



**HAL**  
open science

# Vers une modélisation du comportement d'un lit de débris sur le récupérateur de corium d'un RNR-Na

Cyriaque Tréol

► **To cite this version:**

Cyriaque Tréol. Vers une modélisation du comportement d'un lit de débris sur le récupérateur de corium d'un RNR-Na. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPAST016 . tel-04521877

**HAL Id: tel-04521877**

**<https://theses.hal.science/tel-04521877>**

Submitted on 26 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Vers une Modélisation du comportement d'un lit de débris sur le récupérateur de corium d'un

## RNR-Na

*Towards a Modelling of a debris bed on the SFR core  
catcher*

### Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences Mécaniques et Énergétiques, Matériaux et  
Géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes

Référent : CentraleSupélec

Thèse préparée dans **Laboratoire EM2C** (Université Paris-Saclay, CNRS, CentraleSupélec),  
sous la direction de **Benoit GOYEAU**, Professeur à Centrale-Supélec, Université  
Paris-Saclay, le co-encadrement de **Rémi CLAVIER**, Docteur, Ingénieur-Chercheur au CEA  
Cadarache, et le co-encadrement de **Nathalie SEILER**, HDR, Experte au CEA Cardarache

Thèse soutenue à Cadarache, le 21 février 2024, par

**Cyriaque TREOL**

### Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

**Azita AHMADI**

Professeure, I2M Université de Bordeaux I.

**Hervé COMBEAU**

Professeur, Institut Jean Lamour, Université de Lorraine

**Florian FICHOT**

Directeur de recherche, Expert, Institut de Radioprotection et Sécurité Nucléaire

**Christophe JOURNEAU**

Directeur de recherche, Expert, Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives de Cadarache

Présidente

Rapporteur & Examineur

Rapporteur & Examineur

Examineur

**Titre :** Vers une modélisation du comportement d'un lit de débris sur le récupérateur de corium d'un RNR-Na.

**Mots clés :** Lit de débris, Nivellement, Accident Grave, Écoulement granulaire, RNR-Na, Thermo-hydraulique

**Résumé :** Ce sujet de thèse concerne les **accidents graves** dans un **Réacteur à Neutrons Rapides refroidi au Sodium (RNR-Na)**. Le terme accident grave désigne les accidents nucléaires avec fusion partielle ou totale du cœur, qui forme un mélange de matériaux fondus appelé **corium**. De tels accidents se sont produits par le passé dans des réacteurs nucléaires de filières différentes : l'accident de *Three Mile Island* en 1979 sur un Réacteur à Eau Pressurisée, celui de Tchernobyl en 1986 sur un réacteur de type RBMK, et les accidents de Fukushima en 2011 sur des Réacteurs à Eau Bouillante. Ces catastrophes, bien que rares, sont donc possibles. La probabilité d'occurrence et les conséquences doivent être anticipées et réduites autant que possible. Ces études présentent des enjeux de sûreté nucléaire.

Dans l'étude des accidents graves en RNR-Na, une problématique d'importance est celle du refroidissement du corium lorsque celui-ci se trouve sous la forme d'un lit de particules resolidifiées appelé le **lit de débris**. La majorité des modèles à ce jour traitent ce lit de débris comme un milieu poreux immobile. Or les débris ne sont pas solidaires et sont capables de se mouvoir sous l'influence des écoulements de sodium. On s'intéresse dans cette thèse spécifiquement à l'étude de ces mouvements qui amènent au **nivellement** du lit de débris initialement conique. On propose un modèle macroscopique théorique d'écoulement multiphasique avec terme source de chaleur et changement de phase comprenant une phase solide particulaire mobile. Ce modèle est ensuite partiellement implémenté puis vérifié, dans la plateforme de calcul en C++ open source OpenFOAM.

**Title :** Towards a modelling of a debris bed on the SFR core catcher.

**Keywords :** Debris Bed, Self-leveling, Severe Accident, Granular flow, SFR, Thermohydraulic

**Abstract :** This thesis concerns **severe accidents** in a **Sodium-cooled Fast Reactor (SFR)**. The term severe accident refers to nuclear accidents involving partial or total melting of the core, which forms a mixture of molten materials known as **corium**. Such accidents have occurred in the past in nuclear reactors of different types : the Three Mile Island accident in 1979 involving a Pressurised Water Reactor, the Chernobyl accident in 1986 involving an RBMK-type reactor, and the Fukushima accidents in 2011 involving Boiling Water Reactors. Although rare, these disasters are possible. The probability of occurrence and the consequences must be anticipated and reduced as far as possible. These studies present nuclear safety issues.

In the study of severe accidents in nuclear reactors, a major problem is the cooling of the corium when it is in the form of bed of resolidified particles called the **debris bed**. The majority of models treat this debris bed as an immobile porous medium. But these debris are not bonded and they are able to move under the influence of sodium flows. This thesis focuses specifically on the study of these movements, which lead to the **self-leveling** of the initially conical debris bed. A theoretical macroscopic multiphase flow model with heat source term and phase change including a mobile particulate solid phase is proposed. This model is then partially implemented in the OpenFOAM open source C++ computational platform and verified.

## Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements envers l'Université Paris-Saclay, CentraleSupelec et le laboratoire EM2C pour leurs ressources précieuses tout au long de ce travail. Ma profonde gratitude va également à l'Institut IRESNE du CEA de Cadarache et au Laboratoire de Modélisation des Accidents Graves (LMAG) pour leur soutien et pour avoir fourni un environnement stimulant et propice à la recherche.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance la plus sincère envers mon directeur de thèse, Benoit Goyeau, pour son encadrement, ses conseils éclairés et les ouvrages clefs toujours prodigués au bon moment. Je suis également profondément reconnaissant envers mes encadrants, Rémi Clavier et Nathalie Seiler, pour leur confiance, leur soutien indéfectible, leur engagement et leur abnégation ainsi que pour les nombreux débats de fond et les contacts avec des spécialistes de nos problématiques tout au long de ce projet de recherche mais aussi pour m'avoir donné la chance et l'opportunité de réaliser ce projet.

Un grand merci à mes collègues du LMAG pour le cadre de travail agréable et stimulant, pour les discussions de café enrichissantes et les moments de vie. Je tiens à adresser un remerciement particulier à Laurent Trotignon pour ses précieux conseils et son suivi. Bien évidemment, de très chaleureux remerciements vont à mes compagnons de thèse et amis pour leur collaboration, leurs échanges enrichissants et leur camaraderie ainsi que tout les moments de vie partagés : Faouzi Hakimi, Thomas Schiano, Adrien Drouillet, Antoine Avrit, Mirantsoa Aimé Rasolofomanana et Arthur Tourneix (merci pour les tips informatiques).

J'ai une pensée pour mon école d'ingénierie Grenoble INP - ENSE3 sans laquelle je n'aurais pas eu connaissance de cette opportunité, et en particulier pour Laurent Davoust et ses encouragements ainsi que pour les discussions avec Grégoire Kessedjian qui m'ont convaincu de tenter cette aventure.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers ma famille pour leur soutien dans les pires moments et leur amour constant. À mes amis, sans lesquels cette aventure aurait été bien moins agréable, en particulier à Brice Yonnet et Priscilla Berenguer pour leur soutien constant et indéfectible, je vous adresse mes plus chaleureux remerciements.

Et enfin, un immense merci à ma compagne, Lucie Lassablière, sans qui l'aventure aurait été bien plus difficile, pour son soutien infaillible et son amour sans limite, qui a su être une fondation solide et un phare dans les moments de doute où la confiance vacille. Merci !



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>1 Chapitre 1 : Contexte</b>	<b>24</b>
1.1 Accidents graves et lits de débris . . . . .	24
1.1.1 La Séquence accidentelle (RNR-Na) . . . . .	24
1.1.2 Caractéristiques d'un lit de débris en RNR-Na . . . . .	26
1.1.3 Phénoménologie d'un lit de débris en RNR-Na . . . . .	28
1.1.4 Modélisations historiques des lits de débris . . . . .	33
1.2 Écoulements granulaires . . . . .	34
1.2.1 Définition et phénoménologie particulière . . . . .	34
1.2.2 Morh-Coulomb et état critique des sols . . . . .	38
1.2.3 Théories cinétique granulaire . . . . .	39
1.2.4 Suspensions denses . . . . .	40
1.2.5 Milieux humides . . . . .	42
1.3 Nombres adimensionnels caractéristiques et leur estimation . . . . .	44
1.3.1 Nombre de Reynolds en milieu poreux . . . . .	44
1.3.2 Nombre de Reynolds Granulaire . . . . .	45
1.3.3 Nombre de Stokes . . . . .	47
1.3.4 Nombre de Péclet granulaire . . . . .	48
1.3.5 Nombres de Bond et capillaire . . . . .	48
1.4 Choix de modélisation . . . . .	50
1.4.1 Une Approche multiphasique . . . . .	50
1.4.2 Nécessité d'utiliser une méthode de remontée d'échelle . . . . .	51
<b>2 Chapitre 2 : Établissement d'un système macroscopique.</b>	<b>54</b>
2.1 La Méthode de Prise de Moyenne Volumique (MPMV) . . . . .	54
2.1.1 Définition des opérateurs et théorèmes . . . . .	55
2.1.2 Prise de moyenne volumique : Étape par étape . . . . .	59
2.2 Modèle local . . . . .	60
2.2.1 Modélisation de la phase solide : Approche particulaire et pseudo-fluide . . . . .	61
2.2.2 Des fluides Newtoniens et l'approximation de Boussinesq . . . . .	63
2.2.3 Conservation de l'énergie : Écriture en Température relative . . . . .	65
2.2.4 Conditions de saut aux interfaces . . . . .	65
2.2.5 Résumé : Problème local - Échelle des grains . . . . .	66
2.3 Problème Moyenné Non fermé (PbMNF) . . . . .	67
2.3.1 PbMNF : Conservation de la masse . . . . .	68
2.3.2 PbMNF : Conservation de la quantité de mouvement (QDM) . . . . .	68
2.3.3 PbMNF : Conservation de l'énergie . . . . .	71

2.3.4	Résumé : PbMNF . . . . .	74
2.4	Problème aux déviations (PbD) et relation de fermeture . . . . .	75
2.4.1	PbD : Conservation de la masse . . . . .	77
2.4.2	PbD : Conservation de la QDM . . . . .	77
2.4.3	PbD : Conservation de l'énergie . . . . .	79
2.4.4	PbD : Conditions de saut aux déviations . . . . .	81
2.4.5	Résumé : PbD . . . . .	83
2.4.6	Relations de fermeture . . . . .	83
2.5	Problèmes de Fermeture (PbF) . . . . .	84
2.5.1	PbF : Problèmes associés à une vitesse moyenne . . . . .	86
2.5.2	PbF : Problèmes associés aux températures relatives . . . . .	87
2.5.3	PbF : Problèmes associés aux gradients de température . . . . .	87
2.6	Problème Moyenné Fermé (PbMF) . . . . .	88
2.6.1	PbMF : Fermeture de la conservation de la QDM . . . . .	89
2.6.2	PbMF : Fermeture de la conservation de l'énergie . . . . .	91
2.6.3	PbMF : Fermeture des $\dot{m}_{kj}$ . . . . .	92
2.6.4	Résumé : PbMF . . . . .	94
2.7	Discussion sur le modèle macroscopique . . . . .	96
2.7.1	Une nouvelle structure d'équation . . . . .	96
2.7.2	Méthode n-phases . . . . .	101
<b>3</b>	<b>Chapitre 3 : Vers une simulation numérique d'un lit de débris en RNR-Na</b>	<b>102</b>
3.1	Implémentation du problème macroscopique . . . . .	102
3.1.1	Présentation d'OpenFOAM . . . . .	102
3.1.2	Méthode d'implémentation de debrisBedSedFoam . . . . .	104
3.1.3	Adaptation du modèle . . . . .	104
3.2	Vérification de l'implémentation de debrisBedSedFoam . . . . .	107
3.2.1	Écoulements de Darcy et de Darcy généralisé . . . . .	107
3.2.2	Écoulement de Couette et de Poiseuille diphasique . . . . .	113
3.2.3	Cavité entraînée . . . . .	126
3.2.4	Convection naturelle . . . . .	130
3.3	Bilan sur les simulations numériques . . . . .	138
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>140</b>
4.1	Conclusion . . . . .	140
4.2	Perspectives . . . . .	141
4.2.1	Propriétés effectives et problèmes de fermeture . . . . .	141
4.2.2	Simulation du lit de débris . . . . .	141
	<b>Annexe</b>	<b>143</b>
A	Annexe : Prise de moyenne particulaire des équations locales de conservation de la phase solide . . . . .	143
A.1	Définition des outils et conservation de la masse par la moyenne particulaire . . . . .	143

A.2	Moyenne particulière de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (QDM) . . . . .	144
A.3	Moyenne particulière de l'équation de conservation de l'énergie . . . . .	146
B	Annexe : Simplification préalable des dérivées spatiales de produit avec séparation des échelles . . . . .	148
C	Annexe : Calcul préparatoire à l'écriture de la propriété effective dynamique due au changement de phase. . . . .	151

**Bibliographie** **152**





## Table des figures

1	<i>Schéma de fonctionnement d'un RNR-Na.</i> . . . . .	22
1.1	<i>Schéma de la séquence accidentelle dans la cuve d'un RNR-Na.</i> . . . . .	25
1.2	<i>Taille des particules selon le pourcentage massique de corium pour différentes expérimentations de fragmentation. Extrait du rapport de Schummer [168].</i> . . . . .	27
1.3	<i>Configurations possibles du lit de débris après sédimentation avec injection de gaz à contre-courant. Extrait des travaux de Cheng et al. [27].</i> . . . . .	29
1.4	<i>Cas expérimental de ségrégation par diamètre après sédimentation gravitaire dans de l'eau. Extraits des travaux de Sheikh et al. [170]</i> . . . . .	30
1.5	<i>Schéma de l'écoulement de convection naturelle dans un lit de débris de corium.</i> . . . . .	31
1.6	<i>Schéma du nivellement d'un lit de débris de corium sous ébullition. Traduit des travaux de Cheng et al. [30]</i> . . . . .	31
1.7	<i>Schéma de ségrégation par composition avec couche métallique supérieure.</i> . . . . .	32
1.8	<i>Schéma de ségrégation par diamètre après un écoulement gravitaire.</i> . . . . .	33
1.9	<i>Expérience de Drake [56] mettant en évidence les différents régimes d'écoulement granulaire par un écoulement à surface libre sur un plan incliné. Extrait des travaux d'Izard [97]</i> . . . . .	36
1.10	<i>Illustration des particularités des écoulements granulaires.</i> . . . . .	37
1.11	<i>Viscosité dynamique relative (<math>\eta_r</math>) en fonction du taux d'occupation volumique (<math>\varepsilon_s</math>) rapporté à son maximum (<math>\varepsilon_s^{\max}</math>) selon les corrélations. Adapté des travaux de Guazzelli &amp; Pouliquen [85]. Références : [11], [21], [18], [45], [49], [62], [63], [72], [122], [139], [171], [198].</i> . . . . .	41
1.12	<i>Photographie d'un réseau capillaire aqueux par fluorescence pour des billes de verre de 375 <math>\mu\text{m}</math>. Extrait des travaux d'Herminghaus [92].</i> . . . . .	43
2.1	<i>Schema d'un VER triphasique Traduit de Lasseux et al. [106]</i> . . . . .	55
2.2	<i>Moyenne d'une grandeur selon le rayon <math>r</math> du VER. Adaptée des travaux de Borges et al. [19] sur la mesure de la porosité.</i> . . . . .	56
2.3	<i>Diagramme résumant la méthode de prise de moyenne volumique. Adapté des travaux de Soulaïne [174].</i> . . . . .	59
2.4	<i>Schéma de la compensation des forces de contact à la frontière du VER.</i> . . . . .	62
3.1	<i>Schéma d'écoulement de Darcy monophasique.</i> . . . . .	108
3.2	<i>Composante verticale de la vitesse uniforme du fluide (<math>g</math>) au cours du temps, convergeant vers la vitesse stationnaire prédite.</i> . . . . .	109
3.3	<i>Schéma d'écoulement de Darcy diphasique.</i> . . . . .	109
3.4	<i>Projection verticale de la vitesse uniforme du fluide (<math>g</math>) et (<math>l</math>) au cours du temps, convergeant vers leur vitesse stationnaire prédite respective, pour un écoulement de Darcy généralisé à deux fluides.</i> . . . . .	111
3.5	<i>Projection verticale de la vitesse uniforme du fluide (<math>g</math>) et (<math>l</math>) au cours du temps, convergeant vers leur vitesse stationnaire prédite respective, d'un écoulement de Darcy diphasique pour un modèle d'Ergun généralisé sans traînée interfaciale.</i> . . . . .	113

3.6	Schéma et profil de vitesse d'un écoulement de Couette plan établi. . . . .	114
3.7	Comparaison entre l'écoulement de Couette diphasique théorique et simulé pour une distribution affine des fluides. . . . .	116
3.8	Comparaison entre l'écoulement de Couette plan diphasique théorique et simulé pour une distribution affine des taux d'occupation volumiques selon les coefficients d'interaction $\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl}$ . . . . .	117
3.9	Schéma d'un écoulement de Poiseuille plan établi. . . . .	118
3.10	Cas 1 : Profils de vitesse théoriques et simulés pour un écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution du taux d'occupation volumique affine avec des fluides de même viscosité. . . . .	120
3.11	Cas 2 : Profils de vitesse théoriques et simulés pour un écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution du taux d'occupation volumique affine avec des fluides de viscosité différente. . . . .	120
3.12	Profils de vitesse à l'état stationnaire théoriques et simulés pour un écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution du taux d'occupation volumique affine avec des fluides de viscosité différente selon le coefficient d'interaction $\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl}$ . . . . .	121
3.13	Profils de température à l'état stationnaire théoriques et simulés selon le coefficient d'échange thermique entre phases $\hat{C}_{lg} = \hat{C}_{gl}$ pour de la conduction thermique diphasique à travers une distribution affine de fluides immobiles. . . . .	123
3.14	Profils de température à l'état stationnaire théoriques et simulés selon le coefficient d'échange thermique entre phases $\hat{C}_{lg} = \hat{C}_{gl}$ pour de la conduction thermique diphasique avec production de chaleur volumique à travers une distribution affine de fluides immobiles. . . . .	125
3.15	Schéma pour la simulation d'un écoulement dans une cavité entraînée par le "haut". . . . .	126
3.16	Lignes de courant pour un écoulement en cavité entraînée par le "haut" selon le Reynolds et colorées selon la norme de $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$ comparées à Ghia et al. [76]. . . . .	127
3.17	Convergence en maillage des profils de vitesse dans le plan médian <i>horizontal (en magenta)</i> et <i>"vertical" (en vert)</i> pour un $Re = 1000$ comparée à Ghia et al. 1982 [76]. . . . .	128
3.18	Profils de vitesse dans le plan médian <i>horizontal (en magenta)</i> et <i>"vertical" (en vert)</i> selon le Reynolds comparés à Ghia et al. [76]. . . . .	129
3.19	Résumé du cas de simulation de convection naturelle. . . . .	131
3.20	Lignes de courant pour la convection naturelle colorées par la magnitude de $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$ selon le nombre de Rayleigh, comparées à Massarotti et al. 2006 [125]. . . . .	132
3.21	Isothermes colorées par leur température pour la convection naturelle selon le nombre de Rayleigh, comparées à Massarotti et al. [125]. . . . .	133
3.22	Profils de vitesse dans le plan médian horizontal pour différents nombres de Rayleigh à $Pr = 1$ , comparés aux résultats de Massarotti et al. 2006 [125]. . . . .	134
3.23	Schéma des conditions des tests de convection naturelle en milieu poreux. . . . .	136
3.24	Lignes de courant simulées colorées selon la magnitude de $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$ pour la convection naturelle en milieu poreux selon le nombre Rayleigh poreux à $Pr = 1$ et $Da < 10^7$ . . . . .	137
3.25	Isothermes simulées pour la convection naturelle en milieu poreux selon le nombre de Rayleigh poreux à $Pr = 1$ , $Da < 10^7$ . . . . .	137
A.1	Schéma de la compensation des forces de contact à la frontière du VER. . . . .	145

## Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques des débris en RNR-Na. . . . .	27
1.2	Caractéristiques du sodium liquide en RNR-Na. . . . .	28
1.3	Estimations des grandeurs du lit de débris de corium en RNR-Na. . . . .	44
2.1	Expression et estimation des rapports des temps caractéristiques aux déviations sur les temps caractéristiques macroscopiques pour la convection, la diffusion visqueuse et la diffusion thermique. . . . .	76
3.1	Valeurs des paramètres des écoulements de Darcy simulés. . . . .	108
3.2	Valeur des paramètres des écoulements de Darcy généralisés simulés. . . . .	110
3.3	Paramètres de l'écoulement de Darcy diphasique de sodium pour un modèle d'Ergun généralisé. . . . .	112
3.4	Valeurs des paramètres pour les simulations d'écoulements de Couette plan diphasique à distribution affine du taux d'occupation volumique. . . . .	116
3.5	Comparaison entre la courbe analytique et la courbe simulée pour l'écoulement de Couette plan diphasique à distribution affine du taux d'occupation volumique. . . . .	116
3.6	Paramètres des simulations d'écoulement de Poiseuille plan diphasique. . . . .	119
3.7	Comparaison entre la courbe analytique et la courbe simulée pour l'écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution affine du taux d'occupation volumique. . . . .	119
3.8	Comparaison entre le profil de température dans la hauteur théoriques et simulés pour des coefficients d'interaction thermiques nuls ( $\hat{C}_{ff'} = 0$ ) pour de la conduction thermique diphasique à travers un mélange diphasique suivant une distribution volumique affine de fluide immobile. . . . .	124
3.9	Paramètres des simulations de conduction avec source de chaleur volumique à travers un mélange diphasique de fluide. . . . .	126
3.10	Comparaison entre le profil de température dans la hauteur théoriques et simulés pour des coefficients d'interaction thermiques nuls ( $\hat{C}_{ff'} = 0$ ) pour de la conduction thermique diphasique avec production de chaleur volumique à travers un mélange diphasique suivant une distribution volumique affine de fluide immobile. . . . .	126
3.11	Comparaison des profils de vitesse simulés dans les plans médians aux profils de référence de Ghia <i>et al.</i> [76] pour un écoulement de cavité entraînée. . . . .	129
3.12	Comparaison entre les profils de vitesse dans le plan médian horizontal simulés aux profils issus des travaux de Massarotti <i>et al.</i> 2006 [125] pour un écoulement de convection naturelle dans un carré en 2-D selon le nombre de Rayleigh et à $Pr = 1$ . . . . .	135
3.13	Maximums des profils de vitesses dans le plan médian vertical puis horizontal et le nombre de Nusselt intégral à la paroi chaude pour des écoulements de convection naturelle dans une boîte carrée en 2-D selon le nombre de Rayleigh avec $Pr = 1$ . . . . .	135
3.14	Comparaison du nombre de Nusselt intégral à la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh poreux. . . . .	138



# Nomenclature

## Nombres adimensionnels

$Bo$	Nombre de Bond
$Ca$	Nombre capillaire
$Da$	Nombre de Darcy
$Gr$	Nombre de Grashof
$I$	Nombre d'inertie
$J$	Nombre visqueux
$Nu$	Nombre de Nusselt intégral
$Pe^*$	Nombre de Péclet granulaire
$Pr$	Nombre de Prandtl
$Ra$	Nombre Rayleigh
$Ra^*$	Nombre Rayleigh en milieu poreux
$Re$	Nombre de Reynolds en milieu poreux
$Re^*$	Nombre de Reynolds granulaire
$St$	Nombre de Stokes
$We$	Nombre de Weber

## Alphabet Romain

$\overline{\overline{A}}_{kj}$	Propriété effective dynamique tensorielle hors changement d'état de la phase $k$ relative à la vitesse moyenne de la phase $j$ $m^{-2}$
$A_{kj}$	Propriété effective dynamique scalaire hors changement d'état de la phase $k$ relative à la vitesse moyenne de la phase $j$ $m^{-2}$
$\widehat{A}_{kj}$	Coefficient d'interaction dynamique hors changement d'état de la phase $k$ relative à la vitesse moyenne de la phase $j$ $m^{-2}$
$\widehat{A}_f^*$	Coefficient d'interaction dynamique relative de la phase $f$ pour un écoulement de Darcy généralisé
$\overline{\overline{a}}_{kj}$	Propriété effective dynamique tensorielle de la phase $k$ due au changement d'état, relative à la vitesse moyenne de la phase $j$ $s^{-1}$

$\overline{\overline{a_{kj}}}$	Variable de fermeture tensorielle pour la déviation de la vitesse de la phase $k$ relative à la vitesse moyenne de la phase $j$	—
$\mathbf{b}_{kj}$	Variable de fermeture vectorielle pour la déviation de la pression de la phase $k$ relative à la vitesse moyenne de la phase $j$	$m^{-1}$
$C_{dkk'}$	Coefficient de traînée généralisé entre les phases $k$ et $k'$	$s^{-1}$
$C_{pk}$	Capacité calorifique de la phase $k$	$J.K^{-1}.kg^{-1}$
$C_{kj}$	Propriété effective thermique scalaire hors changement d'état de la phase $k$ relative à la température relative moyenne dans la phase $j$	$m^{-2}$
$\widehat{C}_{kj}$	Coefficient d'interaction thermique hors changement d'état de la phase $k$ relative à la température relative moyenne de la phase $j$	$m^{-2}$
$\mathcal{C}_j^{lg}$	Propriété effective thermique scalaire de la phase $k$ due au changement d'état du sodium relative à la température relative moyenne dans la phase $j$	$J.K^{-1}.m^{-3}.s^{-1}$
$c_{kj}$	Variable de fermeture de la déviation de la température relative de la phase $k$ relative à la température relative moyenne de la phase $j$	—
$c$	Borne minimale choisie de la distribution diphasique affine du taux d'occupation volumique	—
$\mathbf{D}_{kj}$	Propriété effective thermique vectorielle hors changement d'état de la phase $k$ relative au gradient de température moyenne dans la phase $j$	$m^{-1}$
$\mathcal{D}_j^{lg}$	Propriété effective thermique vectorielle de la phase $k$ due au changement d'état du sodium relative au gradient de température moyenne dans la phase $j$	$J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-1}$
$d$	Diamètre des particules	$m$
$\mathbf{d}_{kj}$	Variable de fermeture de la déviation de la température relative de la phase $k$ relative au gradient de la température moyenne de la phase $j$	$m$
$E_{Br}$	Énergie d'agitation thermique ou Brownienne	$J$
$E_v$	Énergie de frottement visqueux du fluide sur une particule	$J$
$\mathbf{e}_i$	Vecteur directeur unitaire de la direction $i$	—
$F$	Facteur de forme	$m$
$\mathbf{f}_{qp}$	Force de contact exercée par une particule $q$ sur la particule $p$	$N$
$\mathbf{f}_{q'}$	Résultante des forces exercées par la particule $q'$ sur les particules du VER	$N$
$\mathbf{g}$	Accélération de la pesanteur	$m.s^{-2}$
$H$	Hauteur	$m$
$h_k$	Enthalpie massique de la phase $k$	$J.kg^{-1}$
$h_k^{sat}$	Enthalpie massique de la phase $k$ à la température de saturation du sodium	$J.kg^{-1}$

$\Delta h^{vap}$	Chaleur latente de vaporisation du sodium	$J.kg^{-1}$
$\bar{I}$	Matrice identité	—
$K$	Perméabilité	$m^2$
$K_f$	Perméabilité relative de la phase $f$	—
$k_B$	Constante de Boltzmann	$J.K^{-1}$
$L$	Longueur caractéristique macroscopique du lit de débris	$m$
$L_c$	Longueur capillaire	$m$
$\mathcal{L}$	Longueur caractéristique	$m$
$l_k$	Longueur caractéristique locale de la phase $k$	$m$
$\mathbf{M}\mathbf{i}_k$	Résultante des forces interfaciales généralisées de la phase $k$	$m.s^{-2}$
$M_{Na}$	Masse molaire du sodium	$kg.mol^{-1}$
$\dot{m}_{kk'}$	Débit massique par unité de volume de changement d'état de la phase $k$ vers la phase $k'$	$kg.m^{-3}.s^{-1}$
$N_{tot}$	Nombre total de particules dans le lit de débris	—
$N$	Nombre de particules du VER	—
$\mathbf{n}_k$	Vecteur normal à la surface	—
$P$	Pression du mélange	$Pa$
$P_k$	Pression de la phase $k$	$Pa$
$P_p$	Pression granulaire	$Pa$
$\dot{q}_k$	Puissance spécifique de la phase $k$	$J.kg^{-1}.s^{-1}$
$Q_g$	Débit volumique d'injection de gaz	$L/min$
$R$	Constante des gaz parfait	$J.K^{-1}.mol^{-1}$
$R_{kk'}$	Rayon de courbure à l'interface entre les phases $k$ et $k'$	$m^{-1}$
$r_0$	Rayon du VER	$m$
$S$	Surface du lit de débris	$m^2$
$S_k$	Surface de l'interface de la phase $k$	$m^2$
$S_{kk'}$	Surface de l'interface entre la phase $k$ et la phase $k'$	$m^2$
$T$	Température thermostatée	$K$
$T_k$	Température de la phase $k$	$K$



$T^{sat}$	Température de saturation du sodium	$K$
$\mathcal{T}_{lg}$	Tension superficielle du sodium	$kg.s^{-2}$
$t$	Temps	$s$
$\mathbf{U}$	Vitesse de la plaque	$m.s^{-1}$
$V$	Volume du VER	$m^3$
$V_c$	Volume total de corium du lit de débris	$m^3$
$V_p$	Volume d'une particule de corium	$m^3$
$V_k$	Volume de la phase $k$ compris dans le VER	$m^3$
$\mathbf{v}_k$	Vitesse de la phase $k$	$m.s^{-1}$
$\mathbf{w}_{kk'}$	Vitesse de déplacement de l'interface entre les phases $k$ et $k'$	$m.s^{-1}$
$x$	Abscisse horizontale	
$y$	Ordonnée horizontale	
$z$	Ordonnée verticale	

### Alphabet Grec

$\alpha_k$	Diffusivité thermique de la phase $k$	$m^2.s^{-1}$
$\alpha_{kEff}$	Diffusivité thermique effective de la phase $k$	$m^2.s^{-1}$
$\beta_k$	Coefficient de dilation thermique de la phase $k$	$K^{-1}$
$\dot{\gamma}_s$	Taux de cisaillement de la phase solide particulaire	$s^{-1}$
$\delta_f$	Coefficient d'inflexion diphasique pour une distribution affine de la phase $f$	$m^{-1}$
$\delta_{kj}$	Symbole de Kronecker	—
$\varepsilon_k$	Taux d'occupation volumique de la phase $k$	—
$\eta_k$	Viscosité dynamique de la phase $k$	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\eta_r$	Viscosité dynamique relative	—
$\Theta_k$	Température relative de la phase $k$ par rapport à la température de saturation du sodium	$K$
$\theta$	Angle à la base du tas	—
$\Lambda_{kj}$	Coefficient de transfert thermique de Newton à l'interface entre les phases $k$ et $j$	$s^{-1}$
$\Lambda_{\dot{m}_{kj}}$	Coefficient de transfert thermique par changement d'état entre les phases $k$ et $j$	$K$
$\lambda_k$	Conductivité thermique de la phase $k$	$J.K^{-1}.m^{-1}.s^{-1}$
$\mu(I)$	Coefficient de friction granulaire inertiel	—

$\mu(J)$	Coefficient de friction granulaire visqueux	—
$\nu_k$	Viscosité cinématique de la phase $k$	$m^2.s^{-1}$
$\nu_{kEff}$	Viscosité cinématique effective de la phase $k$	$m^2.s^{-1}$
$\xi_k$	Grandeur quelconque de la phase $k$	
$\rho_k$	Masse volumique de la phase $k$	$kg.m^{-3}$
$\Delta\rho_{kk'}$	Écart entre les masses volumiques des phases $k$ et $k'$	$kg.m^{-3}$
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes des particules	$Pa$
$\tau_{ck}$	Temps caractéristique de convection de la phase $k$	$s$
$\tau_{tk}$	Temps caractéristique de diffusion thermique de la phase $k$	$s$
$\tau_{vk}$	Temps caractéristique de diffusion visqueuse de la phase $k$	$s$
$\bar{\tau}_k$	Tenseur des contraintes visqueuses	$Pa$
$\varphi_{lg}$	Flux massique de changement d'état du sodium à l'interface liquide-gaz	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
$\phi_{pk}$	Flux thermique de la particule $p$ vers la phase $k$	$J.m^{-2}.s^{-1}$
$\psi_k$	Grandeur scalaire quelconque de la phase $k$	
$\psi_{\mathbf{k}}$	Grandeur vectoriel quelconque de la phase $k$	
$\overline{\psi}_k$	Grandeur tensorielle quelconque de la phase $k$	
$\langle\psi_k\rangle$	Moyenne de phase de la grandeur $\psi_k$	
$\langle\psi_k\rangle^k$	Moyenne intrinsèque de la grandeur $\psi_k$	
$\langle\psi_k\rangle^p$	Moyenne particulaire de la grandeur $\psi_k$	
$\langle\psi_k\rangle_{kk'}$	Moyenne surfacique de la grandeur $\psi_k$ sur la surface de l'interface entre les phases $k$ et $k'$	
$\widetilde{\psi}_k^k$	Déviations de la grandeur $\psi_k$ par rapport à la moyenne intrinsèque	
$\widetilde{\psi}_k^p$	Déviations de la grandeur $\psi_k$ par rapport à la moyenne particulaire	

## Indices

$\infty$	Désigne une grandeur à l'état stationnaire
$c$	Désigne le corium ou la phase continue
$d$	Désigne la phase dispersée
$f$	Désigne les phases fluides ( $l, g$ )
$f'$	Désigne les phases fluides ( $l, g$ ) différentes de $f$
$i$	Désigne les phases ( $l, s$ )

- $j$  Désigne les phases ( $l, g, s$ )
- $k$  Désigne les phases ( $l, g, s$ )
- $k'$  Désigne les phases ( $l, g, s$ ) différentes de  $k$
- $m$  Désigne le mélange
- $p$  Désigne les propriétés de la particule  $p$
- $q$  Désigne les particules du VER
- $q'$  Désigne les particules extérieures au VER en contact avec des particules du VER

## Acronymes

<b>ASTRID</b>	<i>Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration</i>
<b>DEM</b>	Méthode aux Éléments Discrets
<b>DNS</b>	<i>Direct Numerical Simulation</i>
<b>FCI</b>	<i>Fuel Coolant Interaction</i>
<b>GPL</b>	<i>General Public License</i>
<b>LBM</b>	<i>Lattice Boltzmann Method</i>
<b>LEGI</b>	Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels
<b>MPMV</b>	Méthode de la Prise de Moyenne Volumique
<b>OpenFOAM</b>	<i>Open source Field Operation And Manipulation</i>
<b>PbMNF</b>	Problème Moyenné Non Fermé
<b>PbD</b>	Problème aux Déviations
<b>PbF</b>	Problèmes de Fermeture
<b>PbMF</b>	Problème Moyenné Fermé
<i>PM</i>	Premier Membre
<i>SM</i>	Second Membre
<b>QDM</b>	Quantité De Mouvement
<b>REP</b>	Réacteur à Eau Pressurisée
<b>RNR-Na</b>	Réacteur à Neutrons Rapides refroidi au Sodium
<b>ULOF</b>	<i>Unprotected Loss Of Flow</i>
<b>VER</b>	Volume Élémentaire Représentatif



## Introduction

Dans un monde subissant les effets du changement climatique dû aux émissions de gaz à effet de serre, l'énergie nucléaire est une source d'énergie fiable et bas carbone. Les centrales nucléaires tirent leur puissance de la réaction de **fission nucléaire**. La fission nucléaire est la réaction par laquelle un noyau d'atome lourd dit **fissile** est scindé en deux plus petits noyaux appelés **produits de fission** suite à l'absorption d'un neutron. Cette réaction produit une grande quantité d'énergie, notamment sous la forme de chaleur. Elle peut aussi produire des neutrons en plus des produits de fission, qui dans les bonnes conditions peuvent entraîner la fission induite des atomes fissiles proches. C'est la réaction en chaîne. En maîtrisant cette réaction en chaîne, les centrales nucléaires produisent une grande quantité de chaleur que l'on peut convertir en électricité. Pour cela, on procède de même que pour les centrales thermiques. On génère de la vapeur d'eau avec la chaleur extraite et on détend cette vapeur dans un alternateur qui produit de l'électricité.

Il existe cependant de très nombreux concepts de réacteurs nucléaires utilisant différents combustibles, caloporteurs (système d'extraction de la chaleur), différentes puissances, etc. Les plus répandus dans le monde sont les réacteurs à eau légère, également les plus répandues en France sous la forme de **Réacteurs à Eau Pressurisée (REP)** dits de génération III. Mais de nombreux autres types de réacteur existent ou sont à l'étude et notamment ceux dits de génération IV. Ils sont définis autour de 4 axes d'amélioration principaux :

**Durabilité** : Production d'énergie à long terme et réduction des déchets nucléaires.

**Sûreté et fiabilité** : Être plus sûres par conception.

**Non prolifération** : Limiter au maximum leur intérêt pour la production d'arme nucléaire.

**Économique** : Faire cela à des coûts et des risques financiers compétitifs avec les autres réacteurs.

Parmi ces réacteurs, on peut citer la filière des **Réacteurs à Neutrons Rapides refroidi au Sodium (RNR-Na)**. Ces réacteurs utilisent des neutrons très énergétiques dits **rapides** contrairement aux réacteurs à eau légère qui fonctionnent avec des neutrons modérés dits **thermiques**. Cela permet entre autres d'élargir la gamme de noyaux pouvant servir de combustible. Le sodium est justement choisi parce qu'il modère très peu les neutrons, et entre autres parce qu'il conduit très bien la chaleur et favorise les écoulements par convection naturelle. La France s'est dotée de plusieurs RNR-Na par le passé : d'abord avec les réacteurs de recherche Rapsodie (1967-1983), puis Phénix (1973-2010) et le démonstrateur industriel Superphénix (1984-1998) et a travaillé sur le projet ASTRID pour *Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration*.

La Fig. 1 schématise les éléments constitutifs d'un RNR-Na. Le réacteur à proprement parler (partie gauche de la figure) est placé dans un bâtiment généralement en béton appelé l'**enceinte**. Le réacteur est quant à lui contenu dans une grande **cuve** en acier. Cette cuve peut contenir plus ou moins de dispositifs selon les concepts. Dans le projet ASTRID, on trouve notamment les échangeurs de chaleur et les pompes primaires en périphérie. Au centre, outre les dispositifs de contrôle et de mesure, on trouve le combustible. Celui-ci, sous forme de **pastilles annulaires**, est aligné dans une **aiguille** protégée par une **gaine**. Ces gaines sont disposées en **assemblages** hexagonaux fermés verticaux

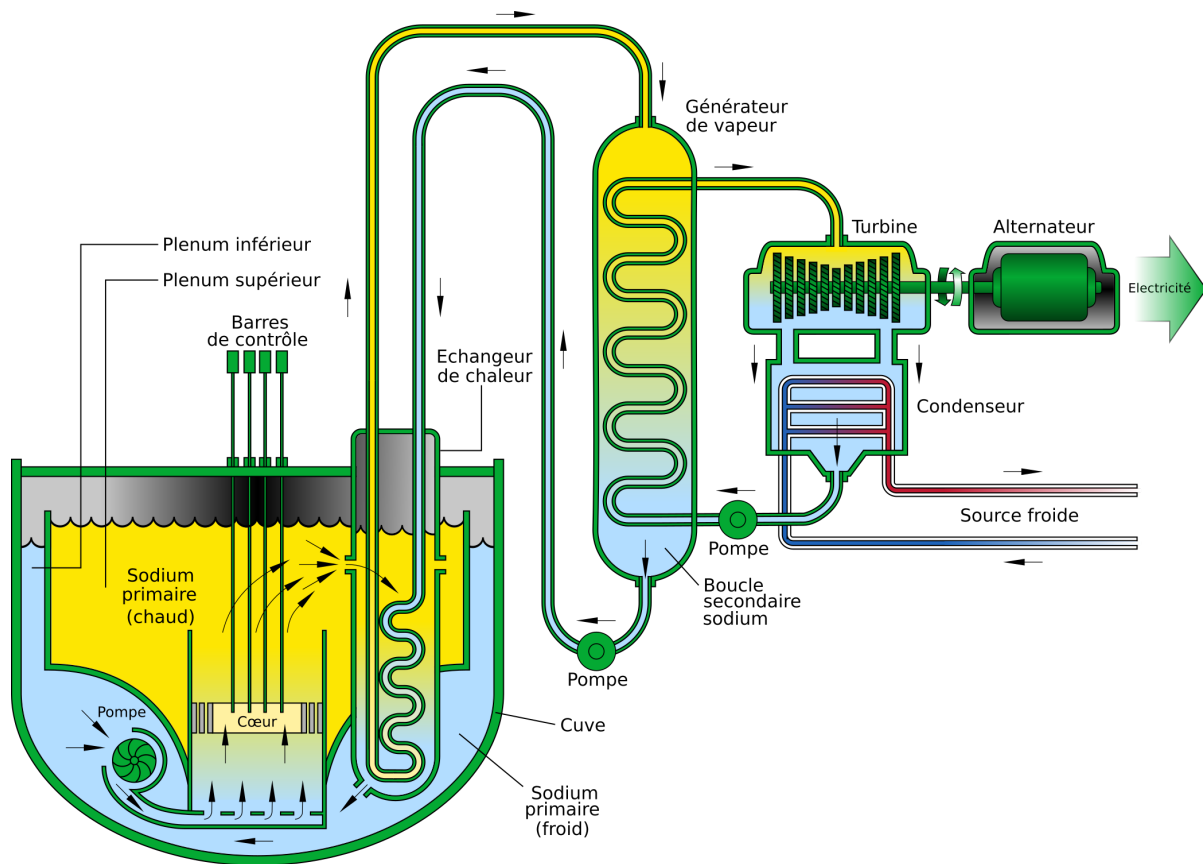


Figure 1 – Schéma de fonctionnement d'un RNR-Na.

qui forment le **cœur**. Sous le cœur, on trouve le **sommier**, et ils sont tous deux soutenus dans la cuve par le **platelage**.

Comme tout dispositif industriel, les centrales nucléaires sont susceptibles de subir des incidents et hypothétiquement des accidents. Leur nature nucléaire rend ces accidents très dangereux pour les populations et pour l'environnement. On parle d'**accident grave** lorsque qu'après une succession de dysfonctionnements importants, le cœur entre en fusion totale ou partielle. Il forme alors un magma d'acier et de combustible fondus que l'on nomme **corium**. Les quatre accidents graves ayant survenus sont : SRE de Santa Susanna en 1959 et de Three Mile Island (TMI-2) en 1979 aux États-Unis, Chernobyl en 1986 en Ukraine, et Fukushima Daiichi en 2011 au Japon. À ce jour, aucun accident de ce type n'est connu pour des RNR-Na. On les étudie cependant préventivement de sorte à réduire la probabilité que ces événements surviennent par conception : c'est la **prévention**. Mais on les étudie également pour mettre en place des dispositifs de sûreté permettant de limiter les conséquences d'un accident s'il survient. On parle de **mitigation**. Cette thèse traite du lit de débris de corium qui peut apparaître lors d'un accident grave en RNR-Na afin de contribuer au dimensionnement du dispositif de mitigation qu'est le **récupérateur de corium**, placé au-dessus du fond de cuve et destiné à recevoir le corium lors de sa relocalisation gravitaire. En entrant dans le plenum inférieur, le corium se fragmente au contact du sodium froid, en débris de corium solide qui sédimentent en un **lit de débris** sur le récupérateur.

Dans cette thèse, on présente le contexte dans le premier chapitre **§ 1** : soit la formation du lit de débris de corium et sa phénoménologie, mais aussi un état de l'art sur les écoulements granulaires, avant de présenter la méthode de modélisation choisie pour suivre la configuration du lit de débris dans le temps. On établit alors un modèle macroscopique théorique du lit de débris selon cette méthode dans le chapitre **§ 2**. Puis on réalise une implémentation partielle de ce modèle dans le chapitre **§ 3** que l'on vérifie. On résume finalement les conclusions de cette étude et les perspectives qu'elle ouvre.



# 1 - Chapitre 1 : Contexte

Dans ce premier chapitre, on pose le cadre de cette étude. Premièrement, on expose les conditions de formation, les caractéristiques et la phénoménologie d'un lit de débris de corium pouvant exister dans le cas hypothétique d'un accident grave sur un Réacteur à Neutrons Rapides refroidi au Sodium (RNR-Na), permettant de comprendre les enjeux de sûreté associés. On présente ensuite des travaux de modélisation et expérimentaux visant à le décrire. Cette présentation conduit à s'intéresser à l'évolution temporelle de la configuration du lit de débris et en particulier au mouvement de la phase solide particulaire qui le compose. On présente alors les écoulements granulaires et la diversité des modélisations existantes dans la littérature. On estime ensuite des nombres adimensionnels caractéristiques pour ces études permettant de déterminer les phénomènes prépondérants et devant être considérés et de choisir l'approche de modélisation la plus adaptée. Enfin, on donne la méthode choisie et l'on explicite les raisons de ce choix.

## 1.1. Accidents graves et lits de débris

Ce manuscrit porte sur la modélisation du comportement thermohydraulique d'un lit de débris de corium sur le récupérateur en RNR-Na au cours d'un accident grave et plus particulièrement sur le nivellement de ce lit. On parle d'**accident grave** dans le cadre des réacteurs nucléaires lorsque le cœur entre en fusion partielle ou totale, à la suite d'une succession de dysfonctionnements importants. Ces travaux sont donc justifiés par des enjeux de sûreté. L'objectif de la gestion de crise est alors d'empêcher, sinon de limiter, tout rejet radioactif vers l'extérieur afin de protéger les populations et l'environnement. Pour cela, on doit maintenir autant que possible l'intégrité de la deuxième barrière de sûreté (la cuve) et de la troisième barrière (l'enceinte), la première barrière (la gaine) ayant perdu son intégrité. Le récupérateur de corium, situé en fond de cuve (voir *Fig. 1.1*), est un élément qui a justement pour objectif de protéger la deuxième barrière.

Une fois en situation d'accident grave, les éléments constitutifs de la structure du cœur forment une sorte de magma d'acier et de combustible fondus que l'on nomme le **corium**. Ce mélange en fusion, extrêmement chaud ( $\approx 3000\text{ K}$ ) et dense, est difficile à contenir. Le corium se relocalise alors dans le réacteur et occasionne de nombreux phénomènes. L'enchaînement de ces situations au cours du temps lors d'un accident grave compose une **séquence accidentelle**. Dans cette section, on présente une séquence accidentelle menant à la formation d'un lit de débris sur le récupérateur de corium d'un RNR-Na. On précise alors ensuite ce qu'est un lit de débris, quelles sont ses caractéristiques et pourquoi on se propose de le modéliser dans cette thèse.

### 1.1.1. La Séquence accidentelle (RNR-Na)

On présente un exemple de séquence accidentelle hypothétique en RNR-Na de type ASTRID, à l'origine de la formation d'un lit de débris [15] [184]. On considère un scénario ULOF (*Unprotected Loss Of Flow*) [6] caractérisé par la perte de débit du caloporteur dans le cœur en puissance. Elle est schématisée par la *Fig. 1.1*.

Après une succession de dysfonctionnements importants, on considère le scénario ULOF. Une partie du combustible chauffe jusqu'à atteindre sa température de fusion ( $\approx 3000\text{ K}$ ). Une portion d'une ou plusieurs gaines fondent et forment un corium. On est en situation d'accident grave. Avec la fonte des assemblages voisins, on observe la formation d'un bain de corium liquide très chaud et très dense dans le cœur. Sous cette forme, la réactivité du combustible d'un réacteur à neutrons rapides augmente suite à sa compaction, contrairement au réacteur à neutrons thermiques. Le réacteur est pourvu de tubes de transfert, canaux verticaux remplis de caloporteur (sodium) traversant le cœur, le sommier et le platelage. Ils permettent de relocaliser le corium liquide hors de la zone du cœur le plus rapidement possible afin de diminuer la réactivité. Ils doivent également permettre de limiter la dégradation du cœur et de diminuer l'inventaire de corium créé tout en le dirigeant vers le dispositif destiné à sa réception : le **récupérateur de corium**. Le corium rencontre le caloporteur froid une première fois lorsqu'il perce les tubes de transfert. Une première fragmentation partielle du corium qui se resolidifie au contact du sodium beaucoup plus froid et une explosion de vapeur peuvent survenir [44].

On considère que le corium liquide se relocalise vers le fond de la cuve selon les tubes de transfert. Il entre alors une seconde fois en contact avec le caloporteur froid dans la partie inférieure de la cuve (**plénum inférieur**). Il se solidifie de nouveau et se fragmente en de nombreux débris sous l'action de différents phénomènes comme l'explosion de vapeur, le refroidissement de gouttelettes ou la fragmentation thermique du corium resolidifié en contact avec le caloporteur sodium [168].

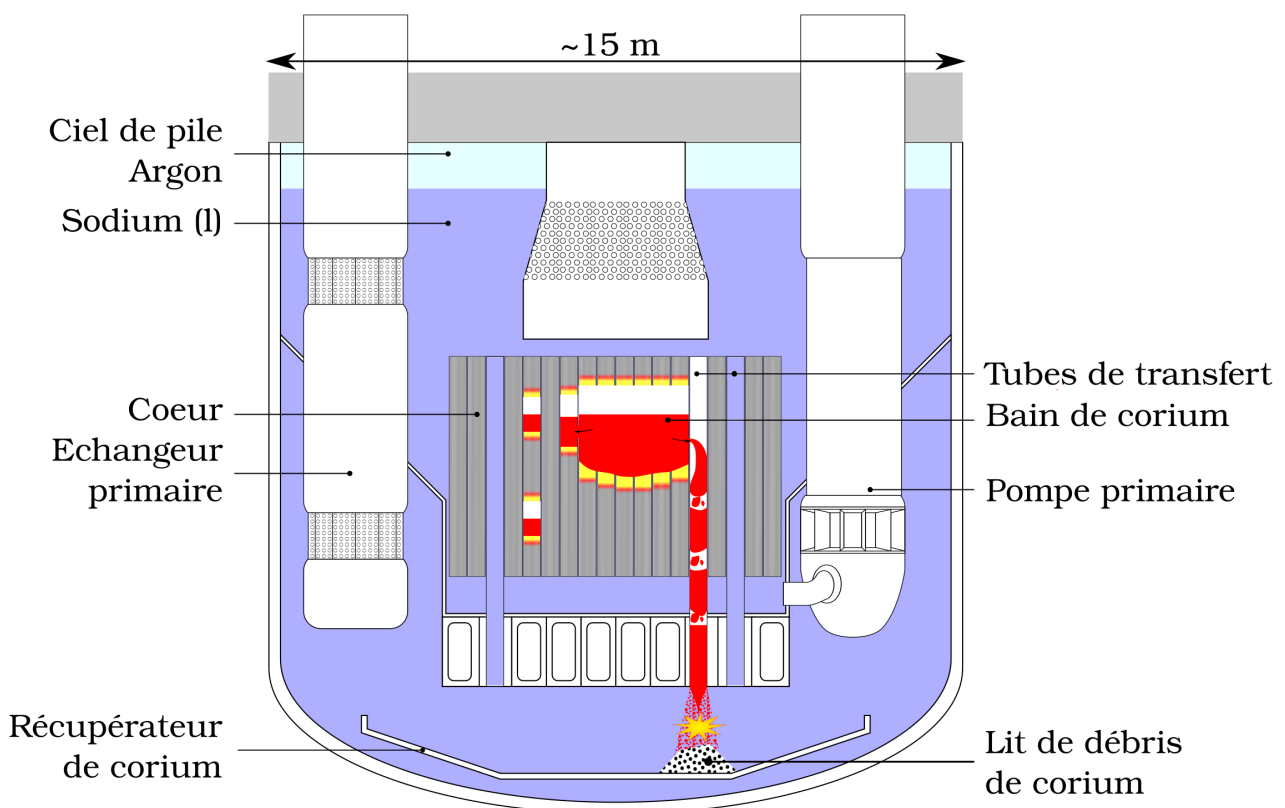


Figure 1.1 – Schéma de la séquence accidentelle dans la cuve d'un RNR-Na.

Ces phénomènes sont regroupés sous l'appellation d'interaction corium caloporteur ou FCI pour *Fuel Coolant Interaction* [89]. Les débris sédimentent ensuite sous l'effet de la gravité, et forment un **lit de débris** sur le récupérateur de corium qui protège le fond de cuve [168].

Le lit de débris de corium, supposé sous-critique, est le siège de la puissance résiduelle du combustible issue des produits de fission. Le sodium qui immerge le lit de débris doit permettre son refroidissement et stabiliser le corium dans cet état. Si l'évacuation de la chaleur est insuffisante, la température du lit pourrait atteindre à nouveau la température de fusion du combustible. Ils formeraient alors de nouveau un bain de corium, qui pourrait ablater à terme le récupérateur, et couler vers le fond de la cuve, puis la percer [57]. On perdrait ainsi l'intégrité de la deuxième barrière et seule l'enceinte de confinement protégerait l'environnement contre la contamination radioactive.

On s'intéresse spécifiquement au lit de débris dans ce manuscrit et toutes les étapes et tous les phénomènes menant à la formation du lit de débris, ou postérieur à la fusion totale ou partielle des débris sont hors du cadre de cette étude.

### 1.1.2. Caractéristiques d'un lit de débris en RNR-Na

Le lit de débris se compose de nombreuses particules de corium solidifiées, immergées dans du sodium liquide qui peut atteindre l'ébullition. Selon les travaux de Schummer [168] et de Geroudet & Balard [75], le lit de débris peut recouvrir le récupérateur sur une surface entre 10 et 40  $m^2$  pour une hauteur de 2 à 10  $cm$ . Il se compose de débris de corium solidifiés (d'acier ou de combustible), de tailles très variables (30  $\mu m$  à 10  $mm$ ), pour une porosité comprise entre 0.38 et 0.42. La taille des débris est plutôt uniformément répartie bien que certaines expériences aient montré soit une majorité de petits débris, soit une majorité de gros débris, comme le montre la *Fig. 1.2*. On peut estimer le nombre de débris par la formule (1.1) à entre  $2.8 \cdot 10^4$  et  $2.2 \cdot 10^{13}$  particules, à partir du volume précédemment évoqué et pour des débris supposés sphériques.

$$N_{tot} = \frac{V_c}{V_p} = \frac{\varepsilon_s S H}{\frac{\pi}{6} d^3} \quad (1.1)$$

où  $N_{tot}$  est le nombre total de débris,  $V_c$  est le volume de corium du lit de débris et  $V_p$  celui d'une particule de corium considérée sphérique.  $\varepsilon_s$  représente le taux d'occupation volumique solide,  $S$  la surface du lit nivelé,  $H$  sa hauteur et  $d$  le diamètre des débris.

Ces débris sont formés sous l'action de divers phénomènes et sont donc de composition, de taille et de forme très diverses. Par exemple, les débris d'acier peuvent se former à partir de gouttes en fusion refroidies par le sodium formant des débris pratiquement sphériques. Tandis que les débris de combustible peuvent se former par fragmentation thermique de gouttes partiellement solidifiées [168]. Les débris incluant du combustible sont la source d'une puissance résiduelle issue des produits de fission qui se traduit par une importante production de chaleur. Ils admettent une puissance spécifique entre 1 et 5  $W.g^{-1}$  d' $UO_2$  pour des coulées de corium entre quelques tonnes et plus d'une centaine de tonnes [36]. On résume les propriétés des débris dans la Table 1.1.

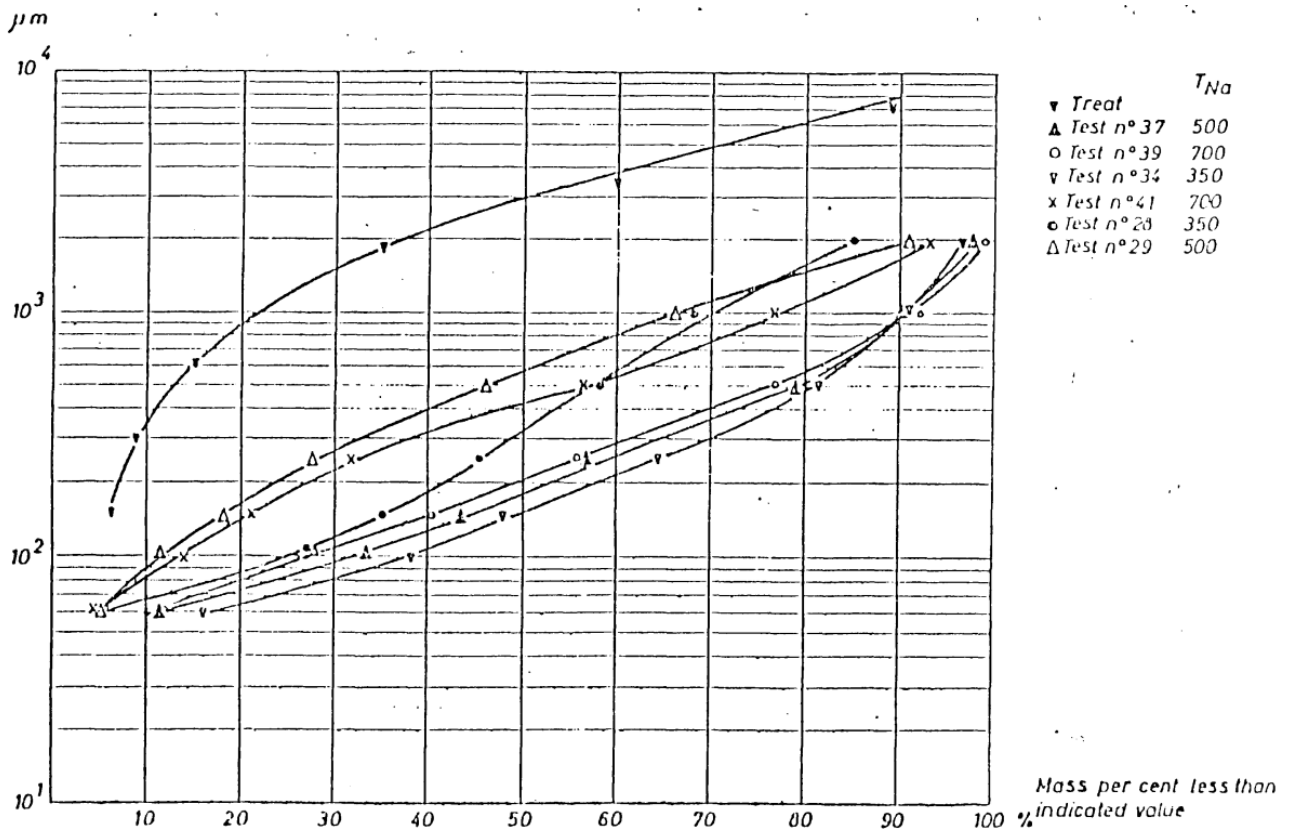


Figure 1.2 – Taille des particules selon le pourcentage massique de corium pour différentes expérimentations de fragmentation.  
 Extrait du rapport de Schummer [168].

Grandeur	Notation	Estimation
Hauteur	$H$	2 – 10 cm
Surface	$S$	10 – 40 m <sup>2</sup>
Diamètre d'un débris	$d$	30 μm – 10 mm
Nombre total de débris	$N_{tot}$	$2.8 \cdot 10^4$ – $2.2 \cdot 10^{13}$
Porosité	$1 - \varepsilon_s$	0.38 – 0.42
Puissance résiduelle	$\dot{q}_s$	1000 – 5000 W.kg <sup>-1</sup> d'UO <sub>2</sub>
Densité des débris de corium	$\rho_s$	8000 – 11000 kg.m <sup>-3</sup>

Table 1.1 – Caractéristiques des débris en RNR-Na.

On suppose que l'inventaire en sodium n'est significativement pas perdu pendant l'accident. Le lit de débris reste donc immergé dans du sodium liquide et gazeux. Geroudet & Balard [75] donne une température de saturation de 1253 K qui implique une pression de vapeur saturante de 2.3 bar [17]. Il est possible que la température dans le lit atteigne cette température d'ébullition, et ainsi qu'une partie du sodium liquide se vaporise. Le sodium liquide présente une très bonne conductivité thermique ( $\approx 60 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) [114]. On résume les caractéristiques du sodium liquide dans la Table 1.2.

Grandeur	Notation	Estimation
Conductivité thermique du sodium liquide	$\lambda_l$	$50 - 80 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Température d'ébullition du sodium	$T^{sat}$	$1253 \text{ K}$
Densité du sodium liquide	$\rho_l$	$700 - 850 \text{ kg.m}^{-3}$
Viscosité dynamique du sodium liquide	$\eta_l$	$1.23 \cdot 10^{-4} - 2.39 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Chaleur latente massique de vaporisation	$\Delta h^{vap}$	$3.9 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$

Table 1.2 – Caractéristiques du sodium liquide en RNR-Na.

Pour estimer plus finement les propriétés du sodium, on rapporte les corrélations qui suivent. Celles donnant la densité (1.2), la viscosité dynamique (1.4), la conductivité thermique (1.6) et la capacité calorifique (1.7) du sodium liquide sont issues de l'ouvrage de Bonin *et al.* [17]. La densité de la vapeur de sodium est estimée à partir de la loi des gaz parfaits (1.3). La viscosité dynamique de la vapeur de sodium (1.5) est estimée à partir de la corrélation de Stefanov *et al.* [178] issue du livre de Foust [70].

$$\rho_l = 950.0483 - 0.2298T_l - 1.46045 \cdot 10^{-5}T_l^2 + 5.6377 \cdot 10^{-9}T_l^3 \text{ kg.m}^{-3} \quad (1.2)$$

$$\rho_g = \frac{P_g M_{Na}}{R(T_g + 273.15)} \quad (1.3)$$

$$\log \eta_l = -2.4892 + \frac{220.65}{T_g} - 0.4925 \log T_g \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad (1.4)$$

$$\eta_g = 1.4273 \cdot 10^{-5} + 6.083 \cdot 10^{-9}(T_g - 273.15) \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad (1.5)$$

$$\lambda_l = 135.6 - 0.167(T_l - 273.15) \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad (1.6)$$

$$C_{pl} = 1436.715 - 0.5805(T_l - 273.15) + 4.6273 \cdot 10^{-4}(T_l - 273.15) \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad (1.7)$$

où  $T_l$  et  $T_g$  sont respectivement la température en  $K$  du sodium liquide et gazeux.  $P_g$  désigne la pression du sodium gazeux,  $M_{Na}$  est la masse molaire du sodium et  $R$  représente la constante des gaz parfaits.  $\lambda_l$  et  $C_{pl}$  symbolisent respectivement la conductivité thermique et la capacité calorifique du sodium liquide.

### 1.1.3. Phénoménologie d'un lit de débris en RNR-Na

Le lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na est un système complexe faisant intervenir de nombreux phénomènes à la frontière des différentes disciplines de la physique que sont la thermohydraulique, les écoulements granulaires et les écoulements en milieu poreux. Il s'agit aussi d'un milieu multi-échelle avec des phénomènes microscopiques à la surface des débris et des phénomènes d'ensemble à l'échelle de lit (échelle macroscopique). Nombre de ces phénomènes sont décrits en détail dans le rapport de Schummer [168] et de Geroudet & Balard [75].

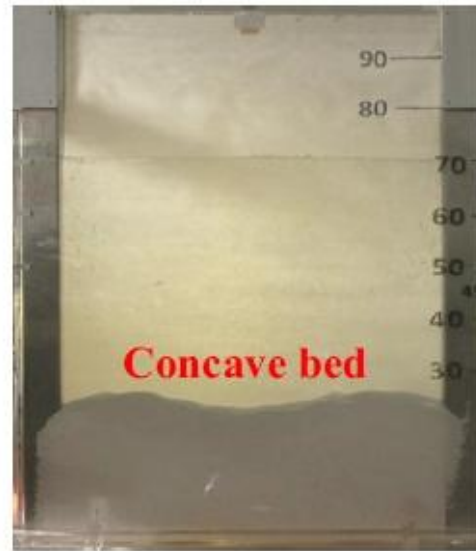
#### 1.1.3.1. Formation du lit de débris

Les débris se forment quand le corium entre en contact avec le sodium liquide bien plus froid dans le plénum inférieur ou les tubes de transfert. Ils sédimentent sous l'effet de la gravité et constituent un tas sous la sortie du tube de transfert. Cette fragmentation du jet de corium lors de sa pénétration dans le sodium liquide s'accompagne d'une vaporisation d'une partie du sodium. La sédimentation

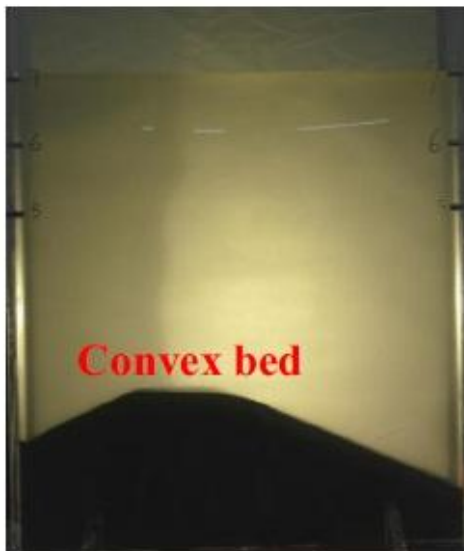
des débris est affectée par cet écoulement de vapeur, et le tas débris final n'est pas nécessairement conique (convexe), mais peut aussi prendre des formes trapézoïdales ou concaves. Ces configurations obtenues expérimentalement par Cheng *et al.* [30] ou Shamsuzzaman *et al.* [169] par sédimentation de particules avec injection de gaz à contre-courant sont représentées sur la Fig. 1.3.



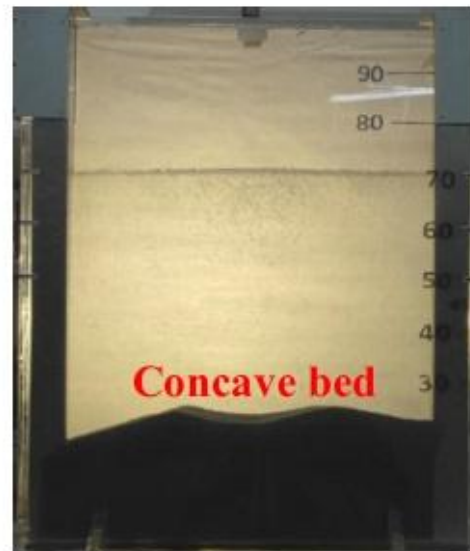
(a) Alumina,  $d_s = 0.8\text{mm}$ ,  $Q_g = 0\text{L/min}$



(b) Alumina,  $d_s = 0.8\text{mm}$ ,  $Q_g = 20\text{L/min}$



(c) Steel,  $d_s = 1\text{mm}$ ,  $Q_g = 0\text{L/min}$



(d) Steel,  $d_s = 1\text{mm}$ ,  $Q_g = 50\text{L/min}$

Figure 1.3 – Configurations possibles du lit de débris après sédimentation avec injection de gaz à contre-courant.

Extrait des travaux de Cheng *et al.* [27].

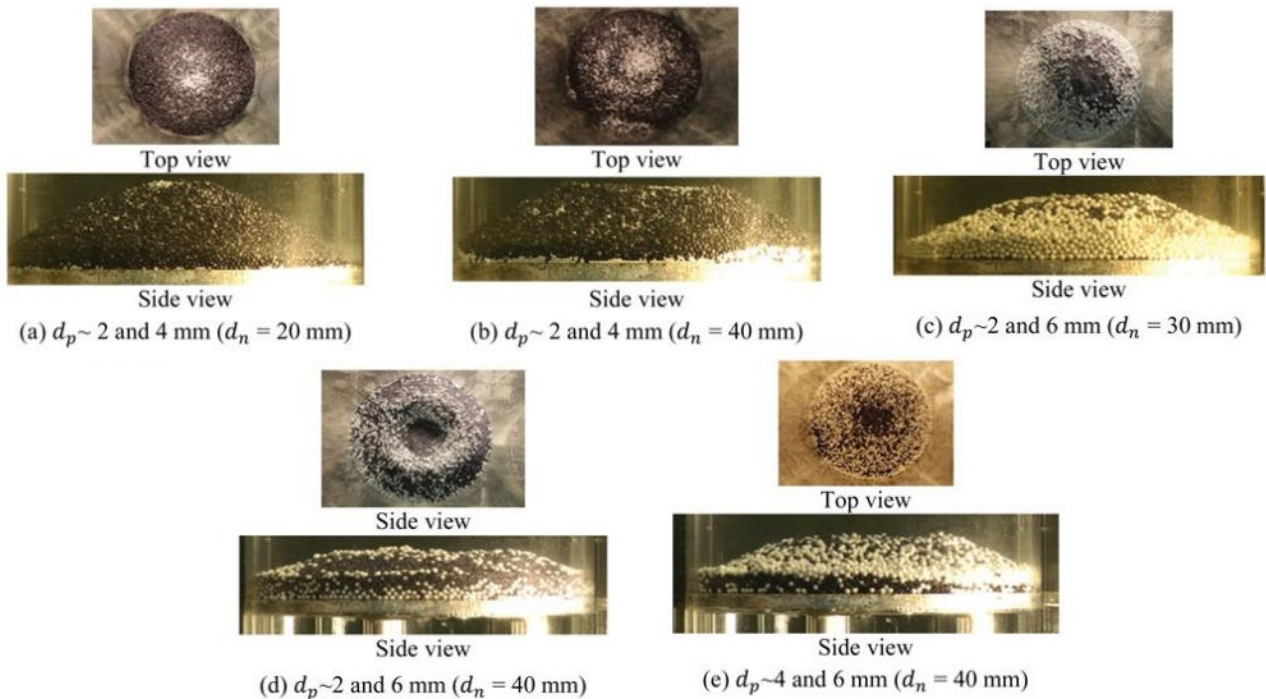


Figure 1.4 – Cas expérimental de ségrégation par diamètre après sédimentation gravitaire dans de l'eau. Extraits des travaux de Sheikh et al. [170]

Plusieurs phénomènes sont à l'origine de la fragmentation des débris qui sont alors de compositions, de formes et de tailles variées [168]. Par exemple, certains débris se forment par solidification de goutte d'acier en fusion au contact du sodium et ont une forme sphérique peu rugueuse. À l'inverse, les débris de combustible peuvent se former par fragmentation thermique de plus gros débris de corium resolidifié au contact du caloporteur, sous l'action de la dilatation thermique. Ils forment ainsi des débris rugueux et plus aplatis que les débris métalliques. Les propriétés de ces débris influencent leur sédimentation et on peut observer des hétérogénéités dans le lit de débris. On parle de **ségrégation** dans le cadre de l'étude des écoulements granulaires. On peut alors envisager un lit de débris stratifiés entre débris métallique et débris combustible à cause de l'influence de la densité sur la sédimentation [141], ou celle de la forme des débris [130]. On peut également envisager un regroupement des débris selon leur taille. En effet, on sait que lors de l'effondrement d'une colonne ou de la formation d'un tas par écoulement gravitaire, les plus gros débris ont tendance à rester au centre du tas [170] (voir Fig. 1.8). Ces hétérogénéités ont une influence sur le comportement du lit de débris, que l'on exposera après avoir présenté les phénomènes dans le cas d'un lit homogène.

### 1.1.3.2. Les Écoulements d'un lit de débris

Le sodium liquide environnant pénètre par écoulement gravitaire et capillaire dans le lit de débris. Il évacue alors la puissance résiduelle issue des débris du fait de sa grande conduction thermique et de son augmentation de température. Le sodium circule alors dans le lit par convection naturelle. Il peut atteindre la température de vaporisation et entrer en ébullition. On est alors en présence d'un écoulement diphasique de sodium (liquide et vapeur) dans le lit comme le représente la Fig. 1.5.

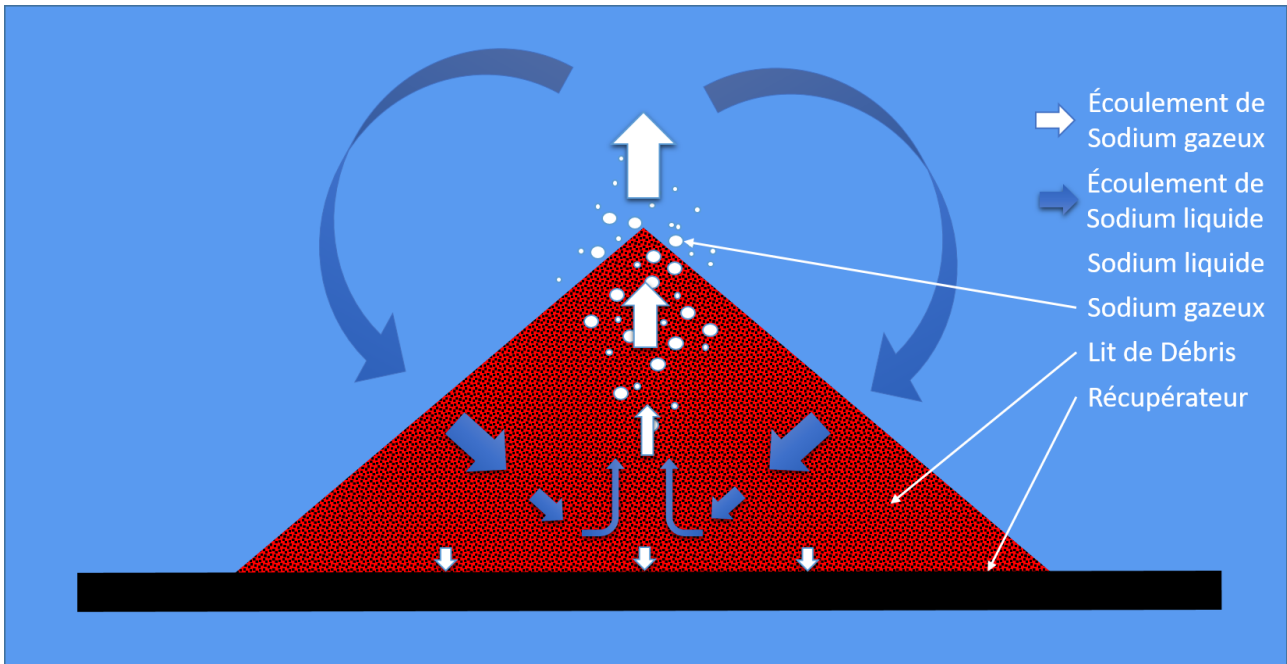


Figure 1.5 – Schéma de l'écoulement de convection naturelle dans un lit de déchets de corium.

Bien qu'une partie de la vapeur puisse se diriger sous l'effet de la pression capillaire vers le récupérateur où elle se condense [168], la majeure partie de la vapeur de sodium s'échappe du lit vers le haut. Ces écoulements de vapeur peuvent mettre en mouvement les déchets de corium. Dès que le débit de vapeur est suffisant, la vapeur a tendance à former des canaux de vapeur qui améliorent son évacuation. Le refroidissement du lit de déchets par le sodium est alors très efficace. Cependant, si le débit de vapeur dépasse un certain seuil, des instabilités d'Helmholtz peuvent se développer à la sortie des canaux [75] et limiter l'évacuation de la vapeur hors du lit. La vapeur s'accumule alors dans le lit de déchets qui s'assèche. L'évacuation de la chaleur devient alors très difficile à travers la vapeur peu conductrice et sans changement de phase. La température dans le lit ne cesse donc de monter jusqu'à atteindre la température de fusion du combustible. Un nouveau bain de corium se forme sur le récupérateur, on sort alors du cadre de cette étude.

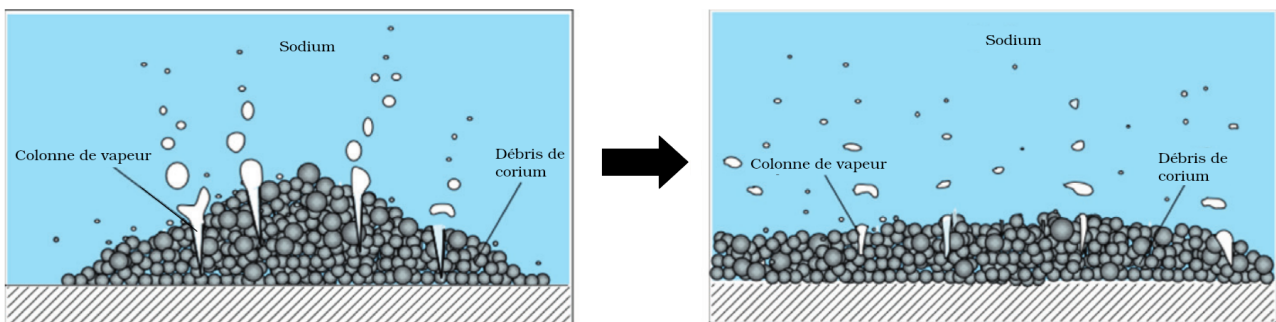


Figure 1.6 – Schéma du nivellement d'un lit de déchets de corium sous ébullition.  
 Traduit des travaux de Cheng et al. [30]



Sous l'influence des écoulements de sodium au sein du lit, les débris se mettent en mouvement. On observe ainsi la formation des canaux de vapeur, mais surtout, la déstabilisation des débris à la surface du lit qui tombent, de proche en proche, le long de la surface du tas, ou qui sont fluidisés [88] avant de sédimenter à nouveau pour les plus petits débris. Ainsi, les écoulements de sodium font évoluer la configuration de la matrice poreuse non consolidée que forment les débris qui a tendance à s'affaisser (voir *Fig. 1.6*). On parle de **nivellement** ou d'**autonivellement** du lit de débris, ou plus couramment de *self-leveling* [31] [130]. Ce nivellement peut avoir lieu en quelques minutes à partir de l'ébullition du sodium [168]. Avec la formation de vapeur dans le lit de débris, des forces de cohésion capillaires peuvent également apparaître entre les grains, et modifier la dynamique de nivellement.

### 1.1.3.3. Problématique neutronique et effet de la ségrégation

De par la nature du combustible des réacteurs à neutrons rapides, devant occasionner des réactions de fission avec des neutrons à spectre rapide et non pas des neutrons modérés, la configuration en lit de débris pourrait atteindre la criticité [184]. La modération quasi nulle du sodium et sa vaporisation dans le lit de débris pourraient également contribuer à un retour en criticité. La criticité du lit de débris est limitée en partie par sa géométrie (fuite neutronique). Les fuites neutroniques dépendent notamment du rapport surface sur volume de la configuration du lit de débris. Ce rapport varie au cours du temps alors que la configuration du lit évolue. Aussi un lit nivelé présente plus de fuites neutroniques qu'un lit en forme de tas. On comprend l'enjeu de sûreté du suivi de la configuration du lit de débris au cours du temps.

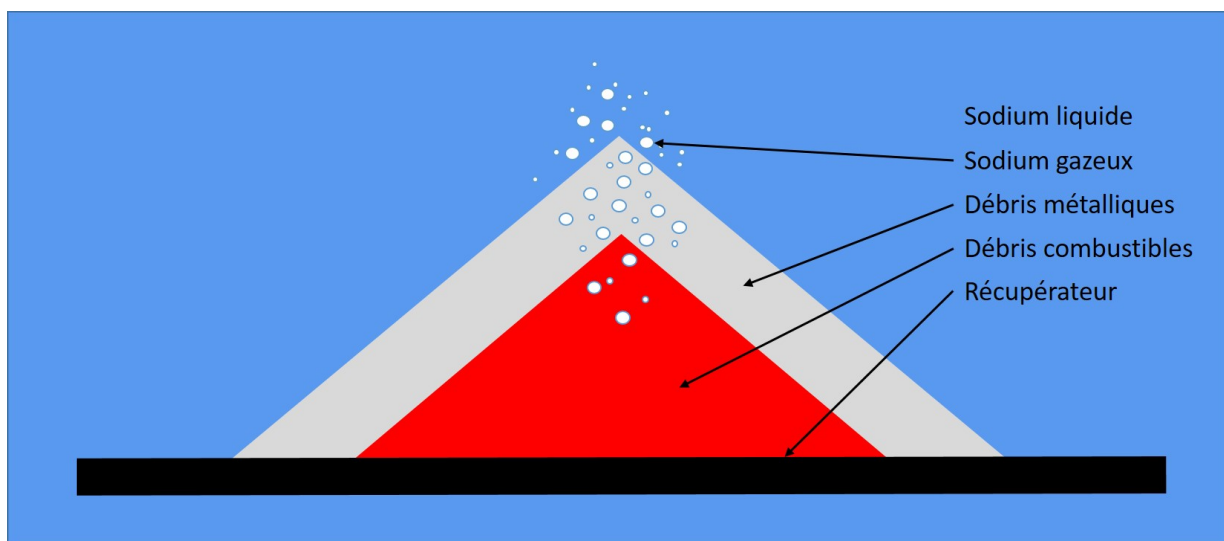


Figure 1.7 – Schéma de ségrégation par composition avec couche métallique supérieure.

Les phénomènes de ségrégation pourraient également avoir un impact sur la neutronique du lit de débris. Une ségrégation selon la composition (ou la forme) des débris (voir § 1.1.3.1), pourrait entraîner la stratification du lit de débris avec une couche de débris métallique recouvrant les débris de combustible, schématisé sur la *Fig. 1.7*. La couche métallique peut alors agir comme un réflecteur, réduisant les fuites neutroniques. Les débris de combustibles regroupés sont compactés en comparaison d'un mélange homogène de débris d'acier et de combustible, augmentant le risque de retour en criticité .

La ségrégation peut également avoir une influence sur le refroidissement du lit de débris. Par exemple, dans le cas précédent, la concentration de débris combustible réduit le volume de la zone chauffée à puissance équivalente en réduisant également la conductivité thermique effective des débris (le combustible étant moins conducteur que les débris métalliques) [128]. Dans un cas de ségrégation par taille (voir § 1.1.3.1), avec les plus gros débris au centre (voir Fig. 1.8), on peut imaginer une plus faible proportion de sodium au centre. On peut aussi imaginer une prépondérance des effets capillaire en périphérie avec les plus petits débris pouvant tout autant améliorer l'apport en sodium que limiter son évacuation.

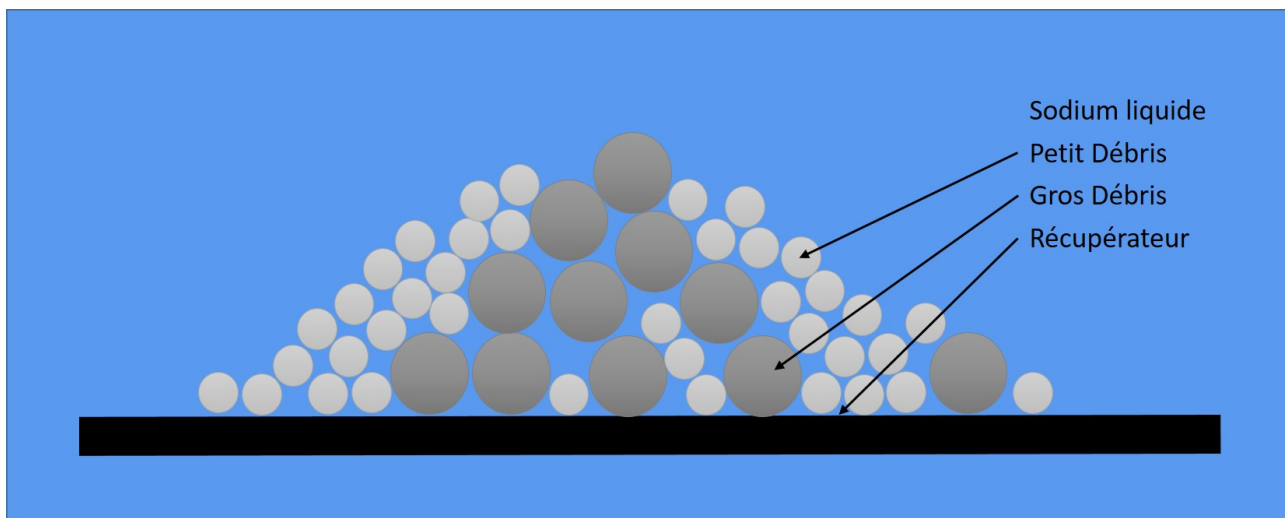


Figure 1.8 – Schéma de ségrégation par diamètre après un écoulement gravitaire.

Ainsi la configuration et la composition du lit semblent importantes pour estimer le refroidissement du lit de débris et son éventuel retour en criticité. Ce document s'intéresse spécifiquement au comportement thermohydraulique du lit de débris pour suivre l'évolution de sa configuration au cours du temps. On ne considère pas les aspects neutroniques dans cette étude.

#### 1.1.4. Modélisations historiques des lits de débris

Les travaux existants sur les lits de débris de corium sont particulièrement axés sur les réacteurs à eau légère qui représentent la majorité des réacteurs nucléaires. Parmi les premiers travaux ont à ceux de Lipinski [115] qui proposa un modèle 1-D d'écoulement diphasique au travers d'une matrice poreuse immobile, en étendant l'équation d'Ergun [65]. Les recherches suivantes ont longtemps porté sur le *Dryout Heat Flux* ou le flux de chaleur limite conduisant à l'assèchement du lit de débris [133]. C'est d'ailleurs l'objet du *benchmark* COOLOCE [181] visant à déterminer les principaux paramètres influençant ce phénomène. Les travaux de Duval *et al.* [60] et de Sapin [161] ayant réalisé des expériences d'ébullition et de renoyage de matrices poreuses, s'inscrivent dans cette thématique. Des expériences avec des débris mobiles chauffés en volume comme PRELUDE [151] ou PEARL [35] ont été réalisées, traitant notamment la thématique de renoyage. Récemment, l'expérience MONET [128] continue ces travaux et aborde notamment les effets de la stratification, tandis que SIMECO-2 [111][197] s'intéresse à un lit de débris de géométrie réaliste en fond de cuve. Plusieurs

codes de calcul ont été développés comme ICARE/CATHARE ou dans ASTEC ou COCOMO. Chakravarty *et al.* [23] ont récemment proposé un nouveau modèle étudiant un lit de débris conique.

Les études sur les lits de débris spécifiquement en RNR-Na sont moins nombreuses. Geroudet & Balard [75] reprennent les travaux de Lipinski en les adaptant aux cas des RNR-Na pour le code LI-DEB. Des calculs SIMMER [116] [186] ont été réalisés en 2006 et ont permis de dimensionner un banc d'expérience japonais [28] dès 2011. Ce banc d'expérience permet à la fois l'étude de la sédimentation dans un plan 2-D et dans un cylindre avec la possibilité d'injecter du gaz en bas du dispositif. Il a été spécifiquement pensé pour l'étude des lits de débris en RNR-Na bien que le sodium soit simulé par de l'eau. Ces expériences ont permis d'étudier expérimentalement le nivellement du lit de débris avec des débris sphériques [199] ou non [29] [141], ou polydispersés [170]. Elles sont accompagnées de modèles empiriques [31] [30] [130]. Ce banc d'expérience a également permis l'étude de la sédimentation du lit [27] [141] [169] [170]. La méthode semble toujours active [183]. Tagami *et al.* [180] propose un modèle pour la phase solide particulaire mobile basé sur les équations de Ishii & Zuber [96], qui sera complété par Csengeri [44] dans sa thèse sur les écoulements de débris de corium dans les tubes de transfert. En dehors du modèle de Tagami, il n'existe pas à notre connaissance de modèle théorique permettant l'étude du mouvement de la phase solide adapté au cas des RNR-Na. Cette étude propose un modèle théorique de comportement thermohydraulique du lit de débris de corium en RNR-Na incluant le mouvement des débris.

## 1.2. Écoulements granulaires

La description dynamique du lit de débris qui est constitué d'un très grand nombre de particules de corium mobiles immergées dans du sodium liquide et gazeux, relève de l'étude des écoulements granulaires. On présente donc ce sujet d'étude, les phénomènes particuliers associés et les différentes approches de modélisation utilisées.

### 1.2.1. Définition et phénoménologie particulière

L'étude des milieux granulaires est un domaine de recherche assez jeune dont on accorde la paternité à R. A. Bagnold en 1954 avec son ouvrage sur l'étude de la dynamique du sable et des dunes [7], bien que ce domaine intègre les travaux bien plus anciens de Coulomb sur les frottements solides dans le cadre du génie civil pour les talus des fortifications [40]. Il s'agit de l'étude d'un grand nombre de solides de taille suffisante pour négliger les forces de Van Der Waals (typiquement supérieure à  $100 \mu m$ ) [86]. Les écoulements granulaires représentent le mouvement d'ensemble d'un milieu granulaire. Ce domaine traite finalement d'un très grand nombre de réalités allant du tas de riz au champ d'astéroïdes, et de très nombreuses applications comme le génie civil, la géophysique ou encore l'industrie agroalimentaire, pharmaceutique, chimique, cosmétique ou pétrolière [58], pouvant traiter du broyage de gravier dans les fours à ciment, ainsi que du dentifrice, des silos à grains ou encore des glissements de terrain... Leur étude est ainsi capitale pour de nombreux problèmes industriels que ce soit pour la transformation, le stockage ou le transport de ces matériaux.

Il ne s'agit donc pas d'un unique objet d'étude cohérent et il existe de nombreuses approches de modélisation selon les chercheurs ayant travaillé sur ces domaines. On retrouve principalement l'héritage de la rhéologie (étude des fluides visqueux ou de suspension de particules), de la méca-

nique des sols (approche continue macroscopique et empirique avec déformation plastique) et de la physique des solides. Bien sûr ces différentes conceptions portent chacune un vocabulaire, des méthodes et des intérêts différents qui sont inhérents aux très nombreux domaines d'applications. La discipline tend à s'unifier depuis une vingtaine d'années [73].

On sépare en général les milieux granulaires en trois grands ensembles. On les définit naturellement par leur composition et l'influence de celle-ci sur leur comportement par la prédominance des phénomènes qui peuvent apparaître. Dans la pratique, on différencie ces modélisations par les forces dominantes considérées. On parle ainsi de milieux granulaires :

**Secs :** Dans l'air ou d'autre gaz dont l'influence est négligeable sur le comportement des solides (silo à blé, broyage de gravier...);

**Mouillés, Immergés ou des Suspensions :** Le fluide interstitiel ayant une influence non négligeable (avalanche sous-marine, coulée de boue, ciment, dentifrice...);

**Humides :** Avec présence de gaz et de liquide dans le système (ou de plusieurs fluides immiscibles), où la tension de surface est à l'origine de forces de cohésion (château de sable, neige...).

Ces écoulements sont comparables aux écoulements de liquide ou de gaz, mais se différencient par les trois points suivants : des grains non ponctuels, aux collisions inélastiques et dont les interactions de Van der Waals sont négligeables. Comme pour les fluides, et indépendamment du type de milieu granulaire que l'on vient de lister, on distingue classiquement trois régimes d'écoulement granulaire [148]. Ces trois régimes peuvent d'ailleurs être présents simultanément pour un même système comme le montre l'expérience de Drake [56] (voir *Fig. 1.9*). On nomme parfois ces trois régimes en référence aux trois états de la matière (solide, liquide, gaz) par analogie avec les modèles utilisés pour les décrire; la nature solide des particules restant toutefois inchangées. On sépare ces trois régimes comme suit :

**Rapide, collisionnel, inertiel, de Bagnold ou gaz :** Représente les régimes d'écoulement rapides ou très dispersés, où l'inertie des grains prédomine et où les chocs peuvent être considérés comme binaires. Ce régime semble bien connu et plusieurs approches en font une bonne description, comme l'écoulement de Bagnold [8], la théorie des gaz granulaires ou la théorie cinétique granulaire [54] [77] [127].

**Lent, quasi statique, frictionnel ou solide :** Concerne les écoulements très denses où chaque grain est en contact de plusieurs autres et où la friction et l'encombrement spatial prédominent. Il est assez bien connu, surtout via des modèles empiriques issus de la mécanique des sols [166], des approches viscoplastiques ou rhéologiques [81] [159] [162]. Établir les liens entre les interactions microscopiques à l'échelle des grains et les modèles macroscopiques continus reste un travail important.

**Dense ou liquide :** Représente l'ensemble des systèmes intermédiaires où ni l'inertie ni la friction ne prédomine. Leur modélisation est donc plus difficile. Ils représentent cependant la majorité des situations. Les simulations DEM (*Discret Elements Methods*) [110] [150] modélisant chaque particule individuellement, en rendent bien compte pour de petits volumes, mais demandent une grande capacité de calcul.

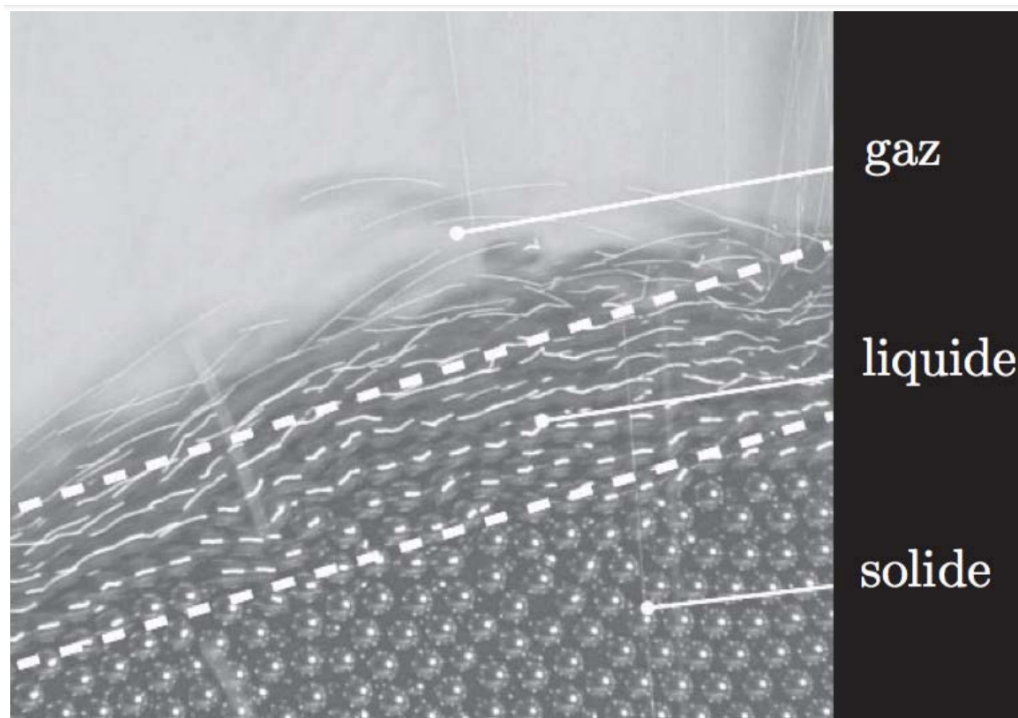


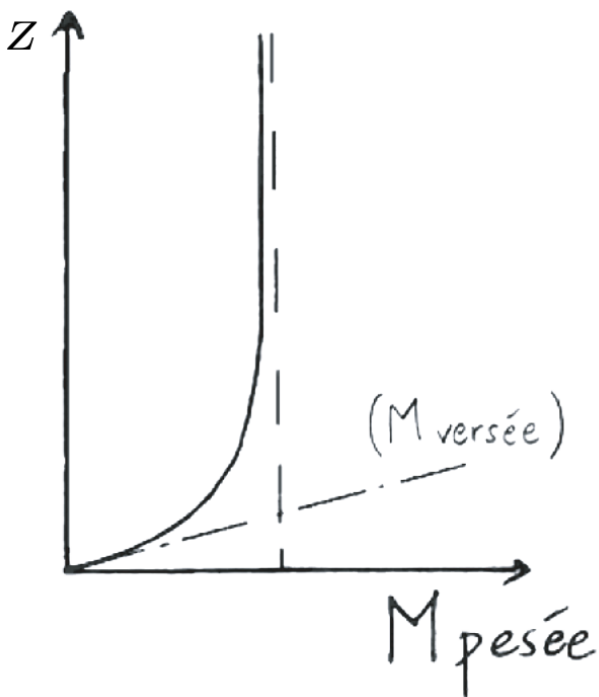
Figure 1.9 – *Expérience de Drake [56] mettant en évidence les différents régimes d'écoulement granulaire par un écoulement à surface libre sur un plan incliné.*  
*Extrait des travaux d'Izard [97]*

Dans l'étude des écoulements granulaires, on trouve un certain nombre de phénomènes contre-intuitifs propres à ce type de système. Ces phénomènes sont susceptibles d'apparaître ou d'influencer le comportement du lit de débris. Les principaux sont :

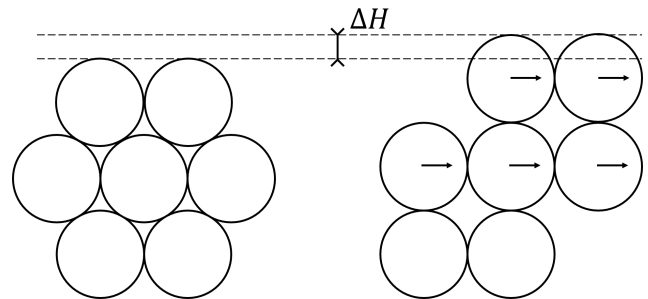
**La densification** : Alors que les particules solides sont en mouvement, elles s'entrechoquent. Or, admettant des chocs inélastiques, elles perdent une part de leur énergie cinétique à chaque choc et donc leur capacité à s'éloigner de la zone du choc. Les particules ont alors tendance à se regrouper, perdant très rapidement leur capacité de mouvement dès qu'elles entrent dans des zones de forte densité (nombre de particules rapporté à l'espace). On peut aussi parler de **refroidissement** [34] dans le cadre de la théorie cinétique granulaire, développée dans la section § 1.2.3.

**Effet Janssen** : Contrairement à la pression hydrostatique d'une colonne verticale d'eau, la pression mesurée à la base de la colonne remplie de grains n'est pas proportionnelle à sa hauteur. On tend rapidement vers une masse mesurée maximale indépendante de la masse granulaire contenue dans la colonne (voir *Fig. 1.10a*). Cela s'explique en partie par la formation de voûtes par les grains qui redirigent les efforts sur la paroi [41] [149]. C'est le phénomène à l'origine du débit constant d'un sablier en comparaison de la clepsydre [177]. On parle aussi de l'**effet silo**.

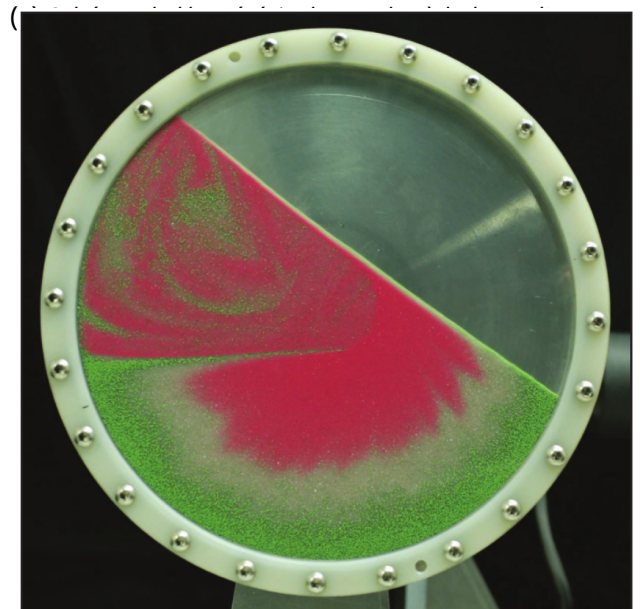
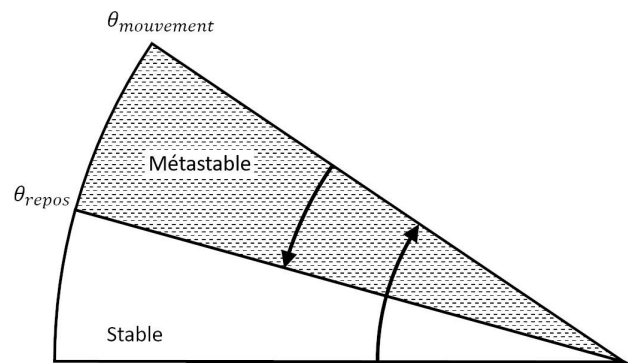
**La dilatance** : Il s'agit de la variation de volume d'un système granulaire lors de son écoulement, due à l'encombrement spatial [8] [148]. En effet, un système granulaire qui se met en mouvement voit généralement son volume augmenter alors que les particules s'écartent pour permettre



(a) Masse apparente des grains pesée à la base d'un tube, en fonction de la hauteur de remplissage, caractérisant l'effet Janssen.  
Extrait des travaux de Courrech Du Pont [41]



(b) Schéma de la dilatance.



(e) Ségrégation par taille dans un tambour tournant. Grands grains verts (500 – 700  $\mu\text{m}$ ), moyens blancs (400 – 500  $\mu\text{m}$ ) et petits rouges (75 – 150  $\mu\text{m}$ ).  
Extrait des travaux de J. M. N. T. Gray [80]



(d) Illustration de l'effet "Noix du Brésil" par vibration horizontale ( $R = 2.5 \text{ mm}$  et  $r = 0.5 \text{ mm}$ ) (avant vibration à gauche et après vibration à droite).  
Extrait des travaux de Geromichalos et al. [74]

Figure 1.10 – Illustration des particularités des écoulements granulaires.

leur mouvement, sous l'action des contraintes de cisaillement. Tandis que le volume du système diminue lorsqu'il s'arrête et que les particules se tassent sous l'effet de la gravité. La *Fig. 1.10b* schématise ce phénomène d'origine stérique qui a été décrit pour la première fois par Reynolds en 1885 [152].

**Configuration en tas :** Les interactions solide-solide, et notamment la friction entre les différents débris, permettent la formation de tas [40]. C'est une configuration propre à ce type de système. L'angle à la base (avec l'horizontale) dépend des caractéristiques des particules comme leur taux de déformation, leur rugosité, leur densité, du fluide qui les entoure, du type de confinement, etc. On distingue deux valeurs particulières caractérisant le tas. On a l'**angle de déstabilisation** ou **de mouvement** au-delà duquel la surface du tas se déstabilise et forme une avalanche sur ses flancs. Et l'**angle de repos**, angle à partir duquel cette avalanche s'arrête et où le tas redevient stable. Le plus couramment, l'angle de déstabilisation et l'angle de repos sont différents, c'est une hystérésis [41] [58]. Le schéma *Fig. 1.10c* représente cette caractéristique.

**La ségrégation :** Dans des écoulements de particules hétérogènes, il est courant que les particules d'un même type se regroupent [69] [80] [99], par taille, par forme, par densité ou composition, etc. Ce type de phénomène pourrait être très important dans l'étude des lits de débris de corium s'il venait à séparer et concentrer les débris combustibles et métalliques. C'est un phénomène courant dans les fours tournants [58] comme on peut l'observer sur la *Fig. 1.10e*. L'effet "noix du Brésil" est aussi un cas particulier de ségrégation qui conduit à retrouver les grains les plus volumineux en haut des systèmes granulaires vibrés (sac de grains). Les grains les plus petits trouvent bien plus facilement un passage vers le bas lors d'une déstabilisation quelconque et font "remonter" les plus gros. La *Fig. 1.10d* illustre ce type de ségrégation. Les phénomènes de ségrégation sont des effets d'ensemble ou macroscopiques qui admettent de nombreuses causes parfois différentes selon les systèmes.

**La lubrification :** On se place ici dans le cadre des suspensions de particules. Lorsque deux particules d'une suspension dans un fluide visqueux devraient s'entrechoquer, la viscosité et l'incompressibilité du fluide entourant les particules les en empêchent. Il faut en effet que le fluide ait le temps de s'échapper de l'espace entre les deux particules. Ainsi, selon la viscosité du fluide et la vitesse relative des particules, le fluide oppose une force repoussant les particules. On parle parfois de force de pincement [42]. C'est une force s'opposant aux causes lui donnant naissance. Il en résulte des effets de lubrification, qui limitent les effets de la friction.

Maintenant que l'on a défini les écoulements granulaires et évoqué leurs principales spécificités, on présente les différentes catégories de modélisations majoritairement utilisées pour les décrire, relevant d'origines et de raisonnements divers.

### 1.2.2. Morh-Coulomb et état critique des sols

Issues de la mécanique des sols, les premières modélisations des systèmes granulaires dans les années 1950 portaient sur les régimes quasi statiques pour l'étude des fondations et glissement de terrain [148]. Leurs sujets d'étude sont alors des systèmes granulaires très denses, au taux d'occupation volumique de la phase solide proche du taux d'occupation volumique maximal. Les milieux granulaires étant composés d'un grand nombre de solides non ponctuels et non interpénétrant, ils

ne peuvent généralement pas occuper tout l'espace. Il existe plusieurs types d'arrangement selon l'histoire et la préparation du milieu. Pour des sphères indéformables monodispersées, on peut estimer le taux d'occupation volumique maximal entre 55 % et 74 % selon le type d'arrangement [44]. Dans ces conditions, chaque grain est en contact de plusieurs autres voisins et la friction et les effets stériques sont importants. Ainsi, le système peut soutenir de grandes contraintes sans se déformer ou en admettant de petites déformations élastiques, puis des déformations plastiques pour de plus forts chargements jusqu'à atteindre une rupture et s'écouler comme un liquide. On parle parfois de **liquéfaction** des sols [92].

L'une des premières approches fait l'analogie avec la mécanique des frottements entre solides de Coulomb [40] et l'on parle classiquement de modèle de **Morh-Coulomb**. Ces modélisations consistent en une relation de proportionnalité entre les contraintes normales subies par le système et les contraintes tangentielles de friction. Si la contrainte subie dépasse la friction maximale exprimée par le critère de rupture de Morh-Coulomb, alors il y a écoulement. Le coefficient de frottement doit alors rendre compte de la nature des grains, de leur rugosité, du taux d'occupation volumique, du type d'arrangement, etc. Cette analogie a de nombreuses limites et il faut prendre en compte les phénomènes propres aux milieux granulaires comme la dilatance ou les réseaux de contraintes (effet Janssen). Mais elle donne une bonne image de ce type de modélisation comme l'explique Courrech Du Pont [41].

En parallèle, on trouve la théorie des **états critiques des sols**, plus complexe et spécifiquement issue de la mécanique des sols. Développée par Roscoe *et al.* [154] à Cambridge dans les années 50, elle permet de distinguer plus finement les déformations élastiques, plastiques puis les ruptures du sol (comme des glissements de terrain). On redirigera le lecteur vers le livre de ses collègues Schofield & Wroth [166] pour plus de détail ou l'exemple de l'article d'Evesque [66] qui l'applique à l'étude d'avalanches sèches.

Ces modélisations caractérisent alors par définition des milieux granulaires immobiles ou quasi statiques afin de déterminer le point de rupture. Elles ne semblent donc pas adaptées à cette étude visant à suivre dans le temps la configuration et les mouvements d'un lit de débris.

### 1.2.3. Théories cinétique granulaire

La théorie cinétique granulaire ou modèle de gaz granulaire [54] [61] est l'une des modélisations des écoulements granulaires les plus anciennes et l'une des plus abouties. Ce type de modélisation s'inspire très largement des travaux de la cinétique statistique de Boltzmann pour les gaz, et plus précisément de son adaptation au gaz dense sur la forme de l'équation de Chapman-Enskog [24] [163]. Cette dernière est adaptée aux milieux granulaires. La théorie cinétique granulaire se distingue alors de la théorie cinétique des gaz en ne considérant pas ici des particules ponctuelles, mais admettant un volume. Cela implique une distance minimale entre les centres de masse des particules. On trouve dans ce type de modélisation deux grandeurs fondamentales : le **coefficient de restitution** et la **température granulaire**.

Le coefficient de restitution sert à modéliser le caractère inélastique des chocs entre les grains [119] [118]. Il est défini comme le rapport moyen entre l'énergie cinétique d'un grain après un choc et son énergie cinétique initiale, avant le choc. Il est donc compris entre 0 et 1 et l'on considère qu'après chaque choc l'énergie cinétique moyenne d'un grain diminue [78]. Le coefficient de restitution rend notamment compte de l'intensité du phénomène de densification (voir § 1.2.1). Il est principalement



défini par les matériaux constitutifs du milieu granulaire et caractérise ce milieu.

On introduit en général la notion de température granulaire [77]. C'est un champ scalaire défini sur le milieu granulaire caractérisant l'écart moyen entre la vitesse des grains et leur vitesse moyenne. Pour reprendre l'analogie avec les gaz, l'énergie cinétique moyenne du grain est assimilée à une "énergie interne" dont la température granulaire rend compte. En général, on considère une équation analogue à l'équation de la chaleur pour déterminer et suivre la température granulaire dans le système. C'est une forme de mesure de l'agitation des grains en un point.

Cependant, ce type de modélisation est particulièrement adaptée à des écoulements granulaires dilués (faible taux d'occupation volumique des solides, inférieur à 40 % [165]) et rapides permettant de ne considérer que des chocs binaires entre les particules. Or les lits de débris en RNR-Na présentent a priori un taux d'occupation volumique solide d'environ 60 % dans une configuration admettant de nombreux contacts et un écoulement plutôt lent [75] [168] (voir § 1.1.2). Il advient ainsi assez rapidement que ce type d'approche ne convient pas à cette étude.

#### 1.2.4. Suspensions denses

Les modélisations précédentes sont principalement destinées à l'étude d'écoulements granulaires secs. Or le lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na est supposé complètement immergé dans du sodium liquide. On étudie donc un milieu granulaire mouillé ou une suspension. Le fort taux d'occupation volumique du corium permet même de parler de suspension dense.

L'étude des suspensions denses est prolifique et propose plusieurs approches [42]. On distingue trois types d'approches majeures selon Guazzelli & Pouliquen [85], se restreignant aux suspensions denses en fluide Newtonien de particules monodispersées sphériques indéformables non browniennes et non adhésives, en régime d'écoulement granulaire visqueux (par opposition à inertiel) et principalement stationnaire. Les trois types de modélisation présentée sont : l'approche hydrodynamique, l'approche de rhéologie du  $\mu(J)$  et l'approche multiphasique. Dans les deux premières, on considère la suspension comme un unique fluide à part entière.

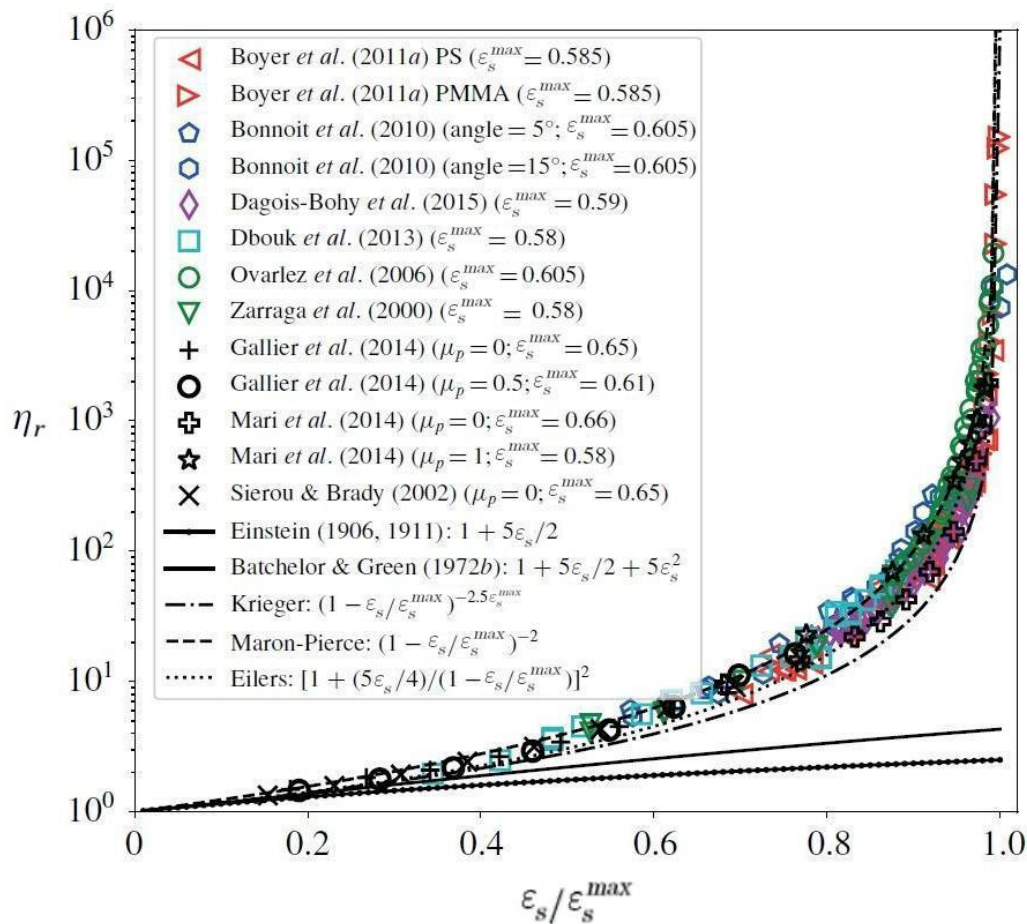
##### 1.2.4.1. Modélisations hydrodynamiques, "fluide équivalent" ou fluide unique

Les modélisations hydrodynamiques sont issues de la mécanique des fluides. On considère la suspension comme un fluide homogène dont la viscosité est modifiée (généralement augmentée) par la présence des particules en suspension. On introduit le plus souvent un coefficient sans dimension issu de corrélations expérimentales ou de modèles et dépendant du taux d'occupation volumique des particules, en facteur de la viscosité de la phase porteuse. On modélise ainsi la viscosité effective de la suspension. On nomme ce coefficient : la **viscosité relative**. C'est Einstein [62] [63] qui le premier, dès 1906, a mis en place ce type de modélisation. Les premières corrélations proposées ne sont alors valables que pour de faibles taux d'occupation volumiques solides (inférieurs à 20 % [85]). Il existe désormais de nombreuses expressions pour la viscosité relative, dont les domaines de validité dépendent du taux d'occupation volumique, du fluide et des particules considérées. La Fig. 1.11 représente plusieurs corrélations et modèles. Celle d'Eilers [179] notamment admet une grande plage de validité, allant d'un taux d'occupation volumique solide quasi nul jusqu'au taux d'occupation volumique solide maximal (environ  $\approx 60\%$ ).

Cette démarche a le mérite de traiter la suspension comme un fluide Newtonien classique et modélise les propriétés de la suspension relatives aux fluides monophasiques. Elle est particulièrement bien adaptée aux suspensions diluées (avec un taux d'occupation volumique solide assez faible). Cependant, cette approche ne permet pas de modéliser la formation de tas ou du moins l'hystérésis associée à cette configuration en tas (voir § 1.2.1). La densification et la ségrégation ne sont généralement pas accessibles non plus [132]. Ce sont pourtant des phénomènes d'intérêt dans l'étude du comportement d'un lit de débris.

#### 1.2.4.2. Rhéologie du $\mu(J)$

La rhéologie du  $\mu(I)$  est une catégorie de modélisation courante pour les écoulements granulaires secs, issue des approches de type Morh-Coulomb (voir § 1.2.2). La rhéologie du  $\mu(J)$  est sa déclinaison pour l'étude des suspensions. Elle est notamment utilisée pour les régimes frictionnels ou les suspensions très denses. Comme l'approche précédente, c'est aussi une approche de type "fluide équivalent" qui considère la suspension comme un unique fluide. On dirigera le lecteur vers l'ouvrage d'Andreotti *et al.* [5] pour plus de précisions.



L'idée principale est de caractériser l'écoulement par la définition d'un "coefficient de frottement"  $\mu(J)$ . De manière analogue aux modèles de frottement des solides de Coulomb,  $\mu(J)$  est vu comme le coefficient de proportionnalité entre la contrainte normale et la contrainte tangentielle. L'écoulement est entièrement caractérisé par le nombre adimensionnel visqueux  $J$ . On postule en effet que  $\mu(J)$  et le taux d'occupation volumique solide dépendent uniquement de  $J$ . Il existe un certain nombre de modèles et de corrélations définissant cette dépendance. La rhéologie du  $\mu(J)$  permet généralement de modéliser l'arrêt de l'écoulement et la formation de tas. Cependant, son formalisme "fluide équivalent" ne permet pas d'ordinaire de modéliser les phénomènes de densification ou de ségrégation.

Les approches hydrodynamiques et la rhéologie du  $\mu(J)$  s'avèrent équivalentes bien qu'elles soient issues de raisonnements distincts. On peut en effet trouver des relations simples entre la viscosité relative et le nombre visqueux  $J$ .

### 1.2.4.3. Approches multiphasiques

Les approches multiphasiques considèrent la phase fluide et la phase solide séparément comme dans les travaux de Jackson [98], Z. Cheng *et al.* [32] ou de Pudasaini [142] (voire plus avec un modèle à 3 phases par Pudasaini [143]). On parle d'approche **multiphase**, **2-phases** ou encore **2 fluides**. Ces modèles s'inspirent principalement de la mécanique des fluides pour des fluides non miscibles, décrits par le modèle d'Ishii & Zuber [96] (voir section § 2.7.1.1 dans le chapitre suivant). Dans cette approche, on considère un jeu d'équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et parfois de l'énergie pour chaque phase. Les équations des différentes phases sont alors couplées par des termes quantifiant les échanges entre les phases qui représentent leurs interactions. Ces termes d'échanges sont cependant le plus souvent inconnus a priori, et font appel à des lois constitutives, souvent empiriques.

Le nombre adimensionnel de Stokes permet d'évaluer la pertinence et la nécessité d'utiliser ce type de modélisation [42] (voir § 1.3.3). L'approche multiphasique devient toutefois nécessaire pour modéliser certains phénomènes [85], comme la migration sous contrainte [132] [136].

### 1.2.5. Milieux humides

On parle de **milieu humide** dans l'étude des milieux granulaires lorsque les particules sont en présence de liquide et de gaz. Herminghaus [92] introduit particulièrement bien ce domaine d'étude.

La présence de gaz et de liquide, ou de plusieurs fluides non miscibles ayant une tension superficielle non négligeable, dans un milieu granulaire, change profondément son comportement. Sous l'effet de la tension de surface, des ponts capillaires se forment entre les grains [50] [196]. On peut les observer, mis en évidence par fluorescence, dans la photographie *Fig. 1.12*. Ces ponts agissent comme de petits ressorts fragiles liant deux grains. Ils créent alors des phénomènes de cohésion [67] [84] [129]. Cette cohésion (ou adhérence) entre les grains peut ralentir l'écoulement, voire l'empêcher. L'exemple le plus évocateur étant l'existence des châteaux de sable ou des statues de sable, qui est impossible avec du sable sec ou trop humide [71] [90] [140]. On perçoit alors qu'il existe une plage de taux d'humidité permettant l'émergence de ces comportements. On parle ainsi véritablement de milieu granulaire humide pour un taux de présence volumique du liquide d'au plus 4 à 10 % [104] [164] (contre initialement 30 à 40 % de sodium liquide dans un lit de débris en RNR-Na [168]). Dans de nombreux cas d'application comme le génie civil, le taux d'humidité d'un milieu granulaire peut varier dans le temps, notamment par condensation ou séchage en fonction de l'environnement. On parle de vieillis-

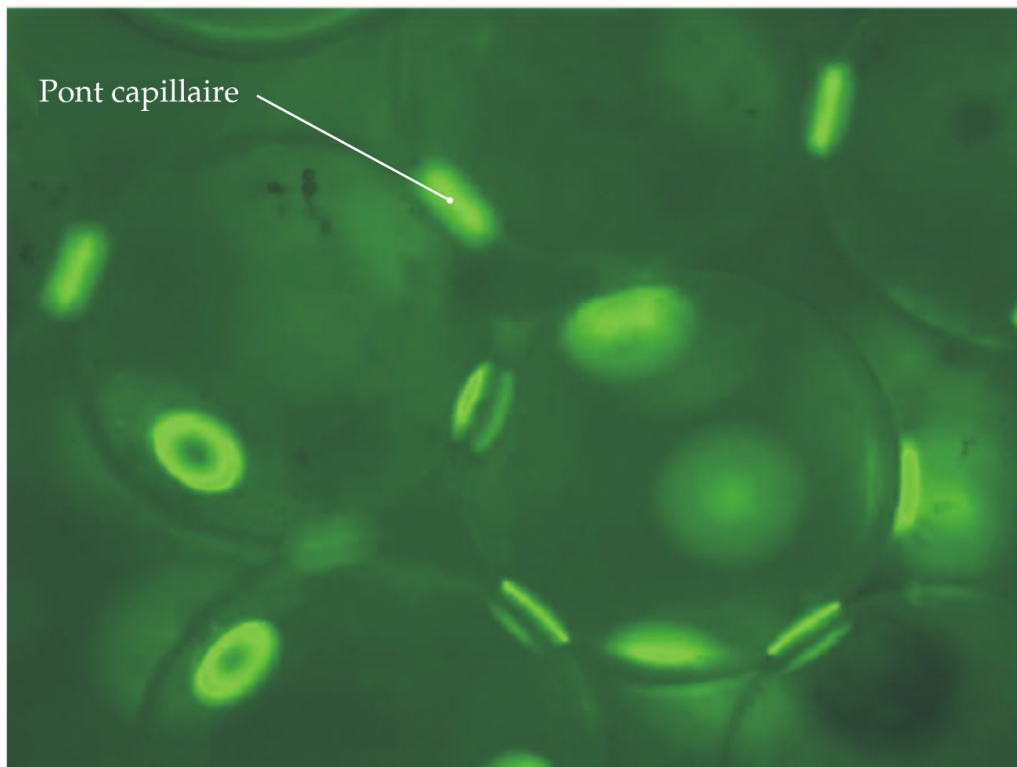


Figure 1.12 – Photographie d'un réseau capillaire aqueux par fluorescence pour des billes de verre de  $375 \mu\text{m}$ .  
Extrait des travaux d'Herminghaus [92].

sement pour évoquer cette dépendance temporelle des effets capillaires [16] [43], dont on ne tiendra pas compte dans cette étude.

Il existe de nombreuses approches pour modéliser ces phénomènes. Dans les modélisations à l'échelle des grains, on distingue deux approches majoritaires. D'une part, on peut prendre en compte les effets capillaires par l'intermédiaire des conditions de saut aux interfaces. On écrit alors l'équilibre mécanique à la tension de surface près [13] [106]. D'autre part, et c'est la méthode la plus répandue, on peut introduire une force de cohésion qu'exercent les grains sur leurs voisins. Cette force proportionnelle à la tension de surface peut alors dépendre des taux d'occupation volumiques des phases ainsi qu'entre autres de la rugosité des grains ou de leur éloignement [64] [112] [137] [167].

Pour les modélisations à l'échelle macroscopique, on trouve une grande variété d'approches qui ne s'excluent pas forcément. Certains auteurs introduisent une force volumique capillaire [189] [200] au même titre que la gravité, ou une force d'interaction entre phases [134]. Certaines modélisations s'inspirent de la rhéologie du  $\mu(J)$  (voir § 1.2.4.2) et ajoutent une dépendance au nombre Capillaire ( $Ca$ ) ou à la tension de surface dans la définition du coefficient  $\mu(J, Ca)$  [153] [187]. Dans la même philosophie, on peut reprendre des modèles de Mohr-Coulomb et ajouter un terme cohésif au tenseur des contraintes, souvent en association avec un seuil [46] [90]. On trouve également des modèles qui ajoutent seulement un tenseur des contraintes surfaciques dues à la tension capillaire [1] [155].

### 1.3. Nombres adimensionnels caractéristiques et leur estimation

Des nombres adimensionnels permettent d'estimer l'importance relative des différents phénomènes et quelles sont les approches et les méthodes les plus appropriées pour en rendre compte. Dans cette section, on les définit avant de les estimer dans le cas d'un lit de débris en RNR-Na, afin de choisir et de justifier les directions à prendre dans ces travaux.

Premièrement, on définit le nombre de Reynolds en milieu poreux ( $Re$ ) relatif aux écoulements de sodium dans le milieu poreux que constitue le lit de débris, puis le nombre de Reynolds granulaire ( $Re^*$ ). Le nombre de Péclet granulaire ( $Pe^*$ ) quantifie ensuite l'importance de l'agitation thermique et des mouvements browniens. Le nombre de Stokes ( $St$ ) compare quant à lui l'inertie des phases. Puis les nombres de Bond ( $Bo$ ) et Capillaire ( $Ca$ ) traduisent l'importance des effets de la tension de surface.

Préalablement, on rappelle les estimations des propriétés du sodium liquide et des débris de corium donnés dans la section § 1.1.2. On énumère les plages de valeur associée dans la Table 1.3.

Grandeurs	Estimations		Unités	Références
	Minimales	Maximales		
$\mathcal{T}_{lg}$	0.11		$N.m^{-1}$	Schummer 1981 [168]
$\eta_l$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^{-1}.s^{-1}$	Bonin 2014 [17]
$\rho_l$	716	844	$kg.m^{-3}$	Bonin 2014 [17]
$\rho_g$	0.44	0.77	$kg.m^{-3}$	–
$\rho_s$	$\approx 8750$		$kg.m^{-3}$	Clavier 2021 [36]
$\Delta h^{vap}$	$3.9 \cdot 10^6$		$J.kg^{-1}$	Bonin 2014 [17]
$\dot{q}_s$	1000	5000	$J.kg^{-1}.s^{-1}$	Clavier 2021 [36]
$\varepsilon_s$	0.58	0.62	–	Schummer 1981 [168]
$H$	0.02	0.1	$m$	Schummer 1981 [168]
$d$	$3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-2}$	$m$	Schummer 1981 [168]
$T$	723	1253	$K$	Schummer 1981 [168]
$\ \mathbf{g}\ $	9.81		$m.s^{-2}$	–
$\sin \theta$	$\approx 0.3$		–	S. Cheng 2014 [29]

Table 1.3 – Estimations des grandeurs du lit de débris de corium en RNR-Na.

#### 1.3.1. Nombre de Reynolds en milieu poreux

Le nombre de Reynolds en milieu poreux représente le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses subies par le fluide traversant le milieu poreux. Il permet de déterminer le régime d'écoulement du fluide. Si les forces visqueuses prédominent ( $Re \ll 1$ ), on a un écoulement de Darcy et la force de traînée est linéaire en vitesse. En revanche, si les forces inertielles dominent ( $Re \gg 1$ ), alors la force de traînée est quadratique en vitesse. On définit le nombre de Reynolds en milieu poreux pour le fluide ( $f$ ) par la formule suivante [38] : ( $f = l, g$ )

$$Re_f = \frac{\rho_f \|\mathbf{v}_f\| d}{\eta_f \varepsilon_s} \quad (1.8)$$

où  $\rho_f$  désigne la densité du fluide,  $v_f$  la vitesse du fluide,  $d$  le diamètre d'une particule ou des interstices,  $\eta_f$  la viscosité dynamique du fluide et  $\varepsilon_s$  le taux d'occupation volumique de la phase solide.

Pour estimer la vitesse des fluides interstitiels, on se place à la température de saturation et l'on fait l'hypothèse que la puissance déposée par les débris sert entièrement à vaporiser le sodium. On peut ainsi estimer un débit de vaporisation et les vitesses associées par la formule suivante : ( $f = l, g$ )

$$\|v_f\| = \frac{\rho_s V_c \dot{q}_s}{\varepsilon_f \rho_f S \Delta h_f^{vap}} = \frac{\varepsilon_s \rho_s H \dot{q}_s}{\varepsilon_f \rho_f \Delta h_f^{vap}} \quad (1.9)$$

où  $\rho_s$  désigne la densité du corium,  $V_c$  son volume total et  $\dot{q}_s$  sa puissance spécifique.  $\varepsilon_f$  est le taux d'occupation volumique du fluide et  $\Delta h_f^{vap}$  est la chaleur latente massique de changement d'état liquide-gaz.  $S$  et  $H$  sont respectivement la surface et la hauteur du lit nivelé.

Pour estimer le nombre de Reynolds en milieu poreux du sodium liquide ( $l$ ) et gazeux ( $g$ ) dans le lit de débris, on reprend les valeurs de la Table 1.3. On obtient alors les estimations suivantes des vitesses d'écoulement et du nombre de Reynolds associées :

$$9.4 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1} \leq \|v_l\| \leq 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1} \quad (1.10)$$

$$2.3 \cdot 10^{-2} \leq Re_l \leq 195 \quad (1.11)$$

$$0.15 \text{ m.s}^{-1} \leq \|v_g\| \leq 3.8 \text{ m.s}^{-1} \quad (1.12)$$

$$0.17 \leq Re_g \leq 1.4 \cdot 10^3 \quad (1.13)$$

Le régime d'écoulement des fluides dans le lit peut être visqueux comme inertiel selon la puissance déposée et de la taille des débris.

### 1.3.2. Nombre de Reynolds Granulaire

Pour estimer les nombres adimensionnels suivants, comme le nombre de Stokes ou le nombre de Péclet granulaire, on a besoin d'être en mesure de quantifier la vitesse d'une particule ou de l'écoulement granulaire. La méthode la plus répandue pour quantifier le mouvement d'ensemble de ces systèmes fait appel aux **taux de cisaillement**, noté ( $\dot{\gamma}_s$ ) et défini par l'expression (1.14) [91]. Si le taux de cisaillement apparaît très couramment dans les expressions des nombres adimensionnels pour l'étude des écoulements granulaires, c'est parce qu'il est facilement mesurable dans les essais en rhéomètre et qu'il caractérise particulièrement bien les écoulements. Cependant, ce taux de cisaillement n'est pas accessible *a priori* et ne caractérise pas bien le nivellement d'un lit de débris qui relève des écoulements à surface libre.

$$\dot{\gamma}_s = \nabla v_s + (\nabla v_s)^T \quad (1.14)$$

où  $v_s$  est la vitesse de la phase solide.

Pour pallier cette difficulté, on suit la méthode utilisée par Courrech Du Pont [41] dans sa thèse sur les avalanches sous-marines qui consiste à estimer la vitesse des particules via leur vitesse terminale de chute dans le fluide. On fait ce choix, car on est en mesure d'estimer cette vitesse *a priori*, mais cela reste discutable et n'est réellement valable qu'à la surface du lit. De plus, on ne considère pas les actions de contact entre les grains.

D'après Courrech Du Pont [41], on peut distinguer deux expressions de la vitesse terminale de chute d'une particule selon le régime d'écoulement du fluide autour de la particule et l'expression de la force de traînée associée. On les discerne selon la valeur du nombre de Reynolds granulaire ( $Re^*$ ) (1.15). S'il est petit ( $Re^* \ll 1$ ), la force de traînée est visqueuse et linéaire en vitesse, ce qui donne l'expression de la vitesse terminale suivante (1.16). À l'inverse, s'il est grand ( $Re \gg 1$ ), la force de traînée est inertielle et quadratique en la vitesse terminale, donnant une seconde expression de la vitesse terminale (1.17).

$$Re^* = \frac{\rho_l \|\mathbf{v}_{p\infty}\| d}{\eta} \quad (1.15)$$

$$\|\mathbf{v}_{p\infty}\| = \frac{\Delta\rho_{ls} \|\mathbf{g}\| \sin \theta d^2}{18\eta_l} \quad (1.16)$$

$$\|\mathbf{v}_{p\infty}\| = \sqrt{\frac{10\Delta\rho_{ls} \|\mathbf{g}\| \sin \theta d}{3\rho_l}} \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{v}_{p\infty}$  désigne la vitesse terminale de chute de la particule,  $d$  le diamètre d'une particule.  $\Delta\rho_{ls}$  représente l'écart de densité entre la particule et le sodium liquide,  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur et  $\theta$  l'angle à la base du tas.

Pour estimer le nombre de Reynolds granulaire de cette étude, on doit donc préalablement faire une hypothèse quant à sa valeur afin de déterminer l'expression de la vitesse de chute à utiliser. On peut ensuite l'estimer et vérifier que l'estimation est cohérente avec l'hypothèse. L'estimation cohérente avec son hypothèse sera conservée comme l'estimation de référence de l'étude. On réalise les estimations suivantes en considérant le sodium liquide en tant que fluide environnant, supposant ainsi l'influence de la vapeur négligeable.

#### **Hypothèse d'un écoulement visqueux : $Re^* \ll 1$**

Premièrement, on suppose que le Reynolds granulaire serait faible ( $Re^* \ll 1$ ). On estime alors la vitesse terminale de chute d'une particule par l'expression (1.16). On l'injecte dans la définition du nombre de Reynolds granulaire (1.15) et on obtient son expression sous cette hypothèse (1.18). On peut alors l'estimer via les valeurs reportées dans la Table 1.3 :

$$Re^* = \frac{\rho_l \Delta\rho_{ls} \|\mathbf{g}\| \sin \theta d^3}{18\eta_l^2} \quad \text{si } Re^* \ll 1 \quad (1.18)$$

$$1.2 \leq Re^* \leq 1.7 \cdot 10^7 \quad (1.19)$$

L'estimation du nombre de Reynolds granulaire (1.19) dépend très fortement de la grande plage de diamètre des débris envisageables. Elle est cependant bien supérieure à 1 dans la majorité des cas. On peut donc réfuter l'hypothèse d'un écoulement visqueux.

#### **Hypothèse d'un écoulement inertiel : $Re^* \gg 1$**

On fait donc maintenant l'hypothèse d'un écoulement inertiel ( $Re^* \gg 1$ ). L'estimation de la vitesse terminale est alors calculée à partir de l'expression (1.17). En la remplaçant dans la définition du nombre de Reynolds granulaire (1.15), on obtient l'expression du nombre de Reynolds granulaire dans ce cas (1.20). À partir des valeurs de la Table 1.3, on obtient l'estimation suivante :

$$Re^* = \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\eta_l} \sqrt{\frac{10\rho_l \Delta\rho_{ls} \|\mathbf{g}\| \sin \theta}{3}} \quad \text{si } Re^* \gg 1 \quad (1.20)$$

$$8.5 \leq Re^* \leq 3.2 \cdot 10^4 \quad (1.21)$$

L'estimation du nombre de Reynolds granulaire (1.21) est cette fois en accord avec l'hypothèse sur le régime d'écoulement inertiel ( $Re^* \gg 1$ ) dans tous les cas et notamment quel que soit le diamètre des débris considérés. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec l'estimation du nombre de Reynolds en milieu poreux précédente (voir § 1.3.1). L'hypothèse est alors confirmée et on considérera une vitesse terminale de chute quadratique (1.17) pour estimer les prochains nombres adimensionnels.

### 1.3.3. Nombre de Stokes

Le nombre de Stokes ( $St$ ) compare le mouvement d'ensemble de la suspension et le mouvement d'un unique grain du système. D'après les travaux de Coussot & Ancey [42], il permet alors de déterminer la nature du couplage entre la phase fluide et les particules solides. On fixe la valeur du nombre de Stokes critique grâce aux travaux de Gondret *et al.* [78].

- $St \ll 10$  : La phase fluide prédomine. Le fluide emporte les grains. (Mécanique des fluides)
- $St \gg 10$  : La phase solide prédomine. Les grains emportent le fluide. (Mécanique des sols)
- $St \approx 10$  : Aucune des phases ne prédomine. Elles admettent des dynamiques séparées, mais couplées.

On définit le nombre de Stokes comme le rapport entre le temps caractéristique du mouvement d'une particule de la suspension et du temps caractéristique du mouvement global de la suspension, généralement traduit par le taux de cisaillement [42]. Or le taux de cisaillement n'est pas un paramètre pertinent pour cette étude, comme on l'a expliqué dans la sous-section précédente § 1.3.2. En revanche, dans les travaux de Courrech Du Pont [41] sur les avalanches immergées, on trouve une définition du nombre de Stokes comme le rapport du temps caractéristique de chute visqueuse (temps nécessaire pour atteindre la vitesse terminale) caractérisant les effets de la viscosité du fluide sur la particule et du temps caractéristique de chute libre (caractérisant l'inertie de la particule) :

$$St = \frac{d^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_s \Delta \rho_l s} \|\mathbf{g}\| \sin \theta}{18 \sqrt{2} \eta_l} \quad (1.22)$$

$$0.64 \leq St \leq 2.2 \cdot 10^3 \quad (1.23)$$

On peut alors estimer le nombre de Stokes pour un lit de débris de corium dans un RNR-Na avec les valeurs de la Table 1.3. L'estimation varie grandement avec le diamètre moyen des débris et encadre la valeur critique du nombre de Stokes (1.23). On doit donc choisir une modélisation permettant de rendre compte des trois comportements distingués par le nombre de Stokes.

Dans ses travaux, Courrech Du Pont [41] relie l'estimation du nombre de Stokes à l'estimation du rapport des densités du fluide et des particules. Ce rapport permet de comparer les effets de l'inertie du fluide sur celle des particules. On peut faire le lien avec les travaux de Srivastava *et al.* [176], qui introduit cette comparaison sous la forme d'une inégalité, retranscrite ici (1.24). Si elle est vérifiée, ou que le rapport des densités est en faveur des particules, alors les turbulences du fluide n'ont pas la capacité d'influencer la trajectoire des débris. Dans le cas contraire, les turbulences doivent être considérées, ce qui est généralement admis dans l'étude du transport de sédiment [25].



$$\varepsilon_l \rho_l \ll \varepsilon_s \rho_s \quad (1.24)$$

$$15.5 \leq \frac{\varepsilon_s \rho_s}{\varepsilon_l \rho_l} \leq 18.3 \quad (1.25)$$

Avec les valeurs de la Table 1.3 et de la porosité du lit de débris comprise entre 0.38 et 0.42 [168], on a une estimation de ce rapport par l'inégalité (1.25). L'inégalité de Srivastava (1.24) est donc vérifiée et on pourra négliger les turbulences dans la modélisation du lit de débris de corium. Ce point accentue la séparation entre le comportement du sodium liquide et des débris de corium et encourage une fois de plus une modélisation séparée de chaque phase.

### 1.3.4. Nombre de Péclet granulaire

Le nombre de Péclet granulaire thermique ( $Pe^*$ ) compare les mouvements de convection, au transport par diffusion dû à l'agitation thermique. Il permet d'estimer l'importance des mouvements browniens et de distinguer les suspensions browniennes ( $Pe^* \ll 1$ ) des non browniennes ( $Pe^* \gg 1$ ). Comme pour les autres nombres adimensionnels des suspensions, il existe plusieurs expressions du nombre de Péclet granulaire thermique, dont une majorité utilisant le taux de cisaillement. Encore une fois, on préfère utiliser une formulation ne l'utilisant pas.

On estime l'énergie de diffusion thermique par l'expression (1.26). Pour l'énergie de frottement visqueux du fluide sur la particule, on a la formule (1.27) issue des travaux de Coussot & Ancey [42]. On utilise le facteur de forme  $F = \frac{3}{2}\pi d$  valable pour des sphères [113]. On injecte ensuite l'expression de la vitesse terminale de chute associée au régime d'écoulement estimé précédemment (1.17). On obtient le nombre de Péclet granulaire thermique suivant :

$$E_{Br} = k_B T \quad (1.26)$$

$$E_v = F \eta_l d \|\mathbf{v}_{p\infty}\| = \frac{3}{2} \pi \eta_l d^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{10 \Delta \rho_{ls} \|\mathbf{g}\| \sin \theta}{3 \rho_l}} \quad (1.27)$$

$$Pe^* = \frac{E_v}{E_{Br}} = \frac{3 \pi \eta_l d^{\frac{5}{2}}}{2 k_B T} \sqrt{\frac{10 \Delta \rho_{ls} \|\mathbf{g}\| \sin \theta}{3 \rho_l}} \quad (1.28)$$

$$2.0 \cdot 10^6 \leq Pe^* \leq 1.2 \cdot 10^{13} \quad (1.29)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  désigne la température moyenne et  $F$  représente le facteur de forme.

On peut alors estimer le nombre de Péclet granulaire thermique pour les lits de débris en RNR-Na avec les valeurs de la Table 1.3. Dans l'estimation (1.29), le nombre de Péclet granulaire étant toujours très largement supérieur à 1, on pourra négliger les mouvements browniens dans cette étude.

### 1.3.5. Nombres de Bond et capillaire

Le nombre de Bond ( $Bo$ ) est défini comme le rapport de la différence de pression isostatique (soit des effets de la gravité) et de la surpression issue de la loi de Laplace (soit les effets de la tension superficielle). Il est particulièrement utilisé dans le cadre de formation de gouttes ou de bulles et de l'estimation de leur forme. Ce n'est pas le plus pertinent ici, mais il permet tout de même d'avoir une

idée de l'importance des effets de la tension de surface. Si la tension superficielle domine ( $Bo \ll 1$ ), les gouttes tendent à former des sphères. Si la gravité prédomine ( $Bo \gg 1$ ), les gouttes s'aplatissent. Le nombre de Bond est défini par la formule suivante :

$$Bo = \frac{\Delta\rho_{lg}\|\mathbf{g}\|d^2}{\mathcal{T}_{lg}} \quad (1.30)$$

où  $\Delta\rho_{lg}$  désigne la différence entre la densité du sodium liquide et de sa vapeur et  $\mathcal{T}_{lg}$  désigne la tension de surface du sodium.

On reprend les valeurs de la Table 1.3. On considère une tension de surface à l'interface entre le sodium liquide et gazeux de  $0.11 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}$  [168]. On obtient alors l'estimation du nombre de Bond suivante :

$$5.7 \cdot 10^{-5} \leq Bo \leq 7.5 \quad (1.31)$$

Ainsi, selon la taille des débris considérés, les effets de la tension de surface prédominent ou non sur les effets de la gravité. On remarque que dans la majorité des cas, les effets de la tension de surface ne peuvent pas être raisonnablement négligés dans l'étude des lits de débris de corium en RNR-Na.

On peut aussi définir la longueur capillaire à partir du nombre de Bond. Elle a un rôle absolument équivalent au nombre de Bond. Elle peut cependant être plus facile à utiliser. Il s'agit de la comparer aux dimensions caractéristiques du système, ici le diamètre des pores. Pour une longueur caractéristique supérieure à la longueur capillaire, les effets capillaires sont négligeables, dans le cas contraire, ils prédominent sur la gravité. On exprime la longueur capillaire  $L_c$  en remplaçant le nombre de Bond  $Bo$  par 1 et alors  $d$  par  $L_c$  dans l'équation (1.30). On a donc :

$$L_c = \sqrt{\frac{\mathcal{T}_{lg}}{\Delta\rho_{lg}\|\mathbf{g}\|}} \quad (1.32)$$

Pour un lit de débris en RNR-Na, on estime la longueur capillaire  $L_c \approx 4 \text{ mm}$ . On retrouve bien que dans la majorité des cas selon la taille des débris (de  $30 \mu\text{m}$  à  $10 \text{ mm}$ ), on devrait prendre en compte les effets capillaires qui contribuent notamment à l'apport en sodium liquide dans le lit, tout du moins en comparaison des effets dus à la gravité.

### Nombre capillaire

Le nombre capillaire ( $Ca$ ) compare l'importance des effets capillaires et celle des effets visqueux. Le nombre capillaire critique est généralement admis à  $10^{-5}$  [55]. Ainsi si le nombre capillaire est petit ( $Ca \ll 10^{-5}$ ), les effets visqueux prédominent sur les effets capillaires et inversement si le nombre capillaire est grand ( $Ca \gg 10^{-5}$ ). Le nombre capillaire est donné par la formule suivante :

$$Ca = \frac{\eta\|\mathbf{v}_1\|}{\mathcal{T}_{ls}} \quad (1.33)$$

où  $\|\mathbf{v}_1\|$  est la norme de la vitesse caractéristique de l'écoulement du sodium liquide.

On utilise pour estimer le nombre capillaire, la vitesse du sodium liquide interstitiel à l'ébullition estimée précédemment (1.10). On reprend l'estimation de la viscosité reportée dans la Table 1.3.

Pour un lit de débris de corium pour un RNR-Na, l'estimation du nombre capillaire est rapportée par l'inégalité suivante :

$$2.1 \cdot 10^{-5} \leq Ca \leq 1.9 \cdot 10^{-4} \quad (1.34)$$

Ainsi, les effets capillaires sont prédominants par rapport aux effets visqueux à ébullition. Une fois encore, il conviendra de tenir compte des effets capillaires.

## 1.4. Choix de modélisation

À ce stade, on a pu établir ce qu'est un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na et le besoin d'en concevoir une modélisation permettant de suivre sa configuration dans le temps. Étant constitué d'un grand nombre de débris immergés dans du sodium liquide avec une porosité de l'ordre de 40 %, ce système relève l'étude des suspensions denses. On a vu qu'il existe une grande variété d'approches pour modéliser ces suspensions. On a également vu que l'on peut traiter ce système à différentes échelles, allant de la surface des particules, au mouvement d'ensemble en passant par l'échelle des débris. On a pu estimer certains nombres adimensionnels caractéristiques des suspensions denses pour caractériser les phénomènes physiques prépondérants dans ces lits de débris et permettre de choisir parmi les différentes approches.

Dans cette section, on justifiera le choix d'une approche multiphasique du lit de débris. On expliquera ensuite les inconvénients d'une modélisation à l'échelle des pores avant de choisir une méthode de remontée d'échelle.

### 1.4.1. Une Approche multiphasique

On a vu précédemment dans la section § 1.2.4 qu'il existe plusieurs approches pour modéliser les suspensions denses. On doit choisir une approche de modélisation du lit de débris qui soit la plus adaptée à ses caractéristiques et qui réponde aux motivations à l'origine de cette étude. On fait alors la synthèse des arguments permettant de faire ce choix :

- On a pu estimer le nombre de Stokes pour un lit de débris de corium dans un RNR-Na dans la section précédente § 1.3.3. Il distingue les situations où le fluide emporte les grains, des situations où les débris piègent et emportent le fluide ou encore celles où le fluide et les débris évoluent distinctement bien que fortement couplés. Variant autour de la valeur critique selon la taille des débris considérés, il incite à utiliser une modélisation permettant de rendre compte de toutes ces situations. Or l'approche multiphasique est la seule évoquée permettant de suivre séparément les débris et le fluide.
- Cette modélisation a entre autres pour motivation d'être en mesure à terme d'aider à évaluer la criticité du lit de débris. Elle doit donc notamment fournir des informations sur la concentration des débris de combustible ou sur le taux de vide ainsi que sur la température du combustible et non celle du mélange. Les modélisations multiphasiques sont les seules à porter ces informations séparément pour chacune des phases et à pouvoir les fournir sans post-traitement additionnel.
- On a pu identifier l'importance des phénomènes de ségrégation inhérents aux milieux granulaires, par exemple d'un point de vue neutronique, avec la formation de couche réfléchive ou la

concentration du combustible. Or les approches hydrodynamiques ou par la rhéologie du  $\mu(I)$  ne permettent pas de rendre compte de la ségrégation a contrario des approches multiphasiques [85].

Ainsi, les approches multiphasiques sont les plus pertinentes pour modéliser un lit de débris de corium dans un RNR-Na. C'est donc le cadre choisi dans cette étude dont les enjeux impliquent des couplages multiples et complexes de nombreux mécanismes physiques.

#### **1.4.2. Nécessité d'utiliser une méthode de remontée d'échelle**

On sait désormais que l'on souhaite suivre séparément les différentes phases du lit de débris. On pourrait alors être tenté de modéliser le système à l'échelle des pores et des particules. Cependant, plusieurs points dissuadent d'utiliser cette échelle et orientent vers une modélisation à l'échelle macroscopique, celle du lit de débris. On devra alors choisir une méthode de remontée d'échelle.

##### **1.4.2.1. Les Problèmes d'une modélisation locale**

La majorité des phénomènes relatifs aux lits de débris évoqués jusqu'ici ont lieu à l'échelle des pores ou des débris. C'est donc l'échelle la plus naturelle pour décrire le comportement du lit de débris. Or cette approche pose de nombreux problèmes.

Tout d'abord, la géométrie du système local n'est pas connue précisément et notamment le contour des interfaces entre les phases. C'est une difficulté que les modélisations à l'échelle macroscopique déplacent. En effet, elles ne nécessitent plus de connaître avec précision l'interface, mais de savoir quantifier les échanges entre les phases. Cela se traduit au moyen de termes d'échange qui sont par conséquent le plus souvent inconnus également. On peut cependant les exprimer par l'intermédiaire de corrélations expérimentales ou de modèles. De plus, certains travaux théoriques permettent d'établir les dépendances de ces termes généralement empiriques. Non seulement la position de l'interface, mais aussi l'ensemble des conditions à l'échelle du pore sont inconnues. On parle ici de la rugosité des débris, de leurs anfractuosités, du nombre de voisins ou le type d'arrangement, etc.

Il faut ajouter que même si l'on connaissait parfaitement ces conditions locales, on serait incapable à ce jour de résoudre le système grâce à une modélisation à l'échelle des pores sur le volume total du lit de débris. Le temps de calcul, ou la puissance de calcul nécessaire pour réaliser ce type de simulation est prohibitif, et un code type DNS (*Direct Numerical Simulation*) n'est pas envisageable. On trouve par exemple classiquement, pour les simulations d'écoulements granulaires, la Méthode aux Éléments Discrets (DEM) qui suit individuellement chaque particule [59] [87] [100] [97] [150]. On couple parfois ce type de modélisation à des modélisations du fluide par la Méthode Lattice Boltzmann (LBM) qui est assez peu coûteuse pour une bonne approximation des équations de Navier-Stokes comme dans la thèse d'Amarsid [2]. Dans ce type de méthode, on peut simuler jusqu'à  $5 \cdot 10^4$  particules sphériques ou  $2 \cdot 10^4$  particules polyédriques. Or, on rappelle que dans un lit de débris de corium en RNR-Na, on a entre  $2.8 \cdot 10^4$  débris (en ne considérant que les plus gros) et  $2.2 \cdot 10^{13}$  débris, comme reporté dans la Table 1.1. On comprend ainsi très bien l'impossibilité de recourir aux méthodes de résolution type DNS, même les moins gourmandes. De plus, malgré l'ajout récent des considérations thermiques dans les méthodes DEM/LBM [3], ces méthodes n'étaient pas fonctionnelles en 2022 selon L. Amarsid pour modéliser l'ébullition. Il y a notamment des difficultés pour traquer les interfaces d'un système triphasique.

Par ailleurs, quand bien même on serait capable de résoudre le système par une modélisation à l'échelle locale, on n'aurait pas véritablement mieux compris le comportement global d'un lit de débris pour autant. Malgré l'intérêt prédictif qu'aurait ce type d'outil, on ne comprendrait pas les comportements émergeant à l'échelle macroscopique que l'on pourrait cependant observer et simuler. C'est pourtant bien cette compréhension du système global que l'on souhaite obtenir. On citera par exemple la perméabilité d'un milieu poreux, qui caractérise un milieu poreux dans son ensemble (macroscopiquement) et permet d'estimer le débit à travers une structure poreuse sans simuler en détail la trajectoire suivie par le fluide.

Ainsi, on ne cherchera pas à simuler le comportement du lit de débris par une modélisation à l'échelle des pores, mais à l'échelle macroscopique. On doit alors utiliser une méthode de remontée d'échelle pour établir une modélisation à l'échelle du lit de débris à partir des comportements locaux.

#### 1.4.2.2. Pourquoi choisir la méthode de la prise de moyenne volumique ?

Parmi les méthodes de remontée d'échelle, on peut citer en particulier la méthode d'homogénéisation [48], certaines applications de la théorie des distributions [98] ou encore la méthode de la moyenne d'ensemble [103], mais on choisit d'utiliser la **Méthode de la Prise de Moyenne Volumique (MPMV)**. On a de nombreuses raisons de penser que cette méthode de remontée d'échelle est pertinente pour obtenir une modélisation macroscopique d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na.

D'une part, la MPMV est une méthode ancienne. Les prémisses ont été développées dans les années 1960 [123] [172], et elle fut particulièrement développée par Whitaker [193]. Elle a ainsi eu le temps de faire ses preuves et est d'ailleurs toujours développée de nos jours [108].

Mais le principal argument est que la MPMV a déjà été utilisée avec succès sur de nombreux systèmes présentant des similitudes avec le sujet de cette étude. Originaires de l'étude des écoulements en milieux poreux, les premiers travaux ont notamment permis de justifier théoriquement la loi empirique de Darcy pour les écoulements visqueux à travers une matrice poreuse immobile comme dans les travaux de Quintard & Whitaker [144] (I, II, III, IV et V). On a ensuite pu traiter des écoulements diphasiques visqueux [107], puis des écoulements diphasiques inertiels [106] [174], donnant un socle théorique à la passabilité et aux équations de Darcy-Forchheimer [175]. Marle [124] traite également par cette méthode, la diffusion solutale en milieu poreux, voire dans des milieux poreux hétérogènes comme dans les travaux de Cherblanc *et al.* [33]. Portant initialement sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, les travaux de Thorpe & Whitaker [185] l'étendirent ensuite à l'équation de conservation de l'énergie. On a dès lors pu traiter des écoulements avec changement de phase, comme l'écoulement monophasique avec solidification du fluide dans les travaux de Bousquet-Melou *et al.* [20] ou de Moussa *et al.* [131], ou encore diphasique avec changement d'état liquide-gaz à travers une matrice poreuse chauffante, comme dans les travaux de Duval *et al.* [60] ou la thèse de Sapin [160]. Ces deux derniers travaux sont déjà motivés, entre autres, par l'étude du refroidissement de lit de débris pour des accidents graves en réacteur nucléaire à eau (pressurisée ou bouillante). Tous les travaux cités jusqu'ici traitent des systèmes où la matrice solide poreuse est immobile. Mais cette méthode a également permis de modéliser des suspensions denses où les particules sont mobiles. On peut citer les travaux de Nott *et al.* [136] sur la migration sous contrainte en suspension, ou encore ceux de Wang *et al.* [192] ou de Combeau *et al.* [39] qui traitent de la solidification de grains en suspension. Tveito *et al.* [188] ont récemment complété ces

études par la considération d'une troisième phase modélisant l'interface de solidification.

Après cette synthèse, on remarque que l'ensemble des éléments caractérisant le comportement thermohydraulique du lit de débris en RNR-Na ont déjà été traités séparément par la MPMV. La méthode de la prise de moyenne volumique semble pertinente pour établir un modèle macroscopique d'un lit de débris en RNR-Na. On peut alors s'inspirer de tous ces travaux afin d'utiliser la MPMV pour traiter un écoulement diphasique inertiel avec source de chaleur volumique et changement de phase liquide-gaz à travers une matrice poreuse non consolidée mobile, caractérisant le lit de débris en RNR-Na. L'ajout principal de ces travaux est alors de prendre en compte tous ces phénomènes à la fois et de traiter un système triphasique où les trois phases interagissent.

## 2 - Chapitre 2 : Établissement d'un système macroscopique.

L'étude bibliographique présentée dans le chapitre § 1 ayant montré notamment qu'il n'existe pas de modèle théorique décrivant l'autonivellement d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un Réacteur à Neutrons Rapides refroidi au Sodium (RNR-Na), on cherche à l'établir. Ce système peut être vu comme une suspension dense de particules de corium immergées dans du sodium liquide en ébullition modélisée par trois phases distinctes non miscibles. Une phase pour le sodium liquide ( $l$ ), une autre pour le sodium gazeux ( $g$ ) issu de la vaporisation du sodium liquide par la puissance résiduelle délivrée par le corium, et la phase solide ( $s$ ) modélisant l'ensemble des particules de corium resolidifiées formant une matrice poreuse non consolidée. Comme expliqué dans le chapitre précédent § 1.4.2.2, on choisit la méthode de prise de moyenne volumique (MPMV) comme méthode de remontée d'échelle. Par cette méthode, on établit un système macroscopique pour une matrice poreuse non consolidée chauffée en volume, soumise à un écoulement diphasique avec changement de phase. On s'inspirera principalement des travaux de Lasseux *et al.* [106] pour traiter les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement, et des travaux de Duval *et al.* [60] ou encore de Sapin [160] pour l'équation de conservation de la chaleur tandis que les conditions de saut aux interfaces sont majoritairement inspirées des travaux de Delhaye [52] [53]. Ce chapitre présente ainsi les opérateurs nécessaires à l'application de la méthode de prise de moyenne volumique, le modèle local initial (à l'échelle des pores) et l'ensemble des étapes menant à l'établissement d'un système macroscopique décrivant le comportement d'un lit de débris à l'échelle macroscopique, avant de discuter le système obtenu.

### 2.1. La Méthode de Prise de Moyenne Volumique (MPMV)

La prise de moyenne volumique est une méthode de remontée d'échelle qui permet, à partir d'un système local, d'obtenir un nouveau système valable à plus grande échelle. Le problème macroscopique ne dépend alors plus des grandeurs locales. La méthode consiste à moyenniser en espace sur un **Volume Élémentaire Représentatif** (VER), ou **volume de contrôle** (voir Fig. 2.1), les équations régissant les grandeurs locales. Le nouveau système macroscopique portera alors sur ces grandeurs moyennes pouvant être résolues indépendamment des grandeurs locales. Cependant, obtenir la séparation stricte des deux échelles nécessite plusieurs étapes. Ainsi, dans cette partie, on présentera les outils nécessaires à la prise de moyenne volumique avant de décrire succinctement les différentes étapes utilisées pour séparer les deux échelles. On appliquera ensuite cette méthode aux lits de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na dans les parties suivantes.

### 2.1.1. Définition des opérateurs et théorèmes

La méthode de la prise de moyenne volumique nécessite un certain nombre de concepts, théorèmes et relations présentés dans cette section.

#### 2.1.1.1. Notation générique

Pour commencer, on explicite les notations utilisées. On introduit une notation générique permettant d'écrire des expressions pour les trois phases à la fois via un indice de phase générique  $k$  pouvant désigner chacune des phases en présence. Par exemple, pour un système de trois équations portant chacune sur une phase différente ( $l$ ), ( $g$ ) et ( $s$ ), on aurait dans le cas de l'équation de continuité si toutes les phases étaient incompressibles :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_l &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_g &= 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad k = l, g, s \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_s &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $\mathbf{v}_k$  est la vitesse de la phase  $k$ .

On note, avec  $\psi_k$  désignant une grandeur physique quelconque de la phase  $k$ , une grandeur scalaire en italique :  $\psi_k$ , une grandeur vectorielle en gras :  $\psi_k$  et une grandeur tensorielle par deux barres supérieures :  $\overline{\psi_k}$ .

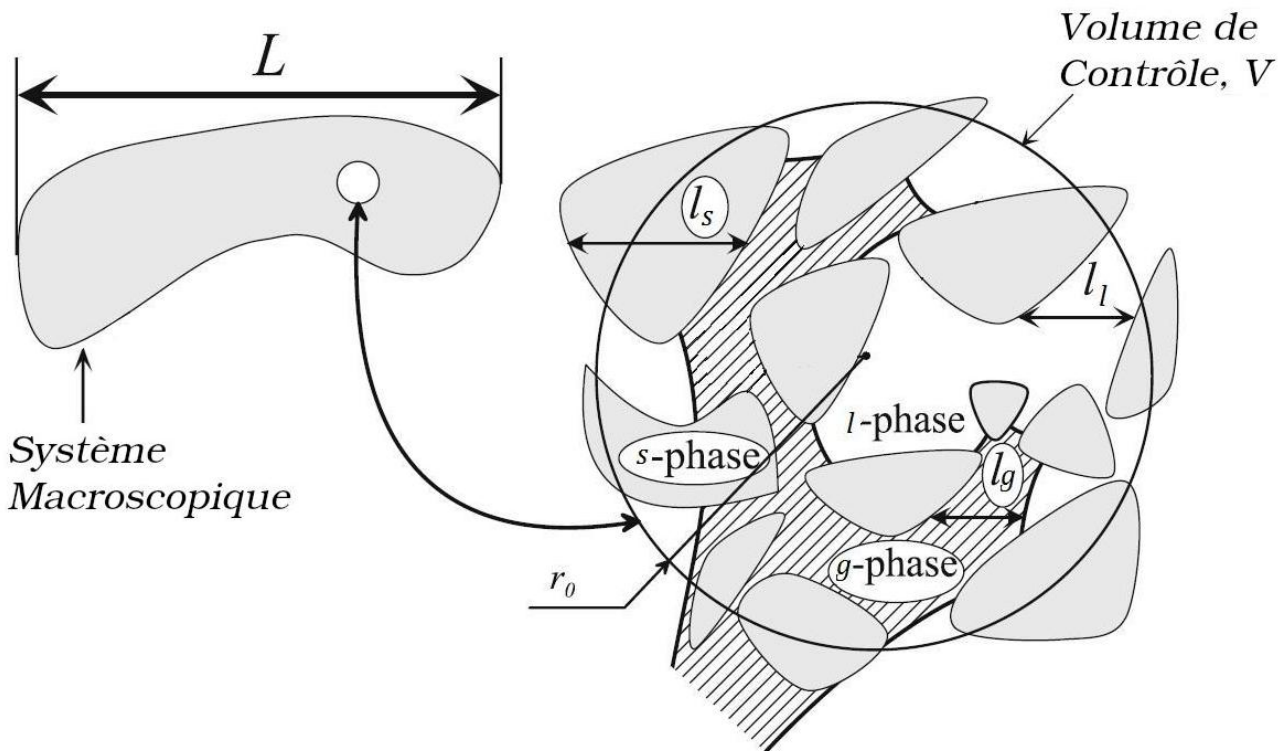


Figure 2.1 – Schema d'un VER triphasique  
Traduit de Lasseux et al. [106]



### 2.1.1.2. Le Volume Élémentaire Représentatif (VER)

Le concept le plus fondamental de la Méthode de Prise de Moyenne Volumique (MPMV) est le **Volume Élémentaire Représentatif (VER)** ou **volume de contrôle** (voir Fig. 2.1) qui n'est autre que le volume sur lequel les grandeurs du problème sont moyennées. Il n'est pas évident de déterminer la bonne taille pour le volume de contrôle [37] [147]. S'il est trop petit, il reste sensible aux variations locales des grandeurs moyennées et n'est pas représentatif du comportement macroscopique. S'il est trop grand, il n'est plus représentatif et tend vers la moyenne sur l'ensemble du système, perdant trop d'information et devient sensible aux hétérogénéités macroscopiques éventuelles (voir Fig. 2.2). De plus, il faut choisir le VER de manière à ce qu'il convienne à l'ensemble des grandeurs caractérisant chaque phase. On suppose, cependant, l'existence de ce VER et on le note  $V$ . On désigne le rayon du VER par  $r_0$ . Le VER ainsi défini doit vérifier l'inégalité suivante, que l'on citera par la suite en tant que séparation des longueurs ou séparation des échelles :

$$l_k \ll r_0 \ll L \quad k = l, g, s \quad (2.2)$$

où  $l_k$  est la longueur caractéristique locale associée à la phase  $k$ ,  $r_0$  est la longueur caractéristique associée au VER et  $L$  la longueur caractéristique associée au système macroscopique.

On définit également  $V_k$ , le volume de la phase  $k$  compris dans le VER  $V$ . On peut dès lors définir le taux d'occupation volumique de la phase  $k$  dans le VER, noté  $\varepsilon_k$  et défini par : ( $k = l, g, s$ )

$$\varepsilon_k = V_k/V \quad (2.3)$$

Maintenant que l'on a défini les volumes d'intérêt, on va définir les opérateurs de prise de moyenne volumique.

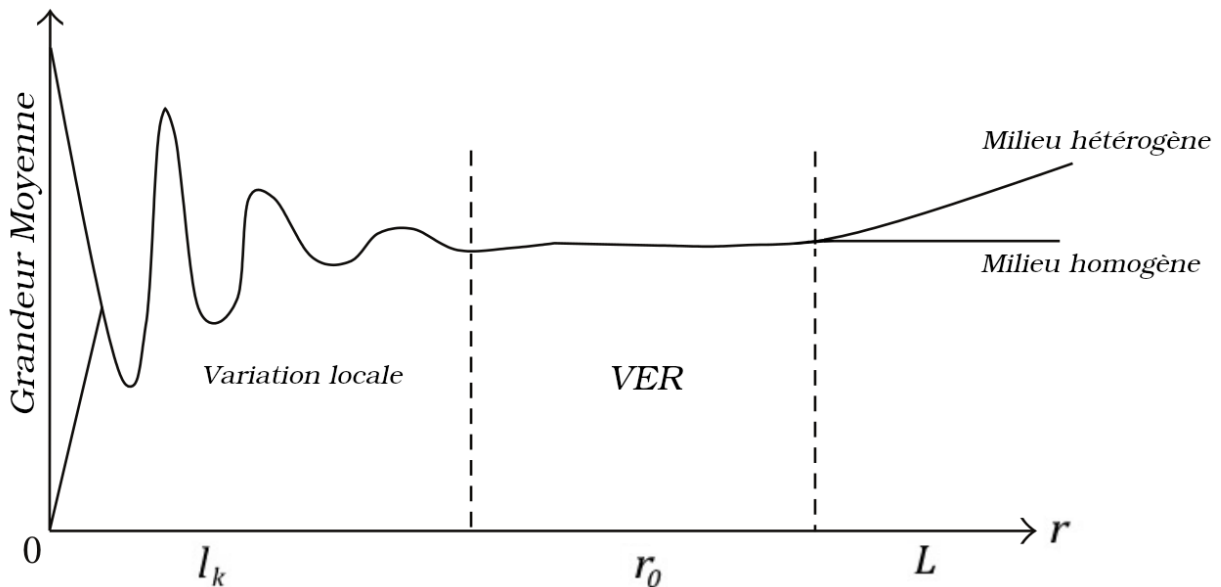


Figure 2.2 – Moyenne d'une grandeur selon le rayon  $r$  du VER.  
Adaptée des travaux de Borges et al. [19] sur la mesure de la porosité.

### 2.1.1.3. Moyenne de phase et moyenne intrinsèque

On distingue deux types de moyenne : la **moyenne de phase** où l'on moyenne la grandeur pour une phase sur tout le volume de contrôle du VER ( $V$ ), notée  $\langle \psi_k \rangle$  (où  $\psi_k$  désigne une grandeur physique quelconque de la phase  $k$ ) ; et la **moyenne intrinsèque** qui moyenne la grandeur pour une phase sur le volume de cette phase compris dans le VER ( $V_k$ ) que l'on note  $\langle \psi_k \rangle^k$ . On définit alors les opérateurs de prise de moyenne volumique pour la moyenne de phase puis pour la moyenne intrinsèque suivants :

$$\langle \psi_k \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_k} \psi_k dV \quad (2.4)$$

$$\langle \psi_k \rangle^k = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \psi_k dV \quad (2.5)$$

En faisant appel à la définition du taux d'occupation volumique (2.3), on lie ces deux moyennes par la relation suivante :

$$\langle \psi_k \rangle = \varepsilon_k \langle \psi_k \rangle^k \quad (2.6)$$

### 2.1.1.4. Théorèmes d'interversion

Pour dériver un problème macroscopique par l'application des opérateurs de prise de moyenne volumique ((2.4) et (2.5)) aux équations de conservation locales, il est nécessaire de lier la moyenne de la dérivée temporelle ou spatiale d'une grandeur à la dérivée correspondante de la grandeur moyenne afin d'écrire un système portant sur ces grandeurs moyennes. On utilise pour cela des théorèmes fondamentaux dans l'application de la méthode de la prise de moyenne volumique. Celui relatif à la dérivation temporelle ((2.7) et (2.8)) est le théorème de transport [68] [106]. Le théorème de la moyenne spatiale [93] [145] [185] [195] est quant à lui lié à la dérivation spatiale ((2.9), (2.10) et (2.11)). On les nommera conjointement dans ces travaux les théorèmes d'interversion dérivée-intégrale ou simplement les **théorèmes d'interversion**. Ces deux théorèmes relient l'intégrale volumique de la dérivée d'une grandeur physique à la dérivée de l'intégrale volumique de cette grandeur via un terme correctif représentant les effets à l'interface de la frontière du volume de la phase. Pour les grandeurs physiques qui nous intéressent ici, on peut résumer ces théorèmes par les relations suivantes, selon la nature scalaire, vectorielle ou tensorielle de la grandeur physique considérée :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \psi_k \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{n}_k dS \quad (2.7)$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_{\mathbf{k}} \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_k \cdot (\psi_{\mathbf{k}} \mathbf{w}_k) dS \quad (2.8)$$

$$\langle \nabla \psi_k \rangle = \nabla \langle \psi_k \rangle + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \psi_k \mathbf{n}_k dS \quad (2.9)$$

$$\langle \nabla \cdot \psi_{\mathbf{k}} \rangle = \nabla \cdot \langle \psi_{\mathbf{k}} \rangle + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \psi_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}_k dS \quad (2.10)$$

$$\langle \nabla \cdot \overline{\overline{\psi_k}} \rangle = \nabla \cdot \langle \overline{\overline{\psi_k}} \rangle + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_k \cdot \overline{\overline{\psi_k}} dS \quad (2.11)$$

où  $S_k = \bigcup_{k' \neq k} S_{kk'}$  est la surface englobante du volume  $V_k$  avec  $S_{kk'}$  la surface interfaciale entre les phases  $k$  et  $k'$ ;  $\mathbf{w}_k$  est la vitesse de déplacement de l'interface  $S_k$  et  $\mathbf{n}_k$  est le vecteur normal sortant à l'interface de la phase  $k$ .

En appliquant le théorème d'interversion (2.9) à la fonction indicatrice de phase (valant 1 pour les coordonnées où la phase est présente et 0 sinon) [106], on obtient la relation suivante :

$$\frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_k dS = -\nabla \varepsilon_k \quad (2.12)$$

### 2.1.1.5. Décomposition de Gray et déviation à la moyenne

On remarque que les théorèmes d'interversion ci-dessus ((2.7) à (2.11)) relient les grandeurs moyennes pour un volume de contrôle donné aux grandeurs locales indépendantes de ce volume. Pour permettre à terme une véritable séparation des échelles et écrire des problèmes cohérents avec le volume de contrôle considéré, on introduit la décomposition de W. G. Gray (2.13). Elle décompose la grandeur locale comme la somme de sa moyenne et de la déviation à cette moyenne, notée  $\widetilde{\psi}_k^k$  pour la déviation de  $\psi_k$  :

$$\psi_k = \langle \psi_k \rangle^k + \widetilde{\psi}_k^k \quad (2.13)$$

Quintard & Whitaker montrent dans leurs travaux [146] que la moyenne intrinsèque de la déviation d'une grandeur physique peut être considérée comme nulle (2.14). En appliquant ensuite l'opérateur de prise de moyenne de phase à la décomposition de W. G. Gray (2.13), on démontre l'invariance des grandeurs moyennes intrinsèques à la prise de moyenne intrinsèque (2.15).

$$\langle \widetilde{\psi}_k^k \rangle^k = 0 \quad (2.14)$$

$$\langle \langle \psi_k \rangle^k \rangle^k = \langle \psi_k \rangle^k \quad (2.15)$$

Cela nous permet, avec la linéarité de l'intégrale, l'application de la décomposition de W. G. Gray (2.13) et le lien entre les opérateurs de prise de moyenne (2.6), d'écrire la décomposition suivante pour la moyenne d'un produit :

$$\begin{aligned} \langle \psi_k \xi_k \rangle &= \varepsilon_k \langle \left( \langle \psi_k \rangle^k + \widetilde{\psi}_k^k \right) \left( \langle \xi_k \rangle^k + \widetilde{\xi}_k^k \right) \rangle^k \\ &= \varepsilon_k \left( \langle \psi_k \rangle^k \langle \xi_k \rangle^k + \langle \psi_k \rangle^k \underbrace{\langle \widetilde{\xi}_k^k \rangle^k}_{=0} + \underbrace{\langle \widetilde{\psi}_k^k \rangle^k}_{=0} \langle \xi_k \rangle^k + \langle \widetilde{\psi}_k^k \widetilde{\xi}_k^k \rangle \right) \\ &= \varepsilon_k \langle \psi_k \rangle^k \langle \xi_k \rangle^k + \langle \widetilde{\psi}_k^k \widetilde{\xi}_k^k \rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

où  $\psi_k$  et  $\xi_k$  sont deux grandeurs physiques quelconques portant sur la phase  $k$ .

### 2.1.2. Prise de moyenne volumique : Étape par étape

La Méthode de la Prise de Moyenne Volumique (MPMV) est une méthode de remontée d'échelle. Elle permet à partir d'un système d'équations décrivant l'objet à une échelle dite **locale** d'écrire un système d'équations à une plus grande échelle (dite **macroscopique**) décrivant le même objet. La remontée d'échelle opérée ici a plusieurs intérêts qui sont exprimés dans le chapitre précédent § 1.4.2. La MPMV consiste en la prise de moyenne volumique des équations de conservation locales et une succession d'étapes permettant de séparer complètement les échelles *i.e.* que le problème macroscopique final ne dépende plus que de grandeurs macroscopiques. Il porte alors sur les moyennes volumiques intrinsèques des grandeurs physiques d'intérêts (2.5).

On doit donc tout d'abord considérer un système d'équation décrivant le système à l'échelle locale. C'est le **problème local**. On lui applique l'opérateur de prise de moyenne volumique de phase (2.4). Pour obtenir des équations aux dérivées partielles portant sur les grandeurs physiques moyennes, on utilise les théorèmes d'interversion § 2.1.1.4. Ces théorèmes introduisent un terme correctif interfacial qui dépend des grandeurs locales indépendamment du VER considéré. On utilise la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour distinguer la partie macroscopique et la partie locale (constituées par les déviations) de ces grandeurs pour ce VER. Puisque des grandeurs locales persistent dans le système moyenné obtenu, les échelles ne sont pas encore correctement séparées. On nomme ce système,

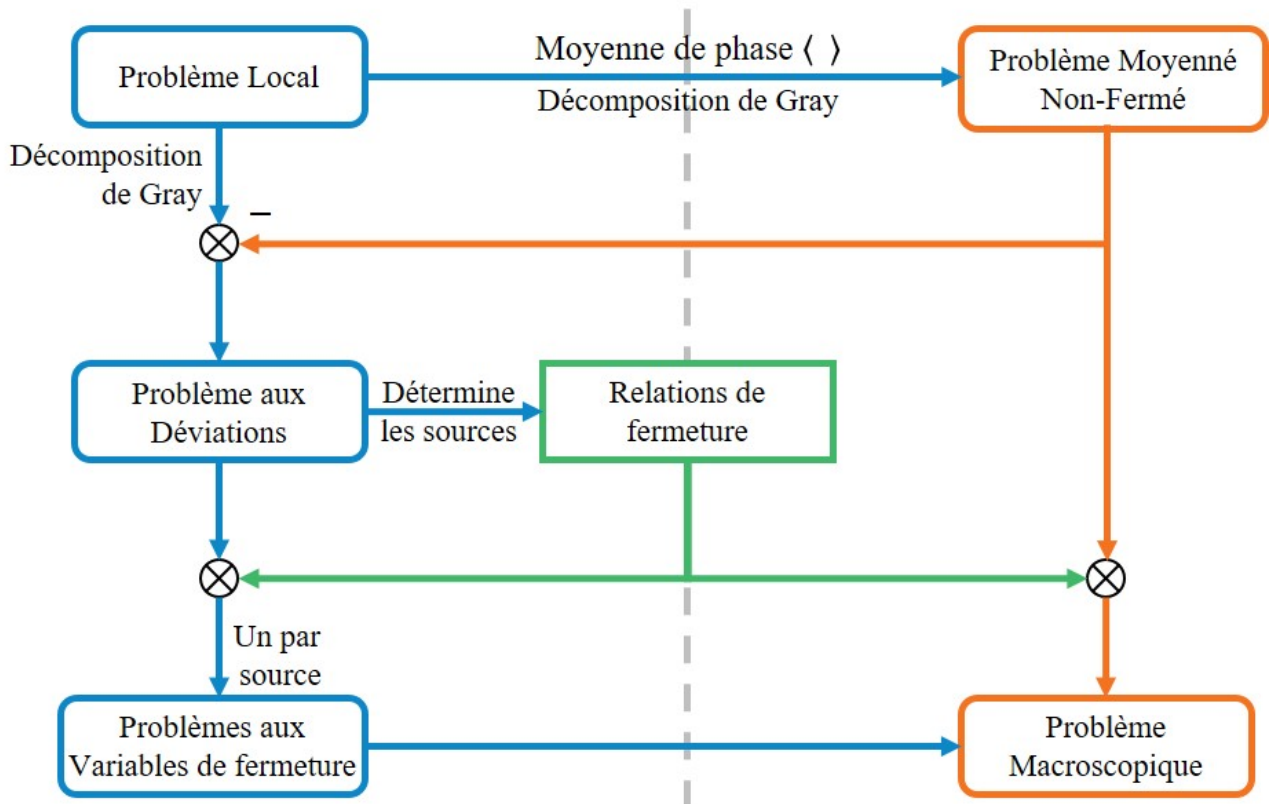


Figure 2.3 – Diagramme résumant la méthode de prise de moyenne volumique. Adapté des travaux de Soullain [174].

le **Problème Moyenné Non Fermé** (PbMNF). L'ensemble des étapes suivantes vise alors à fermer ce problème. Le diagramme *Fig. 2.3*, inspiré des travaux de Soullaine [174], résume ces étapes. On y trouve en bleu (à gauche) les problèmes à une échelle locale, inférieure au VER, et en orange (à droite) les problèmes macroscopiques. Un tel diagramme est aussi présent dans les travaux de Sapin [160].

Pour fermer le PbMNF, on écrit un système d'équations portant sur les déviations : le **Problème aux Déviations** (PbD). On l'écrit à partir du problème local, réécrit avec la décomposition de W. G. Gray (2.13), auquel on soustrait le PbMNF. Le PbD est défini sur un VER donné. Les grandeurs macroscopiques figurant encore dans le PbD sont donc des paramètres extérieurs au système et constituent les sources des déviations. On suppose que les déviations peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de ces grandeurs macroscopiques que l'on nomme justement les **sources** dans le cadre de la MPMV. Ces combinaisons linéaires sont les **relations de fermeture** et on nomme les coefficients de ces combinaisons linéaires les **variables de fermeture**. Cependant, ces variables de fermeture définies à l'échelle locale sont toujours inconnues.

On écrit donc de nouveaux problèmes, les **Problèmes de Fermeture** (PbF), qui portent sur les variables de fermeture. Pour cela, on injecte les relations de fermeture dans le PbD. On utilise ensuite le principe de superposition algébrique pour découper le problème obtenu en plusieurs plus petits problèmes. On écrit ainsi un PbF par source, que l'on a déterminée grâce au PbD. Chacun d'eux permet de déterminer les expressions des variables de fermeture relatives à la source en question.

En injectant les relations de fermeture dans le PbMNF, on parvient à écrire les termes interfaciaux comme des combinaisons linéaires des sources. Les coefficients associés sont nommés les **propriétés effectives** qui sont entièrement définies en fonction des variables de fermeture. Ces propriétés effectives sont définies à l'échelle macroscopique et rendent compte des phénomènes émergents à grande échelle par la présence et l'interaction des différentes phases. On a donc bien séparé les échelles et fermé notre PbMNF, obtenant ainsi le **Problème Moyenné Fermé** (PbMF) souhaité.

Maintenant que l'on a expliqué quelles étaient les étapes constitutives de la MPMV et défini les outils nécessaires à son application, on les applique à l'étude du nivellement d'un lit de débris sur le récupérateur d'un RNR-Na lors d'un accident grave.

## 2.2. Modèle local

Tout d'abord, la méthode de prise de moyenne volumique (MPMV) nécessite une modélisation locale préalable du système à traiter. Dans le cadre de la modélisation du nivellement du lit de débris sur le récupérateur de corium d'un RNR-Na lors d'un accident grave, on a vu que l'ordre de grandeur estimé du nombre de Stokes § 1.3.3 préconise une modélisation distinguant les différentes phases en présence. On distinguera alors trois phases dans notre modélisation locale puis macroscopique : une phase pour le sodium liquide ( $l$ ), une phase pour le sodium gazeux ( $g$ ) qui apparaît par vaporisation du sodium liquide sous l'effet de puissance résiduelle déposée par les débris de corium qui seront représentés par une troisième phase dite solide ( $s$ ). Dans cette modélisation locale, on considère les phases immiscibles, et en chaque point de l'espace, on ne considère qu'une unique phase. On adjoint aux équations de conservation régissant le comportement de chaque phase, un ensemble de conditions de saut qui décrit les comportements aux interfaces.

On présente dans cette section la modélisation locale de la phase solide, puis celle du sodium. On réécrit ensuite les équations de conservation de l'énergie avant de finaliser la modélisation par les conditions de saut.

### 2.2.1. Modélisation de la phase solide : Approche particulaire et pseudo-fluide

Pour modéliser la phase solide, il semble naturel de partir de l'étude d'une unique particule. Le premier système d'équations local s'écrit alors comme la conservation de la quantité de mouvement (QDM) via la seconde loi de Newton (ou du principe fondamental de la dynamique) (2.17) et la conservation de l'énergie (2.18) pour une particule  $p$  quelconque. On ne considère pas dans cette étude l'équation de conservation du moment cinétique.

$$\rho_s V_p \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = \rho_s V_p \mathbf{g} + \sum_q \mathbf{f}_{qp} + \iint_{S_{lp} \cup S_{gp}} \overline{\overline{\sigma}}_p \cdot \mathbf{n}_{pk} dS \quad (2.17)$$

$$\rho_s V_p \frac{\partial h_p}{\partial t} = \rho_s V_p \dot{q}_p - \iint_{S_{lp} \cup S_{gp} \cup S_{pq}} \phi_{pk} \cdot \mathbf{n}_{pk} dS \quad (2.18)$$

où  $\rho_s$  est la densité du corium,  $V_p$  le volume de la particule  $p$  et  $\mathbf{v}_p$  sa vitesse et  $\mathbf{g}$  est l'accélération de la pesanteur.  $q$  désignant toutes les particules en contact (supposé ponctuel) avec la particule  $p$ ,  $\mathbf{f}_{qp}$  représente la force de contact exercée par  $q$  sur la particule  $p$ .  $\overline{\overline{\sigma}}_p$  désigne le tenseur des contraintes de la particule  $p$  et  $\mathbf{n}_{pk}$  le vecteur normal à sa surface.  $h_p$  désigne l'enthalpie spécifique de la particule  $p$ ,  $\dot{q}_p$  sa puissance spécifique et  $\phi_{pk}$  représente le flux de chaleur à la surface de la particule  $p$ .

On considère maintenant un ensemble de particules immergées, et conformément à la MPMV expliquée précédemment § 2.1.2, on cherche à moyenniser les équations précédentes ((2.17) et (2.18)). Cependant, on n'est pas en présence d'une modélisation continue où les équations seraient valables en tout point de l'espace occupé par la phase solide, mais en présence d'une modélisation discrète admettant une équation par particule. On ne peut donc pas appliquer les opérateurs de prise de moyenne volumique définis préalablement § 2.1.1.3. On utilise alors la moyenne arithmétique en guise d'opérateur de prise de moyenne volumique, nommée **moyenne particulaire** et notée  $\langle \psi_p \rangle^p$ . Cette moyenne particulaire et le théorème d'interversión analogue associé sont établis dans les travaux de Jackson [98] et d'Anderson & Jackson [4]. Les calculs sont détaillés dans l' **Annexe A** pour des raisons de clarté de l'exposé. Une fois les équations moyennées sur l'ensemble des particules admettant leur centre de masse dans le VER, on obtient :

$$\varepsilon_s \rho_s \left( \frac{\partial \langle \mathbf{v}_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_p \rangle^p + \frac{1}{N} \nabla \cdot N \langle \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) = \varepsilon_s \rho_s \mathbf{g} + \frac{1}{V} \sum_{q'} \mathbf{f}_{q'} + \frac{1}{V} \iint_{S_{ls} \cup S_{gs}} \overline{\overline{\sigma}}_s \cdot \mathbf{n}_{sf} dS \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s C_{ps} \left( \frac{\partial \langle \Theta_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \cdot \nabla \langle \Theta_p \rangle^p + \frac{1}{N C_{ps}} \nabla \cdot \left( N \langle \widetilde{h}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) \right) \\ = \varepsilon_s \rho_s \dot{q}_s + \lambda_s \nabla^2 (\varepsilon_s \langle \Theta_s \rangle) - \lambda_s \nabla \langle \Theta_s \rangle^s \cdot \nabla \varepsilon_s + \frac{\lambda_s}{V} \iint_{S_{ls} \cup S_{gs}} \nabla \widetilde{\Theta}_s^s \cdot \mathbf{n}_{sf} dS \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $q'$  désigne l'ensemble des particules extérieures au VER en contact avec une ou plusieurs particules du VER, et  $\mathbf{f}_{q'}$  la résultante des forces qu'elles exercent sur ces particules.  $V$  est le volume du

VER et  $N$  le nombre de particule dans ce VER.  $\Theta$  est la température relative à la température de saturation du sodium,  $C_{ps}$  représente la capacité calorifique de la phase solide ( $s$ ) et  $\lambda_s$  est sa conductivité thermique.

On ne conserve pas ce formalisme particulaire dans la suite de ce document, car on a rencontré des difficultés pour réaliser les étapes suivantes de la MPMV. En particulier, l'absence d'un terme d'advection dans les équations de conservation locales ((2.17) et (2.18)) complique l'obtention du problème aux déviations. Une autre approche consiste à voir la phase solide comme un **pseudo-fluide** comme on a pu l'évoquer dans les approches hydrodynamiques des écoulements granulaires § 1.2.4.1 ou comme on peut la trouver dans les travaux de Ni & Beckermann [134]. Une modélisation pseudo-fluide d'un ensemble de particules est analogue à celle des fluides à la différence près que l'on doit utiliser des modèles définissant la pression et la viscosité. Cette approche pseudo-fluide permet de contourner les difficultés rencontrées, et est alors adoptée. La moyenne particulaire de l'équation de conservation de la QDM (2.19) permet toutefois d'accréditer cette modélisation. En effet, en observant l'équation (2.19), si on occulte le terme  $\frac{1}{N} \nabla \cdot N \langle \widetilde{v}_p^P \widetilde{v}_p^P \rangle^P$ , on retrouve bien un terme instationnaire, un terme d'advection et un terme de force volumique (influence gravitaire). Le dernier terme de l'équation est quant à lui relatif aux interactions entre les particules et les fluides qui les immergent (force de traînée, de pincement, capillaire, etc.). Il ne reste alors que le terme issu des forces de contact entre les particules.

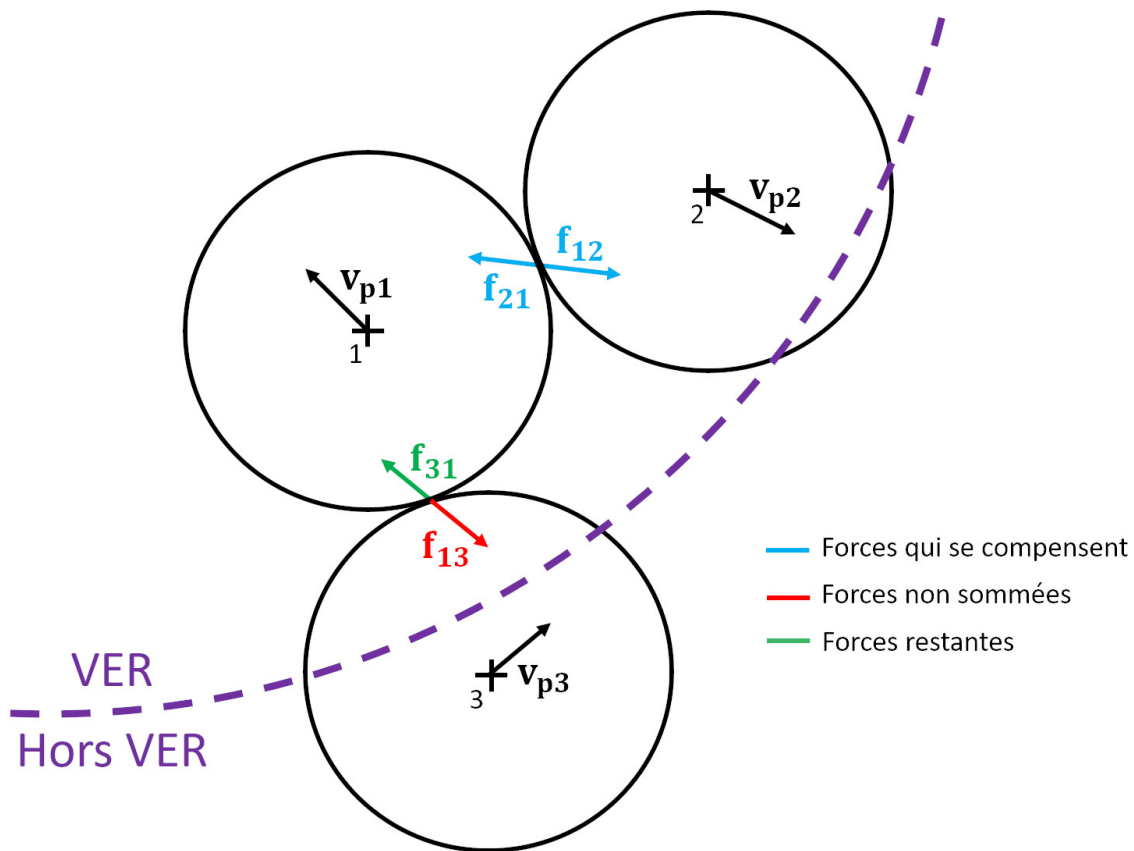


Figure 2.4 – Schéma de la compensation des forces de contact à la frontière du VER.

On s'attarde quelque peu sur l'établissement de cette force macroscopique issue des contacts entre particules. Dans l'équation de la seconde loi de Newton, on trouve la résultante des forces de contact entre les particules :  $\sum_q \mathbf{f}_{qp}$ . Lorsque l'on fait la moyenne arithmétique de cette force sur toutes les particules du VER, le principe des actions réciproques de Newton ( $\mathbf{f}_{qp} = -\mathbf{f}_{pq}$ ) permet de compenser chacune des forces considérées, à l'exception des forces exercées par les particules à l'extérieur du VER sur des particules du VER. On trouve bien la somme sur les particules externes au VER en contact avec les particules du VER ( $\sum_{q'} \mathbf{f}_{q'}$ ) de l'équation moyennée (2.19). La Fig. 2.4 schématise ce raisonnement à la frontière du VER. Maintenant, on choisit de décomposer chacune des forces restantes  $\mathbf{f}_{q'}$  selon leur composante normale au VER et leur composante tangentielle. On peut alors assimiler la résultante des composantes normales à une force de pression exercée par les particules extérieures sur la surface du VER. De même, on peut considérer la partie tangentielle de la résultante comme le frottement des particules extérieures sur le VER. Ce frottement pourrait alors s'assimiler à une diffusion macroscopique de la QDM dans la phase solide, soit à une viscosité de la phase solide. On parle alors de **pression** et de **viscosité** dites **granulaires, particulières ou solides**. Il existe un grand nombre de modèles [21] [62] [134] [180] définissant une pression et/ou une viscosité granulaire.

Généralement, la **pression granulaire** représente les contraintes normales aux contacts entre les particules liées à leur non-interpénétrabilité. Elle permet ainsi de respecter le taux d'occupation maximal des particules, présenté dans le chapitre précédent (voir § 1.2.2). Plus on augmente le nombre de particules par unité de volume ou leur taux d'occupation volumique, plus cette pression augmente pour repousser les particules ou agrandir le volume et maintenir le taux d'occupation en deçà du maximum. Loin de ce taux, elle est pratiquement nulle, les particules interagissant peu. Elle peut également s'interpréter, dans une certaine mesure, comme les chocs entre les particules au même titre que la pression d'un fluide.

La **viscosité particulaire** représente plutôt la friction entre les particules. Ainsi, plus l'encombrement est important, plus les particules frottent et plus la viscosité solide est grande. Cette viscosité solide peut prendre rapidement plusieurs ordres de grandeur lorsqu'on s'approche du taux d'occupation maximal, comme on peut le voir sur la Fig. 1.11 si on assimile les viscosités solides aux viscosités relatives. La viscosité tendant vers l'infini lorsque le taux d'occupation volumique s'approche du maximum, elle peut pousser l'écoulement granulaire à s'immobiliser.

On peut ainsi assez bien représenter les comportements spécifiques aux systèmes granulaires comme les phénomènes d'écoulements intermittents, la densification ou le taux d'occupation maximal.

On utilise ce type de modélisation pseudo-fluide pour la phase solide dans la suite de ce document. Cependant, on vient déjà de réaliser une remontée d'échelle. Aussi, le VER considéré pour la remontée d'échelle basée sur une modélisation pseudo-fluide de la phase solide doit être "plus grand" que le VER utilisé pour la moyenne particulaire.

## 2.2.2. Des fluides Newtoniens et l'approximation de Boussinesq

On considère les fluides ( $l$ ) et ( $g$ ) comme Newtoniens, incompressibles et non miscibles, soumis à la gravité comme seule force volumique. D'après l'estimation du rapport des densités au chapitre précédent § 1.3.3, en s'appuyant sur les travaux de Srivastava *et al.* [176] et de Courrech Du Pont [41],



on peut négliger l'influence de la turbulence des écoulements de sodium liquide ou gazeux sur les débris. On considère que les variations de la viscosité dynamique  $\eta_k$  sont négligeables. On choisit des corrélations pour la pression granulaire et la viscosité granulaire pour la phase solide qui dépendent uniquement du taux d'occupation volumique, en cohérence avec ces hypothèses [21] [180]. Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes pour la conservation de la masse (2.21) et de la quantité de mouvement (QDM) (2.22) décrivent le comportement de chaque phase : ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial (\rho_k \mathbf{v}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) = \rho_k \mathbf{g} - \nabla P_k + \eta_k \nabla^2 \mathbf{v}_k \quad (2.22)$$

où pour la phase  $k$ ,  $\rho_k$  désigne sa densité,  $\mathbf{v}_k$  est sa vitesse locale,  $P_k$  symbolise sa pression et  $\eta_k$  représente sa viscosité dynamique.  $\mathbf{g}$  transcrit l'accélération de la pesanteur.

On se place ensuite dans le cadre de l'approximation de Boussinesq [10] [126], car c'est le formalisme le plus simple permettant de modéliser la convection naturelle, fondamentale dans cette étude. Il s'agit de considérer que l'influence de la variation de la densité  $\rho_k$  en fonction de la pression et de la température est toujours négligeable, excepté dans le terme gravitaire où elle est approximée par une dépendance linéaire à la température : ( $k = l, g, s$ )

$$\rho_k(T_k) = \rho_k^0 (1 - \beta_k (T_k - T_k^0)) \quad (2.23)$$

où  $\rho_k^0$  est une densité de référence associée à la température de référence  $T_k^0$  tandis que  $\beta_k$  est le coefficient de dilatation thermique de la phase  $k$  et  $T_k$  sa température.

On choisit alors la température d'ébullition du sodium  $T^{sat}$  comme température de référence, quelle que soit la phase. On introduit  $\Theta_k$  la température relative de la phase  $k$ , définie par la relation (2.24) comme l'écart entre sa température de la phase et la température de saturation du sodium. On réécrit alors la dépendance de la densité à la température sous l'approximation de Boussinesq (2.23) via la température relative : ( $k = l, g, s$ )

$$\Theta_k = T_k - T_k^0 = T_k - T^{sat} \quad (2.24)$$

$$\rho_k(T_k) = \rho_k^0 (1 - \beta_k (T_k - T^{sat})) = \rho_k^0 (1 - \beta_k \Theta_k) \quad (2.25)$$

où  $\Theta_k$  est l'écart de température algébrique entre la phase  $k$  et la température de saturation du sodium, ou température relative de la phase  $k$ .

On réécrit alors les équations de conservation de la masse (2.26) et de la QDM (2.27) dans le cadre de l'approximation de Boussinesq pour un fluide incompressible, en considérant la densité constante à la valeur  $\rho_k^0$  renotée  $\rho_k$  pour tout autre terme que le terme gravitaire. On a alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) = (1 - \beta_k \Theta_k) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_k} \nabla P_k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \mathbf{v}_k \quad (2.27)$$

### 2.2.3. Conservation de l'énergie : Écriture en Température relative

On écrit ici la conservation de l'énergie pour la phase  $k$ . On fait l'hypothèse en première approximation que les flux conductifs et advectifs dus à la puissance volumique issue des débris sont prépondérants devant le travail des forces de pression, les transferts radiatifs et la dissipation visqueuse. On s'appuie sur la grande conduction thermique du sodium liquide et l'importance motrice de la convection naturelle pour le nivellement du lit de débris pour faire cette hypothèse, ainsi que l'opacité du sodium liquide. La conservation de l'énergie peut alors s'écrire comme un bilan d'enthalpie sous la forme d'une équation d'action-diffusion [160] : ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\partial (\rho_k h_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k \mathbf{v}_k) = \rho_k \dot{q}_k + \nabla \cdot (\lambda_k \nabla T_k) \quad (2.28)$$

où  $h_k$  est l'enthalpie de la phase  $k$ ,  $\dot{q}_k$  sa puissance spécifique  $\lambda_k$  sa conductivité thermique et  $T_k$  sa température.

On suppose la densité et la conductivité thermique constante pour chaque phase. On a la relation (2.29) issue des travaux de Duval *et al.* [60] reliant l'enthalpie et la température relative. Grâce à elle, on peut réécrire le terme d'advection pour un écoulement incompressible (2.26) en fonction de la température relative si on considère l'enthalpie à température de saturation  $h_k^{sat}$ , la capacité calorifique  $C_{pk}$  et la température de saturation  $T^{sat}$  constante également : ( $k = l, g, s$ )

$$h_k = h_k^{sat} + C_{pk} (T_k - T^{sat}) = h_k^{sat} + C_{pk} \Theta_k \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot (h_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_k \cdot \nabla h_k + h_k \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}_k}_{=0} = \mathbf{v}_k \cdot \nabla h_k = C_{pk} \mathbf{v}_k \cdot \nabla \Theta_k = C_{pk} \nabla \cdot (\Theta_k \mathbf{v}_k) \quad (2.30)$$

où  $h_k^{sat}$  est l'enthalpie de la phase  $k$  à la température de saturation du sodium.

On peut facilement utiliser la relation (2.29) entre l'enthalpie et la température <sup>1</sup> dans l'opérateur de dérivation temporelle. Il en va de même dans celle liant la température relative et la température absolue (2.24) dans le Laplacien. On injecte ensuite la réécriture précédente de l'advection (2.30). On a alors l'équation de conservation de l'énergie écrite en température relative suivante : ( $k = l, g, s$ )

$$C_{pk} \frac{\partial \Theta_k}{\partial t} + C_{pk} \nabla \cdot (\Theta_k \mathbf{v}_k) = \dot{q}_k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \Theta_k \quad (2.31)$$

### 2.2.4. Conditions de saut aux interfaces

On adjoint aux équations de conservation précédemment établies, les conditions de saut aux interfaces (liquide-gaz, solide-liquide et solide-gaz) pour former le problème local, en s'appuyant sur les travaux de Delhayé [52] [53]. Premièrement, on considère le non-glissement aux interfaces, avec une matrice solide mobile, et le changement de phase entre les deux phases de fluide (liquide-gaz). On a alors les conditions de saut aux interfaces suivantes : ( $f = l, g$ )

$$\rho_l (\mathbf{w}_{lg} - \mathbf{v}_l) \cdot \mathbf{n}_{lg} = -\rho_g (\mathbf{w}_{lg} - \mathbf{v}_g) \cdot \mathbf{n}_{gl} = \varphi_{lg} \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.32b)$$

1. On a utilisé ici des notations génériques  $k$  pour désigner les trois phases ( $l$ ), ( $g$ ) et ( $s$ ). C'est l'enthalpie de référence de la phase solide à la température de saturation du sodium ( $h_s^0 = h_s(T^{sat})$ ) qui apparaît dans l'expression (2.29) et non pas  $h_s^{sat}$ . Cela ne modifiant en rien les calculs, l'écriture générique de l'équation (2.31) est aussi valable pour la phase solide.

où  $\varphi_{lg}$  est le flux massique de changement de phase du sodium à l'interface et  $\mathbf{w}_{lg}$  représente la vitesse de déplacement de l'interface liquide-gaz.

On considère également que l'équilibre hydrostatique aux interfaces entre les phases en considérant la tension de surface, donnant les conditions de saut aux interfaces suivantes : ( $f = l, g$ )

$$\varphi_{lg} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) + P_l \mathbf{n}_{lg} - \eta_l (\nabla \mathbf{v}_l + \nabla \mathbf{v}_l^T) \cdot \mathbf{n}_{lg} + P_g \mathbf{n}_{gl} - \eta_g (\nabla \mathbf{v}_g + \nabla \mathbf{v}_g^T) \cdot \mathbf{n}_{gl} = \mathcal{T}_{lg} R_{lg} \mathbf{n}_{lg} \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.33a)$$

$$P_f \mathbf{n}_{fs} - \eta_f (\nabla \mathbf{v}_f + \nabla \mathbf{v}_f^T) \cdot \mathbf{n}_{fs} + P_s \mathbf{n}_{sf} - \eta_s (\nabla \mathbf{v}_s + \nabla \mathbf{v}_s^T) \cdot \mathbf{n}_{sf} = \mathcal{T}_{fs} R_{fs} \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.33b)$$

où  $\mathcal{T}_{kk'}$  est la tension de surface entre les phases  $k$  et  $k'$ ,  $R_{kk'}$  désigne le rayon de courbure à l'interface.

On supposera plus tard que le changement de phase a lieu sur l'intégralité de l'interface liquide-gaz. La température de l'interface liquide-gaz est alors connue et fixée à la température de saturation du sodium. : ( $f = l, g$ )

$$\Theta_l = \Theta_g \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.34a)$$

$$\Theta_f = \Theta_s \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.34b)$$

$$\Theta_f = 0 \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.34c)$$

On suppose l'équilibre thermique et l'égalité des flux thermiques aux interfaces [185]. On a alors les conditions de saut suivantes : ( $f = l, g$ )

$$-\Delta h_l^{vap} \varphi_{lg} + \lambda_l \nabla \Theta_l \cdot \mathbf{n}_{lg} + \lambda_g \nabla \Theta_g \cdot \mathbf{n}_{gl} = 0 \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.35a)$$

$$\lambda_f \nabla \Theta_f \cdot \mathbf{n}_{fs} + \lambda_s \nabla \Theta_s \cdot \mathbf{n}_{sf} = 0 \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.35b)$$

où  $\Delta h_l^{vap}$  représente la chaleur latente de vaporisation du sodium.

L'absence de changement de phase aux interfaces avec la phase solide peut également se traduire comme suit : ( $f = l, g$ )

$$\mathbf{w}_{fs} = \mathbf{v}_s \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{w}_{fs} = \mathbf{v}_f \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.36b)$$

## 2.2.5. Résumé : Problème local - Échelle des grains

Le système se compose de trois phases : le sodium liquide ( $l$ ), la vapeur de sodium ( $g$ ) et les particules de corium considérées comme une troisième phase ( $s$ ) pseudo-fluide. On considère les deux fluides comme incompressibles, immiscibles et Newtoniens avec des échanges de matière par ébullition et condensation, aux propriétés physiques constantes sous l'approximation de Boussinesq [10] [126]. Les particules de corium formant une matrice poreuse non consolidée seront considérées comme une unique phase pseudo-fluide incompressible et immiscible [134] libérant une chaleur volumique représentant la puissance résiduelle associée à la désintégration des produits de fission. On considère alors pour chaque phase les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (QDM) et de l'énergie (exprimée en température relative). Les températures considérées ici ne sont pas les températures absolues de chaque phase, mais la température relative à la température de saturation du sodium, qui sert de température de référence dans ces travaux (voir 2.24). On résume alors les hypothèses du modèle local ainsi :

- On ne considère qu'une unique phase en chaque point de l'espace.
- On modélise la phase solide comme un pseudo-fluide admettant des lois constitutives pour définir sa pression  $P_s$  et sa viscosité  $\eta_s$ .
- On considère le sodium liquide et gazeux comme des fluides Newtoniens, incompressibles et non miscibles.
- Les propriétés physiques sont considérées comme uniformes sur le VER et indépendantes des grandeurs physiques comme la température ou la pression ( $\beta_k, \mathbf{g}, \rho_k, \eta_k, C_{pk}, \dot{q}_k, \lambda_k$  et  $h_k^{sat}$ ) sous l'approximation de Boussinesq [10] [126].
- On modélise un système hors équilibre thermique.
- On néglige dans les équations de conservation de l'énergie les flux radiatifs, le travail des forces de pression et les effets de dissipation visqueuse.

Les 9 équations de conservation du problème local s'écrivent alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) = (1 - \beta_k \Theta_k) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_k} \nabla P_k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \mathbf{v}_k \quad (2.27)$$

$$C_{pk} \frac{\partial \Theta_k}{\partial t} + C_{pk} \nabla \cdot (\Theta_k \mathbf{v}_k) = \dot{q}_k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \Theta_k \quad (2.31)$$

Ces équations de conservation sont associées aux conditions de saut suivantes pour former le problème local :

$$\rho_l (\mathbf{w}_{lg} - \mathbf{v}_l) \cdot \mathbf{n}_{lg} = -\rho_g (\mathbf{w}_{lg} - \mathbf{v}_g) \cdot \mathbf{n}_{gl} = \varphi_{lg} \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.32b)$$

$$\varphi_{lg} (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) + P_l \mathbf{n}_{lg} - \eta_l (\nabla \mathbf{v}_l + \nabla \mathbf{v}_l^T) \cdot \mathbf{n}_{lg} + P_g \mathbf{n}_{gl} - \eta_g (\nabla \mathbf{v}_g + \nabla \mathbf{v}_g^T) \cdot \mathbf{n}_{gl} = \mathcal{T}_{lg} R_{lg} \mathbf{n}_{lg} \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.33a)$$

$$P_f \mathbf{n}_{fs} - \eta_f (\nabla \mathbf{v}_f + \nabla \mathbf{v}_f^T) \cdot \mathbf{n}_{fs} + P_s \mathbf{n}_{sf} - \eta_s (\nabla \mathbf{v}_s + \nabla \mathbf{v}_s^T) \cdot \mathbf{n}_{sf} = \mathcal{T}_{fs} R_{ls} \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.33b)$$

$$\Theta_l = \Theta_g \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.34a)$$

$$\Theta_f = \Theta_s \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.34b)$$

$$\Theta_f = 0 \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.34c)$$

$$-\Delta h_l^{vap} \varphi_{lg} + \lambda_l \nabla \Theta_l \cdot \mathbf{n}_{lg} + \lambda_g \nabla \Theta_g \cdot \mathbf{n}_{gl} = 0 \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.35a)$$

$$\lambda_f \nabla \Theta_f \cdot \mathbf{n}_{fs} + \lambda_s \nabla \Theta_s \cdot \mathbf{n}_{sf} = 0 \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.35b)$$

### 2.3. Problème Moyenné Non fermé (PbMNF)

La première étape de la méthode consiste à appliquer l'opérateur de prise de moyenne de phase aux équations de conservation du problème local. Comme on le verra dans cette sous-section, l'application des théorèmes d'interversion ((2.7) à (2.11)) fait apparaître des termes dépendant des grandeurs locales qu'il faudra fermer. On parle donc ici de l'obtention du Problème Moyenné Non Fermé (PbMNF). On traitera distinctement chaque équation de conservation puis les conditions de saut.

### 2.3.1. PbMNF : Conservation de la masse

On commence par les équations de conservation de la masse. On applique l'opérateur de prise de moyenne de phase (2.4) à l'équation de conservation de la masse locale (2.26). On utilise ensuite le théorème d'interversion spatiale (2.10). On passera alors de la moyenne de phase à la moyenne intrinsèque (2.6) dans le terme en gradient de vitesse moyenne ainsi obtenu. ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) = \frac{1}{V} \iint_{S_k} -\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.38)$$

On ajoute alors, pour tenir compte de la variation potentielle du volume de la phase  $V_k$  dans le VER  $V$ , l'expression obtenue par application du théorème d'interversion temporelle (2.7) à la fonction indicatrice de la phase  $k$ . On obtient alors par linéarité de l'intégrale, les équations de conservation de la masse moyennée non fermées suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) = \frac{1}{V} \iint_{S_k} (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS = \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \quad (2.39)$$

où  $\dot{m}_{kj}$  est le débit massique par unité de volume de changement de phase, de la phase  $k$  vers la phase  $j$ . La conservation de la masse, représentée par la condition de saut à l'interface de changement de phase (2.32a) implique leur compensation (2.40). En particulier pour un lit de débris de corium, il n'y a pas de transfert de masse de la phase solide vers les autres phases dans le cadre de notre étude et les débits massiques par unités de volumes associés sont donc nuls (2.41). ( $k, j = l, g$ )

$$\dot{m}_{lg} = -\dot{m}_{gl} \quad (2.40)$$

$$\dot{m}_{ks} = \dot{m}_{sj} = 0 \quad (2.41)$$

### 2.3.2. PbMNF : Conservation de la quantité de mouvement (QDM)

Pour obtenir la conservation de la quantité de mouvement moyennée non fermée, on applique également l'opérateur de prise de moyenne de phase et les théorèmes d'interversion. On réécrit ensuite les équations avec la décomposition de W. G. Gray (2.13), entre autres pour limiter le plus possible la présence des grandeurs physiques locales (non moyennées). Pour plus de clarté, on traitera séparément le premier et le second membres avant de les rassembler.

#### PbMNF : QDM - Premier Membre (PM)

Pour le premier membre (PM) des équations de conservation de la quantité de mouvement (QDM), on applique l'opérateur de prise de moyenne de phase (2.4) et les théorèmes d'interversion (2.8) et (2.11) au premier membre des équations de conservation de la QDM locale (2.27) et on rassemble les termes intégraux en un seul par linéarité de l'intégrale. Afin d'écrire un problème portant bien sur les grandeurs physiques moyennes, on utilise la décomposition de la moyenne d'un produit (2.16) dans le terme en gradient de la moyenne du produit des vitesses. On passe alors à la moyenne intrinsèque (2.6) dans le terme de dérivation temporelle. On obtient alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\langle PM \rangle = \frac{\partial \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) + \nabla \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{v}_k (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.42)$$

On décompose ensuite les dérivées de produit afin de faire apparaître le premier membre de l'équation de conservation de la masse macroscopique non fermée (2.39). On le remplacera par son second membre, un terme intégral portant sur la même surface interfaciale que le terme intégral issu des théorèmes d'interversion précédents. ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \langle PM \rangle &= \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \right)}_{= \frac{1}{V} \iint_{S_k} (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS} \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \right) \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \\ &+ \nabla \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{v}_k (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \end{aligned} \quad (2.43)$$

On rassemble alors les termes intégraux, en rappelant que la vitesse moyenne est uniforme sur le VER (2.15). On applique alors la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour faire apparaître la déviation de la vitesse :

$$\langle PM \rangle = \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \right) \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \nabla \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}}_k^k (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.44)$$

Le dernier terme du premier membre moyenné non fermé (en bleu) ainsi obtenu est relatif à l'échange de QDM entre les phases (à l'interface) par changement de phase.

### PbMNF : QDM - Second Membre (SM)

Pour le second membre ( $SM$ ), on applique également l'opérateur de prise de moyenne de phase (2.4) et les théorèmes d'interversion spatiale (2.9), (2.10) et (2.11). On considère que  $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi)$  pour l'utilisation successive des théorèmes d'interversion (2.11) puis (2.10). On suppose aussi que le coefficient de dilation thermique  $\beta_k$ , la densité  $\rho_k$ , l'accélération de pesanteur  $\mathbf{g}$ , et la viscosité dynamique  $\eta_k$  sont uniformes sur le VER. On passe à la moyenne intrinsèque (2.6) par cohérence avec le premier membre  $PM$ . On a alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \langle SM \rangle &= \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_k} \left( \nabla \left( \varepsilon_k \langle P_k \rangle^k \right) - \frac{1}{V} \iint_{S_k} P_k \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \\ &+ \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{v}_k \mathbf{n}_{kk'} dS \right) + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

On utilise alors la séparation des échelles (2.2) qui nous permet de négliger la divergence de l'intégrale de la vitesse normale par rapport à l'intégrale du gradient de la vitesse. En effet, le premier opérateur de dérivation spatial porte sur une grandeur macroscopique  $\left( \nabla \cdot \langle \psi \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{\langle \psi \rangle}{L} \right) \right)$  tandis que le second porte sur une grandeur locale  $\left( \nabla \psi = \mathcal{O} \left( \frac{\psi}{l_k} \right) \right)$ , les ordres de grandeur des autres termes étant égaux, on a : ( $k = l, g, s$ )

$$\mathcal{O} \left( \frac{\| \mathbf{v}_k \| S_k}{LV} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{v}_k \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \ll \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS = \mathcal{O} \left( \frac{\| \mathbf{v}_k \| S_k}{l_k V} \right) \quad (2.46)$$

On réécrit ensuite les grandeurs locales via la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour écrire une équation cohérente avec le VER considéré et réduire le nombre d'occurrences des grandeurs

locales. Par linéarité de l'intégrale et comme on suppose l'uniformité des grandeurs moyennes sur le VER (2.15), on peut sortir ces grandeurs moyennes de l'intégrale et estimer l'intégrale restant via la relation particulière (2.12). ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \iint_{S_k} P_k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS &= \frac{\langle P_k \rangle^k}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \\ &= -\langle P_k \rangle^k \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS &= \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \\ &= -\nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \end{aligned} \quad (2.48)$$

On remplace les termes concernés dans l'expression précédente du SM (2.45). On développe ensuite le gradient du produit du taux d'occupation volumique et de la pression moyenne intrinsèque  $\nabla \left( \varepsilon_k \langle P_k \rangle^k \right)$  permettant de simplifier le terme en pression moyenne intrinsèque  $-\langle P_k \rangle^k \nabla \varepsilon_k$  que l'on vient d'injecter via la réécriture de l'intégrale de pression. On rassemble encore une fois les intégrales par linéarité. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle SM \rangle &= \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &\quad + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) dS \end{aligned} \quad (2.49)$$

On vient ainsi de faire apparaître les **termes de Brinkman** [106] :  $\frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k$

### PbMNF : Simplification QDM moyennée non fermée

On obtient donc les équations de QDM moyennées non fermées en rassemblant le  $\langle PM \rangle$  (2.44) et le  $\langle SM \rangle$  (2.49) que l'on vient d'établir : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \right) \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \nabla \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle &= \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \left( \mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \\ + \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) dS \end{aligned} \quad (2.50)$$

On peut alors comparer le terme  $\nabla \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle$  au terme  $\frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS$  en estimant le second terme à l'aide de l'expression (2.12) et en se rappelant que l'opérateur  $\nabla$  est appliqué à deux échelles différentes ( $\nabla \cdot \langle \psi \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{\langle \psi \rangle}{L} \right)$  tandis que  $\nabla \psi = \mathcal{O} \left( \frac{\psi}{l_k} \right)$ ). On a alors (2.51), dès lors que la condition (2.52) est respectée : ( $k = l, g, s$ )

$$\mathcal{O} \left( \frac{\| \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \|^2 S_k}{LV} \right) = \nabla \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle \ll \frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS = \mathcal{O} \left( \frac{\eta_k \varepsilon_k \| \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \| S_k}{l_k V} \right) \quad (2.51)$$

$$\frac{\rho_k \|\widetilde{\mathbf{v}_k}\| l_k}{\eta_k \varepsilon_k} \ll \frac{L}{l_k} \quad (2.52)$$

On peut remarquer que cette condition (2.52) fait apparaître un terme analogue à un nombre de Reynolds en milieu poreux (1.8) où la vitesse serait remplacée par la déviation de la vitesse. Il est cependant difficile d'estimer cette condition sans information sur l'ordre de grandeur de la déviation de la vitesse. Comme on le verra dans la section suivante portant sur les conditions de saut du problème aux déviations (voir § 2.4.4) et contrairement au cas présent, il a été établi dans le cas d'une matrice poreuse immobile [20] [106] [145] que la déviation de la vitesse est de l'ordre de la vitesse moyenne (2.87). La condition précédente (2.52) limiterait alors le nombre de Reynolds poreux macroscopique à être inférieur au rapport des échelles. Le modèle serait alors valable pour des écoulements relativement lents, condition respectée par ailleurs selon les estimations du premier chapitre (voir (3.18c) et (3.18d)). On ne peut cependant pas l'affirmer dans le cas du lit de débris sans information supplémentaire sur l'ordre de grandeur de la déviation de la vitesse et il faudrait le confirmer *a posteriori*.

On supposera dans toute la suite de ce document que les conditions (2.52) sont vérifiées. On peut alors réécrire les équations de conservation de la quantité de mouvement moyennées non fermées ainsi : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \right) \langle \mathbf{v}_k \rangle^k &= \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}_k}^k (\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS + \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k \\ &+ \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}_k}^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) dS \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ces équations dépendent encore des deux échelles. Bien que ce soient bien des équations aux dérivées partielles portant sur les grandeurs moyennes intrinsèques, elles comportent des termes dépendant des déviations de la pression ou de la vitesse qui nous sont inconnus. C'est pourquoi ces équations sont dites "non fermées".

### 2.3.3. PbMNF : Conservation de l'énergie

Pour établir les équations de conservation de l'énergie moyennées non fermées, on procède de manière similaire à l'obtention des équations de conservation de la QDM moyennées non fermées précédemment établies (2.53). On applique l'opérateur de prise de moyenne de phase aux équations de conservation de l'énergie locales. On séparera le traitement du premier membre (*PM*) et du second membre (*SM*) pour plus de clarté avant de les rassembler à nouveau. On supposera la capacité calorifique  $C_{pk}$ , la puissance spécifique  $\dot{q}_k$ , la conductivité thermique  $\lambda_k$  et encore la densité  $\rho_k$  uniformes sur le VER.

#### PbMNF : Énergie - Premier Membre (PM)

Pour le premier membre (*PM*), on applique l'opérateur de prise de moyenne de phase (2.4) et les théorèmes d'interversion (2.8) et (2.11) à l'équation de conservation de l'énergie locale (2.31). On rassemble ensuite les termes intégraux en un seul terme par linéarité. On utilise ensuite la décomposition de la moyenne d'un produit (2.16). On passe à la moyenne intrinsèque (2.6) dans le terme de



dérivation temporelle. On obtient alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\langle PM \rangle = C_{pk} \left( \frac{\partial \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \langle \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \Theta_k (\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right) \quad (2.54)$$

Or, on rappelle l'hypothèse de non-glissement aux interfaces solides (2.32b). Ainsi le dernier terme est nul pour la phase solide. Pour les phases fluides,  $(\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_k)$  est nul sur les aires à l'interface avec la phase solide (soit sur  $S_{ls}$  pour le liquide et sur  $S_{gs}$  pour la phase gazeuse). De plus, en supposant qu'il y a changement de phase entre le sodium liquide et la vapeur de sodium sur l'ensemble de l'interface liquide-gaz dans le VER, alors les températures relatives à la température de saturation  $\Theta_l$  et  $\Theta_g$  sont nulles sur l'interface  $S_{lg}$  (2.34c). Ainsi, dans tous les cas, le dernier terme de l'expression précédente (2.54) est nul.

On développe ensuite les dérivées de produit pour faire apparaître le premier membre de l'équation de conservation de la masse macroscopique (2.39). On le remplace alors par le second membre sous sa forme macroscopique : ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\partial \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) = \varepsilon_k \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \Theta_k \rangle^k \underbrace{\left( \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \right)}_{= \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k}} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \quad (2.55)$$

Ce qui donne finalement pour le premier membre de la conservation de l'énergie moyennée non fermée : ( $k = l, g, s$ )

$$\langle PM \rangle = C_{pk} \left( \varepsilon_k \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \nabla \cdot \langle \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle + \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k \right) \quad (2.56)$$

### PbMNF : Énergie - Second Membre (SM)

Le traitement du second membre (SM) de la conservation de l'énergie est similaire au traitement du second membre de la conservation de la quantité de mouvement. On applique toujours l'opérateur de prise de moyenne de phase (2.4) et les théorèmes d'interversion spatiale (2.9) et (2.10) en rappelant que l'on considère que  $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi)$ . Puis on passe à la moyenne intrinsèque (2.6). On a alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\langle SM \rangle = \varepsilon_k \dot{q}_k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \left( \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \Theta_k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right) + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \Theta_k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right) \quad (2.57)$$

On utilise aussi la séparation des échelles (2.2) qui permet de négliger la divergence de l'intégrale de la température relative par rapport à l'intégrale du gradient de la température (2.58). En effet, le premier opérateur de dérivation spatiale porte sur une grandeur macroscopique ( $\nabla \cdot \langle \psi \rangle = \mathcal{O}\left(\frac{\langle \psi \rangle}{L}\right)$ ) tandis que le second porte sur une grandeur locale ( $\nabla \psi = \mathcal{O}\left(\frac{\psi}{l_k}\right)$ ), les autres ordres de grandeur de ces termes étant égaux, on a bien : ( $k = l, g, s$ )

$$\mathcal{O}\left(\frac{\Theta_k S_k}{LV}\right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \iint_{S_k} \Theta_k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS\right) \ll \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \Theta_k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS = \mathcal{O}\left(\frac{\Theta_k S_k}{l_k V}\right) \quad (2.58)$$

On réécrit ensuite la température relative locale via la décomposition de W. G. Gray (2.13), pour écrire une équation tout à fait cohérente avec le VER et limiter l'occurrence des grandeurs locales. Puis toujours par linéarité de l'intégrale et de gradient ainsi que par uniformité des grandeurs moyennes sur le VER (2.15), on peut sortir la température relative moyenne de l'intégrale. On estime l'intégrale restante via la relation particulière (2.12). ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \Theta_k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS &= \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \cdot \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \tilde{\Theta}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \\ &= -\nabla \langle \Theta_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \tilde{\Theta}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \end{aligned} \quad (2.59)$$

On néglige alors dans le second membre (2.57), le premier terme intégral conformément à (2.58) et on remplace le second terme intégral par sa réécriture (2.59). On obtient ainsi pour la diffusion thermique des termes analogues aux termes de Brinkman pour la diffusion visqueuse. On a alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\langle SM \rangle = \varepsilon_k \dot{q}_k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta \rangle^k \right) - \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \langle \Theta \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\lambda_k}{\rho_k} \left( \nabla \tilde{\Theta}^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \quad (2.60)$$

On observe ainsi des termes analogues aux termes de Brinkman :  $\frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta \rangle^k \right) - \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \langle \Theta \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k$

### **PbMNF : Simplification de la conservation de l'énergie moyennée non fermée**

En rassemblant le premier membre (2.56) et le second membre (2.60) de l'équation de conservation de l'énergie moyennée, on obtient les équations de conservation de l'énergie macroscopiques non fermées suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} C_{pk} \left( \varepsilon_k \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \nabla \cdot \left( \tilde{\Theta}_k^k \tilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \right) &= -C_{pk} \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \varepsilon_k \dot{q}_k \\ &+ \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta \rangle^k \right) - \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \langle \Theta \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\lambda_k}{\rho_k} \left( \nabla \tilde{\Theta}^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \end{aligned} \quad (2.61)$$

On peut alors comparer le terme  $C_{pk} \nabla \cdot \langle \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle$  au terme  $\frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\lambda_k}{\rho_k} (\nabla \widetilde{\Theta}^k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS$  en se rappelant que l'opérateur  $\nabla$  est appliqué à deux échelles différentes ( $\nabla \cdot \langle \psi \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{\langle \psi \rangle}{L} \right)$  tandis que  $\nabla \psi = \mathcal{O} \left( \frac{\psi}{l_k} \right)$ ) et la séparation des échelles (2.2). On estime le second terme à l'aide de l'expression (2.12). On a alors l'inégalité (2.62) dès lors que la condition (2.63) est respectée. ( $k = l, g, s$ )

$$\mathcal{O} \left( \frac{C_{pk} \widetilde{\Theta}_k^k \|\widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| S_k}{LV} \right) = C_{pk} \nabla \cdot \langle \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \rangle \ll \frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\lambda_k}{\rho_k} (\nabla \widetilde{\Theta}^k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS = \mathcal{O} \left( \frac{\lambda_k \widetilde{\Theta}_k^k S_k}{\rho_k l_k V} \right) \quad (2.62)$$

$$\frac{C_{pk} \rho_k \|\widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| l_k}{\lambda_k \varepsilon_k} \ll \frac{L}{l_k} \quad (2.63)$$

On peut remarquer que cette condition (2.63) fait apparaître un terme analogue à un nombre de Péclet thermique en milieu poreux où la vitesse serait remplacée par la déviation de la vitesse de la phase. Comme pour la condition précédente (2.52), la déviation de la vitesse est difficile à estimer dans le cas présent. Si l'une des phases était immobile, on pourrait affirmer [20] [106] [145] que cette condition est vérifiée si le nombre de Péclet en milieu poreux est inférieur au rapport des échelles. L'hypothèse serait alors valable pour un transfert de chaleur majoritairement conductif, ce qui semble être le cas du lit de débris en RNR-Na [75] [168]. On ne peut cependant pas l'affirmer dans ce cas sans études additionnelles et il faudrait confirmer *a posteriori* si effectivement la déviation de la vitesse est de l'ordre de la vitesse moyenne.

On supposera dans toute la suite de ce manuscrit que les conditions (2.63) sont vérifiées. On a alors établi les équations de conservation de l'énergie moyennées non fermées : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \left( \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \right) = & - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k \dot{q}_k}{C_{pk}} + \alpha_k \nabla^2 (\varepsilon_k \langle \Theta \rangle^k) - \alpha_k \nabla \langle \Theta \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ & + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k (\nabla \widetilde{\Theta}^k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \end{aligned} \quad (2.64)$$

où  $\alpha_k$  est la diffusivité thermique de la phase  $k$ , telle que  $\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\rho_k C_{pk}}$ .

Ces équations dépendent encore des deux échelles. Bien qu'elles soient des équations aux dérivées partielles portant sur les grandeurs moyennes intrinsèques, elles comportent un terme relatif à la déviation de la température relative de la phase qui est inconnue.

### 2.3.4. Résumé : PbmNF

On a ainsi établi les équations de conservations moyennées non fermées pour le système à partir des équations de conservations locales. On rappelle les hypothèses et simplifications utilisées ici :

- Les propriétés physiques sont considérées comme constantes ( $\beta_k$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\rho_k$ ,  $\eta_k$ ,  $C_{pk}$ ,  $\dot{q}_k$  et  $\lambda_k$ ).
- On suppose qu'il y a changement de phase entre le sodium liquide et gazeux sur l'ensemble de l'interface liquide-gaz dans le VER.

- La séparation des échelles (2.2) permet de négliger les termes :  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \Theta_k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right)$  et  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right)$  par rapport aux autres termes.
- On suppose être dans les conditions décrites par les inégalités (2.52) et de (2.63).
- Moyennes supposées uniformes sur le VER (2.15), notamment aux interfaces.

On obtient alors les équations de conservation moyennées non fermées suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k \right) = \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k}{\partial t} + \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k \cdot \nabla \right) \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k &= \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k (\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS + \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k \\ &+ \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) dS \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \left( \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \right) &= - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k \dot{q}_k}{C_{pk}} + \alpha_k \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta \rangle^k \right) - \alpha_k \nabla \langle \Theta \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &+ \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \left( \nabla \widetilde{\Theta}^k \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \end{aligned} \quad (2.64)$$

## 2.4. Problème aux déviations (PbD) et relation de fermeture

Dans la section précédente, on a obtenu les équations de conservation moyennées non fermées décrivant le comportement d'un lit de débris de corium sur un RNR-Na. Ces équations ne sont pas fermées, car elles dépendent encore de grandeurs locales inconnues et ne séparent donc pas complètement les échelles. Les étapes suivantes ont pour but de les fermer, *i.e.* les écrire en utilisant seulement des grandeurs macroscopiques connues. Pour cela, l'idée va être d'exprimer les déviations inconnues en fonction des grandeurs macroscopiques d'intérêt. On va alors écrire un Problème aux Déviations (PbD) puis des Problèmes de Fermeture (PbF). On commence par le PbD que l'on écrit dans cette section. Le PbD est un système d'équations de conservation portant sur les déviations qui permet de déterminer les grandeurs moyennes nécessaires à leur description. On pourra alors introduire les **relations de fermeture** définissant les dépendances des déviations à ces grandeurs moyennes. Les PbF permettront quant à eux de définir les paramètres de ces dépendances que l'on nomme **variables de fermeture**.

Le PbD est obtenu par l'application de la méthode suivante :

1. On réécrit le problème local via la décomposition de W. G. Gray (2.13).
2. On lui soustrait les équations de conservations moyennées.
3. On simplifie le problème obtenu.

Parmi les hypothèses simplificatrices évoquées dans la méthodologie, deux sont communes à l'obtention de toutes les équations de conservation du problème aux déviations et des conditions de saut associées. On les précise préalablement dans ces paragraphes.

Premièrement, on fera l'hypothèse de quasi-stationnarité du problème aux déviations. Pour justifier cette approximation, on compare les temps caractéristiques à l'échelle des déviations aux temps caractéristique à l'échelle macroscopique. Puisque la convection naturelle semble le phénomène moteur du lit de débris, on considère principalement le temps caractéristique de convection, mais on compare également le temps caractéristique de diffusion visqueuse et de diffusion thermique (conduction). On présente dans la Table 2.1 l'expression de ces temps caractéristiques et leur comparaison entre les différentes échelles. On utilise alors la séparation des échelles (2.2) et on montre que pour ces trois types de temps caractéristiques, le temps caractéristique à l'échelle des déviations est toujours très inférieur au temps caractéristique macroscopique. Le problème aux déviations atteint ainsi son état stationnaire bien plus rapidement que le problème macroscopique. On peut donc considérer le problème aux déviations comme quasi stationnaire par rapport au problème macroscopique.

Pour estimer le rapport des temps caractéristiques de convection, on rencontre néanmoins une difficulté. En effet, ce temps caractéristique fait intervenir la vitesse de l'écoulement à l'échelle considérée. On verra cependant dans le § 2.4.4 que l'on suppose par la suite l'inégalité (2.85) vérifiée. Cette hypothèse permet alors également d'affirmer que le temps caractéristique de convection aux déviations est nettement inférieur au temps caractéristique de convection macroscopique.

	Convection	Diffusion visqueuse	Diffusion thermique
Temps caractéristique	$\tau_{ck} = \frac{\mathcal{L}}{\ \mathbf{v}_k\ }$	$\tau_{vk} = \frac{\rho_k \mathcal{L}^2}{\eta_k}$	$\tau_{tk} = \frac{\mathcal{L}^2}{\alpha_k}$
Rapport	$\frac{\widetilde{\tau}_{ck}^k}{\langle \tau_{ck} \rangle^k} = \frac{\ \langle \mathbf{v}_k \rangle^k\  l_k}{\ \widetilde{\mathbf{v}}_k^k\  L} \ll 1$	$\frac{\widetilde{\tau}_{vk}^k}{\langle \tau_{vk} \rangle^k} = \frac{l_k^2}{L^2} \ll 1$	$\frac{\widetilde{\tau}_{tk}^k}{\langle \tau_{tk} \rangle^k} = \frac{l_k^2}{L^2} \ll 1$

Table 2.1 – Expression et estimation des rapports des temps caractéristiques aux déviations sur les temps caractéristiques macroscopiques pour la convection, la diffusion visqueuse et la diffusion thermique.

où  $\mathcal{L}$  représente la longueur caractéristique et où  $\widetilde{\tau}_{ck}^k$  et  $\langle \tau_{ck} \rangle^k$  désignent respectivement par abus de notation le temps caractéristique à l'échelle des déviations et à l'échelle macroscopique.

Deuxièmement, on fait l'hypothèse que les effets du changement de phase ont une influence négligeable sur le comportement des grandeurs aux déviations comme le font Duval *et al.* [60] dans leurs travaux. Cette hypothèse est nécessaire, car les termes induits par le changement de phase rendent l'obtention et la résolution des problèmes de fermeture très complexe. On peut parfois justifier cette hypothèse en comparant la vitesse de changement de phase à la vitesse de l'écoulement comme dans les travaux de Bousquet-Melou *et al.* [20] ou de Ni & Beckermann [134] qui traitent des situations de changement de phase liquide-solide. Cependant, on manque d'information sur l'ébullition du sodium dans les conditions d'un lit de débris en RNR-Na pour pouvoir utiliser cet argument et estimer quantitativement cette hypothèse. Il conviendra donc de la valider a posteriori en quantifiant

cette influence par des études complémentaires comme des travaux expérimentaux ou des simulations numériques. Cette hypothèse, appliquée au problème aux déviations, ne présume en rien des phénomènes macroscopiques, en particulier, elle n'empêche pas la vaporisation du sodium à l'échelle macroscopique.

On va donc appliquer cette méthode à chacune des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (QDM) ou de l'énergie séparément pour chaque phase. On écrira ensuite les conditions de saut associées. On pourra alors écrire le PbD final, défini sur un VER donné.

#### 2.4.1. PbD : Conservation de la masse

On commence ainsi par écrire les équations de conservation de la masse portant sur les déviations. Pour les établir, on suit la méthode ci-dessus.

On réécrit alors les équations locales de conservation de la masse (2.26) via la décomposition de W. G. Gray (2.13), afin de faire émerger un terme en déviation. Puis l'on multiplie par le taux d'occupation volumique, qui est uniforme pour un VER, pour avoir une équation cohérente avec l'équation moyennée non fermée. On a donc : ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k) = 0 \quad (2.65)$$

On soustrait alors à l'équation obtenue (2.65), l'équation de conservation de la masse moyennée non fermée (2.39) afin de simplifier les termes portant sur les grandeurs moyennes. On obtient ainsi des équations portant sur les déviations : ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot (\varepsilon_k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k) - \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \quad (2.66)$$

Après avoir supposé le PbD quasi statique et que l'influence du changement de phase est négligeable pour le PbD (voir § 2.4), on obtient, à partir des équations (2.66), les équations de conservation de la masse aux déviations suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\varepsilon_k \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_k^k = 0 \quad (2.67)$$

#### 2.4.2. PbD : Conservation de la QDM

On établit les équations de conservations de la quantité de mouvement (QDM) aux déviations en appliquant la même méthode. Ces équations admettant plus de termes, on sépare le traitement du premier membre ( $PM$ ) et du second membre ( $SM$ ) pour plus de clarté.

##### PbD : QDM - Premier membre (PM)

On rappelle dans un premier temps la formule de calcul vectoriel suivante, d'usage pour les écoulements incompressibles (2.26) :

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{v}_k + \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{v}_k)}_{=0} \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{v}_k \quad (2.68)$$

On suit les mêmes étapes pour la conservation de la QDM que celles utilisées pour la conservation de la masse. On réécrit ainsi le  $PM$  de l'équation locale de conservation de la QDM (2.27) par

l'intermédiaire de la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour faire émerger les termes aux déviations. On utilisera cependant, pour le terme d'advection, la formulation équivalente précédente (2.68). On multiplie ensuite par le taux d'occupation volumique uniforme sur le VER : ( $k = l, g, s$ )

$$PM = \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \frac{\partial \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\partial t} + \varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \quad (2.69)$$

Puis on soustrait le  $PM$  de la conservation de la quantité de mouvement moyennée afin de faire intervenir les grandeurs moyennes le moins possible. On utilise également la décomposition de W. G. Gray (2.13) dans ce but (termes en vert) : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} PM - \langle PM \rangle &= \varepsilon_k \frac{\partial \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\partial t} + \varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k - \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \\ &+ \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}}_k^k (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \\ &= \varepsilon_k \frac{\partial \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\partial t} + \varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k + \varepsilon_k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}}_k^k (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \end{aligned} \quad (2.70)$$

#### Pbd : QDM - Second membre (SM)

On procède de même sur le second membre. On le réécrit selon la décomposition de W. G. Gray (2.13) appliquée à la vitesse, mais aussi à la température relative et à la pression, pour faire apparaître les termes en déviation. On multiplie ensuite par le taux d'occupation volumique uniforme du VER pour être cohérent avec le  $SM$  de l'équation moyennée : ( $k = l, g, s$ )

$$SM = \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k - \beta_k \widetilde{\Theta}_k^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k \nabla \langle P_k \rangle^k}{\rho_k} - \frac{\varepsilon_k \nabla \widetilde{P}_k^k}{\rho_k} + \frac{\eta_k \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right)}{\rho_k} + \varepsilon_k \frac{\eta_k \nabla^2 \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\rho_k} \quad (2.71)$$

On soustrait ensuite à (2.71) le  $SM$  de l'équation de conservation de la QDM moyennée non fermée (2.49), pour simplifier la plupart des termes en grandeur moyennée. On a : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} SM - \langle SM \rangle &= -\varepsilon_k \beta_k \widetilde{\Theta}_k^k \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k \nabla \widetilde{P}_k^k}{\rho_k} + \varepsilon_k \frac{\eta_k \nabla^2 \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\rho_k} + \frac{\eta_k \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k}{\rho_k} \\ &- \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{kk'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) dS \end{aligned} \quad (2.72)$$

#### Pbd : Simplification de la QDM aux déviations

En rassemblant les premiers membres (2.70) et les seconds membres (2.72) que l'on vient d'obtenir, on peut écrire les équations de conservation de la QDM aux déviations avant simplifications suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\partial t} + \varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k + \varepsilon_k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \widetilde{\mathbf{v}}_k^k (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS &= -\varepsilon_k \beta_k \widetilde{\Theta}_k^k \mathbf{g} \\ - \frac{\varepsilon_k \nabla \widetilde{P}_k^k}{\rho_k} + \varepsilon_k \frac{\eta_k \nabla^2 \widetilde{\mathbf{v}}_k^k}{\rho_k} + \frac{\eta_k \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k}{\rho_k} - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{kk'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) dS & \end{aligned} \quad (2.73)$$

On ajoute aux hypothèses de quasi-stationnarité et d'influence négligeable du changement de phase pour le problème aux déviations, les hypothèses suivantes :

- On rappelle la séparation des échelles (2.2) :  $\varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \gg \varepsilon_k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k$
- Au même titre que pour le changement de phase § 2.4, on néglige les effets de la dilatation thermique à l'échelle du PbD. Cette hypothèse ne présume en rien des phénomènes macroscopiques et, en particulier, elle n'empêche pas la considération de la convection naturelle à l'échelle macroscopique.
- On rappelle que le taux d'occupation volumique est uniforme sur le VER :  $\nabla \varepsilon_k = 0$

Les équations de conservation de la QDM aux déviations deviennent alors : ( $k = l, g, s$ )

$$\varepsilon_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k = -\frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \widetilde{P}_k^k + \varepsilon_k \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \widetilde{\mathbf{v}}_k^k - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{kk'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} (\nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) dS \quad (2.74)$$

### 2.4.3. PbD : Conservation de l'énergie

Pour établir les équations de conservation de l'énergie aux déviations, on procède toujours de la même manière. On va également traiter séparément le premier membre  $PM$  et le second membre  $SM$  avant de les rassembler.

#### PbD : Énergie - Premier Membre (PM)

On réécrit le premier membre de l'équation locale de conservation de l'énergie (2.31) à l'aide de la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour la vitesse et la température relative pour faire apparaître les termes aux déviations. On multiplie ensuite par le taux d'occupation volumique uniforme sur le VER par cohérence avec l'équation moyennée associée. On a alors : ( $k = l, g, s$ )

$$PM = \varepsilon_k C_{pk} \left[ \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\Theta}_k^k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \langle \Theta_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \langle \Theta_k \rangle^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) + \nabla \cdot \left( \widetilde{\Theta}_k^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) \right] \quad (2.75)$$

On soustrait ensuite à cette expression le premier membre de l'équation de conservation de l'énergie moyennée non fermée (2.56) afin de retirer la majorité des termes impliquant les grandeurs moyennes : ( $k = l, g, s$ )

$$PM - \langle PM \rangle = \varepsilon_k C_{pk} \frac{\partial \widetilde{\Theta}_k^k}{\partial t} - C_{pk} \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \varepsilon_k C_{pk} \left[ \nabla \cdot \left( \langle \Theta_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \langle \Theta_k \rangle^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) + \nabla \cdot \left( \widetilde{\Theta}_k^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \right] \quad (2.76)$$

On développe et on réarrange les termes en dérivée spatiale pour simplifier l'écriture. On utilise là aussi la linéarité de ces opérateurs et la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour faire apparaître la vitesse locale et utiliser l'équation de conservation de la masse locale (2.26). Soit : ( $k = l, g, s$ )



$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left( \langle \Theta_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \langle \Theta_k \rangle^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) + \nabla \cdot \left( \widetilde{\Theta}_k^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \widetilde{\Theta}_k^k \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \right) - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \\
&= \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \langle \Theta_k \rangle^k \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \langle \Theta_k \rangle^k \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_k^k + \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k + \widetilde{\Theta}_k^k \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \\
&+ \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k + \widetilde{\Theta}_k^k \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_k^k - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \\
&= \langle \Theta_k \rangle^k \underbrace{\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}_{=0} + \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k + \widetilde{\Theta}_k^k \underbrace{\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}_{=0} \\
&= \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k
\end{aligned} \tag{2.77}$$

On injecte ensuite cette simplification d'écriture (2.77) dans le premier membre de notre équation de conservation de l'énergie aux déviations que l'on vient d'obtenir (2.76) pour en simplifier l'écriture : ( $k = l, g, s$ )

$$PM - \langle PM \rangle = \varepsilon_k C_{pk} \frac{\partial \widetilde{\Theta}_k^k}{\partial t} + \varepsilon_k C_{pk} \left( \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \right) - C_{pk} \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k \tag{2.78}$$

### PbD : Énergie - Second Membre (SM)

On procède de même pour le second membre de la conservation de l'énergie aux déviations. On réécrit le second membre de l'équation locale (2.31) via la décomposition de W. G. Gray (2.13) et la linéarité du Laplacien, pour faire apparaître les termes aux déviations. Puis on le multiplie par le taux d'occupation volumique uniforme sur le VER, par cohérence avec la forme moyennée non fermée. ( $k = l, g, s$ )

$$SM = \varepsilon_k \dot{q}_k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) + \varepsilon_k \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \widetilde{\Theta}_k^k \tag{2.79}$$

On obtient donc, après soustraction du second membre de l'équation de conservation de l'énergie moyennée non fermée (2.64), le second membre de l'équation de conservation de l'énergie aux déviations :

$$SM - \langle SM \rangle = \varepsilon_k \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \widetilde{\Theta}_k^k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \varepsilon_k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \tag{2.80}$$

### PbD : Simplification de l'énergie aux déviations

On rassemble les premiers membres (2.78) et les seconds membres (2.80) que l'on vient d'obtenir pour écrire les équations de conservations de l'énergie aux déviations suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_k C_{pk} \frac{\partial \widetilde{\Theta}_k^k}{\partial t} + \varepsilon_k C_{pk} \left( \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \right) = \\
& C_{pk} \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \varepsilon_k \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla^2 \widetilde{\Theta}_k^k + \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \varepsilon_k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \frac{\lambda_k}{\rho_k} \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS
\end{aligned} \tag{2.81}$$

On rappelle ensuite que le taux d'occupation volumique est uniforme sur le VER :  $\nabla \varepsilon_k = 0$ . On ajoute également que l'on considère le problème aux déviations quasi stationnaire et que l'influence du changement de phase  $\gamma$  est négligeable. On obtient alors les équations de conservation de l'énergie aux déviations suivantes, après avoir divisé par la capacité calorifique  $C_{pk}$  : ( $k = l, g, s$ )

$$\varepsilon_k \left( \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \right) = \varepsilon_k \alpha_k \nabla^2 \widetilde{\Theta}_k^k - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \quad (2.82)$$

#### 2.4.4. PbD : Conditions de saut aux déviations

Pour compléter le problème aux déviations, on doit écrire les conditions de saut associées. La méthode pour les obtenir consiste à reprendre les conditions de saut associées au problème local et à les réécrire selon la décomposition W. G. Gray (2.13).

Cependant, on a fait l'hypothèse que les effets du changement de phase étaient négligeables sur le problème aux déviations. On a par ailleurs déjà discuté cette hypothèse dans le § 2.4. Elle amène à utiliser une condition de non-glissement à l'interface liquide-gaz (2.83) plutôt que la condition de saut du problème local (2.32a). De même, conformément aux travaux de Duval *et al.* [60], on n'utilisera pas l'égalité des flux thermiques à l'interface liquide-gaz (2.35a) pour écrire les conditions de saut du PbD. Ces considérations sont nécessaires, sans quoi après avoir établi les conditions de saut des problèmes de fermeture (voir § 2.5.2 et § 2.5.3) et l'expression du débit massique par unité de volume  $\dot{m}_{kj}$  en fonction des variables de fermeture (2.121), celles-ci imposeraient l'absence de changement d'état à l'échelle macroscopique.

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_g \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.83)$$

On a alors les conditions de saut pour le PbD suivantes : ( $f = l, g$ ) ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k = \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{k'} - \left( \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k - \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}'} \rangle^{k'} \right) \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.84a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{kk'} R_{kk'} \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \left( \langle P_k \rangle^k + \widetilde{P}_k^k \right) \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \left( \langle P_{k'} \rangle^{k'} + \widetilde{P}_{k'}^{k'} \right) \mathbf{n}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \\ &- \eta_k \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k + \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^{kT} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \eta_k \left( \nabla \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k + \nabla \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^{kT} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.84b) \\ &- \eta_{k'} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{k'} + \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{k'T} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - \eta_{k'} \left( \nabla \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}'} \rangle^{k'} + \nabla \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}'} \rangle^{k'T} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\widetilde{\Theta}_f^f = -\langle \Theta_f \rangle^f \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.84c)$$

$$\widetilde{\Theta}_f^f = \widetilde{\Theta}_s^s - \left( \langle \Theta_f \rangle^f - \langle \Theta_s \rangle^s \right) \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.84d)$$

$$\left( \lambda_f \nabla \langle \Theta_f \rangle^f + \lambda_f \nabla \widetilde{\Theta}_f^f - \lambda_s \nabla \langle \Theta_s \rangle^s - \lambda_s \nabla \widetilde{\Theta}_s^s \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{f}\mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.84e)$$

On a ainsi un problème aux déviations complet. On pourrait alors, conformément à la MPMV, déterminer les grandeurs moyennes dont dépendent les déviations. Cependant, le PbD est encore très complexe et un grand nombre de grandeurs moyennes sont encore présentes. Afin de déterminer les grandeurs moyennes ayant le plus d'influence sur les déviations, on simplifie ces conditions de saut, et en particulier celles relatives à la conservation de la quantité de mouvement (2.84b).

Premièrement, en supposant que les conditions suivantes sur les vitesses (2.85) soient respectées, on a l'inégalité (2.86). On rappelle que l'ordre de grandeur de l'opérateur gradient diffère selon l'échelle sur laquelle est définie la grandeur physique à laquelle on l'applique, on utilise alors la séparation des échelles (2.2). ( $k = l, g, s$ )

$$\|\langle \mathbf{v}_k \rangle^k\| \frac{l_k}{L} \ll \|\widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| \quad (2.85)$$

$$\nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \ll \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k \quad (2.86)$$

On obtient en général [20] [106] [145] dans l'application de la méthode de la prise de moyenne volumique que la déviation de la vitesse et de l'ordre de la vitesse moyenne (2.87), ce qui se justifie par la condition de saut (2.84a) où les vitesses relatives à la phase solide sont nulles, car la matrice poreuse solide est immobile (or ce n'est pas le cas dans ce manuscrit). En association à la séparation des échelles, cela permet de faire la simplification que l'on vient de présenter. Dans notre cas, on doit ajouter la contrainte (2.85).

$$\widetilde{\mathbf{v}}_k^k = O\left(\langle \mathbf{v}_k \rangle^k\right) \quad (2.87)$$

Dans leurs travaux, Lasseux et al. [106], déterminent les deux conditions suivantes (2.88) et (2.89) permettant de négliger l'influence des pressions moyennes et de la tension de surface dans les conditions de saut du problème aux déviations (2.84b), si elles sont respectées. Là encore, cela ne présume en rien de l'influence des phénomènes capillaires sur le problème macroscopique.

( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\frac{\eta_k}{\mathcal{T}_{kk'}} \frac{\langle \|\nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| \rangle_{kk'}}{\langle R_{kk'} \rangle_{kk'}} = Ca_k \frac{\langle \|\nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| \rangle_{kk'}}{\langle R_{kk'} \rangle_{kk'} \|\langle \mathbf{v}_k \rangle^k\|} \ll 1 \quad (2.88)$$

$$\frac{\rho_k l_k}{\mathcal{T}_{kk'}} \frac{\langle \|\mathbf{v}_k \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| \rangle_{kk'}}{\langle R_{kk'} \rangle_{kk'}} = We_k \frac{\langle \|\nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k\| \rangle_{kk'}}{\langle R_{kk'} \rangle_{kk'} \|\langle \mathbf{v}_k \rangle^k\|^2} \ll 1 \quad (2.89)$$

où  $\langle \psi_k \rangle_{kk'}$  désigne la moyenne surfacique de la grandeur  $\psi_k$  sur l'aire interfaciale entre les phases  $k$  et  $k'$ ,  $Ca_k$  et  $We_k$  sont respectivement le nombre Capillaire et le nombre de Weber.

Après application de ces simplifications aux conditions de saut relatives à la QDM pour le problème aux déviations (2.84b), on a les conditions de saut finales suivantes : ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\left( \widetilde{P}_k^k - \widetilde{P}_{k'}^{k'} \right) \mathbf{n}_{kk'} - \eta_k \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^k + \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_k^{kT} \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} - \eta_{k'} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{k'}^{k'} + \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{k'}^{k'T} \right) \cdot \mathbf{n}_{k'k} = 0 \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.90)$$

Avec une méthode similaire, on pourrait négliger les termes en gradient de température moyenne  $\lambda_k \nabla \langle \Theta_k \rangle^k$  dans les conditions de saut relatives à l'égalité des flux thermiques (2.84e) et, avec une condition sur les vitesses, on pourrait également le faire dans les équations de conservation de l'énergie aux déviations (2.82). Dans ses travaux, Sapin [160] affirme d'ailleurs que ces termes sont effectivement négligeables selon les résultats des expériences numériques de Bousquet-Melou *et al.* [20], bien que ces travaux soient relatifs à la solidification dendritique. Étant confronté à un cas d'ébullition, on choisira cependant de ne pas le faire, conformément aux travaux de Duval *et al.* [60]. Le problème moyenné fermé final écrit dans ce manuscrit sera d'autant plus général. Il sera toujours possible de négliger les termes issus des sources en gradient de température moyenne dans le système macroscopique final.

### 2.4.5. Résumé : PbD

On a donc pu établir le problème aux déviations, composé de ses équations de conservation de la masse aux déviations (2.67), de conservation de la QDM aux déviations (2.74) et de conservation de l'énergie aux déviations (2.82) ainsi que les conditions de saut associées, à partir du problème local et des équations de conservations moyennées non fermées. Pour obtenir ce problème aux déviations, on a appliqué un certain nombre d'hypothèses :

- On part du problème local et des équations de conservations moyennées précédemment établies, et on conserve donc les hypothèses qui y sont associées.
- On suppose que le problème aux déviations est quasi stationnaire.
- On rappelle que le taux d'occupation volumique est uniforme pour un VER.
- On suppose que le changement d'état est négligeable à l'échelle du problème aux déviations.
- On suppose que la dilatation thermique est négligeable à l'échelle du problème aux déviations.
- On suppose être dans le cas d'application des inégalités (2.85), (2.88) et (2.89).

On a donc établi le problème aux déviations composé des équations de conservation suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k = 0 \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_k \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k = -\frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \widetilde{P}_k^k + \varepsilon_k \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \widetilde{P}_k^k \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} (\nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) dS \quad (2.74)$$

$$\varepsilon_k \left( \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla \widetilde{\Theta}_k^k \right) = \varepsilon_k \alpha_k \nabla^2 \widetilde{\Theta}_k^k - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k (\nabla \widetilde{\Theta}_k^k) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \quad (2.82)$$

Et les conditions de saut associées : ( $f = l, g$ ) ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k = \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{k'} - \left( \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle^k - \langle \mathbf{v}_{\mathbf{k}'} \rangle^{k'} \right) \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.84a)$$

$$\left( \widetilde{P}_k^k - \widetilde{P}_{k'}^{k'} \right) \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \eta_k \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^k + \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^{kT} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \eta_{k'} \left( \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{k'} + \nabla \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{k'T} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.90)$$

$$\widetilde{\Theta}_f^f = -\langle \Theta_f \rangle^f \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.84c)$$

$$\widetilde{\Theta}_f^f = \widetilde{\Theta}_s^s - \left( \langle \Theta_f \rangle^f - \langle \Theta_s \rangle^s \right) \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.84d)$$

$$\left( \lambda_f \nabla \langle \Theta_f \rangle^f + \lambda_f \nabla \widetilde{\Theta}_f^f - \lambda_s \nabla \langle \Theta_s \rangle^s - \lambda_s \nabla \widetilde{\Theta}_s^s \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{f}\mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.84e)$$

### 2.4.6. Relations de fermeture

On vient d'établir le problème aux déviations (PbD) complet que l'on vient de résumer dans la section précédente. Le problème aux déviations présente encore un certain nombre de termes dépendant de grandeurs moyennées sur le VER. Ce problème porte sur un unique VER et ces grandeurs moyennes sont des constantes dans le cadre du PbD (uniformité et hypothèse de quasi-stationnarité) et agissent comme des **sources** extérieures du PbD. Le PbD étant un problème linéaire, on suppose que l'on peut écrire les déviations comme des combinaisons linéaires des sources [60] [106] [146].

On nomme **relations de fermeture** ces combinaisons linéaires tandis que leurs coefficients sont les **variables de fermeture**.

À partir du problème aux déviations résumé ci-dessus, on identifie les vitesses moyennées de chaque phase  $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l$ ,  $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$  et  $\langle \mathbf{v}_s \rangle^s$ , les températures relatives moyennées de chaque phase  $\langle \Theta_l \rangle^l$ ,  $\langle \Theta_g \rangle^g$  et  $\langle \Theta_s \rangle^s$  et leurs gradients  $\nabla \langle \Theta_l \rangle^l$ ,  $\nabla \langle \Theta_g \rangle^g$  et  $\nabla \langle \Theta_s \rangle^s$  comme étant les sources du PbD. On suppose, de plus, que la déviation de la vitesse et de la pression dépendent uniquement des sources en vitesse et que les déviations des températures dépendent des sources en température et en gradient de température, comme dans les travaux de Duval [60]. On en déduit les relations de fermeture suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\widetilde{\mathbf{v}}_k^k = \sum_{j=l,g,s} \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \quad (2.92a)$$

$$\widetilde{P}_k^k = \sum_{j=l,g,s} \left( \eta_k \mathbf{b}_{kj} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \quad (2.92b)$$

$$\widetilde{\Theta}_k^k = \sum_{j=l,g,s} \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \mathbf{d}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \quad (2.92c)$$

où  $\overline{\overline{a_{kj}}}$  est la variable de fermeture tensorielle pour la déviation de la vitesse de la phase  $k$  associée à la vitesse moyenne de la phase  $j$ . Il en va de même pour  $\mathbf{b}_{kj}$  variable de fermeture vectorielle pour la déviation de la pression. On remarquera l'introduction de  $\eta_k$  dans la relation de fermeture. Cela permet une factorisation plus évidente dans les étapes suivantes de la MPMV, ne changeant la définition des variables de fermeture  $\mathbf{b}_{kj}$  qu'à un facteur multiplicatif près.  $c_{kj}$  est la variable de fermeture scalaire pour la déviation de la température relative de la phase  $k$  associée à la température relative moyenne de la phase  $j$ , et  $\mathbf{d}_{kj}$  sa variable de fermeture vectorielle associée au gradient de température dans la phase  $j$ .

Voici à titre d'exemple les relations de fermeture pour la phase liquide :

$$\widetilde{\mathbf{v}}_l^l = \overline{\overline{a_{ll}}} \cdot \langle \mathbf{v}_l \rangle^l + \overline{\overline{a_{lg}}} \cdot \langle \mathbf{v}_g \rangle^g + \overline{\overline{a_{ls}}} \cdot \langle \mathbf{v}_s \rangle^s \quad (2.93)$$

$$\widetilde{P}_l^l = \eta_l \left( \mathbf{b}_{ll} \cdot \langle \mathbf{v}_l \rangle^l + \mathbf{b}_{lg} \cdot \langle \mathbf{v}_g \rangle^g + \mathbf{b}_{ls} \cdot \langle \mathbf{v}_s \rangle^s \right) \quad (2.94)$$

$$\widetilde{\Theta}_l^l = c_{ll} \langle \Theta_l \rangle^l + c_{lg} \langle \Theta_g \rangle^g + c_{ls} \langle \Theta_s \rangle^s + \mathbf{d}_{ll} \cdot \nabla \langle \Theta_l \rangle^l + \mathbf{d}_{lg} \cdot \nabla \langle \Theta_g \rangle^g + \mathbf{d}_{ls} \cdot \nabla \langle \Theta_s \rangle^s \quad (2.95)$$

Dès lors, on peut injecter ces relations de fermeture dans le problème moyenné non fermé pour le fermer. À ce stade, n'ayant aucune information sur les variables de fermeture, on ne ferait que déplacer le problème posé par les déviations à l'obtention des variables de fermeture. On écrit alors des problèmes sur ces variables de fermeture afin d'être en mesure de les déterminer. On nomme ces problèmes : les **Problèmes de Fermeture** (PbF).

## 2.5. Problèmes de Fermeture (PbF)

Après avoir obtenu le problème moyenné non fermé à partir du problème local, on suit les étapes de la MPMV pour le fermer. On vient ainsi d'écrire le problème aux déviations (PbD) associé à partir du problème local et du problème moyenné non fermé (PbMNF) et d'en déduire les relations de

fermeture. Ce faisant, on a introduit des variables de fermeture sur lesquelles nous n'avons pour l'instant aucune information. On écrit alors dans cette section, les problèmes portant sur les variables de fermeture ou **Problèmes de Fermeture** (PbF) permettant de les déterminer.

Pour déterminer ces PbF, on suit la méthode suivante :

1. On injecte les relations de fermeture (2.92) dans le PbD § 2.4.5.
2. On factorise les expressions par les sources.
3. La linéarité du PbD permet de séparer l'écriture d'un problème de fermeture par source.

Préalablement, on écrit les approximations des dérivations spatiales de produit suivantes (2.96) détaillées dans l' **Annexe B** et utilisant la séparation des échelles (2.2) : ( $k, j = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \approx (\nabla \cdot \overline{\overline{a_{kj}}}) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96a)$$

$$\nabla (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{kj}} \approx ((\mathbf{n}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla) \overline{\overline{a_{kj}}}) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96b)$$

$$\nabla^2 (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \approx \nabla^2 \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96c)$$

$$\nabla (\mathbf{b}_{\mathbf{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \approx \nabla \mathbf{b}_{\mathbf{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96d)$$

$$\nabla (c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j) \approx \nabla c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96e)$$

$$\nabla^2 (c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j) \approx \nabla^2 c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96f)$$

$$\nabla (\mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j) \approx \nabla \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96g)$$

$$\nabla^2 (\mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j) \approx \nabla \cdot (\nabla \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j) \approx \nabla^2 \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96h)$$

La première étape de l'écriture des PbF est d'injecter les relations de fermeture (2.92) dans le PbD § 2.4.5. Puisque l'on considère les sources comme des constantes dans le PbD, on utilise la linéarité des différents opérateurs et les formules pour les dérivations de produit (2.96), afin de factoriser les équations par les sources. On obtient alors les équations suivantes après division par  $\varepsilon_k$  : ( $k = l, g, s$ )

$$\sum_{j=l,g,s} ((\nabla \cdot \overline{\overline{a_{kj}}}) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) = 0 \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=l,g,s} (((\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla) \overline{\overline{a_{kj}}}) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \\ &= \sum_{j=l,g,s} \left( \left( -\frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \mathbf{b}_{\mathbf{kj}} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \overline{\overline{a_{kj}}} - \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \frac{\eta_k}{\rho_k} (\mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \cdot (-\overline{\overline{\mathbf{b}_{\mathbf{kj}}}}) + (\mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \cdot \nabla) \overline{\overline{a_{kj}}}) dS \right) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \quad (2.98) \\ & \sum_{j=l,g,s} \left( (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^k + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot (\nabla c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \nabla \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j) \right) \\ &= \sum_{j=l,g,s} \left( \alpha_k \nabla^2 c_{kj} - \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla c_{kj} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right) \langle \Theta_j \rangle^j + \left( \alpha_k \nabla^2 \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} - \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.99) \end{aligned}$$

On fait de même dans les conditions de saut du PbD pour construire les conditions de saut associées aux PbF. Comme les sources sont uniformes à l'échelle d'un VER et grâce à la linéarité de la somme et de la transposition, on a : ( $f = l, g$ ) ( $k, k' = l, g, s \mid k \neq k'$ )

$$\sum_{j=l,g,s} \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) = \sum_{j=l,g,s} \left( \overline{\overline{a_{k'j}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) - \left( \langle \mathbf{v}_k \rangle^k - \langle \mathbf{v}_{k'} \rangle^{k'} \right) \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.100a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=l,g,s} \eta_k \left( \left[ \overline{\overline{\mathbf{I} \mathbf{b}_{kj}}} - \left( \nabla \overline{\overline{a_{kj}}} + \nabla \overline{\overline{a_{kj}}}^T \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \\ = \sum_{j=l,g,s} \eta_{k'} \left( \left[ \overline{\overline{\mathbf{I} \mathbf{b}_{k'j}}} - \left( \nabla \overline{\overline{a_{k'j}}} + \nabla \overline{\overline{a_{k'j}}}^T \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.100b)$$

$$\sum_{j=l,g,s} \left( c_{fj} \langle \Theta_j \rangle^j + \mathbf{d}_{fj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) = - \langle \Theta_f \rangle^f \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.100c)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=l,g,s} \left( c_{fj} \langle \Theta_j \rangle^j + \mathbf{d}_{fj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) = \sum_{j=l,g,s} \left( c_{sj} \langle \Theta_j \rangle^j + \mathbf{d}_{sj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \\ - \left( \langle \Theta_f \rangle^f - \langle \Theta_s \rangle^s \right) \end{aligned} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.100d)$$

$$\begin{aligned} \left( \lambda_f \nabla \langle \Theta_f \rangle^f - \lambda_s \nabla \langle \Theta_s \rangle^s + \sum_{j=l,g,s} (\lambda_f \nabla c_{fj} - \lambda_s \nabla c_{sj}) \langle \Theta_j \rangle^j \right. \\ \left. + \sum_{j=l,g,s} (\lambda_f \nabla \mathbf{d}_{fj} + \lambda_s \nabla \mathbf{d}_{sj}) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \cdot \mathbf{n}_{fs} = 0 \end{aligned} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.100e)$$

Pour écrire les problèmes de fermeture relatifs à chaque source dans les sous-sections qui suivent, on effectue le raisonnement suivant [60]. Ces équations ((2.97) à (2.100)) sont valables quelle que soit la valeur des sources. Elles sont donc vraies dans les cas particuliers où toutes ces sources sont nulles à l'exception d'une seule. Ainsi, pour une source donnée, on réécrit les équations précédentes en annulant toutes les autres sources. On peut alors simplifier ces expressions par la source restante (puisque'elle n'est pas nulle). On obtient alors le problème de fermeture associé à cette seule source.

On décrit dans ce qui suit les 9 problèmes de fermeture (un pour chaque source) ainsi séparés. On les écrira trois par trois en les écrivant sous un formalisme générique permettant de n'écrire qu'une fois chaque type de PbF (un par type de source : vitesse moyenne, température relative moyenne et gradient de température moyenne).

### 2.5.1. PbF : Problèmes associés à une vitesse moyenne

Conformément à ce que l'on vient d'expliquer, on considère en particulier la phase  $j \in \{l, g, s\}$  parmi les différentes phases. On écrit le PbF pour la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{v}_j \rangle^j$ , en annulant toutes les autres sources dans les équations précédentes ((2.97) à (2.100)).  $\langle \mathbf{v}_j \rangle^j$  non nulle étant en facteur de tous les termes, on le simplifie dans les équations. On obtient alors le PbF associé à la vitesse moyenne de la phase  $j$  comme source qui suit :

$(k, k' = l, g, s \mid k' \neq k) (f = l, g)$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{a_{kj}}} = 0 \quad (2.101a)$$

$$\frac{\rho_k}{\eta_k} (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \overline{\overline{a_{kj}}} = -\nabla \mathbf{b}_{kj} + \nabla^2 \overline{\overline{a_{kj}}} - \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \left( -\overline{\overline{\mathbf{b}_{kj}}} \right) + \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \nabla \right) \overline{\overline{a_{kj}}} \right) dS \quad (2.101b)$$

$$\overline{\overline{a_{kj}}} = \overline{\overline{a_{k'j}}} - (\delta_{kj} - \delta_{k'j}) \overline{\overline{I}} \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.101c)$$

$$\eta_k \left( \overline{\overline{\mathbf{b}_{kj}}} - \left( \nabla \overline{\overline{a_{kj}}} + \nabla \overline{\overline{a_{kj}}}^T \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} = \eta_{k'} \left( \overline{\overline{\mathbf{b}_{k'j}}} - \left( \nabla \overline{\overline{a_{k'j}}} + \nabla \overline{\overline{a_{k'j}}}^T \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \quad \text{sur } S_{kk'} \quad (2.101d)$$

où  $\delta_{kj}$  est le delta de Kronecker valant 1 si  $k = j$  et 0 sinon.

On rappelle que l'on décrit bien ici 3 PbF (un par phase  $j$ ), se composant chacun de 6 équations de conservation (2 par phase  $k$ ) et des 6 conditions de saut associées. Ils permettent chacun de déterminer les jeux de variables de fermeture associées à la phase considérée ( $j$ ), i.e. les variables  $(\overline{\overline{a_{kj}}}, \mathbf{b}_{kj})_{k=l,g,s}$ .

### 2.5.2. PbF : Problèmes associés aux températures relatives

Pour écrire les PbF associés aux températures relatives moyennes et non plus aux vitesses relatives, on procède comme précédemment § 2.5.1. Soit une phase  $j \in \{l, g, s\}$ , on annule toutes les sources à l'exception de  $\langle \Theta_j \rangle^j$ . Pouvant factoriser tous les termes par  $\langle \Theta_j \rangle^j$  non nulle, on simplifie la température moyenne et on obtient le PbF suivant :  $(k, k' = l, g, s \mid k' \neq k) (f = l, g)$

$$\mathbf{v}_k \cdot \nabla c_{kj} = \alpha_k \nabla^2 c_{kj} - \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla c_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.102a)$$

$$c_{fj} = -\delta_{fj} \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.102b)$$

$$c_{fj} = c_{sj} - (\delta_{fj} - \delta_{sj}) \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.102c)$$

$$\lambda_f \nabla c_{fj} \cdot \mathbf{n}_{fs} = \lambda_s \nabla c_{sj} \cdot \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.102d)$$

On décrit bien 3 PbF distincts (un par phase  $j$ ) portant sur les variables de fermeture  $(c_{kj})_{k=l,g,s}$  qui sont associées à la source  $\langle \Theta_j \rangle^j$ . Chaque problème est composé de 3 équations différentielles (une par phase  $k$ ) et de 6 conditions de saut.

### 2.5.3. PbF : Problèmes associés aux gradients de température

Pour finir avec les PbF, on écrit les PbF associés au gradient de température pour la phase  $j \in \{l, g, s\}$  :  $\nabla \langle \Theta_j \rangle^j$ . Pareillement, après injection des relations de fermeture (2.92) dans le PbD et factorisation des sources, on suppose toutes sources nulles à l'exception de  $\nabla \langle \Theta_j \rangle^j$ . On obtient :

$(k, k' = l, g, s \mid k' \neq k) (f = l, g)$

$$\mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{d}_{kj} = \alpha_k \nabla^2 \mathbf{d}_{kj} - \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.103a)$$

$$\mathbf{d}_{fj} = 0 \quad \text{sur } S_{lg} \quad (2.103b)$$

$$\mathbf{d}_{fj} = \mathbf{d}_{sj} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.103c)$$

$$\lambda_f (\delta_{fj} + \nabla \mathbf{d}_{fj}) \cdot \mathbf{n}_{fs} = \lambda_s (\delta_{sj} + \nabla \mathbf{d}_{sj}) \cdot \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sur } S_{fs} \quad (2.103d)$$



On décrit bien 3 PbF distincts (un par phase  $j$ ) associés à la source  $\nabla\langle\Theta_j\rangle^j$  permettant d'obtenir le jeu de variable de fermeture  $(\mathbf{d}_{kj})_{k=l,g,s}$ . Ils se composent chacun de 3 équations différentielles (une par phase  $k$ ) et des 6 conditions de saut associées.

On a bien établi un problème de fermeture associé à chacune des 9 sources considérées.

## 2.6. Problème Moyenné Fermé (PbMF)

On a établi le problème moyenné non fermé (PbMNF) § 2.3 et suivi les étapes décrites par la méthode de la prise de moyenne volumique (MPMV) permettant de le fermer. On a ainsi établi les relations de fermeture (2.92) et obtenu les problèmes de fermeture (PbF) qui permettent de déterminer les variables de fermeture. On peut désormais fermer le PbMNF dans cette section.

Pour fermer le PbMNF § 2.3.4, on remplace les déviations par les relations de fermeture (2.92) permettant de les exprimer en fonction des grandeurs moyennes. Le PbMNF dépend alors des variables de fermeture, déterminées grâce aux PbF. On obtient alors le problème suivant : ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) = \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k &= \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &+ \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \sum_{j=l,g,s} (\eta_k \mathbf{b}_{kj} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \cdot \mathbf{n}_{kk'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \left( \sum_{j=l,g,s} (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) dS \\ &+ \frac{1}{V} \iint_{S_k} \sum_{j=l,g,s} (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \left( \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \right) &= - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k}{C_{pk}} \dot{q}_k + \alpha_k \nabla^2 (\varepsilon_k \langle \Theta \rangle^k) - \alpha_k \nabla \langle \Theta \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &+ \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \left( \sum_{j=l,g,s} (c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \mathbf{d}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \end{aligned} \quad (2.105)$$

On va réécrire et arranger ces équations de sorte à pouvoir écrire un problème portant uniquement sur les grandeurs moyennes et ne faisant plus directement intervenir des grandeurs aux échelles locales. On aura alors bien séparé les échelles et fermé le problème macroscopique. On cherche donc à faire apparaître des **propriétés effectives** macroscopiques rendant compte des particularités du système et des interactions entre les phases. Elles doivent caractériser les phénomènes émergeant à l'échelle macroscopique et n'étant pas considérés à l'échelle locale. Pour cela, on réécrit les intégrales en les factorisant par les grandeurs moyennes qui ont été identifiées comme étant des

sources, de sorte qu'il ne reste plus que des termes considérés connus sous les intégrales. On les identifie alors comme les propriétés effectives. On en obtiendra donc une propriété effective par phase et par source pour chaque équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. En effet, aucun traitement n'est nécessaire à ce stade pour l'équation de conservation de la masse. On séparera ces propriétés effectives en deux catégories, de sorte à isoler les effets du changement de phase. On établira chaque type de propriétés effectives séparément dans les sous-parties ci-dessous.

### 2.6.1. PbMF : Fermeture de la conservation de la QDM

On détermine dans cette partie les **propriétés effectives dynamiques**, qui sont associées aux équations de conservation de la quantité de mouvement (QDM). On commence par la partie indépendante du changement d'état avant de traiter celles dues au changement d'état.

#### Propriété effective indépendante du changement de phase

On part des équations de conservation de la QDM moyennées fermées non simplifiées précédentes (2.104). On s'intéresse d'abord à la première intégrale permettant d'écrire les propriétés effectives dynamiques indépendantes du changement d'état. On utilise la linéarité de l'intégrale, de la somme finie et de l'opérateur de dérivation spatiale (approximée par (2.96b) grâce à la séparation des échelles (2.2) et détaillée dans l' **Annexe B**, comme pour l'obtention des PbF précédente § 2.5). On utilise alors l'invariance de la moyenne sur un VER (2.15) permettant de sortir les sources de l'intégrale. On obtient alors : ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( -\frac{1}{\rho_k} \sum_{j=l,g,s} \left( \eta_k \mathbf{b}_{kj} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} + \frac{\eta_k}{\rho_k} \left( \nabla \sum_{j=l,g,s} \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) dS \\
&= \sum_{j=l,g,s} \left[ \frac{\eta_k}{\rho_k} \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( \left( -\mathbf{b}_{kj} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j + \nabla \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) dS \right] \\
&\approx \sum_{j=l,g,s} \frac{\eta_k}{\rho_k} \underbrace{\left[ \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \left( -\overline{\overline{\mathbf{b}_{kj}}} \right) + \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \nabla \right) \overline{\overline{a_{kj}}} \right) dS \right]}_{=\overline{\overline{A_{kj}}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \\
&= \sum_{j=l,g,s} \frac{\eta_k}{\rho_k} \overline{\overline{A_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j
\end{aligned} \tag{2.106}$$

où  $\overline{\overline{A_{kj}}}$  est la propriété effective dynamique de la phase  $k$  associée à la vitesse moyenne de la phase  $j$ , et dépendant des variables de fermeture  $\overline{\overline{a_{kj}}}$  et  $\mathbf{b}_{kj}$ . Elle admet pour expression : ( $k, k', j = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\overline{\overline{A_{kj}}} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \left( -\overline{\overline{\mathbf{b}_{kj}}} \right) + \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \nabla \right) \overline{\overline{a_{kj}}} \right) dS \tag{2.107}$$

#### Propriété effective associée au changement de phase

Préalablement, on montre par le calcul en **Annexe C** l'échange de position entre vecteurs et matrice suivant : ( $k, k', j = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\left( \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} = \left( (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} \right) \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \tag{2.108}$$

Dans les équations de conservation de la QDM du problème moyenné fermé non simplifié (2.104), le dernier terme est relatif au changement de phase. Il représente l'échange de QDM entre phases, dû à la masse de fluide changeant d'état et transférant sa QDM. On n'a cependant pas pu l'écrire en faisant intervenir les débits massiques de changement de phase par unité de volume  $\dot{m}_{kj}$ , comme on a pu le faire pour les équations de conservations de la masse et de l'énergie. En revanche, ce terme fait intervenir la déviation de la vitesse que l'on remplace par la relation de fermeture (2.92a). On réalise alors les mêmes étapes que précédemment pour fermer ce terme. On factorise alors l'intégrale d'intérêt par les sources grâce à la linéarité en rappelant l'invariance des moyennes sur un VER (2.15). On obtient : ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \iint_{S_k} \sum_{j=l,g,s} \left( \overline{a_{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) (\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS &= \sum_{j=l,g,s} \left[ \frac{1}{V} \iint_{S_k} ((\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'}) \overline{a_{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j dS \right] \\ &= \sum_{j=l,g,s} \left[ \frac{1}{V} \iint_{S_k} ((\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'}) \overline{a_{kj}} dS \right] \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \\ &= \sum_{j=l,g,s} \overline{\mathfrak{A}_{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad (2.109)$$

où  $\overline{\mathfrak{A}_{kj}}$  est la propriété effective dynamique de la phase  $k$  due au changement de phase, associée à la vitesse moyenne de la phase  $j$  et dépendant de la variable de fermeture  $\overline{a_{kj}}$ . Elle admet l'expression générale : ( $k, k', j = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\overline{\mathfrak{A}_{kj}} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} ((\mathbf{w}_{kk'} - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n}_{kk'}) \overline{a_{kj}} dS \quad (2.110)$$

Dans ce cas d'application au lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na, on rappelle que l'on considère les conditions de saut locales modélisant l'absence de changement de phase à l'interface fluide-solide et adhérence (2.36), ce qui annule la propriété effective précédente (2.110) pour la phase solide et réduit la surface d'intégration à ( $S_{lg}$ ) pour les propriétés effectives des fluides :

$$\overline{\mathfrak{A}_{sj}} = 0 \quad j = l, g, s \quad (2.111a)$$

$$\overline{\mathfrak{A}_{fj}} = \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} ((\mathbf{w}_{ff'} - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n}_{ff'}) \overline{a_{fj}} dS \quad j = l, g, s ; f, f' = l, g \mid f' \neq f \quad (2.111b)$$

On vient de déterminer pour chaque phase l'expression des propriétés effectives dynamiques relatives aux vitesses moyennes des phases, en séparant les effets dus au changement de phase. On les note respectivement  $\overline{A_{kj}}$  hors changement de phase (2.107) et  $\overline{\mathfrak{A}_{kj}}$  dû au changement de phase (2.110). On peut alors fermer la conservation de la quantité de mouvement macroscopique en remplaçant les termes intégraux : ( $k, j = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k &= \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &+ \frac{\eta_k}{\rho_k} \sum_{j=l,g,s} \overline{A_{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \overline{\mathfrak{A}_{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad (2.112)$$

## 2.6.2. PbMF : Fermeture de la conservation de l'énergie

On établit les **propriétés effectives thermiques** hors changement d'état, dont l'influence est rendue par les termes en  $\dot{m}_{kj}$ , associées aux équations de conservation de l'énergie du problème moyennées fermées non simplifiées (2.105). On applique alors toujours la même méthode. On injecte les relations de fermeture (2.92c) dans le dernier terme des équations (2.105) puis on réarrange l'expression de sorte à factoriser par les sources. On utilise pour cela l'invariance des sources à l'échelle du VER (2.15) et les approximations des dérivations de produit (2.96e) et (2.96g) détaillées dans l' **Annexe B** grâce à la séparation des échelles (2.2). Ce qui donne pour le terme intégral considéré : ( $k = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \left( \sum_{j=l,g,s} \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \mathbf{d}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \\
&= \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) + \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \nabla \left( \mathbf{d}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \\
&\approx \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \langle \Theta_j \rangle^j \nabla c_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) + \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \alpha_k \left( \nabla \mathbf{d}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \quad (2.113) \\
&= \sum_{j=l,g,s} \alpha_k \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla c_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \langle \Theta_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \alpha_k \left( \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \\
&= \sum_j \alpha_k C_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \sum_j \alpha_k \mathbf{D}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j
\end{aligned}$$

où  $C_{kj}$  et  $\mathbf{D}_{kj}$  sont les propriétés effectives thermiques hors changement d'état de la phase  $k$ , respectivement associées à la température relative moyenne de la phase  $j$  et au gradient de température moyenne dans la phase  $j$ , dépendant respectivement des variables de fermeture  $(c_{kj})_{k,j=l,g,s}$  et  $(\mathbf{d}_{kj})_{k,j=l,g,s}$ . Elles admettent les expressions suivantes : ( $k, j = l, g, s$ )

$$C_{kj} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla c_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.114)$$

$$\mathbf{D}_{kj} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.115)$$

On vient alors de fermer les équations de conservation de l'énergie moyennées qui font seulement appel à des termes définis à l'échelle macroscopique. On obtient ainsi pour chaque phase ( $k$ ), une propriété effective par source thermique, soit 6 par phase, soit 18 propriétés effectives thermiques sans changement de phase. Ces propriétés effectives macroscopiques sont entièrement décrites par l'expression des variables de fermeture données par les PbF.

On écrit alors l'équation de conservation de l'énergie moyennée fermée finale en remplaçant l'expression précédente (2.113) dans les équations de conservation de l'énergie moyennées fermées non simplifiées (2.105) :

( $k = l, g, s$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k = & - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k}{C_{pk}} \dot{q}_k + \alpha_k \nabla^2 (\varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k) - \alpha_k \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ & + \alpha_k \sum_{j=l,g,s} C_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \alpha_k \sum_{j=l,g,s} \mathbf{D}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \end{aligned} \quad (2.116)$$

### 2.6.3. PbMF : Fermeture des $\dot{m}_{kj}$

D'après les travaux de F. Duval *et al.* [60], on peut exprimer le débit massique de changement de phase par unité de volume  $\dot{m}_{kj}$  en fonction des variables de fermeture et des sources, à partir des conditions de saut. On a exprimé qu'il n'y avait pas d'échange de matière avec la phase solide (2.41). Et l'on sait également que le bilan d'échange de matière entre le sodium liquide et le sodium gazeux et son opposé se compensent (2.40), mais il reste à déterminer l'expression de  $\dot{m}_{lg}$ . ( $k, j = l, g, s$ )

$$\dot{m}_{lg} = -\dot{m}_{gl} \quad (2.40)$$

$$\dot{m}_{ks} = \dot{m}_{sj} = 0 \quad (2.41)$$

Pour fermer le débit massique par unité de volume de changement de phase du sodium  $\dot{m}_{lg}$  et l'exprimer en fonction des variables de fermeture et des sources, on part de l'égalité des flux de chaleur à l'interface liquide-vapeur (2.35a). On intègre la condition de saut sur l'interface liquide-gaz que l'on divise par le volume du VER après avoir sorti de l'intégrale la chaleur latente considérée comme constante. On retrouve alors la définition de  $\dot{m}_{lg}$  :

$$\frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla \Theta_l - \lambda_g \nabla \Theta_g) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS = \frac{\Delta h_l^{vap}}{V} \iint_{S_{lg}} \varphi_{lg} dS = \Delta h_l^{vap} \dot{m}_{lg} \quad (2.117)$$

On ne connaît toujours pas les grandeurs locales, on n'a donc pas encore fermé le débit massique par unité de volume de changement de phase du sodium. On cherche à exprimer les grandeurs locales par l'intermédiaire des sources qui sont des grandeurs macroscopiques. Pour cela, on va réécrire l'intégrale (2.117) à l'aide de la décomposition de W. G. Gray (2.13) sur la température afin de remplacer les grandeurs locales par des termes en sources et en déviations. On sait ensuite exprimer les déviations en fonction des sources grâce aux relations de fermeture (2.92). Comme dans la sous-section précédente § 2.6.2, on utilise donc les approximations des décompositions de dérivation de produit (2.96e) et (2.96g) détaillées dans l' **Annexe B**. On factorise ensuite par les sources que l'on sort encore des intégrales par invariance des moyennes sur un VER (2.15). Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla \Theta_l - \lambda_g \nabla \Theta_g) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \\
&= \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla \tilde{\Theta}_l^l - \lambda_g \nabla \tilde{\Theta}_g^g) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS + \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla \langle \Theta_l \rangle^l - \lambda_g \nabla \langle \Theta_g \rangle^g) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \\
&= \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla \tilde{\Theta}_l^l) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS - \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_g \nabla \tilde{\Theta}_g^g) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \\
&\quad + \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_l \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_l \rangle^l - \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_g \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_g \rangle^g \\
&= \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_l \nabla c_{lj} \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \langle \Theta_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_l \nabla \mathbf{d}_{lj} \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \\
&\quad - \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_g \nabla c_{gj} \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \langle \Theta_j \rangle^j - \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_g \nabla \mathbf{d}_{gj} \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \\
&\quad + \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_l \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_l \rangle^l - \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_g \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_g \rangle^g \tag{2.118} \\
&= \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla c_{lj} - \lambda_g \nabla c_{gj}) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \langle \Theta_j \rangle^j \\
&\quad + \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} [\lambda_l \nabla \mathbf{d}_{lj} - \lambda_g \nabla \mathbf{d}_{gj}] \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \\
&\quad + \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_l \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_l \rangle^l - \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \lambda_g \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_g \rangle^g \\
&= \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla c_{lj} - \lambda_g \nabla c_{gj}) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \langle \Theta_j \rangle^j \\
&\quad + \sum_{j=l,g,s} \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} [\lambda_l \nabla \mathbf{d}_{lj} - \lambda_g \nabla \mathbf{d}_{gj} + (\delta_{jl} - \delta_{jg}) \lambda_j] \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \right) \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \\
&= \sum_{j=l,g,s} \mathfrak{C}_j^{lg} \langle \Theta_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \mathfrak{D}_j^{lg} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j
\end{aligned}$$

où  $\mathfrak{C}_j^{lg}$  et  $\mathfrak{D}_j^{lg}$  sont les propriétés effectives thermiques dues au changement de phase respectivement associées à la température relative moyenne de la phase  $j$  et au gradient de température moyenne de la phase  $j$ , dépendant respectivement des variables de fermeture selon les expressions suivantes : ( $j = l, g, s$ )

$$\mathfrak{C}_j^{lg} = \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} (\lambda_l \nabla c_{lj} - \lambda_g \nabla c_{gj}) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \tag{2.119}$$

$$\mathfrak{D}_j^{lg} = \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} [\lambda_l \nabla \mathbf{d}_{lj} - \lambda_g \nabla \mathbf{d}_{gj} + (\delta_{lj} - \delta_{gj}) \lambda_j] \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \tag{2.120}$$

où  $\delta_{kj}$  est le delta de Kronecker.

On en déduit la fermeture du débit massique par unité de volume de changement de phase du sodium (2.121) en réintroduisant la réécriture de l'intégrale (2.118) dans l'expression précédente (2.117). D'où :

$$\dot{m}_{lg} = \frac{1}{\Delta h_l^{vap}} \left( \sum_{j=l,g,s} \mathfrak{e}_j^{lg} \langle \Theta_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \mathfrak{D}_j^{lg} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \quad (2.121)$$

#### 2.6.4. Résumé : PbMF

On vient d'écrire toutes les intégrales intervenant dans le problème moyenné fermé par l'intermédiaire des propriétés effectives macroscopiques que l'on a ainsi mises en évidence. On a notamment pu établir les expressions des propriétés effectives en fonction des variables de fermeture, hors changement de phase (voir (2.107), (2.114) et (2.115)), et dues au changement de phase (voir (2.110), (2.119) et (2.120)). On a bien séparé les échelles en ne faisant plus apparaître que des grandeurs macroscopiques dans le problème moyenné fermé. Pour cela, on a considéré l'ensemble des hypothèses suivantes :

- On modélise la phase solide comme un pseudo-fluide admettant des modèles définissant sa pression  $P_s$  et sa viscosité dynamique  $\eta_s$ .
- On considère les fluides Newtoniens, incompressibles, non miscibles.
- Les propriétés physiques sont considérées uniformes sur le VER et indépendantes des grandeurs physiques comme la température ou la pression ( $\beta_{k\iota}$ ,  $\mathbf{g}_\iota$ ,  $\rho_{k\iota}$ ,  $\eta_{k\iota}$ ,  $C_{pk\iota}$ ,  $\dot{q}_{k\iota}$ ,  $\lambda_k$  et  $\Delta h_l^{vap}$ ) sous l'approximation de Boussinesq [10] [126].
- On néglige dans les équations de conservation de l'énergie les flux radiatifs, le travail des forces et les effets de la dissipation visqueuse.
- On suppose qu'il y a changement de phase entre le sodium liquide et gazeux sur l'ensemble de l'interface liquide-gaz.
- On suppose l'existence des VER (voir § 2.1.1.2) et que la séparation des échelles (2.2) est vérifiée.
- On suppose être dans les conditions décrites par les inégalités (2.52) et de (2.63).
- On rappelle que les hypothèses relatives à l'écriture du problème aux déviations et des problèmes de fermeture ne conditionnent pas le problème macroscopique.

Le problème moyenné fermé décrivant le nivellement thermodynamique d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na obtenu par l'intermédiaire de la méthode de prise de moyenne volumique est :

$(k, k', j = l, g, s \mid k' \neq k) (f, f' = l, g \mid f' \neq f)$

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k) = \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k &= \varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &+ \frac{\eta_k}{\rho_k} \sum_{j=l,g,s} \overline{\overline{A_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \overline{\overline{\mathfrak{A}_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k &= - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \langle \Theta_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k}{C_{pk}} \dot{q}_k + \alpha_k \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) - \alpha_k \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k \\ &+ \alpha_k \sum_{j=l,g,s} C_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + \alpha_k \sum_{j=l,g,s} \mathbf{D}_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\overline{\overline{A_{kj}}} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \left( -\bar{\bar{I}} \mathbf{b}_{kj} \right) + \left( \mathbf{n}_{kk'} \cdot \nabla \right) \overline{\overline{a_{kj}}} \right) dS \quad (2.107)$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}_{sj}}} = 0 \quad (2.111a)$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}_{fj}}} = \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \left( (\mathbf{w}_{ff'} - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n}_{ff'} \right) \overline{\overline{a_{fj}}} dS \quad (2.111b)$$

$$C_{kj} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla c_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.114)$$

$$\mathbf{D}_{kj} = \frac{1}{V} \iint_{S_k} \nabla \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{n}_{kk'} dS \quad (2.115)$$

$$\dot{m}_{ks} = \dot{m}_{sj} = 0 \quad (2.41)$$

$$\dot{m}_{lg} = -\dot{m}_{gl} \quad (2.40)$$

$$\dot{m}_{lg} = \frac{1}{\Delta h_l^{vap}} \left( \sum_{j=l,g,s} \mathfrak{e}_j^{lg} \langle \Theta_j \rangle^j + \sum_{j=l,g,s} \mathfrak{D}_j^{lg} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \quad (2.121)$$

$$\mathfrak{e}_j^{lg} = \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \left( \lambda_l \nabla c_{lj} - \lambda_g \nabla c_{gj} \right) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \quad (2.119)$$

$$\mathfrak{D}_j^{lg} = \frac{1}{V} \iint_{S_{lg}} \left[ \lambda_l \nabla \mathbf{d}_{lj} - \lambda_g \nabla \mathbf{d}_{gj} + (\delta_{lj} - \delta_{gj}) \lambda_j \right] \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \quad (2.120)$$

On a ainsi fermé notre problème moyenné non fermé et bien séparé les échelles. Pour chaque phase, on admet autant de propriétés effectives hors changement de phase de chaque type (dynamique et thermique associées aux températures moyennes ou à leur gradient) que l'on considère de phase. Soient 9 propriétés effectives hors changement d'état par phase, pour un sous-total de 27



pour les 3 phases. En comptant les propriétés effectives dues au changement de phase, on a au total de 42 fermetures (dont trois nulles (2.111a) sous ces conditions).

On notera que dans les travaux de Lasseux *et al.* [106], visant à étayer théoriquement la loi de Darcy-Forchheimer par l'utilisation de la méthode de la prise de moyenne volumique, les propriétés effectives dynamiques hors changement de phase  $\overline{A_{kj}}$  (2.107) sont encore subdivisées en deux termes. L'un rend compte des effets visqueux et faisant intervenir la perméabilité et la perméabilité relative (Darcy) et l'autre des effets inertiels faisant intervenir la passabilité et la passabilité relative (Forchheimer). Mais on ne décrira pas le système à ce niveau de détail.

À l'inverse, et comme expliqué lors de l'écriture des équations de conservation de l'énergie aux déviations, Sapin [160] précise que les sources du type gradient de température moyenne et leur influence dans les transferts de chaleur seraient négligeables. Il s'appuie sur les travaux de Bousquet-Melou *et al.* [20] bien que ces travaux soient relatifs au suivi d'un phénomène de solidification. Si ces sources sont bien négligeables pour notre système, alors les propriétés effectives  $\mathbf{D}_{kj}$  (2.115) et  $\mathcal{D}_j^{lg}$  (2.120) pourraient être négligées.

## 2.7. Discussion sur le modèle macroscopique

Dans les parties précédentes de ce chapitre, on a présenté la méthode de la prise de moyenne volumique (MPMV) puis on l'a appliquée à la modélisation du comportement thermohydraulique du nivellement d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na lors d'un accident grave. On a ainsi écrit un système d'équations décrivant le comportement du lit de débris et de ses trois phases à l'échelle macroscopique portant sur des grandeurs moyennes. Que peut-on dire de ce nouveau système?

On verra qu'il amène certaines nouveautés et qu'il ouvre la voie pour d'autres modélisations.

### 2.7.1. Une nouvelle structure d'équation

On va évaluer les nouveautés apportées par le problème macroscopique fermé que l'on vient d'écrire (voir § 2.6.4). Pour cela, on doit présenter rapidement une modélisation assez généralement utilisée pour traiter ces problèmes d'écoulements multiphasiques en guise de comparaison. On parlera principalement de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (QDM) (2.112), mais ce sera généralement valable pour l'équation de conservation de l'énergie (2.116) par analogie, bien que la littérature soit moins abondante sur ce point.

#### 2.7.1.1. Un modèle général des écoulements multiphasiques

On présente d'abord une modélisation que l'on retrouve dans de nombreux travaux portant sur des écoulements diphasiques (hors MPMV). Il s'agit du modèle Eulérien diphasique décrit par Ishii & Zuber en 1979 [96] décrivant l'écoulement d'une phase **dispersée** (*d*) dans une phase **continue** (*c*). Cette modélisation est assez représentative de nombreuses situations, pouvant aussi bien modéliser selon les corrélations utilisées, des bulles de gaz dans un fluide [22], des émulsions ou des mélanges de fluide immiscibles [95] ou encore une phase solide en suspension dans une phase fluide [94].

Leurs équations portent aussi sur des grandeurs "moyennes" pour une phase, la vitesse de la phase dispersée représentant la vitesse d'ensemble des particules la constituant et non la vitesse d'une particule par exemple, sans pour autant définir précisément le type de résultante utilisée. On

assimilera alors les grandeurs évoquées comme les moyennes de phase pour faciliter la comparaison. Le modèle d'Ishii & Züber s'écrit alors ainsi : ( $k, k' = d, c \mid k' \neq k$ )

$$\varepsilon_k \left( \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) = \varepsilon_k \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \cdot \left( \overline{\overline{\tau}}_k + \overline{\overline{\tau}}_k^T \right) + \mathbf{M}\mathbf{i}_k + \left( \langle \mathbf{w}_{kk'} \rangle^k - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \frac{\dot{m}_{kk'}}{\rho_k} \quad (2.122)$$

où  $\overline{\overline{\tau}}_k$  désigne les contraintes visqueuses et  $\mathbf{M}\mathbf{i}_k$  représente les forces généralisées à l'interface de la phase  $k$  hors changement de phase.

On retrouve déjà une structure d'équation cohérente avec les équations établies dans ce document. Ce modèle a été très largement repris depuis dans de nombreux domaines de la physique, mais sa structure est généralement conservée et ce sont les différentes corrélations et modèles utilisés pour les différents paramètres comme les contraintes visqueuses ou le choix des forces apparaissant dans  $\mathbf{M}\mathbf{i}_k$ , qui différencient chaque application. On le retrouve par exemple à la base du code de calcul CATHARE ou SIMMER pour les accidents graves, et plus précisément pour des modèles portant sur le lit de débris avec les modèles P. Liu *et al.* [116] ou de Tagami *et al.* [180]. Dans certains papiers, on ajoute également à cette modélisation (2.122), un terme de masse ajoutée ou virtuelle [25], [142], [143] ou [180].

On réécrit ce modèle général pour rendre la comparaison au système établi dans ce document plus significative en l'écrivant dans un cadre proche du nivellement d'un lit de débris en RNR-Na.

Pour des fluides Newtoniens d'une part, le terme de contraintes visqueuses semble faire consensus sous la forme (2.123) ([25], [116], [117], [136], [143], [182]) quitte à ajouter des termes correctifs ou à ajouter une corrélation particulière pour la viscosité pour traiter une phase dispersée, une phase solide ou des fluides non newtoniens : ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \cdot \left( \overline{\overline{\tau}}_k + \overline{\overline{\tau}}_k^T \right) = \frac{\varepsilon_k \eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (2.123)$$

Au premier ordre ensuite, si on le restreint à la force de traînée,  $\mathbf{M}\mathbf{i}_k$  peut simplement s'écrire de la façon suivante (2.124) [96]. C'est une écriture que l'on retrouve régulièrement dans la littérature (par exemple : [25], [44], [54], [116], [132], [134], [143], [176] et [180]). Le coefficient de traînée généralisé  $C_{dkk'}$  admet alors un grand nombre d'expressions et de modélisations. ( $k, k' = l, g, s \mid k' \neq k$ )

$$\mathbf{M}\mathbf{i}_k = C_{dkk'} \left( \langle \mathbf{v}_{k'} \rangle^{k'} - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \quad (2.124)$$

où  $C_{dkk'}$  est le coefficient de traînée généralisé.

Afin de permettre une comparaison d'intérêt avec le modèle établi dans ce manuscrit, les équations de conservation de la QDM de Ishii & Züber (2.122) deviennent alors en injectant (2.123) et (2.124) dans un cadre multiphasique similaire au lit de débris [180] : ( $k = l, g, s$ )

$$\varepsilon_k \left( \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) = \varepsilon_k \mathbf{g} - \frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k + \frac{\varepsilon_k \eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} C_{dkj} \left( \langle \mathbf{v}_j \rangle^j - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \left( \langle \mathbf{w}_{kj} \rangle^k - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} \quad (2.125)$$

On fait de même pour l'équation de la chaleur que l'on peut aussi écrire de manière générale en s'appuyant sur les travaux de Niessner & Hassanizadeh [135] ou encore [14], [132] ou [134] : ( $k = l, g, s$ )

$$\varepsilon_k \frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k = \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \Lambda_{\dot{m}_{kj}} \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k} + \frac{\varepsilon_k}{C_{pk}} \dot{q}_k + \varepsilon_k \alpha_k \nabla^2 \langle \Theta_k \rangle^k + \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \Lambda_{kj} \left( \langle \Theta_j \rangle^j - \langle \Theta_k \rangle^k \right) \quad (2.126)$$

où  $\Lambda_{kj}$  est le coefficient de transfert à l'interface de Newton et  $\Lambda_{\dot{m}_{kj}}$  est le coefficient de transfert de chaleur par changement d'état.

### 2.7.1.2. Comparaison et nouveauté

On peut maintenant comparer la modélisation théorique établie dans ce document (voir § 2.6) issue de l'application de la méthode de prise de moyenne volumique à une modélisation plus généralement adoptée (2.125) et (2.126), du moins d'un point de vue structurel, chaque modélisation utilisant des fermetures spécifiques. Les équations de conservation de la masse des deux approches n'admettant pas de différence, on prend principalement appui sur les équations de conservation de la QDM pour faire la comparaison. On pourra malgré tout généralement raisonner de manière analogue pour les équations de conservation de l'énergie. Les équations de conservation de la QDM obtenues via la MPMV (2.112) et issues de la littérature que l'on vient d'écrire (2.125) sont rappelées ici :

$$\underbrace{\varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t}}_I + \underbrace{\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}_{II} = \underbrace{\varepsilon_k \left( 1 - \beta_k \langle \Theta_k \rangle^k \right) \mathbf{g}}_{III} - \underbrace{\frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k}_{IV} + \underbrace{\frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) - \frac{\eta_k}{\rho_k} \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k}_V + \underbrace{\frac{\eta_k}{\rho_k} \sum_{j=l,g,s} \overline{\overline{A_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j}_{VI} + \underbrace{\sum_{j=l,g,s} \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j}_{VII} \quad (2.112)$$

$$\underbrace{\varepsilon_k \frac{\partial \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}{\partial t}}_I + \underbrace{\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}_{II} = \underbrace{\varepsilon_k \mathbf{g}}_{III} - \underbrace{\frac{\varepsilon_k}{\rho_k} \nabla \langle P_k \rangle^k}_{IV} + \underbrace{\frac{\varepsilon_k \eta_k}{\rho_k} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_k \rangle^k}_V + \underbrace{\sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} C_{dkj} \left( \langle \mathbf{v}_j \rangle^j - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right)}_{VI} + \underbrace{\sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \left( \langle \mathbf{w}_{kj} \rangle^k - \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \frac{\dot{m}_{kj}}{\rho_k}}_{VII} \quad (2.125)$$

En comparant ces deux formalismes, c'est d'abord leur grande ressemblance qui est frappante et rassurante. On retrouve un terme de dérivation temporelle (I), un terme d'advection (II), un terme relatif aux forces volumiques avec la gravité (III), les forces surfaciques avec le terme en gradient de pression (IV) et un terme de diffusion visqueuse (V), puis un terme d'interaction hors changement de phase (VI) et enfin un terme associé au changement de phase (VII). On remarquera d'ailleurs que les termes de dérivation temporelle, d'advection et en gradient de pression sont rigoureusement identiques. En revanche, les autres termes présentent des différences plus ou moins importantes.

La première différence, mineure, apparaît sur le terme relatif à la gravité (III). Il s'agit simplement de l'application de l'approximation de Boussinesq [10] [126] (voir § 2.2.2) utilisée pour permettre de rendre compte des phénomènes de convection naturelle, moteurs dans le nivellement du lit de débris.

Une deuxième différence, mineure également, apparaît sur le terme de diffusion visqueuse (V). Cependant, les deux écritures seraient équivalentes si on négligeait l'influence du gradient du taux d'occupation volumique, ce qui est le cas dans les milieux homogènes. On fait sciemment le choix de conserver les termes en gradient du taux d'occupation volumique dans le cadre de la modélisation du nivellement d'un lit de débris. Ces termes en dérivation spatiale du taux d'occupation volumique pourraient en effet être importants à la surface du lit, siège du nivellement par déstabilisation et avalanches successives de cette surface. Il serait donc pertinent de pouvoir estimer par la suite l'apport effectif de ce terme dans les simulations.

### Une propriété effective d'auto-interaction

La troisième différence que l'on observe porte sur le terme d'interaction (VI). On retrouve bien dans les deux cas un terme écrit comme la somme sur les phases en présence d'une "propriété effective" en facteur d'une vitesse. On note cependant trois distinctions entre l'équation obtenue par la MPMV (2.112) et les modélisations plus classiques représentées par les équations (2.125) :

- les propriétés effectives sont respectivement des tenseurs et des coefficients scalaires,
- les vitesses considérées sont respectivement les vitesses moyennes des phases et les vitesses relatives entre ces phases,
- et par conséquent, une propriété effective supplémentaire pour le premier système (absence d'une propriété  $C_{d_{kk}}$  pour le second système).

Premièrement, les propriétés effectives sont des tenseurs alors que l'on trouve plus généralement une corrélation scalaire, on pourrait d'ailleurs trouver des corrélations tensorielles pour cette propriété effective, bien que je n'en ai pas rencontré dans ma bibliographie. En effet, une telle formulation permettrait par exemple de tenir compte d'anisotropie dans le système. Ainsi, il est tout à fait envisageable pour les propriétés effectives  $\overline{\overline{A_{kj}}}$  qu'elles puissent s'écrire ainsi (2.127). Elles pourraient alors être substituées par des propriétés scalaires, une fois calculées à partir des expressions (2.107) et des problèmes de fermeture § 2.5.1 pour des configurations homogènes et isotropes par exemple. ( $k, j = l, g, s$ )

$$\overline{\overline{A_{kj}}} = A_{kj} \overline{\overline{I}} \quad (2.127)$$

Deuxièmement, écrire le terme d'interaction (VI) via les vitesses des phases en présence plutôt que via les vitesses relatives introduit une propriété effective supplémentaire par équations (par phase), que l'on nomme dans ce document **propriété effective d'auto-interaction**  $\overline{\overline{A_{kk}}}$ . On écrit alors le terme d'interaction comme la somme de  $n$  termes plutôt que  $n - 1$  termes habituellement (où  $n$  est le nombre de phases considérées). Et bien qu'il semble plus intuitif de considérer les vitesses relatives entre phases comme les grandeurs d'intérêts pour caractériser leur interaction, et que les modèles actuels semblent efficaces, ce travail tend à signifier que les grandeurs d'intérêts seraient plutôt les vitesses moyennes de chaque phase. De plus, admettant un degré de liberté supplémentaire, on peut chercher à savoir si la modélisation usuelle ne serait pas incluse dans la modélisation établie dans ce document.

On peut effectivement réécrire les équations établies dans ce manuscrit (2.112) selon la formulation générale portant sur les vitesses relatives si l'on ajoute la contrainte (2.128) sur les propriétés effectives d'auto-interaction. On peut également écrire cette même contrainte à partir de l'écriture classique (2.125) en distribuant les propriétés effectives aux vitesses de phase à partir de la vitesse relative. La grandeur en facteur de la vitesse de la phase considérée peut alors s'assimiler à une propriété effective d'auto-interaction, elle vérifie alors (2.128). Or, cette contrainte n'est pas a priori vérifiée par la définition des propriétés effectives (2.107) et les problèmes définissant les variables de fermeture § 2.5.1. ( $k = l, g, s$ )

$$\overline{\overline{A_{kk}}} = - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} \overline{\overline{A_{kj}}} \quad (2.128)$$

S'il s'avère qu'il existe des conditions réelles ne vérifiant pas cette contrainte, il serait alors pertinent de les confronter aux réalités expérimentales et de mesurer la pertinence de cette approche. On pourrait alors vérifier laquelle des deux approches reproduit le plus fidèlement la réalité physique de ces écoulements.

Les propriétés effectives d'auto-interaction mise en évidence dans ces travaux  $\overline{\overline{A_{kk}}}$  représentent comment le comportement de la phase est influencé par la seule présence des autres phases indépendamment de leur comportement dynamique. On peut le résumer comme la propriété représentant comment l'écoulement macroscopique est modifié pour tenir compte de la réalité microscopique et de l'encombrement spatial. Pour s'en convaincre, supposons que toutes les phases sont immobiles à l'exception de la phase considérée. On peut alors assimiler la propriété d'auto-interaction à l'inverse de la perméabilité (au sens des écoulements en milieu poreux) [144].

Ce commentaire sur le nombre de propriétés effectives indépendantes et la contrainte sur les propriétés effectives d'auto-interaction (2.129) nécessaire pour avoir une équivalence mathématique entre les 2 structure est tout aussi valable pour les propriétés effectives thermiques associées aux températures moyennes  $C_{kj}$  qui sont à comparer au coefficient  $\Lambda_{kj}$ . ( $k = l, g, s$ )

$$C_{kk} = - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} C_{kj} \quad (2.129)$$

Bien que cette remarque soit sûrement tout aussi valable pour les propriétés effectives thermiques associées aux gradients de température  $\mathbf{D}_{kj}$ , il n'est tout simplement pas fait mention de terme d'interaction thermique entre phases associé au gradient de température dans les modélisations courantes (2.126) et dans le corpus que j'ai pu consulter, y compris dans les travaux de Nagrani *et al.* [132] portant pourtant spécifiquement sur l'influence du gradient de température macroscopique sur la migration sous contrainte des particules en suspension. On rappelle cependant que l'on a conservé les gradients de température moyenne en tant que sources par cohérence avec les travaux de Duval *et al.* [60], mais que Sapin [160] les néglige dans ses travaux en s'appuyant sur les simulations de Bousquet-Melou *et al.* [20] portant sur un phénomène de solidification et non d'ébullition. Pareillement aux termes de Brinkman, ces termes sont présents dans le modèle établi dans ce document, mais on les suspecte d'être négligeables. C'est ce qu'impliquerait la séparation des échelles si on pouvait comparer la température relative moyenne et sa déviation (on aurait pu le faire pour les phases sodium ( $l$ ) et ( $g$ ) grâce à (2.84c)), ou ce que suggère l'absence de ces termes dans les modèles usuels.

Des études additionnelles comme celles de Bousquet-Melou *et al.* [20] dans le cadre de l'ébullition permettraient de statuer sur leur influence. Dans le cas contraire, ils portent la même particularité structurelle que les deux autres types de propriétés effectives hors changement de phase, à savoir la présence d'une propriété effective d'auto-interaction.

Pour résumer ces différences, la structure d'équations (2.112) fait apparaître une propriété effective supplémentaire par rapport à la structure (2.125) dans le terme VI. Outre la signification physique, une équivalence mathématique entre les deux structures impliquerait la relation (2.128), qui n'est pas assurée *a priori*. Des remarques analogues sont valables pour les propriétés effectives thermiques.

### 2.7.2. Méthode n-phases

Dans ce chapitre, on a pu appliquer la méthode de prise de moyenne volumique (MPMV) à un système composé de 3 phases mobiles sans équilibre thermique local avec changement de phase et source de chaleur. Grâce au formalisme générique sur les phases ( $k$ ) et en conservant l'hypothèse par laquelle les phases interagissent deux à deux à leur interface, on peut désormais affirmer que l'on pourrait appliquer la MPMV à un système composé de  $n$  phases admettant  $m$  couples de phases s'échangeant de la masse par changement d'état. Cela ne changerait rien à l'établissement des équations de conservation macroscopiques déjà écrites de manière générique. On aurait cependant à modifier les problèmes de fermeture, notamment par l'ajout des conditions de saut relatives aux nouvelles interfaces alors considérées. Le problème macroscopique fermé se composerait alors de :

- $n$  équations de conservation de la masse, de la QDM et de l'énergie,
- dans le cadre de nos hypothèses,  $3n^2$  propriétés effectives hors changement d'état ( $n$  propriétés effectives dynamiques et  $2n$  propriétés effectives thermiques par phase),
- $4mn$  propriétés effectives dues au changement de phase.

Malgré la complexité inhérente à une telle modélisation, la considération de  $n$  phases serait très intéressante pour l'étude du nivellement d'un lit de débris sur le récupérateur d'un RNR-Na lors d'un accident grave. On pourrait alors considérer plusieurs phases solides et ainsi distinguer le comportement des grains par catégorie, que ce soit par des groupes de compositions, de tailles et/ou de formes. Cela nous permettrait notamment de modéliser des phénomènes de ségrégation des débris, ce qui selon les catégories considérées pourrait avoir un impact non négligeable quant aux enjeux de sûreté comme on a pu le voir dans le premier chapitre (voir § 1.1.3.3).

Maintenant que l'on a pu écrire un modèle thermodynamique Eulerien et multiphasique macroscopique d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na lors d'un accident grave, par l'application de la méthode de la prise de moyenne volumique, on l'implémente dans un code de calcul afin de pouvoir tester son comportement.

## 3 - Chapitre 3 : Vers une simulation numérique d'un lit de débris en RNR-Na

On a écrit un modèle à l'échelle macroscopique à partir des équations aux petites échelles par application de la méthode de la prise de moyenne volumique [60] [106] [144] dans le chapitre précédent § 2. À la suite de ce travail, deux axes majeurs sont ouverts. D'une part, on doit résoudre les problèmes de fermeture ((2.101), (2.102) et (2.103)) afin de déterminer les propriétés effectives du lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na. D'autre part, on doit implémenter ce modèle macroscopique dans un code de calcul pour être en mesure de simuler le comportement de ce système.

La résolution des problèmes de fermeture implique une connaissance fine de l'état du système à l'échelle locale sur l'ensemble d'un VER. Cela nécessite entre autre des simulations DNS que l'on a évoquées dans le premier chapitre § 1.4.2.2. Restreindre ce type de méthode à un VER accroît leur pertinence en comparaison de leur utilisation sur l'ensemble du lit de débris. Cela reste cependant un travail conséquent et difficile hors du cadre de cette étude. Quelques pistes de réflexion initiales sont proposées dans les perspectives de ce manuscrit.

Dans ce chapitre, on s'intéresse alors au deuxième axe principal de ce travail : l'implémentation du problème macroscopique dans un outil de calcul. L'intégralité du modèle n'a cependant pas pu être implémentée à ce jour. Ce chapitre présente ainsi la plateforme de calcul choisie (OpenFOAM.com v2212) et la méthode d'implémentation adoptée. On présentera ensuite les tests permettant de vérifier que l'on a bien implémenté et que l'on résout correctement les équations souhaitées.

### 3.1. Implémentation du problème macroscopique

On cherche à implémenter le système d'équations macroscopiques établi dans le chapitre précédent § 2.6.4. C'est un système d'équations aux dérivées partielles eulériennes triphasique. On choisira pour cela, la plateforme *open source* OpenFOAM [82] qui permet la résolution d'équations similaires. On présentera, dans cette section, cette plateforme de résolution numérique, puis comment on l'utilise pour implémenter et résoudre le problème macroscopique.

#### 3.1.1. Présentation d'OpenFOAM

OpenFOAM, pour "*Open source Field Operation And Manipulation*", est une librairie open-source C++ pour le calcul multiphasique dimensionné basée sur les volumes finis. Son utilisation est décrite dans le guide utilisateur de Greenshields [82]. C'est une plateforme de développement collaborative comprenant déjà un grand nombre d'applications préétablies que l'on sépare en deux catégories. D'un côté, les **utilities** rassemblent un certain nombre d'aides aux prétraitements et aux post-traitements. On trouve des outils de maillage, des méthodes de résolution d'équations ou des visualiseurs de données. OpenFOAM comprend également des méthodes passerelles permettant d'utiliser certains outils extérieurs, comme lire un maillage créé sous Fluent, ou de changer le format des sorties pour le rendre compatible avec des outils de post-traitement externes. D'autre part, les **solvers** résolvent

spécifiquement un problème de mécanique des fluides ou des milieux continus par des méthodes s'appuyant sur les volumes finis. C'est dans les *solvers* que l'on écrit les systèmes d'équations et que l'on définit l'ordre et les étapes de résolution. Plus d'une centaine de *solvers* préconstruits sont disponibles dans la distribution de base et chacun est libre, selon les termes de la licence GPL [173], de construire et d'ajouter ses propres développements en s'inspirant des *solvers* préexistants.

OpenFOAM présente plusieurs qualités qui ont motivé le choix de cette plateforme pour implémenter le système d'équations établi au chapitre précédent § 2.6.4 :

- Particulièrement développé pour la thermohydraulique, OpenFOAM comprend un grand nombre de *solvers* préexistants dédiés aux écoulements multiphasiques, dont au moins 3 permettant la résolution d'écoulements multiphasiques eulériens, dont on a pu s'inspirer.
- Très utilisé dans le domaine académique, une partie non négligeable de ces *solvers* est documentée par un ou plusieurs articles publiés sous-comité de lecture qui expliquent leur fonctionnement, les choix réalisés ou des développements additionnels.
- Étant sous licence libre, et ayant une reconnaissance académique, la communauté de développeurs est suffisamment grande pour trouver de l'aide ou des informations en cas de dysfonctionnement.
- OpenFOAM est conçue de telle sorte que la majorité des opérateurs et un certain nombre de méthodes de résolution sont préécrites. Ainsi, l'implémentation d'un système d'équations dans un nouveau *solver* peut être réalisée assez rapidement. On peut pratiquement écrire les équations physiques telles qu'elles le sont dans le chapitre précédent (voir § 2.6.4). La discrétisation et les méthodes de résolution sont alors prises en charge par OpenFOAM, bien que l'on puisse préciser lesquelles on souhaite utiliser et en ajouter si on le désire.

Les trois *solvers* OpenFOAM permettant de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles multiphasiques eulériennes dont on s'inspire sont les suivants. Premièrement, `twoPhaseEulerFoam` et `multiphaseEulerFoam` sont tous les deux disponibles dans la distribution principale d'OpenFOAM. `twoPhaseEulerFoam` propose de résoudre les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour deux fluides Newtoniens distincts. Il s'appuie sur les travaux de Rusche [156] et la méthode de résolution décrite dans sa thèse pour résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement. Le *solver* `multiphaseEulerFoam`, adapté de `twoPhaseEulerFoam`, permet de résoudre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour autant de fluides Newtoniens que nécessaire. Il ne permet pas en revanche de résoudre les équations de conservation de l'énergie. Enfin, on s'inspire aussi du *solver* `sedFoam` [25] développé par le laboratoire LEGI de Grenoble. Bien qu'il ne permette pas la résolution des équations de conservation de l'énergie, `sedFoam` est également adapté de `twoPhaseEulerFoam` pour traiter le transport de sédiment. Une des deux phases considérées par `twoPhaseEulerFoam` est modifiée de sorte à représenter un ensemble de particules dans le cadre d'une modélisation pseudo-fluide similaire à celle adoptée dans le chapitre § 2. `sedFoam` comprend notamment plusieurs lois physiques décrivant la pression granulaire [26] [94] [101] et la viscosité granulaire [21] [63] [105] ou encore des modèles de rhéologie du  $\mu(I)$  [102]. Chauchat *et al.* [25] précisent d'ailleurs la description de la méthode de résolution de Rusche [156] dans leur article de 2017.



C'est pour toutes ces raisons que l'on a choisi d'utiliser OpenFOAM pour implémenter le système d'équations aux dérivées partielles multiphasiques eulériennes.

### 3.1.2. Méthode d'implémentation de `debrisBedSedFoam`

On implémente les équations du problème macroscopique § 2.6.4 dans OpenFOAM selon une méthode incrémentale, afin de faciliter le débogage de l'implémentation.

On procède par étape, en commençant par implémenter la résolution des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (QDM) pour trois phases en isotherme à partir du `solver sedFoam` en s'inspirant du `solver multiphaseEulerFoam`. On conserve ainsi la structure proposée dans `sedFoam` permettant de choisir dans le jeu de donnée les différentes lois constitutives donnant les propriétés effectives à défaut de les avoir calculées. On s'inspire ensuite du `solver twoPhaseEulerFoam`, pour implémenter les équations de conservation de l'énergie, d'abord sans la dilatation thermique, puis avec le couplage qu'elle induit entre les équations de conservation de la QDM et de l'énergie représentant la convection naturelle. À ce jour, on n'a cependant pas eu le temps de réaliser la dernière étape de l'implémentation, à savoir le changement de phase.

Le changement de phase est cependant un point essentiel de la phénoménologie du lit de débris. On rappelle que le nivellement du lit de débris a lieu en quelques minutes à partir de l'ébullition du sodium [168] (voir § 1.1.3). Pour implémenter ces termes de changement de phase, on pourra s'inspirer du `solver multiphaseChangeEulerFoam` adapté de `multiphaseEulerFoam` par d'Oruganti [138] pour simuler des problèmes de cavitation. Cette adaptation consiste principalement à réutiliser le module de changement de phase du `solver interPhaseChangeFoam` et de l'adapter à l'architecture de `multiphaseEulerFoam`. Une fois l'architecture mise en place, il ajoute un modèle de changement de phase représentant les phénomènes de cavitation auquel on pourrait substituer un modèle adapté à l'ébullition-condensation permettant de représenter les propriétés effectives dues au changement d'état (2.119) et (2.120). Ces termes coupleront alors encore plus fortement la résolution des équations, étant présents à la fois dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, mais aussi dans les équations de conservation de la masse.

### 3.1.3. Adaptation du modèle

L'implémentation du problème macroscopique § 2.6.4 et de sa résolution impliquent certaines adaptations. Certaines sont inhérentes à la méthode de résolution, d'autres sont des optimisations numériques ou encore des palliatifs à la méconnaissance des propriétés effectives.

Premièrement, on a décidé de repartir de `sedFoam` [25] qui reprend la méthode de résolution imaginée par Rusche [156]. En conséquence, on doit faire l'hypothèse d'une pression unique pour toutes les phases, renommant  $\langle P_k \rangle^k : \langle P \rangle$ . On conserve cependant un terme correctif permettant de modéliser les particularités de la phase solide pseudo-fluide sous la forme d'une pression particulière  $P_p$  à la manière de `sedFoam` [25].

On conserve aussi le choix réalisé pour l'implémentation de `sedFoam`, de diviser les équations de conservation de la quantité de mouvement (2.112) par  $\varepsilon_k$  afin de pouvoir réutiliser correctement les corrélations relatives à la modélisation pseudo-fluide de la phase solide préimplémentées. Par cohérence, on fait de même pour les équations de conservation de l'énergie (2.116). On fait donc apparaître respectivement les viscosités cinématiques effectives  $\nu_{kEff}$  et les diffusivités thermiques effectives  $\alpha_{kEff}$ . Cette division par  $\varepsilon_k$  est discutable d'un point de vue numérique, car  $\varepsilon_k$  pourrait devenir nul ou

tendre vers zéro dans les mailles où une phase serait absente par exemple, et occasionnerait alors des problèmes de division par zéro. Cependant, on remarque aussi que les grandeurs physiques comme la vitesse moyenne ou la température relative moyenne d'une phase absente ou résiduelle manquent de pertinence physique. Aussi, on fait le choix de considérer que pour un taux d'occupation inférieur à un certain seuil (paramétrable), la vitesse et la température de la phase associée prennent la valeur de la grandeur du mélange (3.3) et (3.4) <sup>1</sup>.

$$\langle \mathbf{v}_m \rangle = \sum_k \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (3.3)$$

$$\langle \Theta_m \rangle = \sum_k \varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k \quad (3.4)$$

où  $\langle \mathbf{v}_m \rangle$  et  $\langle \Theta_m \rangle$  sont respectivement la vitesse moyenne et la température relative moyenne du mélange.

Pour simplifier la résolution numérique, sachant que les trois phases occupent l'ensemble du volume (3.5), le taux d'occupation volumique de la troisième phase est calculé à partir des deux autres (3.8). On évite ainsi la résolution d'une équation aux dérivées partielles supplémentaire.

$$\sum_{k=l,g,s} \varepsilon_k = 1 \quad (3.5)$$

Les problèmes de fermeture § 2.5 n'étant pas résolus pour l'instant, on ne connaît pas encore les expressions des propriétés effectives définies en fonction des variables de fermeture ((2.107), (2.114), (2.115), (2.119) et (2.120)). À défaut, on fait le choix de pouvoir utiliser les lois constitutives de la littérature pour pouvoir comparer les futures simulations aux travaux existants. Premièrement, conformément aux corrélations les plus courantes et à l'architecture de `sedFoam`, on considère les propriétés effectives comme scalaires (2.127). Celles associées aux gradients de température ((2.115) et (2.120)) seront négligées (voir § 2.7.1.2), bien que la structure permettant de les prendre en compte lorsqu'elles seront connues soit implémentée. De même, les propriétés effectives d'auto-interaction dynamiques et thermiques sont respectivement implémentées en respectant les contraintes (3.6)

---

1. On remarquera que l'on utilise ces formulations ((3.3) et (3.4)) pour décrire la vitesse et la température de phase résiduelle. La vitesse et la température de ces phases en ce point de l'espace n'ont donc que peu de sens physique. Cependant, on a conscience que la vitesse et la température étant des grandeurs intensives, ces expressions sont maladroites. On devrait leur préférer des expressions construites respectivement sur la quantité de mouvement [136] [192] et l'enthalpie suivantes :

$$\rho_m \langle \mathbf{v}_m \rangle = \sum_k \varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (3.1)$$

$$C_{pm} \langle \Theta_m \rangle = \sum_k \varepsilon_k C_{pk} \langle \Theta_k \rangle^k \quad (3.2)$$

où  $\rho_m$  et  $C_{pm}$  seraient respectivement la densité et la capacité calorifique du mélange. Ces grandeurs impliqueraient néanmoins de choisir une modélisation les définissant. On fait alors le choix présenté dans ce document par simplicité et pour améliorer le comportement du code localement en l'absence d'une ou plusieurs phases. On remarquera d'ailleurs que l'on peut trouver la définition de la vitesse de mélange par l'expression 3.3 dans la littérature [156] [200].

et (2.129) (voir § 2.7.1.2), bien que l'implémentation soit faite de sorte à pouvoir redonner leur indépendance aux propriétés effectives d'auto-interaction par la modification de deux lignes de code, une fois leur expression connue. ( $k = l, g, s$ )

$$A_{kk} = - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} A_{kj} \quad (3.6)$$

$$C_{kk} = - \sum_{\substack{j=l,g,s \\ j \neq k}} C_{kj} \quad (2.129)$$

Une fois toutes ces adaptations apportées au problème moyenné fermé § 2.6.4, on se propose finalement d'implémenter et de résoudre le système d'équations suivant :

( $i = s, l$ ), ( $f = l, g$ ), ( $k = l, g, s$ )

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_i \langle \mathbf{v}_i \rangle^i) = 0 \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_g = 1 - \varepsilon_l - \varepsilon_s \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{v}_s \rangle^s}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_s \rangle^s \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_s \rangle^s &= (1 - \beta_s^{sat} \langle \Theta_s \rangle^s) \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_s} + \frac{\nabla P_p}{\varepsilon_s \rho_s} + \nu_{sEff} \nabla^2 (\varepsilon_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) - \nu_{sEff} \nabla \langle \mathbf{v}_s \rangle^s \cdot \nabla \varepsilon_s \\ &+ \nu_{sEff} \sum_{j=l,g,s} A_{sj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{v}_f \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle^f &= (1 - \beta_f^{sat} \langle \Theta_f \rangle^f) \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_f} + \nu_{fEff} \nabla^2 (\varepsilon_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) - \nu_{fEff} \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \nabla \varepsilon_f \\ &+ \nu_{fEff} \sum_{j=l,g,s} A_{fj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k = \frac{\dot{q}_k}{C_{pk}} + \alpha_{kEff} \nabla^2 (\varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k) - \alpha_{kEff} \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \alpha_{kEff} \sum_{j=l,g,s} C_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (3.11)$$

où  $\nu_{kEff} = \frac{\nu_k}{\varepsilon_k} = \frac{\eta_k}{\varepsilon_k \rho_k}$  est la viscosité effective de la phase  $k$  avec  $\nu_k$  sa viscosité cinématique.  $P_p$  désigne la pression granulaire ou particulaire.  $\alpha_{kEff} = \frac{\alpha_k}{\varepsilon_k} = \frac{\lambda_k}{\varepsilon_k \rho_k C_{pk}}$  est la diffusivité thermique effective de la phase  $k$ .

### 3.2. Vérification de l'implémentation de debrisBedSedFoam

Une fois l'implémentation du système d'équations ((3.7) à (3.11)) réalisée, il faut vérifier que l'on a bien implémenté les équations souhaitées. Il s'agit bien de vérifier l'implémentation et non de la valider. On définit ici la **vérification** comme la procédure visant à s'assurer que les équations résolues par le *solver* sont bien rigoureusement les équations que l'on souhaite résoudre et qu'elles sont correctement résolues. À ne pas confondre avec ce que l'on nomme la **validation** qui consiste à confirmer qu'un modèle reproduit fidèlement les comportements physiques qu'il est censé modéliser, notamment par comparaison avec des données expérimentales ou à d'autres résultats de calculs obtenus avec des outils validés.

Pour vérifier l'implémentation présente, on choisit de contrôler l'implémentation des équations terme à terme. On réalise donc des simulations dégradées, dont le comportement est entièrement déterminé par un nombre restreint de termes des équations, que l'on compare aux résultats théoriques afin d'affirmer que les termes implémentés le sont correctement. On comparera à des résultats analytiques et à des résultats de la littérature. On pourra ainsi vérifier de façon incrémentale l'implémentation de tous les termes, mais aussi de toutes les équations et de leur couplage.

Dans toutes les simulations suivantes, on choisit les propriétés effectives d'interaction dynamiques et thermiques respectivement définies par les équations (3.12) et (3.13). On les définit par les taux d'occupation volumiques des deux phases concernées en facteur d'une constante nommée respectivement le **coefficient d'interaction dynamique** et **thermique**. Ce sont des expressions très simples permettant aux phases d'échanger de la quantité de mouvement ou de la chaleur sans introduire des comportements aberrants. Par exemple, lorsqu'une phase est résiduelle, son taux d'occupation volumique en facteur rend l'influence de cette phase sur les autres phase négligeable contrairement aux cas d'une propriété effective constante. ( $k, j = l, g, s \mid j \neq k$ )

$$A_{kj} = \varepsilon_k \varepsilon_j \widehat{A}_{kj} \quad (3.12)$$

$$C_{kj} = \varepsilon_k \varepsilon_j \widehat{C}_{kj} \quad (3.13)$$

où  $\widehat{A}_{kj}$  et  $\widehat{C}_{kj}$  sont respectivement les coefficients d'interaction dynamiques et thermiques, considérés constants.

#### 3.2.1. Écoulements de Darcy et de Darcy généralisé

Pour les premiers tests de vérification, on simule des écoulements isothermes monodimensionnels à travers un milieu poreux homogène immobile, en régime visqueux (ou régime de Darcy). Dans ce cas, les équations de conservation de l'énergie (3.11) et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (QDM) de la phase solide (3.9) ne sont pas résolues. Les équations de conservation de la QDM des fluides (3.10) se réduisent sous la forme des équations suivantes : ( $f = l, g$ )

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v}_f \rangle^f}{\partial t} = \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_f} + \nu_{fE} \sum_{j=l,g,s} A_{fj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (3.14)$$

Ces tests permettent ainsi de vérifier l'implémentation du terme de gravité (sans la dilatation thermique), du gradient de pression et des interactions entre les phases. Ils permettent également de vérifier la résolution des équations sous cette forme dégradée avec ou sans couplage. On commence

par un cas sans couplage, avec un écoulement monophasique qui peut être décrit comme un écoulement de Darcy [47] [144] [194]. On simule ensuite un écoulement diphasique qui peut être décrit par les approches dites de **Darcy généralisées** [38] [106].

### 3.2.1.1. Écoulement de Darcy

Dans un premier temps, on considère un écoulement monophasique. Le domaine 1-D vertical est soumis à la gravité et à un gradient de pression qui s'y oppose. Il est rempli à 40% par une matrice solide poreuse uniforme immobile. La phase solide est ainsi présente, mais fixe : sa vitesse est fixée à la vitesse nulle tout au long de la simulation. Le fluide ( $g$ ) remplit l'espace restant. Les équations relatives au fluide ( $l$ ) ne sont pas résolues. On résume cela dans le schéma ci-contre *Fig. 3.1*. On place 100 mailles dans la direction de l'écoulement.

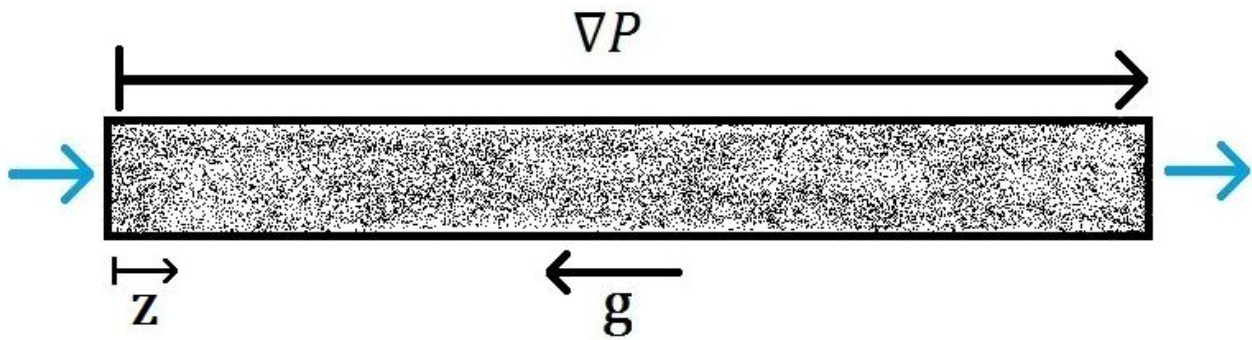


Figure 3.1 – Schéma d'écoulement de Darcy monophasique.

Dans ces conditions, la vitesse du fluide doit être uniforme sur tout le domaine à tout instant et doit tendre vers l'état stationnaire de l'équation de Darcy [144]. On peut estimer cette vitesse à l'état stationnaire à partir de l'équation (3.14), qui devient à l'état stationnaire monophasique l'équation (3.15). On peut alors prédire la vitesse finale selon les paramètres de la simulation.

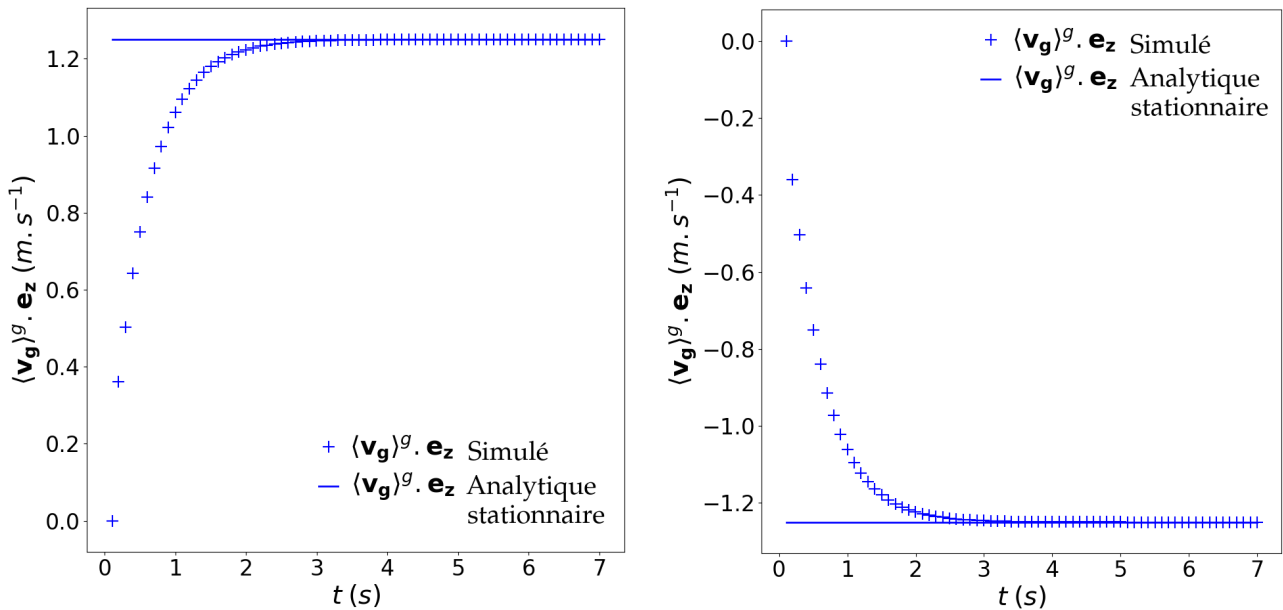
$$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g = \frac{1}{\nu_g \varepsilon_s \widehat{A}_{gs}} \left( \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_g} \right) \quad (3.15)$$

où  $\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g$  désigne la vitesse moyenne de la phase ( $g$ ) une fois l'état stationnaire atteint.

On présente deux résultats de simulation obtenus pour les valeurs des paramètres résumés dans la Table 3.1. Dans le premier cas, c'est le gradient de pression qui domine l'écoulement et le fluide doit monter. Dans le second, c'est la gravité qui est prédominante et le fluide doit tomber. Après calcul, on obtient bien un gradient de pression et une vitesse uniforme à tout instant dans la conduite. La vitesse tend parfaitement vers la prédiction théorique donnée par la formule (3.15), comme on peut l'observer sur la *Fig. 3.2*.

Paramètres	$\rho_g$	$\nu_g$	$\varepsilon_s$	$\widehat{A}_{gs}$	$\ \mathbf{g}\ $	$\ \nabla \langle P \rangle\ $	$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g \cdot \mathbf{e}_z$
Cas (a) [S.I.]	1000	$10^{-4}$	0.4	$10^5$	10	$1.5 \cdot 10^4$	1.25
Cas (b) [S.I.]	1000	$10^{-4}$	0.4	$10^5$	10	$5 \cdot 10^3$	-1.25

Table 3.1 – Valeurs des paramètres des écoulements de Darcy simulés.



(a) Écoulement de Darcy pour la phase ( $g$ ) dirigé par un gradient de pression surclassant la gravité. (b) Écoulement de Darcy pour la phase ( $g$ ) dirigé par la gravité surclassant le gradient de pression.  
 Figure 3.2 – Composante verticale de la vitesse uniforme du fluide ( $g$ ) au cours du temps, convergant vers la vitesse stationnaire prédite.

On a donc pu vérifier que le code permet de résoudre correctement une équation de conservation de la quantité de mouvement dans les conditions d'un écoulement de Darcy. On vérifie ensuite que la méthode permet également de le faire pour plusieurs phases distinctes simultanément.

### 3.2.1.2. Écoulement de Darcy généralisé

La simulation d'un écoulement de Darcy généralisé est en tout point similaire à celle de l'écoulement de Darcy précédente § 3.2.1.1, seulement la matrice poreuse n'est plus traversée par un seul fluide, mais par deux : ( $l$ ) et ( $g$ ) (voir Fig. 3.3). La matrice poreuse uniforme immobile occupe toujours 40% du volume tandis que les fluides occupent respectivement 40% pour ( $l$ ) et 20% pour ( $g$ ). Ainsi et dans les conditions précédemment décrites, la vitesse des fluides doit toujours être uniforme à tout instant et tendre vers une vitesse stationnaire. Ces vitesses stationnaires sont cependant décrites par

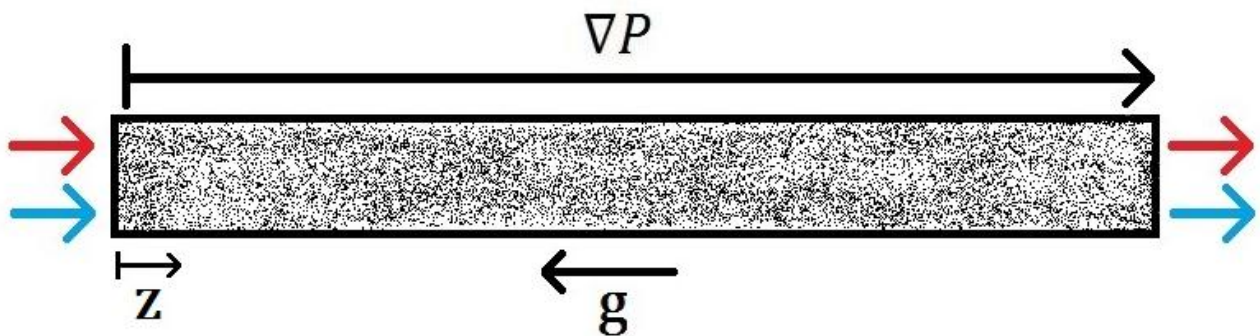


Figure 3.3 – Schéma d'écoulement de Darcy diphasique.

une nouvelle expression (3.16a) obtenue à partir des équations de conservation de la QDM (3.14) en tenant compte de la présence du second fluide. On retrouve d'ailleurs une composante semblable à l'écoulement de Darcy ((3.16b) et (3.16c)), modifiée par la présence de l'autre fluide via les coefficients d'interaction  $\widehat{A}_{lg}$  et  $\widehat{A}_{gl}$ . ( $f, f' = l, g \mid f' \neq f$ )

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f = \frac{1}{1 - \widehat{A}_l^* \widehat{A}_g^*} \left( \langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^{f \text{ Darcy}} + \widehat{A}_{f'}^* \langle \mathbf{v}_{f'} \rangle_\infty^{f' \text{ Darcy}} \right) \quad (3.16a)$$

$$\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^{l \text{ Darcy}} = \frac{1}{\nu_l \left( \varepsilon_g \widehat{A}_{lg} + \varepsilon_s \widehat{A}_{ls} \right)} \left( \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_l} \right) \quad (3.16b)$$

$$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^{g \text{ Darcy}} = \frac{1}{\nu_g \left( \varepsilon_l \widehat{A}_{gl} + \varepsilon_s \widehat{A}_{gs} \right)} \left( \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_g} \right) \quad (3.16c)$$

$$\widehat{A}_l^* = \frac{\varepsilon_g \widehat{A}_{lg}}{\varepsilon_g \widehat{A}_{lg} + \varepsilon_s \widehat{A}_{ls}} \quad (3.16d)$$

$$\widehat{A}_g^* = \frac{\varepsilon_l \widehat{A}_{gl}}{\varepsilon_l \widehat{A}_{gl} + \varepsilon_s \widehat{A}_{gs}} \quad (3.16e)$$

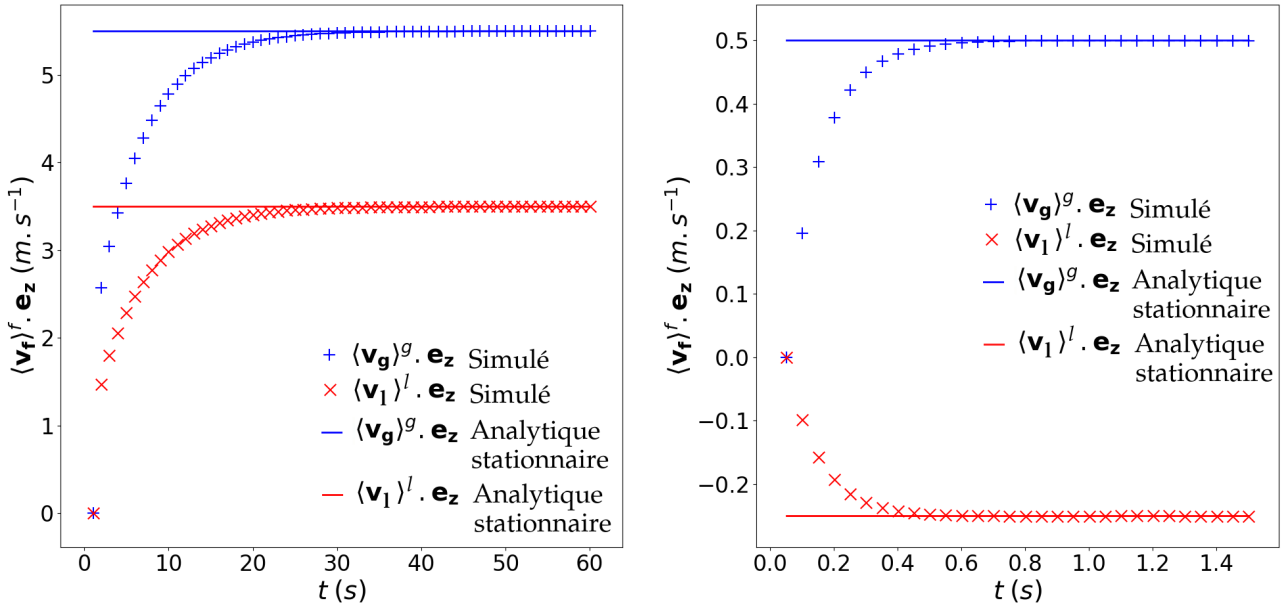
On présente deux cas, dont les jeux de paramètres sont donnés dans la Table 3.2. Dans le premier cas, la pression dirige l'écoulement diphasique co-courant. Dans le second cas, on choisit spécifiquement le gradient de pression de sorte qu'il soit prépondérant pour le fluide ( $g$ ), mais que ce soit la gravité qui dirige le fluide ( $l$ ), les deux fluides circulant à contre-courant.

Paramètres		$\rho_f$	$\nu_f$	$\widehat{A}_{fk}$	$\varepsilon_f$	$\varepsilon_s$	$\ \mathbf{g}\ $	$\ \nabla \langle P \rangle\ $	$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f \cdot \mathbf{e}_z$
Cas (a) [S.I.]	$f = l$	1000	$10^{-4}$	$10^5$	0.4	0.4	10	$2 \cdot 10^4$	3.5
	$f = g$	500	$10^{-4}$	$10^5$	0.2				5.5
Cas (b) [S.I.]	$f = l$	1000	$10^{-4}$	$10^5$	0.4	0.4	10	$7.5 \cdot 10^3$	-0.25
	$f = g$	500	$10^{-4}$	$10^5$	0.2				0.5

Table 3.2 – Valeur des paramètres des écoulements de Darcy généralisés simulés.

Les figures Fig. 3.4 montrent l'évolution de la composante verticale de la vitesse de chaque fluide au cours du temps. Dans les deux cas, les vitesses sont bien uniformes à tout instant et tendent parfaitement vers les vitesses stationnaires théoriques. Le taux de présence volumique reste bien inchangé et le gradient de pression est bien uniforme.

On a ainsi pu vérifier que le code fonctionne dans le cas d'un écoulement simple et permet de calculer séparément et correctement la vitesse de deux phases distinctes tout en considérant 3 phases, dont une immobile. En plus de la méthode de résolution, on a pu vérifier que le code simule une évolution temporelle et que l'implémentation des termes rendant compte de la gravité, du gradient de pression et des propriétés effectives d'interaction dynamiques entre les fluides est correctement réalisée.



(a) Écoulement de Darcy généralisé dirigé par un gradient de pression surclassant la gravité.

(b) Écoulement de Darcy généralisé respectivement dirigé par la gravité (*l*) et le gradient de pression (*g*).

Figure 3.4 – Projection verticale de la vitesse uniforme du fluide (*g*) et (*l*) au cours du temps, convergeant vers leur vitesse stationnaire prédite respective, pour un écoulement de Darcy généralisé à deux fluides.

### 3.2.1.3. Validation de l'écoulement de Darcy généralisé

On sort de la démarche de vérification dans cette sous-section seulement en présentant un travail de validation. Ce test de validation propose de simuler un écoulement diphasique de sodium liquide-vapeur co-courant, monodimensionnel, dans une colonne poreuse verticale, en régime de Darcy. Ce type d'écoulement est bien décrit par les modèles dits de "Darcy généralisé". Comme on vient de le vérifier, le système est bien implémenté et résolu pour ce type d'écoulement. Ce test de validation réalisé avec les propriétés réelles du sodium permet d'éprouver la robustesse du code à traiter une densité très faible (vapeur de sodium) et de grand écart de densité, situation rencontrées en conditions accidentelles. Ce test est une étape vers la modélisation d'un lit de débris en RNR-Na.

On se place dans les conditions d'un régime d'écoulement de Darcy où les termes inertiels (ou de Forchhemier) sont négligeables. Cette condition implique que les nombres de Reynolds en milieu poreux du sodium diphasique soient petits devant 1 ( $Re_l \ll 1$  et  $Re_g \ll 1$ ). On rappelle l'expression du nombre de Reynolds en milieu poreux : ( $f = l, g$ )

$$Re_f = \frac{\|\langle \mathbf{v}_f \rangle^f\| d}{\nu_f \varepsilon_s} \quad (1.8)$$

où  $d$  est le diamètre des pores.

On utilise la loi d'Ergun [65] pour exprimer la perméabilité (3.17b). On considère les modèles d'Ergun généralisés sans traînée interfaciale comme le modèle de Lipinski [115] pour exprimer les perméabilités relatives (3.17c). On a alors le modèle suivant :



( $f = l, g$ )

$$\frac{\nu_f}{KK_f} \langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f = \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_f} \quad (3.17a)$$

$$K = \frac{(1 - \varepsilon_s)^3 d^2}{180 \varepsilon_s^2} \quad (3.17b)$$

$$K_f = \frac{\varepsilon_f^3}{(1 - \varepsilon_s)^3} \quad (3.17c)$$

où  $K$  est la perméabilité de la matrice poreuse et  $K_f$  la perméabilité relative pour la phase  $f$ .

On peut maintenant choisir les paramètres du test de validation de sorte à représenter des conditions proches de celles présentes dans le lit de débris et respectant les conditions sur les nombres de Reynolds en milieu poreux. On résume ces paramètres dans la Table 3.3. Ils correspondent à un écoulement diphasique de sodium liquide et de sodium gazeux à 1200 K (approximativement la température de saturation à 2 bar). La densité et la viscosité dynamique de sodium liquide sont obtenues respectivement par les corrélations (1.2) et (1.4) issues du livre de Bonin [17]. La densité de la vapeur de sodium est estimée à partir de la loi des gaz parfaits (1.3). La viscosité dynamique de la vapeur de sodium est estimée à partir de la corrélation de Stefanov *et al.* [178] issue du livre de Foust [70] reportée par l'équation (1.5).

Paramètres [S.I.]	$\rho_f$	$\nu_f$	$\varepsilon_f$	$\varepsilon_s$	$d$	$\ \mathbf{g}\ $	$\ \nabla \langle P \rangle\ $
$f = l$	729	$2.1 \cdot 10^{-7}$	0.2	0.6	$5 \cdot 10^{-4}$	9.81	$8 \cdot 10^3$
$f = g$	0.46	$4.3 \cdot 10^{-5}$	0.2				

Table 3.3 – Paramètres de l'écoulement de Darcy diphasique de sodium pour un modèle d'Ergun généralisé.

Dans ces conditions, on prédit les vitesses stationnaires suivantes, qui respectent toutes deux la contrainte d'un nombre de Reynolds en milieu poreux petit devant 1.

$$\|\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^l\| = 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} \quad (3.18a)$$

$$\|\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g\| = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1} \quad (3.18b)$$

$$Re_l = 0.7 \ll 1 \quad (3.18c)$$

$$Re_g = 0.239 \ll 1 \quad (3.18d)$$

Pour simuler l'écoulement décrit ci-dessus avec le système implémenté, on considère comme dans le test de vérification précédent un domaine monodimensionnel vertical soumis à la gravité et à un gradient de pression. Le domaine est rempli à 60 % par une matrice solide poreuse uniforme immobile et le reste de l'espace est occupé par le sodium liquide ( $l$ ) et gazeux ( $g$ ). Ce cas est schématisé par la Fig. 3.3. On doit calculer les propriétés effectives dynamiques et en particulier les coefficients d'interaction dynamique du sodium liquide et gazeux pour simuler un modèle d'Ergun généralisé sans traînée interfaciale. Cette dernière hypothèse implique des coefficients d'interaction entre les fluides nuls ( $\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 0$ ). Pour retrouver le modèle précédent, on doit satisfaire la correspondance suivante qui permet de calculer les coefficients d'interaction de chaque fluide avec la phase solide  $\hat{A}_{fs}$  :

( $f = l, g$ )

$$\frac{\nu_f}{\varepsilon_f} \varepsilon_f \varepsilon_s \hat{A}_{fs} \equiv \frac{\nu_f}{K K_f} \iff \hat{A}_{fs} = \frac{180 \varepsilon_s}{d^2 \varepsilon_f^3} \quad (3.19)$$

$$\hat{A}_{fs} = 5.4 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2} \quad (3.20)$$

En conservant les paramètres de la Table 3.3, on obtient la valeur de  $\hat{A}_{fs}$  correspondante (3.20). On a alors une parfaite correspondance entre les vitesses théoriques et les vitesses simulées une fois l'état stationnaire atteint, comme représenté sur la Fig. 3.5. Ainsi, le système implémenté est capable de reproduire les résultats produits par les équations de Darcy pour un modèle d'Ergun diphasique sans traînée interfaciale dans les conditions réelles d'un écoulement de sodium diphasique en milieu poreux.

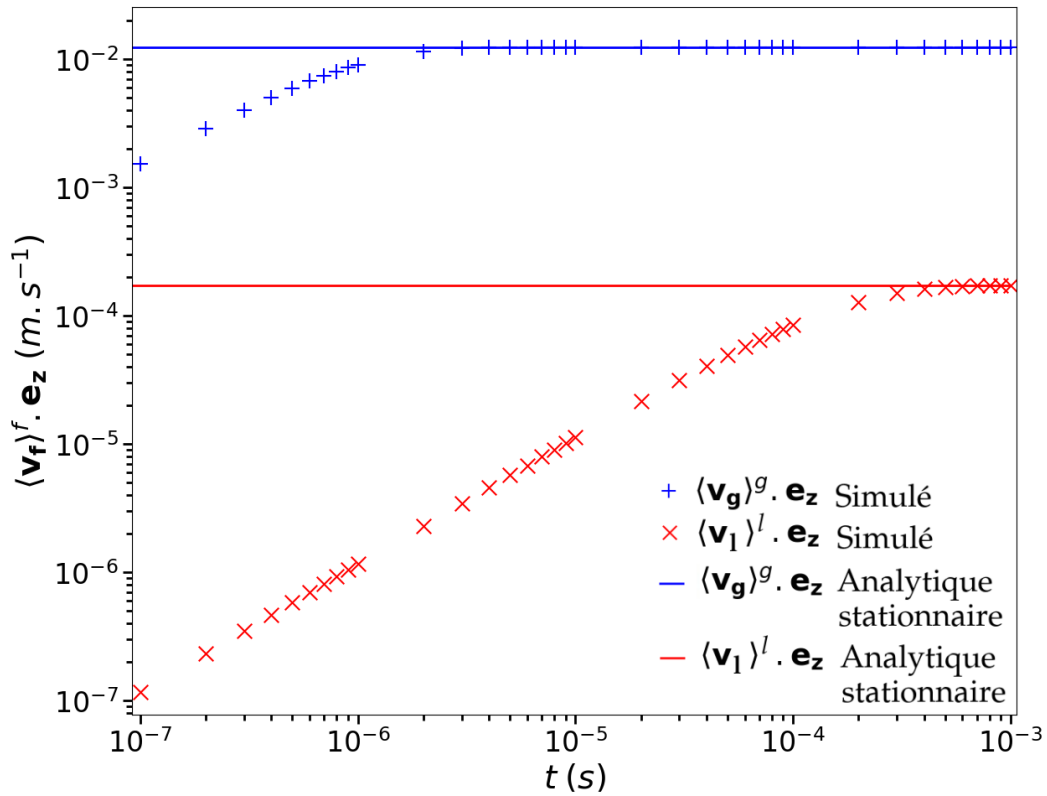


Figure 3.5 – Projection verticale de la vitesse uniforme du fluide ( $g$ ) et ( $l$ ) au cours du temps, convergeant vers leur vitesse stationnaire prédite respective, d'un écoulement de Darcy diphasique pour un modèle d'Ergun généralisé sans traînée interfaciale.

### 3.2.2. Écoulement de Couette et de Poiseuille diphasique

La méthode de résolution a pu être testée dans un cas simple et l'on a pu confirmer l'implémentation des termes relatifs à la variation temporelle, à la gravité, au gradient de pression et aux interactions dynamiques entre phases dans la section précédente § 3.2.1. On vérifie dans cette section l'implémentation de la diffusion visqueuse ou termes de Brinkman, ainsi que la diffusion thermique mathématiquement analogue. On en profite pour vérifier l'implémentation de la chaleur spécifique.

Pour cela, on se place dans la situation d'écoulement isotherme diphasique 1-D horizontal en régime de Stokes. Dans ce cas, l'équation de conservation de la QDM de la phase solide (3.9) et les équations de conservation de l'énergie (3.11) ne sont pas résolues. Les équations de conservation de la QDM des fluides (3.10) prennent la forme suivante : ( $f = l, g$ )

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v}_f \rangle^f}{\partial t} = -\frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_f} + \nu_{fE} \nabla^2 (\varepsilon_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) - \nu_{fE} \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \nabla \varepsilon_f + \nu_{fE} \sum_{j=l,g,s} A_{fj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (3.21)$$

Sous certaines conditions, ces équations peuvent décrire des écoulements de Couette ou de Poiseuille, une fois l'état stationnaire atteint. On se propose de simuler ces cas. On traitera ensuite par analogie les équations de conservation de l'énergie dont on pourra vérifier l'implémentation des termes de diffusion et de production de chaleur volumique.

Pour vérifier l'implémentation du terme  $\nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \nabla \varepsilon_f$ , on doit simuler des cas où le gradient du taux d'occupation volumique est non nul ( $\nabla \varepsilon_f \neq 0$ ). Les distributions affines sont les distributions les plus simples vérifiant cette contrainte. On choisit donc de simuler des écoulements diphasiques admettant une distribution affine dans les tests suivants. Préalablement, on simule toutefois un cas avec une distribution uniforme du taux d'occupation volumique pour vérifier l'implémentation du terme en  $\nabla^2 (\varepsilon_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f)$  seul.

### 3.2.2.1. Écoulement de Couette plan pour une distribution de phase uniforme

Premièrement, on considère un domaine 1-D maillé dans la hauteur sans gradient de pression extérieur et rempli uniformément par les fluides ( $l$ ) et ( $g$ ). Aux deux extrémités séparées d'une hauteur  $H$  fixée, on place une paroi adhérente aux fluides. La paroi inférieure est immobile tandis que la paroi supérieure à une hauteur  $H$  fixée bouge horizontalement à la vitesse constante  $\mathbf{U}$ . Pour être en mesure de calculer une solution analytique, on choisit dans un premier temps des coefficients d'interaction dynamiques nuls ( $\hat{A}_{kj} = 0$ ). On résume cette configuration dans le schéma Fig. 3.6. Ce cas peut être décrit comme un écoulement de Couette plan diphasique à distribution des phases uniforme.

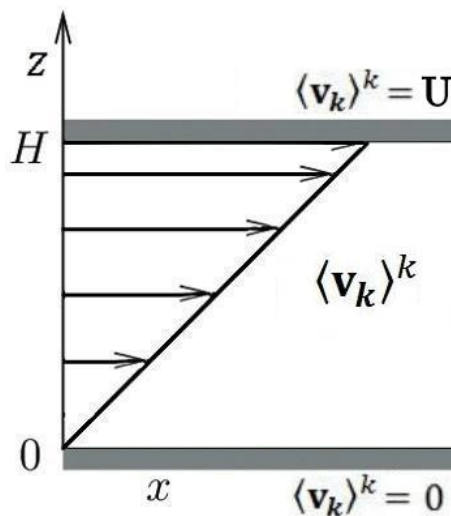


Figure 3.6 – Schéma et profil de vitesse d'un écoulement de Couette plan établi.

Dans ces conditions, les équations de conservation de la QDM (3.21), s'écrivent sous la forme (3.22). On les résout analytiquement sans difficulté afin de prédire un profil de vitesse à l'état stationnaire proportionnel à la hauteur (3.23) pour les deux fluides. ( $f = l, g$ )

$$\nu_f E_{ff} \nabla^2 (\varepsilon_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) = 0 \quad (3.22)$$

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f = \mathbf{U}z \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse de la plaque supérieure et  $z$  la distance verticale à la plaque inférieure.

Ce profil est identique à celui obtenu pour un écoulement de Couette plan monophasique pour chaque fluide. C'est bien le profil de vitesse obtenu en simulation. Le code est donc toujours fonctionnel dans ces conditions d'écoulement simples.

### 3.2.2.2. Écoulement de Couette pour une distribution de phase affine

Comme expliqué en début de section, il est nécessaire de considérer des distributions spatiales du taux d'occupation volumique des fluides non uniforme si l'on souhaite confirmer que l'implémentation des termes de Brinkman est correcte. On reprend alors la simulation précédente d'un écoulement de Couette plan diphasique, mais en fixant une distribution affine dans la hauteur du taux d'occupation volumique (3.24), toutes les propriétés des fluides étant égales par ailleurs. Il n'y a aucun mécanisme physique qui pourrait altérer ces distributions initiales et elles sont conservées au cours du temps.

$$\varepsilon_g = c + \frac{1 - 2c}{H}z \quad (3.24a)$$

$$\varepsilon_l = 1 - \varepsilon_g \quad (3.24b)$$

où  $c$  est le taux d'occupation volumique minimale.

On rappelle que pour être en mesure de calculer une solution analytique, on choisit dans un premier temps des coefficients d'interaction nuls ( $\hat{A}_{kj} = 0$ ). Dans ces conditions, à l'état stationnaire, le système d'équations devient le suivant : ( $f = l, g$ )

$$\varepsilon_f \nabla^2 \langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f + \nabla \varepsilon_f \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f = 0 \quad (3.25a)$$

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f (z = 0) = 0 \quad (3.25b)$$

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f (z = H) = \mathbf{U} \quad (3.25c)$$

On résout ce système et on obtient les profils analytiques de vitesse dans la hauteur de chaque fluide pour un écoulement de Couette plan diphasique à distribution du taux de présence volumique affine suivant :

$$\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^l = \frac{\ln \left( \frac{1}{1 - \delta_l z} \right)}{\ln \left( \frac{1}{1 - \delta_l H} \right)} \mathbf{U} \quad \text{où } \delta_l = \frac{1 - 2c}{H(1 - c)} \quad (3.26a)$$

$$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g = \frac{\ln \left( \frac{1}{1 + \delta_g z} \right)}{\ln \left( \frac{1}{1 + \delta_g H} \right)} \mathbf{U} \quad \text{où } \delta_g = \frac{1 - 2c}{Hc} \quad (3.26b)$$

où  $c \neq \frac{1}{2}$ ,  $c \neq 0$ ,  $H \neq 0$ ,  $(Hc - 2c + 1) \neq 0$ ,  $(H(1 - c) - 1 + 2c) \neq 0$  et  $H(1 - c) \neq 0$

Ayant le profil analytique, on simule maintenant cet écoulement avec le code. La Fig. 3.7 rend compte des résultats de la simulation pour le jeu de paramètres de la Table 3.4. On obtient une très bonne correspondance entre les courbes analytiques et les courbes simulées, avec des erreurs relatives de l'ordre de 0.2 % en moyenne (récapitulées dans la Table 3.5). On peut dès lors affirmer que les termes de Brinkman sont bien implémentés et résolus dans le code.

Paramètres	$\ \mathbf{U}\ $	$H$	$c$
Valeurs [S.I.]	1	1	0.2

Table 3.4 – Valeurs des paramètres pour les simulations d'écoulements de Couette plan diphasique à distribution affine du taux d'occupation volumique.

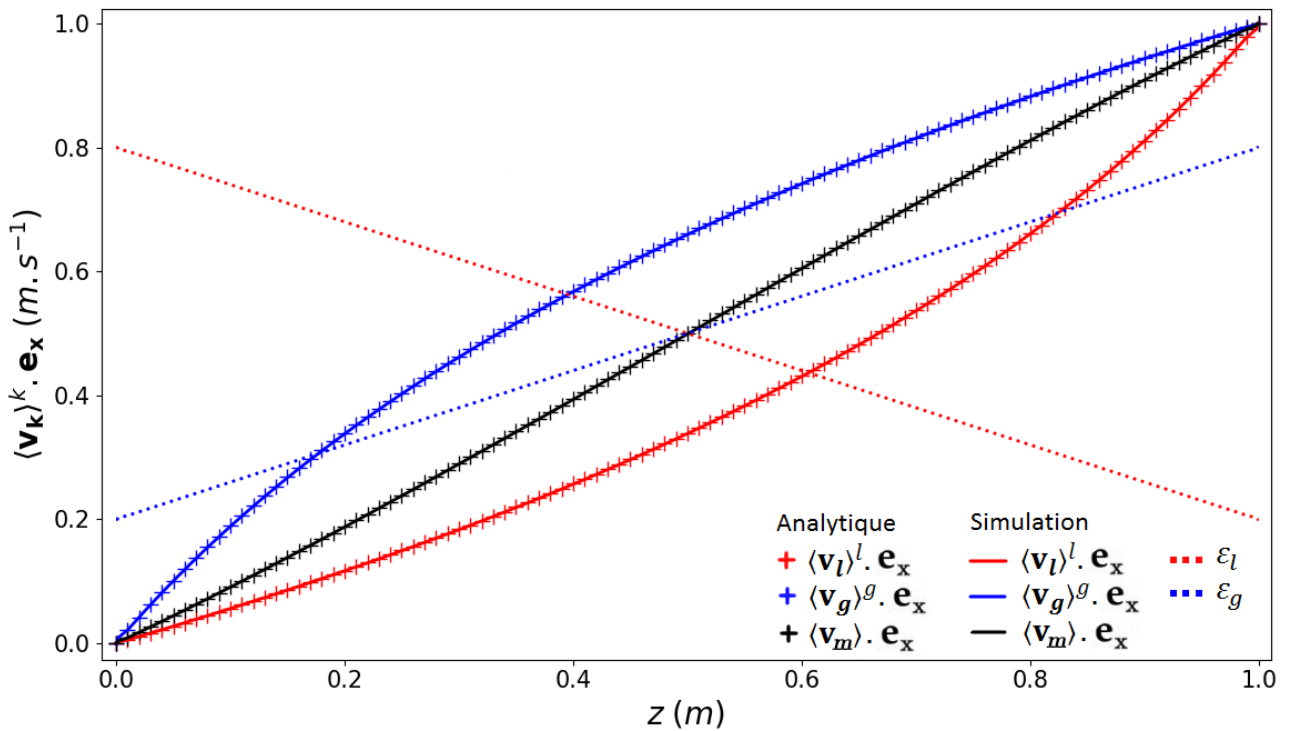


Figure 3.7 – Comparaison entre l'écoulement de Couette diphasique théorique et simulé pour une distribution affine des fluides.

Courbes considérées	$\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\langle \mathbf{v}_m \rangle_\infty \cdot \mathbf{e}_x$
Erreur relative maximale	0.36%	0.35%	0.34%
Erreur relative moyenne	0.21%	0.21%	0.20%
Ecart-type associé à la moyenne	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$

Table 3.5 – Comparaison entre la courbe analytique et la courbe simulée pour l'écoulement de Couette plan diphasique à distribution affine du taux d'occupation volumique.

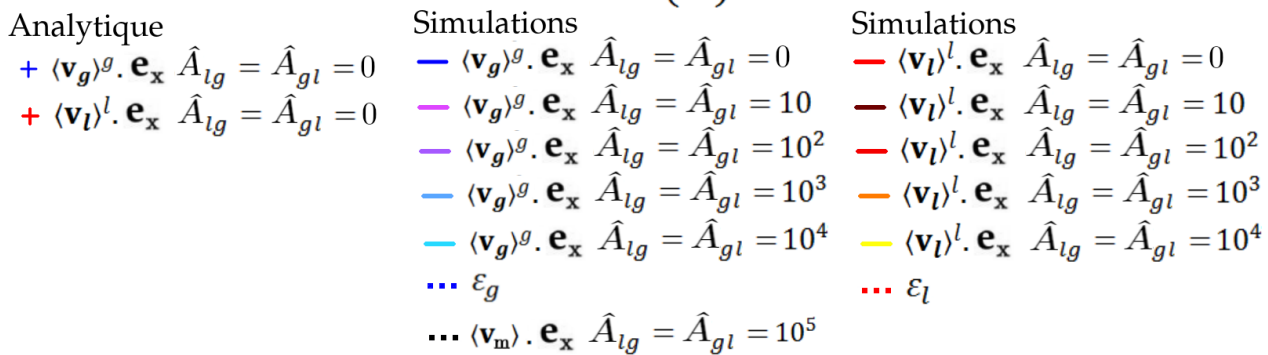
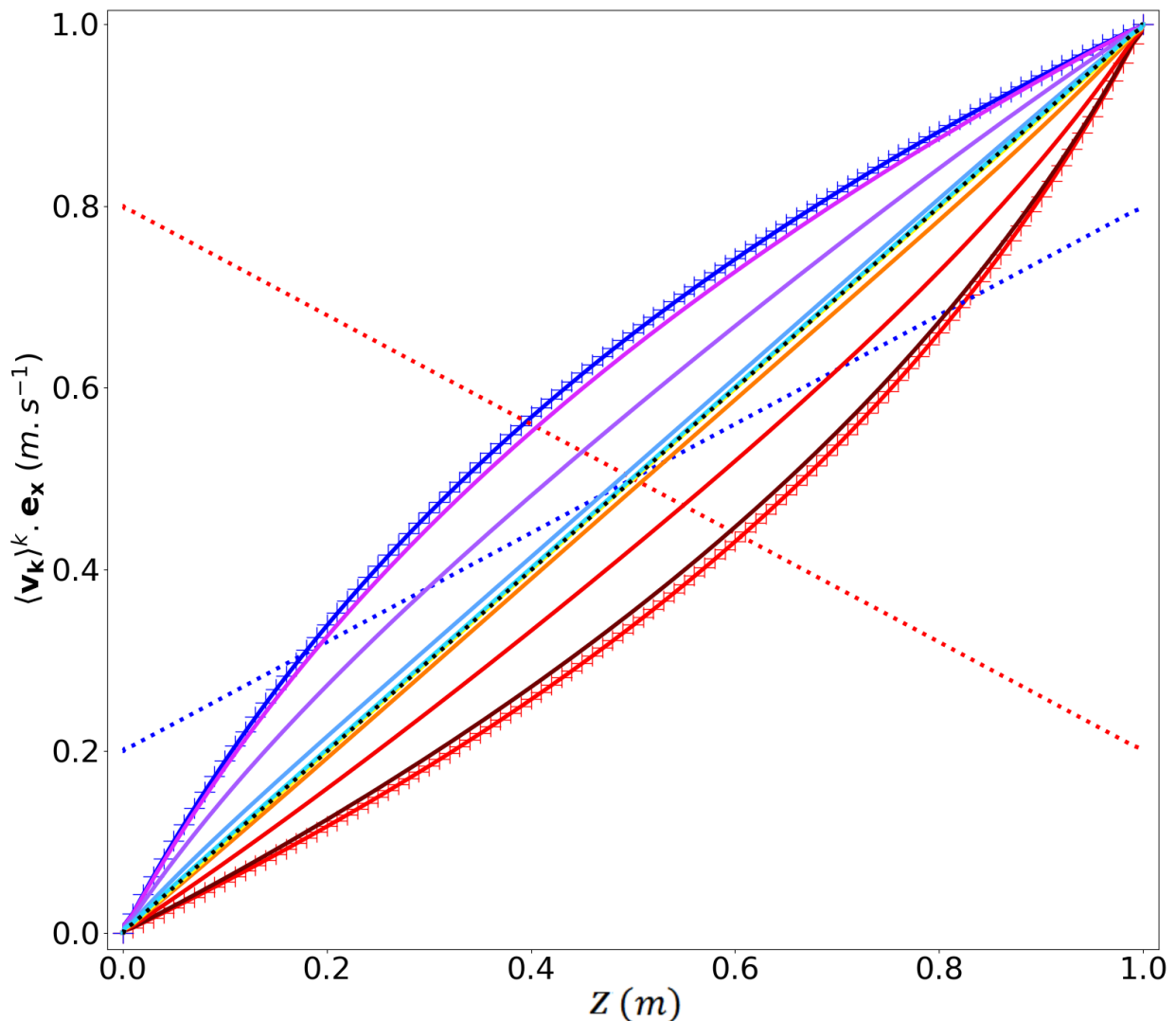


Figure 3.8 – Comparaison entre l'écoulement de Couette plan diphasique théorique et simulé pour une distribution affine des taux d'occupation volumiques selon les coefficients d'interaction  $\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl}$ .

On considère dans un second temps que les fluides interagissent et que les coefficients d'interaction  $\hat{A}_{ff'}$  puissent être non nuls. Il ne semble plus possible de calculer une solution analytique du profil de vitesse lorsque les coefficients d'interaction entre fluides sont non nuls. En revanche, avec les fermetures choisies pour ces vérifications ((3.6) et (3.12)), le terme d'interaction agissant comme un terme de frottement, il doit réduire la différence entre les vitesses des phases à mesure que le coefficient d'interaction croît. Ainsi, si l'on fait tendre  $\hat{A}_{ff'}$  vers l'infini, l'équation (3.21) tend, à l'état stationnaire, vers l'égalité des vitesses des phases (3.27) alors que les termes visqueux deviennent négligeables. Les deux fluides ayant les mêmes propriétés et tendant à avoir la même vitesse, l'écoulement devient asymptotiquement équivalent à un écoulement de Couette plan monophasique. On s'attend alors à ce que les profils de vitesse tendent vers ce profil linéaire (3.23) à mesure que  $\hat{A}_{ff'}$  tendent vers l'infini.

$$\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^l = \langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g \quad (3.27)$$

C'est exactement ce que l'on observe sur la Fig. 3.8 qui récapitule les profils de vitesse pour des valeurs de  $\hat{A}_{ff'}$  de plus en plus grande, toujours avec les paramètres de la Table 3.4.

### 3.2.2.3. Écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution affine

On ajoute un gradient de pression extérieur à la situation précédente pour des plaques immobiles. On décrit alors un écoulement de Poiseuille plan diphasique. On le décrit sur le schéma Fig. 3.9. On rappelle que c'est une modélisation 1-D diphasique horizontale dans les conditions de Stokes où l'on cherche les profils de vitesse des fluides dans la hauteur  $H$  entre les deux plaques immobiles avec adhérence aux parois. Les fluides ont initialement une vitesse nulle et sont soumis à un gradient de pression extérieur donné. Toujours afin d'être en mesure d'obtenir une solution analytique, on choisit les coefficients d'interaction dynamiques nuls ( $\hat{A}_{kj} = 0$ ). La distribution des fluides dans le mélange diphasique entre les plaques est elle aussi connue. On conserve la distribution affine précédente (3.24). Le problème à résoudre devient alors (3.28) :

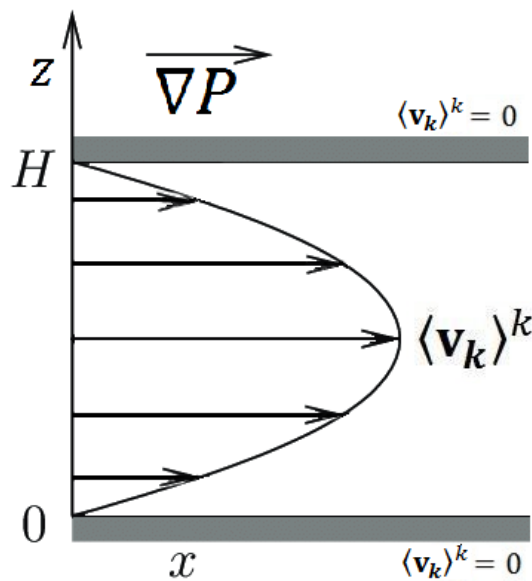


Figure 3.9 – Schéma d'un écoulement de Poiseuille plan établi.

( $f = l, g$ )

$$\varepsilon_f \nabla^2 \langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f + \nabla \varepsilon_f \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f = \varepsilon_f \frac{\nabla \langle P \rangle}{\eta_f} \quad (3.28a)$$

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f (z = 0) = 0 \quad (3.28b)$$

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle_\infty^f (z = H) = 0 \quad (3.28c)$$

On résout ce problème et l'on trouve les profils de vitesse analytiques suivants :

$$\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^l = \frac{1}{4(1-2c)} \frac{\nabla \langle P \rangle}{\eta_l} \left( H^2 \frac{\ln(1-\delta_l z)}{\ln\left(\frac{c}{1-c}\right)} - H(1-c)(2-\delta_l z)z \right) \quad \text{où } \delta_l = \frac{1-2c}{H(1-c)} \quad (3.29a)$$

$$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g = \frac{1}{4(1-2c)} \frac{\nabla \langle P \rangle}{\eta_g} \left( H^2 \frac{\ln(1+\delta_g z)}{\ln\left(\frac{c}{1-c}\right)} + Hc(2+\delta_g z)z \right) \quad \text{où } \delta_g = \frac{1-2c}{Hc} \quad (3.29b)$$

On peut donc comparer les profils de vitesse analytiques aux profils de vitesses simulés. On distingue deux simulations résumées dans la Table 3.6. La première avec des fluides ayant les mêmes propriétés physiques et la seconde où les deux fluides n'ont pas la même viscosité dynamique pour vérifier la dépendance relevée par les solutions analytiques (3.29). On observe alors dans les deux cas une correspondance parfaite entre les résultats analytiques et les profils simulés, représentés respectivement sur la Fig. 3.10 et la Fig. 3.11, admettant une erreur relative moyenne de l'ordre de  $4 \cdot 10^{-3}\%$  (voir Table 3.7).

Paramètres	$\eta_l$	$\eta_g$	$\ \nabla \langle P \rangle\ $	$H$	$c$
Cas 1 [S.I.]	1	1	1	1	0.2
Cas 2 [S.I.]	1.5	1	1	1	0.2

Table 3.6 – Paramètres des simulations d'écoulement de Poiseuille plan diphasique.

	Courbes considérées	$\langle \mathbf{v}_l \rangle_\infty^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g \cdot \mathbf{e}_x$
Cas 1.	Erreur relative maximale	$9.2 \cdot 10^{-5}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$
	Erreur relative moyenne	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
	Ecart-type associé à la moyenne	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$
Cas 2.	Erreur relative maximale	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$
	Erreur relative moyenne	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
	Ecart-type associé à la moyenne	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$

Table 3.7 – Comparaison entre la courbe analytique et la courbe simulée pour l'écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution affine du taux d'occupation volumique.

Ensuite, on peut considérer de nouveau l'interaction entre phases avec des coefficients d'interaction dynamiques non nuls comme cela a été fait pour l'écoulement de Couette précédent. Pareillement, on n'est alors plus en mesure de calculer une solution analytique. On sait cependant que si l'on



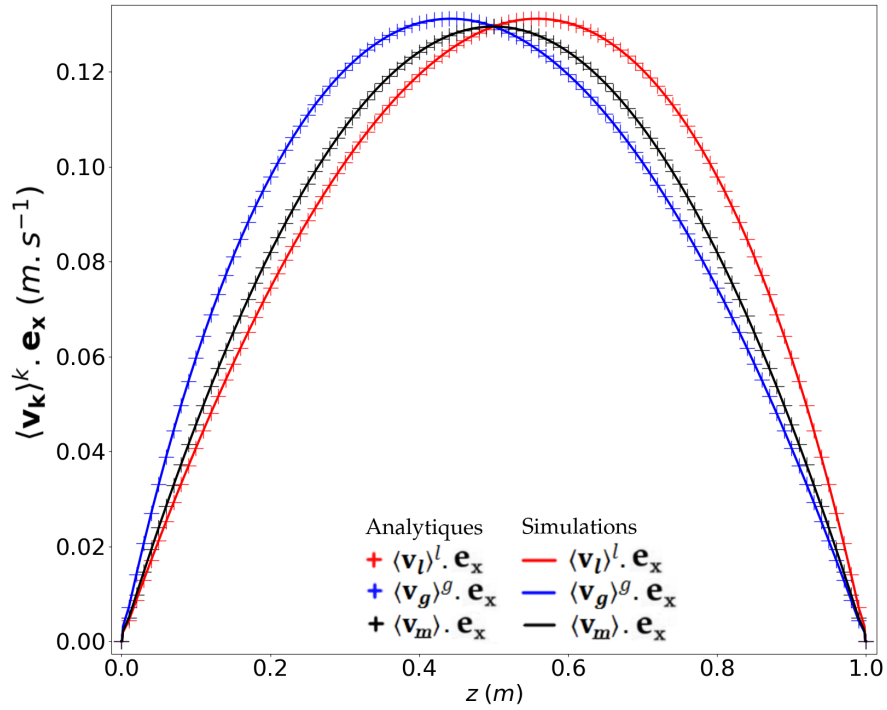


Figure 3.10 – Cas 1 : Profils de vitesse théoriques et simulés pour un écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution du taux d'occupation volumique affine avec des fluides de même viscosité.

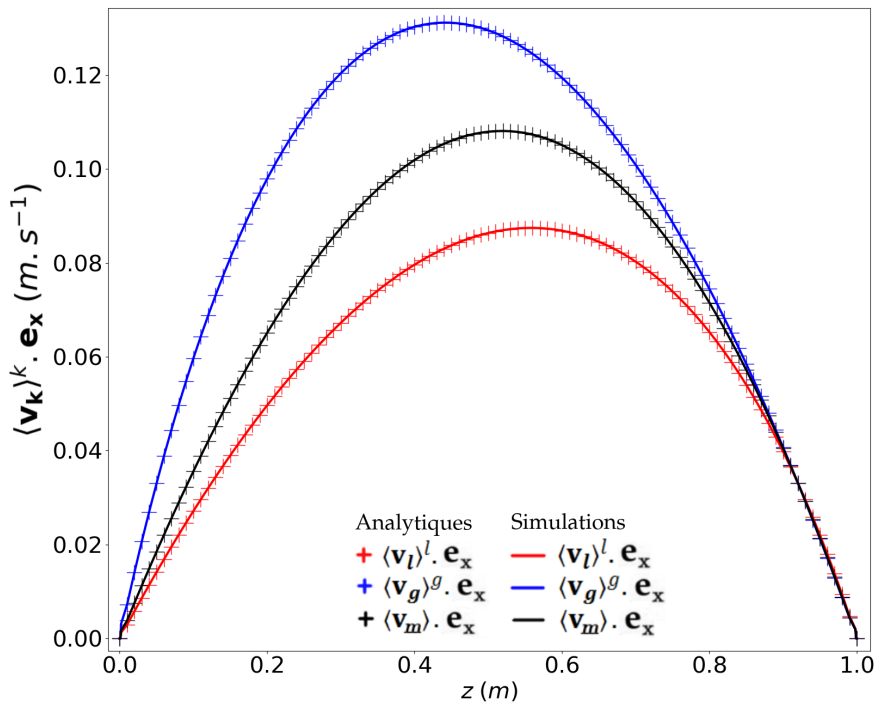
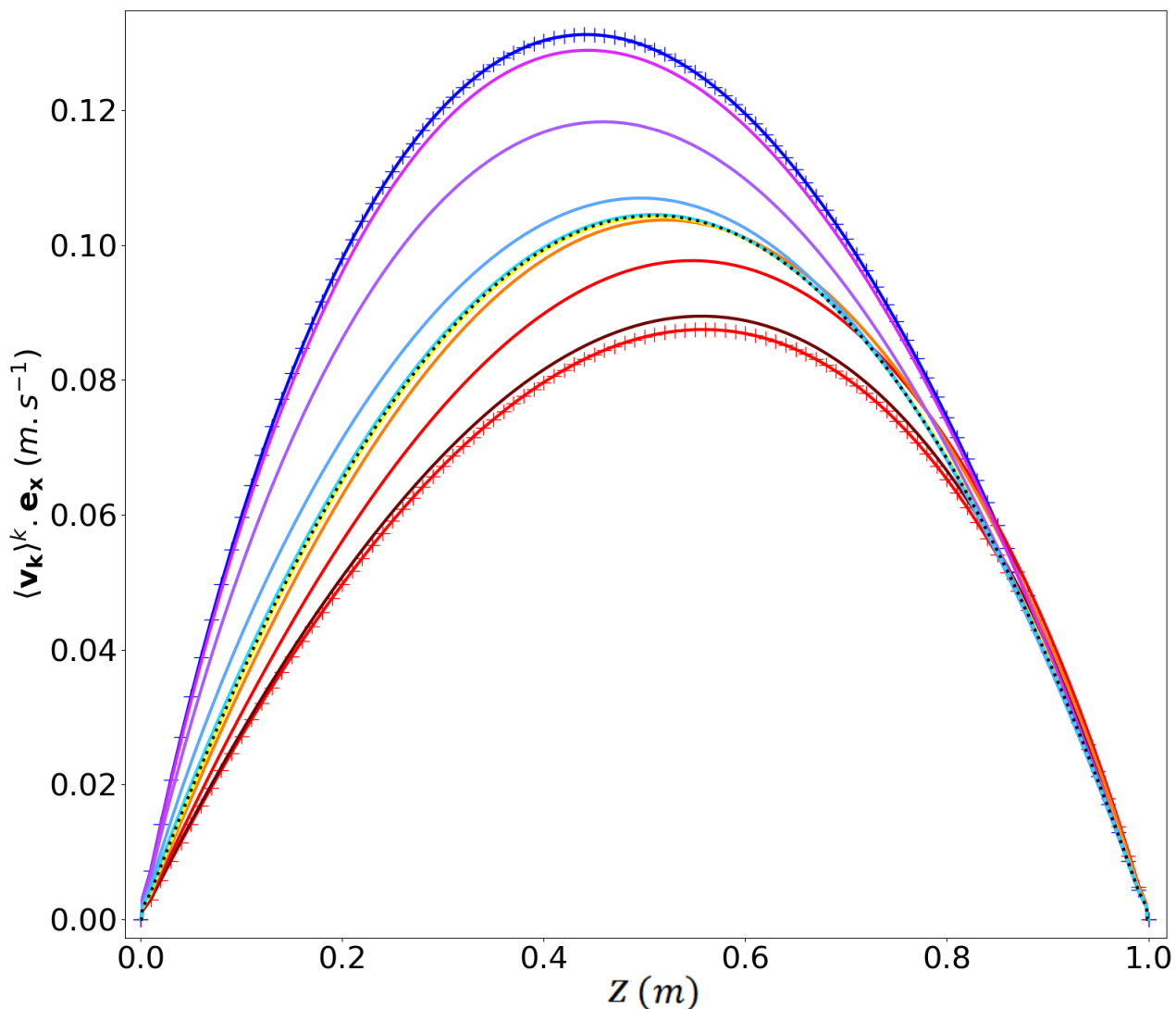


Figure 3.11 – Cas 2 : Profils de vitesse théoriques et simulés pour un écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution du taux d'occupation volumique affine avec des fluides de viscosité différente.



Analytiques		Simulations	
+ $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 0$	— $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 0$
+ $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 0$	— $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 1$
		— $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10$
		— $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10^2$
		— $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10^3$
		— $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10^4$
		— $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 0$
		— $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 1$
		— $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10$
		— $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10^2$
		— $\langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10^3$
		— $\langle \mathbf{v}_m \rangle^m \cdot \mathbf{e}_x$	$\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl} = 10^4$

Figure 3.12 – Profils de vitesse à l'état stationnaire théoriques et simulés pour un écoulement de Poiseuille plan diphasique à distribution du taux d'occupation volumique affine avec des fluides de viscosité différente selon le coefficient d'interaction  $\hat{A}_{lg} = \hat{A}_{gl}$ .

fait tendre les coefficients  $\widehat{A}_{ff'}$  vers l'infini, alors les profils de vitesse des deux fluides tendent à être identiques (3.27). C'est ce que l'on observe sur la Fig. 3.12 récapitulant les résultats de simulation pour des coefficients d'interaction de plus en plus grands à partir des mêmes conditions que le Cas 2 de la Table 3.6.

On vient donc de vérifier l'implémentation du modèle et sa résolution pour des écoulements diphasiques soumis aux seuls effets visqueux, et aussi aux effets visqueux en interaction avec les termes de gradient de pression ou d'interaction entre fluide.

#### 3.2.2.4. Équivalence sur la température

On s'intéresse dans cette sous-section à la vérification de l'implémentation des termes de conduction, de puissance volumique et d'échange de chaleur entre phases dans les équations de conservation de l'énergie et de la bonne résolution de ces équations. Les questionnements et les vérifications réalisées sont mathématiquement analogues aux vérifications de la section précédente. Il s'agit là aussi de s'assurer que les Laplaciens et les termes en gradient de taux d'occupation volumique des équations de conservation de l'enthalpie sont bien implémentés. Cette vérification, pour les termes en  $\nabla\langle\Theta_k\rangle^k \cdot \nabla\varepsilon_k$ , nécessite des distributions du taux d'occupation volumique admettant un gradient non nul.

Pour cela, on va effectuer plusieurs calculs de transfert thermique à travers un domaine diphasique. On considère les fluides immobiles (sans gradient de pression imposé, sans dilatation thermique et sans gravité). Comme précédemment, on choisit une distribution affine du taux d'occupation volumique de chaque fluide selon la hauteur (3.24). On distingue alors le cas de la conduction de la chaleur à travers les fluides immobiles entre deux parois thermostatées puis le cas où ces fluides sont également chauffés en volume.

#### Conduction thermique - Analogue à Couette

On s'intéresse d'abord au problème de conduction de la chaleur pure à travers un mélange diphasique de fluide immobile (sans gradient de pression et sans dilatation thermique et sans différence de densité). On considère un domaine 1-D horizontal maillé dans la hauteur entre deux plaques thermostatées séparées d'une hauteur  $H$ . On fixe la température des fluides aux parois, choisissant la température froide en bas et la température chaude en haut. On fixe initialement une température uniforme et identique pour les deux fluides à la température médiane. Leur distribution affine respective dans la hauteur est donnée par l'expression (3.24). Dans un premier temps, pour être en mesure de calculer une solution analytique, on ne considère pas les échanges de chaleur entre les phases. Les coefficients d'interaction thermique  $\widehat{C}_{ff'}$  sont nuls. Les équations de conservation de l'énergie (3.11) à l'état stationnaire s'écrivent alors comme suit avec les conditions aux limites associées : ( $f = l, g$ )

$$\varepsilon_f \nabla^2 \langle \Theta_f \rangle_\infty^f + \nabla \varepsilon_f \cdot \nabla \langle \Theta_f \rangle_\infty^f = 0 \quad (3.30a)$$

$$\langle \Theta_f \rangle_\infty^f (z = 0) = 0 \quad (3.30b)$$

$$\langle \Theta_f \rangle_\infty^f (z = H) = T \quad (3.30c)$$

On remarque alors que ce problème (3.30) est mathématiquement analogue au problème modélisant l'écoulement de Couette plan diphasique précédent (3.25) où la température à l'état stationnaire  $\langle \Theta_f \rangle_\infty^f$  se substitue à la vitesse du fluide. Les profils de température analytiques des deux fluides

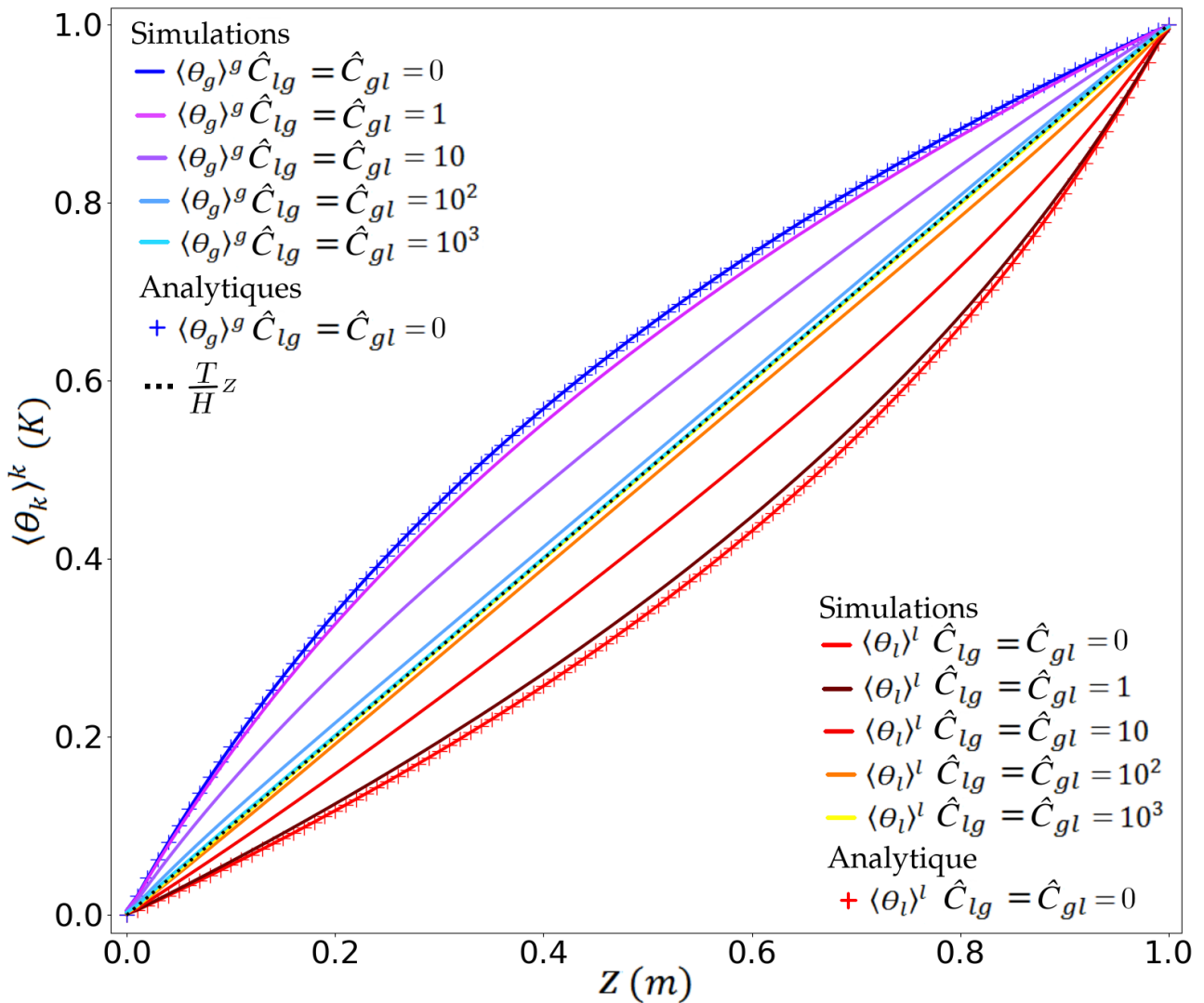


Figure 3.13 – Profils de température à l'état stationnaire théoriques et simulés selon le coefficient d'échange thermique entre phases  $\hat{C}_{lg} = \hat{C}_{gl}$  pour de la conduction thermique diphasique à travers une distribution affine de fluides immobiles.

obéissent alors à l'expression analogue (3.26) où l'on substitue  $T$  à  $\mathbf{U}$ . Tout en suivant l'analogie, on choisit une température relative nulle comme température froide et une température chaude à  $1\text{ K}$ , conformément à la Table 3.4.

Comme pour l'écoulement de Couette plan diphasique précédent § 3.2.2.2, on peut alors ajouter le terme d'interaction entre phases en considérant les coefficients d'interaction thermiques  $\hat{C}_{kk'}$  non nuls. Alors pareillement, plus ces coefficients sont grands, plus la température de chaque phase tend à être proche, pour tendre vers un unique profil de température quand ils tendent vers l'infini. C'est ce que l'on observe sur le graphique représentant les différentes simulations selon les coefficients

d'interaction entre phases Fig. 3.13. On constate une parfaite correspondance avec la solution analytique dans le cas où les deux phases n'interagissent pas ( $\widehat{C}_{ff'} = 0$ ), avec une erreur relative moyenne de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-3}\%$ , (voir Table 3.8).

Courbes considérées	$\langle \Theta_l \rangle_\infty^l$	$\langle \Theta_g \rangle_\infty^g$
Erreur relative maximale	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$
Erreur relative moyenne	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$
Ecart-type associé à la moyenne	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$

Table 3.8 – Comparaison entre le profil de température dans la hauteur théoriques et simulés pour des coefficients d'interaction thermiques nuls ( $\widehat{C}_{ff'} = 0$ ) pour de la conduction thermique diphasique à travers un mélange diphasique suivant une distribution volumique affine de fluide immobile.

On a ainsi pu vérifier que les termes de dérivation temporelle et les termes de conduction des équations de conservation de l'énergie (3.11) sont correctement implémentés et résolus, avec ou sans couplage. La méthode de résolution est donc fonctionnelle pour ces équations également. On vérifie maintenant les termes de puissance volumique.

#### Source de chaleur volumique - Analogue à Poiseuille

On reprend le test précédent, en considérant également les termes de puissance volumique. On considère donc un domaine 1-D horizontal maillé dans la hauteur entre deux plaques thermostatées à la même température, séparées d'une hauteur  $H$ . Le domaine est rempli par deux fluides immobiles ayant les mêmes propriétés physiques ( $\alpha_f$  et  $C_{pf}$ ) qui produisent de la puissance volumique. Leur distribution affine selon la hauteur est donnée par l'expression (3.24). On fixe initialement une température uniforme et identique aux deux fluides, à la même température que les parois. Dans un premier temps, pour être en mesure de calculer une solution analytique, on ne considère pas les échanges de chaleur entre les phases. Les coefficients d'interaction thermique  $\widehat{C}_{ff'}$  sont nuls. Les équations de conservation de l'énergie (3.11) à l'état stationnaire avec les conditions aux limites associées s'écrivent alors comme suit : ( $f = l, g$ )

$$\varepsilon_f \nabla^2 \langle \Theta_f \rangle_\infty^f + \nabla \varepsilon_f \cdot \nabla \langle \Theta_f \rangle_\infty^f = \varepsilon_f \frac{\dot{q}_f}{\alpha_f C_{pf}} \quad (3.31a)$$

$$\langle \Theta_f \rangle_\infty^f (z = 0) = 0 \quad (3.31b)$$

$$\langle \Theta_f \rangle_\infty^f (z = H) = 0 \quad (3.31c)$$

On remarque alors qu'il est bien mathématiquement équivalent à un problème de Poiseuille plan diphasique à distribution affine précédent (3.28), où le terme de puissance volumique  $\frac{\dot{q}_f}{\alpha_f C_{pf}}$  se substitue au gradient de pression  $\frac{\nabla \langle P \rangle}{\eta_f}$ , et la température relative moyenne à la vitesse moyenne. Les profils de température des fluides selon la hauteur suivent alors les mêmes courbes analytiques (3.29) à ces substitutions près.

On considère dans un second temps que les fluides peuvent s'échanger de la chaleur avec des coefficients d'interaction thermiques non nuls. On ne peut plus calculer de solution analytique. Mais

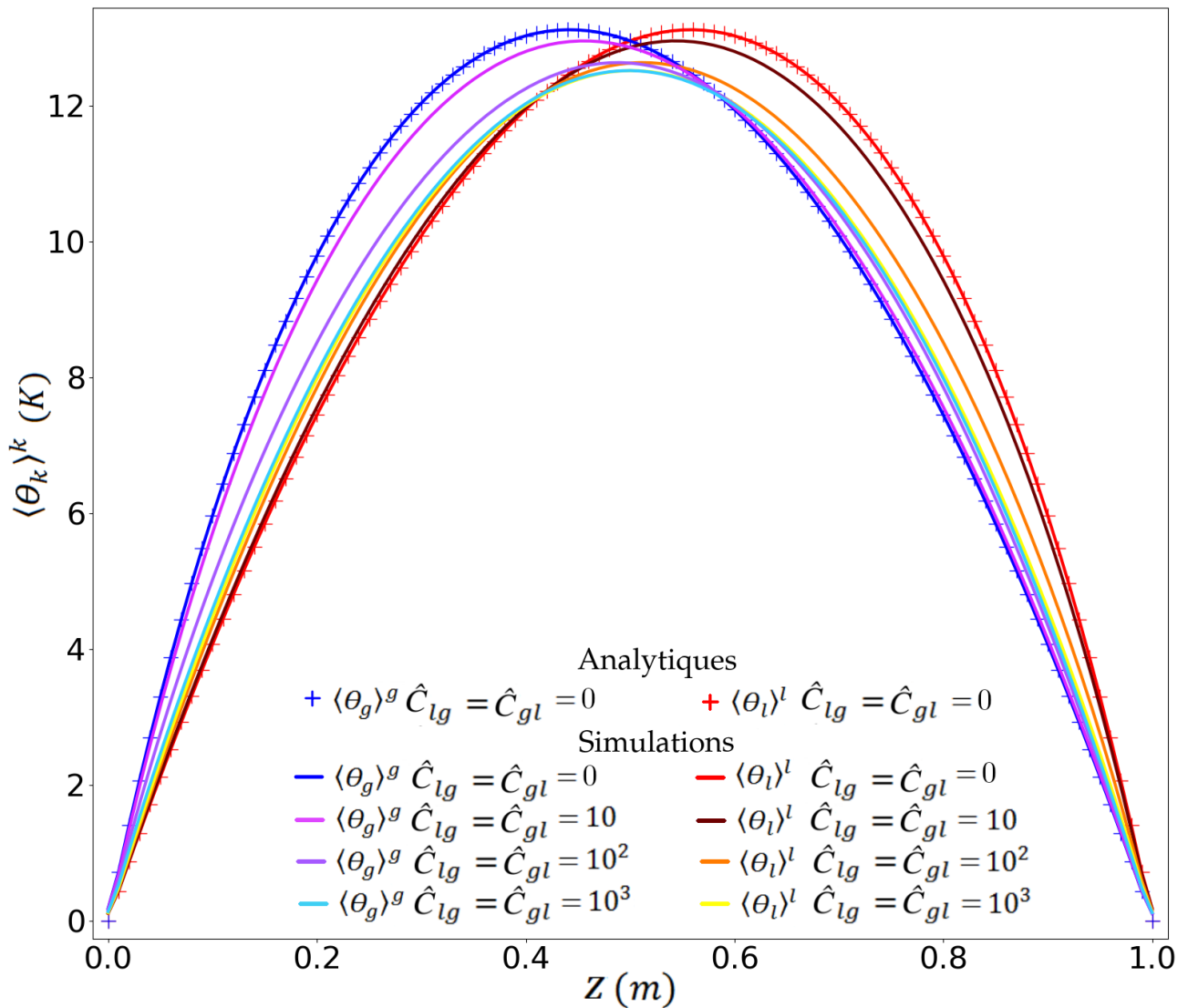


Figure 3.14 – Profils de température à l'état stationnaire théoriques et simulés selon le coefficient d'échange thermique entre phases  $\hat{C}_{lg} = \hat{C}_{gl}$  pour de la conduction thermique diphasique avec production de chaleur volumique à travers une distribution affine de fluides immobiles.

comme précédemment, plus ce coefficient est grand, plus les températures des fluides sont proches, et le profil de température tend vers le profil de température monophasique à mesure que les coefficients d'interaction thermiques  $\hat{C}_{ff'}$  tendent vers l'infini.

On peut observer cela sur la Fig. 3.14 où les profils de température pour chaque phase selon la valeur des coefficients d'interaction thermiques sont présentés. Ils sont obtenus pour les paramètres résumés dans la Table 3.9. La correspondance avec le profil analytique sans transfert de chaleur entre les fluides est parfaite avec une erreur relative moyenne de  $4 \cdot 10^3\%$  (voir Table 3.10).

On a ainsi pu vérifier les termes de diffusion des équations de conservation de la quantité de mouvement et des équations de conservations de l'énergie.

Paramètres	$\alpha_f$	$C_{pf}$	$\dot{q}_f$	$H$	$c$
Valeur [S.I.]	0.01	1	10	1	0.2

Table 3.9 – Paramètres des simulations de conduction avec source de chaleur volumique à travers un mélange diphasique de fluide.

Courbes considérées	$\langle \Theta_l \rangle_\infty^l$	$\langle \Theta_g \rangle_\infty^g$
Erreur relative maximale	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Erreur relative moyenne	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$
Ecart-type associé à la moyenne	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$

Table 3.10 – Comparaison entre le profil de température dans la hauteur théoriques et simulés pour des coefficients d'interaction thermiques nuls ( $\widehat{C}_{ff'} = 0$ ) pour de la conduction thermique diphasique avec production de chaleur volumique à travers un mélange diphasique suivant une distribution volumique affine de fluide immobile.

### 3.2.3. Cavité entraînée

Maintenant que les termes de gravité sans effet de la dilatation thermique, de gradient de pression, de diffusion visqueuse et thermique, les termes d'interaction et le terme de source de chaleur volumique ont été vérifiés dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'enthalpie, on vérifie l'implémentation du terme d'advection dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (QDM) (3.10).

Pour vérifier l'implémentation du terme d'advection, il n'est plus possible de calculer une solu-

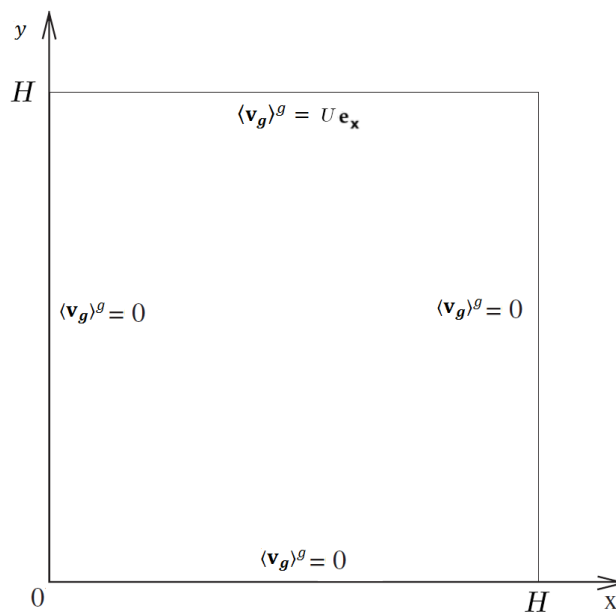


Figure 3.15 – Schéma pour la simulation d'un écoulement dans une cavité entraînée par le "haut".

tion analytique. On vérifie alors l'implémentation et la résolution du code par comparaison avec les résultats de la littérature. Pour vérifier l'advection seule, on reproduira les travaux numériques de Ghia *et al.* 1982 [76] sur la cavité entraînée par une paroi ("*lid-driven cavity*"). Il s'agit de l'écoulement monophasique d'un fluide dans une boîte 2-D horizontale (sans gravité) et sans gradient de pression extérieur imposé. Les parois de la boîte sont immobiles à l'exception d'une des parois qui a une vitesse constante. On considère l'adhérence du fluide aux parois. Le mouvement de la paroi mobile est le moteur de l'écoulement. Cette situation est résumée dans le schéma Fig. 3.15, et l'équation de conservation de la QDM (3.10) du fluide dans cette situation devient :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v}_g \rangle^g}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_g \rangle^g = - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_g} + \nu_{gEff} \nabla^2 (\varepsilon_g \langle \mathbf{v}_g \rangle^g) - \nu_{gEff} \nabla \langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \nabla \varepsilon_g \quad (3.32)$$

Cet écoulement en convection forcée à l'état stationnaire est complètement caractérisé par son nombre de Reynolds  $Re$  (3.33). Le fluide forme une cellule de convection avec de plus en plus de cellules de recirculation à mesure que le nombre de Reynolds croît, et la vitesse est maximale au niveau de la paroi motrice. Le centre de rotation de la cellule principale du fluide est au centre de la cavité pour de grands Reynolds. Pour de plus petits Reynolds, il est en revanche décalé vers la plaque mobile dans le sens de son mouvement. C'est bien ce que l'on observe qualitativement à partir des

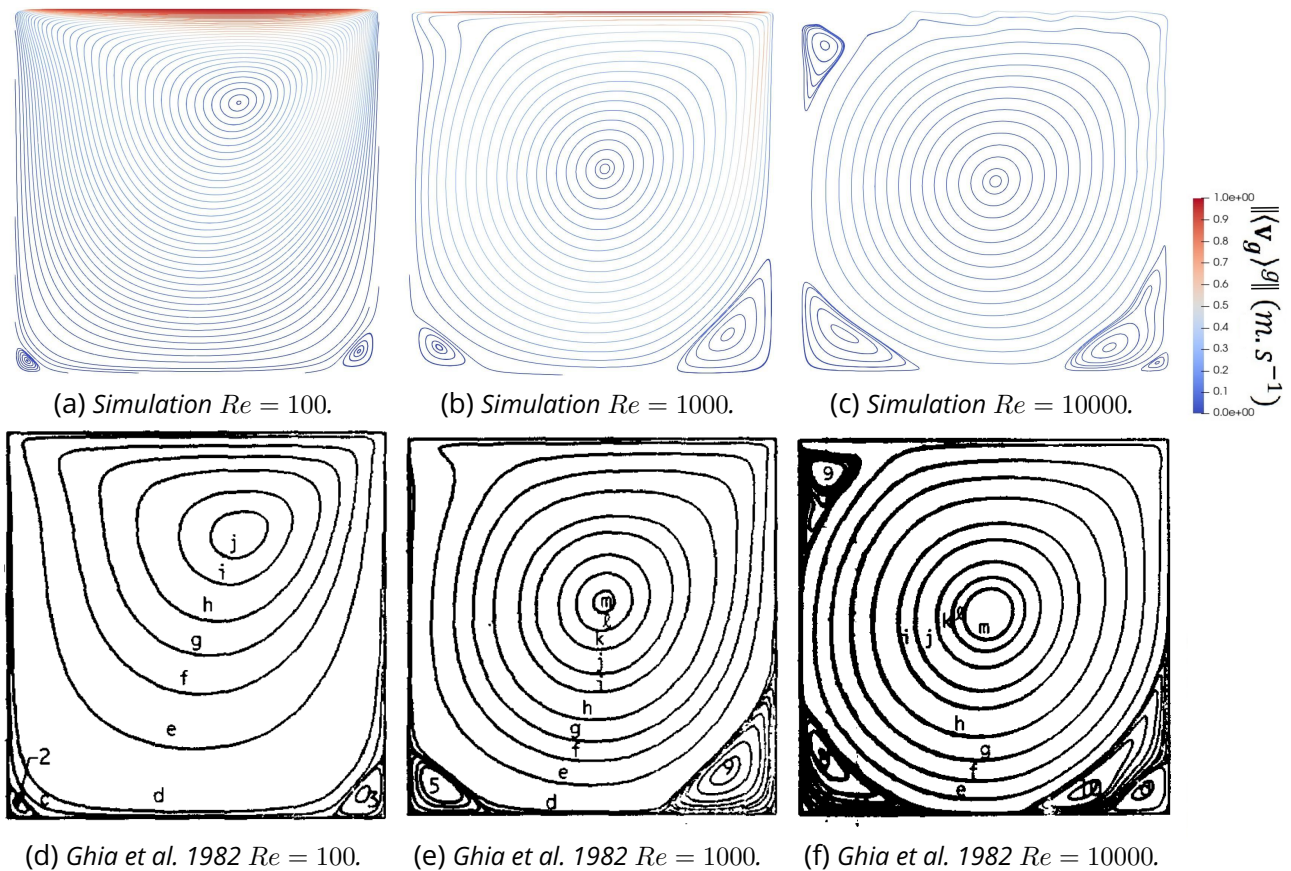


Figure 3.16 – Lignes de courant pour un écoulement en cavité entraînée par le "haut" selon le Reynolds et colorées selon la norme de  $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$  comparées à Ghia *et al.* [76].



résultats des simulations présentées sur la Fig. 3.16 et dont les lignes de courant sont comparables aux lignes de courant publiées dans les travaux de Ghia *et al.* [76].

$$Re = \frac{UH}{\nu_g} \quad (3.33)$$

Ces simulations ont été réalisées sur un maillage 2-D régulier. La Fig. 3.17 représente la convergence en maillage pour le cas  $Re = 1000$ , en comparant quantitativement le profil de vitesse dans les plans médians horizontal et "vertical" aux profils de Ghia *et al.* [76]. Les maillages étant réguliers, on note par exemple un maillage de  $150 \times 150$  mailles : M150.

Afin de vérifier quantitativement et de mesurer la bonne implémentation du terme d'advection, on compare les profils de vitesse dans les plans médians (voir Fig. 3.18). Ces profils de vitesse passant par zéro, l'erreur relative n'est plus pertinente pour évaluer l'écart aux courbes de référence, et on

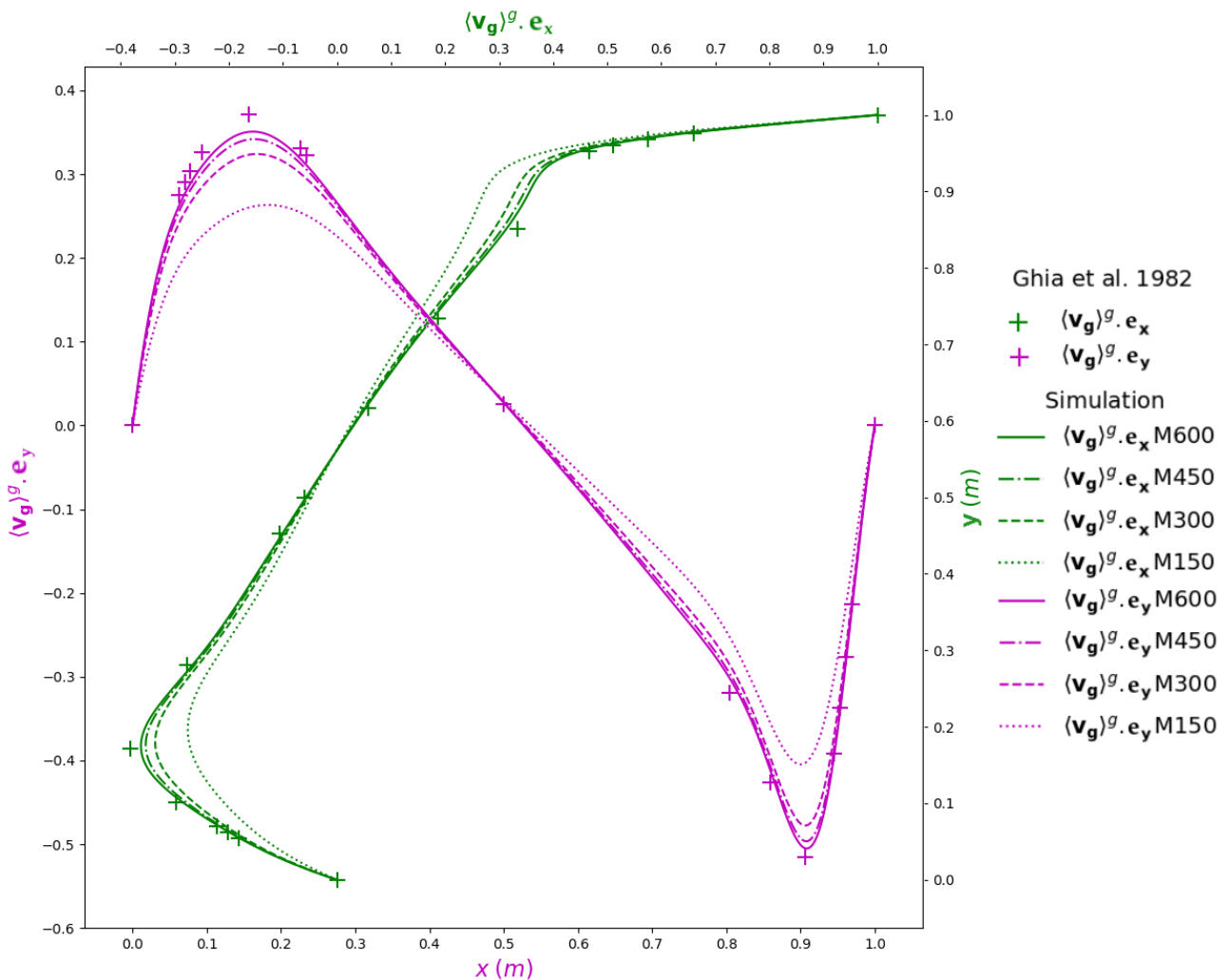
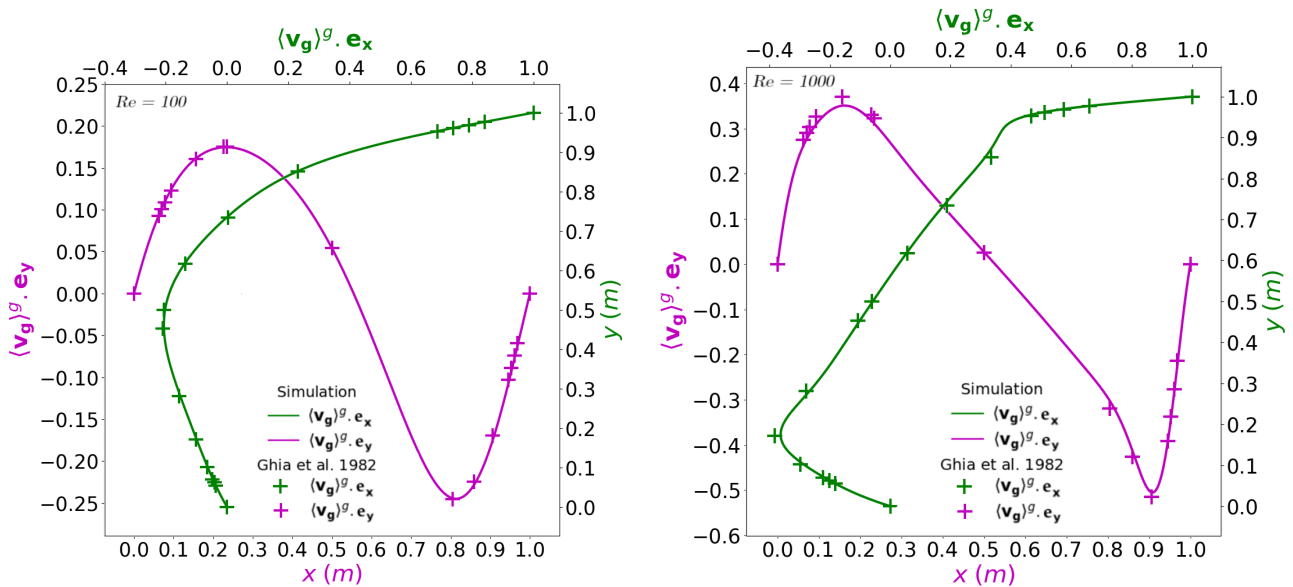


Figure 3.17 – Convergence en maillage des profils de vitesse dans le plan médian horizontal (en magenta) et "vertical" (en vert) pour un  $Re = 1000$  comparée à Ghia *et al.* 1982 [76].



(a)  $Re = 100$  avec 150 mailles.

(b)  $Re = 1000$  avec 600 mailles.

Figure 3.18 – Profils de vitesse dans le plan médian horizontal (en magenta) et "vertical" (en vert) selon le Reynolds comparés à Ghia et al. [76].

considère alors l'erreur absolue. Pour  $Re = 100$ , la correspondance est très bonne avec une erreur absolue moyenne de  $1.7 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  pour des vitesses d'écoulement de l'ordre du dixième de  $\text{m.s}^{-1}$ , avec un maillage régulier de 150 mailles seulement. En revanche, pour  $Re = 1000$ , même avec 600 mailles par côté, on a encore une erreur absolue moyenne de l'ordre de  $9.3 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  pour le plan médian horizontal. Soit une erreur relative sur les maximums locaux d'environ 10 %. Cependant, on a pu voir que plus on maille finement, plus ces erreurs diminuent (voir Fig. 3.17). On n'a pas poursuivi le processus de convergence en maillage au-delà de 600 mailles pour des raisons de temps de simulation, car les résultats présentés ici sont suffisants à la vérification de l'implémentation du terme d'advection. Les écarts aux courbes de référence sont reportés dans la Table 3.11.

	Courbes considérées	$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g \cdot \mathbf{e}_x$	$\langle \mathbf{v}_g \rangle_\infty^g \cdot \mathbf{e}_y$
$Re = 100$	Erreur absolue maximale	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$
	Erreur absolue moyenne	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
	Ecart-type associé à la moyenne	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
$Re = 1000$	Erreur absolue maximale	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
	Erreur absolue moyenne	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$9.3 \cdot 10^{-3}$
	Ecart-type associé à la moyenne	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$

Table 3.11 – Comparaison des profils de vitesse simulés dans les plans médians aux profils de référence de Ghia et al. [76] pour un écoulement de cavité entraînée.

On a ainsi pu vérifier la bonne implémentation du terme d'advection dans les équations de conservation de la quantité de mouvement.

### 3.2.4. Convection naturelle

On vérifie désormais le terme d'advection  $\langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k$  des équations de conservation de l'enthalpie (3.11) et le couplage avec les équations de conservation de la quantité de mouvement (QDM) (3.10). On vérifie notamment le terme de dilatation thermique  $-\beta_f^{sat} \langle \Theta_f \rangle^f$ . ( $k = l, g, s$ ) ( $f = l, g$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{v}_f \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle^f = & \left(1 - \beta_f^{sat} \langle \Theta_f \rangle^f\right) \mathbf{g} - \frac{\nabla \langle P \rangle}{\rho_f} + \nu_{fE_{ff}} \nabla^2 \left(\varepsilon_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f\right) - \nu_{fE_{ff}} \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \nabla \varepsilon_f \\ & + \nu_{fE_{ff}} \sum_{j=l,g,s} A_{fj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \langle \Theta_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \cdot \nabla \langle \Theta_k \rangle^k = \frac{\dot{q}_k}{C_{pk}} + \alpha_{kE_{ff}} \nabla^2 \left(\varepsilon_k \langle \Theta_k \rangle^k\right) - \alpha_{kE_{ff}} \nabla \langle \Theta_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k + \alpha_{kE_{ff}} \sum_{j=l,g,s} C_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (3.11)$$

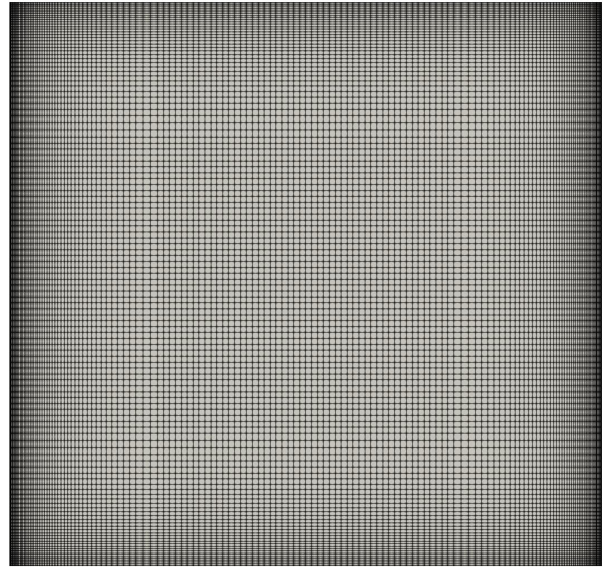
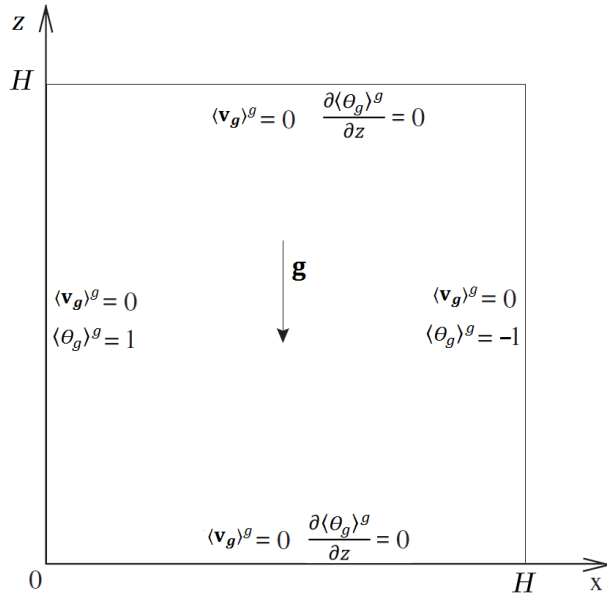
Dans un premier temps, pour vérifier ces termes, on réalise des simulations de convection naturelle monophasique. Il n'existe pas de solutions analytiques et on compare les résultats de simulation à des résultats de référence issus de la littérature. On s'appuie sur les travaux de Massarotti *et al.* [125] qui rassemble déjà plusieurs travaux sur la convection naturelle monophasique.

Dans un second temps, on réalisera des tests de convection naturelle en milieu poreux pour s'assurer que la résolution s'effectue toujours correctement en considérant deux phases et les coefficients d'interaction dynamiques  $\hat{A}_{kj}$  et thermiques  $\hat{C}_{kj}$ . On s'appuiera alors sur les travaux de Saeid & Pop 2005 [158] qui regroupent plusieurs résultats de la littérature, dont les travaux de Goyeau *et al.* 1996 [79].

#### 3.2.4.1. Convection naturelle monophasique

On commence par simuler un écoulement de convection naturelle monophasique. On considère une boîte en 2-D carrée et verticale (soumise à la gravité). Cette boîte est entièrement remplie d'un unique fluide. Toutes les parois de la boîte sont immobiles et l'on considère l'adhérence du fluide aux parois. Les parois latérales sont respectivement maintenues à une température constante chaude à gauche et froide à droite. Les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques. Ces conditions sont représentées sur le schéma *Fig. 3.19a*. Le fluide est initialement immobile et isotherme à la température médiane. Sous l'effet de la conduction thermique puis de la dilatation thermique, le fluide doit initier un mouvement de convection naturelle, montant le long de la paroi chaude et tombant le long de la paroi froide.

L'écoulement de convection naturelle monophasique est entièrement déterminé par le nombre de Grashof (3.34) défini comme le rapport de la force de flottabilité sur les forces visqueuses. On peut l'écrire comme le rapport du nombre de Rayleigh  $Ra$  (3.35) et du nombre de Prandtl  $Pr$  (3.36). Pour comparer avec les résultats de Massarotti *et al.* [125], on fera varier le nombre de Rayleigh dans les prochaines simulations, pour un nombre de Prandtl quant à lui toujours égal à 1. Le nombre de Nusselt intégral  $Nu$  (3.37) résultant de l'écoulement caractérise le transfert de chaleur au niveau de l'une des parois latérales. C'est le point de comparaison quantitatif principal avec la littérature. Pour améliorer la précision du calcul permettant d'obtenir la valeur de  $Nu$  (3.37), on utilise un maillage raffiné auprès des parois. Il comprend 150 mailles sur chaque côté, dont un tiers dans le premier et le dernier quart, et le tiers restant sur la moitié centrale. Sur les premiers et derniers quarts, il



(a) Schéma des conditions des simulations de convection naturelle.

Adapté de Massarotti et al. 2006 [125].

(b) Maillage utilisé (150x150).

Rapport 10 entre les plus petites et les plus grandes mailles.

Figure 3.19 – Résumé du cas de simulation de convection naturelle.

Il y a un rapport 10 entre la longueur de la plus fine maille (proche paroi) et celle de la plus grande du domaine. On le représente sur la Fig. 3.19b. Pour qualifier quantitativement les simulations, on pourra aussi utiliser les maximums des profils de vitesse aux mi-sections et les profils de vitesse sur la mi-section horizontale issus des travaux de Massarotti *et al.* [125].

$$Gr = \frac{\|\mathbf{g}\| \beta_g \Delta \langle \Theta_g \rangle^g H^3}{\nu_g^2} = \frac{Ra}{Pr} \quad (3.34)$$

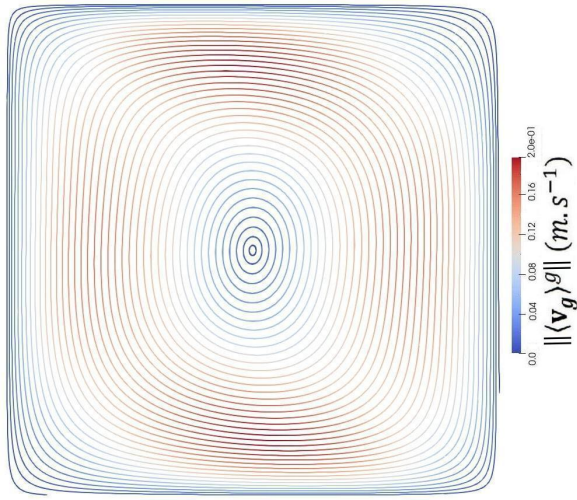
$$Ra = \frac{\|\mathbf{g}\| \beta_g \Delta \langle \Theta_g \rangle^g H^3}{\nu_g \alpha_g} \quad (3.35)$$

$$Pr = \frac{\nu_g}{\alpha_g} \quad (3.36)$$

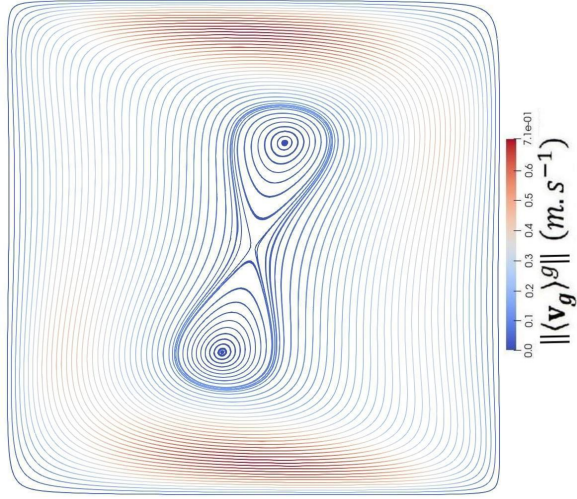
$$Nu = \frac{1}{\Delta \langle \Theta_g \rangle^g} \int_0^H \left[ \frac{\partial \langle \Theta_g \rangle^g}{\partial x} \right]_{x=0} dz \quad (3.37)$$

où  $\Delta \langle \Theta_g \rangle^g$  est l'écart de température entre la paroi froide et la paroi chaude.

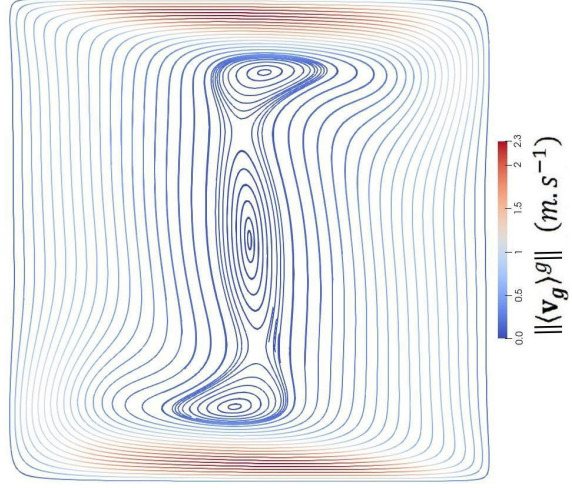
On réalise ces simulations pour trois valeurs du nombre de Rayleigh. On peut comparer qualitativement sur l'ensemble du domaine les lignes de courant selon le nombre de Rayleigh à nombre de Prandtl constant, au regard de celles présentées dans les travaux de Massarotti *et al.* [125], dans la Fig. 3.20. On fait de même pour les isothermes, représentées sur la Fig. 3.21. On observe alors qualitativement bien les écoulements de convection naturelle souhaités.



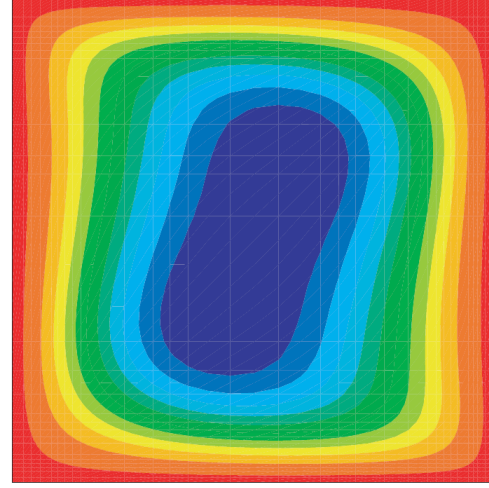
(a) Simulation  $Ra = 10^4$   $Pr = 1$ .



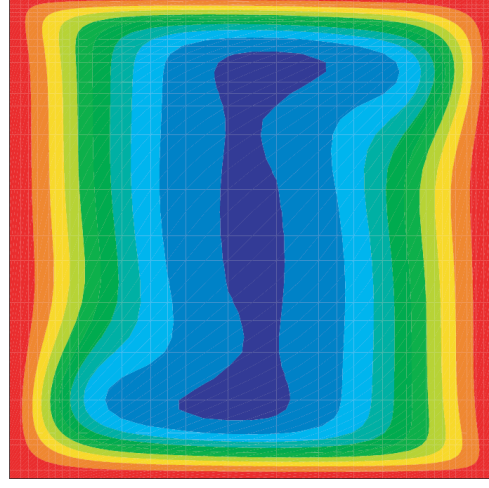
(b) Simulation  $Ra = 10^5$   $Pr = 1$ .



(c) Simulation  $Ra = 10^6$   $Pr = 1$ .



(d) Massarotti et al. 2006  $Ra = 10^5$ .



(e) Massarotti et al. 2006  $Ra = 10^6$ .

Figure 3.20 – Lignes de courant pour la convection naturelle colorées par la magnitude de  $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$  selon le nombre de Rayleigh, comparées à Massarotti et al. 2006 [125].

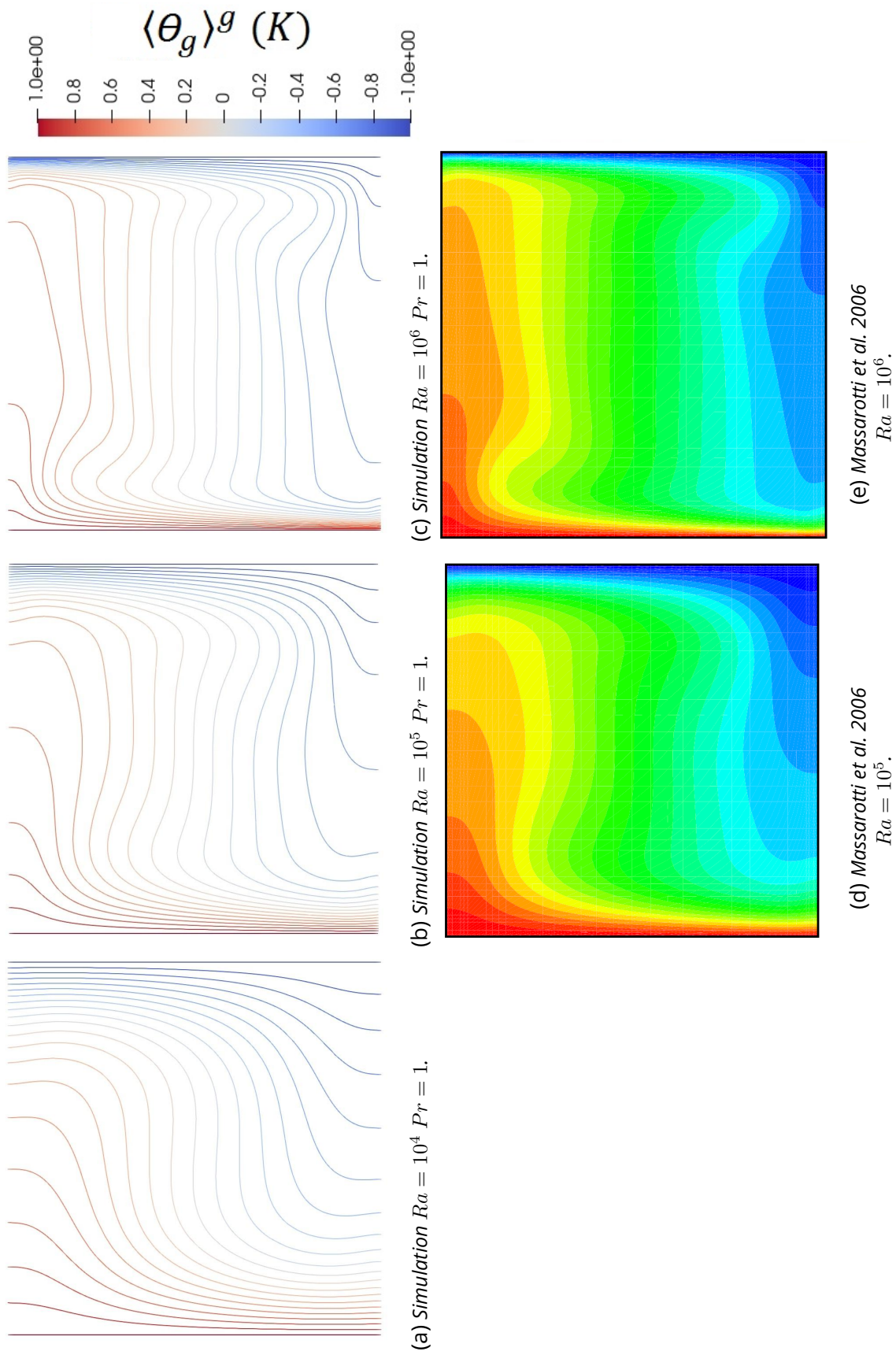


Figure 3.21 – Isothermes colorées par leur température pour la convection naturelle selon le nombre de Rayleigh, comparées à Massarotti et al. [125].

Ayant vérifié qualitativement les écoulements, on mesure quantitativement l'écart entre les profils de vitesse dans la mi-section horizontale pour différents Rayleigh avec les profils de référence issus des travaux de Massarotti *et al.* [125], représentés sur la Fig. 3.22. Les courbes correspondent très bien avec une erreur absolue moyenne au maximum de l'ordre de 3% (voir Table 3.12). Enfin, on compare les maximums des profils de vitesse dans les plans médians et le nombre de Nusselt intégral des nombreux résultats de référence répertoriés par Massarotti *et al.* [125] dans la Table 3.13. On remarque que les valeurs simulées sont bien encadrées par les valeurs de la littérature.

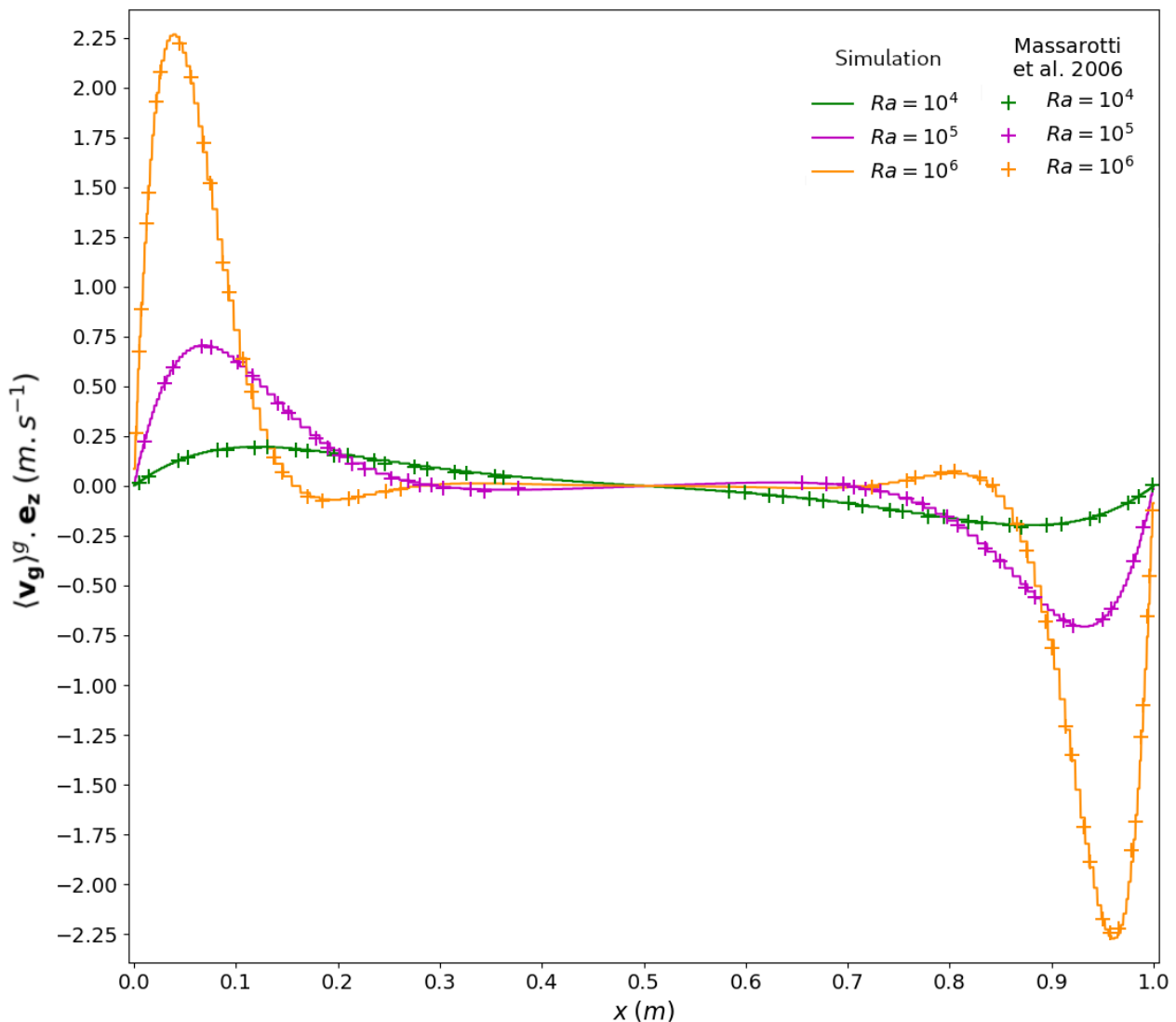


Figure 3.22 – Profils de vitesse dans le plan médian horizontal pour différents nombres de Rayleigh à  $Pr = 1$ , comparés aux résultats de Massarotti *et al.* 2006 [125].

On a ainsi vérifié l'implémentation de la dilatation thermique dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et les termes d'advection des équations de conservation de l'enthalpie. On a pu vérifier également que le couplage des équations est correctement résolu.

Courbes considérées	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
Erreur absolue maximale	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$
Erreur absolue moyenne	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
Ecart-type associé à la moyenne	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$

Table 3.12 – Comparaison entre les profils de vitesse dans le plan médian horizontal simulés aux profils issus des travaux de Massarotti *et al.* 2006 [125] pour un écoulement de convection naturelle dans un carré en 2-D selon le nombre de Rayleigh et à  $Pr = 1$ .

$Ra$	Références	[51]	[109]	[9]	[120]	[191]	[125]	[125]	Présent
$10^4$	$(\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x)_{\max}$	16.15	16.18	16.26	16.17	16.12	16.06	16.12	16.14
	$(\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_z)_{\max}$	19.62	19.63	19.72	19.80	19.79	19.62	19.74	19.62
	$Nu$	2.24	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25	2.29	2.26
$10^5$	$(\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x)_{\max}$	34.73	34.00	35.17	34.95	33.39	33.38	33.18	34.29
	$(\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_z)_{\max}$	68.59	68.64	68.75	68.66	70.63	70.64	70.33	70.56
	$Nu$	4.51	4.52	4.51	4.57	4.60	4.67	4.63	4.60
$10^6$	$(\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_x)_{\max}$	64.63	64.83	64.88	65.08	65.40	65.30	65.30	66.04
	$(\langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{e}_z)_{\max}$	219.40	220.60	220.77	222.70	227.11	226.80	226.60	226.61
	$Nu$	8.82	8.83	8.81	9.02	8.98	9.12	9.11	8.97

Table 3.13 – Maximums des profils de vitesses dans le plan médian vertical puis horizontal et le nombre de Nusselt intégral à la paroi chaude pour des écoulements de convection naturelle dans une boîte carrée en 2-D selon le nombre de Rayleigh avec  $Pr = 1$ .

### 3.2.4.2. Convection naturelle en milieu poreux

On vérifie enfin que les termes d'advection et le couplage entre les équations sont toujours correctement fonctionnels en considérant plusieurs phases, par des simulations de convection naturelle en milieu poreux. On reste ainsi dans la configuration précédente en résolvant les équations de conservation (3.10) et (3.11), mais on considère désormais la boîte 2-D remplie d'une matrice poreuse immobile. On intègre alors la phase ( $s$ ) à la simulation précédente, avec une vitesse fixée comme nulle, mais permettant les interactions entre phases, comme dans les simulations d'écoulement de Darcy § 3.2.1. On le schématise sur la Fig. 3.23.

On compare quantitativement les résultats du présent code aux résultats de la littérature par le nombre de Nusselt intégral (3.37), et on conserve donc le maillage précédent (voir Fig. 3.19b). On compare les simulations aux travaux de Saeid & Pop 2005 [158] qui récapitulent plusieurs résultats de la littérature et aux travaux de Goyeau *et al.* 1996 [79].

L'écoulement de convection naturelle en milieu poreux dans une cavité carrée 2-D est complètement caractérisé par le nombre de Prandlt (3.36), le nombre de Rayleigh poreux (3.38) et le nombre de Darcy (3.39) qui caractérise la porosité du système. Dans les simulations suivantes, on fixe toujours  $Pr = 1$  et  $Da \leq 10^{-7}$  afin de pouvoir comparer aux résultats de référence selon le nombre de Rayleigh poreux (3.38). De même, les résultats de référence considérant l'équilibre thermique entre



le fluide et la matrice poreuse qu'il traverse, on choisit donc un coefficient d'interaction thermique très élevé ( $\widehat{C}_{kk'} = 10^7$ ) pour forcer l'équilibre thermique dans les simulations.

$$Ra^* = \frac{\|\mathbf{g}\| \beta_g \Delta \langle \theta_g \rangle^g H}{\nu_g \alpha_g \widehat{A}_{gs}} \quad (3.38)$$

$$Da = \frac{1}{\widehat{A}_{gs} H^2} \quad (3.39)$$

On commente d'abord les résultats qualitatifs. Premièrement, on a pu s'assurer que les températures de la phase ( $g$ ) et ( $s$ ) sont bien identiques à tout instant. Les lignes de courant selon les différents nombres de Rayleigh poreux sont représentées sur la Fig. 3.24. On observe bien un mouvement circulaire de convection naturelle et une augmentation de la vitesse avec le nombre de Rayleigh poreux. De plus, contrairement à l'écoulement de convection naturelle monophasique hors milieu poreux précédent (voir Fig. 3.20), il y a un pic de vitesse dans la zone de rencontre du fluide et des parois latérales thermostatées. Il est caractéristique de la convection naturelle en milieu poreux, car à mesure que le fluide remonte la paroi, la différence de température motrice diminue. Or elle est désormais en compétition avec le ralentissement dû aux frottements sur la matrice poreuse. D'où le ralentissement de l'écoulement dans la seconde moitié de la hauteur de la paroi. Les isothermes représentées sur la Fig. 3.25 selon leur Rayleigh poreux sont également conformes à la littérature.

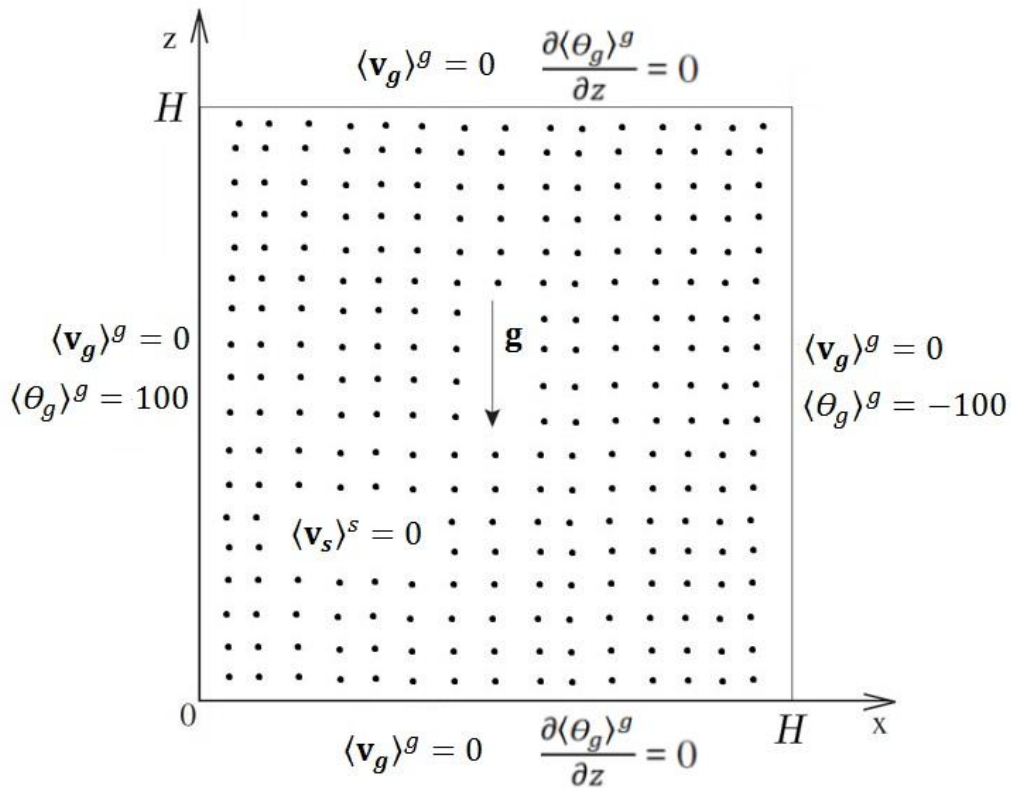


Figure 3.23 – Schéma des conditions des tests de convection naturelle en milieu poreux.

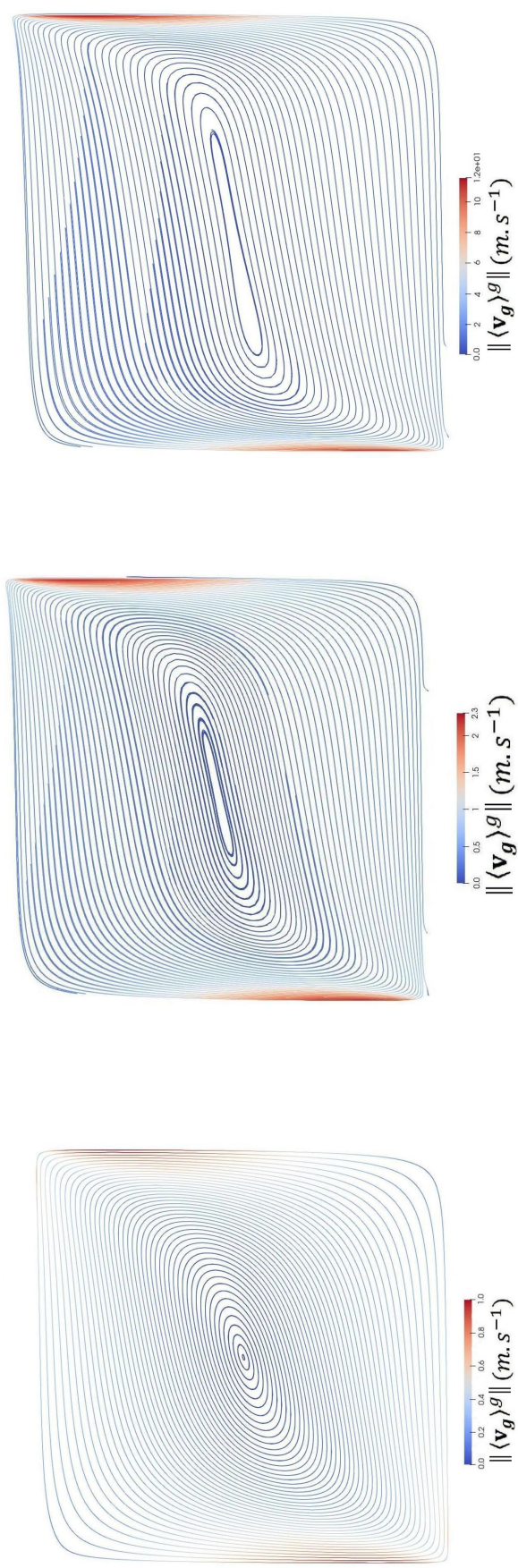


Figure 3.24 – Lignes de courant simulées colorées selon la magnitude de  $\langle \mathbf{v}_g \rangle^g$  pour la convection naturelle en milieu poreux selon le nombre Rayleigh poreux à  $Pr = 1$  et  $Da < 10^7$ .

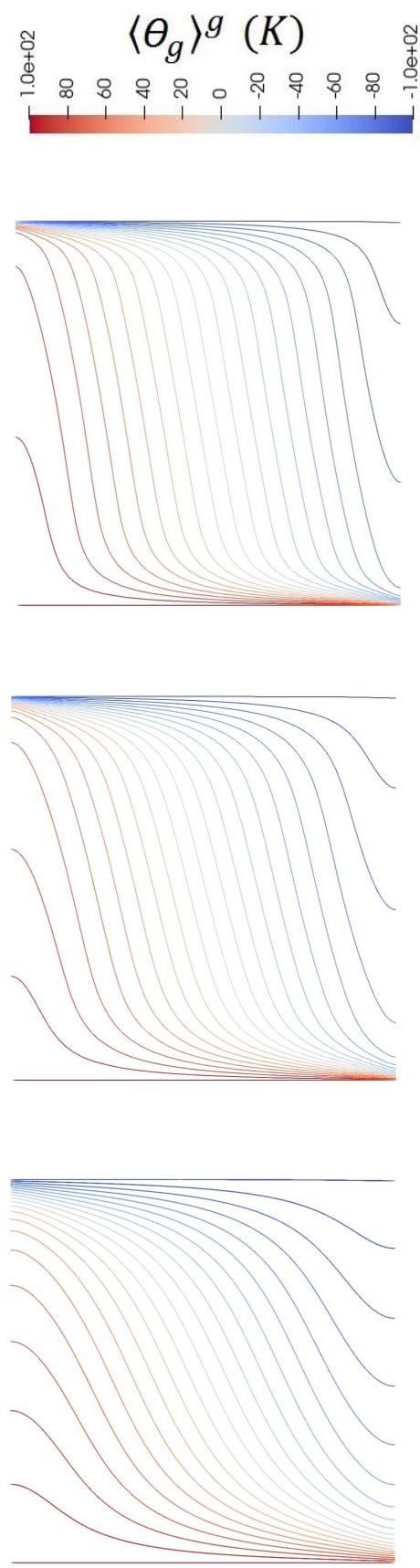


Figure 3.25 – Isothermes simulées pour la convection naturelle en milieu poreux selon le nombre de Rayleigh poreux à  $Pr = 1$ ,  $Da < 10^7$ .

Pour comparer quantitativement ces simulations aux résultats de référence, on calcule le nombre de Nusselt intégral à la paroi chaude (3.37). On remarque que les Nusselts obtenus sont cohérents avec les résultats de la littérature (voir Table 3.14).

Références	$Nu$		
	$Ra^* = 100$	$Ra^* = 400$	$Ra^* = 1000$
Walker & Homsy 1978 [190]	3.097	–	12.960
Gross <i>et al.</i> 1986 [83]	3.141	–	13.448
Manole & Lage 1992 [121]	3.118	–	13.637
Goyeau <i>et al.</i> 1996 [79]	3.11	7.77	13.47
Baytas 2000 [12]	3.160	–	14.060
Saeid & Pop 2004 [157]	3.002	–	13.726
Saeid & Pop 2005 [158]	3.100	–	13.442
Présent	3.031	7.676	13.057

Table 3.14 – Comparaison du nombre de Nusselt intégral à la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh poreux.

On a ainsi pour vérifier l'implémentation de tous les termes, la méthode de résolution et les couplages entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'enthalpie. L'implémentation des corrélations pour la pression solide ou granulaire et la viscosité solide ont été reprises du code validé `sedFoam` [25].

### 3.3. Bilan sur les simulations numériques

Dans ce chapitre, on a réalisé l'implémentation partielle du problème moyenné fermé obtenu dans le chapitre précédent § 2.6.4, adapté dans ce but et défini par les équations (3.7) à (3.11), sous la forme d'un *solver* de la plateforme open source OpenFOAM, nommé `debrisBedSedFoam`. Ce *solver* utilise la méthode de résolution de Rusche [156]. Pour l'implémenter, on s'inspire des *solvers* préexistants `twoPhaseEulerFoam` et `multiphaseEulerFoam` dédiés aux calculs CFD multiphasiques eulériens et de `sedFoam` [25] qui est dédié au transport de sédiment.

Une fois l'implémentation effectuée, on a vérifié qu'elle avait été correctement réalisée. On utilise une méthode incrémentale, vérifiant les termes par petit groupe de plus en plus inclusif. Il en va de même avec les équations. On considère d'abord les équations dynamiques, puis thermiques, seules avant de les coupler. On agit pareillement sur le nombre de phases considérées. La simulation d'écoulement de Darcy et de Darcy généralisé § 3.2.1 permet ainsi de vérifier la résolution des équation de conservation de la quantité de mouvement, le terme de gravité, le gradient de pression et l'interaction dynamique entre les phases. Les simulations d'écoulements de Couette et de Poiseuille § 3.2.2 ont permis de vérifier l'implémentation correcte des termes de Brinkman. Puis par des simulations de conduction et puissance volumique mathématiquement analogues § 3.2.2.4, on a vérifié les termes de diffusions thermiques, de puissances volumiques et d'interaction thermique entre phases ainsi que la résolution des équations de conservation de l'énergie. L'implémentation du terme d'advection

est vérifiée par les simulations d'écoulement de cavité entraînée par le "haut" § 3.2.3. Tandis que le terme d'advection thermique, la dilatation thermique et le couplage entre les équations dynamiques et thermiques ont été vérifiés par les simulations de convection naturelle § 3.2.4.1 et de convection naturelle en milieu poreux § 3.2.4.2. En s'appuyant sur la modélisation des lois constitutives décrivant la pression granulaire et la viscosité granulaire développées pour `sedFoam` [25], on a confirmé l'implémentation et la résolution du système d'équations (3.7) à (3.11).

# Conclusion et Perspectives

## 4.1. Conclusion

Cette thèse s'inscrit dans la thématique d'étude prospective des accidents graves en RNR-Na de type ASTRID. Plus précisément, on modélise le comportement thermohydraulique d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na lors d'un hypothétique accident grave. Cette étude est motivée par des enjeux de sûreté. On s'intéresse en particulier à l'évolution de la configuration du lit de débris dans le temps, autrement dit à son nivellement ou *self-leveling*. En effet, le lit initialement sous la forme d'un tas, doit s'aplanir sous l'action des écoulements de sodium (liquide et gazeux) dus à la puissance résiduelle du corium. On s'intéresse à l'évolution de sa configuration, car certaines configurations pourraient conduire à d'éventuels retours en criticité devant être proscrits et pour évaluer le refroidissement du lit. Aucun outil validé ne permettant de suivre cette évolution de la phase solide mobile, à l'exception de modèle empirique, on établit un modèle macroscopique du comportement thermodynamique du lit de débris en RNR-Na modélisant les déplacements de la phase solide. On a premièrement exposé les principales caractéristiques de ce système et quantifié les nombres adimensionnels permettant de déterminer les phénomènes prépondérants, après avoir évoqué la formation du lit de débris. Après avoir décrit les différents domaines d'études des écoulements granulaires et leur diversité, on a pu caractériser le type d'écoulement rencontré et définir une méthode pertinente pour le modéliser à l'échelle macroscopique.

On a choisi d'adopter une approche dite multiphase et d'appliquer la méthode de la prise de moyenne volumique développée dans les travaux de Lasseux *et al.* [106] et de Duval *et al.* [60]. Ce manuscrit propose ainsi pour la première fois d'appliquer cette méthode à un système triphasique avec interaction entre les trois phases mobiles pour l'établissement des équations macroscopiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie avec source de puissance en volume et changement de phase. On a ainsi établi le problème macroscopique (résumé § 2.6.4) et les problèmes de fermeture associés (voir § 2.5). Les équations macroscopiques établies présentent des différences structurelles avec les modèles d'écoulements multiphasiques de type Ishii & Zuber [96] déjà utilisés pour décrire des lits de débris de corium en RNR-Na par Tagami *et al.* [180] en comportant notamment une propriété effective "d'auto-interaction" supplémentaire. Le problème macroscopique établi est d'ailleurs valable pour  $n$  phases, si l'on peut considérer que ses phases interagissent deux à deux à leur interface. Certaines hypothèses simplificatrices comme l'incompressibilité de la vapeur de sodium, la modélisation pseudo-fluide de la phase solide ou la pertinence des propriétés effectives thermiques relatives au gradient de température moyenne sont discutées.

Dans l'attente de la résolution des problèmes de fermeture, on a ensuite réalisé une implémentation partielle du modèle macroscopique établi sous la forme d'un *solver* de la plateforme *open source* OpenFOAM. Cette implémentation permet alors de simuler des écoulements triphasiques en convection naturelle avec production de chaleur volumique admettant une phase solide particulière. On a pu vérifier l'implémentation et la résolution de chacun des termes, des équations et de leur couplage. On a notamment établi et simulé les profils de vitesse pour des écoulements de Couette plan et de Poiseuille plan d'émulsions diphasiques à distribution affine et stationnaire du taux d'occupa-

tion volumique des phases permettant la vérification de l'implémentation des termes de Brinkman (voir § 3.2.2). L'implémentation est cependant encore partielle et nécessite certains ajouts, précisés dans les perspectives, pour pouvoir simuler le comportement d'un lit de débris de corium sur le récupérateur d'un RNR-Na.

## 4.2. Perspectives

Ces travaux qui ont permis l'établissement d'un modèle macroscopique pour les lits de débris en RNR-Na et son implémentation partielle dans un code de calcul ouvrent plusieurs perspectives.

### 4.2.1. Propriétés effectives et problèmes de fermeture

Lors de l'établissement du problème macroscopique par la méthode de la prise de moyenne volumique, on a également établi les problèmes de fermeture associés. La résolution de ces problèmes de fermeture permet la détermination des variables de fermeture et donc de calculer les propriétés effectives macroscopiques. Dans cette étude, on n'a cependant pas eu le temps de travailler à la résolution de ces problèmes de fermeture. C'est un travail considérable qui nécessite des calculs DNS (*Direct Numerical Simulation*).

On peut toutefois évoquer plusieurs pistes de travail sur ce point. On pourrait commencer par faire des calculs DNS pour des configurations "simples", se restreignant par exemple à certains phénomènes. On note, cependant, qu'il faudra certainement considérer un grand nombre de ces configurations afin d'obtenir des propriétés effectives valables en moyenne dans l'ensemble des situations rencontrées, pour être représentatif de l'ensemble du système. Ces simulations sont très complexes et très lourdes en puissance de calcul. Pour réduire les coûts de calcul, on pourrait entre autres envisager des simulations DEM couplées aux méthodes LBM (voir § 1.4.2.1) qui ont inclus récemment les équations de conservation de l'énergie [3]. Ces méthodes n'étaient cependant pas fonctionnelles en 2022 selon L. Amarsid pour modéliser l'ébullition, la détermination de la position des interfaces d'un système triphasique posant notamment problème. Il semblerait qu'en 2023, on ne dispose toujours pas des outils numériques nécessaires à ces résolutions.

### 4.2.2. Simulation du lit de débris

Dans cette étude, on a réalisé une implémentation partielle du problème macroscopique. Le *solver* en question n'est donc pas capable à ce jour de simuler le comportement thermohydraulique d'un lit de débris de corium en RNR-Na. Dans cette perspective, il reste plusieurs travaux à mener.

Premièrement, le changement de phase est un phénomène prépondérant dans le nivellement des lits de débris qui survient quelques minutes après l'ébullition [168]. Or l'implémentation actuelle n'inclut pas les effets du changement de phase, par manque de temps. On pourra cependant s'inspirer des travaux d'Oruganti [138] qui adapte le *solver* `multiphaseEulerFoam` à l'étude de la cavitation pour ajouter l'ébullition au *solver* `debrisBedSedFoam` (voir § 3.1.2).

De plus, les propriétés effectives macroscopiques n'étant pas connues à ce jour, on a utilisé des modèles très simples pour réaliser les vérifications. Dans une optique de validation, ou de simulation d'un lit de débris réaliste, il faut utiliser des lois plus complexes. À défaut de pouvoir calculer les propriétés effectives, l'implémentation a été réalisée de sorte à pouvoir utiliser les modèles d'interaction

issus des modélisations de type Ishii & Züber [96]. On pourrait ainsi reprendre les corrélations proposées par Tagami *et al.* [180]. Mais un véritable travail bibliographique, spécifiquement axé sur ce type de corrélations très nombreuses, est nécessaire pour déterminer les plus adaptées.

On a également vu que des phénomènes de ségrégation peuvent apparaître dans les lits de débris, et qu'ils pourraient avoir d'importantes répercussions sur son comportement. Le problème macroscopique théorique étant valable pour  $n$  phases, on pourrait ajouter au *solver* `debrisBedSedFoam` la capacité de modéliser autant de phases que nécessaire. Cela permettrait par exemple de distinguer deux phases solides pour traiter le cas de la stratification [128] selon la composition des débris ou la ségrégation par taille. Cependant, la résolution des propriétés effectives est déjà très difficile dans le cas triphasique et à ce jour rien n'indique que l'on puisse les calculer dans ce cas. De plus, contrairement aux interactions entre fluides, ou aux interactions fluide-particule, les corrélations ou les modèles d'interaction entre différentes phases solides mobiles semblent très rares. On peut néanmoins envisager en première approche de parcourir les publications scientifiques industrielles du secteur des cimentiers (broyage de gravier dans les fours tournants) ou les travaux sur la ségrégation [80].

À long terme, si le code est capable de simuler de manière satisfaisante le comportement d'un lit de débris de corium et de suivre sa configuration dans le temps, il serait pertinent d'envisager son couplage, ou du moins son chaînage, à des codes neutroniques. Ce code fournirait alors des informations géométriques, de composition et de température du lit de débris au code neutronique, qui pourrait en retour fournir le terme de puissance volumique. Ce couplage pourrait permettre d'estimer la criticité du lit de débris de corium sur le récupérateur en RNR-Na au cours d'un accident grave.

## Annexe :

### A. Annexe : Prise de moyenne particulaire des équations locales de conservation de la phase solide

Dans cette annexe, on définit l'opérateur de prise de moyenne particulaire, puis on l'applique aux équations locales de conservation de la quantité de mouvement (QDM) et de l'énergie d'une particule  $p$ . On rappelle ces équations locales ci-dessous : ( $f = l, g$ )

$$\rho_s V_p \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = \rho_s V_p \mathbf{g} + \sum_q \mathbf{f}_{qp} + \iint_{S_{lp} \cup S_{gp}} \overline{\overline{\sigma_p}} \cdot \mathbf{n}_{pf} dS \quad (2.17)$$

$$\rho_s V_p \frac{\partial h_p}{\partial t} = \rho_s V_p \dot{q}_p - \iint_{S_{lp} \cup S_{gp} \cup S_{pq}} \phi_{pk} \cdot \mathbf{n}_{pk} dS \quad (2.18)$$

où  $\rho_s$  est la densité du corium,  $V_p$  le volume de la particule  $p$  et  $\mathbf{v}_p$  sa vitesse et  $\mathbf{g}$  est l'accélération de la pesanteur.  $q$  désignant toutes les particules en contact (supposé ponctuel) avec la particule  $p$ ,  $\mathbf{f}_{qp}$  représente la force de contact exercée par  $q$  sur la particule  $p$ .  $\overline{\overline{\sigma_p}}$  désigne le tenseur des contraintes de la particule  $p$  et  $\mathbf{n}_{pk}$  le vecteur normal à sa surface.  $h_p$  désigne l'enthalpie spécifique de la particule  $p$ ,  $\dot{q}_p$  sa puissance spécifique et  $\phi_{pk}$  représente le flux de chaleur à la surface de la particule  $p$ . On rappelle que l'on considère les particules identiques indéformables ( $\rho_s$ ,  $V_p$ ,  $\dot{q}_p$ ,  $C_{ps}$  et  $\lambda_s$  sont constants et de mêmes valeurs quel que soit  $p$ ).

#### A.1. Définition des outils et conservation de la masse par la moyenne particulaire

Pour la phase solide, on utilise comme équations locales, les équations bilans sur une particule. On ne peut donc pas utiliser les opérateurs de prise de moyenne volumique définis dans le corps du manuscrit pour des champs continus. Pour obtenir les grandeurs moyennes des particules d'un VER, on utilise la moyenne arithmétique discrète sur le VER, en s'inspirant des travaux de Jackson [98] et d'Anderson & Jackson [4]. On note la **moyenne particulaire** d'une grandeur quelconque  $\psi_p$  d'une particule ainsi :  $\langle \psi_p \rangle^p$ . Cet opérateur est défini comme suit :

$$\langle \psi_p \rangle^p = \frac{1}{N} \sum_p \psi_p \quad (A.1)$$

où  $N$  est le nombre de particules dans le VER.

Le nombre de particules dans le VER pouvant varier dans le temps, on utilise également un théorème d'intervention pour la dérivation temporelle, démontré dans les travaux d'Anderson & Jackson [4], définit ainsi :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_p}{\partial t} \right\rangle^p = \frac{1}{N} \frac{\partial (N \langle \psi_p \rangle^p)}{\partial t} + \frac{1}{N} \nabla \cdot N \langle \psi_p \mathbf{v}_p \rangle^p \quad (A.2)$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi_p}{\partial t} \right\rangle^p = \frac{1}{N} \frac{\partial (N \langle \psi_p \rangle^p)}{\partial t} + \frac{1}{N} \nabla \cdot N \langle \psi_p \mathbf{v}_p \rangle^p \quad (A.3)$$



Si on applique ce théorème à la fonction identité, comme le fait Jackson [98], on obtient une équation portant sur la variation du nombre de particules du VER, soit l'équivalent pour la phase solide particulière de l'équation macroscopique de conservation de la masse :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot N \langle \mathbf{v}_p \rangle^p = 0 \quad (\text{A.4})$$

## A.2. Moyenne particulière de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (QDM)

La méthode utilisée pour établir l'équation de conservation de la QDM macroscopique pour les particules par l'opérateur de prise de moyenne particulière est similaire à celle utilisée avec l'opérateur de prise de moyenne volumique dans le manuscrit. On applique l'opérateur de prise de moyenne particulière (A.1) à l'équation de conservation de la QDM locale (2.17). Pour plus de clarté, on traite séparément le premier membre ( $PM$ ) et le second membre ( $SM$ ).

Une fois l'opérateur de prise de moyenne particulière appliqué au premier membre ( $PM$ ), pour écrire une équation portant sur la vitesse moyenne particulière, on applique le théorème d'interversion (A.3). On rappelle que l'on considère des particules identiques indéformables. On a alors :

$$\langle PM \rangle^p = \frac{\rho_s V_p}{N} \left( \frac{\partial N \langle \mathbf{v}_p \rangle^p}{\partial t} + \nabla \cdot N \langle \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p \rangle^p \right) \quad (\text{A.5})$$

On utilise la décomposition de W. G. Gray (2.13), définie identiquement pour la moyenne particulière 2.13, afin de décomposer la moyenne du produit (2.16). On décompose ensuite les dérivées de produit et on factorise par la vitesse moyenne des particules de sorte à faire apparaître l'équation de conservation de la masse particulière (A.4).

$$\langle PM \rangle^p = \frac{\rho_s V_p}{N} \left( N \frac{\partial \langle \mathbf{v}_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \underbrace{\left( \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N \langle \mathbf{v}_p \rangle^p) \right)}_{=0} + N \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_p \rangle^p + \nabla \cdot N \langle \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) \quad (\text{A.6})$$

On multiplie alors l'expression obtenue par  $\frac{N}{V}$  pour faire apparaître le taux d'occupation volumique de la phase solide dans le VER.

$$\frac{N}{V} \langle PM \rangle^p = \varepsilon_s \rho_s \left( \frac{\partial \langle \mathbf{v}_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_p \rangle^p + \frac{1}{N} \nabla \cdot N \langle \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) \quad (\text{A.7})$$

Pour le second membre ( $SM$ ), on applique de même l'opérateur de prise de moyenne particulière (A.1). La force de pesanteur se traite par linéarité de la somme finie. On a alors : ( $f = l, g$ )

$$\langle SM \rangle^p = \rho_s V_p \mathbf{g} + \frac{1}{N} \sum_p \sum_q \mathbf{f}_{qp} + \frac{1}{N} \sum_p \iint_{S_{lp} \cup S_{gp}} \overline{\overline{\sigma_p}} \cdot \mathbf{n}_p \mathbf{f} dS \quad (\text{A.8})$$

Pour la double somme représentant la moyenne particulière des forces de contact ponctuelles entre les particules, on utilise le second principe de Newton ou principe des actions réciproques ( $\mathbf{f}_{qp} = -\mathbf{f}_{pq}$ ). Ainsi, pour chaque couple de particule dont le centre de masse est mutuellement contenu dans le VER, les forces  $\mathbf{f}_{qp}$  et  $\mathbf{f}_{pq}$  se compensent. Il ne reste alors plus que les forces exercées par des particules extérieures au VER néanmoins en contact avec des particules du VER (voir Fig. A.1).

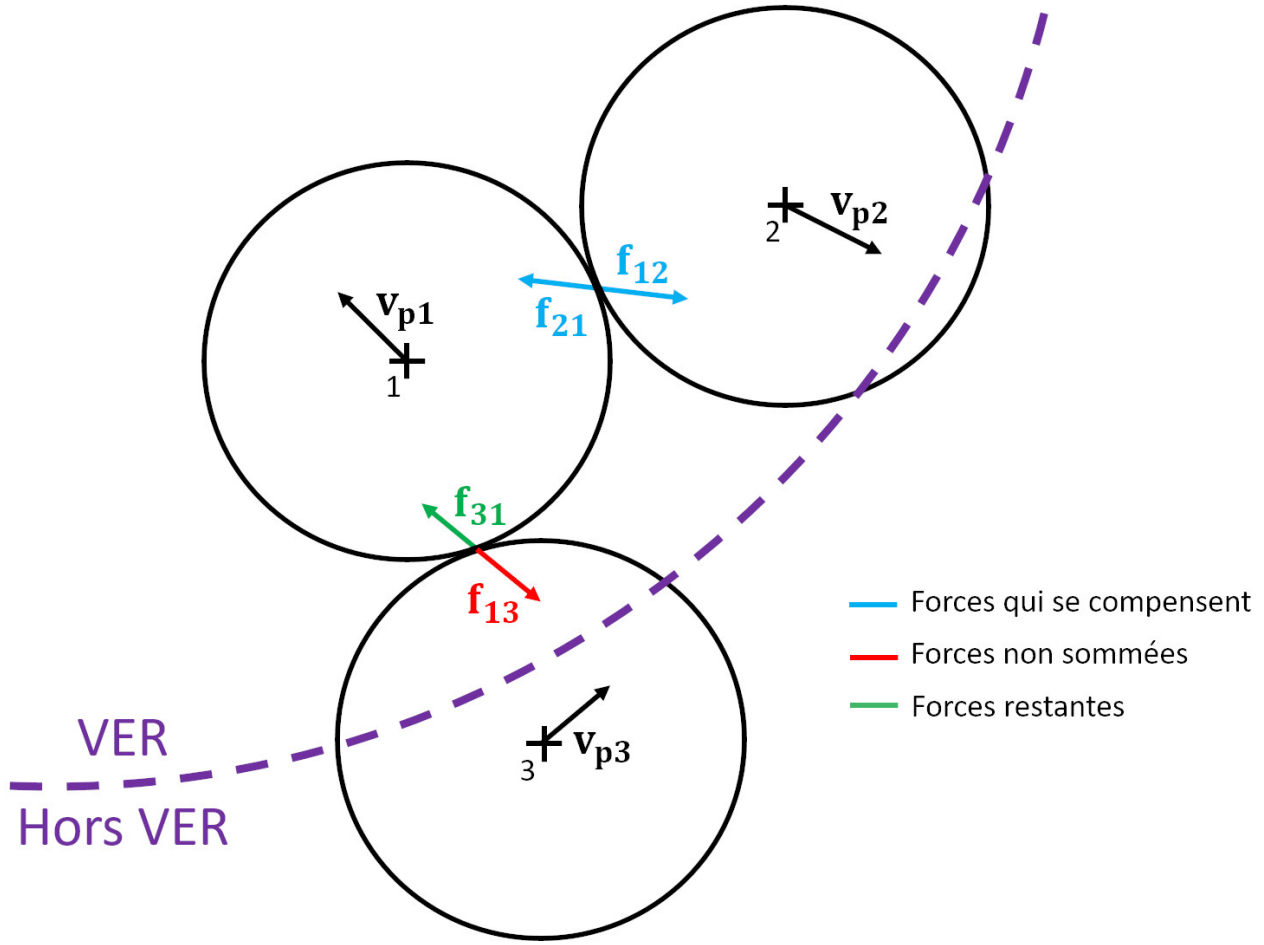


Figure A.1 – Schéma de la compensation des forces de contact à la frontière du VER.

Pour la somme de l'intégrale, on remarque que la somme des intégrales sur la surface de chaque particule, revient à intégrer sur la surface d'interaction de la phase solide avec les autres phases :  $\sum_p (S_{lp} \cup S_{gp}) = S_{ls} \cup S_{gs}$ . On peut donc réécrire la moyenne particulaire du second membre comme suit : ( $f = l, g$ )

$$\langle SM \rangle^p = \rho_s V_p \mathbf{g} + \frac{1}{N} \sum_{q'} \mathbf{f}_{q'} + \frac{1}{N} \iint_{S_{ls} \cup S_{gs}} \overline{\overline{\sigma_p \cdot \mathbf{n}_p}} dS \quad (\text{A.9})$$

où  $q'$  désigne l'ensemble des particules extérieures au VER en contact avec une ou plusieurs particules du VER, et  $\mathbf{f}_{q'}$  est la résultante des forces qu'elles exerces sur ces particules.

Ainsi, après multiplication du second membre par  $\frac{N}{V}$  et rassemblement du premier et du second membre, on obtient l'équation macroscopique particulaire de conservation de la QDM suivante : ( $f = l, g$ )

$$\varepsilon_s \rho_s \left( \frac{\partial \langle \mathbf{v}_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_p \rangle^p + \frac{1}{N} \nabla \cdot N \langle \widetilde{\mathbf{v}_p}^p \widetilde{\mathbf{v}_p}^p \rangle \right) = \varepsilon_s \rho_s \mathbf{g} + \frac{1}{V} \sum_{q'} \mathbf{f}_{q'} + \frac{1}{V} \iint_{S_{ls} \cup S_{gs}} \overline{\overline{\sigma_p \cdot \mathbf{n}_p}} dS \quad (\text{2.19})$$

### A.3. Moyenne particulaire de l'équation de conservation de l'énergie

Pour établir l'équation macroscopique particulaire de conservation de l'énergie, on applique l'opérateur de prise de moyenne particulaire (A.1) aux équations de conservation de l'énergie des particules du VER (2.18). On traite séparément le premier membre ( $PM$ ) et le second membre ( $SM$ ), pour plus de clarté.

Pour le premier membre ( $PM$ ), après application de l'opérateur de prise de moyenne particulaire (A.1), on utilise le théorème d'interversion de la dérivée temporelle (A.2) à l'enthalpie. On applique la décomposition de W. G. Gray (2.13) en moyenne particulaire pour obtenir le produit des moyennes (2.16). On décompose ensuite les dérivées de produits afin de faire apparaître l'équation de conservation de la masse particulaire (A.4). On obtient :

$$\langle PM \rangle^p = \frac{\rho_s V_p}{N} \left( N \frac{\partial \langle h_p \rangle^p}{\partial t} + \langle h_p \rangle^p \underbrace{\left( \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N \langle \mathbf{v}_p \rangle^p) \right)}_{=0} + N \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \cdot \nabla \langle h_p \rangle^p + \nabla \cdot \left( N \langle \widetilde{h}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) \right) \quad (\text{A.10})$$

Comme dans le corps du manuscrit, on a la relation entre l'enthalpie et la température (2.29). On remplace alors l'enthalpie de la particule par cette relation. On considère la capacité calorifique constante et identique pour chaque particule. On multiplie ensuite par  $\frac{N}{V}$  pour obtenir une expression volumique et faire apparaître le taux d'occupation volumique solide.

$$h_p = h_p^{sat} + C_{ps} \Theta_p \quad (2.29)$$

$$\frac{N}{V} \langle PM \rangle^p = \varepsilon_s \rho_s C_{ps} \left( \frac{\partial \langle \Theta_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \cdot \nabla \langle \Theta_p \rangle^p + \frac{1}{N C_{ps}} \nabla \cdot \left( N \langle \widetilde{h}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) \right) \quad (\text{A.11})$$

Avant d'appliquer la moyenne particulaire au second membre, on remarque que l'on peut réécrire le terme de conduction à l'interface via le théorème de Green-Ostrogradski, car la surface de la particule est une surface fermée. On peut alors utiliser la loi de Fourier en température relative pour décrire la conduction thermique dans la particule, donnant : ( $f = l, g$ )

$$\iint_{S_{lp} \cup S_{gp} \cup S_{pq}} \phi_{\mathbf{pk}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{pk}} dS = \int_{V_p} \nabla \cdot \phi_{\mathbf{p}} dV = - \int_{V_p} \nabla \cdot (\lambda_s \nabla \Theta_p) dV \quad (\text{A.12})$$

Pour plus de clarté, on conserve la notation condensé  $\phi_{\mathbf{p}}$ . Lorsque l'on applique l'opérateur de prise de moyenne particulaire à la réécriture du terme de conduction à l'interface précédente, on retrouve la définition de la moyenne de phase pour la phase solide (2.4). On peut alors utiliser le théorème d'interversion spatiale vectoriel (2.10) : ( $f = l, g$ )

$$\frac{1}{N} \sum_p \int_{V_p} \nabla \cdot \phi_{\mathbf{p}} dV = \frac{1}{N} \int_{V_s = N V_p} \nabla \cdot \phi_{\mathbf{s}} dV = \frac{V}{N} \langle \nabla \cdot \phi_{\mathbf{s}} \rangle = \frac{V}{N} \nabla \cdot \langle \phi_{\mathbf{s}} \rangle + \frac{1}{N} \iint_{S_{ls} \cup S_{gs}} \phi_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{s}f} dS \quad (\text{A.13})$$

Pour le second membre ( $SM$ ), on applique de même l'opérateur de prise de moyenne particulaire (A.1). Le terme de source de puissance volumique ne pose pas problème. Pour le terme d'échange à l'interface, on utilise la réécriture que l'on vient d'établir (A.13). On a alors : ( $f = l, g$ )

$$\langle SM \rangle^p = \rho_s V_p \dot{q}_s - \frac{V}{N} \nabla \cdot \langle \phi_{\mathbf{s}} \rangle - \frac{1}{N} \iint_{S_{ls} \cup S_{gs}} \phi_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{s}f} dS \quad (\text{A.14})$$

On réécrit ensuite le flux thermique par la loi de Fourier. On applique alors le théorème d'inversion (2.9) une seconde fois. Et comme pour le premier membre ( $PM$ ), on multiplie le résultat par  $\frac{N}{V}$ . On obtient : ( $f = l, g$ )

$$\frac{N}{V} \langle SM \rangle^p = \varepsilon_s \rho_s \dot{q}_s + \lambda_s \nabla^2 \langle \Theta_s \rangle + \lambda_s \nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_{l_s} \cup S_{g_s}} \Theta_s \mathbf{n}_{sf} dS \right) + \frac{\lambda_s}{V} \iint_{S_{l_s} \cup S_{g_s}} \nabla \Theta_s \cdot \mathbf{n}_{sf} dS \quad (\text{A.15})$$

Comme dans le corps du manuscrit, on utilise alors la séparation des échelles (2.2) qui permet de négliger la divergence de l'intégrale de la température relative par rapport à l'intégrale du gradient de température (A.16). En effet, le premier opérateur de dérivation spatiale porte sur une grandeur macroscopique ( $\nabla \cdot \langle \psi_k \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{\langle \psi_k \rangle}{L} \right)$ ) tandis que le second porte sur une grandeur locale ( $\nabla \psi_k = \mathcal{O} \left( \frac{\psi_k}{l_k} \right)$ ), les autres ordres de grandeur de ces termes étant égaux, on a bien : ( $f = l, g$ )

$$\mathcal{O} \left( \frac{\lambda_s \Theta_s S_s}{LV} \right) = \lambda_s \nabla \cdot \left( \frac{1}{V} \iint_{S_s} \Theta_s \mathbf{n}_{sf} dS \right) \ll \frac{\lambda_s}{V} \iint_{S_s} \nabla \Theta_s \cdot \mathbf{n}_{sf} dS = \mathcal{O} \left( \frac{\lambda_s \Theta_s S_s}{l_s V} \right) \quad (\text{A.16})$$

On passe à la moyenne intrinsèque (2.5) pour faire apparaître le taux d'occupation volumique solide. On utilise la décomposition de W. G. Gray (2.13) pour la température locale dans l'intégrale restante afin de ne plus avoir que des grandeurs moyennes et leurs déviations. On obtient des termes analogues aux termes de Brinkman en température relative grâce à l'invariance de la moyenne (2.15) et l'identité (2.12). Ce qui donne : ( $f = l, g$ )

$$\frac{N}{V} \langle SM \rangle^p = \varepsilon_s \rho_s \dot{q}_s + \lambda_s \nabla^2 (\varepsilon_s \langle \Theta_s \rangle) - \lambda_s \nabla \langle \Theta_s \rangle^s \cdot \nabla \varepsilon_s + \frac{\lambda_s}{V} \iint_{S_{l_s} \cup S_{g_s}} \nabla \widetilde{\Theta}_s^s \cdot \mathbf{n}_{sf} dS \quad (\text{A.17})$$

On obtient donc finalement l'équation macroscopique particulière de conservation de l'énergie écrite en température relative suivante, en réunissant les deux membres : ( $f = l, g$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s C_{ps} \left( \frac{\partial \langle \Theta_p \rangle^p}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_p \rangle^p \cdot \nabla \langle \Theta_p \rangle^p + \frac{1}{NC_{ps}} \nabla \cdot \left( N \langle \widetilde{h}_p^p \widetilde{\mathbf{v}}_p^p \rangle^p \right) \right) \\ = \varepsilon_s \rho_s \dot{q}_s + \lambda_s \nabla^2 (\varepsilon_s \langle \Theta_s \rangle) - \lambda_s \nabla \langle \Theta_s \rangle^s \cdot \nabla \varepsilon_s + \frac{\lambda_s}{V} \iint_{S_s} \nabla \widetilde{\Theta}_s^s \cdot \mathbf{n}_{sf} dS \end{aligned} \quad (\text{2.20})$$

## B. Annexe : Simplification préalable des dérivées spatiales de produit avec séparation des échelles

Pour pouvoir factoriser les équations de conservation du problème aux déviations par les sources, afin d'établir les problèmes de fermeture, on doit écrire les simplifications des dérivations de produit suivantes : ( $k, j = l, g, s$ )

$$\nabla \cdot (\overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j) \approx (\nabla \cdot \overline{\overline{a_{kj}}}) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96a)$$

$$\nabla \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{kj}} \approx ((\mathbf{n}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla) \overline{\overline{a_{kj}}}) \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96b)$$

$$\nabla^2 \left( \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \approx \nabla^2 \overline{\overline{a_{kj}}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96c)$$

$$\nabla \left( \mathbf{b}_{\mathbf{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \right) \approx \nabla \mathbf{b}_{\mathbf{kj}} \cdot \langle \mathbf{v}_j \rangle^j \quad (2.96d)$$

$$\nabla \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \right) \approx \nabla c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96e)$$

$$\nabla^2 \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \right) \approx \nabla^2 c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96f)$$

$$\nabla \left( \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \approx \nabla \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96g)$$

$$\nabla^2 \left( \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \approx \nabla \cdot \left( \nabla \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \approx \nabla^2 \mathbf{d}_{\mathbf{kj}} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \quad (2.96h)$$

Elles sont obtenues par la décomposition de la dérivé d'un produit et l'application de la séparation des échelles (2.2). En effet, si l'opérateur de dérivation spatial porte sur une grandeur macroscopique alors on a :  $(\nabla \cdot \langle \psi_k \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{\langle \psi_k \rangle}{L} \right))$  tandis que s'il porte sur une grandeur locale, on a :  $(\nabla \psi_k = \mathcal{O} \left( \frac{\psi_k}{l_k} \right))$ . Les ordres de grandeur des autres termes étant égaux, on les simplifications suivantes : ( $k = l, g, s$ )

$$\nabla \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \right) = \nabla c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j + c_{kj} \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \approx \nabla c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \right) &= \nabla \cdot \left( \nabla \left( c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \right) \right) = \nabla \cdot \left( \langle \Theta_j \rangle^j \nabla c_{kj} + c_{kj} \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \right) \\ &= \nabla \langle \Theta_j \rangle^j \cdot \nabla c_{kj} + \langle \Theta_j \rangle^j \nabla \cdot (\nabla c_{kj}) + \nabla c_{kj} \cdot \nabla \langle \Theta_j \rangle^j + c_{kj} \nabla \cdot (\nabla \langle \Theta_j \rangle^j) \\ &\approx \langle \Theta_j \rangle^j \nabla \cdot (\nabla c_{kj}) = \nabla^2 c_{kj} \langle \Theta_j \rangle^j \end{aligned} \quad (B.3)$$

Les approximations (2.96e) et (2.96f) sont donc établies.

Pour certaines de ces dérivées de produit, on n'a pas de relation connue. On introduit les grandeurs suivantes afin de faire le calcul dans le cas général. Soient  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  une matrice réelle de dimension 3 locale,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{N}$  des vecteurs réels de dimension 3 locaux et  $\mathbf{V}$  un vecteur réel de dimension 3 macroscopique et on introduit  $\nabla$  comme le vecteur des dérivées spatiales. On note leurs coefficients comme suit :

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

On peut alors faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) &= \nabla(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) = \begin{pmatrix} \partial_1(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \\ \partial_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \\ \partial_3(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 \partial_1 v_1 + v_1 \partial_1 b_1 + b_2 \partial_1 v_2 + v_2 \partial_1 b_2 + b_3 \partial_1 v_3 + v_3 \partial_1 b_3 \\ b_1 \partial_2 v_1 + v_1 \partial_2 b_1 + b_2 \partial_2 v_2 + v_2 \partial_2 b_2 + b_3 \partial_2 v_3 + v_3 \partial_2 b_3 \\ b_1 \partial_3 v_1 + v_1 \partial_3 b_1 + b_2 \partial_3 v_2 + v_2 \partial_3 b_2 + b_3 \partial_3 v_3 + v_3 \partial_3 b_3 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} v_1 \partial_1 b_1 + v_2 \partial_1 b_2 + v_3 \partial_1 b_3 \\ v_1 \partial_2 b_1 + v_2 \partial_2 b_2 + v_3 \partial_2 b_3 \\ v_1 \partial_3 b_1 + v_2 \partial_3 b_2 + v_3 \partial_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 b_1 & \partial_1 b_2 & \partial_1 b_3 \\ \partial_2 b_1 & \partial_2 b_2 & \partial_2 b_3 \\ \partial_3 b_1 & \partial_3 b_2 & \partial_3 b_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} = \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Alors en substituant  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{V}$  par les grandeurs du manuscrit, on justifie les approximations (2.96d) et (2.96g).

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{V}) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + v_3 a_{13} \\ v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + v_3 a_{23} \\ v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \partial_1(v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + v_3 a_{13}) + \partial_2(v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + v_3 a_{23}) + \partial_3(v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33}) \\
&= v_1 \partial_1 a_{11} + a_{11} \partial_1 v_1 + v_2 \partial_1 a_{12} + a_{12} \partial_1 v_2 + v_3 \partial_1 a_{13} + a_{13} \partial_1 v_3 \\
&\quad + v_1 \partial_2 a_{21} + a_{21} \partial_2 v_1 + v_2 \partial_2 a_{22} + a_{22} \partial_2 v_2 + v_3 \partial_2 a_{23} + a_{23} \partial_2 v_3 \\
&\quad + v_1 \partial_3 a_{31} + a_{31} \partial_3 v_1 + v_2 \partial_3 a_{32} + a_{32} \partial_3 v_2 + v_3 \partial_3 a_{33} + a_{33} \partial_3 v_3 \\
&\approx v_1(\partial_1 a_{11} + \partial_2 a_{21} + \partial_3 a_{31}) + v_2(\partial_1 a_{12} + \partial_2 a_{22} + \partial_3 a_{32}) + v_3(\partial_1 a_{13} + \partial_2 a_{23} + \partial_3 a_{33}) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 a_{11} + \partial_2 a_{21} + \partial_3 a_{31} \\ \partial_1 a_{12} + \partial_2 a_{22} + \partial_3 a_{32} \\ \partial_1 a_{13} + \partial_2 a_{23} + \partial_3 a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
&= (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{A}}}) \cdot \mathbf{V}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Alors en substituant  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  et  $\mathbf{V}$  par les grandeurs du manuscrit, on justifie (2.96a) et en utilisant (2.96g), on justifie aussi (2.96h).

$$\begin{aligned}
& \nabla \left( \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{N} = \nabla \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + v_3 a_{13} \\ v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + v_3 a_{23} \\ v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N} \\
& = \begin{pmatrix} \partial_1(v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + v_3 a_{13}) & \partial_2(v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + v_3 a_{13}) & \partial_3(v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + v_3 a_{13}) \\ \partial_1(v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + v_3 a_{23}) & \partial_2(v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + v_3 a_{23}) & \partial_3(v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + v_3 a_{23}) \\ \partial_1(v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33}) & \partial_2(v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33}) & \partial_3(v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N} \\
& \approx \begin{pmatrix} v_1 \partial_1 a_{11} + v_2 \partial_1 a_{12} + v_3 \partial_1 a_{13} & v_1 \partial_2 a_{11} + v_2 \partial_2 a_{12} + v_3 \partial_2 a_{13} & v_1 \partial_3 a_{11} + v_2 \partial_3 a_{12} + v_3 \partial_3 a_{13} \\ v_1 \partial_1 a_{21} + v_2 \partial_1 a_{22} + v_3 \partial_1 a_{23} & v_1 \partial_2 a_{21} + v_2 \partial_2 a_{22} + v_3 \partial_2 a_{23} & v_1 \partial_3 a_{21} + v_2 \partial_3 a_{22} + v_3 \partial_3 a_{23} \\ v_1 \partial_1 a_{31} + v_2 \partial_1 a_{32} + v_3 \partial_1 a_{33} & v_1 \partial_2 a_{31} + v_2 \partial_2 a_{32} + v_3 \partial_2 a_{33} & v_1 \partial_3 a_{31} + v_2 \partial_3 a_{32} + v_3 \partial_3 a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N} \\
& = \begin{pmatrix} v_1(n_1 \partial_1 a_{11} + n_2 \partial_2 a_{11} + n_3 \partial_3 a_{11}) + v_2(n_1 \partial_1 a_{12} + n_2 \partial_2 a_{12} + n_3 \partial_3 a_{12}) + v_3(n_1 \partial_1 a_{13} + n_2 \partial_2 a_{13} + n_3 \partial_3 a_{13}) \\ v_1(n_1 \partial_1 a_{21} + n_2 \partial_2 a_{21} + n_3 \partial_3 a_{21}) + v_2(n_1 \partial_1 a_{22} + n_2 \partial_2 a_{22} + n_3 \partial_3 a_{22}) + v_3(n_1 \partial_1 a_{23} + n_2 \partial_2 a_{23} + n_3 \partial_3 a_{23}) \\ v_1(n_1 \partial_1 a_{31} + n_2 \partial_2 a_{31} + n_3 \partial_3 a_{31}) + v_2(n_1 \partial_1 a_{32} + n_2 \partial_2 a_{32} + n_3 \partial_3 a_{32}) + v_3(n_1 \partial_1 a_{33} + n_2 \partial_2 a_{33} + n_3 \partial_3 a_{33}) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} n_1 \partial_1 a_{11} + n_2 \partial_2 a_{11} + n_3 \partial_3 a_{11} & n_1 \partial_1 a_{12} + n_2 \partial_2 a_{12} + n_3 \partial_3 a_{12} & n_1 \partial_1 a_{13} + n_2 \partial_2 a_{13} + n_3 \partial_3 a_{13} \\ n_1 \partial_1 a_{21} + n_2 \partial_2 a_{21} + n_3 \partial_3 a_{21} & n_1 \partial_1 a_{22} + n_2 \partial_2 a_{22} + n_3 \partial_3 a_{22} & n_1 \partial_1 a_{23} + n_2 \partial_2 a_{23} + n_3 \partial_3 a_{23} \\ n_1 \partial_1 a_{31} + n_2 \partial_2 a_{31} + n_3 \partial_3 a_{31} & n_1 \partial_1 a_{32} + n_2 \partial_2 a_{32} + n_3 \partial_3 a_{32} & n_1 \partial_1 a_{33} + n_2 \partial_2 a_{33} + n_3 \partial_3 a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
& = \left( (\mathbf{N} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{A}} \right) \cdot \mathbf{V}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Alors en substituant  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{N}$  par les grandeurs du manuscrit, on justifie l'approximation (2.96b).

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \left( \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{V} \right) = \nabla \cdot \left( \nabla \left( \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{V} \right) \right) \\
& \approx \nabla \cdot \begin{pmatrix} v_1 \partial_1 a_{11} + v_2 \partial_1 a_{12} + v_3 \partial_1 a_{13} & v_1 \partial_2 a_{11} + v_2 \partial_2 a_{12} + v_3 \partial_2 a_{13} & v_1 \partial_3 a_{11} + v_2 \partial_3 a_{12} + v_3 \partial_3 a_{13} \\ v_1 \partial_1 a_{21} + v_2 \partial_1 a_{22} + v_3 \partial_1 a_{23} & v_1 \partial_2 a_{21} + v_2 \partial_2 a_{22} + v_3 \partial_2 a_{23} & v_1 \partial_3 a_{21} + v_2 \partial_3 a_{22} + v_3 \partial_3 a_{23} \\ v_1 \partial_1 a_{31} + v_2 \partial_1 a_{32} + v_3 \partial_1 a_{33} & v_1 \partial_2 a_{31} + v_2 \partial_2 a_{32} + v_3 \partial_2 a_{33} & v_1 \partial_3 a_{31} + v_2 \partial_3 a_{32} + v_3 \partial_3 a_{33} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \partial_1(v_1 \partial_1 a_{11} + v_2 \partial_1 a_{12} + v_3 \partial_1 a_{13}) + \partial_2(v_1 \partial_2 a_{11} + v_2 \partial_2 a_{12} + v_3 \partial_2 a_{13}) + \partial_3(v_1 \partial_3 a_{11} + v_2 \partial_3 a_{12} + v_3 \partial_3 a_{13}) \\ \partial_1(v_1 \partial_1 a_{21} + v_2 \partial_1 a_{22} + v_3 \partial_1 a_{23}) + \partial_2(v_1 \partial_2 a_{21} + v_2 \partial_2 a_{22} + v_3 \partial_2 a_{23}) + \partial_3(v_1 \partial_3 a_{21} + v_2 \partial_3 a_{22} + v_3 \partial_3 a_{23}) \\ \partial_1(v_1 \partial_1 a_{31} + v_2 \partial_1 a_{32} + v_3 \partial_1 a_{33}) + \partial_2(v_1 \partial_2 a_{31} + v_2 \partial_2 a_{32} + v_3 \partial_2 a_{33}) + \partial_3(v_1 \partial_3 a_{31} + v_2 \partial_3 a_{32} + v_3 \partial_3 a_{33}) \end{pmatrix} \\
& \approx \begin{pmatrix} v_1(\partial_1^2 a_{11} + \partial_2^2 a_{11} + \partial_3^2 a_{11}) + v_2(\partial_1^2 a_{12} + \partial_2^2 a_{12} + \partial_3^2 a_{12}) + v_3(\partial_1^2 a_{13} + \partial_2^2 a_{13} + \partial_3^2 a_{13}) \\ v_1(\partial_1^2 a_{21} + \partial_2^2 a_{21} + \partial_3^2 a_{21}) + v_2(\partial_1^2 a_{22} + \partial_2^2 a_{22} + \partial_3^2 a_{22}) + v_3(\partial_1^2 a_{23} + \partial_2^2 a_{23} + \partial_3^2 a_{23}) \\ v_1(\partial_1^2 a_{31} + \partial_2^2 a_{31} + \partial_3^2 a_{31}) + v_2(\partial_1^2 a_{32} + \partial_2^2 a_{32} + \partial_3^2 a_{32}) + v_3(\partial_1^2 a_{33} + \partial_2^2 a_{33} + \partial_3^2 a_{33}) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \partial_1^2 a_{11} + \partial_2^2 a_{11} + \partial_3^2 a_{11} & \partial_1^2 a_{12} + \partial_2^2 a_{12} + \partial_3^2 a_{12} & \partial_1^2 a_{13} + \partial_2^2 a_{13} + \partial_3^2 a_{13} \\ \partial_1^2 a_{21} + \partial_2^2 a_{21} + \partial_3^2 a_{21} & \partial_1^2 a_{22} + \partial_2^2 a_{22} + \partial_3^2 a_{22} & \partial_1^2 a_{23} + \partial_2^2 a_{23} + \partial_3^2 a_{23} \\ \partial_1^2 a_{31} + \partial_2^2 a_{31} + \partial_3^2 a_{31} & \partial_1^2 a_{32} + \partial_2^2 a_{32} + \partial_3^2 a_{32} & \partial_1^2 a_{33} + \partial_2^2 a_{33} + \partial_3^2 a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\
& = \left( \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} \right) \cdot \mathbf{V}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Alors en substituant  $\bar{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{V}$  par les grandeurs du manuscrit, on justifie l'approximation (2.96c).

### C. Annexe : Calcul préparatoire à l'écriture de la propriété effective dynamique due au changement de phase.

Dans cette annexe, on réalise les calculs permettant de démontrer l'équation (2.108). Cette expression permet de factoriser par la vitesse moyenne et donc d'obtenir l'expression de la propriété effective associée. On cherche donc à démontrer la reformulation suivante :

$$\left( \overline{\overline{a_{kj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j}} \right) (\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = ((\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) \overline{\overline{a_{kj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j}} \quad (2.108)$$

On introduit les grandeurs suivantes afin de faire le calcul dans le cas général. Soient  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  une matrice réelle de dimension 3 et  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{N}$  des vecteurs réels de dimension 3. On note leurs coefficients comme suit :

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Le calcul est alors le suivant :

$$\begin{aligned} & \left( \overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{N} = \left( \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{N} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_2w_1 + a_{13}v_3w_1 & a_{11}v_1w_2 + a_{12}v_2w_2 + a_{13}v_3w_2 & a_{11}v_1w_3 + a_{12}v_2w_3 + a_{13}v_3w_3 \\ a_{21}v_1w_1 + a_{22}v_2w_1 + a_{23}v_3w_1 & a_{21}v_1w_2 + a_{22}v_2w_2 + a_{23}v_3w_2 & a_{21}v_1w_3 + a_{22}v_2w_3 + a_{23}v_3w_3 \\ a_{31}v_1w_1 + a_{32}v_2w_1 + a_{33}v_3w_1 & a_{31}v_1w_2 + a_{32}v_2w_2 + a_{33}v_3w_2 & a_{31}v_1w_3 + a_{32}v_2w_3 + a_{33}v_3w_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_2w_1 + a_{13}v_3w_1)n_1 + (a_{11}v_1w_2 + a_{12}v_2w_2 + a_{13}v_3w_2)n_2 + (a_{11}v_1w_3 + a_{12}v_2w_3 + a_{13}v_3w_3)n_3 \\ (a_{21}v_1w_1 + a_{22}v_2w_1 + a_{23}v_3w_1)n_1 + (a_{21}v_1w_2 + a_{22}v_2w_2 + a_{23}v_3w_2)n_2 + (a_{21}v_1w_3 + a_{22}v_2w_3 + a_{23}v_3w_3)n_3 \\ (a_{31}v_1w_1 + a_{32}v_2w_1 + a_{33}v_3w_1)n_1 + (a_{31}v_1w_2 + a_{32}v_2w_2 + a_{33}v_3w_2)n_2 + (a_{31}v_1w_3 + a_{32}v_2w_3 + a_{33}v_3w_3)n_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1a_{11}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) + v_2a_{12}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) + v_3a_{13}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) \\ v_1a_{21}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) + v_2a_{22}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) + v_3a_{23}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) \\ v_1a_{31}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) + v_2a_{32}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) + v_3a_{33}(w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} \\ &= \begin{pmatrix} (w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3) \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V} = \left( (\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}) \overline{\overline{\mathbf{A}}} \right) \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Si on substitue  $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\overline{a_{kj} \langle \mathbf{v}_j \rangle^j}}$ ,  $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_j \rangle^j$ ,  $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{v}_{\mathbf{k}})$  et  $\mathbf{N} = \mathbf{n}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  dans cette expression (C.1), on obtient bien l'équation souhaitée (2.108).



## Bibliographie

- [1] M. J. Adams, M. A. Mullier, and J. P. K. Seville. Agglomerate strength measurement using a uniaxial confined compression test. *Powder Technology*, 78 :5–13, 1994.
- [2] L. Amarsid. *Rhéologie Des Écoulements Granulaires Immergés dans un Fluide Visqueux*. PhD thesis, Université Montpellier Sciences et Techniques du Languedoc, 2015.
- [3] L. Amarsid, J.-Y. Delenne, J.-M. Vanson, and P. S. Bruno Collard. LBM/DEM simulation of heat transfer in granular suspensions. In *Powders and Granular Materials Challenges and Future Trends*, 2019. Montpellier, France.
- [4] T. . B. Anderson and R. Jackson. A fluid mechanical description of fluidized beds equations of motion. *I&EC Fundamentals*, 6(4), 1967.
- [5] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen. *Granular media : between fluid and solid*. Cambridge University Press, 2013.
- [6] A. Bachrata, L. Trotignon, P. Sciora, and M. Saez. A three-dimensional neutronics – thermal-hydraulics unprotected loss of flow simulation in sodium-cooled fast reactor with mitigation devices. *Nuclear Engineering and Design*, 346 :1–9, may 2019.
- [7] R. A. Bagnold. The physical aspects of dry deserts. In *Biology of Deserts*. Institute of Biology of London, 1954.
- [8] R. A. Bagnold. The shearing and dilatation of dry sand and the "singing" mechanism. *F.R.S.*, 1966.
- [9] G. Barakos, E. Mitsoulis, and D. Assimacopoulos. Natural convection flow in a square cavity revisited : laminar and turbulent models with wall functions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18 :695–719, 1994.
- [10] A. Barletta. Local energy balance, specific heats and the oberbeck–boussinesq approximation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52 :5266–5270, 2009.
- [11] G. K. Batchelor and J. T. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c_2$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 56(3) :401–427, 1972.
- [12] A. Baytas. Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43 :2089–2099, 2000.
- [13] J. Bear and J. Bensabat. Advective fluxes in multihase porous media under nonisothermal conditions. *Transport in Porous Media*, 4 :423–448, 1989.
- [14] M. Belerrajoul, Y. Davit, M. Quintard, O. Simonin, and F. Duval. Modeling heat transfer in gas-particle mixtures : Calculation of the macro-scale heat exchange in eulerian–lagrangian approaches using spatial averaging. *International Journal of Multiphase Flow*, 117 :64–80, 2019.
- [15] F. Bertrand, A. Bachrata, N. Marie, S. Kubo, Y. Onoda, A. Shibata, R. Kubota, and B. Carlucci. Mitigation of severe accidents for SFR and associated event sequence assessment. *Nuclear Engineering and Design*, 372(110993), 2021.

- [16] L. Bocquet, Élisabeth Charlaix, and F. Restagno. Physics of humid granular media. *C. R. Physique*, 3 :207–215, 2002.
- [17] B. Bonin. *Réacteurs nucléaires à caloporteur sodium*. CEA Saclay, 2014.
- [18] C. Bonnoit, T. Darnige, E. Clement, and A. Lindner. Inclined plane rheometry of a dense granular suspension. *Journal of Rheology*, 54(1) :65–79, 2010.
- [19] J. A. R. Borges, L. F. Pires, and A. B. Pereira. Computed tomography to estimate the representative elementary area for soil porosity measurements. *The Scientific World Journal*, 2012(526380), 2012.
- [20] P. Bousquet-Melou, B. Goyeau, M. Quintard, F. Fichot, and D. Gobin. Average momentum equation for interdendritic flow in a solidifying columnar mushy zone. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(17) :3651–3665, 2002.
- [21] F. Boyer, Élisabeth Guazzelli, and O. Pouliquen. Unifying suspension and granular rheology. *Physical Review Letters*, 107(188301), 2011.
- [22] G. C. Buscaglia, F. A. Bombardelli, and M. H. Garcia. Numerical modeling of large-scale bubble plumes accounting for mass transfer effects. *International Journal of Multiphase Flow*, 28 :1763–1785, 2002.
- [23] A. Chakravarty, K. Ghosh, S. Sen, and A. Mukhopadhyay. Impact of liquid coolant subcooling on boiling heat transfer and dryout in heat-generating porous media. *Thermal Science and Engineering Progress*, 30 :101251, 2022.
- [24] S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases : an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. Cambridge University Press, 1990.
- [25] J. Chauchat, Z. Cheng, T. Nagel, C. Bonamy, and T.-J. Hsu. SedFoam-2.0 : a 3-d two-phase flow numerical model for sediment transport. *Geoscientific Model Development*, 10(12) :4367–4392, 2017.
- [26] J. Chauchat, S. Guillou, D. P. Bang, and K. D. Nguyen. Modelling sedimentation-consolidation in the framework of a one-dimensional two-phase flow model. *Journal of Hydraulic Research*, 51(3) :293–305, 2013.
- [27] S. Cheng, J. Cui, Y. Qian, P. Gong, T. Zhang, S. Wang, and G. Jiang. An experimental investigation on flow-regime characteristics in debris bed formation behavior using gas-injection. *Annals of Nuclear Energy*, 112 :856–868, 2018.
- [28] S. Cheng, D. Hirahara, Y. Tanaka, Y. Gondai, B. Zhang, T. Matsumoto, K. Morita, K. Fukuda, H. Yamano, T. Suzuki, and Y. Tobita. Experimental investigation of bubbling in particle beds with high solid holdup. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 35(2) :405–415, 2011.
- [29] S. Cheng, H. Tagami, H. Yamano, T. Suzuki, Y. Tobita, S. Taketa, S. Nishi, T. Nishikido, B. Zhang, T. Matsumoto, and K. Morita. An investigation on debris bed self-leveling behavior with non-spherical particles. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 51(9) :1096–1106, 2014.
- [30] S. Cheng, H. Tagami, H. Yamano, T. Suzuki, Y. Tobita, B. Zhang, T. Matsumoto, and K. Morita. Evaluation of debris bed self-leveling behavior : A simple empirical approach and its validations. *Annals of Nuclear Energy*, 63 :188–198, 2014.

- [31] S. Cheng, Y. Tanaka, Y. Gondai, T. Kai, B. Zhang, T. Matsumoto, K. Morita, K. Fukuda, H. Yamano, T. Suzuki, and Y. Tobita. Experimental studies and empirical models for the transient self-leveling behavior in debris bed. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 48(10) :1327–1336, 2011.
- [32] Z. Cheng and T.-J. Hsu. A multi-dimensional two-phase eulerian model for sediment transport—two phase euler sed foam (version 1.0). Technical report, Center for Applied Coastal Research University of Delaware, 2014.
- [33] F. Cherblanc, A. Ahmadi, and M. Quintard. Two-domain description of solute transport in heterogeneous porous media : Comparison between theoretical predictions and numerical experiments. *Advances in Water Resources*, 30(5) :1127–1143, 2007.
- [34] F. Chevoir. *Ecoulements granulaires*. IFSTTAR, 2008.
- [35] N. Chikhi and F. Fichot. Experimental and theoretical study of large scale debris bed reflood in the PEARL facility. *Nuclear Engineering and Design*, 312 :48–58, feb 2017.
- [36] R. Clavier. Bain de corium stratifié sur le récupérateur d'un RNR-Na : proposition de modélisation et premiers ordres de grandeurs. Technical report, IRESNE CEA, 2021. CEA/DES/IRESNE/DTN/SMTA/LMAG/NT/DR 2021-007-INDICE A.
- [37] R. Clavier, N. Chikhi, F. Fichot, and M. Quintard. Experimental investigation on single-phase pressure losses in nuclear debris beds : Identification of flow regimes and effective diameter. *Nuclear Engineering and Design*, 292 :222–236, oct 2015.
- [38] R. Clavier, N. Chikhi, F. Fichot, and M. Quintard. Modeling of Inertial Multi-phase Flows through High Permeability Porous Media : Friction Closure Laws. *International Journal of Multiphase Flow*, 91 :243–261, 2017.
- [39] H. Combeau, M. Založnik, S. Hans, and P. E. Richy. Prediction of macrosegregation in steel ingots : Influence of the motion and the morphology of equiaxed grains. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 40 :289–304, 2009.
- [40] C. A. Coulomb. Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences*, pages 343–382, 1776.
- [41] S. Courrech Du Pont. *Avalanches granulaires en milieu fluide*. PhD thesis, Université Paris XI, 2003.
- [42] P. Coussot and C. Ancey. Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes. *Physical Review E*, 59(4), 1999.
- [43] J. Crassous, L. Bocquet, S. Ciliberto, and C. Laroche. Humidity effect on static aging of dry friction. *Europhysics Letters*, 47(5) :562–567, 1999.
- [44] E. Csengeri. *Fuel Discharge Towards the Core Catcher In sodium-cooled Fast Reactor under Severe accident Conditions with Mitigation Devices*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2022.
- [45] S. Dagois-Bohy, S. Hormozi, E. Guazzelli, and O. Pouliquen. Rheology of dense suspensions of non-colloidal spheres in yield-stress fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 776 :R2, 2015.

- [46] G. D'Anna. Mechanical properties of granular media, including snow, investigated by a low-frequency forced torsion pendulum. *Physical Review E*, 62(1) :982–992, 2000.
- [47] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau*, volume 1. Victor Dalmont, 1856.
- [48] Y. Davit, C. G. Bell, H. M. Byrne, L. A. C. Chapman, L. S. Kimpton, G. E. Lang, K. H. L. Leonard, J. M. Oliver, N. C. Pearson, R. J. Shipley, S. L. Waters, J. P. Whiteley, B. D. Wood, and M. Quintard. Homogenization Via Formal Multiscale Asymptotics and Volume Averaging : How Do the Two Techniques Compare? *Advances in Water Resources*, 62 :178–206, 2013.
- [49] T. Dbouk, L. Lobry, and E. Lemaire. Normal stresses in concentrated non-brownian suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 715 :239–272, 2013.
- [50] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quere. *Capillarity and Wetting Phenomena : Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer, 2004.
- [51] G. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity : a benchmark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3 :249–264, 1983.
- [52] J. M. Delhay. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 :395–409, 1974.
- [53] J. M. Delhay, M. Giot, and M. L. Riethmuller. *Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*. Series in Thermal and Fluids Engineering. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, NY, 1981.
- [54] J. Ding and D. Gidaspow. A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow. *AIChE Journal*, 36(4), 1990.
- [55] M. Ding and A. Kantzas. Capillary number correlations for gas-liquid systems. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 46, 2007.
- [56] T. G. Drake. Structural features in granular flows. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 95(B6) :8681–8696, 1990.
- [57] A. Drouillet. *Modélisation et simulation numérique d'un front de fusion/solidification à l'interface d'un bain de corium*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2021.
- [58] O. Dubé. *Dynamique Particulaire dans des Lits Fixes et Rotatifs*. PhD thesis, Université de Montréalcole Polytechnique de Montréal, 2013.
- [59] Y. Dufresne. *D'Éveloppement d'un Solveur 3D Massivement Parallèle pour la Prédiction d'Écoulements Granulaires Réactifs en Géométrie Complexe*. PhD thesis, INSA Rouen Normandie, 2019.
- [60] F. Duval, F. Fichot, and M. Quintard. A local thermal non-equilibrium model for two-phaseflows with phase-change in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47 :613–639, 2004.
- [61] S. Edwards and R. Oakeshott. Theory of powders. *Physica A*, 1989.
- [62] A. Einstein. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. *Ann. Phys.*, 19 :289–306, 1906.

- [63] A. Einstein. Berichtigung zu meiner arbeit : Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. *Ann. Phys.*, 34 :591–592, 1911.
- [64] B. J. Ennis, G. Tardos, and R. Pfeffer. A microlevel-based characterization of granulation phenomena. *Powder Technology*, 65 :257–272, 1991.
- [65] S. Ergun. Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress*, 48(2), 1952.
- [66] P. Evesque. Analysis of the statistics of sandpile avalanches using soil-mechanics results and concepts. *Physical Review A*, 43(6), 1991.
- [67] C. L. Feng and A. B. Yu. Quantification of the relationship between porosity and interparticle forces for the packing of wet uniform spheres. *Journal of Colloid and Interface Science*, 231 :136–142, 2000.
- [68] F. Fichot. Ecoulement liquide-vapeur dans un milieu poreux. Technical report, IPSN, 1995.
- [69] T. Finger and R. Stannarius. Influences of the interstitial liquid on segregation patterns of granular slurries in a rotating drum. *Physical Review E*, 75(3) :031308, mar 2007.
- [70] O. J. Foust. *Sodium-NaK Engineering Handbook : Sodium Chemistry and Physical Properties*, volume 1. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1972.
- [71] N. Fraysse, H. Thomé, and L. Petit. Humidity effects on the stability of a sandpile. *The European Physical Journal B*, 11 :615–619, 1999.
- [72] S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, and L. Lobry. Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 757 :514–549, 2014.
- [73] G. D. R. M. D. (GDRMiDi). On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14(4) :341–365, aug 2004.
- [74] D. Geromichalos, M. M. Kohonen, F. Mugele, and S. Herminghaus. Mixing and condensation in a wet granular medium. *Physical Review Letters*, 90(16), apr 2003.
- [75] G. Geroudet and F. Balard. Lideb. Technical report, CEA, 1989.
- [76] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method\*. *Journal of Computational Physics*, 48 :387–411, 1982.
- [77] I. Goldhirsch. Introduction to granular temperature. *Powder Technology*, 182(2) :130–136, feb 2008.
- [78] P. Gondret, M. Lance, and L. Petit. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of Fluids*, 14(2) :643, 2002.
- [79] B. Goyeau, J.-P. Songbe, and D. Gobin. Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the darcy-brinkman formulation. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, 39(7) :1363–1378, 1996.
- [80] J. M. N. T. Gray. Particle segregation in dense granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50(1) :407–433, 2018.
- [81] J. M. N. T. Gray and A. N. Edwards. A depth-averaged  $\mu(i)$ -rheology for shallow granular free-surface flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 755 :503–534, aug 2014.

- [82] C. J. Greenshields. *OpenFOAM User Guide, Version 10*. OpenFOAM Foundation Ltd., 2022.
- [83] R. J. Gross, M. R. Bear, and C. E. Hickox. The application of flux-corrected transport (FCT) to high rayleigh number natural convection in a porous medium. In *Proceedings of 8th International Heat Transfer Conference*, 1986. San Francisco, CA, USA.
- [84] T. Gröger, U. Tüzün, and D. M. Heyes. Modelling and measuring of cohesion in wet granular materials. *Powder Technology*, 133 :203–215, 2003.
- [85] É. Guazzelli and O. Pouliquen. Rheology of dense granular suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 852, aug 2018.
- [86] F. Guillard. *Traînée et Portance dans les Milieux Granulaires*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2013.
- [87] L. Guo, K. Morita, H. Tagami, and Y. Tobita. Numerical simulation of a self-leveling experiment using a hybrid method. *Mechanical Engineering Journal*, 1(4), 2014.
- [88] L. Guo, K. Morita, and Y. Tobita. Numerical simulations of gas–liquid–particle three-phase flows using a hybrid method. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 53(2) :271–280, 2015.
- [89] F. Hakimi. *High-dimensional sensitivity analysis methods for computationally expensive simulators modeling a severe nuclear accident*. Theses, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2023.
- [90] T. C. Halsey and A. J. Levine. How sandcastles fall. *Physical Review Letters*, 80(14), 1998.
- [91] C. Hanotin. *Rhéophysique des suspensions granulaires vibrées*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2014.
- [92] S. Herminghaus. Dynamics of wet granular matter. *Advances in Physics*, 54(3) :221–261, 2005.
- [93] F. A. Howes and S. Whitaker. The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science*, 40(8) :1387–1392, 1985.
- [94] T.-J. Hsu, J. T. Jenkins, and P. L.-F. Liu. On two-phase sediment transport : Sheet flow of massive particles. *The Royal Society*, 460(2048) :2223–2250, aug 2004.
- [95] O. J. Ilegbusi and M. D. Mat. A comparison of predictions and measurements of kinematic mixing of two fluids in a 2d enclosure. *Applied Mathematical Modelling*, 24 :199–213, 2000.
- [96] M. Ishii and N. Zuber. Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. *AIChE Journal*, 25(5), 1979.
- [97] E. Izard. *Modélisation Numérique des Écoulements Granulaires Denses Immérgés dans un Fluide*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2014.
- [98] R. Jackson. Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particle-sand and a newtonian fluid. *Chemical Engineering Science*, 52(15) :2457–2469, 1997.
- [99] H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Physics of the granular state. *Science*, 1992.
- [100] K. Jang, W. Han, and K. Y. Huh. Simulation of a moving-bed reactor and a fluidized-bed reactor by DPM and MPPIC in OpenFOAM®. In *OpenFOAM®*, pages 419–435. Springer International Publishing, 2019.
- [101] P. C. Johnson and R. Jackson. Frictional–collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *Journal of Fluid Mechanics*, 176(-1) :67, mar 1987.

- [102] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature Letters*, 441(7094) :727–730, jun 2006.
- [103] D. D. Joseph, T. S. Ltmkgren, R. Jackson, and D. A. Saville. Ensemble averaged and mixture theory equations for incompressible fluid-particle suspensions. *Int. J. Multiphase Flow*, 1989.
- [104] E. Koos. Capillary suspensions : Particle networks formed through the capillary force. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 19(6) :575–584, 2014.
- [105] I. M. Krieger and T. J. Dougherty. A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, 3 :137–152, 1959.
- [106] D. Lasseux, A. Ahmadi, and A. A. A. Arani. Two-phase inertial flow in homogeneous porous media : A theoretical derivation of a macroscopic model. *Transport in Porous Media*, 75(3) :371–400, may 2008.
- [107] D. Lasseux, M. Quintard, and S. Whitaker. Determination of permeability tensors for two-phase flow in homogeneous porous media : Theory. *Transport in Porous Media*, 24 :107–137, 1996.
- [108] D. Lasseux and F. J. Valdés-Parada. A macroscopic model for immiscible two-phase flow in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 944 :A43, 2022.
- [109] P. Le Quere and T. Alziary De Roquefort. Computation on natural convection in two-dimensional cavities with chebyshev polynomial. *Journal of Computational Physics*, 57 :210–228, 1985.
- [110] C.-Y. Li, K. Wang, M. Pellegrini, N. Erkan, and K. Okamoto. Numerical simulation and validation of debris bed self-leveling behavior with mixed-density particles using CFD-DEM coupling algorithm. *Nuclear Technology*, pages 1–17, nov 2021.
- [111] Y. Li. *CFD Pre-test Analysis of SIMECO-2Experiment*. Mathesis, KTH Engineering Sciences, jul 2016.
- [112] G. Lian, C. Thornton, and M. J. Adams. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies. *Journal of Colloid and Interface Science*, 161 :138–147, 1993.
- [113] C.-C. Liao and S.-S. Hsiau. Influence of interstitial fluid viscosity on transport phenomenon in sheared granular materials. *Chemical Engineering Science*, 64(11) :2562–2569, jun 2009.
- [114] D. R. Lide. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press LLC, 85 edition, 2004.
- [115] R. Lipinski. A one-dimensional particle bed dryout model. *Trans. Am. Nucl. Soc*, 38 :386–387, 1981.
- [116] P. Liu, S. Yasunaka, T. Matsumoto, K. Morita, K. Fukuda, and Y. Tobita. Simulation of the dynamic behavior of the solid particle bed in a liquid pool : Sensitivity of the particle jamming and particle viscosity models. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 43(2) :140–149, feb 2006.
- [117] X. Liu, K. Morita, and S. Zhang. Comparative study of two corrective gradient models in the simulation of multiphase flows using moving particle semi-implicit method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 92(6) :573–586, dec 2019.
- [118] C. K. K. Lun and S. B. Savage. The effects of an impact velocity dependent coefficient of restitution on stresses developed by sheared granular materials. *Acta Meehanica*, 63 :15–44, 1986.
- [119] C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepurniy. Kinetic theories for granular flow : Inelastic particles in couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *Journal of Fluid Mechanics*, 140 :223–256, mar 1984.

- [120] A. Malan, R. Lewis, and P. Nithiarasu. An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows : part II. Application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :715–729, 2002.
- [121] D. Manole and J. Lage. Numerical benchmark results for natural convection in a porous medium cavity. In *Heat and Mass Transfer in Porous Media, ASME Conference 1992*, volume HTD 216, page 55–60, 1992.
- [122] R. Mari, R. Seto, J. F. Morris, and M. M. Denn. Shear thickening, frictionless and frictional rheologies in non-brownian suspensions. *Journal of Rheology*, 58(6) :1693–1724, 2014.
- [123] C. M. Marle. Ecoulements monophasiques en milieu poreux. *Rev. Inst. Français du Pétrole*, 22(10) :1471–1509, 1967.
- [124] C. M. Marle. On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media. *Int. J. Engng. Sci.*, 20(5) :643–662, 1982.
- [125] N. Massarotti, F. Arpino, R. W. Lewis, and P. Nithiarasu. Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(10) :1618–1640, jun 2006.
- [126] P. Mayeli and G. J. Sheard. Buoyancy-driven flows beyond the boussinesq approximation : A brief review. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 125 :105316, jun 2021.
- [127] A. Mehta and S. F. Edwards. Statistical mechanics of powder mixtures. *Physica A*, 157 :1091–1100, 1989.
- [128] M. Modak, V. V. Nirgude, and H. S. Park. Mapping of quench front propagation in a heated cylindrical particle bed – MONET tests. *Nuclear Engineering and Design*, 400 :112080, dec 2022.
- [129] P. C. F. Møller and D. Bonn. The shear modulus of wet granular matter. *Europhysics Letters*, 80(3) :38002, 2007.
- [130] K. Morita, T. Matsumoto, S. Nishi, T. Nishikido, S. Cheng, H. Tagami, T. Suzuki, and Y. Tobita. A new empirical model for self-leveling behavior of cylindrical particle beds. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 53(5) :713–725, jan 2016.
- [131] N. Moussa, B. Goyeau, H. Duval, and D. Gobin. Macroscopic model for solidification in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 113 :704–715, oct 2017.
- [132] P. P. Nagrani, F. Municchi, A. M. Marconnet, and I. C. Christov. Two-fluid modeling of heat transfer in flows of dense suspensions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 183(122068), 2022.
- [133] A. K. Nayak, B. R. Sehgal, and A. V. Stepanyan. An experimental study on quenching of aradially stratified heated porous bed. *Nuclear Engineering and Design*, 236 :2189–2198, 2006.
- [134] J. Ni and C. Beckermann. A volume-averaged two-phase model for transport phenomena during solidification. *Metallurgical Transactions B*, 22B :349–361, 1991.
- [135] J. Niessner and S. M. Hassanizadeh. Non-equilibrium interphase heat and mass transfer during two-phase flow in porous media — theoretical considerations and modeling. *Advances in Water Ressources*, 32 :1756–1766, 2009.



- [136] P. R. Nott, E. Guazzelli, and O. Pouliquen. The suspension balance model revisited. *Physics of Fluids*, 23(043304), 2011.
- [137] S. Nowak, A. Samadani, and A. Kudrolli. Maximum angle of stability of a wet granular pile. *Nature Physics*, 1(1) :50–52, sep 2005.
- [138] S. K. Oruganti. Implementation of cavitation models into the multiphaseeulerfoam solver. In *In Proceedings of CFD with OpenSource Software*. Håkan Nilsson, 2017.
- [139] G. Ovarlez, F. Bertrand, and S. Rodts. Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *Journal of Rheology*, 50(3) :259–292, 2006.
- [140] M. Pakpour, M. Habibi, P. Møller, and D. Bonn. How to construct the perfect sandcastle. *Scientific Reports*, 2(549), 2012.
- [141] L. H. S. Phan, P. M. Ngo, R. Miura, Y. Tasaki, T. Matsumoto, W. Liu, and K. Morita. Self-leveling behavior of mixed solid particles in cylindrical bed using gas-injection method. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 56(1) :111–122, oct 2019.
- [142] S. P. Pudasaini. A general two-phase debris flow model. *Journal of Geophysical Research*, 117, 2012.
- [143] S. P. Pudasaini and M. Mergili. A multi-phase mass flow model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 124(12) :2920–2942, dec 2019.
- [144] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media I : The cellular average and the use of weighting functions. *Transport in Porous Media*, 14 :163–177, 1994.
- [145] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media II : Generalized volume averaging. *Transport in Porous Media*, 14 :179–206, 1994.
- [146] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media III : Closure and comparison between theory and experiment. *Transport in Porous Media*, 15 :31–49, 1994.
- [147] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media V : Geometrical results for two-dimensional systems. *Transport in Porous Media*, 15 :182–196, 1994.
- [148] F. Radjai, J.-N. Roux, and A. Daouadji. Modeling granular materials : Century-long research across scales. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(4) :04017002, apr 2017.
- [149] F. Radjaï, D. Wolf, S. Roux, M. Jean, and J. J. Moreau. Force networks in dense granular media. *Powders and Grains*, pages 211–214, 1997.
- [150] F. Razavi, A. Komrakova, and C. F. Lange. CFD-DEM model of particulate flow. In *Okanagan Fluid Dynamics Meeting*, 2019.
- [151] G. Repetto, T. Garcin, S. Eymery, and F. Fichot. Experimental program on debris reflooding (PEARL) – results on PRELUDE facility. *Nuclear Engineering and Design*, 264 :176–186, nov 2013.
- [152] O. Reynolds. LVII. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 20(127) :469–481, 1885.

- [153] P. G. Rognon, J.-N. Roux, D. Wolf, M. Naaïm, and F. Chevoir. Rheophysics of cohesive granular materials. *Europhysics Letters*, 74(4) :644–650, 2006.
- [154] K. H. Roscoe, A. Schofield, and P. Wroth. On the yielding of soils. *Geotechnique*, 8(1) :22–53, 1958.
- [155] H. Rumpf. *Particle Technology*. Carl Hanser Verlag, Mechanische Verfahrenstechnik, 1975.
- [156] H. Rusche. *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*. PhD thesis, University of London and Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Mechanical Engineering, 2003.
- [157] N. Saeid and I. Pop. Transient free convection in a square cavity filled with a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47 :1917–1924, 2004.
- [158] N. H. Saeid and I. Pop. Non-darcy natural convection in a square cavity filled with a porous medium. *Fluid Dynamics Research*, 36 :35–43, 2005.
- [159] G. Saingier, S. Deboeuf, and P.-Y. Lagrée. On the front shape of an inertial granular flow down a rough incline. (hal-01226495), 2015.
- [160] P. Sapin. *Etude expérimentale de l'ébullition en masse dans un milieu poreux modèle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2014.
- [161] P. Sapin, P. Duru, F. Fichot, M. Prat, and M. Quintard. Boiling in porous media : Toward a local non-equilibrium model. In *6th International Conference on Porous Media and Annual Meeting - INTERPORE 2014*, 2014.
- [162] S. B. Savage. Analyses of slow high-concentration flows of granular materials. *Journal of Fluid Mechanics*, 377 :1–26, dec 1998.
- [163] S. B. Savage and D. J. Jeffrey. The stress tensor in a granular flow at high shear rates. *Journal of Fluid Mechanics*, 110 :255–272, 1981.
- [164] M. Scheel, R. Seemann, M. Brinkmann, M. Di Michiel, A. Sheppard, B. Breidenbach, and S. Herminghaus. Morphological clues to wet granular pile stability. *Nature Materials*, 7 :189–193, 2008.
- [165] S. Schneiderbauer, A. Aigner, and S. Pirker. A comprehensive frictional-kinetic model for gas-particle flows : Analysis of fluidized and moving bed regimes. *Chemical Engineering Science*, 80 :279–292, oct 2012.
- [166] A. Schofield and P. Wroth. *Critical state soil mechanics*, volume 310. McGraw-hill London, 1968.
- [167] B. Schulz and M. Schulz. The dynamics of wet granular matter. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 352 :4877–4879, 2006.
- [168] P. Schummer. Refroidissement d'un lit de particules soumises a un degagement de chaleur interne et immergées dans un liquide. Conditions d'assechements. Etude bibliographique. Technical report, CEA, 1981.
- [169] M. Shamsuzzaman, T. Horie, F. Fuke, M. Kamiyama, T. Morioka, T. Matsumoto, K. Morita, H. Tagami, T. Suzuki, and Y. Tobita. Experimental study on debris bed characteristics for the sedimentation behavior of solid particles used as simulant debris. *Annals of Nuclear Energy*, 111 :474–486, jan 2018.

- [170] M. A. R. Sheikh, E. Son, M. Kamiyama, T. Morioka, T. Matsumoto, K. Morita, K. Matsuba, K. Kamiyama, and T. Suzuki. Sedimentation behavior of mixed solid particles. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 55(6) :623–633, jan 2018.
- [171] A. Sierou and J. F. Brady. Rheology and microstructure in concentrated noncolloidal suspensions. *Journal of Rheology*, 46(5) :1031–1056, 2002.
- [172] J. C. Slattery. Flow of viscoelastic fluids through porous media. *AIChE Journal*, 13(6), 1967.
- [173] B. Smith. A quick guide to GPLv3. *Free Software Foundation, Inc.*, 2007.
- [174] C. Soulaïne. *Modélisation des Écoulements dans les Garnissages Structurés : de l'échelle du Pore à l'échelle de la Colonne*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2012.
- [175] C. Soulaïne and M. Quintard. On the use of a Darcy-Forchheimer like model for a macro-scale description of turbulence in porous media and its application to structured packings. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 74 :88–100, jul 2014.
- [176] A. Srivastava and S. Sundaresan. Analysis of a frictional-kinetic model for gas-particle flow. *Powder Technology*, 129 :72–85, 2003.
- [177] L. Staron, P.-Y. Lagrée, and S. Popinet. The granular silo as a continuum plastic flow : The hour-glass vs the clepsydra. *Physics of Fluids*, 24(103301), 2012.
- [178] B. I. Stefanov, D. L. Timrot, E. E. Totskii, and C. Wen-Hao. Viscosity and thermal conductivity of the of sodium and potassium. *High Temperature*, 4 :131, 1966.
- [179] J. J. Stickel and R. L. Powell. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :129–149, 2005.
- [180] H. Tagami, S. Cheng, Y. Tobita, and K. Morita. Model for particle behavior in debris bed. *Nuclear Engineering and Design*, 328 :95–106, mar 2018.
- [181] E. Takasuo, S. Holmström, T. Kinnunen, and P. H. Pankakoski. The COOLOCE experiments investigating the dryout power in debris beds of heap-like and cylindrical geometries. *Nuclear Engineering and Design*, 250 :687–700, sep 2012.
- [182] G. I. Tardos. A fluid mechanistic approach to slow, frictional flow of powders. *Powder Technology*, 92 :61–74, 1997.
- [183] C. Teng, B. Zhang, and J. Shan. Study on relocation behavior of debris bed by improved bottom gas-injection experimental method. *Nuclear Engineering and Technology*, 53(1) :111–120, jan 2021.
- [184] A. M. Tentner, E. Parma, T. Wei, and R. Wigeland. Severe accident approach - final report. evaluation of design measures for severe accident prevention and consequence mitigation. Technical report, Nuclear Engineering Division, 2010.
- [185] G. R. Thorpe and S. Whitaker. Local mass and thermal equilibria in ventilated grain bulks. Part I : The development of heat and mass conservation equations. *J. Stored Prod. Res.*, 28(1) :15–27, 1992.
- [186] Y. Tobita, S. Kondo, H. Yamano, K. Morita, W. Maschek, P. Coste, and T. Cadiou. The development of SIMMER-III, an advanced computer program for LMFR safety analysis, and its application to sodium experiments. *Nuclear Technology*, 153(3) :245–255, mar 2006.

- [187] J. M. Truby, S. P. Mueller, E. W. Llewellyn, and H. M. Mader. The rheology of three-phase suspensions at low bubble capillary number. *Proc. R. Soc. A*, 471(557), 2014.
- [188] K. O. Tveito, A. Pakanati, M. M'Hamdi, H. Combeau, and M. Zaloznik. A simplified three-phase model of equiaxed solidification for the prediction of microstructure and macrosegregation in castings. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 49 :2778–2794, 2018.
- [189] A. von Boetticher, J. M. Turowski, B. W. McArdell, D. Rickenmann, and J. W. Kirchner. DebrisInterMixing-2.3 : a finite volume solver for three-dimensional debris-flow simulations with two calibration parameters – part 1 : Model description. *Geoscientific Model Development*, 9(9) :2909–2923, aug 2016.
- [190] K. Walker and G. Homsy. Convection in a porous cavity. *J. Fluid Mech*, 87 :449–474, 1978.
- [191] D. Wan, B. Patnaik, and G. Wei. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer : Part B*, 40 :199–228, 2001.
- [192] C. Y. Wang, S. Ahuja, C. Beckermann, and H. C. D. Groh. Multiparticle interfacial drag in equiaxed solidification. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 26B :111–119, 1995.
- [193] S. Whitaker. Diffusion and dispersion in porous media. *AIChE Journal*, 1967.
- [194] S. Whitaker. Flow in porous media I : A theoretical derivation of Darcy's law. *Transport in Porous Media*, 1 :3–25, 1986.
- [195] S. Whitaker. Flow in porous media II : The governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transport in Porous Media*, 1 :105–125, 1986.
- [196] C. D. Willett, M. J. Adams, S. A. Johnson, and J. P. K. Seville. Capillary bridges between two spherical bodies. *Langmuir*, 16 :9396–9405, 2000.
- [197] Y. Xiang, A. Komlev, Y. Chen, W. Ma, W. Villanueva, A. Konovalenko, and S. Bechta. Pre-test simulation and a scoping test for dryout and remelting phenomena of an in-vessel debris bed. *Nuclear Engineering and Design*, 403 :112143, 2023.
- [198] I. E. Zarraga, D. A. Hill, and D. T. J. Leighton. The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in newtonian fluids. *Journal of Rheology*, 44(2) :185–220, 2000.
- [199] B. Zhang, T. Harada, D. Hirahara, T. Matsumoto, K. Morita, K. Fukuda, H. Yamano, T. Suzuki, and Y. Tobita. Experimental investigation on self-leveling behavior in debris beds. *Nuclear Engineering and Design*, 241(1) :366–377, jan 2011.
- [200] Y. Zhang, L. Lyu, and P. Li. An optimized volume of fluid method for modelling three-dimensional debris flows. implementation in OpenFOAM, validation, and application in the aiwa watershed, beijing. *Computers and Geotechnics*, 144 :104651, apr 2022.