



HAL
open science

Vidange tourbillonnaire : propriétés de l'écoulement et de l'entraînement gazeux

Aurore Caquas

► **To cite this version:**

Aurore Caquas. Vidange tourbillonnaire : propriétés de l'écoulement et de l'entraînement gazeux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut Polytechnique de Paris, 2023. Français. NNT : 2023IPPAE014 . tel-04528973

HAL Id: tel-04528973

<https://theses.hal.science/tel-04528973>

Submitted on 2 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



NNT : 2023IPPAAE014

Thèse de doctorat

Vidange tourbillonnaire : propriétés de l'écoulement et de l'entraînement gazeux

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à École nationale supérieure de techniques avancées

École doctorale n°626 École doctorale de l'Institut Polytechnique de Paris (EDIPP)
Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides et des solides, acoustique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 11/12/23, par

AUORE CAQUAS

Composition du Jury :

Emmanuelle Rio Professeure d'Université, Université Paris-Saclay (LPS)	Présidente
David Fabre Maître de conférences, Université de Toulouse (IMFT)	Rapporteur
Yves-Marie Scolan Professeur, ENSTA Bretagne	Rapporteur
Bérengère Dubrulle Directrice de recherche, Université Paris-Saclay (SPEC CEA)	Examinatrice
Christophe Clanet Directeur de recherche, Ecole Polytechnique (LadHyx)	Examineur
Philippe Gondret Professeur, Université Paris-Saclay (FAST)	Examineur
Luc Pastur Professeur, ENSTA Paris	Directeur de thèse
Alain Genty Docteur, Université Paris-Saclay (CEA Saclay)	Co-encadrant de thèse

REMERCIEMENTS

Une thèse représente une expérience singulière dans une vie, exigeante et propice à repousser nos propres limites. C'est l'opportunité privilégiée de mener à bien son projet de recherche à plein temps et ce même en dépit des défis rencontrés. J'exprime ici ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette aventure et avec qui j'ai partagé d'inoubliables moments.

En premier lieu, je souhaite adresser mes remerciements à David Fabre et Yves-Marie Scolan pour leur rôle de rapporteur dans le cadre de ma thèse. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers Emmanuelle Rio, Bérengère Dubrulle, Christophe Clanet et Philippe Gondret d'avoir accepté de jouer le rôle d'examineurs pour mon travail.

Un immense merci à mes deux encadrants de thèse pour ces quatre années de collaboration exceptionnelle. La chance m'a souri en me permettant de travailler aux côtés de deux encadrants dont les qualités, différences et spécialités se complétaient harmonieusement.

Luc, cela fait maintenant sept ans que nous nous connaissons. C'est grâce à toi que j'ai acquis la fibre expérimentale et que j'ai été contaminée par le virus des vortex de baignoire. Tu m'as formée en tant qu'expérimentatrice et mécanicienne des fluides, tout en m'enseignant la rigueur de la rédaction scientifique. Tu as été mon mentor, même avant le début de cette thèse, durant des périodes difficiles. Les discussions passionnantes et philosophiques que nous avons partagées m'ont apporté une ouverture d'esprit sur de nombreux sujets.

Alain, je te remercie pour ta bienveillance et ton talent inné pour créer une atmosphère de travail agréable. Si le rire est le secret d'une vie plus longue, je tiens à te remercier non seulement d'avoir considérablement prolongé mon espérance de vie, mais surtout d'avoir su rendre plus supportables certains moments pourtant peu amusants de la thèse. Avec toi, les sujets de discussion sont variés, allant des aspects scientifiques de ma thèse, en passant par les aspects humains et le stress du travail conséquent de la thèse. Même aujourd'hui, alors que je démarre mon nouveau poste au CEA, tu continues à m'orienter, et cela me touche profondément. Tu as souvent pris en charge les aspects moins réjouissants de la thèse (à savoir les procédures administratives) et m'as formée à devenir numérique.

Je tiens à te remercier Philippe, cette fois pour ton implication dans la rédaction de mon premier article et pour avoir partagé depuis de nombreuses années ces questionnements sur les vortex de vidange. C'est toujours un plaisir de pouvoir discuter avec toi de notre passion commune pour la musique et de venir t'écouter.

Un grand merci à toutes les personnes qui m'ont apporté leur soutien technique pour mener à bien mon projet, notamment Thierry, Lahcène, Nicolas, Frédéric, Céline et Eric. Les échanges amicaux ont rendu ces moments de travail ensemble extrêmement plaisants. Mes remerciements s'étendent également à Gilles Bernard-Michel et Benjamin Cariteau pour leur contribution matérielle et leurs précieux conseils.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui m'ont formée à l'utilisation de TrioCFD et Salomé. Mes remerciements vont également aux deux stagiaires

exceptionnels que j'ai encadrés pendant ma thèse, Yanis et Léa, avec qui j'ai partagé d'agréables moments.

Un grand merci à toutes les personnes des laboratoires qui m'ont accueilli chaleureusement et avec qui j'ai partagé d'excellents moments, en particulier les doctorants du CEA et de l'ENSTA.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers mes proches qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure, notamment dans la gestion parfois complexe d'une vie de jeune maman et des exigences de la rédaction de ma thèse. Un merci particulier à ma maman qui, sans hésitation, a parcouru parfois 250 km pour venir prendre soin de sa petite-fille lorsque c'était nécessaire. Le plus grand merci vient pour toi Geoffrey, pour tout ce que tu as fait pour moi, et qui s'étend des contributions que tu as apportées à mon travail (tes idées, tes relectures, tes superbes vidéos Blender...), à ton implication dans notre vie de tous les jours en tant que père et conjoint, mais surtout à ton soutien inébranlable. Tu es ma force dans tous les moments de ma vie. Enfin, Hélène, je te remercie d'être mon plus beau rayon de soleil, même dans les moments les plus difficiles. Un jour, tu liras peut-être ces quelques lignes et j'espère que tu comprendras : il ne faut jamais renoncer à ce qui nous passionne, ni à l'accomplissement de sa vie personnelle (et ce malgré ce que la société peut en penser). Tu es, ma fille, ma plus grande source de motivation.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Modèles de vidange et de vortex	9
1.1 Introduction	10
1.2 La vidange classique de Torricelli	10
1.2.1 Vitesse et temps de vidange par le théorème de Bernoulli	11
1.2.2 Vitesse de vidange par les bilans	12
1.2.3 Effet du mouillage	13
1.2.4 Hauteur effective à $t = 0$ s	13
1.3 Le vortex de vidange : composantes de vitesses et modèles interfaciaux	14
1.3.1 Le modèle de Rankine	16
1.3.2 Le modèle de Burgers	18
1.3.3 Le modèle de Hite & Mih	21
1.3.4 Comparatif des modèles analytiques présentés	23
1.3.5 Le modèle de Lundgren	24
1.3.6 Effets de la tension de surface	27
1.4 Conclusions	28
2 Dispositif expérimental	31
2.1 Introduction	32
2.2 Présentation générale	32
2.2.1 Dispositif instationnaire	32
2.2.2 Dispositif stationnaire	33
2.3 Dispositif expérimental	34
2.3.1 Plateforme rotative	35
2.3.2 Cuve utilisée dans le cas instationnaire	35
2.3.3 Système d'injection et géométrie de la cuve dans le cas stationnaire	35
2.3.4 Centrage de la cuve	38
2.3.5 Géométrie des buses	38
2.3.6 Système de contrôle de niveau	39
2.4 Techniques de mesures	40
2.4.1 Balance de précision	40
2.4.2 Dispositif de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV)	41
2.4.3 Acquisition du profil de l'interface	44
2.4.4 Enregistrement audio	45
2.5 Protocole expérimental	45
2.5.1 Propriétés des fluides	45
2.5.2 Expériences instationnaires	46
2.5.3 Expériences stationnaires	47

2.6	Reproductibilité	48
2.6.1	Vidange instationnaire sans couvercle	48
2.6.2	Vidange instationnaire avec couvercle	48
2.6.3	Vidange stationnaire	50
3	Vidange tourbillonnaire en régime permanent	53
3.1	Introduction	54
3.2	Structure de l'écoulement de la vidange tourbillonnaire	54
3.2.1	La couche limite de Stewartson	54
3.2.2	La couche limite d'Ekman et le phénomène de pompage	57
3.3	Vitesse de l'écoulement pour la vidange tourbillonnaire	59
3.3.1	Effet de la rotation sur la vitesse de vidange	59
3.3.2	Modèle de vidange à partir de la déformation de l'interface	60
3.3.3	Cas sous-critique	61
3.3.4	Cas super-critique	65
3.4	Instabilité d'arrachement de bulles	66
3.4.1	Influence des différents paramètres expérimentaux	67
3.4.2	Analyse dimensionnelle : Théorème de Buckingham	67
3.4.3	Nombres adimensionnels critiques	70
3.4.4	Critères d'Ito	70
3.5	Conclusion	73
4	Vidange instationnaire	75
4.1	Introduction	76
4.2	Modélisation de la loi de vidange en présence d'un tourbillon	76
4.3	Quelques résultats complémentaires sur la vitesse de vidange	85
4.4	Structure de l'écoulement	86
4.4.1	Le phénomène de pompage	87
4.4.2	Les couches limites de Stewartson	88
5	Vidange instationnaire avec couvercle	89
5.1	Introduction	90
5.2	Article soumis	90
5.3	Conclusion	101
6	Simulations numériques	103
6.1	Introduction	104
6.2	Outils de calcul et méthodes numériques	104
6.2.1	La méthode Front-Tracking de TrioCFD	105
6.2.2	La méthode Volume-Of-Fluid d'OpenFOAM	106
6.3	Premier cas test de validation : la coalescence	107
6.3.1	Solution analytique pour le cas 2D (Régime de Stokes)	107
6.3.2	Simulation numérique avec TrioCFD	108
6.4	Second cas test de validation : Formation d'une bulle d'air	109
6.4.1	Position du problème	109
6.4.2	Mesures expérimentales de référence	111
6.4.3	Simulations numériques avec TrioCFD	112
6.4.4	Simulations numériques avec OpenFoam	116
6.4.5	Conclusions	120
6.5	Simulation de la vidange instationnaire	122
6.5.1	Simulation numérique avec TrioCFD : premier test	123

6.5.2	Simulation numérique avec TrioCFD : cas plus raffiné	123
6.5.3	Simulations numériques avec OpenFoam	127
6.5.4	Conclusions	130
	Conclusion & perspectives	132

INTRODUCTION

"L'eau est la force conductrice de la nature", Léonard de Vinci.

Symbole de la puissance et des mystères de la nature, métaphore de la vie qui nous attire vers la mort, les tourbillons fascinent depuis toujours l'humanité. De l'échelle de la turbulence à celle des ouragans, ils demeurent au cœur des défis de la mécanique des fluides. Loin d'être anodin, le tourbillon de notre baignoire (aussi appelé vortex) est le sujet de recherches qui permettent de mieux comprendre la physique des tornades, des ouragans [35, 55] et même des trous noirs [81]. Agissant comme un incroyable amplificateur de la vorticité, la vidange tourbillonnaire fait partie, comme le pendule de Foucault [12], des démonstrations   échelle humaine de la rotation de la Terre. Les travaux renommés de Shapiro [96] et Trefethen [109], menés dans des conditions rigoureusement contrôlées, illustrent clairement ce phénomène. Toutefois, mal interprétées par le grand public, ces recherches ont donné naissance à la rumeur, largement répandue et encore persistante aujourd'hui, d'un sens de rotation privilégié du tourbillon de notre baignoire selon l'hémisphère. Or, cette idée est éloignée des conditions strictes des études scientifiques.

Le vortex, lorsqu'il se forme dans la phase liquide d'un milieu diphasique liquide/gaz, pose problème dans des secteurs industriels aussi variés que l'automobile [86, 85], la cosmétique [60] et l'énergie. Responsable d'une usure du matériel, d'une perte d'efficacité des systèmes ou d'un entraînement de la phase gazeuse dans le liquide, le vortex est souvent non désiré [56, 41]. Aujourd'hui, l'énergie décarbonée est au cœur des préoccupations environnementales, économiques et diplomatiques de notre société. Le vortex de vidange a des applications dans la détection de risques associés aux barrages hydroélectriques [70], dans les mécanismes des convertisseurs d'énergie houlomotrice [29, 34], et il est également un élément clé d'études sur la sûreté des centrales nucléaires, notamment pour les réacteurs RNR-Na. Ces réacteurs, dits de quatrième génération, sont étudiés et développés depuis plusieurs dizaines d'années soit dans des versions grande échelle comme Superphénix [113], soit sous forme de projets, comme c'est le cas du projet ASTRID (Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration) [7, 8] ou plus récemment dans des versions plus petites et modulaires (AMR, Advanced Modular Reactors)[80]. Ils permettent la consommation de l'uranium appauvri issu de notre filiere actuelle et la génération de nouveau combustible. Dans le cœur d'un RNR-Na, le sodium liquide qui circule présente une surface libre en contact avec un gaz neutre. En fonctionnement, le système de recirculation du sodium liquide peut créer un vortex et entraîner des bulles de gaz dans l'écoulement. Ces bulles sont non seulement dommageables pour les pompes, mais peuvent également provoquer des sauts de réactivité du cœur si elles sont entraînées entre les crayons de combustible du réacteur, voire dégrader ces derniers en créant des points chauds.

Un des objectifs de ce travail est donc de proposer un critère physique de prédiction d'entraînement de gaz dans une configuration d'aspiration à proximité d'une surface libre.

Il s'agit également de produire une série d'expériences de références pour la validation des codes de simulation numériques du CEA qui permettent de modéliser l'écoulement avec surface libre dans les RNR-Na.

Pour répondre à ces questions aux enjeux fondamentaux, environnementaux et industriels, la vidange, et le vortex qu'elle peut créer, sont le sujet de nombreuses études de la littérature. Ces travaux, qui serviront de fondement à notre recherche, seront abordés dans le premier chapitre. En commençant par l'étude de la vidange sans vortex, nous constaterons que, malgré les quatre siècles écoulés depuis la découverte de la loi de Torricelli [106], ce sujet demeure d'actualité dans les publications contemporaines [13, 52, 24, 111, 66, 21, 32]. Nous examinerons par la suite le vortex de vidange, sujet pour lequel de nombreuses recherches se sont concentrées sur la modélisation du champ de vitesse et de la déformation de l'interface. Puis, nous confronterons ces modèles théoriques à nos observations expérimentales.

Les différents dispositifs expérimentaux, protocoles de mesures et post-traitement des données utilisés lors de cette thèse seront présentés dans le Chapitre 2. Ils permettent d'étudier la vidange tourbillonnaire autant dans un régime permanent (Chapitre 3) que dans un régime instationnaire (Chapitre 4 et 5). Ces dispositifs, intégrant la cuve vidangée et les systèmes d'acquisition, sont montés sur une plate-forme tournante.

Dans la littérature, les expériences de vidange tourbillonnaires sont souvent effectuées à niveau constant, à l'aide d'un système de réinjection de l'eau vidangée. Sous ces conditions, comme les différents paramètres de l'expérience sont constants, le vortex peut atteindre un régime permanent. Cependant, les dispositifs utilisés sont souvent proches des systèmes industriels et présentent une géométrie complexe ne permettant pas au vortex de se stabiliser. Nous utilisons ici un système axisymétrique, pour lequel la vorticité est générée par la mise en rotation de la plateforme et le débit est contrôlé par la gravité, ce qui permet de maintenir la stabilité du vortex. Dans le Chapitre 3, nous détaillons la structure de l'écoulement de la vidange tourbillonnaire en régime permanent, nous proposons de modéliser la vitesse de vidange en présence du tourbillon et nous discutons de l'établissement d'un critère d'apparition de l'arrachement de bulles à la pointe du vortex.

Les études sur la vidange tourbillonnaire à niveau constant sont nombreuses, mais rares sont celles qui traitent du cas instationnaire où le réservoir est vidangé. Cette vidange plus complexe dépend du régime transitoire qui permet l'établissement du vortex et des couches limites. Ce régime de vidange est présenté au Chapitre 4. Ce chapitre, construit autour de notre article paru dans *Physical Review Fluids*, traite de l'influence du vortex sur la vitesse et le temps de vidange du récipient. La structure de l'écoulement sera, elle aussi, abordée dans un second temps.

Nous avons ensuite approfondi cette étude en équipant la cuve d'un couvercle étanche, recréant ainsi une configuration idéalisée permettant de répondre à la question : "*Comment se vide une bouteille d'eau avec un vortex?*". Bien que ce sujet ait été abordé lors du Tournoi de Physique International de 2019 et soit populaire dans les vid es de vulgarisation, il semble absent de la littérature scientifique. Le Chapitre 5, consacré à ce sujet, fait l'objet d'un article en cours de publication dans *Physical Review Fluids*. Nous comparons l'efficacité de la vidange dans un référentiel avec et sans rotation et décrivons les différents régimes de vidange identifiés lors de cette étude.

Enfin, le sixième Chapitre de cette thèse porte sur l'étude numérique des écoulements diphasiques. La simulation numérique revêt une importance croissante dans le cadre industriel. En effet, elle permet de dimensionner des systèmes et de vérifier leur bon fonctionnement, voir de les étudier dans des conditions dégradées, et ce, à moindre coût. L'industrie nucléaire et le CEA en particulier, recourent à des outils de calcul scientifique depuis leur origine. Dans le domaine de la mécanique des fluides, le CEA a développé TrioCFD pour

simuler les écoulements thermohydrauliques avec une option de suivi d'interface de type "Front Tracking" qui permet d'étudier les écoulements diphasiques. Après une première étude de validation sur différents cas tests de la littérature, nous avons réalisé des simulations numériques afin de reproduire certaines des expériences de vidange tourbillonnaire instationnaire. Face à certains problèmes numériques rencontrés avec TrioCFD (problème de vitesses parasites), nous avons également réalisé des simulations avec le logiciel libre d'accès OpenFoam à des fins de vérifications et de comparaisons.

NOMENCLATURE

α	Rapport entre la sections efficaces (sans dimension)
α_{phase}	Fraction volumique (sans dimension)
β	Coefficient de correction de la loi de Torricelli, permettant notamment de prendre en compte la <i>vena contracta</i> réelle et les effets de pertes de charges (sans dimension)
δ	Epaisseur des couches limites d'Ekman (en m)
$\Delta(t)$	Discrétisation temporelle (en s)
$\Delta(x)$	Discrétisation spatiale (en m)
Γ	Circulation du vortex (en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
γ	Gradient axial de la composante axiale de la vitesse (en s^{-1})
Γ^*	Circulation du vortex adimensionné par la viscosité ν (sans dimension)
γ^*	Gradient axial de la composante axiale de la vitesse adimensionné
γ_{HM}	Gradient axial de la composante axiale de la vitesse calculé en $z = 0$ dans le cadre du modèle de Hite et Mih (en s^{-1})
κ	Courbure de l'interface en coordonnées cylindriques pour un problème axisymétrique (en m^{-1})
μ	Viscosité dynamique (en Pa/s)
ν	Viscosité cinématique (en m^2/s)
ν_e	Viscosité cinématique effective (en m^2/s)
Ω	Vitesse de rotation de la plateforme (en rad/s sauf mention contraire)
ω	Distribution de vorticité en s^{-1}
Ω_c	Vitesse de rotation du cœur du vortex en (rad/s)
\bar{R}	Rayon de la cuve adimensionnée par r_m (sans dimension)
\bar{r}	coordonnée radiale adimensionnée par r_m (sans dimension)
Φ	Diamètre de la section de la pièce en sortie, cas avec couvercle (en m)
ϕ	Diamètre de la section de la pièce en sortie, cas sans couvercle (en m)

Φ_{eff}	Diamètre de la section efficace du jet en sortie (en m)
ρ	Masse volumique d'une maille (en kg/m^3)
ρ_g	Masse volumique de l'air (en kg/m^3)
ρ_l	Masse volumique de l'eau (en kg/m^3)
σ	Tension de surface (en N/m)
\tilde{r}_{pont}	Rayon de la jonction entre les gouttes adimensionné par R_0 (sans dimension)
\tilde{t}	Temps adimensionné par $\mu R_0/\sigma$ (sans dimension)
ϑ	La solution de l'équation $2\vartheta = e^\vartheta - 1$
ζ	Viscosité cinématique turbulente (en m^2/s)
A	Rapport entre le rayon $\phi/2$ et le rayon r_m (sans dimension)
a	Rayon pour lequel les effets visqueux du vortex sont importants (en m)
B_1	Paramètre libre (sans dimension)
C	Rapport entre le rayon $\phi/2$ et l'épaisseur de couche limite δ (sans dimension)
CG_{det}	Centre de gravité au moment du détachement de la bulle (en s)
Ek	Nombre d'Ekman (sans dimension)
Fr	Nombre de Froude (sans dimension)
Fr_Ω	Nombre de Froude rotationnel (sans dimension)
g	Accélération de la pesanteur (en m s^{-2})
H	Niveau d'eau moyen dans la cuve (en m)
$h(r)$	Profil de l'interface (en m)
H^*	Hauteur d'eau adimensionnée par le rayon $\phi/2$ (sans dimension)
H_0	Niveau d'eau pour $t = 0$ s (en m)
H_c^*	Hauteur d'eau critique d'apparition du phénomène d'entraînement d'air adimensionnée par le rayon $\phi/2$ (sans dimension)
L	Hauteur de la cuve (en m)
L_{gc}^*	Longueur adimensionnée du cœur gazeux (sans dimension)
l_c	Longueur capillaire (en m)
m	Masse (en kg)
n	Paramètre libre (sans dimension)
Oh	Nombre d'Ohnesorge (sans dimension)
p	Pression (en Pa)

P_a	Pression atmosphérique (en Pa)
Q	Débit (en m ³ /s sauf mention contraire)
Q_E	Débit d'eau à travers la couche limite d'Ekman (en m ³ /s sauf mention contraire)
Q_{mes}	Débit de vidange mesuré (en m ³ /s sauf mention contraire)
Q_{model}	Débit de vidange modélisé (en m ³ /s sauf mention contraire)
R	Rayon de la cuve (en m)
R_0	Rayon final de la goutte (en m)
R_c	Rayon de l'orifice d'ouverture (en m)
r_c	Rayon du cœur du vortex (en m)
R_i	Rayon initial des gouttes (en m)
r_m	Rayon du cœur du vortex introduit à l'origine par Hite et Mih non équivalent à r_c (en m)
r_{pont}	Rayon de la jonction entre les gouttes (en m)
Re	Nombre de Reynolds (sans dimension)
Re_c	Nombre de Reynolds critique d'apparition du phénomène d'entraînement d'air (sans dimension)
Re_{th}	Nombre de Reynolds obtenu par modélisation (sans dimension)
Ro	Nombre de Rossby défini à partir de la vitesse de vidange v_Q (sans dimension)
Ro^*	Nombre de Rossby défini à partir de la vitesse U^* (sans dimension)
S	Section de la cuve (en m ²)
s	Section de la pièce en sortie (en m ²)
s_{eff}	Section efficace du jet en sortie (en m ²)
Sw	Nombre de Swirl (sans dimension)
t	Temps (en s)
T_0	Temps totale de vidange théorique (en s)
T_a	Température ambiante (en °C)
T_S	Temps de mise en rotation solide théorique, temps de "spin-up" (en s)
T_β	Temps totale de vidange prenant en compte le coefficient de correction β (en s)
t_{det}	Temps de détachement de la bulle (en s)
v_E	vitesse débitante à travers la couche limite d'Ekman (en m/s)
V_i	Volume d'une maille (en m ³)

v_Q	Vitesse de vidange mesurée (en m/s)
v_T	Vitesse de vidange théorique obtenue par la loi de Torricelli (en m/s)
$v_{\beta T}$	Produit de la vitesse théorique de vidange obtenue par la loi de Torricelli avec le coefficient de correction β (en m/s)
V_{det}	Volume de détachement de la bulle (en s)
We	Nombre de Weber (sans dimension)
We_c	Nombre de Weber critique d'apparition du phénomène d'entraînement d'air (sans dimension)
We_{th}	Nombre de Weber obtenu par modélisation (sans dimension)
$(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z)$	Composantes radiale, azimutale et verticale du champ de vitesse dans la couche limite en coordonnées cylindriques (en m/s)
(u_r, u_θ, u_z)	Composantes radiale, azimutale et verticale du champ de vitesse dans le volume fluide en coordonnées cylindriques (en m/s)
(r, θ, z)	Système de coordonnées cylindriques (en m)
(x, y, z)	Système de coordonnées cartésienne (en m)

Modèles de vidange et de vortex

Sommaire

1.1	Introduction	10
1.2	La vidange classique de Torricelli	10
1.2.1	Vitesse et temps de vidange par le théorème de Bernoulli	11
1.2.2	Vitesse de vidange par les bilans	12
1.2.3	Effet du mouillage	13
1.2.4	Hauteur effective à $t = 0$ s	13
1.3	Le vortex de vidange : composantes de vitesses et modèles interfaciaux	14
1.3.1	Le modèle de Rankine	16
1.3.2	Le modèle de Burgers	18
1.3.3	Le modèle de Hite & Mih	21
1.3.4	Comparatif des modèles analytiques présentés	23
1.3.5	Le modèle de Lundgren	24
1.3.6	Effets de la tension de surface	27
1.4	Conclusions	28

1.1 Introduction

Il y a près de 400 ans, Torricelli découvrait la loi décrivant la vidange d'un récipient [106]. Cette loi ne sera démontrée que 100 ans plus tard par le théorème de Bernoulli. Dans sa version originelle, la loi de Torricelli est conditionnée par le diamètre de l'orifice de sortie, qui se doit d'être nettement inférieur à celui du récipient. Elle néglige les effets dissipatifs et de mouillage au niveau de la buse qui permet l'écoulement du fluide en sortie. Néanmoins, une reformulation plus générale a depuis été proposée pour remédier à la limitation sur le diamètre de l'orifice [21], et les effets dissipatifs [68] et de mouillage [32] peuvent être intégrés à la loi originelle. Par ailleurs, la loi de Torricelli ne prend pas en compte un phénomène couramment observé lors de la vidange : l'apparition d'un vortex. C'est une observation commune pour la vidange des baignoires, mais cela se produit aussi à des échelles beaucoup plus grandes. Il est donc nécessaire d'étudier ce vortex pour mieux comprendre son impact sur la loi classique de Torricelli. Dans ce chapitre, nous discuterons d'abord de la vidange sans vortex et de la démonstration de la loi Torricelli, ainsi que de la prise en compte des effets dissipatifs et de mouillage. Ensuite, nous aborderons différents modèles de vortex de vidange. Ces modèles, nous permettront d'étudier le champ de vitesses et le profil de la déformation de l'interface en incluant ou non les effets de tensions de surface.

1.2 La vidange classique de Torricelli

Nous appellerons ici "vidange classique de Torricelli", une vidange sans vortex pour laquelle la loi de Torricelli est vérifiée.

Lors d'une telle vidange, la structure de l'écoulement, illustrée par les résultats d'une simulation numérique à la Figure 1.1 est simple et bien connue de la littérature [22]. Elle se découpe en deux zones. La première est proche de la section de sortie et présente un écoulement de type puits ponctuel. La seconde, se situe loin de l'orifice de sortie et présente un écoulement uniforme descendant.

La vitesse de vidange du récipient en sortie v_T , est alors reliée à la hauteur H de fluide à l'instant t , par la loi de Torricelli : $v_T(t) = \sqrt{2gH(t)}$, où g est l'accélération de la pesanteur. L'évolution de $H(t)$, établie à partir de la conservation de la masse, conduit au temps total de vidange $T_0 = (S/s)\sqrt{2H_0/g}$. Remarquons qu'au passage de la section de vidange, le jet de sortie subit une contraction appelée *vena contracta*.

Comme rappelé dans l'introduction, la loi de Torricelli néglige tout effet dissipatif. Or, au passage de la section de vidange, le fluide traverse une discontinuité, ce qui entraîne une perte de charge singulière. Pour corriger la surestimation du débit induite par ce phénomène physique, il est courant d'appliquer un coefficient β lié à la contraction non idéale du jet [68], tel que $v_{\beta T} = \beta v_T$. Le temps de vidange totale T_β est alors plus long d'un facteur $1/\beta$ que sa valeur idéale T_0 .

La démonstration de la loi de Torricelli, qui est un cas d'école, repose sur l'utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant partant de l'interface et s'arrêtant dans la partie du jet contractée. Nous commençons cette partie par la présentation de cette démonstration. Puis, nous proposons d'introduire une démonstration moins connue de la loi de Torricelli qui repose sur l'utilisation des bilans [67]. Dans la loi corrigée, la valeur de β dépend en particulier de la forme de la buse. Il est donc courant de considérer des valeurs de β différentes si la buse a ou non une géométrie entrante dans le volume fluide, avec ajoutage de Borda [68]. Le matériau dans lequel est réalisée la buse a, lui aussi, une influence pour des diamètres proches de la longueur capillaire [32] et nous discuterons des effets liés au mouillage dans la suite de cette partie.

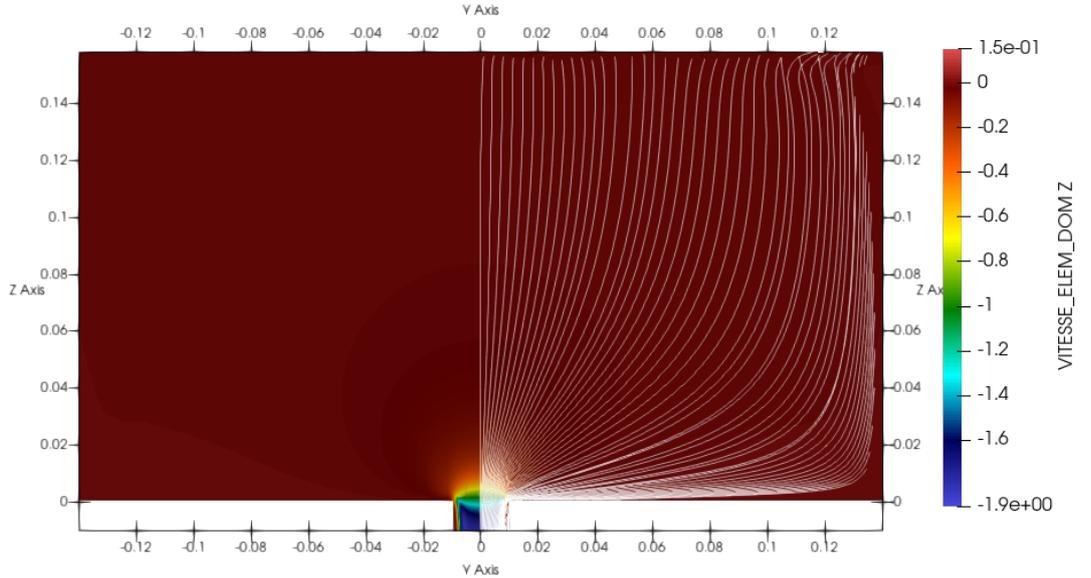


FIGURE 1.1 : Simulation numérique réalisée avec TrioCFD. Cas d'une vidange sans rotation. La colorimétrie représente la composante axiale de la vitesse en m.s^{-1} . Les lignes de courant sont tracées à droite. Les lignes de courant sont verticales proches de l'interface, alors qu'elles convergent toutes vers la section de vidange en proximité de celle-ci.

Enfin, nous verrons dans le dernier paragraphe de cette partie que la hauteur d'eau effective peut, elle aussi, être sensiblement affectée par les pertes de charges.

1.2.1 Vitesse et temps de vidange par le théorème de Bernoulli

Nous nous appuyons ici sur l'étude de Milne-Thomson [68] pour mettre en lien la démonstration de la loi de Torricelli par le théorème de Bernoulli et par les bilans. Dans la démonstration présentée, le fluide est supposé parfait, incompressible et l'écoulement en régime permanent.

L'origine du repère est prise au centre de la section de vidange (cf. Figure 1.2). Considérons une ligne de courant allant d'un point en surface du liquide (Point A) jusqu'au jet en sortie (Point B). Dans cette démonstration, le point B est choisi au niveau du jet libre en sortie. Il est situé à l'endroit où la vitesse dans le jet d'eau est homogène, i.e. en $z = h_B$ et non au niveau de la section de passage, i.e. en $z = 0$. À la surface du liquide, la pression est égale à la pression atmosphérique P_a . Comme la section du cylindre S est très grande devant la section de sortie s , la vitesse au niveau de l'interface peut être négligée par rapport à la vitesse dans le jet d'eau en sortie v_T . La pression est aussi égale à P_a .

En appliquant le théorème de Bernoulli entre ces deux points, on obtient :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho_l v_A^2 + \rho_l g H(t) = P_B + \frac{1}{2}\rho_l v_T^2 + \rho_l g h_B \quad (1.1)$$

où ρ_l est la densité du liquide. On supposera que la distance entre le point B et l'origine est négligeable, et donc $h_B \approx 0$. Comme $P_A = P_B = P_a$ et $v_A \approx 0$, l'équation se réduit

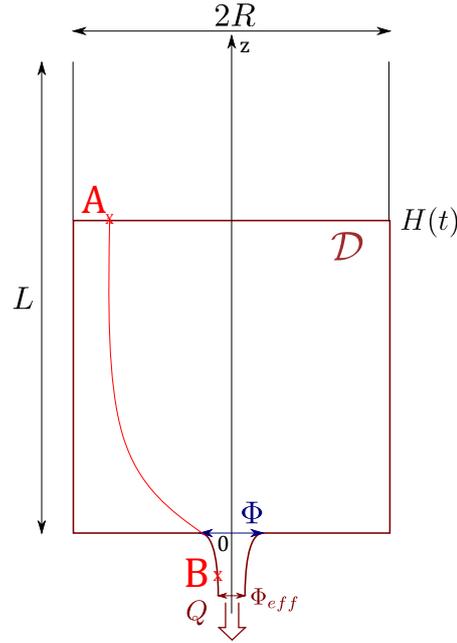


FIGURE 1.2 : Schéma du problème de vidange.

donc à :

$$\rho_l g H(t) = \frac{1}{2} \rho_l v_T^2 \quad (1.2)$$

Soit finalement, la loi de Torricelli :

$$v_T = \sqrt{2gH(t)} \quad (1.3)$$

Notons $s_{\text{eff}} = \pi(\Phi_{\text{eff}}/2)^2$ la section du jet de sortie, différent de celle de la buse $s = \pi(\Phi/2)^2$ en raison du phénomène de *vena contracta* (cf. Fig. 1.2). Par conservation du débit volumique, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$S \times \frac{dH}{dt} = -s_{\text{eff}} \times \sqrt{2gH} \quad (1.4)$$

Soit :

$$-\frac{S}{s_{\text{eff}} \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H}} = dt \quad (1.5)$$

Par intégration, nous obtenons :

$$-\frac{S}{s_{\text{eff}} \sqrt{2g}} \int_0^{H_0} \frac{1}{\sqrt{H}} dH = \int_0^{T_0} dt \quad (1.6)$$

où H_0 est la hauteur initiale du liquide dans le cylindre. Soit, après simplification :

$$T_0 = (S/s_{\text{eff}}) \sqrt{2H_0/g} \quad (1.7)$$

1.2.2 Vitesse de vidange par les bilans

Nous appliquons dans un premier temps le bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle D de surface S_c défini Figure 1.2. Ce volume de contrôle englobe le volume d'eau dans la cuve et une partie du jet libre sortant du réservoir. Nous supposons que le

fluide est parfait, incompressible et en écoulement quasi-statique. Le bilan de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement, i.e. projeté suivant l'axe Oz , s'écrit :

$$\iiint_D \frac{\partial \rho_l(\mathbf{r}, t) u_z(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho_l(\mathbf{r}, t) u_z(\mathbf{r}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS}) = -2\pi \rho_l g \int_0^{\Phi/2} h(r, t) r dr \quad (1.8)$$

Avec $h(r, t)$ le profil de l'interface, $\rho_l(\mathbf{r}, t)$ la masse volumique et $u_z(\mathbf{r}, t)$ la vitesse axiale dans le volume fluide. Comme l'écoulement est quasi-statique, l'intégrale volumique peut être négligée. Le second terme peut lui aussi se simplifier :

$$\iint_{S_c} \rho_l(\mathbf{r}, t) u_z(\mathbf{r}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS}) = -\rho_l \iint_{s_{\text{eff}}} v_T^2(t) r dr d\theta = -\rho_l v_T^2(t) s_{\text{eff}} \quad (1.9)$$

D'où :

$$v_T(t) = \sqrt{\frac{2g}{(\Phi_{\text{eff}}/2)^2} \int_0^{\Phi/2} h(r, t) r dr} \quad (1.10)$$

Dans le cas sans vortex, $h(r, t) = H(t)$ est indépendant de r . On trouve ainsi :

$$v_T(t) = \sqrt{\frac{gH(t)}{\alpha}} \quad (1.11)$$

avec $\alpha = \Phi_{\text{eff}}^2/\Phi^2$ le coefficient de contraction du jet dont la valeur théorique idéale est de 1/2 par égalité avec l'équation (1.3). En général, la pression dans le volume fluide proche de la sortie est inférieure à la pression hydrostatique et le facteur de contraction n'atteint jamais 1/2 [68]. D'autres effets tels que le mouillage de la buse peuvent induire des écarts notables par rapport à cette valeur théorique.

Dans la suite, la vitesse de vidange au niveau de la sortie sera définie, telle que $v_{\beta T} = \beta v_T$, où β est un coefficient correcteur de la loi de Torricelli qui permet notamment de corriger la *vena contracta* idéale, i.e. $\alpha = 1/2$.

1.2.3 Effet du mouillage

Dans l'étude réalisée ici, les diamètres des sections de vidange sont proches de la longueur capillaire. Dans cette configuration spécifique, le matériau utilisé pour fabriquer les buses a une influence significative sur la vitesse de vidange. Selon les recherches de Ferrand [32], les effets de mouillage à la sortie entraînent une accélération du fluide, dont l'intensité dépend de l'angle de contact (avec un effet minimal pour les angles intermédiaires).

Lorsque le fluide s'écoule, il mouille la face inférieure de la buse, formant ainsi un ménisque qui augmente le diamètre effectif du jet libre. En conséquence, l'effet de la *vena contracta* classique, qui normalement réduit le diamètre du jet, est atténué. Le coefficient classique β (sans considérer l'effet de tension de surface) a une valeur de 0.64. Cependant, dans les conditions expérimentales étudiées par Ferrand, il peut atteindre 0.93. Dans notre étude, nous évaluons la valeur du coefficient $\beta = 0.90 \pm 0.03$. En conséquence, l'effet de la tension de surface entraîne une augmentation significative de la vitesse de vidange dans notre cas, multipliant celle-ci par un facteur d'environ 1.4.

1.2.4 Hauteur effective à $t = 0$ s

Dans les sections précédentes, nous avons montré que le diamètre du jet en sortie était un paramètre important à estimer pour nous permettre d'appliquer la loi de Torricelli à

un écoulement réel. Il ne s'agit pas de la seule variable qui peut être modifiée. La hauteur d'eau initiale considérée dans la loi de Torricelli peut être différente de la hauteur mesurée.

En effet, la prise en compte des effets de pertes de charges en volume dans la cuve (i.e. en amont du trou) peuvent introduire une hauteur effective plus petite que la hauteur réelle dans le calcul de la vitesse de vidange [93, 32].

La hauteur effective à prendre en compte peut aussi être modifiée par l'épaisseur de la buse introduite. Ferrand [31] a montré qu'il n'est pas évident de conclure sur l'impact de cette épaisseur et qu'elle ne peut pas être simplement ajoutée au niveau d'eau dans la cuve, car la hauteur supplémentaire induite dépend aussi du diamètre de l'orifice. C'est pourquoi, les hauteurs présentées ici n'intègrent pas directement l'épaisseur de la buse. Cependant, pour limiter cet effet, nous avons choisi d'utiliser des pièces en sortie d'une épaisseur de 1 cm.

La Figure 1.3 représente les vitesses de vidange mesurées pour les trois sections testées. Les courbes obtenues sont presque identiques. Nous avons choisi d'ajuster la courbe correspondant au diamètre ϕ_3 en utilisant la loi de Torricelli au carré corrigée :

$$v_Q^2(t) = 2\beta^2 g H_0 \left(\frac{H(t)}{H_0} + \epsilon \right) \quad (1.12)$$

où β et ϵ sont les paramètres de l'ajustement linéaire.

L'écart de hauteur d'eau ϵ obtenu est alors de l'ordre de 1%, ϵ étant positif, la hauteur à considérer est supérieure à celle mesurée directement dans notre cas. Ce résultat est en accord avec les résultats de la littérature [32] et montre que les effets dissipatifs dans le volume fluide sont négligeables.

En fixant ϵ à 0, la valeur de β reste pratiquement inchangée. Ainsi, la hauteur d'eau effective a peu d'impact sur une grande partie du processus de vidange. Seule la phase finale de l'expérience est sensible à ce paramètre.

1.3 Le vortex de vidange : composantes de vitesses et modèles interfaciaux

Lors de la vidange d'un récipient, il est très courant de voir un vortex se former. Ce vortex est au centre de l'étude présentée dans ce manuscrit. Nous proposons ici de décrire différents modèles de la littérature sur la vitesse de l'écoulement et la déformation de l'interface induite par le vortex. Dans un but illustratif, ces modèles seront mis en comparaison d'un de nos profils expérimentaux. Enfin, nous discuterons de la modélisation de la forme de la surface libre avec une prise en compte des effets de la tension superficielle.

Le vortex de vidange a été largement étudié dans la littérature scientifique. Le modèle le plus élémentaire pour représenter un vortex est une rotation potentielle où la vitesse azimutale est inversement proportionnelle au rayon (i.e. en $1/r$). Les autres composantes de vitesse sont nulles. Cependant, cette approche présente une discontinuité le long de l'axe (O_z). Au 19e siècle, le physicien William John Macquorn Rankine a amélioré ce modèle en introduisant un cœur de vortex en rotation solide [84]. Ce modèle, connu sous le nom de modèle de Rankine, élimine la divergence en $r = 0$ mais introduit une nouvelle discontinuité en $r = r_c$, où r_c est le rayon du cœur. Les vitesses axiale et radiale sont constantes (ou nulles), omettant le phénomène d'étirement tourbillonnaire induit par la vidange.

En considérant les effets de la diffusion visqueuse au sein du cœur du vortex, Rott [89] suggère d'adapter le modèle initialement développé par Burgers [14], non seulement pour les cas de vidange tourbillonnaire, mais également pour les tornades. Ce modèle présente un étirement constant le long de l'axe (O_z) et offre une représentation continue de la vitesse azimutale en tous points.

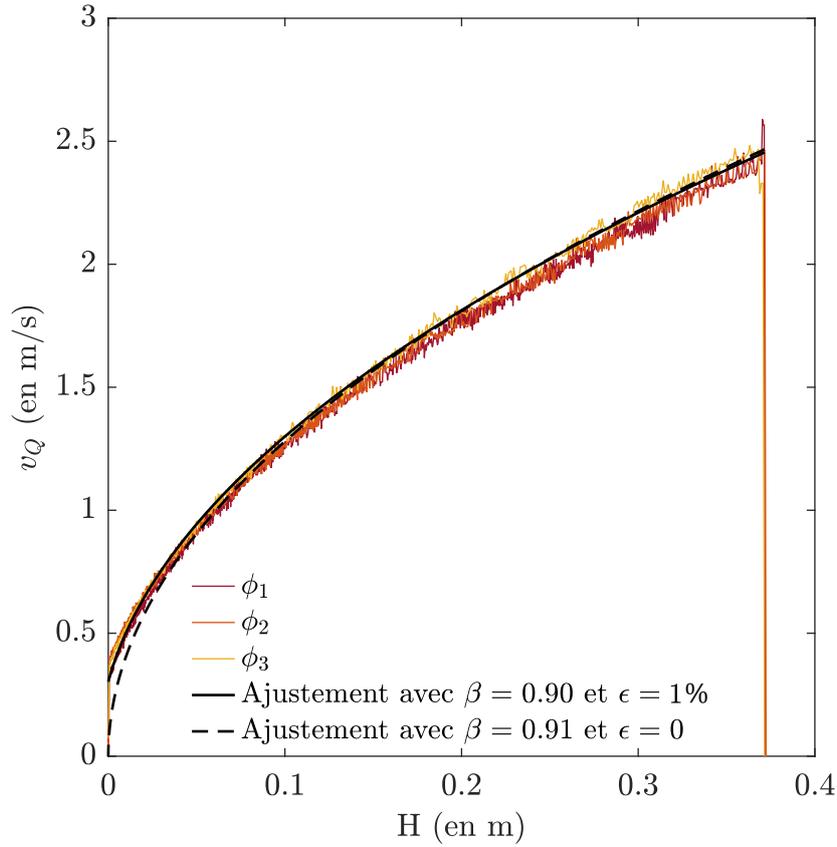


FIGURE 1.3 : Vitesses de vidange en fonction de la hauteur d'eau pour les trois sections testées (courbes en couleurs). Deux ajustements de la loi de Torricelli au carré sont testés, tel que : $v_Q^2(t) = 2\beta^2 g H_0 \left(\frac{H(t)}{H_0} + \epsilon \right)$, où β et ϵ sont les paramètres de l'ajustement linéaire. Le premier considère β et ϵ comme des paramètres libres (en trait plein). Le second considère β comme un paramètre libre et ϵ est supposé nul (traits pointillés).

Lundgren [63], d'autre part, propose une méthode alternative qui simplifie les équations de Navier-Stokes en supposant un faible nombre de Rossby. Cette approche plus générale lui permet de dériver diverses solutions analytiques ou ensembles d'équations différentielles en fonction de conditions supplémentaires (problème linéarisé, fluide parfait, etc.). Il propose notamment un ensemble d'équations différentielles pour déduire le profil de l'interface qui sera la base de travaux de références sur le sujet comme les travaux d'Andersen [4] et de Stepanyants [98, 97]. Les modèles de Burgers-Rott et l'approche de Lundgren continuent d'être largement cités et utilisés dans la recherche actuelle, ayant été raffinés au fil du temps par de nombreux chercheurs. Nous présentons ici un aperçu des développements et améliorations apportés à ces modèles.

Rappelons, ci-dessous, les équations de Navier-Stokes pour les composantes de la vitesse (u_r, u_θ, u_z) exprimées dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , qui s'expriment dans le cas général :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_l r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - g \quad (1.15)$$

Ainsi que l'équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.16)$$

Sous les hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité qui seront utilisées par la suite, nous obtenons :

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (1.17)$$

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (1.18)$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.20)$$

1.3.1 Le modèle de Rankine

Un des modèles les plus simples de la littérature pour représenter le vortex de vidange est le modèle de Rankine [84]. Ce modèle divise l'écoulement en deux zones distinctes séparées au niveau du maximum de vitesse azimutale, i.e. en $r = r_c$ où r_c est le rayon du cœur du vortex. Dans la zone de cœur, i.e. pour $r \leq r_c$, l'écoulement est supposé en rotation solide. Dans la zone entourant le cœur, i.e. pour $r > r_c$, l'écoulement est en rotation potentielle. Il s'exprime ainsi :

$$u_\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma \cdot r}{2\pi r_c^2} & \text{pour } r \leq r_c \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & \text{pour } r > r_c \end{cases} \quad (1.21)$$

où Γ est la circulation du tourbillon. Le profil de l'interface peut être déduit de ce modèle. Pour y parvenir, nous appliquons le théorème de Bernoulli, dans toute la zone potentielle :

$$p + \rho_l g z + \frac{1}{2} \rho_l u^2 = cst \quad (1.22)$$

Nous utilisons cette équation au niveau de l'interface, entre le bord de la cuve, i.e. pour $r = R$ et un point quelconque de coordonnée r .

$$P_a + \rho_l g h(r) + \frac{1}{2} \rho_l u_\theta^2 = P_a + \rho_l g h(R) \quad (1.23)$$

où $h(r)$ est le profil radial de l'interface et $h(R)$ le niveau d'eau aux bords de la cuve. Le profil radial de l'interface pour $r > r_c$ est ainsi donné par l'équation :

$$h(r) = h(R) - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} \quad (1.24)$$

Pour $r \leq r_c$, le fluide est au repos dans le référentiel tournant à la vitesse $\Omega_c = \Gamma/2\pi r_c^2$ [39]. Ainsi, dans la zone de cœur, le gradient de pression équilibre les forces appliquées. Les équations de Navier-Stokes (1.17) et (1.19) se simplifient, telles que :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_l \Omega_c^2 r \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_l g \end{cases} \quad (1.25)$$

Soit :

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \rho_l u_\theta(r)^2 - \rho_l g z + cst \quad (1.26)$$

À l'interface :

$$P_a = \frac{1}{2} \rho_l u_\theta(r)^2 - \rho_l g h(r) + cst \quad (1.27)$$

Enfin, comme l'interface est continue en $r = r_c$, on peut déduire la constante précédente et le profil de l'interface $h(r)$ dans la zone $r < r_c$:

$$h(r) = h(R) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_c^2 g} + \frac{\Gamma^2 r^2}{8\pi^2 r_c^4 g} \quad (1.28)$$

L'amplitude de la déformation de l'interface s'exprime alors telle que :

$$h(R) - h(0) = \frac{1}{g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \quad (1.29)$$

Dans le modèle de Rankine, la vitesse u_z est supposée constante dans la zone $r \leq r_c$ et nulle dans la zone $r > r_c$. Cette modélisation de la vitesse axiale est grossière dans le cadre de la vidange, car il est attendu que le gradient de vitesse axiale suivant z soit important. De plus, ce modèle surestime le maximum de vitesse azimutale en $r = r_c$ [44]. Cependant, dans le cas de mesures expérimentales de $u_\theta(r)$, le modèle de Rankine a l'avantage de permettre une estimation simple de la circulation du vortex dans la zone où l'écoulement est potentiel, sans avoir besoin de connaître le rayon du cœur du vortex. Il permet aussi de déduire une forme analytique du profil de l'interface. Cette modélisation ne représente pas finement l'interface, mais permet d'en expliquer l'aspect qualitatif sans introduire de résolution numérique. Un exemple de représentation de la vitesse azimutale et de profil de l'interface correspondant est donné sur la Figure 1.4 et sur la Figure 1.5. Sur la Figure 1.4, le rayon du cœur du vortex est choisi équivalent à celui des modèles mis en comparaison. Sur la Figure 1.5, l'amplitude de la déformation de l'interface est ajustée aux données expérimentales.

1.3.2 Le modèle de Burgers

Dans son étude sur la turbulence, Burgers propose, en 1948, un modèle de tourbillon qui sert d'illustration au mécanisme d'étirement des vortex. Le modèle proposé par Burgers [15] permet de prendre en compte la diffusion visqueuse du cœur du vortex, et ainsi d'enlever la discontinuité en $r = r_c$ du modèle précédent. Cette description sera reprise par Rott [89] en 1958 qui l'appliquera notamment au cas du vortex de vidange. Nous proposons ici de reprendre cette démonstration historique en nous positionnant directement dans le cas stationnaire.

On suppose que la vitesse u_z dépend linéairement de z , telle que : $u_z = \gamma z$, avec $\gamma > 0$ le gradient de vitesse axiale. En résolvant l'équation de continuité présentée Eq. (1.20), nous obtenons l'expression de la vitesse radiale u_r , qui est donnée par $u_r = -\frac{1}{2}\gamma r$. À partir de ces prémisses, Rott substitue les expressions de vitesse ainsi dérivées dans les équations de Navier-Stokes, spécifiquement les équations (1.17) à (1.19). Nous pouvons alors déduire que la vitesse azimutale $u_\theta(r)$ est également une fonction de la composante radiale. L'équation azimutale de Navier-Stokes devient :

$$-\frac{1}{2}\gamma r \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (1.30)$$

Cette équation peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta(r))}{\partial r} \right] = -\frac{\gamma r}{2\nu} \quad (1.31)$$

En supposant $u_\theta(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$, l'intégration donne :

$$u_\theta(r) = \frac{A}{r} \left(1 - \exp \left(-\frac{r^2}{a^2} \right) \right) \quad (1.32)$$

où $a = 2\sqrt{\nu/\gamma}$ est le rayon du cylindre pour lequel les effets visqueux sont importants. Dans la littérature, ce rayon est généralement choisi comme étant le rayon du cœur du vortex. Dans notre contexte de comparaison des modèles visqueux et non visqueux, nous avons préféré une définition unique du rayon du cœur du vortex établie à partir du maximum de vitesse azimutale. La distribution de vorticit e $\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta)$ du vortex de Burgers est donc une gaussienne, telle que :

$$\omega(r) = \omega_0 \exp \left(-\frac{r^2}{a^2} \right), \quad (1.33)$$

avec $\omega(0) = \omega_0$ la vorticit e sur l'axe Oz qui a une valeur finie. La circulation associ ee est $\Gamma = \omega_0 \times \pi a^2 = 4\pi\omega_0\nu/\gamma$ et il est alors possible d'exprimer la vitesse azimutale en fonction de la circulation :

$$u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left(-\frac{r^2}{a^2} \right) \right) \quad (1.34)$$

Cette expression ressemble au mod ele de vortex proposée par Oseen [78] pour le cas instationnaire pour lequel $\gamma = 0$:

$$u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right) \right) \quad (1.35)$$

Rott remarque que sa solution stationnaire Eq. (1.34) semble "gel ee" au temps $t = 1/\gamma$. Il interpr ete ce ph enom ene en proposant que le gradient de vitesse axiale alimente continuellement le c oeur du vortex m eme pendant sa diffusion, ce qui permet d'atteindre un  etat

d'équilibre. Le maximum de la vitesse azimutale est tel que :

$$u_\theta(r = r_c) = \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \left(1 - e^{-\vartheta}\right) \quad (1.36)$$

avec $\vartheta \approx 1.256$ qui est la solution de l'équation $2\vartheta = e^\vartheta - 1$. Nous avons choisi de définir le rayon du cœur du vortex comme le rayon pour lequel la vitesse u_θ est maximale. Dans le modèle proposé par Burgers-Rott, le rayon du cœur du vortex n'est donc pas directement la constante a mais s'exprime tel que $r_c = 2\sqrt{\nu\vartheta/\gamma} \approx 1.12a$. Nous cherchons maintenant à exprimer le profil de l'interface. Reprenons l'analyse de Rott, pour les équations de Navier-Stokes. Les équations radiale et axiale de Navier-Stokes s'écrivent telles que :

$$\frac{1}{4}\gamma^2 r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.37)$$

$$\gamma^2 z = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.38)$$

Il est alors possible de donner une expression de la pression :

$$p(r, z) = \rho_l \left(-\frac{1}{8}\gamma^2 r^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 z^2 + \int_0^r \frac{u_\theta^2}{r'} dr' \right) - \rho_l g z + C \quad (1.39)$$

où le terme $p_\Gamma(r) = \rho_l \int_0^r \frac{u_\theta^2}{r'} dr'$ correspond à la dépression liée à la présence du vortex. La valeur de la constante C est déterminée grâce à la condition limite à l'interface, i.e. en $z = h(r)$. Au niveau de l'interface, la pression est équivalente à la pression atmosphérique p_0 , soit :

$$C = p_0 - p_\Gamma(R) + \rho_l \left[\frac{\gamma^2}{2} \left[\frac{R^2}{4} + h(R)^2 \right] + gh(R) \right] \quad (1.40)$$

En posant $C' = C - p_0$, on a :

$$h(r) + \frac{1}{2g}\gamma^2 h(r)^2 + \frac{1}{8g}\gamma^2 r^2 - \frac{C'}{\rho_l g} = \frac{p_\Gamma(r)}{\rho_l g} \quad (1.41)$$

Pour évaluer le terme $p_\Gamma(r)$, on peut introduire le changement de variable suivant :

$$u = \frac{r^2}{a^2} \quad (1.42)$$

La pression $p_\Gamma(r)$ s'exprime alors telle que :

$$p_\Gamma(u) = \frac{\rho_l \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \int_0^u \frac{(1 - \exp(-u'))^2}{u'^2} du' \quad (1.43)$$

$$= \frac{\rho_l \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \exp(-u'))^2}{u'^2} du' - \int_u^{+\infty} \frac{(1 - \exp(-u'))^2}{u'^2} du' \right] \quad (1.44)$$

$$= \frac{\rho_l \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \left[2 \ln(2) - \int_u^{+\infty} \frac{(1 - \exp(-u'))^2}{u'^2} du' \right] \quad (1.45)$$

En intégrant par parties :

$$\int_u^{+\infty} \frac{(1 - \exp(-u'))^2}{u'^2} du' = -\frac{(1 - \exp(-u'))^2}{u'} \Big|_u^{+\infty} - \int_u^{+\infty} \frac{2(1 - \exp(-u')) \exp(-u')}{u'} du' \quad (1.46)$$

Soit :

$$p_{\Gamma}(r) = \frac{\rho_l \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \left[2\ln(2) - \frac{a^2(1 - \exp(-\frac{r^2}{a^2}))^2}{r^2} + 2Ei(-\frac{r^2}{a^2}) - 2Ei(-2\frac{r^2}{a^2}) \right] \quad (1.47)$$

avec $Ei(u) = -\int_{-u}^{+\infty} \frac{\exp(-u')}{u'} du'$ la fonction exponentielle intégrale. Le profil de l'interface s'exprime alors ainsi :

$$h(r) = -\frac{g}{\gamma^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{g^2} \left(\frac{\gamma^2 r^2}{8} - \frac{C' + p_{\Gamma}(r)}{\rho_l} \right)} \right) \quad (1.48)$$

En appliquant les simplifications classiques qui éliminent les termes en γ^2 dans l'équation de la pression Eq. (1.39), on obtient :

$$h(r) \approx h(R) + \frac{p_{\Gamma}(r) - p_{\Gamma}(R)}{\rho_l g} \quad (1.49)$$

Il est alors possible de calculer l'amplitude de la déformation de l'interface :

$$h(R) - h(0) \approx \frac{p_{\Gamma}(R)}{\rho_l g} \quad (1.50)$$

En supposant de plus $R/a \gg 1$, on trouve [26] :

$$h(R) - h(0) \approx \frac{\ln(2)\vartheta\Gamma^2}{4\pi^2 r_c^2 g} \quad (1.51)$$

L'amplitude de la déformation, telle qu'elle a été formulée, est semblable à celle prédite par le modèle de Rankine, à un facteur multiplicatif près correspondant à $\ln(2)\vartheta \approx 0.87$.

Le modèle de Burgers-Rott fournit une base solide pour la compréhension du vortex de vidange. Cependant, cette méthode présente des limitations, notamment l'hypothèse d'une vitesse axiale u_z constante par rapport au rayon r [88]. De plus, la vitesse axiale possède une dépendance radiale, car elle dépend de la distance à la section de sortie, ce qui est négligé ici. Pour affiner cette approximation, Einstein et Li [28] ont élaboré une approche plus réaliste établie sur le modèle de Burgers-Rott. Ils divisent l'écoulement en deux régions distinctes, en spécifiant que pour des rayons inférieurs au rayon de la section de sortie $\phi/2$, l'écoulement pourrait être considéré comme essentiellement uniforme (écoulement bouchon). La valeur de la vitesse axiale se calcule alors simplement en fonction du débit de vidange, telle que :

$$u_z(r, z) = -\frac{Q}{\pi h(R)(\phi/2)^2} (z - h(R)) \quad (1.52)$$

Pour des rayons supérieurs à $\phi/2$, la vitesse axiale est de nouveau supposée nulle. Cette approche entraîne une discontinuité en $r = \phi/2$. Cependant, elle présente l'avantage d'estimer facilement la vitesse axiale.

Dans leurs travaux, Einstein et Li ont constaté un écart entre leurs valeurs expérimentales et théoriques. Pour expliquer ces écarts, ils ont utilisé le concept de viscosité turbulente. La viscosité effective totale à considérer s'exprime donc telle que $\nu_e = \nu + \zeta$, où ζ est la viscosité turbulente. Cette méthodologie a été reprise par Odgaard [74], qui a défini ζ comme étant proportionnel à la circulation Γ : $\zeta = k\Gamma$ et on trouve différentes estimations du paramètre k dans la littérature [44, 98]. Néanmoins, l'utilisation de la viscosité turbulente devient de plus en plus rare. Dans un article récent, Duinmeijer [26] mène une étude

expérimentale par stéréo-PIV (Particle Image Velocimetry). Il exprime des réserves quant à la pertinence de l'emploi d'un paramètre libre pour représenter la viscosité turbulente et montre que l'ajout d'une viscosité turbulente dans l'estimation du rayon peut introduire un écart considérable avec les valeurs mesurées. Il explique ce dernier point par le fait que la vitesse radiale n'est pas très élevée. Il est donc peu probable d'observer un phénomène de diffusion plus important lié à la turbulence dans cette direction. Selon Duinmeijer, les écarts observés entre les mesures expérimentales et les modèles théoriques pourraient davantage être attribués à une représentation trop simplifiée de la vitesse axiale. Ce dernier point est à l'origine d'écarts significatifs dans l'estimation du rayon du cœur du vortex qu'il mesure expérimentalement. Cependant, il souligne que l'expression de la vitesse azimutale fournie par le modèle de Burgers s'avère conforme à ses observations, notamment en termes d'amplitude de déformation de l'interface.

Un exemple de représentation de la vitesse azimutale et de profil de l'interface du modèle de Burgers est donné Figure 1.4 et 1.5. Sur la Figure 1.4, le rayon du cœur du vortex est choisi équivalent à celui des autres modèles mis en comparaison. Sur la Figure 1.5, l'amplitude de la déformation de l'interface est ajustée aux données expérimentales.

1.3.3 Le modèle de Hite & Mih

Hite et Mih [44] ont proposé une adaptation du modèle de Rosenhead [87] pour représenter le vortex de vidange. Dans cette version du modèle de Rosenhead, qui diffère très peu du modèle original, le maximum de la vitesse azimutale est fixé équivalent à celui du modèle de Burgers.

La principale amélioration de ce modèle est une description plus précise des vitesses radiale et axiale. En effet, Hite et Mih considèrent que près de l'axe z , l'écoulement radial se transforme en écoulement axial. Les trois composantes de vitesse peuvent s'exprimer par les équations suivantes :

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r_m} \frac{2\bar{r}}{1 + 2\bar{r}^2} \quad (1.53)$$

$$u_r = \frac{-\nu_e}{r_m} \frac{8\bar{r}}{1 + 2\bar{r}^2} \quad (1.54)$$

$$u_z = \frac{\nu_e z}{r_m^2} \frac{16}{(1 + 2\bar{r}^2)^2} \quad (1.55)$$

où $\bar{r} = r/r_m$ est le rayon adimensionné, $\nu_e = \nu + \zeta$ est la viscosité effective et r_m est le rayon du cœur introduit à l'origine par Hite et Mih. Le rayon du cœur r_c s'exprime alors en fonction de r_m , tel que $r_c = r_m/\sqrt{2}$. On remarquera, de plus, que :

$$\gamma_{HM} = \frac{\partial u_z(z, r=0)}{\partial z} = \frac{16\nu_e}{r_m^2} \quad (1.56)$$

où $\gamma_{HM} = \partial u_z / \partial z$ est le gradient de la vitesse u_z en $r = 0$. Ainsi, il est possible d'exprimer le rayon du cœur du vortex avec une expression semblable au modèle de Burgers :

$$r_c = 4\sqrt{\frac{\nu_e}{2\gamma_{HM}}}. \quad (1.57)$$

En posant une viscosité turbulente nulle, i.e. $\zeta = 0$, le rayon r_c , devient proportionnel au rayon du cœur établi par Burgers, avec un coefficient multiplicatif de $\sqrt{2/\vartheta}$.

En considérant les termes prépondérants des équations radiale et axiale de Navier-Stokes (1.17) et (1.19), les équations se simplifient comme dans l'étude de Burgers-Rott :

$$\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_\theta^2}{r} \quad (1.58)$$

$$\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial z} = g \quad (1.59)$$

Ceci nous permet de déduire le profil de l'interface suivant :

$$h(r) = h(R) + \frac{1}{g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_m} \right)^2 \left[\frac{2\bar{r}^2}{1 + 2\bar{r}^2} - \frac{2\bar{R}^2}{1 + 2\bar{R}^2} \right] \quad (1.60)$$

où $\bar{R} = R/r_m$ représente le rapport entre le rayon de la cuve et le rayon du cœur du vortex. L'amplitude de la déformation de l'interface s'exprime alors telle que :

$$h(R) - h(0) \approx \frac{1}{2g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_c} \right)^2 \quad (1.61)$$

L'amplitude de la déformation de l'interface est donc deux fois plus petite que celle obtenue par le modèle de Rankine, différence qui s'explique par la différence de définition du cœur de vortex ($r_m/r_c = \sqrt{2}$).

Il est à noter que ce modèle conserve le paramètre de viscosité turbulente introduit par Einstein et Li. En ajustant ce paramètre, Hite et Mih ont réussi à obtenir une bonne correspondance entre leurs données expérimentales et les vitesses radiales et azimutales mesurées.

Chen et al. [20], s'appuyant sur les travaux de Hite et Mih, ont développé un modèle basé sur leurs propres observations expérimentales pour représenter les dépendances radiales et axiales de toutes les composantes de vitesse. Ils ont observé que les lignes de courant formaient des spirales et ont donc décomposé l'expression de la vitesse azimutale en deux fonctions :

La première, reprend le modèle de Hite et Mih, tandis que la seconde, est basée sur leurs mesures expérimentales :

$$\begin{cases} f_1(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r_m} \frac{2\bar{r}}{1 + 2\bar{r}^2} \\ f_2(z) = 1 + a_2 z \end{cases} \quad (1.62)$$

où a_2 est une constante qui dépend de la profondeur de la déformation de l'interface. Ainsi, la vitesse azimutale est exprimée comme le produit de ces deux fonctions, soit $u_\theta(r, z) = f_1(r)f_2(z)$. En réinjectant cette solution dans l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes, les trois composantes de vitesse peuvent alors être exprimées de la manière suivante :

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2r}{r_m^2 + 2r^2} (1 + b_2 z) \quad (1.63)$$

$$u_r = -\nu_e \frac{8r}{r_m^2 + 2r^2} (1 + \ln(1 + b_2 z)) \quad (1.64)$$

$$u_z = \frac{16\nu_e r_m^2}{(r_m^2 + 2r^2)^2} \frac{1 + b_2 z}{b_2} \ln(1 + b_2 z) \quad (1.65)$$

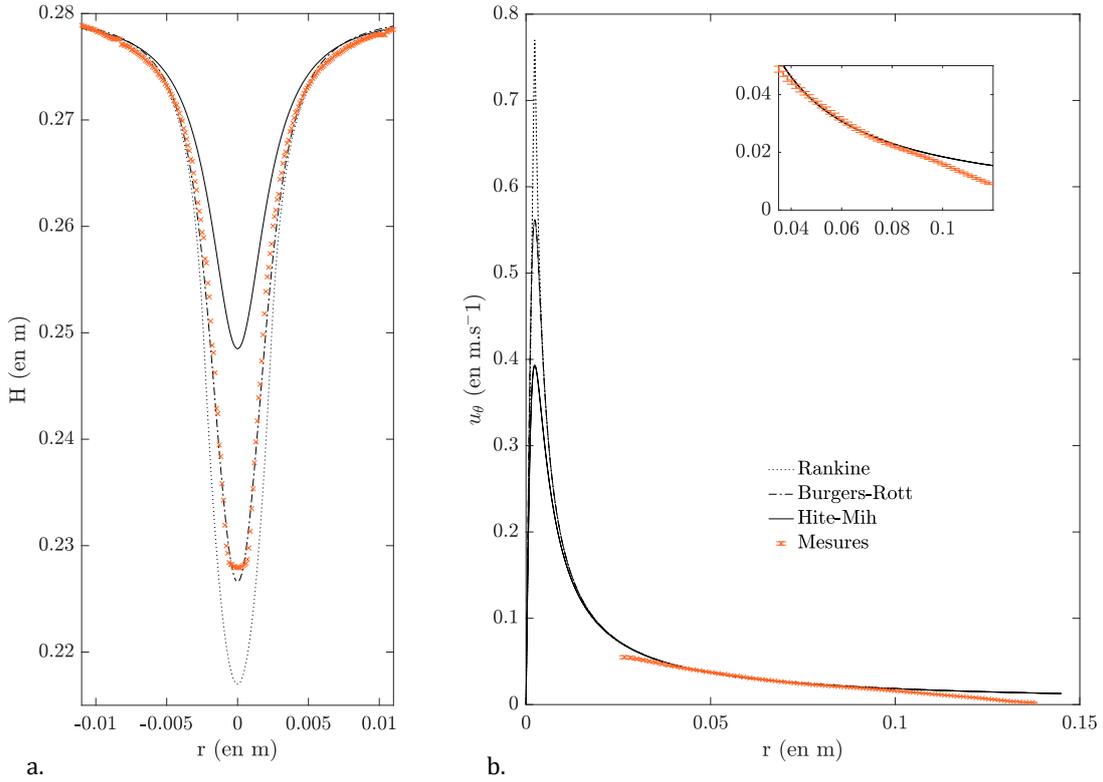


FIGURE 1.4 : Comparaison entre les différents modèles présentés dans le tableau 1.1 (en noir) et les mesures expérimentales en régime stationnaire (en orange). Les paramètres sont les suivants : $r_c = 2.35 \times 10^{-3}$ m, $\Omega = 3$ rpm, $H = 0.28$ m, et $\Gamma = 1.16 \times 10^{-2}$ m^2/s . Les différents profils d'interfaces sont donnés en (a) et les vitesses azimutales correspondantes en (b).

Chen et al. ont réalisé des mesures expérimentales pour valider leur modèle. Ils ont obtenu un bon accord qualitatif entre les trajectoires de traceurs injectés dans l'écoulement et celles prévues par le modèle. Bien que leur modèle offre une représentation plus détaillée du tourbillon, il existe toujours une marge d'erreur notable comprise entre 8 et 36 % entre les prédictions du modèle et leurs mesures expérimentales.

Telles que mentionné dans la section consacrée au modèle de Burgers, des données récentes obtenues par stéréo-PIV de la part de Duinmeijer et al. [26], ainsi que des simulations numériques réalisées par Bøhling [10], indiquent que le gradient de la vitesse axiale le long de l'axe Oz n'est pas constant. Plus précisément, une linéarité de la vitesse axiale le long de cet axe n'est observée qu'à proximité de l'interface, soit suffisamment loin de la section de vidange. Un exemple de représentation de la vitesse azimutale et de profil de l'interface du modèle de Burgers est donné sur les Figures 1.4 et 1.5. Sur la Figure 1.4, le rayon du cœur du vortex est choisi équivalent à celui des modèles mis en comparaison. Sur la Figure 1.5, l'amplitude de la déformation de l'interface est ajustée aux données expérimentales.

1.3.4 Comparatif des modèles analytiques présentés

Le tableau 1.1 fournit une analyse comparative des trois modèles analytiques discutés dans les sections précédentes qu'il est possible de visualiser graphiquement sur la Figure 1.4.

	Rankine	Burgers-Rott	Chen-Hite
u_r	0	$-\frac{1}{2}\gamma r$	$\frac{-\nu_e}{a} \frac{8\bar{r}}{1+2\bar{r}^2}$
u_z	0 ou cste	γz	$\frac{\nu_e z}{a^2} \frac{16}{(1+2\bar{r}^2)^2}$
u_θ	$\frac{\Gamma r}{2\pi r_c^2}$ pour $r \leq r_c$ $\frac{\Gamma}{2\pi r}$ pour $r > r_c$	$\frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right)$	$\frac{\Gamma}{2\pi a} \frac{2\bar{r}}{1+2\bar{r}^2}$
$h(r)$	$h(R) - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2}$	$h(R) + \frac{p_\Gamma(r) - p_\Gamma(R)}{\rho_l g}$	$h(R) + \frac{1}{g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_m}\right)^2 \left[\frac{2\bar{r}^2}{1+2\bar{r}^2} - \frac{2\bar{R}^2}{1+2\bar{R}^2} \right]$
r_c	r_c	$2\sqrt{\nu\vartheta/\gamma} \approx 1.12 a$	$4\sqrt{\nu_e/2\gamma_{HM}} = r_m/\sqrt{2}$
$h(R) - h(0)$	$\frac{1}{g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_c}\right)^2$	$\frac{\ln(2)\vartheta\Gamma^2}{4\pi^2 r_c^2 g}$	$\frac{1}{2g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_c}\right)^2$

TABLE 1.1 : Tableau comparatif des modèles proposés par Rankine, Burgers-Rott, et Chen-Hite.

Celle-ci propose une comparaison des différents modèles avec des données expérimentales que nous avons obtenues et qui sont constituées d'un profil d'interface mesuré (a) et de la vitesse azimutale correspondante (b). Le rayon $r_c = 2.35 \times 10^{-3}$ a été choisi équivalent pour les trois modèles représentés. De fait, l'amplitude de la déformation varie considérablement en fonction du modèle utilisé. Pour mieux visualiser l'impact de ce choix, nous avons représenté, Figure 1.5, une autre comparaison de ces modèles en maintenant cette fois-ci l'amplitude de déformation constante. Parmi les modèles étudiés, celui de Hite-Mih s'ajuste particulièrement bien avec nos données expérimentales, suivi du modèle Burgers-Rott. Le modèle de Rankine, bien que plus rudimentaire en général, décrit mieux la pointe du vortex.

1.3.5 Le modèle de Lundgren

Dans son étude publiée en 1985, Lundgren [63] propose une nouvelle approche pour modéliser le tourbillon de vidange. Il considère une cuve cylindrique dont le rayon pourra être fini ou infini et dont l'orifice central est centré suivant l'axe Oz. Dans certaines configurations, une paroi solide remplace la surface libre du fluide. Cette étude prend notamment en compte les effets transitoires et les effets de la viscosité. Pour ce faire, les équations de Navier-Stokes et de continuité sont utilisées. Le modèle qui nous intéresse particulièrement ici a pour but de poser les équations décrivant la forme du profil de l'interface. Dans ce cas précis, Lundgren associe les équations de Navier-Stokes et de continuité simplifiées aux conditions cinématiques et dynamiques à l'interface. Ces dernières établissent un lien entre la hauteur de la surface libre et la vitesse du fluide, ce qui permettra d'exprimer le profil

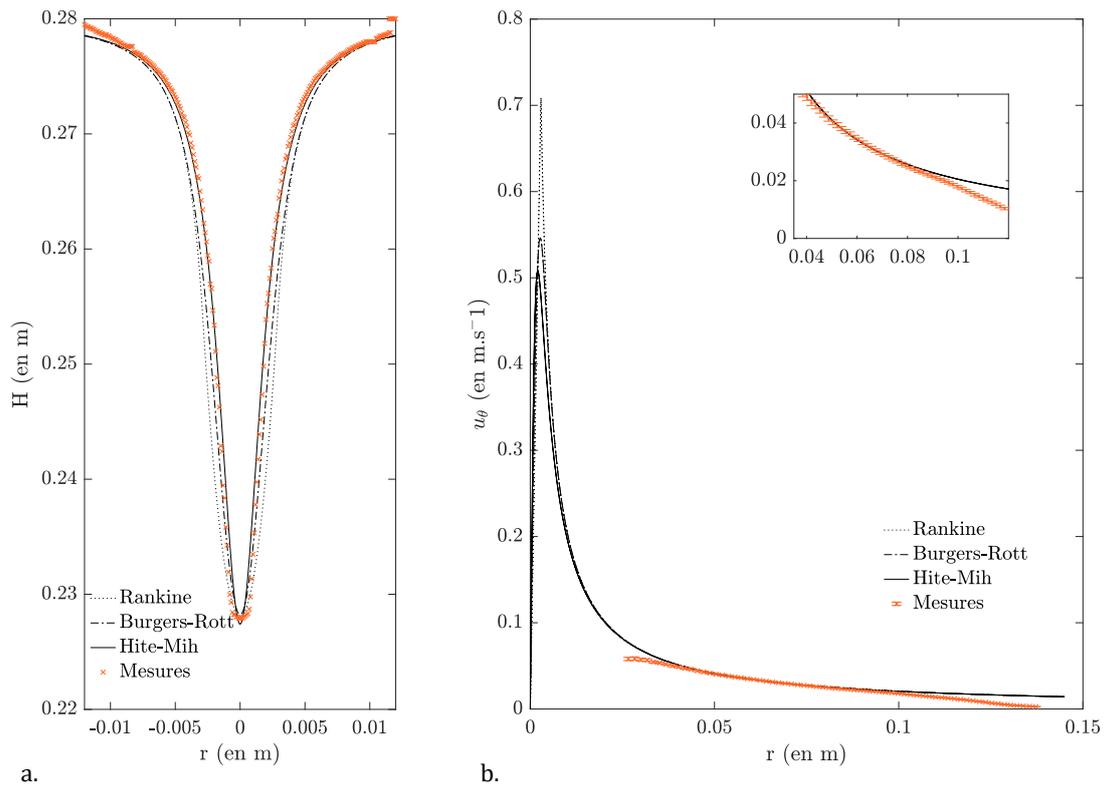


FIGURE 1.5 : (a) Différents profils d'interfaces obtenus à partir des modèles analytiques présentés dans le tableau 1.1 (en noir), des mesures expérimentales en régime stationnaire (en orange). Les différents rayons choisis dans les modèles utilisés sont les suivants : $r_{Hite\&Mih} = 2.02 \times 10^{-3}\text{m}$, $r_{Burgers} = 2.69 \times 10^{-3}\text{m}$, $r_{Rankine} = 2.88 \times 10^{-3}\text{m}$. Les paramètres autres sont ceux du cas expérimental représenté : $\Omega = 3 \text{ rpm}$, $H = 0.28 \text{ m}$ et $\Gamma = 1.16 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. (b) Vitesses azimutales correspondantes pour les modèles analytiques (en noir) et les données expérimentales (en orange).

de l'interface.

Lundgren se concentre sur les zones proches de l'interface et il est alors possible de négliger la vitesse axiale, c'est-à-dire de considérer $u_z \ll \sqrt{2gh(R)}$. Cependant, en utilisant cette hypothèse, ce modèle ne permet pas de décrire précisément le champ de vitesse dans tout l'écoulement comme nous l'avons expliqué précédemment et cette hypothèse est particulièrement fautive près de la section de vidange. Si ce modèle semble de fait inapproprié pour décrire des déformations de l'interface dont l'amplitude serait comparable à la profondeur totale de l'eau, il est tout de même utilisé dans la littérature dans ces situations [97].

De plus, dans son approche, Lundgren propose de simplifier les équations de Navier-Stokes en supposant un nombre de Rossby global faible $R_o = U/2\Omega L \ll 1$, où U et L sont les vitesses et la dimension caractéristiques de l'écoulement. Il est à noter que cette hypothèse se vérifie davantage près du cœur du vortex [4] en introduisant un nombre de Rossby local. Comme la déformation de l'interface est surtout visible au niveau du cœur du vortex, cette approximation est, elle aussi, raisonnable pour décrire la déformation de l'interface.

La condition cinématique à l'interface exprime le fait que la surface est parallèle à l'écoulement et prend la forme [4] :

$$\frac{\partial h(r)}{\partial r} = \frac{u_z}{u_r}, \text{ pour } z = h(r) \quad (1.66)$$

En utilisant l'approximation $u_z \ll \sqrt{2gh(R)}$, l'équation axiale de Navier-Stokes (1.17) se réduit à :

$$0 = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.67)$$

Par intégration et en négligeant la tension de surface dans la composante normale de la condition dynamique à l'interface, nous pouvons dériver une expression standard pour la pression hydrostatique :

$$p(r, z) = \rho_l g [h(r) - z] \quad (1.68)$$

L'équation radiale de Navier-Stokes se simplifie alors en :

$$\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.69)$$

En réinjectant l'expression de la pression dans cette équation, il vient :

$$\frac{u_\theta^2}{r} = g \frac{\partial h(r)}{\partial r} \quad (1.70)$$

La vitesse azimutale est donc uniquement une fonction de r et est indépendante de z . L'équation azimutale de Navier-Stokes (1.18) se simplifie alors ainsi :

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (1.71)$$

Soit encore :

$$u_r = \nu \frac{\partial}{\partial r} \ln \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta(r))}{\partial r} \right] \quad (1.72)$$

La vitesse radiale est donc, elle aussi, indépendante de z . L'équation de continuité (1.20) nous permet de déduire que la vitesse axiale est linéaire suivant z . Il est ainsi possible de réécrire l'équation de continuité telle que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{u_z(h(r)) - u_z(0)}{h(r)} = 0 \quad (1.73)$$

En utilisant la condition cinématique à l'interface Eq. (1.66), cette équation devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rh(r)u_r)}{\partial r} = u_z(0) \quad (1.74)$$

Lundgren choisit d'appliquer l'approche d'Einstein et Li [28] pour modéliser la vitesse axiale au point $z = 0$, une méthodologie qui sera par la suite reprise par Stepanyants dans ses travaux [98, 97]. Pour $r \leq \phi/2$, l'écoulement est de type bouchon, i.e. $u_z(z = 0) = Q/\pi(\phi/2)^2$. Pour $r > \phi/2$, il n'y a pas d'écoulement vertical et $u_z(z = 0) = 0$. D'autres modèles de la vitesse axiale $u_z(z = 0)$ ont été proposés dans la littérature. Lautrup [58] propose notamment un profil gaussien. En utilisant l'approche d'Einstein et Li, l'équation (1.74) conduit à :

$$h(r)u_r(r) = \begin{cases} -\frac{Qr}{2\pi(\phi/2)^2}, & \text{pour } r \leq \frac{\phi}{2}, \\ -\frac{Q}{2\pi r}, & \text{pour } r > \frac{\phi}{2}. \end{cases} \quad (1.75)$$

qui se réécrit grâce à l'équation (1.72) :

$$h(r)\nu \frac{\partial}{\partial r} \ln \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta(r))}{\partial r} \right] = \begin{cases} -\frac{Qr}{2\pi(\phi/2)^2}, & \text{pour } r \leq \frac{\phi}{2}, \\ -\frac{Q}{2\pi r}, & \text{pour } r > \frac{\phi}{2}. \end{cases} \quad (1.76)$$

La modélisation de l'interface passe donc par la résolution du système d'équations (1.70), et (1.76) reliant la vitesse azimutale au profil de l'interface.

Il est intéressant de considérer le cas particulier du fluide parfait en posant $\nu = 0$ et de constater qu'il est possible de retrouver la formule analytique du modèle de Rankine (cf. Table 1.1).

La prise en compte des termes visqueux nécessite quant à elle une résolution numérique de ces équations. Miles [67] a établi une solution approximative de ce système d'équations qui peut être vue comme une extension du modèle de Burgers-Rott. En supposant la circulation très faible, le rayon du coeur du vortex grand et la profondeur $h(R)$ grande, l'amplitude de la déformation de l'interface est faible et a peu d'impact sur la vitesse azimutale. Il est alors possible d'utiliser l'approximation $h(r) \approx h(R)$ dans l'équation (1.76). Cette approximation très forte reste donc cohérente avec le cadre théorique de Lundgren. Dans cette limite, la solution des équations (1.70)-(1.76) correspond au modèle de Burgers-Rott. Ce modèle se révèle donc lui-aussi mieux adapté pour décrire des interfaces dont l'amplitude de déformation est relativement faible comparée à la profondeur totale du liquide. En utilisant un développement de Taylor du profil $h(r)$ et de la vitesse azimutale $u_\theta(r)$ il est aussi possible d'obtenir une solution analytique approchée de l'équation de Lundgren [98].

1.3.6 Effets de la tension de surface

Les profils de l'interface obtenus grâce aux différents modèles présentés dans les sections précédentes négligent tous les effets de tension superficielle. Dans la littérature, Andersen propose d'effectuer la résolution numérique du système d'équations établie par Lundgren avec et sans prise en compte du terme de tension de surface.

Contrairement à Einstein & Li, il choisit un profil de la vitesse axiale en $z = 0$ qui correspond à ses propres mesures expérimentales. L'écoulement est alors vertical non nul en $r > r_0$ et bouchon en $r \leq r_0$. On suppose ici $r_0 > \phi/2$. Dans sa première étape

de résolution, Andersen néglige l'effet de la tension de surface et résout donc le système composé de l'équation (1.70) et de l'équation suivante :

$$h(r)\nu \frac{\partial}{\partial r} \ln \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta(r))}{\partial r} \right] = \begin{cases} -\frac{Qr}{2\pi r_0^2}, & \text{pour } r \leq r_0, \\ -\frac{Q(r+d)}{2\pi(r_0+d)r} \exp\left(-\frac{r-r_0}{d}\right), & \text{pour } r > r_0. \end{cases} \quad (1.77)$$

où d est une constante estimée grâce à son profil expérimental de vitesse $u_z(z = 1 \text{ cm})$.

Cette résolution donne un écart significatif avec les données expérimentales d'Andersen d'environ 70% pour le profil $h(r)$ testé.

Pour affiner le modèle de Lundgren, Andersen est le premier à proposer une prise en compte de l'effet de la tension de surface en exprimant le terme de Laplace-Young dans l'expression de la pression, et il généralise l'équation (1.70) sous la forme :

$$\frac{u_\theta^2}{r} = g \frac{\partial h(r)}{\partial r} - \frac{\gamma}{\rho_l} \frac{\partial \kappa}{\partial r} \quad (1.78)$$

avec :

$$\kappa(r) = \frac{h'}{r[1 + (h')^2]^{1/2}} + \frac{h''}{[1 + (h')^2]^{3/2}} \quad (1.79)$$

La fonction $\kappa(r)$ représente la courbure de l'interface en coordonnées cylindriques pour un problème axisymétrique.

Andersen résout numériquement le nouveau système composé des équations (1.77)-(1.78) par la méthode des différences finies et obtient un excellent accord avec ses profils expérimentaux en ajustant le débit Q et le rayon r_0 . La valeur de d est estimée expérimentalement.

Il est compliqué d'évaluer de manière précise l'effet de la tension de surface sur des profils expérimentaux grâce à la méthode proposée par Andersen. Sans mesure expérimentale du profil de $u_z(0)$, son approche nécessite de considérer d comme un autre paramètre à ajuster. Nous avons donc choisi de ne pas utiliser cette méthode pour modéliser nos profils.

La mesure directe de h' et de h'' demande, elle aussi, une très grande précision sur les profils de l'interface et il n'est donc pas évident d'évaluer l'impact de la tension de surface a posteriori à partir de nos profils expérimentaux, dont une estimation grossière correspondrait à un écart de $2\sigma/(\phi/2)^2 \rho_l g \approx 8 \text{ mm}$ dans le cas présenté à la Figure 1.5.

1.4 Conclusions

Dans un premier temps, nous avons présenté la base théorique permettant de démontrer la loi de vidange classique de Torricelli, mais également de comprendre l'origine de ses limites. Nos expériences sans rotation s'inscrivent dans la continuité des résultats de la littérature et nous permettent de caractériser l'influence des effets dissipatifs et du mouillage dans nos expériences.

Dans un second temps, nous avons abordé différents modèles permettant la description du champ de vitesse et du profil de l'interface. La modélisation des différentes composantes de vitesses s'est affinée au cours du temps et les modèles les plus récents essaient notamment de mieux modéliser la composante axiale. L'utilisation de la viscosité turbulente pour décrire le vortex de vidange devient davantage controversée, notamment dans la gamme de vitesses de rotation peu élevées qui est utilisée dans le cadre de notre étude. Nous avons donc choisi d'utiliser la viscosité de l'eau sans correction turbulente. En utilisant le rayon du cœur comme un paramètre libre, notre profil d'interface expérimental est alors particulièrement bien décrit sans cette correction turbulente par le modèle analytique d'Hite

et Mih et le modèle de Burgers et Rott. Cependant, les différentes approches analytiques ne permettent pas de rendre compte de l'effet de la tension de surface sur le profil qui est alors masqué par l'utilisation du paramètre libre. Néanmoins, l'utilisation d'un modèle plus complet considérant les effets superficiels, comme celui proposé par Andersen, impose une résolution numérique et dans notre cas le choix de plusieurs paramètres libres. Nous avons donc choisi de ne pas résoudre ce système.

Dispositif expérimental

Sommaire

2.1	Introduction	32
2.2	Présentation générale	32
2.2.1	Dispositif instationnaire	32
2.2.2	Dispositif stationnaire	33
2.3	Dispositif expérimental	34
2.3.1	Plateforme rotative	35
2.3.2	Cuve utilisée dans le cas instationnaire	35
2.3.3	Système d'injection et géométrie de la cuve dans le cas stationnaire	35
2.3.4	Centrage de la cuve	38
2.3.5	Géométrie des buses	38
2.3.6	Système de contrôle de niveau	39
2.4	Techniques de mesures	40
2.4.1	Balance de précision	40
2.4.2	Dispositif de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV)	41
2.4.3	Acquisition du profil de l'interface	44
2.4.4	Enregistrement audio	45
2.5	Protocole expérimental	45
2.5.1	Propriétés des fluides	45
2.5.2	Expériences instationnaires	46
2.5.3	Expériences stationnaires	47
2.6	Reproductibilité	48
2.6.1	Vidange instationnaire sans couvercle	48
2.6.2	Vidange instationnaire avec couvercle	48
2.6.3	Vidange stationnaire	50

2.1 Introduction

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la vidange de récipients, en régimes stationnaires (à hauteur d'eau constante) ou instationnaires (vidange complète du réservoir), en référentiel tournant. La vidange en référentiel fixe nous sert de cas de référence.

Les expériences réalisées dans cette thèse reposent sur l'utilisation d'une plateforme tournante. Les récipients sont de géométrie cylindrique (axisymétrique centrée), ce qui permet de contrôler la vorticité générée dans le système et de stabiliser le vortex. Ces dispositifs ont été initialement conçus lors d'un stage de master précédant ce travail de thèse, et ont fait l'objet d'améliorations et d'adaptations continues face aux besoins rencontrés. Dans la section 2.2, nous commençons par une présentation générale qui offre une vue d'ensemble sur les dispositifs expérimentaux utilisés dans les études de vidange en régimes instationnaires et stationnaires. Nous détaillons ensuite les équipements et dispositifs expérimentaux dans la section 2.3, les instruments de mesure, leur précision et les techniques de post-traitement des données dans la section 2.4, les protocoles expérimentaux dans la section 2.5, et la reproductibilité des résultats obtenus dans la section 2.6.

2.2 Présentation générale

2.2.1 Dispositif instationnaire

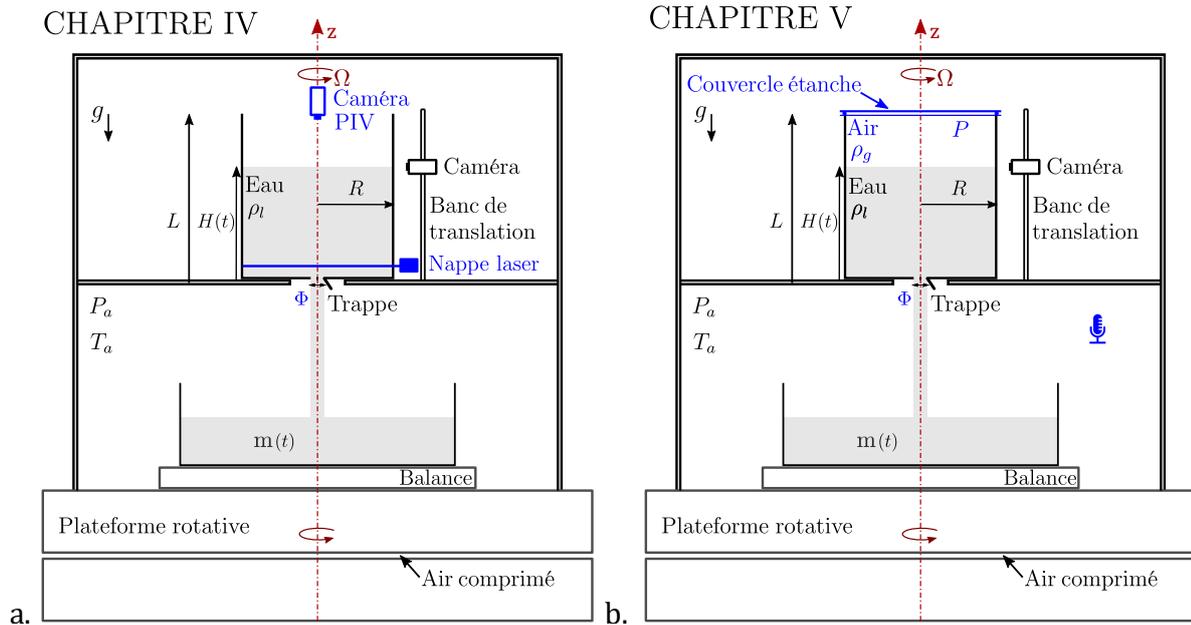


FIGURE 2.1 : Schéma du dispositif expérimental (a) dans le cas sans couvercle et (b) avec couvercle. Les différences entre les deux expériences sont indiquées en bleu.

Le dispositif expérimental utilisé dans les études instationnaires avec et sans couvercle est illustré respectivement Figures 2.1a et 2.1b. Les différences entre les deux configurations sont indiquées en bleu.

Une cuve cylindrique fait office de réservoir. Elle est utilisée avec un couvercle étanche (expériences du Chapitre 5) ou sans couvercle (expériences du Chapitre 4). La cuve, ainsi que tous les autres équipements et instruments de mesures, sont placés sur une plateforme rotative pilotée à distance.

CHAPITRE III

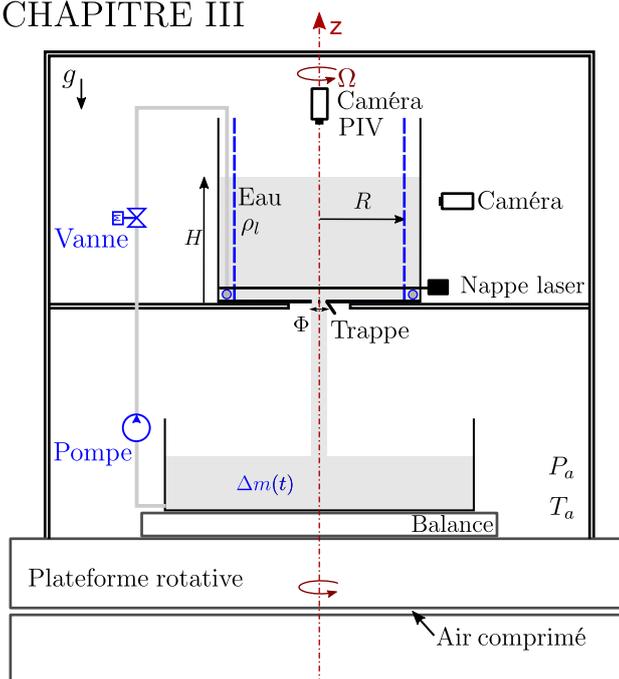


FIGURE 2.2 : Schéma du dispositif expérimental. Les différences par rapport à la Figure 2.1a sont indiquées en bleu.

Avant de déclencher la vidange, le réservoir est mis en rotation pendant une heure pour obtenir une rotation homogène et stationnaire. Une fois la vidange déclenchée, l'eau perdue est recueillie dans un bac de récupération.

Nous effectuons quatre types de mesures au cours de ces expériences :

- Nous mesurons la masse du bac de récupération à l'aide d'une balance de précision. La mesure de la variation de masse dans le bac nous permet de calculer à la fois la hauteur moyenne de l'eau dans la cuve et la vitesse de vidange.
- Nous utilisons une caméra placée sur un banc de translation pour observer l'évolution de la déformation de l'interface en suivant son mouvement descendant.
- Un système de Vélométrie par Images de Particules (qui sera noté PIV pour "Particle Image Velocimetry" en anglais), composé d'une caméra positionnée au-dessus de la cuve et d'un plan laser horizontal, nous permet d'obtenir le champ de vitesse et la circulation du vortex dans le cas d'une vidange sans couvercle.
- Un enregistrement audio nous permet d'identifier la fréquence d'apparition des bulles, dans le cas de la vidange avec couvercle.

2.2.2 Dispositif stationnaire

Le dispositif expérimental utilisé pour l'étude du régime permanent de la vidange (à hauteur d'eau constante), exposée au Chapitre 3, est illustré sur la Figure 2.2. Les nouveaux éléments de ce montage sont indiqués en bleu sur la Figure 2.2.

Pour maintenir un niveau d'eau stable, un système de recirculation est mis en place. L'eau qui s'écoule de la cuve est collectée dans un bac de récupération puis réinjectée grâce

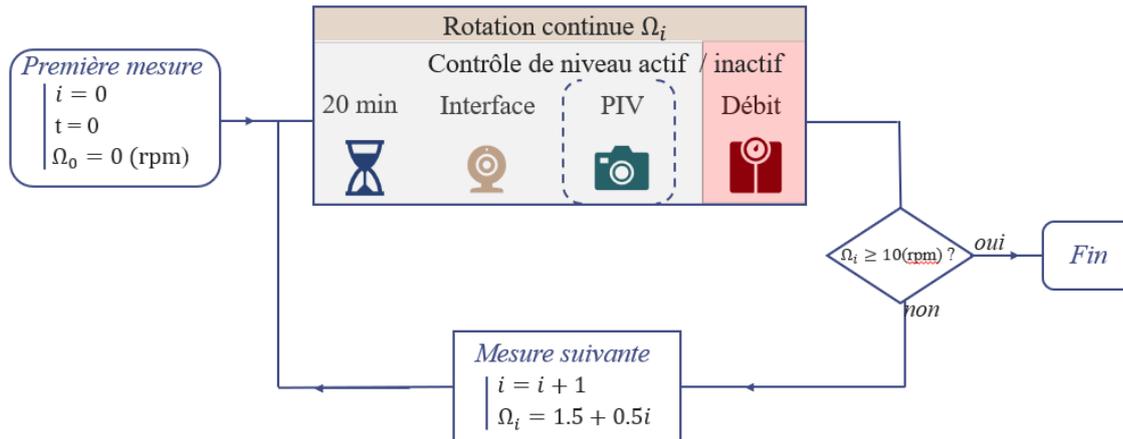


FIGURE 2.3 : Schéma représentant le protocole expérimental utilisé dans le cas stationnaire.

à une pompe dans le circuit hydraulique connecté à la cuve. Cette vidange par gravité permet d'éviter que le vortex ne soit perturbé par un circuit hydraulique directement connecté à la buse de sortie, comme Cristofano et al. ont pu l'observer dans leurs travaux [23]. Pour contrôler le débit de réinjection, nous utilisons une vanne proportionnelle pilotée par une régulation PID (Proportionnel Intégral Dérivé) conçue avec Labview et développé pendant cette thèse. La masse d'eau équivalente dans le bac de réception sert de consigne pour le contrôleur PID.

La cuve utilisée ici possède une géométrie particulière avec une injection d'eau en trois parties (cf. Figure 2.6a et b) nous permettant de conserver l'axisymétrie du problème et de limiter l'influence de l'injection d'eau sur la stabilité et l'intensité du vortex.

Nous mettons en œuvre trois types de mesures durant ces expériences :

- La mesure de la masse du bac de réception nous permet de calculer la vitesse de vidange en déclenchant, durant la mesure, la fermeture de la vanne proportionnelle et l'arrêt du système de contrôle.
- Nous utilisons une caméra de profil pour enregistrer la déformation de l'interface et détecter l'apparition d'instabilités conduisant à la formation de bulles.
- Le système de vélocimétrie par images de particules (PIV) est également utilisé dans cette expérience. Nous avons cependant dupliqué certaines expériences, avec et sans particules d'ensemencement (avec et sans PIV respectivement).

Le protocole utilisé ici, schématisé à la Figure 2.3, diffère de celui présenté précédemment. En effet, nous augmentons progressivement la vitesse de rotation de la plateforme, par un incrément de 0.5 tours/min après chaque stabilisation de l'état d'équilibre. Ceci requiert une pause de 20 minutes entre chaque série de mesures.

2.3 Dispositif expérimental

La Section 2.3.1 présente la plateforme expérimentale sur laquelle ont eu lieu toutes nos expériences de vidange. Les caractéristiques générales du récipient vidangé sont décrites pour le cas instationnaire dans la Section 2.3.2. La géométrie spécifique de la cuve utilisée dans le cas stationnaire ainsi que le système de réinjection de l'eau qu'elle nécessite sont

décrits dans la Section 2.3.3. Un soin tout particulier est apporté au centrage de la cuve, que nous décrivons en Section 2.3.4. La géométrie des buses qui s'adaptent sur les différentes cuves utilisées sera décrite dans la Section 2.3.5. Enfin, le système de contrôle de niveau mis en place pour atteindre le régime stationnaire sera donné dans la Section 2.3.6.

2.3.1 Plateforme rotative

Notre plateforme rotative est composée de deux plateaux cylindriques en marbre ayant une épaisseur de 20 cm et un diamètre de 1.5 m, empilées l'une sur l'autre et séparées par un coussin d'air comprimé d'une épaisseur de 1 mm (cf. Fig 2.4c). Ce dernier permet à la partie supérieure de tourner sans frottement solide autour de l'axe de rotation vertical Oz (Fig. 2.1). La vitesse de rotation Ω peut être modifiée de 0 à 10 tours/minute. L'erreur associée est estimée à ± 1 seconde pour une période de rotation d'une minute. Le poids de la plateforme est d'environ une tonne.

Afin de garantir la sécurité pendant l'expérience, une grille de protection entoure la plateforme, comme visible sur la photographie de la Figure 2.4a. La rotation de la plateforme ne peut s'effectuer qu'une fois cette grille fermée, le système de contrôle-commande de la plateforme se trouvant à l'extérieur de la grille.

Pour optimiser l'agencement des différents équipements sur la plateforme, nous avons ajouté une structure composée de profilés en aluminium NORCAN. Cette adaptation permet de disposer le récipient sur la plateforme, mais également d'intégrer les systèmes de contrôle et de mesure, comme la carte d'acquisition, le PC, la balance, les caméras, le laser, etc. Par sécurité, des panneaux ajustables à la structure ont pour fonction d'isoler l'ensemble de l'expérience des rayonnements du laser. De plus, ils permettent de protéger le dispositif contre les courants d'air pouvant perturber l'interface air/eau.

2.3.2 Cuve utilisée dans le cas instationnaire

Un cylindre en Plexiglas de rayon $R = 145 \pm 0.1$ mm et de longueur $L = 390 \pm 0.1$ mm (cf. Fig 2.4b), dont la plaque inférieure est percée en son centre, est fixé sur une structure en aluminium solidaire de la plateforme. Le récipient est centré sur l'axe Oz , afin d'éviter l'excitation de modes inertiels ou d'instabilité de précession du vortex [117]. Pour s'assurer de la parfaite horizontalité du dispositif, nous avons utilisé à un niveau à bulle électronique dont la précision est de 0.1° .

La cuve utilisée est identique dans les études avec et sans couvercles. La cuve dispose d'un rebord dans lequel une gorge est creusée pour accueillir un joint en caoutchouc qui assurera l'étanchéité en couvercle fermé (cf. Figure 2.5). Le rebord et le couvercle de la cuve sont percés de 15 trous régulièrement espacés afin d'y disposer des vis de serrage garantissant la bonne étanchéité du récipient. Plusieurs tests d'étanchéité ont été réalisés. Pour ce faire, nous avons tenté de réaliser la vidange du réservoir avec couvercle pour un diamètre de buse de l'ordre de la longueur capillaire. Après un temps très bref d'équilibre des pressions dans le volume gazeux, nous avons observé l'absence d'écoulement durant une dizaine de minutes. C'est la durée caractéristique des expériences de vidange tourbillonnaire avec couvercle qui seront présentées dans le Chapitre 5. Ce système de couvercle permet de plus un remplissage aisé de la cuve.

2.3.3 Système d'injection et géométrie de la cuve dans le cas stationnaire

Dans le dispositif à hauteur d'eau constante, un processus de remplissage en trois parties a été conçu (voir Figure 2.6a et b) afin de minimiser l'effet de l'injection continue d'eau

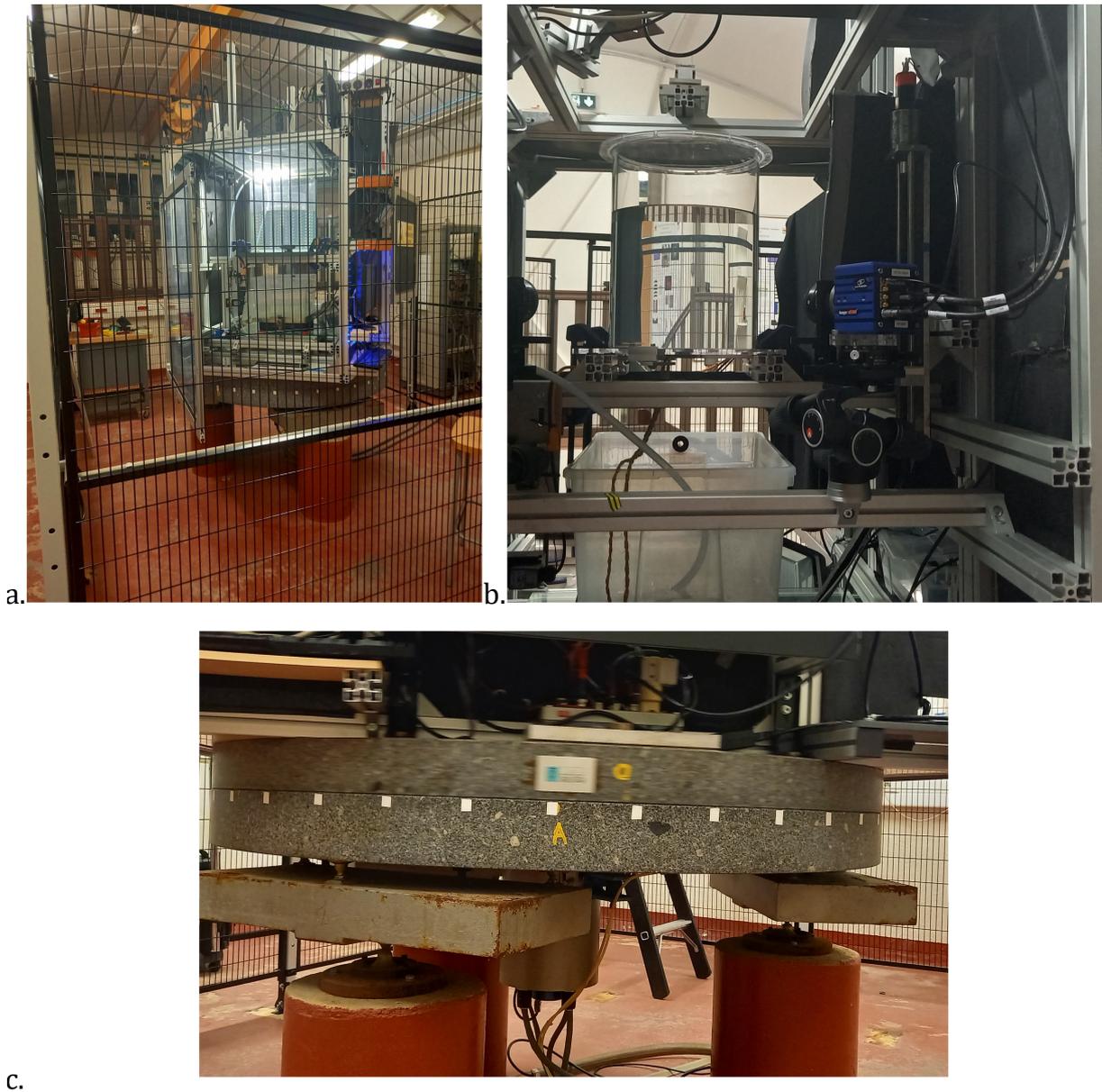


FIGURE 2.4 : Photographies du dispositif expérimental : a) vue extérieure, b) vue intérieure, c) plateforme rotative (photographie prise lors de la rotation, le marbre tournant apparaît flou).



FIGURE 2.5 : Vue de dessus du couvercle de la cuve avec le joint d'étanchéité (en noir) et les 15 vis de serrage.

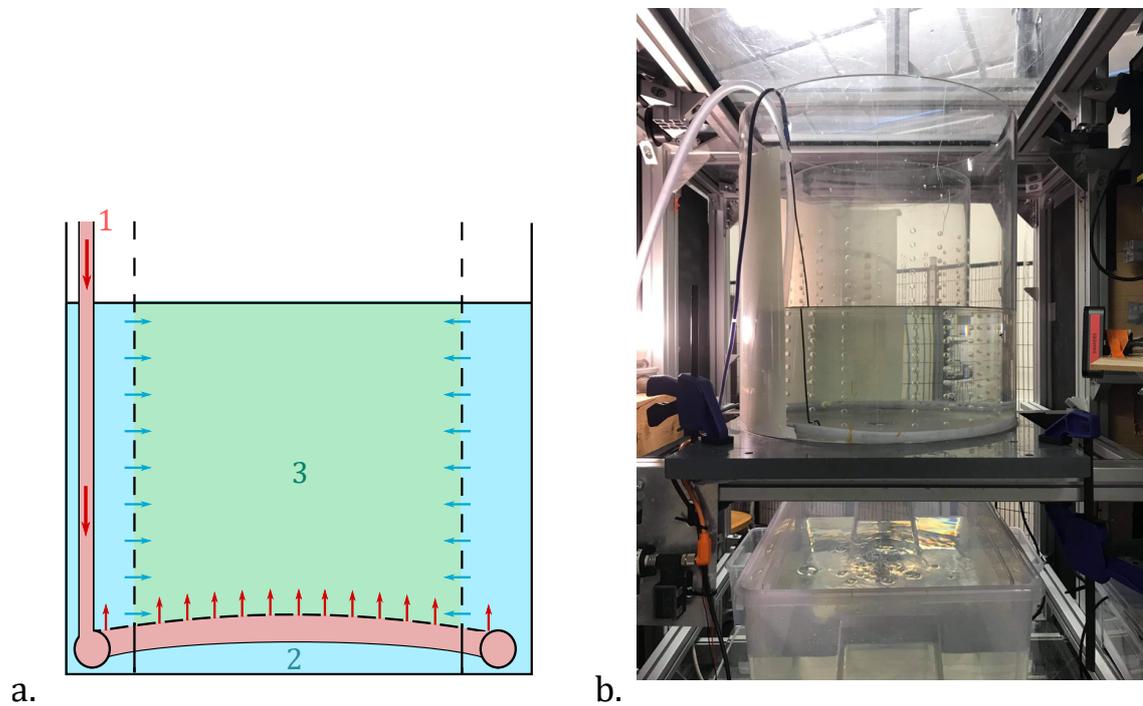


FIGURE 2.6 : Schéma du dispositif expérimental (a) et photographie (b). (a) Les différences par rapport à la Figure 2.1a sont indiquées en rouge pour le tube perforé et en bleu pour l'espace radial perforé sur sa partie interne.

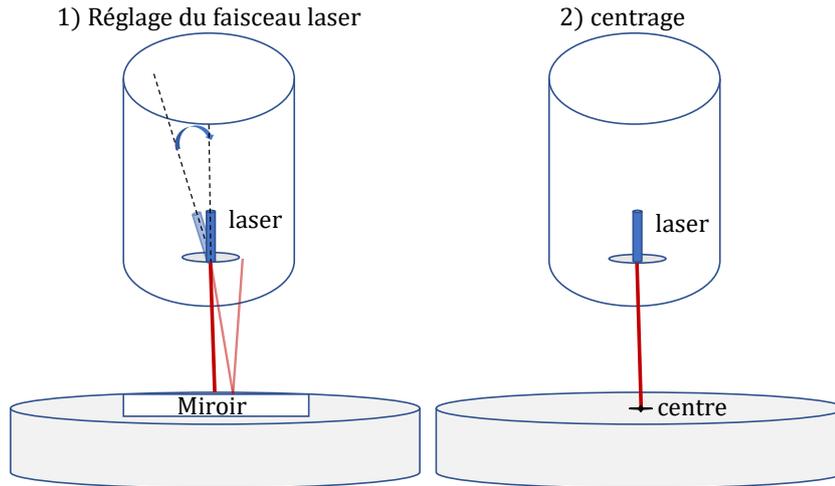


FIGURE 2.7 : Schéma de principe de centrage de la cuve.

sur l'axisymétrie du dispositif et d'éviter toute corrélation indésirable entre la vorticité et le débit d'injection.

Notre cuve comprend deux cylindres en plexiglas partageant le même axe de symétrie. Le cylindre interne, aux dimensions identiques à celles de notre première expérience (30 cm de hauteur et 14.5 cm de rayon), est perforée de 300 trous de 7 mm de diamètre régulièrement espacés pour maintenir une vitesse d'injection radiale minimale par rapport à la vitesse de rotation de la cuve. Dans cette configuration, nous avons constaté un facteur d'au moins 10 entre la vitesse d'injection radiale et la vitesse de rotation au niveau de la paroi centrale.

La cuve externe a un diamètre de 44.2 cm. Un tube perforé à intervalles r guli rs est installé au fond de l'interstice entre les deux cylindres et relié au tuyau du système de recirculation. L'eau collectée dans le bac est réinjectée dans la cuve, en circulant initialement dans le tube perforé, puis dans l'espace entre les deux cuves, enfin en s'infiltrant dans la cuve centrale à travers les trous prévus à cet effet.

2.3.4 Centrage de la cuve

Pour centrer la cuve, nous avons utilisé un pointeur laser (voir Figure 2.7). Ce dernier est fixé à la section de sortie du réservoir à l'aide d'une pièce adaptée. Un miroir, disposé horizontalement sous la cuve, sert à l'ajustement de l'angle du faisceau laser, en superposant ce dernier à sa réflexion. Une fois l'angle du faisceau finement ajusté, la cuve est déplacée afin de positionner le faisceau sur le repère indiquant le centre de la plateforme. La précision obtenue grâce à cette méthode est de l'ordre de l'épaisseur du faisceau, soit environ un millimètre.

2.3.5 Géométrie des buses

La conception des buses, i.e. des pièces utilisées comme orifices de sortie, a connu de nombreuses modifications. Nous mettrons l'accent sur la géométrie des pièces sélectionnées lors des études finales, qui permet d'éliminer des effets indésirables provenant d'interactions avec le jet d'eau en sortie.

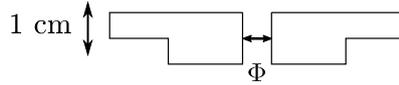


FIGURE 2.8 : Schéma des buses.

Dans le contexte des expériences instationnaires sans couvercle, trois buses fabriquées en PVC, d'épaisseur 1 cm, ont été conçues. Un schéma de la forme générale de ces pièces est présenté sur la Figure 2.8. Elles comportent des trous internes de diamètres $\phi_1 = 2.9 \pm 0.1$ mm, $\phi_2 = 3.5 \pm 0.1$ mm et $\phi_3 = 4.0 \pm 0.1$ mm, respectivement. Comme ces diamètres sont proches de la longueur capillaire, des effets de mouillage importants du jet de sortie peuvent se produire [32]. Bien que non problématiques pour interpréter nos résultats, ces effets ont été expliqués en détail dans le Chapitre 1. Les buses utilisées pour les expériences stationnaires sont identiques, avec l'ajout d'un diamètre $\phi_0 = 2.65 \pm 0.1$ mm plus petit.

Dans les expériences de vidange avec couvercle du Chapitre 5, nous avons constaté, lors de tests d'étanchéité, que pour des diamètres ϕ proches de la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{2\sigma/\rho_l g} \approx 3.4$ mm, la tension de surface a un effet de blocage sur l'écoulement. Comme nous voulons nous affranchir au maximum de l'influence de la tension de surface sur l'écoulement de vidange, les deux buses cylindriques utilisées présentent des trous internes de diamètres nettement supérieurs à ℓ_c , soit $\Phi_1 = 12.7 \pm 0.1$ mm et $\Phi_2 = 19.8 \pm 0.1$ mm, pour respecter $\Phi > 1.9\ell_c$ [22] où $1.9\ell_c$ est le seuil en dessous duquel le temps de vidange dans un tube diverge [120].

2.3.6 Système de contrôle de niveau

Dans le montage stationnaire, une pompe permet l'acheminement de l'eau collectée dans le bac de réception vers la cuve. Dotée d'un débit maximal de 15 L/min, celui-ci est réduit à 12 L/min en raison des pertes de charge à une hauteur de 1 m (correspondant à la hauteur de ré-injection).

Notre dispositif expérimental utilise un système de recirculation de l'eau, piloté par une vanne proportionnelle. Cette vanne est contrôlée sous Labview par une commande PID asservie sur la mesure de la masse du bac de réception. Ceci permet de maintenir l'équilibre des débits entrant et sortant.

Le choix d'une vanne adaptée est essentiel pour garantir le bon fonctionnement de notre système. Sa sélection repose sur le calcul de pertes de charges qui doivent être supérieures à 25% des pertes de charges totales du système.

Les fluctuations de masses sont suivies en temps réel pendant toute la durée de l'expérience. Une fois l'état stationnaire atteint, les fluctuations enregistrées sont en moyenne de ± 1.5 g.

Pendant la durée de l'expérience, de l'ordre d'une dizaine d'heures, une perte de niveau d'eau globale a été constatée. Cette perte, liée aux projections d'eau et à l'évaporation, est évaluée entre 1 à 2 mm par jour. Nous réajustons donc régulièrement le niveau d'eau pendant l'expérience.

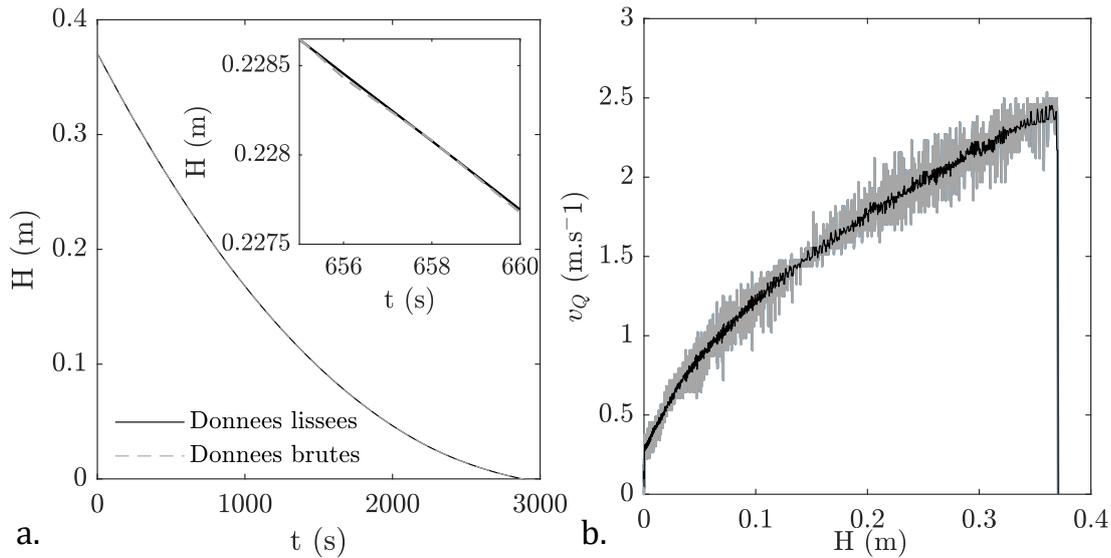


FIGURE 2.9 : Évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps (a) et de la vitesse de vidange en fonction de la hauteur d'eau (b) pour une rotation de 2 tours/min et la section ϕ_1 . Les données brutes sont représentées en gris. Les données lissées sont représentées en noir.

2.4 Techniques de mesures

2.4.1 Balance de précision

Les données collectées par la balance de précision OHAUS Ranger 7000 nous permettent de déterminer l'évolution de la hauteur d'eau moyenne restant dans la cuve $H(t) = H_0 - m(t)/\rho\pi R^2 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R h(r,t)2\pi r dr$, où $h(r,t)$ est le profil radial de l'interface à l'instant t . La balance utilisée ici se distingue par sa précision de 0.5 g et une capacité de mesure pouvant atteindre 35 kg. Pour contextualiser cette précision, notons qu'une couche d'eau de 1 millimètre d'épaisseur dans notre cuve a une masse d'environ 70 g. La précision sur $\delta H(t)$ est donc de l'ordre du micromètre. Aucune correction d'inertie n'est nécessaire pour les mesures de poids, car l'équilibre des forces est centré sur l'axe O_z . Nous avons procédé à une mesure expérimentale de la dérive de la balance. Cette mesure a été effectuée avec et sans rotation pour contrôler l'absence d'effets inertiels. Pour une masse initiale de 22.6 kg, sur une durée équivalente à la plus longue expérience réalisée, la dérive est de 3.5 g, ce qui équivaut à un écart négligeable de 0.015%.

Notre balance est aussi utilisée pour calculer la vitesse de vidange v_Q à partir du débit $Q = \dot{m}/\rho$, telle que $v_Q = Q/\pi(\Phi/2)^2$. Dans les expériences de vidanges instationnaires sans couvercle du Chapitre 4, nous calculons la dérivée analytique de $m(t)$ avec une interpolation polynomiale glissante de Savitzky-Golay de $m(t)$ sur 8 points de mesures [94], ce qui est bien inférieur au nombre de points de mesures totaux lors d'une acquisition qui est de l'ordre de 10^3 points. La statistique de mesure est donc suffisante pour réaliser ce lissage. Un exemple de courbes de hauteur et de vitesse obtenues avant et après lissage est présenté en Figures 2.9a et b. Dans les expériences de vidanges instationnaires avec couvercle du Chapitre 5, nous utilisons les données brutes non lissées, car la statistique de mesure est insuffisante et les phénomènes physiques sont trop rapides pour réaliser le lissage. Ce lissage nous permet aussi d'évaluer a posteriori la précision temporelle de notre balance, qui n'est pas référencée dans la notice d'utilisation. En effet, la balance renvoie les informations au

PC en continu via une connexion RS-232 à une vitesse de 9600 Bauds. Dans notre cas, cette vitesse correspond à un temps caractéristique de transmission de l'ordre de 10 ms. D'un autre côté, elle affiche un temps de stabilisation de 2 s en réponse à un échelon de masse. Lorsque le poids est modifié en continu, la précision temporelle de la balance est donc comprise entre le temps de transmission de l'information de l'ordre de 10 ms et le temps de stabilisation de 2 s. En supposant que les écarts de mesures entre les données lissées et les données brutes sont principalement dues à l'erreur temporelle de la balance, nous pouvons évaluer un temps de réponse moyen de l'ordre de 100 ms.

Dans le cadre de l'étude de vidange en régime stationnaire du Chapitre 3, deux méthodes de mesures du débit ont été utilisées. La première, classique, consiste à utiliser un débitmètre de la gamme LIQUI-VIEW Base dont la plage de mesure est comprise entre 0.5 et 10 L.min⁻¹, avec une précision de l'ordre de ± 0.1 L.min⁻¹. Le débit dans le cas de l'étude à niveau constant est compris entre 0.45 et 1 L.min⁻¹. Le débitmètre n'est donc pas adapté, car il possède une précision trop grossière. Nous avons donc choisi d'utiliser de nouveau la balance pour mesurer le débit de vidange. Pour effectuer la mesure, nous fermons la vanne proportionnelle et arrêtons le système de contrôle. Ceci nous permet de mesurer les variations de masses pendant plusieurs dizaines de secondes. Pendant ce court laps de temps, le niveau de la cuve a légèrement changé (avec une variation comprise entre 0.5 et 2 mm de hauteur d'eau).

Pour évaluer le débit de vidange au moment $t = 0$ s, nous utilisons l'approximation d'une évolution linéaire du débit avec le temps. Cette approximation est notamment vérifiée dans le cas sans rotation, comme le modélise la loi de Torricelli, mais également en présence d'un vortex lorsque les couches limites sont établies (cf. Chapitre 3). Par conséquent, nous pouvons effectuer un ajustement linéaire de la racine de la masse $\sqrt{m(t)} - \sqrt{m(t=0)} \approx a_0 t$, ce qui nous permet d'obtenir le débit initial recherché $Q(t=0) = 2a_0 \sqrt{m(t=0)}/\rho$. Pour un ajustement réalisé à partir d'une trentaine de points, l'écart type sur le coefficient a_0 est estimé à 0.5%.

2.4.2 Dispositif de Vélométrie par Images de Particules (PIV)

La Vélométrie par Images de Particules (PIV) est une méthode de mesure quantitative des champs de vitesse dans les écoulements fluides. Nous effectuons ici une PIV standard 2D2C (deux directions et deux composantes de vitesses) avec une nappe laser dans le plan horizontal. Une caméra placée en vue de dessus prend des images successives des particules d'ensemencement éclairées par la nappe laser.

Le plan laser est généré par un laser MAGNUM SP de longueur d'onde 670 nm, équipé d'une lentille cylindrique et d'un miroir. Le plan d'étude est fixé à une hauteur de 1.5 cm au-dessus du fond de la cuve. Cette hauteur a été choisie pour être suffisamment à l'écart des couches limites (en l'occurrence, l'épaisseur des couches limites d'Ekman $\delta = \sqrt{\nu/\Omega} \leq 2.2$ mm) tout en assurant une acquisition des données pendant une durée significative de la vidange. De plus, cette hauteur est compatible avec les acquisitions de l'étude présentée dans le Chapitre 3, qui, en raison de spécificités géométriques du système de ré-injection, ne peuvent pas être réalisées à une hauteur inférieure.

Nous avons utilisé des particules Sphericul©, dont la dimension caractéristique est d'environ dix micromètres. Il s'agit de micro-billes de verre borosilicaté, creuses et de forme sphérique, dont la densité de 1.1 g cm⁻³ est proche de celle de l'eau afin de réduire à la fois le phénomène de sédimentation et d'éviter les effets de flottabilité. Ces billes, recouvertes d'un revêtement réfléchissant, sont présentes en quantités minimales (environ 2 g pour 25 L d'eau). Leur présence affecte sensiblement la tension de surface globale dont la moyenne sans particule vaut 55.7 ± 1 mN/m et augmente de 4 mN/m en leur présence.

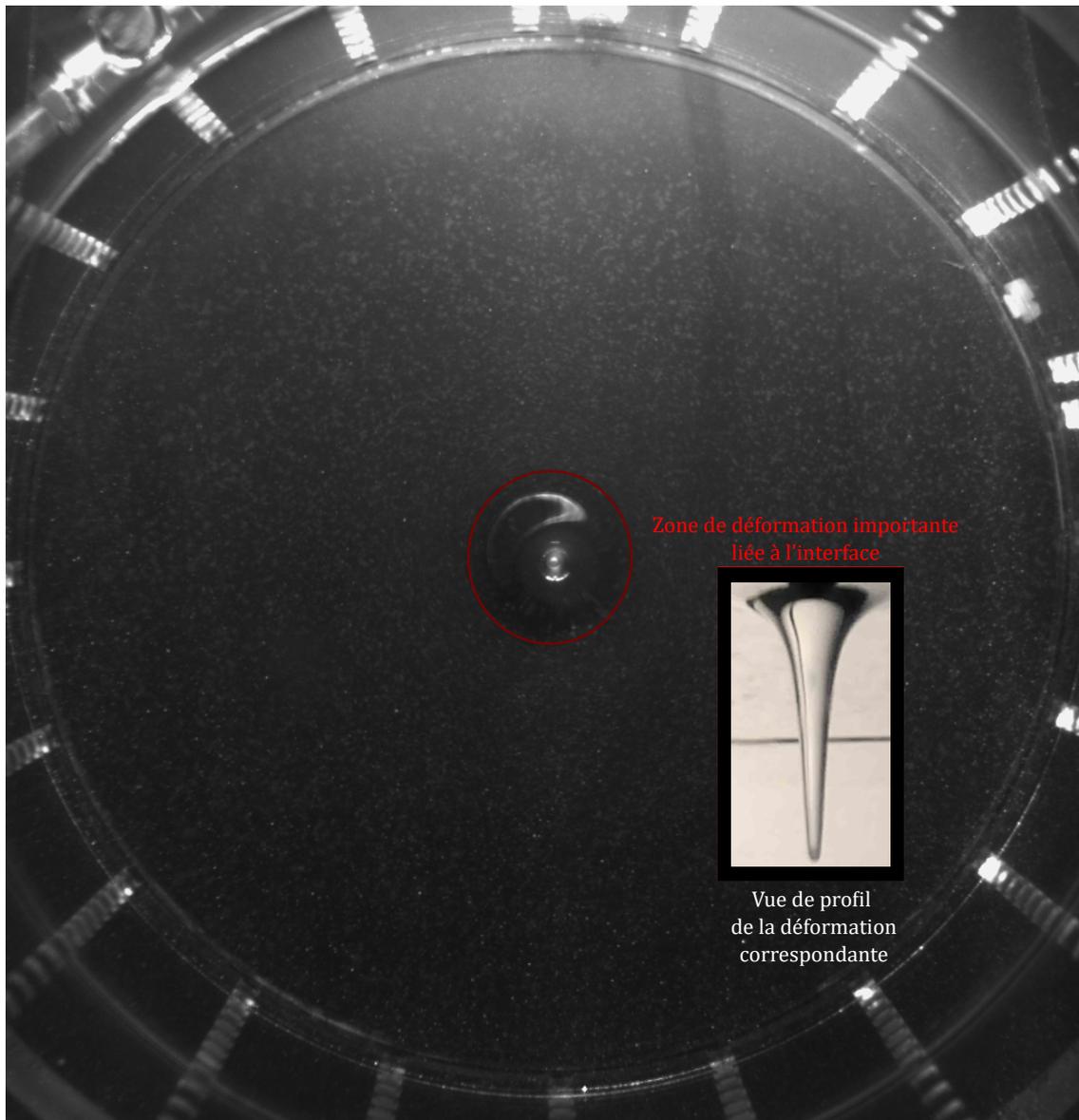


FIGURE 2.10 : Exemple d'image PIV obtenue. La zone de déformation est entourée en rouge et l'insert montre la photographie de la vue de profil de l'interface associée.

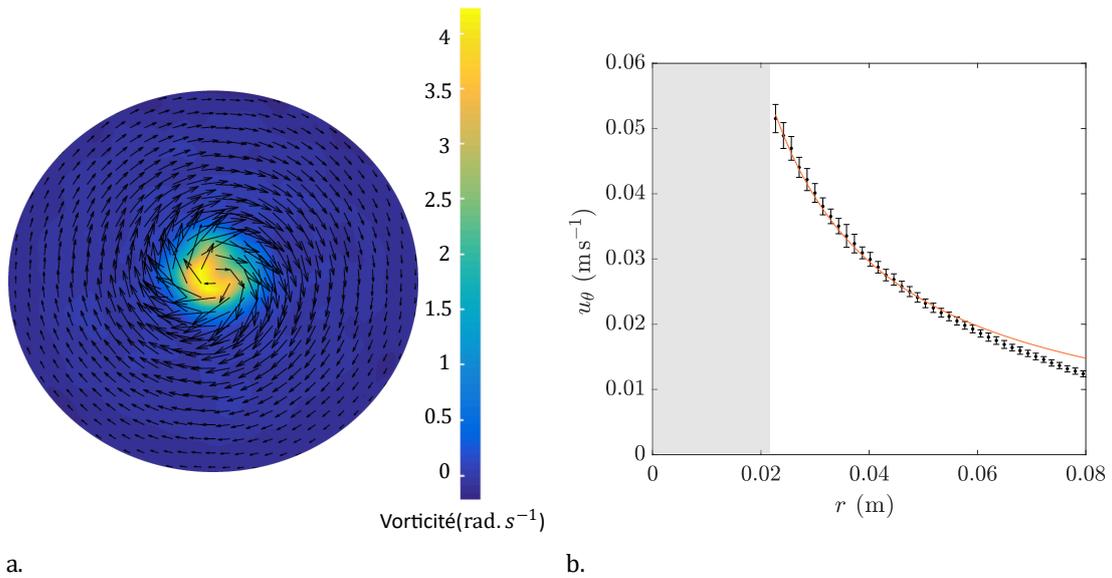


FIGURE 2.11 : Champs de vitesses moyen (a) et dépendance radiale de la vitesse azimutale $u_\theta(r)$ (b). Les données expérimentales proviennent des mesures PIV pour $\Omega = 5$ tours/min, ϕ_1 et à $t = 2000$ s. L'ajustement du modèle de Rankine, $u_\theta = \Gamma/2\pi r$ avec $\Gamma = 7.4 \times 10^{-3}$ m².s⁻¹, est donné en trait continu orange. La zone grise correspond à la zone pour laquelle l'interface déformée empêche des mesures correctes de la vitesse azimutale.

Néanmoins, la tension de surface locale peut être davantage affectée par ces particules. En effet, lorsqu'un tourbillon est présent, les particules ont tendance à se concentrer là où l'interface se déforme, ce qui engendre une concentration de particules très élevée dans cette zone. Cependant, nous avons constaté que pour une expérience typique de vidange instationnaire dont la durée est d'environ 30 min, cet effet est négligeable. Pour le régime de vidange stationnaire, où le niveau d'eau est gardé constant, cet effet sera nettement plus perceptible lors de nos expériences dont la durée est comprise entre 10 et 12 heures. Nous discuterons de cet aspect plus en détail dans la partie dédiée à l'étude de la reproductibilité du cas stationnaire (cf. Section 2.6.3). La caméra JAI GO-5000M-USB d'acquisition utilisée ici possède une résolution de 2560×2048 pixels et prend les images à une fréquence d'acquisition ajustable entre 20 et 60 images/seconde. Lors de nos expériences, cette fréquence est modifiée en fonction de l'intensité du vortex et donc de la rotation de la plateforme. Un exemple d'images obtenues est présenté dans la Figure 2.11. Lorsque l'interface se déforme fortement, une partie du champ devient inaccessible.

Les champs de vitesses sont calculés, à partir des images de particules, avec PIVlab [105], un logiciel de vélocimétrie développé sous MATLAB. Ce logiciel utilise un algorithme de corrélation implémenté dans le domaine spectral, ce qui permet un gain de temps significatif pour post-traiter les données. Les images sont divisées en fenêtres d'interrogation de tailles multiples de 16 pixels. L'algorithme calcule la corrélation entre les intensités des pixels des images successives pour déterminer le déplacement des particules dans cette zone. Plusieurs passes avec des fenêtres de tailles décroissantes peuvent être effectuées, permettant à l'algorithme de converger vers le champ de vitesse final à partir d'une condition initiale correctement estimée en tous points de la grille initiale. Dans notre cas, nous avons utilisé une fenêtre de 64 pixels (avec un recouvrement de 32 pixels) suivie d'une fenêtre de 32 pixels (avec un recouvrement de 16 pixels). La résolution spatiale est alors comprise

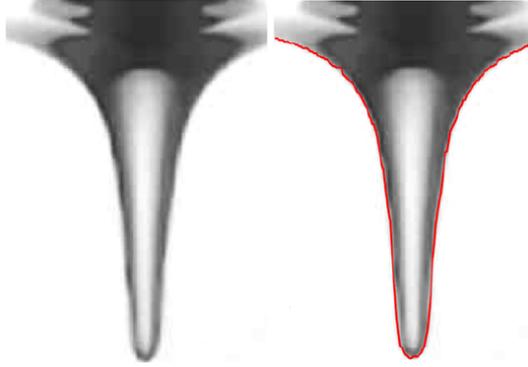


FIGURE 2.12 : Exemple de photographie de l'interface et de profil correspondant obtenu (en rouge).

entre 1 et 2 mm. Une fois le champ de vitesse obtenu, les vecteurs incorrects sont filtrés par la méthode de Westerweel et Scarano [114] implémentée dans PIVlab. Si un vecteur est identifié comme incorrect, il est remplacé par la moyenne des vecteurs de ses voisins les plus proches. Ces données sont ensuite exportées dans un format MATLAB.

Les 10 champs successifs obtenus sont ensuite moyennés. Un exemple de champ moyen est présenté sur la Figure 2.11a. L'évolution radiale de la vitesse azimutale u_θ est obtenue en utilisant l'axisymétrie de l'expérience et en moyennant le champ de vitesses suivant l'angle θ . Un exemple de courbe est donné à la Figure 2.11b. L'erreur sur la vitesse en $r = r_i$ est estimée à partir de l'écart-type $\sigma_{u_\theta(r_i)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_\theta(r_i) - \bar{u}_\theta(r_i))^2}$, où N est le nombre de points de mesure, $\bar{u}_\theta(r_i)$ est la moyenne des valeurs de la variable u_θ à la distance $r = r_i$. Nous constatons une décroissance globale (excepté en proche paroi) de l'erreur en fonction du rayon r car le nombre de points est croissant avec le rayon.

Enfin, la circulation du vortex est obtenue par l'ajustement de la vitesse azimutale avec le modèle de Rankine $u_\theta(r) = \Gamma/2\pi r$ dans la zone où le modèle de Rankine est vérifiée (entre 2.2 et 5 cm dans l'exemple présenté Figure 2.11b). Ainsi, la zone hors mesure liée à la déformation de l'interface n'affecte pas notre analyse, car la circulation du vortex est estimée en dehors de cette zone.

2.4.3 Acquisition du profil de l'interface

Une webcam Logitech BRIO 4K montée sur un banc de translation est utilisée pour visualiser le profil radial de l'interface. Le banc de translation, haut de 40 cm, déplace verticalement la webcam, ce qui nous permet de suivre l'évolution de la surface libre sans avoir à tenir compte des variations d'angle de vue de la caméra.

Ce suivi est rendu possible par un asservissement sur la masse mesurée qui est proportionnelle à la hauteur d'eau dans la cuve. Nous pouvons ainsi adapter la commande de l'alimentation du moteur (via un relais) qui assure la translation du banc et, par conséquent, déplacer la caméra. Les profils de l'interface sont bien visibles sur les photographies tant que l'interface ne plonge pas dans la section de vidange (régime supercritique). En effet, une fois que l'interface se creuse jusqu'à la section, le fond sombre, choisi pour le bon contraste des mesures PIV, empêche une bonne visualisation de la forme de l'interface. Pour effectuer le post-traitement des images, nous utilisons des fonctions de détection de contours disponibles dans MATLAB. La précision obtenue est de l'ordre de la taille du pixel, soit environ ± 0.1 mm. Un exemple de contour obtenu à partir d'une image est donné à la Figure 2.12.

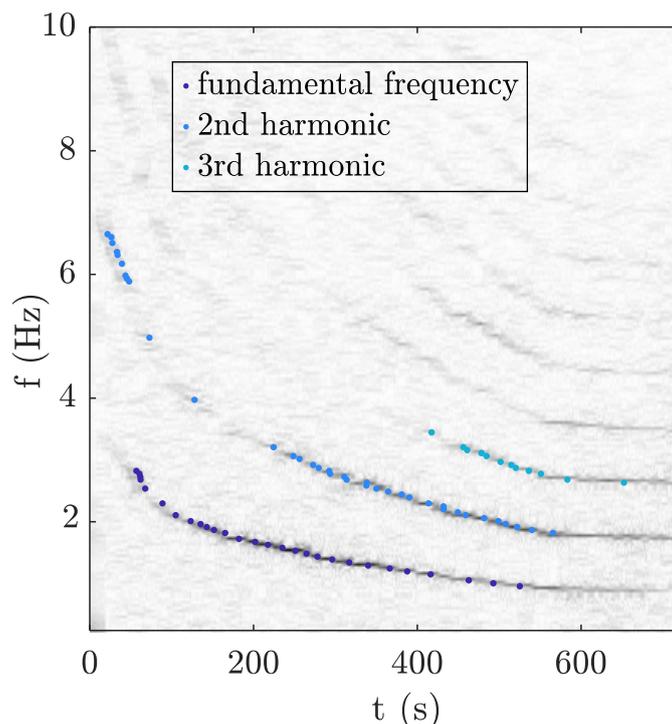


FIGURE 2.13 : Spectre sonore basse fréquence en fonction du temps dans le cas $\Omega = 0$ tours/min et $\Phi = \Phi_1$. La fréquence fondamentale et ses harmoniques sont marqués par des points. Le spectre est obtenu grâce à la transformée de Fourier glissante du signal.

2.4.4 Enregistrement audio

En parallèle, dans les expériences instationnaires avec couvercle (cas de la bouteille d'eau idéale), la webcam enregistre en continu le son à une fréquence d'échantillonnage de 48 kHz.

Sans vortex, la bouteille d'eau se vide par un régime intermittent qui alterne entre phase d'écoulement et génération de bulles. Ce régime peut aussi être présent lorsque la cuve tourne. Le son caractéristique produit (le « glouglou ») est facilement identifiable. La fréquence d'apparition de ces bulles est de l'ordre de 1 à 2 Hz. Nous effectuons la transformée de Fourier glissante du signal avec des fenêtres de 20 s et un pas de 2 s. Un exemple de spectre aux basses fréquences (entre 0 et 10 Hz) est donné à la Figure 2.13. Nous localisons ensuite les pics d'intensité du signal, provenant de la fréquence fondamentale et des deux premières harmoniques.

2.5 Protocole expérimental

2.5.1 Propriétés des fluides

L'eau utilisée est traitée au chlore afin d'éviter toute contamination biologique et est régulièrement renouvelée. Lors des nouvelles mises en eau de l'expérience, un temps de repos d'au minimum 12 heures est respecté, ce qui nous permet d'obtenir de l'eau à la température ambiante $T_a = 19 \pm 1^\circ \text{C}$ et partiellement dégazée. Les fluctuations de température ambiante sont mesurées quotidiennement et ne dépassent pas $\pm 1^\circ \text{C}$. L'air est à la pression atmosphérique P_a .

L'air ambiant et l'eau chlorée ont une densité spécifique $\rho_g = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ et $\rho_l = 998 \text{ kg m}^{-3}$, respectivement. L'eau chlorée a une viscosité cinématique $\nu = (1.03 \pm 0.02) \times$

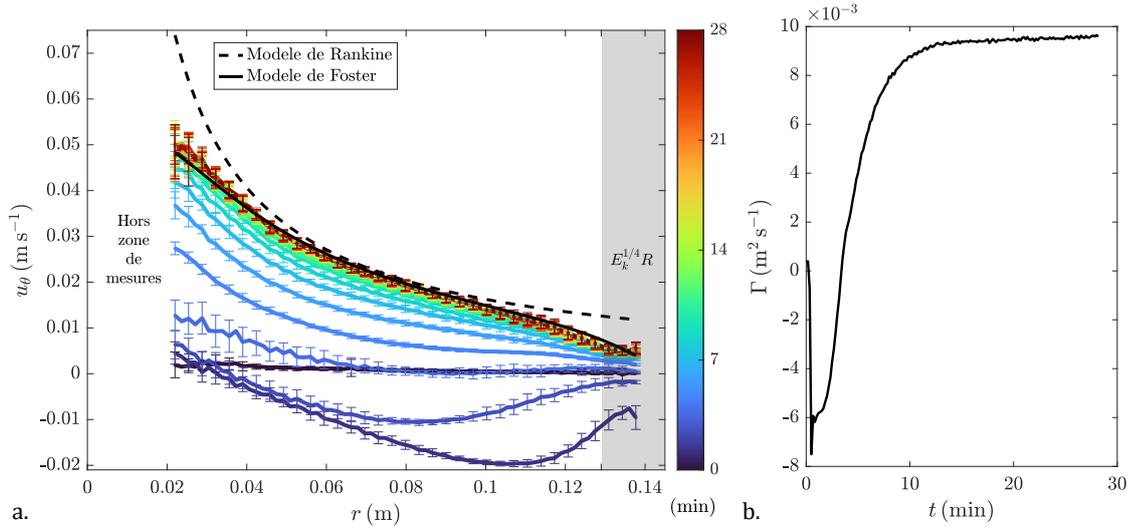


FIGURE 2.14 : a. Évolution temporelle du profil radial de la vitesse azimutale obtenue par PIV après un incrément de rotation de 2.5 à 3 tour/min. La colorimétrie représente le temps écoulé depuis la modification de la vitesse de rotation de la plateforme. Le modèle de Rankine est tracé en pointillés noirs. Le modèle de Foster est indiqué en trait plein noir. L'épaisseur de la couche limite est représentée par la zone grisée. b. Évolution de la circulation correspondante obtenue en $r = 7$ cm en fonction du temps.

$10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et une tension superficielle σ mesurée expérimentalement avec une précision de $\pm 1 \text{ mN m}^{-1}$. La tension superficielle vaut en moyenne 58 mN m^{-1} et est mesurée quotidiennement à l'aide d'un tensiomètre numérique à plaque de Wilhelmy de la gamme DCA-Gilbertini. L'écart moyen des valeurs de tension de surface mesurées est de l'ordre de $\pm 3 \text{ mN m}^{-1}$ lorsqu'il est évalué séparément pour les mesures avec et sans utilisation de poudre PIV.

2.5.2 Expériences instationnaires

La vidange s'effectue à partir d'un état initial contrôlé. Dans un premier temps, la cuve est remplie à une hauteur d'eau $H_0 = 371.5 \pm 1 \text{ mm}$. Nous appliquons un temps de stabilisation d'une heure qui permet de garantir une rotation solide du fluide à l'état initial. Ce temps a été déterminé par des observations expérimentales lors d'une étude PIV préliminaire sur un réservoir rotatif sans déclenchement de vidange. Le temps de mise en rotation théorique, aussi appelé temps de « spin-up », est défini par Greenspan [38] comme $T_s = \sqrt{H_0^2 / \nu \Omega}$. Ce temps caractéristique reste applicable lorsqu'une surface libre est présente [19, 118]. Dans notre expérience, il varie de 360 à 800 secondes, ce qui est nettement inférieur au temps de stabilisation de notre protocole.

La déformation parabolique de l'interface à $t = 0 \text{ s}$, causée par la rotation de la plateforme, est d'ordre $\Omega^2 R^2 / 4g$. Dans notre expérience, les vitesses de rotation sont faibles et cette amplitude reste inférieure à 0.6 mm. La déformation initiale de l'interface n'a donc aucun effet mesurable sur la vitesse de vidange et peut être négligée.

Après l'établissement de l'état initial, le processus de vidange est déclenché par l'ouverture d'une trappe télécommandée. Tout au long de l'expérience, un programme Labview, spécifiquement conçu pendant la thèse, assure la gestion simultanée de l'acquisition des données, du contrôle des instruments de mesure et des équipements, ainsi que de l'éclairage.

La balance de précision, intégrée dans ce système, effectue une mesure de masse toutes les deux secondes.

L'acquisition de données par Particle Image Velocimetry (PIV) est réalisée sur deux échelles de temps distinctes. Nous prenons en effet une série de onze images successives toutes les dix secondes. Nous obtenons ainsi un champ de vitesse moyenné à partir des 10 champs successifs toutes les 10 s. En raison des contraintes liées au stockage des images, l'acquisition n'est pas continue, mais l'intervalle choisi permet d'observer l'évolution lente du champ de vitesse, sur la durée totale d'une expérience de vidange instationnaire (de l'ordre de 30 min).

Au cours des 10 secondes qui séparent deux acquisitions PIV, la caméra de profil filme l'interface. En parallèle, les données de masse fournies par la balance sont utilisées pour synchroniser la position de la caméra sur le banc de translation avec la descente de l'interface.

Une gestion automatique de l'alimentation d'un panneau LED est activée pendant toute la durée de l'expérience. Ceci nous permet à la fois une bonne visualisation de la déformation de l'interface par ombroscopie grâce à la vidéo de la caméra de profil (éclairage allumé), mais également d'obtenir la pénombre nécessaire pour la visualisation dans le plan laser lorsque les mesures PIV sont en cours (éclairage éteint).

Dans les expériences du Chapitre 5, nous enregistrons avec la webcam le son émis par l'écoulement.

Enfin, il est courant d'observer à la fin de la vidange d'un réservoir un régime de goutte-à-goutte qui n'est pas le sujet de cette thèse. Nous avons choisi de définir le temps de vidange comme étant le temps au bout duquel 99% du volume d'eau initial a été vidé. Ceci correspond à une hauteur d'eau dans la cuve de 3.7 mm, pour laquelle le régime de goutte-à-goutte n'est pas encore atteint.

2.5.3 Expériences stationnaires

L'état initial des expériences stationnaires est réalisé sans rotation et avec une vidange déclenchée. Nous commençons par fixer une hauteur d'eau consigne pour chaque série de mesures. Cette hauteur est choisie dans une plage comprise de 11 à 38 cm, avec une précision de ± 1 mm correspondant à l'épaisseur du ménisque. Pour rappel, la masse d'eau dans la cuve étant initialement de plus de 25 kg, il serait compliqué d'effectuer un simple transvasement après une pesée initiale (en raison de l'encombrement et du poids du volume d'eau). Une fois que le niveau d'eau est stabilisé, nous respectons un temps de repos de 20 minutes. Une photographie de l'interface est prise comme repère pour la suite. La caméra de profil reste à la même position pendant toute la série de mesures, ce qui nous permet d'estimer et de compenser la quantité d'eau perdue par la cuve sans avoir besoin d'arrêter la plateforme. Un à deux arrêts de la plateforme peuvent cependant être nécessaires lors des séries de mesures avec PIV pour re-mélanger les particules dans le fluide, lorsque les images PIV présentent une décroissance du nombre de particules dans le plan d'observation.

Une fois l'état initial atteint, nous effectuons les premières mesures sans rotation. En fonction du type de protocole (avec ou sans PIV), deux mesures de champs PIV moyennés peuvent être réalisées à partir de deux séries de 11 images successives.

Puis, le système de contrôle de niveau est arrêté et la vanne proportionnelle est fermée pendant plusieurs dizaines de secondes. Des mesures de masse sont réalisées toutes les 2 s, ce qui permet de déduire le débit de vidange.

Enfin, le système de contrôle de niveau est remis en fonctionnement et la rotation de la plateforme est activée. Initialement fixée à 2 tours/min, la valeur de rotation est ensuite augmentée par pas de 0.5 tours/min, jusqu'à atteindre 10 tours/min. Les photographies de

l'interface, les mesures PIV et les mesures de débit sont toujours effectuées dans cet ordre, car la mesure du débit perturbe légèrement l'état stationnaire. Des vidéos de l'interface sont réalisées lorsqu'une instabilité d'arrachement de bulles est constatée.

Après chaque incrément de rotation, un temps de repos de 20 min est respecté avant d'effectuer les mesures. Ce temps, qui est supérieur au temps de « spin-up » $T_s = \sqrt{H_0^2/\nu\Omega}$ de notre expérience (dont le maximum est estimé à 800 s), a été déterminé lors d'expériences de référence.

Lors de ces expériences, le régime transitoire du vortex est étudié par mesure PIV immédiatement après un incrément de rotation. Comme dans l'étude instationnaire, ces champs PIV moyens sont alors obtenus à partir de 11 images successives (10 champs de vitesse) prises toutes les 10 s. Un exemple d'évolution temporelle du profil de vitesse azimutale $u_\theta(r)$ obtenue est présentée sur la Figure 2.14a. La colorimétrie des courbes évolue du bleu pour les premiers instants au rouge pour le maximum de temps enregistré. La circulation correspondante, calculée en $r = 7$ cm, est représentée sur la Figure 2.14b. Dans cet exemple, nous avons augmenté la rotation de la plateforme de 2.5 à 3 tours/minute. Comme la caméra PIV est placée dans le référentiel en rotation, il est normal d'observer une circulation négative en début d'expérience, juste après le changement de vitesse de rotation (cf. Figure 2.14b). Nous observons que les courbes sont confondues au-delà de 20 minutes d'expérience et que la circulation associée converge vers sa valeur stationnaire. Le vortex a donc atteint son régime permanent et la vitesse azimutale converge vers celle prédite par le modèle de Foster [33] (ligne noire continue sur la Figure 2.14b). Ce modèle, expliqué dans le Chapitre 3, est établi à partir du modèle de Rankine $u_\theta(r) = \Gamma/2\pi r$ présenté à titre comparatif en pointillés. Il prend notamment en compte les effets liés aux couches limites de Stewartson, d'épaisseur $E_k^{1/4} R \approx 1.6$ cm.

2.6 Reproductibilité

2.6.1 Vidange instationnaire sans couvercle

Nous montrons ici un exemple de reproductibilité obtenue dans le cadre de l'étude instationnaire sans couvercle. L'expérience reproduite a été réalisée avec une section de diamètre $\phi = 3.5 \pm 0.1$ mm et une rotation de 5 tours/min. Les résultats présentés en Figures 2.15a et b montrent respectivement l'évolution de la hauteur d'eau avec le temps et l'évolution de la vitesse de vidange en fonction de la hauteur d'eau adimensionnée. Nous présentons un exemple constitué de deux expériences équivalentes. Pour la hauteur d'eau, l'écart-type médian vaut 0.5 mm. Pour la vitesse de vidange, l'écart-type médian vaut 0.01 m/s, ce qui est équivalent aux fluctuations de mesures. Nous avons également effectué le post-traitement des données PIV et déduit la circulation du vortex pour les deux expériences, qui est présentée à la Figure 2.16. L'évolution de la circulation est, elle aussi, parfaitement reproductible avec un écart-type relatif médian d'environ 1%.

2.6.2 Vidange instationnaire avec couvercle

Nous présentons ici un exemple de reproductibilité réalisée dans les expériences instationnaires avec couvercle, cf. Chapitre 5. Nous montrons la reproductibilité du cas sans rotation qui présente un régime de bulles non interrompu pendant toute la vidange du récipient et permet donc d'étudier la reproductibilité en fréquence (cf. Figure 2.17). Sur les trois tests réalisés, nous remarquons que l'évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps peut présenter un écart cumulé (courbe noire) par rapport aux deux autres courbes (rouge et bleue). L'écart-type médian est alors de 5 mm, ce qui semble élevé, mais n'entraîne qu'un

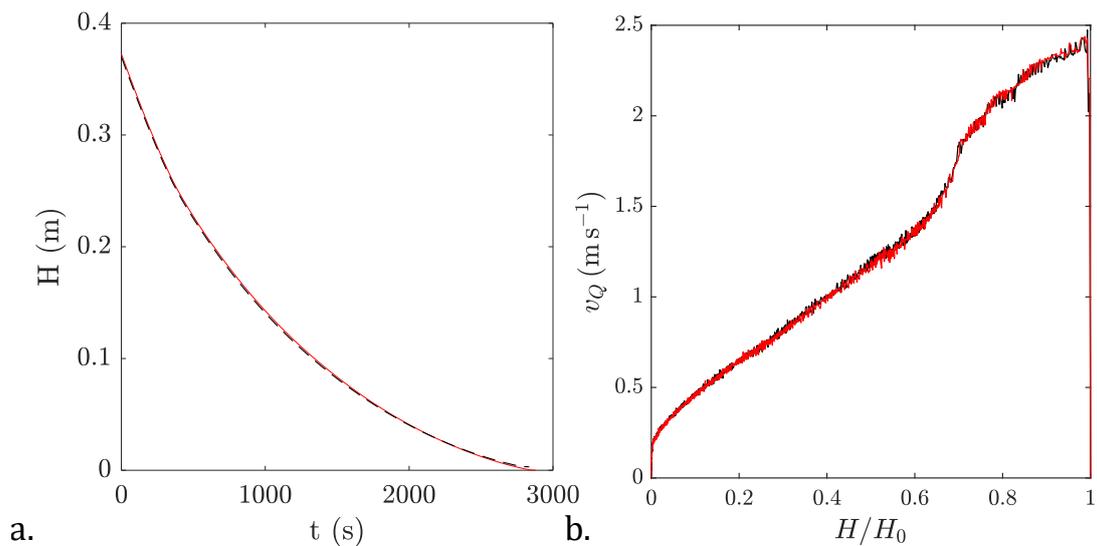


FIGURE 2.15 : Évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps (a) et de la vitesse de vidange en fonction de la hauteur d'eau H/H_0 (b) (adimensionnée par la hauteur d'eau initiale). Nous avons choisi ici $\phi = \phi_2$ et une vitesse de rotation de 5 tours/min. Deux expériences équivalentes sont ici représentées en rouge et en noir.

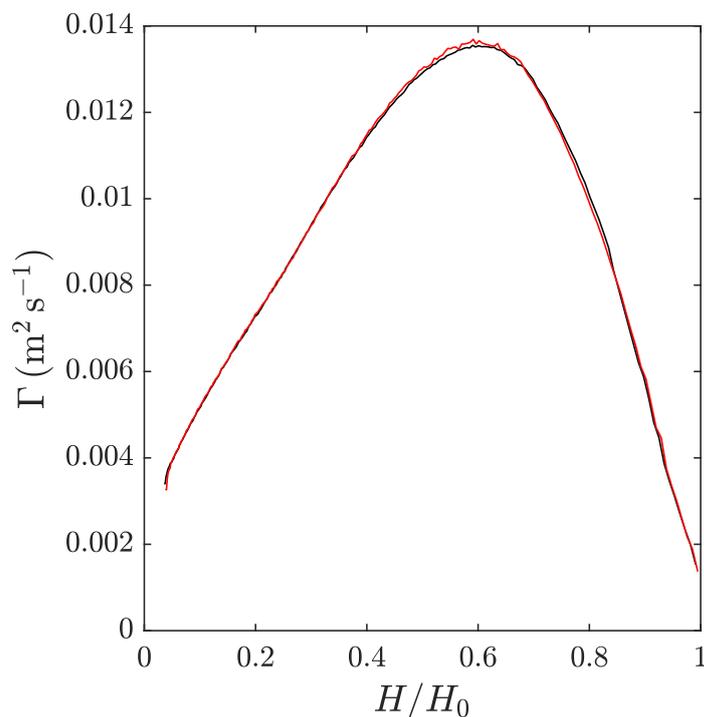


FIGURE 2.16 : évolution de la circulation en fonction de la hauteur d'eau H/H_0 (adimensionnée par la hauteur d'eau initiale). Nous avons choisi ici $\phi = \phi_2$ et une vitesse de rotation de 5 tours/min. Deux expériences équivalentes sont ici représentées en rouge et en noir.

écart de 23s en termes de temps de vidange, soit 3% du temps de vidange moyen. De plus, la représentation de la vitesse et de la fréquence d'apparition des bulles en fonction

de la hauteur d'eau permet de "recadrer" ces grandeurs, et donc d'obtenir une bonne reproductibilité, avec des écarts de l'ordre des fluctuations de mesures.

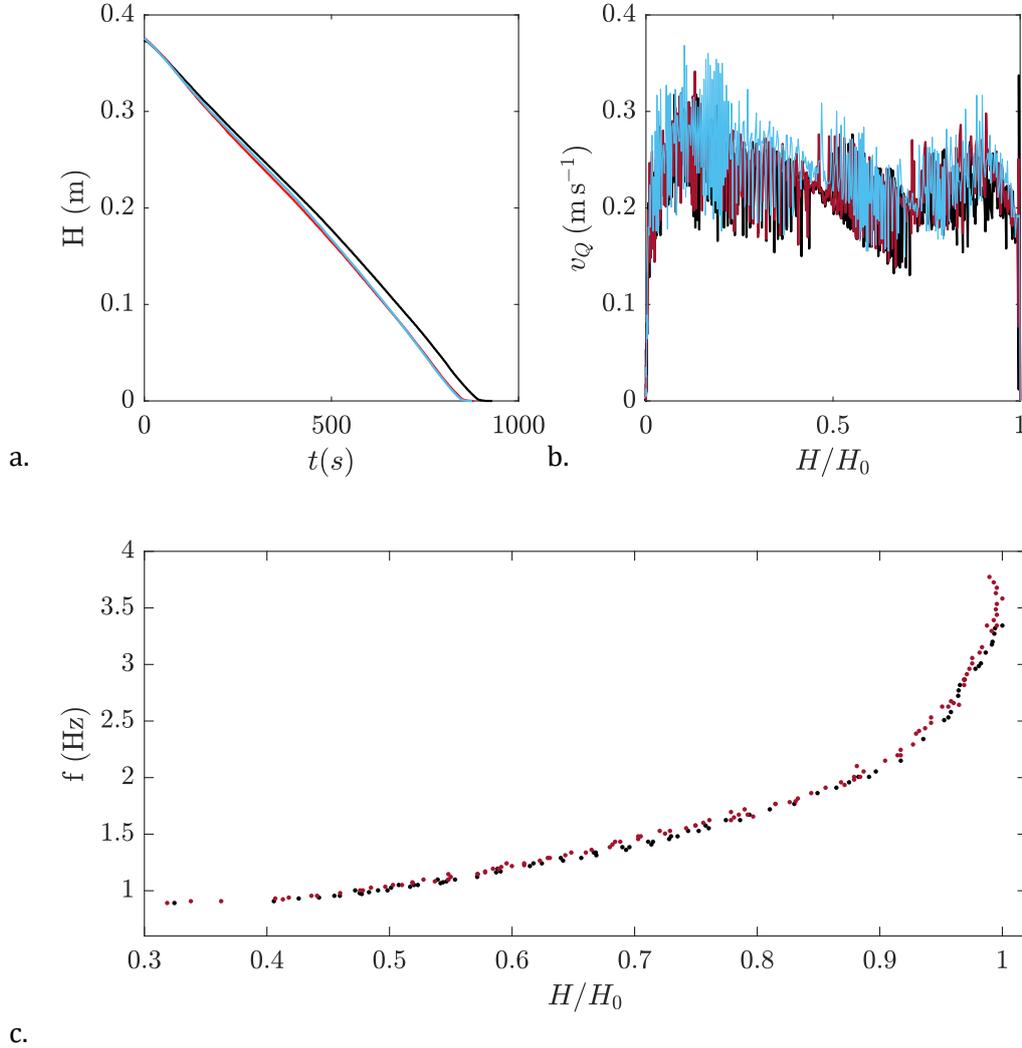


FIGURE 2.17 : évolution de la hauteur d'eau au cours du temps (a), de la vitesse de vidange (b) et de la fréquence d'apparition des bulles en fonction de la hauteur d'eau adimensionnée H/H_0 (c). Nous avons choisi ici $\Phi = \Phi_1$ et une vitesse de rotation de 0 tours/min. Trois expériences équivalentes sont ici représentées en rouge, noire et bleue.

2.6.3 Vidange stationnaire

Dans les expériences en régime stationnaire, la reproductibilité est évaluée pour les mesures effectuées avec et sans la poudre PIV. Ces mesures de débit sont présentées à la Figure 2.18a-b. En l'absence de poudre PIV, les débits mesurés présentent une bonne reproductibilité dont l'écart est compris de 0.2 à 3%. En revanche, les mesures réalisées avec la poudre PIV sont moins fiables. En effet, il est difficile d'obtenir un état de l'eau équivalent pour ces mesures. De plus, la stagnation des particules PIV à l'interface entraîne une modification significative de la tension de surface locale, ce qui affecte le débit mesuré.

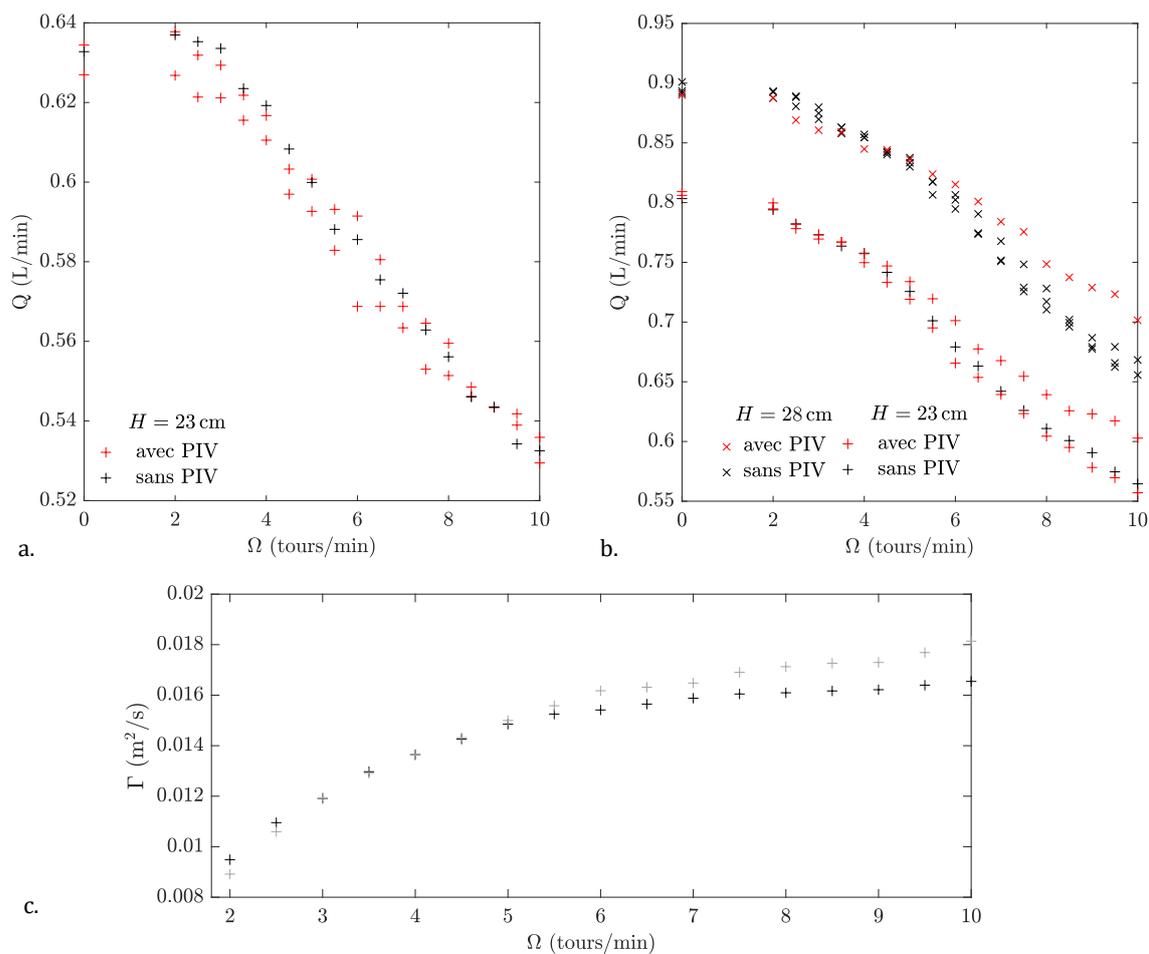


FIGURE 2.18 : Débits en fonction de la vitesse de rotation Ω , les mesures sans PIV sont indiquées en noires et les mesures avec PIV sont indiquées en rouges, les sections ont un diamètre (a) ϕ_0 et (b) ϕ_1 . (c) Circulation en fonction de la rotation Ω pour ϕ_1 et $H = 23$ cm. La circulation est ici obtenue grâce aux mesures PIV, les mesures qui sont réalisées en doublon sont présentées en gris et en noir.

Le phénomène d'arrachement de bulles est également sensible à ce changement d'agglomération locale de particules d'ensemencement. Nous avons observé que l'arrachement de bulles peut survenir à des vitesses de rotation Ω décalées au maximum d'un incrément de 0.5 tours/min lors des expériences menées en doublon, avec et sans PIV. De plus, l'aspect des bulles change : elles apparaissent plus allongées et grisâtres, car l'interface est chargée en particules, contrairement à leur forme sphérique en l'absence de poudre PIV.

La Figure 2.18c montre l'évolution de la circulation pour la même expérience réalisée en doublon avec des mesures PIV. Les évolutions de la circulation sont identiques tant que les débits mesurés sont identiques, ces deux grandeurs physiques, circulation et débit, étant liées. L'écart relatif médian sur le débit et la circulation est alors compris de 0.03 à 4%. Lorsque les débits diffèrent, l'écart sur la circulation et le débit s'accroît (de 4 à 9% pour les vitesses de rotation les plus élevées). Ce constat nous a amené à réaliser une partie des expériences stationnaires en doublon avec et sans poudre PIV.

Vidange tourbillonnaire en régime permanent

Sommaire

3.1	Introduction	54
3.2	Structure de l'écoulement de la vidange tourbillonnaire	54
3.2.1	La couche limite de Stewartson	54
3.2.2	La couche limite d'Ekman et le phénomène de pompage	57
3.3	Vitesse de l'écoulement pour la vidange tourbillonnaire	59
3.3.1	Effet de la rotation sur la vitesse de vidange	59
3.3.2	Modèle de vidange à partir de la déformation de l'interface	60
3.3.3	Cas sous-critique	61
3.3.4	Cas super-critique	65
3.4	Instabilité d'arrachement de bulles	66
3.4.1	Influence des différents paramètres expérimentaux	67
3.4.2	Analyse dimensionnelle : Théorème de Buckingham	67
3.4.3	Nombres adimensionnels critiques	70
3.4.4	Critères d'Ito	70
3.5	Conclusion	73

3.1 Introduction

Le tourbillon de vidange est, contrairement à sa dénomination, souvent étudié dans un système où le niveau d'eau est gardé constant. Dans un contexte industriel, où l'apparition de tourbillon n'est souvent pas désirée, le fluide est mis en recirculation au lieu d'être vidangé [51]. Dans un contexte plus académique, le maintien de la hauteur d'eau permet de produire un vortex permanent bien contrôlé [4]. Nous présentons ici les caractéristiques de l'écoulement de vidange tourbillonnaire en régime permanent. Nous abordons dans un premier temps la structure caractéristique de l'écoulement. Puis, nous discutons de la vitesse de vidange en présence d'un vortex et enfin, nous étudions l'instabilité d'arrachement de bulles à la pointe du cœur gazeux, qui représente un problème dans de nombreux dispositifs industriels.

3.2 Structure de l'écoulement de la vidange tourbillonnaire

En 2006, Andersen [4] propose une description complète et qualitative de la structure de l'écoulement dans le cas stationnaire, qu'il est possible de visualiser sur la Figure 3.1. Aux bords périphériques de la cuve, l'écoulement est dirigé vers le bas dans les couches limites de Stewartson [101, 99, 100]. Le fluide s'écoule ensuite radialement dans les couches limites d'Ekman, qui se développent au fond de la cuve. Une partie du fluide est pompé verticalement le long de lignes de courant qui s'enroulent en spirales, comme illustré en Figure 3.3. Une large fraction du fluide vidangé s'écoule par les couches limites. La fraction complémentaire est prélevée au voisinage de l'interface et s'écoule à travers un tube de vidange centré sur l'axe jusqu'à la buse.

Yukimoto [119] a montré que cette description de l'écoulement était valable tant que le nombre de Rossby $Ro^* = U^*/\Omega R$, pour une vitesse caractéristique de l'écoulement :

$$U^* = \frac{Q}{2\pi H} \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}, \quad (3.1)$$

vérifiait $Ro^* < 0.88R/h(R)$. Lorsque $Ro^* > 0.88R/h(R)$, l'écoulement radial est plus important en dehors des couches limites. Dans nos expériences, $0.04 \leq Ro^* \leq 0.2$, soit $Ro^* \leq 0.35R/h(R)$ et la structure de l'écoulement doit suivre la description proposée par Andersen.

Nous donnons ici une description des modèles des couches limites d'Ekman et de Stewartson, lorsque de plus $Ro^* \ll 1$ et lorsque le nombre d'Ekman $Ek = \nu/\Omega R^2$ vérifie $Ek \ll 1$. Dans nos expériences, nous vérifions cette dernière condition avec $4.7 \times 10^{-5} \leq Ek \leq 2.3 \times 10^{-4}$.

Pour rappel, les équations de Naviers-Stokes stationnaires dans un référentiel en rotation à la vitesse Ω s'écrivent :

$$(u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u - 2\Omega \times u \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.3)$$

3.2.1 La couche limite de Stewartson

La couche limite de Stewartson est composée de deux zones, la plus proche de la paroi d'épaisseur $R \times Ek^{1/3} \approx 5$ à 9 mm et la seconde d'épaisseur $R \times Ek^{1/4} \approx 1.2$ à 1.8 cm, avec R le rayon de la cuve. En supposant un faible nombre de Rossby, Foster [33] propose

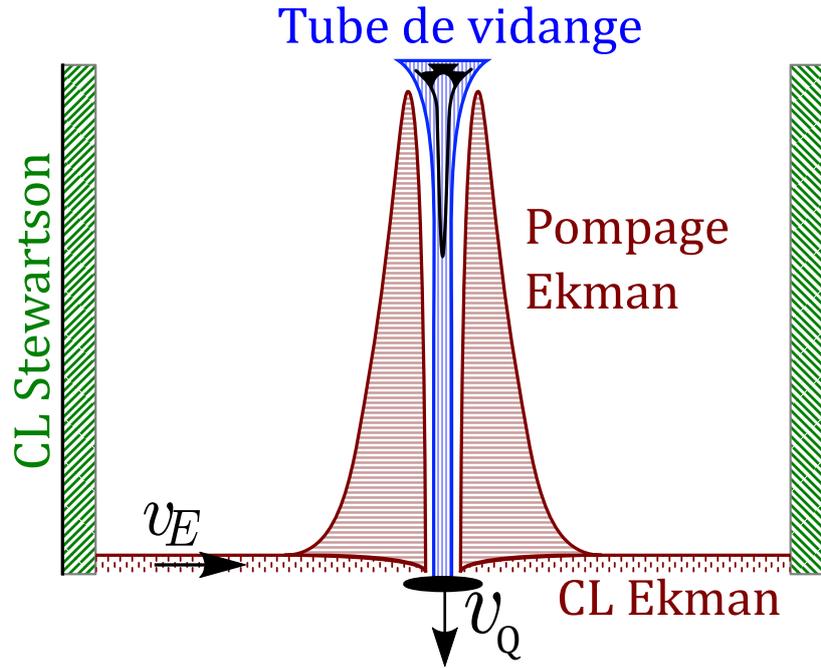


FIGURE 3.1 : Schéma de la structure de l'écoulement de la vidange tourbillonnaire. Les couches limites de Stewartson sont représentées en vert, les couches limites d'Ekman et le phénomène de pompage associé en rouge, le tube de vidange en bleu.

de raccorder la solution potentielle du vortex de Rankine à un modèle visqueux pour le cœur du tourbillon et à la vitesse établie dans la couche limite externe de Stewartson. La modélisation du cœur du vortex n'est pas applicable pour nos conditions expérimentales, car elle exclut, par exemple, les cas où l'interface est déformée. Le raccordement avec la vitesse établie dans la couche limite est quant à lui tout à fait applicable. Dans la couche limite d'épaisseur $R \times Ek^{1/4}$, Foster suppose l'équilibre entre la force de Coriolis et la force visqueuse et simplifie l'équation de Navier-Stokes azimutale en :

$$\nu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 2\Omega u_r \quad (3.4)$$

En prenant en compte l'expression du débit d'Ekman transféré dans les couches limites, il obtient pour la vitesse azimutale :

$$u_\theta(r) = \frac{v_Q(\phi/2)^2}{\sqrt{\nu/\Omega}} \frac{1 - e^{c_0(r/R-1)}}{r} \quad (3.5)$$

avec :

$$c_0 \equiv \left(\frac{Ek^{1/2}h(R)}{R} \right)^{-1/2} \quad (3.6)$$

Comme on peut le voir sur la Figure 3.2, le modèle de Rankine s'écarte notablement des données expérimentales pour des rayons élevés. Au contraire, le modèle de Foster eq.(3.5) est en très bon accord avec les données expérimentales, confirmant ainsi que les écarts aux différents modèles potentiels (déjà visibles aux Figures 1.4 et 1.5) sont attribuables à la présence de couches limites de Stewartson.

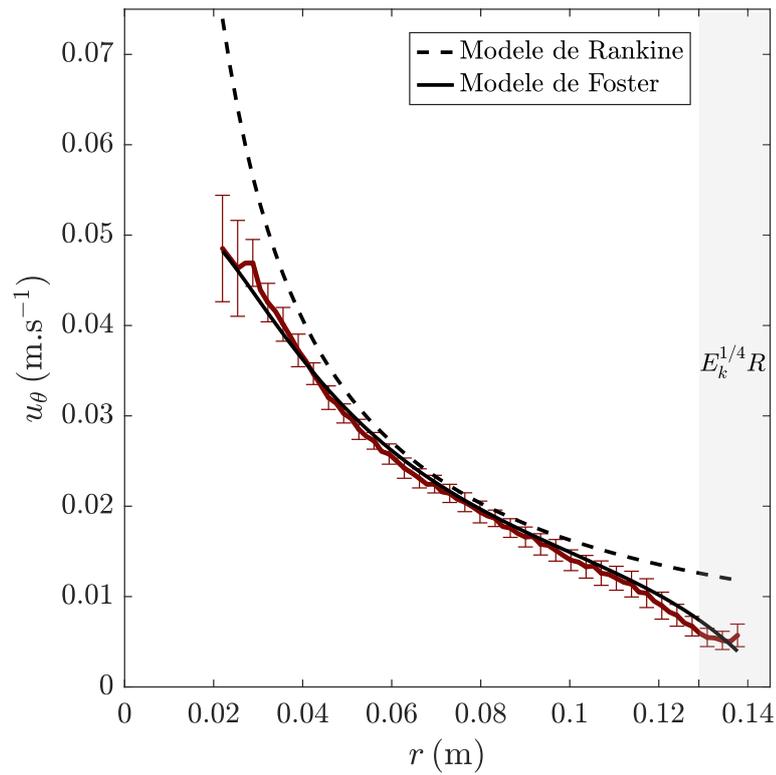


FIGURE 3.2 : Exemple de vitesses azimutales en fonction du rayon. Le modèle de Rankine (pointillés) et le modèle de Foster (trait plein) sont représentés en noir. Les données expérimentales associées sont en rouges. L'épaisseur de la couche limite est matérialisée par la zone grisée.

3.2.2 La couche limite d'Ekman et le phénomène de pompage

Au fond de la cuve, les couches limites d'Ekman participent, elles aussi, activement à la vidange du récipient. Ces dernières sont aussi à l'origine du phénomène de pompage visible dans l'écoulement. Les équations de Navier-Stokes (3.2) se réduisent à :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} + 2\Omega(\tilde{u}_\theta - u_\theta) \quad (3.7)$$

$$0 = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial z^2} - 2\Omega \tilde{u}_r \quad (3.8)$$

où $(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z)$ sont les vitesses dans la couche limite. Avec les conditions aux limites $\tilde{u}_r(r, z=0) = \tilde{u}_\theta(r, z=0) = 0$, $\tilde{u}_r(r, z) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \infty$ et $\tilde{u}_\theta(r, z) \rightarrow u_\theta(r)$ lorsque $z \rightarrow \infty$, les équations ont pour solutions :

$$\tilde{u}_r(r, z) = -u_\theta(r) e^{-z/\delta} \sin(z/\delta) \quad (3.9)$$

$$\tilde{u}_\theta(r, z) = -u_\theta(r) \left(1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta)\right) \quad (3.10)$$

où $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$ est l'épaisseur de la couche limite d'Ekman. Enfin, l'équation de continuité (1.20) et la condition $\tilde{u}_z(r, z=0) = 0$ permettent de déduire \tilde{u}_z :

$$\tilde{u}_z(r, z) = \frac{\delta}{2r} \frac{d(r - u_\theta(r))}{dr} \left(1 - e^{-z/\delta} (\sin(z/\delta) + \cos(z/\delta))\right) \quad (3.11)$$

La vitesse axiale est donc directement proportionnelle à la vorticité, ce qui constitue la cause sous-jacente du phénomène de pompage d'Ekman observé. Néanmoins, cette relation ne permet pas de caractériser le comportement du fluide au sein du cœur du vortex, où le nombre de Rossby local atteint des valeurs non négligeables [4].

Le phénomène de pompage des couches limites d'Ekman est illustré sur la Figure 3.3. Ces structures sont analogues à celles décrites par Andersen [3]. Nous constatons que l'efficacité du pompage d'Ekman augmente avec la vitesse de rotation de la plateforme, entraînant une ascension accrue du colorant, ce qui va dans le sens de la formule établie à l'équation (3.11).

En supposant un écoulement potentiel dans la cuve, tel que $\tilde{u}_\theta(r) = \Gamma/2\pi r$, il est possible de calculer le débit Q_E d'eau à travers la couche limite à partir de l'équation (3.9) :

$$Q_E = - \int_0^\infty dz 2\pi r \tilde{u}_r(r) = \frac{\Gamma\delta}{2} \quad (3.12)$$

Andersen suppose que le débit traversant les couches limites est approximativement équivalent au débit de vidange, i.e. $Q \approx Q_E$. Il observe un écart compris entre 5% à 10% avec ses mesures expérimentales de débit et de circulation.

La Figure 3.4 illustre le rapport entre la vitesse au sein des couches limites d'Ekman, notée v_E , et la vitesse de vidange, notée v_Q . Nos observations confirment l'écart de 5–10% estimé par Andersen pour des hauteurs d'eau relativement faibles. Les meilleurs résultats étant atteints pour $H = 18$ cm et pour des vitesses de rotations élevées. Cependant, pour des profondeurs d'eau plus importantes, la différence entre v_E et v_Q peut nettement s'accroître, et atteindre jusqu'à 35% pour une vitesse de rotation minimale de 2 tours/minute. Par ailleurs, le diamètre de la buse ne semble pas exercer une influence significative sur ces estimations dans la gamme des diamètres que nous avons utilisés.

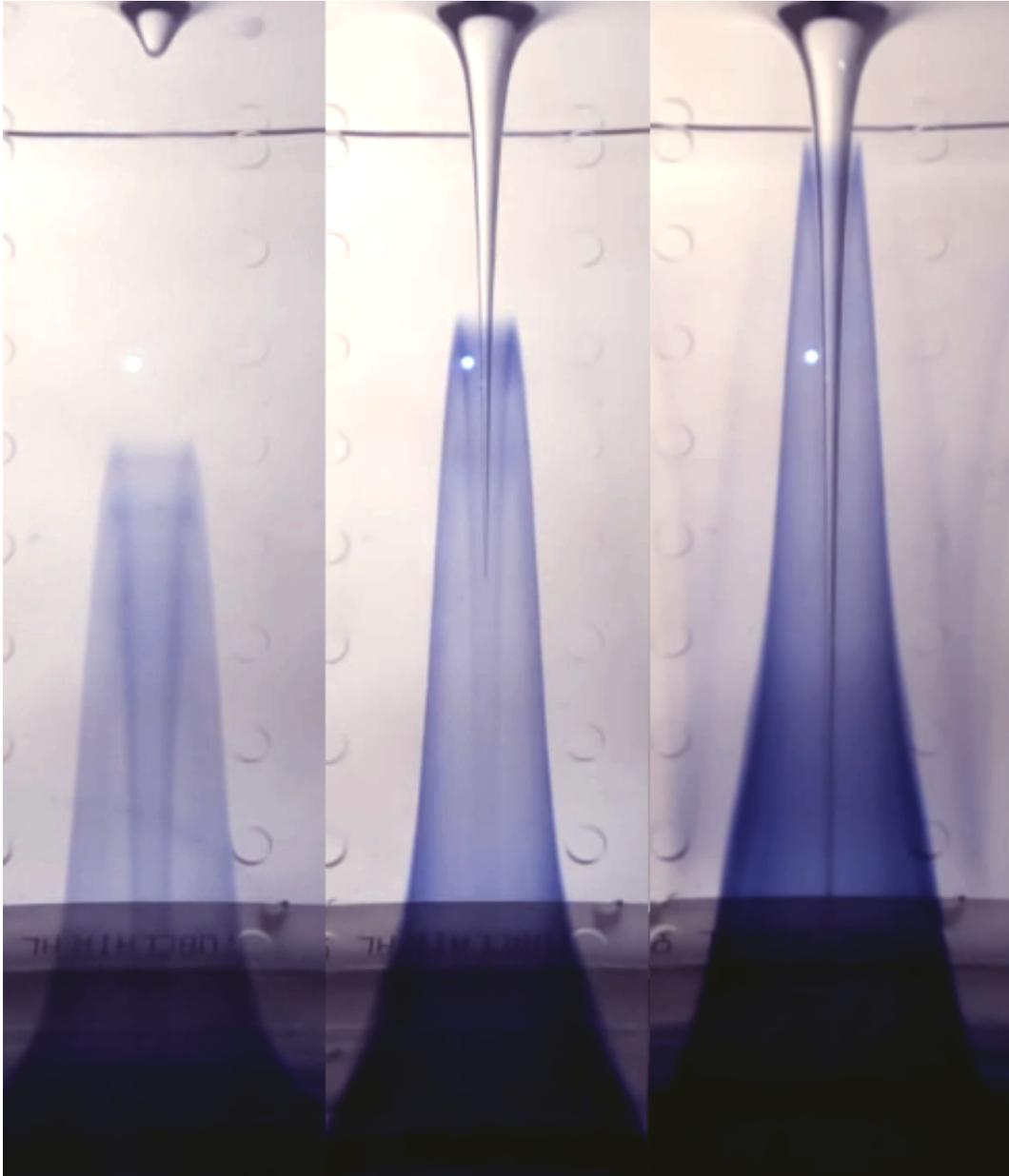


FIGURE 3.3 : Pompage d'Ekman dans le cas stationnaire $H = 18$ cm et $\Omega = 2, 5$ et 8 tours/min et $\phi = 3$ mm. L'injection de colorant est réalisée après un temps de stabilisation de 20 min.

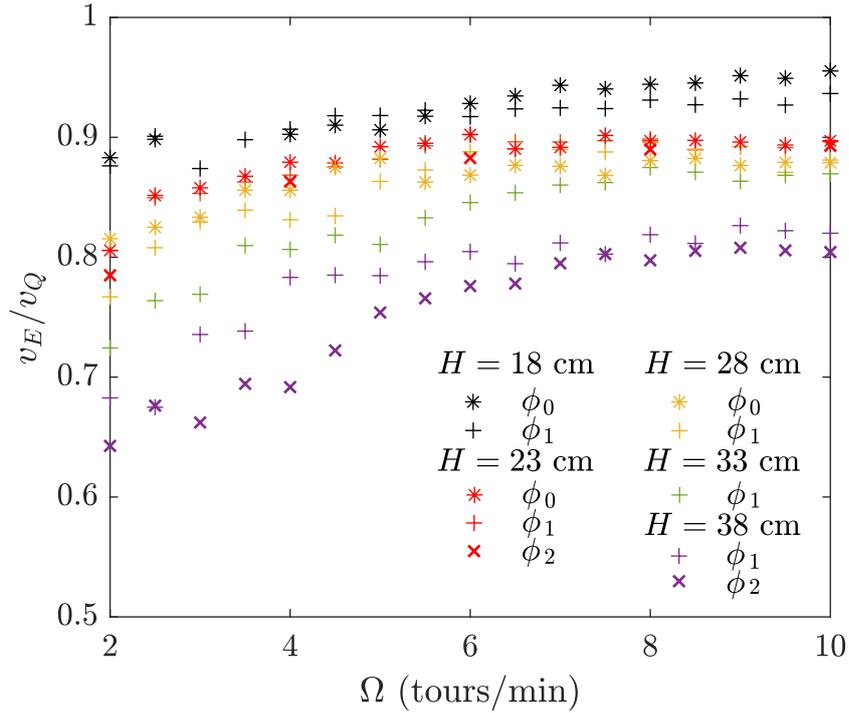


FIGURE 3.4 : Rapport v_E/v_Q en fonction de la rotation de la plateforme pour différentes hauteurs et sections dans le cas stationnaire.

3.3 Vitesse de l'écoulement pour la vidange tourbillonnaire

Nous avons vu dans la partie précédente que la structure de l'écoulement est entièrement modifiée par la présence du tourbillon de vidange. Nous proposons ici de tenir compte des effets du tourbillon sur la vitesse de vidange. Dans la littérature, cette vitesse est souvent considérée comme équivalente à celle de Torricelli, c'est le cas, par exemple, dans l'étude d'Andersen [4], même s'il constate un écart de 15% entre les vitesses mesurées avec et sans rotation. Dans cette partie, nous montrons que la rotation du réservoir peut nettement diminuer la vitesse de vidange [17] et nous établissons un modèle permettant d'expliquer ces écarts.

Il existe différentes classifications de régimes de vidange tourbillonnaire définies en fonction de la déformation de l'interface [41, 107, 98]. Le régime sous-critique [98] désigne une vidange pour laquelle la déformation de l'interface n'atteint pas la buse. Au contraire, le régime est qualifié de super-critique, lorsque le cœur gazeux s'étend jusqu'à la buse. Nous réécrivons le modèle de la vitesse de vidange pour ces deux régimes particuliers.

3.3.1 Effet de la rotation sur la vitesse de vidange

La Figure 3.5 représente la vitesse de vidange adimensionnée $\bar{v}_Q(\Omega) = v_Q(\Omega)/v_Q(0)$ par la vitesse de vidange en l'absence de rotation, où $v_Q(\Omega) = Q(\Omega)/\pi(\phi/2)^2$, pour différents diamètres de section ϕ , profondeurs d'eau $H = h(R)$ et vitesses de rotation de la plateforme Ω .

Nous observons une décroissance générale de la vitesse adimensionnée $\bar{v}_Q(\Omega)$ avec l'augmentation de Ω (excepté pour $\Omega < 3$ et $\phi = 2.65$ mm). Cette décroissance est quasi-linéaire pour les sections de faible diamètre. Pour les sections de plus grand diamètre, la relation devient non linéaire.

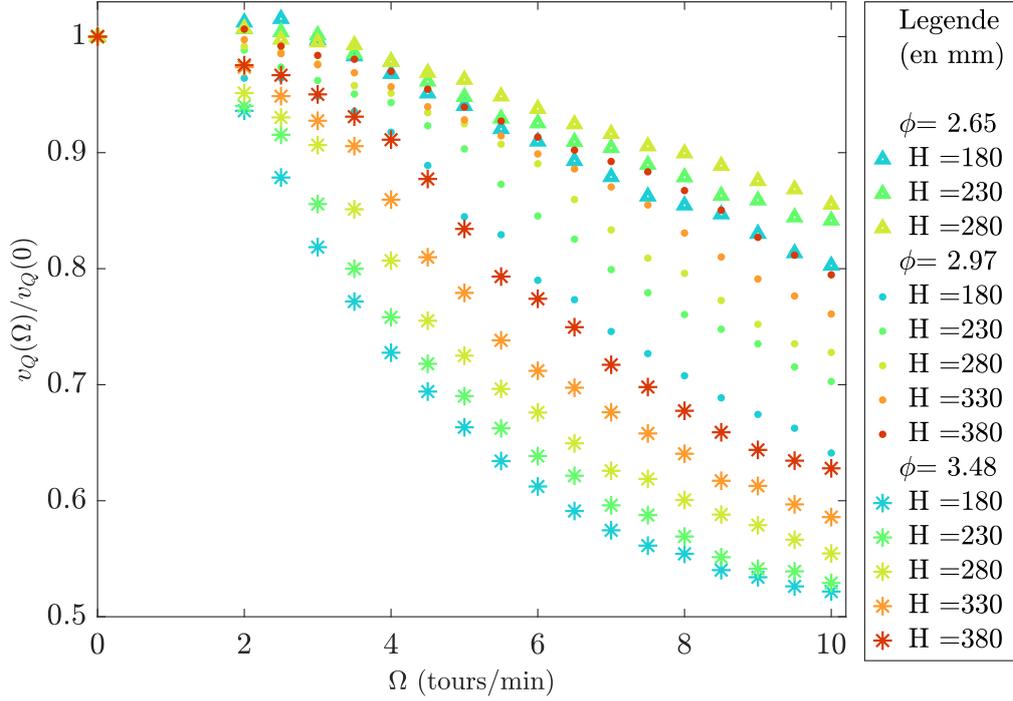


FIGURE 3.5 : Vitesse de vidange $v_Q(\Omega) = Q(\Omega)/\pi(\phi/2)^2$ adimensionnée par rapport à la vitesse de vidange en l'absence de rotation, pour divers diamètres de section ϕ , profondeurs d'eau $H = h(R)$ et vitesses de rotation de la plateforme Ω .

Par ailleurs, nous observons que les vitesses de vidange diminuent davantage en fonction de la rotation avec un diamètre de section ϕ croissant. Une réduction de la hauteur d'eau diminue, elle aussi, la vitesse de vidange. Dans chaque cas, l'interface se creuse. En outre, nous avons remarqué que le ratio entre la profondeur de la déformation de l'interface et la profondeur d'eau totale $(h(R) - h(0))/h(R)$ s'accroît lorsque la vitesse de vidange adimensionnée diminue.

3.3.2 Modèle de vidange à partir de la déformation de l'interface

Nos observations indiquent l'existence d'une relation entre l'apparition de la déformation de l'interface et la diminution de la vitesse de vidange.

La diminution de la vitesse de vidange v_Q par rapport à la valeur habituelle $v_{\beta T}$ peut être comprise en examinant les équations du bilan de la quantité de mouvement dans le référentiel en rotation. En négligeant les effets de la tension superficielle [26], la distribution de pression p dans le milieu peut être considérée comme hydrostatique.

$$p(r, z) = p_0 + \rho g [h(r) - z], \quad (3.13)$$

où p_0 représente la pression atmosphérique à la surface libre. En suivant les travaux de Milne-Thomson [68] et d'Andersen [4], les termes visqueux dans l'équation de la quantité de mouvement peuvent être négligés. Sous l'approximation quasi-statique, l'équation de la quantité de mouvement intégrée sur l'ensemble du domaine fluide \mathcal{D} de surface S_c (voir Fig. 3.6) se simplifie :

$$\mathbf{e}_z \iint_{S_c} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS}) = -2\pi \rho g \int_0^R h(r) r dr - \mathbf{e}_z \iint_{S_c} p dS \quad (3.14)$$

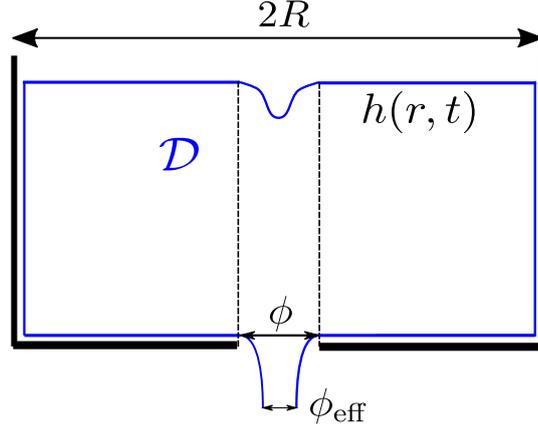


FIGURE 3.6 : Dessin schématique du réservoir et du domaine fluide \mathcal{D} (en bleu), incluant le volume d'eau dans le réservoir et le jet contracté à la sortie.

$$\rho v_{\text{eff}}^2 s_{\text{eff}} = 2\pi \rho g \int_0^{\phi/2} h(r) r dr. \quad (3.15)$$

Sans déformation de surface, lorsque $h(r) = H$, la *vena contracta* devrait correspondre à $s_{\text{eff}}/s = (\phi_{\text{eff}}/\phi)^2 = 1/2$, comme rappelé dans la section 1.2.2. Dans le cas plus général, avec déformation de surface, la vitesse de vidange prend la forme suivante :

$$v_Q = \beta \sqrt{\frac{4g}{(\phi/2)^2} \int_0^{\phi/2} h(r) r dr} \quad (3.16)$$

Cette équation générale relie la vitesse de vidange à la forme de la surface libre au-dessus de l'orifice sans nécessiter de modélisation spécifique de la forme de l'interface. Lorsque la surface libre s'allonge localement en raison du tourbillon, on s'attend donc à ce que la vitesse de vidange diminue en conséquence.

Les résultats comparatifs entre le modèle (3.16) et les mesures expérimentales pour le cas $\phi_0 = 2.65$ mm et $H = 18$ cm sont présentés en termes de débit sur la Figure 3.7. Nous constatons qu'un ajustement du paramètre β permet de faire correspondre le modèle aux mesures, avec un écart de 3.5% par rapport à la valeur de β évaluée pour $\Omega = 0$ tours/min. Comme on le voit sur la Figure 3.7, le modèle (ligne bleue pointillée) s'ajuste parfaitement aux points de mesure (croix rouges) au-delà de l'optimum de vidange ($\Omega \geq 2.5$ tours/minute). Avant l'optimum en revanche, le modèle (3.16), dans lequel β est supposé constant, ne permet pas d'expliquer les débits expérimentalement observés. Nous suspectons une modification des effets de mouillage en sortie de la buse avec l'apparition des effets inertiels, effets qui se traduisent par une modification visible de la forme du jet de sortie aux petites vitesses de rotation. Ainsi, dans le régime de vidange tourbillonnaire, β semble n'être effectivement indépendant de Ω qu'au-delà de l'optimum de vidange.

3.3.3 Cas sous-critique

Dans le régime sous-critique, il est possible de modéliser la déformation de l'interface par le modèle de Hite et Mih en utilisant le rayon de cœur du tourbillon r_c comme un paramètre libre (cf. Chapitre 1). Le rayon du cœur est alors un rayon effectif qui ne nous permet pas de discriminer les effets de la tension de surface. En utilisant le modèle d'Hite et Mih (1.60), la vitesse de vidange (3.16) peut s'écrire :

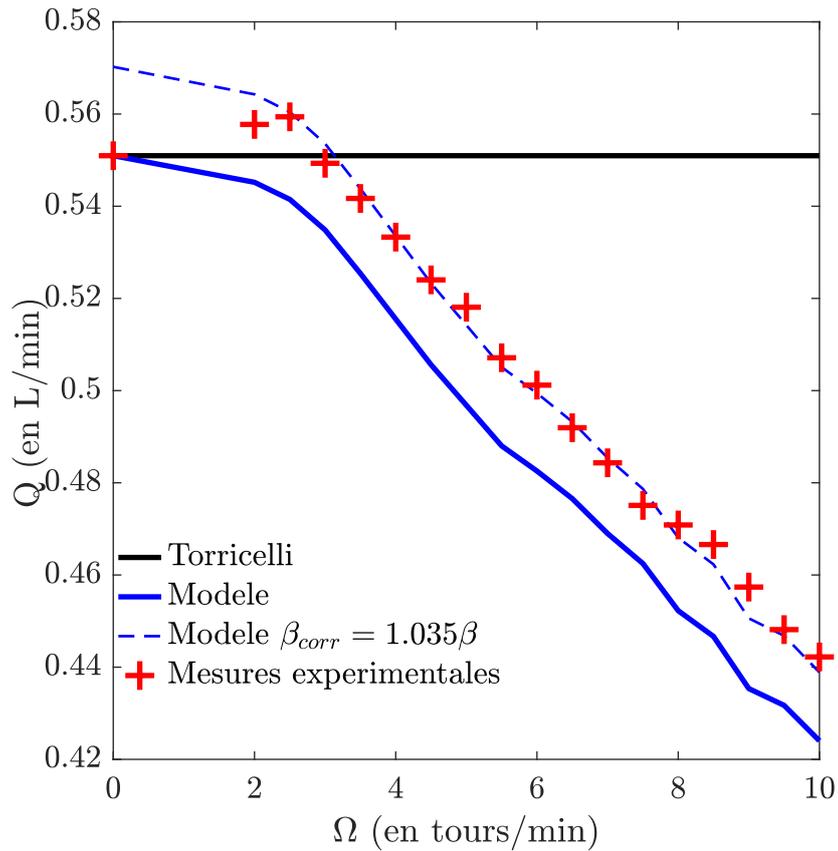


FIGURE 3.7 : Débit de vidange en L/min en fonction de la rotation de la plateforme. La courbe en trait continu noir représente le modèle de Torricelli. Le modèle établi à l'équation (3.16), illustré en trait continu bleu, est dérivé des profils d'interface observés. Une variante de ce dernier modèle, avec un paramètre β ajusté, est montrée en trait pointillé bleu. Les points de mesure du débit sont indiqués en rouge. Le cas représenté est $\phi_0 = 2.65$ mm avec une hauteur $H = 18$ cm.

$$v_Q = \beta \sqrt{\frac{g}{(\phi/2)^2} \int_0^{\phi/2} \left[h(R) + \frac{1}{2g} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_m} \right)^2 \left[\frac{2\bar{r}^2}{1+2\bar{r}^2} - \frac{2\bar{R}^2}{1+2\bar{R}^2} \right] \right] r dr} \quad (3.17)$$

où $\bar{r} = r/r_m$ et $\bar{R} = R/r_m$ représentent respectivement la coordonnée radiale et le rayon de la cuve adimensionnés par le rayon du cœur du tourbillon tel que défini par Hite et Mih, et $v_Q = Q/\pi(\phi/2)^2$ représente la vitesse moyenne calculée sur l'ensemble de la section de vidange. Par intégration, nous avons :

$$v_Q = \beta \sqrt{2gh(R)} \left[1 - \frac{2f(C)}{gh(R)} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_m C} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.18)$$

avec $C = \phi/2r_c$ et

$$f(C) = -\frac{C^2}{2+4\bar{R}^2} + \frac{\ln(2C^2+1)}{4} \approx \frac{\ln(2C^2+1)}{4}$$

Dans l'hypothèse où le fluide vidangé passerait exclusivement par les couches limites, i.e. $Q = \Gamma\delta/2$, nous avons :

$$\frac{v_Q}{v_{\beta T}^*} = (1 + 4f(C)A^2\beta^2)^{-1/2} \quad (3.19)$$

avec $A = \phi/2\delta$ et $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$ et $v_{\beta T}^* = \sqrt{2gh(R)}$. Il est à noter que la hauteur moyenne mesurée expérimentalement est quasiment équivalente à la hauteur au niveau du bord de la cuve, i.e. $H \approx h(R)$. L'écart évalué à partir des profils de l'interface mesurés reste inférieur à 0.03 mm et nous pouvons utiliser dans la suite l'approximation suivante $v_{\beta T}^* \simeq v_{\beta T}$. Nous supposons ici que le rayon du cœur du tourbillon s'exprime grâce à la formule d'Hite et Mih, telle que $r_m = 4\sqrt{\nu/\gamma}$, avec γ le gradient de vitesse axiale calculé sur l'axe O_z . Nous supposons, de plus, que ce gradient de vitesse est linéaire en fonction de z . La validité de ses hypothèses a déjà été évoquée au Chapitre 1. Nous considérerons que l'expression du gradient de vitesse axiale peut être ajustée par un paramètre libre B_1 , dont la valeur est présumée constante pour toutes les expériences. Le gradient de vitesse axiale s'exprime alors comme :

$$\gamma = B_1\beta \sqrt{\frac{2g}{h(R)(1+4f(C)A^2\beta^2)}}, \quad (3.20)$$

et le paramètre $C = \phi/2r_m$ vérifie l'équation :

$$C (1 + A^2\beta^2 \ln(2C^2 + 1))^{-0.25} - \left(\frac{2g}{h(R)} \right)^{0.25} \frac{\phi \sqrt{B_1\beta/\nu}}{8} = 0 \quad (3.21)$$

La Figure 3.8 présente le rapport Q_{model}/Q_{mes} du débit Q_{model} prédit par le modèle (3.19) et du débit mesuré Q_{mes} , pour tous les points de mesures. Les points noirs signifient que le régime est sous-critique, les points rouges que de l'air est entraîné (arrachement de bulles ou régime super-critique). Le paramètre $B_1 = 0.15$ est choisi afin de minimiser l'écart type entre tous les points noirs de la Figure 3.8 pour lesquels $\Omega \leq 6$ tours/min. Pour les trois sections, la vitesse modélisée est légèrement plus faible que la vitesse expérimentale, $Q_{model}/Q_{mes} \approx 0.94$. Cela traduit une diminution initiale de β par rapport au cas sans rotation, comme évoqué en fin de section 3.3.2. Sans surprise, le modèle (3.19) cesse de s'appliquer, pour les deux plus grandes sections de buse, dès que des bulles sont entraînées. Ce régime s'accompagne d'un changement brusque de l'aspect de l'interface. À l'inverse, la section la plus petite s'écarte plus doucement du modèle, le changement d'aspect de l'interface étant moins brutal même en présence d'arrachement de bulles.

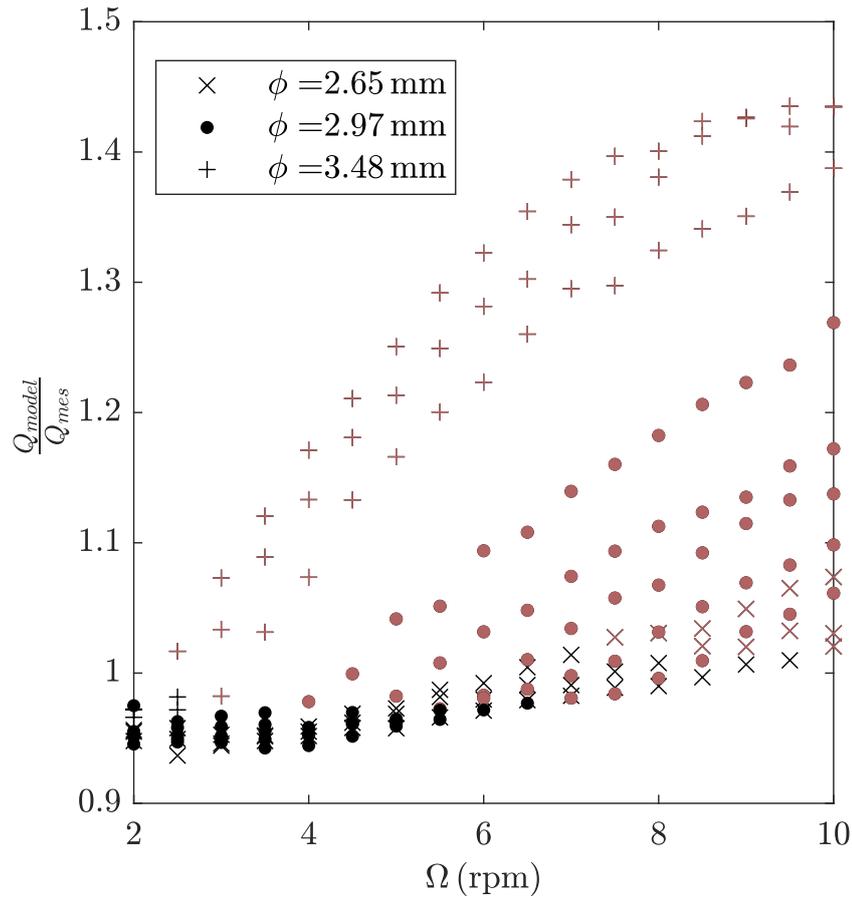


FIGURE 3.8 : Q_{model}/Q_{mes} en fonction de Ω pour tous les points de mesures sans PIV. Les points noirs représentent les points pour lesquels une déformation sous-critique de l'interface est présente, les points rouges représentent les expériences pour lesquelles un phénomène d'entraînement d'air est observé (arrachement de bulles ou régime super-critique). Nous fixons $B_1 = 0.15$.

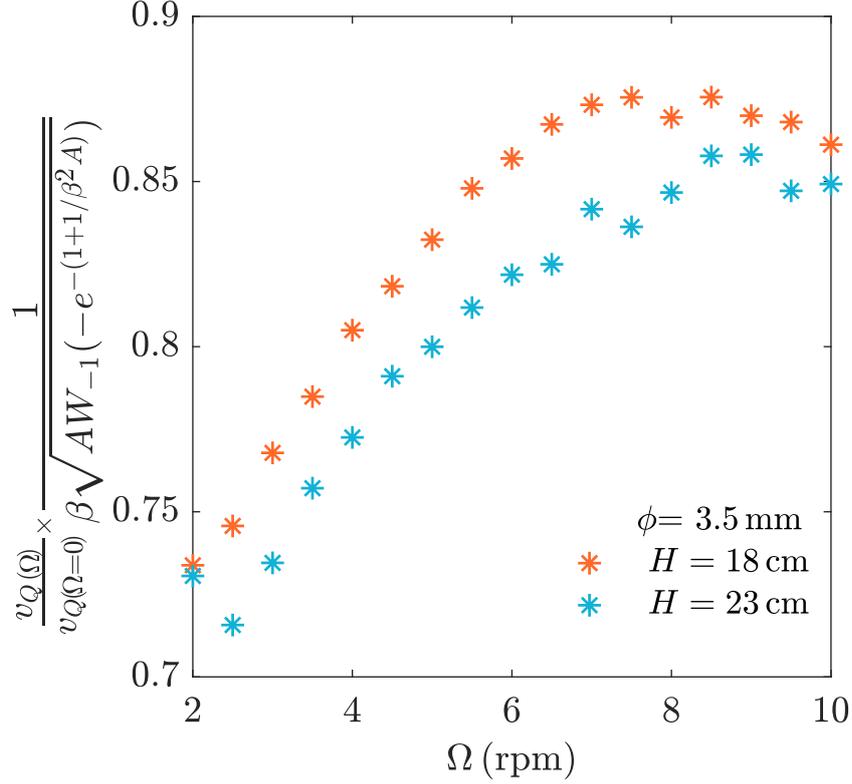


FIGURE 3.9 : Validité de l'équation (3.26) dans le cadre stationnaire en fonction de la vitesse de rotation Ω pour deux configurations expérimentales différentes.

3.3.4 Cas super-critique

Le régime super-critique apparaît pour les grandes vitesses de rotation et des sections de buse plus larges. Dans ce régime, la forme de l'interface est régie par la circulation Γ du tourbillon [40] :

$$h(r) = h(R) - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 gr^2}, \quad (3.22)$$

pour $\phi_g/2 \leq r \leq R$, où $\phi_g = \sqrt{\Gamma^2/[2\pi^2 gh(R)]}$ est le diamètre du noyau gazeux à la sortie. Ce modèle n'a pas pour objectif de décrire parfaitement la forme de l'interface, qui est un problème complexe et a fait l'objet de nombreuses études, il sert plutôt d'intermédiaire pour prédire la vitesse de vidange en fonction des grandeurs caractéristiques du problème H , Ω , ν , ϕ et β . En injectant ce profil de l'interface (3.22) dans l'équation (3.16), nous obtenons :

$$v_Q = \beta \sqrt{\frac{4g}{(\phi/2)^2} \int_{\phi_g/2}^{\phi/2} \left(h(R) - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 gr^2} \right) r dr}, \quad (3.23)$$

où la vitesse moyenne v_Q est calculée sur l'ensemble de la section de vidange, y compris le cœur gazeux, et peut donc être directement comparée à la vitesse de vidange mesurée expérimentalement. L'intégration de l'équation (3.23) donne :

$$v_Q = \beta \sqrt{2gh(R)} \left[1 + \frac{\Gamma^2}{2gh(R)\pi^2\phi^2} \left(-1 + 2 \ln\left(\frac{\Gamma}{\sqrt{2gh(R)}\pi\phi} \right) \right) \right]^{1/2}. \quad (3.24)$$

En considérant que le fluide vidangé passe exclusivement par les couches limites, i.e. $Q \simeq \Gamma\delta/2$:

$$A \left(\frac{v_Q}{v_T^*} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{\beta^2 A} - 2 \ln \left(A^{1/2} \frac{v_Q}{v_T^*} \right) \right] - 1 = 0, \quad (3.25)$$

où $v_T^* = \sqrt{2gh(R)}$ et $A = (\phi/2\delta)^2$ est un paramètre sans dimension correspondant au rapport entre le rayon de sortie $\phi/2$ et l'épaisseur de la couche limite $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$. En supposant $v_T^* \approx v_T$, la solution de l'équation (3.25) s'écrit :

$$\frac{v_Q}{v_{\beta T}} = \frac{1}{\beta \sqrt{AW_{-1}(-e^{-(1+1/\beta^2 A)})}}, \quad (3.26)$$

où W_{-1} est le prolongement analytique de la fonction du produit logarithmique. La vitesse de vidange v_Q est donc proportionnelle à la vitesse de Torricelli $v_{\beta T}$ dans le régime super-critique, avec un coefficient directeur qui dépend uniquement du paramètre sans dimension $A = \Omega(\phi/2)^2/\nu = (\phi/2R)^2 Ek^{-1}$.

En régimes de vidange stationnaire, peu d'expériences présentent un régime super-critique stabilisé, i.e. sans oscillations du cœur gazeux. Les données expérimentales illustrées à la Figure 3.9 montrent la validité de l'équation (3.26) pour deux séries de mesures distinctes. On constate que pour les valeurs élevées de Ω , un plateau est atteint lorsque le régime super-critique est stable. Ce comportement confirme la pertinence du modèle énoncé par l'équation (3.26), avec une erreur d'environ 15% pour les rotations les plus élevées. Ce résultat est à mettre en parallèle avec la validité de la relation d'Andersen entre les débits, i.e. $Q = Q_E$, utilisée ici. Pour les différentes hauteurs d'eau examinées, l'écart entre le débit de vidange mesuré et le débit théorique associé aux couches limites est d'au moins 10% (cf. Section 3.2.2) et se répercute sur la validité de l'équation (3.26).

3.4 Instabilité d'arrachement de bulles

L'entraînement de gaz dans les boucles hydrauliques n'est pas un objet d'étude récent, notamment dans l'industrie nucléaire [57, 6]. Néanmoins, l'étude et la modélisation précise de ce phénomène reste très présente dans la littérature scientifique actuelle [73, 8] et représente un défi dans le développement des réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (RNR-Na) [59]. Dans ces réacteurs, le caloporteur sodium présente une surface libre en contact avec un gaz inerte susceptible d'être entraîné dans l'écoulement et de perturber le fonctionnement des pompes de circulation, voire le réacteur lui-même, en modifiant les réactions neutroniques [73, 102, 104].

Bien que des recherches aient été menées avec du sodium liquide [6], les contraintes expérimentales inhérentes à son emploi (température de fusion, réactivité à l'air et à l'eau) et les similitudes expérimentales réalisables avec un usage de l'eau (pour des nombres de Reynolds et de Weber équivalents) [54], ont conduit à favoriser l'emploi de l'eau dans la plupart des études sur le phénomène d'entraînement dans les RNR-Na.

Différents mécanismes d'entraînement gazeux peuvent intervenir lorsqu'un liquide mis au contact d'une phase gazeuse est aspiré [102]. Le premier mécanisme d'entraînement est observé pour une interface liquide-gaz perturbée avec, par exemple, une présence d'ondes interfaciales ou de remous générés par un système de remplissage situé au-dessus de l'interface. Dans de telles conditions, des bulles de gaz peuvent se former dans le liquide à proximité de l'interface et être entraînées dans l'écoulement par aspiration.

Le deuxième mécanisme d'entraînement se produit dans des conditions de faible hauteur d'eau. La zone située au-dessus de l'orifice d'aspiration ou de sortie subit alors une

dépression significative, déformant l'interface [61] et permettant ainsi au gaz d'être entraîné dans l'écoulement.

Dans le cas qui nous intéresse ici, un tourbillon se forme dans l'écoulement et génère une déformation en pointe de l'interface. Des bulles peuvent alors être arrachées de la pointe et entraînées dans l'écoulement. Si le tourbillon s'intensifie, le régime super-critique apparaît et entraîne une grande quantité d'air dans l'écoulement. Dans la suite, le terme entraînement gazeux sera utilisé lorsqu'un arrachement de bulles ou un régime super-critique sera détecté.

Différentes approches existent pour étudier le phénomène d'arrachement de bulles. La première, qui est classique en physique, s'appuie sur l'analyse dimensionnelle [6, 23, 18]. Plusieurs études expérimentales établissent alors des cartes et des critères empiriques d'occurrence du phénomène, utilisant les grandeurs adimensionnelles qui régissent le problème. Cependant, ces critères sont très dépendants des géométries des dispositifs expérimentaux utilisés (cuve cylindrique [6, 72, 71], cuve rectangulaire [77], avec ou sans présence d'obstacle en amont de l'écoulement [73], maquette à l'échelle 1/1.8 du réacteur à neutrons rapides [54, 107], etc). Dans ces études, la stabilité du tourbillon dépend du système de recirculation du fluide (avec, par exemple, une injection tangentielle à la paroi en amont de la zone d'aspiration). Et, l'apparition du tourbillon et de son instabilité sont définies en fonction d'une durée minimale d'observation de ces phénomènes. Notre dispositif nous permet ici d'étudier le tourbillon et l'instabilité d'arrachement dans un régime permanent bien contrôlé.

Une autre approche, moins classique, repose sur des simulations numériques, bien qu'il soit difficile de simuler des expériences d'écoulement diphasiques avec arrachement de bulle [73, 9]. Sakai [90] et Ito [51] ont élaboré une méthode de prédiction de l'entraînement gazeux, établie à partir du modèle de Burgers et des résultats expérimentaux de Monji et Moriya [71, 72]. Grâce à un algorithme de type Volume Of Fluid (VOF) et une simulation monophasique, ils ont pu estimer deux conditions d'apparition du phénomène d'entraînement, fonction de la circulation et du rayon du coeur du tourbillon.

3.4.1 Influence des différents paramètres expérimentaux

La Figure 3.10a présente le débit adimensionné obtenu lors de nos expérimentations en fonction des différentes vitesses de rotation Ω de la plateforme. Les points noirs signifient que le régime est sous-critique, les points rouges que de l'air est entraîné (arrachement de bulles ou régime super-critique). Cette carte d'occurrence permet de voir une frontière se dessiner, représentant le seuil d'apparition de l'instabilité, qui est reportée sur la Figure 3.10b. Nous constatons que l'apparition de l'instabilité d'arrachement intervient pour des valeurs de Ω d'autant plus grandes que le diamètre ϕ est petit, entraînant une différence de débit avec le cas sans rotation plus marquée pour ces valeurs. La hauteur d'eau est un autre paramètre important, comme nous pouvons le constater sur la Figure 3.10c et l'apparition de l'instabilité d'arrachement intervient pour des valeurs de Ω d'autant plus grandes que la hauteur d'eau moyenne H est élevée.

3.4.2 Analyse dimensionnelle : Théorème de Buckingham

Dans la littérature, il est classique d'exprimer une hauteur critique d'apparition du phénomène d'arrachement. Pour déterminer les grandeurs adimensionnelles qui régissent le problème, nous utilisons le théorème de Buckingham. Dans une étude classique sans mise en rotation du système et avec une injection d'eau tangentielle à la paroi, les grandeurs physiques sont [6, 23] :

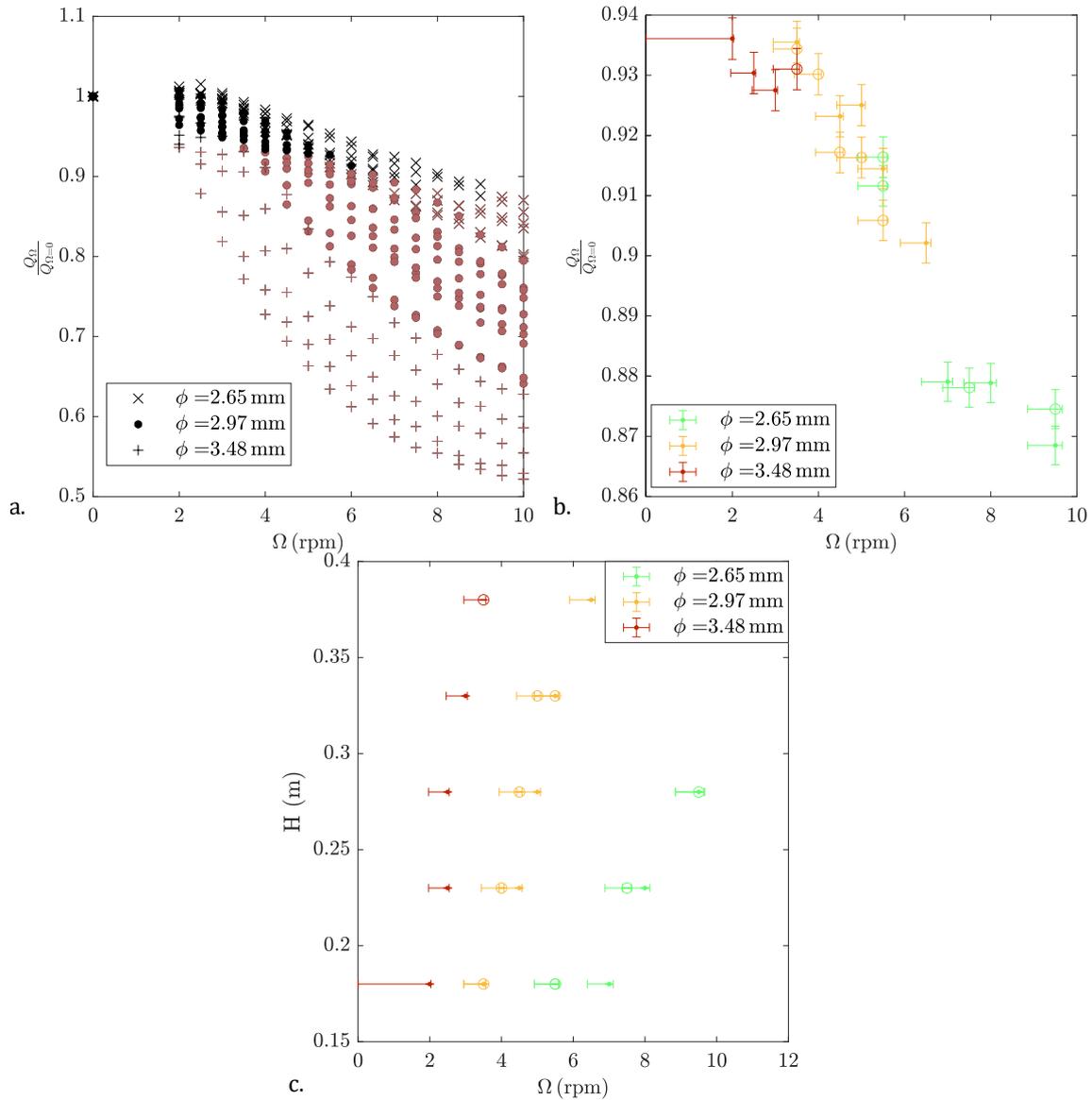


FIGURE 3.10 : Débit adimensionné en fonction de la vitesse de rotation de la plateforme. (a) Carte d'occurrence de l'entraînement gazeux. Les points noirs correspondent aux valeurs expérimentales pour lesquelles aucun arrachement n'est détecté. Les points rouges présentent un phénomène d'entraînement gazeux identifié. (b) Seuils d'apparition de l'instabilité d'arrachement de bulles. Les points et les cercles représentent les mesures sans PIV et avec PIV respectivement. Les barres d'erreurs sont calculées en fonction des incertitudes de mesures et inclus l'incertitude sur le seuil d'apparition de l'arrachement qui pourrait se déclencher entre la mesure de détection et la précédente mesure réalisée. (c) Hauteur d'eau en fonction de Ω au seuil d'apparition de l'instabilité d'arrachement de bulles.

- H : la hauteur d'eau en (m).
- ϕ : le diamètre de vidange en (m).
- ν : la viscosité cinématique en ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).
- ρ : la masse volumique en ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$).
- σ : la tension de surface en ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$).
- g : l'accélération de la pesanteur en ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).
- v_Q : la vitesse de vidange en ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Ainsi, il y a 7 grandeurs physiques et 3 unités, d'où la nécessité de construire 4 nombres adimensionnels. Dans la littérature, ces nombres sont généralement définis comme nombres de Froude Fr , de Weber We , de Reynolds Re et de hauteur réduite H^* :

$$Fr = \frac{v_Q}{\sqrt{2gH}}$$

$$We = \frac{v_Q^2 \phi \rho}{2\sigma}$$

$$Re = \frac{v_Q \phi}{2\nu}$$

$$H^* = \frac{2H}{\phi}$$

où nous avons choisi de rajouter un coefficient $1/\sqrt{2}$ dans le nombre de Froude, qui exprime alors directement le rapport entre la vitesse de vidange mesurée et la vitesse de vidange de la loi de Torricelli.

Une grandeur physique supplémentaire intervient dans notre expérience du fait de la rotation de la plateforme. Cette grandeur physique peut être directement Ω , mais il peut aussi s'agir de la vitesse ΩR ou de la circulation ΩR^2 imposées à la paroi. Il sera ainsi possible de construire, par exemple, un nombre de Swirl $Sw = 2\sqrt{\Omega\nu/g\phi}$ ou un nombre de Rossby $Ro = v_Q/\Omega R$ ou un nombre de Froude rotationnel $Fr_\Omega = \Omega R^2/\sqrt{gH^3}$ comme proposé par Takahashi [102]. Nous choisissons Fr_Ω pour deux raisons. La première est d'utiliser la circulation, et donc une grandeur conservative, pour construire notre nombre adimensionnel. La seconde est motivée par les expériences utilisant une injection tangentielle à la paroi, dans lesquelles il est, en effet, assez courant de considérer que la hauteur critique pour laquelle le phénomène d'arrachement de bulles intervient dépend du nombre de Froude [6, 51]. La dépendance en Froude devient a contrario plus difficile à identifier lorsque l'injection tangentielle à la paroi disparaît [18].

Comme on peut le voir sur la Figure 3.11, le nombre de Froude critique pour lequel le phénomène d'arrachement intervient varie très peu, avec $Fr_c = 0.82 \pm 0.04$. Dans notre expérience, cela s'explique probablement par le fait que la vorticit   n'est pas g  n  r  e par un   coulement tangentiel    la paroi. Comme on peut le voir sur la Figure 3.12, la hauteur d'eau critique H_c^* est une fonction croissante de Re et We , et elle est d'autant plus grande que ϕ est grand.    l'oppos  , H_c^* est fonction d  croissante de Fr_Ω et est d'autant plus grande que ϕ est petit.

Nous proposons une formulation empirique en loi de puissance de nos r  sultats sous la forme (cf. Figure 3.12) :

$$H_c^* = 5.5 \times 10^{-8} Re^{3.2} We^{0.16} Fr_\Omega^{1.12}. \quad (3.27)$$

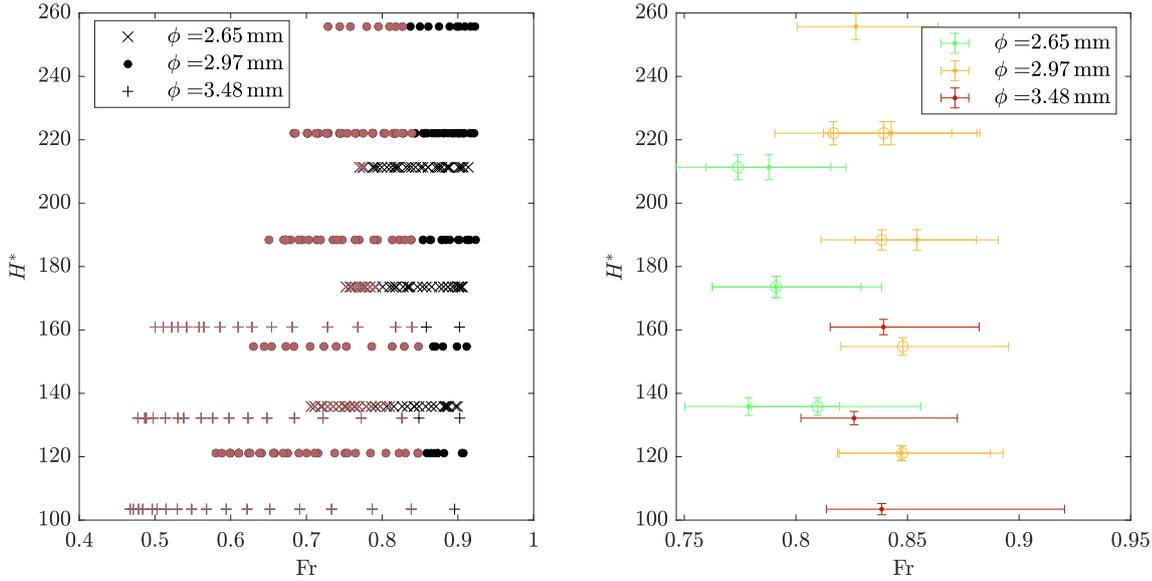


FIGURE 3.11 : Hauteur adimensionnée H^* en fonction du nombre de Froude. (a) Carte d'occurrence de l'entraînement gazeux. Les points noirs correspondent aux valeurs expérimentales pour lesquelles aucun arrachement n'est détecté. Les points rouges présentent un phénomène d'entraînement gazeux identifié. (b) Seuils d'apparition de l'instabilité d'arrachement de bulles. Les points et les cercles représentent les mesures sans PIV et avec PIV respectivement.

La loi ainsi tracée s'insère parfaitement dans les barres d'erreurs. Cependant, comme l'erreur relative sur le Reynolds peut atteindre 6%, l'erreur relative sur la loi de puissance peut être supérieure à 19%. Bien que cette démarche soit courante [18, 23, 6], il est cependant délicat de conclure, avec nos résultats, sur la validité d'une telle loi, qui utilise quatre paramètres libres. Les lois obtenues dans la littérature sont de plus dépendantes des géométries utilisées et sont donc différentes de l'équation (3.27).

3.4.3 Nombres adimensionnels critiques

Nous avons constaté que l'apparition de l'instabilité d'arrachement entraînait un écart au modèle sous-critique présenté en section 3.3.3, la vitesse de vidange mesurée étant alors plus faible que sa valeur modélisée. Nous utilisons ici ce constat afin de déterminer un critère de l'apparition de l'instabilité.

Nous représentons Re_{th} et We_{th} obtenus avec le modèle de vitesse de vidange dans le cas sous-critique en fonction de Re et We à la Figure 3.13a-c. Nous constatons qu'il est alors possible de définir un nombre de Reynolds et de Weber critique, tracé en vert, tel que : $Re_c = Re_{th}/0.94$ et $We_c = We_{th}/0.94^2$, pour lesquels l'apparition de l'instabilité intervient lorsque $Re < Re_c$ et $We < We_c$. Le coefficient 0.94 est choisi pour correspondre au rapport moyen des débits Q_{model}/Q_{mes} trouvé précédemment (cf. section 3.3.3). Nous constatons une bonne prédiction du seuil de l'instabilité qui reste toujours comprise dans les barres d'erreurs pour les trois sections étudiées (l'erreur relative sur les nombres de Reynolds et de Weber pouvant atteindre jusqu'à 6% et 12% respectivement).

3.4.4 Critères d'Ito

Ito *et al.* [51, 76] proposent deux critères définis à partir de données de simulations CFD monophasiques dont ils comparent les données à différents résultats expérimentaux [90, 71]. Ito réécrit la longueur du cœur gazeux adimensionnée L_{gc}^* obtenue par le modèle de

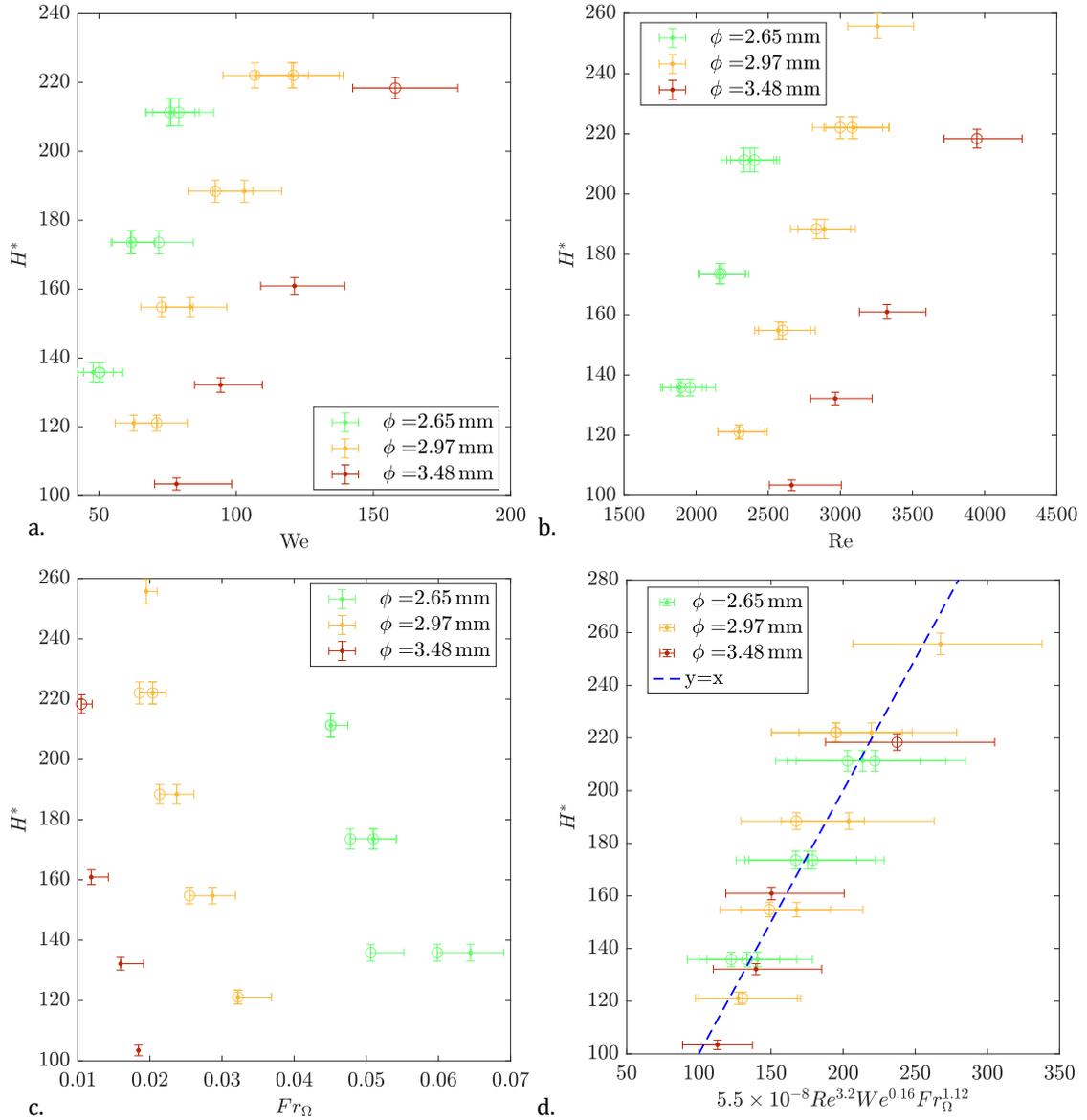


FIGURE 3.12 : Hauteur adimensionnée H^* en fonction de (a) We , (b) Re et (c) Fr_Ω (d) $5.5 \times 10^{-8} Re^{3.2} We^{0.16} Fr_\Omega^{1.12}$ pour les valeurs seuils d'apparition de l'instabilité d'arrachement de bulles. Les points et les cercles représentent les mesures sans PIV et avec PIV respectivement. La droite bleue en pointillés représente la loi de puissance proposée à l'équation (3.27).

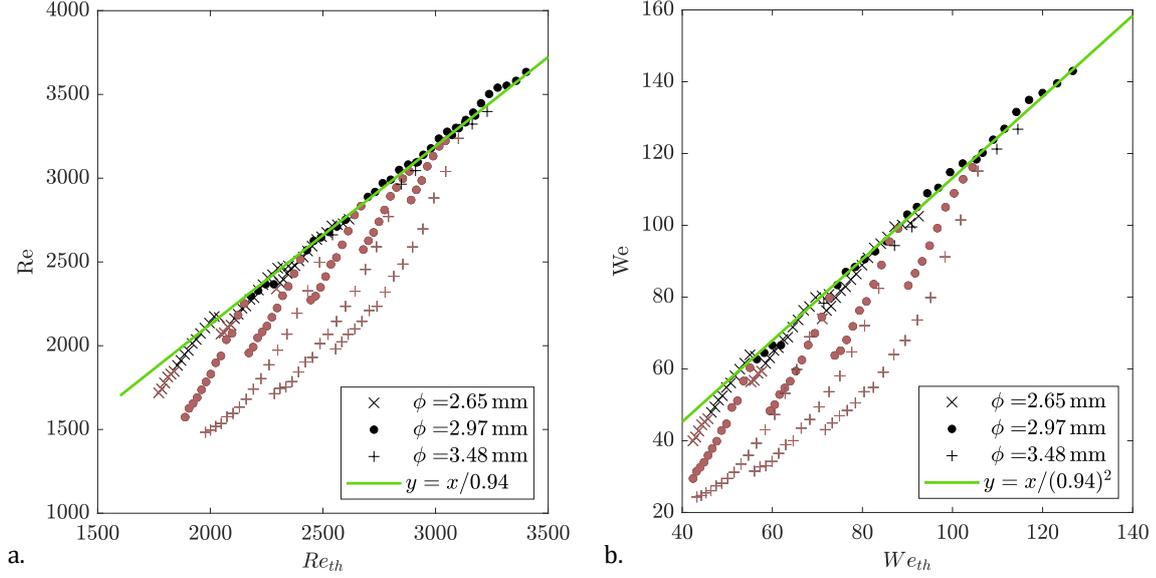


FIGURE 3.13 : Carte d'occurrence de l'entraînement représentant (a) Re_{th} en fonction de Re et (b) We_{th} en fonction de We . Les points noirs correspondent aux valeurs expérimentales pour lesquelles aucun arrachement n'est détecté. Les points rouges présentent un phénomène d'entraînement gazeux identifié.

Burgers en fonction du gradient de vitesse axiale $\gamma^* = \gamma\nu/gh(R)$ et de la circulation $\Gamma^* = \Gamma/\nu$ adimensionnés, telle que :

$$L_{gc}^* = 1 - \frac{h(0)}{h(R)} = K\gamma^*\Gamma^{*2} \quad (3.28)$$

où $K = \ln(2)/16\pi^2 = 4.389 \times 10^{-3}$. Le premier critère donné par Ito considère qu'un arrachement gazeux a lieu lorsque la déformation atteint une valeur critique pour laquelle le cœur gazeux atteint l'orifice de sortie. L'utilisation du modèle de Burgers avec les données CFD donne une incertitude comprise de 0.3 à 3 fois la valeur expérimentale de L_{gc}^* , conduisant à un critère CFD qui permet de prévenir le phénomène d'arrachement avec une marge de sécurité telle que $L_{gc}^* < 1/3$, soit :

$$\gamma^*\Gamma^{*2} < 76 \quad (3.29)$$

Le critère est donc arbitraire, mais il permet à l'ingénieur de caractériser les situations à risques, à partir de simulations CFD monophasiques.

Le second critère d'Ito, également empirique, est établi sur l'évaluation CFD du gradient de vitesse axiale et considère qu'il existe un gradient de vitesse limite pour lequel des bulles s'arrachent de la pointe. Ito pose ainsi :

$$\gamma^* < 10^{-7} \quad (3.30)$$

Nous proposons une évaluation de γ^* dans nos expériences à partir du modèle (3.20). La Figure 3.14 présente γ^* en fonction de $\gamma^*\Gamma^{*2}$ pour nos différents points de mesures. On constate que nos données sont dans le même ordre de grandeur que celles de la maquette à l'échelle 1/8 [53] étudiées par Ito. Ainsi, malgré des dispositifs expérimentaux très différents, les tourbillons générés semblent présenter des caractéristiques assez proches. Les valeurs de γ^* appartiennent cependant à une plage moins étendue qui reste supérieure à la valeur seuil du second critère, et il sera impossible de tester ce critère avec nos données. Le critère

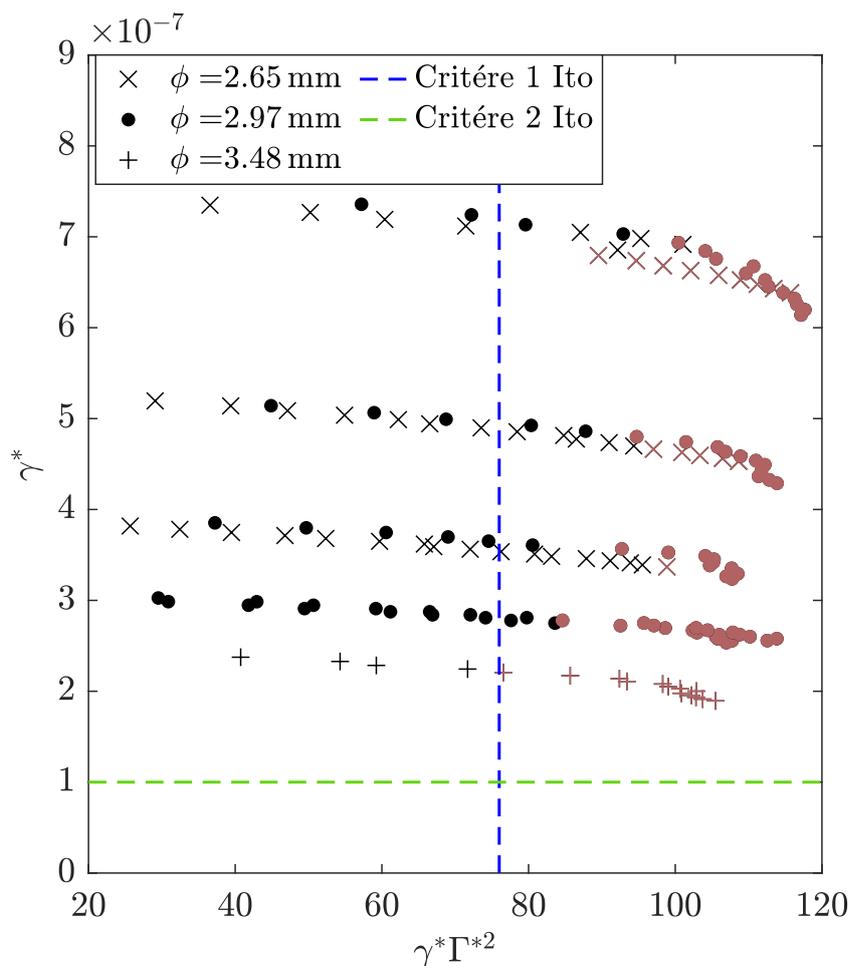


FIGURE 3.14 : Carte d'occurrence de l'entraînement représentant γ^* en fonction de $\gamma^* \Gamma^{*2}$, pour les mesures réalisées avec PIV. Les points noirs correspondent aux valeurs pour lesquelles aucun arrachement n'est détecté. Les points rouges présentent un phénomène d'entraînement gazeux identifié. Les deux critères d'Ito sont ajoutés en pointillés.

sur la longueur du cœur $\gamma^* \Gamma^{*2} < 76$ est particulièrement bien respecté par nos mesures. Ainsi, malgré la définition d'une valeur seuil arbitraire, qui dépend de la modélisation CFD choisie, nous constatons que ce critère est pertinent d'un point de vue physique et que sa valeur est cohérente avec nos données modélisées.

3.5 Conclusion

L'étude de la vidange tourbillonnaire révèle une structure beaucoup plus complexe que le cas classique de la vidange de Torricelli. Cette structure est bien connue et se décompose en différentes zones : les couches limites de Stewartson, les couches limites d'Ekman, la zone de pompage d'Ekman et enfin le tube de vidange. La présence de la couche limite de Stewartson influence le profil de vitesse azimutale telle qu'elle a été explicitée par Foster [33] et explique les écarts aux différents modèles potentiels dans la zone proche paroi. Les structures liées au pompage d'Ekman sont semblables aux structures observées dans la littérature en régime stationnaire. Nous avons testé l'hypothèse d'Andersen qui propose que la quasi-totalité du fluide vidangé passe par les couches limites. Cette hypothèse peut en présenter des écarts importants de l'ordre de 35%, si la hauteur d'eau devient trop

élevée.

Dans un second temps, nous avons montré que la loi de vidange en présence du tourbillon obéit à une loi de Torricelli généralisée dans laquelle le niveau moyen de l'eau doit être remplacé par le niveau local au-dessus de la section de sortie. L'augmentation de l'intensité du tourbillon accroît la déformation de la surface libre et, par conséquent, diminue la vitesse de vidange. Il est alors possible d'utiliser une modélisation de la déformation de l'interface et de réécrire la vitesse de vidange dans les cas sous-critique et super-critique en fonction de la circulation et du rayon du cœur du tourbillon. En considérant que la vidange s'effectue essentiellement à travers les couches limites d'Ekman, la circulation peut être remplacée par les autres paramètres du problème. Nos modèles sous-critique et super-critique sont en bon accord avec nos mesures expérimentales, en considérant pour le cas sous-critique, l'utilisation d'un paramètre libre, gardé constant pour toutes nos expériences et permettant de calculer le rayon du cœur du vortex. Le modèle sous-critique s'écarte naturellement des données expérimentales lorsque l'instabilité d'arrachement de bulles apparaît.

Ce phénomène d'arrachement de bulles est d'abord étudié par analyse dimensionnelle. Celle-ci nous permet d'écrire une loi de puissance empirique pour la hauteur critique H^* d'arrachement de bulles en fonction de Re , We et Fr_Ω . Si cette démarche est courante dans la littérature, sa validité dans notre cas particulier est délicate à établir. Dans un second temps, nous proposons d'utiliser le modèle sous-critique établi dans la Section 3.3.3 pour définir un critère d'arrachement sur les nombres de Reynolds et de Weber. Les seuils de l'instabilité modélisés, qui dépendent d'un unique paramètre libre, sont alors compris dans les erreurs de mesures. Enfin, nos données sont mises en comparaison des critères d'arrachement proposés par Ito et faisant intervenir la circulation (grandeur mesurée) et le gradient de vitesse axiale (grandeur évaluée à partir du modèle sous-critique). Nous constatons qu'elles vérifient bien le premier critère proposé par Ito, le second critère étant en dehors de notre plage de mesures.

Vidange instationnaire

Sommaire

4.1	Introduction	76
4.2	Modélisation de la loi de vidange en présence d'un tourbillon	76
4.3	Quelques résultats complémentaires sur la vitesse de vidange	85
4.4	Structure de l'écoulement	86
4.4.1	Le phénomène de pompage	87
4.4.2	Les couches limites de Stewartson	88

4.1 Introduction

Dans la plupart des cas, un tourbillon se forme lors de la vidange d'un récipient. C'est le cas classique de la vidange d'une baignoire ou d'un évier, et, à une plus grande échelle, des barrages hydrauliques. Le tourbillon qui se crée n'est souvent pas désiré. Il ralentit la vidange, rallongeant le temps nécessaire pour vider le volume d'eau et peut être responsable de l'entraînement de gaz en aval de la vanne de sortie. Nous étudions ici l'effet du tourbillon sur l'écoulement d'une vidange instationnaire, qui est très peu référencé dans la littérature. Contrairement à ce que nous avons vu dans le Chapitre précédent, le tourbillon et les couches limites ne sont pas formés à l'instant initial. Ils s'établissent progressivement, puis évoluent de manière quasi-statique avec la diminution de la hauteur d'eau. L'article reproduit dans la Section 4.2 analyse l'influence de la rotation sur la vidange du récipient et propose une généralisation de la loi de Torricelli en présence d'un vortex dans l'écoulement. Le modèle développé dans la Section 3.3, appliqué aux profils expérimentaux de l'interface, permet de prédire les vitesses de vidange instantanées observées. Nous montrons également que le temps de vidange est affecté par le tourbillon, son évolution dépendant alors d'un nombre sans dimension qui est fonction de l'épaisseur de la couche limite et du ratio entre le diamètre et l'épaisseur de couche limite d'Ekman.

Dans la Section 4.3, nous décrivons l'évolution des structures d'écoulement au cours de la vidange, qui résultent de l'évolution quasi-statique du pompage d'Ekman et nous discutons de la validité du modèle de Foster dans le cas instationnaire.

4.2 Modélisation de la loi de vidange en présence d'un tourbillon

Bathtub vortex effect on Torricelli's law

A. Caquas,^{1,2} L.R. Pastur,¹ A. Genty,² and P. Gondret³

¹*Unité de Mécanique, ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, France*

²*Université Paris-Saclay, CEA, Service de Thermo-hydraulique et de Mécanique des Fluides, Gif-sur-Yvette F-91191, France*

³*Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire FAST, Orsay F-91405, France*

We investigate experimentally the unsteady draining flow from a rotating tank. The fluid in the tank is first set in solid rotation, before the draining hole is opened. We show that the draining may be drastically reduced by the rotation, as the vortex circulation increases together with the surface deformation. We demonstrate that the usual Torricelli's draining law has to be modified with the surface deformation and that the draining time is mainly governed by a nondimensional parameter corresponding to the ratio of the size of the outlet to the thickness of the Ekman boundary layer.

I. INTRODUCTION

Nearly four centuries ago, Torricelli discovered the law describing the emptying of a vessel under the acceleration due to gravity g [1]. This law, which was demonstrated one century later by Bernoulli when neglecting viscous dissipation [2], relates the draining velocity v_T to the mean water level H above the bottom hole, $v_T(t) = \sqrt{2gH(t)}$, at any time t , for a hole of section s much smaller than the section S of the vessel. The evolution of $H(t)$ established from mass conservation, leads to the total draining time $T_0 = (S/s)\sqrt{2H_0/g}$. Many works devoted to the emptying of tanks with a free surface in the open air focus on some discrepancies between this theoretical law and experimental data [3–9]. These discrepancies can be taken into account by using a corrective coefficient $\beta < 1$ in the draining law, i.e., $v_{\beta T} = \beta v_T$. Many subtle phenomena come into play near the outlet. From a simple analysis of the *vena contracta* of the water jet, β can be as small as $1/2$ [10] but other phenomena such as wetting effects give rise to experimental β values from 0.64 to 0.93, depending on the geometry of the outlet but also on its size relative to the capillary length [9]. The total draining time T_β is thus expected to be $1/\beta$ longer than its ideal value T_0 .

In contrast to small vessels such as bottles of water where a vortex can hardly be observed without rotation, a vortex appears during the draining of large open-air tanks. This is a common observation for emptying baths, but this also occurs at much larger scales in environmental or industrial situations, for instance in the case of hydraulic dams with a loss of efficiency and wear of equipment [11–13] or in the case of nuclear power plants with major safety issues [14–16]. The emptying process is an incredible amplifier of vorticity and the popular experiments of Shapiro [17] and Trefethen *et al.* [18] perfectly illustrate this phenomenon. Carried out under very controlled conditions, they are like the Foucault's pendulum, part of the human-scale demonstrations of the Earth's rotation [19, 20].

When the fluid is drained without any rotation, the flow structure is simple with a point sink flow close to the outlet section and connected far away to a downward uniform flow. The structure of the vortex flow is more complex. It consists of several regions that have been studied under steady conditions, i.e. at constant water level H [21–36]. Two distinct regions of the flow contribute to the emptying. The boundary layer at the interface is drained within a fine pipe region above the outlet. A part of the Ekman boundary layer that develops at the bottom wall of the tank flows directly into the outlet section while the remaining part is pumped upwards and forms complex structures in the bulk. Andersen *et al.* [27, 29] estimated that the flow rate Q_E coming from the Ekman boundary layer accounts for 90% of the total drained flow Q and found the relation $Q_E = \Gamma\delta/2$ where δ is the thickness of the boundary layer and Γ is the velocity circulation associated with the vortex. It is worth noting that the vortex flow characterized by its circulation and core size deforms the free surface accordingly [36].

Although differences in draining velocities with and without a vortex have been reported in steady conditions [29], to our knowledge, no study has been done to investigate in detail the influence of vortex flow on the unsteady Torricelli's law. In this article, we address this question with a rotating vessel. We show that a transition between two different draining regimes takes place resulting in a slower draining in the case of rotation. The study of bathtub vortex in a rotating reference frame is widely used [27, 29, 33–35] and allows the vortex to be controlled in intensity and stabilized on the axis of rotation, avoiding possible complex precession motion.

II. EXPERIMENTAL SETUP

Our rotating platform consists of two 20 cm-thick cylindrical marble pieces of diameter 1.5 m, piled up together and separated by a 1 mm-thick air cushion, which allows the upper piece to rotate without solid friction around the vertical axis of rotation Oz (a sketch of the experimental setup is shown in Fig. 1a). The rotation velocity Ω can be changed

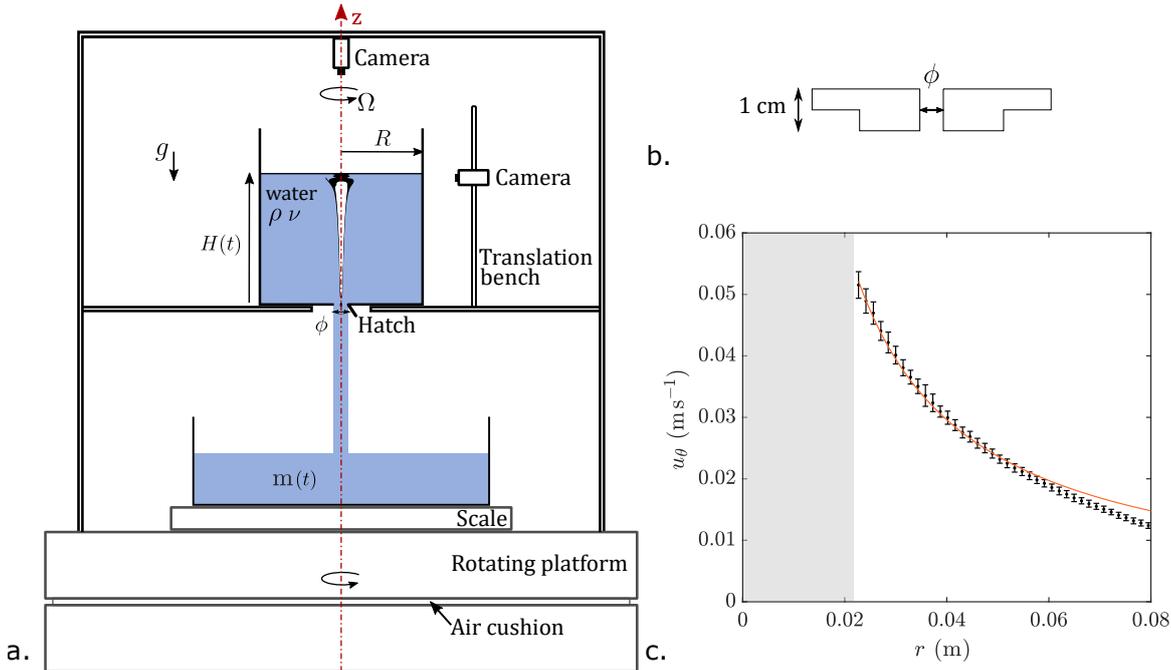


FIG. 1. Schematic drawing of (a) the experimental setup and (b) the outlet cylindrical draining pieces. (c) Typical radial dependence of the azimuthal velocity $u_\theta(r)$: experimental data from PIV measurements for $\Omega = 5$ rpm, ϕ_1 and at $t = 2000$ s (black symbols), and Rankine's model fit of equation $u_\theta = \Gamma/2\pi r$ with $\Gamma = 7.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (orange solid line). The gray area corresponds to a zone where the distorted interface prevents correct azimuthal velocity measurements.

from 0 to 10 rpm. A Plexiglas cylinder of radius $R = 145 \pm 0.1$ mm and length 390 mm whose bottom plate is drilled in its center is mounted on a metal frame in the rotating platform and is centered along Oz . The levelling is ensured with a precision of ± 0.1 deg. Three different cylindrical draining pieces are made in PVC (1 cm-thick) with internal holes of diameter $\phi_1 = 2.9 \pm 0.1$ mm, $\phi_2 = 3.5 \pm 0.1$ mm or $\phi_3 = 4.0 \pm 0.1$ mm, respectively (see Fig. 1b). The top of the draining pieces is flush with the bottom wall of the tank. An hermetic hatch leans against the bottom and can be remotely removed at $t = 0$ s, at which the initial level of water is $H_0 = 375 \pm 1$ mm. The rotation is imposed during the entire experiment and 1 h before the draining starts at $t = 0$ s, to be sure that the bulk is initially in solid body rotation. The typical spin-up time $H_0/(\nu\Omega)^{1/2}$ [37, 38] which holds for cylindrical geometry and in the presence of free surface [34, 39] is actually of the order of 10^3 s, smaller than the settling time of 1 h. The initial parabolic deformation of the interface $\Omega^2 R^2/4g$ is less than 0.3 mm, thus negligible. We use chlorinated water with a surface tension σ of $58 \pm 4 \text{ mN m}^{-1}$, density ρ of 998 kg m^{-3} and kinematic viscosity ν of $(1.03 \pm 0.02) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ at the regulated room temperature $19 \pm 1^\circ \text{C}$. The Ekman number $Ek = \nu/\Omega R^2$ is thus in the range $6.7 \times 10^{-5} \leq Ek \leq 2.3 \times 10^{-4}$.

The cumulative mass $m(t)$ of drained water at time t is measured with a precision of 0.5 g and a sampling frequency of 7 Hz. The scale is centered on Oz , such that no inertial correction is required for the weight measurement. The mean level of water in the tank is deduced as $H(t) = H_0 - m(t)/\rho\pi R^2$ within an accuracy of 1 mm. The flow rate $Q = \dot{m}/\rho$ is determined from the time derivative of m by using a Savitzky-Golay polynomial interpolation of $m(t)$ at time t over 8 successive points of measurement [40]. Two video cameras are placed in the rotating frame to track the free surface and the velocity in the bulk. From the side of the tank, every 10 s we capture the axisymmetric radial profile of the water level $h(r, t)$, which satisfies $\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R h(r, t) 2\pi r dr = H(t) \simeq h(R, t)$. The radial and azimuthal components (u_r, u_θ) of the velocity field in the rotating frame are measured in a horizontal plane located 1.5 cm above the bottom using a thin horizontal 670 nm laser sheet and a camera from above thanks to a particle image velocimetry (PIV) technique. The frame rate of the camera is adjusted between 20 and 60 Hz for the correlation of two successive images and the mean velocity field is obtained from 10 successive velocity fields. Immediately after the PIV measurement, the ambient light is automatically switched on to make the $h(r, t)$ measurement. When the water surface is deformed by the vortex core, the particle displacements in the PIV plane cannot be correctly determined close to Oz . Thus, the vortex core radius, r_c , of the vortex cannot be directly determined in our experiment. However, we can determine the vortex circulation, Γ , from the expected variation in azimuthal velocity, $\Gamma/(2\pi r)$. The Rankine model should be valid in the irrotational region outside the Stewartson boundary layer of thickness $R \times Ek^{1/4} \approx 2$ cm, thus far enough from the sidewall [29, 35]. In our experiments, the validity region is shorter due to the unsteady

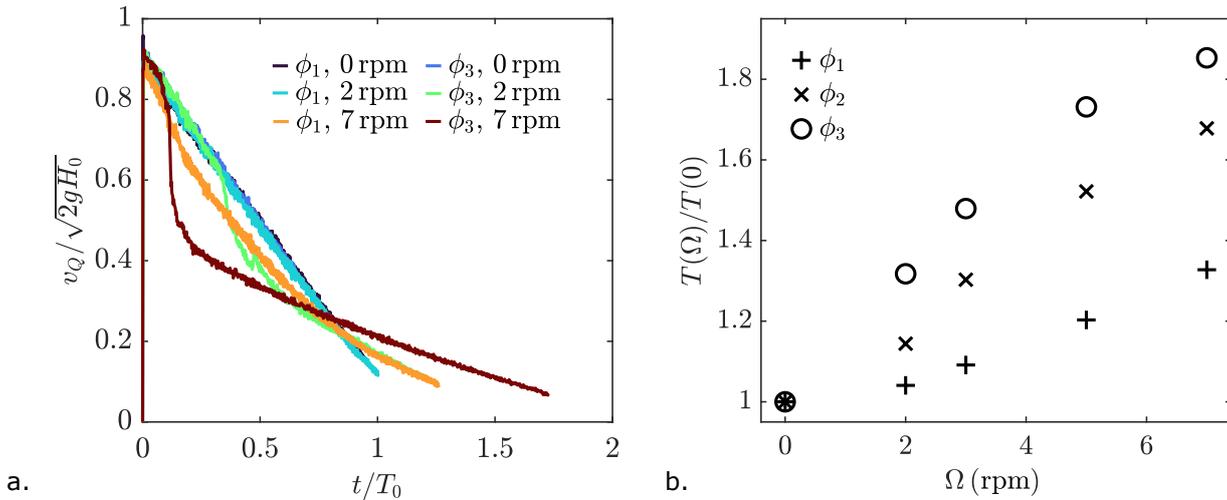


FIG. 2. a. Time evolution of $v_Q/\sqrt{2gH_0}$ for $\phi = \phi_1$ and ϕ_3 , and $\Omega = [0, 2, 7]$ rpm. The time t is scaled by $T_0 = (2R/\phi)^2 \sqrt{2H_0/g}$. b. Experimental draining time $T(\Omega)$ scaled by $T(0)$ as a function of Ω for ϕ_1 , ϕ_2 and ϕ_3 .

nature of the draining. Fig. 1c shows a typical experimental curve of $u_\theta(r)$, as well as the corresponding fitting curve that provides the value of Γ .

III. EFFECT OF ROTATION ON DRAINING

Figure 2a shows some typical time evolutions of the draining velocity $v_Q(t) = Q(t)/\pi(\phi/2)^2$ for different rotation velocity Ω and hole diameter ϕ , where v_Q and t are made dimensionless with the initial velocity value $\sqrt{2gH_0}$ and total draining time $T_0 = (2R/\phi)^2 \sqrt{2H_0/g}$ for an ideal Torricelli's law, respectively. In such a dimensionless plot, an ideal Torricelli draining would follow a straight line of slope -1 starting from (0,1). Without rotation, the draining curves are straight lines with a correction coefficient $\beta = 0.90 \pm 0.03$ close to 1 as the hole diameter ϕ is of the order of the capillary length $\ell_c = (\gamma/\rho g)^{1/2} \simeq 3$ mm [9].

When the rotation is large enough, the draining curves are no more straight lines but a drastic reduction of the draining velocity appears during the discharge. This reduction leads to a significant increase of the experimental draining time T for increasing Ω as shown in Fig. 2b for all Ω and ϕ . The time $T(\Omega)$, defined as the time for which 99% of the initial water level has been drained, increases with Ω by a factor that increases with increasing ϕ , up to twice $T(0)$ for the largest Ω and ϕ . This phenomenon is observed to be closely related to the deformation of the free surface during the discharge.

IV. DRAINING MODEL FROM SURFACE DEFORMATION

Typical photographs of the interface evolution are displayed in Fig. 3a-c for $\Omega = 2$ rpm and ϕ_2 . Initially, the interface remains flat and the draining curve does not deviate from the Torricelli's law, with $v_Q = v_{\beta T}$, even when the vortex is well formed in the bulk. The free surface then slightly deepens above the hole (≈ 3 mm in Fig. 3a) as the vorticity concentrates, which is accompanied by a slight decrease of the draining velocity ($\approx 1\%$ in Fig. 3e). The air core continues to deepen (≈ 2 cm in Fig. 3b), with now a significant drop in the draining velocity ($\approx 4\%$ in Fig. 3e).

The reduction of the draining velocity v_Q compared to the usual value $v_{\beta T}$ can be understood by considering the momentum balance equations in the rotating frame. When neglecting surface tension effects [36], the pressure distribution p in the bulk can be considered as hydrostatic:

$$p(r, z) = p_0 + \rho g [h(r) - z], \quad (1)$$

where p_0 is the atmospheric pressure at the free surface.

Following Milne-Thomson [10] and Andersen *et al.* [29], the viscous terms in the momentum equation can be neglected. Under the quasi-static approximation, the momentum equation integrated over the whole fluid domain \mathcal{D}

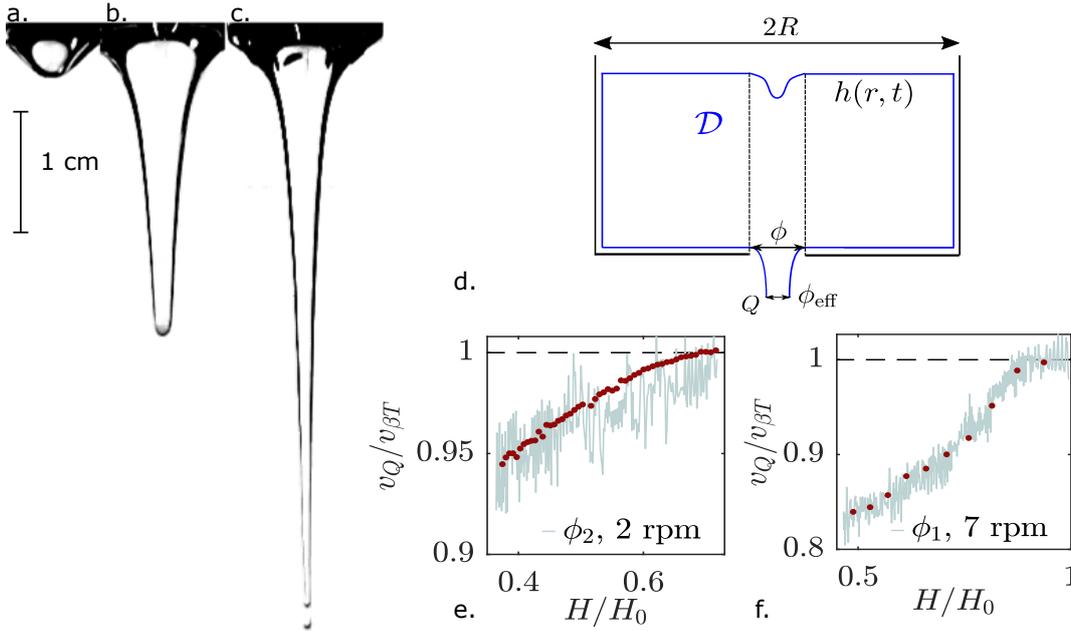


FIG. 3. (a,b,c) Photographs of the interface during the emptying for $\Omega = 2$ rpm and ϕ_2 at (a) $H(t = 396 \text{ s})/H_0 = 0.66$, (b) $H(t = 696 \text{ s})/H_0 = 0.46$, and (c) $H(t = 1006 \text{ s})/H_0 = 0.3$. At that moment, bubbles are formed and carried down the outlet from the tip of the vortex. (d) Schematic drawing of the tank and fluid domain \mathcal{D} (in blue), which includes the volume of water in the tank and the contracted jet at the outlet. (e,f) Draining velocity v_Q scaled by $v_{\beta T}$ as a function of the instantaneous water height H scaled by its initial value H_0 for (e) ϕ_2 and $\Omega = 2$ rpm, and (f) ϕ_1 and $\Omega = 7$ rpm. The gray curve corresponds to mass measurements and the red points to Eq. (4) with interface shape measurements. The black dashed line shows the reference value $v_Q = v_{\beta T}$.

of surface S_c (see Fig. 3d) reduces to

$$\mathbf{e}_z \cdot \iint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = -2\pi\rho g \int_0^R h(r)r dr - \mathbf{e}_z \cdot \iint_{S_c} p d\mathbf{S} \quad (2)$$

along the z -axis, the projection of the centrifugal and Coriolis forces being zero following this axis. By considering the uniform draining velocity v_{eff} a little below the outlet where the jet section is $s_{\text{eff}} = \pi(\phi_{\text{eff}}/2)^2$ and where the pressure is p_0 , Eq. (2) yields:

$$\rho v_{\text{eff}}^2 s_{\text{eff}} = 2\pi\rho g \int_0^{\phi/2} h(r)r dr. \quad (3)$$

In the simple case without surface deformation, when $h(r, t) = H(t)$, the *vena contracta* should correspond to $s_{\text{eff}}/s = (\phi_{\text{eff}}/\phi)^2 = 1/2$ as recalled in the introduction from Bernoulli's theorem [10]. In the more general case with surface deformation, the draining velocity takes the form:

$$v_Q(t) = \beta \sqrt{\frac{4g}{(\phi/2)^2} \int_0^{\phi/2} h(r, t)r dr}. \quad (4)$$

This general equation relates the draining velocity to the shape of the free surface above the hole without any modelling of the interface shape. When the free surface deepens locally due to a strong enough bathtub vortex, the draining is thus expected to be decreased accordingly. This prediction can be tested in our well controlled rotating experiments.

Figures 3e-f show the agreement between the draining velocity calculated from Eq. (4) using the experimental profiles of the interface and the draining velocity measured by the mass derivative for two cases with different Ω and ϕ . While the Torricelli's law systematically overestimates the draining velocity by up to 20%, the present model remains within a 3% range. When the interface starts to be destabilized with some oscillations due to bubble entrainment from the

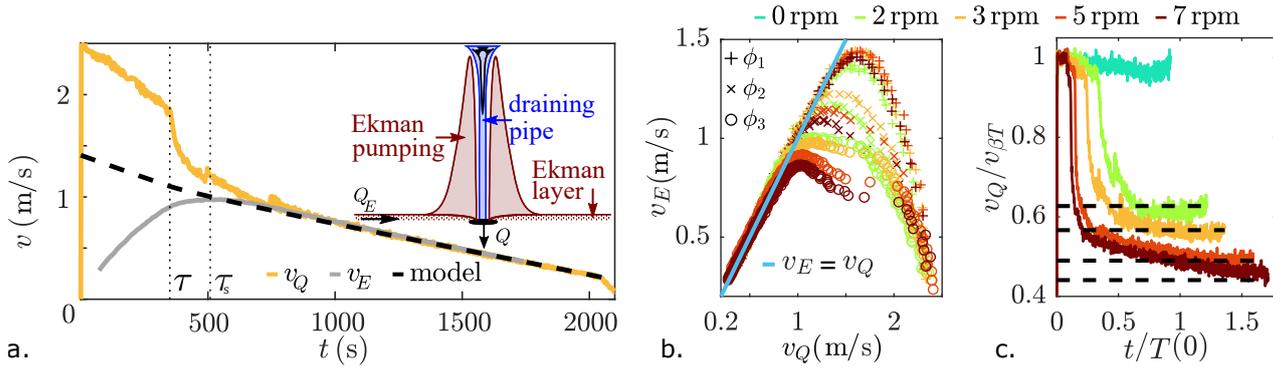


FIG. 4. (a) Time evolution of the draining velocity $v_Q(t)$ (orange curve) and the Ekman draining velocity $v_E(t) = \Gamma(t)\delta/(2\pi(\phi/2)^2)$ (gray curve) for $\Omega = 3$ rpm and ϕ_3 . The black dashed line corresponds to Eq. (9). The two vertical dotted lines correspond to the time τ at which the draining velocity significantly deviates from the usual Torricelli's velocity and to the time τ_s at which the super-critical regime appears. The inset shows the flow structure in the steady case: the Ekman boundary layer and pumping (in red), the draining pipe (in blue). (b) Evolution of the Ekman draining velocity v_E with the total draining velocity v_Q for all Ω and ϕ . The blue line corresponds to $v_E = v_Q$. (c) Time evolution of v_Q scaled by $\beta\sqrt{2gH}$ for ϕ_3 and $\Omega = [0, 2, 3, 5, 7]$ rpm, where the time t is scaled by $T(0)$. The dashed lines correspond to the values from Eq. (9) for $\Omega \neq 0$.

tip (Fig. 3c), $h(r, t)$ can no longer be measured with confidence. This phenomenon of bubble entrainment is well known in the literature [41, 42].

Let us emphasize that Eq.(4) is established for the entire emptying process, regardless of whether the Ekman boundary layer is established or not. When the boundary layer is established, the flow structure is comparable to that observed under steady state conditions, as illustrated in the inset of Fig. 4a. The water flux through the Ekman layer at the bottom of the container of thickness $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$ is $Q_E = \Gamma\delta/2 \simeq Q$ [27, 29], giving us a useful link between the discharge flow rate Q and the circulation Γ . A typical time evolution of the Ekman draining velocity $v_E(t) = Q_E(t)/\pi(\phi/2)^2$ is shown in Fig. 4a; v_E first increases, reaches a maximum and eventually decreases. After v_E has reached its maximum value ($t \approx 500$ s), the total draining velocity v_Q abruptly decreased at $\tau \approx 350$ s. Then, when the gaseous core extends to the outlet section at $\tau_s \approx 500$ s, v_Q almost merges with v_E and both decrease linearly in the final stage of the draining ($t \gtrsim 700$ s). This important result is common to all experiments with rotation as shown in Fig. 4b, where v_E is plotted as a function of v_Q : at the first stage of each experiment, v_E increases when v_Q decreases, but the remarkable observation is that all the curves collapse onto the straight line $v_E = v_Q$ in the final stage of the draining. In our experiments, this last stage occurs after a transient time ranging approximately from 11 to 23 min which accounts for one quarter to one half of the total emptying time.

V. SUPER-CRITICAL REGIME

In most of our experiments, at a critical stage of the draining, the gaseous core extends to the outlet section. This so-called super-critical regime [31] happens faster the greater the rotation and the larger the hole size. In this regime, the interface shape should be governed by the circulation of the vortex Γ [43]:

$$h(r, t) = h(R, t) - \frac{\Gamma(t)^2}{8\pi^2 gr^2}, \quad (5)$$

for $\phi_g/2 \leq r \leq R$, where $\phi_g(t) = \sqrt{\Gamma(t)^2/[2\pi^2 gh(R, t)]}$ is the diameter of the gas core at the outlet. The model presented in Eq. (5) is not intended to perfectly fit the shape of the interface, which has been the subject of many studies [31, 44]. Instead, it serves as an intermediary for predicting the draining velocity based on characteristic quantities of the problem (H , Ω , ν , ϕ and β). Equations (4) and (5) yield:

$$v_Q(t) = \beta \sqrt{\frac{4g}{(\phi/2)^2} \int_{\phi_g/2}^{\phi/2} \left(h(R, t) - \frac{\Gamma(t)^2}{8\pi^2 gr^2} \right) r dr}, \quad (6)$$

where $v_Q = Q/\pi(\phi/2)^2$ represents the average velocity calculated over the entire emptying section, including the gaseous core, and can therefore be directly compared to the experimentally measured draining velocity of the container.

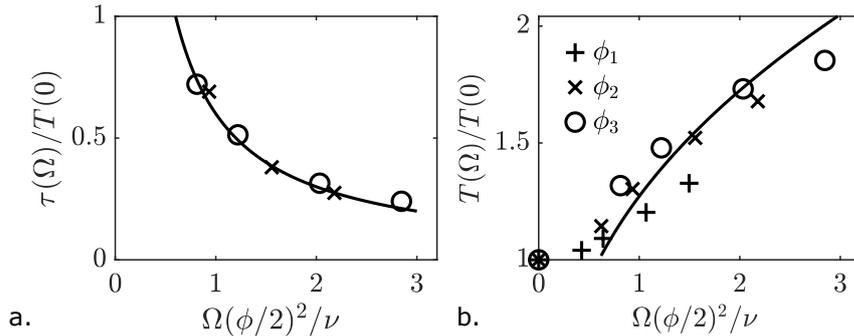


FIG. 5. (a) Transition time τ and (b) draining time T , both normalized by $T(0)$, as a function of $\Omega(\phi/2)^2/\nu$. Same symbols as in Fig. 2b. The solid lines correspond (a) to the best power fit $\tau/T(0) = 0.6\nu/\Omega(\phi/2)^2$ of the data and (b) to the estimate $T/T(0) = \tau/T(0) + (1 - \tau/T(0))(v_Q/v_{\beta T})^{-1}$, with $\tau/T(0)$ given by the power fit of (a) and $v_Q/v_{\beta T}$ by Eq. (9) with $\beta = 0.9$.

Integrating Eq. (6) yields:

$$v_Q(t) = \beta \sqrt{2gh(R,t)} \left[1 + \frac{\Gamma^2}{2gh(R,t)\pi^2\phi^2} \left(-1 + 2 \ln \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{2gh(R,t)}\pi\phi} \right) \right) \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Considering that the total flow rate $Q \simeq \Gamma\delta/2$, Eq. (7) reads:

$$A \left(\frac{v_Q}{v_T^*} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{\beta^2 A} - 2 \ln \left(A^{1/2} \frac{v_Q}{v_T^*} \right) \right] - 1 = 0, \quad (8)$$

where $v_T^* = \sqrt{2gh(R,t)} \simeq v_T$ and $A = (\phi/2\delta)^2$ is a dimensionless parameter corresponding to the ratio between the outlet radius $\phi/2$ and the thickness of the boundary layer $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$. The solution of Eq. (8) reads

$$\frac{v_Q}{v_{\beta T}} = \frac{1}{\beta \sqrt{-AW_{-1}(-e^{-(1+1/\beta^2 A)})}}, \quad (9)$$

where W_{-1} is the analytic continuation of the product log function. The draining velocity v_Q is thus expected to be proportional to the Torricelli's velocity $v_{\beta T}$ in the super-critical regime with a factor depending only on the dimensionless parameter $A = \Omega(\phi/2)^2/\nu = (\phi/2R)^2 Ek^{-1}$. The values of v_Q predicted by Eq. (9) for ϕ_3 and $\Omega = 3$ rpm is shown with dashed line in Fig. 4a and matches very well the experimental data when $v_Q = v_E$. The values of $v_Q/v_{\beta T}$ from Eq. (9) compared to experimental measurements are also shown for ϕ_3 and different Ω in Fig. 4c. The agreement is very good as shown by the plateau values observed for the experimental measurements in the final discharge regime. These plateau values, ranging from 0.62 to 0.43 as Ω increases, mean that the discharge is strongly reduced by the rotation-induced vortex. This strong reduction appears earlier as Ω increases.

The time τ at which the draining velocity significantly deviates from the usual Torricelli's velocity, as shown in Fig. 4a, is displayed in Fig. 5a for different Ω and ϕ as a function of $\Omega(\phi/2)^2/\nu$. All data are clustered on a master curve whose best fit is $\tau/T(0) = 0.6(\Omega(\phi/2)^2/\nu)^{-1}$. This implies that the draining time should not be affected significantly by rotation ($T(\Omega) \simeq T(0)$) if $\tau/T(0) > 1$, which corresponds to the condition $\Omega(\phi/2)^2/\nu < 0.6$. When $\Omega(\phi/2)^2/\nu > 0.6$, an estimate of the draining time can be inferred by considering the fraction of draining time in the super-critical regime, which should correspond to $1 - \tau/T(0)$: $T(\Omega)/T(0) \simeq \tau/T(0) + (1 - \tau/T(0))(v_Q/v_{\beta T})^{-1}$. This prediction, shown by a solid line in Fig. 5b, is in good agreement with all the experimental data of Fig. 2b, which means that $\Omega(\phi/2)^2/\nu$ is the relevant parameter and that the present model catches the main physics.

VI. DISCUSSION AND CONCLUSION

The present experimental study shows that the law of discharge for a water tank obeys a generalized Torricelli's law in which the mean water level must be replaced by the local level above the outlet section. The increase in the vortex strength increases the deformation of the free surface and consequently decreases the draining velocity and increases the draining time. A model that considers draining mainly through the Ekman boundary layers predicts

that the increase in the emptying time for a rotating tank is mainly governed by the non-dimensional parameter $\Omega(\phi/2)^2/\nu$ which writes also as $(\phi/2R)^2Ek^{-1}$, involving the Ekman number $Ek = \nu/\Omega R^2$. The typical time at which the unsteady draining starts to deviate from Torricelli's law scales as $(R^2/\phi^4)(\nu/\Omega)(H_0/g)^{1/2}$, which is very different from the typical spin-up time $H_0/(\nu\Omega)^{1/2}$. Our model predictions are in good agreement with our experimental measurements (with deviations of less than 3%), even though we did not account for the effects of surface tension in our model. As a result, the pressure term in Eq. (1) is overestimated, and the draining velocity obtained with our model is slightly underestimated. However, we believe that the effect of surface tension in our experiments is second order. Gas entrainment (see Fig. 3c), which is an instability related to surface tension, is also not taken into account in our model. However, this phenomenon is only present for a duration that is not representative of our experiments. The consideration of these different effects on the draining velocity could be an interesting perspective of our work.

In order to be able to predict the draining law in the super-critical regime, we used the model Eq. (5) for the interface shape. Such a model would not be suitable in the sub-critical regime, where the interface has not yet reached the outlet. In such sub-critical regime, another model could be used instead of Eq. (5) to model the interface shape, also based on the Rankine model, but this would have very limited relevance to our experiments. Indeed, in the sub-critical regime, the boundary layers are not yet established, since they only become fully established at the end of the discharge, when the regime is most usually super-critical.

For larger scale experiments with larger outlet section, we believe that the present model Eq. (4) would still be valid. For smaller outlet section, we expect surface tension effects to be non negligible so that the present model should be refined accordingly.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to warmly acknowledge F. Moisy, W. Herreman, M. Rabaud and A. Archer for inspiring discussions, and T. Pichon, L. Cherfa and N. Baudet for their technical support.

-
- [1] E. Torricelli, *Opera Geometrica, De sphaera et Solidis Spharalibus ; De Motu Graviorum ; De Dimensione Parabolae* (Amadoro Massa & Lorenzo de Landis, Florence, 1644).
 - [2] D. Bernoulli, *Hydrodynamica: sive de viribus et motibus fluidorum commentarii* (1738).
 - [3] J. Boussinesq, "Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi," *C. R. Acad. Sciences (Paris)* **114**, 704–710 (1870).
 - [4] H. Judd and R. S. King, "Some experiments on the frictionless orifice," *Eng. News* **56**, 326–331 (1906).
 - [5] G. F. Davidson, "Experiments on the flow of viscous fluids through orifices," *Proc. Royal Soc. London A*, **89**, 91–99 (1913).
 - [6] G. L. Tuve and R. E. Sprengle, "Orifice discharge coefficients for viscous liquids," *Instruments* **6**, 210–206 (1933).
 - [7] F. W. Medaugh and G. D. Johnson, "Investigation of the discharge and coefficients of small circular orifices," *Civil Eng.* **10**, 422–424 (1940).
 - [8] C. Clanet, "Clepsydrae, from Galilei to Torricelli," *Phys. Fluids* **12**, 2743–2751 (2000).
 - [9] J. Ferrand, L. Favreau, S. Joubaud, and E. Freyssingheas, "Wetting effect on Torricelli's law," *Phys. Rev. Lett.* **117**, 248002 (2016).
 - [10] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics* (Dover, New York, 1996).
 - [11] G. Möller, M. Detert, and R. Boes, "Air entrainment due to vortices: State-of-the-art," in *Proceedings of the 2nd Congress of the European Division of IAHR, 27-29 June 2012, Munich, Germany* (European Division of IAHR, 2012) pp. Paper-B16.
 - [12] G. E. Hecker, "Fundamentals of vortex intake flow," in *Swirling flow problems at intakes* (Routledge, 2017) pp. 13–38.
 - [13] J. Knauss, *Swirling flow problems at intakes* (Routledge, 2017).
 - [14] D. Tenchine, C. Fournier, and Y. Dolias, "Gas entrainment issues in sodium cooled fast reactors," *Nuclear Eng. Design* **270**, 302–311 (2014).
 - [15] B. Moudjed, J. Excoffon, R. Riva, and L. Rossi, "Experimental study of gas entrainment from surface swirl," *Nuclear Eng. Design* **310**, 351–362 (2016).
 - [16] H. Bhatia, U. Bieder, and D. Guenadou, "Rankine-vortex model based assessment of cfd methods for simulating the effect of gas entrainment observed in the hot-pool of sodium cooled fast breeder reactors," *Progr. Nuclear Energy* **137**, 103794 (2021).
 - [17] A. H. Shapiro, "Bath-tub vortex," *Nature* **196**, 1080–1081 (1962).
 - [18] L. M. Trefethen, R. W. Bilger, P. T. Fink, R. E. Luxton, and R. I. Tanner, "The bath-tub vortex in the southern hemisphere," *Nature* **207**, 1084 (1965).
 - [19] L. Foucault, "Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule," *C. R. Acad. Sciences (Paris)* **32**, 135–138 (1851).
 - [20] J. Boisson, D. Cébron, F. Moisy, and P.-P. Cortet, "Earth rotation prevents exact solid-body rotation of fluids in the laboratory," *EPL (Europhysics Letters)* **98**, 59002 (2012).

- [21] H. A. Einstein and H. Li, “Steady vortex flow in a real fluid,” Proc. Heat Transf. Fluid Mech. Institute, Stanford University, 33–43 (1951).
- [22] W. S. Lewellen, “A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation,” J. Fluid Mech. **14**, 420–432 (1962).
- [23] H. J. Lugt, *Vortex flow in nature and technology* (Wiley-Interscience, New York, 1983).
- [24] T. S. Lundgren, “The vortical flow above the drain-hole in a rotating vessel,” J. Fluid Mech. **155**, 381–412 (1985), publisher: Cambridge University Press.
- [25] S. Shingubara, K. Hagiwara, R. Fukushima, and T. Kawakubo, “Vortices around a sinkhole: phase diagram for one-celled and two-celled vortices,” J. Phys. Soc. Japan **57**, 88–94 (1988).
- [26] L. K. Forbes and G. C. Hocking, “The bath-plug vortex,” J. Fluid Mech. **284**, 43–62 (1995).
- [27] A. Andersen, T. Bohr, B. Stenum, J. J. Rasmussen, and B. Lautrup, “Anatomy of a bathtub vortex,” Phys. Rev. Lett. **91**, 104502 (2003).
- [28] P. A. Tyvand and K. B. Haugen, “An impulsive bathtub vortex,” Phys. Fluids **17**, 062105 (2005).
- [29] A. Andersen, T. Bohr, B. Stenum, J. Juul Rasmussen, and B. Lautrup, “The bathtub vortex in a rotating container,” J. Fluid Mech. **556**, 121 (2006).
- [30] Y. A. Stepanyants and G. H. Yeoh, “Burgers–Rott vortices with surface tension,” Z. Angew. Math. Phys. **59**, 1057–1068 (2008).
- [31] Y. A. Stepanyants and G. H. Yeoh, “Stationary bathtub vortices and a critical regime of liquid discharge,” J. Fluid Mech. **604**, 77–98 (2008).
- [32] L. Bøhling, A. Andersen, and D. Fabre, “Structure of a steady drain-hole vortex in a viscous fluid,” J. Fluid Mech. **656**, 177–188 (2010).
- [33] S. Yukimoto, H. Niino, T. Noguchi, R. Kimura, and F. Y. Moulin, “Structure of a bathtub vortex: importance of the bottom boundary layer,” Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 323–327 (2010).
- [34] Y.-C. Chen, S.-L. Huang, Z.-Y. Li, C.-C. Chang, and C.-C. Chu, “A bathtub vortex under the influence of a protruding cylinder in a rotating tank,” J. Fluid Mech. **733**, 134–157 (2013).
- [35] M. R. Foster, “Asymptotic theory for a bathtub vortex in a rotating tank,” J. Fluid Mech. **749**, 113–144 (2014).
- [36] A. Duinmeijer, G. Oldenziel, and F. Clemens, “Experimental study on the 3D-flow field of a free-surface vortex using stereo PIV,” J. Hydr. Res. **58**, 105–119 (2020).
- [37] H. P. Greenspan and L. N. Howard, “On a time-dependent motion of a rotating fluid,” J. Fluid Mec. **17**, 385–404 (1963).
- [38] E. R. Benton and A. Clark Jr, “Spin-up,” Ann. Rev. Fluid Mech. **6**, 257–280 (1974).
- [39] W. Yang, I. Delbende, Y. Fraigneau, and L. Martin Witkowski, “Large axisymmetric surface deformation and dewetting in the flow above a rotating disk in a cylindrical tank: spin-up and permanent regimes,” Physical Review Fluids **5**, 044801 (2020).
- [40] A. Savitzky and M. J. E. Golay, “Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures.” Analytical chemistry **36**, 1627–1639 (1964).
- [41] R. Bergmann, A. Andersen, D. Van der Meer, and T. Bohr, “Bubble pinch-off in a rotating flow,” Phys. Rev. Lett. **102**, 204501 (2009).
- [42] K. Ito, H. Ohshima, T. Sakai, and T. Kunugi, “Cfd-based evaluation of interfacial flows,” in *Comp. Fluid Dyn.* (IntechOpen, 2010) pp. 133–156.
- [43] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, and C. D. Mitescu, *Physical hydrodynamics* (Oxford University Press, 2015).
- [44] Y.-L. Chen, C. Wu, M. Ye, and X.-M. Ju, “Hydraulic characteristics of vertical vortex at hydraulic intakes,” J. Hydrodyn. **19**, 143–149 (2007).

4.3 Quelques résultats complémentaires sur la vitesse de vidange

Remarquons que l'Eq. (4) de la section 4.2 n'est autre que l'Eq. (3.16) dérivée en Section 3.3 en régime de vidange stationnaire. L'Eq. (3.16) est ici appliquée à un régime de vidange instationnaire. Les résultats de la Section 4.2, ainsi que la Figure 4.1, montrent que l'Eq. (3.16) reste pertinente pour prédire la vitesse de vidange instationnaire à partir du profil instantané de l'interface.

La vitesse prédite par l'Eq. (3.16) à partir des profils d'interface (points rouges) s'écarte des vitesses mesurées (courbes grises) sur les Figures 4.1c-d lorsque la pointe de l'interface commence à osciller, pour des hauteurs d'eau critiques pour l'arrachement de bulles (cf. Section 3.4). Le modèle (3.16), qui suppose une interface stationnaire et néglige la tension de surface, n'est plus capable dans ce cas de prédire correctement la vitesse de vidange.

La Figure 4.2 montre une représentation complète des courbes expérimentales représentant les évolutions caractéristiques de la hauteur d'eau et de la vitesse de vidange dans le cas de l'étude instationnaire.

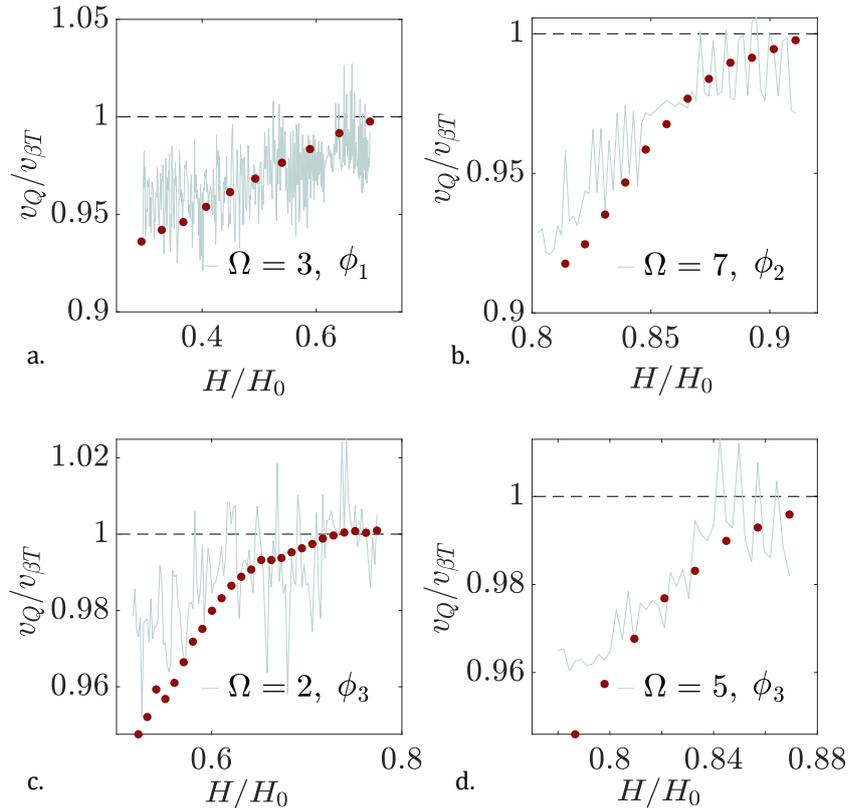


FIGURE 4.1 : (a-d) Vitesse de vidange v_Q adimensionnée par $v_{\beta T}$ en fonction de la hauteur d'eau instantanée H adimensionnée par sa valeur initiale $H(t = 0 s) = H_0$. La courbe grise est calculée à partir des mesures de masse et les points rouges correspondent à l'équation (4), ils sont calculés à partir des mesures du profil de l'interface. La ligne pointillée noire indique la valeur de référence $v_Q = v_{\beta T}$

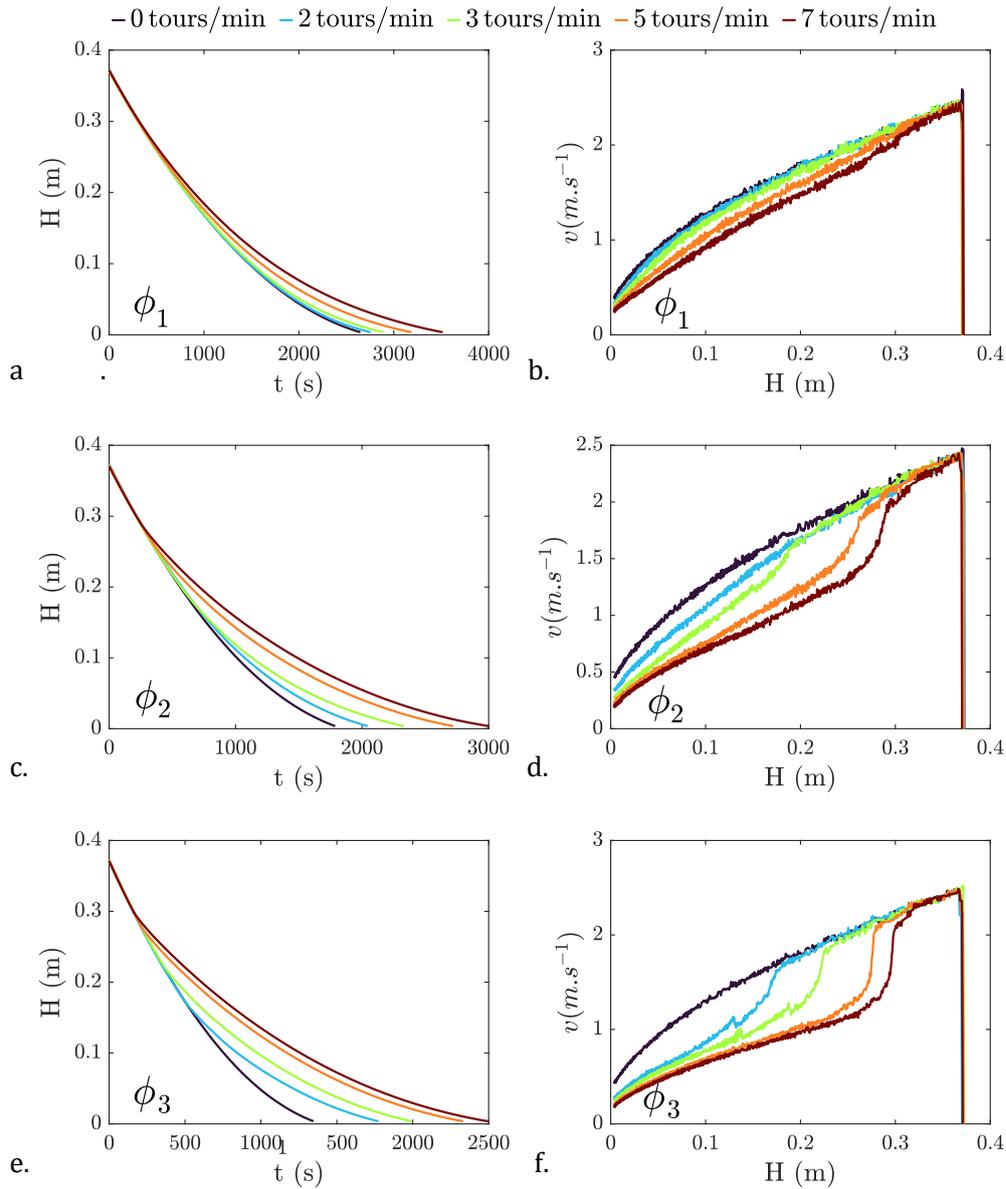


FIGURE 4.2 : (a,c,e) évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps pour (a) ϕ_1 , (c) ϕ_2 et (e) ϕ_3 respectivement. (b,d,f) évolution de la vitesse de vidange en fonction de la hauteur d'eau pour (b) ϕ_1 , (d) ϕ_2 et (f) respectivement. Les couleurs correspondent aux vitesses de rotations indiquées dans la légende.

4.4 Structure de l'écoulement

Nous avons décrit dans la Section 3.2.2 le phénomène de pompage d'Ekman en régime de vidange stationnaire. Dans la section 4.4.1, nous montrons de quelle manière le pompage est affecté par l'instationnarité de la vidange. Dans la Section 4.4.2, nous verrons que, à la différence de ce qui était observé dans le régime stationnaire (cf. Section 3.2.1), le modèle de Foster ne permet plus de rendre compte des vitesses azimutales dans les couches limites de Stewartson en vidange instationnaire, en dépit du caractère quasi-statique de la vidange.

4.4.1 Le phénomène de pompage

Le phénomène de pompage des couches limites d'Ekman dans le régime instationnaire est illustré en Fig.4.3. L'apparition des structures nécessite un temps de latence associé à l'établissement du tourbillon et des couches limites d'Ekman. Ainsi, il est nécessaire d'attendre environ 6 min avant de voir apparaître les premières structures. Au fil du temps, ces structures s'élèvent de plus en plus haut autour du cœur du tourbillon, jusqu'à atteindre l'interface après une vingtaine de minutes. La variation continue de l'intensité du tourbillon, de la hauteur d'eau et du débit de vidange crée des structures imbriquées dans un feuilletage complexe.

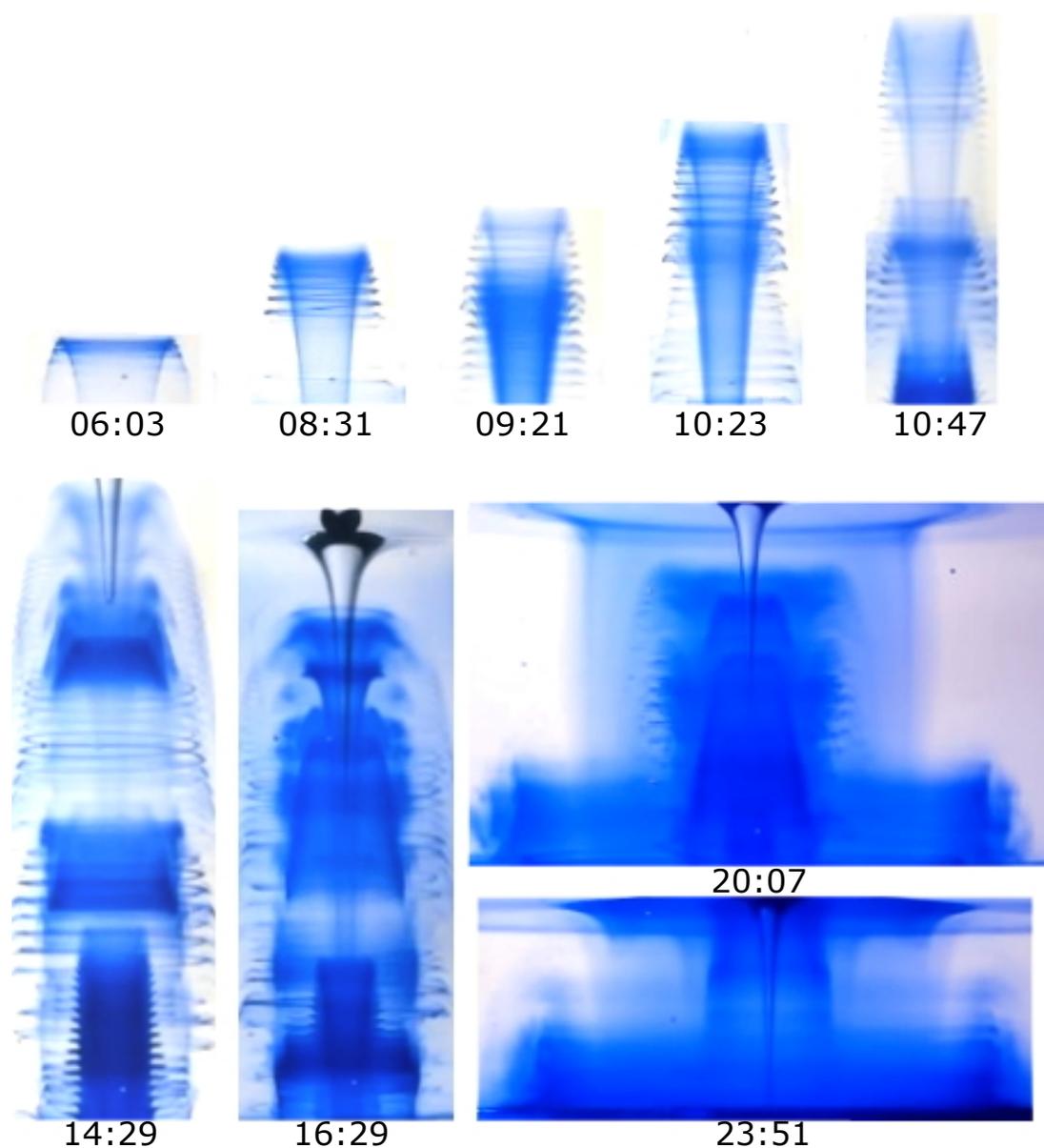


FIGURE 4.3 : Évolution des structures au fil du temps pour le cas $\Omega = 2$ tours/min et $\phi = \phi_2$.

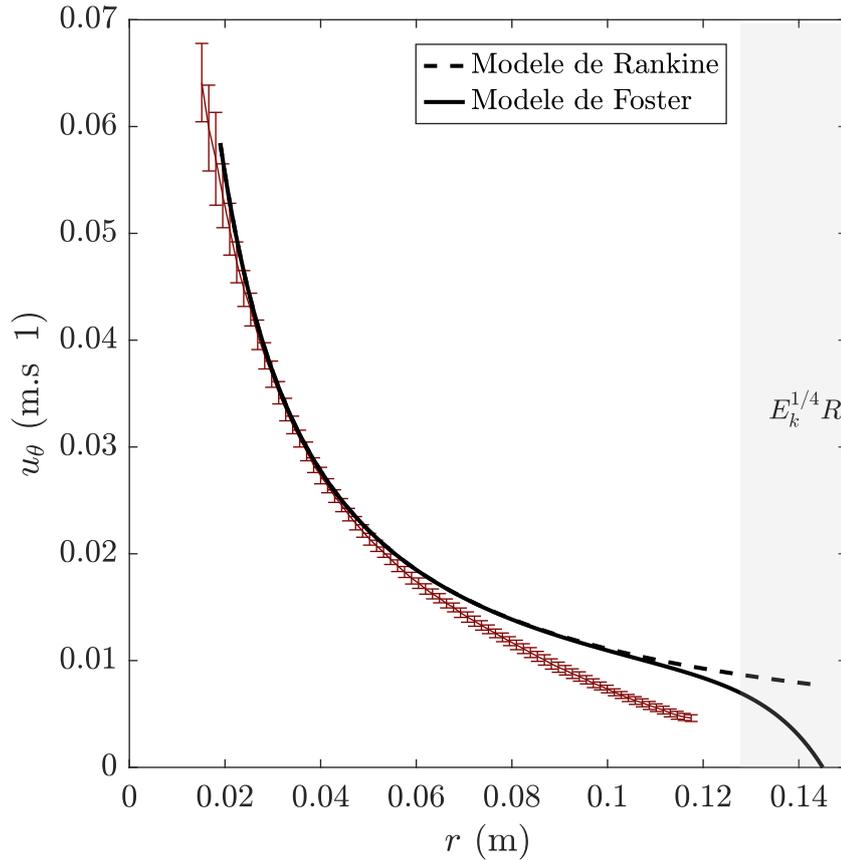


FIGURE 4.4 : Exemple de vitesses azimutales en fonction du rayon. Les modèles de Rankine (pointillés) et Foster (trait plein) sont représentés en noir. Les données expérimentales associées sont en rouge. L'épaisseur de la couche limite est matérialisée par la zone grisée.

4.4.2 Les couches limites de Stewartson

Un exemple de profil de vitesse azimutal est donné à la Figure 4.3. En comparaison du régime stationnaire, le régime instationnaire présente une divergence plus prononcée par rapport au modèle de Rankine et de Foster pour des rayons situés bien en dehors des couches limites de Stewartson. Cette déviation est intrinsèquement liée à la nature instationnaire de la vidange, qui engendre un tourbillon non établi et par conséquent une région d'écoulement potentiel moins étendue. Il convient également de souligner que les conditions aux limites, qui ont conduit à l'élaboration de l'équation (3.5), diffèrent dans ce contexte. Une modélisation du tourbillon de vidange instationnaire, par les modèles présentés au Chapitre 1, reste toutefois pertinente dans une région adéquate du volume fluide.

CHAPITRE 5

Vidange instationnaire avec
couvercle

5.1 Introduction

Bien que la vidange d'une bouteille d'eau idéale sans rotation fasse l'objet de nombreuses études [21, 115, 116], le cas avec rotation est, à notre connaissance, très peu référencé. C'est pourtant un cas d'applications industrielles intéressant, en particulier lorsqu'il s'agit de déterminer le régime de vidange optimale d'un réservoir.

Nous avons réalisé l'étude expérimentale de la vidange d'un réservoir cylindrique avec un couvercle hermétique dans un référentiel en rotation. Nous avons constaté l'existence d'une vitesse de rotation optimale pour la vidange. Ceci implique qu'il n'est pas toujours plus efficace de faire tourner la bouteille d'eau. Trois régimes de vidange différents sont identifiés, à savoir (i) un régime de bulles, (ii) un régime de jet d'air tourbillonnant et (iii) un régime de vidange tourbillonnaire. Le régime de bulles, qualifié par onomatopée de régime de « glouglou » [22] présente les caractéristiques du régime observé sans mise en rotation de la plateforme. L'ajout d'un couvercle hermétique au-dessus du récipient modifie, en effet, drastiquement la dynamique de la vidange classique de Torricelli. La pression à la surface libre, qui cesse d'être la pression atmosphérique, doit s'adapter dynamiquement à la quantité de fluide perdu et à la masse d'air ingérée par la formation périodique de bulles. Le régime de vidange tourbillonnaire, présentant la forme du tourbillon de notre baignoire (cf. Chapitre 3 et 4), apparaît lorsque le vortex devient suffisamment intense pour déformer l'interface jusqu'à l'embouchure de la bouteille (régime super-critique [97]). Le gaz jusqu'alors emprisonné dans le récipient se retrouve soumis à la pression atmosphérique. Enfin, nous avons identifié un régime transitoire qui ne semble pas avoir été décrit dans la littérature. Dans ce régime, l'interface présente la forme caractéristique d'un jet d'air très instable qui n'atteint pas l'interface et ne permet pas l'équilibre entre la pression atmosphérique et la pression dans le volume d'air. Ces trois régimes, caractérisés par la forme de l'interface air-eau, ont des efficacités de vidange différentes. Pour comprendre l'évolution du temps de vidange en fonction de la vitesse de rotation de la plateforme, il est alors nécessaire d'étudier la durée de vie de chaque régime et les transitions entre les régimes.

Nous présentons ici l'essentiel de nos résultats dans un article en cours de revue dans *Physical Review Fluids*.

5.2 Article soumis

How does rotation change the emptying of an ideal bottle of water?

A. Caquas,^{1,2} L.R. Pastur,¹ and A. Genty²

¹*Unité de Mécanique, ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, France*

²*Université Paris-Saclay, CEA, Service de Thermo-hydraulique et de Mécanique des Fluides, Gif-sur-Yvette F-91191, France*

We are carrying out the experimental study of the emptying of an hermetically sealed cylindrical tank in a rotating frame. We determine the optimal rotational velocity for the tank, which minimizes the emptying time. Moreover, there exists a critical rotation velocity at which the emptying time exceeds that of the non-rotating case, depending on the relative duration of each of the three emptying regimes identified in this flow, namely (i) a bubble regime, (ii) a vortical air jet regime and (iii) a bathtub vortex regime. The three regimes, easily distinguished by the shape of the air-water interface, have different draining velocities. The lifetime of each regime, as well as the transitions between them, depend on both the water level and the rotating velocity of the platform.

I. INTRODUCTION

About 400 years ago, Torricelli [1] formulated the law describing the emptying of a vessel. Since then, numerous studies have been conducted on free-surface tank draining, resulting in refined versions of Torricelli's law based on experimental findings and adapted to a wider range of configurations [2–5].

While the industrialization of glass bottles began contemporaneously with Torricelli's discovery, the emptying of bottles [6–9], sealed cylinders [10–16], and cubic tanks [17–19] was first studied only 35 years ago [20]. Many studies have investigated the emptying time of sealed tanks [6, 7, 10–13, 20] and the influence of tank and outlet size and geometry [6, 9–12, 20], inclination [6, 8, 9, 11, 20], temperature [18, 20], surface tension [9] and more recently on the influence of bottle perforation [21]. Furthermore, the periodic occurrence of bubbles during tank draining, which is commonly known as the "glug-glug" phenomenon, has been described and modeled in many works [13, 14, 17, 22–24].

Spinning a bottle of water to empty it faster or creating a "tornado in a bottle" [25] are well-known experiments to the general public. Vortices, which promote fluid mixing, can be desirable [26] or, on the contrary, undesirable because it can entrain air and damage equipment, particularly pumps, and pose safety problems in nuclear facilities [27–29]. Moreover, as will be illustrated in the following sections, the formation of a vortex has a significant impact on tank emptying and on recirculation systems that use buffer tanks, which drastically affects the emptying time.

Although there exists an extensive literature on bathtub vortices at atmospheric pressure [5, 30–46], surprisingly, to the best of our knowledge, no quantitative studies have been investigated on the specific case of emptying a rotating water bottle [7, 22].

In this article, we fill this gap and show the many connections that exist between emptying a rotating water bottle and the vortical emptying of open-air tanks. To do so, we perform extensive experimental measurement on a sealed cylindrical tank mounted on a rotating platform. We describe the different stages and regimes that affect the emptying flow and show how the emptying time is affected. We identify three discharge regimes: the first is commonly referred to as the bubble regime, while the other two involve either a vortical jet or a bathtub vortex. We show how the total draining time depends critically on each of these emptying regimes and their succession.

The article is structured as follows. In section II we present the experimental set-up we used to carry out our experiments. Section III presents the effect of rotation on drainage efficiency in terms of the time required for emptying. The three flow regimes identified during rotational emptying are described in section IV and their transition dynamics in section V.

II. EXPERIMENTAL SET-UP

The ideal bottle is a Plexiglas cylinder of radius $R = 145 \pm 0.1$ mm and depth $L = 390$ mm. The tank has a rim with a groove designed to accommodate a rubber seal, ensuring a tight seal when the non-deformable lid, made of 1 cm-thick PVC, is closed. The rim and PVC lid of the tank are pierced with 15 evenly spaced holes to accommodate tightening screws, ensuring the proper sealing. It is rigidly mounted on a rotating platform composed of two cylindrical marble plates, each with a diameter of 1.5 m and a thickness of 20 cm. The plates are stacked on top of each other with a 1 mm-thick air cushion in between, such that the upper piece rotate frictionlessly around the vertical axis of rotation Oz , as illustrated in Fig. 1a. The center of the bottle is aligned with Oz . The rotating velocity Ω can be varied between 0 and 10 rpm. The leveling accuracy has been ensured within ± 0.1 degrees. The bottom plate has a hole drilled in its center for drainage. Two PVC cylindrical draining pieces have been machined (see Fig. 1a), each with a thickness of 1 cm and internal hole diameters of $\Phi_1 = 12.7 \pm 0.1$ mm and $\Phi_2 = 19.8 \pm 0.1$ mm, such that

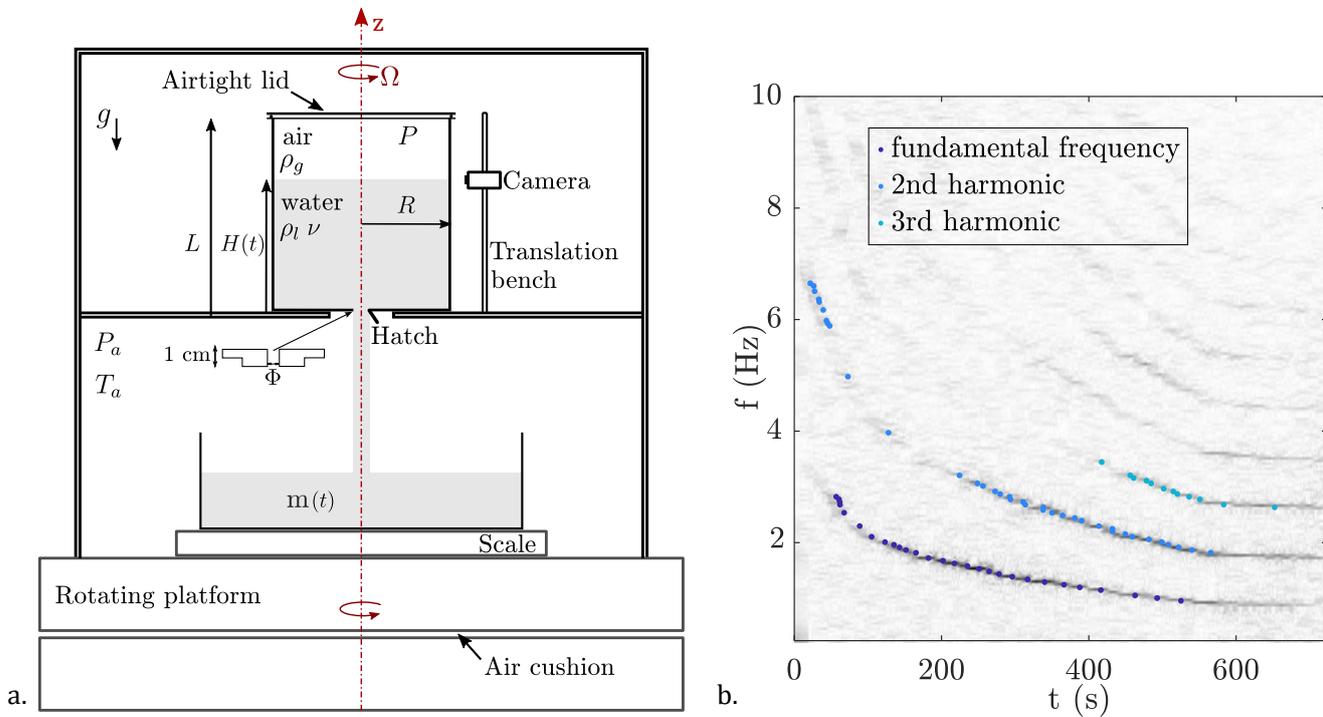


FIG. 1. (a) Schematic drawing of the experimental set-up including details of the outlet cylindrical draining pieces. (b) Low-frequency glug-glug sound spectrum as a function of time in the case $\Omega = 0$ rpm and $\Phi = \Phi_1$. The fundamental frequency and its harmonics are marked with dots. The spectrum is obtained by using a sliding Fourier transform processing of the signal.

$\Phi > 1.9\ell_c$, where $\ell_c = \sqrt{2\sigma/\rho_l g} \approx 3.4$ mm is the capillary length of water in our experiments, in order to avoid the effects of surface tension at the outlet [13]. For diameters below this limit, the emptying time in a tube tends towards infinity [47]. The top surface of each draining piece is flush with the bottom of the tank, and a tight hatch is located beneath it, which can be remotely opened at $t = 0$ s.

At $t = 0$ s, the air at the top of the container is at the atmospheric pressure P_a and both air and water are at the ambient temperature $T_a = 19 \pm 1^\circ$ C. The initial water level is $H_0 = 375 \pm 1$ mm. The air and chlorinated water used have a specific density ρ_g of 1.2 kg m^{-3} and ρ_l of 998 kg m^{-3} , respectively. The chlorinated water has a kinematic viscosity ν of $(1.03 \pm 0.02) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and a surface tension σ of $58 \pm 4 \text{ mN m}^{-1}$. This yields an Ekman number $Ek = \nu/\Omega R^2$ in the range of $4.7 \times 10^{-5} \leq Ek \leq 4.7 \times 10^{-4}$.

To ensure that the initial bulk is in solid body rotation, the system is rotated continuously throughout the experiment, beginning one hour before the start of the emptying. The typical spin-up time $H_0/(\nu\Omega)^{1/2}$ [48, 49] which holds for cylindrical geometry and in the presence of free surface [50, 51] is actually of the order of 10^3 s, smaller than the settling time of 1 h. The initial parabolic deformation of the interface resulting from rotation, which can be expressed as $\Omega^2 R^2/4g$, is in the uncertainty range of H_0 , with a magnitude of less than 0.6 mm and thus negligible.

The cumulative mass $m(t)$ of drained water at time t is measured on a digital mass scale with a precision of 0.5 g and a sampling frequency of 7 Hz. No inertial correction is necessary for weight measurements, as the force balance is centered on Oz . We determine the water flow rate Q using the time derivative \dot{m} of the measured mass $m(t)$. The average water level $H(t)$ in the tank at time t is computed from $H(t) = H_0 - m(t)/\rho_l \pi R^2$ with an accuracy of 1 mm.

A side view webcam captures the radial profile of the free surface $h(r, t)$. Furthermore, the webcam records the audio throughout the process, allowing us to determine the frequency at which bubbles are formed by analyzing the distinct glug-glug sound they produce. A typical sound spectrogram is shown in Figure 1b. The spectrum is obtained by using a sliding Fourier transform processing of the signal. The fundamental frequency and its harmonics obtained by considering the maximum intensity of the spectrum are marked with dots and allow us to deduce the associated period τ .

To study the reproducibility of the experiments, some of them were replicated under identical conditions. The experiments with diameter Φ_1 were repeated 8 and 7 times at $\Omega = 4$ and 5 rpm, respectively. For these rotations speed, the draining velocity can undergo different trends, with a non-reproducible appearance of the different regimes (a point that will be addressed in the final part of this article). For all the other rotation speeds, the standard

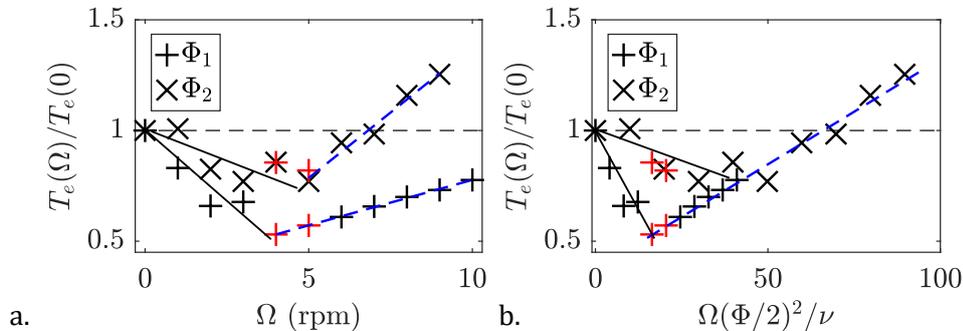


FIG. 2. (a,b) Emptying time $T_e(\Omega)$ scaled by the emptying time without rotation $T_e(0)$ (a) as a function of the rotating velocity Ω , and (b) as a function of $\Omega(\Phi/2)^2/\nu$. The black horizontal dashed lines represent the non-rotating case ($\Omega = 0$ rpm). The black solid lines are included as a visual guide of the dispersion of the results for intermediate Ω . The blue dashed lines represent the linear fit of the experiments for which only regimes 2 and 3 are significant during drainage. The estimated standard deviation across different measurements is included in the size of the points, except for Φ_1 and $\Omega = 4$ and 5 rpm, points for which the two observed behaviors are shown in red.).

deviation of the draining time is below 2% for large Ω and diameter Φ_1 , and 5% for diameter Φ_2 . For smaller Ω , the standard deviation is below 5% for diameter Φ_1 and 7% for diameter Φ_2 .

III. THE EFFECT OF ROTATION ON DRAINAGE EFFICIENCY

We explore the relationship between the emptying time T_e of the sealed tank and the rotating velocity Ω of the platform. The emptying time T_e is defined as the time it takes for 99% of the initial water level to drain. In this context, efficiency is defined as the ratio of the emptying time T_e with rotation to that without rotation, the smaller the ratio, the more efficient the drain. Figure 2a illustrates the scaled emptying time $T_e(\Omega)/T_e(0)$ as a function of the platform's rotating velocity Ω , where $T_e(0)$ is the emptying time in the absence of rotation. The time values shown are averaged over the number of experiments performed for each rotation. They have also been doubled for diameter Φ_1 and $\Omega = 4$ and 5 rpm, where emptying can follow different behaviors, leading to drastically different emptying times, as will be explained in section V. For both outlet sections, an increase in the rotating velocity of the tank initially leads to a reduction in the emptying time. The shortest emptying time is observed at the optimal rotating velocities $\Omega_{\text{opt}}(\Phi_1) = 4.0 \pm 0.5$ rpm and $\Omega_{\text{opt}}(\Phi_2) = 3.0 \pm 0.5$ rpm for sections Φ_1 and Φ_2 , respectively. However, this minimum time is not reproducible. For section Φ_1 , the emptying time can be much longer for intermediate values of the rotational speed, namely 4 and 5 rpm. Non reproducible emptying times are also expected at $\Omega = 4$ rpm for diameter ϕ_2 , as will be justified in Section V. Further increasing the tank's rotation increases the discharge time, which follows a seemingly linear trend whose slope depends on the outlet diameter Φ , as shown by the blue dashed lines in Figure 2a. Notably, when plotting the scaled emptying time as a function of the dimensionless parameter $\Omega(\Phi/2)^2/\nu = (\Phi/2R)^2 Ek^{-1}$ (Figure 2b), the points collapse on a master line. This dimensionless parameter is thus the relevant control parameter for describing the bathtub vortex emptying process that occurs when the rotation is large enough (see section IV), as reported in [5]. When the rotation speed Ω becomes sufficiently large, the bathtub vortex regime becomes dominant and has time to establish. The trend (blue dashed line) in Figure 2b can differ for sections with smaller diameters, where surface tension has a considerable effect on the flow, potentially even stopping it, and can differ also for sections that are too large, as the tank would then empty too quickly and the short draining time would not allow the vortex to establish properly. It is worth noting that, for the smaller outlet diameter Φ_1 , the emptying time remains shorter than the one of the non-rotating case even at the highest rotating velocity tested in our experimental setup. However, for the larger section Φ_2 , the discharge time exceeds that of the non-rotating case once Ω exceeds 8 rpm. Contrary to a common assumption, our results reveal that rotating the tank does not always result in faster emptying compared to the non-rotating case. Instead, we identify an optimal tank rotating velocity Ω_{opt} that maximizes the efficiency of the emptying process.

To delve further, we analyze the behavior of the scaled water height H/H_0 inside the container as a function of the dimensionless time $t/T_e(0)$ (see Figure 3a and 3b for sections Φ_1 and Φ_2 respectively). Different emptying trends related to different regimes (see section IV for a detailed description) are observed depending on the rotating velocity of the system.

At low rotating velocities ($\Omega \leq 1$ rpm), the evolution of H/H_0 follows a nearly linear trend with time. This evolution

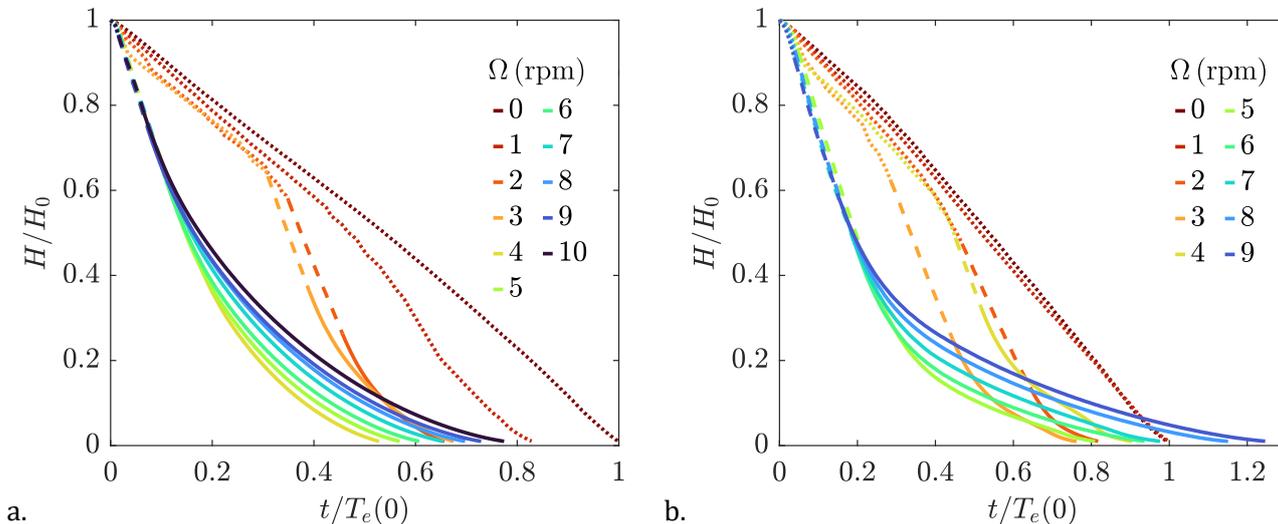


FIG. 3. (a) Time evolution of H/H_0 for Φ_1 and (b) for Φ_2 at $0 \leq \Omega \leq 10$ rpm. Dotted lines indicate the presence of regime 1, dashed lines indicate the presence of regime 2, and solid lines indicate the presence of regime 3. The time t is scaled by the emptying time $T_e(0)$ when $\Omega = 0$ rpm. It is worth noting that for high rotation speeds, regime 1 only lasts between 5 and 6% of the drainage time.

is characteristic of a non-rotating regime in which bubbles periodically form in the system, which we will refer to as regime 1 or bubble regime (dotted lines). At higher rotating velocities ($\Omega(\Phi_1) \geq 4$ rpm and $\Omega(\Phi_2) \geq 5$ rpm), while the duration of regime 1 becomes negligible compared to the emptying time, two other regimes are observed, namely the vortical jet regime and the bathtub vortex regime, labeled as regimes 2 (dashed lines) and 3 (solid lines), respectively. In regime 2, the height decreases at a faster rate compared to regime 1, following here also a nearly linear trend. In regime 3, a non-linear decrease in height is observed, characteristic of the discharge behavior in rotating free-surface tanks (see section IV for further explanations). As can be seen in Figure 3, this non-linear decay can become less effective than the linear decay of regime 1, which explains why the emptying becomes less effective when Ω is too large and regime 3 dominates. At intermediate rotating velocities ($2 \leq \Omega(\Phi_1) \leq 3$ rpm and $2 \leq \Omega(\Phi_2) \leq 4$ rpm), all three regimes are observed sequentially. The relative duration of each regime during an experiment influence the overall effectiveness of the drainage process.

IV. CHARACTERIZATION OF THE THREE DIFFERENT EMPTYING REGIMES

The bubble regime (regime 1) represents the discharge regime observed in the absence of rotation (see Fig 4a. at $t/T_e(\Omega) = 0.01$). It is characterized by the cyclic occurrence of air bubbles at the outlet of the tank, which rise by buoyancy up to the top of the tank. Air is therefore gradually replacing water in the upper portion of the tank, with a decreasing frequency over time, as shown in Figures 1b and 5. The analytical expression proposed by Clanet and Searby [13] for the period of bubble formation is applicable to containers whose aspect ratios allow the inertia term $(2R/\Phi)^4 v_Q^2$ to be neglected. This does not apply to our experiments [13]. Figure 5 shows the scaled bubble periods $\tau/T_e(0)$ measured for different rotating velocities. The period of the glug-glug is clearly related to H/H_0 , whereas it depends only slightly on Ω over the explored range of Φ and Ω . The bubble regime is characterized by an oscillating draining velocity whose mean value remains constant over time and relatively small compared to the other two regimes, as shown in Fig 4b. The emptying velocity in this regime can be modeled using Whalley’s approach [20] as $v_B = C^2 \sqrt{g\Phi(\rho_l - \rho_g)} / (\rho_g^{1/4} + \rho_l^{1/4})^2$, with $C \approx 0.916$ as proposed by [10]. The draining velocity obtained from this model ($v_B = 0.261 \text{ m s}^{-1}$) is in relatively good agreement with the experimentally measured mean velocity ($v_{QB} = 0.276 \text{ m s}^{-1}$) for the case $\Omega = 0$ rpm and $\Phi = \Phi_2$ (Φ_1 is not in the range of previous studies). Intermittent bursts can be observed in figure 4b (black arrows) and in the first video of the supplemental materials, when regime 2 transiently settles in the bubble regime, for $\Omega > 0$.

Regime 2 is characterized by a highly unsteady vortical jet flow. This regime occurs when vorticity concentrates along the discharge axis aligned with Oz . However, the generated vortex is not strong enough to maintain a continuous gaseous core from the outlet to the free surface. Instead, it takes the form of an “air jet”, as shown in Fig 4a at

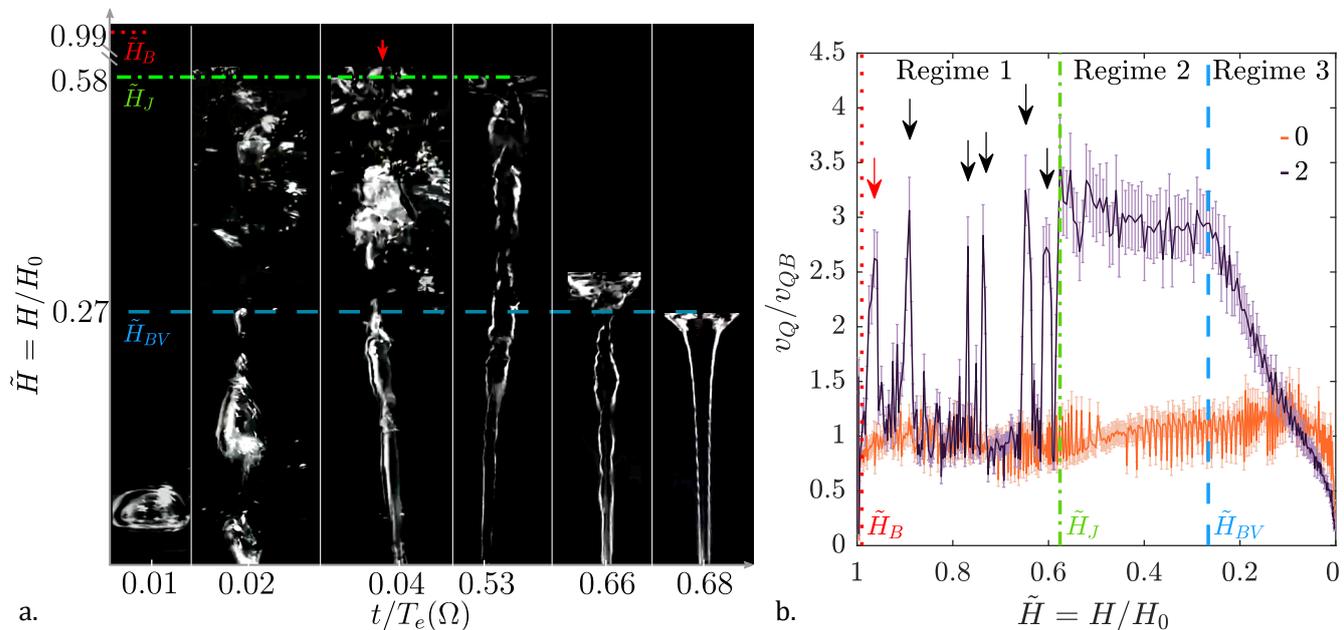


FIG. 4. (a) Sequence of photographs for the case $\Omega = 2$ rpm and Φ_1 . The first bubble appears after $t/T_e(\Omega) = 0.01$ with a normalized water height $\tilde{H} = \tilde{H}_B$ (out of scale). Regime 2 stabilizes at $t/T_e(\Omega) = 0.53$, with a normalized water height $\tilde{H} = \tilde{H}_J$. Regime 3 stabilizes at $t/T_e(\Omega) = 0.68$, with a normalized water height $\tilde{H} = \tilde{H}_{BV}$. Images capturing the interfacial aspect during the transitions between regime 1 and 2 and between regime 2 and 3 were taken at $t/T_e(\Omega) = 0.02$ and $t/T_e(\Omega) = 0.66$, respectively. At $t/T_e(\Omega) = 0.04$ (red arrow), the first appearance of the unstable vortical jet (regime 2) is observed, as also shown in Figure 4b. (b) Draining velocity v_Q normalized by the mean velocity of the case without rotation v_{QB} , plotted for $\Omega = 0$ rpm and $\Omega = 2$ rpm with section Φ_1 as a function of H/H_0 . The boundaries of the different regimes $\tilde{H} = \tilde{H}_B, \tilde{H}_J, \tilde{H}_{BV}$ for the $\Omega = 2$ rpm case are represented respectively by dotted lines, dotted-dashed lines and dashed lines, matching the color scheme used in Figure 4a. Arrows on the velocity curve indicate the appearances of the jet, which coincide with the measured velocity peaks. The first arrow in red corresponds to the photographic image marked by a red arrow in Figure 4a.

$t/T_e(\Omega) = 0.53$. In this regime, the fluid continuously flows through the discharge section. The pressure in the air volume is lower than the atmospheric pressure P_a , but larger than in regime 1 (see section V for further explanations). This difference in pressure explains why regime 2 is more effective than regime 1 in draining, as seen in Figure 4b, where the draining velocity is the largest and exhibits only slight variations with H/H_0 .

Regime 3 is similar to the bathtub vortex regime observed in rotating free-surface tanks [30, 31, 34–46] in terms of interface deformation (see Figure 4a at $t/T_e(\Omega) = 0.68$), as well as draining velocity. In Figure 6a, we compared experiments with and without a lid for a rotation rate of $\Omega = 5$ rpm. The red curve, representing the standard case with a lid, matches perfectly with the grey dashed curve of the lidless case from a critical height $H/H_0 = 0.46$, which is lower than the height at which regime 3 establishes ($H/H_0 = 0.6$). The vortex regimes in both configurations are thus identical once the vortex is well established. Furthermore, the draining velocity v_Q normalized by the classical Torricelli velocity $v_T = \beta\sqrt{2g\tilde{H}}$ is shown in Figures 6b and 6c as a function of the water depth H/H_0 at $\Omega = 7$ rpm for both sections. The dashed lines $v_Q/v_T = 1$ serve as a reference to illustrate Torricelli's law. It can be observed that the measured draining velocity is significantly lower than the classical Torricelli case. Following Caquas *et al.* [5], the draining velocity v_{BV} in the presence of a bathtub vortex can be predicted (red data points in Figure 6) based on the shape of the free surface as:

$$v_{BV}(t) = \beta \sqrt{\frac{4g}{(\Phi/2)^2} \int_0^{\Phi/2} h(r, t) r dr}, \quad (1)$$

with a correction coefficient $\beta \approx 0.6$, consistent with values reported in the literature for a circular hole [2, 13]. This agreement demonstrates that once the vortex is formed, the draining velocity v_Q , is no longer influenced by the presence of the tank lid nor subject to hysteresis effects. Thus, in this regime, the top and bottom of the tank are continuously connected through the gaseous core. Consequently, air pressure above the water volume is P_a . In this regime, the larger the rotating velocity of the platform, the faster the draining velocity decreases as the water level decreases. This can be attributed to the expansion of the gaseous core with increasing rotation, resulting in a reduced

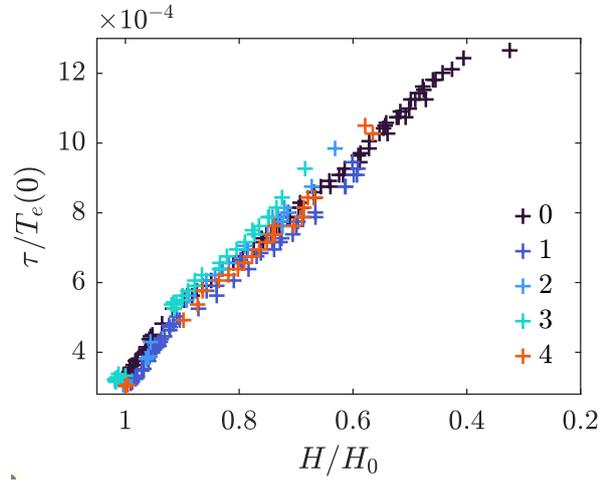


FIG. 5. Period of bubble appearance τ scaled by the emptying time without rotation $T_e(0)$ for different rotating velocities as a function of the scaled water height H/H_0 for section Φ_1 .

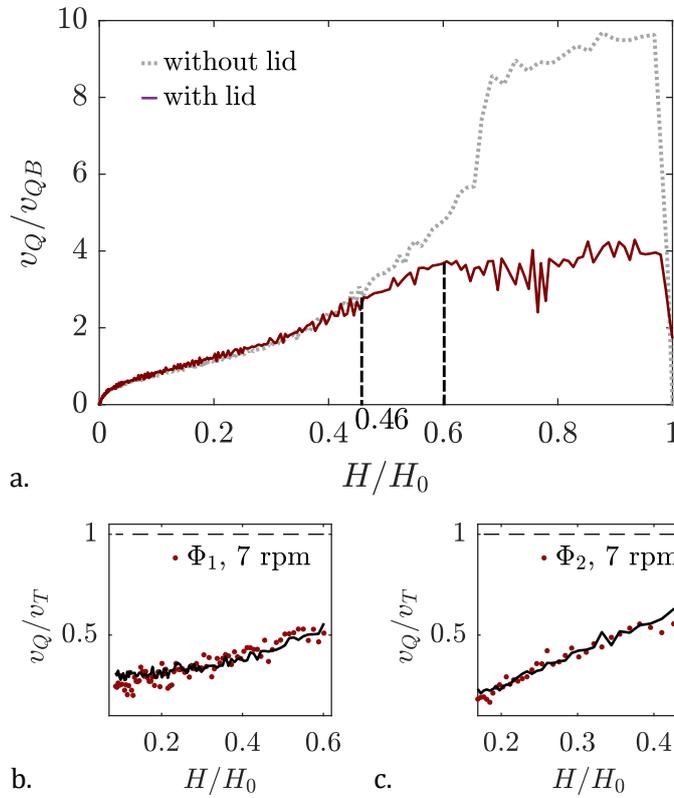


FIG. 6. (a) Draining velocity v_Q scaled by v_{QB} as a function of the instantaneous water height H scaled by its initial value H_0 for the case Φ_1 at $\Omega = 5$ rpm. The red curve represents the standard experiment with the airtight lid, while the grey dotted line represents the case without lid (i.e. at atmospheric pressure throughout the experiment). (b,c) Draining velocity v_Q scaled by v_T as a function of the instantaneous water height H scaled by its initial value H_0 for (a) Φ_1 and $\Omega = 7$ rpm, and (b) Φ_2 and $\Omega = 7$ rpm. The solid black lines correspond to mass measurements and the red points to Eq. (1) with interface shape measurements. The black dashed line shows the reference value $v_Q = v_T$. Here, the estimated value of the corrected coefficient β is approximately 0.6.

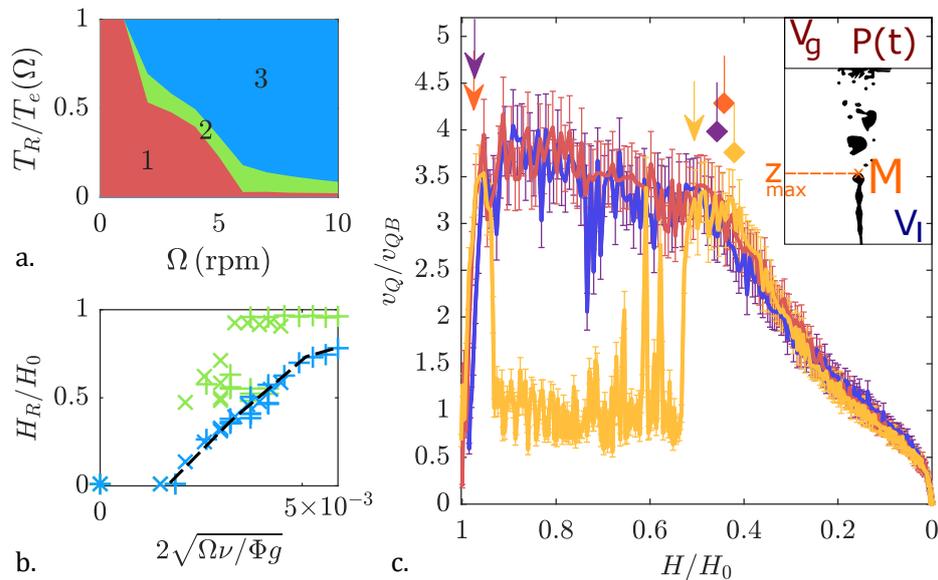


FIG. 7. (a) Diagram showing the occurrence of the different regimes as a function of the mean scaled regime time $T_R/T_e(\Omega)$ and the rotating velocity Ω for section Φ_1 . Regime 1 appears in red, regime 2 in green and regime 3 in blue. (b) Normalized height H_R/H_0 at which each regime appears plotted against $2\sqrt{\Omega\nu/\Phi g}$ for the two sections. The appearance of regime 2 ($H_R = H_J$) is indicated in green, while the appearance of regime 3 ($H_R = H_{BV}$) is indicated in blue. All experiments for which the onset of regime 2 differ are represented. The black dashed lines are included as a visual guide. (c) Scaled draining velocities v_Q/v_T at the threshold value for $\Omega = 4$ rpm and section Φ_1 . For this threshold value of Ω , the results of three emptying, in the same initial configuration, are shown, and show different trends. The onset of the jet regime is marked with arrows, and the transition to the vortex regime is indicated by diamonds. The colors of the symbols correspond to those of the curves. The inset shows the schematic diagram of the experiment.

average water height above the outlet section and a reduced wet section at the outlet. In contrast, in regime 2, the radius of the gaseous core remains small and relatively constant throughout the entire regime. Ultimately, regime 3 becomes even less effective than regime 1.

V. DYNAMICS OF TRANSITIONS

As mentioned in section III, the efficiency of the draining process, as a function of the rotating velocity, is highly dependent on the relative duration of each of the three emptying regimes described in the previous section. The transition between the different regimes is not straightforward either, particularly given the unstable nature of regime 2. In order to describe the transitions between each of the three draining regimes, we consider the case of Fig. 4 where $\Omega = 2$ rpm and $\Phi = \Phi_1$. The visualization of transitions between different regimes (see Fig. 4a) is also indicated in Fig. 4b, corresponding to the changes in slope of the velocity curve.

At $t/T_e(\Omega) = 0$, the draining is initiated at the pressure P of the air volume V_g located in the upper zone of the tank (see inset of Figure 7c), which is initially equal to the atmospheric pressure P_a . The fluid flows until the pressure P reaches the critical value $P_c = P_a - \rho_l g H$. Once this pressure is reached, the external air at the outlet pushes the water, forming a bubble. This bubble grows, expanding both the volume of water V_l (V_l being the volume of water including bubbles or air jet) and the pressure P of the air volume V_g . At $t/T_e(\Omega) = 0.01$, the bubble pinches off and detaches from the outlet. The tank drains and P decreases again. When the pressure P reaches the new $P_c(H)$, a second bubble forms at the outlet. Eventually, by repeating the aforementioned mechanism [17], bubbles form periodically in the tank. For larger outlet diameters (such as Φ_2), counter-currents of water can occur when a bubble is formed [22].

As the container drains, vorticity concentrates and the pressure decreases along the Oz axis. From the start of the draining (see Fig 4a at $t/T_e(\Omega) = 0.02$), the resulting stretching can cause the rising bubbles to elongate. Once the stretching reaches a critical intensity, it can lead to the formation of an air jet, which, due to the inherent instability of the vortex, can subsequently disappear (see Fig 4a at $t/T_e(\Omega) = 0.04$). Before reaching the surface, the jet breaks

up into bubbles at a level $z_{max} < H$ (see inset of Fig. 7c). The pressure $P(t)$ at point M , which belongs to the air core at height z_{max} , must satisfy $P_a = P(t) + \rho_l g(H(t) - z_{max})$, where z_{max} increases as the vortex becomes stronger.

When $H_B \leq H < H_J$ (see Fig. 4b), regime 1 dominates, the vortex is weak, the height z_{max} is small, and the pressure P approaches the previous critical value P_c . The air jet can even disappear at the critical value $P(t) = P_c$. In this case, there is no more outflow, which breaks the structure of the vortex, and regime 1 reappears. Generally, the intermittent bursts of regime 2 are brief ($t \sim 4$ s) and only represents a small fraction of regime 1. It can be observed in Fig. 4b where peaks of draining velocity correspond to the appearance of the intermittent air jet.

When $H_J < H < H_{BV}$ (see Fig. 4b), regime 2 stabilises and the air jet reaches a height z_{max} close to the interface. The airflow brought by the jet is sufficient for the pressure P to increase. When the pressure $P(t)$ approaches P_a , the transition from regime 2 to regime 3 initiates. Simultaneously, the upper interface undergoes deformation in an attempt to match the shape of the air jet. This transition can occur continuously, as showed in the case of $\Omega = 2$ rpm presented in Figure 4a at $t/T_e(\Omega) = 0.66$. In this scenario, the interface deformation exhibits a hybrid form, combining characteristics of both an air jet and the typical deformation observed in a bathtub vortex interface. However, for higher rotating velocities, as observed in video 2 of the supplementary material, the transition can become oscillatory. In such cases, the air jet can intermittently disappear when the pressure $P(t)$ is high, while a distinctive bathtub vortex deformation appears at the upper air-water interface. If the vortex intensity is insufficient for the interface deformation to rapidly extend into the outlet section, the pressure $P(t)$ decreases once again, causing the jet to reappear. The interface deformation then oscillates between these two states in a pulsating cycle until the pressure equilibrates at $P(t) = P_a$.

The transitions between the successive regimes, and therefore the time spent in each of them, directly depend on the vortex intensity, and thus on Ω . Figure 7a shows the diagram of occurrences of the different regimes. The duration of regime 1 decreases with increasing Ω . For high rotation velocities, the vortex establishes itself rapidly and remains stable, causing regime 1 to last only a few seconds. Consequently, its influence on the emptying process is negligible. On the contrary, regime 3 behaves in the opposite manner. Its duration decreases as Ω decreases, and for low values of Ω , regime 3 does not occur at all.

The swirl ratio $S = \Omega\Phi/U$ [52], commonly used in tornado research to analyze their intensity and stability [53], is defined locally at the discharge section. Here, $U = 2Q/\pi\delta\Phi$ represents the characteristic radial velocity in the Ekman layer at the bottom of the tank [43] during the early stages of the emptying process. During this stage, Q is approximately equal to $\sqrt{\Phi g}(\Phi/2)^2$, resulting in the simplification of the swirl ratio to $S = 2\sqrt{\Omega\nu/\Phi g}$. Figure 7b illustrates the heights at which the jet regime H_J (in green) and the bathtub vortex regime H_{BV} (in blue) occur as a function of $2\sqrt{\Omega\nu/\Phi g}$. The evolution of H_{BV} exhibits a seemingly linear increase with the swirl ratio within the range of tested Ω values (it is expected that the ratio H/H_0 approaches 1 for higher Ω values). The occurrence of the stable vortex regime is therefore clearly correlated to the initial swirl ratio. This transition point between regime 2 and 3 is also reproducible (see Figure 7b-c).

The establishment of regime 2 requires a vortex and therefore a sufficient Ω , but the vortex must not be too intense in order to delay the transition to regime 3. Thus, the fraction of time spent in regime 2 first increases with Ω , becomes maximal for an optimal rotating velocity Ω_J which depends on Φ and decreases for larger values of Ω .

At the largest Ω , the water level H_J at which the transition occurs between regime 1 and 2 is repeatable and appears to be constant (see Figure 7b). The value of the plateau varies very slightly with the diameter Φ , with $H_J(\Phi_1)/H_0 = 0.96 \pm 0.01$ and $H_J(\Phi_2)/H_0 = 0.92 \pm 0.01$. However, this is no longer true for intermediate and small Ω . The values of H_J become random. Figure 7c shows the draining velocity for several experiments with the same settings ($\Omega = 4$ rpm and Φ_1). The red and purple curves exhibit a behaviour typical at large Ω , with mainly regime 2 and 3 only present. The yellow curve is representative of a case where all three regimes are successively present, as is usually observed at intermediate Ω . Across all experiments conducted at $\Omega = 4$ and 5 rpm with diameter Φ_1 , we observed that approximately half of the curves followed either an intermediate rotation trend or a high rotation trend. This phenomenon was not observed for diameter Φ_2 , but the few experiments carried out (4 at $\Omega = 4$ rpm, 3 at $\Omega = 5$) do not allow us to draw any general conclusions about this case.

Similarly to the jet intermittence in regime 1, the unpredictability of the settling of regime 2 underlines the instability of the vortex in regime 2. This explains why the fastest emptying is not always obtained for a repeatable value of Ω .

VI. CONCLUSIONS

Our study has demonstrated that the draining of a closed vessel in a rotating frame is far from being trivial, with three successive regimes identified whose occurrence and duration depend on Ω , H and Φ . We found that rotation is efficient to empty the tank only when an optimal rotating velocity Ω_{opt} is reached. In our range of studied diameters and rotations, we observed that the draining time increases almost linearly with the parameter $\Omega(\Phi/2)^2/\nu$ once the critical value Ω_{opt} is reached. By studying the critical heights at which the regimes occur, we noticed that

the critical height for the occurrence of regime 2 is not well defined and non-reproducible at low values of Ω , but becomes reproducible and constant beyond Ω_{opt} . As for the height H_{BV} , it can be expressed in terms of the swirl ratio $S = 2\sqrt{\Omega\nu/g\Phi}$ and scales almost linearly over the range of explored Ω values.

Although idealised, our experiment provides a better understanding of the emptying of a rotating water bottle. The chosen ratio H_0/R in our experiment is approximately three times smaller than that of a typical water bottle, while H_0 is of the same order of magnitude. Variations in this aspect ratio should not change the physics of the emptying process. It is worth noting that while the water height does not affect the velocity during the bubble regime, the draining velocity will be larger for a larger height as soon as the vortex is present. Therefore, for an equivalent water volume, a higher H_0/R ratio leads to a shorter emptying time. The choice of a larger radius R allows for a slower emptying rate and longer visualization of the different regimes compared to a typical water bottle. The ratio Φ/R also is chosen to be very small in our case to remain within the typical approximation used for the Torricelli's law. For larger aspect ratios, as in the case of a typical water bottle ($\Phi/R \approx 0.2$), we expect a modification in the draining velocity expressed by Eq.(1), as the interface velocity would no longer be negligible in the balance. However, for aspect ratios close to those of a bottle, the three regimes mentioned in this article can be observed. Only the duration of each regime is affected.

-
- [1] E Torricelli, "De motu gravium naturaliter accelerato," Firenze (1643).
 - [2] GK Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 1967).
 - [3] C Clanet, "Clepsydrae, from Galilei to Torricelli," *Physics of Fluids* **12**, 2743–2751 (2000).
 - [4] J. Ferrand, L. Favreau, S. Joubaud, and E. Freyssingeas, en "Wetting Effect on Torricelli's Law," *Physical Review Letters* **117**, 248002 (2016).
 - [5] A. Caquas, L. R. Pastur, A. Genty, and P. Gondret, "Bathtub vortex effect on torricelli's law," *Physical Review Fluids* **8**, 044702 (2023).
 - [6] P. B. Whalley, "Two-phase flow during filling and emptying of bottles," *International journal of multiphase flow* **17**, 145–152 (1991).
 - [7] Hans C Mayer, "Bottle emptying: A fluid mechanics and measurements exercise for engineering undergraduate students," *Fluids* **4**, 183 (2019).
 - [8] Lokesh Rohilla and Arup Kumar Das, "Fluidics in an emptying bottle during breaking and making of interacting interfaces," *Physics of Fluids* **32**, 042102 (2020).
 - [9] Friedrich Geiger, Kai Velten, and Frank-Jürgen Methner, "3d CFD simulation of bottle emptying processes," *Journal of Food Engineering* **109**, 609–618 (2012).
 - [10] SS Kordestani and J Kubie, "Outflow of liquids from single-outlet vessels," *International journal of multiphase flow* **22**, 1023–1029 (1996).
 - [11] S Tang and J Kubie, "Further investigation of flow in single inlet/outlet vessels," *International journal of multiphase flow* **23**, 809–814 (1997).
 - [12] O. Schmidt and J. Kubie, "An experimental investigation of outflow of liquids from single-outlet vessels," *International journal of multiphase flow* **21**, 1163–1168 (1995).
 - [13] Christophe Clanet and Geoffrey Searby, "On the glug-glug of ideal bottles," *Journal of Fluid Mechanics* **510**, 145 (2004), publisher: Citeseer.
 - [14] Pierre Héraud, *Etude de la dynamique des bulles infinies: application à l'étude de la vidange et du remplissage de réservoir*, Ph.D. thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I (2002).
 - [15] Samuel Mer, Olivier Praud, Jacques Magnaudet, and Véronique Roig, "Simulating the emptying of a water bottle with a multi-scale two-fluid approach," in *ASME 2018 5th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting* (American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2018).
 - [16] Samuel Mer, Olivier Praud, Jacques Magnaudet, and Veronique Roig, "Emptying of a bottle: How a robust pressure-driven oscillator coexists with complex two-phase flow dynamics," *International Journal of Multiphase Flow* **118**, 23–36 (2019).
 - [17] AAK Tehrani, MA Patrick, and AA Wragg, "Dynamic fluid flow behaviour of a tank draining through a vertical tube," *International journal of multiphase flow* **18**, 977–988 (1992).
 - [18] AAK Tehrani, AA Wragg, and MA Patrick, "How fast will your bottle empty," *Proceedings of IChemE* , 1069–1071 (1994).
 - [19] Jialing Liang, Yiyi Ma, and Yi Zheng, "Characteristics of air-water flow in an emptying tank under different conditions," *Theoretical and Applied Mechanics Letters* , 100300 (2021).
 - [20] P. B. Whalley, "Flooding, slugging and bottle emptying," *International journal of multiphase flow* **13**, 723–728 (1987).
 - [21] Callen Schwefler, Peyton Nienaber, and Hans C Mayer, "The emptying of a perforated bottle: Influence of perforation size on emptying time and the physical nature of the process," *Fluids* **8**, 225 (2023).
 - [22] Masahiro I Kohira, Nobuyuki Magome, Hiroyuki Kitahata, and Kenichi Yoshikawa, "Plastic bottle oscillator: Rhythmicity and mode bifurcation of fluid flow," *American Journal of Physics* **75**, 893–895 (2007).
 - [23] Masahiro I Kohira, Hiroyuki Kitahata, Nobuyuki Magome, and Kenichi Yoshikawa, "Plastic bottle oscillator as an on-

- off-type oscillator: Experiments, modeling, and stability analyses of single and coupled systems,” *Physical Review E* **85**, 026204 (2012).
- [24] Ji Jia, Zhichun Shangguan, Haihong Li, Ye Wu, Weiqing Liu, Jinghua Xiao, and Jürgen Kurths, “Experimental and modeling analysis of asymmetrical on-off oscillation in coupled non-identical inverted bottle oscillators,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **26**, 116301 (2016).
- [25] Eric D Schneider and Dorion Sagan, *Into the cool: Energy flow, thermodynamics, and life* (University of Chicago Press, 2005).
- [26] Donghyun Kim and Daegyoun Kim, “Free-surface vortex formation and aeration by a submerged rotating disk,” *Chemical Engineering Science* **243**, 116787 (2021).
- [27] D. Tenchine, C. Fournier, and Y. Dolias, “Gas entrainment issues in sodium cooled fast reactors,” *Nuclear Eng. Design* **270**, 302–311 (2014).
- [28] B. Moudjed, J. Excoffon, R. Riva, and L. Rossi, “Experimental study of gas entrainment from surface swirl,” *Nuclear Eng. Design* **310**, 351–362 (2016).
- [29] H. Bhatia, U. Bieder, and D. Guenadou, “Rankine-vortex model based assessment of cfd methods for simulating the effect of gas entrainment observed in the hot-pool of sodium cooled fast breeder reactors,” *Progr. Nuclear Energy* **137**, 103794 (2021).
- [30] Hans Albert Einstein and Huon Li, “Steady vortex flow in a real fluid,” *Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University*, 33–43 (1951).
- [31] WS Lewellen, “A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation,” *Journal of Fluid Mechanics* **14**, 420–432 (1962), publisher: Cambridge University Press.
- [32] ASCHER H. Shapiro, “Bath-tub vortex,” *Nature* **196**, 1080–1081 (1962).
- [33] Lloyd M Trefethen, RW Bilger, PT Fink, RE Luxton, and RI Tanner, “The bath-tub vortex in the southern hemisphere,” *Nature* **207**, 1084 (1965).
- [34] Hans J Lugt, “Vortex flow in nature and technology,” new york (1983).
- [35] Lawrence K Forbes and Graeme C Hocking, “The bath-plug vortex,” *Journal of Fluid Mechanics* **284**, 43–62 (1995), publisher: Cambridge University Press.
- [36] Yury A. Stepanyants and Guan H. Yeoh, en “Burgers–Rott vortices with surface tension,” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **59**, 1057–1068 (2008).
- [37] Shoso Shingubara, Kiyoshi Hagiwara, Ryo Fukushima, and Tatsuyuki Kawakubo, “Vortices around a sinkhole: phase diagram for one-celled and two-celled vortices,” *Journal of the Physical Society of Japan* **57**, 88–94 (1988), publisher: The Physical Society of Japan.
- [38] L. Böhling, A. Andersen, and D. Fabre, en “Structure of a steady drain-hole vortex in a viscous fluid,” *Journal of Fluid Mechanics* **656**, 177–188 (2010).
- [39] TS Lundgren, “The vortical flow above the drain-hole in a rotating vessel,” *Journal of Fluid Mechanics* **155**, 381–412 (1985), publisher: Cambridge University Press.
- [40] Peder A. Tyvand and Kjetil B. Haugen, en “An impulsive bathtub vortex,” *Physics of Fluids* **17**, 062105 (2005).
- [41] Yury A. Stepanyants and Guan H. Yeoh, en “Stationary bathtub vortices and a critical regime of liquid discharge,” *Journal of Fluid Mechanics* **604**, 77–98 (2008).
- [42] A Andersen, Tomas Bohr, Bjarne Stenum, J Juul Rasmussen, and B Lautrup, “Anatomy of a bathtub vortex,” *Physical review letters* **91**, 104502 (2003).
- [43] A. Andersen, T. Bohr, B. Stenum, J. Juul Rasmussen, and B. Lautrup, en “The bathtub vortex in a rotating container,” *Journal of Fluid Mechanics* **556**, 121 (2006).
- [44] Kei Ito, Toshiki Ezure, and Hiroyuki Ohshima, “Development of vortex model with realistic axial velocity distribution,” *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu (Online)* **80** (2014).
- [45] Alex Duinmeijer, Gosse Oldenzien, and Francois Clemens, en “Experimental study on the 3D-flow field of a free-surface vortex using stereo PIV,” *Journal of Hydraulic Research* **58**, 105–119 (2020).
- [46] Yann Recoquillon, *Etude expérimentale et numérique des écoulements diphasiques dans la boîte à eau d’un véhicule automobile*, PhD Thesis, Université d’Orléans (2013).
- [47] EE Zukoski, “Influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes,” *Journal of Fluid Mechanics* **25**, 821–837 (1966), publisher: Cambridge University Press.
- [48] H. P. Greenspan and L. N. Howard, “On a time-dependent motion of a rotating fluid,” *J. Fluid Mec.* **17**, 385–404 (1963).
- [49] PW Duck and MR Foster, “Spin-up of homogeneous and stratified fluids,” *Annual review of fluid mechanics* **33**, 231–263 (2001).
- [50] Y.-C. Chen, S.-L. Huang, Z.-Y. Li, C.-C. Chang, and C.-C. Chu, “A bathtub vortex under the influence of a protruding cylinder in a rotating tank,” *J. Fluid Mech.* **733**, 134–157 (2013).
- [51] Wen Yang, Ivan Delbende, Yann Fraigneau, and Laurent Martin Witkowski, “Large axisymmetric surface deformation and dewetting in the flow above a rotating disk in a cylindrical tank: spin-up and permanent regimes,” *Physical Review Fluids* **5**, 044801 (2020).
- [52] WS Lewellen, “A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation,” *Journal of Fluid Mechanics* **14**, 420–432 (1962).
- [53] DC Lewellen, WS Lewellen, and J Xia, “The influence of a local swirl ratio on tornado intensification near the surface,” *Journal of the atmospheric sciences* **57**, 527–544 (2000).

5.3 Conclusion

Notre étude a révélé que le processus de vidange d'une bouteille d'eau en rotation n'est en aucun cas trivial, et ce, en identifiant trois régimes successifs dont l'apparition et la durée sont dépendantes des paramètres Ω , H et Φ et permettent de comprendre l'existence d'une vitesse de rotation optimale Ω_{opt} pour vider plus rapidement le contenant. Dans le premier régime identifié, que nous appelons ici le régime de bulles, la vitesse de vidange et la fréquence d'apparition des bulles sont semblables au cas sans rotation, seul l'aspect des bulles, plus allongé sous l'effet de la concentration de la vorticité, diffère. La cuve se vide alors par intermittence avec une vitesse de vidange qui oscille autour d'une vitesse moyenne quasi constante. Peu efficace, ce régime disparaît presque (ne durant que quelques secondes) pour des vitesses de rotation supérieures à Ω_{opt} .

Dans le régime de vidange tourbillonnaire, la vitesse de vidange suit la loi généralisée de l'Eq. (3.16) établie dans le Chapitre 3 et l'interface prend la forme typique du régime super-critique. Ainsi, lorsque ce régime est atteint, la pression s'équilibre dans le volume gazeux de la partie supérieure de la cuve et atteint la pression atmosphérique. La vitesse de vidange dépend alors de la hauteur d'eau située au-dessus de la section de vidange. Elle est généralement plus élevée que celle du régime de bulles, mais peut drastiquement diminuer lorsque le vortex devient très intense et ne permet presque plus au fluide de s'écouler. Ce régime s'établit pour une hauteur d'eau reproductible qui suit une dépendance linéaire en nombre de Swirl $Sw = 2\sqrt{\Omega\nu/g\Phi}$ sur la plage des valeurs de Ω que nous avons étudiée.

Le régime de jet d'air, qui fait la transition entre les deux précédents régimes, est très instable. Dans ce régime, l'écoulement de l'eau est, lui aussi, continu. Il est permis par le cœur gazeux présent dans la partie basse de la cuve. Ce jet ne va cependant pas jusqu'à l'interface et l'équilibre des pressions n'est pas atteint. La finesse du cœur gazeux permet au fluide de s'écouler efficacement de la cuve en présentant un débit de vidange très élevé. Lors de la phase initiale de la vidange, où le régime de bulles est prédominant, le régime de jet d'air peut se manifester de manière intermittente et non reproductible. La hauteur d'eau pour laquelle le régime de jet d'air s'établit est, elle aussi, non reproductible pour de faibles valeurs de Ω . Malgré ces irrégularités, ce régime prend progressivement plus de place dans le processus de vidange lorsque Ω augmente jusqu'à atteindre Ω_{opt} . Une fois la vitesse Ω_{opt} atteinte, la durée relative de ce régime transitoire diminue et sa hauteur d'apparition devient reproductible et quasi-constante. Le régime de vidange tourbillonnaire devient alors prédominant, ce qui entraîne une augmentation du temps de vidange en fonction de Ω , qui suit alors une évolution linéaire en fonction du paramètre sans dimension $\Omega(\Phi/2)^2/\nu$.

Simulations numériques

Sommaire

6.1	Introduction	104
6.2	Outils de calcul et méthodes numériques	104
6.2.1	La méthode Front-Tracking de TrioCFD	105
6.2.2	La méthode Volume-Of-Fluid d'OpenFOAM	106
6.3	Premier cas test de validation : la coalescence	107
6.3.1	Solution analytique pour le cas 2D (Régime de Stokes)	107
6.3.2	Simulation numérique avec TrioCFD	108
6.4	Second cas test de validation : Formation d'une bulle d'air	109
6.4.1	Position du problème	109
6.4.2	Mesures expérimentales de référence	111
6.4.3	Simulations numériques avec TrioCFD	112
6.4.4	Simulations numériques avec OpenFoam	116
6.4.5	Conclusions	120
6.5	Simulation de la vidange instationnaire	122
6.5.1	Simulation numérique avec TrioCFD : premier test	123
6.5.2	Simulation numérique avec TrioCFD : cas plus raffiné	123
6.5.3	Simulations numériques avec OpenFoam	127
6.5.4	Conclusions	130

6.1 Introduction

La simulation numérique revêt une importance croissante dans le cadre industriel, car elle permet potentiellement de dimensionner des systèmes et de vérifier leur bon fonctionnement, voire de les étudier dans des conditions dégradées, et ce, à moindre coût. L'industrie nucléaire et le CEA en particulier ont recours à des outils de calcul scientifique depuis leur origine. Le CEA développe ainsi en interne des outils de simulation numérique dans diverses disciplines comme la neutronique ou la mécanique des fluides. Dans le domaine de la mécanique des fluides, le CEA a notamment développé le code TrioCFD [5, 16]. Cet outil permet de simuler les écoulements thermohydrauliques avec une option de suivi d'interface de type "Front Tracking" pour l'étude des écoulements diphasiques.

La problématique des écoulements avec vortex étudiée dans le cadre de cette thèse intéresse particulièrement le CEA. Le phénomène d'entraînement de bulles à la pointe du vortex peut, en effet, être la cause de problème de sûreté dans les futurs réacteurs à neutrons rapides et à caloporteur sodium [103]. Ce phénomène est complexe à modéliser en raison de la rupture de la phase gazeuse qui se produit à une échelle bien plus petite que celle du système étudié. Les expériences conduites dans le cadre de cette thèse dans des conditions parfaitement contrôlées constituent une base de validation expérimentale et nous avons cherché à les simuler avec TrioCFD. Comme nous le verrons dans ce chapitre, face à certains problèmes numériques rencontrés avec TrioCFD (problème de vitesses parasites), nous avons également réalisé des simulations au moyen d'OpenFoam à des fins de vérification et de comparaison. Dans une première partie de ce chapitre, nous décrivons brièvement les méthodes numériques utilisées par les outils de calcul. Puis, nous nous intéresserons à divers cas tests de validation de complexité croissante. Nous présentons tout d'abord le cas test analytique de la coalescence étudié en 2D avec TrioCFD. Ensuite, nous considérerons le cas expérimental issu de la littérature de la génération d'une bulle d'air dans une cuve remplie d'eau et nous comparerons les résultats et les performances de TrioCFD et d'OpenFoam (3D et 2D axisymétrique). Enfin, nous nous intéresserons à un exemple de vidange instationnaire et nous discuterons de la faisabilité de la simulation numérique d'expériences faisant intervenir le phénomène d'arrachement.

6.2 Outils de calcul et méthodes numériques

Au cours des dernières décennies, l'évolution notable des ressources de calcul et des méthodes numériques a rendu possible la simulation des écoulements multiphasiques avec suivi des interfaces dans des systèmes de plus en plus complexes. Dans ce contexte, diverses approches, dont nous donnons ici quelques exemples, sont employées pour modéliser la déformation complexe de l'interface liquide/gaz.

Les méthodes de suivi ou de capture d'interface résolvent généralement un unique ensemble d'équations de Navier-Stokes, traitant alors le système comme un fluide unique dont les propriétés sont déterminées par la position de l'interface.

Dans les méthodes de capture d'interface, l'approche Volume-Of-Fluid (VOF) [42] utilise la fraction volumique advectée sur le maillage eulérien pour localiser l'interface. Le solveur InterFoam d'OpenFoam, détaillé ultérieurement, appartient à cette catégorie de méthodes. L'approche Level-Set (LS) [79] utilise, quant à elle, une fonction de distance signée qui s'annule au niveau de l'interface. Celle-ci sera ou non reconstruite à partir de l'interpolation de ces données.

Les méthodes de suivi d'interface emploient un maillage lagrangien mobile pour modéliser et advecter explicitement l'interface en utilisant le champ d'écoulement résolu sur le maillage eulérien. Les données calculées sur les deux maillages sont alors couplées. La

méthode Front-Tracking [112, 110, 50], utilisée dans TrioCFD, est un exemple typique de cette catégorie, où l'interface est suivie de manière explicite par des marqueurs lagrangiens sur une grille sous-jacente.

Les méthodes à maillages mobiles permettent de combiner les avantages des approches précédentes. La méthode Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) [43, 83] propose, par exemple, de calculer les équations de Navier-Stokes sur un unique maillage adaptatif qui se déforme avec l'interface. Ces méthodes sont cependant complexes à mettre en œuvre, notamment pour modéliser des interfaces très déformées.

Ces différentes méthodes qui intègrent un maillage eulérien pour discrétiser le domaine de calcul sont compatibles avec tous les schémas de discrétisation spatiale [64], tels que les Éléments Finis [30] ou les Méthodes de Boltzmann sur Réseau (LBM : Lattice Boltzmann Methods) [95, 36].

Enfin, certaines méthodes utilisent une discrétisation particulière des écoulements. Par exemple, les méthodes de suivi de particules (SPH : Smoothed Particle Hydrodynamics) [37, 62], représentent les fluides par des particules de masse fixe interagissant à distance. Ces particules peuvent alors occuper n'importe quelle position du domaine étudié.

6.2.1 La méthode Front-Tracking de TrioCFD

TrioCFD est un logiciel polyvalent de Dynamique des Fluides Numérique, développé au CEA depuis près de 30 ans. Ce logiciel est spécialisé dans la simulation d'écoulements incompressibles ou faiblement compressibles (bas-Mach), qu'ils soient stationnaires ou instationnaires et diphasiques, avec une application principale dans le domaine nucléaire (thermo-hydraulique des réacteurs), mais son utilisation ne s'y limite pas. Comme pour la méthode VOF d'OpenFOAM qui sera présentée dans la suite, la méthode Front-tracking [110] de TrioCFD utilise une formulation monofluide dont la description complète est donnée dans différentes thèses [65, 108, 11]. Chaque grandeur physique g_k est alors définie dans la phase k , telle que :

$$g = \sum_{k=1}^2 \chi_k g_k \quad (6.1)$$

avec χ_k la fonction indicatrice de phase qui vaut 1 si la phase k est présente et 0 en dehors.

Pour obtenir la formulation monofluide, les équations de continuité et de Navier-Stokes sont exprimées dans chaque phase puis multipliées par la fonction indicatrice de phase χ_k et sommées, il vient :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho\vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{u}) + (\nabla\vec{u}^T)] + \sigma\kappa\vec{n}\delta^i \quad (6.3)$$

Avec δ^i la distribution de Dirac localisée à l'endroit de la discontinuité.

Contrairement à la méthode VOF d'OpenFOAM, la méthode de Front-Tracking implémentée dans TrioCFD consiste en l'utilisation de deux maillages pour décrire les écoulements diphasiques. D'un côté, un maillage eulérien fixe, utilisé, lui aussi, dans les méthodes de capture d'interface, permet d'effectuer les calculs numériques des champs de pression et de vitesse dans chaque phase. De l'autre, un maillage lagrangien mobile permet une meilleure description de la forme de l'interface, et donc du calcul des forces s'exerçant à l'interface entre les deux fluides. Cette dernière est discrétisée avec des marqueurs sans masse, qui sont déplacés par un système d'aller-retour (interpolation et extrapolation) utilisant les propriétés physiques calculées sur le maillage Eulérien.

Afin d'assurer la conservation du volume de chaque phase, cette approche de Front-Tracking est combinée au niveau local de l'interface avec une méthode conservative de type capture d'interface. Le transport de l'interface obtenue à partir de la vitesse interpolée est alors suivie d'une étape de correction qui entraîne un second déplacement de l'interface, généralement bien plus faible [65].

6.2.2 La méthode Volume-Of-Fluid d'OpenFOAM

OpenFoam est un code libre d'accès sous licence GNU disponible depuis 2004. Il utilise une méthode de capture d'interface de type Volume of Fluid. Ce genre de méthode est réputé pour être moins coûteuse qu'une méthode de suivi d'interface, mais également moins précise. OpenFoam offre, de plus, la possibilité d'effectuer des simulations numériques en 2D axisymétrique, ce qui permet un gain considérable en termes de temps calcul et de nombre de processeurs utilisés lorsque les géométries étudiées le permettent.

Les méthodes numériques implémentées dans OpenFOAM sont présentées en détail dans l'article de Deshpande [25] et dans la documentation en ligne ¹.

La méthode VOF implémentée dans le solveur InterFoam utilise la fraction volumique α_{phase} . Cette grandeur est définie comme le rapport du volume d'une phase de référence (la phase liquide par exemple) sur le volume total considéré. Numériquement, les équations de Navier-Stokes sont exprimées, comme précédemment, dans une formulation monofluide et la masse volumique d'une maille s'écrit telle que :

$$\rho = \alpha_{phase}\rho_l + (1 - \alpha_{phase})\rho_g \quad (6.4)$$

où α_{phase} est la fraction volumique de la maille, ρ_l la masse volumique de la phase liquide et ρ_g celle de la phase gazeuse.

Il est ensuite possible de réécrire ce bilan local grâce à l'équation de continuité. On obtient alors les équations de transport de la fraction volumique dans les phases gazeuse et liquide :

$$\frac{\partial \alpha_{phase}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_{phase} \vec{u}_l) = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial (1 - \alpha_{phase})}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \alpha_{phase}) \vec{u}_g) = 0 \quad (6.6)$$

Ces équations peuvent être résolues numériquement avec les discrétisations temporelles et spatiales adaptées. Cependant, la résolution directe de cette équation aux dérivées partielles n'est pas optimale, car elle peut entraîner des problèmes de diffusion numérique de l'interface. En effet, la définition de l'interface à partir de la fraction volumique est discontinue. Il est alors nécessaire de limiter l'étalement des valeurs de la fraction massique sur le maillage pour éviter sa diffusion. En introduisant la vitesse relative entre les deux phases $\vec{u}_r = \vec{u}_l - \vec{u}_g$, un terme dit de "compression d'interface" permet de réécrire l'équation (6.6) :

$$\frac{\partial \alpha_{phase}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_{phase} \vec{u}) + \nabla \cdot (\alpha_{phase} (1 - \alpha_{phase}) \vec{u}_r) = 0 \quad (6.7)$$

Pour que cette correction ne s'applique qu'à l'interface, le terme de compression d'interface est nul sauf au niveau de la zone interfaciale. Il permet d'éviter le phénomène de diffusion ou de lissage de la discontinuité en 'compressant' l'interface. L'équation (6.7) est ensuite intégrée sur chaque maille de volume V_i [25] nécessitant le calcul des flux volumiques entrant et sortant de la maille par toutes ses faces.

La méthode VOF conserve donc la masse puisqu'elle est établie à partir des formes intégrales des équations résolues exprimées en forme conservative. Le flux total lié au terme

¹<https://openfoamwiki.net/index.php/InterFoam>

de compression est calculé à partir d'un coefficient limiteur implémenté dans le solveur MULES (*Multidimensional Universal Limiter with Explicit Solution*), dont la valeur vaut 1 au niveau de l'interface et 0 dans le reste du volume. Le limiteur permet ici de traiter le transport de la fraction volumique avec un schéma décentré amont dans le domaine fluide. Ainsi, la diffusion de l'interface peut être limitée tout en maintenant un temps de calcul raisonnable pour la correction de l'interface.

Dans InterFoam, les effets de la tension de surface sont modélisés avec la méthode Continuum Surface Force (CSF). Dans les simulations numériques, il est souvent difficile de traiter directement les forces surfaciques, comme la tension de surface, en raison de la discrétisation du domaine. La méthode CSF contourne ce problème en reformulant la force surfacique comme une force volumique qui peut être intégrée dans les équations de Navier-Stokes résolu pour les deux phases grâce à la fraction volumique α_{phase} .

6.3 Premier cas test de validation : la coalescence

Parmi l'ensemble des tests de validation que nous avons réalisés qui présentent une solution analytique, tel le cas de la goutte posée ou celui de la goutte oscillante, nous avons choisi de présenter ici la coalescence de deux gouttes. Cette étude est particulièrement intéressante, car elle permet de tester les performances de TrioCFD dans une situation critique où les phases fusionnent. En effet, la coalescence, à l'instar de la séparation de phase qui peut se produire lors du phénomène d'arrachement de bulles, peut poser des problèmes de simulation numérique [49].

D'un point de vue physique, la coalescence prend naissance à l'échelle du nanomètre lors de la mise en contact de deux gouttelettes sous l'effet des forces de Van der Waals et se développe à l'échelle du micromètre sous l'effet de la tension de surface. Afin de minimiser l'énergie de surface, la surface partagée par les deux anciennes gouttes doit être minimale. Le pont reliant les deux gouttelettes s'accroît alors très rapidement sous l'effet de la dépression localisée au niveau de cette singularité.

6.3.1 Solution analytique pour le cas 2D (Régime de Stokes)

Hopper présente en 1984 [45] la solution analytique de la coalescence de deux cylindres infinis identiques (de deux disques en 2D), visqueux, sans fluide extérieur (ou pour un fluide extérieur dont on peut négliger la viscosité) placés tangentiellement l'un à côté de l'autre à l'instant initial.

Soit $R_i = \frac{R_0}{\sqrt{2}}$ le rayon initial des gouttes, ρ la masse volumique de l'eau, σ la tension de surface, μ la viscosité dynamique du fluide, \tilde{t} le temps adimensionné tel que $\tilde{t} = \frac{t\sigma}{\mu R_0}$.

L'équation paramétrique de l'interface s'exprime sous la forme d'une ellipse inverse et s'écrit :

$$x = R_0 \left((1 - n^2)(1 + n^2)^{-0.5}(1 + 2n \cos(2\theta) + n^2)^{-1} \right) (1 + n) \cos(\theta) \quad (6.8)$$

$$y = R_0 \left((1 - n^2)(1 + n^2)^{-0.5}(1 + 2n \cos(2\theta) + n^2)^{-1} \right) (1 - n) \sin(\theta) \quad (6.9)$$

où l'angle θ vérifie $0 \leq \theta < 2\pi$ et n est un paramètre réel tel que $0 \leq n < 1$. Une visualisation de ces profils paramétriques est donnée à la Figure 6.1a pour différentes valeurs du paramètre n . Dans cette équation paramétrique, n dépend du temps et Hopper exprime leur relation sous la forme :

$$\tilde{t} = \int_{n^2}^1 \frac{\pi}{4} (\eta(1 + \eta)^{0.5} K(\eta))^{-1} d\eta \quad (6.10)$$

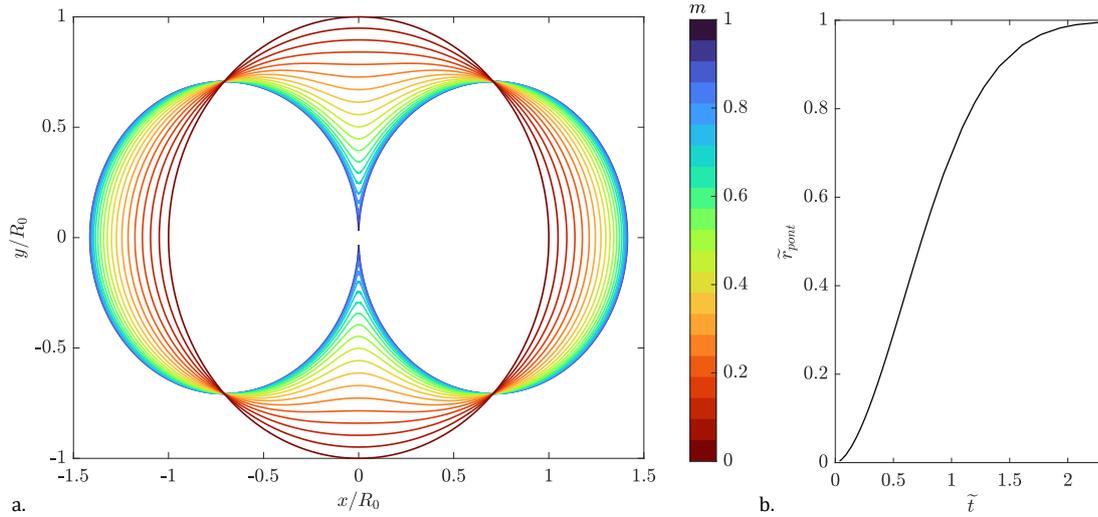


FIGURE 6.1 : a. Profils paramétriques pour différentes valeurs du paramètre n dont la valeur est représentée par colorimétrie. b. Évolution temporelle du rayon \tilde{r}_{pont} donné par l'équation 6.12.

avec :

$$K(\eta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \sin^2(\theta))^{-0.5} d\theta \quad (6.11)$$

On remarquera que $n = 1$ pour $t = 0$ et l'on retrouve alors la position initiale des gouttes (cf. Figure 6.1a pour $n = 0$). Le rayon de la jonction entre les deux cylindres (cas 2D) ou entre les gouttes (cas 3D) est noté r_{pont} . On pose ici : $\tilde{r}_{\text{pont}} = r_{\text{pont}}/R_0$. Hopper exprime alors ce rayon adimensionné tel que :

$$\tilde{r}_{\text{pont}} = (1 - n)(1 + n^2)^{-1/2} \quad (6.12)$$

Par développement asymptotique aux premiers instants ($\tilde{r}_{\text{pont}} \ll 1$), son expression se simplifie, telle que [48] :

$$\tilde{r}_{\text{pont}} = \frac{\tilde{t}}{\pi} \ln(\sqrt{2\tilde{t}}) \quad (6.13)$$

La Figure 6.1b représente l'évolution temporelle du rayon \tilde{r}_{pont} donné par l'équation 6.12. La solution donnée par Hopper peut être généralisée dans le cas de deux cylindres de rayons différents [46]. Dans un second temps, Hopper [47] présente des résultats complémentaires pour la courbure, la pression et la forme de l'interface ; seul le champ de vitesse dans le fluide n'est pas abordé.

6.3.2 Simulation numérique avec TrioCFD

Plusieurs simulations ont été réalisées avec TrioCFD (en 2D). Nous comparons ici le profil des gouttes obtenu avec le modèle analytique donné par les équations (6.8)-(6.9).

Dans le cas test présenté ici, le rayon des gouttes est $R_i = 0.2$ mm, la tension de surface est de 0.7 mN.m⁻¹, la masse volumique est de 1000 kg.m⁻³ et 0.01 Pa.s. La viscosité de l'air est fixée nulle. Le domaine maillé est une boîte carrée de 1 mm de côté. Le maillage est davantage raffiné au centre du domaine (autour du point de contact initial entre les gouttes) et la taille des mailles Δx vérifie $1.4 \times 10^{-6} \leq \Delta x \leq 2.4 \times 10^{-6}$ m (soit environ 250000 mailles). Le pas de temps est de l'ordre de 10^{-9} s. Le calcul a été réalisé sur une station de travail avec neuf processeurs pour un temps de calcul physique de 10 jours.

Nous avons remarqué que le niveau de discrétisation au point de contact initial avait une influence sur la dynamique simulée de la coalescence. En effet, alors que la forme de l'interface analytique est constituée de deux cercles jointifs en un unique point en $t = 0$ s, un pont dont la taille dépend de la discrétisation est déjà formé dans le cas de la simulation numérique. Les conditions initiales de la coalescence sont donc décalées (en avance) dans le cas de la simulation par rapport au modèle analytique d'Hopper pour lequel le contact à $t = 0$ s est équivalent à $\tilde{r}_{\text{pont}} = 0$. Il est possible de réduire ce décalage en raffinant davantage le maillage. Ceci induit l'utilisation d'un pas de temps plus petit et des calculs d'autant plus longs et il a été choisi de ne pas pousser plus loin ces calculs.

Nous avons tracé l'évolution du profil de l'interface à différents instants en comparaison du modèle analytique d'Hopper en tenant de ce décalage temporel à la Figure 6.2. L'accord entre les simulations et le modèle est satisfaisant. Il est donc possible de simuler le phénomène de coalescence avec TrioCFD, les écarts pouvant être attribués à une discrétisation insuffisante et à l'application non idéale du modèle d'Hopper.

6.4 Second cas test de validation : Formation d'une bulle d'air

De façon analogue à la coalescence, le fractionnement d'une phase en plusieurs phases est un point délicat pour les codes numériques qui traitent des problèmes à deux phases. Des divisions précoces peuvent, en effet, survenir ou à l'inverse ne pas se produire alors qu'elles sont attendues. Ce problème peut être dû à la discrétisation et dépend également des algorithmes utilisés. Ce problème nous intéresse particulièrement ici afin de déterminer quelle discrétisation est nécessaire pour modéliser le phénomène d'arrachement de bulles sans artefacts numériques. La simulation numérique présentée ici utilise les travaux de Mirsandi [69] et Albadawi [2, 1] qui présentent des comparaisons de résultats expérimentaux et numériques de la formation d'une bulle d'air dans un réservoir d'eau par injection au travers d'un orifice. Nous proposons une étude comparative des performances des codes TrioCFD et OpenFoam. Ce travail a notamment fait l'objet d'un stage encadré pendant cette thèse et réalisé par Yanis Bendali, étudiant en dernière année d'école d'ingénieur.

6.4.1 Position du problème

Nous considérons ici la formation d'une bulle d'air dans une cuve remplie d'eau. La bulle se forme par une injection d'air à débit constant au travers d'un orifice, son volume s'agrandit jusqu'à son détachement (cf. Figure 6.3).

Pour un débit d'injection d'air Q constant, le volume de la bulle formée va augmenter linéairement. Lorsque ce débit est suffisamment petit, i.e. inférieur à un débit critique $Q_c = \pi \left(\frac{16}{3g^2}\right)^{1/6} \left(\frac{\sigma R_c}{\rho_l}\right)^{5/6} \approx 1.82 \times 10^{-6} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$ décrit par Oguz [75], le régime de l'écoulement est quasi-statique. Ainsi, le bilan des forces statiques s'appliquant sur la bulle est le suivant :

- la force de flottabilité (résultante du poids et de la poussée d'Archimède) : $F_B = (\rho_l - \rho_g)Vg$
- les forces de pression : $F_{CP} = \pi R_c^2(p_g - p_T)$
- la force capillaire : $F_C = 2\pi\sigma R_c \sin(\theta)$
- la force de traînée représentant les effets inertiels et visqueux de la phase liquide au niveau de l'interface F_D

Ici, g est l'accélération de la pesanteur, V le volume de la goutte, ρ_l et ρ_g les masses volumiques des phases liquide et gazeuse, R_c le rayon de l'orifice, σ la tension de surface

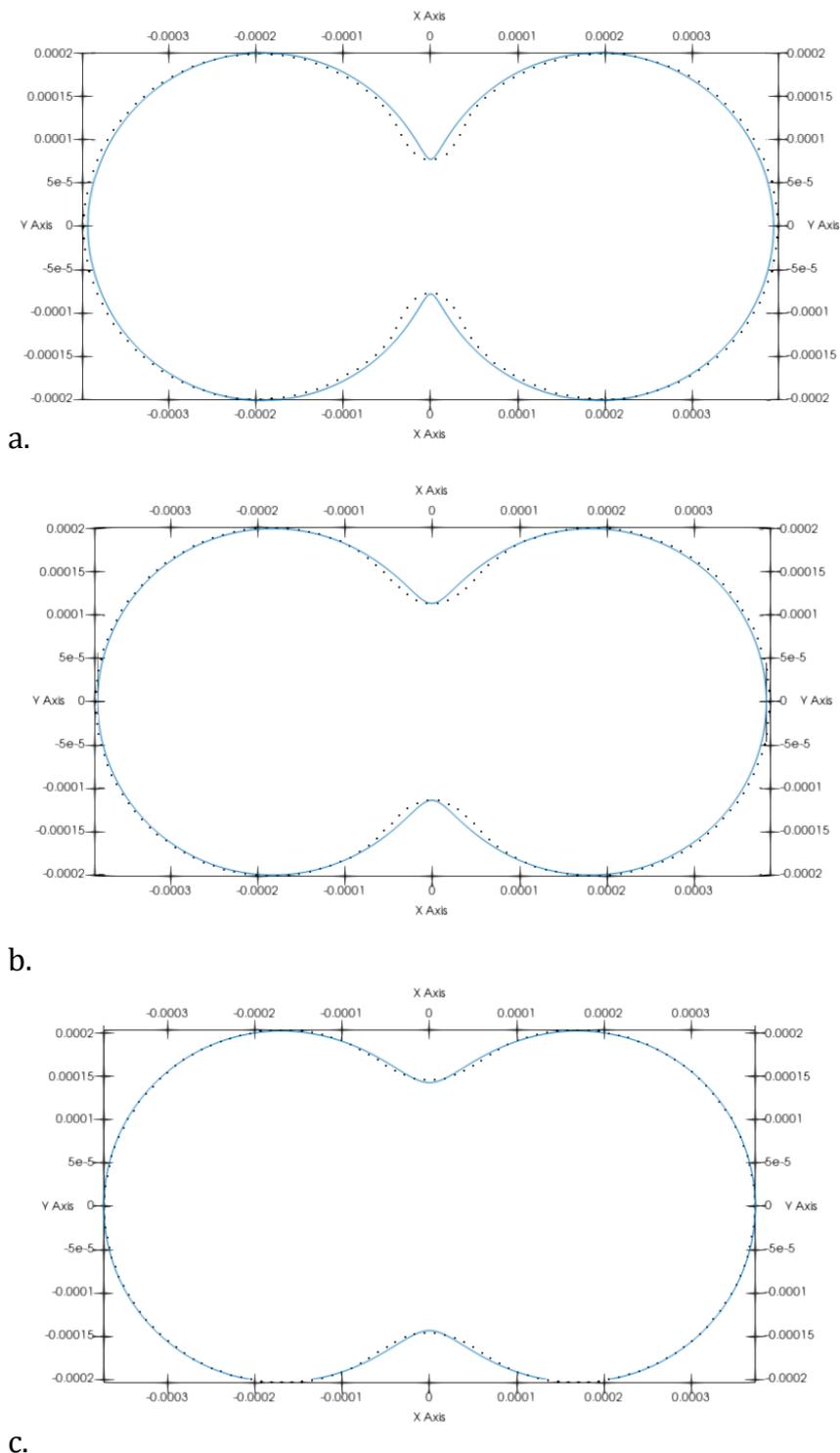


FIGURE 6.2 : a. Profils paramétriques pour (a) $t = 0.001$ s, (b) $t = 0.004$ s et (c) $t = 0.008$ s. La représentation paramétrique d'Hopper est donnée en trait continu bleu, les résultats numériques sont en pointillés. Le décalage temporel induit par la discrétisation en $t = 0$ s est pris en compte dans les profils comparés.

liquide/gaz, θ l'angle de contact au niveau de l'orifice, p_g la pression du gaz à l'intérieur de la bulle et p_T la pression du liquide au sommet de la bulle [1].

Initialement, la forme de la bulle résulte principalement d'un équilibre entre la force capillaire et les forces de pression. Lorsque le volume de la bulle s'agrandit, la force de flottabilité s'appliquant à l'interface devient plus importante et la force capillaire diminue. L'interface va se déformer de plus en plus jusqu'à prendre une forme de "montgolfière" avec une zone basse pincée de rayon minimal r_{neck} . Ce rayon diminue progressivement jusqu'à disparaître avec le détachement de la bulle qui a lieu à l'instant t_{det} pour un volume de bulle V_{det} . La naissance de cette région de pincement est à l'origine du terme "Pinch-off" utilisé pour décrire ce phénomène dans la littérature.

6.4.2 Mesures expérimentales de référence

Contrairement à l'étude précédente, il n'existe pas de modèle analytique pour décrire la formation d'une bulle d'air. Toutefois, plusieurs expériences de références ont été menées, notamment par Albadawi [2, 1], afin de valider les modèles de simulation numérique utilisés pour la description de ce phénomène. Les données expérimentales d'Albadawi sont constitués de profils interfaciaux (donnés à la Figure 6.3), ainsi que du temps d'arrachement t_{det} , du volume de la bulle à cet instant critique V_{det} et de la position du centre de gravité de la bulle CG_{det} . Le montage expérimental décrit dans les travaux d'Albadawi est constitué d'un réservoir rempli d'eau de 20 mm de hauteur et de base carrée de côté 50 mm. Un orifice de rayon $R_c = 0.8$ mm est créé en acier inoxydable pour permettre l'injection d'air. Le débit volumique Q d'air injecté, de valeur ajustable $1.39 \times 10^{-8} \leq Q \leq 5.56 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, est maintenu constant pendant la durée de l'expérience par un système de régulation. Dans le cadre de notre travail, les simulations numériques ne seront effectuées que pour une unique valeur du débit $Q = 5.56 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$.

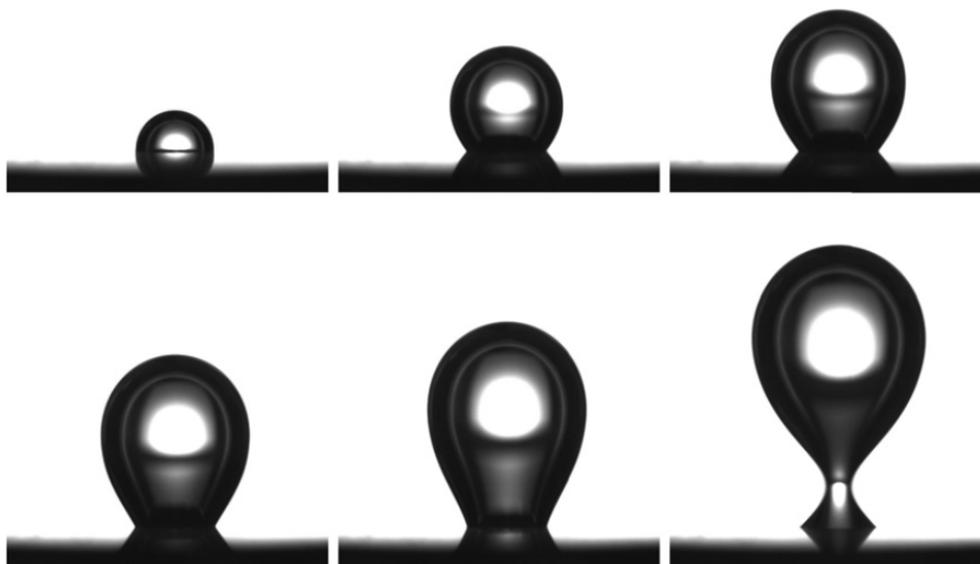


FIGURE 6.3 : Observation expérimentale des formes la bulle pour 6 instants de croissance différents $0, 0.2t_{det}, 0.4t_{det}, 0.6t_{det}, 0.8t_{det}, t_{det}$ avec $R_c = 0.8$ mm et $Q = 200$ mL/h, photos issues des travaux de Albadawi [1].

6.4.3 Simulations numériques avec TrioCFD

6.4.3.1 Paramètres physiques

Les valeurs de références pour les grandeurs physiques de l'eau et de l'air à 20° sont utilisées ici :

Liquide : Eau, $\rho_l = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu_l = 10^{-3} \text{ Pa s}$
 Gaz : Air, $\rho_g = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $\mu_g = 1.79 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$
 Interface : Eau/Air, $\sigma = 0.073 \text{ J/m}^2$

6.4.3.2 Géométrie du problème

Le domaine de simulation est constitué d'une boîte cylindrique de 4 mm de rayon et 8 mm de hauteur, dont la paroi solide inférieure est percée d'un orifice circulaire de rayon $R_c = 0.8 \text{ mm}$. Une coupe 2D de ce domaine est représentée sur la Figure 6.4. Contrairement aux travaux de simulation numérique d'Albadawi ([2] et [1]), un domaine 3D est considéré ici, et l'approximation d'axisymétrie ne sera pas réalisée dans le cadre de la simulation réalisée avec TrioCFD.

6.4.3.3 Conditions aux limites et condition initiale

Initialement, on considère que la bulle a la forme d'une demi-sphère de rayon R_c au niveau de l'orifice. Cette hypothèse est nécessaire, car le système d'injection d'air n'est pas modélisé dans le domaine, ce qui est aussi le cas dans [2] et [1].

Les conditions aux limites imposées s'inspirent également des travaux de [2] et [69]. Les faces latérales et inférieure du domaine (excepté l'orifice) sont considérées comme des parois solides avec une condition de non-glissement. La face supérieure est ouverte, la pression y est équivalente à la valeur de la pression atmosphérique $P = P_a = 101\,325 \text{ Pa}$. Le profil de vitesse à l'orifice, qui est laminaire dans les expériences effectuées, est donc imposé, tel que :

$$\vec{u}(x, y) = \frac{2Q}{\pi R_c^2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R_c^2} \right) \vec{e}_x \quad (6.14)$$

Des conditions de symétries sont imposées pour l'angle de contact sur les parois latérales et supérieure, la bulle n'étant pas en contact direct avec celles-ci. Sur la paroi inférieure, la bulle est uniquement en contact avec le bord de l'orifice. D'un point de vue expérimental, son angle de contact instantané varie (cf. Figure 6.3). Il est impossible d'utiliser des conditions aux limites dynamiques pour l'angle de contact dans TrioCFD. Pour contourner cette limitation, nous avons choisi des conditions aux limites différentes sur la paroi et au niveau de l'orifice. L'angle de contact est alors imposé à 180° sur la paroi solide et 10° sur la surface de l'orifice. Cette technique permet à l'angle de contact instantané situé à la frontière de ces deux zones de varier.

6.4.3.4 Résolution numérique

Nous souhaitons réaliser l'étude de la convergence de TrioCFD en prenant en référence les résultats expérimentaux disponibles. Il est à noter qu'il ne s'agit pas ici de réaliser une étude de convergence en maillage au sens mathématiques appliquées du terme qui nécessite la simulation d'un problème dont on connaît une solution analytique, mais de définir un niveau de discrétisation minimal à utiliser pour simuler correctement les résultats expérimentaux. Le maillage du domaine eulérien est un maillage uniforme et structuré (mailles

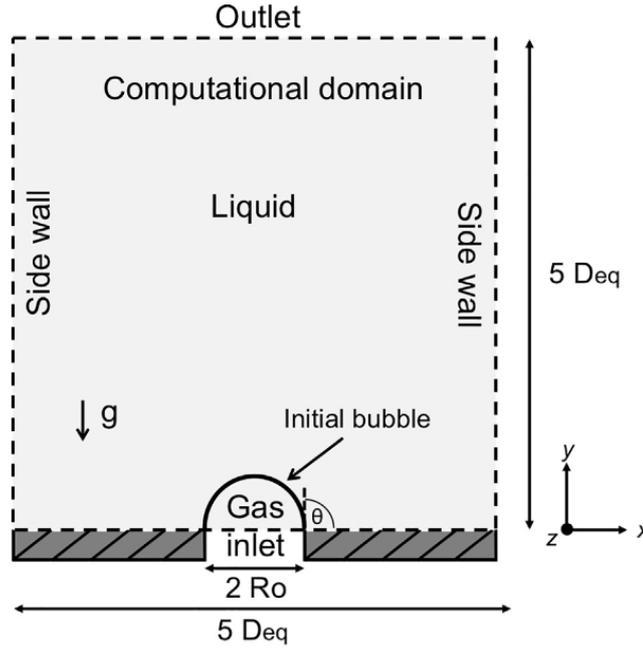


FIGURE 6.4 : Domaine de simulation avec conditions initiale et aux limites, schéma issu de [69]

cubiques) dont le pas d'espace varie entre 0.1 et 0.25 mm. L'orifice n'a donc pas une forme parfaitement circulaire. La spécificité de la méthode Front-Tracking est qu'elle nécessite l'utilisation d'un second maillage mobile (lagrangien) pour décrire l'interface et sa dynamique [65]. Les options disponibles de TrioCFD permettent de choisir plusieurs paramètres ayant une influence sur le remaillage lagrangien de l'interface. Pour notre simulation, une méthode Volume-finis (VDF) est utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles. La résolution numérique de ce cas test se fait en Résolution Numérique Directe (DNS) et ainsi, on ne considère pas de modèles de turbulence. La tolérance du solveur en pression est fixée à 1×10^{-12} Pa et nous utilisons un facteur de préconditionnement 1.5. La discrétisation en temps est réalisée avec un schéma d'Euler explicite. La discrétisation en espace est implémentée avec un schéma QUICK d'ordre 3 pour le terme de convection et un schéma centré d'ordre 2 pour le terme de diffusion. La méthode de suivi d'interface utilisée est une méthode de suivi lagrangienne couplée Front-Tracking/VOF implémentée dans TrioCFD [65]. Les erreurs numériques et de discrétisation de ces méthodes de résolution d'écoulements diphasiques amènent généralement à l'apparition de courants parasites [82, 110]. En particulier, l'intensité des courants parasites augmente lorsque le nombre adimensionné d'Ohnesorge diminue [27] :

$$Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\sigma \rho_l D_0}} \quad (6.15)$$

Dans les configurations étudiées, $Oh = 3.7 \times 10^{-3}$.

6.4.3.5 Résultats numériques

Nous avons choisi d'étudier la convergence avec un pas de temps constant $\Delta t = 1.5 \times 10^{-6}$ s, permettant d'assurer la stabilité numérique des 6 discrétisations spatiales réalisées. Ce choix permet de vérifier la bonne convergence spatiale de TrioCFD pour le cas étudié et d'estimer l'ordre de cette convergence.

Cependant, cette étude est effectuée en prenant des résultats expérimentaux pour référence

et non un modèle analytique. Ainsi, il est possible que les modèles numériques utilisés ne prennent pas en compte certains effets physiques qui interviennent au cours des expériences. Par exemple, l'air n'est pas un fluide incompressible, mais il est modélisé comme tel dans TrioCFD. La simulation peut donc converger vers une solution différente des données expérimentales à cause de ces simplifications. Par ailleurs, ces valeurs expérimentales possèdent une incertitude liée aux méthodes de mesure et aux instruments utilisés. Cependant, dans l'étude d'Albadawi aucune estimation de l'erreur sur le diamètre de l'orifice utilisé ou sur le débit d'injection réel n'est donné. Seules la fréquence d'acquisition de la caméra de 1000 Hz et sa précision estimée à $\pm 1 \text{ pixel} \approx \pm 0.0134 \text{ mm}$ sont référencés et il est donc impossible d'estimer l'incertitude sur les mesures expérimentales des différentes grandeurs étudiées lors du détachement.

Pour l'analyse réalisée ici, l'instant de détachement de la bulle sera pris comme le dernier instant numérique où la bulle est encore accrochée à l'orifice. Cet instant est connu avec une précision de 0.5 ms qui correspond au pas de temps de stockage des données. Nous définissons l'erreur numérique, pour les différentes grandeurs étudiées (temps t_{det} , volume V_{det} et centre de gravité lors du détachement CG_{det}) à partir des données expérimentales de référence, telles que :

$$Et_{\text{det}} = \frac{t_{\text{det}}^{\text{num}} - t_{\text{det}}^{\text{exp}}}{t_{\text{det}}^{\text{exp}}} \times 100 \quad (6.16)$$

$$Evol_{\text{det}} = \frac{V_{\text{det}}^{\text{num}} - V_{\text{det}}^{\text{exp}}}{V_{\text{det}}^{\text{exp}}} \times 100 \quad (6.17)$$

$$Ecg_{\text{det}} = \frac{CG_{\text{det}}^{\text{num}} - CG_{\text{det}}^{\text{exp}}}{CG_{\text{det}}^{\text{exp}}} \times 100 \quad (6.18)$$

TABLE 6.1 : Caractéristiques du détachement de la bulle pour chaque simulation

Méthode	t_{det} (s)	V_{det} (mm ³)	CG_{det} (mm)	Et_{det}	$Evol_{\text{det}}$	Ecg_{det}
Expériences [2]	0.523	30.074	3.611	0	0	0
$\Delta x = 0.3 \text{ mm}$	0.391	21.952	2.967	-25.334	-27.008	-17.822
$\Delta x = 0.25 \text{ mm}$	0.476	27.016	3.279	-8.986	-10.169	-9.195
$\Delta x = 0.2 \text{ mm}$	0.432	24.736	3.215	-17.495	-17.750	-10.978
$\Delta x = 0.15 \text{ mm}$	0.493	28.217	3.402	-5.832	-6.174	-5.782
$\Delta x = 0.1 \text{ mm}$	0.496	28.429	3.454	-5.162	-5.469	-4.350

Le tableau 6.1 présente ces écarts pour toutes les simulations réalisées. Nous constatons que les erreurs pour chaque caractéristique du détachement numérique ont des valeurs similaires pour un pas d'espace fixé. De plus, l'erreur est globalement décroissante avec la diminution du pas d'espace Δx et varie de 20%, pour le cas le moins raffiné, à 5% pour le cas le plus raffiné. Les graphiques donnés en échelle log-log aux Figures 6.5a-c permettent d'étudier plus précisément la convergence de ces différentes grandeurs.

Un ajustement linéaire en échelle log-log a été réalisé pour déterminer l'ordre de convergence. Il a été évalué entre 1.2 et 1.3. Cependant, il n'est pas évident de conclure sur la linéarité en échelle log-log de la décroissance des trois erreurs grandeurs étudiées, des simulations complémentaires seraient nécessaires.

Les travaux d'Albadawi [2, 1] présentent également des photos du profil de la bulle en fonction du temps, i.e. pour $t = 0$, $t = 0.2t_{\text{det}}$, $t = 0.4t_{\text{det}}$, $t = 0.6t_{\text{det}}$, $t = 0.8t_{\text{det}}$, $t = t_{\text{det}}$. La comparaison de ces profils expérimentaux avec nos données numériques est proposée en

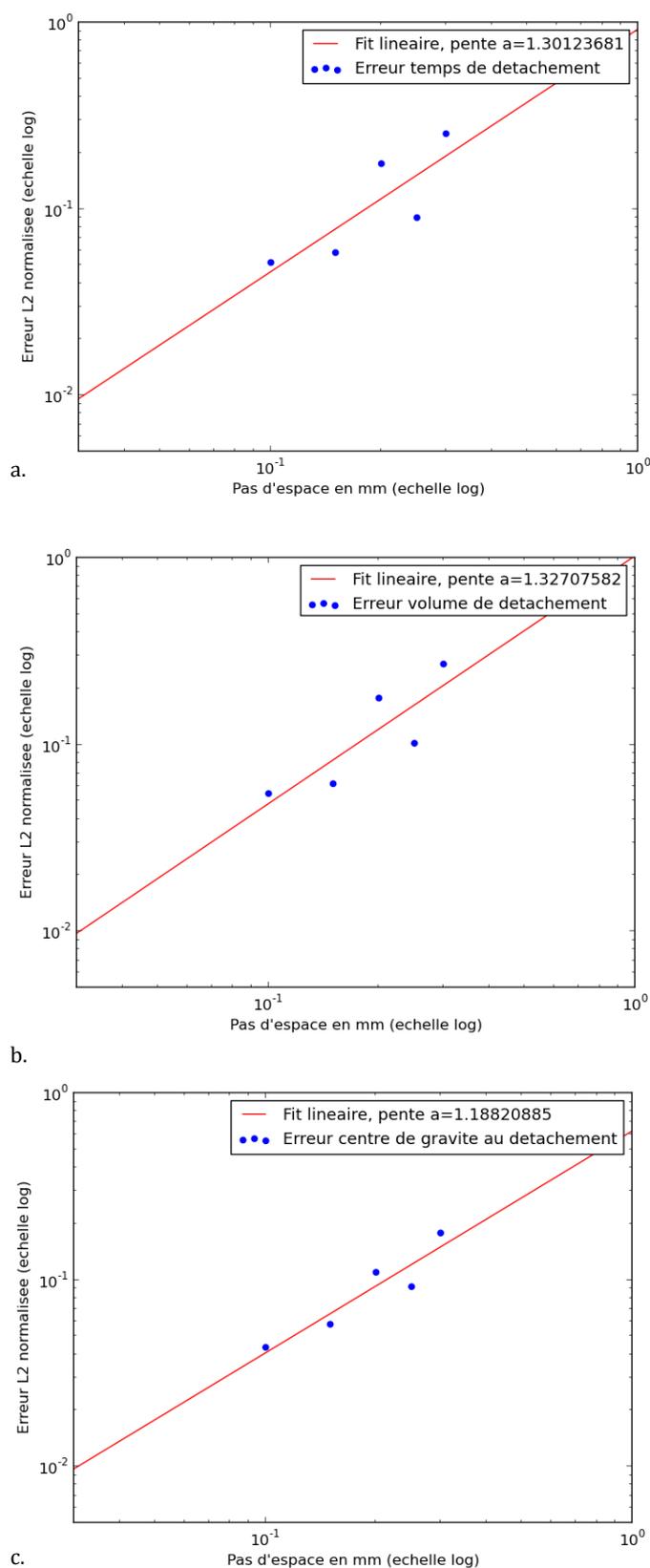


FIGURE 6.5 : Écarts entre les résultats de simulation et expérimentaux sur le temps de détachement (a), le volume (b) et la position du centre de gravité (c) lors du détachement en fonction du pas d'espace en échelle log-log pour des simulations réalisées avec TrioCFD. Un ajustement linéaire (en rouge) a été réalisé pour déterminer un ordre de convergence de chaque grandeur.

Figure 6.6.

On remarque une très grande similitude entre les profils numériques et expérimentaux. Pour toutes les discrétisations utilisées, la taille de la bulle simulée aux différents instants est sous-estimée. Cet écart devient de plus en plus marqué au fil du temps et la taille de la bulle au moment du détachement présente un écart d'environ 16% pour le maillage le plus grossier à 5% pour le maillage le plus raffiné avec une discrétisation d'au moins 16 mailles pour le diamètre de l'orifice.

Les erreurs obtenues dans la littérature par Albadawi [2, 1] avec des méthodes de capture de l'interface (VOF-Geo, CLSVOF-Geo, VOF-Comp) sont 2 à 5 fois plus grandes. Toutefois, les méthodes LS [2] et S-CLSVOF [1] permettent d'obtenir des erreurs 2 à 5 fois plus petites que celles du travail réalisé ici. Cependant, les incertitudes de mesures sont inconnues et il n'est donc pas évident de conclure sur les performances relatives des différents codes de calculs pour des erreurs inférieurs à 5%. Les travaux de Mirsandi [69] détaillent également les résultats obtenus avec une méthode de Front-Tracking assez comparable à celle de TrioCFD mais utilisant un remaillage plus fin de l'interface permettant notamment d'obtenir plus de points de discrétisation du maillage, mais également une meilleure gestion de la dynamique de l'angle de contact. Avec cette méthode de remaillage, les erreurs obtenues pour $\Delta x = 0.2$ mm sont de l'ordre de 2%, i.e. 9 fois plus petites que les résultats obtenus avec TrioCFD.

Au final, la méthode numérique de Front-Tracking/VOF de TrioCFD se présente comme une méthode efficace permettant d'apporter une bonne résolution de l'interface pour la croissance de la bulle avec une erreur de l'ordre de 5% pour le maillage le plus fin. La méthode de suivi utilisé par TrioCFD pourrait sans doute être améliorée par des méthodes de remaillages plus aboutis et une meilleure gestion de l'angle de contact.

6.4.4 Simulations numériques avec OpenFoam

Nous réalisons ici une étude de convergence, semblable à celle effectuée précédemment, avec le code OpenFoam dans les cas 3D et 2D axisymétrique. OpenFoam permet de réaliser des simulations axisymétriques en sélectionnant un secteur du domaine cylindrique. Ce secteur a un angle de 5° et il est composée d'une maille d'épaisseur finie dans la direction \vec{e}_θ .

Les maillages (pour le cas 3D), le pas de temps $\Delta t = 1.5 \times 10^{-6}$ s et les conditions aux limites utilisés sont identiques à l'étude précédente.

Les simulations 3D sont réalisées avec un pas d'espace variant de $\Delta x = 0.3$ mm à $\Delta x = 0.1$ mm. Les simulations 2D axisymétriques ont pu être menées avec des discrétisations plus raffinées, le pas d'espace pouvant atteindre $\Delta x = 0.025$ mm.

6.4.4.1 Résultats numériques du cas 3D

Les écarts obtenus sont représentés dans le Tableau 6.2. Ces écarts sont plus grands que dans l'étude précédente. Pour le maillage le plus grossier, elles peuvent atteindre 50% et ne descendent pas en dessous de 27% pour le temps et le volume de détachement et 12% pour le centre de gravité. Pour les discrétisations les plus grossières, les simulations présentent des effets de courants parasites qui perturbent la dynamique de l'interface. La bulle bouge sous l'effet de ces courants et sa formation n'est plus axisymétrique. Elle se détache alors prématurément de l'orifice d'injection. Seules les discrétisations les plus raffinées $\Delta x = 0.15, 0.1$ mm, pour lesquels les courants parasites sont moins intenses, permettent de maintenir le centre de gravité de la bulle sur l'axe (Oz) à chaque instant. Pour ces deux cas, il est alors possible de tracer les profils interfaciaux et de les comparer aux données expérimentales (cf. Figure 6.7). Les profils simulés sont alors qualitativement très semblables aux données expérimentales, avec un écart cependant plus marqué que celui observé avec

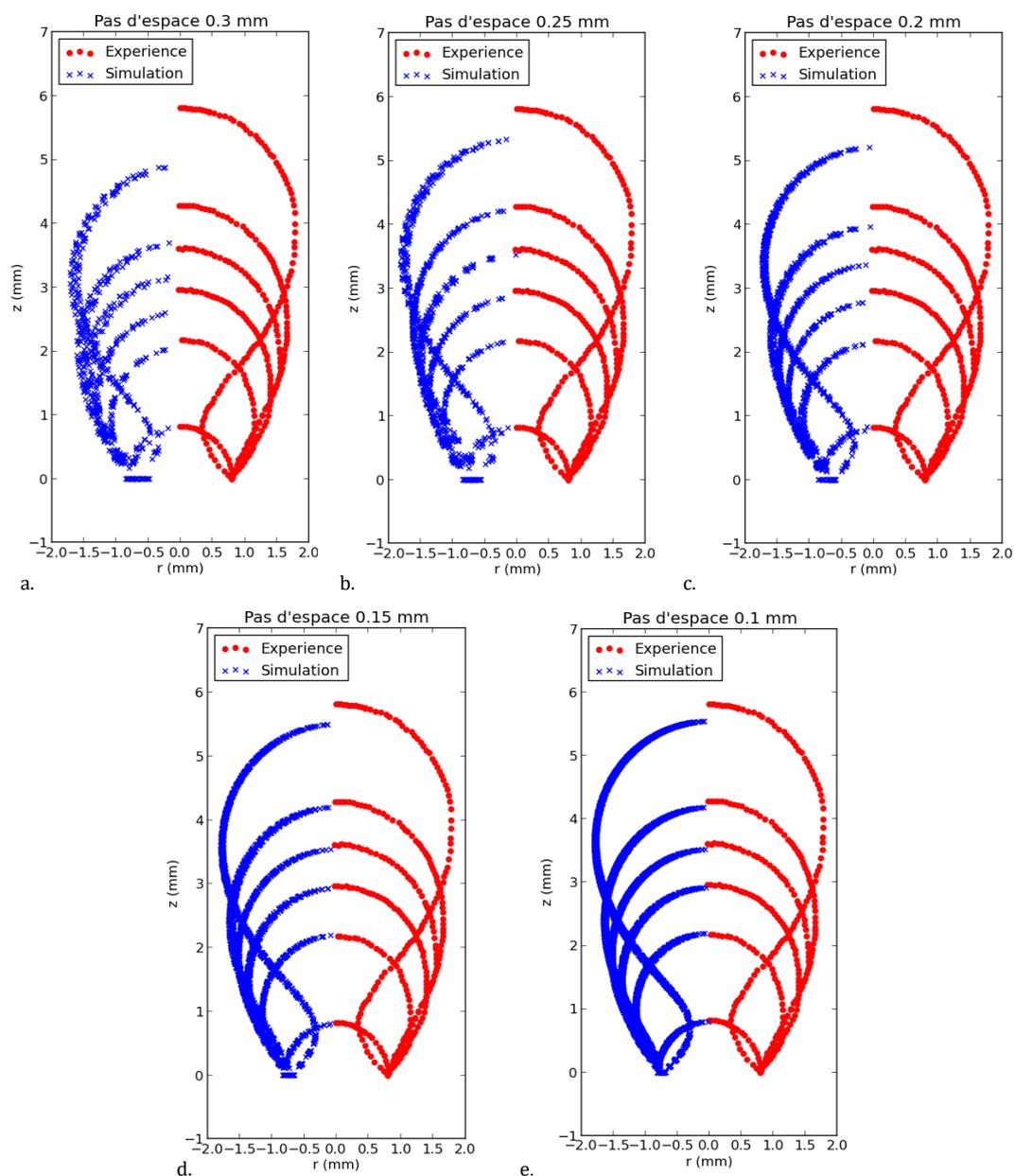


FIGURE 6.6 : Profils de l'interface à différents instants $0, 0.2t_{det}, 0.4t_{det}, 0.6t_{det}, 0.8t_{det}, t_{det}$. Les données numériques obtenues par les simulations réalisées avec TrioCFD sont en bleu. Les profils expérimentaux sont en rouge. La discrétisation du maillage est $\Delta x = 0.3$ mm (a), $\Delta x = 0.25$ mm (b), $\Delta x = 0.2$ mm (c), $\Delta x = 0.15$ mm (d) et $\Delta x = 0.1$ m (e).

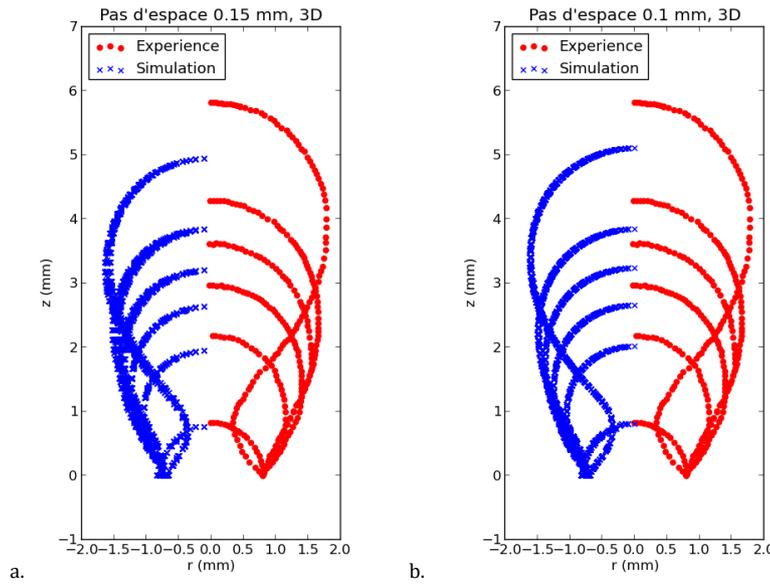


FIGURE 6.7 : Profils de l'interface à différents instants $0, 0.2t_{\text{det}}, 0.4t_{\text{det}}, 0.6t_{\text{det}}, 0.8t_{\text{det}}, t_{\text{det}}$. Les données numériques obtenues par les simulations réalisées avec OpenFoam 3D sont en bleu. Les profils expérimentaux sont en rouge. La discrétisation du maillage est $\Delta x = 0.15$ mm (a) et $\Delta x = 0.1$ mm (b).

TrioCFD. La taille de la bulle lors de son détachement présente en effet un écart d'environ 12% pour la discrétisation la plus raffinée ($\Delta x = 0.1$ mm). Comme avec TrioCFD, nous constatons que le volume de la bulle simulée est sous-estimé.

Comme précédemment, les graphiques donnés en échelle log-log à la Figure 6.8a-c permettent d'étudier la convergence de l'écart aux résultats expérimentaux sur le temps, le volume et le centre de gravité lors du détachement. Un ajustement linéaire en échelle log-log a été réalisé pour estimer l'ordre de convergence. Ce dernier est de 0.5 pour le temps et le volume de détachement et il est donc bien plus faible que les ordres de convergence estimés avec TrioCFD. Enfin, il est estimé à 1.2 pour le centre de gravité, ce qui est du même ordre que TrioCFD.

6.4.4.2 Résultats numériques du cas 2D

Les résultats des simulations 2D sont donnés dans le Tableau 6.3. L'expression du problème en deux dimensions permet à OpenFoam d'éliminer l'effet des courants parasites et de stabiliser le centre de gravité sur l'axe Oz. Cependant, les erreurs comparées aux données expérimentales restent très élevées pour des discrétisations bien plus raffinées que celles utilisées dans TrioCFD en 3D. La convergence des résultats de simulations 2D est représentée à la Figure 6.10a-c. L'ordre de convergence est de 0.15 pour les différentes grandeurs testées, ce qui est très faible. Il semble en effet qu'OpenFoam converge vers une solution différente des résultats expérimentaux obtenus, ce qui biaise l'estimation précédente. Les profils de l'étude 2D sont plus stables que dans l'étude 3D, mais présentent une forme plus irrégulière que ceux obtenus avec TrioCFD. Pour une discrétisation $\Delta x = 0.1$ mm, nous retrouvons un écart de taille lors du détachement de l'ordre de 12% comparable au cas 3D et un profil de l'interface qui suit qualitativement la forme autosimilaire des profils expérimentaux.

Notons que les résultats numériques obtenus par Albadawi [2] avec une méthode VOF

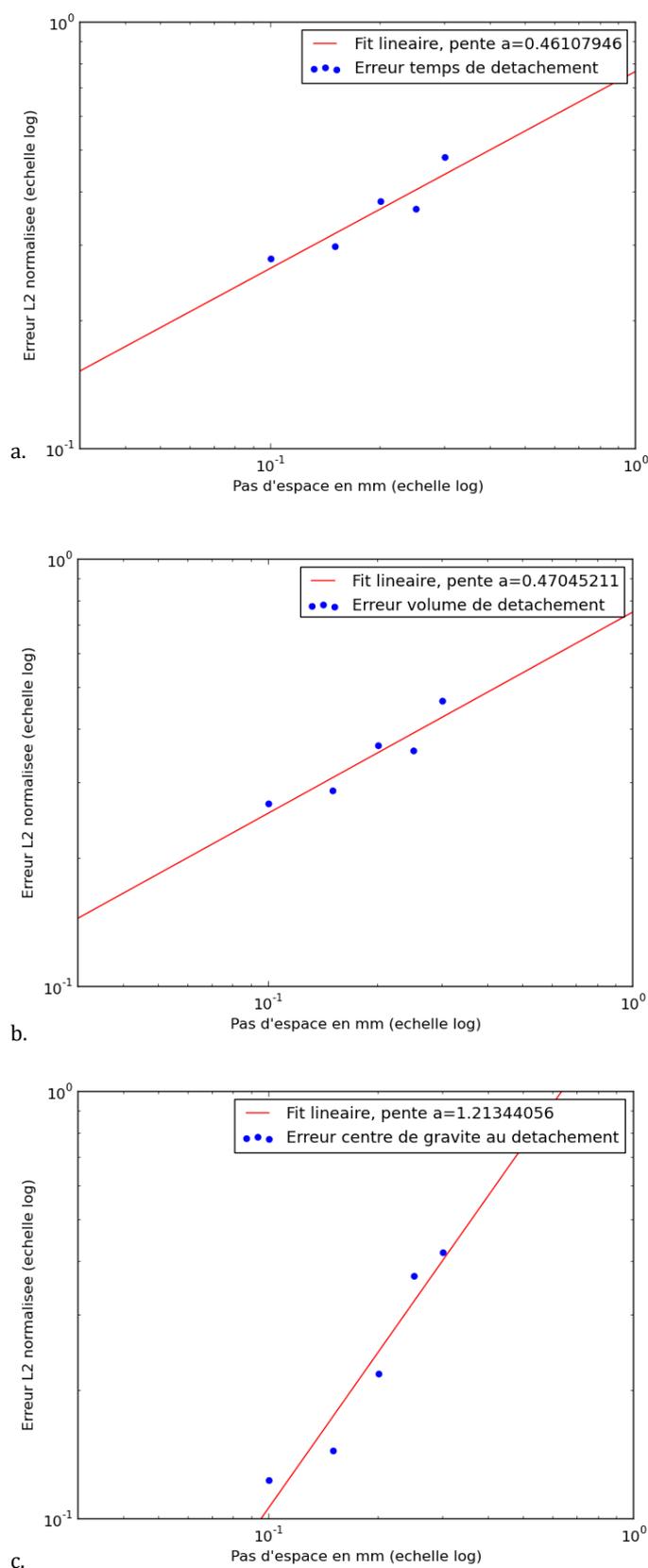


FIGURE 6.8 : Erreur sur le temps de détachement (a), le volume (b) et la position du centre de gravité (c) lors du détachement en fonction du pas d'espace en échelle log-log pour des simulations OpenFOAM 3D. Un ajustement linéaire (en rouge) a été réalisé pour déterminer un ordre de convergence de chaque grandeur.

compressible comparable à celle d'OpenFoam sont très proches des résultats présentés ici pour OpenFoam. En effet, avec un pas d'espace $\Delta x = 0.1$ mm et un pas de temps $\Delta t = 10^{-5}$ s, les résultats d'Albadawi donnent un temps de détachement $t_{\text{det}} = 0.336$ s, un volume de détachement $V_{\text{det}} = 21.591$ mm⁻³ et un centre de gravité à $CGy_{\text{det}} = 3.050$ mm de hauteur.

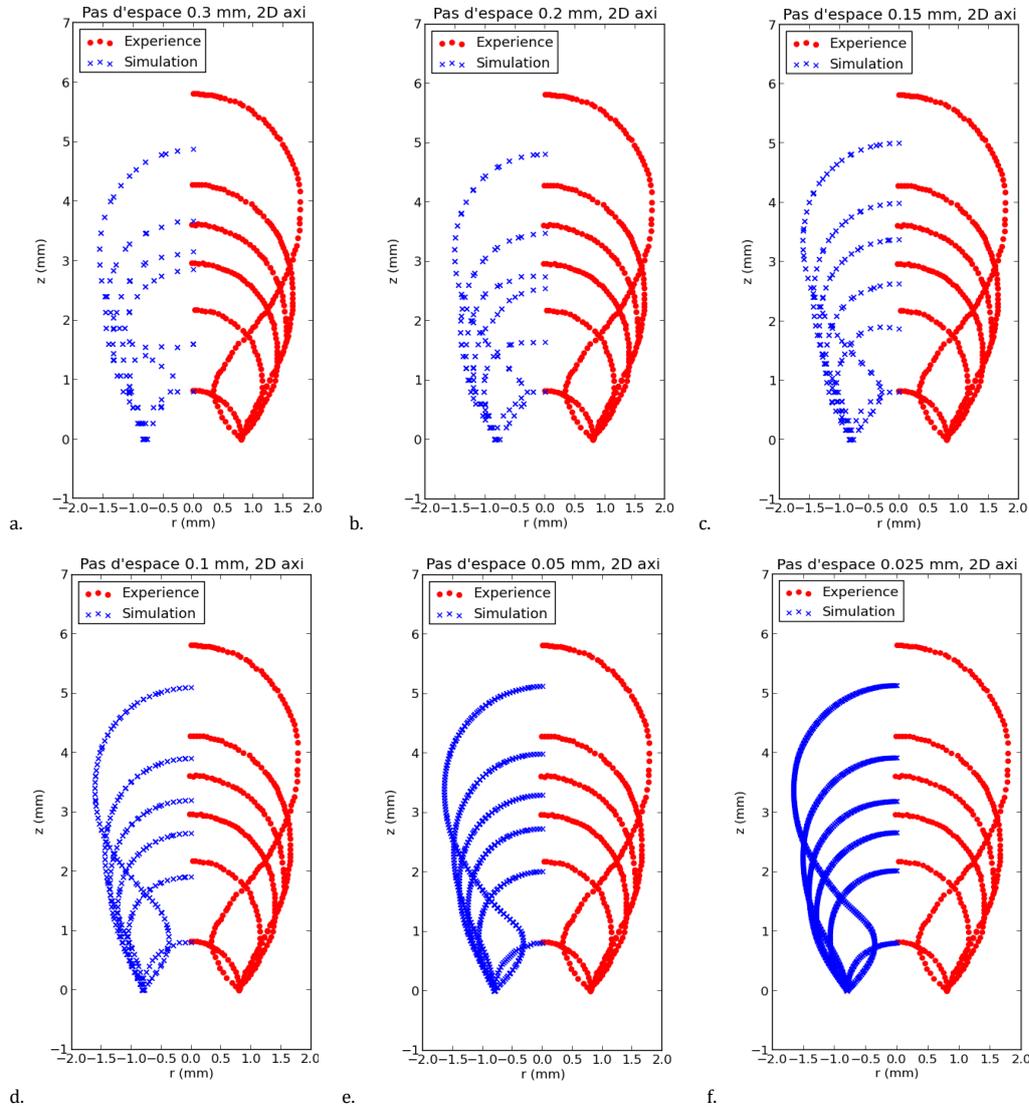


FIGURE 6.9 : Profils de l'interface à différents instants $0, 0.2t_{\text{det}}, 0.4t_{\text{det}}, 0.6t_{\text{det}}, 0.8t_{\text{det}}, t_{\text{det}}$. Les données numériques obtenues par les simulations réalisées avec OpenFoam 2D-axisymétrique sont en bleu. Les profils expérimentaux sont en rouge. La discrétisation du maillage est $\Delta x = 0.3$ mm (a), $\Delta x = 0.2$ mm (b), $\Delta x = 0.15$ mm (c), $\Delta x = 0.1$ mm (d), $\Delta x = 0.05$ mm (e) et $\Delta x = 0.025$ mm (f).

6.4.5 Conclusions

Pour les simulations 3D réalisées, TrioCFD présente des résultats plus proches des données expérimentales à raffinement équivalent et génère moins de courants parasites au niveau de l'interface qu'OpenFoam.

Il semble qu'OpenFoam sous-estime la force capillaire permettant de maintenir la bulle

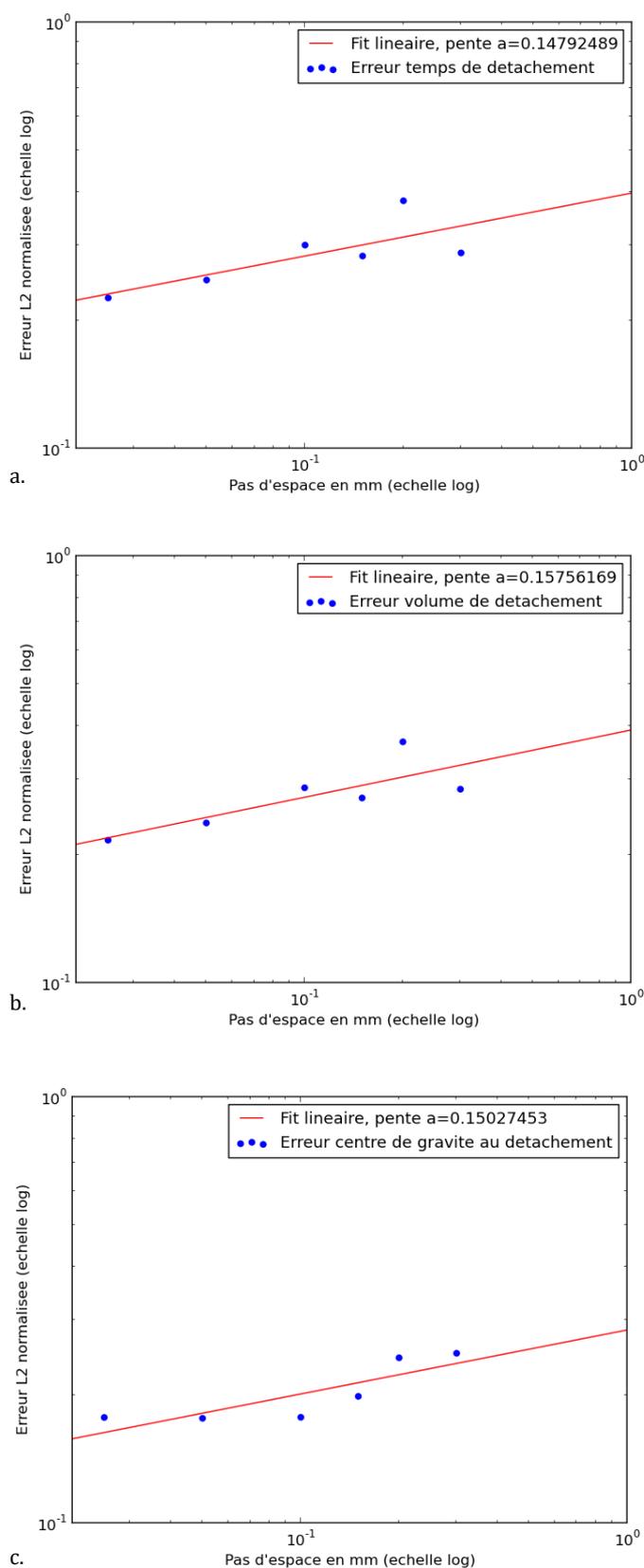


FIGURE 6.10 : Erreur sur le temps de détachement (a), le volume (b) et la position du centre de gravité (c) lors du détachement en fonction du pas d'espace en échelle log-log pour des simulations OpenFOAM 2D-axisymétrique. Un ajustement linéaire (en rouge) a été réalisé pour déterminer un ordre de convergence de chacune des grandeurs.

TABLE 6.2 : Caractéristiques du détachement de la bulle sur OpenFOAM pour des maillages 3D

Méthode	t_{det} (s)	V_{det} (mm ³)	CG_{det} (mm)	Et_{det}	$Evol_{\text{det}}$	Ecg_{det}
Expériences [2]	0.523	30.074	3.611	0	0	0
$\Delta x = 0.3$ mm	0.271	16.047	2.347	-48.279	-46.643	-42.039
$\Delta x = 0.25$ mm	0.332	19.347	2.765	-36.52	-35.670	-37.029
$\Delta x = 0.2$ mm	0.324	19.041	2.824	-38.05	-36.686	-21.861
$\Delta x = 0.15$ mm	0.367	21.424	3.09	-29.828	-28.763	-14.444
$\Delta x = 0.1$ mm	0.377	22.01	3.166	-27.916	-26.815	-12.316

TABLE 6.3 : Caractéristiques du détachement de la bulle sur OpenFOAM pour des maillages 2D axisymétriques

Méthode	t_{det} (s)	V_{det} (mm ³)	CG_{det} (mm)	Et_{det}	$Evol_{\text{det}}$	Ecg_{det}
Expériences [2]	0.523	30.074	3.611	0	0	0
$\Delta x = 0.3$ mm	0.373	21.524	2.707	-28.776	-28.431	-25.046
$\Delta x = 0.2$ mm	0.324	19.035	2.728	-38.145	-36.707	-24.440
$\Delta x = 0.15$ mm	0.375	21.918	2.894	-28.298	-27.118	-19.845
$\Delta x = 0.1$ mm	0.366	21.458	2.971	-30.019	-28.65	-17.718
$\Delta x = 0.05$ mm	0.393	22.947	2.975	-24.857	-23.70	-17.624
$\Delta x = 0.025$ mm	0.405	23.579	2.972	-22.562	-22.562	-17.702

à l'orifice d'injection et converge vers des caractéristiques de détachement assez différentes de l'expérience réalisée par Aladawi (20% d'écart). Les temps de calculs 3D pour OpenFoam et TrioCFD sont équivalents pour les différents maillages utilisés et n'excèdent pas une journée. Cependant, les résultats obtenus par OpenFoam en 2D axisymétrique pour une discrétisation $\Delta x = 0.1$ mm permettent d'obtenir le bon aspect qualitatif de l'arrachement avec peu de ressources numériques. Les calculs sont en effet effectués sur un unique processeur, alors que les calculs 3D moins discrétisés ont nécessité l'utilisation d'une dizaine de processeurs.

Les résultats obtenus avec TrioCFD sont très satisfaisants et permettent d'estimer le niveau de discrétisation nécessaire à une simulation correcte du problème qui est ici de 10 mailles pour le diamètre de l'orifice (i.e. avec une erreur de l'ordre de 5 à 6%).

6.5 Simulation de la vidange instationnaire

Les résultats précédents nous ont guidés afin de proposer des simulations de vidange tourbillonnaire avec TrioCFD et OpenFoam dans sa version 2D-axisymétrique. Dans un premier temps, il a été choisi de modéliser des expériences de courte durée (de l'ordre de quelques minutes). Le diamètre de l'orifice est alors choisi plus grand que celui des expériences présentées dans les chapitres précédents. Toutefois, sa section s vérifie encore la condition $s \ll S$, où S est la section de la cuve. Les simulations réalisées sans rotation restent donc dans le cadre de la loi de Torricelli classique, qui exprime la vitesse de vidange v_Q , telle que $v_Q = \beta\sqrt{2gH}$ (cf. Chapitre 1), où H est la hauteur d'eau, g l'accélération de la pesanteur et β un coefficient correcteur qui dépend notamment du phénomène de réduction du jet

libre en sortie, appelé phénomène de *vena contracta*. Le but de cette étude est de pouvoir vérifier la bonne évolution de la déformation de l'interface en présence d'un vortex sur une échelle plus grande que celle permettant de visualiser le phénomène d'arrachement de bulles et pour des vidanges relativement courtes.

6.5.1 Simulation numérique avec TrioCFD : premier test

La simulation numérique présentée ici a été réalisée avant d'effectuer les mesures expérimentales qui seraient dédiées à une première validation de résultats de vidange tourbillonnaire.

6.5.1.1 Descriptions

La cuve considérée ici est cylindrique de hauteur $L = 20$ cm et de diamètre $D = 29$ cm avec un diamètre d'orifice $\phi = 2$ cm. La pièce de sortie n'est ici pas modélisée. La rotation est imposée à 4.77 tours/min et la hauteur d'eau initiale est fixée telle que $H_0 = 19$ cm. Le maillage utilisé ici est assez grossier avec une discrétisation de l'ordre de 5 mm dans la cuve et 2.5 mm dans la zone centrale de diamètre ϕ . Ce maillage possède déjà près de 900 000 éléments et nécessite donc l'utilisation d'une trentaine de processeurs pour réaliser un calcul optimal sur un cluster de calcul. Le pas de temps utilisé est fixé à $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ s. Les valeurs de références pour les grandeurs physiques de l'eau et de l'air à 20° sont utilisées ici : $\rho_l = 998.2$ kg/m³, $\mu_l = 10^{-3}$ Pa.s, $\rho_g = 1.225$ kg/m³ et $\mu_g = 1.79 \times 10^{-5}$ Pa.s. Dans ce premier test, la tension de surface est fixée nulle. Les faces latérales et inférieures du domaine (excepté l'orifice) sont considérées comme des parois solides avec une condition de non-glissement. La face supérieure et l'orifice sont ouverts, la pression y est équivalente à la valeur de la pression atmosphérique $P = P_a = 101\,325$ Pa. Des conditions de symétries sont imposées pour l'angle de contact sur tous les bords du domaine. Dans ces simulations, une méthode Volume-finis (VDF) est utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles. La résolution numérique de ce cas test se fait en Résolution Numérique Directe (DNS) et ainsi, on ne considère pas de modèles de turbulence. La tolérance du solveur en pression est fixée à 1×10^{-12} Pa et nous utilisons un facteur de préconditionnement 1.5. La discrétisation en temps est réalisée avec un schéma d'Euler explicite. La discrétisation en espace est implémentée avec un schéma QUICK d'ordre 3 pour le terme de convection et un schéma centré d'ordre 2 pour le terme de diffusion.

6.5.1.2 Résultats numériques

L'évolution de la hauteur d'eau moyenne obtenue lors de cette simulation est donnée à la Figure 6.11. Cette évolution peut être comparée qualitativement aux résultats expérimentaux obtenus avec et sans rotation. Notons que la vitesse de rotation utilisée pour la simulation est légèrement différente du cas expérimental. La pièce en sortie n'est pas modélisée, ce qui joue sur la hauteur effective à considérer et le phénomène de *vena contracta*. Malgré l'ensemble de ces approximations, l'évolution qualitative de la hauteur d'eau simulée semble tout à fait correcte. La forme de l'interface obtenue à différents instants est donnée à la Figure 6.12 et correspond, elle aussi, qualitativement aux résultats attendus.

6.5.2 Simulation numérique avec TrioCFD : cas plus raffiné

6.5.2.1 Descriptions

Les simulations présentées ici reprennent les caractéristiques du premier test. Le maillage est cependant plus raffiné avec une discrétisation de 4.2 mm dans le volume de la cuve et de

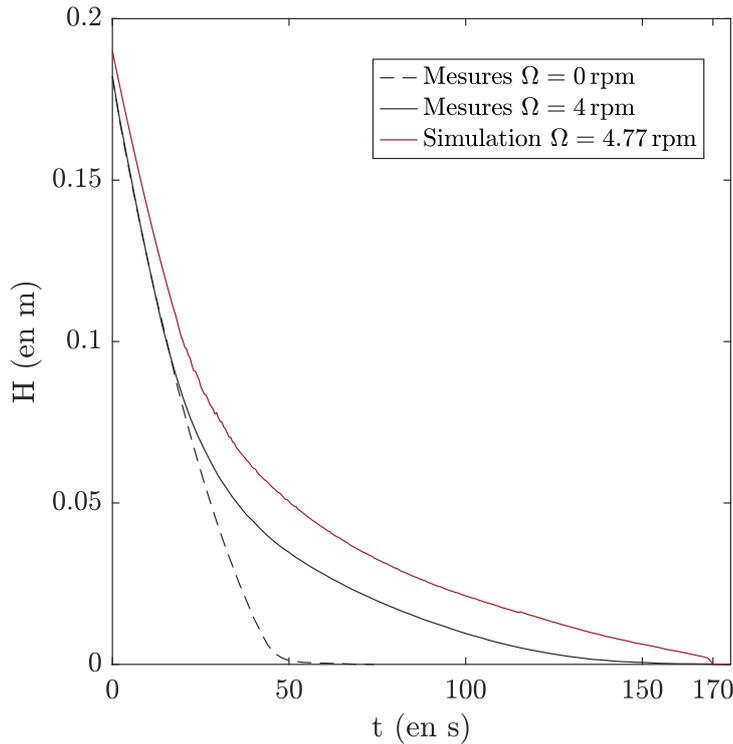


FIGURE 6.11 : Évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps pour deux expériences ($\Omega = 0$ tours/min et $\Omega = 4$ tours/min) et la simulation $\Omega = 4.77$ tours/min.

0.6 mm dans la zone centrale de diamètre ϕ . Cette fois-ci, la pièce de sortie est modélisée. Le maillage est représenté Figure 6.13. Il compte près d'1.6 million d'éléments et nécessite l'utilisation de près de 60 processeurs pour réaliser un calcul optimal sur un cluster de calcul. Le pas de temps utilisé est fixé à 1.5×10^{-4} s. La tension de surface est équivalente au cas expérimental et est fixée à 60 mN/m. Dans un premier temps, nous avons testé le cas d'une vidange sans rotation. Sous les conditions énoncées. Le calcul a été réalisé en près de 11 jours.

Un second calcul effectué à une vitesse de rotation de 4 tours/minute a été ensuite réalisé. Ce second calcul présente des problèmes de vitesses parasites et de déformation de la surface libre sous forme d'oscillations qui s'amplifient au cours du temps. Ces problèmes numériques conduisent au final à l'arrêt du calcul. Nous présentons donc ici les résultats obtenus avant de rencontrer ce problème. Nous avons essayé différentes stratégies pour résoudre cette difficulté (diminution du pas de temps, ajustage des différents paramètres de lissage et de remaillage de l'interface), mais sans succès. Il est à noter que le temps calcul nécessaire avant d'observer ces problèmes numériques est de plusieurs jours, ce qui complique l'ajustage de certains paramètres numériques par essais-erreur. De plus, il semble acquis que la divergence numérique observée soit liée à l'augmentation en intensité de courants parasites. Il existe des stratégies numériques pour réduire ces courants qui pourraient être implémentées dans la méthode Front-Tracking de TrioCFD. Ce travail est en cours.

6.5.2.2 Résultats numériques

L'évolution de la hauteur d'eau est donnée pour le cas sans rotation Figure 6.14a et avec une vitesse de rotation de 4 tours/min Figure 6.14b. Les comparaisons entre les résultats

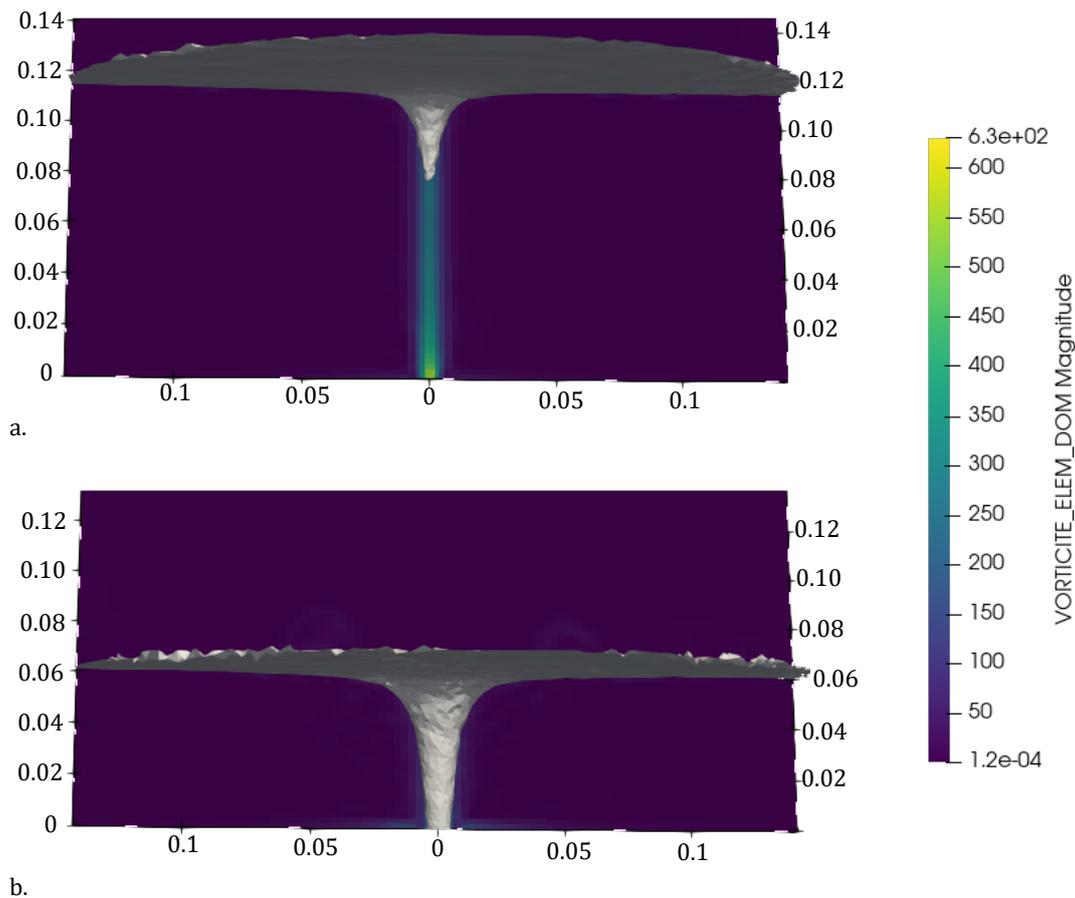


FIGURE 6.12 : Profils de l'interface obtenus avec TrioCFD pour $\Omega = 4.77$ tours/min aux instants $t = 16.5$ s (a) et $t = 42.5$ s(b)

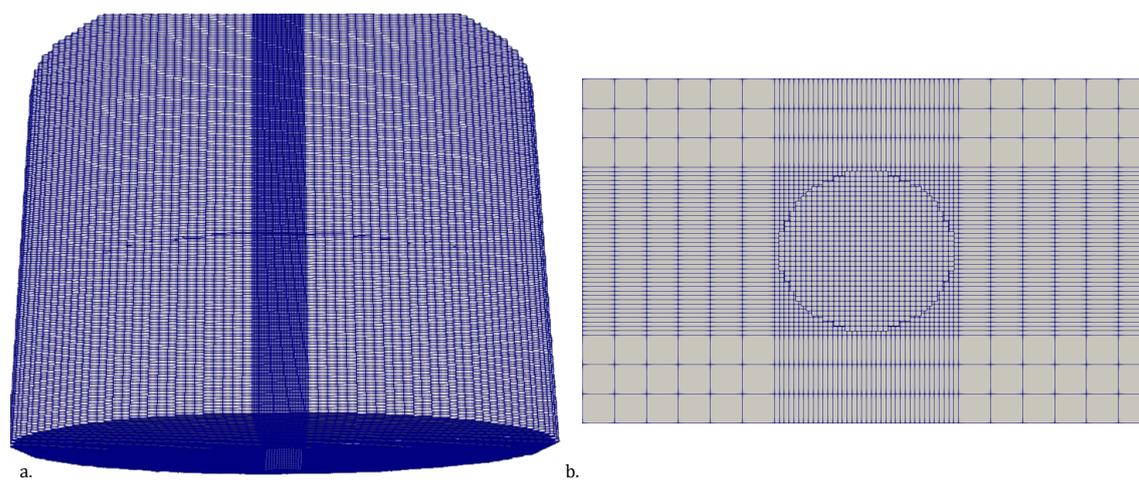


FIGURE 6.13 : Maillage utilisé pour les simulations de vidange dans le cas plus raffiné. a) Vue générale b) Vue du bas de la cuve.

de la simulation et les mesures expérimentales sont très bonnes. Un exemple de profil et de champ de vorticité obtenu avant la divergence du calcul est donné à la Figure 6.15. Il correspond qualitativement aux résultats attendus.

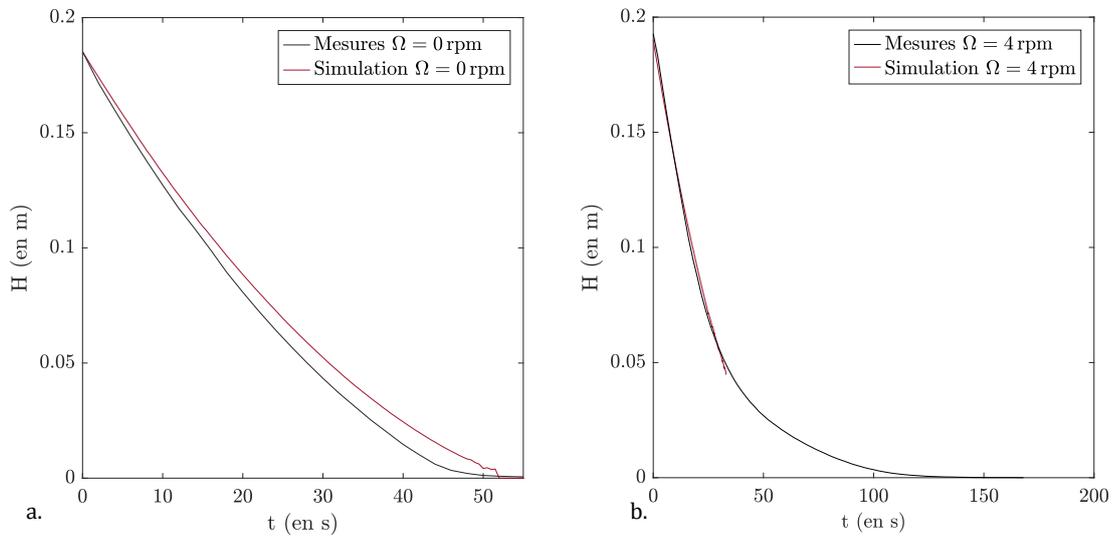


FIGURE 6.14 : Évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps pour la simulation (en rouge) et les mesures expérimentales (en noir). a) Cas sans rotation. b) Cas $\Omega = 4$ tours/min.

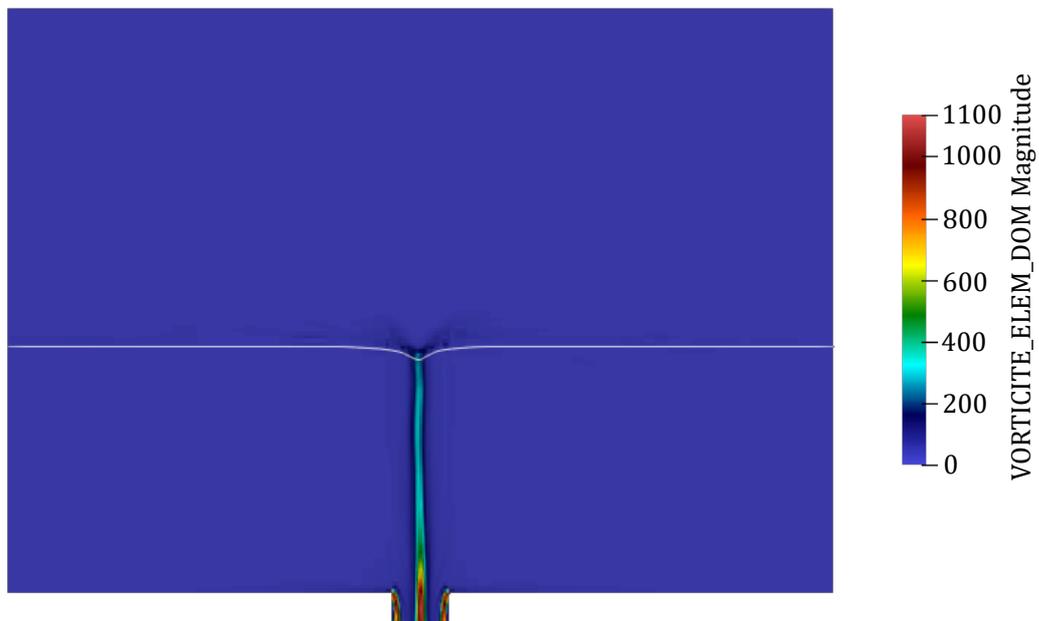


FIGURE 6.15 : Coupe du domaine. Le trait blanc représente l'interface, la colorimétrie représente la vorticité.

6.5.3 Simulations numériques avec OpenFoam

Nous considérons ici les cas d'une vidange sans rotation et d'une vidange tourbillonnaire avec une vitesse de rotation de 4 tours/min. On considère la cuve cylindrique définie dans l'étude précédente. Les simulations ont été réalisées dans le cadre du stage de Yanis Bendali. Elles ont été effectuées avec OpenFoam en 2D-axisymétrique avec un secteur de 5° et ont nécessité l'utilisation de 5 processeurs et 2.5 jours de calculs sur une station de travail.

6.5.3.1 Description

L'intérieur de la cuve est discrétisé avec des mailles carrées de 1 mm de côté. Ce maillage est raffiné au centre de la cuve sur un rayon équivalent au rayon de l'orifice avec une taille de maille de 0.33 mm. Comme dans les cas précédents, ce raffinement permet de mieux décrire la zone centrale de la cuve dans laquelle l'interface se déforme.

Les conditions aux limites imposées aux bords du domaine s'inspirent des travaux de Sakri [92],[91] et Recoquillon [85]. La vitesse et la dérivée normale de la pression sont considérées nulles au niveau des parois solides. Une condition de symétrie est imposée pour l'angle de contact. Pour la partie supérieure du domaine (haut ouvert de la cuve), on permet un flux d'air entrant et sortant avec une pression fixée telle que $P = P_a$. On applique cette même condition au niveau de l'orifice de sortie. Dans cette zone, un écoulement d'eau sortant est aussi permis. Le pas de temps utilisé vérifie deux conditions. Il doit être inférieur au pas $\Delta t_{\text{stab}} = 6 \times 10^{-5}$ s qui est calculé pour respecter un critère numérique de stabilité de l'interface comme décrit par Deshpande [25]. Comme la forme et la position de l'interface peuvent rapidement évoluer, il est aussi nécessaire de contrôler le nombre de Courant $Co_{\alpha_{\text{phase}}} = \frac{v_{\alpha_{\text{phase}}}\Delta x}{\Delta t}$ de l'équation de transport de la fraction volumique α_{phase} qui doit vérifier $Co_{\alpha_{\text{phase}}} \leq 0.5$.

6.5.3.2 Vidange sans rotation

La hauteur d'eau initiale est ici fixée à $H_0 = 19$ cm. Les mesures expérimentales permettent de comparer la hauteur d'eau H dans la cuve avec la vitesse de vidange en sortie v_Q . L'évolution de la vitesse de vidange v_Q en fonction de la hauteur H est représentée sur la Figure 6.16 pour les valeurs expérimentales et numériques.

Malgré une tendance générale assez proche, les données expérimentales et numériques présentent un écart prononcé, notamment en début de vidange, de l'ordre de 20%. Cet écart s'explique principalement par une discrétisation insuffisante de la pièce de sortie. L'effet du phénomène de vena contracta modélisé par OpenFoam est alors surestimé (cf. Figure 6.18). De plus, comme nous l'avons évoqué au Chapitre 1, le coefficient β peut être modifié par d'autres facteurs expérimentaux qu'il n'est pas évident de considérer dans la simulation. En réalisant l'ajustement des données numériques et expérimentales par la loi de Torricelli classique $v_Q = \beta\sqrt{2gH}$, la valeur du coefficient expérimental $\beta_{\text{exp}} = 0.68$ est plus élevée que pour le coefficient numérique $\beta_{\text{num}} = 0.6$. À titre comparatif, nous avons tracé sur la Figure 6.17 l'évolution de la vitesse v_Q numérique en fonction de la hauteur d'eau H en multipliant v_Q par le rapport $\beta_{\text{exp}}/\beta_{\text{num}}$. Nous constatons ainsi qu'il est possible de limiter ces écarts et d'obtenir une simulation très satisfaisante.

6.5.3.3 Vidange tourbillonnaire

Dans cette partie, la cuve est mise en rotation à une vitesse $\Omega = 4$ tours/min. À l'instant initial, l'eau est en rotation solide à la vitesse Ω et la surface peut être considérée plate,

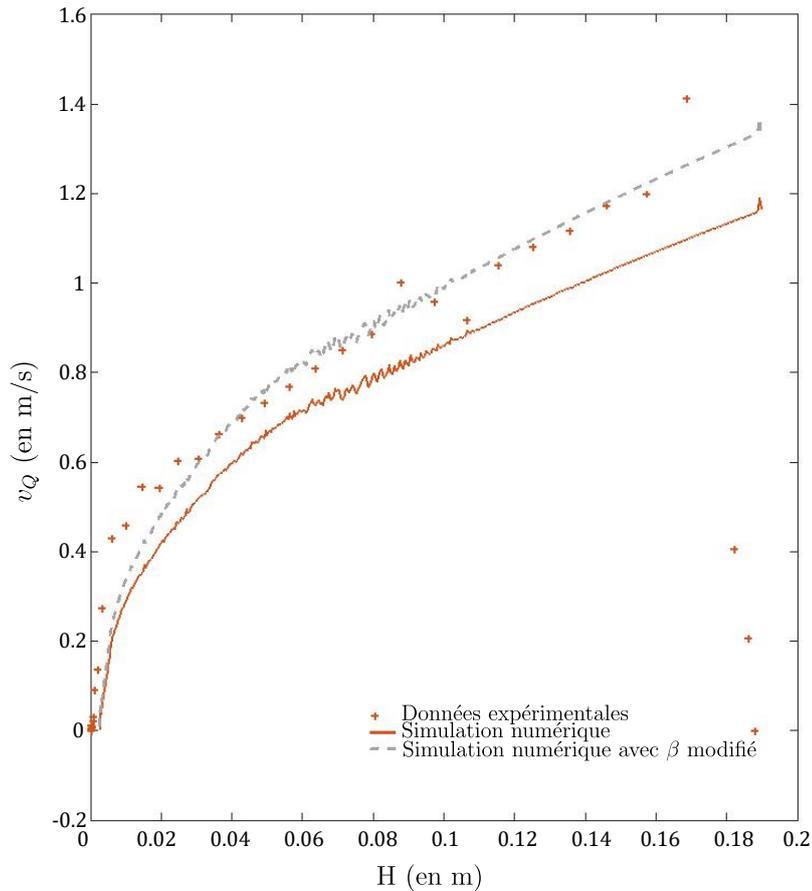


FIGURE 6.16 : Évolution de la vitesse de vidange en fonction de la hauteur du niveau d'eau dans le cas sans rotation. Les points représentent les données expérimentales et le trait continu les données numériques. Le trait en pointillé correspond aux données numériques avec un coefficient β ajusté.

car la vitesse de rotation est relativement faible.

Comme précédemment, la vitesse de vidange est tracée pour les données expérimentales et numériques en fonction de la hauteur d'eau à la Figure 6.19. Les données expérimentales et numériques partagent la même allure globale, avec une rupture de pente simultanée et un écart semblable au cas sans rotation lié au coefficient β . Le tracé de la vitesse de vidange numérique multiplié par le rapport $\beta_{\text{exp}}/\beta_{\text{num}}$ évalué dans le cas sans rotation permet de corriger les écarts de mesures. Les écarts mesurés semblent donc principalement liés à la modélisation de la *vena contracta*.

Les profils de l'interface simulés et mesurés à différentes dates sont comparés à la Figure 6.19a-d. Comme nous l'avons vu, la vitesse de vidange numérique est moins élevée que celle du cas expérimental, ceci entraîne un niveau d'eau simulé plus élevé dans la cuve à un instant donné sur les différents profils. Mis à part cette différence, nous constatons une excellente correspondance entre les profils de la surface libre et en particulier du vortex de la simulation et des expériences.

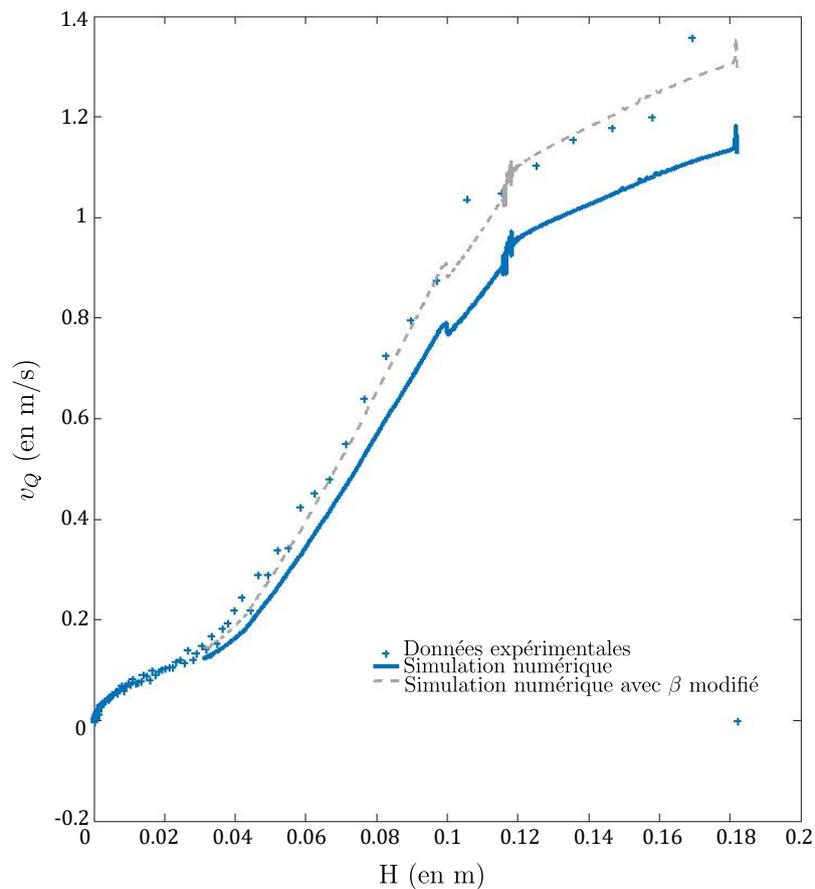


FIGURE 6.17 : Évolution de la vitesse de vidange en fonction de la hauteur du niveau d'eau pour le cas $\Omega = 4$ tours/min. Les points représentent les données expérimentales et le trait continu les données numériques. Le trait en pointillé correspond aux données numériques avec un coefficient β ajusté.

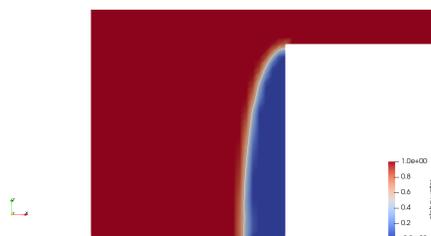


FIGURE 6.18 : Visualisation numérique du phénomène de *vena contracta* au niveau de la pièce de sortie. La phase liquide est en rouge. La phase gazeuse est en bleu.

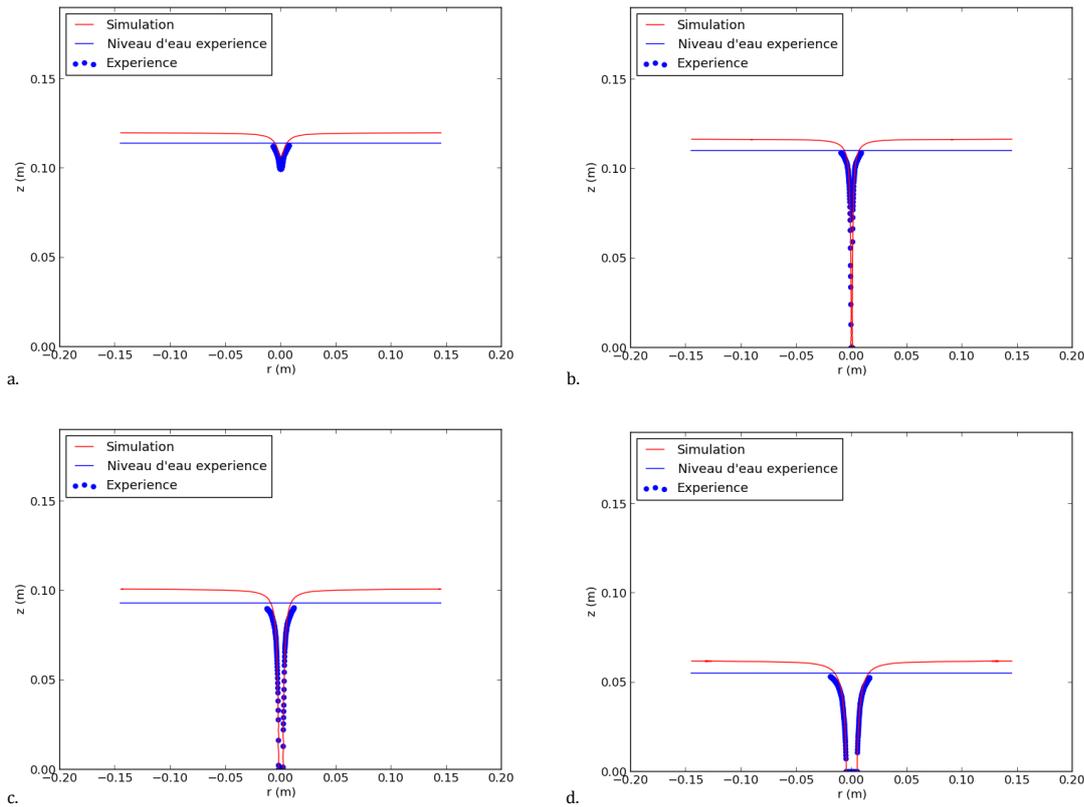


FIGURE 6.19 : Profils interfaciaux à différents instants a) $t = 12.5$ s b) $t = 13.5$ s c) $t = 17.25$ s et d) $t = 32.25$ s. Les points expérimentaux sont en bleu et le niveau de l'eau expérimental est en trait continu bleu. Les données numériques sont en trait continu rouge.

6.5.4 Conclusions

Les simulations numériques réalisées dans le cadre de cette thèse ont montré, dans un premier temps, que la méthode de Front-Tracking implémentée dans TrioCFD est parfaitement bien adaptée pour réaliser des simulations de phénomènes diphasiques à l'échelle fine comme la coalescence de gouttes ou l'injection de bulles. Elles ont également permis de constater qu'à cette échelle, les vitesses parasites inhérentes aux méthodes numériques utilisées ici sont plus réduites avec TrioCFD qu'avec OpenFoam et que l'approche axisymétrique d'OpenFoam permet de les réduire notablement.

Nous avons également montré qu'il est possible de simuler, avec des discrétisations assez grossières et quelques hypothèses simplificatrices, des expériences de vidange tourbillonnaire avec les codes de calculs TrioCFD en 3D et OpenFoam en axisymétrique. Toutefois, pour des discrétisations plus fines avec prise en compte de la tension de surface, les résultats obtenus avec TrioCFD montrent qu'il reste un effort à fournir pour résoudre un problème d'instabilité numérique lié à l'intensification de vitesses parasites entraînant la divergence du calcul. La modélisation 2D axisymétrique d'OpenFoam permet quant à elle d'obtenir des résultats relativement proches de l'expérience si on considère le phénomène de *vena contracta*.

Dans les cas de vidange testés ici, nous restons cependant assez loin du raffinement nécessaire à la modélisation du phénomène d'arrachement de bulle qui nécessiterait une discrétisation de l'ordre du dixième de millimètre dans la zone centrale, les diamètres des bulles arrachées dans les expériences étant de l'ordre du millimètre. Une des limites

importantes pour résoudre ce problème est le coût de calcul de la modélisation 3D de notre expérience. En considérant un rayon de cuve et une zone centrale plus petites, nous nous attendons à avoir un besoin de l'ordre du million de mailles dans le simple cas 2D-axisymétrique. Le temps calcul nécessaire à la simulation est également dépendant du pas de temps qui devrait être de l'ordre de 10^{-6} s alors que le temps physique de stabilisation du vortex est d'au moins 15 min. Ces estimations nous indiquent que même si les vitesses parasites seraient fortement réduites, il serait très coûteux, voire difficilement réalisable, de simuler le phénomène d'arrachement de bulles avec TrioCFD et OpenFoam en trois dimensions. TrioCFD étant plus efficace pour modéliser les phénomènes fins comme nous l'avons montré sur le cas test de la génération d'une bulle qu'OpenFoam, le développement d'une option 2D-axisymétrique pourrait peut-être permettre de réaliser des simulations d'arrachement de bulle.

CONCLUSION & PERSPECTIVES

Le tourbillon de vidange est au cœur de nombreux problèmes industriels. À travers différentes configurations, nous avons analysé l'influence de ce tourbillon sur la structure de l'écoulement, la vitesse et la durée de vidange du réservoir.

Une nouvelle loi pour la vidange

La structure de l'écoulement de vidange tourbillonnaire est complexe. Elle met en jeu différentes zones de l'écoulement, dont les couches limites d'Ekman et de Stewartson. Dans le régime de vidange permanent, à hauteur d'eau constante, nous montrons que le modèle de Foster est particulièrement bien adapté pour décrire le profil de vitesse azimutale dans les couches limites de Stewartson. Contrairement à l'hypothèse émise par Andersen, qui propose que le fluide vidangé s'écoule essentiellement par les couches limites, nous montrons que cette proportion de fluide vidangé par les couches limites est une fonction croissante de la vitesse de rotation et diminue lorsque la hauteur d'eau augmente.

L'étude de la vitesse de vidange nous a permis de démontrer qu'il était possible de généraliser la loi de Torricelli en présence d'un vortex dans l'écoulement. Dans cette version généralisée de la loi, le niveau moyen de l'eau est substitué par le niveau local situé juste au-dessus de la buse. Cette loi nécessite de connaître le profil de l'interface. Nous avons vérifié la pertinence de notre loi en comparant la vitesse de vidange prédite à partir des profils interfaciaux expérimentaux, à la vitesse de vidange effectivement mesurée. Par la suite, en nous appuyant sur les modèles interfaciaux existants, nous avons établi une expression pour la vitesse de vidange dans les régimes sous-critiques et super-critiques en fonction des différents paramètres du problème et en introduisant un paramètre libre.

Arrachement de bulles

Nous avons constaté que le modèle sous-critique s'écartait des données expérimentales à l'approche de l'instabilité d'arrachement de bulles, la vitesse de vidange mesurée étant alors plus faible que sa valeur prédite. À partir de ce constat, nous pouvons exprimer un critère d'arrachement sur les nombres de Weber ou de Reynolds. Ces critères, établis dans un régime d'écoulement soumis à la gravité en référentiel tournant, montrent un très bon accord avec les données expérimentales. En comparant nos données avec les critères empiriques d'arrachement établis par Ito [51], construits sur le gradient de vitesse axial (grandeur modélisée par notre modèle) et la circulation (grandeur mesurée par PIV), nous constatons que nos données vérifient bien le premier critère, le second se situant en dehors de notre gamme de données. Pour poursuivre cette étude, il semble alors nécessaire de réaliser des mesures stéréo-PIV afin de mesurer expérimentalement la composante axiale de la vitesse et ses variations selon l'axe O_z . Une telle étude permettrait, par exemple, de

valider les critères existants en fonction de données mesurées, mais également d'établir un modèle de la composante axiale de la vitesse dans la cuve.

La vidange de récipients revisitée

Peu d'études s'intéressent aux régimes de vidange instationnaire, complète, du récipient. Dans ces expériences, le vortex s'établit en même temps que la cuve est vidangée. Nous montrons qu'il est possible de modéliser la vitesse de vidange par notre loi de Torricelli généralisée et que le temps de vidange est principalement régi par un paramètre sans dimension, $\Omega(\phi/2)^2/\nu$, qui dépend du nombre d'Ekman. Ces résultats ouvrent la voie à des études futures portant sur les régimes transitoires du vortex et des couches limites.

Pour compléter notre étude expérimentale du cas instationnaire, nous avons démontré que la vidange d'une bouteille d'eau idéale, dans un référentiel en rotation, était loin d'être triviale. Nous avons identifié trois régimes successifs : (i) un régime de bulles (aussi appelé régime de « glouglou »), (ii) un régime de jet d'air tourbillonnant et (iii) un régime de vidange tourbillonnaire, dont l'occurrence et la durée dépendent de Ω , H et Φ . Contrairement à l'idée généralement répandue, nous montrons que la rotation est efficace pour vider le réservoir uniquement pour des vitesses de rotation peu élevées, et qu'il existe une rotation optimale pour la vidange de la bouteille d'eau.

Simulations numériques

Les simulations numériques réalisées dans le cadre de ce travail de thèse, avec le logiciel TrioCFD développé au CEA et le logiciel OpenFoam libre d'accès, ont permis d'évaluer la possibilité de reproduire numériquement les expériences réalisées. Elles ont démontré que la méthode de Front-Tracking, implémentée dans TrioCFD, est particulièrement bien adaptée pour mener des simulations détaillées à l'échelle fine de phénomènes diphasiques, tels que la coalescence de gouttes ou l'injection de bulles. À cette échelle, ces simulations ont révélé que les perturbations de vitesse ou courants parasites, inhérents aux méthodes numériques utilisées ici, ont peu d'influence. Nos travaux ont montré qu'il est possible de simuler des expériences de vidange tourbillonnaire grâce à des discrétisations relativement grossières et en faisant quelques hypothèses simplificatrices, avec les codes de calculs TrioCFD en 3D et OpenFoam en axisymétrique. Néanmoins, il est important de noter que dans le cas de ces simulations, le niveau de discrétisation utilisé reste éloigné du raffinement nécessaire pour modéliser de manière précise le phénomène d'arrachement de bulle. Ce dernier requiert une discrétisation de l'ordre du dixième de millimètre dans la zone centrale, car les diamètres des bulles arrachées dans les expériences sont de l'ordre du millimètre. Une limitation significative à la résolution de ce problème réside donc dans le coût de calcul élevé associé à la modélisation 3D de notre expérience avec TrioCFD. Cependant, le verrou numérique principal réside dans l'impact des courants parasites générés qui ne sont plus négligeables dans ce cas et deviennent une source de divergence du calcul.

Une solution potentielle à court terme serait de réaliser les simulations avec une approche axisymétrique, celles réalisées avec OpenFoam présentant un coût de calcul considérablement inférieur aux simulations 3D de TrioCFD et des niveaux d'intensité de courants parasites plus réduites. Mais, les difficultés engendrées par les courants parasites subsistent et un travail visant à résoudre cette difficulté dans TrioCFD est en cours.

Les résultats expérimentaux obtenus lors de cette thèse constituent une base de validation pour les outils de calcul scientifique qui traitent de la simulation des vortex et notamment ceux du CEA.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ALBADAWI et al. "Influence of surface tension implementation in Volume of Fluid and coupled Volume of Fluid with Level Set methods for bubble growth and detachment". In : *International Journal of Multiphase Flow* 53 (jan. 2013).
- [2] A. ALBADAWI et al. "On the analysis of bubble growth and detachment at low Capillary and Bond numbers using Volume of Fluid and Level Set methods". In : *Chemical Engineering Science* 90 (déc. 2012).
- [3] A. ANDERSEN et al. "Anatomy of a bathtub vortex". In : *Physical review letters* 91.10 (2003), p. 104502.
- [4] A. ANDERSEN et al. "The bathtub vortex in a rotating container". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 556 (juin 2006), p. 121.
- [5] P. E. ANGELI. "Verification and validation of LES of a triple parallel jet flow in the context of a thermal striping investigation". In : *Nuclear Engineering and Design* 353 (2019), p. 110210.
- [6] M. R. BAUM et M. E. COOK. "Gas entrainment at the free surface of a liquid : entrainment inception at a vortex with an unstable gas core". In : *Nuclear Engineering and Design* 32.2 (1975), p. 239-245.
- [7] T. BECK et al. "Conceptual design of ASTRID fuel sub-assemblies". In : *Nuclear Engineering and Design* 315 (2017), p. 51-60.
- [8] H. BHATIA, U. BIEDER et D. GUENADOU. "Rankine-vortex model based assessment of CFD methods for simulating the effect of gas entrainment observed in the hot-pool of sodium cooled fast breeder reactors". In : *Progr. Nuclear Energy* 137 (2021), p. 103794.
- [9] U. BIEDER et al. "CFD analysis of the flow in the MICAS experimental facility, a water model of the hot pool of a sodium cooled fast reactor". In : *Nuclear Engineering and Design* 350 (2019), p. 67-77.
- [10] L. BØHLING, A. ANDERSEN et D. FABRE. "Structure of a steady drain-hole vortex in a viscous fluid". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 656 (août 2010), p. 177-188.
- [11] G. BOIS. "Transferts de masse et d'énergie aux interfaces liquide/vapeur avec changement de phase : proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces". Thèse de doct. 2006.
- [12] J. BOISSON et al. "Earth rotation prevents exact solid-body rotation of fluids in the laboratory". In : *EPL (Europhysics Letters)* 98.5 (2012), p. 59002.
- [13] J. BOUSSINESQ. "Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi". In : *C. R. Acad. Sciences (Paris)* 114 (1870), p. 704-710.

-
- [14] J. M. BURGERS. “A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence”. In : sous la dir. de Richard VON MISES et Theodore VON KÁRMÁN. T. 1. *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, 1948, p. 171-199.
- [15] J. M. BURGERS. “Hydrodynamics.—Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence”. In : *Selected papers of JM Burgers*. Springer, 1995, p. 390-400.
- [16] C. CALVIN, O. CUETO et P. EMONOT. “An object-oriented approach to the design of fluid mechanics software”. In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 36.5 (2002), p. 907-921.
- [17] A CAQUAS et al. “Bathtub vortex effect on Torricelli’s law”. In : *Physical Review Fluids* 8.4 (2023), p. 044702.
- [18] G. CARUSO et al. “Experimental investigation of free surface vortices and definition of gas entrainment occurrence maps”. In : *Journal of Physics : Conference Series*. T. 501. 1. IOP Publishing. 2014, p. 012019.
- [19] Y. C. CHEN et al. “A bathtub vortex under the influence of a protruding cylinder in a rotating tank”. In : *J. Fluid Mech.* 733 (2013), p. 134-157.
- [20] Y. L. CHEN et al. “Hydraulic characteristics of vertical vortex at hydraulic intakes”. In : *J. Hydrodyn.* 19.2 (2007), p. 143-149.
- [21] C. CLANET. “Clepsydrae, from Galilei to Torricelli”. In : *Physics of Fluids* 12.11 (2000), p. 2743-2751.
- [22] C. CLANET et G. SEARBY. “On the glug-glug of ideal bottles”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 510 (2004). Publisher : Citeseer, p. 145.
- [23] L. CRISTOFANO, M. NOBILI et G. CARUSO. “Experimental study on unstable free surface vortices and gas entrainment onset conditions”. In : *Experimental thermal and fluid science* 52 (2014), p. 221-229.
- [24] G. F. DAVIDSON. “Experiments on the flow of viscous fluids through orifices”. In : *Proc. Royal Soc. London A*, 89.608 (1913), p. 91-99.
- [25] S. S. DESHPANDE, L ANUMOLU et M. F. TRUJILLO. “Evaluating the performance of the two-phase flow solver interFoam”. In : *Computational Science & Discovery* 5 (2012).
- [26] A. DUINMEIJER, G. OLDENZIEL et F. CLEMENS. “Experimental study on the 3D-flow field of a free-surface vortex using stereo PIV”. en. In : *Journal of Hydraulic Research* 58.1 (jan. 2020), p. 105-119.
- [27] C. DUQUENNOY. “Développement d’une approche de simulation numérique directe de l’ébullition en paroi”. Thèse de doct. 2000.
- [28] H. A. EINSTEIN et H. LI. “Steady vortex flow in a real fluid”. In : *Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University* (1951), p. 33-43.
- [29] J. ERCOLANELLI et al. “Experimental and numerical investigation of sloshing in anti-roll tank using effective gravity angle”. In : *33rd International Workshop on Water, Waves and Floating Bodies*. 2018, p. 4-7.
- [30] X. FENG. “Fully Discrete Finite Element Approximations of the Navier–Stokes–Cahn–Hilliard Diffuse Interface Model for Two-Phase Fluid Flows”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.3 (2006), p. 1049-1072.
- [31] J. FERRAND. “Écoulements et écrasements de fluides : effet du mouillage et de la rhéologie”. Thèse de doct. Université de Lyon, 2017.
-

- [32] J. FERRAND et al. “Wetting Effect on Torricelli’s Law”. en. In : *Physical Review Letters* 117.24 (déc. 2016), p. 248002.
- [33] M. R. FOSTER. “Asymptotic theory for a bathtub vortex in a rotating tank”. In : *J. Fluid Mech.* 749 (2014), p. 113-144.
- [34] G. FOURESTIER. “Modélisation expérimentale et numérique de l’écoulement au sein d’un système convertisseur de l’énergie de la houle”. Thèse de doct. Université de Bretagne occidentale-Brest, 2017.
- [35] T. T. FUJITA. “Tornadoes and downbursts in the context of generalized planetary scales”. In : *Journal of Atmospheric Sciences* 38.8 (1981), p. 1511-1534.
- [36] A. GENTY et V. POT. “Numerical Simulation of 3D Liquid–Gas Distribution in Porous Media by a Two-Phase TRT Lattice Boltzmann Method”. In : *Transport in Porous Media* 96 (2 2013), p. 271-294.
- [37] R. A. GINGOLD et J. J. MONAGHAN. “Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181.3 (déc. 1977), p. 375-389.
- [38] H. P. GREENSPAN et L. N. HOWARD. “On a time-dependent motion of a rotating fluid”. In : *J. Fluid Mec.* 17.3 (1963), p. 385-404.
- [39] E. GUYON, J. P. HULIN et L. PETIT. *Hydrodynamique physique*. EDP sciences Les Ulis, 2001.
- [40] E. GUYON et al. *Physical hydrodynamics*. Oxford University Press, 2015.
- [41] G. E. HECKER. “Fundamentals of vortex intake flow”. In : *Swirling flow problems at intakes*. Routledge, 2017, p. 13-38.
- [42] C. W. HIRT et B. D. NICHOLS. “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”. In : *Journal of Computational Physics* 39.1 (1981), p. 201-225.
- [43] C.W. HIRT, A.A. AMSDEN et J.L. COOK. “An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds”. In : *Journal of Computational Physics* 14.3 (1974), p. 227-253.
- [44] J. E. HITE JR et W. C. MIH. “Velocity of air-core vortices at hydraulic intakes”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 120.3 (1994), p. 284-297.
- [45] R. W. HOPPER. “Coalescence of two equal cylinders : exact results for creeping viscous plane flow driven by capillarity”. In : *Journal of the American Ceramic Society* 67.12 (1984), p. C-262.
- [46] R. W. HOPPER. “Coalescence of two viscous cylinders by capillarity : Part I, theory”. In : *Journal of the american ceramic society* 76.12 (1993), p. 2947-2952.
- [47] R. W. HOPPER. “Coalescence of two viscous cylinders by capillarity : Part II, Shape evolution”. In : *Journal of the American Ceramic Society* 76.12 (1993), p. 2953-2960.
- [48] R. W. HOPPER. “Plane Stokes flow driven by capillarity on a free surface”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 213 (1990), p. 349-375.
- [49] J. HUA et D. MORTENSEN. “A front tracking method for simulation of two-phase interfacial flows on adaptive unstructured meshes for complex geometries”. In : *International Journal of Multiphase Flow* 119 (2019), p. 166-179.
- [50] J. HUA, J. F. STENE et P. LIN. “Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method”. In : *Journal of Computational Physics* 227.6 (2008), p. 3358-3382.

-
- [51] K. ITO et al. “CFD-based evaluation of interfacial flows”. In : *Comp. Fluid Dyn.* IntechOpen, 2010, p. 133-156.
- [52] H. JUDD et R. S. KING. “Some experiments on the frictionless orifice”. In : *Eng. News* 56.13 (1906), p. 326-331.
- [53] N. KIMURA et al. “Experimental study on gas entrainment at free surface in reactor vessel of a compact sodium-cooled fast reactor”. In : *Journal of Nuclear Science and Technology* 45.10 (2008), p. 1053-1062.
- [54] N. KIMURA et al. “Experimental study on gas entrainment due to nonstationary vortex in a sodium cooled fast reactor—comparison of onset conditions between sodium and water”. In : (2010).
- [55] A. Y. KLIMENKO. “Do we find hurricanes on other planets?” In : *Proceedings of the 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, 16AFMC*. Citeseer. 2007, p. 247-252.
- [56] J. KNAUSS. *Swirling flow problems at intakes*. Routledge, 2017.
- [57] J. M. LAITHWAITE. “The Nuclear Power Group, c/o United Kingdom Atomic Energy Authority Reactor Group and AF TAYLOR”. In : *Sodium-cooled Fast Reactor Engineering : Proceedings of a Symposium... Held by the International Atomic Energy Agency in Monaco, 23-27 March 1970*. International Atomic Energy Agency. 1970, p. 75.
- [58] B. LAUTRUP. *Physics of continuous matter : exotic and everyday phenomena in the macroscopic world*. CRC press, 2011.
- [59] J. H. LEE et I. S. PARK. “Robust technique using magnetohydrodynamics for safety improvement in sodium-cooled fast reactor”. In : *Nuclear Engineering and Technology* 54.2 (2022), p. 565-578.
- [60] TJ LIN. “Mechanisms and control of gas bubble formation in cosmetics”. In : *J. Soc. Cosmet. Chem* 22.6 (1970), p. 323-337.
- [61] B. T LUBIN et G. S. SPRINGER. “The formation of a dip on the surface of a liquid draining from a tank”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 29.2 (1967), p. 385-390.
- [62] L.B. LUCY. “A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis”. In : *The Astronomical Journal* 82 (déc. 1977), p. 1013-1024.
- [63] T. S. LUNDGREN. “The vortical flow above the drain-hole in a rotating vessel”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 155 (1985). Publisher : Cambridge University Press, p. 381-412.
- [64] V. MALTSEV, M. SKOTE et P. TSOUTSANIS. “High-order methods for diffuse-interface models in compressible multi-medium flows : A review”. In : *Physics of Fluids* 34.2 (fév. 2022), p. 021301.
- [65] B. MATHIEU. “Etudes physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques”. Thèse de doct. 2003.
- [66] F. W. MEDAUGH et G. D. JOHNSON. “Investigation of the discharge and coefficients of small circular orifices”. In : *Civil Eng.* 10.7 (1940), p. 422-424.
- [67] J. MILES. “A note on the Burgers-Rott vortex with a free surface”. In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 49 (1998), p. 162-165.
- [68] L. M. MILNE-THOMSON. *Theoretical hydrodynamics*. Dover, New York, 1996.

- [69] H. MIRSANDI et al. “Numerical simulation of bubble formation with a moving contact line using Local Front Reconstruction Method”. In : *Chemical Engineering Science* 187 (avr. 2018).
- [70] G. MÖLLER, M. DETERT et R. M. BOES. “Vortex-Induced Air Entrainment Rates at Intakes”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 141 (11 2015), p. 04015026.
- [71] H. MONJI et al. “Effect of experimental conditions on gas core length and downward velocity of free surface vortex in cylindrical vessel”. In : (2010).
- [72] S. MORIYA. “Experimental study of scale effects on onset conditions of gas entrainment by free surface vortices”. In : *Denryoku Chuo Kenkyusho Hokoku* (1998), p. 1-5.
- [73] B. MOUDJED et al. “Experimental study of gas entrainment from surface swirl”. In : *Nuclear Engineering and Design* 310 (2016), p. 351-362.
- [74] A. J. ODGAARD. “Free-surface air core vortex”. In : *J. Hydr. Eng.* 112.7 (1986), p. 610-620.
- [75] H.N. OGUZ et A. PROSPERETTI. “Dynamics of bubble growth and detachment from a needle”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 257 (1993).
- [76] H. OHSHIMA et al. “Standard for Prevention of Gas Entrainment Phenomena in Fast Reactors, (II) Proposal of Gas Entrainment Evaluation Method”. In : *Transactions of the Atomic Energy Society of Japan* 11.4 (2012), p. 329-339.
- [77] K. OKAMOTO, K. TAKEYAMA et M. IIDA. “Dynamic PIV measurement for the transient behavior of a free-surface vortex”. In : (2004).
- [78] C. W. OSEEN. “Über die Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit”. In : *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 7 (1912), p. 14-26.
- [79] S. OSHER et J. A. SETHIAN. “Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”. In : *Journal of Computational Physics* 79.1 (1988), p. 12-49.
- [80] A. PANTANO et al. “Pre-design of an innovative passive decay heat removal system for ATRIUM AMR-SFR”. In : *Nuclear Engineering and Design* 378 (2021), p. 111259.
- [81] S. PATRICK et al. “Black hole quasibound states from a draining bathtub vortex flow”. In : *Physical review letters* 121.6 (2018), p. 061101.
- [82] S. POPINET et S. ZALESKI. “A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension”. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30.6 (1999), p. 775-793.
- [83] N. POTGHAN et C.S. JOG. “An ALE-based finite element strategy for modeling compressible two-phase flows”. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 94.12 (2022), p. 2040-2086.
- [84] W. J. M. RANKINE. *Manual of Applied Mechanics*. R. Griffen et Co., London., 1858.
- [85] Y. RECOQUILLON. “Etude expérimentale et numérique des écoulements diphasiques dans la boîte à eau d’un véhicule automobile”. PhD Thesis. Université d’Orléans, 2013.
- [86] Y. RECOQUILLON, Em. ANDRÈS et A. KOURTA. “Experimental analysis of a bathtub vortex in a simplified cowl box of automotive vehicles”. In : *Fluids Engineering Division Summer Meeting*. T. 44762. American Society of Mechanical Engineers. 2012, p. 71-78.

-
- [87] L. ROSENHEAD. “The spread of vorticity in the wake behind a cylinder”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character* 127.806 (1930), p. 590-612.
- [88] M. ROSSI et al. “A Nonuniformly stretched vortex”. In : *Physical review letters* 92.5 (2004), p. 054504.
- [89] N. ROTT. “On the viscous core of a line vortex”. In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 9.5-6 (1958), p. 543-553.
- [90] T. SAKAI et al. “Proposal of Design Criteria for Gas Entrainment from Vortex Dimples Based on a Computational Fluid Dynamics Method”. In : *Heat Transfer Engineering* 29.8 (2008), p. 731-739. eprint : <https://doi.org/10.1080/01457630801981739>.
- [91] F. M. SAKRI, M. S. M. ALI et S. A. ZAKI. “Benchmark on the Dynamics of Liquid Draining Inside a Tank”. In : *E3S Web of Conferences* 95 (2019).
- [92] F. M. SAKRI et al. “Numerical Simulation of Liquids Draining From a Tank Using OpenFOAM”. In : *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering* 226 (2017).
- [93] M. Ed. SALETA, D. TOBIA et S. GIL. “Experimental study of Bernoulli’s equation with losses”. In : *American journal of physics* 73.7 (2005), p. 598-602.
- [94] A. SAVITZKY et M. J. E. GOLAY. “Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures.” In : *Analytical chemistry* 36.8 (1964), p. 1627-1639.
- [95] X. SHAN et H. CHEN. “Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components”. In : *Phys. Rev. E* 47 (3 mars 1993), p. 1815-1819.
- [96] A. H. SHAPIRO. “Bath-Tub Vortex”. In : *Nature* 196.4859 (déc. 1962), p. 1080-1081.
- [97] Y. A. STEPANYANTS et G. H. YEOH. “Stationary bathtub vortices and a critical regime of liquid discharge”. en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 604 (juin 2008), p. 77-98.
- [98] Y. A. STEPANYANTS et Guan H. YEOH. “Burgers–Rott vortices with surface tension”. en. In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 59.6 (nov. 2008), p. 1057-1068.
- [99] K. STEWARTSON. “On almost rigid rotations”. In : *J. Fluid Mech.* 3.1 (1957), p. 17-26.
- [100] K. STEWARTSON. “On almost rigid rotations. Part 2”. In : *J. Fluid Mech.* 26.1 (1966), p. 131-144.
- [101] K. STEWARTSON. “On rotating laminar boundary layers”. In : *Grenzschichtforschung/Boundary Layer Research*. Springer, 1958, p. 59-71.
- [102] M. TAKAHASHI et al. “Gas entrainment at free surface of liquid,(I) gas entrainment mechanism and rate”. In : *Journal of Nuclear Science and Technology* 25.2 (1988), p. 131-142.
- [103] D. TENCHINE. “Some thermal hydraulic challenges in sodium cooled fast reactors”. In : *Nuclear Engineering and Design* 240.5 (2010), p. 1195-1217.
- [104] D. TENCHINE, C. FOURNIER et Y. DOLIAS. “Gas entrainment issues in sodium cooled fast reactors”. In : *Nuclear Eng. Design* 270 (2014), p. 302-311.
- [105] W. THIELICKE et R. SONNTAG. “Particle Image Velocimetry for MATLAB : Accuracy and enhanced algorithms in PIVlab”. In : *Journal of Open Research Software* 9.1 (2021).
-

-
- [106] E. TORRICELLI. “De motu gravium naturaliter accelerato”. In : *Firenze* (1643).
- [107] E. TOSHIKI et al. “Transient behavior of gas entrainment caused by surface vortex”. In : *Heat Transfer Engineering* 29.8 (2008), p. 659-666.
- [108] A. TOUTANT. “Modelisation physique des interactions entr e interfaces et turbulence”. Thèse de doct. 2006.
- [109] L. M. TREFETHEN et al. “The bath-tub vortex in the southern hemisphere”. In : *Nature* 207.5001 (1965), p. 1084.
- [110] G. TRYGGVASON et al. “A Front-Tracking Method for the Computations of Multi-phase Flow”. In : *Journal of Computational Physics* 169.2 (2001), p. 708-759.
- [111] G. L. TUVE et R. E. SPRENKLE. “Orifice discharge coefficients for viscous liquids”. In : *Instruments* 6.1 (1933), p. 210-206.
- [112] S. O. UNVERDI et G. TRYGGVASON. “A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows”. In : *Journal of Computational Physics* 100.1 (1992), p. 25-37.
- [113] G. A. VENDRYES. “Superphénix : A Full-Scale Breeder Reactor”. In : *Scientific American* 236 (3 1977), p. 26-35.
- [114] J. WESTERWEEL et Fulvio SCARANO. “Universal outlier detection for PIV data”. In : *Experiments in fluids* 39 (2005), p. 1096-1100.
- [115] P. B. WHALLEY. “Flooding, slugging and bottle emptying”. In : *International journal of multiphase flow* 13.5 (1987), p. 723-728.
- [116] P. B. WHALLEY. “Two-phase flow during filling and emptying of bottles”. In : *International journal of multiphase flow* 17.1 (1991), p. 145-152.
- [117] W. XU et U. HARLANDER. “Inertial mode interactions in a rotating tilted cylindrical annulus with free surface”. In : *Physical Review Fluids* 5.9 (2020), p. 094801.
- [118] W. YANG et al. “Large axisymmetric surface deformation and dewetting in the flow above a rotating disk in a cylindrical tank : spin-up and permanent regimes”. In : *Physical Review Fluids* 5.4 (2020), p. 044801.
- [119] S. YUKIMOTO et al. “Structure of a bathtub vortex : importance of the bottom boundary layer”. In : *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 24.1 (2010), p. 323-327.
- [120] E. E. ZUKOSKI. “Influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 25.4 (1966). Publisher : Cambridge University Press, p. 821-837.

Titre : Vidange tourbillonnaire : propriétés de l'écoulement et de l'entraînement gazeux

Mots clés : vidange tourbillonnaire, fluide en rotation, surface libre, instabilité hydrodynamiques

Résumé : Un jour, notre regard d'enfant s'est arrêté sur le vortex créé par notre baignoire. D'une apparente simplicité, car il nous semble commun, l'écoulement se caractérise pourtant par une étonnante complexité. La vidange tourbillonnaire fait en effet l'objet de nombreux articles dans la littérature, notamment sur la modélisation du champ de vitesses et du profil caractéristique de l'interface. Pourtant, de nombreuses questions restent ouvertes. Ces études sont souvent menées en régimes stationnaires lorsque le niveau de l'eau est gardé constant par un système de réinjection de l'eau. Le cas instationnaire pour lequel l'eau s'écoule simplement sous l'effet de la gravité est rarement exploré. Nous proposons d'étudier et de comparer ces deux régimes. Les questions abordées portent sur l'influence du vortex sur la loi de Torricelli, les conditions de formation de bulles à la pointe de la déformation de l'interface, ou encore la vitesse de vidange d'une bouteille d'eau idéale mise en rotation. Ces questions qui touchent à notre quotidien ont de forts enjeux industriels : estimation du temps de vidange d'un récipient ou prévention du phénomène d'entraînement de bulles. Ces bulles sont en effet à l'origine de problèmes de sécurité dans les centrales nucléaires et hydrauliques, mais aussi dans bien d'autres systèmes industriels. Notre étude s'intéresse, dans un premier temps, à la modification de l'écoulement de vidange par la présence du vortex et notamment à l'élaboration d'un nouveau modèle pour la vitesse de vidange du récipient. À cet effet, un dispositif à taille humaine a été conçu sur une plateforme-tournante avec un système de mesures embarqué. Le modèle obtenu s'appuie sur la loi classique de Torricelli qu'il est possible de généraliser en prenant en compte l'ef-

fet de la déformation de l'interface induite par le vortex. La structure de l'écoulement est aussi fortement impactée par la présence du tourbillon et nous proposons ici d'étudier comparativement les cas de vidanges stationnaire et instationnaire. La forme de l'interface est un problème complexe à modéliser qui dépend des effets de tensions de surface. Sous l'effet d'une vortacité de plus en plus grande et concentrée, cette déformation s'allonge. Le cœur gazeux ainsi formé peut se déstabiliser, osciller et générer des bulles d'air qui seront entraînées dans l'écoulement. Cette thèse propose d'étudier expérimentalement les conditions d'apparitions de cette instabilité. Dans un deuxième temps, notre étude s'intéresse au cas particulier de la vidange d'une bouteille d'eau idéale, i.e. d'une cuve cylindrique hermétiquement fermée, mise en rotation. Nous avons aussi étudié les conditions d'apparition d'un optimum, pour lequel la vidange est réalisée plus rapidement et ainsi tenté de mieux comprendre l'expérience très populaire qui consiste à concevoir un tourbillon dans une bouteille d'eau pour la vider plus vite. En particulier, nous décrivons les différents régimes d'écoulement lors de ce type de vidange, ainsi que les transitions entre ces régimes. Enfin, des simulations numériques basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes sont réalisées avec les codes TrioCFD, qui utilise la méthode Front-tracking, et OpenFoam, qui utilise la méthode Volume of Fluid et permettent de reproduire certaines expériences de vidange tourbillonnaire. Cependant, le phénomène d'arrachement de bulles par sa finesse reste un défi numérique dont nous aborderons la problématique après une étude comparative des performances des codes utilisés sur différents cas tests de référence.

Title : The bathtub vortex : properties of the flow and gas entrainment

Keywords : bathtub vortex, rotating flow, free-surface flow, hydrodynamic instability

Abstract : One day, our childlike gaze stopped on the vortex created by our bathtub. Seemingly simple, as it appears common to us, the flow is actually characterized by astonishing complexity. Swirling drainage is indeed the subject of numerous articles in the literature, particularly on the modeling of the velocity field and the characteristic profile of the interface. Yet, many questions remain unanswered. These studies are often conducted in steady-state conditions when the water level is kept constant by a water injection system. The unsteady case, where water simply flows due to gravity, is rarely explored. We propose to study and compare these two regimes. The questions addressed concern the influence of the vortex on Torricelli's law, the conditions for bubble formation at the tip of the interface deformation, and the draining velocity of an ideal rotating water bottle. These questions, which touch on our daily lives, have significant industrial implications: estimating the drainage time of a container or preventing the phenomenon of bubble entrainment. These bubbles are indeed the cause of safety issues in nuclear and hydraulic power plants, as well as in many other industrial systems. Our study initially focuses on the modification of the drainage flow by the presence of the vortex, and particularly on the development of a new model for the draining velocity of the container. For this purpose, a human-sized device has been designed on a rotating platform with an onboard measurement system. The obtained model relies on the classical Torricelli law, which can be generalized by taking into account the effect of interface

deformation induced by the vortex. The flow structure is also strongly impacted by the presence of the vortex, and we propose to comparatively study the cases of steady and unsteady drainage. The shape of the interface is a complex problem to model, depending on surface tension effects. Under the influence of increasing and concentrated vorticity, this deformation elongates. The gaseous core thus formed can destabilize, oscillate, and generate air bubbles that will be entrained in the flow. This thesis proposes to experimentally study the conditions for the appearance of this instability. Then, our study focuses on the particular case of draining an ideal water bottle, i.e., a hermetically sealed cylindrical tank set in rotation. We have also studied the conditions for the appearance of an optimum, where drainage is achieved more quickly, and thus tried to better understand the very popular experiment of creating a whirlpool in a water bottle to drain it faster. Specifically, we describe the different flow regimes during this type of drainage, as well as the transitions between these regimes. Finally, numerical simulations based on solving the Navier-Stokes equations are carried out using TrioCFD codes, which use the Front-tracking method, and OpenFoam, which uses the Volume of Fluid method, and allow for the reproduction of certain swirling drainage experiments. However, the phenomenon of bubble detachment, due to its sharpness, remains a numerical challenge that we will address after a comparative study of the performance of the codes used on various reference test cases.