*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1990.

- [104] D. KIM et H. CHOI. "An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries". In : *Journal of Computational Physics* 171.1 (2001), p. 132-150. DOI : 10.1006/jcph.2001.6788.
- [105] W. KIM et H. CHOI. "Immersed boundary methods for fluid-structure interaction : A review". In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 75 (2019), p. 301-309. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2019.01.010>.
- [106] A. KIRSCH. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. New York : Springer, 2008.
- [107] V. KOLEHMAINEN, M. VAUHKONEN, P. A. KARJALAINEN et J. P. KAIPIO. "Assessment of errors in static electrical impedance tomography with adjacent and trigonometric current patterns". In : *Physiological Measurement* 18.4 (1997), p. 289. DOI : 10.1088/0967-3334/18/4/003.
- [108] C. KRAVARIS et J. SEINFELD. "Identification of parameters in distributed parameter systems by regularization". In : *SIAM J. Control Optim.* 23 (1985), p. 217-241.
- [109] M. LAVRENTIEV, V. ROMANOV et V. VASILIEV. *Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations*. T. 167. Springer Lecture Notes. New York : Springer, 1970.
- [110] P. LAX et R. PHILLIPS. *Scattering Theory*. New York, London : Academic Press, 1967.
- [111] A. LECHLEITER, N. HYVÖNEN et H. HAKULA. "The factorization method applied to the complete electrode model of impedance tomography". In : *SIAM J. Appl. Math.* 68.4 (2008). DOI : 10.1137/070683295.
- [112] M. S. LEHTINEN. *On Statistical Inversion Theory*. Sous la dir. de H. HAARIO. London : Longman, 1988.
- [113] R. J. LEVEQUE et Z. LI. "The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 31.4 (1994), p. 1019-1044.
- [114] C.-G. LI, R. BALE, W. WANG et M. TSUBOKURA. "A sharp interface immersed boundary method for thin-walled geometries in viscous compressible flows". In : *International Journal of Mechanical Sciences* 253 (2023), p. 108401. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108401>.
- [115] Z. LI. "A Fast Iterative Algorithm for Elliptic Interface Problems". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 35.1 (1998), p. 230-254. DOI : 10.1137/S0036142995291329. eprint : <https://doi.org/10.1137/S0036142995291329>.
- [116] Z. LI et K. ITO. "Maximum Principle Preserving Schemes for Interface Problems with Discontinuous Coefficients". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 23.1 (2001), p. 339-361. DOI : 10.1137/S1064827500370160. eprint : <https://doi.org/10.1137/S1064827500370160>.
- [117] P. LINZ. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Philadelphia : SIAM, 1985.
- [118] A. LIPPONEN, A. SEPPÄNEN et J. KAIPIO. "Electrical Impedance Tomography Imaging with Reduced-Order Model Based on Proper Orthogonal Decomposition". In : *Journal of Electronic Imaging* 22.2 (2013), p. 023008-023008.

- [119] J. MA, Z. WANG, J. YOUNG, J. C. LAI, Y. SUI et F.-B. TIAN. "An immersed boundary-lattice Boltzmann method for fluid-structure interaction problems involving viscoelastic fluids and complex geometries". In : *Journal of Computational Physics* 415 (2020), p. 109487. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109487>.
- [120] R. MALLADI, J. SETHIAN et B. VEMURI. "Shape modeling with front propagation : a level set approach". In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 17.2 (1995), p. 158-175. DOI : 10.1109/34.368173.
- [121] S. MANSOURI et al. "Electrical Impedance Tomography - Recent Applications and Developments". In : *Journal of Electrical Bioimpedance* 12.1 (2021), p. 50-62. DOI : 10.2478/joeb-2021-0007.
- [122] L. MARCHAL, T. MARETTE, G. PICHON et F. VIVIEN. "Trading performance for memory in sparse direct solvers using low-rank compression". In : *Future Generation Computer Systems* 130 (2022), p. 307-320. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.future.2021.12.018>.
- [123] B. MAURY. "A Fat Boundary Method for the Poisson Problem in a Domain with Holes". In : *Journal of Scientific Computing* 16 (2002), p. 319-339.
- [124] A. MAYO et A. GREENBAUM. "Fast Parallel Iterative Solution of Poisson's and the Biharmonic Equations on Irregular Regions". In : *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 13.1 (1992), p. 101-118. DOI : 10.1137/0913006. eprint : <https://doi.org/10.1137/0913006>.
- [125] A. MAYO. "The Fast Solution of Poisson's and the Biharmonic Equations on Irregular Regions". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21.2 (1984), p. 285-299. DOI : 10.1137/0721021. eprint : <https://doi.org/10.1137/0721021>.
- [126] A. MAYO. "The rapid evaluation of volume integrals of potential theory on general regions". In : *Journal of Computational Physics* 100.2 (1992), p. 236-245. DOI : [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90231-M](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90231-M).
- [127] P. MCCORQUODALE, P. COLELLA et H. JOHANSEN. "A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for the Heat Equation on Irregular Domains". In : *Journal of Computational Physics* 173.2 (2001), p. 620-635. DOI : <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6900>.
- [128] D. MCQUEEN et C. PESKIN. "Shared-Memory Parallel Vector Implementation of the Immersed Boundary Method for the Computation of Blood Flow in the Beating Mammalian Heart". In : *The Journal of Supercomputing* 11 (1997), p. 213-236.
- [129] T. MEIER, H. LUEPSCHEN, J. KARSTEN, T. LEIBECKE, M. GROSSHERR, H. GEHRING et S. LEONHARDT. "Assessment of Regional Lung Recruitment and Derecruitment During a PEEP Trial Based on Electrical Impedance Tomography". In : *Intensive Care Medicine* 34.3 (2008), p. 543-550.
- [130] K. MILLER. "Efficient numerical methods for backward solution of parabolic problems with variable coefficients". In : *Improperly Posed Problems*. Sous la dir. d'A. CARASSO. Boston : Pitman, 1975.

- [131] R. MITTAL, H. DONG et M. BOZKURTAS. “A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries”. In : *Journal of Computational Physics* 227.10 (2008), p. 4825-4852. DOI : 10.1016/j.jcp.2008.01.028.
- [132] R. MITTAL et G. IACCARINO. “Immersed boundary methods”. In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1 (2005), p. 239-261. DOI : 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743.
- [133] N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO. “A finite element method for crack growth without remeshing”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1999).
- [134] K. MOSEGAARD. “Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling”. In : *Inverse Problems* 14 (1999), p. 405. DOI : 10.1088/0266-5611/14/3/004.
- [135] K. MOSEGAARD et A. TARANTOLA. “Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems”. In : *Journal of Geophysical Research* 1001 (1995), p. 12431-12448. DOI : 10.1029/94JB03097.
- [136] J. L. MUELLER et S. SILTANEN. “The D-bar method for electrical impedance tomography—demystified”. In : *Inverse Problems* 36.9 (2020), p. 093001. DOI : 10.1088/1361-6420/aba2f5.
- [137] J. L. MUELLER et S. SILTANEN. “The D-bar method for electrical impedance tomography—demystified”. In : *Inverse Probl.* 36.9 (2020). DOI : 10.1088/1361-6420/aba2f5.
- [138] D. MURIO. *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*. New York : John Wiley, 1993.
- [139] A. NAAMI, O. ZOBID, A. ABIBI, N. JACQUIER, G. RANCILLAC, D. WALTHER et B. NICOLAS. *Solveur parallèle de matrices creuses pour simulation de tomographie par impédance électrique*. Rapp. tech. Enseirb-matmeca, 2022.
- [140] S. NAKAGIRI. “Review of Japanese work of the last ten years on identifiability in distributed parameter systems”. In : *Inverse Problems* 9 (1993), p. 143-191.
- [141] J. NEWELL, D. ISAACSON et D. GISSER. “Rapid assessment of electrode characteristics for impedance imaging”. In : *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* (1990).
- [142] A. NITTI, J. KIENDL, A. REALI et M. D. DE TULLIO. “An immersed-boundary/isogeometric method for fluid–structure interaction involving thin shells”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 364 (2020), p. 112977. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112977>.
- [143] M. OEVERMANN, C. SCHARFENBERG et R. KLEIN. “A sharp interface finite volume method for elliptic equations on Cartesian grids”. In : *Journal of Computational Physics* 228.14 (2009), p. 5184-5206. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.04.018>.
- [144] A. OSAMA et I. TSUKERMAN. “A Boundary Difference Method for Electromagnetic Scattering Problems With Perfect Conductors and Corners”. In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 61.10 (2013), p. 5117-5126. DOI : 10.1109/TAP.2013.2275152.
- [145] S. OSHER et R. FEDKIW. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2003.
- [146] S. J. OSHER et J. A. SETHIAN. “Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. Final report”. In : 1987.

- [147] A. PALDANIUS, B. DEKDOUK, J. TOIVANEN, V. KOLEHMAINEN et J. HYTTINEN. “Sensitivity Analysis Highlights the Importance of Accurate Head Models for Electrical Impedance Tomography Monitoring of Intracerebral Hemorrhagic Stroke”. In : *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 69.4 (2022), p. 1491-1501. DOI : 10.1109/TBME.2021.3120929.
- [148] R. PARKER. “Understanding inverse theory”. In : *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* 5 (1977), p. 35-64.
- [149] K. D. PAULSEN, M. J. MOSKOWITZ, T. P. R. S. E. MITCHELL et P. J. HOOPES. “Initial in vivo experience with EIT as a thermal estimator during hyperthermia”. In : *International Journal of Hyperthermia* 12.5 (1996). PMID : 8886886, p. 573-591. DOI : 10.3109/02656739609027666.
- [150] K. PAULSON, W. BRECKON et M. PIDCOCK. “Electrode Modelling in Electrical Impedance Tomography”. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 52.4 (1992), p. 1012-1022.
- [151] C. S. PESKIN. “Flow patterns around heart valves : A numerical method”. In : *Journal of Computational Physics* 10.2 (1972), p. 252-271. DOI : [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(72\)90065-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4).
- [152] T. PHAM, M. YUILL, C. DAKIN et A. SCHIBLER. “Regional Ventilation Distribution in the First 6 Months of Life”. In : *European Respiratory Journal (ERJ)* 37.4 (2011), p. 919-924.
- [153] A. QUARTERONI et A. VALLI. “Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations”. In : (1999).
- [154] M. J. QUINN. *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP*. McGraw-Hill, 2003.
- [155] R. RANGARAJAN, A. LEW et G. C. BUSCAGLIA. “A discontinuous-Galerkin-based immersed boundary method with non-homogeneous boundary conditions and its application to elasticity”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.17 (2009), p. 1513-1534. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.01.018>.
- [156] E. RANK et A. DÜSTER. “The Finite Cell Method : An immersed boundary technique for integration of geometric models and numerical analysis”. In : 44 (2019), p. 10.
- [157] T. RAUBER et G. RÜNGER. *Parallel Programming : Concepts and Practice*. Morgan Kaufmann, 2009.
- [158] S.-J. REN, M. SOLEIMANI, Y. Y. XU et F. DONG. “Inclusion boundary reconstruction and sensitivity analysis in electrical impedance tomography”. In : *Inverse Problems in Science and Engineering* 26 (2017), p. 1-25. DOI : 10.1080/17415977.2017.1378195.
- [159] D. H. RICHARD COURANT. *Methods of mathematical physics Volume 2*. 1^{re} éd. Wiley classics library. Interscience Publishers, 1989.
- [160] G. RICHTER. “An inverse problem for the steady state diffusion equation”. In : *SIAM J. Appl. Math.* 41 (1981), p. 210-221.
- [161] G. RICHTER. “Numerical identification of a spatially varying diffusion coefficient”. In : *Math. Comput.* 36 (1981), p. 375-386.
- [162] G. ROBERTS et A. SMITH. “Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Metropolis-Hastings algorithms”. In : *Stoch. Processes. Appl.* 49 (1994), p. 207-216.

- [163] L. RUDIN, S. OSHER et E. FATEMI. "Nonlinear total variation based noise removal algorithms". In : *Physica D* 60 (1992), p. 259-268.
- [164] Y. SAAD. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.
- [165] K. SANTUGINI. *Introduction au C++*. 2011.
- [166] S. SCHACH. *Object-Oriented and Classical Software Engineering, Seventh Edition*. McGraw-Hill, 2006.
- [167] D. SCHILLINGER, I. HARARI, M.-C. HSU, D. KAMENSKY, S. K. STOTER, Y. YU et Y. ZHAO. "The non-symmetric Nitsche method for the parameter-free imposition of weak boundary and coupling conditions in immersed finite elements". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 309 (2016), p. 625-652. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.06.026>.
- [168] A.-T. SCHREINER. *Object-Oriented Programming with ANSI-C*. hdl :1850/8544. Hanser, 1993.
- [169] L. R. SCOTT. "Optimal estimates for the finite element method on irregular meshes". In : *Mathematics of Computation* 30 (1976), p. 681-697.
- [170] J. A. SETHIAN. "Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts". In : *J. Comput. Phys.* 169.2 (2001). DOI : 10.1006/jcph.2000.6657.
- [171] J. A. SETHIAN. *Level set methods and fast marching methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. T. 3. Camb. Monogr. Appl. Comput. Math. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [172] Y. SHI, Z. YANG, F. XIE, S. REN et S. XU. "The Research Progress of Electrical Impedance Tomography for Lung Monitoring". In : *Front Bioeng Biotechnol* 9 (2021), p. 726652. DOI : 10.3389/fbioe.2021.726652.
- [173] R. SHOWALTER. "The final value problem for evolution equations". In : *J. Math. Anal. Appl.* 47 (1974), p. 563-572.
- [174] B. SLEEMAN. "The inverse problem of acoustic scattering". In : *IMA J. Appl. Math.* 29 (1982), p. 113-142.
- [175] P. SMEREKA. "The numerical approximation of a delta function with application to level set methods". In : *J. Comput. Phys.* 211.1 (2006). DOI : 10.1016/j.jcp.2005.05.005.
- [176] A. SMITH et G. ROBERTS. "Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods". In : *J. R. Stat. Soc. B* 55 (1993), p. 3-23.
- [177] N. B. SMITH et A. WEBB. *Introduction to Medical Imaging : Physics, Engineering and Clinical Applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [178] E. SOMERSALO, M. CHENEY et D. ISAACSON. "Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography". In : *Siam Journal on Applied Mathematics* 52 (1992), p. 1023-1040.
- [179] E. SOMERSALO, M. CHENEY et D. ISAACSON. "Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography". English. In : *SIAM J. Appl. Math.* 52.4 (1992), p. 1023-1040. DOI : 10.1137/0152060.

- [180] J. SUCHOMEL et V. SOBOTA. "A Model of End-Expiratory Lung Impedance Dependency on Total Extracellular Body Water". In : *Journal of Physics : Conference Series*. T. 434. 1. IOP Publishing. 2013, p. 012011.
- [181] K. TAIRA et T. COLONIUS. "Simulations of three-dimensional unsteady incompressible flows around a wing using the immersed boundary method". In : *AIAA Journal* 45.2 (2007), p. 254-269. DOI : 10.2514/1.21067.
- [182] A. TARANTOLA. *Inverse Problems*. Amsterdam : Elsevier, 1987.
- [183] A. TARANTOLA et B. VALETTE. "Inverse Problems = Quest for Information". In : *J. Geophys.* (1982), p. 159-170.
- [184] D. A. TAYLOR. *Object-Oriented Information Systems – Planning and Implementation*. John Wiley & Sons, 1992.
- [185] P. TEAM. *PETSc : Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computing*. <https://www.mcs.anl.gov/petsc/>. 2023.
- [186] V. THOMÉE et B. WESTERGREN. "Elliptic difference equations and interior regularity". In : *Numerische Mathematik* 11 (1968), p. 196-210.
- [187] L. TIERNEY. "Markov chains for exploring posterior distributions". In : *Ann. Stat.* 22 (1994), p. 1701-1762.
- [188] A. N. TIKHONOV. "On the stability of inverse problems". In : *Proceedings of the USSR Academy of Sciences* 39 (1943), p. 195-198.
- [189] TRILINOS PROJECT. *Trilinos*. <https://trilinos.github.io/>. 2023.
- [190] G. UHLMANN. "Electrical impedance tomography and Calderón's problem". English. In : *Inverse Probl.* 25.12 (2009). Id/No 123011, p. 39. DOI : 10.1088/0266-5611/25/12/123011.
- [191] F. D. VANNA, F. PICANO et E. BENINI. "A sharp-interface immersed boundary method for moving objects in compressible viscous flows". In : *Computers & Fluids* 201 (2020), p. 104415. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.104415>.
- [192] M. VAUHKONEN, D. VADASZ, P. KARJALAINEN, E. SOMERSALO et J. KAIPIO. "Tikhonov regularization and prior information in electrical impedance tomography". In : *IEEE Trans. Medical Imaging* 17.2 (1998). DOI : 10.1109/42.700740.
- [193] P. J. VAUHKONEN, M. VAUHKONEN, T. SAVOLAINEN et J. P. KAIPIO. "Three-dimensional electrical impedance tomography based on the complete electrode model". In : *IEEE Trans Biomed Eng* 46 (1999). DOI : 10.1137/S0036139903423303.
- [194] T. VEJCHODSKÝ et P. ŠOLÍN. "Discrete Maximum Principle for Higher-Order Finite Elements in 1D". In : *Mathematics of Computation* 76.260 (2007), p. 1833-1846.
- [195] J. A. VICTORINO, J. B. B. V. N. OKAMOTO, G. F. J. MATOS, M. R. TUCCI, M. P. R. CARAMÉZ, H. TANAKA, E. S. SIPMANN, D. C. B. SANTOS, C. S. V. BARBAS, C. R. R. CARVALHO et M. B. P. AMATO. "Imbalances in regional lung ventilation : a validation study on electrical impedance tomography". In : *American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine* 169.07 (2004). DOI : 10.1164/rccm.200301-1330C.

- [196] T. VILHUNEN, J. P. KAIPIO, P. J. VAUHKONEN, T. SAVOLAINEN et M. VAUHKONEN. “Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties : I. Theory”. In : *Measurement Science and Technology* 13.12 (2002), p. 1848. DOI : 10.1088/0957-0233/13/12/307.
- [197] T. VILHUNEN, J. KAIPIO, P. VAUHKONEN, T. SAVOLAINEN et M. VAUHKONEN. “Simultaneous Reconstruction of Electrode Contact Impedances and Internal Electrical Properties : I. Theory”. In : *Measurement Science and Technology* 13.12 (2002), p. 1848.
- [198] “Volume Information”. In : *Mathematics of Computation* 23.108 (1969), p. 895-920.
- [199] Z. WANG, J. FAN et K. LUO. “Parallel computing strategy for the simulation of particulate flows with immersed boundary method”. In : *Science in China Series E : Technological Sciences* 51.8 (2008), p. 1169-1176.
- [200] L. WEYNANS. “Super-convergence in maximum norm of the gradient for the Shortley-Weller method”. In : *J. Sci. Comput.* 75.2 (2018). DOI : 10.1007/s10915-017-0548-y.
- [201] A. WIEGMANN et K. P. BUBE. “The Explicit-Jump Immersed Interface Method : Finite Difference Methods for PDEs with Piecewise Smooth Solutions”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 37.3 (2000), p. 827-862. DOI : 10.1137/S0036142997328664. eprint : <https://doi.org/10.1137/S0036142997328664>.
- [202] B. WILKINSON et M. ALLEN. *Parallel Programming : Techniques and Applications Using Networked Workstations and Parallel Computers*. Prentice Hall, 1999.
- [203] G. WING. *A Primer on Integral Equations of the First Kind : The Problem of Deconvolution and Unfolding*. Philadelphia : SIAM, 1992.
- [204] A. WIRGIN. “The inverse crime”. working paper or preprint. 2004.
- [205] S. YU et G. WEI. “Three-dimensional matched interface and boundary (MIB) method for treating geometric singularities”. In : *Journal of Computational Physics* 227.1 (2007), p. 602-632. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.08.003>.
- [206] N. M. ZAIN et K. K. CHELLIAH. “Breast Imaging Using Electrical Impedance Tomography : Correlation of Quantitative Assessment with Visual Interpretation”. In : *Asian Pacific Journal of Cancer Prevention* 15.3 (2014), p. 1327-1331.
- [207] Y. ZENG, Y. WANG, D. YANG et Q. CHEN. “Immersed Boundary Methods for Simulations of Biological Flows in Swimming and Flying Bio-Locomotion : A Review”. In : *Applied Sciences* 13.7 (2023). DOI : 10.3390/app13074208.
- [208] Z. ZHAO, D. STEINMANN, I. FRERICHS, J. GUTTMANN et K. MÖLLER. “PEEP titration guided by ventilation homogeneity : a feasibility study using electrical impedance tomography”. In : *Critical Care (London, England)* 14.01 (2010). DOI : 10.1186/cc8860.
- [209] Y. ZHOU et G. WEI. “On the fictitious-domain and interpolation formulations of the matched interface and boundary (MIB) method”. In : *Journal of Computational Physics* 219.1 (2006), p. 228-246. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.03.027>.

- [210] Y. ZHOU, S. ZHAO, M. FEIG et G. WEI. “High order matched interface and boundary method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources”. In : *Journal of Computational Physics* 213.1 (2006), p. 1-30. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.07.022>.
- [211] C. ZHU, J. H. SEO, V. VEDULA et R. MITTAL. “A highly scalable sharp-interface immersed boundary method for large-scale parallel computers”. In : *23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. 2017, p. 3622.

