



**HAL**  
open science

# Effets combinés de la dissipation visqueuse et de la thermodiffusion sur les instabilités des écoulements cisailés de mélanges binaires

Katia Ali-Amar

► **To cite this version:**

Katia Ali-Amar. Effets combinés de la dissipation visqueuse et de la thermodiffusion sur les instabilités des écoulements cisailés de mélanges binaires. Milieux fluides et réactifs. Université de Lille, 2023. Français. NNT : 2023ULILN041 . tel-04521753

**HAL Id: tel-04521753**

**<https://theses.hal.science/tel-04521753>**

Submitted on 26 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LILLE

École doctorale **ENGSYS-632**

Unité de recherche **Unité de Mécanique de Lille**

Thèse présentée par **Katia ALI-AMAR**

Soutenue le **11 décembre 2023**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des fluides**

# Effets combinés de la dissipation visqueuse et de la thermodiffusion sur les instabilités des écoulements cisailés de mélanges binaires

**Thèse dirigée par** Mohamed-Najib OUARZAZI directeur  
Silvia DA COSTA HIRATA co-directeur

## Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Valentina SHEVTSOVA Chérif NOUAR	professeur à l'Université de Mondragon directeur de recherche à l'Université de Lorraine	
<i>Examineurs</i>	Abdelkader MOJTABI Mounir BOU-ALI	professeur à l'Université Paul Sabatier Toulouse professeur à l'Université de Mondragon	président du jury
<i>Directeurs de thèse</i>	Mohamed-Najib OUARZAZI Silvia DA COSTA HIRATA	professeur à l'Université de Lille MCF HDR à l'Université de Lille	

## COLOPHON

Mémoire de thèse intitulé « Effets combinés de la dissipation visqueuse et de la thermodiffusion sur les instabilités des écoulements cisailés de mélanges binaires », écrit par [Katia ALI-AMAR](#), achevé le 27 février 2024, composé au moyen du système de préparation de document [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) et de la classe [yathesis](#) dédiée aux thèses préparées en France.

UNIVERSITÉ DE LILLE

École doctorale **ENGSYS-632**

Unité de recherche **Unité de Mécanique de Lille**

Thèse présentée par **Katia ALI-AMAR**

Soutenue le **11 décembre 2023**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des fluides**

# Effets combinés de la dissipation visqueuse et de la thermodiffusion sur les instabilités des écoulements cisailés de mélanges binaires

**Thèse dirigée par** Mohamed-Najib OUARZAZI directeur  
Silvia DA COSTA HIRATA co-directeur

## Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Valentina SHEVTSOVA Chérif NOUAR	professeur à l'Université de Mondragon directeur de recherche à l'Université de Lorraine	
<i>Examineurs</i>	Abdelkader MOJTABI Mounir BOU-ALI	professeur à l'Université Paul Sabatier Toulouse professeur à l'Université de Mondragon	président du jury
<i>Directeurs de thèse</i>	Mohamed-Najib OUARZAZI Silvia DA COSTA HIRATA	professeur à l'Université de Lille MCF HDR à l'Université de Lille	



## UNIVERSITÉ DE LILLE

Doctoral School **ENGSYS-632**

University Department **Unité de Mécanique de Lille**

Thesis defended by **Katia ALI-AMAR**

Defended on **December 11, 2023**

In order to become Doctor from Université de Lille

Academic Field **Mechanics**

Speciality **Fluid Mechanics**

# Combined effects of viscous dissipation and thermodiffusion on the instabilities of sheared flows of binary mixtures

**Thesis supervised by** Mohamed-Najib OUARZAZI Supervisor  
Silvia DA COSTA HIRATA Co-Supervisor

### Committee members

<i>Referees</i>	Valentina SHEVTSOVA Chérif NOUAR	Professor at Université de Mondragon Senior Researcher at Université de Lorraine	
<i>Examiners</i>	Abdelkader MOJTABI Mounir BOU-ALI	Professor at Université Paul Sabatier Toulouse Professor at Université de Mondragon	Committee President
<i>Supervisors</i>	Mohamed-Najib OUARZAZI Silvia DA COSTA HIRATA	Professor at Université de Lille HDR Associate Professor at Université de Lille	



L'Université de Lille n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions devront être considérées comme propres à leurs auteurs.





**Mots clés :** convection mixte, fluides binaires, dissipation visqueuse, stabilité linéaire, stabilité faiblement nonlinéaire, effet soret

**Keywords:** mixed convection, binary fluids, viscous dissipation, thermodiffusion, linear stability, weakly nonlinear stability, soret effect



Cette thèse a été préparée au

**Unité de Mécanique de Lille**

Avenue Paul Langevin  
Bâtiment ESPRIT  
59650 - Villeneuve d'Ascq  
France

Site <http://uml.univ-lille.fr/>





*To my thesis supervisor !*

*To my thesis co-supervisor as well !*

*I also dedicate this work  
to all those who deserve it*



Yet not every solution of the equation of motion, even if it is exact, can actually occur in Nature. The flows that occur in Nature must not only obey the equations of fluid dynamics, but also be stable.

---

L.D. Landau and E.M. Lifshitz (1959)

I have not failed. I've just found 10.000 ways that won't work.

---

Thomas A. Edison





**EFFETS COMBINÉS DE LA DISSIPATION VISQUEUSE ET DE LA THERMODIFFUSION SUR LES INSTABILITÉS DES ÉCOULEMENTS CISAILLÉS DE MÉLANGES BINAIRES****Résumé**

Ce travail de thèse se focalise sur une analyse approfondie de l'effet du phénomène de Soret sur l'instabilité provoquée par la dissipation visqueuse dans un fluide binaire confiné entre deux plaques d'extension latérale infinie et soumis à un gradient de pression horizontal. Aucune différence de température ou de concentration externe n'est imposée aux bords : La paroi inférieure est considérée adiabatique, tandis que la paroi supérieure est isotherme pour le cas A et inversement pour le cas B. Au cours de cette recherche, nous avons identifié les rouleaux longitudinaux (LR) comme le mode privilégié pour l'amorçage de la convection. L'analyse de stabilité linéaire a révélé que l'effet Soret, caractérisé par le rapport de séparation noté  $\psi$ , joue un rôle crucial dans la détermination de la nature de l'instabilité. En effet, Dans le cas A, cela influence le développement de motifs de rouleaux longitudinaux oscillatoires et stationnaires, tandis que dans le cas B, cela conduit à une bifurcation stationnaire caractérisée par un nombre d'onde nul. Ces résultats mettent également en lumière la présence de deux régions distinctes : une région multicellulaire ( $\psi < \psi_{mono}$ ) avec une longueur d'onde finie et une région monocellulaire ( $\psi > \psi_{mono}$ ) où la longueur d'onde devient infinie en raison de l'extension latérale illimitée du système.

Pour approfondir notre compréhension de ces deux régions, nous avons adopté une approche faiblement non linéaire, en dérivant l'équation d'amplitude de Landau jusqu'au troisième ordre. Cette étude s'est concentrée sur les effets non linéaires de la dissipation visqueuse sur l'instabilité de Soret dans une plage spécifique de valeurs du coefficient de séparation positif, où l'écoulement est multicellulaire ( $0 < \psi < \psi_{mono}$ , avec  $\psi_{mono}$  le rapport de séparation monocellulaire indiquant le début de la région monocellulaire). Il est à noter que l'influence du nombre de Prandtl sur la nature de la bifurcation, qu'elle soit sous-critique ou supercritique, s'est avérée relativement limitée. En revanche, le nombre de Lewis et le rapport de séparation ont joué un rôle décisif. Plus précisément, des valeurs élevées du nombre de Lewis et/ou du rapport de séparation ont favorisé l'apparition de bifurcations sous-critiques à de faibles nombres de Gebhart (paramètre caractérisant l'intensité de la dissipation visqueuse).

Lorsque la valeur du rapport de séparation dépasse celle associée à la région monocellulaire ( $\psi > \psi_{mono}$ ), une analyse portant sur les instabilités secondaires a montré que l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité pour donner naissance à des rouleaux longitudinaux multicellulaires progressives via une bifurcation de Hopf. Nous avons abouti à la constatation que la séparation des espèces dans notre cas est plus prononcée au sein de systèmes à grande échelle qu'à des systèmes plus restreints. Cependant, cette configuration se révèle plus adéquate pour déterminer le paramètre de Soret.

**Mots clés :** convection mixte, fluides binaires, dissipation visqueuse, stabilité linéaire, stabilité faiblement nonlinéaire, effet soret

---

---

**COMBINED EFFECTS OF VISCOUS DISSIPATION AND THERMODIFFUSION ON THE INSTABILITIES OF SHEARED FLOWS OF BINARY MIXTURES****Abstract**

This thesis work focuses on a comprehensive analysis of the Soret effect on instability induced by viscous dissipation in a binary fluid confined between two plates of infinite lateral extension and subjected to a horizontal pressure gradient. No external temperature or concentration difference is imposed on the boundaries: the lower boundary is considered adiabatic, while the upper boundary is isothermal for case A and conversely for case B. During this research, we identified longitudinal rolls (LR) as the preferred mode for initiating convection. The linear stability analysis revealed that the Soret effect, characterized by the separation ratio denoted as  $\psi$ , plays a pivotal role in determining the nature of the instability. In case A, it influences the development of both oscillatory and stationary longitudinal rolls patterns, whereas in case B, it leads to a stationary bifurcation characterized by a zero wave number. These results also highlight the presence of two distinct regions: a multicellular region ( $\psi < \psi_{mono}$ ) with a finite wavelength and a monocellular region ( $\psi > \psi_{mono}$ ) where the wavelength becomes infinite due to the unbounded lateral extension of the system.

To deepen our understanding of these two regions, we adopted a weakly nonlinear approach, deriving the Landau amplitude equation up to the third order. This study focused on the nonlinear effects of viscous dissipation on the Soret instability in a specific range of positive separation coefficient values, where the flow is multicellular ( $0 < \psi < \psi_{mono}$ , with  $\psi_{mono}$  indicating the start of the monocellular region). It is worth noting that the influence of the Prandtl number on the nature of the bifurcation, whether subcritical or supercritical, proved to be relatively limited. However, the Lewis number and the separation ratio played a decisive role. Specifically, high values of the Lewis number and/or the separation ratio favored the occurrence of subcritical bifurcations at low Gebhart numbers (a parameter characterizing the intensity of viscous dissipation).

When the value of the separation ratio exceeded that associated with the monocellular region ( $\psi > \psi_{mono}$ ), an analysis of secondary instabilities showed that the monocellular flow lost its stability, giving rise to progressively multicellular longitudinal rolls through a Hopf bifurcation. We concluded that species separation in our case is more pronounced in large-scale systems compared to smaller ones. However, this configuration proves to be more suitable for determining the Soret parameter.

**Keywords:** mixed convection, binary fluids, viscous dissipation, thermodiffusion, linear stability, weakly nonlinear stability, soret effect

---

# Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mes encadrants. Je suis extrêmement reconnaissant envers Madame Silvia Da Costa Hirata et Monsieur Mohamed Najib Ouarzazi pour leur soutien inestimable et leurs conseils éclairés qui m'ont permis de mener à bien cette thèse. Leur expertise et leur dévouement ont été d'une grande valeur pour moi.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude envers les membres du jury, en particulier Messieurs Abdelkader Mojtabi et Mounir Bou-Ali, pour avoir accepté la charge d'examineur. De plus, je souhaite remercier chaleureusement les rapporteurs de ma thèse, Madame Valentina Shevtsova et Monsieur Chérif Nouar, pour avoir consacré leur temps à l'examen attentif de mon travail de thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement toute l'équipe de l'Unité de Mécanique de Lille avec laquelle j'ai partagé des moments enrichissants qui ont élargi mes horizons dans tous les aspects de la recherche. Je suis également reconnaissant envers les membres du département de Mécanique Fondamentale où j'ai pu développer mes compétences pédagogiques.

Mes remerciements vont également à mes collègues doctorants et anciens doctorants, en particulier ceux de l'Unité de Mécanique de Lille, avec qui j'ai pu échanger de manière fructueuse tout au long de ma thèse. Leurs contributions ont enrichi à la fois ma vie professionnelle et personnelle.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma famille sans laquelle rien de tout cela n'aurait été possible. Mon père, ma mère, mes frères et sœurs et mes adorables neveux ont été un soutien indéfectible et leur affection a été l'aide la plus précieuse pour mener à bien ce travail.



# Table des matières

Résumé	xvii
Remerciements	xix
Table des matières	xxi
Liste des tableaux	xxiii
Table des figures	xxv
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1 Problème de Rayleigh-Bénard et Rayleigh-Bénard-Poiseuille . . . . .	2
1.2 Effet Soret . . . . .	6
1.2.1 Revue bibliographique sur la thermodiffusion . . . . .	8
1.3 Effet de dissipation visqueuse . . . . .	13
1.3.1 Terme de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie . . . . .	14
1.3.2 Revue bibliographique sur la dissipation visqueuse . . . . .	15
1.3.3 Formulation mathématique de l'analyse de stabilité avec dissipation visqueuse	17
1.4 Objectifs de la thèse . . . . .	30
Références . . . . .	31
<b>2 Soret effect on the onset of viscous dissipation thermal instability for Poiseuille flows in binary mixtures</b>	<b>39</b>
2.1 Abstract . . . . .	39
2.2 Introduction . . . . .	40
2.3 Mathematical model . . . . .	41
2.3.1 Governing equations . . . . .	42
2.3.2 Basic state . . . . .	43
2.3.3 Non-dimensionalization . . . . .	44
2.4 Linear stability analysis . . . . .	46
2.4.1 Three-dimensional perturbation equations . . . . .	46
2.4.2 Longitudinal rolls . . . . .	48
2.4.3 Squire transformation in the limiting case of small Gebhart number . . . . .	48
2.5 Numerical Method . . . . .	50
2.6 Results for positive and negative $\psi$ . . . . .	51
2.6.1 Selection of the dominant mode of instability . . . . .	51
2.6.2 Linear properties of the instability for $\psi > 0$ . . . . .	52
2.6.3 Linear properties of the instability for $\psi < 0$ . . . . .	54

2.7 Energy budget Analysis . . . . .	57
2.8 On the observability of viscous dissipation instability in binary fluid experiments . . . . .	59
2.9 Conclusions . . . . .	62
Références . . . . .	64
<b>3 Weakly nonlinear dynamics of viscous dissipation instability involving Poiseuille flow of binary fluids mixture</b> . . . . .	<b>67</b>
3.1 Abstract . . . . .	67
3.2 Introduction . . . . .	68
3.3 Governing equations, basic state and linear stability . . . . .	69
3.3.1 System and basic equations . . . . .	69
3.3.2 Unperturbed basic state and linear stability . . . . .	71
3.4 Weakly nonlinear analysis . . . . .	73
3.4.1 Governing equations for finite amplitude longitudinal rolls . . . . .	73
3.4.2 Derivation of amplitude equation . . . . .	74
3.5 Results of the weakly nonlinear stability . . . . .	80
3.5.1 Supercritical/subcritical bifurcation . . . . .	80
3.5.2 Equilibrium solutions and iso-contours . . . . .	82
3.5.3 Nusselt and mixing numbers . . . . .	83
3.6 Conclusions . . . . .	86
Références . . . . .	87
<b>4 Hopf bifurcation from uni-cellular to multi-cellular flows induced by viscous heating in Poiseuille flow of binary mixtures</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1 abstract . . . . .	89
4.2 Introduction . . . . .	90
4.3 Mathematical model and unperturbed basic state . . . . .	91
4.4 Analytical solution of the monocellular flow and its properties . . . . .	94
4.5 Secondary bifurcation : loss of stability of the monocellular flow . . . . .	100
4.5.1 Perturbation equations . . . . .	100
4.5.2 Longitudinal rolls . . . . .	101
4.6 Secondary instability results . . . . .	102
4.6.1 Hopf bifurcation with internal heating from below : case A . . . . .	102
4.6.2 Hopf bifurcation with internal heating from above : case B . . . . .	103
4.7 Practical consequences of the obtained theoretical results . . . . .	103
4.7.1 Measure of thermodiffusion coefficient : comparison with Rayleigh-Bénard convection . . . . .	103
4.7.2 Separation of species . . . . .	106
4.8 Conclusions . . . . .	108
Références . . . . .	109
<b>Conclusion et perspectives</b> . . . . .	<b>113</b>
Références . . . . .	116
<b>Table des matières</b> . . . . .	<b>117</b>

# Liste des tableaux

2.1	Critical conditions for the onset of longitudinal rolls : comparison of our results with $\Psi = 0$ to those of Barletta et al. (2011). . . . .	50
2.2	Critical values of $\Lambda_c, k_c$ and $\omega_c$ obtained for different values of $Pr$ at $Le = 100$ , relative to the onset of longitudinal rolls : stationary mode ( $\omega = 0$ ) . . . . .	53
2.3	Critical values of $\Lambda_c, k_c$ and $\omega_c$ obtained for different values of $Pr$ with $Le = 100$ , relative to the onset of oscillatory longitudinal rolls ( $\omega \neq 0$ ). . . . .	56
2.4	Critical dimensional average velocity $U_c (ms^{-1})$ obtained by linear stability theory for different liquid mixtures (see Appendix for thermophysical properties). . . . .	60
2.5	Critical dimensional average velocity $U_c (ms^{-1})$ obtained by linear stability theory for different liquid mixtures (see Appendix for thermophysical properties). . . . .	61
2.6	Critical dimensional average velocity $U_c (ms^{-1})$ obtained by linear stability theory for different liquid mixtures at $\psi < 0$ (see Appendix for thermophysical properties). . . . .	62
2.7	Thermophysical properties of Water-ethanol mixture extracted from [10], [11], [12], [13], [15] and [14]. The conductivity and the diffusivity of Water/Ethanol and Water/Methanol mixtures were extracted from [32]. . . . .	64
2.8	Thermophysical properties of ${}^3He - {}^4He$ mixture are extracted from [16], except the viscosity values that are extracted from [33]. . . . .	64
3.1	Computed values of $\gamma, \lambda$ and $(\psi^*, Ge^*)$ with $Pr = 10$ and $Le = 100$ . . . . .	80
4.1	Influence of $Pr$ on secondary bifurcation thresholds for case A with $Le = 100$ and $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	102
4.2	Stability results for different liquid mixtures . . . . .	104





# Table des figures

1.1	L'une des célèbres photographies originales de Bénard montrant la vue de dessus des motifs de convection dans une mince couche de spermaceti chauffée par le dessous.[2] . . . . .	2
1.2	Configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille . . . . .	3
1.3	Rues de nuages au-dessus de la mer d'Okhotsk : Un spectacle atmosphérique engendré par des rouleaux de convection [20] . . . . .	4
1.4	Schéma des structures convectives dans un système de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle [25] : (a) rouleaux longitudinaux (RL) et (b) rouleaux transversaux (RT) . . . . .	5
1.5	Représentation schématique de la migration des espèces en fonction du coefficient Soret : $S_T = \frac{D_T}{D}$ , où $D_T$ et $D$ sont le coefficient de thermodiffusion et le coefficient de diffusion isotherme. . . . .	7
1.6	<i>a)</i> Schéma du dispositif de colonne thermogravitationnelle [76], <i>b)</i> principe de la colonne thermogravitationnelle [36]. Cette configuration, comprenant deux plaques parallèles avec un gradient de température horizontal, génère trois types de flux : le flux diffusif $J_D$ , le flux thermodiffusif $J_{D_T}$ , et le flux convectif $J_C$ induit par le gradient de densité horizontal et la gravité. Ces flux, agissant à l'état stationnaire, engendrent un gradient vertical de composition. La méthode expérimentale consiste à extraire des échantillons de la colonne thermogravitationnelle (TGC) à différents points, à évaluer la variation de densité le long de la TGC, et à la convertir en concentration pour déterminer le coefficient $D_T$ en analysant la pente de cette variation. . . . .	12
1.7	Énergie thermique $E_{th}$ (ligne continue bleue) et énergie de dissipation $E_{vd}$ (ligne discontinue rouge) en fonction de $\Lambda$ pour l'écoulement de RBP[95] . . . . .	16
1.8	Relation entre la valeur de $Ge^*$ à $\psi = 0$ et le nombre de Prandtl (Pr) pour l'écoulement de Poiseuille plan [34] . . . . .	17
2.1	Sketch of the basic Poiseuille flow and the boundary conditions : a) case A and b) case B. . . . .	42
2.2	Base temperature curve ( $T_b/\Lambda$ ) versus $z$ for both cases A and B . . . . .	46
2.3	Neutral stability curves $\Lambda = \Lambda(k)$ corresponding to longitudinal rolls ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ), oblique rolls with $\phi = \frac{\pi}{4}$ and transverse rolls ( $\phi = 0$ ) at $Ge = 0.01$ at $Pr = 50$ and $Le = 1$ for $\psi = 0$ (a), $\psi = 0.01$ (b) and $\psi = -0.3$ (c). . . . .	51

2.4	Critical values of $\Lambda$ (a) and the wave number $k$ (b) at the onset of stationary instability versus $\psi$ . From top to bottom, the curves correspond respectively to gas cases with $(Pr = 1, Le = 1)$ , $(Pr = 1, Le = 2)$ and to liquid cases with $(Pr = 10, Le = 50)$ , $(Pr = 10, Le = 100)$ and $(Pr = 10, Le = 200)$ . Separation ratio curve where a transition occurs from multicellular to monocellular flows versus $Le$ with $Pr = 10$ (c). . . . .	52
2.5	Streamlines at the onset of stationary instability with $Pr = 10$ and $Le = 100$ for $\psi = 0$ (a), $\psi = 0.01$ (b) and $\psi = 0.03$ (c). . . . .	53
2.6	Critical values at the onset of stationary longitudinal rolls (solid line) and oscillatory longitudinal rolls (dashed line) : (a) $\Lambda_c$ , (b) $k_c$ and (c) $\omega_c$ versus $\psi$ for $Le = 100$ and $Pr = 10$ (square symbols), $Le = 2$ (dot symbols) and $Pr = 1$ and $Le = Pr = 1$ (diamond symbols). . . . .	54
2.7	Separation ratio $\psi_{CT}$ where a codimension two bifurcation occurs versus $Le$ number (a). Neutral stability curve at $\psi < \psi_{CT}$ and $\psi = \psi_{CT}$ with $Le = Pr = 1$ (b). Neutral stability curve at $\psi = \psi_{CT}$ with $Le = 100$ while the inset represents the corresponding Hopf frequency (c). $Pr = 10$ for both figures (a) and (c). . . . .	55
2.8	Critical values $\Lambda_c$ and $k_c$ for the case B versus $\psi$ with $Le = 100$ and $Pr = 10$ (a), Critical value $Re_c$ versus $\psi$ for $Le = 2, 100$ , $Pr = 10$ and $Ge = 10^{-4}$ at the onset of longitudinal rolls : stationary mode $\omega = 0$ (solid line), oscillatory mode $\omega \neq 0$ (dashed line) (b). . . . .	57
2.9	Thermal energy $\frac{E_{TB}}{ E_D }$ (continuous line) and energy related to the Soret effect $\frac{E_{CB}}{ E_D }$ (dashed line) versus the separation ratio ( $\psi$ ) at the onset of convection. . . . .	58
3.1	Schematic representation of Poiseuille flow and boundary conditions . . . . .	70
3.2	Normalized basic temperature (a) and concentration (b) fields as a function of $z$ . . . . .	72
3.3	Critical values of (a) $\Lambda$ and (b) $k$ at the onset of stationary instability versus $\psi$ . From top to bottom, the curves correspond respectively to gas with $(Pr = 1, Le = 1)$ , $(Pr = 1, Le = 2)$ and to liquids with $(Pr = 10, Le = 50)$ , $(Pr = 10, Le = 100)$ and $(Pr = 10, Le = 200)$ . . . . .	72
3.4	Eigenfunctions at the onset of convection a) $Im(\Psi_{11}(z))$ , b) $\Theta_{11}(z)$ , c) $\tilde{u}_{11}(z)$ and d) $C_{11}(z)$ . Parameters are $Pr = 10, Ge = 10^{-4}, Le = 100$ and different values of separation ratio : (1) $\psi = 0$ , (2) $\psi = 0.01$ , (3) $\psi = 0.05$ , (4) $\psi = 0.1$ . . . . .	76
3.5	Vertical variations of the first harmonics with $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$ a) $Im(\Psi_{22}(z))$ , b) $\Theta_{22}(z)$ and c) $C_{22}(z)$ . Parameters are : $Le = 100$ and (1) $\psi = 0$ , (2) $\psi = 0.01$ , (3) $\psi = 0.05$ . . . . .	77
3.6	Vertical variations of the first harmonics with $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$ a) $Im(\Psi_{22}(z))$ , b) $\Theta_{22}(z)$ and c) $C_{22}(z)$ . Parameters are : $\psi = 0.01$ and (1) $Le = 50$ , (2) $Le = 100$ , (3) $Le = 200$ . . . . .	78
3.7	Vertical variations of the convective nonlinear correction to the basic conductive a) $Ge = 10^{-4}$ and b) $Ge = 10^{-1}$ with $Pr = 10, Le = 100$ for different values of the separation ratio : (1) $\psi = 0$ , (2) $\psi = 0.01$ , (3) $\psi = 0.05$ and (4) $\psi = 0.1$ . . . . .	79
3.8	Landau coefficient $\lambda$ as a function of $\psi$ for $Pr = 10$ , (a) $Le = 2$ , (b) $Le = 100$ , (c) $Le = 300$ and different Gebhart numbers : (1) $Ge = 10^{-4}$ , (2) $Ge = 10^{-1}$ , (3) $Ge = 1$ , (4) $Ge = 2$ . . . . .	81
3.9	(a) Landau coefficient $\lambda$ as a function of $\psi$ for $Ge = 10^{-4}$ and $Le = 100$ , with different Prandtl numbers : $Pr = 1$ (dots), $Pr = 10$ (squares), $Pr = 10^5$ (diamonds). (b) The tricritical bifurcation curves in the $(\psi^*, Ge^*)$ plane for $Pr = 10$ , with different Lewis numbers : $Le = 2$ (dots), $Le = 100$ (squares), $Le = 300$ (diamonds). . . . .	82
3.10	Disturbed streamlines at $\Lambda = 1.1\Lambda_c$ over a period $\left(\frac{2\pi}{k_c}\right)_{\psi=0}$ , for $Ge = 10^{-4}$ and $Le = 100$ . Comparisons between the case of a pure fluid ( $\psi = 0$ ) a), (b) and c) and a binary mixture ( $\psi = 0.01$ ) d), (e) and f). . . . .	83

3.11	Vertical profile of the convective heat flux $J_{conv}(z)$ at $Pr = 10$ and $Le = 100$ for $\psi = 0.01$ and different values of Gebhart number : (1) $Ge = 10^{-4}$ , (2) $Ge = 10^{-2}$ , (3) $Ge = 10^{-1}$ , (4) $Ge = 1$ . . . . .	84
3.12	Nusselt number at $z = 1$ versus the relative distance to criticality at $Pr = 10$ , $Le = 100$ and a) $Ge = 10^{-2}$ with various $\psi$ : (1) $\psi = 0$ , (2) $\psi = 0.01$ , (3) $\psi = 0.05$ , (4) $\psi = 0.08$ ; (b) $\psi = 0.01$ with various $Ge$ : (1) $Ge = 10^{-4}$ , (2) $Ge = 10^{-2}$ , (3) $Ge = 10^{-1}$ , (4) $Ge = 1$ . . . . .	85
3.13	Curves of the mixing number $M$ with $Ge = 10^{-4}$ for a) $Pr = 10, Le = 100$ and different separation ratios : (1) $\psi = 0.01$ , (2) $\psi = 0.05$ and (3) $\psi = 0.1$ ; b) $Pr = 1, \psi = 0.01$ and (1) $Le = 1$ , (2) $Le = 2$ ; c) $Pr = 10, \psi = 0.01$ and (3) $Le = 100$ , (4) $Le = 200$ . . . . .	86
4.1	Representative diagram of the problem with associated boundary conditions . . . . .	92
4.2	Vertical distribution of the basic temperature $\frac{T_b}{\Lambda}$ (solid line) and the basic concentration $\frac{C_b}{\Lambda}$ (dashed lines) for (a) case A with (1) $\psi = 0.05$ , (2) $\psi = 0.2$ , (3) $\psi = 0.5$ , (4) $\psi = 1$ and (b) case B with (1) $\psi = -0.05$ , (2) $\psi = -0.2$ , (3) $\psi = -0.5$ , (4) $\psi = -1$ . . . . .	94
4.3	Representative diagram of the two flow regions : (a) multicellular flow, and (b) monocellular flow. . . . .	97
4.4	Comparison between the primary bifurcation thresholds obtained analytically (dashed line) and numerically (dots) with $Le = 100$ and $Pr = 10$ . . . . .	97
4.5	Primary critical Reynolds number $Re_{c1}$ as a function of $Pr\sqrt{Ge}$ in case A with $Le = 100$ for : (1) $\psi = 0.15$ , (2) $\psi = 0.3$ , (3) $\psi = 0.5$ . . . . .	98
4.6	Vertical distribution of the monocellular temperature and concentration at the center of the cavity obtained at $Le = 100, Pr = 10, Ge = 10^{-4}$ and : (1) $\Lambda = \Lambda_c$ , (2) $\Lambda = 1.1\Lambda_c$ , (3) $\Lambda = 1.15\Lambda_c$ , (4) $\Lambda = 2\Lambda_c$ . First column (Case A with $\psi = 0.2$ ) and second column (Case B with $\psi = -0.2$ ) . . . . .	99
4.7	Critical values obtained for case A. (a) $\Lambda_{c2}$ , (b) $k_{c2}$ , (c) $\omega_{c2}$ as functions of $\psi$ for $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$ and different Lewis numbers : $Le = 50$ (circles), $Le = 100$ (squares), $Le = 200$ (diamonds). . . . .	102
4.8	Critical values obtained for case B. (a) $\Lambda_{c2}$ , (b) $k_{c2}$ , (c) $\omega_{c2}$ as functions of $\psi$ for $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$ and different Lewis numbers : $Le = 50$ (circles), $Le = 100$ (squares), $Le = 200$ (diamonds). . . . .	103
4.9	(a) The average velocity $U_a$ versus the viscous dissipation temperature difference $\Delta T_{vd}$ and (b) the critical average velocity $U_{ac}$ at the onset of uni-cellular flow versus $H$ . Three mixtures are considered and studied in (1) [27], (2) [28] and (3) [25] . . . . .	105
4.10	Case A : Maximum dimensionless concentration gradient $m_{max} = m(\Lambda_{c2})$ as functions of $\psi$ : (a) $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$ and different Lewis numbers : $Le = 50$ (circles), $Le = 100$ (squares), $Le = 200$ (diamonds) and (b) $Le = 100, Ge = 10^{-4}$ and different Prandtl numbers : $Pr = 1$ (circles), $Pr = 10$ (squares), $Pr = 10^5$ (diamonds) . . . . .	107
4.11	$H_{opt}$ and $m_{opt}^*$ versus $U_a$ . . . . .	108



# Introduction Générale

Depuis plus d'un siècle, la stabilité hydrodynamique a été un domaine clé de la mécanique des fluides, attirant l'attention de nombreux chercheurs éminents. Parmi eux, Osborne Reynolds occupe une place prépondérante grâce à son expérience emblématique sur l'écoulement dans une conduite cylindrique [1]. Cette expérience révolutionnaire a ouvert la voie à une compréhension approfondie des mécanismes de stabilité dans les écoulements fluides, et ses résultats continuent d'influencer les recherches actuelles dans le domaine.

La théorie de la stabilité hydrodynamique s'intéresse à la réponse d'un écoulement laminaire à une perturbation d'amplitude faible ou modérée. Si l'écoulement revient à son état laminaire d'origine, on le définit comme stable, alors que si la perturbation s'amplifie et fait passer l'écoulement laminaire à un état différent, on le définit comme instable. Les instabilités entraînent souvent un mouvement turbulent du fluide, mais elles peuvent aussi amener l'écoulement dans un état laminaire différent, généralement plus compliqué. La théorie de la stabilité traite l'analyse mathématique de l'évolution des perturbations superposées à un écoulement laminaire de base. Dans de nombreux cas, on suppose que les perturbations sont faibles afin de pouvoir justifier d'autres simplifications. En particulier, une équation linéaire régissant l'évolution des perturbations est souhaitable. Lorsque les vitesses des perturbations dépassent de quelques pourcents l'écoulement de base, les effets non linéaires deviennent importants et les équations linéaires ne permettent plus de prédire avec précision l'évolution des perturbations. Bien que les équations linéaires aient une zone de validité limitée, elles sont importantes pour détecter les mécanismes de croissance physique et identifier les types de perturbations dominants.

Les problèmes de stabilité sont classés dans deux catégories principales : la stabilité linéaire, qui concerne la stabilité d'une solution face à de petites perturbations, et la stabilité non linéaire, qui s'intéresse à la stabilité d'une solution face à des perturbations plus importantes et à la manière dont elle évolue dans le temps. Dans ce contexte, la stabilité est définie comme la capacité d'un système à revenir à son état d'équilibre après avoir subi une perturbation. Les théories de la stabilité sont largement utilisées dans de nombreux domaines pour comprendre le comportement des systèmes dynamiques complexes, tels que la physique, la biologie, l'économie, l'ingénierie, l'écologie et la sociologie.

## 1.1 Problème de Rayleigh-Bénard et Rayleigh-Bénard-Poiseuille

Un exemple très représentatif de déstabilisation progressive d'un état statique d'un milieu fluide est le problème de Rayleigh-Bénard. Dans ce problème, l'agent de déstabilisation est la convection thermique (e.i., le facteur de déstabilisation est le gradient de température qui, faisant varier la masse volumique, modifie la force d'Archimède. La viscosité, qui relie les particules, est un facteur stabilisant). Le seuil est franchi lorsque ces deux facteurs cessent de s'équilibrer.

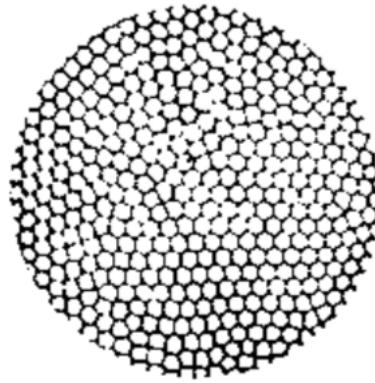


FIGURE 1.1 – L'une des célèbres photographies originales de Bénard montrant la vue de dessus des motifs de convection dans une mince couche de spermaceti chauffée par le dessous.[2]

Bien que des preuves de mouvements convectifs aient été mises en évidence par J. Thomson 1882 [3], les premières expériences quantitatives (figure 3.1) ont été réalisées par le physicien Français Henri Bénard vers l'année 1900 [4]. La première approche théorique a été faite pour la première fois en 1916 par Lord Rayleigh [5] d'où le nom de "convection Rayleigh-Bénard". En effet, Rayleigh a établi la théorie de la convection induite par la flottabilité afin d'expliquer, notamment, les observations de Bénard. Nous savons maintenant que la théorie n'était en fait pas pertinente dans ce cas particulier puisque ce dernier a supposé des conditions aux limites dans lesquelles la composante verticale de la vitesse et la perturbation de la température s'annulent aux parois supérieure et inférieure (conduction thermique parfaite). Ces hypothèses ont fait perdre à l'analyse tout lien avec l'expérience d'Henri Bénard qui lui a étudié la stabilité d'une fine couche d'huile peu profonde avec une surface supérieure libre pour laquelle les effets de tension superficielle sont dominants. Cela a entraîné des divergences entre les résultats théoriques et expérimentaux jusqu'en 1958, lorsque John Pearson a retravaillé le problème en se basant donc sur la tension superficielle [6], ce qui correspond à l'observation initiale de Bénard. Il a mis en évidence le rôle de l'effet Marangoni thermique. Néanmoins, dans l'usage moderne, la "convection de Rayleigh-Bénard" fait référence aux effets dus à la température, alors que la "convection de Bénard-Marangoni" fait spécifiquement référence aux effets de la tension superficielle [4]. on peut se référer à [2] pour plus d'explications sur la raison pour laquelle il y avait confusion entre ces deux mécanismes.

Dans l'article [5], Lord Rayleigh étudie plus en détail le phénomène qui est maintenant connu sous le nom de convection de Rayleigh-Bénard, dans lequel une couche de fluide chauffée par le bas subit une transition vers un mouvement convectif. Lord Rayleigh montre que pour une épaisseur de couche et une différence de température données, il existe une valeur critique du nombre de Rayleigh au-delà de laquelle le fluide devient instable et le mouvement convectif s'installe. Il dérive également une expression pour le nombre d'onde critique du mode de

convection le plus instable, qui est maintenant connu comme le critère du nombre de Rayleigh.

L'instabilité de Rayleigh-Bénard a été largement étudiée dans le contexte de la dynamique des fluides et de la thermodynamique, et a de nombreuses applications dans une série de domaines, notamment la géophysique (convection dans le manteau terrestre, les océans et l'atmosphère [7]), la météorologie [8] ainsi qu'en science des matériaux, par exemple l'étude des effets de la convection de Rayleigh-Bénard sur la morphologie des cristaux et la formation de défauts [9], etc. Outre ses applications pratiques, l'instabilité de Rayleigh-Bénard a également fait l'objet de nombreuses recherches théoriques. Des modèles théoriques ont été développés pour expliquer les mécanismes physiques à l'origine de l'instabilité, et pour prédire le comportement des cellules de convection dans différentes conditions. On se référera notamment à l'ouvrage de Chandrasekhar [10] qui compile les principaux résultats concernant l'analyse linéaire de l'instabilité Rayleigh-Bénard, telle que développée par Rayleigh et Bénard. Chandrasekhar étend ensuite cette analyse pour inclure les effets de la compressibilité, la thermodépendance de la viscosité et des champs magnétiques sur l'instabilité. En plus de la théorie linéaire, Chandrasekhar présente une discussion détaillée de la dynamique non linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, y compris l'apparition de la turbulence et la formation de structures cohérentes. Il considère également les effets de l'asymétrie, de la rotation et de la stratification sur l'instabilité.

Une référence générale plus récente est celle de Koschmieder [11]. Consultez également les revues de Busse [12] sur la convection non linéaire, de Newell, Passot et Lega [13] et de Cross et Hohenberg [14] pour l'approche théorique du chaos spatio-temporel. Les développements les plus récents sur la transition vers la turbulence dans la convection se trouvent dans la revue de Bodenschatz, Pesch et Ahlers [15], tandis que l'article de Siggia [16] est consacré à la convection turbulente entièrement développée.

D'autres facteurs de déstabilisation jouent un rôle important dans les problèmes d'hydrodynamique : le plus simple est le cisaillement, c'est-à-dire l'irrégularité spatiale d'un profil de vitesse moyenne. Les écoulements de Poiseuille représentent un prototype d'écoulement de cisaillement dans lequel l'apparition d'instabilités dépend fortement des conditions initiales et donc du champ de perturbation. Ainsi, l'analyse de la stabilité linéaire des écoulements Rayleigh-Bénard-Poiseuille présentent un intérêt fondamental pour la stabilité hydrodynamique.

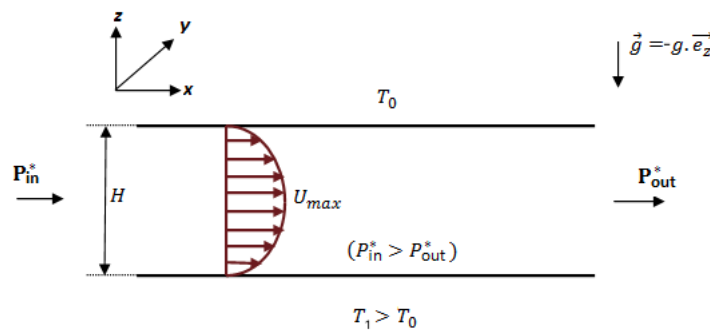


FIGURE 1.2 – Configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille

Le problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille consiste à étudier l'écoulement d'un fluide confiné entre deux plaques parallèles, soumis à une différence de température verticale et à une différence de pression horizontale (figure 1.2). Plus précisément, le fluide est chauffé par le bas et refroidi par le haut, créant une différence de température qui induit une convection naturelle. En même temps, le fluide est soumis à une différence de pression horizontale qui peut



être produite, par exemple, par l'application d'une pompe à l'une des extrémités du canal.

Historiquement, l'analyse de stabilité linéaire de RBP a été motivé par l'étude des phénomènes atmosphériques tels que l'observation de l'alignement des nuages [17] (les rouleaux de convection dans la basse atmosphère ont tendance à s'aligner dans la direction de la couche limite atmosphérique ce qui fait que l'humidité contenue dans l'air chaud ascendant de ces rouleaux se condense pour former des nuages alignés dans le sens du courant, entraînant la formation de rues nuageuses (figure 1.3)), et océanographique tel que par exemple l'étude du mouvement et la distribution spatiale du phytoplancton et des suspensions d'algues qui sont affectés par la convection en présence d'un écoulement de cisaillement dans les lacs recouverts de glace [18], [19].



FIGURE 1.3 – Rues de nuages au-dessus de la mer d'Okhotsk : Un spectacle atmosphérique engendré par des rouleaux de convection [20]

la première analyse de stabilité connue de PRB avec stratification thermique instable dans un fluide de Boussinesq est dû à Gage et Reid en 1968 [21]. Ils ont trouvé que l'instabilité thermique conduit à l'apparition de structures convectives sous forme de rouleaux longitudinaux dont le seuil est identique au problème de Rayleigh-Bénard, c'est-à-dire un nombre de Rayleigh critique  $Ra_c = 1707.762$ . De plus, ils ont observé que le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux était indépendant du nombre de Reynolds qui mesure l'intensité de l'écoulement principal. En revanche, le nombre de Rayleigh critique associé à l'émergence des rouleaux transversaux et obliques est une fonction croissante du nombre de Reynolds. Ils ont donc conclu que l'écoulement principal induit une sélection linéaire des structures convectives sous forme de rouleaux longitudinaux. Platten (1971) [22] a étendu les résultats de Gage et Reid pour tous les nombres de Prandtl.

Tveitereid (1974)[23] s'est intéressé à l'écoulement de Rayleigh-Bénard-Poiseuille dans une conduite finie. Contrairement aux conclusions de Gage et Reid 1968 [21], celui-ci a démontré que les rouleaux transversaux se développent en premier pour de faibles nombres de Reynolds. Ce comportement a aussi été observé pour des nombres de Reynolds modérés par Luijkx, Platten et Legros (1981) [24]. Cependant, à des nombres de Reynolds plus élevés, ils ont montré que les rouleaux longitudinaux s'établissent en premier.

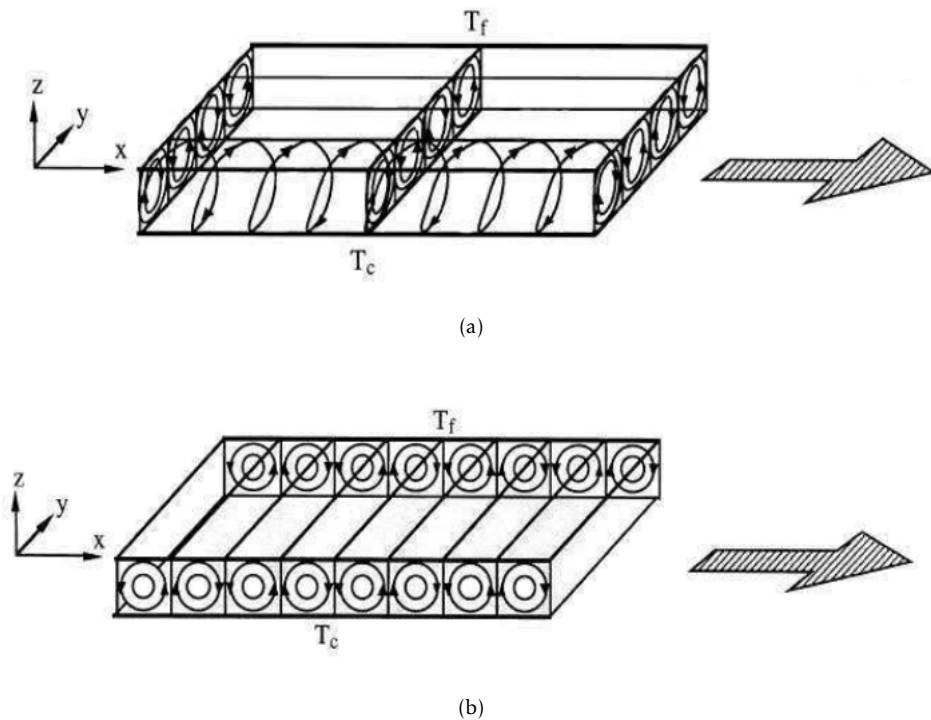


FIGURE 1.4 – Schéma des structures convectives dans un système de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle [25] : (a) rouleaux longitudinaux (RL) et (b) rouleaux transversaux (RT)

Les expériences menées par Müller, Luke et Kamps [26], [27] ont fourni des informations importantes sur les schémas de convection dans les écoulements horizontaux, ainsi que sur les conditions requises pour la formation de schémas de convection spécifiques. Ces résultats ont des applications importantes dans divers domaines de l'ingénierie, notamment la conception de systèmes de chauffage et de refroidissement, ainsi que la compréhension de la circulation des fluides dans les océans et l'atmosphère.

La question des instabilités convectives et absolues a été étudiée par Carrière et Monkewitz [28]. Ils ont montré que l'instabilité absolue peut l'emporter sur l'instabilité convective dans certains cas, même pour des nombres de Rayleigh et de Reynolds relativement faibles. Les auteurs concluent que les effets de cisaillement sont importants dans les systèmes de convection mixte et peuvent conduire à des instabilités absolues qui ne sont pas présentes dans les systèmes de convection pure.

Les résultats du problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille peuvent être utilisés pour comprendre les mécanismes de transfert de chaleur et de masse dans les fluides confinés. Les travaux théoriques et expérimentaux de Mori et Uchida (1966) [29] et les travaux numériques de Ouazzani et al. (1989) [30] sont disponibles.

Dans le contexte des fluides non-newtoniens, il convient de mentionner les recherches significatives menées par Chérif Nouar et ses collègues, qui ont réalisé une étude exhaustive portant sur la stabilité linéaire, faiblement non linéaire et non linéaire des fluides viscoplastiques dans le cadre de la configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille [31]-[33]. De plus, les travaux de Requilé ont également contribué de manière notable à la compréhension des comportements

des fluides viscoélastiques dans une configuration similaire de Rayleigh-Bénard-Poiseuille [34]. Ces études ont jeté une lumière précieuse sur les phénomènes complexes associés à ces types de fluides dans des environnements de convection thermique et de cisaillement.

Finalement, il convient de rappeler l'étude menée par Orzag (1971)[35] portant sur la stabilité purement hydrodynamique de l'écoulement de Poiseuille (isotherme). Il a montré que les modes de perturbation de l'écoulement plan de Poiseuille sont très sensibles aux conditions aux limites et aux paramètres du fluide, et que l'instabilité hydrodynamique, appelée instabilité de Tollmien-Schlichting peut se produire dès que le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique  $Re_c^{TS} = 5772$ .

## 1.2 Effet Soret

Lorsqu'un fluide est exposé à un gradient de température en présence d'un champ de gravité, cela peut induire un mouvement appelé convection naturelle. Si le fluide est un mélange binaire, ce gradient de température peut également provoquer un gradient de concentration, connu sous le nom d'effet Soret ou de thermodiffusion. Ce gradient de concentration affecte à son tour le gradient de masse volumique du fluide et peut modifier les conditions de déclenchement de la convection. En d'autres termes, la thermodiffusion ou l'effet Soret est la migration de composés chimiques dans un fluide composé d'au moins deux composants purs initialement homogènes, qui est provoquée par un gradient de température. Ce phénomène est également appelé thermophorèse dans les systèmes polymères et colloïdaux.

La densité de flux de masse d'un des constituants d'un mélange binaire est donnée par l'équation (1.1), qui comporte deux termes : la loi de diffusion de Fick et l'effet Soret ou effet de thermodiffusion.

$$\vec{J}_m = \underbrace{-\rho D \vec{\nabla} C}_{\vec{J}_{Fick}} \underbrace{-\rho D_T F(C) \vec{\nabla} T}_{\vec{J}_{Soret}} \quad (1.1)$$

Le gradient de fraction massique est représenté par  $\vec{\nabla} C$ , et le gradient de température par  $\vec{\nabla} T$ . Les coefficients de diffusion massique et de thermodiffusion sont notés respectivement  $D$  et  $D_T$ , tandis que  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide. La fonction  $F(C)$  est une fonction particulière de la fraction massique  $C$ , qui vérifie  $F(C=0) = 0$  et  $F(C=1) = 0$ . On suppose souvent dans la littérature que  $F(C) = C_0(1 - C_0)$  avec  $C_0$  la fraction massique initiale (Hypothèse de faible variation de  $C$  autour de  $C_0$ ). De manière générale, le coefficient de thermodiffusion  $D_T$  dépend de la fraction massique et de la température, et peut même changer de signe avec cette dernière[36].

Cependant, la séparation n'est pas totale, mais partielle ; au fur et à mesure que les composés se séparent et que le gradient de concentration induit par la thermodiffusion apparaît, la diffusion de masse (Fickian) tend à homogénéiser le système. Il y a donc une compétition entre la thermodiffusion et la diffusion de masse jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. Le flux de masse devient alors nul ( $\vec{J} = \vec{0}$ ), et l'on observe un gradient de concentration  $\vec{\nabla} C$  propre à chaque système et à ses conditions thermodynamiques, relié au gradient de température par la relation suivante :

$$\vec{\nabla} C = -\frac{D_T}{D} C_0(1 - C_0) \vec{\nabla} T \quad (1.2)$$

Le coefficient Soret, noté  $S_T$ , est le rapport entre le coefficient de thermodiffusion  $D_T$  et

le coefficient de diffusion massique  $D$ . Il est proportionnel au rapport entre le gradient de concentration et le gradient de température. Si  $S_T > 0$  et si  $D_T$  est positif, alors le gradient de concentration  $\vec{\nabla} C$  est de signe opposé au gradient de température  $\vec{\nabla} T$ , ce qui signifie que la concentration augmente à mesure que l'on s'approche de la paroi froide, et inversement quand  $S_T < 0$  (figure 1.5). La valeur absolue de  $S_T$  est généralement inférieure à  $10^{-2} K^{-1}$  et le gradient de concentration induit par l'effet Soret reste faible [37].

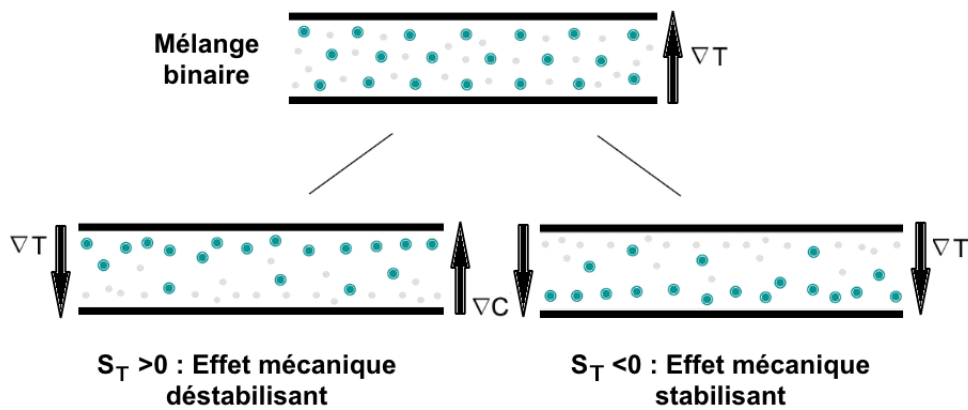


FIGURE 1.5 – Représentation schématique de la migration des espèces en fonction du coefficient Soret :  $S_T = \frac{D_T}{D}$ , où  $D_T$  et  $D$  sont le coefficient de thermodiffusion et le coefficient de diffusion isotherme.

Outre les gradients de température et de concentration, les états stationnaires (et transitoires) des processus de thermodiffusion sont caractérisés par des fluctuations hydrodynamiques allant jusqu'à la taille du conteneur et ayant des durées de vie de l'ordre de quelques secondes. De plus, le gradient de concentration génère inévitablement un gradient de densité qui, s'il est opposé au champ gravitationnel, sur Terre, peut produire un mouvement de convection qui déstabilise le champ de concentration créé [36].

L'effet Soret, également connu sous le nom de thermodiffusion, est un phénomène largement répandu dans la nature, qui joue un rôle crucial dans de nombreux systèmes physiques et biologiques. Il contribue à la formation des gradients de concentration de sel dans les océans, à l'impact de la composition des mélanges dans les réservoirs de gaz naturel et de pétrole, ainsi qu'au transport de masse dans les membranes biologiques en réponse à de faibles gradients thermiques. De plus, cet effet est essentiel pour la séparation de mélanges isotopiques et trouve des applications dans divers processus industriels et naturels. Bien que la thermodiffusion ait été utilisée avec succès dans des domaines d'ingénierie tels que l'enrichissement nucléaire et l'analyse des protéines [38], [39], son utilisation à grande échelle pour le dessalement a été limitée en raison de son efficacité comparativement plus faible par rapport aux méthodes traditionnelles telles que la distillation et l'osmose inverse. Cependant, des recherches récentes se sont intéressées au développement de la désalinisation par thermodiffusion (TDD) à grande échelle, une approche prometteuse sans membrane qui peut être activée par de faibles différences de température et exploiter des sources d'énergie telles que la chaleur résiduelle industrielle, l'énergie solaire ou l'environnement ambiant, offrant ainsi de nouvelles perspectives pour relever le défi mondial de l'accès à l'eau potable [40].

## 1.2.1 Revue bibliographique sur la thermodiffusion

Le phénomène de thermodiffusion a été initialement observé par Ludwig en 1856 [41], qui a remarqué lors de ces expériences qu'une solution de sulfate de soude, soumise à un gradient thermique, perd son homogénéité. Ce n'est que plus tard, à partir de 1879 [42], [43], que Soret, un scientifique suisse, a mené des recherches plus approfondies sur la thermodiffusion de solutions électrolytiques et a donné son nom à ce phénomène. Soret a démontré expérimentalement la présence d'un gradient de concentration ionique opposé au gradient thermique, en observant la migration des ions vers les parties froides de son récipient d'étude. Il convient de souligner l'importance des recherches menées par Dufour en 1872, qui ont démontré l'existence d'un phénomène opposé, communément connu sous le nom de "l'effet Dufour". Cette découverte met en évidence l'émergence d'un gradient de température résultant d'un gradient de concentration.

La thermodiffusion, qui se réfère à la séparation des espèces dans les mélanges en raison des gradients de température, demeure un phénomène complexe et peu compris malgré de nombreuses observations. Plusieurs études ont été menées pour mieux comprendre la convection induite par l'effet Soret dans les milieux fluides. Platten et Legros [44] ainsi que Batiste et al. [45] ont contribué aux travaux sur ce sujet. Dans le contexte des mélanges binaires en milieu poreux, les recherches menées par Brand et Steinberg [46], [47], Bahloul et al. [48], et Bourich et al. [49], [50] revêtent une grande pertinence. Costesèque et al. [51] ont, quant à eux, offert un aperçu des différentes approches théoriques, expérimentales et numériques actuelles dans le domaine de la thermodiffusion.

### 1.2.1.1 Convection thermosolutale avec effet Soret

La convection doublement diffusive (ou thermosolutale) se réfère à un phénomène complexe dans lequel à la fois la chaleur et les substances dissoutes sont transportées simultanément dans un fluide. Il se produit lorsque des gradients de température et de concentration coexistent, conduisant à des mouvements de fluide et à des échanges de chaleur et de matière. Ce processus combine les mécanismes de diffusion thermique (dû à la différence de température) et de diffusion de soluté (causée par la différence de concentration) pour générer des flux convectifs. La convection double diffusion est observée dans de nombreux systèmes naturels et industriels, tels que les océans, les lacs, les réacteurs chimiques, et elle joue un rôle clé dans le mélange, la circulation et les transformations des fluides.

Mis à part les travaux cités dans la thèse de Khouzam [37], Mansour et al. [52] ont étudié la convection doublement diffusive induite dans une couche poreuse horizontale soumise à des flux uniformes de chaleur et de masse en présence de l'effet Soret. L'étude de l'impact de la thermodiffusion sur la multiplicité des solutions est étudiée. Ils ont démontré que le plan  $\psi-N$  (rapport de séparation – rapport de flottabilité) peut être divisé en quatre régions présentant différents comportements. Ils ont trouvé que l'effet Soret peut considérablement modifier le transfert de chaleur. Par exemple, cela peut entraîner une disparition complète de l'écoulement, ce qui ramènerait le système à un état purement conducteur.

Khadiri et al. [53] ont étudié numériquement l'effet Soret sur la convection double-diffusive dans une cavité poreuse carrée chauffée et salée par le bas. Leur étude a porté sur l'effet combiné du rapport de flottabilité  $N$  (qui caractérise le gradient de concentration externe imposé au milieu) et du paramètre Soret  $M$  (qui mesure l'amplitude de la thermodiffusion dans le milieu) sur les solutions multiples (écoulements monocellulaires, bicellulaires et tricellulaires) obtenues dans cette configuration dans le cas de la convection purement thermique. En variant le rapport de flottabilité, ils ont constaté que la présence de l'effet Soret peut avancer ou retarder (selon la valeur du paramètre Soret) l'apparition du régime oscillatoire. Tout comme Mansour et al. [52], Ils ont également constaté que le transfert de chaleur est considérablement affecté par l'effet

Soret.

Gaikwad et al. [54] ont étudié analytiquement, l'analyse de stabilité linéaire et faiblement non linéaire, de la convection doublement diffusive dans une couche poreuse anisotrope horizontale saturée d'un fluide de Boussinesq, chauffée et salée par le bas en présence de l'effet de Soret. Ils ont constaté que les paramètres d'anisotropie et le nombre de Lewis augmentent le transfert de chaleur et de masse. Le paramètre de Soret négatif augmente le transfert de chaleur tandis que le paramètre de Soret positif le diminue. Une tendance inverse est observée dans le cas du transfert de masse.

Dernièrement, la méthode de simulation numérique de Lattice Boltzmann a été utilisée par Xu et al. [55] afin d'étudier la convection naturelle à double diffusion d'un cylindre chauffé dans l'enceinte carrée en tenant compte de l'effet Soret et Dufour. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur et de masse diminue avec l'augmentation du coefficient Soret ( $S_r$ ) et Dufour ( $D_f$ ), ce qui conduit à une amélioration de la stabilité.

Récemment, des chercheurs ont exploré l'impact de la dissipation visqueuse sur la convection doublement diffusive avec prise en compte de l'effet Soret. Dubey et Murthy [56], se sont penchés sur l'instabilité convective doublement diffusive d'un écoulement horizontal à travers une couche poreuse hautement perméable et infiniment longue. Cette couche est délimitée par deux surfaces rigides maintenant des concentrations de soluté constantes, mais différentes, l'une étant isolée thermiquement et l'autre isotherme. L'étude utilise le modèle de Darcy-Brinkman, prenant en compte l'effet Soret et le chauffage visqueux non négligeable. Les perturbations se présentent sous forme de rouleaux obliques. Les résultats montrent que la stabilité de l'écoulement est maximale dans le régime de Brinkman, favorisant les rouleaux longitudinaux. Le gradient de concentration de soluté et le paramètre Soret ont à la fois des effets stabilisants et déstabilisants, selon leurs signes relatifs.

Roy et Murthy. [57], ont examiné l'impact du paramètre de Soret sur la stabilité de la convection doublement diffusive en présence de dissipation visqueuse dans un canal poreux horizontal. Les résultats montrent que les rouleaux longitudinaux sont plus instables pour des valeurs négatives du paramètre de Soret et de faibles valeurs de dissipation visqueuse, tandis que les rouleaux transversaux deviennent plus instables avec des valeurs élevées de dissipation visqueuse. Dans leur deuxième article [58], ils ont étudié la stabilité de la convection doublement diffusive dans une couche poreuse horizontale avec une limite supérieure ouverte, en tenant compte de la dissipation visqueuse et de l'effet de Soret. Les résultats montrent que les rouleaux longitudinaux sont généralement plus instables, sauf dans des cas particuliers, et que le paramètre de Soret a un impact significatif sur la stabilité du flux, en particulier sous pression constante en haut et avec une diminution du nombre de Rayleigh critique ( $Ra_{cr}$ ) en présence de dissipation visqueuse, sauf pour certaines valeurs positives du paramètre de Soret.

### 1.2.1.2 Instabilité thermoconvective avec effet Soret

Lorsque la convection et l'effet Soret se produisent simultanément, cela engendre un phénomène appelé diffusion thermogravitationnelle, qui renforce la séparation des composants par rapport à la thermodiffusion pure. Plusieurs approches ont été développées pour améliorer cette séparation. Par exemple, Khouzam et al. [59] ont étudié l'utilisation de la convection mixte, tandis que Sioud et al. [60] ont démontré une séparation plus efficace des composants dans des colonnes annulaires sphériques par rapport à la colonne thermogravitationnelle verticale classique. Mojtabi et al. [61] ont exploré une configuration novatrice avec une couche poreuse horizontale où les parois se déplacent de manière opposée à vitesse constante. Parallèlement, Seta et al. [62] ont examiné la stabilité de la séparation des composants dans une microcolonne thermogravitationnelle parallélépipédique pour différents mélanges présentant un coefficient de

Soret négatif.

En complément, Sioud et al. [63] ont mené une étude où la convection forcée a été appliquée à un fluide binaire circulant dans une cavité, avec des parois verticales maintenues à des températures variables. Cette approche a permis une séparation continue des composants, et la possibilité de connecter plusieurs colonnes similaires offre la perspective d'une séparation totale. De plus, l'utilisation de colonnes thermogravitationnelles poreuses s'est avérée prometteuse pour augmenter considérablement la quantité de produit séparé.

En parallèle, une recherche récente menée par Zubova et al. [64] s'est penchée sur la convection d'un mélange binaire d'hydrocarbures liquides dans un milieu poreux composé de deux couches ayant des perméabilités différentes. Leurs résultats ont révélé que même à des vitesses de filtration relativement faibles, les flux convectifs étaient suffisants pour mélanger le fluide, empêchant ainsi sa séparation, même lorsque le flux pénétrait faiblement dans la couche moins perméable. Par ailleurs, Lyubimova et al. [65] ont examiné la convection induite par l'effet Soret dans une couche poreuse horizontale d'un fluide ternaire chauffé par le bas.

D'autre part, bien que la thermodiffusion et le problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP) aient fait l'objet de nombreuses recherches, la convection de Rayleigh-Bénard-Poiseuille-Soret (RBPS) a reçu moins d'attention, bien qu'elle présente un intérêt certain pour diverses applications.

Les premières avancées dans ce domaine remontent aux années 1950, lorsque Thomas a mis au point une cellule expérimentale pour mettre en évidence l'effet Soret. Cette cellule a été largement utilisée dans les années 1970 pour mesurer les coefficients de Soret [44], [66].

Plus récemment, le professeur Lücke et ses collaborateurs ont travaillé sur le problème de PRBS. En 1996, Jung et Lücke [67] ont étudié le comportement convectif de mélanges binaires soumis à un écoulement de Poiseuille chauffé par le bas, avec un nombre de Reynolds inférieur à 1. Ils ont utilisé une méthode de tir pour résoudre les équations linéarisées du système.

Büchel et Lücke [68] ont publié un premier article portant sur l'influence de l'écoulement de type Poiseuille sur l'apparition de rouleaux croisés dans une couche de fluide binaire chauffée par le bas. Ils ont étudié le comportement linéaire et non linéaire de la couche de fluide, en utilisant deux moyens de simulation numérique. Ils ont établi des diagrammes de bifurcation pour différents taux de chauffage et ont montré la variation du nombre de Nusselt et de la fréquence de propagation des structures thermoconvectives.

Dans un second article, Büchel et Lücke [69] ont étudié l'influence des perturbations convectives sur la perte de stabilité de la solution de base d'une couche de fluide binaire chauffée par le bas, soumise à un écoulement de Poiseuille et différents facteurs de séparation. Ils ont comparé la réponse obtenue par simulation numérique avec celle obtenue à partir de l'approximation des équations d'amplitude de type Ginsburg-Landau.

Piquer et ses collègues [70] ont étendu l'étude du problème de PRBS en effectuant une analyse numérique détaillée en 2D et en utilisant des techniques de PIV pour visualiser les ondes de déplacement. Ils ont analysé le comportement oscillatoire de l'écoulement résultant pour différents mélanges binaires, tout en caractérisant précisément l'aspect oscillatoire des rouleaux transversaux pouvant se déplacer en amont ou en aval de l'écoulement principal.

L'étude, menée par Hu et al. [71], a examiné les instabilités temporelles et spatio-temporelles du problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Soret dans une couche de fluide binaire chauffée par le bas ou par le haut. Les résultats montrent que les seuils critiques augmentent fortement lorsque le chauffage est effectué par le bas pour des facteurs de séparation positifs, tandis que le chauffage par le haut conduit à la formation de deux courbes critiques pour le seuil de stabilité. Plus récemment, l'étude menée par Ben Hamed et al. [72], a examiné la formation de rouleaux dans un mélange binaire chauffé par le bas en présence d'un écoulement horizontal. Les résultats montrent que la structure convective 2D ou 3D apparaît lorsque la bifurcation est supercritique.

De plus, ils ont montré que le rapport d'aspect a une forte influence sur le seuil de stabilité convective et que les ondes peuvent se déplacer dans le sens du flux ou en sens inverse pour les mélanges binaires avec des facteurs de séparation négatifs.

### 1.2.1.3 Mesure du coefficient de thermodiffusion

Lors de l'étude de l'instabilité hydrodynamique et de la détermination précise du coefficient de Soret, les chercheurs se heurtent à un défi majeur en raison de sa faible valeur, généralement de l'ordre de  $10^{-3}K^{-1}$ , engendrant un gradient de fraction de masse très faible. Afin de surmonter cette difficulté, différentes approches sont employées, telles que l'utilisation de cellules de thermodiffusion ou de colonnes thermogravitationnelles pour mesurer le coefficient de Soret [73].

Les cellules de thermodiffusion sont des dispositifs qui consistent à placer le mélange entre deux parois horizontales à des températures différentes. Cette configuration permet de mesurer le gradient de concentration en l'absence de convection. D'un autre côté, les colonnes thermogravitationnelles sont dotées de parois verticales et utilisent la combinaison de la séparation des espèces par thermodiffusion et des courants de convection verticaux pour obtenir une séparation thermogravitationnelle entre les extrémités de la colonne.

L'idée de la colonne thermogravitationnelle a été introduite en 1938 par Clusius et Dickel [74] dans le but de séparer les mélanges gazeux ou liquides, en se concentrant initialement sur la séparation des isotopes. Cependant, grâce à la théorie FJO développée en 1939 par Furry, Jones et Onsager [75], il a été possible de mesurer le coefficient de thermodiffusion et d'appliquer les principes de la colonne thermogravitationnelle aux mélanges liquides. Ce dispositif de colonne thermogravitationnelle se compose de deux plaques planes parallèles formant une cavité dans laquelle le mélange est introduit. Un gradient de température perpendiculaire à la force gravitationnelle est appliqué au fluide. L'effet de thermodiffusion génère une différence de concentration horizontale, tandis que le gradient horizontal de densité crée un flux convectif vertical. La diffusion moléculaire s'oppose à ce flux en cherchant à réduire le gradient de concentration. Afin de déterminer les coefficients de thermodiffusion, deux méthodes principales sont couramment utilisées. La première méthode traditionnelle implique le prélèvement de cinq échantillons différents le long de la colonne thermogravitationnelle (TGC). En utilisant la variation de densité et d'indice de réfraction, il est possible d'obtenir le profil vertical de concentration et de déterminer les coefficients de thermodiffusion (Lapeira, 2017 [76]). Cette approche présente l'avantage d'utiliser des colonnes de plus grande taille, ce qui permet une meilleure séparation des espèces et une plus grande sensibilité des mesures. Toutefois, elle nécessite un échantillon plus important et un temps de test plus long (figure 1.6).

La deuxième méthode repose sur l'interférométrie numérique optique et utilise une microcolonne thermogravitationnelle (micro TGC). Cette approche permet d'acquérir des motifs d'interférence à chaque étape de l'expérience, la variation de phase obtenue est liée à la différence de concentration (via les propriétés optiques) le long de la micro TGC (Lapeira, 2018 [77]), ce qui facilite la détermination précise des coefficients de thermodiffusion. En outre, cette méthode offre la possibilité d'étudier l'état transitoire et de déterminer le coefficient de diffusion.

Au fil des années, d'importants progrès ont été réalisés dans le développement de méthodes optiques permettant de mesurer avec précision les coefficients de diffusion moléculaire et thermique des mélanges binaires (Mialdun, 2011 [78]). Ces méthodes présentent l'avantage de ne pas interférer avec le processus de diffusion, offrant ainsi une grande précision dans les résultats obtenus. Néanmoins, l'étude de la thermodiffusion dans les mélanges complexes pose certains défis, notamment en raison de la variation du signe des coefficients de Soret pour les différentes espèces présentes. Par conséquent, la littérature scientifique ne propose qu'un nombre limité de



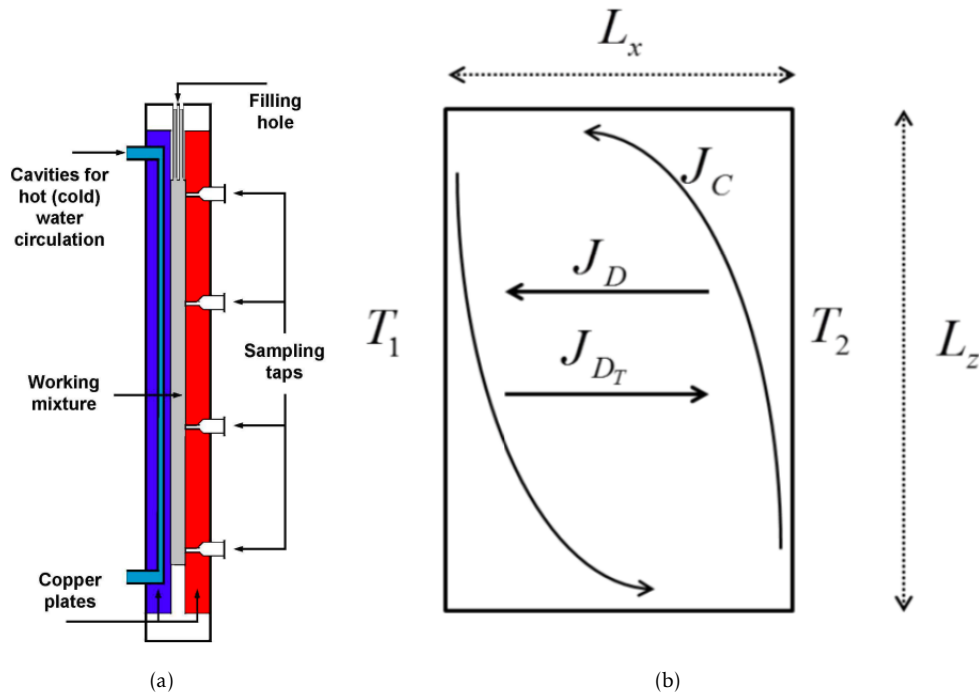


FIGURE 1.6 – a) Schéma du dispositif de colonne thermogravitationnelle [76], b) principe de la colonne thermogravitationnelle [36]. Cette configuration, comprenant deux plaques parallèles avec un gradient de température horizontal, génère trois types de flux : le flux diffusif  $J_D$ , le flux thermodiffusif  $J_{D_T}$ , et le flux convectif  $J_C$  induit par le gradient de densité horizontal et la gravité. Ces flux, agissant à l'état stationnaire, engendrent un gradient vertical de composition. La méthode expérimentale consiste à extraire des échantillons de la colonne thermogravitationnelle (TGC) à différents points, à évaluer la variation de densité le long de la TGC, et à la convertir en concentration pour déterminer le coefficient  $D_T$  en analysant la pente de cette variation.

coefficients de thermodiffusion pour les mélanges binaires et ternaires, et les données disponibles ne sont souvent pas cohérentes.

Pour caractériser ces coefficients de thermodiffusion, différentes techniques expérimentales ont été employées. Les travaux menés par Sommermann et al. [79] ont porté sur la diffusion et la thermodiffusion des polymères dans des solvants mélangés. Ils ont utilisé des méthodes telles que l'analyse optique de déviation (OBD) et les expériences de colonne thermogravitationnelle (TGC) afin de caractériser ces phénomènes.

Il est important de souligner que pour de nombreuses espèces, y compris les ions (Romer 2013 [80]), les colloïdes (Putnam 2007 [81]), les polymères (Tsuji 2018 [82]) et les biomolécules (Duhr 2006 [83]), le coefficient de Soret peut être soit positifs (thermophobes) ou négatifs (thermophiles). La mesure de la température d'inversion ( $T_0$ ), qui indique le changement de thermophilie, peut être un défi. Cependant, Xu et al. [40] ont développé une nouvelle technique interférométrique numérique sensible et rapide permettant de mesurer avec précision la  $T_0$  dans des solutions aqueuses transparentes. Cette méthode offre également la possibilité d'extraire le coefficient de Soret pour une plage de température et une concentration données à partir d'une seule expérience.

Les études menées par Kruger et al. [84] ont permis de mesurer les coefficients de Soret et d'interdiffusion dans les alliages liquides binaires en utilisant la radiographie aux rayons X (XRR). Les résultats expérimentaux ont été en accord avec les prédictions des modèles théoriques, confirmant ainsi la capacité de prédire correctement la direction de la thermodiffusion pour les deux composants de l'alliage. Toutefois, les valeurs numériques obtenues étaient surestimées, soulignant ainsi la nécessité de développer une théorie plus précise pour décrire la thermodiffusion, même dans les liquides binaires atomiques.

Les études menées en microgravité continuent de jouer un rôle essentiel dans la compréhension fondamentale de la diffusion dans les fluides complexes. Cependant, l'accent est désormais mis sur la diffusion dans les mélanges multi-composants, en prenant en compte les conditions d'hypergravité et de gravité réduite. Cette évolution revêt une grande importance pour les missions d'exploration spatiale à long terme, où la capacité de manipuler des matériaux à l'état liquide est un facteur stratégique facilitant (Vailati et al., 2023 [85]).

D'importantes avancées ont été réalisées, notamment en ce qui concerne la comparaison des résultats obtenus en gravité terrestre et en microgravité, ainsi que pour les mélanges ternaires (Bou Ali, 2015 [86]). L'importance des conditions dans les mélanges ternaires et supérieurs a été soulignée (V. Shevtsova, 2011 [87]). De plus, de nouvelles relations entre les coefficients binaires et ternaires sur le triangle de Gibbs ont été établies (Mialdun, 2021 [88]).

Les études sur les mélanges ternaires ont permis de mieux comprendre la séparation induite par l'effet Soret. Des changements de signe le long des limites binaires et l'existence d'un point singulier dans le diagramme ternaire ont été observés (Schraml, 2021 [89]). Dans le cadre de la campagne de microgravité DCMIX, la thermodiffusion dans les mélanges ternaires a fait l'objet d'une étude approfondie, tant dans l'espace qu'en laboratoire, en utilisant diverses techniques optiques à deux couleurs ainsi que la méthode de colonne thermogravitationnelle. Sommermann a suggéré une approche permettant d'éviter les difficultés d'attribution des modes de diffusion en associant le mode rapide au solvant et le mode lent à la dynamique du polymère. Cependant, cette méthode se limite aux cas dilués à semi-dilués (Sommermann, 2022 [79]).

En conclusion, les recherches récentes dans le domaine de la thermodiffusion ont permis de réaliser des progrès significatifs dans la mesure et la compréhension des coefficients de diffusion thermique et moléculaire. Cependant, des défis subsistent, notamment en ce qui concerne l'étude des mélanges complexes et la nécessité de développer des théories plus précises. Les études en microgravité continuent d'être essentielles pour approfondir notre compréhension des phénomènes de diffusion dans les fluides complexes et les mélanges multicomposants.

### 1.3 Effet de dissipation visqueuse

Le phénomène de dissipation visqueuse se produit au sein d'un fluide sous l'effet des forces de frottement intermoléculaires, qui dissipent l'énergie cinétique due à l'écoulement sous forme de chaleur, induisant ainsi un gradient de température au sein du fluide. Le terme de dissipation visqueuse représente la dissipation d'énergie dans le fluide induite par le frottement visqueux entre les particules fluides, qui se traduit physiquement par une production de chaleur interne au fluide. Ce terme est nul lorsque le fluide est au repos. Il est d'autant plus grand que la viscosité du fluide est importante. La dissipation visqueuse est le plus souvent considérée comme négligeable, néanmoins des études ont montré qu'il pouvait induire une instabilité thermo-convective du simple fait de la production de chaleur au sein du fluide.

### 1.3.1 Terme de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie

Considérons un fluide pur, dont l'équilibre de la quantité de mouvement est donné par l'équation de Navier-Stokes. Le schéma conceptuel pour décrire les écoulements en présence de la flottabilité est l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq. La nature de l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq découle de l'hypothèse que les propriétés du fluide sont considérées comme constantes, à l'exception de la densité,  $\rho$ , dont la variation n'est prise en compte que dans le terme de force gravitationnelle du bilan de la quantité de mouvement. L'équation d'état linéaire est en fait supposée.

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T^* - T_0)) \quad (1.3)$$

où la densité de référence  $\rho_0$  correspond à une température de référence correctement définie  $T_0$ , et  $\beta_T$  est le coefficient de dilatation thermique à pression constante.

L'équation (1.3) implique que la densité est évaluée à pression constante et que les variations de température sont très petites. Ainsi, les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement sont données par :

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla}^* P^* - \beta_T(T^* - T_0) \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^{*2} \vec{u}^* \quad (1.5)$$

où  $\vec{u}^*$  est le champ de vitesse,  $t^*$  est le temps. De plus,  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $\vec{g}$  est l'accélération gravitationnelle,  $P^*$  est la différence entre le champ de pression et le champ de pression statique,  $-\rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}$  avec  $\vec{x}$  le vecteur de position, tandis que  $T^*$  est le champ de température. Les équations (1.4) et (1.5) doivent être complétées par le bilan d'énergie pour parvenir à la fermeture du problème. Dans la littérature, il existe plusieurs réponses à la question de la formulation appropriée du bilan local d'énergie dans le cadre de l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq. En fait, on peut trouver la formulation de Chandrasekhar [10] et la formulation de White [90].

$$\rho_0 c_v \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) T^* \right) = \kappa \vec{\nabla}^{*2} T^* + r + 2\mu \bar{\bar{D}}^* : \bar{\bar{D}}^* \quad (1.6)$$

où  $\mu = \rho_0 \nu$  est la viscosité dynamique,  $\kappa$  est la conductivité thermique,  $c_v$  est la chaleur spécifique à volume constant. Le symbole  $\bar{\bar{D}}^*$  représente le tenseur de déformation.

$$\bar{\bar{D}}^* = \frac{1}{2} (\vec{\nabla}^* \vec{u}^* + \vec{\nabla}^{*T} \vec{u}^*) \quad (1.7)$$

Le terme source dans l'équation (1.6),  $2\mu \bar{\bar{D}}^* : \bar{\bar{D}}^*$ , correspond à la **puissance thermique générée par la dissipation visqueuse**. Le terme ( $r$ ) dans l'équation (1.6) est la puissance qui peut être générée par unité de volume, par exemple, par effet Joule ou par réactions chimiques, mais il est négligeable dans notre cas.

Ainsi, la formulation du bilan local d'énergie par rapport à l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq est la suivante :

$$\rho_0 c_v \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) T^* \right) = \kappa \vec{\nabla}^{*2} T^* + 2\mu \bar{\bar{D}}^* : \bar{\bar{D}}^* \quad (1.8)$$

### 1.3.2 Revue bibliographique sur la dissipation visqueuse

La dissipation visqueuse agit comme source de chaleur et, en tant que telle, est capable de créer un gradient de température dans un milieu fluide ou poreux saturé en fluide. Dans des conditions limites appropriées, ce gradient de température peut produire une stratification thermique instable et, éventuellement, une instabilité thermique du milieu. Différents mécanismes peuvent entraîner des instabilités thermiques, telles que la thermo-dépendance de la viscosité, la force de flottabilité et les gradients de tension superficielle. Il est important de signaler que l'idée d'une instabilité provoquée par la dissipation visqueuse dans les écoulements de cisaillement n'est pas nouvelle. Joseph a décrit un phénomène similaire il y a plus de quarante ans en 1965 [91], puis Gebhart à suivi en (1969) [92]. Il convient de noter que dans les études antérieures, menées par Joseph (1965) [91] et Sukanek et al. (1973) [93] sur les écoulements de fluides purs, le couplage thermique dans l'équation du bilan local de quantité de mouvement provient de la dépendance de la viscosité à la température et non des variations de densité du fluide sous l'effet de la chaleur, le mécanisme physique à l'origine de l'instabilité est donc différent de celui de l'instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard. L'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse se rapproche de celui d'une source de chaleur interne, qui a été étudié par Roberts (1967) [94].

#### 1.3.2.1 Instabilité de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette avec dissipation visqueuse

Dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard classique, la dissipation visqueuse n'a pas d'effet dans le cadre d'une étude de stabilité linéaire, les effets qu'elle produit étant de nature non-linéaire. C'est pourquoi les études sur l'effet de la dissipation visqueuse ont principalement été menées dans le cas de systèmes thermo-convectifs avec écoulement, dans des configurations de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) ou Couette-Rayleigh-Bénard (CRB). Dernièrement, Requilé et al. (2020) [95] ont étudié les effets de la dissipation visqueuse sur les écoulements de convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille. Leurs résultats ont démontré que, en plus du gradient vertical de température imposé aux parois externes, la dissipation visqueuse contribue également à la stratification thermique de l'écoulement. Ils ont notamment observé deux régimes distincts d'instabilité. Pour des valeurs modérées du paramètre  $\Lambda$  (paramètre équivalent au nombre de Rayleigh de dissipation visqueuse), les caractéristiques de stabilité linéaire sont similaires à celles de la convection de Rayleigh-Bénard. En revanche, lorsque  $\Lambda$  atteint des valeurs élevées, l'effet de la dissipation visqueuse provoque une forte déstabilisation, déclenchant ainsi l'instabilité, même lorsque le chauffage se produit par le haut. Une analyse approfondie du bilan d'énergie thermique a permis de mieux comprendre le mécanisme physique qui explique la transition entre ces deux régimes de convection (figure 1.7).

Toutes ces études ont porté sur un fluide Newtonien. Dans le cas d'un fluide visco-élastique, on a l'étude menée par Alves et al. [96] qui se place dans le cas d'un milieu poreux et Requilé [34] sur l'étude de l'effet de la dissipation visqueuse sur l'écoulement de convection mixte d'un fluide visco-élastique en milieu fluide pour les configurations de Poiseuille et Couette.

#### 1.3.2.2 Instabilité de l'écoulement de Poiseuille/Couette plan avec dissipation visqueuse

Une approche plus récente, développée par Barletta et al. [97]-[102], a adopté une configuration différente. Cette approche suppose une viscosité non négligeable ainsi qu'une force de flottabilité significative, tout en considérant une viscosité indépendante de la température.

Ces auteurs ont montré que l'instabilité thermoconvective peut être produite uniquement par l'effet de la dissipation visqueuse, même sans forçage thermique aux limites, comme dans le système de Rayleigh-Bénard. En d'autres termes, le gradient de température vertical de base est

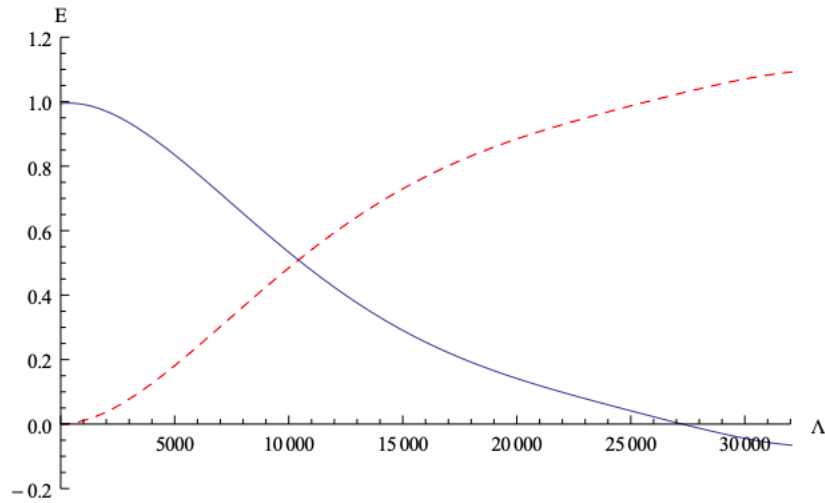


FIGURE 1.7 – Énergie thermique  $E_{th}$  (ligne continue bleue) et énergie de dissipation  $E_{vd}$  (ligne discontinue rouge) en fonction de  $\Lambda$  pour l'écoulement de RBP[95]

constitué uniquement par le chauffage visqueux interne, tandis que les conditions thermiques aux limites agissent juste pour permettre l'orientation vers le bas du gradient. Une paire de conditions aux limites qui produit cet effet est une limite inférieure adiabatique et une limite supérieure isotherme.

Barletta et al.[101] se sont penchés sur l'effet de la contribution de la dissipation visqueuse dans la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan (PPF) d'un fluide pur. Ils se sont concentrés sur un problème dans lequel il n'y a pas de gradient de température appliqué et donc le mécanisme traditionnel de Bénard n'est pas présent. Au lieu de cela, l'instabilité est causée par la dissipation visqueuse agissant comme une source de chaleur volumétrique, et le gradient de température déstabilisant est une conséquence des conditions limites thermiques asymétriques (limite inférieure adiabatique, limite supérieure isotherme). Cette configuration a été étudiée par Barletta et Nield (2010) [99] dans le contexte de l'écoulement de Couette.

Les résultats de Barletta et al. [101] ont révélé que l'instabilité due à la dissipation visqueuse peut se produire à des nombres de Reynolds bien inférieurs à ceux requis pour l'instabilité hydrodynamique d'Orr-Sommerfeld [35], [103]. Ils ont également identifié les rouleaux longitudinaux comme les perturbations les plus instables et ont introduit le paramètre  $\Lambda$  (nombre de Rayleigh interne due à la dissipation visqueuse) pour décrire la transition vers l'instabilité. Pour les rouleaux longitudinaux, la courbe de stabilité neutre  $\Lambda(k)$  dépend du nombre de Prandtl ( $Pr$ ), mais elle est indépendante du nombre de Gebhart ( $Ge$ ). Dans le cas limite où  $Pr \rightarrow \infty$ , ils ont obtenu les valeurs critiques suivantes :  $k_c = 2.572049$  et  $\Lambda_c = 221.2619$ .

Par la suite, Requilé et al.[104] ont réalisé une analyse faiblement non linéaire du problème étudié par Barletta et al. [101] pour examiner le comportement à proximité du seuil des rouleaux longitudinaux. Leur objectif était de comprendre l'influence des différentes non-linéarités présentes dans le système sur les caractéristiques de bifurcation. Ils ont numériquement déterminé les coefficients de l'équation d'amplitude de Landau jusqu'au troisième ordre et ont étudié en détail l'effet des non-linéarités sur l'amplitude des perturbations et le taux de transfert de chaleur moyen.

Les résultats de Requilé et al. [104] ont montré que les termes inertiels n'ont aucun impact

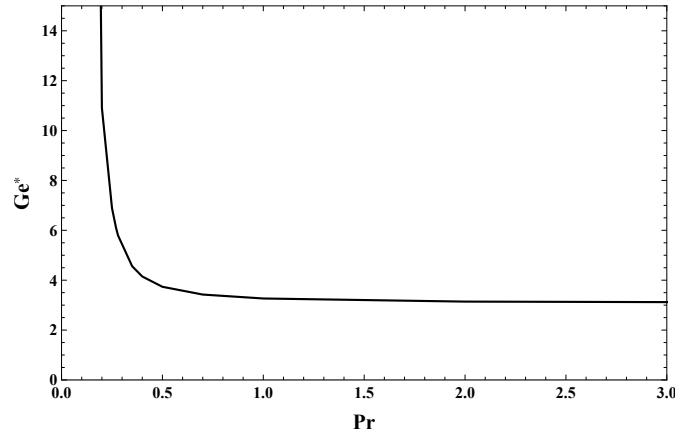


FIGURE 1.8 – Relation entre la valeur de  $Ge^*$  à  $\psi = 0$  et le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) pour l'écoulement de Poiseuille plan [34]

sur l'évolution non linéaire de l'amplitude de la perturbation. En revanche, les termes non linéaires d'advection thermique favorisent les bifurcations supercritiques en fourche, tandis que les non-linéarités associées à la dissipation visqueuse favorisent les bifurcations sous-critiques. Ils ont également constaté que, indépendamment du nombre de Gebhart, la bifurcation est supercritique si  $Pr < 0.25$  pour la configuration PPF. Cependant, pour des valeurs plus élevées du nombre de Prandtl, il existe une valeur critique spécifique du nombre de Gebhart, notée  $Ge^*$ , à partir de laquelle la bifurcation devient supercritique (sous-critique) si  $Ge < Ge^*$  ( $Ge > Ge^*$ ). (voir figure 1.8).

### 1.3.3 Formulation mathématique de l'analyse de stabilité avec dissipation visqueuse

Dans [101], [104], les auteurs ont considéré un fluide newtonien contenu entre deux plaques horizontales d'extension infinie le long des directions horizontales  $x$  et  $y$ , séparées par une hauteur  $H$  le long de la direction verticale  $z$ . On suppose que l'approximation Oberbeck-Boussinesq est valable. Les coordonnées cartésiennes sont notées  $(x, y, z)$ , tandis que les composantes de la vitesse sont  $(u, v, w)$ . Les équations (1.4), (1.5), (1.8) peuvent être écrites sous une forme adimensionnelle en adoptant la transformation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^*, y^*, z^*) = H (x, y, z), \quad t^* = \frac{H^2}{\kappa} t, \quad \vec{u}^* = \frac{\kappa}{H} \vec{u}, \\ P^* = \frac{\mu\kappa}{H^2} P, \quad \vec{\nabla}^* = \frac{1}{H} \vec{\nabla}, \quad \vec{D}^* = \frac{\kappa}{H^2} \vec{D}, \\ T^* - T_a^* = \frac{\nu}{\beta_T \kappa H^3} T \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique et  $T_a^*$  est la température moyenne. Ainsi, en notant  $e_z$  le vecteur unitaire selon l'axe "z", on obtient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -Pr \vec{\nabla} P + Pr(T - C) \vec{e}_z + Pr \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla}^2 T + 2Ge\vec{D} : \vec{D} \quad (1.12)$$

soumis aux conditions aux limites

$$u = 0 \text{ en } z = 0, 1 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } T = 0 \text{ en } z = 1 \quad (1.14)$$

Les conditions aux limites thermiques sont telles qu'aucune différence de température caractéristique, et donc aucun nombre de Rayleigh, ne résulte des conditions aux limites thermiques. Une solution de base stationnaire des équations (1.10-1.12) est donnée par

$$\vec{u}_b(z) = Pe f(z) \vec{e}_x, \quad (1.15)$$

$$T_b(z) = \Lambda g(z), \quad (1.16)$$

$$P_b = \Lambda(1 + \psi) q(z) + 12 Pe (z - x), \quad (1.17)$$

où  $e_x$  est le vecteur unitaire le long de l'axe  $x$ . Les fonctions  $f(z)$ ,  $g(z)$  et  $q(z)$  sont définies comme suite :

$$f(z) = 6z(1 - z),$$

$$g(z) = 6\left(\frac{2}{5} - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4\right),$$

$$q(z) = -6\left(\frac{2}{5}z - z^3 + z^4 - \frac{2}{5}z^5\right)$$

Le système ci-dessus dépend des paramètres sans dimension, définis comme suit :

- **Nombre de Prandtl**

Le nombre de Prandtl est un paramètre utilisé pour évaluer l'importance relative de la diffusion thermique et de la diffusion de la quantité de mouvement dans la convection thermique. Il est défini comme le rapport entre la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\kappa$ .

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

Un nombre de Prandtl élevé indique que la diffusion de la quantité de mouvement a une influence significative sur le champ thermique, tandis qu'un nombre de Prandtl faible indique que le champ de vitesse a peu d'effet sur le champ thermique, qui s'établit rapidement.

Les métaux liquides ont généralement des nombres de Prandtl très faibles. Les huiles peuvent avoir des nombres de Prandtl allant de 1 à plusieurs milliers, tandis que les gaz et l'eau ont des nombres de Prandtl de l'ordre de l'unité.

- **Nombre de Gebhart**

Le nombre de Gebhart est utilisé pour quantifier l'intensité de la dissipation visqueuse dans un système. Il est directement proportionnel à la hauteur  $H$ .

Dans des configurations expérimentales courantes en laboratoire, ce nombre est très faible, de l'ordre de  $10^{-3}$  au maximum. Cependant, pour des problèmes géophysiques impliquant des hauteurs  $H$  de l'ordre du kilomètre, le nombre de Gebhart peut atteindre 1 et plus.

$$Ge = \frac{\beta_T g H}{c_v}$$

où  $\beta_T$  est la dilatation thermique,  $g$  est l'accélération due à la gravité et  $c_v$  est la capacité thermique spécifique.

- **Nombre de Péclet**

Le nombre de Péclet permet de déterminer l'importance relative de la convection par rapport à la conduction dans le transfert de chaleur. Lorsque  $Pe$  est grand, la convection prédomine et le transfert de chaleur est principalement dû à l'écoulement du fluide. En revanche, lorsque  $Pe$  est petit, la conduction domine, ce qui signifie que le transfert de chaleur se fait principalement à travers le matériau sans beaucoup d'effet de l'écoulement du fluide. Le nombre de Péclet est couramment utilisé en thermique et en mécanique des fluides pour analyser les processus de transfert de chaleur. Il est défini comme suit :

$$Pe = \frac{H U_a}{\kappa}$$

où  $H$  est la longueur caractéristique,  $U_a$  la vitesse moyenne du fluide dans notre cas et  $\kappa$  la diffusivité thermique.

- **Nombre de Rayleigh de dissipation visqueuse**

Lorsque le nombre de Gebart ( $Ge$ ) n'est pas négligeable, les effets de la dissipation visqueuse deviennent significatifs. Barletta et Nield, ainsi que Barletta et ses collègues, ont proposé d'utiliser le paramètre de contrôle  $\Lambda = Ge Re^2 Pr^2$  plutôt que le nombre de Reynolds ( $Re$ ) pour étudier cette situation. Cette décision s'appuie sur une analogie entre  $\Lambda$  et le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) dans le problème classique de Rayleigh-Bénard.

En effet, la relation entre ces deux paramètres montre que  $\Lambda$  peut être considéré comme un nombre de Rayleigh interne, généré par l'écoulement moyen, contrairement à  $Ra$  qui dépend des limites externes. Cette relation montre également que  $\Delta T^*$ , la différence de température imposée aux limites horizontales, est proportionnelle à  $\frac{U_a^2 \nu}{c_v \kappa}$ . En conséquence,

$\Lambda$  peut-être interprété comme le nombre de Rayleigh de la dissipation visqueuse, ce qui signifie que l'instabilité thermique est induite par les effets de la dissipation visqueuse. Ainsi, l'utilisation de  $\Lambda$  en tant que paramètre de contrôle au lieu de  $Re$  s'avère être un choix pratique pour étudier le déclenchement de l'instabilité due à la dissipation visqueuse. Ces concepts sont expliqués en détail dans le chapitre 2.

### 1.3.3.1 Analyse de stabilité linéaire

Nous superposons des perturbations infinitésimales à la solution de base, à savoir

$$\begin{cases} \vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}_b(z) + \epsilon \vec{U}(x, y, z, t), \\ T(x, y, z, t) = T_b(z) + \epsilon \theta(x, y, z, t), \\ P(x, y, z, t) = P_b(x, z) + \epsilon p(x, y, z, t). \end{cases} \quad (1.18)$$

Où  $\epsilon$  représente un paramètre d'amplitude supposé petit. La perturbation du champ de vitesse  $\vec{U}$  a des composantes cartésiennes ( $U, V, W$ ).

Barletta [101] et Requilé [104] ont montré que le mode le plus instable se présente sous forme de **rouleaux longitudinaux**, avec leurs axes alignés parallèlement à la direction de l'écoulement.



Cela signifie que dans ce cas particulier, toutes les dérivées le long de cet axe s'annulent ( $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ), le système aux perturbations adimensionné devient :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u_b}{\partial z} - Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = - \left( v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + Pr \frac{\partial P}{\partial y} = - \left( v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - Pr \theta + Pr \frac{\partial P}{\partial z} = - \left( v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial T_b}{\partial z} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta - 2Ge \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ = - \left( v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Ge \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \\ + Ge \left( 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le champ de pression est éliminé par les dérivées croisées de (1.21) et (1.22) et en soustrayant les équations obtenues. Ensuite, les équations qui gouvernent peuvent être écrites en termes de variables réduites, à savoir la fonction de courant définie par

$$w = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

En introduisant le paramètre  $\Lambda = Ge Pe^2$  et la mise à l'échelle<sup>1</sup> :  $u = Re \tilde{u}$ , où  $Re = \frac{Pe}{Pr}$  est le nombre de Reynolds, on peut obtenir le système suivant écrit en fonction de la fonction de courant :

$$(L' \partial_t + L) \tilde{V} = N \quad (1.24)$$

Où  $\tilde{V} = (\Psi, \theta, \tilde{u})^T$  et  $N = (N_I^\psi, N_{adv}^\theta + N_{Diss}^{Ge} + N_{Diss}^{Pr}, N_I^{\tilde{u}})^T$

Les expressions des opérateurs linéaires  $L'$ ,  $L$  et non linéaires  $N$  sont les suivants :

$$L' = \begin{pmatrix} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Pr} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

1. Pour un nombre de Reynolds non nul, le cisaillement de l'écoulement de base  $Ref'(z)$  transporté par la composante verticale de la vitesse produira une vitesse  $u$ . C'est pourquoi nous allons utiliser la mise à l'échelle  $u = Re \tilde{u}$  dans ce qui suit.

$$L = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 & (1 + \psi) \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\Lambda g'(z) \frac{\partial}{\partial y} & -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) & -2 \frac{\Lambda}{Pr} f'(z) \frac{\partial}{\partial z} \\ -f'(z) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} N_I^\psi = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi, \\ N_{adv}^\theta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ N_{Diss}^{Ge} = Ge \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right], \\ N_{Diss}^{Pr} = \frac{\Lambda}{Pr^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right], \\ N_I^{\bar{u}} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right], \end{cases} \quad (1.27)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\bar{u} = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0, 1 \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } \theta = 0 \text{ en } z = 1 \quad (1.29)$$

Le système (1.24) est linéaire à coefficients indépendants de  $y$  et  $t$ . Compte tenu de l'invariance des équations par rapport à  $y$ , toute solution à valeurs complexes peut être recherchée par transformation de Fourier par rapport à ces variables. Par ailleurs, la recherche d'une solution au problème conduit, dans la transformée de Fourier, à rechercher cette solution sous la forme d'une fonction  $e^{\sigma t}$  que multiplie une fonction des variables d'espace. Enfin, nous pouvons observer que, dans le plan de la transformée de Fourier, il suffit de trouver un seul mode en  $y$  pour lequel la solution soit instable ( $Re(\sigma) \geq 0$ ) pour conclure à l'instabilité de l'écoulement de base. En définitive, on peut rechercher une solution de (1.24) sous la forme :

$$\tilde{V} = (\Psi_n(z), \theta_n(z), U_n(z)) e^{\sigma t + ik_y y} \quad (1.30)$$

en observant qu'il suffit de trouver un seul  $(\sigma, k_y)$  pour lequel  $Re(\sigma) \geq 0$  pour conclure à l'instabilité de la solution de base.

Cette méthode d'analyse, qui consiste à se borner à considérer les solutions périodiques en  $y$  pour en déduire la stabilité ou l'instabilité de l'état global, est appelée analyse de l'équation en modes normaux. Soulignons qu'elle n'est possible que par suite de l'invariance du problème par translation par rapport à ces variables.

Compte tenu des paramètres gouvernant le système d'équation, les valeurs propres dépendent de  $\Lambda, k_y, Pr$ . Ainsi :

$$\sigma(\Lambda, k_y, Pr) = \sigma_r(\Lambda, k_y, Pr) + i\sigma_i(\Lambda, k_y, Pr). \quad (1.31)$$

Au lieu de déterminer les valeurs de  $\sigma$  en fonction des  $(\Lambda, k_y, Pr)$ , on se contente de rechercher dans le spectre la valeur propre dont la partie réelle est la plus élevée : soit  $\sigma_m(\Lambda, k_y, Pr)$  cette valeur propre. Si le calcul de  $\sigma_m$  est possible, on peut directement inférer de son expression, la stabilité ou l'instabilité (linéaire) du milieu pour les valeurs données des paramètres. Cependant, le calcul de  $\sigma_m$  n'est pas nécessairement plus simple que celui de  $\sigma$  : on raisonne alors de la

manière suivante : décomposant  $\sigma_m$  en :

$$\sigma_m = \sigma_{m_r}(\Lambda, k_y, Pr) + i\sigma_{m_i}(\Lambda, k_y, Pr), \quad (1.32)$$

on observe que le seuil de stabilité, appelé également état marginal, est obtenu pour la valeur :

$$\sigma_{m_r}(\Lambda, k_y, Pr) = 0. \quad (1.33)$$

Si, pour  $\sigma_{m_r} = 0$ ,  $\sigma_{m_i}$  est également nul, l'état marginal est stationnaire (il est indépendant de  $t$ ). Si  $\sigma_{m_i}$  n'est pas nul, l'état marginal est dit oscillatoire.

Lorsqu'un milieu est linéairement stable, cela signifie qu'il est stable par rapport aux petites perturbations. L'étude non linéaire a pour objet d'examiner sa stabilité par rapport à des perturbations plus importantes. Lorsque le milieu est linéairement instable, l'examen des termes non linéaires est capitale afin de déterminer ce que deviennent les perturbations infinitésimales : si les termes linéaires croissent avec le temps, les termes non-linéaires croissent encore plus vite, jusqu'à devenir prépondérants : ce sont donc ces termes, dont la condition est négligée dans l'analyse linéaire, qui, rapidement, se mettent à gouverner la stabilité ou l'instabilité du milieu. On se réfère au livre de Pierre Antoine Bois pour la méthodologie D'analyse de stabilité non-linéaire [105].

### 1.3.3.2 Instabilité faiblement non linéaire (équation d'amplitude)

L'analyse linéaire conduit en général à l'identification d'un seuil d'instabilité caractérisé par une valeur critique d'un paramètre du problème  $\Lambda$  : le milieu est stable si  $\Lambda < \Lambda_c$ , le seuil est atteint pour  $\Lambda = \Lambda_c$ , le milieu est linéairement instable si  $\Lambda > \Lambda_c$ . Lorsqu'on franchit le seuil, on entre dans le domaine non linéaire : c'est le phénomène qu'on se propose d'examiner ici.

Considérant le problème linéaire :

$$(L'\partial_t + L)\tilde{V} = 0. \quad (1.34)$$

Concrètement, le problème linéarisé de (1.34) possède un spectre discret de valeurs propres  $\sigma_j = \lambda_j + i\omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) correspondant à un paquet d'onde  $k_j$ , dont tous les  $\lambda_j$  sont négatifs lorsque le milieu est stable, et un seul de ces  $\lambda_j$  est nul au seuil. Ainsi, au seuil d'instabilité, si nous désignons par  $\sigma_1 = i\omega$  la valeur propre à partie réelle nulle et  $W_n(z) = (\Psi_n(z), \theta_n(z), \tilde{u}_n(z))$ , la solution de (1.34) s'écrit :

$$\tilde{V} = e^{iky+i\omega t} W_1(z) + \sum_{j \geq 2} e^{\lambda_j t + i\omega_j t} e^{ik_j y} W_j(z) \quad (1.35)$$

Supposons maintenant  $\Lambda - \Lambda_c > 0$ , mais pas suffisamment positifs pour que les  $\lambda_j$  tels que  $j \geq 2$  soient positifs : nous posons,  $\Lambda - \Lambda_c = \delta\Lambda_2$ , avec  $\delta \ll 1$  et  $\Lambda_2 = O(1)$ . Par développement limité des  $\sigma_j$  au voisinage du seuil critique, on aura :

$$\sigma_j(k, \Lambda) = \sigma_j(k_c, \Lambda_c) + \left( \frac{\partial \sigma_j}{\partial k} \right)_c (k - k_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial k^2} \right)_c (k - k_c)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_j}{\partial \Lambda} \right)_c (\Lambda - \Lambda_c) + \dots \quad (1.36)$$

avec l'indice  $c$  indiquant que l'on a évalué les dérivées au point critique. De plus, on a gardé dans cette expression les termes de degré le plus élevé et du même ordre :  $\Lambda - \Lambda_c$  est du même ordre que  $(k - k_c)^2$  et  $\omega - \omega_c$ , les termes croisés et tous les termes omis sont d'un ordre de grandeur inférieur aux termes qui ont été conservés. Comme au voisinage du seuil,  $(\Lambda - \Lambda_c \ll 1)$ , est

petit, alors  $(k - k_c \ll 1)$  et  $(\omega - \omega_c \ll 1)$ , sont petits aussi. En d'autre terme : "la longueur  $\frac{2\pi}{k - k_c}$  et le temps  $\frac{2\pi}{\omega - \omega_c}$  caractéristiques de la modulation et de l'amplification de l'amplitude  $A$  sont respectivement très grandes devant la longueur  $\frac{2\pi}{k_c}$  et très lentes devant le temps  $\frac{2\pi}{\omega_c}$ , caractéristiques de l'onde porteuse".

Afin de simplifier les calculs, On ne tient pas en compte l'échelle spatiale lente dans notre cas. L'équation (1.36) se réécrit :

$$\sigma_j(k, \Lambda) = \sigma_j(k_c, \Lambda_c) + s_j(\Lambda - \Lambda_c) + \dots, \quad s_j = \left( \frac{\partial \sigma_j}{\partial \Lambda} \right)_c. \quad (1.37)$$

Si on remplace l'équation (1.37) dans  $\tilde{V}$ , on voit que (1.35) se réécrit comme :

$$\tilde{V} = e^{\delta st + i\omega t} e^{iky} W_1(z) + \sum_{j \geq 2} e^{\lambda_j t + i\omega_j t} e^{ik_j y} W_j(z) \quad (1.38)$$

où  $s = \text{Re}(d\sigma_1/d\Lambda)_c$  est positif puisque nous avons dépassé le seuil de stabilité neutre. Si nous nous intéressons aux solutions réelles de (1.34), nous pouvons écrire :

$$\tilde{V} \approx e^{\delta st} (e^{iky + i\omega t} W_1(z) + e^{-iky - i\omega t} \overline{W}_1(z)) \quad (1.39)$$

où  $\overline{W}_1(z)$  désigne l'imaginaire conjugué.

### Développement multi-échelle

D'après (1.39), l'amplitude de  $\tilde{V}$  croît lentement vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Les termes non linéaires de (1.24), négligés par l'approche linéaire (1.34), deviennent (plus ou moins rapidement) prépondérants et doivent donc être pris en compte. Le développement linéarisé  $\epsilon \tilde{V}$  doit être remplacé par un développement :

$$\tilde{V}(y, z, t) = \epsilon \tilde{V}_1 + \epsilon^2 \tilde{V}_2 + \epsilon^3 \tilde{V}_3 + \dots \quad (1.40)$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse que les solutions de l'équation linéaire (1.34) pour la valeur  $\Lambda_c$  de  $\Lambda$  sont définies dans un espace de Hilbert ( $H$ ) relativement aux variables  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

Si nous introduisant dans (1.24) les développements de  $\Lambda$  par rapport à  $\delta$  et  $\tilde{V}$  par rapport à  $\epsilon$ , nous obtenons une séquence d'équations relativement à ces deux paramètres, dans laquelle l'effet d'amplitude intervenant par l'intermédiaire de  $\epsilon$ , (la  $n^{\text{eme}}$  harmonique correspondant à  $\epsilon^n$ ), et l'effet dû à  $\Lambda - \Lambda_c$  par l'intermédiaire de  $\delta$ . Le paramètre  $\delta$  peut toujours être comparé à une puissance de  $\epsilon$ , de sorte que l'effet d'amplitude entre en interférence avec  $\delta$  par l'harmonique correspondante.

Supposant que  $\epsilon^2 = \delta$ . La justification de cet ordre s'effectue a posteriori. En effet, si l'écart au seuil critique était de l'ordre de  $\epsilon$  alors, en développant les équations et en appliquant l'alternative de Fredholm à l'ordre deux, on obtiendrait une divergence de la solution.

Pour étudier l'interférence, nous utilisons, au voisinage de  $\Lambda_c$ , un formalisme d'échelles multiples par rapport à  $t$  en posant :

$$\tau = \epsilon^2 t, \quad \tilde{t} = t, \quad (1.41)$$

L'échelle proposée implique le remplacement des dérivées temporelles par

$$\partial_{\bar{t}} \rightarrow \partial_{\bar{t}} + \epsilon^2 \partial_{\tau}. \quad (1.42)$$

et en considérant les deux variables  $\tau$  et  $\bar{t}$  comme indépendantes. En introduisant le développement des variables en  $\epsilon$  et les changements d'échelles dans le système (1.24), on obtient un développement limité du système.

Pour finir, en égalisant les termes du même ordre tout en s'arrêtant à l'ordre 3 en  $\epsilon$ , on obtient le système itératif d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} L_c \cdot \tilde{V}_1 = 0 \\ L_c \cdot \tilde{V}_2 = \underbrace{N_2(\tilde{V}_1)}_{SM_2} \\ L_c \cdot \tilde{V}_3 = - \underbrace{(L' \partial_{\tau} + \Lambda_2 L_2) \tilde{V}_1 + N_3(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)}_{SM_3} \end{array} \right. \quad (1.43)$$

avec

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g'(z) \partial_y & 0 & -\frac{2}{Pr} f'(z) \partial_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$L' = \begin{pmatrix} \frac{1}{Pr} (\partial_{yy} + \partial_{zz}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Pr} \end{pmatrix}$$

où  $L_c = (L' \partial_{\bar{t}} + L)$  opérateur linéaire du système (1.24) exprimés en  $\Lambda = \Lambda_c$  et  $SM_2, SM_3$  représentant les seconds membres qui contiennent les non-linéarités provenant respectivement de l'ordre 1 pour  $SM_2$  et de l'ordre 1 et 2 pour  $SM_3$ . On résout itérativement ordre par ordre ce système : la solution à l'ordre 1 est la solution homogène de  $L_c$ , puis la solution à l'ordre 2 et 3 sont des solutions particulières de  $L_c$ .

- **Ordre 1**

Le système d'équations linéaires homogène à l'ordre 1 est le même système du problème linéaire (1.24) exprimé en  $\Lambda = \Lambda_c$ .

$$\underbrace{(L' \partial_{\bar{t}} + L)}_{L_c} \cdot \tilde{V}_1 = 0 \quad (1.44)$$

L'équation (1.24) fournit la variation de  $\tilde{V}_1$  en fonction des variables  $\bar{t}$ ,  $y$  et  $z$  : il s'agit de la solution (1.39) prise pour la valeur  $\Lambda = \Lambda_c$ .

$$\tilde{V}_1 = A(\tau) e^{iky+i\omega\bar{t}} W_1(z) + \bar{A}(\tau) e^{-iky-i\omega\bar{t}} \bar{W}_1(z). \quad (1.45)$$

qui, pour  $\Lambda = \Lambda_c$ , est une fonction bornée de la variable rapide  $\bar{t}$ . Son amplitude  $A(\tau)$  est une fonction complexe arbitraire pour l'équation (1.24).  $W_1(z) = (\Psi_1(z), \Theta_1(z), \tilde{U}_1(z))$  les fonctions propres du problème de stabilité linéaire à ( $\Lambda = \Lambda_c, k = k_c$ ).

La résolution du système (1.44) se résume à résoudre un problème aux valeurs propres. En effet, en remplaçant  $\partial_{\bar{t}}$  par  $-i\omega_c$ , on obtient :

$$i\omega_c L' \tilde{V}_1 = L \tilde{V}_1 \quad (1.46)$$

avec les conditions aux limites :

$$\tilde{U}_1 = \Psi_1 = D\Psi_1 = 0 \text{ en } z = 0, 1 \quad (1.47)$$

$$D\Theta_1 = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } \Theta_1 = 0 \text{ en } z = 1 \quad (1.48)$$

où  $D = \partial_z$ .

- **Ordre 2**

Examinons maintenant l'équation à l'ordre 2 :

$$L_c \tilde{V}_2 = N_2(\tilde{V}_1); \quad (1.49)$$

cette équation, forme inhomogène de l'équation précédente (1.44).

**Remarque :** Si  $\delta = \epsilon$ , on aura un terme de pulsation  $\omega$  figurant encore dans le second membre de l'équation (1.49) :  $\partial V_1 / \partial \tau_1 \neq 0$ , ce qui fait que l'équation (1.49) devient une équation inhomogène et ne possède des solutions dans (H) que si une condition de compatibilité est satisfaite.

L'hypothèse que la résolution de (1.49) requiert l'écriture d'une condition de compatibilité n'est pas vraiment obligatoire puisqu'il est possible que l'équation (1.49) soit régulière. Ce qui est notre cas ici.

En effet, si on introduisait une suite de variables lentes, tel que :

$$\tau_n = \epsilon^n t, \quad n \geq 1 \quad (1.50)$$

L'amplitude est alors une fonction  $A(\tau_1, \dots, \tau_n, \dots)$  où les  $\tau_j$  sont considérées comme variables indépendantes. En prenant le cas où  $\partial A / \partial \tau_1 = 0$ , c'est-à-dire que  $\tilde{V}_1$  ne dépend plus de  $\tau_1$ . Cela signifie que  $\epsilon = \delta$  n'est plus satisfaite et qu'il faut directement envisager le cas  $\epsilon^2 = \delta$ .

L'équation (1.49) s'écrit, compte tenu des notations adoptées :

$$\begin{aligned} L_c \tilde{V}_2 = [ & A^2(\tau_2) e^{2iky+2i\omega\bar{t}} N_{22}(W_1) \\ & + A(\tau_2) \bar{A}(\tau_2) N_{20}(W_1) \\ & + \bar{A}^2(\tau_2) e^{-2iky-2i\omega\bar{t}} \bar{N}_{22}(W_1) ]. \quad (1.51) \end{aligned}$$

Supposant  $k \neq 0$  et  $\omega \neq 0$ . Le second membre de (1.51) est composé de termes de pulsations  $(0, 2\omega)$  et d'onde  $(0, 2k)$ . Les pulsations  $(0, 2\omega)$  et ondes  $(0, 2k)$  ne figurent pas dans le spectre de l'opérateur  $L_c$  : il est donc possible de déterminer une solution particulière de (1.51) dans (H) pour ces termes.

Compte tenu de ces observations, la solution particulière de (1.51) peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{V}_2 = A^2(\tau_2) e^{2iky+2i\omega\bar{t}} W_{22}(z) + A(\tau_2) \bar{A}(\tau_2) W_{20}(z) + \bar{A}^2(\tau_2) e^{-2iky-2i\omega\bar{t}} \bar{W}_{22}(z), \quad (1.52)$$

où

$$W_{22}(z) = (\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z), \tilde{U}_{22}(z)) \text{ et } W_{20}(z) = (\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z), \tilde{U}_{20}(z)).$$

En effet, Substituer (1.52) et (1.45) dans (1.49) et collecter les termes proportionnels à  $A^2(t_2)e^{i2k_c y}$ , on obtient le système suivant pour les fonctions  $W_{22}(z)$  :

$$LW_{22} = N_{22}(W_1), \quad N_{22}(W_1) = (N_{I_{22}}^\psi, N_{adv_{22}}^\theta + N_{Diss_{22}}^{Ge} + N_{Diss_{22}}^{Pr}, N_{I_{22}}^{\tilde{u}})^T. \quad (1.53)$$

où

$$L = \begin{pmatrix} -(D^2 - 4k_c^2)^2 & (1 + \psi)2ik_c & 0 \\ -\Lambda_c g'(z)2ik_c & -(D^2 - 4k_c^2) & -\frac{2\Lambda_c}{Pr} f'(z)D \\ -f'(z)2ik_c & 0 & -(D^2 - 4k_c^2) \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{I_{22}}^\psi &= \frac{1}{Pr} [(ik\Psi_1 D - ikD\Psi_1)(D^2 - k^2)\Psi_1] \\ N_{adv_{22}}^\theta &= ik\Psi_1 D\Theta_1 - ik\Theta_1 D\Psi_1 \\ N_{Diss_{22}}^{Ge} &= Ge [(D^2\Psi_1)^2 + k^4\Psi_1^2 + 2k^2\Psi_1 D^2\Psi_1 - 4k^2(D\Psi_1)^2], \\ N_{Diss_{22}}^{Pr} &= \frac{\Lambda_c}{Pr^2} [-k^2(\tilde{U}_1)^2 + (D\tilde{U}_1)^2], \\ N_{I_{22}}^{\tilde{u}} &= \frac{1}{Pr} [ik\Psi_1 D\tilde{U}_1 - ik\tilde{U}_1 D\Psi_1], \end{aligned} \quad (1.55)$$

De même, en collectant les termes proportionnels à  $A\bar{A}$ , on obtient le système suivant pour les fonctions  $W_{20}(z)$  :

$$LW_{20} = N_{20}(W_1), \quad N_{20}(W_1) = (N_{I_{20}}^\psi, N_{adv_{20}}^\theta + N_{Diss_{20}}^{Ge} + N_{Diss_{20}}^{Pr}, N_{I_{20}}^{\tilde{u}})^T. \quad (1.56)$$

où

$$L = \begin{pmatrix} -D^4 & 0 & 0 \\ 0 & -D^2 & -\frac{2\Lambda_c}{Pr} f'(z)D \\ 0 & 0 & -D^2 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{I_{20}}^\psi &= \frac{1}{Pr} ((-ik\bar{\Psi}_1 D - ikD\bar{\Psi}_1)(D^2 - k^2)\Psi_1 + (ik\Psi_1 D + ikD\Psi_1)(D^2 - k^2)\bar{\Psi}_1) \\ N_{adv_{20}}^\theta &= ik\Psi_1 D\bar{\Theta}_1 - ik\Theta_1 D\bar{\Psi}_1 - ik\bar{\Psi}_1 D\Theta_1 + ik\bar{\Theta}_1 D\Psi_1 \\ N_{Diss_{20}}^{Ge} &= Ge (2D^2\Psi_1 D^2\bar{\Psi}_1 + 2k^4\Psi_1\bar{\Psi}_1 + 2k^2\bar{\Psi}_1 D^2\Psi_1 + 2k^2\Psi_1 D^2\bar{\Psi}_1 + 8k^2 D\Psi_1 D\bar{\Psi}_1), \\ N_{Diss_{20}}^{Pr} &= \frac{\Lambda_c}{Pr^2} (2k^2\tilde{U}_1\bar{\tilde{U}}_1 + 2D\tilde{U}_1 D\bar{\tilde{U}}_1), \\ N_{I_{20}}^{\tilde{u}} &= \frac{1}{Pr} (-ik\bar{\Psi}_1 D\tilde{U}_1 - ik\tilde{U}_1 D\bar{\Psi}_1 + ik\Psi_1 D\bar{\tilde{U}}_1 + ik\bar{\tilde{U}}_1 D\Psi_1), \end{aligned} \quad (1.58)$$

Les conditions aux limites pour  $W_{22}(z)$  et  $W_{20}(z)$  sont les mêmes que pour  $\tilde{V}_1$  (1.47-1.48).

- **Ordre 3**

Intéressons-nous maintenant à l'équation :

$$L_c \tilde{V}_3 = -\left(L' \partial_{t_2} + \Lambda_2 L_2\right) \tilde{V}_1 + N_3(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2); \quad (1.59)$$

Compte tenu de l'homogénéité des facteurs au second membre de (1.59) par rapport à l'amplitude, celle-ci prend en définitive la forme :

$$L_c(\tilde{V}_3) = [A^3(\tau_2)e^{3iky+3i\omega\bar{t}}N_{33}(W_1, W_{22}) + A^2(\tau_2)\bar{A}(\tau_2)e^{iky+i\omega\bar{t}}N_{31}(W_1, W_{22}, W_{20})] \\ - (\partial_{\tau_2} A e^{iky+i\omega\bar{t}} L' + A(\tau_2)e^{iky+i\omega\bar{t}} \Lambda_2 L_2) W_1 + C.C. \quad (1.60)$$

où les fonctions désignées par  $N_{33}$  et  $N_{31}$  : sont les fonctions des formes du 3<sup>eme</sup> degré de  $W_1(z), W_{22}(z)$  et  $W_{20}(z)$  et de leurs imaginaires conjugués. À savoir que les indices de gauche représentent l'ordre de  $\epsilon$  (ordre 1, 2 ou 3) et les indices de droite représente la puissance de l'exponentielle (0, 1, 2 ou 3).

En effet, Substituer (1.52) et (1.45) dans (1.59) et collecter les termes proportionnels à  $A^3(t_2)e^{i3ky+i3\omega\bar{t}}$ , on obtient le système suivant pour les fonctions.

$$N_{33}(W_1, W_{22}) = (N_{I_{33}}^\psi, N_{adv_{33}}^\theta + N_{Diss_{33}}^{Ge} + N_{Diss_{33}}^{Pr}, N_{I_{33}}^{\bar{u}})^T$$

tel que

$$N_{I_{33}}^\psi = \frac{1}{Pr} \left[ (ik\Psi_1 D - 2ikD\Psi_1)(D^2 - 4k^2)\Psi_{22} + (2ik\Psi_{22}D - ikD\Psi_{22})(D^2 - k^2)\Psi_1 \right], \\ N_{adv_{33}}^\theta = ik\Psi_1 D\theta_{22} - 2ikD\Psi_1\theta_{22} + 2ik\Psi_{22}D\theta_1 - ikD\Psi_{22}\theta_1, \\ N_{Diss_{33}}^{Ge} = 2Ge \left[ (D^2 + k^2)\Psi_1 (D^2 + 4k^2)\Psi_{22} - 8k^2 D\Psi_1 D\Psi_{22} \right], \\ N_{Diss_{33}}^{Pr} = \frac{2\Lambda_c}{Pr^2} \left[ -2k^2 \tilde{u}_1 \tilde{u}_{22} + D\tilde{u}_1 D\tilde{u}_{22} \right], \\ N_{I_{33}}^{\bar{u}} = \frac{1}{Pr} \left[ 2ikD\tilde{u}_1 \Psi_{22} - ik\tilde{u}_1 D\Psi_{22} + ikD\tilde{u}_{22} \Psi_1 - 2ik\tilde{u}_{22} D\Psi_1 \right], \quad (1.61)$$

De même, en collectant les termes proportionnels à  $A^2\bar{A}$ , on obtient le système suivant pour les fonctions

$$N_{31}(W_1, W_{22}, W_{20}) = (N_{I_{31}}^\psi, N_{adv_{31}}^\theta + N_{Diss_{31}}^{Ge} + N_{Diss_{31}}^{Pr}, N_{I_{31}}^{\bar{u}})^T$$



tel que

$$\begin{aligned}
N_{I_{31}}^{\psi} &= \frac{1}{Pr} [ik\Psi_1 D^3\Psi_{20} - ikD\Psi_{20}(D^2 - k^2)\Psi_1 - ik\bar{\Psi}_1(D^2 - 4k^2)D\Psi_{22} + \\
&\quad 2ik\bar{\Psi}_{22}(D^2 - k^2)D\bar{\Psi}_1 - 2ikD\bar{\Psi}_1(D^2 - 4k^2)\Psi_{22} + ikD\Psi_{22}(D^2 - k^2)\bar{\Psi}_1], \\
N_{adv_{31}}^{\theta} &= ik\Psi_1 D\theta_{20} - ik\bar{\Psi}_1 D\theta_{22} + 2ik\Psi_{22}D\bar{\theta}_1 - 2ikD\bar{\Psi}_1\theta_{22} + ikD\Psi_{22}\bar{\theta}_1 - ikD\Psi_{20}\theta_1, \\
N_{Diss_{31}}^{Ge} &= 2Ge[D^2\Psi_{20}(D^2 + k^2)\Psi_1 + D^2\bar{\Psi}_1 D\Psi_{22} + 4k^4\bar{\Psi}_1\Psi_{22} \\
&\quad + 4k^2 D^2\bar{\Psi}_1\Psi_{22} + k^2 D^2\Psi_{22}\bar{\Psi}_1 + 8k^2 D\bar{\Psi}_1 D\Psi_{22}], \\
N_{Diss_{31}}^{Pr} &= \frac{2\Lambda_c}{Pr^2} [2k^2\tilde{u}_1\tilde{u}_{22} + D\tilde{u}_1 D\tilde{u}_{20} + D\tilde{u}_1 D\tilde{u}_{22}], \\
N_{I_{31}}^{\tilde{u}} &= \frac{1}{Pr} [2ikD\tilde{u}_1\Psi_{22} - ikD\Psi_{22}\bar{\Psi}_1 - ik\tilde{u}_1 D\Psi_{20} + ikD\tilde{u}_{20}\Psi_1 + ik\tilde{u}_1 D\Psi_{22} - 2ik\tilde{u}_{22}D\bar{\Psi}_1],
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Contrairement à l'ordre précédent, l'équation (1.60) contient un terme résonnant avec les solutions de l'opérateur du premier membre. L'écriture de la condition de compatibilité associée à cette équation fournit la relation :

$$\begin{aligned}
\partial_{\tau_2} A < \tilde{V}^A, e^{iky+i\omega\bar{t}} L'W_1 > + A(\tau_2) < \tilde{V}^A, e^{iky+i\omega\bar{t}} \Lambda_2 L_2 W_1 > \\
- A^2(\tau_2) \bar{A}(\tau_2) < \tilde{V}^A, e^{iky+i\omega\bar{t}} N_{31}(z) > = 0,
\end{aligned} \tag{1.63}$$

où  $\tilde{V}^A$  est une solution propre de l'opérateur adjoint de  $L_c$  dans (H).

### Système adjoint

En comparant (1.44) et (1.60), nous voyons que la solution de (1.59), à savoir  $\tilde{V}_3$ , est forcée de manière résonante puisque l'équation homogène qui correspond à (1.59) est satisfait à  $\Lambda = \Lambda_c$ ,  $k = k_c$ . Ainsi, (1.59) a une solution si et seulement si le membre droit de (1.59) est orthogonal à toutes les fonctions propres du problème adjoint correspondant. L'opérateur adjoint,  $L^A$ , et les fonctions propres adjointes,  $\tilde{V}^A$ , sont définis comme suit :

$$\int_0^1 \tilde{V}^A(\overline{L\tilde{V}}) dz = \int_0^1 \overline{\tilde{V}}(L^A \tilde{V}^A) dz = 0 \tag{1.64}$$

Les fonctions propres adjointes sont les solutions du système d'équation

$$L^A \tilde{V}^A = 0 \tag{1.65}$$

Pour trouver  $L^A$ , commençons le calcul de l'adjoint en développant le terme de gauche de

(1.64) :

$$\begin{aligned} \langle L\tilde{V}_1, \tilde{V}^A \rangle = & \left[ \left( \frac{i\omega}{Pr} (D^2 - k^2) - (D^2 - k^2)^2 \right) \tilde{\Psi} - ik\tilde{\theta} \right] \Psi^A \\ & + \left( ik\Lambda g'(z) \tilde{\Psi} + \left( i\omega - (D^2 - k^2) \right) \tilde{\theta} - \frac{2\Lambda}{Pr} f'(z) D\tilde{u} \right) \theta^A \\ & + \left( ikf'(z) \tilde{\Psi} + \left( \frac{i\omega}{Pr} - (D^2 - k^2) \right) \tilde{u} \right) \tilde{u}^A \end{aligned} \quad (1.66)$$

Cela nous donne après intégration par parties :

$$\begin{aligned} \langle L\tilde{V}_1, \tilde{V}^A \rangle = & \int_0^1 \left[ \left( \frac{i\omega}{Pr} (D^2 - k^2) - (D^2 - k^2)^2 \right) \Psi^A - ik\theta^A \right] \bar{\Psi} \\ & + \left( ik\Lambda g'(z) \Psi^A + \left( i\omega - (D^2 - k^2) \right) \theta^A + \frac{2\Lambda}{Pr} (f'(z)D + f''(z)) \tilde{u}^A \right) \bar{\theta} \\ & + \left( ikf'(z) \Psi^A + \left( \frac{i\omega}{Pr} - (D^2 - k^2) \right) \tilde{u}^A \right) \bar{\tilde{u}} \right] dz + J \end{aligned} \quad (1.67)$$

Les conditions aux limites du système adjoint sont fournies par  $J = 0$ , tel que

$$\begin{aligned} J = & \left[ \frac{i\omega}{Pr} \left( \left[ \Psi^A D\tilde{\Psi} \right]_0^1 - \left[ D\Psi^A \tilde{\Psi} \right]_0^1 \right) - \left[ \Psi^A D^3\tilde{\Psi} \right]_0^1 + \left[ D\Psi^A D^2\tilde{\Psi} \right]_0^1 - \left[ D^2\Psi^A D\tilde{\Psi} \right]_0^1 \right. \\ & + \left[ D^3\Psi^A \tilde{\Psi} \right]_0^1 + 2k^2 \left( \left[ \Psi^A D\tilde{\Psi} \right]_0^1 - \left[ D\Psi^A \tilde{\Psi} \right]_0^1 \right) - \left[ \theta^A D\tilde{\theta} \right]_0^1 + \left[ D\theta^A \tilde{\theta} \right]_0^1 \\ & \left. - \frac{2\Lambda}{Pr} \left[ f'(z) \tilde{u} \theta^A \right]_0^1 - \left[ D\tilde{u} \tilde{u}^A \right]_0^1 + \left[ \tilde{u} D\tilde{u}^A \right]_0^1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

Donc pour que cette expression soit vérifiée, on a :

$$\tilde{u}^A = \Psi^A = D\Psi^A = 0 \text{ en } z = 0, 1 \quad (1.69)$$

$$D\theta^A = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } \theta^A = 0 \text{ en } z = 1 \quad (1.70)$$

Finalement, l'opérateur adjoint  $L^A$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{i\omega}{Pr} (D^2 - k_c^2) - (D^2 - k_c^2)^2 & \Lambda_c g'(z) ik_c & f'(z) ik_c \\ -(1 + \psi) ik_c & i\omega - (D^2 - k_c^2) & 0 \\ 0 & \frac{2\Lambda_c}{Pr} (f''(z) + f'(z)D) & \frac{i\omega}{Pr} - (D^2 - k_c^2) \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

### Équation de Landau

Enfin, l'équation de Landau, est obtenue de la condition de solvabilité (1.64). En réintroduisant les variables originelles  $\tau_2 = \epsilon^2 t$ ,  $\Lambda_2 = (\Lambda - \Lambda_c)/\epsilon^2$ ,  $A = A/\epsilon$ , l'équation de Landau s'écrit sous

la forme :

$$\gamma \partial_t A = \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c} A - \lambda |A|^2. \quad (1.72)$$

dans laquelle apparait le temps caractéristique d'instabilité :

$$\gamma = -\frac{1}{\Lambda_c} \frac{\langle \tilde{V}^A, L'W_1 \rangle}{\langle \tilde{V}^A, L_2W_1 \rangle}. \quad (1.73)$$

et le coefficient de Landau :

$$\lambda = \frac{1}{\Lambda_c} \frac{\langle \tilde{V}^A, N_{31}(W_1, W_{22}, W_{20}) \rangle}{\langle \tilde{V}^A, L_2W_1 \rangle}. \quad (1.74)$$

## 1.4 Objectifs de la thèse

La plupart des travaux se concentrent sur les fluides purs, ce qui représente une approche idéalisée par rapport aux mélanges que l'on trouve dans la nature. Par exemple, l'air est composé d'un mélange de gaz tels que l'oxygène, l'azote et d'autres en quantités plus faibles, l'eau des océans est salée et peut contenir des sédiments au fond, et une flamme est formée de plusieurs gaz qui réagissent entre eux lors de la combustion. Pour prendre en compte ces propriétés qui peuvent jouer un rôle important dans certains problèmes, une description plus détaillée de ces milieux est nécessaire. Ces fluides font partie d'une catégorie appelée fluides diphasiques.

Notre travail s'inscrit dans la continuité des recherches antérieures de Barletta et al. [101] et Requilé et al. [104]. Nous avons examiné un mélange binaire initialement homogène dans un écoulement plan de type Poiseuille pour deux cas de figure. Nous avons délibérément évité d'imposer des variations externes de température ou de concentration aux limites, maintenant ainsi la limite inférieure en condition adiabatique et la limite supérieure en condition isotherme (inversement pour le deuxième cas), tout en imposant une condition de flux de masse nul aux deux limites.

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'influence de la thermodiffusion sur les instabilités linéaires (primaire et secondaire) et faiblement non linéaires induites par la dissipation visqueuse.

Le premier chapitre de cette thèse constitue une introduction générale au problème de convection de Rayleigh-Bénard et Rayleigh-Bénard-Poiseuille avec l'effet Soret et/ou effet de dissipation visqueuse. Il présente une revue succincte des travaux expérimentaux et théoriques majeurs sur le sujet, en mettant en contexte historique et en exposant les motivations de notre étude.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'analyse de stabilité linéaire du problème d'écoulement de Poiseuille plan pour un fluide binaire newtonien. Nous commençons par proposer la formulation mathématique en accordant une attention particulière au terme modélisant la dissipation visqueuse, en incluant également une quatrième équation de conservation pour les espèces. Nous présentons ensuite les méthodes numériques de résolution et leur validation. Les résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire sont ensuite présentés et discutés. Cette analyse a permis de distinguer deux régions de stabilité distinctes : une région multicellulaire avec une longueur d'onde finie et une région monocellulaire où la longueur d'onde devient infinie en raison de l'extension latérale infinie du système.

Le troisième chapitre propose une analyse de stabilité faiblement non linéaire pour la région d'écoulement multicellulaire avec un rapport de séparation positif, en utilisant une approche multi-échelle. Cette analyse détermine l'amplitude du mode le plus amplifié, à savoir

les rouleaux longitudinaux, et étudie l'influence de l'effet Soret et de la dissipation visqueuse sur les structures convectives et le transfert de chaleur moyen dans le régime faiblement non linéaire. Nous examinons également l'influence des non-linéarités sur le mélange des espèces.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des effets combinés de la dissipation visqueuse et de l'effet Soret sur la stabilité secondaire d'un mélange de fluide binaire dans un écoulement monocellulaire avec un rapport de séparation positif. Nous avons déterminé une solution analytique pour l'instabilité non linéaire de cette région, puis nous avons réalisé une analyse de stabilité secondaire en nous basant sur le concept de séparation des espèces.

Enfin, le cinquième et dernier chapitre constitue la conclusion générale du mémoire. Il synthétise les résultats obtenus tout au long de cette thèse et présente certaines perspectives pour de futures recherches dans ce domaine.

Le deuxième chapitre, publié en 2022 dans le journal "Physics of Fluids" (Ali Amar et al., Phys. Fluids, vol. 34, 2022, pp. 114101), est rédigé en anglais, tout comme le troisième et quatrième chapitres. Ces derniers consistent en deux articles déjà soumis à des journaux internationaux : l'un à "Physics of Fluids" et l'autre à "International Journal of Heat and Mass Transfer".

## Références

- [1] O. REYNOLDS, « XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels », *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, n° 174, p. 935-982, 1883.
- [2] P. MANNEVILLE, « Rayleigh-Bénard convection : thirty years of experimental, theoretical, and modeling work », in *Dynamics of spatio-temporal cellular structures : Henri Bénard centenary review*, Springer, 2006, p. 41-65.
- [3] J. THOMSON et al., « On a changing tessellated structure in certain liquids », *Proc. Phil. Soc. Glasgow*, t. 13, p. 464-468, 1882.
- [4] H. BÉNARD, « Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide », *Revue Gen. Sci. Pure Appl.*, t. 11, p. 1261-1271, 1900.
- [5] L. RAYLEIGH, « LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side », *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, t. 32, n° 192, p. 529-546, 1916.
- [6] J. PEARSON, « On convection cells induced by surface tension », *Journal of fluid mechanics*, t. 4, n° 5, p. 489-500, 1958.
- [7] F. H. BUSSE, « Bénard convection and geophysical applications », *Dynamics of Spatio-Temporal Cellular Structures : Henri Bénard Centenary Review*, p. 103-125, 2006.
- [8] K. A. EMANUEL et al., *Atmospheric convection*. Oxford University Press on Demand, 1994.
- [9] M. LAPPA, « Secondary and oscillatory gravitational instabilities in canonical three-dimensional models of crystal growth from the melt. Part 1 : Rayleigh-Bénard systems », *Comptes Rendus Mécanique*, t. 335, n° 5-6, p. 253-260, 2007.
- [10] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, 652 pp., clarendon, 1961.
- [11] E. L. KOSCHMIEDER, *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge University Press, 1993.
- [12] F. BUSSE, « Non-linear properties of thermal convection », *Reports on Progress in Physics*, t. 41, n° 12, p. 1929, 1978.

- [13] A. C. NEWELL, T. PASSOT et J. LEGA, « Order parameter equations for patterns », *Annual review of fluid mechanics*, t. 25, n° 1, p. 399-453, 1993.
- [14] M. C. CROSS et P. C. HOHENBERG, « Pattern formation outside of equilibrium », *Reviews of modern physics*, t. 65, n° 3, p. 851, 1993.
- [15] E. BODENSCHATZ, W. PESCH et G. AHLERS, « Recent developments in Rayleigh-Bénard convection », *Annual review of fluid mechanics*, t. 32, n° 1, p. 709-778, 2000.
- [16] E. D. SIGGIA, « High Rayleigh number convection », *Annual review of fluid mechanics*, t. 26, n° 1, p. 137-168, 1994.
- [17] J. P. KUETTNER, « Cloud bands in the earth's atmosphere : Observations and theory », *Tellus*, t. 23, n° 4-5, p. 404-426, 1971.
- [18] D. E. KELLEY, « Convection in ice-covered lakes : effects on algal suspension », *Journal of Plankton Research*, t. 19, n° 12, p. 1859-1880, 1997.
- [19] R. A. DANILOV et N. G. EKELUND, « Phytoplankton communities at different depths in two eutrophic and two oligotrophic temperate lakes at higher latitude during the period of ice cover », *Acta protozoologica*, t. 40, n° 3, p. 197-202, 2001.
- [20] J. J. S. JEROME, « Transient growth in Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette flows », thèse de doct., Ecole Polytechnique X, 2011.
- [21] K. GAGE et W. REID, « The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 33, n° 1, p. 21-32, 1968.
- [22] J. PLATTEN, « A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients », *International Journal of Engineering Science*, t. 9, n° 9, p. 855-869, 1971.
- [23] M. TVEITEREID, « On the stability of thermally stratified plane Poiseuille flow », *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, t. 54, n° 8, p. 533-540, 1974.
- [24] J.-M. LUIJKX, J. K. PLATTEN et J. C. LEGROS, « On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 24, n° 7, p. 1287-1291, 1981.
- [25] F. MEJNI, « Structures synchronisées dans les écoulements inhomogènes de convection mixte en milieu poreux », thèse de doct., université des sciences et technologies de lille, lille1, 2008.
- [26] H. MÜLLER, M. LÜCKE et M. KAMPS, « Convective patterns in horizontal flow », *Europhysics Letters*, t. 10, n° 5, p. 451, 1989.
- [27] H. MÜLLER, M. LÜCKE et M. KAMPS, « Transversal convection patterns in horizontal shear flow », *Physical Review A*, t. 45, n° 6, p. 3714, 1992.
- [28] P. CARRIERE et P. A. MONKEWITZ, « Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 384, p. 243-262, 1999.
- [29] M. YASUO et U. YUTAKA, « Forced convective heat transfer between horizontal flat plates », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 9, n° 8, p. 803-817, 1966.
- [30] M. OUAZZANI, J.-P. CALTAGIRONE, G. MEYER et A. MOJTABI, « Etude numerique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes », *International journal of heat and mass transfer*, t. 32, n° 2, p. 261-269, 1989.
- [31] C. MÉTIVIER et C. NOUAR, « On linear stability of Rayleigh-Bénard Poiseuille flow of viscoplastic fluids », *Physics of Fluids*, t. 20, n° 10, 2008.

- [32] C. METIVIER, C. NOUAR et J.-P. BRANCHER, « Weakly nonlinear dynamics of thermoconvective instability involving viscoplastic fluids », *Journal of fluid mechanics*, t. 660, p. 316-353, 2010.
- [33] C. MÉTIVIER, I. A. FRIGAARD et C. NOUAR, « Nonlinear stability of the Bingham Rayleigh–Bénard Poiseuille flow », *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, t. 158, n° 1-3, p. 127-131, 2009.
- [34] Y. REQUILÉ, « Effets de la dissipation visqueuse sur la convection des écoulements de Rayleigh–Bénard–Poiseuille/Couette de fluides Newtoniens ou viscoélastiques », thèse de doct., Université de Lille (2018-2021), 2019.
- [35] S. A. ORSZAG, « Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 50, n° 4, p. 689-703, 1971.
- [36] C. M. M. GIRAUDET, « Contributions à l'étude de la thermo diffusion de mélanges binaires en conditions de réservoirs », thèse de doct., Pau, 2015.
- [37] A. KHOUZAM, « Étude analytique et numérique de la thermodiffusion en fluide binaire en présence de convection mixte », thèse de doct., Université de Toulouse, Université de Toulouse III-Paul Sabatier, 2013.
- [38] A. O. NIER, *Some reminiscences of mass spectrometry and the Manhattan Project*, 1989.
- [39] C. J. WIENKEN, P. BAASKE, U. ROTHBAUER, D. BRAUN et S. DUHR, « Protein-binding assays in biological liquids using microscale thermophoresis », *Nature communications*, t. 1, n° 1, p. 100, 2010.
- [40] S. XU, A. J. HUTCHINSON, M. TAHERI, B. CORRY et J. F. TORRES, « Thermodiffusive desalination », 2023.
- [41] C. LUDWIG, « Diffusion zwischen ungleich erwärmten Orten gleich zusammengesetzter Lösung. Aus der KK Hofund Staatsdruckerei, in Commission bei W. Braumüller, Buchhändler des KK Hofes und der K », 1856.
- [42] C. SORÉ, *Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions*. 1880.
- [43] C. SORÉ, « Sur l'état d'équilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homogène dont deux parties sont portées à des températures différentes », *Arch. Sci. Phys. Nat*, t. 2, n° 48-61, p. 202, 1879.
- [44] J. K. PLATTEN et J. C. LEGROS, *Convection in liquids*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [45] O. BATISTE, I. MERCADER, M. NET et E. KNOBLOCH, « Onset of oscillatory binary fluid convection in finite containers », *Physical Review E*, t. 59, n° 6, p. 6730, 1999.
- [46] H. BRAND et V. STEINBERG, « Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium », *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, t. 119, n° 1-2, p. 327-338, 1983.
- [47] H. BRAND et V. STEINBERG, « Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold », *Physics letters A*, t. 93, n° 7, p. 333-336, 1983.
- [48] A. BAHLOUL, N. BOUTANA et P. VASSEUR, « Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 491, p. 325-352, 2003.
- [49] M. BOURICH, M. HASNAOUI, A. AMAHMID et M. MAMOU, « Soret driven thermosolutal convection in a shallow porous enclosure », *International communications in heat and mass transfer*, t. 29, n° 5, p. 717-728, 2002.

- [50] M. BOURICH, M. HASNAOUI, M. MAMOU et A. AMAHMID, « Soret effect inducing subcritical and Hopf bifurcations in a shallow enclosure filled with a clear binary fluid or a saturated porous medium : A comparative study », *Physics of Fluids*, t. 16, n° 3, p. 551-568, 2004.
- [51] P. COSTESÈQUE, A. MOJTABI et J. K. PLATTEN, « Thermodiffusion phenomena », *Comptes Rendus Mécanique*, t. 339, n° 5, p. 275-279, 2011.
- [52] A. MANSOUR, A. AMAHMID et M. HASNAOUI, « Soret effect on thermosolutal convection developed in a horizontal shallow porous layer salted from below and subject to cross fluxes of heat », *International Journal of Heat and Fluid Flow*, t. 29, n° 1, p. 306-314, 2008.
- [53] A. KHADIRI, A. AMAHMID, M. HASNAOUI et A. RTIBI, « Soret effect on double-diffusive convection in a square porous cavity heated and salted from below », *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, t. 57, n° 11, p. 848-868, 2010.
- [54] S. GAIKWAD, M. MALASHETTY et K. R. PRASAD, « An analytical study of linear and nonlinear double diffusive convection in a fluid saturated anisotropic porous layer with Soret effect », *Applied Mathematical Modelling*, t. 33, n° 9, p. 3617-3635, 2009.
- [55] H. XU, Z. LUO, Q. LOU, S. ZHANG et J. WANG, « Lattice Boltzmann simulations of the double-diffusive natural convection and oscillation characteristics in an enclosure with Soret and Dufour effects », *International Journal of Thermal Sciences*, t. 136, p. 159-171, 2019.
- [56] R. DUBEY et P. MURTHY, « Linear stability of horizontal throughflow in a Brinkman porous medium with viscous dissipation and Soret effect », *Transport in Porous Media*, t. 126, p. 275-294, 2019.
- [57] K. ROY et P. MURTHY, « Soret effect on the double diffusive convection instability due to viscous dissipation in a horizontal porous channel », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 91, p. 700-710, 2015.
- [58] K. ROY et P. MURTHY, « Linear Stability of the Double-Diffusive Convection in a Horizontal Porous Layer with Open Top : Soret and Viscous Dissipation Effects », *Transport in Porous Media*, t. 122, p. 693-712, 2018.
- [59] A. KHOUZAM, A. MOJTABI, M.-C. CHARRIER-MOJTABI et B. OUATTARA, « Species separation of a binary mixture in the presence of mixed convection », *International journal of thermal sciences*, t. 73, p. 18-27, 2013.
- [60] K. SIOUD, A. ABDENNADHER, S. KADDECHE, M. C. CHARRIER-MOJTABI et A. MOJTABI, « Soret-Driven Convection Inside Concentric Porous Spheres Saturated by Binary Fluid : Comparison with Parallelepipedic Vertical Column », *Transport in Porous Media*, t. 145, n° 3, p. 635-651, 2022.
- [61] A. MOJTABI, A. KHOUZAM, L. YACINE et M.-C. CHARRIER-MOJTABI, « Analytical and numerical study of Soret mixed convection in two sided lid-driven horizontal cavity : Optimal species separation », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 139, p. 1037-1046, 2019.
- [62] B. ŠETA, J. GAVALDA, M. M. BOU-ALI et X. RUIZ, « Stability analysis under thermogravitational effect », *International Journal of Thermal Sciences*, t. 156, p. 106 464, 2020.
- [63] K. SIOUD, « Contribution à l'étude de la diffusion thermogravitationnelle et séparation des espèces », thèse de doct., Université Paul Sabatier-Toulouse III ; Université de Carthage (Tunisie), 2022.

- [64] N. ZUBOVA et T. LYUBIMOVA, « Nonlinear convection regimes of a ternary mixture in a two-layer porous medium », *Vychisl. mekh. splosh. sred–Computational Continuum Mechanics*, t. 14, n° 1, p. 110-121, 2021.
- [65] T. LYUBIMOVA et I. SHUBENKOV, « Soret-induced convection of ternary fluid in a horizontal porous layer heated from below », *Physics of Fluids*, t. 35, n° 8, 2023.
- [66] J. C. LEGROS et J. K. PLATTEN, « The two-component Bénard problem with flow. ii. further numerical results », 1978.
- [67] C. JUNG, M. LÜCKE et P. BÜCHEL, « Influence of through-flow on linear pattern formation properties in binary mixture convection », *Physical Review E*, t. 54, n° 2, p. 1510, 1996.
- [68] P. BÜCHEL et M. LÜCKE, « Influence of through flow on binary fluid convection », *Physical Review E*, t. 61, n° 4, p. 3793, 2000.
- [69] P. BÜCHEL et M. LÜCKE, « Localized perturbations in binary fluid convection with and without throughflow », *Physical Review E*, t. 63, n° 1, p. 016 307, 2000.
- [70] E. PIQUER, M.-C. CHARRIER-MOJTABI, M. AZAIEZ et A. MOJTABI, « Convection mixte en fluide binaire avec effet Soret : étude analytique de la transition vers les rouleaux transversaux 2D », *Comptes Rendus Mécanique*, t. 333, n° 2, p. 179-186, 2005.
- [71] J. HU, H. BEN HADID et D. HENRY, « Linear stability analysis of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect », *Physics of Fluids*, t. 19, n° 3, p. 034 101, 2007.
- [72] H. B. HAMED, R. BENNACER, T. LANGLET, H. SAMOUDA et H. BÉJI, « Numerical 3-D study of Poiseuille Rayleigh Benard Soret problem in a finite extent Paralellipipedic duct », *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, t. 55, n° 6, p. 534-552, 2009.
- [73] M. RAHMAN et M. SAGHIR, « Thermodiffusion or Soret effect : Historical review », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 73, p. 693-705, 2014.
- [74] K. CLUSIUS et G. DICKEL, « New process for separation of gas mixtures and isotopes », *Naturwissenschaften*, t. 26, n° 1, 1938.
- [75] W. FURRY, R. C. JONES et L. ONSAGER, « On the theory of isotope separation by thermal diffusion », *Physical Review*, t. 55, n° 11, p. 1083, 1939.
- [76] E. LAPEIRA, M. GEBHARDT, T. TRILLER et al., « Transport properties of the binary mixtures of the three organic liquids toluene, methanol, and cyclohexane », *The Journal of Chemical Physics*, t. 146, n° 9, p. 094 507, 2017.
- [77] E. LAPEIRA, A. MIALDUN, V. YASNOU, P. ARISTIMUÑO, V. SHEVTSOVA et M. BOU-ALI, « Digital interferometry applied to thermogravitational technique », *Microgravity Science and Technology*, t. 30, p. 635-641, 2018.
- [78] A. MIALDUN et V. SHEVTSOVA, « Digital interferometry as a powerful tool to study the thermodiffusion effect », *Comptes Rendus Mécanique*, t. 339, n° 5, p. 362-368, 2011.
- [79] D. SOMMERMANN, M. SCHRAML et W. KÖHLER, « Thermodiffusion of polymer solutions and colloidal dispersions in mixed solvents », *The Journal of Chemical Physics*, t. 157, n° 19, 2022.
- [80] F. RÖMER, Z. WANG, S. WIEGAND et F. BRESME, « Alkali halide solutions under thermal gradients : Soret coefficients and heat transfer mechanisms », *The Journal of Physical Chemistry B*, t. 117, n° 27, p. 8209-8222, 2013.
- [81] S. A. PUTNAM, D. G. CAHILL et G. C. WONG, « Temperature dependence of thermodiffusion in aqueous suspensions of charged nanoparticles », *Langmuir*, t. 23, n° 18, p. 9221-9228, 2007.



- [82] T. TSUJI, S. SAITA et S. KAWANO, « Dynamic pattern formation of microparticles in a uniform flow by an on-chip thermophoretic separation device », *Physical Review Applied*, t. 9, n° 2, p. 024 035, 2018.
- [83] S. DUHR et D. BRAUN, « Why molecules move along a temperature gradient », *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 103, n° 52, p. 19 678-19 682, 2006.
- [84] A. T. KRÜGER, E. SONDERMANN et A. MEYER, « Measurement of the Soret coefficient in liquid Al-Ag alloys using x-ray radiography », *Physical Review B*, t. 107, n° 6, p. 064 301, 2023.
- [85] A. VAILATI, H. BATALLER, M. BOU-ALI et al., « Diffusion in liquid mixtures », *npj Microgravity*, t. 9, n° 1, p. 1, 2023.
- [86] M. M. BOU-ALI, A. AHADI, D. ALONSO DE MEZQUIA et al., « Benchmark values for the Soret, thermodiffusion and molecular diffusion coefficients of the ternary mixture tetralin+ isobutylbenzene+ n-dodecane with 0.8-0.1-0.1 mass fraction », *The European physical journal E*, t. 38, p. 1-6, 2015.
- [87] V. SHEVTSOVA, V. SECHENYH, A. NEPOMNYASHCHY et J. C. LEGROS, « Analysis of the application of optical two-wavelength techniques to measurement of the Soret coefficients in ternary mixtures », *Philosophical magazine*, t. 91, n° 26, p. 3498-3518, 2011.
- [88] A. MIALDUN, M. BOU-ALI et V. SHEVTSOVA, « Soret vector for description of multicomponent mixtures », *Scientific Reports*, t. 11, n° 1, p. 17 735, 2021.
- [89] M. SCHRAML, H. BATALLER, C. BAUER et al., « The Soret coefficients of the ternary system water/ethanol/triethylene glycol and its corresponding binary mixtures », *The European physical journal E*, t. 44, p. 1-12, 2021.
- [90] F. M. WHITE, *Fluid mechanics*. New York, 1990.
- [91] D. D. JOSEPH, « Stability of Frictionally-Heated Flow », *The Physics of Fluids*, t. 8, n° 12, p. 2195-2200, 1965.
- [92] B. GEBHART et J. MOLLENDORF, « Viscous dissipation in external natural convection flows », *Journal of fluid Mechanics*, t. 38, n° 1, p. 97-107, 1969.
- [93] P. C. SUKANEK, C. A. GOLDSTEIN et R. L. LAURENCE, « The stability of plane Couette flow with viscous heating », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 57, n° 4, p. 651-670, 1973.
- [94] P. ROBERTS, « Convection in horizontal layers with internal heat generation. Theory », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 30, n° 1, p. 33-49, 1967.
- [95] Y. REQUILÉ, S. HIRATA et M. OUARZAZI, « Viscous dissipation effects on the linear stability of Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette convection », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 146, p. 118 834, 2020.
- [96] L. d. B. ALVES, A. BARLETTA, S. HIRATA et M. OUARZAZI, « Effects of viscous dissipation on the convective instability of viscoelastic mixed convection flows in porous media », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 70, p. 586-598, 2014.
- [97] A. BARLETTA, M. CELLI et D. A. REES, « The onset of convection in a porous layer induced by viscous dissipation : a linear stability analysis », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 52, n° 1-2, p. 337-344, 2009.
- [98] A. BARLETTA, M. CELLI et D. A. S. REES, « Darcy–Forchheimer flow with viscous dissipation in a horizontal porous layer : onset of convective instabilities », *Journal of heat transfer*, t. 131, n° 7, 2009.

- [99] A. BARLETTA et D. NIELD, « Convection–dissipation instability in the horizontal plane Couette flow of a highly viscous fluid », *Journal of fluid mechanics*, t. 662, p. 475-492, 2010.
- [100] A. BARLETTA, E. ROSSI DI SCHIO et M. CELLI, « Instability and Viscous Dissipation in the Horizontal Brinkman Flow through a Porous Medium », *Transport in Porous Media*, t. 87, p. 105-119, 2011.
- [101] A. BARLETTA, M. CELLI et D. NIELD, « On the onset of dissipation thermal instability for the Poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel », *Journal of fluid mechanics*, t. 681, p. 499-514, 2011.
- [102] M. CELLI, L. S. d. B. ALVES et A. BARLETTA, « Nonlinear stability analysis of Darcy’s flow with viscous heating », *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, t. 472, n° 2189, p. 20 160 036, 2016.
- [103] P. G. DRAZIN et W. H. REID, *Hydrodynamic stability*. Cambridge university press, 2004.
- [104] Y. REQUILÉ, S. HIRATA, M. OUARAZI et A. BARLETTA, « Weakly nonlinear analysis of viscous dissipation thermal instability in plane Poiseuille and plane Couette flows », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 886, A26, 2020.
- [105] P.-A. BOIS, *Introduction à la mécanique théorique des fluides*. Ellipses Ed. Marketing, 2000.



# Soret effect on the onset of viscous dissipation thermal instability for Poiseuille flows in binary mixtures

## Sommaire

---

<b>2.1 Abstract</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.2 Introduction</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>2.3 Mathematical model</b> . . . . .	<b>41</b>
2.3.1 Governing equations . . . . .	42
2.3.2 Basic state . . . . .	43
2.3.3 Non-dimensionalization . . . . .	44
<b>2.4 Linear stability analysis</b> . . . . .	<b>46</b>
2.4.1 Three-dimensional perturbation equations . . . . .	46
2.4.2 Longitudinal rolls . . . . .	48
2.4.3 Squire transformation in the limiting case of small Gebhart number . . . . .	48
<b>2.5 Numerical Method</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>2.6 Results for positive and negative <math>\psi</math></b> . . . . .	<b>51</b>
2.6.1 Selection of the dominant mode of instability . . . . .	51
2.6.2 Linear properties of the instability for $\psi > 0$ . . . . .	52
2.6.3 Linear properties of the instability for $\psi < 0$ . . . . .	54
<b>2.7 Energy budget Analysis</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>2.8 On the observability of viscous dissipation instability in binary fluid experiments</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>2.9 Conclusions</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>Références</b> . . . . .	<b>64</b>

---

## 2.1 Abstract

We investigate numerically the Soret effect on the linear instability properties in convection due to viscous dissipation in a horizontal channel filled with a binary fluid mixture. Two sets

of boundary conditions of experimental interest are considered. Both have no-slip boundaries for the velocity and no mass flux through them. The lower boundary is considered adiabatic, while the upper boundary is isothermal for case A and inversely for case B. As no external temperature or concentration difference is imposed on the layer, the cause of thermal instability is the flow rate through the volumetric heating induced by the viscous dissipation and the Soret effect inherent to binary mixtures. It is found that longitudinal rolls (LR) represent the preferred mode for the onset of convection. For case A, both oscillatory and steady-state LR may develop depending on the value of the separation ratio  $\psi$  which represents the ratio between the mass contribution and the temperature contribution to buoyancy forces. The dependence of the instability thresholds on the separation ratio is discussed near and far from the codimension-two bifurcation point. For case B, the basic state remains stable for positive separation ratios, while it loses its stability via a stationary bifurcation with zero wave number for negative values of the separation ratio. The relevance of the theoretical results for the observability of such instability in real systems is discussed. Finally, we suggest a protocol to determine Soret coefficients by using the stability diagrams obtained in the current paper.

## 2.2 Introduction

The heat generated by viscous dissipation in a shear flow may produce a local temperature increase, leading to unstable temperature gradients within the fluid. In the last decades, a series of papers proved that viscous heating (or viscous dissipation) effects should not be neglected when considering the stability of shear flows of highly viscous fluids (see, for example, [1] and references therein).

Barletta and co-workers investigated the stability of the plane Poiseuille [2] and Couette flows [3], in which there were no imposed external temperature differences, and so the classical Bénard mechanism was not present. In their configuration (adiabatic lower boundary, isothermal upper boundary), viscous heating was the only source of destabilization. Through a linear analysis, it has been shown that the preferred mode at the convection onset takes the form of longitudinal rolls. The weakly nonlinear analysis of the problem treated in [2] was addressed in [4], and the results indicate that the nonlinearities associated with viscous heating may promote subcritical bifurcations for a specific range of parameters. Differently from [2] and [3], Requilé et al. [5] performed linear stability analyses of the so-called Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP) and Rayleigh-Bénard-Couette (RBC) configurations, where in addition to the temperature difference imposed on the external boundaries, thermal stratification was also a consequence of the volumetric viscous heating. Results demonstrate that viscous heating may induce a strong destabilization and trigger instability even if the external thermal gradient is stabilizing. In particular, Requilé et al. [5] showed that, when the upper and lower boundaries are kept at the same temperature, larger viscous dissipation values were needed to trigger the instability compared to an adiabatic lower boundary and an isothermal upper boundary.

On the other hand, thermal convection in binary fluid mixtures has been an active research topic since the 1980s because of its wide range of engineering applications, including crystal growth, chemical vapor deposition, industrial cooling, and natural hydrocarbon reservoirs (see a recent review by Köhler and Morozov [6]). In addition, the flow patterns in binary fluid mixtures are more captivating and complicated than those in one-component fluid because of the Soret coupling between the temperature and concentration fields. The interaction between heat and mass diffusion in a binary mixture leads to a remarkable variety of nonlinear behavior near the convective threshold. Laboratory experiments allowed the observation of convective states as traveling waves, localized traveling waves, stationary convection, counterpropagating

waves and chaos. As it is well-known, a temperature gradient applied to a binary fluid mixture induces a mass fraction gradient. This phenomenon is known as thermodiffusion or the Soret effect. The strength of this effect is measured by the separation ratio, a dimensionless parameter proportional to the Soret coefficient and represents the ratio between the mass contribution and temperature contribution to buoyancy forces. It can be either positive or negative, according to the thermo-physical properties of the fluid mixture. In the case of a positive separation ratio, the heavier component of the fluid mixture is driven in the direction of lower temperatures, thus further enhancing the density gradient. For negative separation ratios, the opposite situation occurs. The work by Jung et al. [7] shed light on the role played by the Soret coupling on the stability of Poiseuille-Rayleigh-Bénard problems (PRB). Hu and co-workers investigated the spatiotemporal behavior of two-dimensional disturbances in PRB flows of binary fluids through linear stability analyses [8], and direct numerical simulations [9].

The aim of the present paper is to investigate the linear stability of the Poiseuille flow of binary fluids by taking into account both the effects of viscous heating and thermodiffusion. Therefore, this work may be seen as an extension to binary fluids of the linear stability analysis conducted by Barletta et al. [2] for a one-component fluid. As in [2], no external temperature difference is prescribed over the layer. Two cases have been investigated : the case where the upper boundary is considered isothermal, the lower one is adiabatic, and the case where the upper boundary is adiabatic and the lower one is isothermal. With these two different boundary conditions, a basic temperature gradient exists and is negative (i.e., internal heating from below) in the former case, while it becomes positive (i.e., internal heating from above) in the latter case. Positive as well as negative separation ratios are analyzed. Differently from [8], the Squire transformation cannot be used in the general case. Nevertheless, under a reasonable approximation, we proposed a Squire transformation that can easily reduce the three-dimensional eigenvalue problem to an equivalent two-dimensional one. For the general case without any approximation, the whole three-dimensional linear eigenvalue problem is solved numerically to determine the thresholds for the onset of the different convective structures (transverse, oblique, or longitudinal modes). Moreover, results of practical relevance to experiments are discussed in detail for liquid mixtures involving ethanol/water ([10], [11], [12] and [13]), methanol/water [13], mineral oil/natural ester [14], n-dodecane/n-hexane [15] and  $^3\text{He}/^4\text{He}$  [16].

The paper is organized as follows. In Section 2.3, we describe the mathematical model, and the base state solution for the two different boundary conditions (case A and B). In Section 2.4, a modal linear stability analysis of the base solution is performed. The perturbation equations are obtained for the case of arbitrarily oriented disturbances (sect. 2.4.1). The numerical method is briefly described and validated in Section 2.5. Results for negative and positive values of the separation ratio are presented in section 2.6. The stability/instability mechanisms are analyzed by a kinetic energy budget analysis in section 2.7. The observability in laboratory experiments of the theoretically predicted instabilities resulting from viscous dissipation in pure fluids as well as in binary fluid mixtures is highlighted in section 2.8. Finally, conclusions are drawn in Section 2.9.

## 2.3 Mathematical model

We consider a binary fluid mixture contained between two horizontal plates of infinite extension in the horizontal directions  $x$  and  $y$ , separated by a height  $H$  in the vertical direction  $z$ , so that the lower wall is in  $z = 0$  and the top wall in  $z = H$ . A constant pressure gradient is imposed in the  $x$ -direction, generating a Poiseuille velocity profile. Two cases are investigated in this paper ; the thermal boundary conditions for case A are such that the lower wall is adiabatic

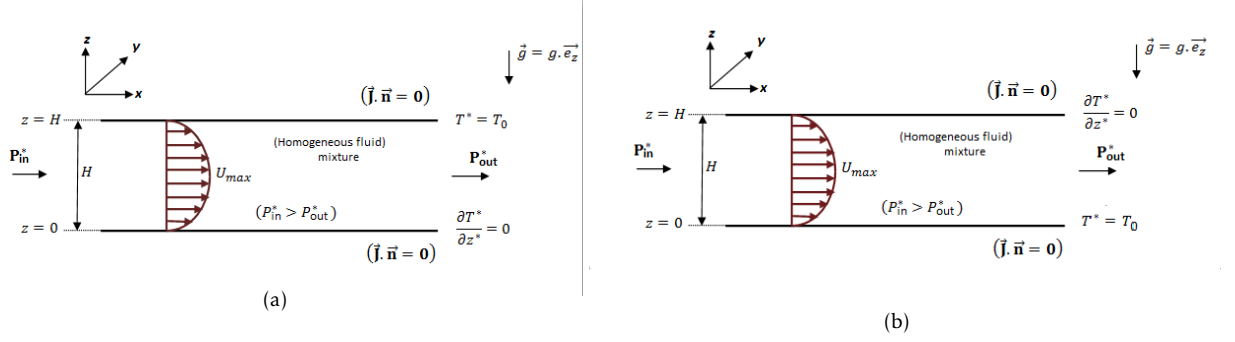


FIGURE 2.1 – Sketch of the basic Poiseuille flow and the boundary conditions : a) case A and b) case B.

while the upper wall is isothermal, and inversely for case B where the lower wall is isothermal and the upper wall is adiabatic. For both cases, no slip for the velocity field and no mass flux conditions are imposed on the horizontal walls (cf. fig 2.1). The star symbol  $*$  denotes a dimensional quantity.

### 2.3.1 Governing equations

We denote by  $\vec{u}^*$ ,  $P^*$ ,  $T^*$  and  $C^*$ , the velocity field, the hydrostatic pressure, the temperature and the concentration of the densest component of the binary fluid mixture. The Boussinesq approximation indicates that the density variations are neglected everywhere except for the gravity in the momentum equation. The Dufour effect which drives the temperature fluctuations under the action of a concentration gradient is neglected in the present study. This effect is negligible for liquids and its influence is often small in gas mixtures as observed by Liu et al. [17]. Subject to these conditions, the dimensional system that must be solved is then,

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \vec{u}^* \right) = -\vec{\nabla}^* P^* + \rho_0 (\beta_T (T^* - T_a^*) - \beta_C (C^* - C_a^*)) g \cdot \vec{e}_z + \mu \vec{\nabla}^{*2} \vec{u}^* \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* T^* = \kappa \vec{\nabla}^{*2} T^* + \frac{\Phi}{\rho_0 c_v} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* C^* = D \left[ \vec{\nabla}^{*2} C^* + S_T C_a^* (1 - C_a^*) \vec{\nabla}^{*2} T^* \right] \quad (2.4)$$

where  $\beta_T$  and  $\beta_C$  are the thermal expansion and the mass expansion coefficients defined as

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_C > 0 \quad \text{and} \quad \beta_C = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_T > 0. \quad (2.5)$$

Here,  $\rho_0$  is the mass density,  $\mu$  is the dynamic viscosity,  $\kappa$  is the thermal diffusivity,  $c_v$  is the heat capacity per unit mass,  $g$  is the gravitational acceleration,  $C_a^*$  is the average mass fraction of the densest component corresponding to an average temperature  $T_a^*$  and  $S_T = \frac{D_T}{D}$  the Soret coefficient, with  $D$  and  $D_T$  the solutal diffusion coefficient and thermodiffusion coefficient

respectively that we have taken to be independent of temperature and composition. In the last term of the energy equation,  $\Phi$  denotes the power per unit volume generated by the viscous dissipation, given by  $\Phi = 2\mu \bar{D}^* : \bar{D}^*$  where  $\bar{D}^* = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}^* \vec{u}^* + \vec{\nabla}^{*T} \vec{u}^*)$  is the strain tensor. The boundary conditions for both cases A and B are given by

$$\vec{u}^* = \vec{0} \text{ at } z^* = 0, H \quad (2.6)$$

for the three components of the velocity field. As we are dealing with a binary fluid mixture, the diffusive concentration flux takes the form :  $\vec{J} = -\rho_0 D \left[ \vec{\nabla}^* C_a^* + S_T C_a^* (1 - C_a^*) \vec{\nabla}^* T^* \right]$ .

The horizontal boundaries are assumed to be impermeable, so the mass flux must vanish at  $z^* = 0$  and  $z^* = H$ . This leads to

$$\frac{\partial C^*}{\partial z^*} = -S_T C_a^* (1 - C_a^*) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \text{ at } z^* = 0, H \quad (2.7)$$

For the thermal boundary conditions, we assume that the lower wall is adiabatic and the upper wall is isothermal for case A and inversely for case B.

$$\text{Case A : } \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0 \text{ at } z^* = 0 \text{ and } T^* = T_0 \text{ at } z^* = H \quad (2.8)$$

$$\text{Case B : } T^* = T_0 \text{ at } z^* = 0 \text{ and } \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0 \text{ at } z^* = H \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Basic state

A dimensional stationary solution of the system (2.1-2.4) respecting boundary conditions (2.6-2.9) is a Poiseuille flow in the  $x$ -direction and a combination of vertical nonlinear thermal and concentration stratifications

$$u_b^*(z) = U_a f^*(z^*) \quad (2.10)$$

$$T_b^*(z) = T_a^* + \frac{\nu U_a^2}{c_v \kappa} g^*(z^*) \quad (2.11)$$

$$C_b^*(z) = C_a^* - S_T C_a^* (1 - C_a^*) (T_b^*(z) - T_a^*) \quad (2.12)$$

where  $U_a$  is the average velocity,  $\nu$  is the kinematic viscosity,  $T_a^* = T_0 + \frac{18 \nu U_a^2}{5 c_v \kappa}$ ,  $C_a^*$  is a solution of the second order polynomial  $C_i - C_a^* + S_T C_a^* (1 - C_a^*) \frac{12 \nu U_a^2}{5 c_v \kappa} = 0$  with  $C_i$  the initial concentration of the densest component in the absence of throughflow and  $f^*(z^*) = -6 \left( \frac{z^{*2}}{H^2} - \frac{z^*}{H} \right)$ .

The function  $g^*(z^*)$  can take two different expressions depending on the thermal boundary conditions. For case A,  $g^*(z^*) = -6 \left( -\frac{2}{5} + 3 \frac{z^{*2}}{H^2} - 4 \frac{z^{*3}}{H^3} + 2 \frac{z^{*4}}{H^4} \right)$  with a negative nonlinear thermal gradient. In particular,

$$T_b^*(z^* = 0) - T_b^*(z^* = 1) = \frac{6 \nu U_a^2}{c_v \kappa} \quad (2.13)$$

meaning that the viscous dissipation serves to raise the temperature of the moving fluid by generating an internal heating from below. While for case B,  $g^*(z^*) = -6 \left( \frac{3}{5} - 2 \frac{z^*}{H} + 3 \frac{z^{*2}}{H^2} - 4 \frac{z^{*3}}{H^3} + 2 \frac{z^{*4}}{H^4} \right)$  with a positive nonlinear thermal gradient and  $T_b^*(z^* = 0) - T_b^*(z^* = 1) = -\frac{6 \nu U_a^2}{c_v \kappa}$ . In that case ,



the internal heating is from above.

We mention that the basic pressure takes the form

$$P_b^*(x^*, z^*) = \frac{\nu U_a^2}{c_v \kappa} \rho_0 g (\beta_T + S_T \beta_C C_a^* (1 - C_a^*)) q^*(z^*) + \frac{12\mu U_a}{H^2} (z^* - x^*) \quad (2.14)$$

with  $q^*(z^*) = 6 \left( -\frac{2}{5} z^* + \frac{z^{*3}}{H^2} - \frac{z^{*4}}{H^3} + \frac{2}{5} \frac{z^{*5}}{H^4} \right)$ .

It can be noted from expressions (2.11) and (2.12) that the basic temperature and concentration nonlinear vertical gradients are the result of the viscous dissipation contribution and vanish in the absence of throughflow ( $U_a = 0$ ). For  $U_a \neq 0$  and  $S_T = 0$  (i.e., one component fluid), the relation (2.12) indicates that the concentration is equal to its initial value  $C_i$  independently of  $U_a$ . For  $U_a \neq 0$  and  $S_T \neq 0$ , the Soret effect generates a vertical concentration distribution proportional to the basic temperature. If  $S_T > 0$ , then the basic concentration gradient is opposite to the basic temperature gradient. In other words, the densest component of the mixture migrates to the cold wall, i.e., the upper wall in case A and the lower wall in case B. Thus, the Soret effect will destabilize the system in case A and stabilizes it in case B. On the other hand, if  $S_T < 0$ , the basic temperature and concentration fields are of the same sign and the densest constituent migrates towards the hot wall, i.e., the lower wall in case A, stabilizing the system. While in case B, where the hot wall is the upper one, the system is destabilized because of the generated density gradient, which is opposite to the gravitational field in this case.

### 2.3.3 Non-dimensionalization

We now define the non-dimensional quantities as

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^*, y^*, z^*) = H (x, y, z), \quad t^* = \frac{H^2}{\nu} t, \quad \vec{u}^* = \frac{\kappa}{H} \vec{u}, \\ P^* = \frac{\mu \kappa}{H^2 \nu} P, \quad \vec{\nabla}^* = \frac{1}{H} \vec{\nabla}, \quad \bar{D}^* = \frac{\kappa}{H^2} \bar{D}, \\ T^* - T_a^* = \frac{\nu \kappa}{\beta_T g H^3} T, \quad C^* - C_a^* = \frac{\nu \kappa}{\beta_C g H^3} C \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Where  $\nu = \mu/\rho$ , is the kinematic viscosity. By using (Eq.2.15), we get the following dimensionless equations system

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -Pr \vec{\nabla} P + Pr(T - C) \vec{e}_z + Pr \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla}^2 T + 2Ge \bar{D} : \bar{D} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = \frac{1}{Le} (\vec{\nabla}^2 C + \psi \vec{\nabla}^2 T) \quad (2.19)$$

where  $\vec{e}_z$  is the unit vector along the z-axis. Moreover

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Le = \frac{\kappa}{D}, \quad \psi = S_T \frac{\beta_C C_a^* (1 - C_a^*)}{\beta_T}, \quad Ge = \frac{\beta_T g H}{c_v} \quad (2.20)$$

are respectively the Prandtl number, the Lewis number which compares the time scales of heat diffusion and concentration (Note that the Lewis number as defined here is the same as the Lewis number defined by Nield and Bejan [18]), the separation ratio which represents the ratio between

the mass contribution and the temperature contribution to buoyancy forces and the Gebhart number which measures the intensity of viscous dissipation. We note that the separation ratio  $\psi$  can be either positive or negative, according to the sign of the Soret coefficient  $S_T$ , and is zero in the case of a pure fluid. We also note that the Gebhart number is proportional to the system height  $H$  and for realistic experimental setups in a laboratory,  $Ge$  is very small, say of the order  $10^{-3}$ . On the other hand,  $Ge$  can be of the order 1 for geophysical-related problems, where the height  $H$  can be of the order of one kilometer.

The boundary conditions can be expressed as

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.21)$$

$$\text{Case A: } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } T = 0 \text{ at } z = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{Case B: } T = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 1 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \psi \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (2.24)$$

The basic state solutions (2.10-2.12), may be written in dimensionless form as

$$\vec{u}_b(z) = Pe f(z) \vec{e}_x, \quad (2.25)$$

$$T_b(z) = \Lambda g(z), \quad (2.26)$$

$$C_b(z) = -\psi T_b(z), \quad (2.27)$$

$$P_b = \Lambda(1 + \psi) q(z) + 12 Pe (z - x), \quad (2.28)$$

where  $e_x$  is the unit vector along the x-axis,  $Pe = \frac{U_a H}{\kappa}$  is the Péclet number and  $\Lambda = Pe^2 Ge$ . The functions  $f(z), g(z)$  for each case A and B, and  $q(z)$  are defined as follows :

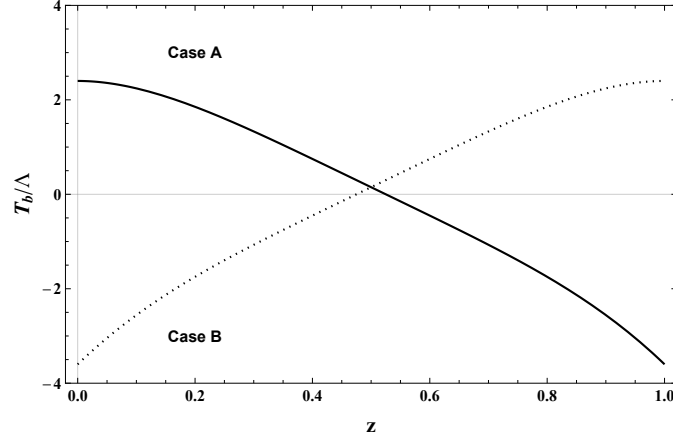
$$f(z) = 6z(1 - z),$$

$$\text{Case A: } g(z) = 6\left(\frac{2}{5} - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4\right),$$

$$\text{Case B: } g(z) = 6\left(-\frac{3}{5} + 2z - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4\right),$$

$$q(z) = -6\left(\frac{2}{5}z - z^3 + z^4 - \frac{2}{5}z^5\right)$$

A plot of the basic temperature profile is presented in figure 2.2. Note that it is a monotonically decreasing function of  $z$  for case A, and inversely for case B. According to Eq. (2.27), under the Soret effect, the basic concentration has the same sign as the basic temperature for  $\psi < 0$  and the opposite sign for  $\psi > 0$ .

FIGURE 2.2 – Base temperature curve ( $T_b/\Lambda$ ) versus  $z$  for both cases A and B

## 2.4 Linear stability analysis

### 2.4.1 Three-dimensional perturbation equations

To investigate the stability of the basic solution (2.25-2.28), we super-imposed infinitesimal three-dimensional perturbations onto the basic solution,

$$\begin{cases} \vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}_b(z) + \epsilon \vec{U}(x, y, z, t), \\ T(x, y, z, t) = T_b(z) + \epsilon \theta(x, y, z, t), \\ C(x, y, z, t) = C_b(z) + \epsilon c(x, y, z, t), \\ P(x, y, z, t) = P_b(z) + \epsilon p(x, y, z, t). \end{cases} \quad (2.29)$$

Where  $\epsilon$  is a small perturbation parameter. We introduce a new variable  $\eta = c + \psi \theta$  in order to avoid the coupling between  $\theta(x, y, z, t)$  and  $c(x, y, z, t)$  in the boundary conditions.

The three-dimensional disturbance quantities are expressed in a normal mode form,

$$\begin{cases} \vec{U}(x, y, z, t) = \vec{U}_n(z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \theta(x, y, z, t) = \theta_n(z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \eta(x, y, z, t) = \eta_n(z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{(\sigma - i\omega)t} \end{cases} \quad (2.30)$$

Where  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$  is the wave vector, with  $k_x = k \cos \phi$  and  $k_y = k \sin \phi$ , the wave vector components along  $Ox$  and  $Oy$ , respectively. The temporal growth of the perturbation is  $\sigma$  and  $\omega$  is the perturbation frequency. Since we are interested in the neutral stability condition, we will consider hereafter  $\sigma = 0$ . On substituting (2.30) in the linearized system, we obtain

$$ik(\cos \phi U_n + \sin \phi V_n) + DW_n = 0 \quad (2.31)$$

$$i\omega U_n(z) - ik \cos \phi Re Pr f(z) U_n(z) - Pe f'(z) W_n - ik Pr \cos \phi P_n + Pr(D^2 - k^2)U_n = 0, \quad (2.32)$$

$$i\omega V_n(z) - ik \cos \phi Re Pr f(z) V_n(z) - ik Pr \sin \phi P_n + Pr(D^2 - k^2)V_n = 0, \quad (2.33)$$

$$i\omega W_n(z) - ik \cos \phi Re Pr f(z) W_n(z) - Pr DP_n + Pr[(D^2 - k^2)W_n + (1 + \psi)\theta_n - \eta_n] = 0, \quad (2.34)$$

$$i\omega \theta_n(z) - ik \cos \phi Re Pr f(z) \theta_n(z) - Ge Pr^2 Re^2 g'(z) W_n(z) + (D^2 - k^2)\theta_n(z) + 2Ge Re Pr f'(z)[DU_n(z) + ik \cos \phi W_n(z)] = 0, \quad (2.35)$$

$$i\omega(\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) - ik \cos \phi Re Pr f(z)(\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) + \psi Ge Pr^2 Re^2 g'(z) W_n(z) + \frac{1}{Le}(D^2 - k^2)\eta_n(z) = 0, \quad (2.36)$$

Where  $D = \frac{d}{dz}$  and  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . The boundary conditions now become

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{U}_n = 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ \text{Case A: } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ \text{Case B: } \theta_n = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ D\eta_n = 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{array} \right. \quad (2.37)$$

In addition to  $Le$ ,  $\psi$ , and  $Pr$ , the above three-dimensional eigenvalue problem also depends on the parameters  $Re$  and  $Ge$ . In the absence of viscous dissipation ( $Ge = 0$ ), the above system yields to  $\theta_n(z) = \eta_n(z) = 0$ . By rescaling the frequency  $\omega$  and  $P_n$  by setting  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{Pr}$  and  $\hat{P}_n = \frac{P_n}{Pr}$ , the obtained equations are the well-known Orr-Sommerfeld equations for the study of the hydrodynamic stability of the Poiseuille flow in a plane channel (Orszag [19]). The Reynolds number  $Re$  is then the only control parameter, while  $Le$ ,  $\psi$  and  $Pr$  disappear from the equations. In other words, the critical Reynolds number at the onset of hydrodynamic instability for a binary fluid mixture is the same as for a one-component fluid.

When  $Ge \neq 0$ , viscous dissipation effects are no more negligible. Barletta and Nield [3] and Barletta et al. [2] used the parameter  $\Lambda = Ge Re^2 Pr^2$  as a control parameter instead of  $Re$ . The physical reason underlying this choice may be understood as follows. Qualitatively, one can establish an analogy between the control parameter  $\Lambda = \frac{\beta_T g H^3 U_a^2}{c_v \kappa^2}$  associated with viscous dissipation instability and the control parameter Rayleigh number  $Ra = \frac{\beta_T g H^3 \Delta T^*}{\nu \kappa}$  in the classical Rayleigh-Bénard configuration, where  $\Delta T^*$  is an imposed temperature difference at the horizontal boundaries. The condition  $\Lambda \sim Ra$  is satisfied, provided that

$$\Delta T^* \sim \frac{U_a^2 \nu}{c_v \kappa} \quad (2.38)$$

The relation (2.38) states that the parameter  $\Lambda$  is equivalent to an internal Rayleigh number, where  $\Delta T^*$  is generated by the mean flow and not by external boundaries as in the Rayleigh-Bénard problem. The relation (2.13) shows that  $\Delta T^*$  is indeed proportional to  $\frac{U_a^2 \nu}{c_v \kappa}$ . Consequently, the parameter  $\Lambda$  may be considered as the viscous dissipation Rayleigh number. Physically, this means that we are dealing with thermal instability induced by viscous dissipation effect. We concluded that using the viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda$  as a control parameter instead of the Reynolds number  $Re$  is a convenient choice to study the onset of viscous dissipation instability. We, therefore, reformulated the three-dimensional eigenvalue problem (2.32)-(2.36) by setting  $Re = \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{\Lambda}{Ge}}$ . The system (2.32)-(2.36) becomes,

$$ik(\cos \phi U_n + \sin \phi V_n) + DW_n = 0 \quad (2.39)$$

$$i\omega U_n(z) - ik \cos \phi \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f(z) U_n(z) - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f'(z) W_n - ik \cos \phi P_n + Pr(D^2 - k^2)U_n = 0, \quad (2.40)$$

$$i\omega V_n(z) - ik \cos \phi \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f(z) V_n(z) - ik \sin \phi P_n + Pr(D^2 - k^2)V_n = 0, \quad (2.41)$$

$$i\omega W_n(z) - ik \cos \phi \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f(z) W_n(z) - DP_n + Pr[(D^2 - k^2)W_n + (1 + \psi)\theta_n - \eta_n] = 0, \quad (2.42)$$

$$i\omega \theta_n(z) - ik \cos \phi \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f(z) \theta_n(z) + (D^2 - k^2)\theta_n(z) - \Lambda g'(z) W_n(z) + 2\sqrt{\Lambda} \sqrt{Ge} f'(z)[DU_n(z) + ik \cos \phi W_n(z)] = 0, \quad (2.43)$$

$$i\omega(\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) - ik \cos \phi \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f(z)(\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) + \psi\Lambda g'(z)W_n(z) + \frac{1}{Le}(D^2 - k^2)\eta_n(z) = 0 \quad (2.44)$$

### 2.4.2 Longitudinal rolls

For longitudinal rolls ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ), we first re-scale the function  $U_n = Re \tilde{u}_n$ . By introducing a stream-function in the yz-plane such as

$$W_n(z) = -ik\Psi_n(z), \quad V_n(z) = D\Psi_n(z)$$

where  $\Psi_n$  is the amplitude of the stream-function perturbation, we obtain the eigenvalue problem related to longitudinal rolls. The linearized perturbations equations (2.40)-(2.44) become

$$\frac{i\omega}{Pr}(D^2 - k^2)\Psi_n(z) + (D^2 - k^2)^2\Psi_n(z) - ik(1 + \psi)\theta_n(z) - ik\psi\eta_n(z) = 0 \quad (2.45)$$

$$i\omega\theta_n(z) + ik\Lambda g'(z)\Psi_n(z) + (D^2 - k^2)\theta_n(z) + 2\frac{\Lambda}{Pr}f'(z)D\tilde{u}_n(z) = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{i\omega}{Pr}\tilde{u}_n + ikf'(z)\Psi_n(z) + (D^2 - k^2)\tilde{u}_n(z) = 0 \quad (2.47)$$

$$i\omega\theta_n(z) + i\omega\eta_n(z) + ik\Lambda g'(z)\Psi_n(z) + \frac{1}{Le}(D^2 - k^2)\eta_n(z) = 0 \quad (2.48)$$

The boundary conditions are written :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_n = \Psi_n = D\Psi_n = 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ \text{Case A : } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ \text{Case B : } \theta_n = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ D\eta_n = 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

We note that the above eigenvalue of longitudinal rolls do not depend on Gebhart number  $Ge$

### 2.4.3 Squire transformation in the limiting case of small Gebhart number

In the well-known hydrodynamic instability of the plane Poiseuille flow (Orszag [19]), Squire's theorem holds and states that the most unstable disturbances are two-dimensional transverse rolls. Barmak et al. [20] showed that Squire's theorem also holds for the horizontal two-phase stratified flows. Pearlstein [21] generalized Squire's theorem to a double diffusive plane parallel shear flows with varying temperature and concentration. He proved that only

two-dimensional transverse or longitudinal rolls might be the most critical disturbances. This allows the linear stability analysis to be restricted to two-dimensional disturbances, as done in the early work by Linden et al. [22] and Thangam et al. [23]. Differently from these types of instability, Squire's theorem does not hold for the dissipation-induced convective instability as it was shown by Barletta and Nield [3] for a one-component Couette flow and by Barletta et al. [2] for a one-component Poiseuille flow. Therefore, these authors used a three-dimensional stability analysis instead of a two-dimensional one. Indeed, for the general case without any approximation, we did not succeed in finding a Squire transformation that allows us to deduce the onset of convection in a three-dimensional problem from the one associated with the two-dimensional problem. Nevertheless, it is shown in the following that for realistic cases where  $Ge \ll \Lambda$ , the problem defined by the system (2.40)-(2.44) for any three-dimensional disturbances (an oblique mode) with  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ , is equivalent to that for a two-dimensional disturbance with  $\phi = 0$  at a different Gebhart number. By assuming  $\Lambda = O(1)$  and for realistic experimental setups with  $Ge \ll 1$ , equation (2.43) is simplified and reads

$$i\omega \theta_n(z) - ik \cos \phi \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{Ge}} f(z) \theta_n(z) + (D^2 - k^2)\theta_n(z) - \Lambda g'(z) W_n(z) = 0 \quad (2.50)$$

Consider equations (2.40)-(2.44) where (2.43) is replaced by (2.50) for a normal mode with  $\phi = 0$ , Gebhart number  $Ge_{2D}$  and  $\Lambda_{2D}$

$$ik \widetilde{U}_n + D\widetilde{W}_n = 0 \quad (2.51)$$

$$i\omega_{2D} \widetilde{U}_n(z) - ik \frac{\sqrt{\Lambda_{2D}}}{\sqrt{Ge_{2D}}} f(z) \widetilde{U}_n(z) - \frac{\sqrt{\Lambda_{2D}}}{\sqrt{Ge_{2D}}} f'(z) \widetilde{W}_n - ik \widetilde{P}_n + Pr(D^2 - k^2)\widetilde{U}_n = 0, \quad (2.52)$$

$$i\omega_{2D} \widetilde{W}_n(z) - ik \frac{\sqrt{\Lambda_{2D}}}{\sqrt{Ge_{2D}}} f(z) \widetilde{W}_n(z) - D\widetilde{P}_n + Pr[(D^2 - k^2)\widetilde{W}_n + (1 + \psi)\widetilde{\theta}_n - \widetilde{\eta}_n] = 0, \quad (2.53)$$

$$i\omega_{2D} \widetilde{\theta}_n(z) - ik \frac{\sqrt{\Lambda_{2D}}}{\sqrt{Ge_{2D}}} f(z) \widetilde{\theta}_n(z) + (D^2 - k^2)\widetilde{\theta}_n(z) - \Lambda_{2D} g'(z) \widetilde{W}_n(z) = 0 \quad (2.54)$$

$$i\omega_{2D} (\widetilde{\eta}_n(z) - \psi\widetilde{\theta}_n(z)) - ik \frac{\sqrt{\Lambda_{2D}}}{\sqrt{Ge_{2D}}} f(z)(\widetilde{\eta}_n(z) - \psi\widetilde{\theta}_n(z)) + \psi\Lambda_{2D} g'(z)\widetilde{W}_n(z) + \frac{1}{Le}(D^2 - k^2)\widetilde{\eta}_n(z) = 0, \quad (2.55)$$

where the subscripts  $2D$  and fields with the tilde symbol refer to variables of an equivalent two-dimensional problem. Comparing the formulations, one can easily reduce the three-dimensional problem to an equivalent two-dimensional problem using the following transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} Ge_{2D} = \frac{Ge}{\cos^2 \phi} \\ \Lambda_{2D} = \Lambda \\ \omega_{2D} = \omega \\ \widetilde{U}_n(z) = \cos \phi U_n + \sin \phi V_n \\ (\widetilde{W}_n(z), \widetilde{\theta}_n(z), \widetilde{\eta}_n(z)) = (W_n(z), \theta_n(z), \eta_n(z)) \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Note that  $Ge_{2D} > Ge$  and hence, at fixed  $Pr$ ,  $Le$  and  $\psi$ , for every three-dimensional disturbance, there exists a two-dimensional disturbance with the same threshold  $\Lambda$  and the same frequency  $\omega$  at a higher Gebhart number given by the transformation (2.56). Thus, in order to find the critical value  $\Lambda_c$  at the onset of oblique rolls with an inclination angle  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  for a fixed  $Ge$ , it is sufficient to consider only transverse rolls and determine  $\Lambda_{2Dc}$  but with  $\frac{Ge}{\cos^2 \phi}$  instead of  $Ge$ .

On the other hand, two-dimensional numerical computation of the critical value  $\Lambda_{2Dc}$  showed that it decreases with increasing  $Ge$ , i.e.,  $\Lambda_{2Dc}(\frac{Ge}{\cos^2\phi}) < \Lambda_{2Dc}(Ge)$ . We, therefore, concluded that for a fixed  $Ge$ , oblique rolls are more unstable than transverse rolls. This finding is supported by a numerical resolution of the three-dimensional eigenvalue problem (2.40)-(2.44) without any approximation as it will be shown in section (2.6.1).

## 2.5 Numerical Method

The eigenvalues of oblique, transverse and longitudinal rolls are solved numerically using the shooting method within the Mathematica 10 Wolfram Research environment. For the numerical solution of the system, the boundary conditions are transformed into initial conditions at  $z = 0$ , by

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_n = D\Psi_n = 0, \quad D^2\Psi_n = C_1, \quad D^3\Psi_n = C_2, \\ \text{Case A : } \theta_n = 1, \quad D\theta_n = 0, \\ \text{Case B : } D\theta_n = 1, \quad \theta_n = 0, \\ \tilde{u}_n = 0, \quad D\tilde{u}_n = C_3, \\ \eta_n = C_4, \quad D\eta_n = 0, \end{array} \right. \quad (2.57)$$

where the conditions  $\theta_n = 1$  and  $D\theta_n = 1$  fixe the otherwise indeterminate scale of the eigenfunctions  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  for each case A and B, respectively. The complex auxiliary parameters  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  are unknown and can be evaluated by a shooting method, the target conditions being those given in (2.37) for  $z = 1$ . The approximate solution of the system satisfying the initial conditions was then determined using the build-in function `NDSolve` of Mathematica. The shooting method has been implemented using the built-in function `FindRoot` of Mathematica. In the particular case of longitudinal rolls ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ), the parameters  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  are real since the eigenvalue problem becomes self-adjoint. The boundary conditions (2.37) at  $z = 1$  yield five real equations for the longitudinal rolls, and ten real equations for the oblique and transverse rolls ( $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ ), respectively. Using the shooting method and assuming that  $(k, Ge, Pr, Le, \psi)$  are prescribed, these conditions allow one to evaluate the real and the imaginary parts of the complex auxiliary parameters  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , as well as the real parameters  $\Lambda$  and  $\omega$ .

TABLEAU 2.1 – Critical conditions for the onset of longitudinal rolls : comparison of our results with  $\Psi = 0$  to those of Barletta et al. (2011).

$Pr$	Present work		Barletta et al. (2011)	
	$\Lambda_c$	$k_c$	$\Lambda_c$	$k_c$
0.1	321.2322	3.2921	321.2323	3.292129
1	240.1912	2.6862	240.1912	2.686186
10	223.1388	2.5827	223.1388	2.582712
$10^5$	221.2621	2.5721	221.2621	2.572050

With this procedure, one may determine an eigenvalue function  $\Lambda(k)$  for any given  $(Ge, Pr, Le, \psi)$ . The minimum of any of these functions corresponds to the critical threshold  $\Lambda_c$  for the onset of convective instability.

The accuracy and validity of the numerical scheme are checked by comparing our results for  $\psi = 0$  (in the absence of the Soret effect for case A) with the published results for plane Poiseuille

Flow by Barletta et al. (2011) [2] at varying Prandtl numbers. Table 2.1 presents the critical values  $\Lambda_c$  and the corresponding critical wave-numbers  $k_c$  for different Prandtl numbers for case A. As can be seen from Table 2.1, our results are in excellent agreement with the numerical computations of Barletta et al. (2011)[2].

## 2.6 Results for positive and negative $\psi$

### 2.6.1 Selection of the dominant mode of instability

As a first step, it is important to determine what type of structure among oblique, transverse and longitudinal rolls will prevail at the onset of convection. Through a linear stability analysis, Barletta et al. (2011) [2] have shown that the preferred mode at onset of the dissipation induced instability of a Poiseuille flow in the case of one component fluid (i.e.  $\psi = 0$ ) is in the form of longitudinal rolls. We have checked that this prediction also holds for binary fluid mixtures for various values of the separation ratio  $\psi \neq 0$  and different assigned values of  $Le$ ,  $Pr$ , and  $Ge$  numbers. In all our computations, we found that oblique and transverse rolls may develop as oscillatory instability with  $\omega_c \neq 0$ , while longitudinal rolls may be stationary or oscillatory depending on the separation ratio  $\psi$ . Frames (a) and (b) of figure 2.3 present specific examples of separation ratio values fixed respectively to  $\psi = 0$ ,  $\psi = 0.01$  and  $\psi = -0.03$  with  $Pr = 50$ ,  $Le = 1$  and  $Ge = 0.01$ . In each frame of figure 2.3, we show the behavior of the neutral stability curves for the three convective patterns, namely longitudinal rolls with  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , oblique rolls with  $\phi = \frac{\pi}{4}$  and transverse rolls with  $\phi = 0$ . Figure 2.3 indicates that the most unstable mode for the convective instability induced by the combined effect of thermodiffusion and viscous dissipation is in stationary longitudinal rolls for  $\psi = 0$  and  $\psi = 0.01$  and oscillatory longitudinal rolls in the case of  $\psi = -0.03$ . As the longitudinal rolls are the most convective unstable mode,

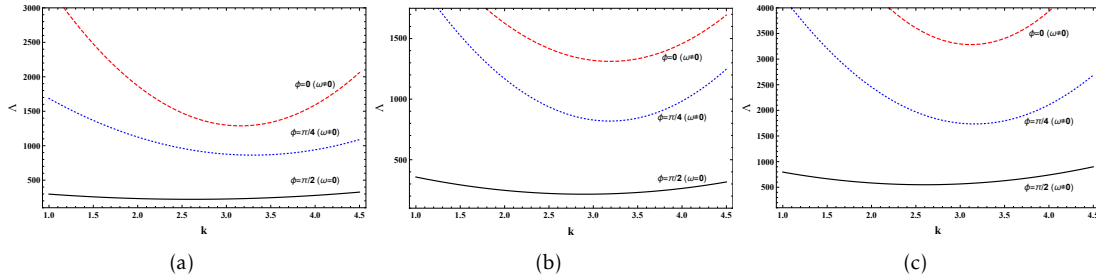


FIGURE 2.3 – Neutral stability curves  $\Lambda = \Lambda(k)$  corresponding to longitudinal rolls ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ), oblique rolls with  $\phi = \frac{\pi}{4}$  and transverse rolls ( $\phi = 0$ ) at  $Ge = 0.01$  at  $Pr = 50$  and  $Le = 1$  for  $\psi = 0$  (a),  $\psi = 0.01$  (b) and  $\psi = -0.3$  (c).

the knowledge of the dependence on the parameters  $\psi$ ,  $Le$ , and  $Pr$  of their associated critical values  $\Lambda_c$ ,  $k_c$ , and  $\omega_c$  at the onset of convection is physically important. This task is accomplished in the following sections for cases A and B.



## 2.6.2 Linear properties of the instability for $\psi > 0$

First, we emphasize that for the thermal boundary conditions of case B, both the basic temperature and the basic concentration gradients are positive for  $\psi > 0$ . In this case, both gradients act in concert to stabilize the system. Therefore instabilities are not expected. On the other hand, both the basic temperature and the basic concentration gradients are negative for case A, meaning that the system may be unstable under some conditions. For that case, we present in Fig. 2.4 (a) the linear stability diagram in the  $(\psi, \Lambda)$  plane. The stability diagram depends on the values of the Lewis and Prandtl numbers. The plot in Fig. 2.4 (a) was obtained

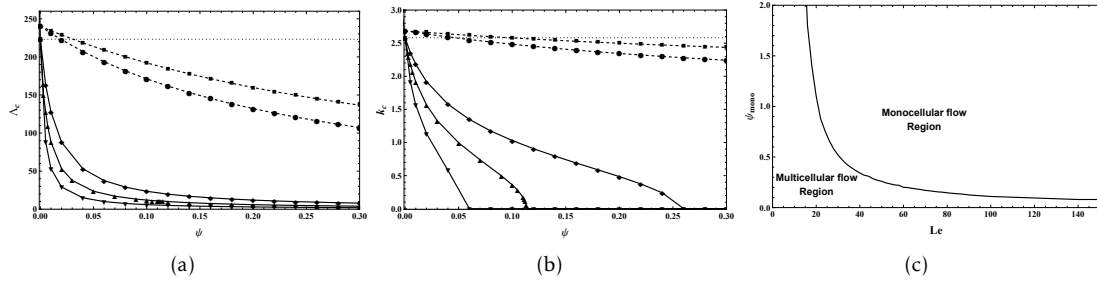


FIGURE 2.4 – Critical values of  $\Lambda$  (a) and the wave number  $k$  (b) at the onset of stationary instability versus  $\psi$ . From top to bottom, the curves correspond respectively to gas cases with  $(Pr = 1, Le = 1)$ ,  $(Pr = 1, Le = 2)$  and to liquid cases with  $(Pr = 10, Le = 50)$ ,  $(Pr = 10, Le = 100)$  and  $(Pr = 10, Le = 200)$ . Separation ratio curve where a transition occurs from multicellular to monocellular flows versus  $Le$  with  $Pr = 10$  (c).

for  $Pr = 10$  and different values of Lewis number  $Le = 50$ ,  $Le = 100$  and  $Le = 200$ , values which are typical for liquid mixtures. The same figure shows the stability diagram for  $Pr = 1$  and two values of Lewis number  $Le = 1$  and  $Le = 2$ , representing gas mixtures. As can be seen in this figure, the instability appears at a lower  $\Lambda_c$  than in the case of a mono-constituent fluid ( $\psi = 0$ ) for a liquid mixture and for a gas mixture. The difference is that the destabilizing is more important for a liquid mixture than for a gas mixture. Moreover, this figure shows a drastic drop of the critical threshold  $\Lambda_c$  as the Lewis number increases.

Numerical results indicate that instability appears with zero frequency, i.e., the emerging longitudinal rolls are stationary. As shown in Fig. 2.4 (b), for a fixed  $\psi \neq 0$ , the instability appears with a wave number  $k_c$  that deviates weakly from its value for  $\psi = 0$  in the case of a gas mixture, while it decreases strongly for a liquid mixture as  $\psi$  increases. We remark that the decrease of the wave number is drastic for a liquid mixture with a high Lewis number. In that case, there exists a particular value of the separation ratio  $\psi_{mono}$  such that a finite critical wave number is observed for  $\psi < \psi_{mono}$  and zero wave number for  $\psi \geq \psi_{mono}$ . To illustrate the influence of the Soret effect on the spatial distribution of the emerging longitudinal rolls, Fig. 2.5 presents the streamlines at the onset of the instability with  $Pr = 10$  and  $Le = 100$  for different values of the separation ratio,  $\psi = 0$  (a),  $\psi = 0.01$  (b) and  $\psi = 0.03$  (c). As seen from this figure, for the same length in the  $y$  direction, the number of rolls decreases from 2 for  $\psi = 0$  to 1.5 for  $\psi = 0.01$  and finally to 1 for  $\psi = 0.03$ , indicating that rolls have a higher cross-section when the intensity of Soret parameter is increased. As  $k_c = 0$  for  $\psi \geq \psi_{mono}$ , the size of the thermoconvective rolls tends to infinity if we assume the ideal situation of an unbounded channel in the  $y$ -direction. In a realistic situation with a bounded width of the channel, the vanishing critical wave number for  $\psi \geq \psi_{mono}$  means that convection takes the form of a single-cell structure instead of a multicellular structure for

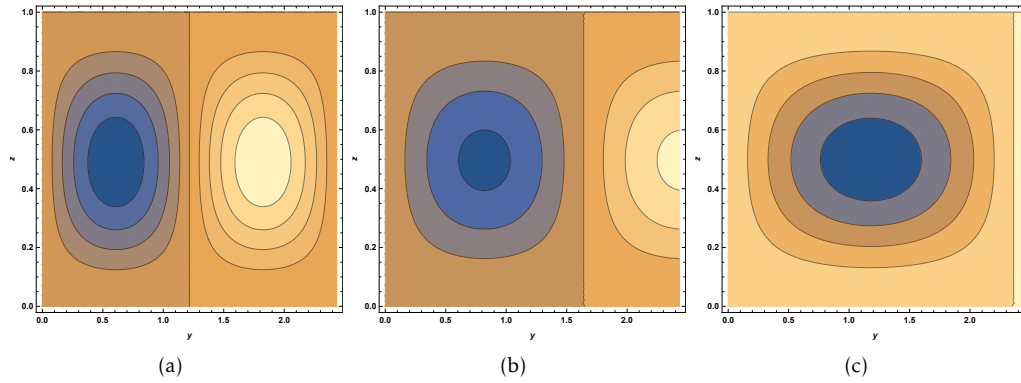


FIGURE 2.5 – Streamlines at the onset of stationary instability with  $Pr = 10$  and  $Le = 100$  for  $\psi = 0$  (a),  $\psi = 0.01$  (b) and  $\psi = 0.03$  (c).

$\psi < \psi_{mono}$ . From a phenomenological standpoint, the transition from a single-cell to multicellular convection at the point  $(\Lambda_{mono}, \psi_{mono})$  with  $\Lambda_{mono} = \Lambda_c(\psi_{mono})$  found in the present study is also predicted by many investigations dealing with Rayleigh-Bénard configuration for binary mixtures, in particular convection in porous media (see for example [24] for Newtonian fluids and [25] for viscoelastic fluids). Let us now focus on the values of the separation ratio  $\psi_{mono}$  for which  $k_c = 0$ . Fig. 2.4 (c) shows the value of  $\psi_{mono}$  at which  $k_c$  first vanishes, i.e., the border between the region of a single-cell convection and a region of multicellular flows in the  $(Le, \psi)$  plane. This figure shows that the region where multicellular flows dominate shrinks with the increase of the Lewis number. The physical origin of such a transition is better understood through an energy analysis that will be performed in the next section.

Finally, the influence of the Prandtl number on the linear properties of the instability is

TABLEAU 2.2 – Critical values of  $\Lambda_c, k_c$  and  $\omega_c$  obtained for different values of  $Pr$  at  $Le = 100$ , relative to the onset of longitudinal rolls : stationary mode ( $\omega = 0$ )

$Pr$	$\psi$	$\Lambda_c$	$k_c$	$Pr$	$\psi$	$\Lambda_c$	$k_c$
0.1	0	321.2322	3.2921	1	0	240.1912	2.6862
	0.005	182.7654	2.8022		0.005	134.2038	2.2157
	0.007	152.2802	2.6058		0.007	113.0900	2.0833
	0.01	119.6320	2.2978		0.01	91.0366	1.9189
	0.03	40.0002	0.0013		0.03	38.1775	1.2822
	0.05	24.0001	0.0009		0.05	23.7177	0.9204
	0.1	12.0000	0.0002		0.1	11.9999	0.0004
	0.12	10.0000	$9.0102 \cdot 10^{-6}$		0.12	10.0000	0.0002
	0.14	8.5714	$9.6057 \cdot 10^{-6}$		0.14	8.5714	0.00009
10	0	223.1388	2.5827	$10^5$	0	221.2621	2.5721
	0.005	128.1865	2.1784		0.005	127.5295	2.1748
	0.007	108.7353	2.0616		0.007	108.2597	2.0595
	0.01	88.1819	1.91475		0.01	87.8697	1.9144
	0.03	37.7402	1.3308		0.03	37.6912	1.3357
	0.05	23.5924	0.9959		0.05	23.5779	1.0034
	0.1	11.9966	0.3614		0.1	11.9958	0.3811
	0.12	10.0000	0.00163		0.12	10.0000	0.0009
	0.14	8.5714	0.00161		0.14	8.5714	0.00016

investigated. We report in table 2.2 the values of  $\Lambda_c$  and  $k_c$  at the onset of stationary longitudinal

rolls obtained with  $Le = 100$  for an extensive range of Prandtl numbers. Table 2.2 indicates that  $k_c$  and  $\Lambda_c$  are monotonic decreasing functions of  $Pr$ . For  $Pr > 10$ , we note that the critical conditions may be approximated with fair accuracy by their asymptotic values as  $Pr \rightarrow \infty$ .

### 2.6.3 Linear properties of the instability for $\psi < 0$

We first consider the boundary conditions of case A where the basic thermal gradient is negative and therefore destabilizing. Figure 2.6(a) illustrates the evolution of the threshold  $\Lambda_c$  at the onset of convection as a function of the separation ratio  $\psi$  for different values of Lewis and Prandtl numbers. For fixed  $Le$  and  $Pr$ , two types of instability may exist depending on the value of  $\psi$ . On one hand, the instability appears with a non-zero wave number and non-zero frequency if the separation ratio  $\psi$  is below a particular value  $\psi = \psi_{CT}$ . Thus, the instability mechanism is an oscillatory periodic Hopf bifurcation, leading to symmetry degenerating left and right traveling wave patterns in the  $y$ -direction. At the onset of convection, their corresponding threshold  $\Lambda_c$ , wave number  $k_c$ , and frequency  $\omega_c$  are plotted as functions of separation ratio  $\psi$  by the dashed lines of figure 2.6. The dashed lines of figures 2.6(a) and 2.6(b) show that  $\Lambda_c$  and  $k_c$  increase very weakly with  $|\psi|$ . Physically, this result means that the Soret effect has a small stabilization effect and has no significant influence on the width of the rolls. In contrast to  $\Lambda_c$  and  $k_c$ , the Soret effect significantly influences the critical frequency  $\omega_c$ , as seen in figure 2.6(c). Moreover, the critical value  $\Lambda_c$  is higher for gases ( $Le = 1$  and  $Le = 2$  with  $Pr = 1$ ) than for liquids with  $Le = 100$  and  $Pr = 10$ . Therefore, the system is more stable to longitudinal oscillatory rolls for gases than for liquids.

On the other hand, if  $\psi_{CT} < \psi < 0$ , the emerging instability is stationary with a non-zero wave number. In that case, the critical values  $\Lambda_c$  and  $k_c$  are represented by continuous lines in figures 2.6(a) and 2.6(b), respectively. As shown in figure 2.6(a), contrary to longitudinal oscillatory rolls, stationary longitudinal rolls are more stable for liquids than for gases. A codimension-two bifurcation occurs at  $\psi = \psi_{CT}$  where the two stability curves intersect, indicating that two different convective modes become simultaneously unstable. Numerical computations indicate that the value of  $\psi_{CT}$  is very small for liquids ( $\psi_{CT} \approx 10^{-4}$  for  $Le = 100$  and  $Pr = 10$ ), while for gases,  $\psi_{CT}$  may take finite values, as indicated in figure 2.6(a) for  $Le = 1$ ,  $Le = 2$  and  $Pr = 1$ .

We emphasize that the above linear theory fails to predict the dominant mode of convection

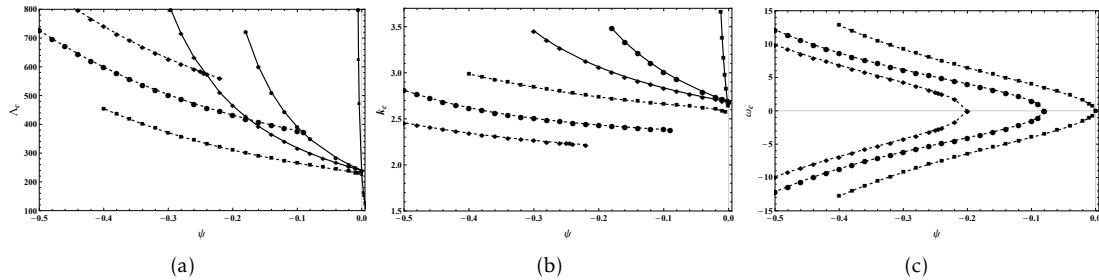


FIGURE 2.6 – Critical values at the onset of stationary longitudinal rolls (solid line) and oscillatory longitudinal rolls (dashed line) : (a)  $\Lambda_c$ , (b)  $k_c$  and (c)  $\omega_c$  versus  $\psi$  for  $Le = 100$  and  $Pr = 10$  (square symbols),  $Le = 2$  (dot symbols) and  $Pr = 1$  and  $Le = Pr = 1$  (diamond symbols).

at the codimension-two bifurcation point ( $\psi_{CT}, \Lambda_{CT} = \Lambda_c(\psi_{CT})$ ). Therefore, a weakly nonlinear stability analysis is needed to elucidate the bifurcation processes near this point. This task is postponed for a future investigation. We urge the reader to consult the work by Taleb et al.

[26] which described the nonlinear approach studying the dynamics associated with the nonlinear interaction between the stationary and oscillatory instabilities near the codimension-two bifurcation point in the case of viscoelastic fluids convection in porous media. For the future nonlinear approach, it is helpful in the current study to focus on linear aspects to locate the codimension-two bifurcation point and characterize the linear properties for both liquids and gases at this point. The dependence on the Lewis number of the separation ratio  $\psi_{CT}$  at the codimension-two bifurcation point is illustrated in figure 2.7(a) for  $Pr = 10$ . This figure shows that  $\psi_{CT}$  is a monotonic increasing function of  $Le$ , which means that the oscillatory (stationary) instability mode region is larger (smaller) for liquids than for gases. In order to investigate the phenomenon of the transition between the two observed modes of convection, we plot some typical marginal curves. Figure 2.7(b) shows neutral stability curves for both stationary and oscillatory instabilities at  $\psi < \psi_{CT}$  and  $\psi = \psi_{CT}$  for binary gases with  $Pr = Le = 1$ . Two minima can be observed in the curves, corresponding to the different modes of convection. For  $\psi < \psi_{CT}$ , the global minimum is in the small wave number region with  $\Lambda_C = \Lambda_C^{OS}$  at the onset of oscillatory instability. The second local minimum is in the large wave number region with  $\Lambda_C = \Lambda_C^{ST}$  at the onset of stationary instability. As  $\psi$  increases, the second local minimum decreases, while the first one remains practically unchanged. When the separation ratio is increased to  $\psi = \psi_{CT}$ , figure 2.7(b) shows a bistability phenomenon with  $\Lambda_C^{OS} = \Lambda_C^{ST}$ , meaning that both types of instability may simultaneously develop. Their corresponding wave-numbers at the codimension-two bifurcation point are different, with  $k_C^{ST}$  slightly larger than  $k_C^{OS}$ . Consequently, the critical frequency  $\omega_C$  of the oscillatory instability is not zero but has a finite value. In the same way, we compute the neutral curves for both types of instability at  $\psi = \psi_{CT}$  but for liquids with  $Pr = 10$  and  $Le = 100$ . The results are plotted in figure 2.7(c) which shows that both neutral curves merge into one curve with the same critical wave numbers  $k_C^{ST} = k_C^{OS}$  and a vanishing critical frequency, as shown in the inset of this figure. We conclude from these results that the linear properties at the codimension-two bifurcation point for liquids are qualitatively different from those in gases. At  $\psi = \psi_{CT}$ , we expect that a competition between the stationary mode of convection and traveling waves with a finite phase velocity may be observed in gases, while a Takens-Bogdanov bifurcation is predicted for liquids.

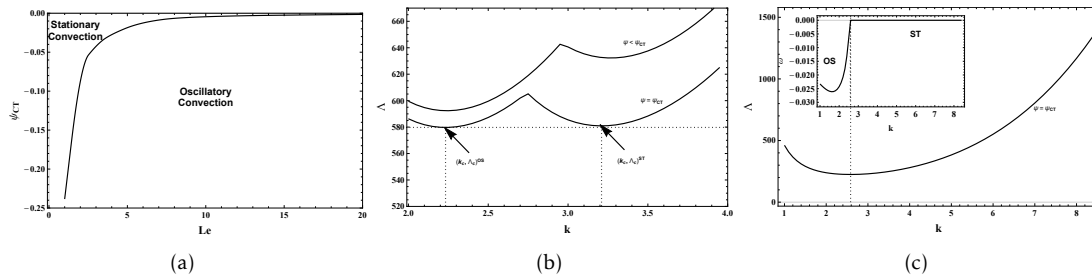


FIGURE 2.7 – Separation ratio  $\psi_{CT}$  where a codimension two bifurcation occurs versus  $Le$  number (a). Neutral stability curve at  $\psi < \psi_{CT}$  and  $\psi = \psi_{CT}$  with  $Le = Pr = 1$  (b). Neutral stability curve at  $\psi = \psi_{CT}$  with  $Le = 100$  while the inset represents the corresponding Hopf frequency (c).  $Pr = 10$  for both figures (a) and (c).

The effect of the Prandtl number on the linear properties of the oscillatory instability for negative separation ratio is investigated. We report in table 2.3 the values of  $\Lambda_C$ ,  $k_C$  and  $\omega_C$  at the onset of Hopf bifurcation obtained with  $Le = 100$  and different Prandtl numbers :  $Pr = 0.1$ ,

$Pr = 1$ ,  $Pr = 10$  and  $Pr = 10^5$ . Table 2.3 indicates that  $\Lambda_c$  and  $k_c$  are decreasing functions of  $Pr$  while  $\omega_c$  increases with  $Pr$ . As for the case of positive separation ratios, the critical conditions for  $Pr \geq 10$  may be well approximated with their asymptotic values as  $Pr \rightarrow \infty$ .

Let us briefly discuss the case when the boundary conditions are of type B with a stabilizing

TABLEAU 2.3 – Critical values of  $\Lambda_c$ ,  $k_c$  and  $\omega_c$  obtained for different values of  $Pr$  with  $Le = 100$ , relative to the onset of oscillatory longitudinal rolls ( $\omega \neq 0$ ).

$Pr$	$\psi$	$\Lambda_c$	$k_c$	$\omega_c$
0.1	-0.005	349.4645	3.2603	0.4851
	-0.008	356.1915	3.2796	0.64696
	-0.01	360.3205	3.2927	0.7423
	-0.02	379.4847	3.3623	1.1539
1	-0.005	245.9445	2.6925	0.7735
	-0.008	246.9301	2.6981	0.9981
	-0.01	247.5226	2.7010	1.1250
	-0.02	250.2824	2.7126	1.6281
	-0.1	271.2102	2.7886	3.8744
10	-0.005	228.1853	2.5918	0.7661
	-0.008	229.2684	2.5962	0.9886
	-0.01	229.9399	2.5983	1.1142
	-0.02	233.1584	2.6055	1.6125
	-0.1	260.9928	2.65047	3.9714
$10^5$	-0.005	226.22801	2.5813	0.7663
	-0.008	227.3185	2.5855	0.9886
	-0.01	227.9966	2.5874	1.1142
	-0.02	231.2553	2.5937	1.61198
	-0.1	259.6184	2.6314	3.9622

positive vertical basic temperature gradient. In that case, as the heavier component of the binary fluid mixture migrates to the hot upper plate, one can expect an instability caused solely by the Soret effect. In figure 2.8 we present for  $Le = 100$  the  $\psi$  dependence of this instability. Computations show that both the critical frequency and the critical wave number are zero for all negative values of the separation ratio. We also mention that this instability's linear properties are found to be independent of Prandtl number.

Before ending this section, we restate the results obtained in terms of the critical Reynolds number that can be easily evaluated from the relationships  $Pe = Re Pr$  and  $\Lambda = Ge Pe^2$ , namely

$$Re_c = \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{\Lambda_c}{Ge}}. \quad (2.58)$$

We note that  $Re_c$  is proportional to the inverse of the Prandtl number, which means that the more we increase the Prandtl number, the more the critical Reynolds number decreases. This may allow us to observe the effect of viscous dissipation on experimentally affordable Reynolds number for highly viscous fluids. Figure 2.8 (b) presents the stability diagram in the  $(\psi, Re)$  plane for boundary conditions A. We observe in figure 2.8 (b) that the larger the positive separation ratio, the smaller the critical Reynolds number needed to trigger stationary convection, which confirms once again the destabilizing role of the Soret effect with positive separation ratios. Inversely for negative separation ratios, the Soret effect has a stabilizing influence.

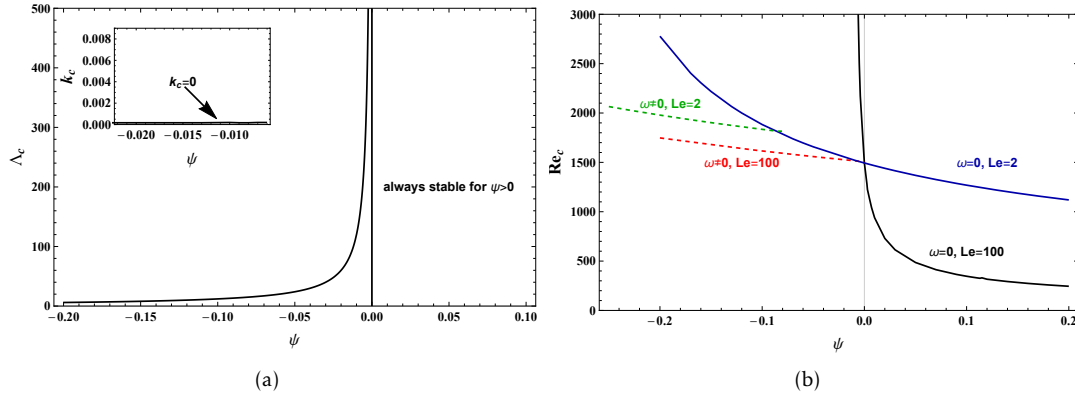


FIGURE 2.8 – Critical values  $\Lambda_c$  and  $k_c$  for the case B versus  $\psi$  with  $Le = 100$  and  $Pr = 10$  (a), Critical value  $Re_c$  versus  $\psi$  for  $Le = 2, 100$ ,  $Pr = 10$  and  $Ge = 10^{-4}$  at the onset of longitudinal rolls : stationary mode  $\omega = 0$  (solid line), oscillatory mode  $\omega \neq 0$  (dashed line) (b).

## 2.7 Energy budget Analysis

In order to gain further insight into the physical mechanisms underlying the instabilities mentioned above, we have carried out an energy balance analysis. The linearized Navier-Stokes equations for longitudinal rolls may be written using normal modes as

$$\frac{-i\omega}{Pr} U_n(z) = \nabla^2 U_n(z) \quad (2.59)$$

$$\frac{-i\omega}{Pr} V_n(z) = -ikP_n(z) + \nabla^2 V_n(z) \quad (2.60)$$

$$\frac{-i\omega}{Pr} W_n(z) = -DP_n(z) + \theta_n(z) - \tilde{C}_n(z) + \nabla^2 W_n(z) \quad (2.61)$$

Equations (2.59), (2.60) and (2.61) are first multiplied by  $\bar{U}_n(z)$ ,  $\bar{V}_n(z)$  and  $\bar{W}_n(z)$  respectively, where the overbar stands for the complex conjugate. After adding the three resulting equations, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{-i(\omega_r + i\omega_i)}{Pr} (|U_n(z)|^2 + |V_n(z)|^2 + |W_n(z)|^2) &= -ik\bar{V}_n(z)P_n(z) - \bar{W}_n(z)DP_n(z) \\ &+ [\bar{U}_n(z)(D^2 - k^2)U_n(z) + \bar{V}_n(z)(D^2 - k^2)V_n(z) + \bar{W}_n(z)(D^2 - k^2)W_n(z)] \\ &+ \bar{W}_n(z)\theta_n(z) + \bar{W}_n(z)\tilde{C}_n(z) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Integrating the above equation along  $z$  and after some transformations to eliminate null terms such as the pressure integral, we obtain the relationship for the rate of change of the fluctuating kinetic energy,

$$\frac{2\omega_i}{Pr} E_K = E_{TB} + E_{CB} + E_D \quad (2.63)$$

Expressions for the four terms in (2.63) are defined as

$$E_K = \frac{1}{2} \int_0^1 (|U_n(z)|^2 + |V_n(z)|^2 + |W_n(z)|^2) dz, \quad (2.64)$$

$$E_{TB} = \int_0^1 \text{Re}[\bar{W}_n(z)\theta_n(z)] dz \quad (2.65)$$

$$E_{CB} = - \int_0^1 \text{Re}[\bar{W}_n(z)\tilde{C}_n(z)] dz \quad (2.66)$$

$$E_D = - \int_0^1 [k^2(|U_n(z)|^2 + |V_n(z)|^2 + |W_n(z)|^2) + |DU_n(z)|^2 + |DV_n(z)|^2 + |DW_n(z)|^2] dz \quad (2.67)$$

where  $E_{TB}$  is the thermal buoyancy contribution,  $E_{CB}$  is the buoyancy contribution related to the Soret effect, and  $E_D$  corresponds to the energy dissipation. By normalizing these contributions by the absolute value of the energy dissipation, the energy balance becomes at the onset of instability ( $\omega_i = 0$ ):

$$\frac{E_{TB}}{|E_D|} + \frac{E_{CB}}{|E_D|} = 1 \quad (2.68)$$

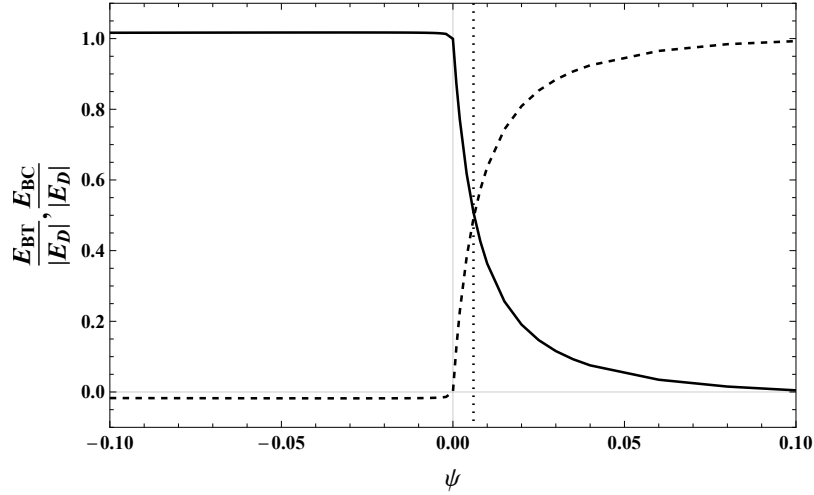


FIGURE 2.9 – Thermal energy  $\frac{E_{TB}}{|E_D|}$  (continuous line) and energy related to the Soret effect  $\frac{E_{CB}}{|E_D|}$  (dashed line) versus the separation ratio ( $\psi$ ) at the onset of convection.

Figure 2.9 illustrates the evolution of  $\frac{E_{TB}}{|E_D|}$  and  $\frac{E_{CB}}{|E_D|}$  with the separation ratio  $\psi$  at the onset of convection for  $Pr = 10$  and  $Le = 100$ . The evolution of the two energies depends on the sign of  $\psi$ . For  $\psi < 0$ ,  $\frac{E_{CB}}{|E_D|}$  is slightly negative, indicating the weakly stabilizing effect of thermodiffusion. On the other hand, the contribution  $\frac{E_{TB}}{|E_D|}$  is positive, attesting that the destabilization of the basic state is solely due to thermal buoyancy. We also remark that both contributions depend very weakly on the separation ratio. For  $\psi < 0$ , as it can be seen from Fig. 2.9, the contribution of the part of thermal buoyancy decreases monotonically as  $\psi$  increases. This is accompanied by a monotonic increase of the solutal buoyancy contribution. The vertical dashed line in Fig. 2.9 separates two distinct regions. On the left side, thermal buoyancy dominates; on the right, the

contribution due to the Soret effect prevails. It is important to note that for sufficiently large  $\psi$ , the thermal buoyancy contribution  $\frac{E_{TB}}{|E_D|}$  is minimal, destabilizing the system very weakly.

Consequently, the solutal buoyancy contribution may be considered the principal destabilization source. Thus the system behaves as if the binary fluid mixture is destabilized by the concentration field  $C$ , which is determined by the zero mass flux boundary condition, i.e.,  $\frac{\partial C}{\partial z} = 0$  across the upper plate. The resulting problem is, therefore, qualitatively analogous to ordinary Rayleigh-Bénard convection with fixed thermal flux boundary conditions. For that configuration, linear instability analysis has been considered by Nield [27] and showed that the critical wave number is  $k_c = 0$ . From the above thermal energy budget analysis, we can better understand the result of the linear stability theory performed in the previous section which predicted a zero critical wave-number at the onset of convection when  $\psi$  exceeds the particular value  $\psi_{mono}$ .

## 2.8 On the observability of viscous dissipation instability in binary fluid experiments

This section examines the relevance of the theoretical results obtained in this paper by giving concrete values of the average velocity  $U$ , the height  $H$  of the duct, and the flow rate  $Q$ , to observe instabilities resulting from viscous dissipation in pure fluids as well as in binary fluid mixtures. We have shown that the instability threshold  $\Lambda_c$  depends on the three dimensionless parameters, the Lewis number  $Le$ , the Prandtl number  $Pr$ , and the separation ratio  $\psi$ , proportional to the Soret coefficient. In the experiments,  $\Lambda_c$  is determined from the measured critical average velocity  $U_c$  of the imposed Poiseuille flow,

$$\Lambda_c = \left( \frac{\beta_T g H^3}{c_y \kappa^2} \right) U_c^2 \quad (2.69)$$

while the temperature and concentration dependence of the parameters  $Le$  and  $Pr$  can be found in the literature or are measured in the laboratory. The separation ratio  $\psi$ , however, is typically unknown. It can be varied widely by changing the initial concentration or the initial temperature of the system. Measurements of the Soret coefficient have a long history. In addition to microgravity experiments to avoid the difficulties with convection, optical techniques like TDFRS (thermal diffusion forced Rayleigh scattering) [6] were employed to determine  $\psi$ . In the TDFRS technique, the temperature gradient is created by light instead of external boundary conditions. We also mention different techniques that use the coupling between convection and thermodiffusion as a natural way to determine Soret coefficients [28]. Depending on the sign of  $\psi$ , two main configurations were used. For  $\psi < 0$ , the Rayleigh-Bénard cell where the binary mixture is heated from below is employed. The experimental determination of the critical difference of the applied temperature  $\Delta T_c$  and the corresponding Hopf frequency at the onset of convection allow the determination of  $\psi$  by comparison with linear instability theory. Kolodner et al. [29] and Platten et al. [10] successfully used this technique for ethanol-water solutions. For  $\psi > 0$ , this technique becomes less suitable because  $\Delta T_c$  drops drastically to smaller values, and its measure becomes questionable. Instead of Rayleigh-Bénard cell, the thermogravitational columns are used in the case of  $\psi > 0$ . In short, this configuration consists of two vertical plates maintained at two different temperatures to create a horizontal temperature gradient. Consequently, the imposed horizontal gradient creates a horizontal mass fraction gradient under the action of the Soret effect. In that case, there is always convection and the measure of the vertical velocity intensity may be used as a way to determine the Soret coefficient. This technique was extensively used in binary mixtures (Water/Ethanol [11], [12], [13], Water/Methanol [13]



and n-dodecane/n-hexane [15]) as well as in ternary mixtures (n-hexane/n-dodecane/ /toluene [30], water/ethanol/triethylene glycol [31]).

We now consider the two main constraints involving the hydrodynamic Tollmien-Schlichting instability and relaxation times for the observability of the viscous dissipation instability in laboratory experiments. In an ideal situation, the Reynolds number should be lower than the critical Reynolds number at the onset of hydrodynamic instability and relaxation times should be short. The two conditions are mutually conflicting, however. Orszag [19] showed that the plane Poiseuille flow becomes linearly unstable at  $Re = 5772$  ( $Re$  is based on the channel half-width and the centreline velocity). Regarding the dimensionless quantities employed in the present study, the critical Reynolds number at the onset of such hydrodynamic Tollmien-Schlichting instability is  $Re^{TS} = 7696$ . If we want to restrict Reynolds number to values lower than  $Re^{TS}$ , we must impose a limit on Gebhart number  $Ge$ ,

$$Ge = \frac{\Lambda_c}{Pr^2 Re^2} > Ge^{min} = \frac{\Lambda_c}{Pr^2 (Re^{TS})^2} \quad (2.70)$$

As  $Ge = \frac{\beta_T g H}{c_v}$ , the condition (2.70) states that the height  $H$  of the duct must exceed a minimum value  $H_{min}^{TS}$  defined by

$$H_{min}^{TS} = \frac{c_v \Lambda_c}{\beta_T g Pr^2 (Re^{TS})^2} \quad (2.71)$$

On the other hand, for a fixed value of the height  $H > H_{min}^{TS}$ , the characteristic times for vertical thermal diffusion and vertical concentration diffusion across the layer are, respectively,  $\tau_t = \frac{H^2}{\kappa}$  and  $\tau_c = \frac{H^2}{D}$ . This leads to a height restriction : if the layer is too tall, relaxation times become so long that meaningful experiments under steady conditions become impossible. Typical thermal diffusivity and concentration diffusion for liquids are  $\kappa = 10^{-7} m^2 s^{-1}$  and  $D = 10^{-9} m^2 s^{-1}$  (see the Appendix). For example, with  $H = 1 cm$ , the relaxation times are then  $\tau_t \simeq 16.7 mn$  and  $\tau_c \simeq 28 hours$  respectively. An increase of  $H$  by a factor of 5 implies an increase relaxation times up to  $\tau_t \simeq 7 hours$  and  $\tau_c \simeq 29 days$ , which is clearly unacceptable.

Given these two main constraints, we now examine if an experimental laboratory investigation

TABLEAU 2.4 – Critical dimensional average velocity  $U_c (ms^{-1})$  obtained by linear stability theory for different liquid mixtures (see Appendix for thermophysical properties).

Pure liquid	$Pr$	Stability results			Suggestions for experiment with $H = 1 cm$	
		$\Lambda_c$	$H_{min}^{TS} (cm)$	$U_c \times H^{3/2} (10^{-4} m^{5/2} s^{-1})$	$U_c (ms^{-1})$	$Q_c (10^{-3} m^3 s^{-1})$
Water (22.5 C)	6.63	230	14.7	28.06	–	–
Mineral Oil (25 C) [14]	211.77	220	0.0021	6.06	0.606	0.606
Natural Ester (22.5 C) [14]	575.2	220	0.0001	6.25	0.625	0.625
Unused engine oil (27 C)	6450	221	0.0008	6.69	0.669	0.669

would be feasible to observe instability due to viscous dissipation in some pure fluids and in different binary fluid mixtures with known thermophysical properties, including the Soret parameter. For each fluid with known  $Le$ ,  $Pr$ , and  $\psi$  parameters, the threshold  $\Lambda_c$  of the instability is determined by linear stability analysis and  $H_{min}^{TS}$  is then deduced from the relation (2.71). If the value of  $H_{min}^{TS}$  exceeds, 1 cm, we conclude that viscous dissipation's effects may hardly be investigated in laboratory experiments with such fluids. If, on the contrary,  $H_{min}^{TS}$  is lower than 1 cm, therefore the height  $H$  may be fixed to overcome the above two main constraints, i.e.,  $H_{min}^{TS} < H \leq 1 cm$ . In this case, the final step is to check that the critical value of the resulting

average velocity  $U_c$  and the critical flow rate  $Q_c$  take reasonable values. If we fix the width of the rectangular duct to  $10 \times H$ , for example, the corresponding  $U_c$  and  $Q_c$  are given by

$$U_c = \kappa \left( \frac{c_v \Lambda_c}{\beta_T g} \right)^{1/2} \frac{1}{H^{3/2}} \quad \text{and} \quad Q_c = 10 \kappa \left( \frac{c_v \Lambda_c}{\beta_T g} \right)^{1/2} H^{1/2} \quad (2.72)$$

The above procedure was first applied to pure fluids. The results are gathered in Table (2.4) for water, mineral oil, natural ester, and engine oil, respectively. As can be seen from this Table,  $H_{min}^{TS} = 14.7 \text{ cm}$  for pure water. If, for example, we fix the height of the duct to  $H = 20 \text{ cm}$  in order to avoid the hydrodynamic Tollmien-Schlichting instability, the vertical thermal diffusion  $\tau_t$  across the layer is more than three days. In contrast to water,  $H_{min}^{TS}$  is very small for mineral oil, natural ester and engine oil. For a prescribed height value  $H = 1 \text{ cm}$ , we obtain values of  $U_c$  and  $Q_c$  that are quite achievable in laboratory experiments, as indicated in Table (2.4). These results indicate that for highly viscous pure fluids (i.e., for high  $Pr$ ), the convective instability due to viscous dissipation will precede the classical hydrodynamic instability and may be observable in real experiments, contrary to the case of fluids with a moderate Prandtl number. We mention that the same conclusion was pointed out by Barletta et al. [2] in their study of buoyancy-induced instability caused by viscous dissipation in one-component fluids. Now we will see how this conclusion changes when dealing with binary mixtures with a moderate Prandtl number. In Table (2.5), we present the results corresponding to different mixtures with moderate values of  $Pr$  and positive  $\psi$ , namely water/ethanol with different average concentrations and temperatures ([10], [11], [12], [13]), water/methanol [13] and n-dodecane/n-hexane [15] mixtures. We determined the linear threshold  $\Lambda_c$  of the viscous dissipation instability for these mixtures by assuming boundary conditions of case A. While for pure water, Table (2.4) indicates that the onset of the instability corresponds to  $\Lambda_c = 230$ , Table (2.5) shows that for water/ethanol mixtures,  $\Lambda_c$  drops to  $\Lambda_c = 1.64$ ,  $\Lambda_c = 2.90$ ,  $\Lambda_c = 27.49$  depending on the average concentration and to  $\Lambda_c = 8.21$  for methanol/water mixture. This strong destabilization due to the Soret effect leads to small values of  $H_{min}^{TS}$ . Consequently, even if the height  $H$  is fixed to  $H = 1 \text{ cm} \gg H_{min}^{TS}$ , the predicted values of  $U_c$  and  $Q_c$  are pretty reasonable for laboratory experiments. This conclusion also holds for the n-dodecane/n-hexane mixture, which has a moderate Prandtl number.

For mixtures with negative  $\psi$ , we adopt another strategy by considering boundary conditions

TABLEAU 2.5 – Critical dimensional average velocity  $U_c$  ( $ms^{-1}$ ) obtained by linear stability theory for different liquid mixtures (see Appendix for thermophysical properties).

liquid properties	Water-Ethanol [11]	Water-Ethanol [12]	Water-Ethanol [13]	Water-Methanol [13]	n-dodecane/n-hexane [15]
$C_a^*$	0.50	0.6088 (water)	0.10 (water)	0.10 (water)	0.50
$T_a^*$ (C)	22.5	22.5	37.5	37.5	25
$Pr$	32.3	31	16.5	8	8.1
$Le$	207	203	59.71	281	32.5
$\psi$	0.354	0.204	0.071	0.052	0.076
Stability results					
$\Lambda_c$	1.64	2.90	27.49	8.21	44.36
$H_{min}^{TS}$ (cm)	0.0012	0.0027	0.19	0.054	0.20
$U_c \times H^{3/2}$ ( $10^{-4} m^{5/2}s^{-1}$ )	0.73	1.09	4.56	1.40	2.64
Suggestions for experiment with $H = 1$ (cm)					
$U_c$ ( $ms^{-1}$ )	0.073	0.11	0.456	0.14	0.264
$Q_c$ ( $10^{-3} m^3s^{-1}$ )	0.073	0.11	0.456	0.14	0.264

leading to a positive basic vertical thermal gradient, i.e., by considering case B instead of case A. This choice is motivated by the drastic decrease of the critical value  $\Lambda_c$  predicted by linear stability analysis (see figure 2.8). Two binary liquid mixtures are considered : Water/Ethanol with

average concentration  $C_a^* = 0.9199$  of water,  $Pr = 9.38$  and  $\psi = -0.274$  [10] and  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$  with  $C_a^* = 0.0222$  of  ${}^3\text{He}$ ,  $Pr = 0.758$  and  $\psi = -0.338$  [16]. Table (2.6) summarizes the linear stability results for both liquid mixtures. The main information is the two values of  $H_{min}^{TS}$  deduced from the critical value  $\Lambda_c$ . Its small value for Water/Ethanol contrary to  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$ , makes possible the emergence of the viscous dissipation thermal instability in a laboratory experiment before the onset of hydrodynamic instability at relatively reasonable relaxation time  $\tau_c$ , critical velocity  $U_c$  and critical flow rate  $Q_c$ .

Thus, in this section's partial conclusion, we may say that we can observe instabilities resulting from viscous dissipation in binary fluid mixtures with moderate to high Prandtl numbers. For mixtures with a small Prandtl number, this type of instability may be triggered in geophysics configurations but hardly in a laboratory experiment.

Before ending this section, we emphasize that the theoretical transition curve to thermal viscous dissipation instability in the  $(\psi, \Lambda)$  plane obtained by linear stability analysis can be used to deduce the Soret coefficient  $S_T$  in a laboratory experiment. In fact, the appearance of thermal convection in the form of longitudinal rolls occurs at a critical velocity  $U_c$  which allows the determination of the critical value  $\Lambda_c$  given by the relation (2.69). With known values of  $Pr$  and  $Le$  parameters of the binary mixtures used in the experiments, one can then deduce from stability analysis the value of  $\psi$  and therefore the corresponding Soret coefficient  $S_T$ . For example, this strategy may be used to determine the Soret coefficient  $S_T$  of mineral oil /natural ester mixture ( $Pr = 350$  and  $Le = 240$ ) whose thermophysical properties are reported in the Appendix as Nadolny and Dombek [14] experimentally determined them.

TABLEAU 2.6 – Critical dimensional average velocity  $U_c$  ( $ms^{-1}$ ) obtained by linear stability theory for different liquid mixtures at  $\psi < 0$  (see Appendix for thermophysical properties).

liquid properties	Water-Ethanol [10]	${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ [16]
$C_a^*$	0.9199 (Water)	0.0222 ( ${}^3\text{He}$ )
$T_a^*$	25 (C)	2.161 (K)
$Pr$	9.38	0.758
$Le$	216.7	11
$\psi$	-0.274	-0.338
Stability results		
$\Lambda_c$	2.02	32.27
$H_{min}^{TS}$ (cm)	0.054	4.46
$U_c \times H^{3/2}$ ( $10^{-4} m^{5/2} s^{-1}$ )	2.2	1.22
Suggestions for experiment with $H = 1$ (cm)		
$U_c$ ( $ms^{-1}$ )	0.22	–
$Q_c$ ( $10^{-3} m^3 s^{-1}$ )	0.22	–

## 2.9 Conclusions

The linear stability analysis is performed for the convective instability induced by viscous dissipation for a Poiseuille flow of a binary fluid mixture by taking into account the Soret effect. Two cases are considered in detail : the lower boundary of the plane channel is thermally insulated and the upper boundary is isothermal for case A and inversely the lower boundary is isothermal and the upper boundary is adiabatic for case B. The viscous dissipation contribution to the energy balance has been considered a possible source of convective instability. In the presence of an imposed Poiseuille flow, a negative (positive) basic temperature nonlinear vertical gradient exists for case A (case B) due to the viscous dissipation contribution. A basic vertical nonlinear concentration stratification is then generated by the Soret effect. A linear stability analysis of this

basic state has been carried out by solving the eigenvalue problem numerically for arbitrarily oriented convective rolls. As for the case of a one-component fluid studied in [2], the results indicated that the most unstable disturbances are longitudinal rolls independently of the Soret effect. In addition to Lewis number ( $Le$ ) and Prandtl number ( $Pr$ ), the onset of convection in the form of longitudinal rolls depends on the viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda$  and the separation ratio parameter  $\psi$  which represents the ratio between the mass contribution and the temperature contribution to buoyancy forces. The thermal boundary conditions in case B lead to an internal heating from above, and instability may develop only if  $\psi < 0$ , i.e., if the densest component of the mixture migrates towards the hot upper wall. In that case, the emerging longitudinal rolls are stationary with infinite wavelength. In the case of thermal boundary conditions A, the basic temperature gradient is destabilizing while the generated concentration gradient is destabilizing (stabilizing) for positive (negative)  $\psi$ . In both situations, the linear characteristics of longitudinal rolls at the onset of convection are determined and discussed as a function of the governing dimensionless parameters. We then reiterate our main conclusions regarding these characteristics for binary gases and liquids.

(i) For positive  $\psi$ , the bifurcation is stationary, and the Soret effect precipitates the appearance of stationary longitudinal rolls. The Soret destabilizing effect is more significant for liquids than for gases. Moreover, a drastic drop of the critical wave number is observed for liquids such that it becomes zero if  $\psi$  exceeds a particular value  $\psi_{mono}$ . This means that longitudinal rolls have an infinite wavelength or are structured as a monocellular flow in a real channel bounded in the  $y$  direction.

ii) For negative  $\psi$ , the nature of the bifurcation depends on the value of the separation ratio  $\psi$ . The system exhibits a Hopf bifurcation, leading to symmetry degenerate left and right traveling wave patterns in the  $y$ -direction if  $\psi < \psi_{CT}$ . Otherwise, the bifurcation is stationary and longitudinal rolls may develop with a finite wave number. The particular value of the separation ratio  $\psi_{CT}$  represents a codimension-two bifurcation point where both types of instability may develop simultaneously. The influence of  $Le$  and  $Pr$  numbers on the critical threshold, wave number and frequency of the two types of instability are discussed in detail at the codimension-two bifurcation point and far from it. Kinetic energy budget analysis has been examined to understand the physical contribution of the Soret effect in the stabilization/destabilization mechanisms.

A special interest was given to the observability of viscous dissipation-Soret instabilities in laboratory experiments with real binary mixtures. We concluded that such thermal instability induced by viscous dissipation and Soret effect might be effective in laboratory experiments for binary liquids with moderate to high Prandtl numbers. For gases, such instability may be relevant in geophysics configurations with significant heights. Finally, we suggest a protocol to estimate the Soret coefficient for a given binary fluid mixture by fitting the measured threshold  $\Lambda_c$  needed to trigger the instability to the theoretical results obtained in this paper.

We mention that the nonlinear effect on the viscous dissipation-Soret instability is an important issue to determine the supercritical or subcritical nature of the bifurcation and to evaluate Soret effects on the amplitude of this kind of instability. Work in this direction is in progress.

APPENDIX

TABLEAU 2.7 – Thermophysical properties of Water-ethanol mixture extracted from [10], [11], [12], [13], [15] and [14]. The conductivity and the diffusivity of Water/Ethanol and Water/Methanol mixtures were extracted from [32].

Fluid mixtures	$C_a^*$	$T_a^*(C)$	$\beta_T(10^{-4}K^{-1})$	$\beta_C$	$\kappa(10^{-7}m^2s^{-1})$	$\lambda(Wm^{-1}K^{-1})$	$\nu(10^{-6}m^2s^{-1})$	$\rho(Kgm^{-3})$	$D(10^{-10}m^2s^{-1})$	$S_T(10^{-3}K^{-1})$
Pure Water	1	22.5	2.56	–	1.435	0.60	0.95	997,05	–	0
Water/Ethanol [10]	0.9199	25.0	2.97	0.1561	1.30	0.53	1.22	987	6	-7.08
Water/Ethanol [12]	0.6088	22.5	7.86	0.212	0.8771	0.338	2.716	935.17	4.32	3.17
Water/Ethanol [11]	0.50	22.5	9.01	0.242	0.87	0.30	2.81	912	4.20	5.82
Water/Ethanol [13]	0.10	37.5	11.23	0.329	0.83	0.81	1.37	802.53	13.9	2.71
Water/Methanol [13]	0.10	37.5	11.32	0.351	0.987	0.22	0.79	804.093	35.1	1.88
n-dodecane/n-hexane [15]	0.5	25	11.8	0.129	0.94	0.135	0.764	699.037	29	2.78
Unused engine oil	1	27	7.00	–	0.86	0.144	550	884	–	0
Mineral Oil (MO) [14]	1	25	7.50	–	0.80	0.133	17.08	867	–	0
Natural Ester (NE) [14]	1	25	7.40	–	0.98	0.182	56.29	910	–	0
MO/NE [14]	0.5	25	7.50	0.05	0.90	0.158	31.68	890	3.73	?

TABLEAU 2.8 – Thermophysical properties of  $^3He-^4He$  mixture are extracted from [16], except the viscosity values that are extracted from [33].

$C_a^*(^3He)$	$T_a^*(K)$	$\beta_T(10^{-2}K^{-1})$	$\beta_C$	$\kappa(10^{-8}m^2s^{-1})$	$\lambda(10^{-2}Wm^{-1}K^{-1})$	$\nu(10^{-8}m^2s^{-1})$	$\mu(10^{-6}Pa.s)$	$Le$	$\psi$
0.0222	2.161	0.892	0.6832	2.327	1.466	1.764	2.7	11	-0.338

Références

- [1] A.BARLETTA, « On the thermal instability induced by viscous dissipation », *International Journal of Thermal Sciences*, t. 88, p. 238-247, 2015.
- [2] A.BARLETTA, M.CELLI et D.A.NIELD, « On the onset of dissipation thermal instability for the Poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 681, p. 499-514, 2011.
- [3] A.BARLETTA et D.A.NIELD, « Convection-dissipation instability in the horizontal plane Couette flow of a highly viscous fluid », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 662, p. 475-492, 2010.
- [4] Y.REQUILÉ, S.C.HIRATA, M.N.OUARZAZI et A.BARLETTA, « Weakly nonlinear analysis of viscous dissipation thermal instability in plane Poiseuille and plane Couette flows », *Journal of Fluid Mechanics*, 2020.
- [5] Y.REQUILÉ, S.C.HIRATA et M.N.OUARZAZI, « Viscous dissipation effects on the linear stability of Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette convection », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 146, 2020.
- [6] W. KOHLER et K. I. MOROZOV, « The soret effect in liquid mixtures », *journal Non-Equilibrium Thermodynamics*, t. 41, n° 3 :151-197, 2016.
- [7] CH.JUNG, M.LÜCKE et P.BÜCHEL, « Influence of through-flow on linear pattern formation properties in binary mixture convection », *PHYSICAL REVIEW E*, t. 54, n° 2, 1996.

RÉFÉRENCES

- [8] J.HU, H.BEN HADID et D.HENRY, « Linear stability analysis of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect », *Physics of Fluids*, t. 19, 034101(1)-034101(17), 2007.
- [9] J.HU, X.Y.YIN, D.HENRY et H.BEN HADID, « Spatiotemporal evolution of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect under initial pulselike disturbances », *PHYSICAL REVIEW E*, t. 80, 2009.
- [10] J. K. PLATTEN, J. DUTRIEUX et G. CHAVEPEYER, « Soret effect and free convection : a way to measure Soret coefficients », *Editors : W. Kohler and S. Wiegand*, t. Springer, p. 313-333, 2001.
- [11] J. F. DUTRIEUX, J. K. PLATTEN, G. CHAVEPEYER et M. M. BOU-ALI, « On the Measurement of Positive Soret Coefficients », *J.Phys.Chem.B*, t. 106, p. 6104-6114, 2002.
- [12] J. PLATTEN, M.M.BOU-ALI et J.F.DUTRIEUX, « Enhancedmolecularseparationin inclined thermogravitationalcolumns », *J.Phys.Chem.B*, t. 107, p. 11 763-11 767, 2003.
- [13] J. K. PLATTEN, M. M. BOU-ALI, P. BLANCO, J. A. MADARIAGA et C. SANTAMARIA, « Soret Coefficients in Some Water-Methanol, Water-Ethanol, and Water-Isopropanol Systems », *J.Phys.Chem.B*, t. 111, p. 11 524-11 530, 2007.
- [14] Z. NADOLNY et G. DOMBEK, « Thermal properties of mixtures of mineral oil and natural ester in terms of their application in the transformer », *Eur.Meteorological Society*, t. EMS2017, p. 01 040, 2017.
- [15] I. LIZARRAGA, F. CROCCOLO, H. BATALLER et M. M. BOU-ALI, « Soret coefficient of the n-dodecane-n-hexane binary mixture under high pressure », *Eur. Phys. J. E*, t. 40 : 36, p. 1-9, 2017.
- [16] M. S. THURLOW, B. J. BROOKS, P. G. J. LUCAS, M. R. A. F, J. K. BHATTACHARJEE et A. L. WOODCRAFT, « Convective instability in rotating liquid 3He-4He mixtures », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 313, p. 381-407, 1996.
- [17] J. LIU et G. AHLERS, « Rayleigh-Bénard convection in binary-gas mixtures : Thermophysical properties and the onset of convection », *Physical Review E*, t. 55, 6, p. 6950-6968, 1997.
- [18] D. A. NIELD, A. BEJAN et al., *Convection in porous media*. Springer, 2006, t. 3.
- [19] S. A. ORZAG, « Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation », *J. Fluid Mech.*, t. 50, p. 689-703, 1971.
- [20] I. BARMAN, A. Y. GELFGAT, A. ULLMANN et N. BRAUNER, « On the Squire's transformation for stratified two-phase flows in inclined channels », *International Journal of Multiphase Flow*, t. 88, p. 142-151, 2017.
- [21] A. J. PEARLSTEIN, « On the two-dimensionality of the critical disturbances for stratified viscous plane parallel shear flows », *The Physics of fluids*, t. 28, n° 2, p. 751-753, 1985.
- [22] P. LINDEN, « Salt fingers in a steady shear flow », *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, t. 6, n° 1, p. 1-27, 1974.
- [23] S. THANGAM, A. ZEBIB et C. CHEN, « Salt-finger convection in shear flow », *The Physics of fluids*, t. 27, n° 4, p. 804-811, 1984.
- [24] R. UMLA, M. AUGUSTIN, B. HUKU et M. LUECKE, « Roll convection of binary fluid mixtures in porous media », *Journal of fluid mechanics*, t. 649, p. 165-186, 2010.

- [25] N. DELEDA, S. C. HIRATA et M. OUARZAZI, « Primary and secondary instabilities of viscoelastic mixtures saturating a porous medium : Application to separation of species », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, t. 181, p. 11-21, 2012.
- [26] A. TALEB, H. BENHAMED, M. OUARZAZI et H. BEJI, « Analytical and numerical analysis of bifurcations in thermal convection of viscoelastic fluids saturating a porous square box », *Physics of Fluids*, t. 28, n° 5, p. 053106, 2016.
- [27] D. NIELD, « Onset of thermohaline convection in a porous medium », *Water Resources Research*, t. 4, n° 3, p. 553-560, 1968.
- [28] J. PLATTEN, « The Soret Effect : A Review of Recent Experimental Results », *J. Applied Mechanics*, t. 73, p. 5-15, 2006.
- [29] P. KOLODNER, H. WILLIAMS et C. MOE, « Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions », *J. Chem. Phys.*, t. 88, p. 6512-6524, 1986.
- [30] D. A. de MEZQUIA, Z. WANG, E. LAPEIRA, M. KLEIN, S. WIEGAND et M. M. BOU-ALI, « Thermodiffusion, molecular diffusion and Soret coefficient of binary and ternary mixtures of n-hexane, n-dodecane and toluene », *Eur. Phys. J. E*, t. 37 :106, p. 1-10, 2014.
- [31] M. SCHRAML, H. BATALLER, C. BAUER et al., « The Soret coefficients of the ternary system water/ethanol/triethylene glycol and its corresponding binary mixtures », *Eur. Phys. J. E*, t. 44 :128, p. 00134-6, 2021.
- [32] J. WANG et M. FIEBIG, « Measurement of the Thermal Diffusivity of Aqueous Solutions of Alcohols by a Laser-Induced Thermal Grating Technique », *Int. J. Thermophysics*, t. 16, No 6, p. 1354-1361, 1995.
- [33] X. QIN, C. HOWALD et H. MEYER, « Shear Viscosity Measurements of Liquid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  Mixtures Above 0.5 K », *Journal of Low Temperature Physics*, t. 87, p. 731-752, 1996.

# Weakly nonlinear dynamics of viscous dissipation instability involving Poiseuille flow of binary fluids mixture

## Sommaire

---

<b>3.1 Abstract</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>3.2 Introduction</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>3.3 Governing equations, basic state and linear stability</b> . . . . .	<b>69</b>
3.3.1 System and basic equations . . . . .	69
3.3.2 Unperturbed basic state and linear stability . . . . .	71
<b>3.4 Weakly nonlinear analysis</b> . . . . .	<b>73</b>
3.4.1 Governing equations for finite amplitude longitudinal rolls . . . . .	73
3.4.2 Derivation of amplitude equation . . . . .	74
<b>3.5 Results of the weakly nonlinear stability</b> . . . . .	<b>80</b>
3.5.1 Supercritical/subcritical bifurcation . . . . .	80
3.5.2 Equilibrium solutions and iso-contours . . . . .	82
3.5.3 Nusselt and mixing numbers . . . . .	83
<b>3.6 Conclusions</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>Références</b> . . . . .	<b>87</b>

---

## 3.1 Abstract

A weakly nonlinear stability analysis is carried out to study thermal instability induced by viscous dissipation in Poiseuille flows for binary fluid mixtures with positive separation ratio. The impermeable lower boundary of the channel is considered adiabatic, while the impermeable upper boundary is isothermal. The linear stability of this problem has been performed by Ali Amar et al. (Phys. Fluids, vol. 34, 2022, pp. 114101) and showed that longitudinal rolls are the



preferred mode of convection at the onset of instability. By employing weakly nonlinear theory, we derive a cubic Landau equation that describes the temporal evolution of the amplitude of convection rolls in the unstable regime. It is found that the bifurcation from the conduction state to convection rolls is always supercritical for weak viscous dissipation intensity. Otherwise, the interplay between the viscous dissipation and the Soret effects determines the supercritical or subcritical nature of the bifurcation. In the parameter range where the bifurcation is supercritical, we determine and discuss the Soret effects on the amplitude of convection rolls, iso-contours and the corresponding average heat transfer and the mixing of the two fluid components. Similarities and differences with a one-component fluid case are highlighted.

## 3.2 Introduction

Thermal convection in binary fluid mixtures has been an active research topic because of its wide range of engineering applications, including crystal growth, chemical vapor deposition, industrial cooling, and natural hydrocarbon reservoirs (see recent reviews by Rahman and Saghri [1] and by Kohler and Morozov [2] for fluid media and by Nield and Bejan [3] for a porous medium). In addition, convection in binary mixtures shows a rich spectrum of pattern formation behavior. In this system, the buoyancy forces are also influenced by concentration variations. These latter are generated and sustained by Soret effect as a linear response to temperature gradients, and this leads to an additional control parameter, namely, the separation ratio, a dimensionless parameter that represents the ratio between the mass contribution and temperature contribution to buoyancy forces. A positive separation ratio implies that the local temperature gradients drive the heaviest component of the mixture into the direction of lower temperature. Two main configurations were extensively used in the past. The Rayleigh-Bénard cell where the binary mixture is heated from below in a fluid medium [4], [5], as well as in porous layer [6], [7] and the thermogravitational columns, a configuration with two vertical plates maintained at two different temperatures [8], [9].

The above-mentioned theoretical and experimental studies in clear fluids as well as in porous media did not take into account the viscous dissipation effect. However, when viscous dissipation is considered, friction may generate unstable temperature gradients within the flow. The effect of viscous heating on the stability of Newtonian Taylor-Couette flow has received considerable attention both through theoretical and experimental studies. Linear stability analysis by Al-Mubaiyedh et al. [10] predicts a new mode of instability due to viscous heating for highly viscous fluids, even in the absence of buoyancy. Subsequent experiments by White and Muller [11] confirmed the presence of this new instability triggered by viscous heating. On the other hand, a number of recent studies on buoyancy-induced dissipation instabilities have been undertaken (see [12] for a survey). Requilé et al. [13] carried out a linear analysis of the so-called Rayleigh-Bénard-Couette case, where other than the external temperature gradient imposed through fixed temperature boundary conditions, the internal heating due to viscous dissipation is taken into account. They showed that the viscous dissipation mechanism induces a strong destabilization and may trigger instability even if heating is from above. Barletta and coworkers performed linear stability analyses of buoyancy-induced instability caused solely by viscous dissipation in plane Couette [14] and Poiseuille [15] flows by assuming an adiabatic lower wall and an isothermal upper wall. These authors found that the onset of instability is described through the viscous dissipation Rayleigh number and Prandtl number. Requilé et al. [16] extended their analysis to the weakly nonlinear regime and conclude that subcritical bifurcations may occur depending on the magnitude of viscous dissipation effect. Recently, Sene et al. [17] determined the conditions for the onset of dissipation thermal instability with

temperature-dependent viscosity in the plane Couette flow. It is shown that the effect of the variation of the viscosity is to promote the stability of the base flow.

Soret effect on viscous dissipation induced thermal instability has not received much attention until recently. Roy and Murthy [18] analyzed the effect of Soret parameter on double diffusive convection due to viscous dissipation in a horizontal porous layer by means of linear stability analysis. The lower boundary of the porous medium is assumed adiabatic and the upper boundary iso-thermal. In addition, a concentration gradient is imposed externally across the medium which introduces the dimensionless concentration Rayleigh number. Differently from [18], Ali Amar et al. [19] investigated the Soret effect on the linear instability properties in convection due to viscous dissipation in a channel without porous matrix and without imposing external concentration difference at the boundaries. The dimensionless parameters that influence the linear stability of thermo-diffusive convection are the viscous dissipation Rayleigh number, the Lewis number, the Prandtl number and the separation ratio. It is found that longitudinal rolls represent the preferred mode for the onset of convection. Both oscillatory and steady-state longitudinal rolls may develop depending on the value of the separation ratio. For positive separation ratio, convection rolls are stationary and the dependence on different dimensionless parameters of both the critical viscous dissipation Rayleigh number and the wave number at the onset of convection is highlighted in [19]. The objective of the present paper is to investigate numerically the near-threshold behavior of convection rolls. We calculate up to third order the coefficients of the amplitude equation for the stationary longitudinal rolls. The change of bifurcation from supercritical to subcritical at the respective tricritical points occurring for positive separation ratio is discussed as a function of the dimensionless parameters governing the nonlinear problem. In the case of a supercritical bifurcation, we report a quantitative analysis of the equilibrium disturbance amplitude, the average heat transfer and the mixing ability of the two-components of the binary mixture beyond the bifurcation point.

The paper is organized as follows. In section 3.3, the governing equations, the basic state and the linear stability analysis of the base solution are presented. Weakly nonlinear analysis is presented in section 3.4 with the derivation of the amplitude equation and a detailed discussion on higher harmonics and the modification of the basic state generated by the nonlinear interactions between the fundamental modes. Section 3.5 is dedicated to the results of the weakly nonlinear stability approach including the computation of tricritical points where a transition from supercritical to subcritical bifurcation occurs and the effect of different governing parameters on the perturbed iso-contours, Nusselt and Mixing numbers. Finally, conclusions are drawn in section 3.6.

### 3.3 Governing equations, basic state and linear stability

#### 3.3.1 System and basic equations

we consider a mixture of two miscible fluids confined between two horizontal plates of infinite extension in the horizontal  $x$  and  $y$  directions, separated by a height  $H$  in the vertical  $z$  direction. Furthermore, the lower wall is supposed adiabatic while the upper wall is isothermal and we assume that a through-flow is driven by a pressure gradient in the horizontal  $x$  direction (cf. fig3.1).

The Oberbeck-Boussinesq approximation is applied indicating that the density variations are neglected everywhere except for the gravity in the momentum equation. Subject to these conditions the following set of dimensionless governing equations is obtained [19]:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.1)$$

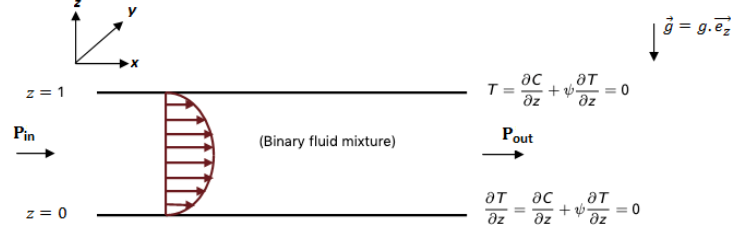


FIGURE 3.1 – Schematic representation of Poiseuille flow and boundary conditions

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -Pr \nabla P + Pr(T - C) \vec{e}_z + Pr \nabla^2 \vec{u} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + 2Ge \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C + \psi \nabla^2 T) \quad (3.4)$$

where the following dimensionless variables are used, respectively, for coordinates  $(x^*, y^*, z^*)$  [m], velocity  $\vec{u}^*$  [m/s], time  $t^*$  [s], pressure  $P^*$  [Pa], temperature  $T^*$  [K] and concentration  $C^*$  :

$$\begin{aligned} (x^*, y^*, z^*) &= H (x, y, z), & t^* &= \frac{H^2}{\nu} t, & \vec{u}^* &= \frac{\kappa}{\mu} \vec{u}, \\ P^* &= \frac{\mu \kappa}{H^2} P, & T^* - T_0^* &= \frac{\nu \kappa}{\beta_T g H^3} T, & C^* - C_0^* &= \frac{\nu \kappa H}{\beta_c g H^3} C, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Here,  $\nu$  is the kinematic viscosity [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ],  $\beta_T$  [ $K^{-1}$ ] and  $\beta_C$  are respectively the thermal expansion coefficient and the mass expansion coefficient,  $\mu$  is the dynamic viscosity [ $Pa \cdot s$ ],  $\kappa$  is the thermal diffusivity [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ],  $c_v$  is the heat capacity per unit mass [ $J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ],  $g$  is the gravitational acceleration [ $m \cdot s^{-2}$ ],  $T_0^*$  [K] is the temperature of the upper plate and  $C_0^*$  is the mass fraction of the densest component corresponding to the temperature  $T_0^*$ .

The driving forces entering into the momentum balance equation (??) are pressure gradients and the buoyancy caused by the temperature and concentration dependence of the density. The last term on the right-hand side of energy equation (??) measures the effects of viscous dissipation, where  $\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$  is the strain tensor. The off-diagonal term  $\frac{1}{Le} \psi \nabla^2 T$  on the right-hand side of equation (??) describes the Soret effect, i.e., the generation of the concentration flux by temperature variations.

The dimensionless numbers appearing in the above system,

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Le = \frac{\kappa}{D}, \quad \psi = S_T \frac{\beta_C C_0 (1 - C_0^*)}{\beta_T}, \quad Ge = \frac{\beta_T g H}{c_v}, \quad (3.6)$$

are respectively the Prandtl number, the Lewis number, the separation ratio and the Gebhart number.  $S_T = \frac{D_T}{D}$  is the Soret coefficient [ $K^{-1}$ ], where  $D$  and  $D_T$  are respectively the solutal diffusion coefficient [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ] and the coefficient of thermodiffusion [ $m^2 \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$ ].

The boundary conditions can be expressed as

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ at } z = 0, 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } T = 0 \text{ at } z = 1 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \psi \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (3.9)$$

The condition (3.9) states that the horizontal boundaries are impermeable, so the mass flux must vanish at  $z = 0$  and  $z = 1$ .

### 3.3.2 Unperturbed basic state and linear stability

In the basic state, the imposed horizontal pressure gradient induces a Poiseuille flow in the  $x$ -direction,

$$\vec{u}_b(z) = Pe f_1(z) \vec{e}_x, \quad (3.10)$$

where  $Pe = \frac{U_a H}{\kappa}$  is the Péclet number,  $U_a$  the average velocity,  $f_1(z) = 6z(1-z)$  and  $\vec{e}_x$  is the unit vector along the  $x$  axis. In the presence of the basic Poiseuille flow, the viscous dissipation term in the energy equation (??) imposes a nonlinear temperature profile between the horizontal plates,

$$T_b(z) = \Lambda f_2(z) \quad (3.11)$$

with  $f_2(z) = 6(1 - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4)$  and the dimensionless parameter  $\Lambda$  is the viscous dissipation Rayleigh number defined by

$$\Lambda = Pe^2 Ge = \frac{\beta_T g H^3 \Delta T_{vd}^*}{\nu \kappa} \quad (3.12)$$

with  $\Delta T_{vd}^*$  [K] is a temperature difference generated by viscous dissipation in the presence of the horizontal through-flow and reads,

$$\Delta T^* = \frac{U_a^2 \nu}{c_v \kappa} \quad (3.13)$$

Because of the Soret effect, the nonlinear temperature gradient generates a nonlinear concentration profile,

$$C_b(z) = -\psi T_b(z) \quad (3.14)$$

According to Eq. (3.14), under the Soret effect, the basic concentration has the same sign as the basic temperature for  $\psi < 0$  and the opposite sign for  $\psi > 0$ . A plot of the basic normalized temperature profile  $\frac{T_b(z)}{\Lambda} = f_2(z)$  and the normalized concentration  $\frac{C_b(z)}{\Lambda \psi}$  is presented in Fig. 3.2 for  $\psi > 0$ . Note that the basic temperature is a nonlinear monotonically decreasing function of  $z$ , while the basic concentration is a nonlinear monotonically increasing function of  $z$ . The behavior of the basic concentration field for positive separation ratio states that the heaviest component of the binary mixture migrates to the upper colder boundary under the action of the Soret effect. A detailed linear stability analysis of the basic state (3.10), (3.11) and (3.14) was investigated recently by Ali Amar et al [19]. Here, before discussing the nonlinear stability, a brief review of linear stability results is presented. The linear stability analysis of the basic state has been carried out by solving the linear eigenvalue problem numerically for arbitrarily oriented convective rolls. It is found in [19] that the preferred mode of instability develops in the form of longitudinal rolls with their axes parallel to the through-flow direction. For positive separation ratio  $\psi$  as investigated here, the bifurcation to convection is stationary, and the Soret effect precipitates the

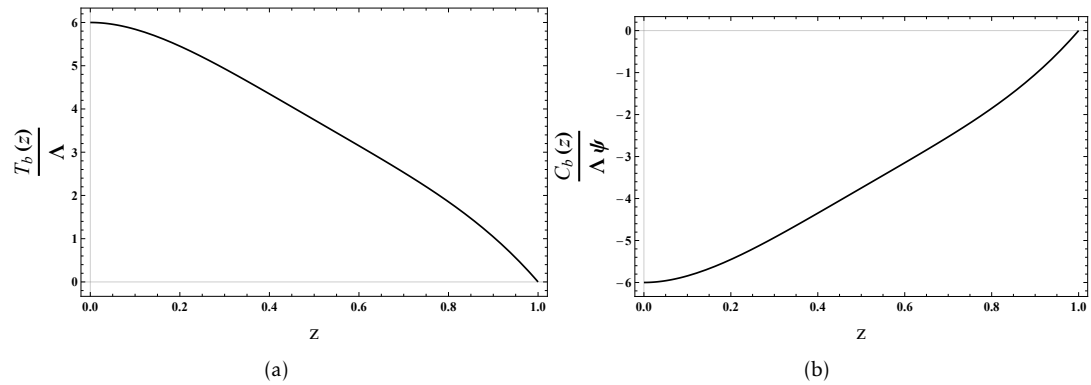


FIGURE 3.2 – Normalized basic temperature (a) and concentration (b) fields as a function of  $z$ .

appearance of stationary longitudinal rolls. Moreover, a drastic drop of the critical wave number is observed for liquids such that it becomes zero if  $\psi$  exceeds a particular value  $\psi_{mono}$ . This means that longitudinal rolls have a finite wavelength for  $\psi < \psi_{mono}$  and infinite wavelength otherwise. The destabilizing effect is illustrated in Fig. (3.3), where the critical viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda_c$  as well as the corresponding critical wave number  $k_c$  are plotted against the separation ratio  $\psi$  for various Lewis numbers  $Le$  and Prandtl numbers  $Pr$ . As seen in Fig. (3.3), the basic state of binary mixtures becomes unstable for a critical viscous dissipation Rayleigh number that decreases with stronger Soret effect, i.e., for growing  $\psi$ . We also note that the decrease in  $\Lambda_c$  is more effective for liquids with high Lewis number than for gases.

The following weakly nonlinear stability analysis is aimed at studying the nonlinear dynamics

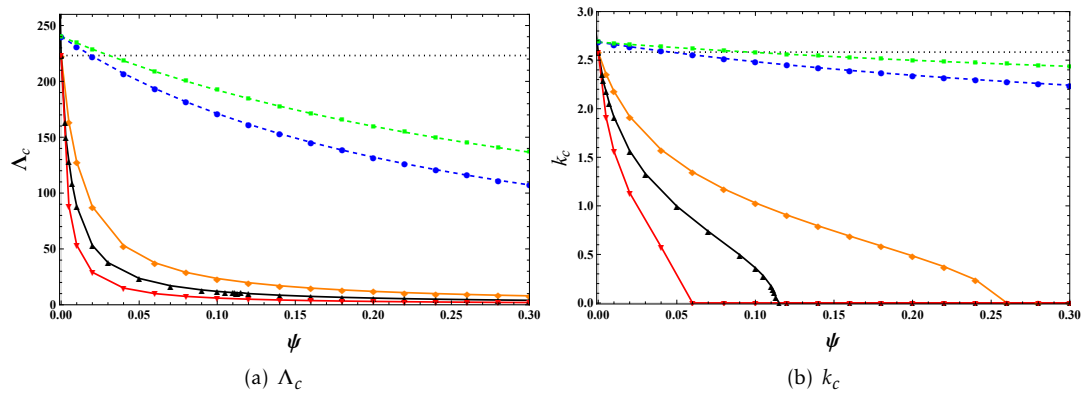


FIGURE 3.3 – Critical values of (a)  $\Lambda$  and (b)  $k$  at the onset of stationary instability versus  $\psi$ . From top to bottom, the curves correspond respectively to gas with  $(Pr = 1, Le = 1)$ ,  $(Pr = 1, Le = 2)$  and to liquids with  $(Pr = 10, Le = 50)$ ,  $(Pr = 10, Le = 100)$  and  $(Pr = 10, Le = 200)$ .

of finite wavelength longitudinal rolls above criticality for binary fluid mixtures with positive separation ratio and  $\psi < \psi_{mono}$ .

### 3.4 Weakly nonlinear analysis

#### 3.4.1 Governing equations for finite amplitude longitudinal rolls

The evolution of the unstable longitudinal rolls and the associated heat transfer above criticality, i.e.,  $\Lambda > \Lambda_c$  may be determined by a nonlinear stability approach as functions of the non-dimensional parameters  $\psi$ ,  $Le$ ,  $Ge$ , and  $Pr$ . The governing equations describing finite amplitude perturbations in the form of longitudinal rolls are,

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u_b}{\partial z} - Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = - \left( v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + Pr \frac{\partial P}{\partial y} = - \left( v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Pr \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - Pr(\theta(1 + \psi) - \eta) + Pr \frac{\partial P}{\partial z} = - \left( v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial \Gamma_b}{\partial z} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta - 2Ge \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ = - \left( v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Ge \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \\ + Ge \left( 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial(\eta - \psi\theta)}{\partial t} + w \frac{\partial C_b}{\partial z} - \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta = - \left( v \frac{\partial(\eta - \psi\theta)}{\partial y} + w \frac{\partial(\eta - \psi\theta)}{\partial z} \right) \quad (3.20)$$

The pressure field is eliminated by the cross derivatives of (3.17) and (3.18) and by subtracting the obtained equations. By introducing the stream function  $\Psi$  defined by

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

and the scaling  $u = Re \tilde{u}$  where  $Re = Pe/Pr$  is the Reynolds number, the governing equations for finite perturbations may be written in a compact form as,

$$(L' \partial_t + L) \tilde{V} = N \quad (3.21)$$

where  $\tilde{V} = (\Psi, \theta, \tilde{u}, \eta)^T$  and  $N = (N_I^\psi, N_{adv}^\theta + N_{Diss}^{Ge} + N_{Diss}^{Pr}, N_I^{\tilde{u}}, N_{adv}^\eta)^T$

The expressions for the linear operators  $L'$  and  $L$  and the nonlinear operator  $N$  are :

$$L' = \begin{pmatrix} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Pr} & 0 \\ 0 & -\psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$L = \begin{pmatrix} -\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 & (1 + \psi) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\Lambda f_2'(z) \frac{\partial}{\partial y} & -\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & -2 \frac{\Lambda}{Pr} f_1'(z) \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -f_1'(z) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & 0 \\ \psi \Lambda f_2'(z) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_I^\psi = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi, \\ N_{adv}^\theta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ N_{Diss}^{Ge} = Ge \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right], \\ N_{Diss}^{Pr} = \frac{\Lambda}{Pr^2} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)^2 \right], \\ N_I^{\tilde{u}} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right], \\ N_{adv}^\eta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\eta - \psi \theta)}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial (\eta - \psi \theta)}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

with the following boundary conditions :

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \theta = 0 \text{ at } z = 1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.4.2 Derivation of amplitude equation

The amplitude of the disturbance  $\tilde{V}$  can be formally derived by a weakly nonlinear analysis [20]-[22] via a multiple-scale expansion of the perturbation equation in the vicinity of linear critical conditions. Above the linear threshold, we introduce a small parameter  $\epsilon$  which measures the distance to criticality by setting  $\Lambda = \Lambda_c + \epsilon^2 \Lambda_2$ , where  $\Lambda_2$  is of order unity. This fixes the temporal scaling to  $\tau = \epsilon^2 t$ , allowing the temporal derivative to be replaced by  $\partial_t + \epsilon^2 \partial_\tau$ . The evolution equations are obtained by expanding the vector  $\tilde{V}$ , the linear operator  $L$  and the

nonlinear contribution  $N$  in power series of  $\epsilon$  :

$$\begin{cases} \tilde{V} = \epsilon \tilde{V}_1 + \epsilon^2 \tilde{V}_2 + \dots \\ L = L_c + \epsilon^2 \Lambda_2 L_2 + \dots \\ N = \epsilon^2 N_2 + \epsilon^3 N_3 + \dots \end{cases} \quad (3.26)$$

$L_c$  is the linear operator  $L' \partial_t + L$  for  $\Lambda = \Lambda_c$  and  $L_2$  is the linear operator,

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_2'(z) \partial_y & 0 & -\frac{2}{Pr} f_1'(z) \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi f_2'(z) \partial_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where the functions  $\tilde{V}_i$  depend on the slow variable  $\tau$ . By substituting the above expansion in  $\epsilon$  in the system (??) and then collecting coefficients of  $O(\epsilon)$ ,  $O(\epsilon^2)$  and  $O(\epsilon^3)$ , a set of equations is obtained,

$$\begin{cases} L_c \tilde{V}_1 = 0 \\ L_c \tilde{V}_2 = N_2(\tilde{V}_1) \\ L_c \tilde{V}_3 = -(L' \partial_\tau + \Lambda_2 L_2) \tilde{V}_1 + N_3(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \end{cases} \quad (3.27)$$

### 3.4.2.1 Eigenvalues and eigenfunctions of the first-order problem

The first order problem is reduced to,

$$L_c \tilde{V}_1 = 0 \quad (3.28)$$

The variables  $\tilde{V}_1$  are expanded in normal modes,

$$\tilde{V}_1 = A(\tau) e^{ik_c y} \tilde{V}_{11}(z) + C.C. \quad (3.29)$$

where  $A$  is the amplitude of the disturbances, which depends on the slow time  $\tau$ ,  $k_c$  and  $\omega_c$  are respectively the critical wave number and the critical frequency at the onset of convection and  $C$  stands for complex conjugate.

The boundary conditions for the eigenfunctions  $\tilde{V}_{11}(z)$  are

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{11} = \Psi_{11} = D\Psi_{11} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ D\Theta_{11} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \Theta_{11} = 0 \text{ at } z = 1 \\ D\eta_{11} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

where  $D = \partial_z$ .

The eigenvalue problem, equations (3.28) and (3.29) with the boundary conditions (3.30) is solved numerically by the shooting method. The linear eigenvalues computed in [19] showed that convection is stationary, i.e.,  $\omega_c = 0$  for positive separation ratio. Here, we focus on understanding the effect of thermodiffusion on the eigenfunctions that we computed with a defined normalization of the vertical component of the velocity. Normalization is chosen so that  $\int_0^1 \|w_{11}\|^2 dz = k_c^2 \int_0^1 \|\Psi_{11}\|^2 dz = 1$ .

The vertical variation of the fundamental modes for different values of separation ratio is



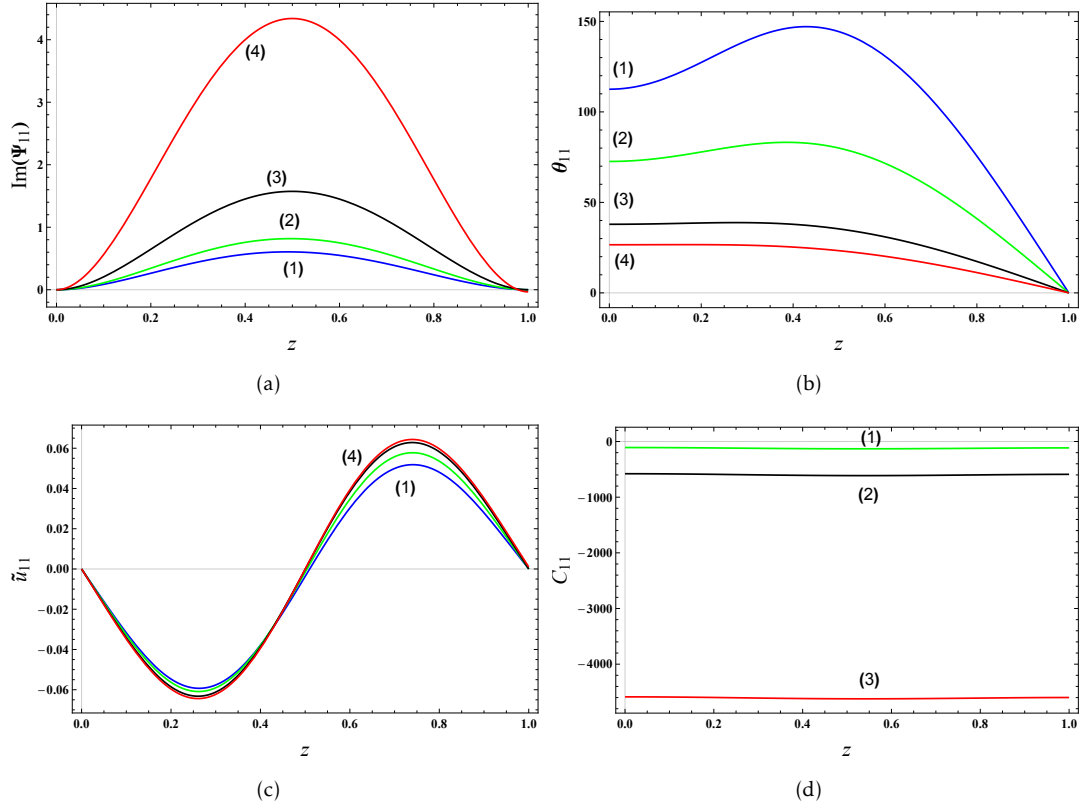


FIGURE 3.4 – Eigenfunctions at the onset of convection a)  $Im(\Psi_{11}(z))$ , b)  $\Theta_{11}(z)$ , c)  $\tilde{u}_{11}(z)$  and d)  $C_{11}(z)$ . Parameters are  $Pr = 10$ ,  $Ge = 10^{-4}$ ,  $Le = 100$  and different values of separation ratio : (1)  $\psi = 0$ , (2)  $\psi = 0.01$ , (3)  $\psi = 0.05$ , (4)  $\psi = 0.1$ .

shown in Fig. (3.4). The computations indicate that the eigenfunctions  $\theta_{11}$ ,  $\tilde{u}_{11}$ ,  $C_{11}$  are real valued while  $\Psi_{11}$  is purely imaginary valued. As shown in Fig. (3.4),  $Im(\Psi_{11})$  and  $\tilde{u}_{11}$  are almost symmetrical (even or odd), while the eigenfunction  $\theta_{11}$  presents an asymmetric profile as a consequence of the asymmetric boundary conditions imposed for the temperature. The fundamental concentration mode  $C_{11}$  is almost constant and increases with the separation ratio  $\psi$ . Note that unlike  $\tilde{u}_{11}$ , the influence of  $\psi$  on the vertical distribution of  $\theta_{11}$  and  $\Psi_{11}$  is significant. The total disturbed temperature  $\theta_1(y, z)$  is positive (negative) near the vertical edge of a roll  $y = \frac{2\pi n}{k_c}$  ( $y = \frac{2\pi n}{k_c} + \frac{\pi}{k_c}$ ). On the other hand,  $Im(\Psi_{11})$  is positive and increase with  $\psi$ , therefore the vertical velocity  $W_{11} = k_c Im(\Psi_{11})$  increases with  $\psi$ . Therefore we conclude that thermodiffusion accelerates the hot current near  $y = \frac{2\pi n}{k_c}$  and decelerates the cold current near the other vertical edge  $y = \frac{2\pi n}{k_c} + \frac{\pi}{k_c}$ , reinforcing the convection induced by the internal viscous dissipation. Moreover, Fig. (3.4b) shows that by increasing the separation ratio the thermal boundary layer widens near the upper wall and flattens in the rest of the medium, making the temperature more homogeneous in the vertical direction.

### 3.4.2.2 Solutions to the second order problem

At order  $\epsilon^2$ , the non-homogenous problem for  $\tilde{V}_2$  is given by,

$$L_c \tilde{V}_2 = N_2(\tilde{V}_1) \quad (3.31)$$

The term  $N_2$  on the right-hand side of (3.31) is the nonlinear expression  $N$  evaluated to  $O(\epsilon^2)$ . It contains known linear fundamental modes  $\tilde{V}_1$  determined at  $O(\epsilon)$  and their derivatives. The nonlinear interactions between these fundamental modes and their complex conjugates generate higher harmonics and a modification of the basic state. The solutions to (3.31) are then sought in the form

$$\tilde{V}_2 = [A^2(\tau)e^{2iky} \tilde{V}_{22}(z) + C.C] + |A(\tau)|^2 \tilde{V}_{20}(z) \quad (3.32)$$

where  $\tilde{V}_{22}(z) = (\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z), \tilde{U}_{22}(z), \eta_{22}(z))$  and  $\tilde{V}_{20}(z) = (\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z), \tilde{U}_{20}(z), \eta_{20}(z))$ .

The boundary conditions for the eigenfunctions  $\tilde{V}_{22}(z)$  and  $\tilde{V}_{20}(z)$  are

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{22} = \Psi_{22} = D\Psi_{22} = \tilde{U}_{20} = \Psi_{20} = D\Psi_{20} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ D\Theta_{22} = D\Theta_{20} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \Theta_{22} = \Theta_{20} = 0 \text{ at } z = 1 \\ D\eta_{22} = D\eta_{20} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Inserting the expression (3.32) into (3.31) and separating the harmonic components, one obtains a system of equations for  $\tilde{V}_{22}(z)$  and a system of equations for  $\tilde{V}_{20}(z)$  that we resolve numerically.

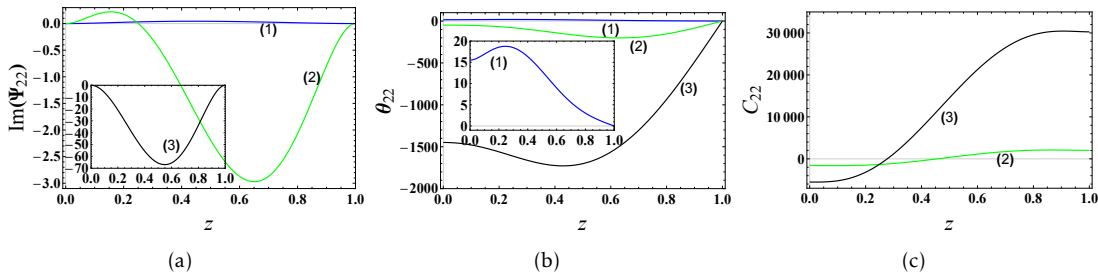


FIGURE 3.5 – Vertical variations of the first harmonics with  $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$  a)  $Im(\Psi_{22}(z))$ , b)  $\Theta_{22}(z)$  and c)  $C_{22}(z)$ . Parameters are :  $Le = 100$  and (1) $\psi = 0$ , (2) $\psi = 0.01$ , (3) $\psi = 0.05$ .

In the remainder of this subsection, we focus on the effects of both the separation ratio  $\psi$  and Lewis number  $Le$  on the vertical profiles of the first harmonics  $\Psi_{22}$  which is pure imaginary,  $\theta_{22}$ , and  $C_{22}$  (both are real valued) for binary liquid mixtures with  $Pr = 10$  and  $Ge = 10^{-4}$ . In order to evaluate the effect of separation ratio alone,  $\psi = 0$ ,  $\psi = 0.01$  and  $\psi = 0.05$  cases are investigated for a given  $Le = 100$ . Figure 3.5 gathers the numerical results. On the other hand, the effect of Lewis number alone is studied by fixing  $\psi = 0.01$  and investigating the  $Le = 50$ ,  $Le = 100$  and  $Le = 200$  cases and the results are shown in figure 3.6. As can be seen in Fig. 3.5(a), for  $\psi = 0$   $Im(\Psi_{22})$  is even with respect to the midplane reflection symmetry. The thermodiffusion effect with non-zero  $\psi$  breaks this symmetry and two qualitatively different behaviors are numerically observed. For a small positive value of  $\psi$ , i.g.  $\psi = 0.01$  in Fig. 3.5(a),  $Im(\Psi_{22})$  changes sign near the lower wall. This means that the vertical component of the velocity  $W_{22}$  changes from negative

value to a positive value near the bottom wall indicating that the core of the convective cells is expected to move upwards. On the other hand, for  $\psi = 0.05$ , figs. 3.5(a), (b), both  $Im(\Psi_{22})$  and  $\theta_{22}$  are negative for all  $z$ . By considering the expressions for  $\Psi_{22}$  and  $\theta_{22}$  given by (3.33), we can easily show that the effect of the first harmonics is to cool down and to decelerate the warm up-flow and to warm up and accelerate the cold down-flow. As a consequence, by increasing the separation ratio, we can expect that the isolines of the stream-function stretch towards the cold down-flow near the vertical edge of a roll. The vertical distribution of the harmonics of the concentration  $C_{22}(z)$  is shown in Fig. 3.5(c) for  $\psi = 0.01$  and  $\psi = 0.05$ . This figure states that increasing the separation ratio,  $C_{22}(z)$  increases strongly with  $z$ , meaning that Soret effect favors the vertical mixing of the two components of the liquid mixture.

The Lewis number  $Le$  compares the time scales of concentration and heat diffusion. Its influence

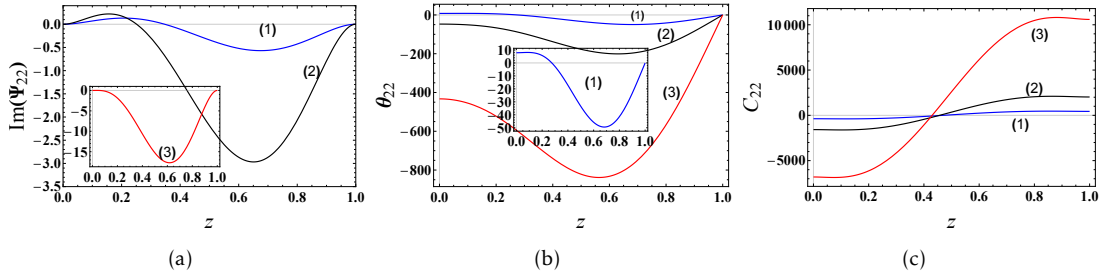


FIGURE 3.6 – Vertical variations of the first harmonics with  $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$  a)  $Im(\Psi_{22}(z))$ , b)  $\Theta_{22}(z)$  and c)  $C_{22}(z)$ . Parameters are :  $\psi = 0.01$  and (1) $Le = 50$ , (2) $Le = 100$ , (3) $Le = 200$ .

on the first harmonics is shown in Fig. 3.6. Fig. 3.6(a) shows that  $Im(\Psi_{22})$ , i.e., the vertical velocity  $W_{22}$ , changes sign at a horizontal plane  $z = z_s$ . We observe that increasing  $Le$  induces a displacement towards the lower wall of this horizontal plane. We also observed that the midplane reflection symmetry is gradually recovered by increasing  $Le$ . In other words, By slowing down the diffusion of concentration, the first harmonics lead to the convective pattern nearly expanding throughout the entire cavity. The influence of  $Le$  on the first harmonics  $C_{22}(z)$  may be seen in Fig. 3.6(c). This figure shows that, as for the case of increasing the separation ration  $\psi$ , the effect of  $Le$  is to enhance the vertical mixing, thus making the binary mixture more homogeneous. We emphasize that for liquid binary mixture, the contribution of the first harmonics  $\tilde{u}_{22}(z)$ , not shown here, is found negligible compared to the other harmonics.

The nonlinearities of the problem act to produce corrections  $\theta_{20}(z)$ ,  $C_{20}(z)$ ,  $\Psi_{20}$  and  $\tilde{u}_{20}(z)$  of the basic temperature, concentration, stream function and the  $x$  component of the velocity respectively. Numerical results indicate that  $\Psi_{20}(z) = 0$  independently of  $\psi$ ,  $Le$ ,  $Ge$  and  $Pr$  while  $\tilde{u}_{20}(z)$  is very small for finite  $Pr$  and takes zero value when  $Pr \rightarrow \infty$ .

The basic temperature and concentration vertical distributions in the absence of convection are respectively given by equations (3.11) and (3.14). Both distributions change by the contribution of the nonlinear terms  $\theta_{20}(z)$  and  $C_{20}(z)$  generated by convection. The vertical profile of these terms depends strongly on the separation ratio  $\psi$ , Lewis number  $Le$  and Gebhart number  $Ge$ . For the sake of conciseness, we only focus on the influence of  $\psi$  on the deviation of  $\theta_{20}(z)$  from its value at the center of the channel, namely  $(\theta_{20}(z) - \theta_{20}(z = 1/2))$ . The results are shown in Fig. 3.7 (a) for  $Ge = 10^{-4}$  and in Fig. 3.7 (b) for  $Ge = 10^{-1}$ . Parameters are  $Le = 100$  and  $Pr = 10$ .

Curves for  $\psi = 0.01$ ,  $\psi = 0.05$  and  $\psi = 0.1$  are presented as well as for the case of one component fluid ( $\psi = 0$ ) for comparison purposes. Fig. 3.7 (a) shows that for  $Ge = 10^{-4}$ , the nonlinear correction  $\theta_{20}(z) - \theta_{20}(z = 1/2)$  is positive (negative) at the upper (lower) half plane.

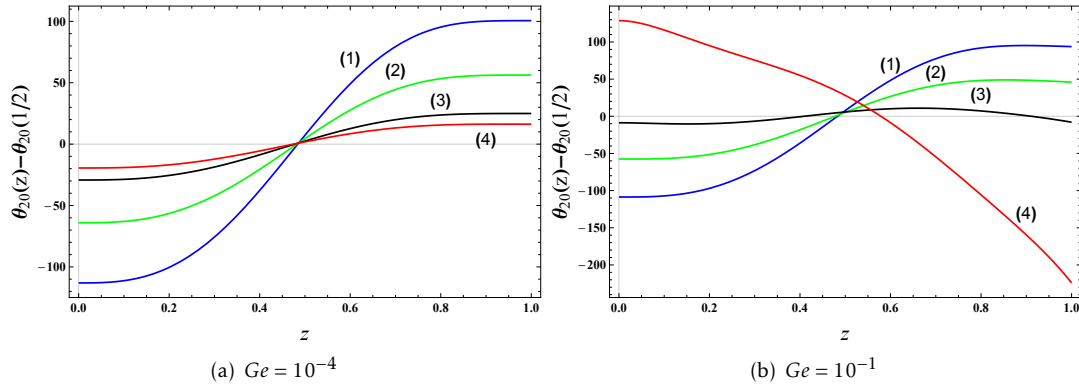


FIGURE 3.7 – Vertical variations of the convective nonlinear correction to the basic conductive a)  $Ge = 10^{-4}$  and b)  $Ge = 10^{-1}$  with  $Pr = 10, Le = 100$  for different values of the separation ratio : (1)  $\psi = 0$ , (2)  $\psi = 0.01$ , (3)  $\psi = 0.05$  and (4)  $\psi = 0.1$

This means that the nonlinear correction to the conductive basic state induces a heating (cooling) in the upper (lower) half plane, stabilizing the system. The stabilizing effect is more effective for one component fluid than for binary fluids specially when the separation ratio is increased. As the first nonlinearities induce a stabilizing effect, one can expect a supercritical bifurcation in the case of very small nonlinear viscous dissipation contribution, i.e.,  $Ge = 10^{-4}$ . However, when  $Ge$  is increased to  $Ge = 10^{-1}$ , the stabilizing/destabilizing effect of nonlinear corrections depends on the separation ratio  $\psi$ . As it can be seen from Fig. 3.7 (b), while for  $\psi = 0$  and  $\psi = 0.01$ ,  $\theta_{20}(z) - \theta_{20}(z = 1/2)$  is positive (negative) at the upper (lower) half plane, for  $\psi = 0.1$ , the nonlinear correction to the vertical basic temperature profile becomes negative (positive) at the upper (lower) half plane, thus destabilizing the system. This destabilizing effect of the nonlinearities may be considered as a precursor to the emergence of a subcritical bifurcation.

### 3.4.2.3 Third order solvability condition

At order  $\epsilon^3$ , the non-homogenous problem for  $\tilde{V}_3$  is obtained :

$$L_c \tilde{V}_3 = -\left(L' \partial_{t_2} + \Lambda_2 L_2\right) \tilde{V}_1 + N_3(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \quad (3.34)$$

The system (3.34) has a solution if and only if its right-hand side is orthogonal to the eigenfunctions of the corresponding adjoint problem. This solvability condition is known as the Fredholm alternative. The adjoint eigenfunctions,  $\tilde{V}^A$ , are the solutions of the linear system :

$$L_c^A \tilde{V}^A = 0 \quad (3.35)$$

where  $L_c^A$  is the adjoint of the operator  $L_c$  satisfying,

$$\int_0^1 \tilde{V}^A \overline{(L_c \tilde{V})} dz = \int_0^1 \tilde{V} \overline{(L_c^A \tilde{V}^A)} dz \quad (3.36)$$

TABLEAU 3.1 – Computed values of  $\gamma$ ,  $\lambda$  and  $(\psi^*, Ge^*)$  with  $Pr = 10$  and  $Le = 100$ .

$\psi^*$	$\gamma$	$\lambda$	$Ge^*$
0	0.1002931	0.260906 - 0.084668 Ge	3.081555
0.005	0.129200	0.3204775 - 0.181805 Ge	1.762755
0.009	0.149596	0.360610 - 0.287673 Ge	1.253542
0.01	0.154417	0.369878 - 0.318291 Ge	1.162077
0.015	0.177236	0.412632 - 0.498149 Ge	0.828330
0.02	0.198435	0.450643 - 0.726889 Ge	0.619961
0.03	0.237927	0.516654 - 1.361642 Ge	0.379435
0.04	0.275842	0.573278 - 2.307165 Ge	0.248477
0.05	0.314523	0.623308 - 3.704856 Ge	0.168241
0.06	0.356855	0.668395 - 5.804756 Ge	0.115146
0.07	0.407314	0.709554 - 9.086293 Ge	0.078091
0.08	0.475271	0.747646 - 14.613613 Ge	0.051161
0.09	0.584922	0.782819 - 25.25246 Ge	0.0309997
0.1	0.836251	0.817720 - 52.620656 Ge	0.01554

where  $\bar{V}$  is the complex conjugate of  $V$ .

We apply the solvability condition by using the inner product,

$$\langle \tilde{V}_i, \tilde{V}_j \rangle = \frac{1}{2\pi/k_c} \int_0^{2\pi/k_c} \int_0^1 \tilde{V}_i \bar{\tilde{V}}_j dz dy, \quad (3.37)$$

Re-introducing the original variables  $\tau_2 = \epsilon^2 t$ ,  $\Lambda_2 = (\Lambda - \Lambda_c)/\epsilon^2$  and substituting  $\epsilon A$  by  $A$ , the solvability condition yields the amplitude equation,

$$\gamma \partial_t A = \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c} A - \lambda A |A|^2. \quad (3.38)$$

where  $\gamma$  is the characteristic time of instability,

$$\gamma = -\frac{1}{\Lambda_c} \frac{\langle \tilde{V}^A, L' \tilde{V}_1 \rangle}{\langle \tilde{V}^A, L_2 \tilde{V}_1 \rangle}. \quad (3.39)$$

and  $\lambda$  is the Landau constant,

$$\lambda = \frac{1}{\Lambda_c} \frac{\langle \tilde{V}^A, N_{31}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \rangle}{\langle \tilde{V}^A, L_2 \tilde{V}_1 \rangle}. \quad (3.40)$$

## 3.5 Results of the weakly nonlinear stability

### 3.5.1 Supercritical/subcritical bifurcation

Numerical results indicate that the characteristic time of instability  $\gamma$  is positive independently of the dimensionless parameters, while the Landau constant  $\lambda$  may be positive or negative depending on the values of  $\psi, Le, Ge, Pr$  considered. In table 3.1 we give the numerical values of the characteristic time of instability  $\gamma$  and the nonlinear coefficient  $\lambda$  for a very wide range of the separation ratio  $\psi$  with  $Pr = 10$  and  $Le = 100$ , values of Prandtl and Lewis numbers that are typical for liquid mixtures. We observe from table 3.1 that, contrary to  $\gamma$ , the Landau constant  $\lambda$  depends on  $Ge$ . The sign of  $\lambda$  determines whether we are dealing with a subcritical

( $\lambda < 0$ ) or supercritical ( $\lambda > 0$ ) bifurcation. For this specific example, table 3.1 reports the particular value of the Gebhart number,  $Ge^*$  such that the bifurcation is supercritical if  $Ge < Ge^*$  and subcritical otherwise. In the same manner, for fixed values of  $Pr$ ,  $Le$  and  $Ge$ , we found a particular value of the separation ratio,  $\psi^*$  such that the bifurcation is supercritical if  $\psi < \psi^*$  and subcritical otherwise. The point  $(\psi^*, Ge^*)$  defines a tricritical bifurcation point where a transition from supercritical to subcritical nature of bifurcation occurs. We mention that for the classical Rayleigh-Bénard instability of a binary fluid mixture, Shopf and Zimmermann [23] showed that for positive separation ratio, the bifurcation to convective pattern is always supercritical.

In order to have a better understanding on the influence of different dimensionless parameters on the supercritical/subcritical bifurcation, we study the dependence of the Landau constant  $\lambda$  on  $\psi$  for different Gebhart, Lewis and Prandtl numbers. We first fix  $Pr = 10$  and evaluate the effect on  $\lambda$  of the separation ratio  $\psi$  with  $Ge = 10^{-4}$ ,  $Ge = 10^{-1}$ ,  $Ge = 1$ , and  $Ge = 2$  respectively and for three prescribed values of Lewis number  $Le = 2$ ,  $Le = 100$  and  $Le = 200$ . The twelve different cases are shown in Fig. 3.8. For all these cases, Fig. 3.8 shows that  $\lambda$  is always positive for a mono-constituent fluid, i.e.,  $\psi = 0$ , indicating that the bifurcation is supercritical for the twelve cases considered. For binary fluids with  $\psi \neq 0$ , two qualitative behaviors are observed

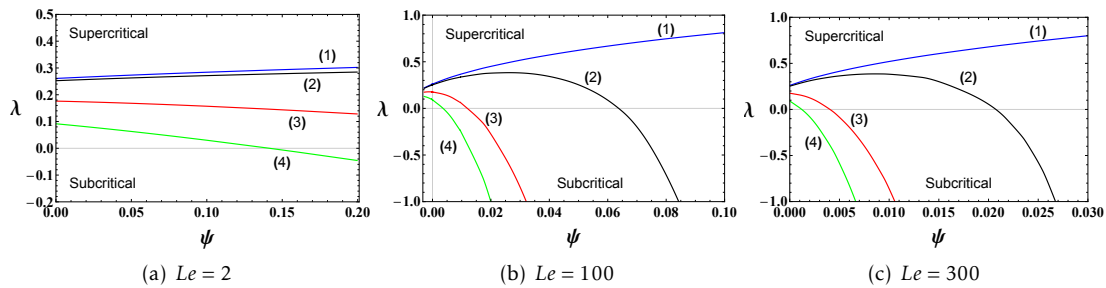


FIGURE 3.8 – Landau coefficient  $\lambda$  as a function of  $\psi$  for  $Pr = 10$ , (a)  $Le = 2$ , (b)  $Le = 100$ , (b)  $Le = 300$  and different Gebhart numbers : (1)  $Ge = 10^{-4}$ , (2)  $Ge = 10^{-1}$ , (3)  $Ge = 1$ , (4)  $Ge = 2$

depending on  $Le$  and  $Ge$  numbers. For very small values of  $Ge$ ,  $\lambda$  increases with  $\psi$  and the bifurcation is supercritical in the range of  $\psi$  shown in figure 3.8. However, for moderate values of  $Ge$ ,  $\lambda$  decreases with  $\psi$  and changes sign at  $\psi = \psi^*$ . From comparison between figures 3.8 (a), (b), (c), we can easily observe that by increasing  $Le$ , the tricritical value  $\psi^*$  approaches  $\psi = 0$ . Therefore, we conclude that the transition to subcritical bifurcation is expected to occur for small separation ratio in liquid mixtures than for gas mixtures.

All previous results were obtained with  $Pr = 10$ . The influence of  $Pr$  on the Landau constant  $\lambda$  is studied for liquid mixtures with  $Le = 100$ . In Fig. 3.9 (a), we plot  $\lambda$  versus  $\psi$  for three values of  $Pr$ , namely  $Pr = 1$ ,  $Pr = 10$  and  $Pr = 10^5$ . The curves show a weak dependence of  $\lambda$  on Prandtl number and are almost superposed for  $Pr = 10$  and  $Pr = 10^5$ , attesting the relevance of the choice made previously by fixing  $Pr = 10$ .

Figure 3.9 (b) shows the tricritical bifurcation curves in the  $(\psi^*, Ge^*)$  plane for  $Pr = 10$  and three values of Lewis number, where a transition from supercritical to subcritical bifurcation may occur. For prescribed values of  $\psi^*$  and  $Le$ , the bifurcation to longitudinal rolls with finite wavelength is supercritical below the tricritical bifurcation curve, becoming subcritical otherwise. We can also see in Fig. 3.9 (b) that when  $\psi^*$  approaches zero, the curves go to infinity, attesting a supercritical bifurcation for mono-constituent fluids. However, for a prescribed finite value of  $\psi^*$ , the value  $Ge^*$  where a subcritical bifurcation occurs is drastically reduced by increasing  $Le$ . A fit of numerical results is found for small values of  $Ge^*$  with  $Pr = 10$ , for both  $Le = 200$  and

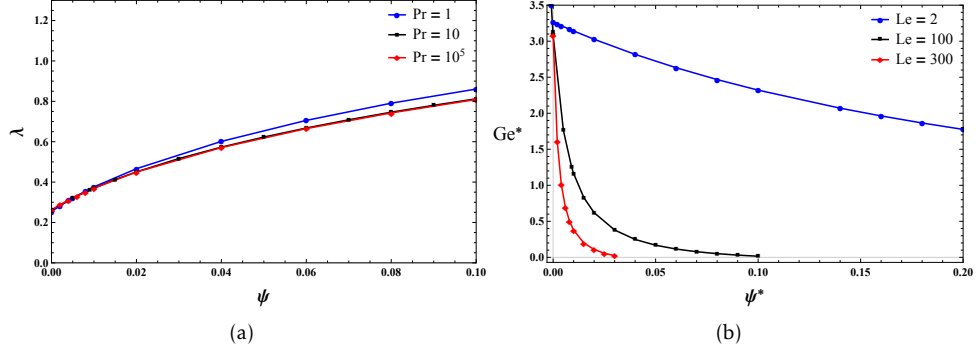


FIGURE 3.9 – (a) Landau coefficient  $\lambda$  as a function of  $\psi$  for  $Ge = 10^{-4}$  and  $Le = 100$ , with different Prandtl numbers :  $Pr = 1$ (dots),  $Pr = 10$ (squares),  $Pr = 10^5$ (diamonds). (b) The tricritical bifurcation curves in the  $(\psi^*, Ge^*)$  plane for  $Pr = 10$ , with different Lewis numbers :  $Le = 2$ (dots),  $Le = 100$ (squares),  $Le = 300$ (diamonds).

$Le = 300$ , namely

$$Ge^*(\psi^*) = a(Le) e^{-b(Le) \psi^*} \quad (3.41)$$

with  $a = 1.488$  and  $b = 43.463$  for  $Le=200$ , and  $a = 1.347$  and  $b=127.322$  for  $Le=300$ .

### 3.5.2 Equilibrium solutions and iso-contours

For given  $Le$  and  $Pr$ , the amplitude equation (3.38) predicts a supercritical bifurcation of the longitudinal rolls if  $\psi < \psi^*$  for assigned value of  $Ge$  or equivalently  $Ge < Ge^*$  for a given value of  $\psi$ , yielding the stable stationary nonlinear equilibrium solution,

$$|A_s| = \left[ \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c} \right]^{1/2} \frac{1}{\lambda} \quad (3.42)$$

As attested by Fig. 3.8,  $\lambda$  increases with  $\psi$  for  $Ge = 10^{-4}$ , which means, according to Eq. (3.42), that the stationary amplitude of convection decreases with the increase of the Soret effect. However for  $Ge = 10^{-1}$ ,  $Ge = 1$  and  $Ge = 2$ ,  $\lambda$  decreases with  $\psi$  indicating that Soret effect amplifies the convection flow for high viscous dissipation intensity.

In the parametric region where the bifurcation is subcritical, the cubic amplitude equation (3.38) does not provide any stable finite-amplitude equilibrium. Therefore, it would be necessary to carry the analysis to higher orders to find such solutions. This task is out of the scope of the present work.

In the supercritical region, once the amplitude of convection  $A_s$  is determined, it is possible to study the influence of the combined effects of viscous dissipation and thermodiffusion on the perturbed iso-contours, heat transfer and the mixing of the binary fluid mixture.

As we have discussed in detail the effects of different parameters on the nonlinear structure of the fields, here we restrict ourselves to plot only the disturbed streamlines. For binary liquids with  $Le = 100$  and  $Pr = 10$ , the intensity of the streamfunction depends on the relative distance to the critical viscous dissipation Rayleigh number and on the value of the separation ratio. Here we set  $\frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c} = 10^{-1}$ , and consider a binary fluid with  $\psi = 0.01$  together with the case of a mono-constituent fluid with  $\psi = 0$ . In order to appreciate the influence of Soret effect, the isolines are

plotted over the same period  $\left(\frac{2\pi}{k_c}|_{\psi=0}\right)$  corresponding to a mono-constituent fluid. Comparison between Fig. 3.10 (a) and Fig. 3.10 (d) shows, as predicted by linear stability analysis, that the emerging longitudinal rolls have a larger cross-section for  $\psi = 0.01$  than for  $\psi = 0$ . According to Fig. 3.10 (b) and Fig. 3.10 (e) the nonlinear contributions act such that convection develops in the entire medium in the absence of Soret effect ( $\psi = 0$ ), while the core of the convective cells moves upwards for  $\psi = 0.01$ . Consequently, the spatial structure of the total disturbed isolines, shown in figure 3.10 (c) and figure 3.10 (f) are perfectly symmetric with respect to the mid-plane for  $\psi = 0$  while they are asymmetric and deformed for binary fluids with  $\psi = 0.01$ .

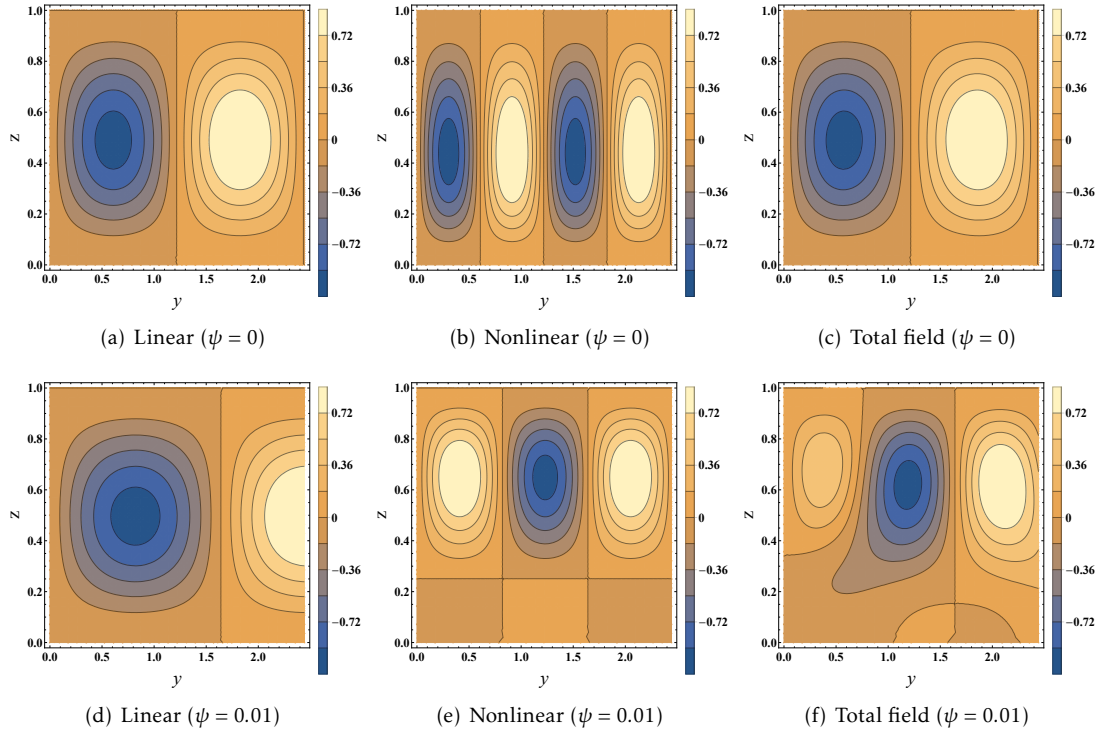


FIGURE 3.10 – Disturbed streamlines at  $\Lambda = 1.1\Lambda_c$  over a period  $\left(\frac{2\pi}{k_c}|_{\psi=0}\right)$ , for  $Ge = 10^{-4}$  and  $Le = 100$ . Comparisons between the case of a pure fluid ( $\psi = 0$ ) a), (b) and c) and a binary mixture ( $\psi = 0.01$ ) d), (e) and f).

### 3.5.3 Nusselt and mixing numbers

In steady state the energy equation (??) can be rearranged as follows :

$$\nabla \cdot \vec{J}_T(y, z) = 2 Ge \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}} \quad (3.43)$$

where  $\vec{J}_T(y, z) = \vec{u}T - \nabla T$  is the total heat flux and the term in the right-hand side is the power per unit volume generated by viscous dissipation with  $\bar{\bar{D}}$  the strain tensor.



For disturbed quantities, equation (3.43) becomes :

$$\nabla \cdot (\vec{u} \theta(y, z) - \nabla \theta(y, z)) = Ge \Phi(y, z) \quad (3.44)$$

where  $Ge \Phi(y, z)$  is the disturbed part of the right hand side of equation (3.43). Averaging over the period  $(2\pi/k_c)$  in the  $y$  direction and integrating the result over  $z$  yields,

$$J_{conv}(z) = \langle \theta(z) w(z) \rangle - \left\langle \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} \right\rangle = Ge \int_0^z \langle \Phi \rangle dz + constant \quad (3.45)$$

where  $\langle \cdot \rangle$  represents a horizontal average over one wavelength of the quantity being averaged. It is clear from the above equation that for  $Ge = 0$ , i.e., neglecting the nonlinear terms stemming from viscous dissipation, the average convective flux  $J_{conv}(z)$  is constant in the entire cavity, as in the classical Rayleigh Bénard problem both for mono-constituent fluid or binary mixtures [24]. Moreover, as the lower wall is assumed to be impermeable and adiabatic in the present configuration, the constant in the right side of the expression (3.45) is zero for  $Ge = 0$ , implying that  $J_{conv}(z) = 0$  in the whole domain, i.e., absence of convection.

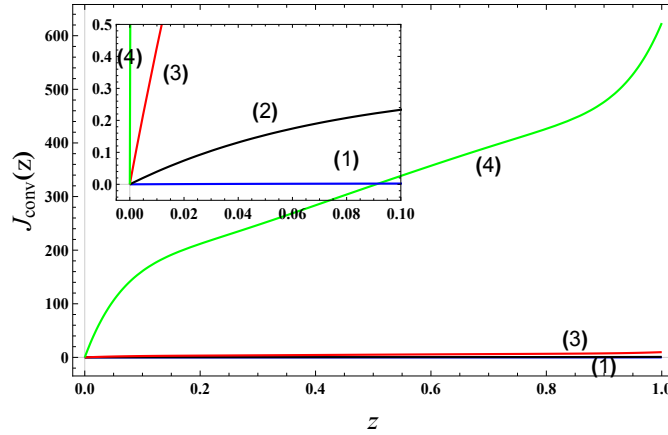


FIGURE 3.11 – Vertical profile of the convective heat flux  $J_{conv}(z)$  at  $Pr = 10$  and  $Le = 100$  for  $\psi = 0.01$  and different values of Gebhart number : (1) $Ge = 10^{-4}$ , (2) $Ge = 10^{-2}$ , (3) $Ge = 10^{-1}$ , (4) $Ge = 1$

Figure 3.11 presents typical plots of the vertical variations of the average heat flux  $J_{conv}(z)$  for  $\psi = 0.01$  at  $Le = 100$  and  $Pr = 10$  for various Gebhart numbers corresponding to supercritical bifurcations. According to Fig. 3.11, the average heat flux is found to be some orders of magnitude higher at  $Ge = 1$  than at small ones. On the other hand, the average heat flux exhibits a maximum located at the upper boundary.

The Nusselt number measures the total vertical heat transfer through the layer induced by convection and conduction, normalized by its conductive contribution. The mean Nusselt number  $Nu$  is defined by :

$$Nu(z) = 1 + \frac{\langle J_{conv}(y, z) \rangle}{J_{cond}(z)} \quad (3.46)$$

where  $J_{conv}(y, z)$  is the heat flux generated by convection and  $J_{cond}(z)$  is the conductive heat flux. In the conductive basic state, the heat is transported only by diffusion and  $Nu(z)$  is equal to 1. In the parameter range of a supercritical bifurcation, convection starts to develop when  $\Lambda$  exceeds

its critical value  $\Lambda_c$ . As  $Nu(z)$  is found dependent on the vertical coordinate  $z$ , we focus here in determining the relative contributions of conduction and convection to heat transferred to the upper plate, using dimensionless Nusselt number  $Nu(z=1)$ .

The variation of Nusselt number at the upper plate as a function of the relative distance to

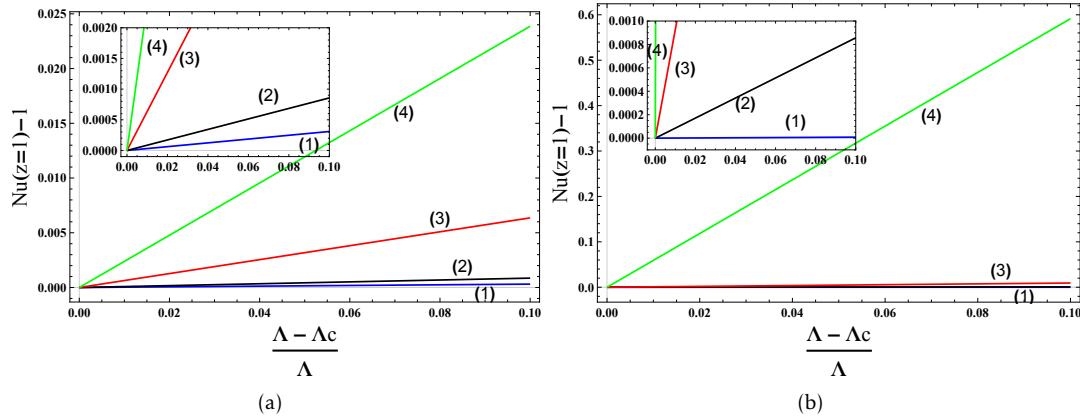


FIGURE 3.12 – Nusselt number at  $z = 1$  versus the relative distance to criticality at  $Pr = 10$ ,  $Le = 100$  and a)  $Ge = 10^{-2}$  with various  $\psi$  : (1) $\psi = 0$ , (2) $\psi = 0.01$ , (3) $\psi = 0.05$ , (4) $\psi = 0.08$ ; (b)  $\psi = 0.01$  with various  $Ge$  : (1) $Ge = 10^{-4}$ , (2) $Ge = 10^{-2}$ , (3) $Ge = 10^{-1}$ , (4) $Ge = 1$

criticality  $\frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c}$  is found to depend weakly on  $Le$ . On the other hand, computations indicate that the effects of  $\psi$  and  $Ge$  are significant. These effects may be appreciated in Figs. 3.12 (a) and (b) for  $Pr = 10$ . The two figures show that  $Nu(z=1) - 1$  increases linearly with  $\frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c}$ . For a given  $\frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c}$ , Fig. 3.12 (a) shows that  $Nu$  is always larger for binary mixtures ( $\psi \neq 0$ ) than for the mono-constituent fluid, as the Soret effect induces a concentration gradient that causes stronger convection. The plots of Fig. 3.12 (b) show that the Nusselt number evaluated at the upper plate increases, with increasing  $Ge$ , i.e., the heat transfer to the upper plate is enhanced with the increase of internal viscous dissipation.

The mixing of the components of a binary fluid mixture may be measured by the mixing number  $M$ , defined by the normalized variance of the concentration field [24] :

$$M = \frac{\sqrt{\langle\langle C^2 \rangle\rangle - \langle\langle C \rangle\rangle^2}}{\sqrt{\langle\langle C_b^2 \rangle\rangle - \langle\langle C_b \rangle\rangle^2}} \quad (3.47)$$

where  $C_b$  denotes the concentration field in the conductive state and  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  denotes the spatial average.

In the conductive basic state, Soret effect generates a vertical stratification of the concentration field and  $M$  is equal to 1. When roll convection develops, the mixing number decreases from  $M = 1$  and the components of the binary fluid are mixed. For a given  $Ge$ , the mixing number depends mainly on the separation ratio and Lewis number of the mixture. According to Fig. 3.13 (a), the increase of the separation ratio  $\psi$  yields a strong drop in  $M$ , i.e., the fluid components are perfectly mixed by increasing the Soret effect. The influence of  $Le$  on the mixing number may be seen in Fig. 3.13 (b) for gases with  $Le = 1$  and  $Le = 2$ , and in Fig. 3.13 (c) for liquids with  $Le = 100$

and  $Le = 200$ . According to these figures, the mixing number is reduced when  $Le$  is increased. Physically, this behavior states that a slight deviation from critical conditions is enough to mix liquids perfectly.

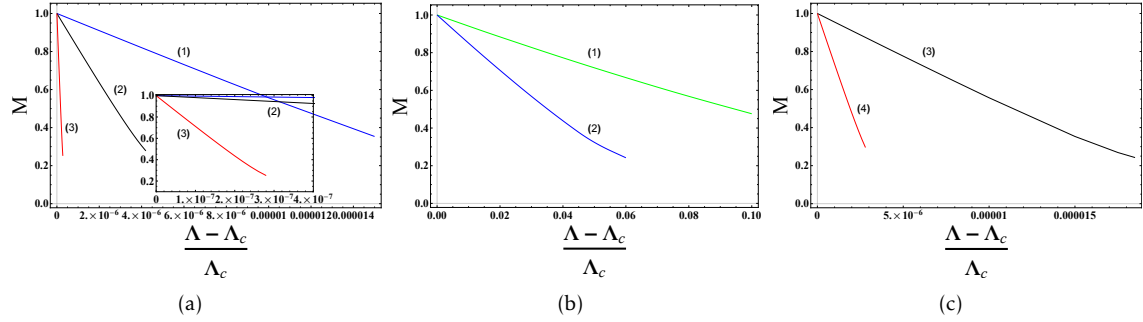


FIGURE 3.13 – Curves of the mixing number  $M$  with  $Ge = 10^{-4}$  for a)  $Pr = 10, Le = 100$  and different separation ratios : (1) $\psi = 0.01$ , (2) $\psi = 0.05$  and (3) $\psi = 0.1$ ; b)  $Pr = 1, \psi = 0.01$  and (1) $Le = 1$ , (2) $Le = 2$ ; c)  $Pr = 10, \psi = 0.01$  and (3) $Le = 100$ , (4) $Le = 200$ .

### 3.6 Conclusions

We studied the nonlinear dynamics of binary fluid mixtures with positive separation ratio when the instability is induced by the interplay of viscous dissipation and thermodiffusion in the presence of a Poiseuille flow. No concentration gradient is imposed externally. However, the thermal gradient triggered by internal viscous dissipation generates a vertical concentration gradient by means of Soret effects. The linear stability analysis of the basic state has been surveyed relying on the previous investigation by Ali Amar et al. [19]. In the present paper, the nonlinear perturbation behavior has been investigated using weakly nonlinear theory. The coefficients of the appropriate cubic Landau amplitude equation that describes the temporal evolution of convection rolls beyond instability threshold have been determined numerically by using a shooting method. For a given viscous dissipation Rayleigh-number  $\Lambda$ , these coefficients depend on the separation ratio  $\psi$ , the Lewis number  $Le$ , the Gebhart number  $Ge$  which measures the nonlinear contribution of internal viscous dissipation and Prandtl number  $Pr$ . The effects of these dimensionless parameters on the nonlinear dynamics of binary fluid convection have been discerned. The main results obtained through this analysis are the following :

- The nonlinear correction to the conductive basic state induces a stabilizing/destabilizing effect depending on the separation ratio  $\psi$  and  $Ge$ . For given separation ratio  $\psi$ , the nonlinear correction contributes to stabilize (destabilize) the conductive state for relatively small values (high values) of the viscous dissipation parameter  $Ge$ . The stabilizing (destabilizing) effect of the nonlinearities may be considered as a precursor to the emergence of a supercritical (subcritical) bifurcation.
- In a given binary liquid, there exists a tricritical value  $Ge^*$  of Gebhart number, such that a supercritical bifurcation happens when  $Ge < Ge^*$  and a subcritical bifurcation otherwise. A fit of the numerical results yields the expression of the tricritical value  $Ge^*$  as a function of  $\psi$ .
- The equilibrium amplitude of convection increases with the increase of  $\psi$ ,  $Le$  and  $Ge$ . The spatial structure of the total disturbed isolines are perfectly symmetric with respect to the mid-plane for one component fluid, while the core of the convective cells moves upwards and

deforms for binary fluids.

- The average heat transfer is found to depend vertically with a maximum located at the upper boundary and is enhanced for binary liquid mixtures with respect to a mono-constituent fluid. The Nusselt number, when quantified in the upper boundary increases strongly as the viscous dissipation effect becomes large.

- The mixing number is reduced for high  $Le$ , i.e., when the heat diffusion dominates concentration diffusivity. The drop of mixing number is significant with the increase of  $\psi$ . This means that one can mix the fluid components perfectly by increasing the Soret effect.

In this paper, we restricted the weakly nonlinear analysis to binary fluid mixtures with positive separation ratio and finite wavelength instability. We currently develop the nonlinear analysis to infinite-wavelength instability. However, it would be desirable to extend the weakly nonlinear approach to the traveling-wave and the standing-wave convection, which may be triggered for binary fluid mixtures with negative separation ratio.

## Références

- [1] M. RAHMAN et M. SAGHIR, « Thermodiffusion or Soret effect : Historical review », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 73, p. 693-705, 2014.
- [2] W. KÖHLER et K. I. MOROZOV, « The soret effect in liquid mixtures—a review », *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, t. 41, n° 3, p. 151-197, 2016.
- [3] D. A. NIELD, A. BEJAN et al., *Convection in porous media*. Springer, 2006, t. 3.
- [4] P. KOLODNER, H. WILLIAMS et C. MOE, « Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions », *The Journal of chemical physics*, t. 88, n° 10, p. 6512-6524, 1988.
- [5] J. HU, X. YIN, D. HENRY et H. B. HADID, « Spatiotemporal evolution of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect under initial pulselike disturbances », *Physical Review E*, t. 80, n° 2, p. 026 312, 2009.
- [6] C.-H. LAMARQUE, J.-M. MALASOMA et M. OUARAZI, « Chaos in the convective flow of a fluid mixture in a porous medium », *Nonlinear Dynamics*, t. 15, p. 83-102, 1998.
- [7] K. SIOUD, A. ABDENNADHER, S. KADDECHE, M. C. CHARRIER-MOJTABI et A. MOJTABI, « Soret-Driven Convection Inside Concentric Porous Spheres Saturated by Binary Fluid : Comparison with Parallelepipedic Vertical Column », *Transport in Porous Media*, t. 145, n° 3, p. 635-651, 2022.
- [8] J. DUTRIEUX, J. PLATTEN, G. CHAVEPEYER et M. BOU-ALI, « On the measurement of positive Soret coefficients », *The Journal of Physical Chemistry B*, t. 106, n° 23, p. 6104-6114, 2002.
- [9] I. LIZARRAGA, F. CROCCOLO, H. BATALLER et M. MOUNIR BOU-ALI, « Soret coefficient of the n-dodecane-n-hexane binary mixture under high pressure », *The European Physical Journal E*, t. 40, p. 1-9, 2017.
- [10] U. AL-MUBAIYEDH, R. SURESHKUMAR et B. KHOMAMI, « The effect of viscous heating on the stability of Taylor-Couette flow », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 462, p. 111-132, 2002.
- [11] J. M. WHITE et S. J. MULLER, « Experimental studies on the stability of Newtonian Taylor-Couette flow in the presence of viscous heating », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 462, p. 133-159, 2002.
- [12] A. BARLETTA, « On the thermal instability induced by viscous dissipation », *International Journal of Thermal Sciences*, t. 88, p. 238-247, 2015.

- [13] Y. REQUILÉ, S. HIRATA et M. OUARZAZI, « Viscous dissipation effects on the linear stability of Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette convection », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 146, p. 118-134, 2020.
- [14] A. BARLETTA et D. NIELD, « Convection-dissipation instability in the horizontal plane Couette flow of a highly viscous fluid », *Journal of fluid mechanics*, t. 662, p. 475-492, 2010.
- [15] A. BARLETTA, M. CELLI et D. NIELD, « On the onset of dissipation thermal instability for the Poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel », *Journal of fluid mechanics*, t. 681, p. 499-514, 2011.
- [16] Y. REQUILÉ, S. HIRATA, M. OUARZAZI et A. BARLETTA, « Weakly nonlinear analysis of viscous dissipation thermal instability in plane Poiseuille and plane Couette flows », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 886, A26, 2020.
- [17] A. SENE, S. BEN SADEK, S. C. HIRATA et M. N. OUARZAZI, « Onset of Viscous Dissipation Instability in Plane Couette Flow with Temperature-Dependent Viscosity », *Energies*, t. 16, n° 10, p. 4172, 2023.
- [18] K. ROY et P. MURTHY, « Soret effect on the double diffusive convection instability due to viscous dissipation in a horizontal porous channel », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 91, p. 700-710, 2015.
- [19] K. ALI AMAR, S. C. HIRATA et M. N. OUARZAZI, « Soret effect on the onset of viscous dissipation thermal instability for Poiseuille flows in binary mixtures », *Physics of Fluids*, t. 34, n° 11, 2022.
- [20] M. BOUTERAA, C. NOUAR, E. PLAUT, C. MÉTIVIER et A. KALCK, « Weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 767, p. 696-734, 2015.
- [21] M. OUARZAZI, S. C. HIRATA, A. BARLETTA et M. CELLI, « Finite amplitude convection and heat transfer in inclined porous layer using a thermal non-equilibrium model », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 113, p. 399-410, 2017.
- [22] P. V. BRANDÃO et M. N. OUARZAZI, « Darcy-Carreau model and nonlinear natural convection for pseudoplastic and dilatant fluids in porous media », *Transport in Porous Media*, t. 136, p. 521-539, 2021.
- [23] W. SCHÖPF et W. ZIMMERMANN, « Convection in binary fluids : Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations », *Physical Review E*, t. 47, n° 3, p. 1739, 1993.
- [24] R. UMLA, M. AUGUSTIN, B. HUKÉ et M. LUECKE, « Roll convection of binary fluid mixtures in porous media », *Journal of fluid mechanics*, t. 649, p. 165-186, 2010.

# Hopf bifurcation from uni-cellular to multi-cellular flows induced by viscous heating in Poiseuille flow of binary mixtures

## Sommaire

---

<b>4.1 abstract</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>4.2 Introduction</b> . . . . .	<b>90</b>
<b>4.3 Mathematical model and unperturbed basic state</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>4.4 Analytical solution of the monocellular flow and its properties</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>4.5 Secondary bifurcation : loss of stability of the monocellular flow</b> . . . . .	<b>100</b>
4.5.1 Perturbation equations . . . . .	100
4.5.2 Longitudinal rolls . . . . .	101
<b>4.6 Secondary instability results</b> . . . . .	<b>102</b>
4.6.1 Hopf bifurcation with internal heating from below : case A . . . . .	102
4.6.2 Hopf bifurcation with internal heating from above : case B . . . . .	103
<b>4.7 Practical consequences of the obtained theoretical results</b> . . . . .	<b>103</b>
4.7.1 Measure of thermodiffusion coefficient : comparison with Rayleigh-Bénard convection . . . . .	103
4.7.2 Separation of species . . . . .	106
<b>4.8 Conclusions</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>Références</b> . . . . .	<b>109</b>

---

## 4.1 abstract

Instabilities induced both by viscous dissipation and thermodiffusion in a Poiseuille flow of a binary mixture were analysed by Ali Amar et al. (Phys. Fluids, vol. 34, 2022, pp. 114101). Linear

stability analysis showed that a stationary long-wave instability may develop at the convection onset for a certain range of parameters. The present investigation aims to determine the nature of the secondary instability in the supercritical conditions. Two sets of boundary conditions are considered : in case A, the lower boundary is considered adiabatic, while the upper boundary is isothermal, and inversely for case B. Both cases have no-slip boundaries and no mass flux through them. Based on the parallel flow approximation in a cavity of large aspect ratio, we obtain an analytical solution of a uni-cellular flow as a function of the dimensionless parameters of the problem. Linear stability analyses are then performed in order to determine the conditions under which a secondary bifurcation sets in. It is found that the uni-cellular flow loses its stability via a Hopf bifurcation giving rise to multi-cellular longitudinal travelling rolls. The influences of the separation ratio, Lewis number and Prandtl number on the secondary bifurcation properties are analyzed for both sets of boundary conditions A and B. The observability of such instability in real binary liquids is discussed and a protocol exploiting the coupling between convection and thermo-diffusion is proposed in order to determine the Soret parameter. Finally, the impact of the Soret effects on the species separation is examined in the parameter space where the uni-cellular flow is stable.

## 4.2 Introduction

Buoyancy-driven convective shear-flows of binary fluid mixtures is a paradigm for many natural phenomena and technological applications such as chemical vapor deposition (CVD), cooling of the electronic equipments, and natural hydrocarbon reservoirs, to name a few. Most of the studies on this field dealt with Rayleigh-Bénard type of systems, where a temperature difference is imposed on the external boundaries. Recently, a number of investigations [1]-[8] considered shear-flows where the unstable thermal gradients appear solely due to the volumetric heating caused by viscous dissipation. The present work belongs to this second category.

Viscous dissipation is known to be a non-negligible effect in geophysical flows with large characteristic lengths [9], but not only. As pointed out by Magyari et al. [10], many natural convection processes could be qualitatively altered by viscous dissipation effects even when they appear negligible. Industrial applications include the internal cooling of turbine blades and particle bed nuclear reactors [11]. For this reason, there has been much interest in how the presence of viscous dissipation affects mixed convective flows either in clear fluid layers or in porous media [12], [13]. However, few works considered dissipation instabilities in binary fluids [14]-[16]. In our previous study dealing with dissipation-induced instabilities in a Poiseuille flow of a binary fluid [15], two cases were considered, namely cases A (adiabatic lower wall, isothermal upper wall) and B (isothermal lower wall, adiabatic upper wall). It was shown that a negative (positive) basic temperature vertical gradient exists for case A (case B) due to viscous heating. A vertical concentration stratification is then generated by thermodiffusion (or the Soret effect, where the temperature gradient applied to the binary fluid induces a mass fraction gradient). The strength of this effect is measured by the separation ratio  $\psi$ , a dimensionless parameter proportional to the Soret coefficient which represents the ratio between mass to temperature contribution to buoyancy forces. The separation ratio can be either positive or negative, according to the thermo-physical properties of the fluid mixture. In the case of a positive  $\psi$ , the heavier component of the fluid mixture is driven in the direction of lower temperatures. For negative  $\psi$ , the opposite situation occurs. In [15], a linear stability analysis of cases A and B has been carried out by solving the eigenvalue problem numerically for arbitrary-oriented convective rolls. The most unstable disturbances were found to be longitudinal rolls (LRs), i.e. convective structures with axes aligned with the main Poiseuille flow. For common fluids where density is a decreasing

function of temperature, the following results were obtained :

- Case A : The basic temperature gradient is destabilizing, while the generated concentration gradient is destabilizing for  $\psi > 0$  and stabilizing for  $\psi < 0$ . For positive  $\psi$ , the first bifurcation is stationary, and the Soret effect precipitates the appearance of stationary LRs. Moreover, a drastic drop of the critical wave number is observed for a certain range of parameters such that it becomes zero if the separation ratio exceeds a particular value  $\psi_{mono}$ . For negative values of  $\psi$ , the system may exhibit either Hopf or stationary bifurcations with finite wave numbers depending on the value of  $\psi$ .
- Case B : The temperature gradient is stabilizing. Hence, the instability may develop only for  $\psi < 0$ , i.e., if the densest component of the mixture migrates toward the hot upper wall. In this situation, it was shown that the emerging LRs are stationary with zero wave number.

Rolls with vanishing wave number (or equivalently with infinite wavelength) mean that the flow is structured as a monocellular flow in a real bounded channel. In the present paper, analytical solutions for finite amplitude convection are derived on the basis of the parallel flow approximation. This approximation has been used with success by many authors such as Kimura et al. [17], Mamou et al. ([18], [19]), Elhajjar et al. [20] and Delenda et al. [21] to predict the flow behaviour in the case of a long-wave instability. Following our study concerning the onset of convection, we now analyse the stability of the monocellular flow, by taking into account the combined influence of thermodiffusion and viscous heating. As a first step, we recall in section 4.3 the mathematical model and the main results of the first bifurcation. In section 4.4, we use the parallel flow approximation to derive analytical solutions for the monocellular flow of cases A and B. Then, sections 4.5 and 4.6 are dedicated to the stability analysis of the monocellular flow, and the secondary bifurcation thresholds are obtained for a wide range of separation ratios, Lewis and Prandtl numbers. In section 4.7, we present some practical implications of the obtained theoretical results, namely a way to determine the Soret coefficient and the ability to separate the constituents of binary mixtures and finally some conclusions are drawn in section 4.8.

### 4.3 Mathematical model and unperturbed basic state

Let us consider a plane Poiseuille flow of a binary fluid mixture flowing through a cavity of height  $H$ , a thickness  $l$  and infinite extent in the  $x$  direction. Both lateral vertical walls are assumed impermeable and adiabatic, while, as in [15], two thermal different boundary conditions are considered for the impermeable horizontal walls. In case A, the lower wall is adiabatic while the upper wall is maintained at a temperature  $T^* = T_0^*$ , and inversely for case B. In both cases, no slip and no mass flux conditions are imposed on the walls.

Velocity  $\vec{u}^*$ , hydrostatic pressure  $P^*$ , temperature  $T^*$ , and concentration of the densest component of the binary fluid  $C^*$  can be written in dimensionless form by adopting the following transformations

$$\begin{aligned} (x^*, y^*, z^*) &= H (x, y, z), & t^* &= \frac{H^2}{\kappa} t, & \vec{u}^* &= \frac{\kappa}{H} \vec{u}, \\ P^* &= \frac{\mu\kappa}{H^2} P, & T^* - T_0^* &= \frac{\nu\kappa}{\beta_T g H^3} T, & C^* - C_0^* &= \frac{\nu\kappa}{\beta_c g H^3} C \end{aligned}$$

where asterisks denote dimensional quantities,  $\mu$  and  $\nu$  are respectively the dynamic and kinematic viscosities,  $\kappa$  is the thermal diffusivity,  $\beta_T$  and  $\beta_C$  are respectively the thermal and solutal



expansion coefficients,  $g$  is the modulus of the gravitational acceleration, and  $C_0^*$  is the mass fraction of the densest component corresponding to the temperature  $T_0^*$ .

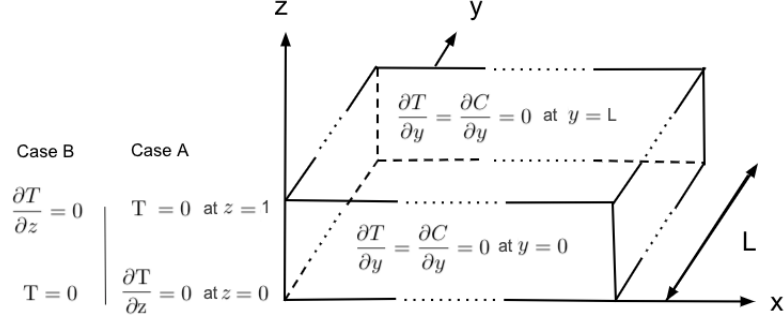


FIGURE 4.1 – Representative diagram of the problem with associated boundary conditions

According to the Boussinesq approximation and neglecting the Dufour effect, the dimensionless governing equations expressing the local balances of mass, momentum, energy, and concentration can be written as [15]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\nabla P + (T - C) \vec{e}_z + \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla}^2 T + 2Ge \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = \frac{1}{Le} (\vec{\nabla}^2 C + \psi \vec{\nabla}^2 T) \quad (4.4)$$

In the above equations,  $\vec{e}_z$  is the unit vector along the  $z$ -axis and  $\overline{\overline{D}}$  is the strain tensor. The dimensionless boundary conditions for cases A and B are

$$\vec{u} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \text{ and } y = 0, L \quad (4.5)$$

$$\text{Case A: } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } T = 0 \text{ at } z = 1 \quad (4.6)$$

$$\text{Case B: } T = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 1 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \psi \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0, 1 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, L \quad (4.9)$$

The Prandtl number, the Lewis number, the separation ratio, the Gebhart number and the lateral aspect ratio are given by

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Le = \frac{\kappa}{D}, \quad \psi = S_T \frac{\beta_C C_0^* (1 - C_0^*)}{\beta_T}, \quad Ge = \frac{\beta_T g H}{c_v}, \quad L = \frac{l}{H} \quad (4.10)$$

where  $c_v$  is the heat capacity per unit mass, and  $S_T = \frac{D_T}{D}$  is the Soret coefficient (with  $D$ ,  $D_T$  the solutal diffusion coefficient and the thermodiffusion coefficient, respectively). The separation ratio  $\psi$  represents the ratio of mass to temperature contribution to buoyancy forces. It can be either positive or negative according to the sign of the Soret coefficient  $S_T$ , and is zero in the case of a pure fluid. The Gebhart number  $Ge$ , which measures the intensity of viscous dissipation, is proportional to the system height  $H$ . For most ordinary engineering devices,  $Ge$  is usually of the order  $10^{-4}$ , while it may be large in geophysical systems (see Gebhart [9]).

System (4.1)-(4.4) subjected to boundary conditions (4.5)-(4.9) admits a base stationary solution which consists of a Poiseuille flow in the  $x$ -direction and a combination of vertical nonlinear thermal and concentration stratifications. In dimensionless form it writes

$$\vec{u}_b(z) = Pe f(z) \vec{e}_x, \quad (4.11)$$

$$T_b(z) = \Lambda g(z), \quad (4.12)$$

$$C_b(z) = -\psi T_b(z), \quad (4.13)$$

$$P_b = \Lambda(1 + \psi) q(z) + 12 Pe (z - x), \quad (4.14)$$

where  $\vec{e}_x$  is the unit vector along the  $x$ -axis,  $Pe = U_a H / \kappa$  is the Péclet number based on the average velocity  $U_a$ , and the dimensionless parameter  $\Lambda$  is the viscous dissipation Rayleigh number defined by

$$\Lambda = Pe^2 Ge = \frac{\beta_T g H^3 \Delta T_{vd}^*}{\nu \kappa} \quad (4.15)$$

with  $\Delta T_{vd}^*$  a temperature difference generated by viscous dissipation in the presence of the horizontal through-flow and reads,

$$\Delta T_{vd}^* = \frac{U_a^2 \nu}{c_v \kappa}. \quad (4.16)$$

. We note that the obtained basic thermal field  $T_b(z)$  is independent of the thermodiffusion, while the basic mass fraction field  $C_b(z)$  is obtained as the product of the basic temperature field and the separation ratio. Functions  $f(z)$ ,  $g(z)$  for cases A and B, and  $q(z)$  are defined as follows :

$$f(z) = 6z(1 - z),$$

$$\text{Case A : } g(z) = 6(1 - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4),$$

$$q(z) = -6\left(z - z^3 + z^4 - \frac{2}{5}z^5\right)$$

$$\text{Case B : } g(z) = 6(2z - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4),$$

$$q(z) = -6\left(z^2 - z^3 + z^4 - \frac{2}{5}z^5\right)$$

As the following analysis is aimed at studying the nonlinear solutions and their stability for binary fluid mixtures with positive separation ratio for case A and with negative separation ratio for case B, we only discuss here the properties of the basic state (4.11)-(4.14) involving these two cases.

A plot of the basic normalized temperature profile  $\frac{T_b(z)}{\Lambda}$  and the normalized concentration  $\frac{C_b(z)}{\Lambda}$  is presented in Fig. 4.2 for the two types of boundary conditions : a) case A with  $\psi > 0$  and b) case B with  $\psi < 0$ . Note that the basic temperature is a nonlinear monotonically decreasing (increasing)

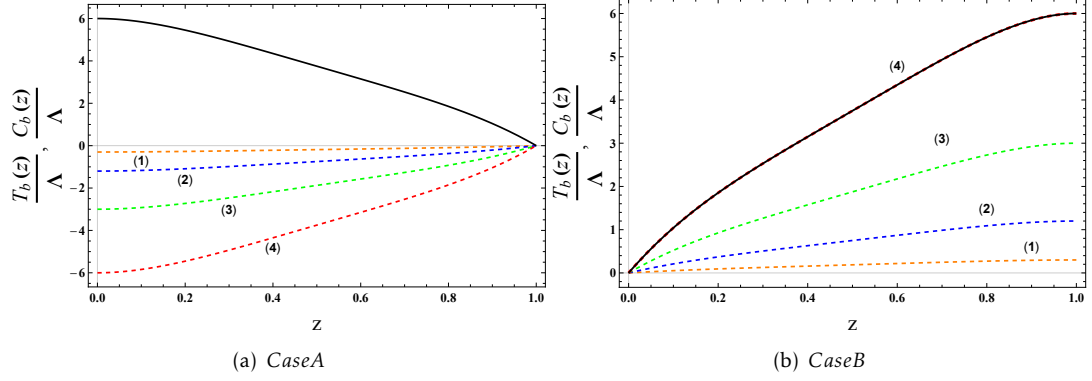


FIGURE 4.2 – Vertical distribution of the basic temperature  $\frac{T_b}{\Lambda}$  (solid line) and the basic concentration  $\frac{C_b}{\Lambda}$  (dashed lines) for (a) case A with (1)  $\psi = 0.05$ , (2)  $\psi = 0.2$ , (3)  $\psi = 0.5$ , (4)  $\psi = 1$  and (b) case B with (1)  $\psi = -0.05$ , (2)  $\psi = -0.2$ , (3)  $\psi = -0.5$ , (4)  $\psi = -1$

function of  $z$  for boundary conditions of case A (case B), while the basic concentration is a nonlinear monotonically increasing function of  $z$  for both types of boundary conditions. The behavior of the basic concentration field for case A (case B) with positive (negative) separation ratio states that the heaviest component of the binary mixture migrates to the upper plate the cold (hot) boundary in case A (case B) under the action of the Soret effect. For both cases under consideration, the basic state may become unstable for a certain parameter range.

The linear stability of the base state (4.11)-(4.14) was studied in [15]. It has been shown that longitudinal rolls are the preferred mode at the convection onset. These patterns can be either stationary or oscillatory, depending on the value of the separation ratio. The linear characteristics of the instability at the onset of convection were obtained. In particular, it has been shown that for boundary conditions of case A, convection appears in the form of stationary infinite wave-length instability if the separation ratio  $\psi$  exceeds a particular value  $\psi_{mono}$  above which the wave number vanishes. On the other hand for case B, it was found that the wave number is zero for all negative values of the separation ratio. For both cases, the zero wave number means that the size of the convective rolls tends to infinity in the ideal situation of an unbounded channel in the  $y$ -direction. In a realistic situation of a laterally bounded channel, convection takes the form of a single-cell structure. The objective now is to determine analytically the properties of the nonlinear solutions corresponding to the emerging uni-cellular flow and investigate their stability numerically.

#### 4.4 Analytical solution of the monocellular flow and its properties

According to the linear stability analysis presented in [15] and discussed in the previous section, for case A with  $\psi > \psi_{mono}$  or case B with  $\psi < 0$ , a stationary bifurcation occurs giving rise to a convective pattern with a zero critical wave-number  $k_c = 0$ . By assuming a large lateral aspect ratio of the cavity  $L \gg 1$  and by using the parallel flow approximation ([17]-[21]) along the  $y$ -direction, where the streamlines are assumed to be parallel to the horizontal walls within

the core region, one may dismiss the vertical component of the velocity vector :

$$\vec{u} = (u(z), v(z), 0) \quad (4.17)$$

The velocity profile along the  $x$ -direction may be written as :

$$u(z) = Pef(z) \quad \text{with} \quad f(z) = 6z(1-z) \quad (4.18)$$

The temperature and the mass fraction are assumed to have the form :

$$T = T(z) \quad (4.19)$$

$$C(y, z) = m \left( y - \frac{A}{2} \right) + \tilde{C}(z) \quad (4.20)$$

where  $m$  is the unknown mass fraction gradient along  $y$  direction. Using the equations (4.17) to (4.20), and after eliminating the pressure in the Navier-Stokes equation (4.2), the following system is obtained for the steady state :

$$\frac{d^3 v}{dz^3} + m = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + Ge \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.22)$$

$$m v - \frac{1}{Le} \frac{d^2}{dz^2} [\tilde{C} + \psi T(z)] = 0 \quad (4.23)$$

The corresponding boundary conditions are :

$$v = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1 \quad (4.24)$$

$$\text{Case A : } \frac{dT}{dz} = \frac{d\tilde{C}}{dz} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad T = \frac{d\tilde{C}}{dz} + \psi \frac{dT}{dz} = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (4.25)$$

$$\text{Case B : } T = \frac{d\tilde{C}}{dz} + \psi \frac{dT}{dz} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dT}{dz} = \frac{d\tilde{C}}{dz} = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (4.26)$$

Note that the boundary conditions (4.5) and (4.9) are only used to determine the mass fraction gradient  $m$  in the  $y$ -direction. The analytical solution in the central region of the domain, which satisfies the parallel flow approximation is strictly non valid in the vicinity of the vertical walls. Further than the no-slip conditions imposed at the horizontal walls Eq. (4.24), an additional condition of zero mass flow rate through any cross-section perpendicular to the  $y$ -axis is used to solve Eq. (4.21),

$$\int_0^1 v dz = 0. \quad (4.27)$$

applying the boundary conditions, one may find an analytical solution for the monocellular flow consisting of a cubic velocity profile of the form :

$$v(z) = \frac{m}{6} \left[ -z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z \right] \quad (4.28)$$

The vertical thermal stratification depends on the thermal boundary conditions, and is made up

of the sum of a conductive  $T_{cond}(z)$  and a convective profile.

— For case A :

$$T(z) = \underbrace{-6\Lambda \left[ -1 + 3z^2 - 4z^3 + 2z^4 \right]}_{T_{cond}(z)} - \frac{Gem^2}{4} \left[ -\frac{1}{360} + \frac{1}{72}z^2 - \frac{1}{18}z^3 + \frac{1}{9}z^4 - \frac{1}{10}z^5 + \frac{1}{30}z^6 \right] \quad (4.29)$$

— For case B :

$$T(z) = \underbrace{-6\Lambda \left[ -2z + 3z^2 - 4z^3 + 2z^4 \right]}_{T_{cond}(z)} - \frac{Gem^2}{4} \left[ -\frac{1}{180}z + \frac{1}{72}z^2 - \frac{1}{18}z^3 + \frac{1}{9}z^4 - \frac{1}{10}z^5 + \frac{1}{30}z^6 \right] \quad (4.30)$$

Finally, a vertical as well as a horizontal stratification is obtained for the concentration field :

$$C(y, z) = m \left[ y - \frac{A}{2} \right] - \underbrace{\frac{Lem^2}{6} \left[ +\frac{1}{12}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5 \right]}_{\tilde{C}(z)} - \psi T(z). \quad (4.31)$$

In order to determine the mass fraction gradient  $m$ , we perform a solutal balance over a control volume that lays on horizontal boundaries and one of the two vertical walls delineated by an arbitrary cross-section of the cavity. Applying the boundary conditions (4.5)-(4.9) yields a zero mass flux of the constituent of mass fraction  $C$  through any vertical section of the cavity perpendicular to the  $y$  axis :

$$\int_0^1 \left( C(y, z) v(z) - \frac{1}{Le} \frac{\partial (C(y, z) + \psi T(z))}{\partial y} \right) dz = 0 \quad (4.32)$$

This latter assumption leads to the expression of  $m$  for the two cases A and B as a function of the dimensionless parameters  $\psi$ ,  $Le$  and  $Ge$ ,

$$m = \pm 720 \sqrt{\frac{\left( -\frac{2}{Le} + \frac{\Lambda\psi}{60} \right)}{\left( \frac{20}{7}Le - Ge\psi \right)}} \quad (4.33)$$

for case A while for case B,  $m$  is given by the above expression with the opposite sign of  $\psi$ .

The concentration gradient  $m$  can be either negative or positive according to whether the flow is clockwise or counter-clockwise and both solutions are possible depending on the initial conditions.

It is interesting to remark that for liquid mixtures, the Lewis number is large ( $Le \gg 1$ ), and Gebhart number is very small  $Ge \ll 1$  in practical situations for laboratory experiments or is of order one in very large scale systems. In that case, as  $\frac{20}{7}Le \gg Ge\psi$ , a useful simple analytical

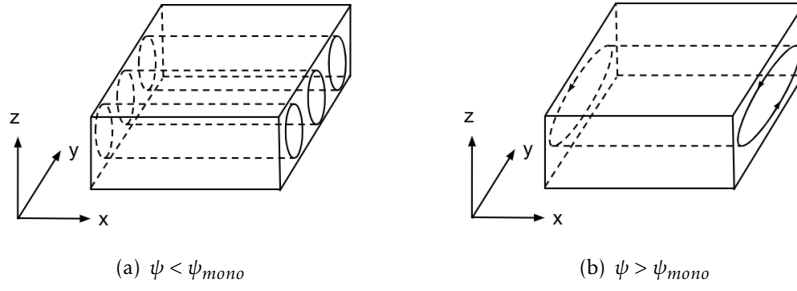


FIGURE 4.3 – Representative diagram of the two flow regions : (a) multicellular flow, and (b) monocellular flow.

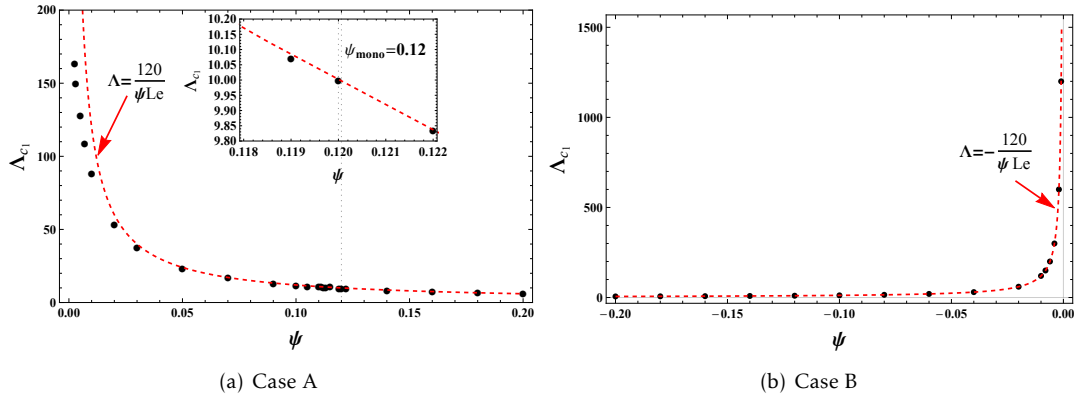


FIGURE 4.4 – Comparison between the primary bifurcation thresholds obtained analytically (dashed line) and numerically (dots) with  $Le = 100$  and  $Pr = 10$ .

expression may be obtained for the mass fraction gradient  $m$  given by (4.33),

$$m = \pm 55 \sqrt{\frac{|\psi|}{Le}} \sqrt{\Lambda - \Lambda_c} \quad \text{with } \Lambda > \Lambda_c \quad (4.34)$$

for cases A and B.

At the convection onset, where  $m = 0$ , the critical values are readily obtained,

$$\Lambda_c = \frac{\beta_T g H^3 \Delta T_{C(VD)}^*}{\nu \kappa} = \frac{120}{Le |\psi|} \quad (4.35)$$

Results from the linear stability analysis obtained with a shooting method [15] show that two convective patterns may exist, depending on the value of  $\psi$ . For  $\psi < \psi_{mono}$ , a multicellular flow regime is observed, as sketched in Fig. 4.3(a). On the other hand, for  $\psi > \psi_{mono}$ , the most unstable pattern is in the form of a monocellular flow, as represented in Fig. 4.3(b). In order to compare the numerical results with the analytical predictions using the parallel flow approximation, Fig. 4.4 shows the linear stability analysis results for cases A and B at  $Le = 100$  and  $Pr = 10$  with dots. Dashed lines represent solutions obtained analytically by using the parallel flow approximation.

From the zoom in the inset of Fig. 4.4(a) one may note a very good agreement of the curves for  $\psi \geq \psi_{mono}(Le = 100) = 0.12$ , region where the monocellular flow is expected by linear stability theory for case A. Good agreement is also observed in Fig. 4.4(b), corresponding to case B for which linear stability predicted long-wave instability for all negative values of  $\psi$ .

The linear stability analysis conducted in [15] considered a constraint involving the hydrodynamic Tollmien-Schlichting instability for the observability of the viscous dissipation instability in laboratory experiments. In an ideal situation, the Reynolds number should be lower than the critical Reynolds number at the onset of hydrodynamic instability. Orszag [22] showed that the plane Poiseuille flow becomes linearly unstable at  $Re = 5772$  ( $Re$  is based on the channel half-width and the centreline velocity). Regarding the dimensionless quantities employed in the present study, the critical Reynolds number at the onset of such hydrodynamic Tollmien-Schlichting instability is  $Re^{TS} = 7696$ . Therefore, it is interesting to present stability results in terms of the critical Reynolds number, that can be easily evaluated from the relationship

$$Re_{c1} = \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{\Lambda_c}{Ge}} = \frac{1}{Pr\sqrt{Ge}} \sqrt{\frac{120}{Le|\psi|}}$$

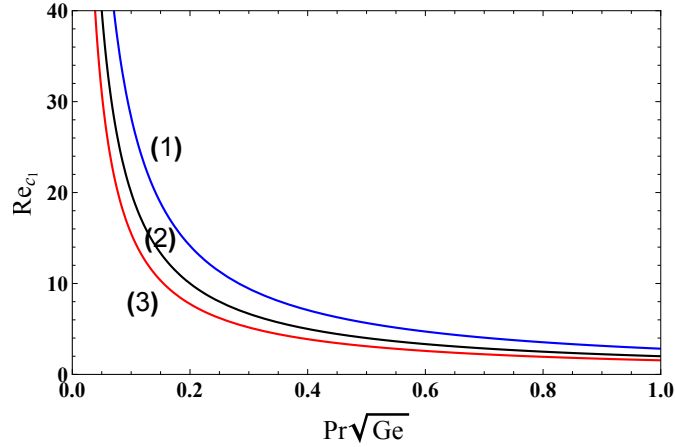


FIGURE 4.5 – Primary critical Reynolds number  $Re_{c1}$  as a function of  $Pr\sqrt{Ge}$  in case A with  $Le = 100$  for : (1)  $\psi = 0.15$ , (2)  $\psi = 0.3$ , (3)  $\psi = 0.5$

Figure 4.5 shows the variation of  $Re_c$  with  $Pr\sqrt{Ge}$  for  $Le = 100$  and different values of  $\psi$ . It is clear that the critical Reynolds number  $Re_{c1}$  is smaller than  $Re^{TS} = 7696$ , provided that the product  $Pr\sqrt{Ge}$  is higher than, say 0.1, a condition that is satisfied specially for highly viscous binary mixtures.

The velocity of the monocellular flow has asymmetric vertical distribution with a zero mean along any vertical section and increases when moving away from the convection onset. The increase of the velocity  $v(z)$  is more important for small values of the Lewis number. The temperature and concentration profiles of the monocellular flow of case A for  $\psi = 0.2$  and case B for  $\psi = -0.2$  can be appreciated in Fig. 4.6, for different values of  $\Lambda \geq \Lambda_c$  at  $Le = 100$  and  $Ge = 10^{-4}$ . For case A, one can observe from Fig. 4.6(a) that the negative vertical thermal gradient increases as one moves away from the critical threshold, meaning that the monocellular flow destabilizes the conductive state in the supercritical regime. Fig. 4.6(c) shows the vertical distribution of the concentration field both at the threshold of convection  $Re_c$  and beyond it. As it can be seen from this

figure, the effect of convection is to reduce the concentration of the heavier component of the mixture, but unequally in the vertical direction. Contrarily to case A, for case B and as shown in Fig. 4.6(b), the temperature of the upper plate increases with the distance to criticality. As a consequence, the migration of the heavier component of the mixture towards the hot boundary (the upper boundary in case B) becomes more effective under the effect of monocellular convection, as it can be observed in Fig. 4.6(d).

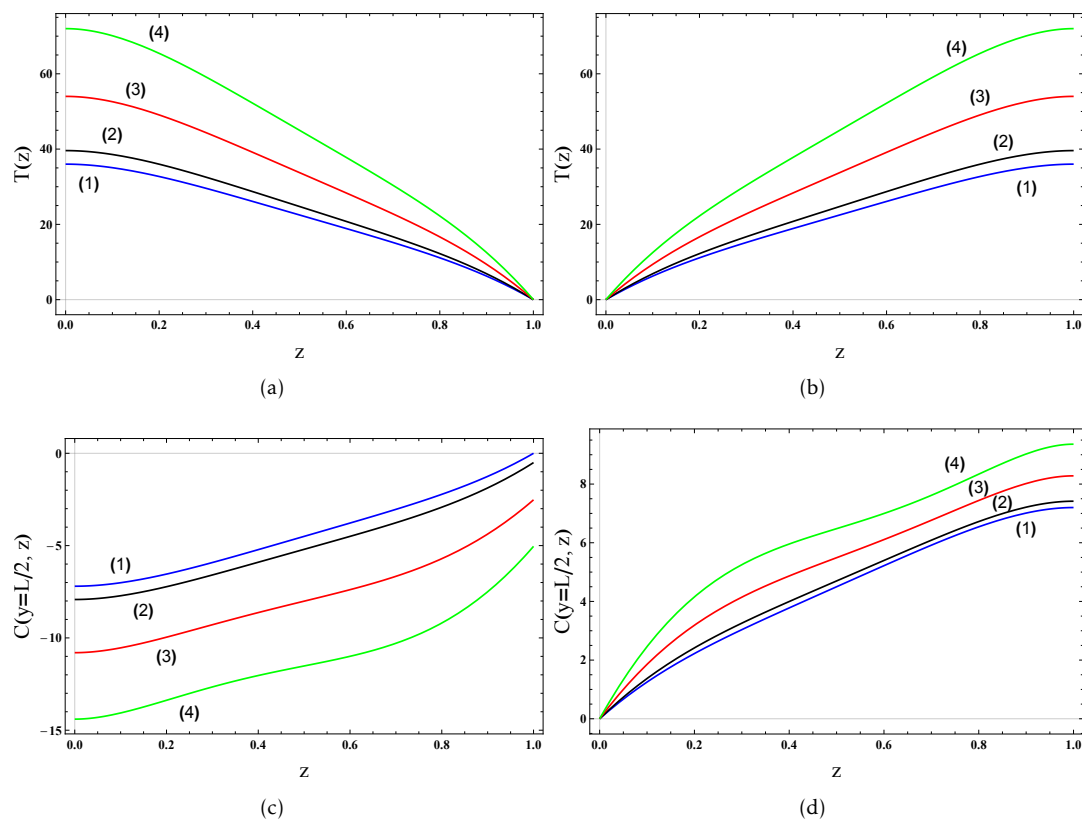


FIGURE 4.6 – Vertical distribution of the monocellular temperature and concentration at the center of the cavity obtained at  $Le = 100, Pr = 10, Ge = 10^{-4}$  and : (1) $\Lambda = \Lambda_c$ , (2) $\Lambda = 1.1\Lambda_c$ , (3) $\Lambda = 1.15\Lambda_c$ , (4) $\Lambda = 2\Lambda_c$ . First column (Case A with  $\psi = 0.2$ ) and second column (Case B with  $\psi = -0.2$ )



## 4.5 Secondary bifurcation : loss of stability of the monocellular flow

### 4.5.1 Perturbation equations

Let us now study the loss of stability of the monocellular flow. To do so, we superimpose infinitesimal perturbations to the basic solution (4.28)-(4.31).

$$\{\vec{u}, T, C\} = \{\vec{u}_b(z), T_b(z), C_b(z)\} + \epsilon \{\vec{U}(x, y, t), \theta(x, y, t), c(x, y, t)\} \quad (4.36)$$

Where  $\epsilon$  is a small perturbation parameter. The perturbation of the velocity field  $\vec{U}$  has Cartesian components  $(U, V, W)$ . In order to avoid the coupling of the temperature and concentration fields in the boundary conditions, a new variable is introduced :  $\eta = c + \psi\theta$ . Solutions are sought in the form of Fourier modes of the form  $e^{i(k_x x + k_y y)} e^{(\sigma - i\omega)t}$ , where  $k_x = k \cos \phi$  and  $k_y = k \sin \phi$  are the components of the wave vector,  $\sigma$  is the temporal growth of the perturbation, and  $\omega$  its oscillation frequency. By considering neutral stability conditions ( $\sigma = 0$ ), the following linear system is obtained

$$ik(\cos \phi U_n + \sin \phi V_n) + DW_n = 0 \quad (4.37)$$

$$i\omega U_n(z) - ik \cos \phi Pe f(z) U_n(z) - ik \sin \phi v_b(z) U_n - Pe f'(z) W_n + ik \cos \phi P_n + Pr [(D^2 - k^2)U_n] = 0, \quad (4.38)$$

$$i\omega V_n(z) - ik \cos \phi Pe f(z) V_n(z) - ik v_b(z) \sin \phi V_n(z) - \frac{\partial v_b}{\partial z} W + ik \sin \phi P_n + Pr [(D^2 - k^2)V_n] = 0, \quad (4.39)$$

$$i\omega W_n(z) - ik \cos \phi Pe f(z) W_n(z) - ik \sin \phi v_b(z) W_n + DP_n + Pr [(D^2 - k^2)W_n + \theta_n(1 + \psi) - \eta_n] = 0, \quad (4.40)$$

$$i\omega \theta_n(z) - ik \cos \phi Pe f(z) \theta_n(z) - ik \sin \phi v_b(z) \theta_n - W_n(z) \frac{\partial T_b}{\partial z} + (D^2 - k^2)\theta_n(z) + 2 Ge [Pe f'(z) (DU_n(z) + ik \cos \phi W_n(z)) + \frac{\partial v_b}{\partial z} (DV_n(z) + ik \sin \phi W_n(z))] = 0, \quad (4.41)$$

$$i\omega (\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) - ik \cos \phi Pe f(z)(\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) - ik \sin \phi v_b(z) (\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) - W_n(z) \frac{\partial C_b}{\partial z} - V_n \frac{\partial C_b}{\partial y} + \frac{1}{Le} (D^2 - k^2)\eta_n(z) = 0, \quad (4.42)$$

where subscript  $n$  denotes the disturbance amplitude,  $D = \frac{\partial}{\partial z}$  and  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . The boundary conditions become

$$\begin{aligned} \vec{U}_n &= 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ \text{Case A : } D\theta_n &= 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ \text{Case B : } \theta_n &= 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ D\eta_n &= 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{aligned} \quad (4.43)$$

### 4.5.2 Longitudinal rolls

As LR are the preferred mode at the convection onset, we shall study the secondary bifurcation of this type of structures, and the study of transverse and oblique rolls is postponed to a future investigation. The perturbation equations for LR are obtained by taking  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , rescaling the velocity  $U_n = Re \tilde{u}_n$ , and introducing the streamfunction

$$W_n(z) = -ik\Psi_n(z) \text{ and } V_n(z) = D\Psi_n(z),$$

where  $\Psi_n$  is the amplitude of the stream-function perturbation. By doing so, the following linear system is obtained

$$\begin{aligned} i\omega (D^2 - k^2)\Psi_n(z) + Pr [(D^2 - k^2)^2\Psi_n(z) - ik(1 + \psi)\theta_n(z) - ik\eta_n(z)] \\ - v_b(z) ik (D^2 - k^2)\Psi_n(z) + ik D^2 v_b(z) \Psi_n(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} i\omega \theta_n(z) - v_b(z) ik \theta_n(z) + ik DT_b(z) \Psi_n(z) + (D^2 - k^2)\theta_n(z) \\ + 2 \left[ \frac{\Lambda}{Pr} f'(z) D\tilde{u}_n(z) + Dv_b(z) (D^2 - k^2)\Psi_n(z) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$i\omega \tilde{u}_n - v_b(z) ik \tilde{u}_n + ik Pr f'(z) \Psi_n(z) + Pr (D^2 - k^2)\tilde{u}_n(z) = 0 \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} i\omega (\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) + ik DC_b(y, z) \Psi_n(z) - v_b(z) ik (\eta_n(z) - \psi\theta_n(z)) - \frac{\partial C_b}{\partial y} D\Psi_n(z) \\ + \frac{1}{Le} (D^2 - k^2)\eta_n(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

As highlighted in previous works [15], the Gebhart and Péclet numbers only appear in a combined form for LR. This allows for the use of the control parameter  $\Lambda = Ge Pe^2$ , which can be seen as a viscous dissipation Rayleigh number.

The boundary conditions become

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n = \Psi_n = D\Psi_n = 0 \text{ at } z = 0, 1 \\ \text{Case A : } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ \text{Case B : } \theta_n = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } D\theta_n = 0 \text{ at } z = 1 \\ D\eta_n = 0 \text{ at } z = 0, 1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

The eigenvalues of system (4.44)-(4.48) are solved numerically through a shooting method implemented in the Mathematica Wolfram Research environment.

## 4.6 Secondary instability results

### 4.6.1 Hopf bifurcation with internal heating from below : case A

Let us first focus our attention on the stability of the monocellular flow of case A, which occurs for positive values of the separation ratio  $\psi$ . For the range of parameters studied in the present analysis, the monocellular flow always loses its stability to multicellular longitudinal rolls via a Hopf bifurcation. Fig. 4.7 presents successively the critical thresholds for the secondary bifurcation  $\Lambda_{c2}$ , the corresponding wavenumbers  $k_{c2}$  and frequencies  $\omega_{c2}$ , as functions of  $\psi (> \psi_{mono})$ , for three different values of the Lewis number. Contrarily to the first bifurcation results

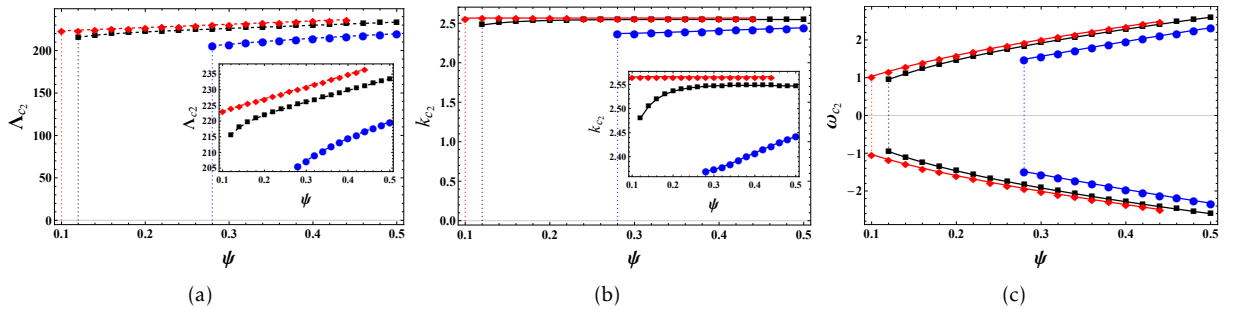


FIGURE 4.7 – Critical values obtained for case A. (a)  $\Lambda_{c2}$ , (b)  $k_{c2}$ , (c)  $\omega_{c2}$  as functions of  $\psi$  for  $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$  and different Lewis numbers :  $Le = 50$  (circles),  $Le = 100$  (squares),  $Le = 200$  (diamonds).

TABLEAU 4.1 – Influence of  $Pr$  on secondary bifurcation thresholds for case A with  $Le = 100$  and  $Ge = 10^{-4}$ .

$\psi$	$Pr = 1$			$Pr = 10$			$Pr = 10^5$		
	$k_{c2}$	$\omega_{c2}$	$\Lambda_{c2}$	$k_{c2}$	$\omega_{c2}$	$\Lambda_{c2}$	$k_{c2}$	$\omega_{c2}$	$\Lambda_{c2}$
0.12	2.626	$\pm 0.986$	234.893	2.479	$\pm 0.956$	215.65	-	-	-
0.16	2.665	$\pm 1.263$	239.067	2.520	$\pm 1.238$	219.62	2.505	$\pm 1.236$	217.58
0.20	2.681	$\pm 1.491$	241.495	2.536	$\pm 1.467$	221.923	2.521	$\pm 1.465$	219.875
0.22	2.686	$\pm 1.593$	242.471	2.540	$\pm 1.568$	222.855	2.525	$\pm 1.567$	220.806
0.26	2.692	$\pm 1.779$	244.209	2.545	$\pm 1.753$	224.529	2.529	$\pm 1.751$	222.479
0.30	2.696	$\pm 1.947$	245.805	2.547	$\pm 1.919$	226.076	2.531	$\pm 1.918$	224.027
0.32	2.697	$\pm 2.027$	246.576	2.548	$\pm 1.998$	226.827	2.532	$\pm 1.996$	224.779
0.36	2.699	$\pm 2.177$	248.094	2.548	$\pm 2.145$	228.308	2.532	$\pm 2.143$	226.263
0.40	2.700	$\pm 2.3189$	249.597	2.548	$\pm 2.284$	229.78	2.532	$\pm 2.282$	227.737
0.42	2.701	$\pm 2.387$	250.349	2.548	$\pm 2.351$	230.516	2.532	$\pm 2.348$	228.475
0.46	2.702	$\pm 2.518$	251.857	2.547	$\pm 2.479$	231.996	2.531	$\pm 2.476$	229.958
0.50	-	-	-	2.547	$\pm 2.601$	233.489	2.530	$\pm 2.598$	231.455

[15], one may note from Fig. 4.7a that  $\Lambda_{c2}$  slightly increases with  $\psi$ , meaning that thermodiffusion tends to stabilize the monocellular flow. The stabilizing effect is more significant for binary mixtures with high Lewis number. It can be observed from Fig. 4.7b that the critical wave number

presents a very small variation with the separation ratio, while Fig. 4.7c shows that the modulus of the oscillation frequency is an increasing function of  $\psi$ . The two opposite Hopf frequencies indicate the existence of two counter-propagating travelling waves.

It is worth mentioning that the threshold  $\Lambda_{c2}$  of the secondary instability depends also on  $Pr$ . In table 2 we give the numerical values of  $\Lambda_{c2}$  as a function of  $\psi$  for  $Pr = 1$ ,  $Pr = 10$  and  $Pr = 10^5$ . As can be seen from table 2, for a given  $\psi$ ,  $\Lambda_{c2}$  decreases with the increase of Prandtl number, and therefore induces a destabilizing effect on the monocellular flow. Note also that  $Pr$  has a small influence on  $k_{c2}$  and  $\omega_{c2}$ .

#### 4.6.2 Hopf bifurcation with internal heating from above : case B

The stability of the monocellular flow in case B, which occurs for negative values of the separation ratio  $\psi$ , is illustrated in Fig. 4.8. Differently from case A, where the thermal and concentration gradients act in concert to destabilize the flow, in case B the instability is only due to the Soret effect which causes the destabilizing concentration gradients. As a consequence, the critical values of  $\Lambda_{c2}$  obtained in case B are much higher than those in case A. Fig. 4.8a reveals a strong destabilization for increasing  $|\psi|$ . Another interesting feature is that the monocellular flow in case B is less stable for higher Lewis numbers, which is the opposite trend of case A. Figs. 4.8b and 4.8c show respectively the influence of the separation ratio on the wave number and oscillation frequency. While  $\psi$  strongly affects the wave number, it has a moderate influence on the frequency of the emerging oscillatory longitudinal rolls. As before, two solutions coexist in case B, corresponding to counter-propagating travelling waves with opposite frequencies.

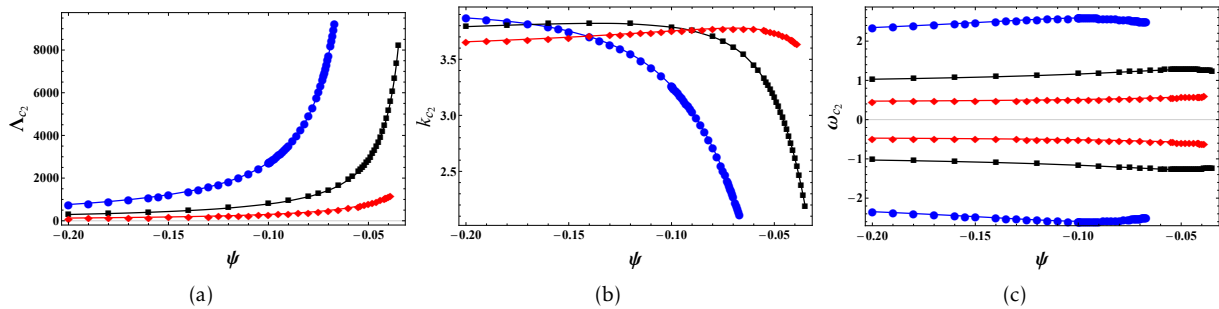


FIGURE 4.8 – Critical values obtained for case B. (a)  $\Lambda_{c2}$ , (b)  $k_{c2}$ , (c)  $\omega_{c2}$  as functions of  $\psi$  for  $Pr = 10$ ,  $Ge = 10^{-4}$  and different Lewis numbers :  $Le = 50$  (circles),  $Le = 100$  (squares),  $Le = 200$  (diamonds).

## 4.7 Practical consequences of the obtained theoretical results

### 4.7.1 Measure of thermodiffusion coefficient : comparison with Rayleigh-Bénard convection

The thermodiffusion coefficient  $D_T$  (or equivalently the separation ratio  $\psi$ ), is typically unknown for the majority of mixtures. It can be varied widely by changing the initial concentration or the average temperature of the system. The coupling between convection and thermodiffusion as a natural way to determine thermodiffusion coefficient [23] was extensively used in the past. For negative separation ratio, the Rayleigh-Bénard cell where the binary mixture is heated

TABLEAU 4.2 – Stability results for different liquid mixtures

liquid properties	Case A		Case B
	Water-ethanol [27]	Water-ethanol [28]	Water-ethanol [25]
$C_a^*$	0.50	0.6088 (water)	0.9199 (water)
$T_a^* (C)$	22.5	22.5	25
$Pr$	32.3	31	9.38
$Le$	207	203	216.7
$\psi$	0.354	0.204	-0.274
$\beta_C$	0.242	0.212	0.1561
$\beta_T (10^{-4} K^{-1})$	9.01	7.86	2.97
$\kappa (10^{-7} m^2 s^{-1})$	0.87	0.8771	1.3
$D (10^{-10} m^2 s^{-1})$	4.20	4.32	6
$\nu (10^{-6} m^2 s^{-1})$	2.81	2.716	1.22
$\rho (kg m^{-3})$	912	935.17	987
$c_v (J K^{-1})$	3868.02	4186.76	4210.79
$g (m s^{-2})$	10	10	10
Stability results			
$\Lambda_{c_1}$	1.64	2.90	2.02
$\Lambda_{c_2}$	231.876	225.994	81.414
$\Lambda_{opt}$	2.620	4.636	3.234

externally from below is employed. The experimental determination of the critical difference of the applied temperature  $\Delta T_c$  and the corresponding Hopf frequency at the onset of convection allow the determination of  $\psi$  by comparison with linear instability theory. Kolodner et al. [24] and Platten et al. [25] successfully used this technique for ethanol-water solutions.

For  $\psi > 0$  and in particular when convection develops in Rayleigh-Bénard cell as a long-wave instability, Knobloch et al. [26] obtained the critical thermal Rayleigh number leading to the onset of monocellular flow,

$$Ra_c = \frac{\beta_T g H^3 \Delta T_{C(RB)}^*}{\nu \kappa} = \frac{720}{Le \psi} \quad (4.49)$$

Comparison between (4.49) and (4.35) yields,

$$\psi = \frac{720}{Le Ra_c} = \frac{120}{Le \Lambda_c} \quad (4.50)$$

Equation (4.50) suggests that by the experimental measurement of  $Ra_c$  in Rayleigh-Bénard cell or  $\Lambda_c$  in the current configuration, one can deduce  $\psi$  and therefore the value of the thermodiffusion coefficient  $D_T$ . This is not a straightforward task if one consider the dimensional quantities involved in  $Ra_c$  and  $\Lambda_c$ . In order to illustrate the underlying constraints, we chose three water-ethanol binary mixtures with different initial temperatures and concentrations, previously studied in [27], [28] and [25]. The values of the thermophysical properties of these binary solutions are given in table 4.2, including the values of  $\psi$ . For the three mixtures, the expression  $Ra_c = 6\Lambda_c = \frac{720}{Le \psi}$  leads to relations relying both the difference of temperature  $\Delta T_{C(RB)}^* (K)$  imposed at the boundaries of Rayleigh-Bénard cell and the difference of temperature  $\Delta T_{C(VD)}^* (K)$

generated by internal heating in the present study, to the height  $H(m)$  of the cavity,

$$\begin{cases} \text{Mixture [27]} : \Delta T_{C(RB)}^* = 6 \Delta T_{C(VD)}^* = \frac{0.272}{H^3} 10^{-9} \\ \text{Mixture [28]} : \Delta T_{C(RB)}^* = 6 \Delta T_{C(VD)}^* = \frac{0.537}{H^3} 10^{-9} \\ \text{Mixture [25]} : \Delta T_{C(RB)}^* = 6 \Delta T_{C(VD)}^* = \frac{0.66}{H^3} 10^{-9} \end{cases} \quad (4.51)$$

According to expressions (4.51), in Rayleigh-Bénard cell, even for very small  $H$ , the difference of temperature needed to trigger convection is very small and can not be measured precisely in laboratory experiments. In that case, one can not determine experimentally the critical Rayleigh number  $Ra_c$  and use the stability diagram to deduce the value of  $\psi$ . This is why instead of using the conditions for the onset of convection in Rayleigh-Bénard cell, many modern technics like beam deflection, optical digital interferometry [29] are used in the Soret cell as a way to determine the value of Soret parameter in the absence of convection. In typical Soret cell experiments, depending on sign of  $\psi$ , heating is applied from above or below to avoid convection. The thermogravitational columns are used in the case of  $\psi > 0$ . This configuration consists of two vertical plates maintained at two different temperatures to create a horizontal temperature gradient. Consequently, the imposed horizontal gradient creates a horizontal mass fraction gradient under the action of the Soret effect. In that case, there is always convection and the measure of the vertical velocity intensity may be used as a way to determine the Soret coefficient. This technique was extensively used in binary mixtures (Water/Ethanol [27], [28], [30], Water/Methanol [30] and n-dodecane/n-hexane [31]) as well as in ternary mixtures (n-hexane/n-dodecane/toluene [32], water/ethanol/triethylene glycol [33]).

For convection induced by viscous dissipation, Fig. 4.9 (a) shows that very small  $\Delta T_{vd}$  may be induced by acceptable values of  $U_a$  in laboratory experiments with the three mixtures studied in [27], [28] and [25]. It is then possible de determine the threshold  $\Lambda_c$  of convection induced by viscous dissipation in laboratory experiments and deduce the value of  $\psi$  from the linear stability diagram.

The control parameter in experiments is the average velocity  $U_a$  of the imposed Poiseuille flow

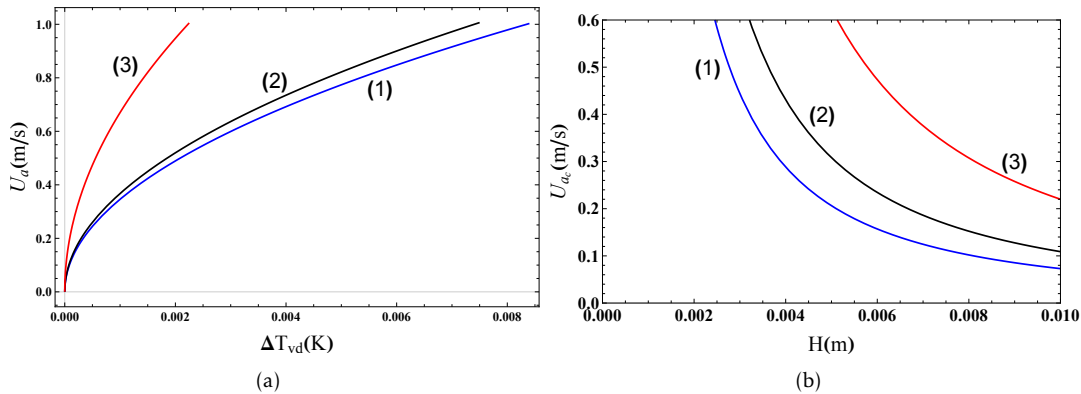


FIGURE 4.9 – (a) The average velocity  $U_a$  versus the viscous dissipation temperature difference  $\Delta T_{vd}$  and (b) the critical average velocity  $U_{ac}$  at the onset of uni-cellular flow versus  $H$ . Three mixtures are considered and studied in (1) [27], (2) [28] and (3) [25]

instead of  $\Delta T_{vd}$ . The critical velocity  $U_{ac}$  at the onset of convection reads,

$$U_{ac} = \left( \frac{120}{Le |\psi|} \frac{c_v \kappa^2}{\beta_T g} \right)^{1/2} \frac{1}{H^{3/2}} \quad (4.52)$$

The dependence of the critical average velocity  $U_{ac}$  on the height of the cavity is shown in Fig. 4.9 (b) for the three binary mixtures [27], [28] and [25]. According to this figure,  $U_{ac}$  decreases with  $H$ , meaning that the viscous dissipation instability may develop easily in large scale system, i.e., in geophysical configurations. On the other hand, for a fixed value of the height  $H$ , the characteristic times for vertical thermal diffusion and vertical concentration diffusion across the layer are, respectively,  $\tau_t = \frac{H^2}{\kappa}$  and  $\tau_c = \frac{H^2}{D}$ . This leads to a height restriction : if the layer is too tall, relaxation times become so long that meaningful experiments under steady conditions become impossible. However, a compromise may be found between reasonable values of  $U_{ac}$ , relaxation times and  $H$  in laboratory experiments. For instance, if the height of the cavity is fixed to  $H = 1\text{ cm}$  when the experimental cell is manufactured, the average velocities and relaxation times for the three mixtures [27], [28] and [25] are respectively, ( $U_{ac} = 0.073\text{ m/s}$ ,  $\tau_t = 1.15 \times 10^3\text{ s}$ ,  $\tau_c = 2.4 \times 10^5\text{ s}$ ), ( $U_{ac} = 0.11\text{ m/s}$ ,  $\tau_t = 1.14 \times 10^3\text{ s}$ ,  $\tau_c = 2.31 \times 10^5\text{ s}$ ) and ( $U_{ac} = 0.22\text{ m/s}$ ,  $\tau_t = 0.77 \times 10^3\text{ s}$ ,  $\tau_c = 1.7 \times 10^5\text{ s}$ ).

According to the above discussion, a long wave-length instability induced by viscous dissipation may be observed experimentally for real binary mixtures under some identified conditions. Consequently, one can use the coupling between viscous dissipation convection and thermodiffusion as an alternative to the classical Rayleigh-Bénard convection to determine experimentally the thermodiffusion coefficient of binary mixtures.

## 4.7.2 Separation of species

We note that the separation of species between the lateral vertical walls is  $S = C(y = A, z) - C(y = 0, z) = mA$ . According to (4.34),  $m$  increases with the distance to criticality. This means that the non-dimensional horizontal gradient  $m$  reaches its maximum at  $\Lambda = \Lambda_{c2}$ , where  $\Lambda_{c2}$  is the critical Rayleigh number where the monocellular flow loses its stability to a multi-cellular flow. This maximum value  $m_{max}$  of the horizontal gradient is depicted as a function of separation ratio  $\psi$  with different Lewis numbers and  $Pr = 10$  (Fig. 4.10(a)) and with different Prandtl numbers with  $Le = 100$  (Fig. 4.10(b)). According to these figures  $m_{max}$  increases with  $\psi$  and decreases with  $Le$ , while the influence of  $Pr$  on  $m_{max}$  is insignificant. The results shown in Fig. 4.10 are really very useful from numerical point of view. Indeed, these dimensionless results resulting from the parallel flow approximation constitute a base reference for direct numerical simulations of the problem without any approximation. However, from an experimental point of view, the separation of species must be reformulated in dimensional form. In this case and as we will see, the optimum of the species separation is predicted to occur for a viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda$  less than  $\Lambda_{c2}$ .

In a non-normalized form, the separation of species is given by  $S^* = C^*(y^* = l, z^*) - C^*(y^* = 0, z^*) = m^* l$ . By substituting  $C^*$  by its expression  $C^* = C_0^* + \frac{\nu \kappa}{\beta_c g H^3} C$ , the dimensional mass gradient  $m^* = \frac{\partial C^*}{\partial y^*}$  in the  $y^*$ -direction, may be related to the non-dimensional mass gradient  $m = \frac{\partial C}{\partial y}$  by  $m^* = \frac{\nu \kappa}{\beta_c g H^4} m$ . The analytical expression (4.34) of the dimensionless mass gradient  $m$  where  $\Lambda$  is given by (4.15) and  $\Lambda_c = \frac{120}{|\psi| Le}$  yields the following expression of dimensional mass

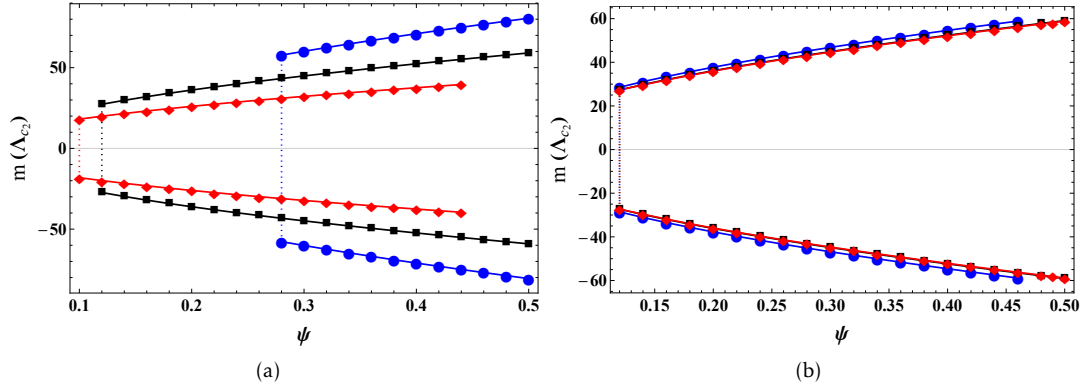


FIGURE 4.10 – Case A : Maximum dimensionless concentration gradient  $m_{max} = m(\Lambda_{c2})$  as functions of  $\psi$  : (a)  $Pr = 10, Ge = 10^{-4}$  and different Lewis numbers :  $Le = 50$  (circles),  $Le = 100$  (squares),  $Le = 200$  (diamonds) and (b)  $Le = 100, Ge = 10^{-4}$  and different Prandtl numbers :  $Pr = 1$  (circles),  $Pr = 10$  (squares),  $Pr = 10^5$  (diamonds)

gradient,

$$m^* = \pm 55 \frac{\nu\kappa}{\beta_c g} \sqrt{\frac{|\psi|}{Le}} \sqrt{\frac{\beta_T g}{\kappa^2 c_v} \frac{U_a^2}{H^5} - \frac{120}{Le|\psi|H^8}} \quad (4.53)$$

It is clear from Eq. (4.53) that for a given binary mixture with known thermo-physical properties and a prescribed value  $U_a$ , there exists a value of  $H = H_{opt}$  giving an optimum value of  $m^* = m_{opt}^*$ . Such depth of the cavity is a mathematical solution of  $\frac{\partial m^*}{\partial H} = 0$  and leads to,

$$H_{opt} = \left( 192 \frac{c_v \kappa^2}{\beta_T g |\psi| Le} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{U_a^{2/3}} \quad (4.54)$$

The optimum dimensional mass gradient  $m_{opt}^* = m^*(H_{opt})$  is therefore given by,

$$m_{opt}^* = 0.42 \frac{\nu\kappa}{\beta_c g Le} \left( \frac{|\psi| Le \beta_T g}{\kappa^2 c_v} \right)^{4/3} U_a^{8/3} \quad (4.55)$$

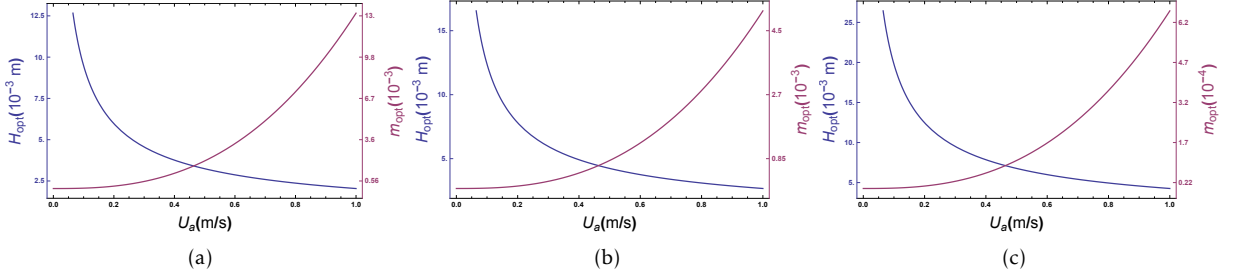
We observe that the viscous dissipation Rayleigh number associated to  $m_{opt}^*$  is,

$$\Lambda_{opt} = \Lambda(H_{opt}) = \frac{192}{|\psi| Le} \quad (4.56)$$

In table 4.2, we report the values of  $\Lambda_{opt}$  together with the critical viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda_{c2}$  for the three binary solutions studied by [27], [28] and [25]. As we observe,  $\Lambda_{opt} < \Lambda_{c2}$  indicating that the optimal separation occurs in the parameter range where mono-cellular flow is stable.

Fig. 4.11 presents the variation of  $H_{opt}$  and  $m_{opt}^*$  with the average velocity  $U_a$  for the mixture a) [27], b) [28] and c) [25]. As it can be seen from this figure, when increasing  $U_a$ , the optimal mass fraction gradient increases while the optimal height  $H$  decreases. Higher optimal mass gradient is achieved for moderate to high average velocity  $U_a$  and small depth  $H$  of the channel.



FIGURE 4.11 –  $H_{opt}$  and  $m_{opt}^*$  versus  $U_a$ 

However, for all realistic values of  $U_a$  and  $H$ , the optimal mass gradient  $m_{opt}^*$  is very small (of order  $10^{-3} m^{-1}$ ) and therefore leads to very small concentration differences that can not be measured in laboratory experiments. However, species separation may be significant in large scale systems, i.e., geophysical systems with large distance  $l$  between the vertical walls. In that case, as the velocity in the  $y$ -direction is responsible for this possible separation, it is important to evaluate its intensity. For the three binary mixtures presented in Table 4.2, we find that the dimensional velocity  $v^*$  varies from zero to its maximum at the secondary bifurcation threshold, given by :  $v^*(z) = 2.40764 \cdot 10^{-6} m/s$  [27],  $v^*(z) = 1.8316 \cdot 10^{-6} m/s$  [28] and  $v^*(z) = 1.81657 \cdot 10^{-6} m/s$  [25].

To summarize, long-wave viscous-dissipation instability that may develop in the present configuration is not recommended as a procedure of species separation in laboratory experiments. We emphasized that Mojtabi et al. [34] recently proposed to use forced convection in two-sided lid-driven horizontal cavity as a procedure of species separation in a binary fluid. These authors showed that the species separation may be improved by several orders of magnitude compared to the one obtained in vertical columns.

## 4.8 Conclusions

In the present paper, the shooting method was used to investigate the primary and secondary instabilities induced by the interplay between viscous dissipation and thermo-diffusion. The physical configuration consists of a fully developed Poiseuille flow of a binary fluid mixture in a channel with two different thermal boundary conditions. In the first boundary conditions, termed case A, the lower boundary is considered adiabatic, while the upper boundary is isothermal leading to volumetric heating from below by viscous dissipation. In case B, an internal heating from above occurs as a consequence of assuming an adiabatic upper boundary and isothermal lower boundary. The thermal gradient triggered by internal viscous dissipation generates a vertical concentration gradient by means of the Soret effect. The linear stability analysis of the basic state has been surveyed relying on the previous investigation by Ali Amar et al. [15]. The results depend on five dimensionless parameters, namely the viscous dissipation Rayleigh-number  $\Lambda$ , the separation ratio  $\psi$ , the Lewis number  $Le$ , the Gebhart number  $Ge$  and Prandtl number  $Pr$ . In particular, it was shown that a long-wave instability may develop if the separation ratio  $\psi$  exceeds a particular value  $\psi_{mono}$  and the convection pattern is then in the form of a uni-cellular flow. By assuming a large lateral aspect ratio of the cavity and by using the parallel flow approximation, we derive in the current investigation the analytical solutions for finite amplitude of the velocity, the temperature and the concentration fields as functions of the

dimensionless parameters of the problem. A very good agreement is obtained between the analytical expression of the critical viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda_c = \frac{120}{Le|\psi|}$  and the numerical results. In a second part of this paper, we investigated the stability of the monocellular flow itself with special emphasis given to disturbances in the form of longitudinal rolls. It is found that a transition occurs from the uni-cellular flow to multi-cellular longitudinal travelling rolls via a Hopf bifurcation. The influences of  $\psi$ ,  $Le$  and  $Pr$  on the critical viscous dissipation Rayleigh number  $\Lambda_{c2}$ , the critical Hopf frequency and wave number of the emerging travelling rolls are analyzed for both boundary conditions A and B. From practical point of view, a comparison with Rayleigh-Bénard convection for given binary mixtures suggests that it is possible to exploit the coupling between convection and thermo-diffusion to determine the Soret parameter. Finally, the ability of viscous dissipation instability as a mechanism for species separation is highlighted for geometrical large systems as well as for ordinary experimental cells. In this paper, we restricted the analysis of the stability of the uni-cellular flow to longitudinal disturbances. However, it would be desirable to extend the analysis to arbitrary oriented perturbation, including oblique and transverse rolls.

## Références

- [1] A. SENE, S. BEN SADEK, S. C. HIRATA et M. N. OUARAZI, « Onset of Viscous Dissipation Instability in Plane Couette Flow with Temperature-Dependent Viscosity », *Energies*, t. 16, n° 10, p. 4172, 2023.
- [2] Y. REQUILÉ, S. HIRATA et M. OUARAZI, « Viscous dissipation effects on the linear stability of Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette convection », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 146, p. 118 834, 2020.
- [3] Y. REQUILÉ, S. HIRATA, M. OUARAZI et A. BARLETTA, « Weakly nonlinear analysis of viscous dissipation thermal instability in plane Poiseuille and plane Couette flows », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 886, A26, 2020.
- [4] A. BARLETTA, « On the thermal instability induced by viscous dissipation », *International Journal of Thermal Sciences*, t. 88, p. 238-247, 2015.
- [5] A. BARLETTA, M. CELLI et D. NIELD, « On the onset of dissipation thermal instability for the Poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel », *Journal of fluid mechanics*, t. 681, p. 499-514, 2011.
- [6] A. BARLETTA et D. NIELD, « Convection-dissipation instability in the horizontal plane Couette flow of a highly viscous fluid », *Journal of fluid mechanics*, t. 662, p. 475-492, 2010.
- [7] A. BARLETTA, M. CELLI et D. REES, « Viscous heating and instability of the adiabatic buoyant flows in a horizontal channel », *Physics of Fluids*, t. 35, n° 3, 2023.
- [8] A. BARLETTA, M. CELLI, S. LAZZARI et P. V. BRANDÃO, « Dissipation instability of Couette-like adiabatic flows in a plane channel », *arXiv preprint arXiv :2304.05240*, 2023.
- [9] B. GEBHART, « Effects of viscous dissipation in natural convection », *Journal of fluid Mechanics*, t. 14, n° 2, p. 225-232, 1962.
- [10] E. MAGYARI, D. REES et B. KELLER, « Effect of viscous dissipation on the flow in fluid saturated porous media », *Handbook of porous media*, t. 2, p. 373-406, 2005.
- [11] D. NIELD, « Resolution of a paradox involving viscous dissipation and nonlinear drag in a porous medium », *Transport in porous media*, t. 41, p. 349-357, 2000.

- [12] P. BRANDÃO, L. d. B. ALVES, D. RODRÍGUEZ et A. BARLETTA, « Linear disturbance growth induced by viscous dissipation in Darcy–Bénard convection with throughflow », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 974, A15, 2023.
- [13] A. BARLETTA et G. MULONE, « The energy method analysis of the Darcy–Bénard problem with viscous dissipation », *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, t. 33, p. 25-33, 2021.
- [14] A. BARLETTA et D. NIELD, « Thermosolutal convective instability and viscous dissipation effect in a fluid-saturated porous medium », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 54, n° 7-8, p. 1641-1648, 2011.
- [15] K. ALI AMAR, S. C. HIRATA et M. N. OUARAZI, « Soret effect on the onset of viscous dissipation thermal instability for Poiseuille flows in binary mixtures », *Physics of Fluids*, t. 34, n° 11, 2022.
- [16] K. ALI AMAR, S. HIRATA et M. OUARAZI, « Weakly nonlinear dynamics of viscous dissipation instability involving Poiseuille flows of binary mixtures », *Physics of Fluids*, t. 36, n° 1, 2024.
- [17] S. KIMURA, M. VYNNYCKY et F. ALAVYOON, « Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 294, p. 231-257, 1995.
- [18] M. MAMOU, P. VASSEUR et E. BILGEN, « Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure », *Heat and mass transfer*, t. 32, n° 1-2, p. 115-125, 1996.
- [19] M. MAMOU, P. VASSEUR et E. BILGEN, « Double-diffusive convection instability in a vertical porous enclosure », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 368, p. 263-289, 1998.
- [20] B. ELHAJJAR, M.-C. CHARRIER-MOJTABI et A. MOJTABI, « Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity », *Physical review E*, t. 77, n° 2, p. 026 310, 2008.
- [21] N. DELEND, S. C. HIRATA et M. OUARAZI, « Primary and secondary instabilities of viscoelastic mixtures saturating a porous medium : Application to separation of species », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, t. 181, p. 11-21, 2012.
- [22] S. A. ORSZAG, « Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 50, n° 4, p. 689-703, 1971.
- [23] J. K. PLATTEN, « The Soret effect : a review of recent experimental results », 2006.
- [24] P. KOLODNER, H. WILLIAMS et C. MOE, « Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions », *The Journal of chemical physics*, t. 88, n° 10, p. 6512-6524, 1988.
- [25] J.-K. PLATTEN, J.-F. DUTRIEUX et G. CHAVEPEYER, « Soret effect and free convection : a way to measure Soret coefficients », in *Thermal Nonequilibrium Phenomena in Fluid Mixtures*, Springer, 2002, p. 313-333.
- [26] E. KNOBLOCH et D. MOORE, « Linear stability of experimental Soret convection », *Physical review A*, t. 37, n° 3, p. 860, 1988.
- [27] J. DUTRIEUX, J. PLATTEN, G. CHAVEPEYER et M. BOU-ALI, « On the measurement of positive Soret coefficients », *The Journal of Physical Chemistry B*, t. 106, n° 23, p. 6104-6114, 2002.
- [28] J. PLATTEN, M. BOU-ALI et J. DUTRIEUX, « Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns », *The Journal of Physical Chemistry B*, t. 107, n° 42, p. 11 763-11 767, 2003.

- [29] W. KÖHLER, A. MIALDUN, M. BOU-ALI et V. SHEVTSOVA, « The measurement of Soret and thermodiffusion coefficients in binary and ternary liquid mixtures », *International Journal of Thermophysics*, t. 44, n° 9, p. 140, 2023.
- [30] J. PLATTEN, M. BOU-ALI, P. BLANCO, J. MADARIAGA et C. SANTAMARIA, « Soret coefficients in some water- methanol, water- ethanol, and water- isopropanol systems », *The Journal of Physical Chemistry B*, t. 111, n° 39, p. 11 524-11 530, 2007.
- [31] I. LIZARRAGA, F. CROCCOLO, H. BATALLER et M. MOUNIR BOU-ALI, « Soret coefficient of the n-dodecane-n-hexane binary mixture under high pressure », *The European Physical Journal E*, t. 40, p. 1-9, 2017.
- [32] D. ALONSO DE MEZQUIA, Z. WANG, E. LAPEIRA, M. KLEIN, S. WIEGAND et M. MOUNIR BOU-ALI, « Thermodiffusion, molecular diffusion and Soret coefficient of binary and ternary mixtures of n-hexane, n-dodecane and toluene », *The European Physical Journal E*, t. 37, p. 1-10, 2014.
- [33] M. SCHRAML, H. BATALLER, C. BAUER et al., « The Soret coefficients of the ternary system water/ethanol/triethylene glycol and its corresponding binary mixtures », *The European physical journal E*, t. 44, p. 1-12, 2021.
- [34] A. MOJTABI, A. KHOUZAM, L. YACINE et M.-C. CHARRIER-MOJTABI, « Analytical and numerical study of Soret mixed convection in two sided lid-driven horizontal cavity : Optimal species separation », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 139, p. 1037-1046, 2019.



# Conclusion et perspectives

Cette thèse a eu pour but d'explorer l'effet du phénomène de Soret sur l'instabilité due à la dissipation visqueuse.

Dans la première partie, nous avons présenté l'historique du problème de Rayleigh-Bénard avec et sans écoulement parallèle, ainsi qu'une étude bibliographique des récents travaux sur la thermodiffusion et la dissipation visqueuse. La procédure mathématique de l'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire a été réalisée pour le problème de Poiseuille plan avec dissipation visqueuse pour les fluides pur. Cette même méthodologie a été appliquée aux fluides binaires dans les chapitres suivants.

Notre approche a débuté par une analyse de stabilité linéaire d'un fluide binaire confiné entre deux plaques d'extension latérale infinie et soumis à un gradient de pression horizontal, sans imposition externe de différence de température ou de concentration. Ainsi, l'instabilité résulte uniquement du réchauffement interne généré par l'écoulement lui-même. Nous avons considéré deux configurations différentes : une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme pour le cas A et inversement pour le cas B. Les résultats dépendent de cinq paramètres adimensionnels, à savoir le nombre de Rayleigh due à la dissipation visqueuse  $\Lambda$ , le rapport de séparation  $\psi$ , le nombre de Lewis  $Le$ , le nombre de Gebhart  $Ge$  et le nombre de Prandtl  $Pr$ .

Au cours de cette étude, nous avons identifié les rouleaux longitudinaux (LR) comme étant la configuration privilégiée pour le déclenchement de la convection. L'examen de la stabilité linéaire a mis en évidence l'importance de l'effet Soret, représenté par le paramètre de séparation  $\psi$ , dans la détermination de la nature de l'instabilité. En effet, dans le cas A, on distingue trois régions d'instabilité différentes : une région multicellulaire oscillatoire à longueur d'onde finie ( $\psi < \psi_{CT}$ , point de codimension 2), région multicellulaire stationnaire à longueur d'onde finie ( $\psi_{CT} < \psi < \psi_{mono}$ ) et région monocellulaire stationnaire à longueur d'onde infinie en raison de l'extension latérale infinie du système considéré ( $\psi > \psi_{mono}$ ). Tandis que dans le cas B, cela conduit à une bifurcation stationnaire monocellulaire pour des rapports de séparation négatifs. Une analyse énergétique a été menée pour le cas A, révélant une transition d'une instabilité dominée par la dissipation visqueuse ( $\psi < \psi^T$ ) à une instabilité dominée par l'effet Soret ( $\psi > \psi^T$ ), où  $\psi^T$  est la valeur du rapport de séparation pour laquelle cette transition a lieu. Nous avons accordé une attention particulière à la possibilité d'observer les instabilités liées à la dissipation visqueuse et à l'effet Soret dans des expériences en laboratoire. Nous en avons conclu que de telles instabilités thermiques, induites par la dissipation visqueuse et l'effet Soret, pourraient être efficaces dans des expériences en laboratoire impliquant des liquides binaires ayant des nombres de Prandtl modérés à élevés. En ce qui concerne les gaz, de telles instabilités pourraient avoir une pertinence dans des configurations géophysiques caractérisées par des hauteurs significatives. Enfin, nous avons suggéré un protocole pour estimer le coefficient de Soret pour un mélange binaire donné en ajustant le seuil mesuré  $\Lambda_c$  (nombre critique de Rayleigh due à la dissipation visqueuse) nécessaire pour déclencher l'instabilité aux résultats théoriques obtenus dans cette étude.

Dans la troisième partie, nous nous sommes concentrés sur la région multicellulaire stationnaire en utilisant une approche faiblement non linéaire reposant sur une étude multi-échelles. Cette approche nous a permis de dériver l'équation d'amplitude de Landau jusqu'à l'ordre trois, afin de déterminer l'influence des non-linéarités dans cette région. Pour la plage de valeurs de séparation  $0 < \psi < \psi_{mono}$ , nous avons mis en évidence l'effet non linéaire de la dissipation visqueuse sur l'instabilité de Soret. Cet effet revêt une importance capitale pour déterminer si la bifurcation est de nature supercritique ou sous-critique, ainsi que pour évaluer l'influence de l'effet Soret sur l'amplitude de ce type d'instabilité. Nos résultats ont révélé que : (i) en l'absence de l'effet Soret, la bifurcation est toujours supercritique lorsque le nombre de Gebhart  $Ge$  est inférieur à une valeur critique correspondant à un coefficient de Landau nul, indépendamment de la valeur de Prandtl  $Pr$ . Cependant, pour  $Pr < 0.2$ , l'instabilité supercritique se produit quel que soit le nombre de Gebhart  $Ge$ . (ii) En présence de l'effet Soret (dans la plage  $0 < \psi < \psi_{mono}$ ), l'influence du nombre de Prandtl sur l'apparition d'une bifurcation sous-critique ou supercritique est très faible, surtout lorsque le nombre de Lewis et/ou le coefficient de séparation  $\psi$  sont élevés. (iii) En revanche, l'effet du nombre de Lewis et/ou du coefficient de séparation  $\psi$  s'avère crucial. En effet, plus le nombre de Lewis et/ou  $\psi$  est élevé, plus il est probable que la bifurcation sous-critique se produise à de faibles nombres de Gebhart  $Ge$ . Par ailleurs, l'étude du transfert de chaleur dans la configuration d'écoulement de Poiseuille a révélé que l'importance de la dissipation visqueuse n'est significative que pour les fluides très visqueux et à l'échelle planétaire ( $Ge > 1$ ). Et enfin, on a constaté que l'effet Soret favorise le mélange dans ce cas-ci.

Dans la quatrième partie, nous nous sommes concentrés sur la région monocellulaire stationnaire pour les deux configurations A et B. En supposant un grand rapport d'aspect latéral de la cavité et en appliquant l'approximation de l'écoulement parallèle, cette étude a permis de déduire des solutions analytiques pour les champs de vitesse, de température et de concentration à amplitude finie en fonction des paramètres adimensionnels du problème. Ces résultats ont montré une excellente concordance entre l'expression analytique du nombre critique de Rayleigh due à la dissipation visqueuse,  $\Lambda_c = \frac{120}{Le|\psi|}$ , et les données numériques. Une seconde partie de cette recherche s'est concentrée sur l'analyse de la stabilité de l'écoulement monocellulaire, en mettant un accent particulier sur les perturbations prenant la forme de rouleaux longitudinaux. Les observations ont révélé une transition de l'écoulement monocellulaire vers des rouleaux longitudinaux multicellulaires à ondes progressives via une bifurcation de Hopf. Nous avons ensuite abouti à la constatation que la séparation des espèces dans notre cas est plus prononcée au sein de systèmes à grande échelle qu'à des systèmes plus restreints. En conséquence, l'utilisation de cette instabilité résultant de la dissipation visqueuse à grande longueur d'onde en tant que méthode de séparation des espèces dans des expériences en laboratoire n'est pas recommandée. Cependant, cette configuration se révèle plus adéquate pour déterminer le paramètre de Soret.

Plusieurs perspectives s'ouvrent suite aux travaux réalisés dans cette thèse.

Tout d'abord, l'analyse de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans les fluides viscoélastiques a révélé la possibilité d'une bifurcation oscillatoire (bifurcation de Hopf) plutôt qu'une bifurcation stationnaire (bifurcation en fourche) pour certains niveaux d'élasticité du fluide. Cette instabilité viscoélastique a été observée dans les solutions polymères diluées, où le fluide présente à la fois une élasticité élevée et une viscosité constante, ce qui est bien représenté par le modèle constitutif Oldroyd-B. Des expériences avec des suspensions d'ADN [1] ont confirmé le caractère oscillatoire de la convection naturelle dans les fluides viscoélastiques, bien que les fréquences mesurées diffèrent significativement de celles prédites par la théorie. Une possible explication avancée était le caractère binaire du fluide des suspensions d'ADN. Une étude ultérieure a donc examiné les instabilités primaires et secondaires des fluides viscoélastiques en milieu poreux, prenant en compte les effets thermiques et de soluté (effet Soret) présents dans les mélanges de fluides [2].

De plus, la dissipation visqueuse peut avoir des effets significatifs sur le comportement linéaire et non linéaire des fluides non-newtoniens, notamment les fluides viscoélastiques, en présence de gradients de pression élevés. Une contribution importante a été apportée à l'analyse théorique du rôle de la dissipation visqueuse en tant que source potentielle d'instabilité thermoconvective [3].

À court terme, on prévoit d'étudier la stabilité des écoulements de convection mixte dans les fluides viscoélastiques, en tenant compte des effets combinés de la thermodiffusion et de la dissipation visqueuse. Le modèle d'Oldroyd-B sera utilisé pour décrire le comportement rhéologique du fluide viscoélastique, et l'analyse de stabilité linéaire et non linéaire prendra en compte le couplage entre les gradients locaux de concentration et de température en présence de dissipation visqueuse. Cette étude mettra en évidence les similitudes et les différences entre la dynamique des fluides viscoélastiques et newtoniens. Cela serait une continuité des travaux de recherche réalisés par Alves [4] et Requilé [5] qui se sont concentrés sur l'instabilité induite par la dissipation des écoulements de Poiseuille/Couette des fluides newtoniens et viscoélastiques.

D'un autre côté, les travaux présentés dans ce mémoire se sont concentrés sur l'étude des fluides binaires dont les propriétés physiques ne dépendent pas de la température, à l'exception de la densité dans le terme de flottabilité (approximation de Boussinesq). Cependant, dans le cas des fluides non-newtoniens, qui sont généralement très visqueux, l'apparition de la convection thermique n'est possible que si les gradients de température sont significatifs, ce qui rend les effets non-Boussinesq non négligeables. Pour prendre en compte ces effets, l'étude des écoulements de cisaillement dans les fluides non-newtoniens thermodépendants a été considérée dans l'analyse des écoulements de cisaillement prenant en compte les effets de la dissipation visqueuse. On cite Alioun Sene [6] qui a considéré l'effet de la viscosité dépendante de la température sur la stabilité linéaire due à la dissipation visqueuse d'un fluide Newtonien.

Une perspective à moyen terme consisterait à étudier les fluides binaires viscoélastiques thermodépendants au lieu des fluides purs, en ajoutant l'effet Soret à l'effet de dissipation visqueuse. Une perspective à plus long terme consisterait à prendre en compte la dépendance des propriétés rhéologiques du fluide vis-à-vis de la température.

Les études de stabilité linéaire des écoulements de cisaillement ont été le sujet de nombreuses recherches au fil des années. Traditionnellement, les analyses en modes normaux (appelée théorie de stabilité « modale ») constituent la première étape dans la recherche de la transition. Dans cette approche, on suppose que chaque mode a une dépendance temporelle exponentielle, ce qui permet de transformer le système initial en un problème de valeurs propres. Les valeurs propres calculées sont ensuite examinées pour leur taux de croissance exponentielle, et l'état de base est considéré comme instable si une valeur propre est trouvée dans la moitié instable du plan complexe. La condition de stabilité prédite par l'analyse des modes normaux est donc un résultat asymptotique, dans le sens où toute perturbation infinitésimale tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ . La formation de rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard dans une couche de fluide chauffée par le bas et l'apparition de tourbillons de Taylor dans les écoulements de Taylor-Couette sont quelques exemples classiques de transitions qui se produisent par une instabilité exponentielle. On cite les travaux menés par Jerome Soundar [7] sur la croissance transitoire en convection de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP).

Dans ce mémoire, nous avons étudié les écoulements de Poiseuille des fluides binaires newtoniens linéaires et faiblement non linéaires en prenant en compte les effets thermiques. Ces effets sont dus à la chaleur générée à l'intérieur du fluide par la friction entre les couches fluides (effets de dissipation visqueuse). En ce qui concerne l'analyse non modale de ces écoulements, plusieurs questions restent ouvertes : quelle est l'influence de la rhéologie du fluide et des effets thermiques sur la croissance transitoire ? Quels sont les mécanismes physiques dominants de cette croissance ? Notre objectif est d'examiner en profondeur l'influence des effets combinés



de l'effet Soret et de l'effet de dissipation visqueuse sur la croissance transitoire des instabilités thermoconvectives dans les écoulements de cisaillement. Cela constitue une extension naturelle de nos recherches actuelles et constitue donc un point de départ solide.

L'une des perspectives et qui n'est pas la moindre est liée à la stabilité de la séparation des espèces d'un mélange binaire avec un rapport de séparation négatif dans des colonnes thermogravitationnelles. En effet, lors de ma participation au congrès IMT15 qui s'est déroulé à Tarragone en Espagne, plusieurs communications soulignent le caractère stable ou instable de la séparation suivant le rapport de forme transversal de la colonne thermogravitationnelle. Nous avons déjà initié l'étude de stabilité de ce problème et nous comptons mener cette tâche très importante du point de vue expérimental.

## Références

- [1] P. KOLODNER, « Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions », *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, t. 75, n° 2-3, p. 167-192, 1998.
- [2] N. DELEDA, S. C. HIRATA et M. OUARAZI, « Primary and secondary instabilities of viscoelastic mixtures saturating a porous medium : Application to separation of species », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, t. 181, p. 11-21, 2012.
- [3] Y. REQUILÉ, « Effets de la dissipation visqueuse sur la convection des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette de fluides Newtoniens ou viscoélastiques », thèse de doct., Université de Lille (2018-2021), 2019.
- [4] L. d. B. ALVES, A. BARLETTA, S. HIRATA et M. OUARAZI, « Effects of viscous dissipation on the convective instability of viscoelastic mixed convection flows in porous media », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 70, p. 586-598, 2014.
- [5] Y. REQUILÉ, S. HIRATA, M. OUARAZI et A. BARLETTA, « Weakly nonlinear analysis of viscous dissipation thermal instability in plane Poiseuille and plane Couette flows », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 886, A26, 2020.
- [6] A. SENE, S. BEN SADEK, S. C. HIRATA et M. N. OUARAZI, « Onset of Viscous Dissipation Instability in Plane Couette Flow with Temperature-Dependent Viscosity », *Energies*, t. 16, n° 10, p. 4172, 2023.
- [7] J. JOHN SOUNDAR JEROME, J.-M. CHOMAZ et P. HUERRE, « Transient growth in Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette convection », *Physics of Fluids*, t. 24, n° 4, 2012.

# Table des matières

Résumé	xvii
Remerciements	xix
Table des matières	xxi
Liste des tableaux	xxiii
Table des figures	xxv
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1 Problème de Rayleigh-Bénard et Rayleigh-Bénard-Poiseuille . . . . .	2
1.2 Effet Soret . . . . .	6
1.2.1 Revue bibliographique sur la thermodiffusion . . . . .	8
1.3 Effet de dissipation visqueuse . . . . .	13
1.3.1 Terme de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie . . . . .	14
1.3.2 Revue bibliographique sur la dissipation visqueuse . . . . .	15
1.3.3 Formulation mathématique de l'analyse de stabilité avec dissipation visqueuse	17
1.4 Objectifs de la thèse . . . . .	30
Références . . . . .	31
<b>2 Soret effect on the onset of viscous dissipation thermal instability for Poiseuille flows in binary mixtures</b>	<b>39</b>
2.1 Abstract . . . . .	39
2.2 Introduction . . . . .	40
2.3 Mathematical model . . . . .	41
2.3.1 Governing equations . . . . .	42
2.3.2 Basic state . . . . .	43
2.3.3 Non-dimensionalization . . . . .	44
2.4 Linear stability analysis . . . . .	46
2.4.1 Three-dimensional perturbation equations . . . . .	46
2.4.2 Longitudinal rolls . . . . .	48
2.4.3 Squire transformation in the limiting case of small Gebhart number . . . . .	48
2.5 Numerical Method . . . . .	50
2.6 Results for positive and negative $\psi$ . . . . .	51
2.6.1 Selection of the dominant mode of instability . . . . .	51
2.6.2 Linear properties of the instability for $\psi > 0$ . . . . .	52
2.6.3 Linear properties of the instability for $\psi < 0$ . . . . .	54

2.7 Energy budget Analysis . . . . .	57
2.8 On the observability of viscous dissipation instability in binary fluid experiments . . . . .	59
2.9 Conclusions . . . . .	62
Références . . . . .	64
<b>3 Weakly nonlinear dynamics of viscous dissipation instability involving Poiseuille flow of binary fluids mixture</b>	<b>67</b>
3.1 Abstract . . . . .	67
3.2 Introduction . . . . .	68
3.3 Governing equations, basic state and linear stability . . . . .	69
3.3.1 System and basic equations . . . . .	69
3.3.2 Unperturbed basic state and linear stability . . . . .	71
3.4 Weakly nonlinear analysis . . . . .	73
3.4.1 Governing equations for finite amplitude longitudinal rolls . . . . .	73
3.4.2 Derivation of amplitude equation . . . . .	74
3.5 Results of the weakly nonlinear stability . . . . .	80
3.5.1 Supercritical/subcritical bifurcation . . . . .	80
3.5.2 Equilibrium solutions and iso-contours . . . . .	82
3.5.3 Nusselt and mixing numbers . . . . .	83
3.6 Conclusions . . . . .	86
Références . . . . .	87
<b>4 Hopf bifurcation from uni-cellular to multi-cellular flows induced by viscous heating in Poiseuille flow of binary mixtures</b>	<b>89</b>
4.1 abstract . . . . .	89
4.2 Introduction . . . . .	90
4.3 Mathematical model and unperturbed basic state . . . . .	91
4.4 Analytical solution of the monocellular flow and its properties . . . . .	94
4.5 Secondary bifurcation : loss of stability of the monocellular flow . . . . .	100
4.5.1 Perturbation equations . . . . .	100
4.5.2 Longitudinal rolls . . . . .	101
4.6 Secondary instability results . . . . .	102
4.6.1 Hopf bifurcation with internal heating from below : case A . . . . .	102
4.6.2 Hopf bifurcation with internal heating from above : case B . . . . .	103
4.7 Practical consequences of the obtained theoretical results . . . . .	103
4.7.1 Measure of thermodiffusion coefficient : comparison with Rayleigh-Bénard convection . . . . .	103
4.7.2 Separation of species . . . . .	106
4.8 Conclusions . . . . .	108
Références . . . . .	109
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>113</b>
Références . . . . .	116
<b>Table des matières</b>	<b>117</b>



### Résumé

Ce travail de thèse se focalise sur une analyse approfondie de l'effet du phénomène de Soret sur l'instabilité provoquée par la dissipation visqueuse dans un fluide binaire confiné entre deux plaques d'extension latérale infinie et soumis à un gradient de pression horizontal. Aucune différence de température ou de concentration externe n'est imposée aux bords : La paroi inférieure est considérée adiabatique, tandis que la paroi supérieure est isotherme pour le cas A et inversement pour le cas B. Au cours de cette recherche, nous avons identifié les rouleaux longitudinaux (LR) comme le mode privilégié pour l'amorçage de la convection. L'analyse de stabilité linéaire a révélé que l'effet Soret, caractérisé par le rapport de séparation noté  $\psi$ , joue un rôle crucial dans la détermination de la nature de l'instabilité. En effet, Dans le cas A, cela influence le développement de motifs de rouleaux longitudinaux oscillatoires et stationnaires, tandis que dans le cas B, cela conduit à une bifurcation stationnaire caractérisée par un nombre d'onde nul. Ces résultats mettent également en lumière la présence de deux régions distinctes : une région multicellulaire ( $\psi < \psi_{mono}$ ) avec une longueur d'onde finie et une région monocellulaire ( $\psi > \psi_{mono}$ ) où la longueur d'onde devient infinie en raison de l'extension latérale illimitée du système.

Pour approfondir notre compréhension de ces deux régions, nous avons adopté une approche faiblement non linéaire, en dérivant l'équation d'amplitude de Landau jusqu'au troisième ordre. Cette étude s'est concentrée sur les effets non linéaires de la dissipation visqueuse sur l'instabilité de Soret dans une plage spécifique de valeurs du coefficient de séparation positif, où l'écoulement est multicellulaire ( $0 < \psi < \psi_{mono}$ , avec  $\psi_{mono}$  le rapport de séparation monocellulaire indiquant le début de la région monocellulaire). Il est à noter que l'influence du nombre de Prandtl sur la nature de la bifurcation, qu'elle soit sous-critique ou supercritique, s'est avérée relativement limitée. En revanche, le nombre de Lewis et le rapport de séparation ont joué un rôle décisif. Plus précisément, des valeurs élevées du nombre de Lewis et/ou du rapport de séparation ont favorisé l'apparition de bifurcations sous-critiques à de faibles nombres de Gebhart (paramètre caractérisant l'intensité de la dissipation visqueuse).

Lorsque la valeur du rapport de séparation dépasse celle associée à la région monocellulaire ( $\psi > \psi_{mono}$ ), une analyse portant sur les instabilités secondaires a montré que l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité pour donner naissance à des rouleaux longitudinaux multicellulaires progressives via une bifurcation de Hopf. Nous avons abouti à la constatation que la séparation des espèces dans notre cas est plus prononcée au sein de systèmes à grande échelle qu'à des systèmes plus restreints. Cependant, cette configuration se révèle plus adéquate pour déterminer le paramètre de Soret.

**Mots clés :** convection mixte, fluides binaires, dissipation visqueuse, stabilité linéaire, stabilité faiblement nonlinéaire, effet soret

---

Abstract

This thesis work focuses on a comprehensive analysis of the Soret effect on instability induced by viscous dissipation in a binary fluid confined between two plates of infinite lateral extension and subjected to a horizontal pressure gradient. No external temperature or concentration difference is imposed on the boundaries: the lower boundary is considered adiabatic, while the upper boundary is isothermal for case A and conversely for case B. During this research, we identified longitudinal rolls (LR) as the preferred mode for initiating convection. The linear stability analysis revealed that the Soret effect, characterized by the separation ratio denoted as  $\psi$ , plays a pivotal role in determining the nature of the instability. In case A, it influences the development of both oscillatory and stationary longitudinal rolls patterns, whereas in case B, it leads to a stationary bifurcation characterized by a zero wave number. These results also highlight the presence of two distinct regions: a multicellular region ( $\psi < \psi_{mono}$ ) with a finite wavelength and a monocellular region ( $\psi > \psi_{mono}$ ) where the wavelength becomes infinite due to the unbounded lateral extension of the system.

To deepen our understanding of these two regions, we adopted a weakly nonlinear approach, deriving the Landau amplitude equation up to the third order. This study focused on the nonlinear effects of viscous dissipation on the Soret instability in a specific range of positive separation coefficient values, where the flow is multicellular ( $0 < \psi < \psi_{mono}$ , with  $\psi_{mono}$  indicating the start of the monocellular region). It is worth noting that the influence of the Prandtl number on the nature of the bifurcation, whether subcritical or supercritical, proved to be relatively limited. However, the Lewis number and the separation ratio played a decisive role. Specifically, high values of the Lewis number and/or the separation ratio favored the occurrence of subcritical bifurcations at low Gebhart numbers (a parameter characterizing the intensity of viscous dissipation).

When the value of the separation ratio exceeded that associated with the monocellular region ( $\psi > \psi_{mono}$ ), an analysis of secondary instabilities showed that the monocellular flow lost its stability, giving rise to progressively multicellular longitudinal rolls through a Hopf bifurcation. We concluded that species separation in our case is more pronounced in large-scale systems compared to smaller ones. However, this configuration proves to be more suitable for determining the Soret parameter.

**Keywords:** mixed convection, binary fluids, viscous dissipation, thermodiffusion, linear stability, weakly nonlinear stability, soret effect

---