



**HAL**  
open science

# Processus de stabilisation d'un robot serpentiforme à la surface de l'eau : modélisation, contrôle et stabilité

Xiao Xie

## ► To cite this version:

Xiao Xie. Processus de stabilisation d'un robot serpentiforme à la surface de l'eau : modélisation, contrôle et stabilité. Automatique / Robotique. Ecole nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique, 2023. Français. NNT : 2023IMTA0377 . tel-04536219

**HAL Id: tel-04536219**

**<https://theses.hal.science/tel-04536219>**

Submitted on 8 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
MINES-TÉLÉCOM ATLANTIQUE BRETAGNE  
PAYS-DE-LA-LOIRE - IMT ATLANTIQUE

ÉCOLE DOCTORALE N° 648

*Sciences pour l'Ingénieur et le Numérique*  
Spécialité : *Génie industriel, productique, automatique et robotique*

Par

**Xiao XIE**

## Processus de stabilisation d'un robot serpentiforme à la surface de l'eau : modélisation, contrôle et stabilité

Thèse présentée et soutenue à l'IMT Atlantique, Nantes, le 13/12/2023

Unité de recherche : LS2N (UMR 6004)

Thèse N° : 2023IMTA0377

### Rapporteurs avant soutenance :

RUFFIER Franck      Directeur de recherche CNRS à l'Institut des sciences du mouvement  
ARGENTINA Médéric      Professeur Université Côte d'Azur

### Composition du Jury :

Président :	Anthony HERREL	Directeur de recherche au Muséum d'histoire Naturelle de Paris
Examineurs :	Laetitia GIRALDI	Chercheur permanent à l'INRIA SOphie-Antipolis
Rapporteurs :	Franck RUFFIER	Directeur de recherche CNRS à l'Institut des sciences du mouvement
	Médéric ARGENTINA	Professeur Université Côte d'Azur
Dir. de thèse :	Frédéric BOYER	Professeur IMT Atlantique
Encadrement :	Johann HERAULT	Maître assistant IMT Atlantique
Encadrement :	Vincent LEBASTARD	Maître assistant IMT Atlantique



# REMERCIEMENT

---

Ces travaux ont été réalisés au sein du département automatique et productique à IMT Atlantique (Nantes) dirigé par Alexandre Dolgui, que je remercie sincèrement pour l'accueil. Par ailleurs, je tenais aussi à remercier Damien CHABLAT et l'équipe de chercheurs pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe de Robotique Et Vivant (ReV) du Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N).

Je tiens également à remercier mon directeur de thèse Frédéric BOYER et mes encadrants Johann HERAULT et Vincent LEBASTARD pour leur aide et leur confiance tout au long de cette thèse. C'est grâce à leurs conseils et aux connaissances qu'il m'ont transmis que j'ai pu réaliser mes travaux de thèse. Ce fut un grand plaisir de travailler avec eux durant ces trois années.

Je tiens ensuite à remercier Stephane VIOLLET, Directeur de recherche de l'Institut des Sciences du Mouvement et Simon ROHOU, Assistant professeur de l'ENSTA Bretagne, d'avoir accepté d'être les membres de comité de suivi. Je remercie également Franck RUFFIER, Directeur de recherche de l'Institut des sciences du mouvement, et Médéric ARGENTINA, Professeur de l'Université Côte d'Azur, d'avoir acceptés d'être mes rapporteurs.

Je remercie également les doctorants de l'IMT Atlantique avec qui j'ai passé de bons moments pendant ces années. J'adresse ma dernière reconnaissance à ma famille. Leur compréhension et leur soutien sont la motivation de mon travail de recherche.

À travers ce mémoire, j'espère leur témoigner ma reconnaissance pour la confiance qu'ils m'ont accordée.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>17</b>
1.1 La nage ondulatoire : intérêts et complexité . . . . .	18
1.1.1 De l'animal au robot . . . . .	18
1.1.2 Une brève revue des des robots nageurs anguiformes . . . . .	20
1.1.3 Stabilité et robots nageurs . . . . .	26
1.2 Les grands principes hydrodynamiques de la nage . . . . .	27
1.2.1 La nage ondulatoire : régimes et modèles . . . . .	27
1.2.2 Validation des modèles . . . . .	30
1.2.3 La nage en surface : un nouveau défi . . . . .	30
1.3 Stabilité statique et dynamique à la surface . . . . .	31
1.3.1 Stabilité statique . . . . .	32
1.3.2 Stabilité dynamique et paramétrique . . . . .	36
1.4 Les enjeux de la stabilité animale et applications robotiques . . . . .	38
1.4.1 Définir la stabilité animale . . . . .	38
1.4.2 Applications robotiques . . . . .	40
1.5 La stabilité des serpents à la surface . . . . .	40
1.5.1 Une stabilité précaire ? . . . . .	40
1.5.2 Le cas du mocassin d'eau . . . . .	41
1.6 Bilan . . . . .	44
<b>2 Modèle et simulateur du robot NATRIX</b>	<b>46</b>
2.1 Introduction . . . . .	46
2.2 NATRIX : une nouvelle plateforme . . . . .	47
2.3 Hypothèses . . . . .	50
2.4 Paramétrisation et modèle géométrique du robot NATRIX . . . . .	52
2.4.1 Espace de configuration . . . . .	52
2.4.2 Modèle géométrique . . . . .	55

TABLE DES MATIÈRES

---

2.5	Modèle cinématique . . . . .	57
2.6	Les modèles de reconstruction du groupe $SE(3)$ . . . . .	61
2.6.1	La carte exponentielle et autres intégrations sur le groupe . . . . .	61
2.6.2	L'intégration grâce aux quaternions . . . . .	63
2.7	Modèle des efforts statique . . . . .	65
2.7.1	Géométrie du module ARIM . . . . .	65
2.7.2	Calcul de l'effort hydrostatique . . . . .	66
2.7.3	Invariance du modèle des efforts hydrostatiques . . . . .	69
2.8	Modèle dynamique inverse . . . . .	70
2.8.1	Forme générale du modèle dynamique . . . . .	70
2.8.2	Résolution du modèle dynamique inverse . . . . .	72
2.8.3	Algorithme récursif de Newton-Euler . . . . .	72
2.9	Simulateur du robot NATRIX . . . . .	77
2.10	Vérification du simulateur . . . . .	78
2.10.1	Vérification de la conservation de quantité de mouvement . . . . .	78
2.10.2	Vérification de la conservation d'énergie . . . . .	80
2.10.3	Test d'une flexion latérale . . . . .	81
2.11	Bilan . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Stabilité posturale : modèle prédictif statique</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction . . . . .	85
3.2	L'espace des configurations : réduction et segmentation . . . . .	87
3.2.1	Réduction de l'espace de travail . . . . .	87
3.2.2	Décomposition de l'espace articulaire . . . . .	89
3.3	Calcul les configurations d'équilibre statique . . . . .	90
3.3.1	Principe . . . . .	90
3.3.2	Matrice de raideur hydrostatique . . . . .	91
3.3.3	Algorithme d'optimisation . . . . .	92
3.3.4	Performances des algorithmes . . . . .	94
3.3.5	Impact du niveau d'immersion et de la forme de corps sur la stabilité	96
3.4	Mouvement prédictif statique . . . . .	99
3.4.1	Principe . . . . .	99
3.4.2	La méthode des rétractions . . . . .	100
3.4.3	Optimisation de la stabilité locale . . . . .	104

3.5	Études du mode prédictif . . . . .	106
3.5.1	Stabilisation de la tête durant la nage anguilliforme . . . . .	106
3.5.2	Optimisation de la stabilité de la nage anguilliforme . . . . .	112
3.5.3	Impact du modèle prédictif sur la dynamique du nageur . . . . .	114
3.6	Bilan . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Stabilité posturale : Rejet de perturbation</b>	<b>118</b>
4.1	Introduction . . . . .	118
4.1.1	Problématique et méthodologie . . . . .	118
4.1.2	Énoncé du problème . . . . .	119
4.1.3	Organisation du chapitre . . . . .	120
4.2	Vue d'ensemble de la stratégie de contrôle . . . . .	121
4.2.1	Stratégie proposée . . . . .	121
4.2.2	Mise en oeuvre du système de contrôle . . . . .	123
4.3	Modèle de linéarisation et sa réduction . . . . .	125
4.3.1	Système invariant . . . . .	125
4.3.2	Voisinage et espace tangent . . . . .	126
4.3.3	Dynamique linéarisée . . . . .	130
4.4	Rejet de perturbation de la tête . . . . .	132
4.4.1	Commande virtuelle par retour d'état . . . . .	132
4.4.2	Coefficient d'amortissement adaptatif . . . . .	133
4.5	Génération de trajectoire dans l'espace articulaire . . . . .	134
4.5.1	Principal de génération de trajectoire . . . . .	134
4.5.2	Réduction de l'espace de forme . . . . .	134
4.5.3	Stratégie I . . . . .	137
4.5.4	Stratégie II . . . . .	137
4.5.5	Stratégie III . . . . .	138
4.5.6	Détermination des matrices de gain $D_p$ et $D_d$ . . . . .	140
4.6	Réglage, performances et domaine de validité du contrôleur . . . . .	143
4.6.1	Méthodologie . . . . .	143
4.6.2	Réglage du contrôleur . . . . .	144
4.6.3	Dynamique du rejet des perturbations . . . . .	147
4.6.4	Validité du contrôleur basé sur un modèle linéaire . . . . .	152
4.7	Bilan . . . . .	154

<b>5</b>	<b>Stabilité dynamique de la nage : effet de la flottabilité</b>	<b>156</b>
5.1	Introduction et motivations . . . . .	156
5.1.1	Objectifs du chapitre . . . . .	156
5.1.2	Organisation du chapitre . . . . .	157
5.1.3	Définition des allures . . . . .	158
5.2	Étude paramétrique de la stabilité . . . . .	160
5.2.1	Étude paramétrique dans l'espace amplitude-fréquence . . . . .	160
5.2.2	Analyse des résultats . . . . .	164
5.3	Le <i>template</i> de la stabilité du nageur . . . . .	165
5.3.1	Modèle du pendule paramétrique non-linéaire . . . . .	165
5.3.2	Identification des paramètres . . . . .	173
5.4	Analyse de la stabilité et des régimes de l'équation de Duffing-Mathieu . . . . .	182
5.4.1	Pertinence du modèle et motivations . . . . .	182
5.4.2	Stabilité de l'équation linéaire . . . . .	184
5.4.3	Approche perturbative du système non-linéaire . . . . .	188
5.4.4	Réduction de la zone d'instabilité . . . . .	192
5.5	Bilan . . . . .	195
	<b>Conclusion</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>202</b>
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>219</b>
A.1	Calcul exact de la surface d'immersion et du barycentre . . . . .	219
A.2	Paramètres d'inertie prototype . . . . .	223
A.3	Bilan de quantité de mouvement dans l'algorithme N-E . . . . .	223
A.4	Applications exponentielle et logarithmique entre $SE(3)$ et $se(3)$ . . . . .	225
A.5	Orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	226
A.6	Technical supplement of the section 4 . . . . .	227
A.6.1	définition de la transformation rigide $h$ . . . . .	227
A.6.2	La dynamique sur l'espace tangent o $SE(3)$ . . . . .	228
A.6.3	La stabilité de stratégie I . . . . .	230
A.6.4	La stabilité de stratégie II . . . . .	231
A.7	Analyse d'une équation de Mathieu avec l'approche perturbative . . . . .	233

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

## Le contexte

L'écosystème marin est un milieu très sensible dont l'équilibre écologique est aujourd'hui menacé. La surface des océans est en première ligne des grandes catastrophes écologiques telles que les marées noires ou vertes, le dégazage et les amas de macro-débris. Pour lutter contre ces pollutions, la robotique marine de surface est une des solutions les plus prometteuses [1, 2, 3]. Exploitant les avantages de la robotique autonome, la robotique marine de surface ouvre la voie à des technologies capables de surveiller l'état de nos côtes tout en limitant le besoin en interventions humaines et les coûts d'opération [2]. Au cours des deux dernières décennies, des véhicules autonomes de surface (USV) ont vu un développement croissant. Cependant, leur impact sur le long terme sur ces écosystèmes reste inconnu avec des systèmes de propulsion produisant de fortes turbulences perturbant la faune et la flore [4, 5]. Au contraire, la robotique bio-inspirée préconise des technologies mieux intégrées et adaptées pour opérer en toute sécurité dans un monde marin fragile en reproduisant les grandes principes de la locomotion animale [4, 6].

Dans les années 2000, une nouvelle génération de robots marins inspirés des anguilles et des serpents aquatiques a émergé dans le milieu académique [7]. Aujourd'hui, on les retrouve pour des applications industrielles [8]. Ces robots sériels hyper-redondants sont connus pour leur grande manœuvrabilité et efficacité énergétique [9]. Leur corps déformable leur permet de virer sur un rayon de giration de quelques longueurs de segments. Grâce à ces avantages décisifs, les robots serpents nageurs pourraient intervenir en urgence dans des situations complexes (débris de surface, chavirement d'un navire) afin d'évaluer une situation de crise ou de surveiller les écosystèmes côtiers le long d'un littoral accidenté.

Malgré le fort potentiel de ces robots bio-inspirés, ces applications promises sont encore inaccessibles et plus spécifiquement lorsque ces robots sont déployés à la surface de l'eau. En effet, ils souffrent d'une stabilité trop précaire lors des manoeuvres ou dans des conditions physiques non-contrôlés (houle, vent, courant). Le couple associé aux forces de flottabilité (nommé aussi poussée d'Archimède) pour certaines formes du corps des robots peut facilement les déstabiliser, voir les renverser. Cette limitation s'explique par



FIGURE 1 – Illustration du roulis du robot Agnathax (EPFL/Biorob) lors de sa nage à la surface libre malgré la présence de flotteurs (entourant les LEDs vertes).

la morphologie élancée des robots qui les rend particulièrement sensibles aux mouvements de roulis (rotation solide dans l’axe longitudinal) en partie à cause de leur faible inertie axiale.

Le roulis est réputé être le degré de liberté le plus dangereux en ingénierie maritime, puisqu’il produit les plus fortes accélérations angulaires [10], encore une fois à cause du faible moment d’inertie. Or les solutions proposées pour stabiliser les robots bio-inspirés restent majoritairement empiriques. Ces ajustements de flottabilité sont souvent effectués après la conception du robot, par l’ajout de flotteurs ou de stabilisateurs [11, 12]. Ces stratégies de stabilisation passives n’empêchent pas le robot de décrire un fort roulis comme l’illustre la Fig. 1. Pire, elles ont un impact néfaste sur la manœuvrabilité et leur efficacité énergétique car elles augmentent simultanément le tirant d’eau et la traînée turbulente. On peut ainsi en tirer la conclusion suivante : les stratégies passives proposées dans la littérature ne sont pas suffisantes pour stabiliser le robot ce qui suggère que ce problème doit être pris en compte dès la conception du robot.

## Notre approche

Ce constat nous amène à rechercher les solutions trouvées par le monde animal pour stabiliser la nage et les poses statiques à la surface de l’eau. Dans le cadre du projet ANR SSSNAEQ (2020-2024)<sup>1</sup>, nous avons choisi de nous inspirer d’un serpent semi-aquatique, le mocassin d’eau, dont le sens de l’équilibre à la surface est particulièrement développé (voir Fig. 2 gauche). Or la stabilité du serpent présente des caractéristiques très

---

1. SSSNAEQ pour “Surface Swimming Snakes Achieve Equilibrium”

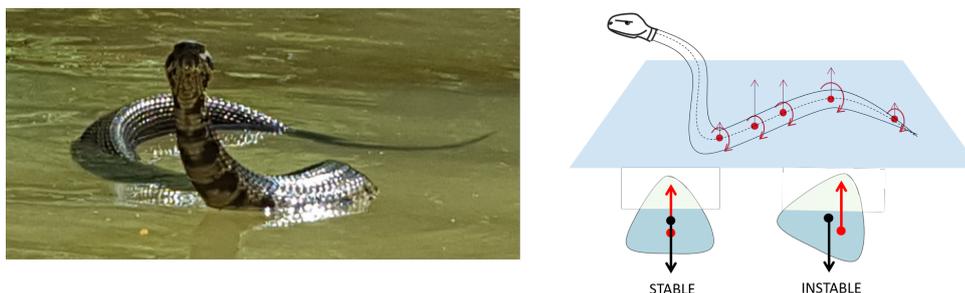


FIGURE 2 – Gauche : un mocassin d’eau à la surface de l’eau. Droite : principe physique de sa stabilité.

différentes de celles d’un navire mono-coque [10]. Le serpent déforme continuellement son corps pour ajuster son équilibre. Ces déformations sont dues à des rotations relatives entre ses vertèbres produisant ainsi de la torsion et des flexions latérales et dorso-ventrales, ainsi qu’à des modifications de sa morphologie comme le volume de sa cage thoracique.

Nous ferons l’hypothèse ici que toutes ces déformations permettent au serpent de modifier activement l’immersion de son corps et donc la répartition des forces de flottabilité le long de son axe rostro-caudal (tête-queue) comme l’illustre la figure 2 de droite. Certaines sections peuvent être localement dans une configuration stable ou instable, seul compte la résultante des efforts qui assure la stabilité du corps dans son ensemble (voir Fig. 2 droite). Maîtriser ces déformations est par conséquent la clef de la stabilité des serpents.

## Les objectifs

L’objectif de ma thèse est donc d’identifier ces grands principes et concevoir des stratégies actives de stabilisation. Dans un second temps, ces résultats seront implémentés dans le robot NATRIX pour reproduire les comportements de ces serpents. Aussi, ma thèse s’intègre dans le projet pluridisciplinaire SSSNAEQ (financé par l’ANR) qui regroupe différentes communautés scientifiques avec des biologistes du Muséum d’Histoire Naturelle de Nantes, des physiciens et roboticiens.

Le développement et la fabrication du nouveau robot serpent nageur sont actuellement terminés, reste à finir son instrumentation et la plateforme expérimentale qui l’accueillera. Sa conception innovante repose sur des modules actionnés permettant au robot de changer son niveau d’immersion le long de son corps, à l’instar du serpent, grâce à un roulis distribué (voir Fig. 3). De plus, le robot intègre un cou avec trois articulations lui per-

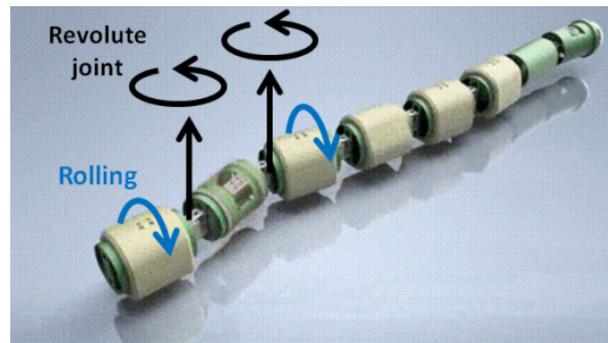


FIGURE 3 – Illustration CAO du robot NATRIX avec les modules de roulis activement contrôlés (flèches bleu) et les articulations de flexion (flèches noires)

mettant de modifier l'inclinaison, l'élévation et le lacet de la tête. Une queue déformable est aussi en cours de développement pour l'utiliser comme une quille stabilisatrice. Avec ces nouveaux degrés de liberté, nous souhaitons contrôler activement la stabilité du robot et s'approcher des performances animales [13].

In fine, ce nouveau robot a quatorze degrés de liberté : cinq pour la flexion latérale, six pour la rotation des “organes” de stabilisation (voir la flèche bleue sur la Fig. 3) et trois pour le cou. Le système est ainsi sur-actionné et hyper-redondant. **La problématique de ma thèse est d'établir de nouvelles solutions pour calculer les trajectoires articulaires qui stabilisent la pose du robot sur la surface de l'eau pour des postures statiques ou lors de la nage.**

Malheureusement, il existe peu ou pas d'études, de données, ou de théories sur ce sujet en comparaison d'autres domaines de la robotique bien établis. L'identification de ces “angles morts”, qui seront détaillés dans l'état de l'art, nous permet de dégager des sous-problématiques :

- L'instabilité du roulis est rarement ou anecdotiquement mentionnée dans la littérature sur la nage des robots ou des serpents. Au contraire, elle est très bien documentée en ingénierie maritime [14, 15].

**Comment adapter les grands principes de la stabilité hydrostatique aux systèmes déformables et hyper-redondants reste une question ouverte.**

- Il n'existe aucune théorie de la nage décrivant les interactions fluide-structure à la surface de l'eau [16] prenant en compte les ondes, la variation de la masse ajoutée ou le sillage de Kelvin.

**Quel est l'impact de l'hydrodynamique de surface sur la nage ondulatoire ?**

- La propulsion et la navigation [7] de la plupart des robots anguilliformes reposent sur des lois articulaires basées sur le contrôle en position de leur servomoteurs. Ces lois sont généralement basés sur des heuristiques issues de l’observation des nageurs. Aussi, la nage des robots n’est pas fondée sur un contrôle des forces agissant sur le nageur, outils malheureusement nécessaire pour la stabilisation du corps.

**Peut on générer des trajectoires articulaires pour produire des forces stabilisatrices ?**

- Les serpents ont un contrôle postural assuré par le système nerveux central. Dans le cadre de cette thèse, nous souhaiterions nous inspirer de certains de ces mécanismes pour assurer la stabilité du robot.

**Comment intégrer l’équivalent du système postural dans un robot ?**

Dans cette thèse, nous ne répondrons pas à toutes ces sous-problématiques (par exemple la seconde). Nous souhaitons néanmoins apporter les premières briques méthodologiques qui ouvrent la voie à une robotique bio-inspirée de surface plus performante et mieux adaptée à son milieu.

## La méthodologie

Dans cette thèse, nous aborderons donc la problématique de la stabilité des robots serpents sous l’aspect numérique. Plus précisément, nous construirons des modèles géométrique, cinématique et dynamique du robot NATRIX en vu de sa simulation. Cet outil numérique nous permettra d’aborder toutes les questions mentionnées précédemment. Ce manuscrit est organisé selon une méthodologie résumée sur la Fig. 4. Nous distinguerons deux situations : (1). le cas d’une pose statique à l’équilibre, (2). la nage du robot. Notre angle d’attaque pour analyser la stabilité de la nage est de la décomposer comme une succession de poses à l’équilibre, une hypothèse qui sera justifiée dans notre étude. Dans ces deux cas, nous analyserons les propriétés de ces états de base pour ensuite dégager des nouvelles lois de contrôle du roulis.

Le message important de cette thèse est que la compréhension de la stabilité statique, qui est un champ complexe et riche, est un élément majeur pour la maîtrise de la stabilité dynamique. Or cette propriété n’est pas partagée par tous les locomoteurs. En comparaison, la stabilité de la marche des bipèdes ou quadrupèdes diffèrent fortement de la stabilité statique (notre posture est généralement instable en mouvement) et il en est de même pour la stabilité du vol battant.

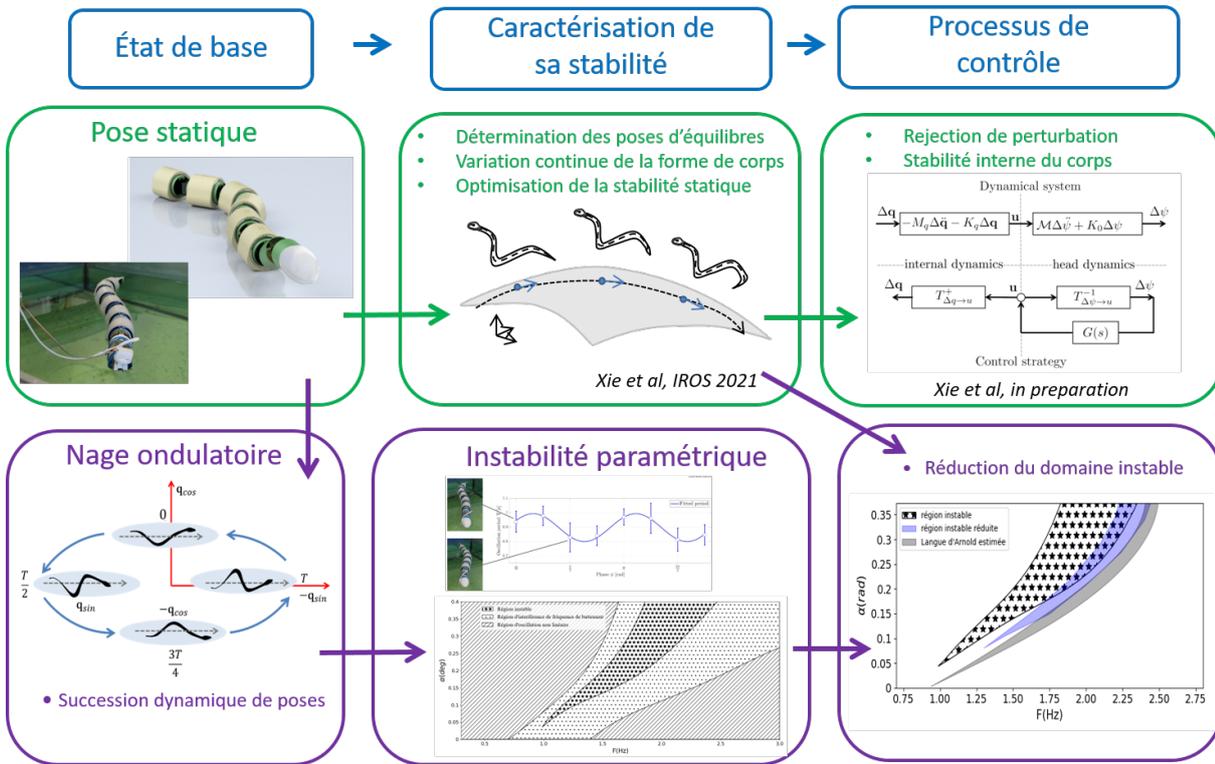


FIGURE 4 – Processus de la stabilisation du robot NATRIX : les blocs verts correspondent au contrôle postural et les blocs violets correspondent à la stabilité dynamique

## Organisation des chapitres de la thèse

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le chapitre 1, nous allons présenter une étude bibliographique dans des aspects très divers, afin de fournir une explication plus détaillée du positionnement introduit ci-dessus. Du point de vue de la robotique, nous allons présenter la classification des robots nageurs selon les modes de nage et le développement récent de la famille des robots à nage ondulatoire (sur la conception, la modélisation, le contrôle, etc.). Du point de vue de l'hydrodynamique, des différents modèles adaptés à la robotique sous-marine et mettre en évidence les différences sur l'hydrodynamiques entre les nages sous l'eau et en surface. Du point de vue de la stabilisation, nous allons présenter la stabilité posturale des différents mécanisme à grand échelle, tel les navires, les différents types de robots et les serpents dans la nature.

Dans le chapitre 2, nous allons présenter en détail le prototype réalisé dans le cadre du projet. Ce chapitre va introduire tous les modèles utilisés pour les conceptions du

contrôleur et les simulations numérique tridimensionnelles, tel la géométrie, les efforts, la cinématique et la dynamique. Il convient de mentionner que nous avons décidé de omettre les effets hydrodynamiques dans le cadre de notre étude. La raison sera donnée dans ce chapitre. Les travaux de ce chapitre ont permis la publication d'un article dans la conférence IEEE, *Advanced Robotics and Its Social Impacts (ARSO)* en 2023 [17].

Dans les trois chapitres 3, 4, 5, nous allons traitons des stabilités statique et dynamique et de la stabilisation du robot. Le déroulement de l'étude est illustré sur la Fig.4. D'abord les mouvements rigides du robot dans l'espace sont définis par ceux de sa tête. La position et l'orientation de la tête et la forme du corps sont collectivement appelées la "pose" du robot. Les mouvements de pilonnement, de roulis et de tangage de la tête en surface sont considéré comme des perturbations brisant l'équilibre du robot. Le chapitre 3 traite de la stabilité statique du robot. D'abord, un algorithme va être introduit pour déterminer les poses d'équilibre, ce qui associe à une optimisation sur le groupe de Lie des pose de la tête. Ensuite, une loi de contrôle en boucle ouverte va être introduite. Cette loi nous permet de générer des trajectoires articulaires par anticipation maintenant la tête en équilibre quasi-statique au fil du temps. À la fin, un processus d'optimisation est intégré dans ce contrôle pour optimiser la stabilité statique. Les travaux de ce chapitre ont permis la publication d'un article dans la conférence IEEE, *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* [18].

Dans le chapitre 4, une loi de contrôle en boucle fermée va être introduite pour que le robot converge vers une pose statique donnée tout en rejetant dynamiques des perturbations autour de l'équilibre. Les objectifs de ce contrôleur sont :

- rejeter les perturbation (pilonnement, roulis et tangage) autour de la configuration d'équilibre de la tête (stabilité de la dynamique externe) ;
- générer des trajectoires articulaires convergeant vers une forme donnée au cours de rejet des perturbations.

Ce contrôleur se base sur le modèle dynamique linéarisé autour de l'équilibre et utilise une méthode linéaire pour générer la commande par retour d'état. La validité de ce contrôleur a été numériquement confirmée. Les travaux de ce chapitre permettra une publication de journal.

Le chapitre 5 va aborder la stabilité dynamique du robot. Dans la première partie, une série des simulations de la nage ondulatoire est effectuée dans l'espace de paramètres de la nage. À partir des simulations, nous allons reporter une instabilité du mouvement de roulis qui provoque le chavirement du robot. Dans la seconde partie, nous allons in-

roduire un patron de stabilité unidimensionnel capturant les caractères de la dynamique de roulis. Ce patron va être utilisé pour prédire cette instabilité dans la dernière partie. En exploitant les caractères de ce patron, nous avons proposé une stratégie pour atténuer cette instabilité en appliquant l'algorithme prédictif dans le chapitre 3. Ces travaux sont partiellement rapportés dans la publication [17] et présentés sur la *25e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE Université Paris Cité*.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale sur le travail présenté ainsi que plusieurs perspectives dans le cadre de ce projet de SSSNEAQ.

# ÉTAT DE L'ART

---

Depuis les travaux précurseurs de Hirose [19], la robotique s'inspirant de la locomotion des animaux élancés (serpents, anguilles, lamproies..etc) a fait des progrès considérables en un demi-siècle, avec une résurgence dans les années 2000. Néanmoins, la problématique de la stabilité de ces robots est un domaine de recherche encore ouvert voir inexistant.

L'objectif de cet état de l'art est donc d'exposer nos connaissances actuelles sur les robots nageurs serpentiformes et leurs limitations. Nous montrerons que ce domaine souffre d'un paradoxe : la plupart des robots nageurs évoluent à la surface de l'eau pour des raisons technologiques, bien que leur modélisation et leur contrôle ne prennent généralement pas en compte les spécificités de la surface libre. Parmi ces problèmes, nous essaierons de dégager d'un côté les enjeux de la stabilité à la surface de l'eau, et de l'autre la modélisation de la nage en surface.

Nous traiterons aussi de la stabilité des navires comme un point de départ pour analyser la stabilité de nos robots. Nous verrons que la stabilité dynamique reste un champ actif de recherche. Réciproquement, nous aborderons la problématique de la stabilité animale qui, contrairement aux navires, sont caractérisés par un grand nombre de degrés de liberté internes. Nous analyserons alors les mécanismes de stabilité (en boucle ouvert ou fermée) assurés par le système (nerveux) postural des vertébrés.

Finalement, nous proposerons un bref état de l'art sur la stabilité des serpents et introduirons notre animal modèle, le mocassin d'eau, qui a motivé le développement du robot NATRIX.

Cet état de l'art est par nature fortement multi-disciplinaire et compile des connaissances en mécanique des fluides, biologie (éthologie, neurologie), ingénierie maritime, et bien sûr, en robotique qui est une science intégrative par essence.

## 1.1 La nage ondulatoire : intérêts et complexité

### 1.1.1 De l'animal au robot

Les animaux aquatiques et semi-aquatiques font preuve de performances dynamiques exceptionnelles relativement aux véhicules sous-marins autonomes actionnés par des propulseurs, notamment en termes de consommation énergétique et de manoeuvrabilité [20]. Par exemple, certains poissons peuvent virer sur un rayon de courbure correspondant à 10-30% de leur longueur de corps sans perdre en vitesse. En comparaison un bateau doit réduire sa vitesse de 50% pour virer sur un rayon de giration de l'ordre de sa longueur. Grâce à cet avantage décisif, les robots nageurs bio-inspirés pourraient potentiellement intervenir dans des situations complexes (débris de surface, chavirement d'un navire), évaluer une situation de crise, ou surveiller les environnements côtiers ou pélagiques (hors côtes et fond) [21]. Parmi les différentes catégories de nageurs (poissons, reptiles, amphibiens..etc), les membres de la catégorie des nageurs anguiformes (anguilles, lamproies, serpents...etc) font preuve d'une grande manoeuvrabilité adaptée aux missions mentionnées.

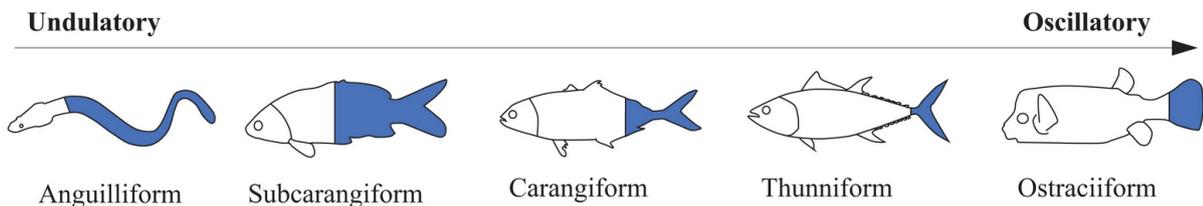


FIGURE 1.1 – Classification des différents modes de nage des poissons extraite de [22].

En effet, il est possible de classer les types de nage selon la proportion du corps utilisée pour générer la propulsion. Les grandes catégories sont : anguiforme, subcarangiforme, carangiforme, thunniforme et ostraciiforme (voir Fig. 1.1). On remarque sur cette figure que la nage est essentiellement ondulatoire en opposition à la nage oscillante reposant sur le battement de la caudale. Pour le mode anguiforme, tout le corps élané participe à la propulsion grâce à une onde de flexion latérale se propageant de la tête vers la queue. Cette onde est obtenue par la coordination de la contraction/relaxation des muscles le long de la colonne vertébrale du nageur. La propagation de cette onde mécanique accélère le fluide grâce aux effets de masse ajoutée (voir figure 1.2 (gauche), et la section suivante). La quantité de mouvement résultante est finalement injectée dans le sillage au niveau de la queue du nageur [23, 24]. Simultanément, les effets visqueux

vont générer des tourbillons le long du corps qui seront ensuite “libérés” dans le sillage. Ces tourbillons vont s’organiser pour engendrer un sillage de Von Karman inverse (voir figure 1.2 ,droite). Les effets de masse ajoutée et l’organisation tourbillonnaire sont les deux principaux mécanismes expliquant l’origine de la propulsion [25]. Nous reviendrons plus tard sur ces mécanismes dans la section 1.2.

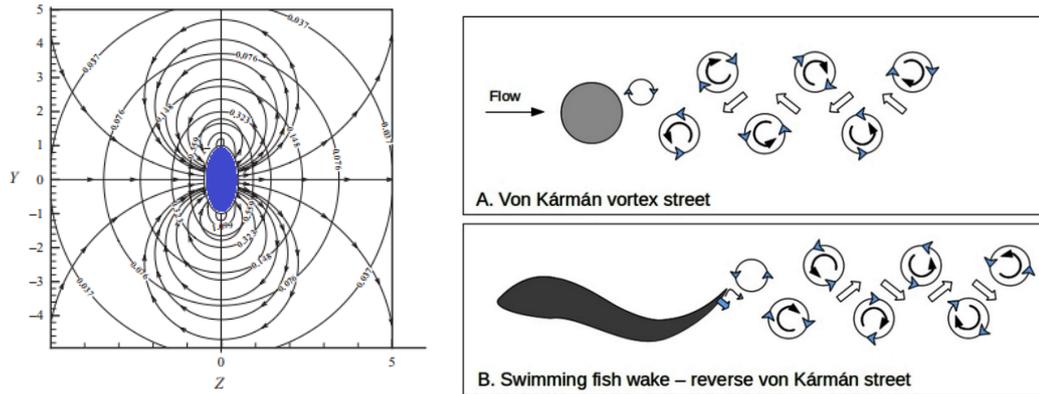


FIGURE 1.2 – Gauche : écoulement dipolaire induit par les oscillations latérales d’un nageur (ellipse bleue) calculé dans l’hypothèse du fluide parfait. L’inertie associée au mouvement non-uniforme du fluide est à l’origine de l’effet de masse ajoutée (figure extraite de [24]). Droite : structure tourbillonnaire dans le sillage d’un corps statique (haut) et d’un nageur (bas). On remarquera la différence de quantité de mouvement introduite dans le sillage illustrée par les flèches (figure extraite de [26]).

En comparaison, la nage thuniforme repose essentiellement sur la propulsion caudale fournissant une plus importante poussée et des vitesses plus élevées relativement à la nage anguiforme. L’intérêt de la nage anguiforme repose donc principalement sur sa manoeuvrabilité et son efficacité énergétique [27]. Cette manoeuvrabilité va motiver le développement de robots nageurs élancés dont la structure sérielle et redondante (plus de degrés de liberté internes qu’externes) tente de reproduire la complexité articulaire des colonnes vertébrales. Ces travaux vont s’inspirer d’animaux exploitant la nage anguiforme/ondulatoire appartenant à trois grandes classes du vivant (voir Fig. 1.3)

- **Les ostéichthyens** ou poissons osseux. On y retrouve principalement les anguilles, murènes ou combres. Bien que n’appartenant pas à cette classe, on pourrait aussi y inclure les lamproies qui se distinguent de ces derniers par l’absence de membres pairs et mâchoires. Les robots prenant comme modèles ces nageurs aquatiques sont généralement développés pour des missions sous-marines comme la surveillance de structures off-shore. En complément de la structure sérielle, le robot peut aussi

intégrer des membres dits ptérygiens : les nageoires pectorales pour la navigation et la nageoire caudale pour la propulsion. On parlera alors de robot anguille pour cette classe.

- **Les amphibiens** : L'animal modèle par excellence de cette classe est la salamandre. Les robots salamandres sont ainsi dotés de quatre membres (deux paires inférieures et supérieures) leur permettant des transitions terre-eau plus fluides. Leurs champs d'application privilégiés sont les zones humides ou côtières. On parlera alors de robot salamandre pour cette classe.
- **Les reptiles** et plus précisément les serpents. Contrairement aux deux classes précédentes, les serpents n'ont pas de membres, bien que certaines espèces aquatiques peuvent être dotées d'une queue fortement aplatie faisant office de nageoire caudale comme le *pelamis platurus*. Les robots serpentiformes sont généralement déployés à la surface de l'eau ou en eau peu profonde. L'intérêt de tels robots est de pouvoir exploiter des combinaisons de degrés de libertés complexes mêlant flexions dorso-ventrale et latérale, ainsi que la torsion. Ces robots peuvent aussi utiliser un grand nombre d'allures de locomotion terrestre en complément de la nage ondulatoire. On parlera alors de robot serpent pour cette classe.

Cette proposition de classification animal/robot vise à dégager les grandes tendances de la robotique bio-inspirée basée sur la nage ondulatoire, mais elle n'est pas rigide et encore moins unique. Certains robots peuvent combiner des éléments morphologiques associées à ces trois grandes classes.

### 1.1.2 Une brève revue des des robots nageurs anguiformes

En comparaison de la biologie [30] et de la physique [27], la robotique ne s'est intéressée que très récemment à la nage. Dans cette section, nous présenterons plusieurs robots bio-inspirés développés ces vingt dernières années et ayant comme point commun d'exploiter la nage ondulatoire par des robots anguiformes multi-corps. Nous utiliserons la classification introduite dans la première section pour distinguer ces robots : robots anguilles, salamandres ou serpents.

Cette présentation ne pouvant pas être exhaustive, nous traiterons des robots anguiformes pertinents pour notre étude ou ayant contribué significativement aux enjeux de la stabilité et de la navigation 3D. Leur spécificités sont résumées dans le tableau 1.1. À l'instar des navires, la stabilité sera définie ici en référence aux mouvements de pilonnement, roulis et tangage de la tête relativement à un repère galiléen (un point de la surface

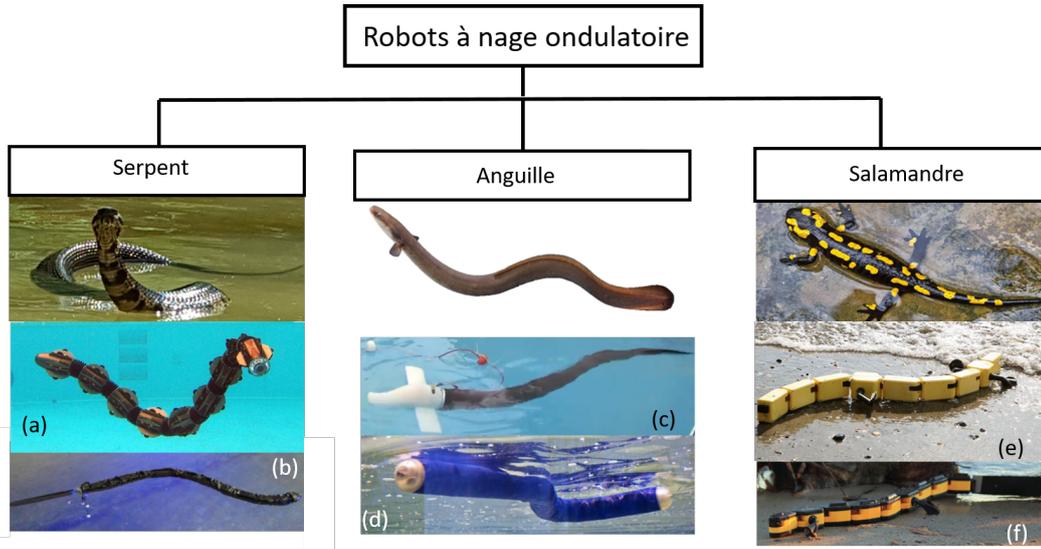


FIGURE 1.3 – 3 types de robots bio-inspirés à nage ondulatoire. (a).le robot ACM-R5; (b). le robot Mamba extrait de [28]; (c) le robot anguilliforme du projet RAAMO; (d). le robot NEELBOT extrait de [29]; (e). le robot Salamandra II; (f). le robot AmphiBot III

par exemple). Nous verrons dans les prochaines sections plus en détails ces concepts de stabilité.

TABLE 1.1 – Récapitulatifs des robots anguiformes traités dans cette section.

Nom (année)	Catégorie/type	Modélisation	Commande	Stabilisation
REEL2 (1999)	anguille	2D	*GG	-
RAAMO (2006)	anguille	3D	GG+feedback	nageoires+ flexion
Lampetra (2008)	anguille	-	**CPG+feedback	-
Salamandra II (2008)	salamandre	-	CPG	lests
ACM-R5 (2009)	serpent	-	GG	-
ANGEL (2012)	anguille	-	GG	-
AmphiBot III(2014)	anguille	3D	CPG+feedback	-
Mamba (2014)	serpent	2D	GG+feedback	lests
Envirobot (2016)	salamandre	-	CPG	flotteurs
Eelume (2017)	anguille	3D	GG+feedback	-
AgnathaX (2021)	anguille	-	CPG+feedback	flotteurs

\*GG : Contrôle de paramètres d’allure (ou gait generator)

\*\*CPG : Réseau locomoteur spinal

Commençons notre tour d’horizon par un des premiers robots anguilles : REEL2 (voir Fig.1.4, gauche). Construit à l’université de Harvard en 1999 [31], ce robot est composé de cinq modules montés “en série” et motorisés par quatre servomoteurs. Un modèle

dynamique associé au robot permet de reproduire différentes allures (avance, virage, nage latérale) confirmant la possibilité de capturer les grands phénomènes de la locomotion par un modèle simple.

Les premiers robots serpents ont émergé dans les années 1970 [19]. La première génération de robots serpents sériels et planaires fut développée par Prof. Hirose. L'ACM-R1 était par exemple doté de roues [32] pour de la locomotion essentiellement terrestre.

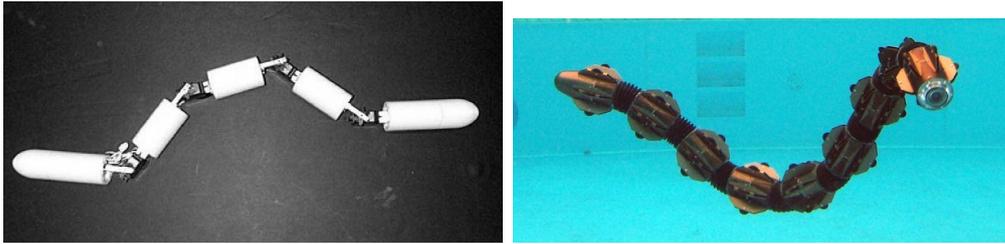


FIGURE 1.4 – Gauche : Le Robot REEL2 extrait de [31]. Droite : Le robot ACM-R5.

La première version amphibie apparue en 2005 se nomme ACM-R5 [33] (voir Fig.1.4 de droite) . Les neuf modules sont connectés par des liaisons pivots assurant des flexions latérales et dorso-ventrales. Ce robot utilise différents modes de locomotion tels que la nage serpentine ou les modes terrestres concertina et sidewinding [34]. Dans cette étude, ACM-R5 est comparé à un autre robot développé par une équipe chinoise. Le contrôle de l'allure repose sur une commande centralisée en position des moteurs via une fonction "serponoïde". Cette fonction prend la forme suivante

$$q_i = \tilde{q} \sin(\omega t - ki) + q_0(t), \quad (1.1)$$

avec  $q_i$  la consigne articulaire pour le  $i$ -ème servomoteur,  $\tilde{q}$  l'amplitude de l'onde et  $\omega$  et  $k$  les fréquences temporelle et spatiale de l'onde propagative de vitesse  $C = \omega/k$ . Une courbure constante  $q_0(t)$  peut être imposée pour que le robot tourne. La modulation de l'allure s'effectue par un changement des paramètres  $(q_0, \tilde{q}, \omega, k)$  : on parle alors de contrôle par changement de paramètres (gait generator). Cette onde de flexion latérale peut être superposée à d'autres ondes de flexion ou de torsion comme dans le cas du sidewinding [34]. L'entreprise Hibot se charge de la commercialisation de la série des robots ACM.

Des vidéos disponibles sur internet montrent ACM-R5 naviguant en trois dimensions dans une piscine. En l'absence de documentation sur ces vidéos, nous ne pouvons pas savoir si ces manoeuvres résultent d'un contrôle précis du robot ou si elles sont produites par une commande d'allure en boucle ouverte. Nous supposons donc que les problématiques

de navigation complexe et de stabilité n'ont pas été traitées dans ce projet.

Initié en 2006, le projet RAAMO (“Robot Anguille Autonome en Milieu Opaque”) porté par notre équipe développa un nouveau prototype de robot anguille (voir Fig. 1.5) reproduisant la complexité des articulations du système vertébral [35]. Les modules du robot sont connectés par des articulations de type rotule à 3 degrés de liberté permettant des déformations tridimensionnelles complexes [36]. Ce robot est aussi équipé d'une paire de nageoires pectorales afin de stabiliser le roulis de manière passive.



FIGURE 1.5 – Le robot RAAMO évoluant à la surface de l'eau avec son ombilical bien visible.

Une des contributions significatives de ce projet est l'introduction d'un modèle dynamique 3D basé sur une approximation macro-continue du robot [37]. La nage est aussi pilotée par une fonction serponoïde. À partir de ce modèle dynamique, un contrôleur avec retour d'état fut proposé dans le simulateur pour le suivi de trajectoire 3D et la stabilisation du roulis avec [11] ou sans [16] nageoires actives. Ces stratégies de contrôle furent essentiellement testées sur les plateformes numériques et des versions plus simples sur le robot RAAMO. On retrouve donc dans le projet RAAMO des solutions basées sur le design (nageoires pectorales) et la commande de la flexion dorso-ventrale (testée numériquement) pour diminuer le roulis.

Dans la continuité de ces travaux, un robot sous-marin auto-reconfigurable nommé ANGEL a été développé en 2012 dans le cadre du projet ANGELS (anguilliform robot with electric sense). Ce macro-robot est constitué d'un ensemble de drones sous-marins pouvant se connecter en série pour effectuer une nage anguiforme (voir Fig. 1.6). La flottabilité du robot peut être activement contrôlée en changeant le volume d'un réservoir d'air par un mécanisme de la came rotatif, un principe analogue à la vessie natatoire des poissons ou la variation de volume des poumons des serpents [39]. Néanmoins, la stabilisation en temps réel par ce de mécanisme pouvait rapidement devenir instable.

L'équipe Biorobotics de l'EPFL s'est également lancé dans le développement de robots

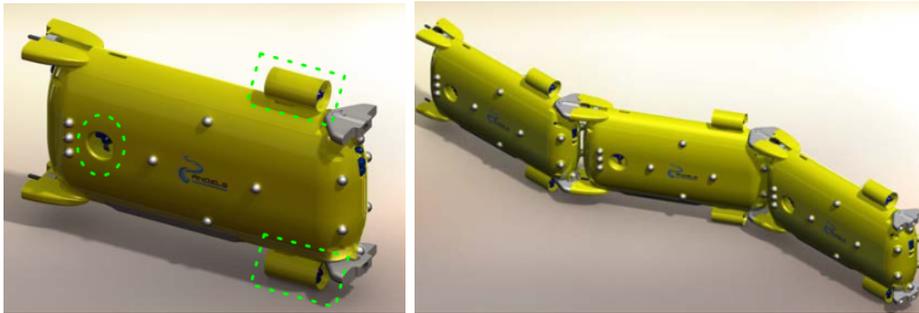


FIGURE 1.6 – L’AUV ANGEL extrait de [38] dans sa version seule (gauche) et connecté en série (gauche) grâce au sens électrique.

bio-inspirés nageurs. On retrouve des robots salamandres dont “Salamandra II” [40] (Fig. 1.7. (a)) ou des robots anguilles avec “AmphiBot I-III”[41, 42, 43] (Fig. 1.7. (c)). Un robot instrumenté nommé *Envirobot* [12], une spin-off d’Amphibot, fut développé pour la détection de polluants dans les zones humides telles que les lacs.



(a) Le robot Salamandra II



(b) Le robot AmphiBot III



(c) Le robot Envirobot extrait de ([12])



(d) Le robot AgnathaX

FIGURE 1.7 – La suite de robots développés à l’EPFL dans l’équipe BioRobs de A. Ijspeert.

Ces robots se distinguent des versions précédentes en générant une onde progressive de flexion, non via une commande centralisée basée sur une allure à paramètres, mais grâce un réseau locomoteur spinal (central pattern generators ou CPG) reproduisant la

complexité neuronale de la colonne vertébrale [43, 44, 45]). Un oscillateur est “attaché” à chaque servomoteur lui communiquant une consigne articulaire périodique. Chaque oscillateur est ensuite connectés aux autres oscillateurs pour former un réseau complexe d’oscillateurs. L’avantage du CPG est de produire un accrochage en phase et fréquence des consignes articulaires via un contrôleur robuste. Les paramètres de ce réseau peuvent être aussi optimisés pour maximiser l’efficacité de la nage [44]). Le dernier robot de cette génération, AgnathaX (voir Fig. 1.7.d), reprend la même structure mécanique mais intègre un contrôle en couple pour chaque actionneur basé sur un CPG prenant en compte les retours sensoriels hydrodynamiques [46].

Dans Porez *et al* [43], les auteurs proposent un modèle dynamique 3D de l’Amphibot basé sur un algorithme récursif qui sera repris dans le cadre de ce mémoire. Ce modèle reproduit bien la dynamique du robot pour une gamme de paramètres d’allures ou lors de manoeuvres malgré la présence d’un roulis observé par les auteurs [43]. Or tous ces robots sont stabilisés passivement par l’ajout de flotteurs ou par ajustement de position du centre de masse dans la configuration droite. Ils peuvent nager à la surface ou au fond d’un bassin, mais jamais entre deux eaux.

L’université norvégienne de sciences et de technologie (NTNU) a aussi produit une série de robots bio-inspirés anguiformes dont le robot serpent Mamba en 2014 (Fig. 1.8 de gauche) [47]. En 2017, cette même équipe a commencé le développement d’une version industrielle Eelume (Fig. 1.8 de droite) pour des missions d’inspection, de maintenance et de réparation d’installations sous-marines [8].



FIGURE 1.8 – Gauche : Le robot Mamba extrait de [48]. Droite : le robot Eelume avec des propulseurs extrait de [8].

Cette spin-off propose une nage agile en trois dimension grâce à l’ajout de propulseurs le long du corps ou sur la queue [49]. A l’instar des deux précédentes équipes, l’équipe norvégienne a aussi proposé des modèles pour la simulation et le contrôle (boucle ouverte

et fermée) du robot MAMBA à la surface de l'eau [50, 51, 52].

### 1.1.3 Stabilité et robots nageurs

Cette brève revue nous amène à conclure que les aspects de stabilité des robots anguiformes ne sont pas spécifiquement traités dans la littérature bien que les robots évoluent majoritairement à la surface de l'eau. Le contrôle de la flottabilité est souvent proposé comme le levier principal pour résoudre les problématiques de stabilité. Or nous verrons dans ce mémoire que la stabilité dynamique ne se réduit pas à la stabilité statique dans la configuration droite. Néanmoins, on retrouve une mention explicite du roulis dans Porez *et al* [43], roulis qui pourrait être à l'origine de l'écart entre le modèle et les expériences avec l'Amphibot selon les auteurs.

Mais qu'en est-il des autres robots tel que l'ACM-R5 [34], RAAMO ou MAMBA [51] ? On peut tout d'abord supposer que le roulis n'est pas suffisamment important dans ces expériences pour être mentionné. En effet, ces robots se distinguent de l'Amphibot par la présence d'un cordon ombilical (câbles assurant l'alimentation et le contrôle du robot, visibles sur les figures 1.5 ou 1.8). Ce câble flottant à la surface peut fournir un surplus de stabilité grâce à la raideur de l'ombilic atténuant ainsi le mouvement de roulis.

Une autre hypothèse est que ces travaux précurseurs se sont essentiellement focalisés sur la propulsion et la navigation reléguant ainsi la stabilité à un aspect secondaire. Or des témoignages de chercheurs ayant travaillé sur les robots RAAMO, Angels ou AgathaX confirment la présence d'un mouvement de roulis non négligeable. On peut donc conclure qu'il existe bien un problème associé au roulis bien que la littérature sur ce sujet n'en fasse pas grand cas.

Doit-on aussi conclure que le problème du roulis peut être finalement résolu grâce à l'ajout de flotteurs pour réguler la flottabilité ou d'appendices (nageoires pectorale ou ombilical) limitant le roulis ? Ces mécanismes semblent en effet contribuer à la stabilité mais souffrent aussi de certaines limitations. En effet, l'ajout de flotteurs ou d'appendices tend à augmenter la traînée turbulente et le tirant d'eau, dégradant ainsi les performances hydrodynamiques de ces robots.

Deuxièmement, la stabilité peut devenir très précaire lors de manoeuvres lentes ou à l'arrêt pour effectuer des tâches statiques comme l'observation d'environnement. Lorsque le robot est soumis à des perturbations externes (vent, vagues, objets flottants), il serait souhaitable de restabiliser le robot (tête et corps) par des stratégies actives. En effet, l'utilisation de robots en écologie se popularise [3] et certains robots anguiformes, tel que

LAMPETRA [53] ou Eelume (Fig. 1.8), sont équipés de caméra. Maintenir la stabilité du robot est donc un enjeu majeur du développement de la robotique bio-inspirée.

Le postulat de ce mémoire est que la stabilité des robots peut être grandement améliorée en exploitant activement la structure hyper-redondante du robot en poursuivant une démarche bio-inspirée. Une telle approche nécessite

- de bien comprendre la nature des interactions entre le nageur et l’environnement (traitées dans la prochaine section) ;
- d’analyser les mécanismes de contrôle postural développés dans le monde animal (section 1.4) ;
- d’identifier un animal modèle nageant à la surface de l’eau (section 1.4).

## 1.2 Les grands principes hydrodynamiques de la nage

### 1.2.1 La nage ondulatoire : régimes et modèles

Dans cette section, nous donnerons un bref aperçu de l’hydrodynamique des nageurs en vue de la compréhension des phénomènes physique et de leur modélisation et simulation pour des applications robotiques. Depuis près d’un siècle, comprendre et reproduire la performance du nageur est un défi pour les biologistes [30], roboticiens [54] et physiciens [25, 55]. Historiquement, deux types de modèles ont permis de rendre compte des effets propulsifs : le modèle résistif introduit par exemple par les travaux de Taylor [56] et le modèle réactif à l’instar des travaux de Lighthill [57, 58]. Ils se distinguent comme étant les deux limites asymptotiques des écoulements caractérisées par leur nombre de Reynolds. Ce nombre de Reynolds  $Re$  est défini par

$$Re = \rho \frac{UL}{\mu} \quad (1.2)$$

avec  $U$  la vitesse du nageur,  $L$  sa longueur caractéristique (typiquement sa longueur) et  $\rho$  et  $\mu$  la densité volumique et la viscosité dynamique du fluide. Ce nombre sans dimension nous renseigne sur l’importance des effets inertiels dans le fluide (tendant à rendre la dynamique non-linéaire et chaotique) vis à vis des effets visqueux (régularisant et amortissant la dynamique).

La Fig. 1.9 illustre la variation du nombre de Reynolds en fonction des échelles et vitesses des nageurs. Pour des très faibles nombres de Reynolds ( $Re < 10^{-2}$ ) correspondant à des nageurs microscopiques, l’écoulement est régulier, relativement ordonné et les effets

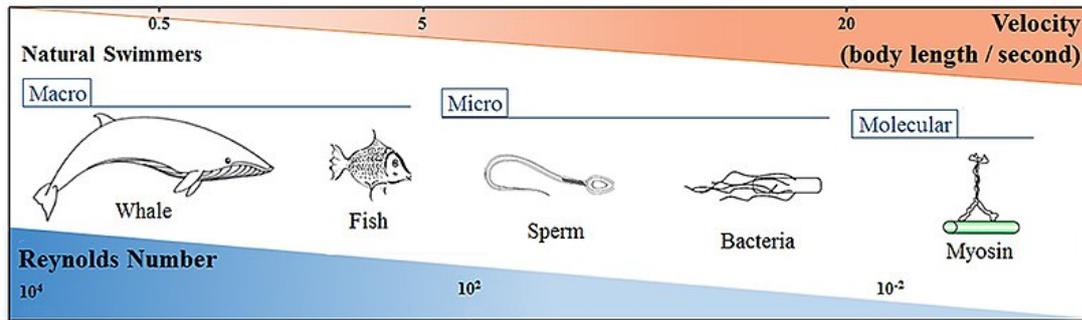


FIGURE 1.9 – Evaluation du nombre de Reynolds en fonction du type de nageurs (source : Wikipedia)

visqueux dominant. A grand nombre de Reynolds ( $Re > 10^3 - 10^4$ ) correspondant à des nageurs aux échelles macroscopiques, l'écoulement autour du nageur est caractérisé par une dynamique tourbillonnaire qui peut se déstabiliser pour donner de la turbulence. L'inertie du fluide domine les effets visqueux à l'échelle du nageur.

Les modèles résistifs décrivent une nage où les effets dissipatifs sont dominants par rapport aux effets inertiels. Ce modèle est donc plus pertinent pour les nageurs avec des nombres de Reynolds très faibles  $Re \ll 1$ , même s'il peut être étendu à des nombres de Reynolds plus grands en considérant une traînée turbulente. Dans ce modèle, chaque section du corps est soumise à une force opposée à la direction du mouvement.

Le modèle réactif s'applique lorsque le fluide est considéré comme parfait, c'est à dire avec une viscosité nulle. On peut alors l'appliquer lorsque le nombre de Reynolds est particulièrement grand (avec certaines précautions). Le modèle réactif rend compte d'une dynamique du fluide purement inertielle via le concept de masse ajoutée. On parle de forces réactives car elles résultent de la réaction du fluide au mouvement non-uniforme du corps car selon le paradoxe de d'Alembert, un mouvement uniforme dans un fluide parfait. L'intérêt du fluide parfait est l'absence de dissipation qui permet d'utiliser des méthodes variationnelles basées sur le principe de moindre action ou d'Hamilton pour exprimer un modèle réactif [23].

D'après la Fig. 1.9, on observe que les nageurs considérés dans cette étude appartiennent aux régimes intermédiaires. Il est alors nécessaire de prendre en compte les effets inertiels et dissipatifs, c'est à dire la masse ajoutée, la vorticité et la perte d'énergie induites par le décollement de la couche limite visqueuse. En effet, même pour des très grands nombres de Reynolds, la force de propulsion doit s'équilibrer avec une force antagoniste pour atteindre un régime stationnaire. Cette résistance est généralement attribuée

à la traînée turbulence (et donc visqueuse). Plaçons nous donc dans un cadre où la force de propulsion est fournie par le modèle réactif et les forces antagonistes par les modèles résistifs.

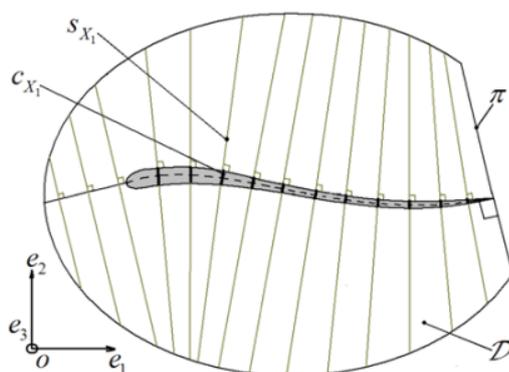


FIGURE 1.10 – L'écoulement autour du nageur est décomposé en strates de fluide  $S$  où sont confinés l'écoulement produit par les oscillations latérales. L'accélération d'une particule fluide le long de ces strates est à l'origine de la poussée du nageur. Cette poussée est finalement donnée par l'énergie et la quantité de mouvement introduites dans le sillage à travers la surface  $\pi$  (figure extraite de [23])

Initialement introduite par Lighthill [27], la théorie de la locomotion des nageurs à corps élancés pour les petites et grandes déformations reste encore valide aujourd'hui [57, 58]. Cette théorie considère un nageur tridimensionnel évoluant sur un plan. L'hypothèse du corps élancé y est fondamentale. En effet, il est ainsi possible d'approximer sous cette hypothèse l'écoulement sous la forme de strates de fluides orthogonale au corps du nageur (voir figure 1.10). Les tranches de fluide vont donc être accélérées le long du corps, à l'instar d'une vis sans fin.

La force exercée par le fluide sur le corps est proportionnelle à l'accélération lagrangienne d'une particule fluide le long du corps. Le coefficient de proportionnalité entre cette accélération et la force se nomme la masse *ajoutée*, et correspond à l'inertie supplémentaire pour déplacer la masse de fluide environnant le nageur (voir figure 1.2, gauche).

À partir de cette force réactive, il est possible de calculer la résultante moyenne des forces en intégrant la densité linéique de forces le long du corps. On montre que cette poussée résultante ne dépend finalement que de la cinématique de l'extrémité de la nageoire caudale, démontrant l'importance de la dynamique de la queue [23, 24].

### 1.2.2 Validation des modèles

Il est donc possible de simuler la dynamique du nageur avec une certaine précision grâce à ces modèles. Pour les nageurs qui se situent à des régimes intermédiaires ( $Re = 10^3 - 10^4$ ), les forces résistives et réactives doivent être prises en compte via les traînées turbulente et les effets de masse ajoutée [59, 43].

Ce modèle simple en comparaison des simulations de l'équation de Navier-Stokes reproduit relativement bien la poussée produite par la nage, comme le confirme les comparaisons avec un solveur  $k - \epsilon$  d'écoulement turbulent autour d'un nageur effectuée dans [60, 23]. Les écarts des trajectoires et vitesses entre le modèle et la simulation hydrodynamique reste de l'ordre de 10%. D'autres confirmations expérimentales sont effectuées avec le robot AmphiBot III où différentes allures et manoeuvres ont été testées [43]. On trouve aussi d'autres modèles, comme celui de Morison, utilisé pour la modélisation de robots bio-inspirés tel le robot RAAMO [37], Mamba [61], ou NEELBOT [62]). Bien que ces modèles soient encore perfectibles, ils produisent des résultats suffisant pour les besoins de la conception et du contrôle des robots sous-marins [36, 61].

### 1.2.3 La nage en surface : un nouveau défi

Cependant, cet accord entre modèle et expérience est surprenant. En effet, tous ces robots évoluent à la surface de l'eau alors que ces modèles sont paradoxalement développés dans un contexte sous-marin supposant un milieu isotrope sans effet de bords. Or lorsqu'on observe ces robots en mouvement (voir figure 1.7 par exemple), les images témoignent d'une dynamique complexe de la surface.

Les modèles actuels en robotique ne prennent pas en compte les théories de tenue en mer ou de la manoeuvre développées en ingénierie maritime [63, 64]. Il est donc miraculeux que les précédent modèles hydrodynamiques soient si performant bien que ne prenant pas en compte la présence de l'interface. En pratique, il est vraisemblable que le réglage des effets dissipatifs via la mesure des coefficients de traîné permettent de réajuster l'écart entre le modèle et l'expérience [43] et d'intégrer indirectement l'effet des ondes.

Néanmoins, un nouvelle théorie de la nage en surface est nécessaire pour inclure toutes les spécificités de l'hydrodynamique en surface libre [65]. On peut d'ailleurs identifier trois grands axes de recherche pour adapter les modèles sous-marins à la nage en surface. Ces trois axes portent sur les phénomènes suivants

- **la masse ajoutée.** L'inertie additionnelle apportée par le fluide doit dépendre du



FIGURE 1.11 – Gauche : d’Adam Fuss d’un serpent nageur (Untitled (Blue snake), 1998). Droite : photographie du sillage laissé par le robot Amphibot (voir section 1.1.2). Ces deux photo confirment la présence d’un sillage formé d’ondes de surface pour les serpents et les robots, sillage dont la complexité hydrodynamique reste un problème ouvert.

niveau d’immersion du corps. Dans ce cas, la masse ajoutée devient une fonction de la profondeur et de l’orientation du corps par rapport à la surface libre [66].

- **le sillage du nageur.** Nous avons mentionnée dans la première section que le sillage tourbillonnaire contribue à la poussée. Or la nage à la surface de l’eau modifie la structure de ce sillage. Malheureusement, la dynamique de ce sillage et ses possibles interactions avec les allées tourbillonnaires n’ont jamais été étudiées.
- **la traînée induite par la dynamique de la surface.** Les ondes produites par les oscillations du corps vont induire une dissipation supplémentaire. Pour un bateau, cette dissipation peut atteindre 80% de la dissipation totale [67]. L’identification de cette traînée pour les nageurs nécessite de nouvelles études expérimentales pour caractériser précisément la contribution des effets dissipatifs et des ondes.

L’intégration d’un nouveau modèle hydrodynamique nécessite des efforts théoriques et expérimentaux qui sortent du cadre de ce mémoire. Cette conclusion aura une influence majeure sur les hypothèses et les choix faits pour la modélisation de la stabilité du nageur.

### 1.3 Stabilité statique et dynamique à la surface

Dans la section précédente, nous avons mis en avant la complexité de la nage en surface en omettant la problématique de stabilité. Dans cette section, nous proposons donc de décrire les outils existant dans le domaine de l’ingénierie navale pour décrire la stabilité

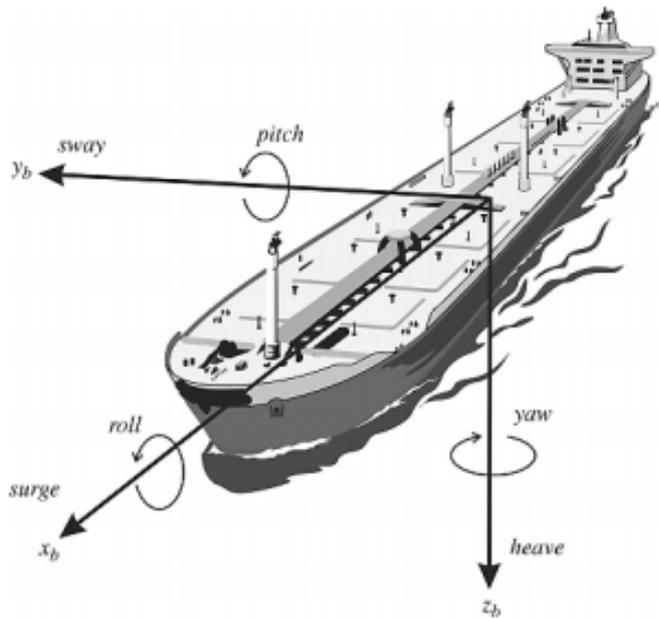


FIGURE 1.12 – Les six degrés de liberté d'un navire. (extrait de [10])

des navires.

### 1.3.1 Stabilité statique

La stabilité navale consiste principalement à étudier la dynamique des perturbations de pilonnement (heave en anglais), de tangage (pitch) et de roulis (roll) illustrées sur la Fig. 1.12. Cette dernière étant la plus critique car la plupart des chavirements se produit sous l'effet d'un roulis important. Ces trois perturbations vont modifier le tirant d'eau (l'enfoncement), l'assiette (relatif au tangage) et la gîte (relatif au roulis).

La conséquence est la modification dynamique de la position du centre géométrique de la partie immergée du navire qu'on nomme centre de carène. Si le bras de levier entre le centre de masse (point  $G$  sur la Fig. 1.13) et de carène résultant d'une perturbation (typiquement  $\theta_x > 0$ ) produit une force de rappel (resp.  $\Gamma_x < 0$ ) ramenant à la position d'équilibre stable, alors le navire est dans une configuration stable. Dans le cas contraire, le bras de levier amplifie la perturbation initiale menaçant le chavirement de la structure.

La stabilité dépend ainsi des positions relatives du centre de masse (généralement fixe dans le repère du navire) et du centre de carène qui varie selon le le tirant d'eau, l'assiette et la gîte. Les position de ces centres sont illustrées sur la Fig. 1.13. Le couple résultant est

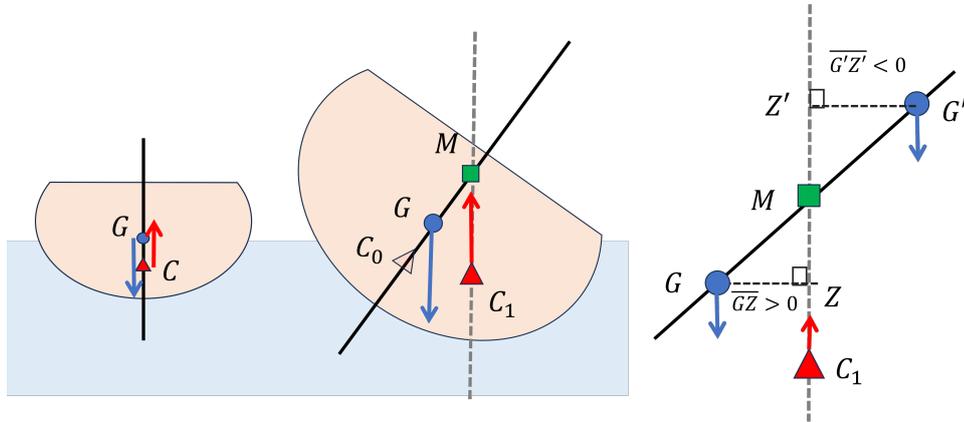


FIGURE 1.13 – Illustration du principe de stabilité des navires. Dans une configuration d'équilibre sur mer calme (figure de gauche), le centre de gravité  $G$  et le centre de carène  $C$  sont sur le même axe vertical. Lorsque le navire gîte (figure du centre), le centre de carène initial  $C_0$  pour  $\theta = 0$  (figure de gauche) se déplace vers une nouvelle position  $C_1$ . L'intersection entre la droite verticale passant par  $C_1$  et le plan médian du navire permet de définir le métacentre  $M$ . Le système est stable si le projeté orthogonal  $Z$  du centre de masse  $G$  sur l'axe  $MC$  est en dessous du métacentre, sinon il est instable comme l'illustre la configuration  $G'$  (figure de droite). Quantitativement, ce critère se définit à partir du signe du bras de levier  $\overline{GZ}$ .

déterminé par le vecteur  $\overrightarrow{GC}$  définissant le bras de levier des forces de flottabilité avec le centre de carène indiqué par  $C$  sur la Fig. 1.13. Comme la force de flottabilité est opposé à la gravité, la composante verticale de  $\overrightarrow{GC}$  ne contribue pas au bras de levier.

Cette observation va motiver l'introduction d'un point particulier nommé *métacentre de carène* (indiqué par  $M$ ) défini comme l'intersection entre la droite verticale passant par le centre de carène et le plan médian du navire. On considérera ce plan comme un plan de symétrie du navire de sorte que le centre de masse appartient à ce plan. Si le centre de carène se déplace sous l'effet du roulis d'un point  $C_0$  (appartenant au plan médian) et à un point  $C_1$ , il est alors possible de définir le métacentre  $M$ . En introduisant le point  $Z$  comme le projeté orthogonal du centre de masse sur l'axe  $CM$ , on peut alors décomposer le bras de levier tel que

$$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GZ} + \overrightarrow{ZC}. \quad (1.3)$$

Comme  $\overrightarrow{ZC}$  suit la verticale, cette composante ne contribue pas au bras de levier. La stabilité est donc uniquement définie par  $\overrightarrow{GZ}$ .

Nous avons illustré sur la Fig. 1.13 deux cas : le cas stable avec le centre de masse  $G$

en-dessous de  $M$  (à droite) et le second cas instable avec  $G'$  au-dessus. La transition entre ces deux conditions est quantifiée par le bras de levier donné par la longueur algébrique  $\overline{GZ}$ . Ce levier  $\overline{GZ}$  se nome le *levier de redressement*. Ainsi, la valeur  $\overline{GZ} > 0$  assure la stabilité et réciproquement,  $\overline{GZ} < 0$  caractérise les cas instables. On remarque que lorsque  $Z$  et  $M$  se confondent, le *levier de redressement* est nul et le système est donc marginalement stable. On peut donc en conclure que le navire reste stable si le metacentre est au dessus du centre de masse.

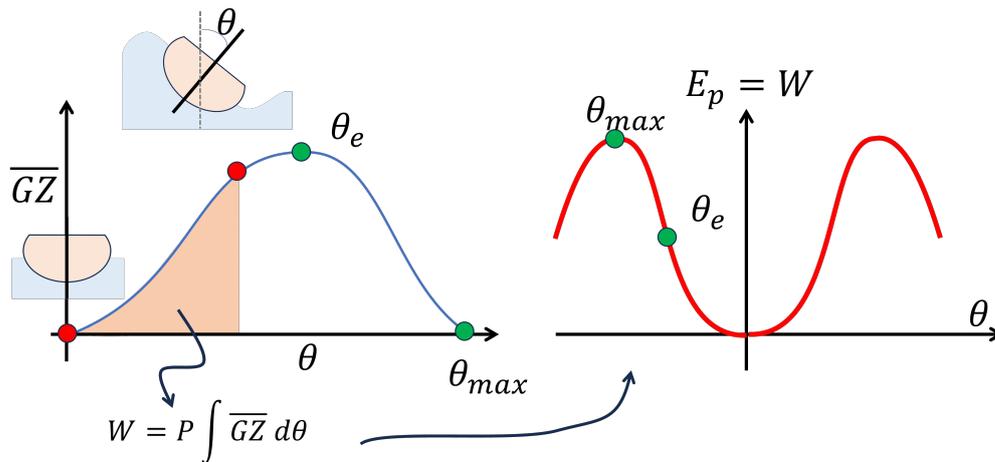


FIGURE 1.14 – Gauche : bras de redressement en fonction de l'angle de gîte à l'équilibre. Droite : bassin énergétique correspondant à la suite d'équilibres statiques correspondant à la Fig. de gauche..

Pour quantifier le domaine de stabilité statique, on peut tracer l'évolution du levier de redressement pour maintenir le navire en équilibre à un angle d'inclinaison  $\theta$  (illustré sur la Fig. 1.14 de gauche). Le système étant supposé à l'équilibre, le navire est ainsi soumis à un couple externe  $\Gamma_x$  qui compense le couple de redressement. L'absence de pilonnement implique que le poids et la force d'Archimède ont la même amplitude.

On remarque la présence d'un extrema en bras de levier  $\overline{GZ}_{max}$  d'abscisse  $\theta_e$ , correspondant au bras de levier maximal que le navire peut supporter sans chavirer et d'un angle maximum de roulis  $\theta_{max}$  au-delà duquel la stabilité n'est plus assurée ( $\overline{GZ} \leq 0$ ). Cette étude de stabilité se nome *stabilité métacentrique* statique [63].

Comme les forces sont en équilibre et constantes (le poids  $P = Mg$  ne varie pas), le travail nécessaire pour amener le navire de manière quasi-statique de l'angle  $\theta = 0$  à  $\theta$  est donc proportionnelle à l'aire sous la courbe (en jaune) (au coefficient  $P$  près). L'aire entre  $\theta = 0$  à  $\theta_{max}$  correspond donc au travail nécessaire pour dépasser la barrière d'énergie

de stabilité statique par une succession d'équilibres définissant le bassin d'attraction du navire (figure de droite 1.14). Attention, ce profil énergétique n'est pas celui de l'énergie du système hors-équilibre, c'est à dire lorsque les forces ne sont plus en équilibre. Autrement dit, la courbe de  $\overline{GZ}$  dynamique n'est pas celle reportée sur la Fig. 1.14.

Même si cette courbe quasi-statique ne rend pas compte de tous les états dynamiques, elle est un outil efficace pour concevoir la coque. Généralement, il faut trouver un compromis dans le design du navire entre un  $\theta_{max}$  grand pour supporter une forte gîte et un grand bras de levier maximal  $\overline{GZ}_{max}$  pour éviter le chavirement lors d'un couple important sur le navire tout en préservant une importante barrière énergétique.

Pour chaque équilibre  $\theta_{eq}$  de la courbe  $\overline{GZ}(\theta) > 0$ , la courbure locale du potentiel d'énergie  $U$  instantané est donc positive. De cette courbure, on peut définir une raideur hydrostatique locale pour chaque équilibre  $\theta_{eq}$ , telle que

$$k[\theta_{eq}] = \left( \frac{d^2U}{d\theta^2} \right)_{\theta_{eq}}, \quad (1.4)$$

de sorte que le couple de rappel  $\Gamma$  s'écrit

$$\Gamma = -k[\theta_{eq}]\Delta\theta + O(\Delta\theta). \quad (1.5)$$

avec  $\Delta\theta = (\theta - \theta_{eq})$ . Tant que  $\overline{GZ} > 0$ , la raideur hydrostatique est positive et le système reste stable. Cette raideur peut varier en fonction de la proximité de l'angle  $\theta_{max}$  où la raideur devient nulle. En effet, à mesure que le système se rapproche de  $\theta_{max}$ , le système passe d'un état stable  $k > 0$  à un état marginalement stable  $k = 0$  avec une décroissance de la raideur. Proche de ce seuil, il est donc nécessaire de pousser le développement de Taylor aux ordres suivant. Par exemple, on peut pousser le développement de Taylor proche de l'équilibre  $\theta_{eq} = 0$  à l'ordre de 3 (respectant la symétrie  $\theta \mapsto -\theta$ )

$$\Gamma(\Delta\theta) = -\left(k_{eq} - |\beta|\Delta\theta^2\right)\Delta\theta + O\left(\Delta\theta^3\right). \quad (1.6)$$

On notera que la correction non-linéaire, quantifiée par  $|\beta|$ , diminue l'amplitude de la raideur. En anglais, cet effet se nomme le *spring softening effect* et nous intéressera tout particulièrement dans le chapitre 5.

### 1.3.2 Stabilité dynamique et paramétrique

L'extension de la *stabilité métacentrique* statique aux cas dynamiques nécessite de considérer l'évolution de ce bras de levier dans des états hors-équilibre. La description de la dynamique se base généralement sur l'approximation des faibles perturbations de roulis [10] afin de proposer un modèle linéaire du second ordre analogue à l'oscillateur harmonique amorti. Il faut donc considérer des perturbations faibles relativement à l'angle maximal de roulis, c'est à dire  $\theta/\theta_{max} \ll 1$ .

Bien que nécessaire, cette condition n'est pas suffisante pour assurer la stabilité dynamique. Il faut aussi s'assurer que la fréquence des perturbations ne soit pas proche des fréquences propres du système. Dans le cas contraire, le modèle doit inclure des couplages fluide-structure plus complexes : effets non-linéaires (comme le *spring softening*), la variation temporelle des paramètres, ou des effets mémoires [68]. Or la dynamique temporelle des systèmes non-linéaires est par nature difficilement prédictible. Ce constat a motivé l'étude d'équations "types" (on parlera plus tard de *patron*) pour analyser la réponse dynamique d'un navire dans ces conditions. Il est ainsi fort probable qu'un système tel que le robot nageur puisse aussi décrire une dynamique non-linéaire complexe et imprédictible.

Un exemple typique est le cas d'un navire soumis à des ondes obliques [69] modifiant la gîte du navire. Dans ce cas, le système n'est plus invariant par  $\theta \mapsto -\theta$  car le navire est soumis à une onde dont la hauteur varie entre bâbord et tribord. La variation de la gîte implique aussi une variation temporelle du couple et de la raideur hydrostatique. Dans ce cas, la dynamique non-linéaire de l'angle de roulis  $\theta$  peut être simplifiée et décrite par l'équation suivante du second ordre [69]

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta^2) [1 + G \cos(\Omega t + \psi)] = F \sin(\Omega t) \quad (1.7)$$

avec  $\omega_0$  la fréquence propre et  $\beta$  la dissipation de l'oscillateur harmonique<sup>1</sup>. Ici,  $\omega$ ,  $F$  et  $G$  sont respectivement la fréquence, l'amplitude d'excitation du roulis et la modulation de raideur hydrostatique provoquées par la gîte. La non-linéarité  $\theta^2$  rend compte de la dissymétrie entre les oscillations  $\theta > 0$  et  $\theta < 0$ .

L'équation étant non-linéaire, on montre qu'il existe un ensemble de solutions complexes comprenant la présence d'une hystérésis, des oscillations non-linéaires ou des régimes chaotiques.

Comme l'illustre la Fig. 1.15, à mesure que l'amplitude de la force augmente, la réponse

---

1. nous utilisons les mêmes notations que cet auteur, qui diffèrent des nôtres

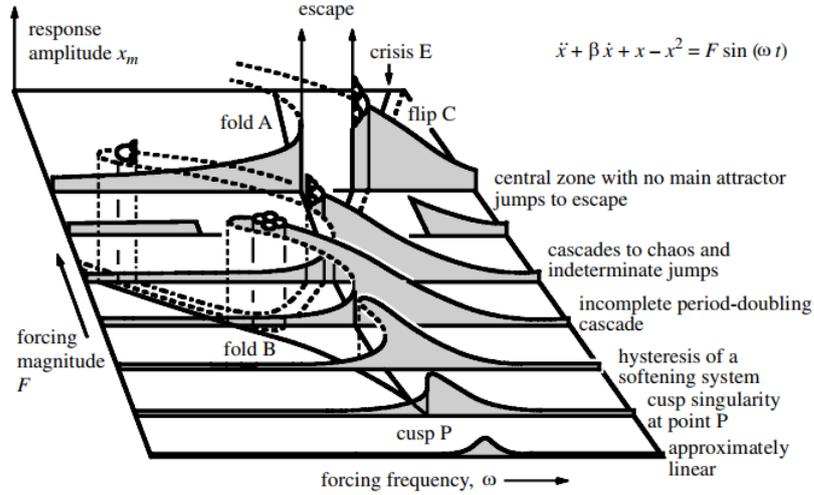


Figure 1. Evolution of steady-state responses for increasing excitation based on a roll equation allowing only one-sided escape (Thompson 1996).

FIGURE 1.15 – Espace des solutions pour l'équation  $\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (\theta - \theta^2) = F \sin(\Omega t)$ , image tirée de [14].

fréquentielle du roulis se complexifie. Pour les plus grandes amplitudes de vague, le système peut décrire un régime chaotique dans une certaine gamme fréquentielle et même pour certaines conditions initiales : le bassin de stabilité devient fractal [14].

L'ajout de la modulation temporelle de la raideur ( $G \neq 0$  dans Eq. 1.7) va provoquer une nouvelle source d'instabilité dans la dynamique. En effet, le système peut devenir linéairement instable, un phénomène connu sous le nom d'instabilité paramétrique [68, 69]. Cette instabilité sera présentée plus en détail dans le chapitre 5. Ce comportement est analogue au mouvement d'une particule dans un paysage énergétique modulé dans le temps comme l'illustre la Fig. 1.16 de gauche. Si la fréquence d'oscillation latérale de la particule *s'accroche* avec la fréquence de modulation du bassin énergétique, c'est à dire que les fréquences sont commensurables, un phénomène amplification des oscillations latérales peut se produire. Il en résulte un diagramme de stabilité dans l'espace  $F - G$  extrêmement complexe comme l'illustre la Fig. 1.16 de droite.

Pour éviter ces instabilités, une solution possible [70] consiste à changer la courbe  $\overline{GZ}(\theta)$  (cf figure 1.14) qui détermine le paysage énergétique du roulis, en modifiant le design de la coque. Des méthodes actives de stabilisation du roulis existent aussi telles que des ailes orientables [71] ou l'utilisation des réservoirs en U [72] dont le mouvement contrôlé permet d'amortir le roulis.

Pour conclure cette section, la stabilité est un enjeu majeur du design des navires,

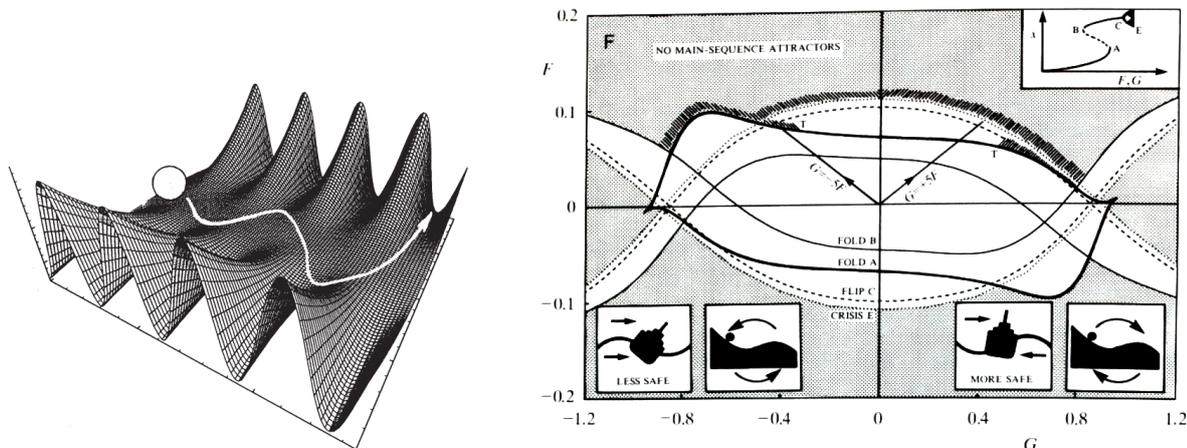


FIGURE 1.16 – A gauche : illustration “naïve” de l’impact de la modulation de raideur pour un système masse-ressort. A droite : Diagramme de stabilité du navire dans l’espace des paramètres  $F - G$  [69].

même si la stabilité dynamique reste encore un champ actif de recherche. Dans notre cas, nous aimerions appliquer une approche équivalente afin de

- développer une approche numérique afin de prédire les équilibres et la stabilité statique des nageurs déformables (chapitre 3) ;
- exploiter les degrés de liberté internes du robot pour amortir les oscillations (chapitre 4) ;
- caractériser la stabilité dynamique du nageur en produisant une équation canonique analogue à l’équation 1.7, puis de détecter les zones dangereuses où le nageur peut se renverser (chapitre 5) ;
- exploiter la stabilité statique pour renforcer la stabilité dynamique (chapitres III-V).

## 1.4 Les enjeux de la stabilité animale et applications robotiques

### 1.4.1 Définir la stabilité animale

Nous avons introduit dans la section précédente une première définition de la stabilité associé aux navires à la surface de l’eau. Peut-on appliquer ces notions aux animaux et par extension aux robots nageurs ?

Il faut tout d'abord établir une convention pour définir le repère en mouvement afin de décrire la stabilité de l'individu. Pour un système multi-corps, ce choix de repère n'est pas anodin car le système est par nature déformable et les distances entre les segments du corps varient. Par commodité, le centre de masse peut servir d'origine pour le repère en mouvement afin de décrire le mouvement du corps relativement à un repère de référence. Une telle approche est par exemple utilisée pour quantifier la stabilité posturale des humains. Si la projection du centre de masse se situe dans la base de support, aussi appelée polygone de sustentation, alors la posture est stable [73].

Néanmoins, ce choix est critiquable sur deux points. Le centre de masse ne correspond pas nécessairement à un point du corps et la position du centre de masse peut être difficile à évaluer. Pour ces raisons, la stabilité animale est généralement définie en référence au mouvement de la tête, là où se concentre les différents systèmes sensoriels tels que le système visuel ou vestibulaire (chez les vertébrés). Les mouvements relatifs du reste du corps (membres et autres sections du tronc) sont ensuite détectés par un ensemble de mécanorecepteurs formant un sixième sens nommé la proprioception. Aussi, les animaux semblent réguler leur "géométrie corporelle" et la stabilité du corps plutôt que directement la position de leur centre de masse [74].

Cette stabilité animale se définit ensuite en référence à l'orientation de la gravité terrestre  $\mathbf{g}$ . On regroupe alors sous le terme de contrôle de la stabilité postural l'ensemble des processus neuro-musculaires assurant le maintien de l'orientation de la tête et/ou des parties du corps à partir de la tête et ceci relativement à la gravité.

Nous traiterons ici essentiellement du cas des vertébrés dotés de la vision et du système vestibulaire. Ce système est composé de l'oreille interne dont les différents canaux et organes permettent de détecter les accélérations, les vitesses angulaires ainsi que la direction et l'orientation de la gravité. On reconnaîtra ici le fonctionnement d'une centrale inertielle. S'il est possible de se stabiliser sans la vision, le dysfonctionnement du système vestibulaire provoque de graves troubles de l'équilibre démontrant son rôle central dans le contrôle postural [74]. D'autres sens peuvent aussi contribuer au contrôle postural, tels que le sens du toucher ou la proprioception, dont la fonction consiste à déterminer l'orientation et la position des membres relativement entre eux.

Le système postural, du moins chez les espèces bi et quadripèdes [75], remplit deux types de fonctions [74, 76]

- Il permet de fournir une forme de corps (les degrés de liberté internes directement contrôlés) afin de maintenir chaque partie du corps dans une configuration spatiale

donnée. Ces configurations peuvent varier selon les conditions externes ou les tâches à accomplir.

- Il régule le maintient des configurations du corps lorsqu'il est soumis à des perturbations internes (fatigues, mouvements de certaines partie du corps) ou externes. Cette régulation de l'équilibre lors de la locomotion nécessite des interactions complexes entre les systèmes postural et locomoteur [75, 76].

## 1.4.2 Applications robotiques

Dans le domaine de la bio-robotique, on retrouve un large panel de solution pour stabiliser la tête et contrôler le regard des robots bio-inspirés comme les robots serpents [77, 51, 78], des bio-robots volants [79, 80], des robots quadrupèdes [81, 82, 83, 84], ou bipèdes (humanoïdes) [85, 86, 87]. Ces systèmes sont basées sur des boucles ouvertes [77, 78], des contrôleurs PID [82, 51, 87] ou optimaux quadratiques [84, 80] et des réseaux de neuronaux [79, 85, 86]. On retrouve principalement dans ces études du contrôle de la navigation ou de la stabilisation du regard par le système cou-tête.

## 1.5 La stabilité des serpents à la surface

### 1.5.1 Une stabilité précaire ?

Finalement, nous concluons cet état de l'art sur un état des lieux des connaissances sur la stabilité des serpents nageurs à la surface de l'eau. Que sait-on de la stabilité des serpents ? Sur ce point, la littérature est relativement silencieuse.



FIGURE 1.17 – Figures tirées de Jayne [13] dont voici la légende *Vues latérales et dorsales simultanées de Nerodia s.spideon juvénile nageant. Les figures ont été réalisées à partir de tracés de films. La ligne horizontale en haut de chaque figure représente la surface de l'eau et le tracé qui touche la ligne est la vue latérale du serpent. La vue dorsale se trouve immédiatement en dessous de chaque vue latérale.*

Un début de réponse est apporté par l'article de Jayne [13]. Dans cet article traitant de la nage des serpents, un bref passage traite de la stabilité des serpents. Bien qu'étant peu

approfondie, elle a le mérite de mentionner l'existence d'une instabilité de la nage. Cette instabilité nommée *listing* correspond à une importante variation de l'angle de tangage des sections du corps de serpents *Nerodia Spideon* juvénils (cf figure 1.17). Cette instabilité s'accroît avec la vitesse et la courbure latérale du nageur. Il est difficile de conclure quoi que soit à partir de ces observations et plus particulièrement sur l'interprétation de la stabilité d'un nageur en analysant individuellement chaque portion du corps. Néanmoins, ces observations suggèrent que la stabilité de certains serpents peut être précaire.

Cette absence de données a motivé une série d'observations effectuée en 2022 par notre équipe dans le cadre de l'ANR SSSNAEQ et menée au muséum d'Histoire Naturelle de Nantes sous la direction de Gaëlle Le Maux, herpétologue et responsable du vivarium. Dans cette étude (voir Fig. 1.18), l'équipe a étudié la nage de quatorze serpents différents : des espèces plutôt aquatiques (*Natrix*), semi-aquatiques ou terrestres. Les conclusions de cette étude sont les suivantes

1. la majorité des espèces de serpents (même les espèces vivant dans des zones désertiques) nagent spontanément exploitant une nage anguiforme ;
2. au contraire, la stabilité n'est pas acquise pour tous les serpents comme l'illustre la Fig. 1.18 ;
3. les serpents les plus stables sont élancés (la réciproque étant fausse) ;
4. le mouvement de roulis semble être la perturbation la plus fréquente (certaines sections du corps, tout le corps, ou seulement la tête) ;
5. il est difficile d'estimer la stabilité d'un animal dont les formes de corps peuvent être fortement déformées (cf Fig. 1.18).

En conclusion, les serpents peuvent aussi rencontrer des problèmes de stabilité à la surface de l'eau, même si la plupart des espèces étudiées ont une très bonne stabilité comme la couleuvre à collier ou la couleuvre vipérine. Dans le cadre de l'ANR SSSNAEQ, nous nous sommes plutôt intéressés à une autre espèce de serpents, le mocassin d'eau, ayant un sens de l'équilibre exceptionnel à la surface de l'eau.

## 1.5.2 Le cas du mocassin d'eau

Dans le cadre de cette étude, nous prendrons comme animal modèle le mocassin d'eau. En effet, nous avons pu collecter grâce au biologiste Seth Lagrange un ensemble de documents démontrant les incroyables capacités de stabilisation de ce serpent. Les mocassins

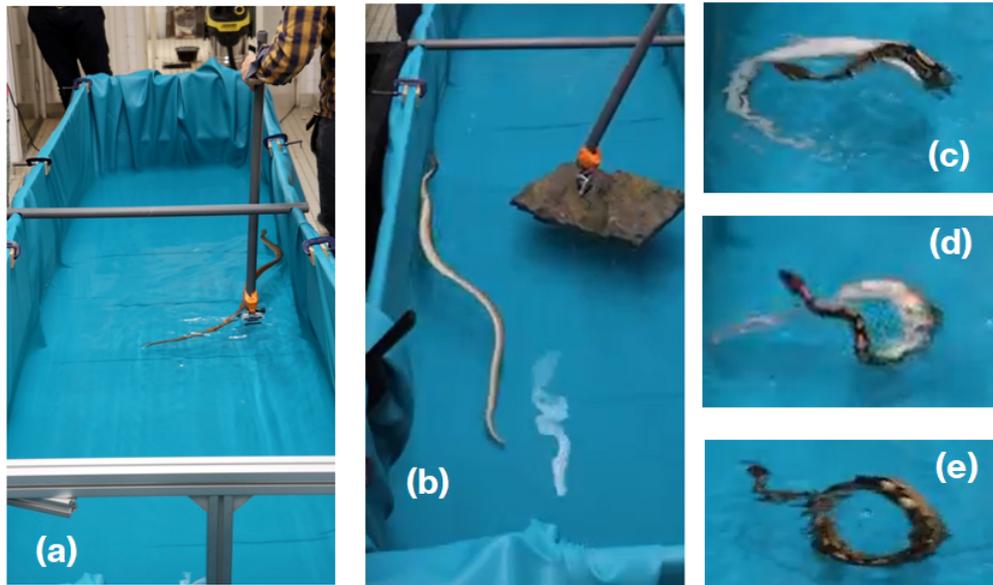


FIGURE 1.18 – Figures illustrant la campagne d’observations au muséum. (a) protocole expérimental. (b) Boa Arc-en-ciel décrivant un renversement de son corps, bien visible par la zone blanche. (c-e) Séquence d’images (moins de 1s au total) décrivant la restabilisation du Python Malais.

d’eau (*Agkistrodon piscivorus*) vive à proximité immédiate de l’eau et constituent l’espèce la plus aquatique du genre *Agkistrodon*. Ils sont de la famille des vipéridés et atteignent une longueur de 122 cm.

Les mocassins d’eau gardent généralement la tête hors de l’eau avec une inclinaison de 45 degrés. Lorsqu’ils sont dérangés, les mocassins aquatiques font généralement face, ce qui permet de les observer facilement, ou s’éloignent à la nage. Ces serpents restent principalement sur terre, où ils se prélassent, et peuvent grimper sur des branches basses, ce qui démontre la polyvalence de cette espèce.

Les images de la Fig. 1.19 ont toutes été prises par Seth LaGrange dans le sud de l’Illinois, sur la rivière Clear Creek. La Fig. 1.19 illustre différentes positions statiques des mocassins d’eau. Les images 1.19.(a) et (b) montrent la forme classique en S du serpent nageant, mais le corps n’est pas purement planaire. En effet, seule la queue et le milieu de son corps sont immergés. On peut supposer qu’une meilleure stabilité est assurée par cette déformation tridimensionnelle du corps. Sur la Fig. 1.19 (c), le serpent présente une forme en U, qui est un décalage d’un demi-onde par rapport à la forme en S précédente. Dans cette posture, le serpent peut effectuer le “mouth gapping” caractéristique, puis



FIGURE 1.19 – Images du mocassin d’eau à la surface de l’eau fournies par Seth LaGrange (univ Illinois). Ce serpent nage (b) ou se pose (a,c,d) visiblement à la surface de l’eau avec des formes de corps très variées. La posture de défense “mouth gapping” est visible sur la figure (c).

être en mesure de frapper si nécessaire. L’image 1.19.(d) du serpent lové sur l’eau est également un bon exemple de cette posture défensive. Le mocassin d’eau ne s’enroule qu’une fois approché. Cette posture est particulièrement impressionnante puisqu’elle doit demander un très bon sens de l’équilibre pour se lover sur l’eau. Ces clichés illustrent bien l’incroyable capacité de ces serpents à exploiter pleinement leur morphologie redondante pour ajuster leur pose à l’équilibre.

Ces différents comportements démontrent que les mocassins d’eau ont développé diverses stratégies pour contrôler leur stabilité à la surface de l’eau. En collectant les images et les vidéos, trois mécanismes principaux ont été identifiés

1. les déformations tridimensionnelles de la forme du corps : le serpent peut ainsi modifier l’immersion de son corps et la distribution de force de flottaison le long de l’axe rosto-caudal ;
2. l’ajustement de sa flottabilité/densité grâce à ses poumons et ses déformations de sa cage thoracique ;
3. l’utilisation de sa queue comme gouvernail ou pagaie.

Ils peuvent être combinés pour maintenir la stabilité, mais les modalités des couplages ne sont pas encore comprises. Notez que le contrôle de la flottabilité est probablement plus lent que les autres mécanismes.

Dans le cadre de ce mémoire, nous exploiterons préférentiellement le premier mécanisme bien que nous étudierons aussi l'impact de la flottabilité dans le chapitre 2 sur la stabilité statique. L'utilisation d'une queue est une piste actuellement explorée dans le projet mais n'a pas été traité dans ce mémoire.

Notre but est de comprendre comment un robot peut exploiter des déformations morphologiques pour stabiliser sa pose à la surface de l'eau. Ainsi, le mocassin d'eau sera un modèle à la fois pour la conception du design robot (voir le robot NATRIX dans la prochaine section) et pour son contrôle.

## 1.6 Bilan

Dans cet état de l'art, nous avons constaté qu'il existe aujourd'hui de nombreux robots anguiformes qui opèrent dans différents environnements (sous-marin, en surface ou amphibie). Néanmoins, leur stabilisation active en surface reste encore une question ouverte. Les principaux défis résident à la fois dans la conception et le design de ces robots et dans dans le développement de nouvelles lois de contrôle.

Pour répondre à ces défis, nous avons conçu le nouveau robot serpentiforme NATRIX, dont le design intègre des éléments morphologiques facilitant le contrôle de sa stabilité. Quant à l'aspect contrôle, l'état de l'art sur le système postural chez les vertébrés nous oriente vers deux types de lois de contrôle : une boucle ouverture de nature prédictive et anticipatrice (chap. III), et une boucle fermée permettant la régulation de la stabilité d'une pose stable (chap IV).

Nous avons aussi montré que l'analyse de stabilité des navires ne pouvait pas complètement résoudre les problématiques de stabilité des systèmes multi-corps. Néanmoins, ce domaine nous enseigne que la stabilité dynamique ne se résume pas aux seules propriétés de la stabilité statique. Aussi, le robot peut potentiellement décrire une grande variété de régimes dynamique du fait de sa structure multi-corps (voir le chapitre 5).

Finalement, nous exploiterons les conclusions de l'état de l'art sur la pertinence des modèles hydrodynamiques lors du développement des modèles du robot. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle rendant compte des phénomènes physiques à la surface de l'eau (onde, masse ajoutée variable..etc). Les seules simulations reproduisant plutôt fidèlement la nage intègrent des calibrations ad-hoc, que nous n'avons pas encore effectuées sur notre robot. Aussi, nous préférons ne pas intégrer les forces hydrodynamiques dans notre modèle pour se concentrer sur les couplages entre les inerties et les forces de

flottabilité d'un système multi-corps.

# MODÈLE ET SIMULATEUR DU ROBOT NATRIX

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduirons le modèle cinématique et dynamique du nouveau robot serpentiforme, NATRIX (New Advanced Technologies for Robots Involved in the eXploration) développé dans le cadre du projet SSSNAEQ.

Le modèle est non-seulement déterminé par les caractéristiques du design du robot (géométrie, cinématique) mais aussi par le choix du contrôle des moteurs. Nous montrons que le robot NATRIX intègre des degrés de liberté additionnels conduisant à une structure arborescente, au contraire des précédentes structures sérielles (cf. [31, 44, 47]), qui nécessitera de nouveaux développements théoriques présentés dans cette thèse.

Le choix du contrôle va aussi déterminer la modélisation du système multi-corps avec base flottante qu'on divise en deux types de modèle :

- le modèle dynamique inverse permettant de calculer l'accélération  $\boldsymbol{\eta}$  de la tête et les couples articulaires  $\boldsymbol{\Gamma}$  en fonction des positions  $\mathbf{q}(t)$ , vitesses  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ , accélérations  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  articulaires ;
- le modèle dynamique direct permettant de calculer l'accélération de la tête en fonction des couples articulaires (Voir le diagramme 2.1 ).

Dans le cadre de notre étude, nous opterons pour le modèle dynamique inverse pour NATRIX dont les servomoteurs seront contrôlés en position angulaire et non en couple. Ce modèle exploitera un algorithme récursif de Newton-Euler [88].

Aussi, l'originalité du travail reporté dans ce chapitre est de développer de nouvelles méthodes pour la simulation d'un modèle dynamique inverse pour les robots hyper-redondant à la surface de l'eau ayant une structure arborescente

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la section 2.2, nous allons introduire une nouvelle plateforme du robot serpentiforme sur la surface de l'eau : NATRIX.

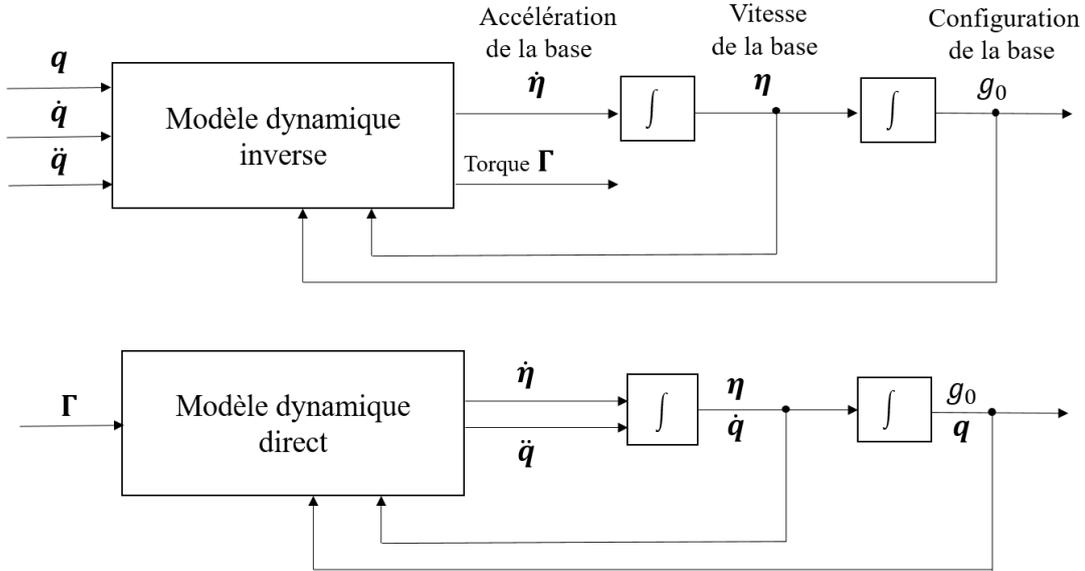


FIGURE 2.1 – Diagramme schématique des modèles dynamique inverse et direct pour un système multi-corps avec une base mobile

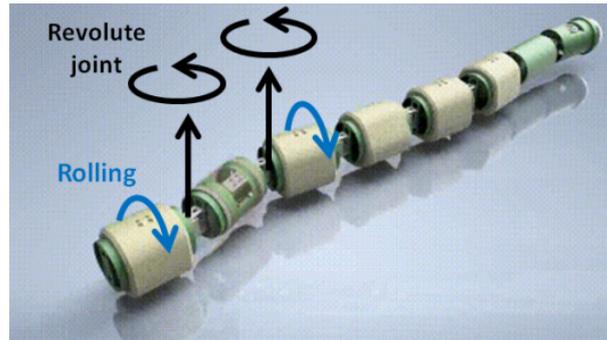
Le prototype du robot sera modélisé et étudié numérique dans notre étude. Dans la section 2.3 nous allons détailler les hypothèses nécessaires pour la modélisation du robot NATRIX. Dans la section 2.4, nous présenterons la paramétrisation de la structure du robot et son modèle géométrique. Ensuite nous allons introduire successivement les modèles cinématique (la section 2.5) et d'effort statique (la section 2.7). Dans la section 2.8, nous allons présenter la forme générale des modèles dynamiques sous la forme lagrangienne et surlignerons que les équations de mouvement de la tête est nécessaire à construire dans notre cadre d'étude. Puis, l'algorithme modifié de Newton-Euler sera introduit pour résoudre le modèle dynamique inverse du robot NATRIX avec une structure arborescente. Dans la section 2.9, nous allons développer un simulateur des mouvements externes 3D (ou de la tête) sous les trajectoires articulaires. A la fin le simulateur sera vérifié valable par plusieurs simulations numériques dans la section 2.10. Une partie des résultats dans ce chapitre a été publié dans la conférence IEEE, Advanced Robotics and Its Social Impacts (ARSO) en 2023 [17].

## 2.2 NATRIX : une nouvelle plateforme

La conception du prototype de NATRIX s'inspire de la cinématique des serpents nommés mocassins d'eau présentés dans l'état de l'art. Le principe est d'induire des déforma-



(a) Le prototype de robot serpentiforme Natrix



(b) Illustration CAO du robot NATRIX avec ses mouvements de roulis distribués et contrôlés

FIGURE 2.2 – Le robot serpentiforme Natrix du projet SSSNAEQ

tions du robot pour pouvoir varier localement le niveau d’immersion de chaque module du corps tout en préservant l’onde de flexion latérale. Aussi, il reprend une structure sérielle bien connue avec des actionneurs fournissant l’onde de flexion nécessaire à la nage ondulatoire (voir Fig. 2.2.(b)). L’originalité du design repose sur l’introduction d’un degré de liberté supplémentaire sur chaque module qui peut affecter localement le mouvement de roulis du robot.

Néanmoins, la planéité du robot doit être préservée pour maintenir une nage efficace à la surface de l’eau de surface 2D. Par conséquent, nous avons exclu les déformations complexes du corps en 3D basées sur des flexions dorso-ventrales ou de la torsion (comme le robot RAAMO [35]), qui nécessiteraient un contrôle complexe du robot. La solution trouvée consiste à intégrer un mouvement de roulis découplé et contrôlé sur chaque module (voir Fig. 2.2.(b)) tel que son axe de rotation reste parallèle au plan de l’ondulation.

De tels module sont nommées ARIM pour “Anti-Roulis Indépendant et Modulaire”. Chaque module ARIM dispose de 2 degrés de liberté, l’un pour le lacet entre chaque module et l’autre pour le roulis local. Pour faire pivoter le module tout en préservant l’orientation du joint de flexion, chaque module ARIM est composé d’un segment intérieur (jaune) et d’une coque externe (blanche) illustrés sur la Fig. 2.3. Une conception similaire a

été récemment proposé pour le robot ARCSnake [89] développé par la NASA, qui exploite une propulsion basée sur le mouvement de la vis sans fin pour la locomotion terrestre. Cependant la contrainte de flottabilité positive et d'étanchéité conduisent à de nombreuses différences dans les choix technologiques. Les coques externes des modules ARIM ont une forme globalement triangulaire pour reproduire la section des serpents. Leur principe de fonctionnement et leur utilité dans le changement actif de la flottabilité sont illustrés dans la section 2.7.

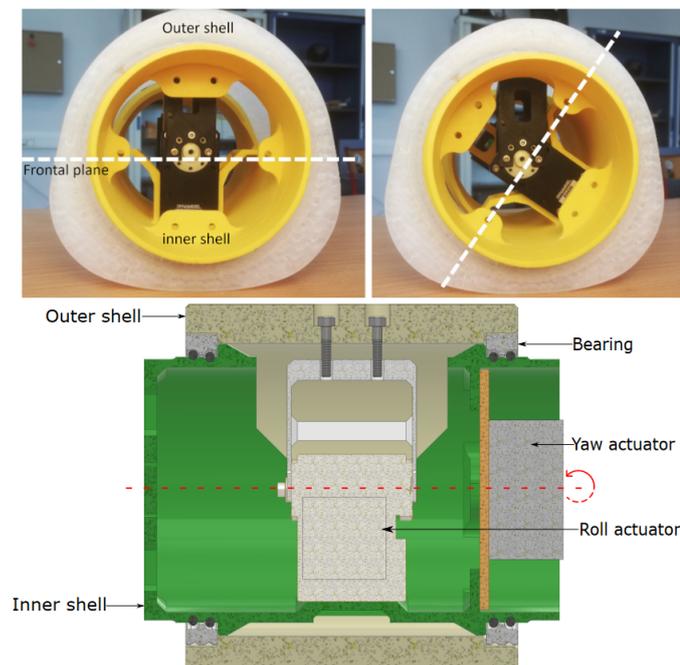


FIGURE 2.3 – Vue du système ARIM. En haut : vue de face du module ARIM sans (gauche) ou avec (droite) un roulis. En bas : vue en coupe du système ARIM.

Le robot NATRIX est actuellement composé de 14 corps rigides tous actionnés par un servomoteur (voir Fig. 2.2.(a)), comprenant une tête, un cou et six modules de corps chacun avec une coque externe rotative autonome. Le rôle du cou est important dans le processus de contrôle du regard. En effet, toute variation du niveau d'immersion provoque un mouvement de pilonnement, qui peut être en partie compensé par les articulations du cou.

En pratique le robot comporte une queue souple et passive (voir Fig.2.2.(a)) mais celle-ci n'est pas encore incluse dans notre modèle. Les principales caractéristiques géométriques du robot sont reportées sur le tableau 2.1.

TABLE 2.1 – Caractéristiques du robot NATRIX.

Spécifications et valeurs	
module ARIM cou et tête	11 Moteurs, 6 Modules 3 moteurs, 2 Modules
coques extérieur ARIM	Longueur : 104mm, Largeur : 120mm
Module intérieur ARIM	Longueur : 185mm, Diamètre : 84mm
cou et tête	Longueur : 190mm, Diamètre : 84mm
Densité moyenne	$d = 312 \pm 2 \text{ kg/m}^3$
Longueur (sans la queue)	$L = 1.3 \text{ m}$
Longueur de la queue	$l = 0.2 \text{ m}$

## 2.3 Hypothèses

Nous présentons ici les hypothèses sur lesquelles reposent notre étude. Plus précisément, deux hypothèses importantes seront avancées

### Hypothèse I : omission des effets hydrodynamiques (de surface)

Dans cette étude, nous ne considérons que les forces hydrostatiques et omettrons les forces hydrodynamiques propres à la nage (cf. l'état de l'art 1.2.3) . Les forces hydrodynamiques (masse ajoutée, traînée turbulente ou traînée des vagues) sont omises pour trois raisons.

- Nous nous intéressons en grande partie dans cette étude (cf. les chapitre 3 et 4) aux mécanismes de stabilisation en statique et quasi-statique sans locomotion. Réciproquement, nous montrerons qu'il est possible de découpler navigation et stabilité (cf chapitre 4). En première approche, il n'est donc pas nécessaire d'ajouter les effets hydrodynamiques requis pour la propulsion.
- L'hydrodynamique générée par les systèmes hyper-redondants à la surface (vagues, tourbillons...etc) est encore mal comprise (cf l'état de l'art 1.2.3). Nous préférons éviter d'introduire un modèle non valide, qui pourrait conduire à des résultats dépendant de ce modèle. Nous négligerons par exemples les effets hydrodynamiques de masse ajoutée durant l'étude de la stabilité de la nage (cf. le chapitre 5) car nous n'avons pas encore évaluée expérimentalement l'influence de la surface sur le phénomène de masse ajoutée.

- Dans une première approche, nous souhaitons négliger tous les phénomènes physiques d’amortissement passif afin de nous concentrer sur les processus actifs et contrôlés de la réjection des perturbations générées par notre contrôleur.

Ainsi, en omettant les forces hydrodynamiques, le système décrit dans cette thèse est conservatif avec une énergie nette composée de l’énergie cinétique et de l’énergie potentielle gravitationnelle. Il s’ensuit que la seule source ou le seul puits d’énergie est fourni par les actionneurs. Toute perturbation de l’équilibre se traduira par un mouvement non amorti de la tête.

Nous souhaitons ainsi effectuer cette étude de stabilité dans un cadre idéal. Aussi, cette simplification ne rend pas complètement compte de la dynamique réelle des robots à la surface de l’eau intégrant des interactions fluides-structures bien plus complexes. Néanmoins, cette simplification nous permettra de pousser certains calculs (en omettant les effets dissipatifs) et d’analyser les propriétés de ce système conservatif. En conclusion, nous préférons baser le travail de cette thèse sur des phénomènes physiques bien connues et identifiés (masse et flottabilité) en évitant les calibrations ad-hoc des phénomènes hydrodynamiques de surface encore mal connus pour les robots hyper-rendondants.

### **Hypothèse II : la forme de corps du robot est parfaitement contrôlée**

Nous cherchons ici à concevoir des stratégies de contrôle en générant le mouvement interne du robot paramétré par des fonctions angulaires  $\theta_i(t)$  pour chaque servomoteur. On nommera trajectoire articulaire l’ensemble de ces fonctions lors d’une réalisation. Nous avons donc choisi d’utiliser un modèle dynamique inverse du robot, qui nous permet de résoudre le mouvement externe (tête) grâce aux mouvements internes (articulations du corps).

Ce choix s’oppose à la plupart des approches en contrôle robotique (industrielle par exemple) où le couple est piloté sur chaque moteur [90]. Aussi, nous supposerons l’existence d’un contrôleur de bas niveau d’asservissement des moteurs qui réalise les trajectoires articulaires générées par le contrôleur haut niveau, sujet de cette thèse. Ce choix est cohérent avec la conception du robot, ou le servo-moteur utilisé XH540-W150 (Dynamixel) ne nous permet pas de contrôler directement le couple par des boucles de courants.

Nous supposerons ainsi que la géométrie est complètement déterminée par ces positions angulaires et négligerons donc la possibilité d’une erreur de contrôle en position des servomoteurs. En pratique, on observe aussi que le robot présente des déformations non-contrôlées produites par les compliances internes. En effet, la plupart des pièces du

robot sont imprimées en 3D pour alléger la structure. Le chargement du robot à la surface de l'eau va provoquer des déformations élastiques qui ne sont pas prises en compte dans notre modèle. Ce phénomène peut être à l'origine des écarts simulations et expériences.

Ainsi, nous supposons que les servo-moteurs produisent toujours les trajectoires articulaires désirées  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  produisant la forme de corps attendue par le modèle géométrique.

## 2.4 Paramétrisation et modèle géométrique du robot NATRIX

### 2.4.1 Espace de configuration

Dans cette section nous décrivons *l'espace de configuration* pour un système multi-corps avec une base mobile.

#### Configuration des objets solides dans SE(3)

De manière générale, la configuration d'un objet solide dans l'espace peut être complètement déterminée par la position et l'orientation d'un repère  $\mathcal{F}$  attaché au corps par rapport à un repère galiléen (ou global) qu'on nommera  $\mathcal{F}_G$ . Par exemple, nous prendrons le repère de la tête  $\mathcal{F}_0$  attaché au premier module de la tête du robot comme repère préférentiel pour décrire le mouvement du robot. Dans la suite de cette section, nous continuerons à prendre comme exemple le repère  $\mathcal{F}_0$  pour décrire la configuration du module de la tête, une approche qui pourra être généralisée à tous les modules du robot.

La caractérisation de la configuration du repère  $\mathcal{F}_0$  par rapport au repère galiléen (ou global)  $\mathcal{F}_G$  est décrite par une transformation homogène  $g_0$  (voir par exemple la Fig. 2.6). Sa représentation est donnée par la matrice  $4 \times 4$  contenant une matrice de rotation  $R_0$  et un vecteur position  $\mathbf{p}_0$ .

$$g_0 = \begin{pmatrix} R_0 & \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

Le vecteur position  $\mathbf{p}_0$  détermine la position relative du repère  $\mathcal{F}_0$  par rapport à  $\mathcal{F}_G$ . Cette position est définie sur l'espace (vectoriel) euclidien  $E(3)$ , tel que la loi des compositions des positions des repères est définie par une loi additive.  $E(3)$  étant isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , il est aussi possible de définir la fonction position  $\mathbf{p}(t)$  comme une fonction continue (et  $C^\infty$ ) de  $t \in \mathbb{R}^+$  à  $\mathbb{R}^3$ .

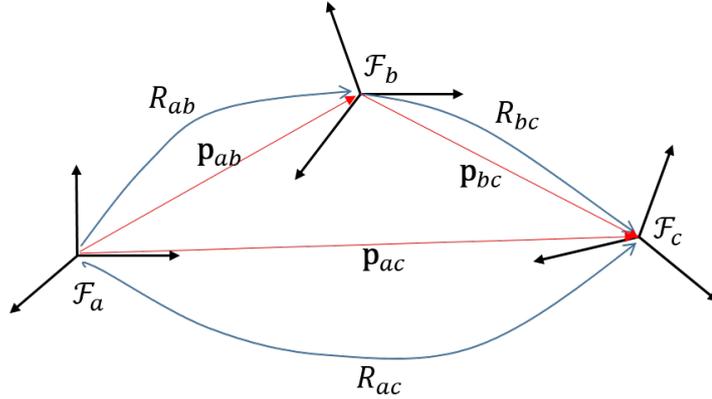


FIGURE 2.4 – Transformations rigides entre trois repères  $\mathcal{F}_a$ ,  $\mathcal{F}_b$  et  $\mathcal{F}_c$  grâce aux transformations  $g_{ab}(R_{ab}, \mathbf{p}_{ab})$ ,  $g_{bc}(R_{bc}, \mathbf{p}_{bc})$  et  $g_{ac}(R_{ac}, \mathbf{p}_{ac})$  toutes définies sur le groupe  $\text{SE}(3)$ .

Quant à la matrice de rotation  $R_0$ , elle est définie par les trois vecteurs formant la base du repère  $\mathcal{F}_0$ . L'ensemble des matrices de rotation  $R_0$  unitaire et directe forment un groupe nommé  $\text{SO}(3)$  [91] associé à la loi interne de composition

$$\forall R_{ab}, R_{bc} \in \text{SO}(3), \quad R_{ac} = R_{bc}R_{ab} \in \text{SO}(3).$$

avec  $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b$  et  $\mathcal{F}_c$  trois repères quelconques (cf Fig. 2.4) et  $R_{ab}$  la matrice avec les vecteurs de la base  $\mathcal{F}_b$  exprimés dans  $\mathcal{F}_a$ . Notons que ce produit peut être non-commutatif avec  $R_{ab}R_{bc} \neq R_{bc}R_{ab}$ . Pour pouvoir définir une application continue  $t \mapsto R(t)$ , nous exploiterons la structure de groupe de Lie de  $\text{SO}(3)$  [91].

La configuration d'un objet solide est donc définie par les deux éléments  $(R_0, \mathbf{p}_0)$  prenant valeur dans  $\text{SO}(3)$  et  $\text{E}(3)$ . L'espace topologique associé se nomme  $\text{SE}(3)$  où chaque élément  $g_0$  est défini par la représentation homogène donnée par l'Eq. 2.1. Il vient que les éléments  $g \in \text{SE}(3)$  forment aussi un groupe de Lie une fois doté du produit matriciel :  $g_a g_b \in \text{SE}(3)$ . On remarque par ailleurs que si  $g_{ab}$  (respectivement  $g_{bc}$ ) caractérisent respectivement les configurations du repère  $\mathcal{F}_b$  par rapport à  $\mathcal{F}_a$  (resp  $\mathcal{F}_b$  et  $\mathcal{F}_a$ ) alors la configuration du repère  $\mathcal{F}_c$  par rapport à  $\mathcal{F}_a$  est donnée par le produit  $g_{ab}g_{bc}$  avec

$$g_{ac} = \begin{pmatrix} R_{ac} & \mathbf{p}_{ac} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}\mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Nous avons donc un outil puissant pour exprimer les changements de repère entre les différents objets solides du robot.

Nous verrons dans la section 2.5 les propriétés cinématique associées à la configuration

$g_0(t)$  qui dépendent de la vitesse linéaire associées au déplacement de l'origine et de la vitesse angulaire qui définit le taux de rotation des vecteurs de la base. Cette dernière remarque indique que cette configuration  $g_0(t)$  dépend de six coordonnées, trois pour la position de l'origine et trois pour l'orientation de la base. Nous proposerons dans la section 2.6 des méthodes pour paramétrer l'espace  $SE(3)$  à partir d'un torseur prenant valeur dans  $\mathbb{R}^6$

### Espace des configurations

La dynamique du robot est complètement décrite par l'évolution des toutes les configuration spatiales  $g_i(t)$  associées au mouvement solide des  $N$ -corps du robot. Or le système mécanique est de fait décrit par un nombre de degrés de libertés significativement moins grand que ces  $6N$  degrés de liberté à cause des liaisons géométriques contraignant le mouvement des corps.

Nous devons donc distinguer [90]

- **Les degrés de liberté externes** du robot associées au mouvement externe de la base mobile du robot. Cette base mobile servira de “socle” à partir duquel la configuration de toutes les autres parties du robot seront estimées (voir section suivante). Nous choisirons le premier module de la tête et le repère correspondant  $\mathcal{F}_0$  comme référence pour la base mobile. Nous nommerons *pose* la configuration  $g_0(t)$  de la tête du robot par rapport au repère  $\mathcal{F}_G$
- **Les degrés de liberté internes** du robot décrivant le mouvement interne relatif des modules entre-eux. Ces mouvements internes sont définis par les coordonnées articulaires dont le vecteur  $\mathbf{q}$  concatène toutes les consignes articulaires des moteurs. On définira alors l'espace des formes de corps  $\mathcal{S} = (T)^n$  avec  $n$  le nombre de positions contrôlables et  $T$  est le cercle unité. Nous nommerons *posture* du robot une coordonnée dans l'espace formes de corps

Ces mouvements externes et internes sont donc définis par le couple  $(g_0, \mathbf{q})$  prenant valeurs dans l'espace des configurations totales  $\mathcal{C}$  avec  $\mathcal{C} = SE(3) \times \mathcal{S}$ . Cet espace peut être représenté par un espace fibré [90] (voir Fig. 2.5) dont la structure topologique généralise le cas d'un produit cartésien au produit d'un espace topologique  $\mathcal{S}$  qu'on nomme la base avec un groupe, ici  $g_0 \in SE(3)$ , qu'on nomme la fibre. On dit que la fibre est au-dessus de la forme de corps  $\mathbf{q}$  prenant valeur dans la base  $\mathcal{S}$ . Cette fibre peut ainsi être définie par une application surjective  $\pi$  qui permet la projection d'un élément  $(g_0, \mathbf{q})$  sur la base avec  $\pi : (g_0, \mathbf{q}) \mapsto \mathbf{q}$  [90].

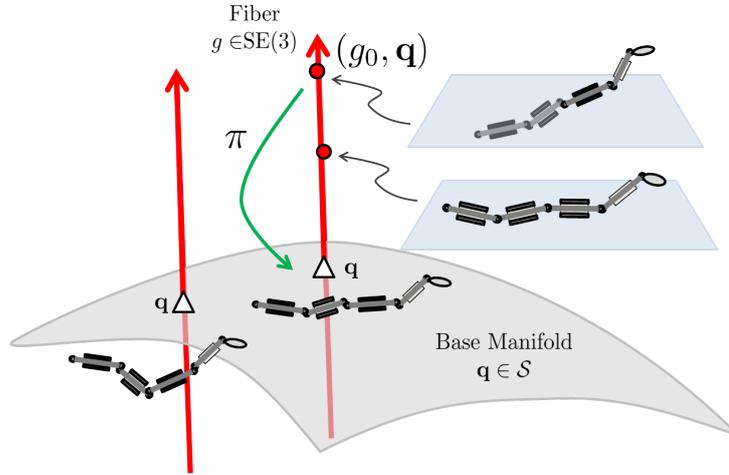


FIGURE 2.5 – Illustration de la configuration spatiale  $SE(3) \times \mathcal{S}$  comprenant la pose de la tête  $g_0 \in SE(3)$  et la forme de corps  $\mathbf{q}(t)$  prenant valeur dans l’espace articulaire  $\mathcal{S}$ . Une fibre (en rouge) correspond à toutes les configurations possibles du robot  $g_0$  dans  $SE(3)$  pour une coordonnée de forme corporelle donnée  $\mathbf{q}$ . On dit que la fibre est au-dessus de la forme de corps  $\mathbf{q}$  prenant valeur dans la base  $\mathcal{S}$ . Avec cette structure, on peut alors distinguer la dynamique avec ou sans déformation du corps. Aussi, un mouvement de corps solide avec une forme de corps fixe  $\mathbf{q}$  correspond à un déplacement le long de la fibre au-dessus de  $\mathbf{q}$ .

Nous n’exploiterons pas d’avantage la structure algébrique de cet espace. Néanmoins, cet outil mathématique nous fournit une convention pratique pour représenter graphiquement l’effet d’une variation de forme de corps sur la dynamique.

Cet espace nous permet ainsi de localiser tous les corps rigides dans le repère  $\mathcal{F}_G$  grâce au modèle géométrique introduit dans la section suivante.

## 2.4.2 Modèle géométrique

Dans cette section nous présentons le modèle géométrique du robot NATRIX, qui permet de passer de la base mobile et de l’espace articulaire à la configuration de chaque module du robot dans le repère global.

La colonne vertébrale du robot est constituée de neuf corps rigides connectés en série notés  $\mathcal{B}_j$  (voir la Fig.2.6), avec  $j = 0$  associé à la tête,  $j = 1$  associé au cou, et  $j \in [2, 3, \dots, 7]$  pour les modules de corps. Les coques extérieures des modules ARIM  $\mathcal{B}_{j,shell}$  avec  $j \in [2, 3, \dots, 7]$  conduisent à une structure arborescente montée sur la structure sérielle. La configuration de chaque  $\mathcal{B}_j$  est donnée par un repère local  $\mathcal{F}_j$  d’origine  $\mathcal{O}_j$ . Pour les modules du corps, cette origine coïncide avec le centre de rotation du servomoteur dont la

rotation entraîne le changement d'orientation du repère de référence  $\mathcal{F}_j$  (voir la Fig.2.6). Le mouvement du repère mobile  $\mathcal{F}_0$  lié à la tête caractérise le mouvement externe du robot par rapport au repère galiléen  $\mathcal{F}_G$ .

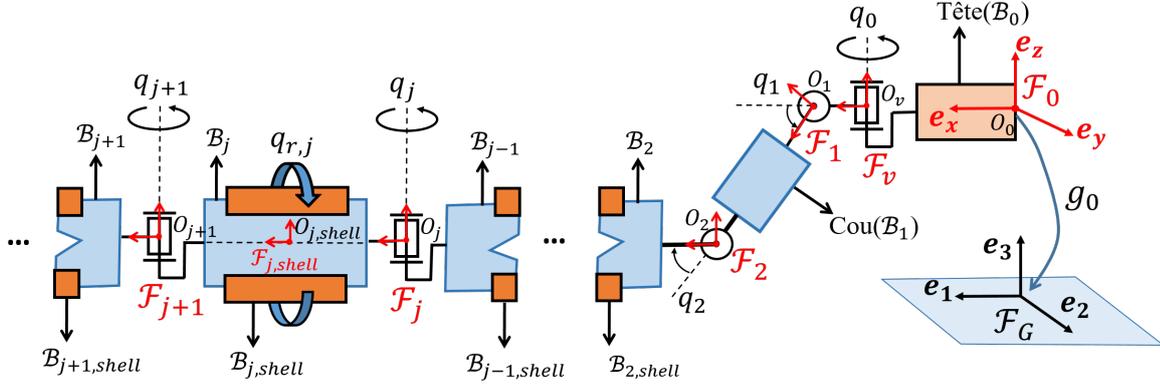


FIGURE 2.6 – Illustration de la paramétrisation géométrique de chaque module

La configuration relative de chaque module est déterminée par les coordonnées articulaires  $\mathbf{q} \in \mathcal{S} = (S^1)^n$  avec  $n = 14$ . La tête et le cou sont reliés par un servomoteur à deux axes avec les amplitudes des angles relatifs  $q_0$  (lacet) et  $q_1$  (tangage). Pour le modéliser, nous introduisons un corps virtuel sans masse  $\mathcal{B}_v$  associé au repère  $\mathcal{F}_v$  qui assure la liaison mécanique. Ensuite, l'articulation avec l'angle  $q_2$  relie le cou au reste du corps comme illustré sur la figure 2.6. Il est à noter que les articulations de tangage  $q_1$  et  $q_2$  permettent de soulever la tête tout en gardant son orientation constante. L'ondulation plane est assurée par cinq articulations de lacet ( $q_j$ ) avec  $j \in [3, 4, \dots, 7]$ , tandis que le roulis local de la  $j$ -ième coques extérieures  $\mathcal{B}_{j,shell}$  est noté  $(q_r)_j$  ( $j \in [2, 3, \dots, 7]$ ).

L'espace de configuration du robot est déterminé par la combinaison  $(g_0, q) \in \mathcal{C}$  avec  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$  [90, 92].

TABLE 2.2 – Paramètres de Denavit–Hartenberg de NATRIX

Repère	$\alpha_j[\text{deg}]$	$\phi_j[\text{deg}]$	$a_j[\text{mm}]$
De $\mathcal{F}_0$ à $\mathcal{F}_v$	0	$q_0$	100
De $\mathcal{F}_v$ à $\mathcal{F}_1$	-90	$q_1$	0
De $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$	90	$q_2$	105
De $\mathcal{F}_{j-1}$ à $\mathcal{F}_j$ , $j \in [3, 4, \dots, 7]$	0	$q_j$	170
De $\mathcal{F}_j$ à $\mathcal{F}_{j,shell}$ , $j \in [2, 3, \dots, 7]$	$q_{r,j}$	0	85

L'élément  $g_0 \in \text{SE}(3)$  caractérise la configuration du repère de la base flottante (la

tête)  $\mathcal{F}_0$  par rapport au repère de la surface  $\mathcal{F}_G$ . Sa translation homogène est la suivante

$$g_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \in \text{SE}(3) \quad (2.3)$$

Pour localiser chaque module le long des vertèbres du robot par rapport au repère global  $\mathcal{F}_G$ , nous introduisons sa configuration  $g_j$  ( $g_j \equiv {}^G g_j$ ) sous une forme récursive :

$$g_j = g_{j-1} ({}^{j-1} g_j) = g_0 ({}^0 g_v) ({}^v g_1) \dots ({}^{j-1} g_j) \quad (2.4)$$

où l'exposant en haut à gauche indique le repère de projection. La matrice  $({}^{j-1} g_j)$  représente donc la configuration relative de  $\mathcal{F}_j$  par rapport à  $\mathcal{F}_{j-1}$ .

Réciproquement, la configuration de la coque extérieure  $(g_{shell})_j$  montée sur le j-ième corps extérieure peut être calculée grâce à la configuration relative notée  $h_j$  :

$$(g_{shell})_j = g_j h_j \quad (2.5)$$

Chaque configuration relative  ${}^{j-1} g_j$  et  $h_j$  dépend uniquement d'une articulation correspondante qui est paramétrée par la convention de Denavit–Hartenberg modifiée [93], donnée par

$${}^{j-1} g_j, h_j = \begin{pmatrix} \cos \phi_j & -\sin \phi_j & 0 & a_j \\ \sin \phi_j \cos \alpha_j & \cos \phi_j \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & -b_j \sin \alpha_j \\ \sin \phi_j \sin \alpha_j & \cos \phi_j \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & b_j \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

avec les paramètres de Denavit–Hartenberg  $\alpha_j, \phi_j, a_j$  reportés dans le tableau 2.2 et nous notons que  $b_j = 0$  dans cette étude. Lors de  $\mathbf{q} = \mathbf{0}_{14 \times 1}$ , la colonne vertébrale est droite et les coques extérieures n'ont pas de roulis.

Ce modèle géométrique exact définit la configuration de chaque module servant pour les modèles cinématique et dynamique.

## 2.5 Modèle cinématique

Dans cette section, nous présentons le modèle cinématique servant à calculer la vitesse et l'accélération de chaque module du robot en fonction de la vitesse et l'accélération de

la tête et les trajectoires articulaires  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ .

Nous introduirons succinctement aussi les subtilités du calcul sur l'espace de travail SE(3), mais ne détaillerons pas tous les aspects techniques et géométriques associées à nos calculs. Le lecteur pourra trouver dans l'excellent livre de Muray et al [91] et dans l'article [90] une introduction et les avantages d'une telle approche.

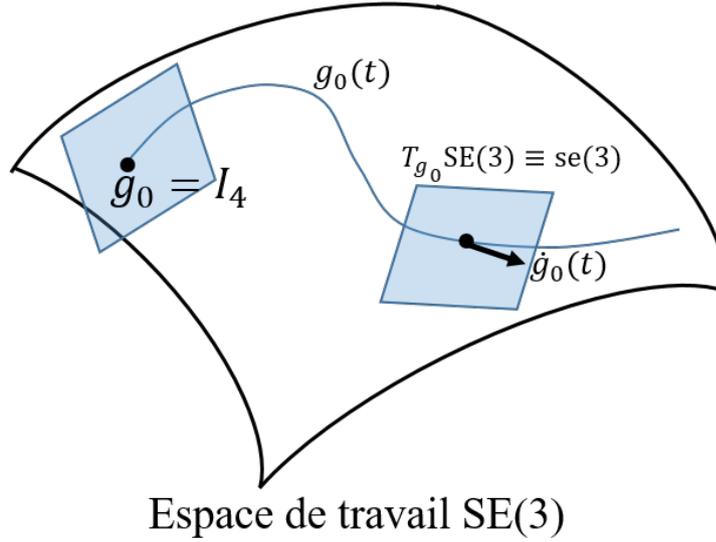


FIGURE 2.7 – Illustration de l'espace de travail SE(3), la courbe représente l'évolution de  $g_0$  en temps et les surfaces bleues représentent l'espace linéaire tangent.

### Cinématique sur le groupe SE(3)

Dans l'espace de travail associé au mouvement de la tête, un mouvement de la base mobile (la tête du robot) définit une courbe paramétrée dans le temps  $t \mapsto g_0(t)$  avec  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \text{SE}(3)$ . On introduit le taux de variation de l'élément  $g_0$  entre l'instant  $t$  et  $t + dt$  par

$$\dot{g}_0 = \frac{d}{dt}g_0, \quad (2.7)$$

L'élément  $\dot{g}_0$  est donc un élément tangent à la courbe  $g_0(\cdot)$  au point  $g_0(t)$  et on note l'espace tangent local  $T_{g_0(t)}\text{SE}(3)$  (voir la Fig.2.7) tel que  $\dot{g}_0 \in T_{g_0(t)}\text{SE}(3)$ .

Comme tous les espaces vectoriels tangents  $T_{g_0(t)}\text{SE}(3)$  sont équivalents mais de bases différentes [91], il est préférable d'exprimer le taux  $\dot{g}_0$  dans un seul et même espace vectoriel tangent, celui de l'élément neutre  $e = \text{Id}_4$  de SE(3) par la transformation inverse  $g_0^{-1}$

$$g_0^{-1}\dot{g}_0 = \hat{\eta}_0 \in \mathfrak{se}(3) \quad (2.8)$$

avec  $\mathfrak{se}(3)$ , ici identifiée à  $T_e\text{SE}(3)$ , l'algèbre de Lie du groupe  $\text{SE}(3)$ . Nous verrons plus tard l'intérêt d'une telle structure algébrique. Une fois exprimée dans  $\mathfrak{se}(3)$ , le taux  $\dot{g}_0$  est paramétré par l'élément  $\hat{\eta}_0$  grâce à la multiplication à gauche

$$\dot{g}_0 = g_0\hat{\eta}_0 \quad (2.9)$$

avec

$$\hat{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \hat{\Omega}_0 & \mathbf{V}_0 \\ 0_{3 \times 1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

où  $\hat{\Omega}_0$  est une matrice anti-symétrique définie comme étant l'opérateur linéaire associé au produit vectoriel ( $\Omega_0 \times$ ) avec  $\Omega_0$  le vecteur de rotation angulaire. Réciproquement, le vecteur  $\mathbf{V}_0$  correspond à la vitesse "linéaire" de la base. On note alors le vecteur de vitesse de la tête  $\boldsymbol{\eta}_0^T = (\mathbf{V}_0^T, \Omega_0^T)^T \in \mathbb{R}^6$  associée à l'élément  $\hat{\eta}_0 \in \mathfrak{se}(3)$ . L'opérateur chapeau désigne donc la transformation pour passer du vecteur de vitesse à valeur dans  $\mathbb{R}^6$  à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{se}(3)$ . De même, lorsque cet opérateur s'applique sur la rotation angulaire  $\Omega_0$ , il désigne la transformation de passage de  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathfrak{so}(3)$ , l'algèbre de Lie du groupe  $\text{SO}(3)$  constituant le groupe des matrices de rotations.

La multiplication à gauche par  $g_0$  [91] revient à exprimer les vitesses  $\boldsymbol{\eta}_0$  dans le repère de la base flottante, c'est à dire dans le repère mobile de la tête. Ces vitesses sont donc celles mesurées par une centrale inertielle embarquée dans la tête. Un intérêt du calcul sur le groupe est d'extraire la vitesse angulaire  $\Omega_j$  sans passer par des angles d'Euler ou autres paramétrages simples à implémenter, mais en pratique, très lourds à manipuler.

L'Eq. (2.9) étant définie comme *l'opération à gauche*, on a réciproquement *l'opération à droite* donnée par :

$$\dot{g}_0 = \hat{\eta}_G g_0, \quad (2.11)$$

avec  $\boldsymbol{\eta}_G$  la vitesse de la tête exprimée dans le repère global  $\mathcal{F}_G$  où  $\mathbf{V}_G$  exprime la vitesse linéaire d'un point de la tête passant à travers l'origine de  $\mathcal{F}_G$  [91].

On remarque qu'en combinant les Eqs. (2.9) et (2.11), on obtient la relation de passage du repère  $\mathcal{F}_0$  à  $\mathcal{F}_G$  avec

$$\hat{\eta}_G = g_0\hat{\eta}_0g_0^{-1}. \quad (2.12)$$

Cette équation permet donc d'établir le transport du vecteur cinématique avec

$$\boldsymbol{\eta}_G = \text{Ad}_{g_0} \boldsymbol{\eta}_0, \quad (2.13)$$

où  $\text{Ad}_{g_0} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est la représentation adjointe sur le groupe  $\text{SE}(3)$  associée à la configuration  $g_0$  [91] et définie par

$$\text{Ad}_{g_0} = \begin{pmatrix} R_0 & \hat{p}_0 R_0 \\ 0_{3 \times 3} & R_0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Cet opérateur permet donc d'exprimer un champ de vitesse d'un repère à un autre.

### Calcul récursif des vitesses et accélérations

Nous allons illustrer l'intérêt de ce formalisme pour transporter et estimer les vitesses des modules. En effet, l'objectif est de calculer toutes les vitesses  $\boldsymbol{\eta}_j^T = (\mathbf{V}_j^T, \boldsymbol{\Omega}_j^T)^T$  et accélérations  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j^T = (\dot{\mathbf{V}}_j)^T$  à partir de la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  et l'accélération  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$  de la tête (et grâce aux trajectoires articulaires  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ ). Ce calcul récursif s'effectue en partant de  $j = 0$  (la tête) jusqu'au dernier module.

Pour obtenir une telle récurrence, reprenons l'équation de composition des configurations 2.4 et dérivons la par rapport au temps. On obtient alors

$$\frac{dg_j}{dt} = \frac{dg_{j-1}}{dt} ({}^{j-1}g_j) + g_{j-1} \frac{d}{{}^{j-1}g_j} ({}^{j-1}g_j) \quad (2.15)$$

En utilisant la définition de l'opération "à droite" des vitesses, on montre que les vitesses  $\boldsymbol{\eta}_j$  associées et exprimées dans le repère  $\mathcal{F}_j$  sont données par

$$\boldsymbol{\eta}_j = \text{Ad}_{g_{j-1}} \boldsymbol{\eta}_{j-1} + \mathbf{A}_j \dot{q}_j, \quad (2.16)$$

avec le vecteur  $\mathbf{A}_j = (\mathbf{0}_3^T, \mathbf{e}_j^T)^T$  vérifiant

$$\frac{d}{{}^{j-1}g_j} ({}^{j-1}g_j) = ({}^{j-1}g_j) \hat{A}_j \dot{q}_j. \quad (2.17)$$

Cette dernière équation est obtenue en dérivant la matrice  $({}^{j-1}g_j)$  (cf Eq. (2.6)) avec  $\phi_j = q_j$  et  $\alpha_j = 0$ .

En utilisant le même procédé, l'accélération  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$  peut être transférée d'un module à l'autre. Il faut alors dériver l'Eq. (2.16) pour obtenir

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_j = \text{Ad}_{g_{j-1}} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{j-1} + \boldsymbol{\zeta}_j + \mathbf{A}_j \ddot{q}_j. \quad (2.18)$$

où le nouveau terme  $\zeta_j$  provient de la variation temporelle de  ${}^j g_{j-1}$  présent dans le transport des vitesses. On obtient donc

$$\zeta_j = \left( \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g_{j-1}} \right) \boldsymbol{\eta}_{j-1} \quad (2.19)$$

Après quelques développements, on montre que ce terme s'écrit

$$\zeta_j = \text{ad}_{\boldsymbol{\eta}_j} \mathbf{A}_j \dot{q}_j \in \mathbb{R}^6. \quad (2.20)$$

avec la représentation de l'algèbre de Lie  $\text{ad}_{\boldsymbol{\eta}_j} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  [91] définie par

$$\text{ad}_{\boldsymbol{\eta}_j} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_j & \widehat{\mathbf{V}}_j \\ 0_{3 \times 3} & \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_j \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Cette représentation de l'algèbre de Lie est liée au commutateur ou crochet de Lie [91] via la relation suivante

$$\widehat{\text{ad}_X Y} = \widehat{X} \widehat{Y} - \widehat{Y} \widehat{X} \quad (2.22)$$

où on aura reconnu le crochet dans le terme de droite et caractérise une des propriétés de l'algèbre de Lie.

Ce crochet fait donc apparaître des termes quadratiques en vitesses à l'origine de Coriolis et centrifuges. Or ces termes sont inhérents aux référentiels non-Galiléen et proviennent ici de la non-commutativité des groupes considérés [90]. On retrouve ici une relation élégante entre la structure du groupe et la physique Galiléenne.

## 2.6 Les modèles de reconstruction du groupe $SE(3)$

### 2.6.1 La carte exponentielle et autres intégrations sur le groupe

Nous avons vu dans la section précédente que la dérivée de  $g_0$  pouvait être paramétrée par un élément de l'algèbre de Lie  $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_0$ . Il est tentant, par le biais de l'intégration, de définir directement un élément  $g \in SE(3)$  à partir d'un élément de l'algèbre de Lie  $\text{se}(3)$ .

Prenons le cas le plus simple où  $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_0$  est constant. Dans ce cas, l'intégration de l'Eq. (2.9) est possible avec des méthodes classique d'analyse pour obtenir

$$g_0(t) = g_0(t_0)\exp\left(\widehat{\Psi}(t)\right) \quad (2.23)$$

où  $\widehat{\Psi} \in \text{se}(3)$  tel que

$$\widehat{\Psi} = \int_{t_0}^t \widehat{\eta}_0 dt^* \quad (2.24)$$

Ici, nous avons utilisé l'exponentielle matricielle défini par

$$\exp\left(\widehat{\Psi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{\Psi}^n \quad (2.25)$$

Il est donc possible d'associer à un élément de l'algèbre de Lie, ici  $\widehat{\Psi}(t)$ , à un élément du groupe  $g_0(t)$ . Du point de vue de la cinématique, cela revient à trouver un vecteur rotation angulaire  $\mathbf{\Omega}_0$  et un champ de vitesse  $\mathbf{V}_0$  pour qu'en un temps fini  $t - t_0$  le repère défini par  $g_0(t_0)$  coïncide avec le repère  $g_0(t)$ . Une telle transformation, analogue à du transport parallèle sur une variété métrique, se nomme *la carte exponentielle*. La carte exponentielle est donc l'application définie par l'Eq. (2.23) avec  $\widehat{\Psi} \mapsto g_0$  identifiant un élément de l'algèbre de Lie  $\text{se}(3)$  à un élément du groupe  $\text{SE}(3)$ . Le calcul en détail est introduit dans l'annexe A.4.

Un tel processus peut être généralisable, même si le champ de vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0(t)$  est instationnaire. La formule 2.23 reste valide car il existe toujours un transport parallèle défini par  $\widehat{\Psi}$  permettant de passer de  $g_0(t_0)$  à  $g_0(t)$ . Néanmoins cette transformation n'est plus donnée par l'Eq. (2.24), du moins en règle général. En effet, si  $\widehat{\Psi}$  et  $\widehat{\eta}$  ne commutent plus, c'est à dire que  $\text{ad}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Psi} \neq 0$ , il faut alors utiliser un développement de *Magnus* pour reconstruire  $\widehat{\Psi}$  [91].

Ce développement s'écrit  $\widehat{\Psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\Psi}_n$  où chaque ordre fait apparaître une commutation tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\Psi}_1 = \int_{t_0}^t dt^* \widehat{\eta}_0(t^*), \\ \widehat{\Psi}_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt^* \int_{t_0}^{t^{**}} dt^{**} [\widehat{\eta}_0(t^*), \widehat{\eta}_0(t^{**})] \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Cette développement est une conséquence de la formule de Baker–Campbell–Hausdorff

qui montre que  $\exp(\hat{X} + \hat{Y}) \neq \exp(\hat{X})\exp(\hat{Y})$  si  $[\hat{X}, \hat{Y}] \neq 0$ .

Cette méthode peut rapidement être complexe nécessitant quelques subtilités pour son implémentation. Nous ne l'utiliserons pas dans les méthodes d'intégration et l'exploiterons pour linéariser la dynamique à en utilisant la vitesse  $\eta_0$  dans le chapitre 4, c'est à dire que nous ne retiendrons que le premier ordre. Quant à l'application exponentielle, elle sera aussi utilisée dans le processus de linéarisation ainsi que pour définir les configurations initiales des simulations.

## 2.6.2 L'intégration grâce aux quaternions

Nous présentons ici la méthode utilisée dans cette thèse pour intégrer l'équation d'évolution de  $g_0$  donnée par l'Eq. (2.11). À partir de cette équation, l'évolution de la matrice de rotation  $R_0$  et du vecteur position  $\mathbf{p}_0$  du repère  $\mathcal{F}_0$  par rapport à  $\mathcal{F}_G$  est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} \dot{R}_0 = R_0 \hat{\Omega}_0, \\ \dot{\mathbf{p}}_0 = R_0 \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (2.27)$$

La difficulté est de préserver la structure de groupe et plus spécifiquement, celle du groupe des rotations liée à l'évolution de  $R_0$ . Les neuf éléments de cette matrice doivent donc satisfaire l'orthonormalité des vecteurs de la base de  $\mathcal{F}_0$  ainsi que son sens direct, soit 6 contraintes au total [91].

Parmi les paramétrages compatibles avec ces contraintes, nous ne souhaitons pas prendre les angles d'Eulers qui peuvent décrire des singularités du blocage de cardan. Au contraire, nous aimerions utiliser un paramétrage proche de la structure du groupe  $SE(3)$ . C'est pourquoi nous avons choisi les quaternions unitaires qui sont géométriquement proche de l'exponentielle tout en offrant des avantages numériques à la simulation rapide.

Brièvement, les quaternions sont une extension des nombres complexes paramétrés par quatre nombres réels  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \in \mathbb{R}^4$ , tel qu'un quaternion  $\mathbf{Q}$  se décompose comme

$$\mathbf{Q} = Q_1 + Q_2i + Q_3j + Q_4k \quad (2.28)$$

avec  $i, j, k$  des éléments satisfaisant les relations quaternioniques ( $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ).

On retrouve ici les nombres complexes si  $Q_3 = Q_4 = 0$ . Or on sait que les nombres

complexes unitaires sont isomorphe au cercle unité. Il en est de même pour les quaternions unitaires  $\mathbf{Q} \in Sp(1)$  qui satisfont l'égalité suivante

$$\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2} = 1, \quad (2.29)$$

Il existe ainsi un isomorphisme entre les quaternions unitaires et  $SO(3)$  (une fois privée de  $(\pm 1)$ ). On montre que doté du produit des quaternions (non reporté ici), ils satisfont aussi une structure de groupe.

Par ailleurs, étant donné une matrice  $R = \exp(\hat{\omega}\theta)$  avec  $\exp(-)$  la carte exponentielle sur  $SO(3)$  et  $\boldsymbol{\omega}$  un vecteur unitaire support de la rotation, on montre que les quaternions unitaires peuvent se mettre sous la forme

$$\mathbf{Q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k) \quad (2.30)$$

Ainsi, les composantes  $Q_2, Q_3$  et  $Q_4$  encodent la direction de rotation. La conversion du quaternion  $\mathbf{Q}$  en la matrice de rotation  $R_0$  est définie par la relation d'Euler-Rodrigues [94] :

$$R_0 = \begin{pmatrix} 2(Q_1^2 + Q_2^2) - 1 & 2(Q_2Q_3 - Q_1Q_4) & 2(Q_2Q_4 + Q_1Q_3) \\ 2(Q_2Q_3 + Q_1Q_4) & 2(Q_1^2 + Q_3^2) - 1 & 2(Q_3Q_4 - Q_1Q_2) \\ 2(Q_2Q_4 - Q_1Q_3) & 2(Q_3Q_4 + Q_1Q_2) & 2(Q_1^2 + Q_4^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

De plus, la relation entre la dérivée temporelle du quaternion  $\dot{\mathbf{Q}}$  et la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}_0$  peut se mettre sous la forme suivante

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} G^T \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (2.32)$$

avec la matrice  $G(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} -Q_2 & Q_1 & Q_4 & -Q_3 \\ -Q_3 & -Q_4 & Q_1 & Q_2 \\ -Q_4 & Q_3 & -Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

L'intégration des quaternions unitaires par l'Eq. (2.32) permet donc d'estimer la matrice de rotation par la relation (2.31) en s'assurant que la propriété 2.29 reste valide.

## 2.7 Modèle des efforts statique

Dans cette section, nous introduisons une approche géométriquement exacte pour modéliser l'interaction fluide-structure hydrostatique. Cette approche a été proposée pour calculer les efforts (ou les torseurs) de flottabilité et de gravité d'une poutre continue de Cosserat partiellement immergée [95]. Dans le cadre de notre étude, nous l'avons adapté à la structure discrète du robot NATRIX.

D'abord, nous allons présenter la géométrie de la coque extérieure ainsi que son mécanisme de flottabilité. Puis une approche pour calculer l'effort hydrostatique (gravité + flottabilité) sera présentée. Nous mettrons en évidence que cet effort net exprimé dans le repère galiléen n'a que trois composantes non nulles, c'est-à-dire, une force et deux couples.

### 2.7.1 Géométrie du module ARIM

L'effort hydrostatique  $\mathbf{W}_{stat}$  change en fonction de la configuration de la tête  $g_0$ . Dans la suite, nous allons introduire l'effet de la forme du corps  $\mathbf{q}$  sur la distribution de la flottabilité tout en gardant une configuration de la tête constante. Ceci nous permettra d'étudier le rôle du module ARIM dans la stabilité statique.

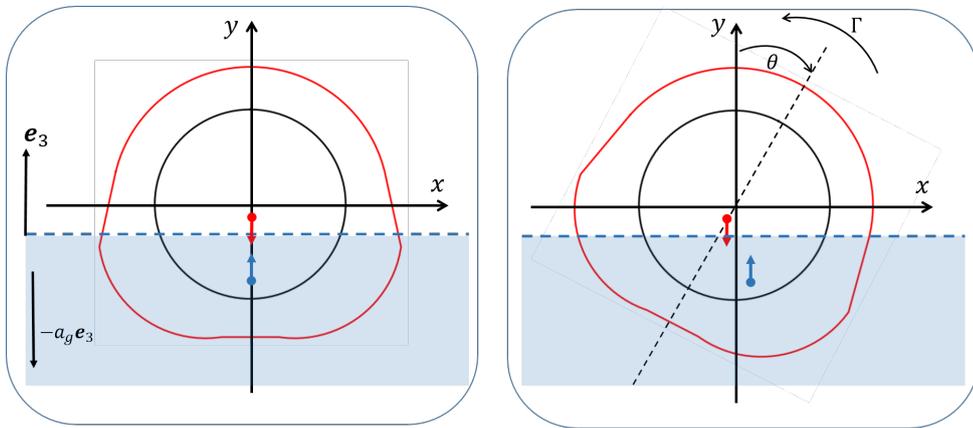


FIGURE 2.8 – Géométrie de stabilisation statique de la coque extérieure : une triangle très arrondie

Comme illustré sur la Fig. 2.8 à gauche, un seul module reste en équilibre sur la surface avec le contour rouge associé à la coque extérieure et le cercle noir associé au module interne. Sa force de gravité (flèche rouge), appliquée au centre de masse situé presque au centre du cercle, équilibre sa force de flottabilité (flèche bleue) appliquée au

barycentre situé en bas. Sur la Fig. 2.8 à droite, la coque extérieure peut tourner d'un angle  $\theta$  et par conséquent décale le barycentre vers la droite. Puisque la coque a une densité de masse beaucoup moins importante que le module, la position du centre de masse est légèrement déplacé vers la gauche. Ainsi un couple de rappel  $\Gamma$  est généré afin de ramener le module dans son équilibre statique. Comme expliqué dans la section 2.2, les modules ARIM génèrent la torsion longitudinale le long de la colonne vertèbre du serpent et la stabilité globale du robot. Cette stabilité globale est réalisée par l'accumulation de déstabilisation des sections locales comme illustré sur la Fig. 2.8.

## 2.7.2 Calcul de l'effort hydrostatique

### Effort de flottabilité

L'objectif de cette section est de réaliser un calcul exact de la force et du moment de flottabilité exercés sur le robot. Pour cela, nous calculons les densités de force et de moment exercés sur chaque section infinitésimale le long de colonne vertébrale. En supposant un équilibre mécanique entre la surface de l'eau et le robot au repos, les accélérations du fluide et du corps sont négligées. La densité de l'effort de flottabilité  $\mathbf{w}_a(s)$  exercée sur une section et exprimée dans le repère local  $\mathcal{F}_s$  est définie par

$$\mathbf{w}_a(s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_a(s) \\ \boldsymbol{\gamma}_a(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (2.34)$$

où  $\boldsymbol{\pi}_a(s)$  et  $\boldsymbol{\gamma}_a(s)$  définissent respectivement la densité de force et du moment. La densité de la force de flottabilité est définie par :

$$\boldsymbol{\pi}_a(s) = a_g \rho_w S_{im}(s) R_s^{-1} \mathbf{e}_3 \quad (2.35)$$

où  $a_g$  est l'accélération de la pesanteur ;  $\rho_w$  est la densité de l'eau,  $S_{im}(s)$  est la surface d'immersion de la section local ; le produit  $\rho_w S_{im}$  est donc la densité linéaire de la masse d'eau ;  $R_s^{-1} \mathbf{e}_3$  est le vecteur vertical du repère global  $\mathcal{F}_G$  exprimé dans le repère local  $\mathcal{F}_s$  (voir Fig.2.9.(b)). Nous déterminons dans la suite la matrice de rotation  $R_s$ . Pour localiser la section locale dans le repère global  $\mathcal{F}_G$ , nous définissons sa matrice de configuration

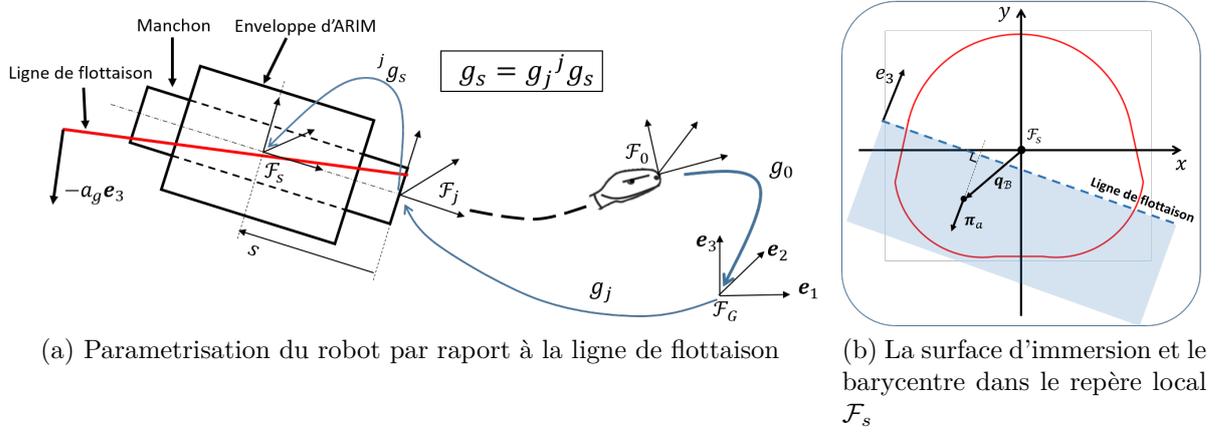


FIGURE 2.9 – Géométrie pour la flottabilité du robot NATRIX

(voir Fig. 2.9.(a)) par la relation suivante :

$$g_s(s) = g_j^j g_s(s) = \begin{pmatrix} R_s(s) & \mathbf{p}_s(s) \\ 0^{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

avec la configuration relative  $^j g_s$  définie par :

$$^j g_s(s) = \begin{pmatrix} (R_{shell})_j & ^j \mathbf{p}_s \\ 0^{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

où  $(R_{shell})_j$  représente la matrice de rotation extraite de la configuration relative  $h_j$  définie dans l'Eq. (2.5) qui détermine la rotation de roulis local de la coque d'ARIM ;  $^j \mathbf{p}_s = (s, 0, 0)^T$  représente le vecteur de translation le long du module.

Pour calculer le moment associé à la densité de la force de flottabilité, il faut définir la position du barycentre  $\mathbf{p}_B(s)$  où la force est appliquée pour calculer le bras de moment (voir Fig. 2.9.(b)). Ainsi, la densité du moment est donnée par :

$$\gamma_a(s) = \mathbf{p}_B(s) \times \boldsymbol{\pi}_a(s) \quad (2.37)$$

Les seules inconnues dans les équations (2.35) et (2.37) sont la surface d'immersion  $S_{im}$  et le barycentre  $\mathbf{p}_B$ . Pour la précision et l'efficacité du calcul des efforts de flottabilité, ces termes sont calculés par une approche analytique plutôt que numérique. À partir de la Fig. 2.9.(b), le contour de la coque est une triangle avec 3 angles très arrondies et nous

avons proposé une méthode exacte pour calculer ses termes (voir l'annexe A.1 pour les détails).

Ensuite, pour calculer la résultante et le moment de flottabilité exercés sur le robot, toutes les densités d'effort doivent être exprimées dans un même repère. Pour raisons de commodité, le repère galiléen  $\mathcal{F}_G$  est choisi. Ainsi nous utilisons la représentation adjointe du groupe de Lie  $\text{Ad}_g \in \text{SE}(3)$  pour exprimer tous les densités  $\mathbf{w}_a$  dans le repère galiléen. La relation de transformation de la densité  $\mathbf{w}_a$  est définie par :

$$\mathbf{w}_a^{(G)}(s) = \text{Ad}_{g_s}^T \mathbf{w}_a(s) \quad (2.38)$$

L'exposant  $G$  indique que la quantité est exprimé dans le repère global  $\mathcal{F}_G$ .

L'effort total de flottabilité  $\mathbf{W}_a^{(G)}$  est exprimé par l'intégration suivante :

$$\mathbf{W}_a^{(G)} = \sum_{i=0}^7 \int_{s \in \mathcal{L}_i} \mathbf{w}_a^{(G)}(s) ds \quad (2.39)$$

avec  $\mathcal{L}_i$  la longueur du corps  $\mathcal{B}_i$ . Notons qu'à cause de la discontinuité du robot au niveau des articulations, contrairement à l'étude de la poutre continue [95], cet torseur est calculé dans l'Eq. (2.39) par l'intégration module par module.

Enfin, en substituant les Eqs. (2.35),(2.37) et (2.38) dans l'Eq (2.39), nous obtenons l'expression générale de l'effort de flottabilité qui contient la force et le moment :

$$\mathbf{W}_a^{(G)} = \begin{pmatrix} a_g \rho_w \sum_{i=0}^7 \int_{s \in \mathcal{L}_i} S_{im}(s) ds \mathbf{e}_3 \\ a_g \rho_w \sum_{i=0}^7 \int_{s \in \mathcal{L}_i} S_{im}(s) (R_s \mathbf{p}_{\mathcal{B}}(s) + \mathbf{p}_s) ds \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

En inspectant l'Eq. (2.40), seules trois composantes de  $\mathbf{W}_a^{(G)}$  sont non nulles. Ceci correspond à une propriété d'invariance du modèle de flottabilité qui sera introduit dans la section 2.7.3.

L'intégration spatiale dans l'Eq. (2.40) est effectuée par une quadrature gaussienne d'ordre fixe, qui s'est avérée numériquement efficace et précise (voir l'annexe A.1 pour les détails).

## Effort de gravité

Par rapport à l'effort de flottabilité, l'effort de gravité est simple à calculer car le système est constitué de corps rigides. En négligeant les influences faibles, tels que la rotation

du rotor, la déformation du manchon ou la densité non-homogène due à l'impression 3D, la masse et le centre de masse de chaque modules sont considérés constants dans le repère des modules. Le torseur de gravité du robot exprimé dans le repère global  $\mathcal{F}_G$  est déterminé par :

$$\mathbf{W}_p^{(G)} = \begin{pmatrix} -a_g(\sum_{j=0}^7 m_j + \sum_{j=2}^7 m_{j,shell})\mathbf{e}_3 \\ -a_g \left( \sum_{j=0}^7 m_j g_j \bar{\mathbf{p}}_j^{com} + \sum_{j=2}^7 m_{j,shell} (g_{shell})_j (\bar{\mathbf{p}}_{shell}^{com})_j \right) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

avec  $m_j$  la masse d'un module ;  $\bar{\mathbf{p}}^{com} = ((\mathbf{p}^{com})^T, 1)^T$  où  $\mathbf{p}^{com}$  est la position du centre de masse d'un module exprimé dans son repère local ;  $\mathbf{e}_3$  le vecteur unitaire vertical du repère global. Les paramètres dans l'Eq. (2.41) sont obtenus par le logiciel CAO et enregistré dans l'annexe A.2. De même que pour l'Eq. (2.40), l'Eq. (2.41) implique que l'effort de gravité se compose d'une force verticale non-nulle et de deux couples non-nuls.

L'effort hydrostatique exprimé dans le repère global est donc la superposition des efforts de flottabilité et de gravité :

$$\mathbf{W}_{stat}^{(G)} = \mathbf{W}_a^{(G)} + \mathbf{W}_p^{(G)} \quad (2.42)$$

Dans notre étude, cet effort est souvent transféré dans le repère de la tête  $\mathcal{F}_0$  pour le calcul du modèle dynamique :

$$\mathbf{W}_{stat} = \text{Ad}_{g_0}^T \mathbf{W}_{stat}^{(G)} \quad (2.43)$$

### 2.7.3 Invariance du modèle des efforts hydrostatiques

En inspectant les Eq. (2.40) et (2.41), les efforts résultants non nuls sont composés d'une force verticale  $F_z$  et deux couples  $\Gamma_x$  et  $\Gamma_y$  selon des axes  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ , tel que :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}(g_0, \mathbf{q}) = (F_z, \Gamma_x, \Gamma_y)^T \quad (2.44)$$

où le symbole "tilde" représente l'effort réduit dont les éléments non nuls extraits de l'effort complet  $\mathbf{W}_{stat}^{(G)} = (\mathbf{F}^{(G),T}, \mathbf{\Gamma}^{(G),T})^T$ .

Ces trois composantes produisent respectivement un mouvement de pilonnement  $t_z$ , et deux rotations de roulis  $\theta_x$  et de tangage  $\theta_y$  (voir la Fig. 2.10 droite). Réciproquement, les mouvements planaires sur la surface de l'eau, produit par des forces selon les axes  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , le couple selon l'axe vertical  $\mathbf{e}_z$ , ne modifient pas le volume immergé du robot [63](voir la Fig. 2.10 gauche). Ainsi, ces mouvements solides pour la locomotion, préservant l'invariance

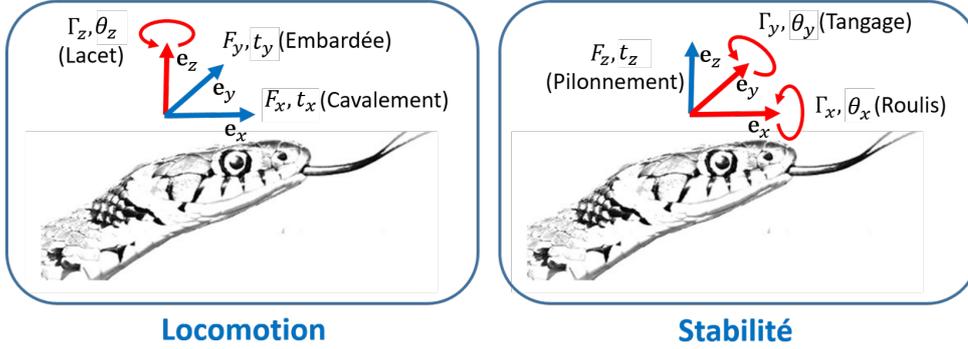


FIGURE 2.10 – Représentation des forces et couples associés aux vitesses correspondantes pour le problème de locomotion et de stabilité à la surface de l'eau

de  $\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^G$ , sont définis par une transformation rigide suivante :

$$\bar{g}_0 = \exp(\widehat{\Psi})g_0 \quad (2.45)$$

avec  $\Psi = (t_x, t_y, 0, 0, 0, \theta_z)^T \in \mathbb{R}^6$  les mouvements planaires par rapport au repère global  $\mathcal{F}_G$ .

Les efforts réduits associés à la nouvelle pose  $\bar{g}_0$  du robot reste invariant par rapport à  $g_0$ , tel que :

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}(\bar{g}_0, \mathbf{q}) = \widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}(g_0, \mathbf{q}) \quad (2.46)$$

Lorsque nous traitons le problème de stabilité du robot, cette propriété nous permettra de réduire son espace de travail en ne gardant que les mouvements de pilonnement, de roulis et de tangage. Nous allons détailler cette réduction dans la section 3.2.1 du chapitre suivant.

## 2.8 Modèle dynamique inverse

### 2.8.1 Forme générale du modèle dynamique

Dans cette section, nous présentons la forme générale du modèle dynamique du robot NATRIX. Le robot NATRIX est un système multi-corps avec une base mobile (MMS). Ces systèmes présentent généralement de nombreux degrés de liberté et sont ainsi modélisés par la formulation Newton-Euler, utilisée pour les robots bipèdes [96] ou quadrupèdes [97, 98], les robots serpentiformes [99, 43], les robots quadrirotors [100, 101], ou les mani-

pulateurs à roue [102].

Dans la plupart des études des robots nageurs serpentiformes, les mouvements des robots sont supposés planaires (voir par exemple [31, 43, 61]). Dans le cadre de notre étude, nous visons à établir un modèle de locomotion 3D pour y inclure les mouvements de pilonnement, de roulis et de tangage. Le modèle dynamique 3D des robots serpentiformes peut être écrit sous la forme lagrangienne générale [103, 43] :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & M_q \\ M_q^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{stat} \\ \mathbf{Q}_{stat} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{dyn} \\ \mathbf{Q}_{dyn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Les termes de gauche représentent les quantités d'accélération, tandis que les termes de droite correspondent aux efforts extérieurs généralisés. Les termes utilisés dans l'Eq. (2.47) sont décrits dans la suite :

- $\boldsymbol{\eta}_0^T = (\mathbf{V}_0^T, \boldsymbol{\Omega}_0^T)^T \in \mathbb{R}^6$  est la vitesse de la tête exprimé dans le repère de la tête.
- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  sont respectivement les positions, vitesses et accélérations articulaires avec  $n$  le nombre de degré de liberté (ici  $n = 14$ ).
- Les matrices  $\mathcal{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  et  $M_q(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  correspondent respectivement à l'inertie généralisée de la tête (pour une forme du corps figée) et au couplages inertiels entre la tête et les articulations. La matrice  $M$  est l'inertie du robot quand la tête est fixe (pour un manipulateur à base immobile). Ces matrices sont fonction des positions articulaires  $\mathbf{q}$ .
- Les vecteurs  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^6$  et  $\boldsymbol{\beta}_b \in \mathbb{R}^n$  représentent les efforts de Coriolis, centrifuge appliqués respectivement sur la tête et sur le corps. Ces éléments sont fonction des vitesses articulaire et de la tête.
- Le vecteur  $\mathbf{W}_{stat}(g_0, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$  représente le torseur effort hydrostatiques ramenés sur la tête, introduit dans la section 2.7. Ces efforts ne dépendent que de la configuration de robot  $(g_0, \mathbf{q})$ . Le vecteur  $\mathbf{Q}_{stat} \in \mathbb{R}^n$  représente les couples hydrostatiques appliqués sur les axes d'articulations. Ces couples correspondent aux dérivations partielles de l'énergie potentielle  $U(g_0, \mathbf{q})$  du système par rapport aux angles articulaires  $q_i$ , tel que  $w_{stat,i} = \frac{\partial}{\partial q_i} U$ .
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des couples articulaires.

Dans l'Eq. (2.47) nous avons suivi les notations de [43]. Par souci de généralité, nous avons également inclus les efforts hydrodynamiques  $\mathbf{W}_{dyn}$  qui ne seront pas pris en compte dans notre étude (cf. l'hypothèse I dans la section 2.3).

## 2.8.2 Résolution du modèle dynamique inverse

À partir du modèle dynamique lagrangienne (2.47), on va écrire un modèle dynamique qui calcule les couples articulaires  $\boldsymbol{\tau}$  et l'accélération de la tête  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$  en fonction de la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  et des positions, vitesses et accélérations articulaires  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ . Puisque dans ce cas une accélération et des couple sont calculés en même temps, ce modèle dynamique est aussi nommé le modèle dynamique hybride [88].

En pratique, nous obtenons d'abord l'accélération de la tête avec la première ligne de l'Eq. (2.47) :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \mathcal{M}^{-1} (\mathbf{W}_{stat} - M_q \ddot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\beta}) \quad (2.48)$$

Puis les couples articulaires sont calculés avec la second ligne de l'Eq. (2.47) :

$$\boldsymbol{\tau} = M_q^T \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + M_0 \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\beta}_b - \mathbf{Q}_{stat} \quad (2.49)$$

L'équation de mouvement de la tête (2.48) est intéressante pour sa stabilisation de la tête puisqu'elle traduit les relations entre le mouvement net ( $g_0$ ) et le mouvement interne ( $\mathbf{q}$ ). De plus, en négligeant les erreurs de poursuites des trajectoires articulaires (cf. l'hypothèse II dans la section 2.3), il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation de la dynamique interne (2.49), ce qui offre un gain de temps non négligeable. Le modèle dynamique inverse est donc un bon outil pour la simulation à la fois pour le contrôle de stabilité.

Le modèle (2.48) peut être établie par les formulations Lagrangiennes ou de Newton-Euler [104]. Le modèle Lagrangien repose sur l'écriture du lagragien du système et le principe d'Harmilton. Il est une formulation condensée qui donne des expressions analytiques des termes  $\mathcal{M}$ ,  $M_0$ ,  $M_q$ . Cependant, à mesure que les degrés de liberté augmentent, la complexité de cette formulation augmente considérablement [36, 105]. Compte tenu de l'hyper-redondance du robot NATRIX, nous avons choisi la méthode de Newton-Euler pour établir le modèle dynamique inverse. La méthode de Newton-Euler se base sur les théorèmes des moments cinétique et de dynamique et exhibe le modèle des efforts de liaison.

## 2.8.3 Algorithme récursif de Newton-Euler

Dans cette section, nous présentons, l'algorithme récursif de Newton-Euler (N-E) résolvant le modèle dynamique inverse du robot NATRIX. Cet algorithme a été initialement

appliqué aux manipulateurs rigides [106], généralisé aux systèmes avec une base mobile [88] et largement appliqué à la locomotion bio-inspirée [90] grâce à sa programmation simple et efficace.

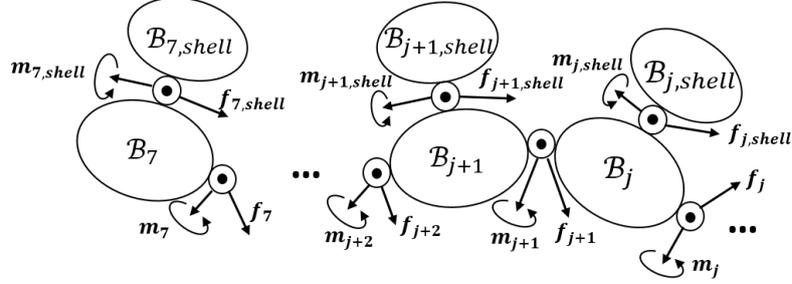


FIGURE 2.11 – Structure arborescente des modules d’ARIM du robot NATRIX : le module  $\mathcal{B}_j$  est connecté par sa coque  $\mathcal{B}_{j,shell}$  et le module descendant  $\mathcal{B}_{j+1}$ .  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{m}$  représentent respectivement la force et le couple appliqués sur l’axe d’articulation associé.

Contrairement aux manipulateurs, l’accélération du premier module du robot, c’est-à-dire la base mobile du locomoteur, n’est pas connue et doit être calculée. En outre, NATRIX diffère des robots serpentiformes précédents [103, 43, 28] par ses coques extérieures supplémentaires qui introduisent des termes additionnels dans les récurrences (voir la Fig. 2.11).

L’algorithme de N-E repose sur les transformations de la vitesse et de l’accélération introduites dans la section 2.5 et les équations de Newton-Euler des corps isolés. Ces équations donnent le bilan de tous les efforts (forces + moments) exercés sur chaque corps et exprimés dans leurs repères propres :

$$\mathbf{F}_j - \text{Ad}_{j+1g_j}^T \mathbf{F}_{j+1} - \text{Ad}_{h_j}^T \mathbf{F}_{j,shell} + \mathbf{F}_{ext,j} = \mathcal{M}_j \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j(\boldsymbol{\eta}_j, \dot{q}_j) \quad (2.50)$$

où l’effort  $\mathbf{F}_j^T = (\mathbf{f}_j^T, \mathbf{m}_j^T)$  est composée de la force linéaire  $\mathbf{f}_j$  et du moment  $\mathbf{m}_j$  qui sont exercés par le corps  $\mathcal{B}_{j-1}$  sur  $\mathcal{B}_j$  (voir Fig. 2.11). Cette équation n’est valable que pour le module le long de la structure en série, et non pour les coques extérieures  $\mathcal{B}_{shell}$ . Réciproquement,  $\mathbf{F}_{j,shell}$  est la force exercée par la jème coques sur  $\mathcal{B}_j$ , et  $\mathbf{F}_{ext,j}$  la force extérieure (telle que la gravité) qui lui est appliquée.

Comme chaque coque n’a pas de successeur, elle est considérée comme un corps “terminal”. Ses équations de Newton-Euler s’expriment par :

$$[\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{ext,j}]_{shell} = [\mathcal{M}_j \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j(\boldsymbol{\eta}_j, \dot{q}_j)]_{shell} \quad (2.51)$$

Le crochet  $[-]_{shell}$  contient tous les termes associés à la  $j$ -ème coque.

Dans l'Eq. (2.50), les termes du côté droit correspondent à les termes inertiels composés des efforts de Coriolis et centrifuges  $\beta_j = -ad_{\eta_j}^T \mathcal{M}_j \boldsymbol{\eta}_j$  et  $\mathcal{M}_j \dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ . Ici, la matrice d'inertie locale  $\mathcal{M}_j$  exprimée dans  $\mathcal{F}_j$  est défini par :

$$\mathcal{M}_j = \begin{pmatrix} m_j \mathbf{I}_3 & -m_j \hat{\mathbf{p}}_j^{com} \\ m_j \hat{\mathbf{p}}_j^{com} & J_{G_j} - m_j \hat{\mathbf{p}}_j^{com} \hat{\mathbf{p}}_j^{com} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

avec  $\mathbf{I}_3$  la matrice d'identité ( $3 \times 3$ ),  $\mathbf{p}_j^{com} \in \mathbb{R}^3$  la position du centre de masse dans  $\mathcal{F}_j$  (voir la section 2.7.2) et  $J_{G_j}$  la matrice du moment d'inertie au centre de masse.

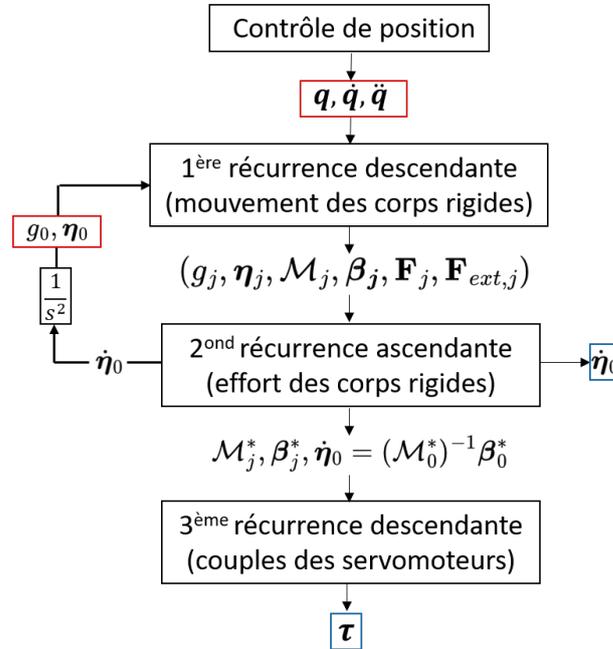


FIGURE 2.12 – Organigramme de l'algorithme de Newton-Euler pour le modèle dynamique inverse du robot NATRIX avec une structure arborescent. Les termes rouges sont des entrées, tandis que les termes bleus sont des sorties.

Dans l'algorithme de N-E standard, la dynamique inverse récursive est composée de trois boucles récursives séquentielles : deux boucles ascendantes (de la tête au dernier module) et une boucle descendante (du dernier module à la tête). Pour calculer l'accélération de la tête  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$ , seules les deux premières boucles ascendante et descendante sont nécessaires (voir la Fig. 2.12). La troisième vise à calculer les couples nécessaires fournis par les servomoteurs afin de produire  $\mathbf{q}(t)$ .

Avant d'entrer dans les détails des boucles indicielles, nous pouvons déjà identifier

dans les Eqs. (2.16)-(2.51) la difficulté pour résoudre le modèle dynamique inverse. En effet, notre but final est d'établir les équations de Newton-Euler de la tête :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \mathcal{M}_0^{-1} \left( -\boldsymbol{\beta}_0 - \text{Ad}_{g_1}^T \mathbf{F}_1 \right) \quad (2.53)$$

Idéalement, l'effort  $\mathbf{F}_1$  est déduit de l'Eq. récursive descendante (2.50). Cependant, à chaque récurrence, les deux termes  $\mathbf{F}_j$  et  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$  sont inconnus dans l'Eq. (2.50), et  $\mathbf{F}_j$  ne peut pas être calculé car ce terme dépend de  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ . Contrairement aux manipulateurs, l'accélération  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$  ne peut pas être mise à jour dans la récurrence ascendante puisque nous cherchons à calculer  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ . Pour résoudre ce problème, nous reformulerons dans la suite les Eqs. (2.50) et (2.53) dans la boucle récursive descendante.

**(i). récurrence descendante (mouvement des corps rigides)**

Dans la première récurrence, nous calculons toutes les termes qui sont indépendants de  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$ . Nous commençons donc par le modèle géométrique du robot présenté dans la section 2.4. Ensuite, les vitesses  $\boldsymbol{\eta}_j$  peuvent être mises à jour grâce à l'Eq. (2.16). De plus, certains éléments des équations (2.18) et (2.50) peuvent être calculés. Ainsi, la contribution du servomoteur à l'accélération du corps donnée par  $\boldsymbol{\zeta}_j + \mathbf{A}_j \ddot{q}_j$  est calculé. En outre, les efforts de Coriolis et centrifuges et les efforts extérieurs  $\mathbf{F}_{ext,j}$  dépendent uniquement de la vitesse et de la configuration de chaque  $\mathcal{B}_j$  par rapport à  $\mathcal{F}_G$  (cf. efforts de flottabilité et de gravité) et sont donc calculés de même.

**(ii). récurrence ascendante (effort des corps rigides)**

Dans la suite de la section, nous allégerons les notations dans les Eqs. (2.50) et (2.51) en intégrant les efforts extérieurs  $\mathbf{F}_{ext,j}$  dans les efforts de Coriolis et centrifuges, ce qui effectue le changement de variable  $(\boldsymbol{\beta}_j - \mathbf{F}_{ext,j}) \mapsto \boldsymbol{\beta}_j$  comme dans [103].

Puisque l'Eq. (2.50) ne peut pas être utilisée directement sous sa forme actuelle, nous proposons de réécrire une équation analogue reliant  $\mathcal{F}_j$  à la force et à l'accélération  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ . Pour ce faire, nous introduisons une inertie modifiée  $M_j^*$  et une force généralisée  $\boldsymbol{\beta}_j^*$  pour obtenir le nouveau bilan de quantité de mouvement déduit de l'Eq. (2.50) :

$$\mathbf{F}_j = \mathcal{M}_j^* \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j^* \quad (2.54)$$

Ici, l'Eq. (2.18) a été écrite à l'envers afin de cascader séquentiellement l'inertie et les forces

de Coriolis et centrifuges du dernier au premier corps le long de la colonne vertébrale. Ainsi, à chaque nouvelle itération, le terme  $\mathbf{F}_{j+1}$  ne dépendra que de l'inertie généralisée  $\mathcal{M}_{j+1}^*$  et de l'effort  $\boldsymbol{\beta}_{j+1}^*$ . Ce processus conduit à un algorithme (voir l'annexe A.3 pour les détails) où les termes  $\mathcal{M}_j^*$  et  $\boldsymbol{\beta}_j^*$  sont calculés récursivement le long de la colonne vertébrale, de telle sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_j^* &= \mathcal{M}_j + \text{Ad}_{j+1g_j}^T \mathcal{M}_{j+1}^* \text{Ad}_{j+1g_j} + \text{Ad}_{h_j}^T \mathcal{M}_{j,shell}^* \text{Ad}_{h_j} \\ \boldsymbol{\beta}_j^* &= \boldsymbol{\beta}_j + \text{Ad}_{j+1g_j}^T \left[ \boldsymbol{\beta}_{j+1}^* + \mathcal{M}_{j+1}^* (\boldsymbol{\zeta}_{j+1} + \mathbf{A}_{j+1} \ddot{\mathbf{q}}_{j+1}) \right] \\ &\quad + \text{Ad}_{h_j}^T \left[ \boldsymbol{\beta}_j + \mathcal{M}_j (\boldsymbol{\zeta}_j + \mathbf{A}_j \ddot{\mathbf{q}}_j) \right]_{shell},\end{aligned}\quad (2.55)$$

avec  $j \in [2, 3, \dots, 7]$ . Il est utile de rappeler que les termes  $\boldsymbol{\beta}_j$  prennent en compte les efforts extérieurs. Pour les derniers modules sans coques extérieure (cou+tête), nous supprimons les composantes  $[-]_{shell}$  liées à la coque. Enfin, on obtient l'accélération de la tête donnée par :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = -(\mathcal{M}_0^*)^{-1} (\boldsymbol{\beta}_0^*), \quad (2.56)$$

avec  $\mathcal{M}_0^*$  une matrice définie positive et donc inversible. Cette équation est la version récursive de la première ligne du modèle dynamique (2.47) tel que  $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}$  et  $-\boldsymbol{\beta}_0^* = \mathbf{W}_{stat} - M_q \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\beta}$ . Si nous ne nous intéressons qu'au mouvement de la tête, un gain de temps de calcul peut être obtenu en calculant directement la matrice d'inertie et l'effort net appliqué sur la tête du robot sans effectuer la boucle descendante complète. Ainsi, la matrice d'inertie peut être calculée en développant la somme intégrée dans l'Eq. (2.55) :

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \mathcal{M}_0 + \sum_{j=0}^7 \text{Ad}_{jg_0}^T \mathcal{M}_j \text{Ad}_{jg_0} + \sum_{j=2}^7 \text{Ad}_{jh_0}^T (\mathcal{M}_{shell})_j \text{Ad}_{jh_0} \quad (2.57)$$

avec  ${}^jg_0$  et  ${}^jh_0$  les configurations relatives du repère de la tête par rapport au j-ème module et à sa coque. La deuxième matrice d'inertie prend la forme suivante :

$$M_q(\mathbf{q}) = \left( \text{Ad}_{vg_0}^T \mathcal{M}_v^* \mathbf{A}_v, \dots, \text{Ad}_{jg_0}^T \mathcal{M}_j^* \mathbf{A}_j, \dots, [\text{Ad}_{sh_0}^T \mathcal{M}_8^* \mathbf{A}_8]_{shell} \right) \quad (2.58)$$

Réciproquement, les efforts de Coriolis et centrifuge appliqués sur la tête dans l'Eq. (2.47) sont donnés par :

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\eta}}_0) = \boldsymbol{\beta}_0 + \sum_{j=1}^8 \text{Ad}_{jg_0}^T \left( \boldsymbol{\beta}_j + \mathcal{M}_j^* \boldsymbol{\zeta}_j \right) + \sum_{j=2}^8 \text{Ad}_{jh_0}^T \left[ \boldsymbol{\beta}_j + \mathcal{M}_j^* \boldsymbol{\zeta}_j \right]_{shell} \quad (2.59)$$

Un autre avantage de ce calcul des termes est d'identifier le modèle lagrangien du robot et d'effectuer une analyse linéaire autour des configurations d'équilibre et concevoir des stratégies de contrôle.

### (iii). récurrence descendante (couples des servomoteurs)

Après avoir calculé  $\boldsymbol{\eta}_0$ , les accélérations  $\boldsymbol{\eta}_j$  sont obtenus en utilisant la relation de transfert (2.18) pour  $j \in [1, \dots, 7]$ . A cause de la structure arborescente, les équations de Newton-Euler (2.50) ont deux efforts inconnus  $\mathbf{F}_{j+1}$  et  $\mathbf{F}_{j,shell}$ . Nous pouvons donc d'abord calculer l'effort  $\mathbf{F}_{j,shell}$  par la relation (2.51) :

$$\mathbf{F}_{j,shell} = [\mathcal{M}_j \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j - \mathbf{F}_{ext,j}]_{shell} \quad (2.60)$$

Ensuite, l'effort  $\mathbf{F}_{j+1}$  peut être calculé par les équations de Newton-Euler du module ARIM :

$$\mathbf{F}_{j+1} = (\text{Ad}_{j+1}^{g_j})^{-1} (\text{Ad}_{h_j}^T \mathbf{F}_{j,shell} - \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{ext,j} + \mathcal{M}_j \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j) \quad (2.61)$$

Le couple articulaire  $\tau_j$  est calculé en projetant  $\mathbf{F}_j$  sur l'axe de l'articulation :

$$\tau_j = \mathbf{F}_j \mathbf{A}_j \quad (2.62)$$

$\tau_j$  est un couple combinant l'inertie de rotor, les frottements sec et visqueux et le couple appliqué sur l'articulation  $j$  [103]. Puisque les paramètres des servomoteurs sont inconnus, nous ne pouvons pas séparer les effets d'inertie et de frottement du rotor. En vue de la simulation numérique, il n'est pas nécessaire de calculer le couple  $\tau_j$  sauf si on veut vérifier la valeur du couple pour nos expérimentation.

## 2.9 Simulateur du robot NATRIX

Dans cette section, nous introduisons la construction du simulateur du modèle inverse obtenu par l'algorithme de N-E. À chaque pas de temps, les consignes d'articulations  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})(t)$ , la configuration et la vitesse de la tête  $(g_0, \boldsymbol{\eta}_0)(t)$  sont fournies pour réactualiser l'état au pas de calcul suivant. Selon l'hypothèse II dans la section 2.3, l'accélération de la tête  $\boldsymbol{\eta}_0(t)$  est résolue par l'équation du mouvement de la tête (2.48) :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \mathcal{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{W}_{stat}(g_0, \mathbf{q}) - M_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad (2.63)$$

avec les quantités  $\mathcal{M}$ ,  $M_q$  et  $\boldsymbol{\beta}$  calculées par les Eqs. (2.57), (2.58) et (2.59).

Dans la suite, l'accélération de la tête  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0(t)$  est intégrée pour obtenir les vitesses de rotation  $\boldsymbol{\Omega}_0(t + \Delta t)$  et de translation  $\mathbf{V}_0(t + \Delta t)$ . La position de la tête  $\mathbf{p}_0(t + \Delta t)$  par rapport au repère global est calculé grâce à la relation (2.9) :

$$\dot{\mathbf{g}}_0 = g_0 \hat{\boldsymbol{\eta}}_0 = \begin{pmatrix} R_0 & \mathbf{p}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_0 & \mathbf{V}_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

qui donne la relation :

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0 \hat{\boldsymbol{\Omega}}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}_0 &= R_0 \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Le simulateur a été développé en Python. L'intégration temporelle est basée sur un intégrateur de Runge-Kutta du quatrième ordre avec un pas de temps typiquement de 1 ms. Une quadrature de Gauss a été utilisée pour intégrer spatialement le volume immergé et calculer les efforts de flottabilité le long des segments du robot (comme indiqué dans la section 2.7.2). Pour une simulation correspondant à 1s de temps physique, le temps de calcul est de 0.12s lorsque la flottabilité est négligée, mais augmente jusqu'à 1,23s lorsqu'elle est considérée. Dans le cadre de cette étude, nos calculs sont toujours effectués avec un ordinateur portable avec processeur Intel Core i5-8365U, 1,60 GHz et 16,0 Go de xRAM.

## 2.10 Vérification du simulateur

Dans cette section, nous visons à vérifier la modélisation et son implémentation numérique en assurant que les quantités physiques telles que l'énergie et la quantité de mouvement soient conservées au cours des simulations. Dans un premier temps, nous vérifions la conservation de la quantité de mouvement lors de la déformation du robot. Dans le second cas, nous testerons si le mouvement solide du robot (c'est-à-dire sans déformation) conserve l'énergie totale. Dans ce cas-là, l'énergie totale est directement liée à la précision des schémas d'intégration temporelle et spatiale et à la cohérence mécanique du modèle.

### 2.10.1 Vérification de la conservation de quantité de mouvement

Pour le premier test, aucune force extérieure n'est appliquée sur le robot, et seuls les termes inertiels sont considérés. Dans ce cas, on s'attend à ce que la quantité de

mouvement linéaire du robot soit conservée pendant la déformation de son corps. Pour vérifier cette propriété, nous proposons la trajectoire articulaire suivante pour une flexion latérale uniforme  $q_j(t)$  avec évolution temporelle sur une première demi-période  $t \in [0, t_f]$ .

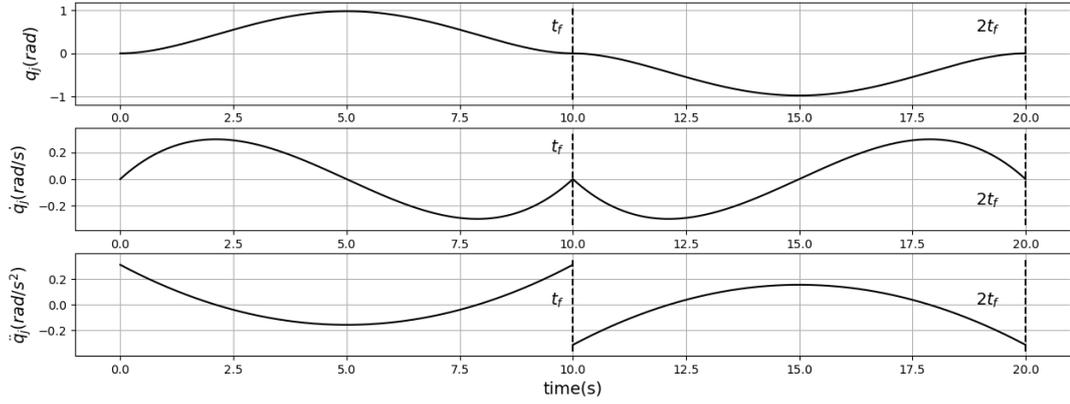


FIGURE 2.13 – Trajectoire articulaire avec le paramètre  $t_f = 10s$  pour le test 2

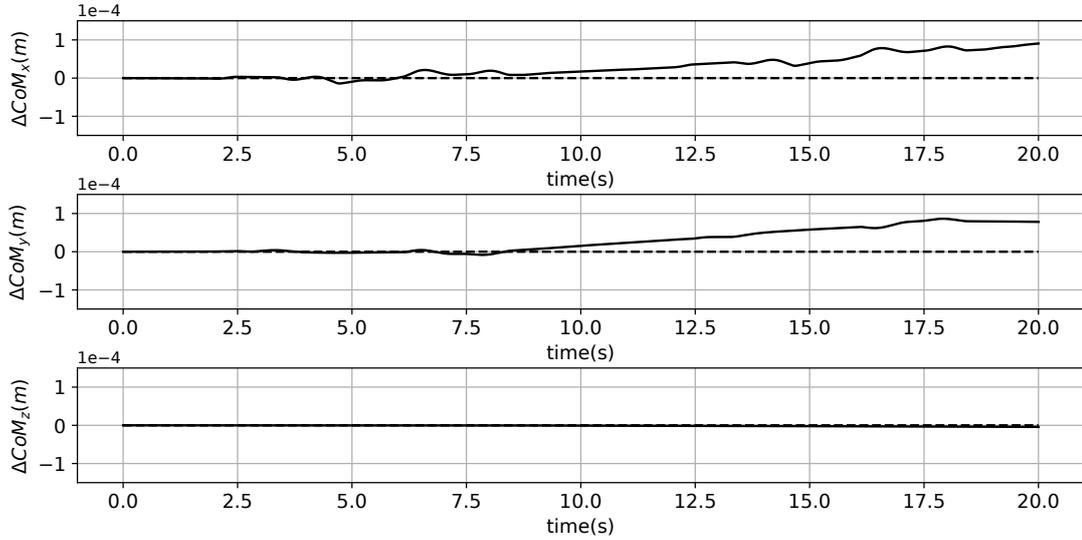


FIGURE 2.14 – Évolution du déplacement du centre de masse  $\Delta CoM = (\Delta CoM_x, \Delta CoM_y, \Delta CoM_z)^T$  pendant 20s en  $\mathcal{F}_G$  avec  $t_f = 10s$

$$f(t) = \frac{1}{160} (0.25 t^4 - 0.5 t_f t^3 + 0.25 t_f^2 t^2) \quad (2.66)$$

et suivie de  $f(t) \mapsto -f(t - t_f)$  sur la seconde demi-période  $t \in (t_f, 2t_f]$ . La fonction  $f(t)$  est une fonction polynomiale du temps qui permet de commencer et finir à  $q_j = 0$  et  $\dot{q}_j = 0$  après une demi-période  $t = t_f$ , puis d'appliquer le mouvement inverse de  $t_f$  à  $2t_f$ . Le

robot va donc se plier puis retrouver sa pose initialement droite. D'après l'Eq. (2.66) avec  $tf = 10s$ , l'angle de flexion maximum, la vitesse et l'accélération sont respectivement de 60deg, 17.2deg/s et 17.9 deg/s<sup>2</sup> (voir la Fig. 2.13). La position correspondante du centre de masse est reportée sur la Fig. 2.14 pendant la flexion du robot. Nous observons que le déplacement de le centre de masse reste petit avec  $1 \times 10^{-4}m$  par rapport à la longueur du robot ( $L = 1.24m$ ) et donc la quantité de mouvement linéaire est quasi-conservée par notre simulateur.

### 2.10.2 Vérification de la conservation d'énergie

Dans ce test, nous fixons une configuration où toutes les positions articulaires sont constantes et le mouvement de la tête suit une trajectoire désirée. Étant donné que les efforts de gravité et de flottabilité sont la seule source de forces externes alors dans ce cas le système est conservatif. La variation relative de l'énergie totale (potentiel + cinétique) du système est alors calculée pour quantifier la précision du simulateur. Pour les conditions initiales, nous choisissons d'imposer un petit angle de roulis à partir de différentes poses d'équilibre :

$$g_0(t = 0) = \exp(\Delta\hat{\Psi} g_{eq}) \quad (2.67)$$

où  $g_{eq}$  est la configuration d'équilibre de la tête associée à une certaine pose qui sera détaillé dans le chapitre suivant ;  $\Delta\Psi \in \mathbb{R}^6$  est le vecteur des coordonnées de déplacement pour un élément de l'algèbre de Lie  $\Delta\hat{\Psi} \in se(3)$  (cf l'Eq. (2.23)).

Nous avons reporté sur la Fig. 2.15 une simulation où le robot est figé sur une forme en cosinus (voir par exemple [36]). Nous observons deux échelles de temps de variation d'énergie. L'échelle de temps la plus rapide est due aux oscillations physiques du robot autour de la configuration d'équilibre avec une valeur typique d'environ 0.4s. Nous notons que la fréquence de la variation de l'énergie est le double de celle du mouvement. La plus lente est la décroissance d'énergie causée par l'imprécision intrinsèque du schéma telle que le système perd 1% de son énergie initiale après 10s, soit typiquement 15 oscillations autour d'un équilibre. Nous considérons que c'est un bon compromis entre la vitesse de simulation et la conservation de l'énergie.

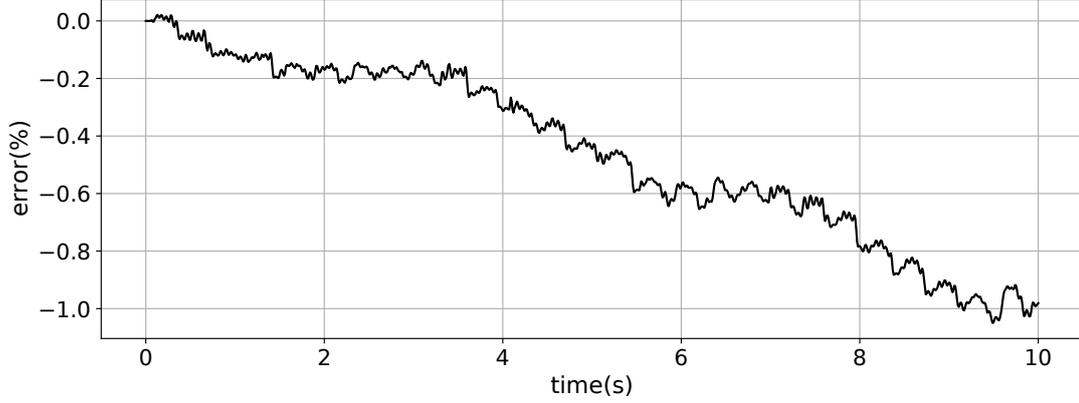


FIGURE 2.15 – Évolution de la perte d'énergie relative en fonction du temps lors des oscillations du robot autour d'un équilibre dans une forme de corps fixé

### 2.10.3 Test d'une flexion latérale

Dans le dernier test nous présentons une simulation du mouvement de la tête avec une flexion latérale anguilliforme. La consigne des articulations de flexion est définie par :

$$\begin{aligned} q_j &= f_j(t)y(t) \text{ pour } j = [0, 3, \dots, 7] \\ \text{avec } y(t) &= Qe^{\alpha s_j} \cdot \sin \left[ 2\pi \left( \frac{ns_j}{L} - F \cdot t \right) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

avec  $n = 1.5$  la fréquence spatiale relative,  $F$  la fréquence temporelle,  $L$  la longueur du robot et  $Q$  l'amplitude de flexion. La fonction  $f_j(t)$  est une fonction polynomiale lisse, définie par :

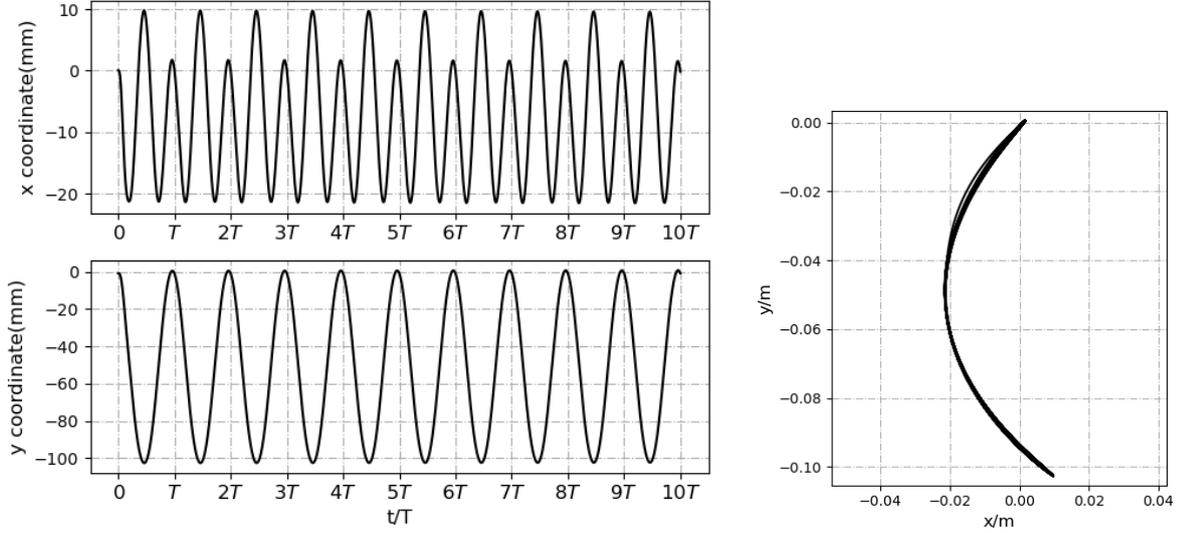
$$f_j(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^5 a_{j,k} t^k & t \leq t_f \\ 1 & t > t_f \end{cases} \quad (2.69)$$

où les coefficients  $a_k$  satisfont les conditions suivantes telles que les vitesses et les accélérations initiales soient nulles :

$$\begin{aligned} f_j(0) &= 1, & \dot{q}_j(0) &= 0 & \ddot{q}_j(0) &= 0 \\ f_j(t_f) &= 1 & \dot{q}_j(t_f) &= \dot{y}(t_f) & \ddot{q}_j(t_f) &= \ddot{y}(t_f) \end{aligned}$$

avec  $t_f$  fixé à  $T/2$  dans notre cas.

La fonction (2.68) et ses dérivées première et seconde sont les entrées du modèle dynamique inverse qui tient compte des effets de gravité et inertiel. Les autres degrés de liberté additionnels (des coques et du cou) sont maintenus à zéro. A chaque pas de temps, le vecteur de position  $\mathbf{p}_0$  dans la matrice de pose  $g_0(t)$  est enregistré. La matrice



(a) Les évolutions des coordonnées de la tête sur les axes  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{F}_G$  pendant 10 périodes (b) La trajectoire de la tête dans le plan 2D ( $\mathbf{O}_G, x, y$ )

FIGURE 2.16 – Le mouvement 2D de la tête dans le plan de surface ( $\mathbf{O}_G, x, y$ )

de rotation  $R_0$  est convertie en angles d'Euler  $\theta_x$  (roulis),  $\theta_y$  (tangage) et  $\theta_z$  (lacet) par rapport aux axes du repère galiléen  $\mathcal{F}_G$ . La relation entre  $R_0$  et les angles d'Euler est donnée par :

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) & \sin(\theta_x) \sin(\theta_y) \cos(\theta_z) - \cos(\theta_x) \sin(\theta_z) & \cos(\theta_x) \sin(\theta_y) \cos(\theta_z) + \sin(\theta_x) \sin(\theta_z) \\ \cos(\theta_y) \sin(\theta_z) & \sin(\theta_x) \sin(\theta_y) \sin(\theta_z) + \cos(\theta_x) \cos(\theta_z) & \cos(\theta_x) \sin(\theta_y) \cos(\theta_z) - \sin(\theta_x) \cos(\theta_z) \\ -\sin(\theta_y) & \sin(\theta_x) \cos(\theta_y) & \cos(\theta_x) \cos(\theta_y) \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Ici, nous proposons un exemple de simulation pendant 10 fois la période  $T$ , avec la fréquence  $F = 0.2\text{Hz}$ , l'amplitude  $Q = 0.24\text{rad}$ . Le mouvement de la tête dans le plan 2D de la surface est décrit sur la Fig. 2.16. On constate qu'en absence d'efforts hydrodynamiques, le corps n'est pas propulsé et la tête effectue un mouvement asymétrique et périodique entraîné par les efforts dûs au mouvement interne ( $\boldsymbol{\beta}$  et  $M_q \ddot{\mathbf{q}}$  dans l'Eq. (2.47)).

Ensuite les mouvements perpendiculaires au plan 2D de surface (pilonnement, roulis et tangage) sont illustrés sur la Fig. 2.17. Nous avons observé que même à une fréquence basse de  $0.5\text{Hz}$ , ces mouvements perturbatifs existent toujours et présentent un comportement périodique, dans lequel le roulis a la plus grande amplitude. Leur évolution en fonction du temps présente un couplage de différents modes. Au fil du temps, un bruit à haute fréquence apparaît, ce qui est considéré comme une erreur numérique.

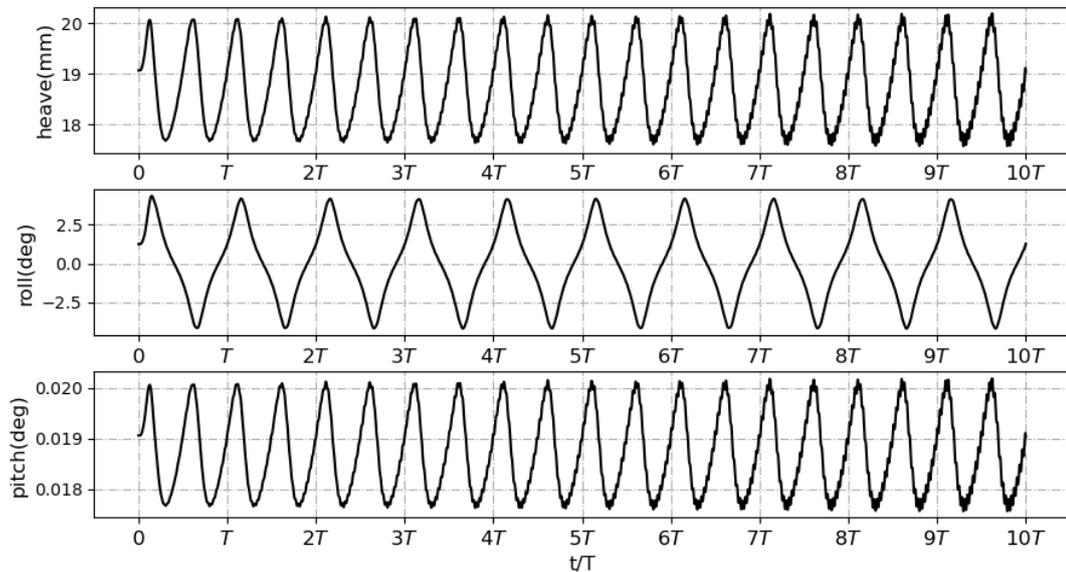


FIGURE 2.17 – Évolutions de pilonnement, de roulis et de tangage de la tête par rapport de la surface pendant 10 périodes

De plus, la période du roulis est presque le double de la période du tangage et du pilonnement, ce qui est lié à l'asymétrie gauche-droite du roulis le long de l'axe au milieu du robot. Dans les chapitres suivants, nous étudierons les processus physiques de ces mouvements et les stratégies pour les atténuer.

## 2.11 Bilan

Dans ce chapitre nous avons présenté une vue globale sur la modélisation du nouveau robot NATRIX. Le mécanisme du module ARIM a été introduit. Il permet de modifier localement la flottabilité pour atteindre la stabilité globale du robot. Les efforts hydrostatiques sont calculés par une approche géométrique exacte basé sur le modèle géométrique du robot. Ce calcul est intégré dans le modèle dynamique, rendant le modèle plus proche des robots nageurs en surface que les études des robots nageurs précédents.

Puis un modèle dynamique inverse du robot serpentiniforme avec une nouvelle structure arborescente a été présenté. À cause de l'ajout des coques extérieures sur les modules du corps, les transferts des quantités, tel que les vitesses, les accélérations et les efforts, sont modifiés dans les récurrences de N-E par rapport à la structure sérielle usuelle de ces robots. Nous avons donc proposé un algorithme Newton-Euler modifié qui permet d'obtenir un modèle dynamique 3D facilement utilisable en simulation et en contrôle. Cet

algorithme calcule les accélérations de la tête et les couples des servomoteurs articulaires de notre robot sériel arborescent NATRIX.

Un simulateur numérique de ce modèle dynamique a été programmé, qui permet de simuler le mouvement 3D de la tête sous l'effet d'un mouvement interne. Ce simulateur a été vérifié correct par les tests des conservations de quantité de mouvement et d'énergie. Ce travail est la préfiguration de l'analyse de stabilité 3D du robot et la conception des lois de commande pour stabiliser la tête. Ces dernier points seront être présentés dans la suite.

# STABILITÉ POSTURALE : MODÈLE PRÉDICTIF STATIQUE

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons la stabilité statique du robot NATRIX et négligerons donc les effets inertiels et dynamique. Comme introduit dans la section 1.3.1, nous considérons uniquement les effets de gravité et de flottabilité. Contrairement aux navires monocoques, la stabilité statique d'un robot serpentiforme multi-corps est affectée par ses degrés de liberté internes, c'est-à-dire, la forme du corps, qui peuvent modifier la position du centre de masse et de l'immersion du robot. Le robot et le serpent, contrairement aux navires, peuvent ainsi changer la configuration de la tête à l'équilibre afin de suivre du regard une cible ou bien optimiser leur stabilité en optant pour des formes de corps avantageuses.

Aussi, l'objectif final de ce chapitre est de produire un algorithme en boucle ouverte ou *prédictif* qui nous permet d'anticiper une forme de corps associée à une pose d'équilibre donnée.

La prise en compte des ces mouvements internes du robot dans la stabilité statique fait émerger deux types de problèmes : des problèmes directs et des problèmes inverses bien ou mal posé. En effet, la configuration de la tête est caractérisée par six degrés de liberté et dans le cas de la stabilité, seuls trois de ces degrés sont pertinents : les angles de roulis et de tangage et l'assiette. Or le corps est paramétré par 14 degrés de liberté internes. L'hyper-redondance (plus de degrés de liberté interne qu'externe) implique donc une surjectivité et donc la non-unicité des solutions.

Le problème direct répond à la question suivante : quelle est la configuration d'équilibre statique de la tête  $g_0$  pour une forme du corps  $\mathbf{q}$  donnée? Sachant que les configurations d'équilibre statique sont des minimums locaux de l'énergie potentielle du système, ce problème a un nombre fini de solutions et est donc bien posé car il existe une solution par

bassin d'attraction. Ce problème consiste à trouver le minimum d'une fonction scalaire dépendant de la pose  $g_0$ . Nous proposerons un algorithme d'optimisation directement sur le groupe grâce à l'application exponentielle précédemment introduite.

Le problème inverse se divise en deux possibilités. Le premier : Quelle variation de forme de corps  $\Delta \mathbf{q}$  imposer pour changer l'orientation et l'élévation de la tête ? Le second : Comment faire varier la forme de corps  $\mathbf{q}$  tout en gardant la même configuration d'équilibre de la tête  $g_0$  à l'équilibre ? On montrera que le premier problème est bien posé alors que le second ne l'est pas et n'admet pas de solution unique. Pour le résoudre, nous proposerons une méthode itérative qui consiste à s'approcher de la forme de corps désirée à partir d'une condition initiale connue  $(g_0, \mathbf{q})$ . Le calcul itératif consistera à trouver à chaque pas une nouvelle solution  $(g_0, \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})$  (voir la Fig. 3.1) pour converger vers une forme de corps  $\mathbf{q}_d$  désirée.

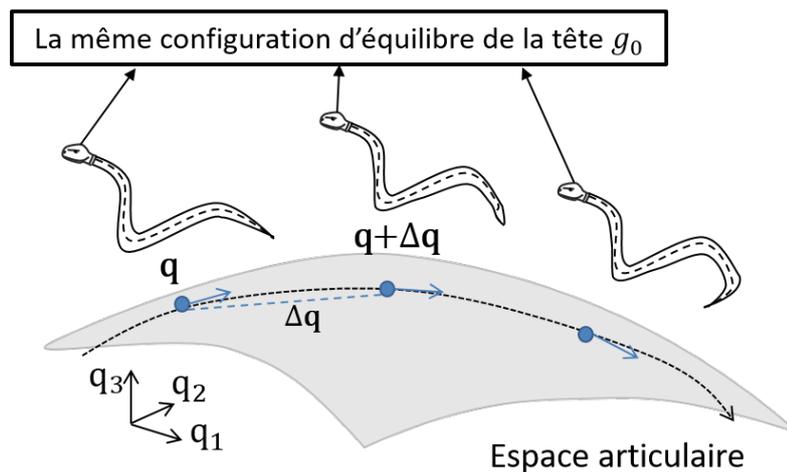


FIGURE 3.1 – Illustration schématique du problème inverse. L'ensemble des formes de corps  $\mathbf{q}$  associées à la même configuration  $g_0$  peut être représenté sous la forme d'une surface dans l'espace des formes de corps (du moins localement). Notre objectif est de trouver une trajectoire continue pour s'approcher de forme de corps désirée.

Le contenu de ce chapitre est organisé comme suit : Nous allons présenter les hypothèses et les notions fondamentales du point de vue de l'espace de configuration dans la section 3.2. Ensuite dans la section 3.3, nous proposerons deux méthodes d'optimisation pour résoudre le problème direct. De plus, autour de l'équilibre, nous définirons une matrice de raideur pour identifier et quantifier la stabilité statique de certaines poses. Dans la section 3.3, nous allons traiter le problème inverse. Une loi de contrôle en boucle ouverte va être introduite, générant un mouvement prédictif quasi-statique. De plus, cette

loi de contrôle a été modifiée pour réaliser une optimisation de la stabilité statique. A la fin, dans la section 3.5, nous vérifierons la validité des lois de contrôle proposées avec une locomotion anguilliforme. Une partie des résultats de ce chapitre a été publié dans la conférence IEEE, International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) [18].

## 3.2 L'espace des configurations : réduction et segmentation

Dans cette section, nous présentons certains concepts clés utilisés pour le traitement de la stabilité statique du robot. Plus précisément, nous proposons de réduire ou segmenter notre espace des configurations défini par  $SE(3) \times \mathcal{S}$ .

### 3.2.1 Réduction de l'espace de travail

Comme expliqué dans la section 2.7, les torseurs des forces de gravité et de flottabilité sont invariants par translation dans le plan de la surface et par rotation selon la direction verticale. Ces transformations relatives sur le plan sont donc caractérisées par deux translations et une rotation, c'est à dire à des transformation  $g_{plan}$  qui forme un sous-groupe de  $SE(3)$  isomorphe au groupe  $SE(2)$ . Dans ce cas, le système statique est donc inchangé si les configurations de la tête sont liées par une transformation rigide sur la surface de l'eau appartenant au groupe  $SE(2)$ , c'est à dire que le système est invariant par changement de variable  $g_0 \mapsto g_{plan}g_0$ .

Par conséquent, l'espace de travail réduit n'est plus  $SE(3)$  mais correspond au quotient  $G = SE(3)/SE(2)$ , qui n'a plus la structure de groupe. La configuration de la tête pertinente pour la stabilité ne dépend plus que de trois degrés liberté, et le nouvel espace de travail prend la forme  $E_1 \times S^2$ . L'espace euclidien  $E_1$  représente le déplacement vertical net (pilonnement  $t_z$ ), tandis que  $S^2$  représente les deux rotations le long du plan tangent à la surface de l'eau (roulis  $\theta_x$  et tangage  $\theta_y$ ) (cf. Fig. 3.2). Ces variations doivent être exprimées dans le repère  $\mathcal{F}_0$  attaché à la surface.

Afin de paramétrer cet espace de travail réduit, nous allons utiliser l'application exponentielle définie dans la précédente section. Ainsi, on peut passer d'une configuration  $g_0$  à  $g'_0$  en modifiant l'angle de roulis et tangage ainsi que le pilonnement par la relation suivante

$$g'_0 = \exp(\Delta\hat{\Psi}) g_0 \quad (3.1)$$

avec  $\Delta\hat{\psi} \in \text{se}(3)$ , tel que le torseur associé est défini par

$$\Delta\Psi = \mathcal{P} \begin{pmatrix} t_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

et  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  la matrice de projection donnée par

$$\mathcal{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Le vecteur générateur de  $\Delta\Psi$  sera défini par  $\Delta\psi^T = (t_z, \theta_x, \theta_y) \in \mathbb{R}^3$ . On notera dans l'Eq. (3.1) la multiplication à droite qui est nécessaire lorsque le mouvement est exprimé dans le repère  $\mathcal{F}_G$  de référence. Par commodité, on prendra  $G$  au point d'abscisse  $x = y = 0$  et toutes les autres configurations appartenant à  $G$  seront déduites de la transformation (3.1).

On peut aussi définir à partir du voisinage de  $g_0$  une variation locale de  $g_0$  nommée  $\Delta g_0$ . En effet, en supposant que  $g'_0$  tend vers  $g_0$  pour  $|\Delta\Psi| \rightarrow 0$ , on obtient

$$\Delta g_0 = \Delta\hat{\Psi} g_0 \quad (3.4)$$

Cette équation est en quelque sorte l'analogie de la dérivée temporelle  $\dot{g}_0$  définie dans la section précédente dédiée à la cinématique. Ici  $\Delta g_0$  est donc une variation locale appartenant au plan tangent  $T_{g_0}\text{SE}(3)$  et est paramétrée par la direction réduite  $\Delta\psi$ .

On obtient le même résultat en effectuant le changement de variable  $\Delta\hat{\Psi} \mapsto \epsilon\Delta\hat{\Psi}$  dans l'Eq 3.1, en dérivant par rapport à  $\epsilon$  et finalement en posant  $\epsilon = 0$ . L'équation ci-dessus est donc bien une dérivée directionnelle qui nous sera utile pour calculer le gradient de l'énergie potentielle dans notre espace de travail réduit sur le groupe.

On peut aussi poursuivre cette réduction en l'appliquant à l'effort hydrostatique net dont la forme réduite  $\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)} = (F_z, \Gamma_x, \Gamma_y)^T \in \mathbb{R}^3$  est obtenue par la projection

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)} = \mathcal{P}^T \mathbf{W}_{stat}^{(G)}. \quad (3.5)$$

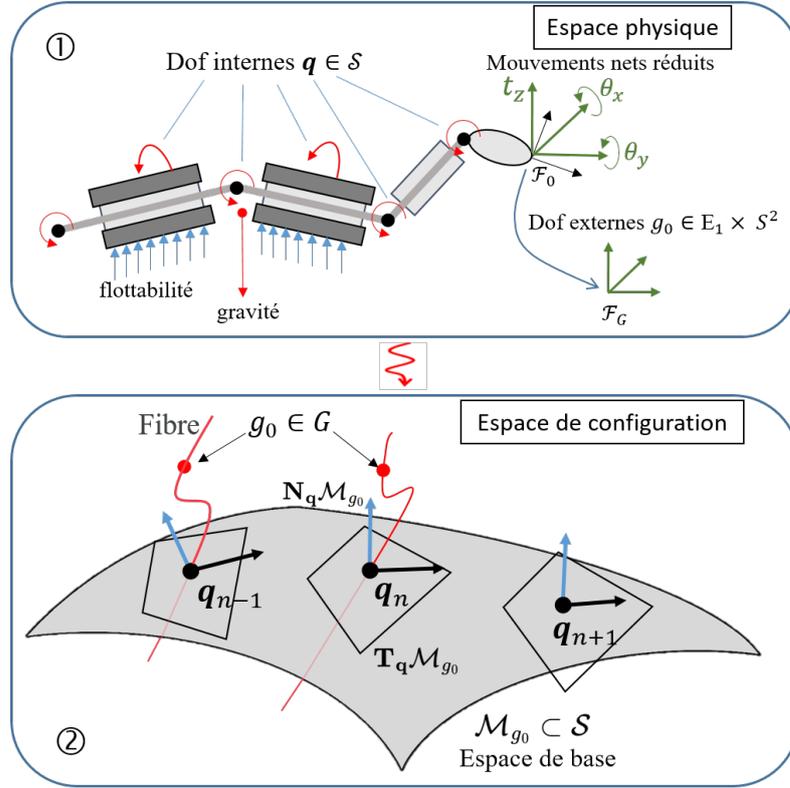


FIGURE 3.2 – En haut : Espace physique du robot Natrix avec 3 mouvements nets qui varient l'effort hydrostatique ; en bas : Représentation géométrique du processus de stabilisation de la tête dans l'espace fibré principal  $SE(3) \times \mathcal{S}$ . Une séquence d'états d'équilibre avec différentes formes de corps  $\mathbf{q}_n$  peut être représentée par n'importe quelle trajectoire sur la variété  $\mathcal{M}_{g_0}$ , sous-ensemble de l'état de base  $\mathcal{S}$ , tandis que la configuration de la tête  $g_0$  reste inchangée dans  $G = SE(3)/SE(2)$

### 3.2.2 Décomposition de l'espace articulaire

Du fait de l'hyper-redondance du corps, plusieurs formes de corps peuvent être associées à une même position et orientation de la tête par rapport à la surface (à une transformation plane près). Nous cherchons donc à caractériser cette particularité propre aux systèmes multi-corps déformables. Mathématiquement, on cherche donc un sous-ensemble de formes de corps  $\mathbf{q}$  pour  $g_0 \in G$  fixe satisfaisant

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}(g_0, \mathbf{q}) = \mathbf{0}_3. \quad (3.6)$$

Cette équation impose donc trois contraintes sur  $\mathbf{q}$ . Comme la dimension de l'espace articulaire est bien plus grande que 3, on pré-suppone l'existence d'un ensemble de formes

de corps satisfaisant la condition ci-dessus, ensemble qu'on notera  $\mathcal{M}_{g_0}$ . De plus, on supposera aussi que cet ensemble a la même structure qu'une variété différentielle, du moins localement, et qu'elle est plongée dans l'espace  $\mathcal{S}$  comme illustré sur la Fig. 3.1.

Avec un tel objet mathématique, on peut donc concevoir deux types de variation de forme de corps  $\Delta\mathbf{q}$  à partir d'une configuration totale  $(g_0, \mathbf{q})$ . Tout d'abord, celles qui préservent la configuration de la tête  $g_0$  en passant de  $\mathbf{q} \in \mathcal{M}_{g_0}$  à  $(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) \in \mathcal{M}_{g_0}$ . Une telle variation est illustrée sur la Fig. 3.2 où l'on observe qu'une composante de cette variation  $\Delta\mathbf{q}$  se fait tangentiellement à  $\mathcal{M}_{g_0}$ .

Inversement, la nouvelle forme de corps correspond à une autre configuration de la tête  $g'_0$  et on a alors sauté sur un autre sous-ensemble  $\mathcal{M}_{g'_0}$ . L'espace des formes de corps peut donc être "décomposé" comme un mille-feuilleteage de ces sous-ensembles. Il faudra faire néanmoins attention car à une forme de corps peut correspondre plusieurs configurations de la tête  $g_0$  à l'équilibre stable. Aussi, nous ne considérons que la configuration de la tête  $g'_0$  telle que  $g_0$  est dans le bassin d'attraction de  $g'_0$ .

## 3.3 Calcul les configurations d'équilibre statique

### 3.3.1 Principe

Le but de cette section est de proposer un algorithme d'optimisation recherchant la configuration d'équilibre stable  $g_0$  pour une forme du corps  $\mathbf{q}$  donnée (le corps est alors gelé). L'équilibre statique est atteint lorsque le torseur de gravité contrecarre celui de flottabilité pour satisfaire la condition d'équilibre donnée par l'Eq. (3.6).

Tout d'abord, nous utiliserons l'Eq. (3.1) qui nous permet de passer d'une configuration  $(g_0)_n$  à  $(g_0)_{n+1}$  en la paramétrant par un élément  $\Delta\psi_n$ . Aussi, la configuration est à l'équilibre lorsqu'après une succession  $(\Delta\psi_1, \dots, \Delta\psi_N)$  avec  $N$  le nombre d'itérations, on obtient

$$\left| \widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}((g_0)_{N+1}, q) \right| < \text{res} \quad (3.7)$$

avec "res" un résidu à définir. Cette stratégie préserve non-seulement la structure du groupe SE(3) mais nous maintient dans le sous-ensemble  $G = \text{SE}(3)/\text{SE}(2)$ .

Comme le torseur hydrostatique  $\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}$  [95] dérive d'une énergie potentielle nommée  $E_p$ , nous cherchons le minimum de la fonction localement convexe. Deux types d'algorithme seront présentés

- la descente de gradient en utilisant directement le torseur  $\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}$  ;
- l'algorithme de Newton-Raphson en obtenant la Hessienne, qui en pratique sera estimée en calculant la matrice jacobienne du torseur.

Dans ces deux cas, on cherchera à exprimer  $\Delta\psi_n$  pour que l'énergie  $U$  diminue vers son minimum. La première stratégie est connue pour être robuste et converger vers les équilibres stables. La seconde est en comparaison bien plus rapide mais nécessite d'être dans le voisinage de la solution pour éviter les instabilités.

Dans la suite, nous simplifierons les notations en remplaçant  $\widetilde{\mathbf{W}}_{stat}^{(G)}$  par  $\widetilde{\mathbf{W}}$ .

### 3.3.2 Matrice de raideur hydrostatique

Nous proposons ici de calculer la matrice jacobienne associée aux efforts réduits  $\widetilde{\mathbf{W}}$  en appliquant une variation de la configuration de la tête. Cette jacobienne a une interprétation physique particulière car elle caractérise la courbure locale de la sous-variété d'équilibre (soit sa hessienne, au signe près). Aussi, lorsque le système est à l'équilibre stable, ces courbures sont toutes positives et quantifient la force de rappel du puit de potentiel. On définit ainsi la *matrice de raideur hydrostatique*, comme l'opposée de la matrice jacobienne, qui est définie positive à l'équilibre stable [10].

Tout d'abord, la matrice jacobienne se définit par rapport à la différentielle de  $\widetilde{\mathbf{W}}$  lorsque la forme du corps est maintenue fixée, donné par :

$$\Delta\widetilde{\mathbf{W}} = \left( D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}} \right) \Delta\psi \quad (3.8)$$

où  $(D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}}) = (\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . On a ici introduit les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  comme la variation de  $\widetilde{\mathbf{W}}$  relativement à la  $i$ -ième composante de  $\Delta\psi$ .

La différentielle  $\Delta\widetilde{\mathbf{W}}$  est définie par rapport à la dérivée directionnelle suivante

$$\Delta\widetilde{\mathbf{W}} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \widetilde{\mathbf{W}} \left( e^{\epsilon \Delta\psi} g_0 \right) \right|_{\epsilon=0} \quad (3.9)$$

En pratique, elle est reconstruite par les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  tels que

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = \frac{\widetilde{\mathbf{W}}(t_z, 0, 0) - \widetilde{\Delta}\widetilde{\mathbf{W}}(-t_z, 0, 0)}{2t_z} \\ \mathbf{w}_2 = \frac{\widetilde{\mathbf{W}}(0, \Delta\theta_x, 0) - \widetilde{\mathbf{W}}(0, -\Delta\theta_x, 0)}{2\Delta\theta_x} \\ \mathbf{w}_3 = \frac{\widetilde{\mathbf{W}}(0, 0, \Delta\theta_y) - \widetilde{\mathbf{W}}(0, 0, -\Delta\theta_y)}{2\Delta\theta_y} \end{cases} \quad (3.10)$$

avec une translation faible  $\Delta t_z = 10^{-5}\text{m}$  et deux rotations faibles  $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y = 10^{-5}\text{rad}$ .

La matrice des raideurs hydrostatiques  $\mathbf{K}_0$  est définie par

$$\mathbf{K}_0 = -\left(\mathbf{D}_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}}\right). \quad (3.11)$$

Contrairement à la jacobienne, la matrice  $\mathbf{K}_0$  n'a de sens que lorsque le système est à l'équilibre. La stabilité locale d'une configuration est définie par les valeurs propres  $(\lambda_j)_{(j=1,2,3)}$  de  $(\mathbf{D}_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}})$ . Si toutes les valeurs propres  $(\lambda_j)_{(j=1,2,3)}$  sont négatives, correspondant à des raideurs hydrostatique toutes positives, alors le robot est en équilibre stable. Les modes propres associées correspondent à des modes couplant roulis, tangage et pilonnement.

Nous explorerons les propriétés de cette matrice dans la section 3.3.5. Dans la prochaine section, cette matrice jacobienne est utilisée dans un problème optimisation qui nous permettra de trouver une configuration d'équilibre.

Cette matrice nous permet donc de quantifier la stabilité et d'utiliser un algorithme de Newton-Raphson.

### 3.3.3 Algorithme d'optimisation

Ayant introduit les outils, nous présentons ici l'algorithme global pour trouver la configuration d'équilibre statique du robot pour une forme de corps donnée. L'idée principale est de minimiser l'énergie potentielle  $E_p$  du robot en variant la configuration de la tête  $g_0$  sur le groupe  $\text{SE}(3)$ . Nous cherchons ainsi les racine de  $\widetilde{\mathbf{W}}_n$  grâce à une suite de configurations  $\{(g_0)_n\}$ .

Dans cet algorithme le choix du repère pour effectuer la méthode d'optimisation est important, puisque le torseur hydrostatique, ou plus précisément son couple, dépend de la position du repère mobile où la résultante est estimée. Dans l'étude [95], l'auteur a sélectionné le repère du centre de masse pour calculer l'effort hydrostatique et réactualiser

la localisation du corps. Cependant dans le cadre de notre étude, les algorithmes montrent une meilleure convergence dans le repère de la tête  $\mathcal{F}_0$ .

Nous définissons une formule de mise à jour pour passer d'une configuration de la tête  $(g_0)_n$  à  $(g_0)_{n+1}$ , telle que la diminution d'énergie satisfasse la règle d'Armijo [95]. Nous utilisons une multiplication à gauche pour la formule, définie par :

$$(g_0)_{n+1} = A_n(g_0)_n \quad (3.12)$$

avec la transformation relative  $A_n \in \text{SE}(3)$  donnée par :

$$A_n = \exp(t_n \hat{\xi}) \quad (3.13)$$

où l'élément de l'algèbre de Lie  $\Delta\psi = t_n \hat{\xi}$  est définie par une direction unitaire  $\xi_n \in \mathbb{R}^6$  et un pas  $t_n \in \mathbb{R}^+$ .

Les deux méthodes utilisées diffèrent par la détermination de la direction normalisée. Pour la méthode de descente de gradient, la direction est donnée pour une configuration  $(g_0)_n$  :

$$\xi_n = \frac{B\widetilde{\mathbf{W}}_n}{|B\widetilde{\mathbf{W}}_n|} \quad (3.14)$$

avec  $B = \text{diag}(0.1, 1, 1)$  une matrice de pondération diagonale et positive choisie pour équilibrer le taux de convergence entre les degrés de libertés en translation et rotations. Quant à la méthode de Newton-Raphson, la direction est donnée par :

$$\xi_n = -\frac{(\text{D}_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}})_n^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_n}{|(\text{D}_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}})_n^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_n|} \quad (3.15)$$

dans laquelle la jacobienne de le torseur net  $\text{D}_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la sous-matrice non-nulle de  $\text{D}_{g_0} \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ .

La condition de diminution de l'énergie potentielle telle que  $E_{p,n+1} < E_{p,n}$  détermine l'amplitude du pas  $t_n$ . Pour une réduction suffisante à chaque pas, nous imposons la condition d'Armijo [107] qui prend la forme suivante

$$E_{p,n+1} < E_{p,n} - c_1 t_n \xi_n^T \widetilde{\mathbf{W}}_n \quad (3.16)$$

La quantité  $(t_n \xi_n^T \widetilde{\mathbf{W}}_n)$  correspond à l'estimation linéaire du travail effectuée par l'algorithme et est toujours positive pour  $t_n > 0$ , assurant une convergence monotone

vers le minimum. Par conséquent, cette condition implique que la réduction d'énergie  $|E_{p,n+1} - E_{p,n}|$  est supérieur à un pourcentage  $c_1 \in [0, 1]$  d'un travail extrait lors de l'itération.

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la taille du pas  $t_n$  est réduite par un facteur de contraction  $c_f \in [0, 1]$  tel que  $t_n \mapsto c_f t_n$ . Nous fixons ici  $c_1 = 10^{-4}$  [108] et  $c_f = 0.5$ . Le pseudo-code est résumé dans l'Algorithme 1.

---

**Algorithm 1** Algorithme pour trouver le minimum de l'énergie potentielle

---

```

while  $|\widetilde{\mathbf{W}}_n| < 10^{-6}$  do
    Initialisation : if  $n \neq 0$  :  $t_n = t_{n-1}$ , else  $t_0 = 0.1$ 
    Calculer l'effort hydrostatique  $\widetilde{\mathbf{W}}_n$  dans  $\mathcal{F}_G$ 
    Calculer la matrice de raideur  $(D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}})_n$ 
    Calculer la direction de transforme  $\xi_n$  :
    if Méthode de descente de gradient
         $\xi_n \leftarrow B \widetilde{\mathbf{W}}_n / |B \widetilde{\mathbf{W}}_n|$ 
    elseif : Méthode de Newton-Raphson
         $\xi_n \leftarrow -(D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}})_n^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_n / |(D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}})_n^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_n|$ 
    endif
    Actualiser la configuration :  $(g_0)_{n+1} \leftarrow \exp(t_n \hat{\xi}_n)(g_0)_n$ 
    Calculer l'énergie  $E_{p,n+1}$ 
    while  $E_{p,n+1} \geq E_{p,n} - c_f t_n \xi_n^T \widetilde{\mathbf{W}}_n$  do
         $t_n = c_f \times t_n$ 
        Recalculer la configuration  $(g_0)_{n+1} \leftarrow A_n(g_0)_n$ 
        Recalculer l'énergie  $E_{p,n+1}$ 
        if  $t_n < 10^{-10}$ 
            break
        end while
    Re-initialisation de l'énergie  $E_{p,n+1} \leftarrow E_{p,n}$ 
end while
    
```

---

### 3.3.4 Performances des algorithmes

Nous voulons vérifier la validité des deux méthodes d'optimisation proposées dans la section précédente pour une forme de corps "en cosinus" reporté dans le tableau 3.1. Cette forme de corps s'inspire d'une pose du serpent avec la tête relevée (voir Fig. 3.3). Les coordonnées articulaires associées sont introduites dans la section 3.3.5.

L'évolution du pas  $t_n$  et de la norme de  $\mathbf{W}_n$  en fonction du nombre d'itérations est représentée sur les figures 3.4.(a) et (b). Nous observons que pour la méthode de Newton-



FIGURE 3.3 – Pose en sinus avec la tête relevée extrait de [39]

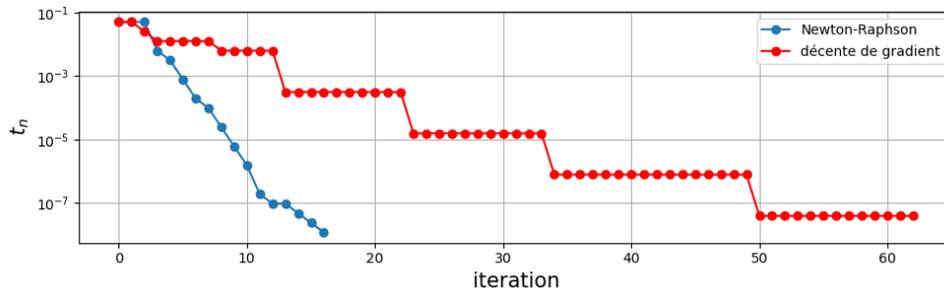
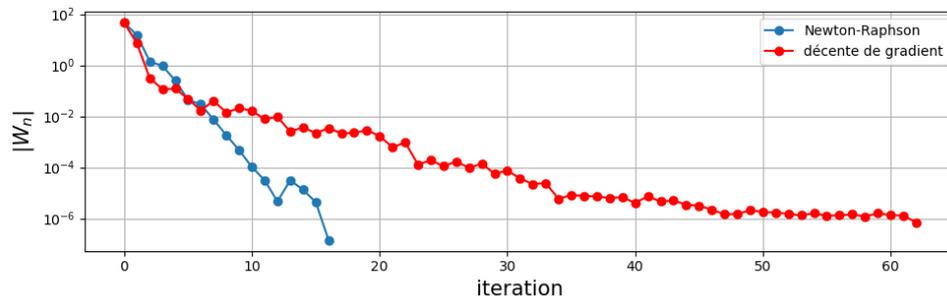
(a) Evolution du pas  $t_n$  en fonction d'itération(b) Evolution du norme de l'effort  $\mathbf{W}$  en fonction d'itération

FIGURE 3.4 – Comparaison des méthodes de descente de gradient (courbes rouges) et de Newton-Raphson(courbes bleues)

Raphson, les grandeurs  $t_n$  et  $|\mathbf{W}|$  diminuent exponentiellement avec un taux presque constant. En revanche, l'évolution de  $t_n$  pour la méthode du gradient présente des plateaux tandis que la norme  $|\mathbf{W}|$  diminue de manière plus monotone mais la convergence est lente (voir Fig. 3.4.(b)).

En termes de temps de calcul, les 16 itérations de la méthode de Newton ont pris 8.3s comparé aux 27.1s pour 62 itérations pour la méthode de gradient. Chaque itération

de la méthode de Newton prend plus de temps à cause des calculs supplémentaires de matrice jacobienne  $D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}}$ . Néanmoins, nous l'avons sélectionné comme algorithme pour sa convergence rapide. Une solution plus robuste consiste à utiliser la méthode de gradient au début pour s'approcher de la solution puis de passer à la méthode de Newton pour accélérer la convergence [95].

### 3.3.5 Impact du niveau d'immersion et de la forme de corps sur la stabilité

Cet outil d'optimisation permet d'étudier l'influence de la masse volumique du robot, qui impacte directement le niveau d'immersion, et la forme de corps sur la stabilité de NATRIX. Nous pouvons alors effectuer une étude prospective sur les limites de stabilité du robot et sur les formes de corps avantageuses pour maximiser la stabilité. Nous avons reporté dans le tableau 3.1 les quatres formes de corps qui seront étudiées dans cette section.

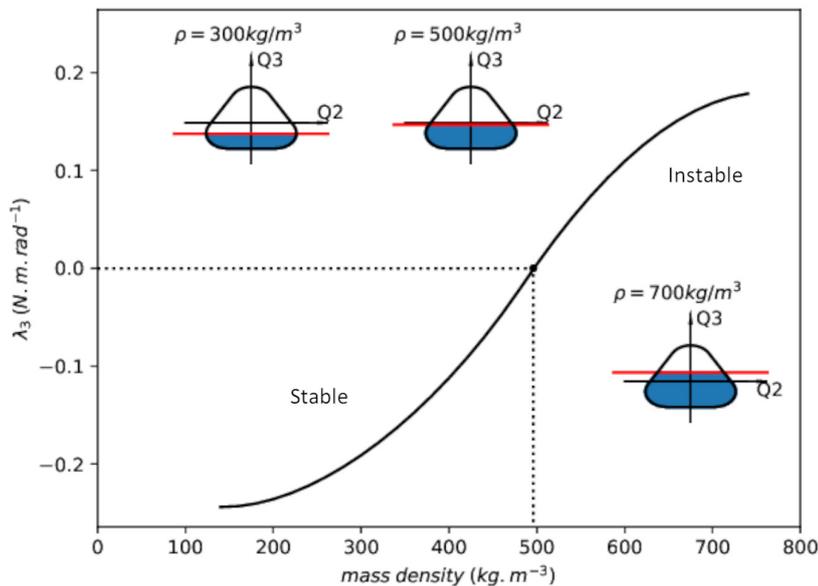


FIGURE 3.5 – Valeur propre de la matrice de raideur hydrostatique associée au roulis en fonction de la masse volumique  $\rho$  pour un corps droit  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$

### Impact de la densité volumique

Nous proposons d'étudier l'impact de la densité volumique du robot pour une forme de corps droite du robot ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ). Nous avons ainsi calculé pour chaque densité moyenne du robot sa configuration à l'équilibre et les valeurs propres de la matrice jacobienne  $D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}}$  qu'on nommera  $\lambda_i$ . Du fait des symétries de la forme de corps droite, le roulis est découplé des modes de tangage et pilonnement (voir les vecteurs propres dans le tableau 3.1). Aussi, nous caractériserons la stabilité de ce corps droit à partir de la troisième valeur propre associée au roulis. Si  $\lambda_3$  est négatif, correspondant à une raideur modale positive, le système est stable

Les résultats sont reportés sur la Fig. 3.5. Pour les faibles densités, la valeur propre  $\lambda_3$  est initialement négative, donc stable, et augmente avec la masse volumique, c'est à dire le niveau d'immersion. Elle devient nulle pour  $\rho_c = 497kg/m^3$  correspondant à une stabilité marginale, toute rotation infinitésimale selon l'axe longitudinal renversera le robot. Ce résultat confirme que le robot NATRIX a été conçu pour rester stable avec une faible densité  $\rho = 312kg/m^3$  inférieure à  $\rho_c$ .

### Impact des formes de corps

Afin d'étudier la stabilité en fonction des formes de corps, nous fixerons la densité de notre robot à  $\rho = 312kg/m^3$ . Nous avons reporté des formes de corps en "cosinus" et "sinus" qui sont deux modes dont la courbure est décalée d'une demi-longueur d'onde. La quatrième forme de corps correspond à un arc de courbure quasi constante. Hormis la configuration droite, les formes "cosinus", "sinus" et "arc" ont la tête surélevée par rapport au reste du corps en imposant une consigne de  $q_1 = 27^\circ$  et  $q_2 = -30^\circ$  sur les moteurs d'inclinaison du cou.

Nous nous intéresserons donc aux valeurs propres  $\lambda_i$  ainsi qu'à leurs vecteurs propres associés afin de caractériser la stabilité de ces formes de corps (cf. quatrième et cinquième colonnes de Tab. 3.1). On caractérisera aussi la pose de la tête en calculant son élévation (pilonnement), son roulis et son tangage (composantes du vecteur  $\Delta\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ ) par rapport au repère de référence  $\mathcal{F}_G$  (troisième colonne de Tab. 3.1).

Nous avons ainsi dégagé les propriétés suivantes

- En comparaison de la forme rectiligne, la déformation du corps augmente les raideurs hydrostatiques tout en couplant les modes de pilonnement (première composante du vecteur propre), de roulis (seconde composante) et de tangage (troisième

TABLE 3.1 – Impact de la géométrie du robot sur sa stabilité (calculs effectués pour une densité  $\rho = 312\text{kg}/\text{m}^3$ ).

Forme de corps	Coordonnées $[q_0, \dots, q_7]$	Variation $\Delta\psi$	Raideurs $(-\lambda_i)$	Vecteurs propres de $D_{g_0} \mathbf{W}$
	$(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	$(2.6\text{cm}, 0^\circ, 0.3^\circ)$	$(1659, 92, 0.14)$	$(0.82, 0, -0.57)$ $(0.57, 0, 0.82)$ $(0, 1, 0)$
	$(0^\circ, 27^\circ, 30^\circ, 15^\circ, 20^\circ, -35^\circ, -35^\circ, 20^\circ)$	$(9.4\text{cm}, 2.8^\circ, 2.4^\circ)$	$(1513, 55, 2.23)$	$(-0.821, -0.05, 0.57)$ $(-0.57, 0.06, -0.818)$ $(-0.01, 0.996, 0.08)$
	$(0^\circ, 27^\circ, -30^\circ, -30^\circ, 40^\circ, 30^\circ, -30^\circ, -40^\circ)$	$(8.8\text{cm}, -3.3^\circ, 0.3^\circ)$	$(1507, 56, 1.62)$	$(-0.83, 0, 0.56)$ $(0.56, -0.12, 0.82)$ $(-0.07, -0.99, -0.1)$
	$(20^\circ, 27^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 40^\circ, 40^\circ, 40^\circ, 40^\circ)$	$(6.6\text{cm}, 0.9^\circ, -0.6^\circ)$	$(1235, 13, 36)$	$(0.92, 0.29, -0.26)$ $(0.36, -0.35, 0.87)$ $(-0.16, 0.89, 0.43)$

- composante). Néanmoins, on identifie toujours un mode dominé par le roulis.
- La valeur propre la plus proche de zéro est toujours celle dont la projection sur le roulis est la plus grande (seconde composante du vecteur propre), excepté la forme en arc. Autrement dit, le roulis reste le mouvement externe le plus dangereux.
  - La forme en arc de courbure constante a la plus grande raideur hydrostatique (un ordre de grandeur plus grand) pour le roulis, au détriment de la raideur associée au tangage. Or les mocassins peuvent aussi s'enrouler à la surface de l'eau avant d'attaquer [39], suggérant ainsi que cette forme de corps offre un avantage en terme de stabilité.
  - On observe que leurs configurations d'équilibre quantifiées par le vecteur  $\Delta\tilde{\psi}$  (cf Tab. 3.1) diffèrent. Ceci implique que si l'on passe d'une forme de corps à une autre, le robot décrira un mouvement externe qui peut être une source d'instabilité.

## 3.4 Mouvement prédictif statique

### 3.4.1 Principe

Nous venons de montrer que le robot peut exploiter différentes formes de corps pour modifier sa stabilité. Or nous avons conclu qu'il n'était pas possible *a priori* de passer d'une forme de corps à une autre sans provoquer un mouvement d'ensemble du robot. Cette conclusion est en quelque sorte en contradiction avec les observations du mocassin d'eau [39] qui suggèrent que le serpent maintient l'orientation de sa tête malgré les déformations du corps. Il est tentant de supposer que le serpent est capable d'anticiper ses formes de corps pour minimiser le mouvement de la tête pour faciliter la régulation de sa stabilité.

L'objectif de cette section est de démontrer qu'il est effectivement possible de maintenir la tête dans une certaine configuration tout en déformant le corps. Ainsi, nous proposons de développer dans cette section un algorithme prédictif qui permettrait de prédire les variations de formes de corps pour minimiser le mouvement externe du robot.

Nous utiliserons la construction géométrique introduite dans la section 3.2.2 qui consiste à décomposer l'espace articulaire en un feuillet d'ensembles  $\mathcal{M}_{g_0}$  qu'on supposera être des variétés différentielles. Pour rappel, un ensemble  $\mathcal{M}_{g_0}$  associé à une configuration  $g_0$  correspond à toutes les formes de corps  $\mathbf{q}$  qui aboutissent à un équilibre stable de configuration  $g_0$ .

Aussi, nous proposons de passer d'une forme de corps initiale  $\mathbf{q}$  à une forme de corps cible  $\mathbf{q}_{goal}$  en restant sur cet ensemble  $\mathcal{M}_{g_0}$ . Comme rien ne nous assure que  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}_{goal}$  sont sur le même ensemble  $\mathcal{M}_{g_0}$ , nous nous approcherons du projeté de  $\mathbf{q}_{goal}$  sur  $\mathcal{M}_{g_0}$ .

Pour connecter deux points d'une variété de grande dimension, il existe plusieurs chemins possibles, mais il en existe un plus direct que les autres : la géodésique. Or une telle construction nécessite de connaître les propriétés intrinsèques de la variété (cartes et métriques), information trop coûteuse dans notre étude. Nous allons donc proposer une construction proche de la géodésique qui reposera plutôt sur les propriétés de l'espace ambiant de la variété : la rétraction.

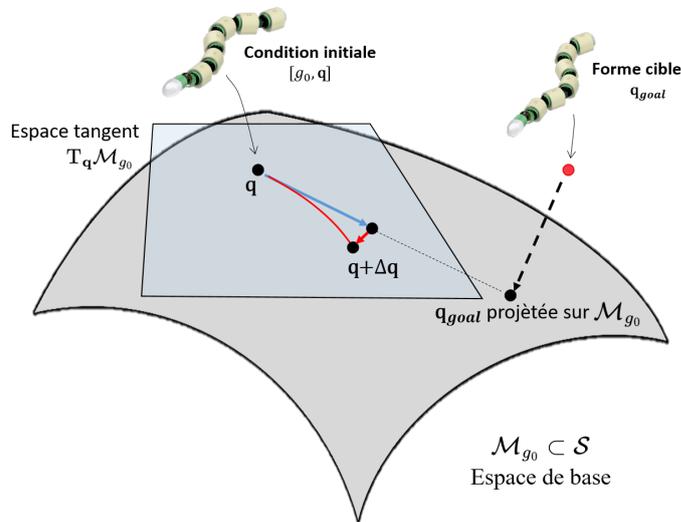


FIGURE 3.6 – Illustration de la variété invariance  $\mathcal{M}_{g_0} \subset \mathcal{S}$  et détermination du déplacement  $\Delta \mathbf{q}$  : les flèches bleue et rouge correspondent respectivement au déplacement sur l'espace tangent  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$  et l'opération rétraction.

### 3.4.2 La méthode des rétractions

#### Principe géométrique

Nous voulons ainsi nous déplacer sur la variété  $\mathcal{M}_{g_0}$  ce qui revient à modifier la forme du corps tout en préservant la configuration de la tête  $g_0 \in G$ . Pour résoudre ce problème, nous introduisons le concept de rétraction, qui est utilisé en géométrie différentielle pour construire un chemin à partir d'éléments de l'espace tangent d'une variété [109].

La façon la plus intuitive de se déplacer sur une variété est de suivre une courbe géodésique sur une variété dotée d'une structure riemannienne [110]. Cependant, trouver

ces courbes géodésiques pour une variété arbitraire peut être coûteux en calcul à cause de son caractère non-linéaire. Ainsi une méthode alternative consiste à construire une approximation de la courbe géodésique, au moins au première ordre  $\mathcal{O}(t)$ . Cette méthode appelée rétraction est une construction géométrique reliant deux points proches de la variété, de sorte qu'elle partage les deux propriétés d'ordre dominant du développement de Taylor d'une courbe géodésique.

Nous définissons d'abord l'application  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  d'un espace tangent  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$  à la variété  $\mathcal{M}_{g_0}$  (avec  $\mathbf{q}, \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathcal{M}_{g_0}$ ). L'application  $\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est une rétraction si et seulement s'il existe une courbe  $\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{q}, t\mathbf{u})$  avec  $t \in \mathbb{R}^+$  satisfaisant les conditions suivantes

$$\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{u}, 0) = \mathbf{q} \text{ et } \gamma'(\mathbf{q}, \mathbf{u}, 0) = \mathbf{u} \quad (3.17)$$

On trouvera dans Absil *et al* [109] une définition plus formelle de la rétraction. Ici, nous

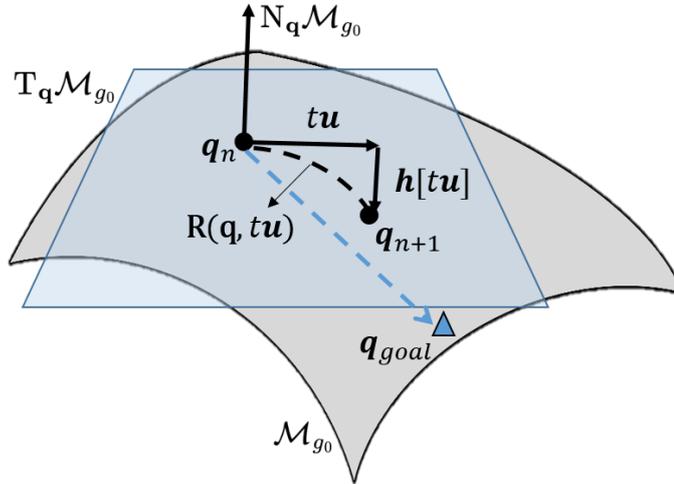


FIGURE 3.7 – Illustration de la rétraction sur la variété  $\mathcal{M}_{g_0}$

utilisons une rétraction de type projection (également appelée rétraction orthographique [109]) illustrée à la Fig. 3.7 qui est définie par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, t\mathbf{u}) = \mathbf{q} + t\mathbf{u} + \mathbf{h}[t\mathbf{u}] \quad (3.18)$$

avec un vecteur de l'espace tangent  $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$  et  $\mathbf{h}$  un rétracteur orthogonal appartenant au complément orthogonal  $N_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$  de  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$  tel que

$$\mathbb{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0} \oplus \mathbb{N}_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0} = \mathbb{R}^N \quad (3.19)$$

où  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ . On peut ainsi construire une séquence de rétractions à partir de l'Eq. (3.18) formant ainsi une courbe sur la variété  $\mathcal{M}_{g_0}$ . Il est à noter que ce calcul ne nécessite pas que la variété soit dotée d'une structure riemannienne, de sorte qu'aucune métrique intrinsèque n'est nécessaire dans notre approche. Le seul calcul requis est un produit scalaire dans l'espace ambiant  $\mathbb{R}^N$ , qui est facile à implémenter.

### Calcul des espaces tangents et normaux

Pour identifier l'espace tangent local et son complémentaire, nous calculons la différentielle  $\Delta\widetilde{\mathbf{W}}$  de  $\widetilde{\mathbf{W}}$  défini par

$$\Delta\widetilde{\mathbf{W}} = (D_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\boldsymbol{\psi} + (D_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\mathbf{q} \quad (3.20)$$

qui est la généralisation de l'Eq. (3.8) sur l'espace des configurations du robot.

En supposant que le système passe d'une configuration  $(g_0, \mathbf{q})$  à  $(g'_0, \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q})$  toutes les deux à l'équilibre, les variations de la forme du corps  $\Delta\mathbf{q}$  et de la configuration de la tête  $\Delta\boldsymbol{\psi}$  doivent satisfaire le système

$$(D_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\boldsymbol{\psi} + (D_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}_3 \quad (3.21)$$

où  $D_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice de raideur hydrostatique introduit dans la section 3.3.2, et  $D_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  est la matrice jacobienne de  $\widetilde{\mathbf{W}}$  par rapport à la déformation du corps  $\mathbf{q}$ . En pratique, cette matrice est calculée par une dérivation numérique dans l'espace articulaire des forme  $\mathcal{S}$ .

La matrice  $(D_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}})$  étant définie négative et donc inversible, on peut mettre le système sous la forme suivante

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = -(D_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}})^{-1}(D_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\mathbf{q}, \quad (3.22)$$

qui définit une application linéaire de l'espace articulaire de  $\Delta\mathbf{q}$  à celui de vecteurs générateurs  $\Delta\boldsymbol{\psi}$  de l'algèbre de lie  $\mathfrak{se}(3)$  (cf section précédente). On obtient ainsi une relation mathématique ressemblant à une *connection* d'un espace fibré principal [90], mais nous ne pousserons pas plus loin l'analogie. On remarquera seulement que les éléments  $\Delta\mathbf{q}$  appartenant au noyau de  $(D_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathbf{W}})$  ne produisent pas de variation de la configuration de la

tête à l'ordre linéaire.

Cette observation va motiver la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice rectangulaire  $D_q \widetilde{\mathbf{W}}$  pour calculer son noyau :

$$D_q \widetilde{\mathbf{W}} = U_{\perp} \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{3 \times (N-3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\perp}^T \\ V_{\parallel}^T \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Le noyau de  $(D_q \widetilde{\mathbf{W}})$  est généré par les vecteurs de base  $\{\mathbf{v}_{\parallel}\}$  compris dans la matrice  $V_{\parallel}$  générant l'espace tangent local  $T_{\mathbf{q}} \mathcal{M}_{g_0}$ . La matrice jacobienne peut donc être réduit à :

$$(D_q \widetilde{\mathbf{W}})_{\perp} = U_{\perp} \Sigma V_{\perp}^T \quad (3.24)$$

avec  $U_{\perp} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matrice unitaire,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matrice diagonale des valeurs singulières non nulles, et  $V_{\perp} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  la matrice des vecteurs orthonormés  $\mathbf{v}_{\perp}$  générant le sous espace vectoriel  $N_{\mathbf{q}} \mathcal{M}_{g_0}$ . Dans notre étude, nous observons que la matrice  $D_q \widetilde{\mathbf{W}}$  est toujours de rang complet ( $\text{rank}(D_q \widetilde{\mathbf{W}}) = 3$ ).

### Construction de la trajectoire articulaire

Comme la rétraction fonctionne sur des petits pas  $t_n$ , il faut décomposer la trajectoire articulaire en une séquence de rétractions définies par des directions  $\{\mathbf{u}_n\}$  permettant de s'approcher de la forme de corps désirée  $\mathbf{q}_{goal}$ . En utilisant les propriétés des espaces localement tangents et normaux, nous définirons initialement le vecteur tangent  $\mathbf{u}_n$  pour s'approcher de  $\mathbf{q}_{goal}$ , puis calculerons le rétracteur orthogonal  $\mathbf{h}_n$  pour maintenir la configuration  $g_0$  à l'équilibre.

Nous proposons ainsi de projeter la direction désirée  $(\mathbf{q}_{goal} - \mathbf{q}_n)$  sur l'espace tangent  $T_{\mathbf{q}} \mathcal{M}_{g_0}$  actualisée à l'itération  $n$ , tel que :

$$\mathbf{u}_n^{(d)} = V_{\parallel} \left[ V_{\parallel}^T (\mathbf{q}_{goal} - \mathbf{q}_n) \right], \quad (3.25)$$

où  $V_{\parallel} \in \mathbb{R}^{n \times (n-3)}$  est la matrice rectangulaire des vecteurs  $\{\mathbf{v}_{\parallel}\}_n$  calculés précédemment. On remarque que si  $|\mathbf{u}_n^{(d)}|$  tend vers 0 alors  $\mathbf{q}_n$  s'approche du projeté orthogonal de  $\mathbf{q}_{goal}$  sur  $\mathcal{M}_{g_0}$ . Cette direction  $\mathbf{u}_n^{(d)}$  étant non-unitaire, le vecteur  $\mathbf{u}_n$  est ensuite obtenue en renormant le vecteur  $\mathbf{u}_n^{(d)}$  tel que

$$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{u}_n^{(d)}}{|\mathbf{u}_n^{(d)}|}, \quad (3.26)$$

définissant ainsi notre direction locale sur la trajectoire articulaire. Notons que l'objectif  $\mathbf{q}_{goal}$  étant caractérisé par des consignes uniquement en courbure ( $q_f \neq 0, q_r = 0$ ), c'est à dire sans roulis local, nous avons délibérément imposé des roulis nuls dans le vecteur  $\mathbf{u}_n$ . Nous verrons dans la section suivante comment utiliser judicieusement ces nouveaux degrés de liberté. Le pas  $t_n$  est une fonction décroissante du nombre d'itérations pour converger progressivement vers l'objectif.

Or un déplacement  $t\mathbf{u}_n$  sur l'espace tangent produit un résidu  $\widetilde{\mathbf{W}}(g_0, \mathbf{q} + t\mathbf{u}_n)$  d'ordre  $\mathcal{O}(t)$  du fait de la courbure de  $\mathcal{M}_{g_0}$ . Autrement dit, le robot avec comme coordonnées  $(g_0, \mathbf{q} + t\mathbf{u}_n)$  n'est plus à l'équilibre à la surface de l'eau pour la configuration  $g_0$ . Si le robot garde la même forme de corps, le système va donc converger vers une autre configuration de la tête  $g'_0$  pour revenir à l'équilibre.

Le rétracteur orthogonal  $\mathbf{h}_n$  introduit dans l'Eq. (3.18) est donc défini comme la composante articulaire ramenant le système à l'équilibre. Physiquement, il compense la petite augmentation d'effort tout s'opposant à un petit déplacement de tête. Pour compenser cette dérive de  $\mathcal{M}_{g_0}$ , nous proposons de définir le rétracteur orthogonal par

$$\mathbf{h}[t\mathbf{u}_n] = - \left( D_q \widetilde{\mathbf{W}} \right)_{\perp}^{\dagger} \widetilde{\mathbf{W}}(g_0, \mathbf{q} + t\mathbf{u}_n). \quad (3.27)$$

avec  $\left( D_q \widetilde{\mathbf{W}} \right)_{\perp}^{\dagger}$  la matrice pseudo-inverse de  $\left( D_q \widetilde{\mathbf{W}} \right)_{\perp}$ . Cette équation s'obtient en effectuant le changement de variable  $\Delta \widetilde{\mathbf{W}} \mapsto \widetilde{\mathbf{W}}(g_0, \mathbf{q} + t\mathbf{u}_n)$  dans l'Eq. (3.20) et en inversant le système.

Cette rétraction est caractérisée par  $\mathbf{R}'' = \mathbf{h}'' \in N_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$  définissant une rétraction du second ordre, c'est-à-dire une approximation d'une courbe géodésique d'ordre  $\mathcal{O}(t^2)$  [109]. Il convient de noter que l'Eq. (3.27) n'est définie que dans le voisinage de  $\mathbf{q}$  pour un pas  $t$  relativement faible (ici on prendra  $t_0 = 0.05$ ), sinon le rétracteur risque de ne pas converger vers la variété d'équilibre.

En générale, la rétraction réduit le résidu final  $|\widetilde{\mathbf{W}}(g_0, \mathbf{q} + t\mathbf{u}_n + \mathbf{h}_n)|$  d'une valeur typique de  $10^{-4}$ . Afin de réduire ce résidu de trois ordres de grandeur, nous utilisons l'algorithme d'optimisation sur le groupe présenté dans la section 3.3.3.

### 3.4.3 Optimisation de la stabilité locale

Dans la section précédente, nous avons introduit la méthode de rétraction pour construire une trajectoire articulaire sur l'ensemble  $\mathcal{M}_{g_0}$ . Dans ce processus, nous avons proposé une direction qui permet de s'approcher du projeté orthogonal de  $\mathbf{q}_{goal}$  sur  $\mathcal{M}_{g_0}$  (voir Eq.

---

**Algorithm 2** Algorithme pour passer  $\mathbf{q}_n$  à  $\mathbf{q}_{n+1}$  sur la variété invariante  $\mathcal{M}_g$  vers  $\mathbf{q}_{goal}$

---

Initialisation : **if**  $n = 0$  :  $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}_0$  et calculer l'équilibre statique  $g_0$  par l'algorithme 1  
 Calculer les matrices jacobiennes  $(D_{g_0} \widetilde{\mathbf{W}})_n$  et  $(D_q \widetilde{\mathbf{W}})_n$   
 Décomposition SVD de  $(D_q \widetilde{\mathbf{W}})_n$   
 Calculer les matrices  $(D_q \widetilde{\mathbf{W}})_\perp$  et  $V_\parallel$   
 Définir la direction sur l'espace tangent  $\mathbf{u}_n^{(d)} \leftarrow V_\parallel V_\parallel^T (\mathbf{q}_{goal} - \mathbf{q}_n)$   
 Normaliser la direction  $\mathbf{u}_n \leftarrow \frac{\mathbf{u}_n^{(d)}}{|\mathbf{u}_n^{(d)}|}$   
 Renouveler la forme du corps  $\mathbf{q}_{n+1} \leftarrow \mathbf{q}_n + t\mathbf{u}_n$   
 Calculer le résidu  $\widetilde{\mathbf{W}}(g_0, \mathbf{q}_{n+1})$   
 Calculer le rétracteur  $\mathbf{h}_n[t\mathbf{u}_n] \leftarrow -\alpha (D_q \widetilde{\mathbf{W}})^\dagger \widetilde{\mathbf{W}}(g_0, \mathbf{q}_{n+1})$  with  $\alpha = 1$   
 Rajouter le rétracteur  $\mathbf{q}_{n+1} \leftarrow \mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{h}_n[t\mathbf{u}_n]$   
 Recalculer la configuration d'équilibre  $g_0$   
**If**  $|(\mathbf{q}_{goal})_f - (\mathbf{q}_{n+1})_f| < 10^{-3}$  :  
**end.**

---

(3.25)) sans utiliser le roulis local des coques ARIM. Nous souhaitons maintenant utiliser ces nouveaux de degrés de liberté internes pour optimiser la stabilité du robot.

Dans cette section, nous explorons l'avantage offert par les coques extérieures ARIM. Selon l'analyse de la section 3.3.5, les formes de corps en cosinus et sinus (cf. Tab. 3.1), proches de celles utilisées lors de la nage du robot, sont caractérisées par des raideurs hydrostatiques très faibles pour le roulis. Pour améliorer la stabilité statique lors de la nage du robot, nous proposons une stratégie d'optimisation en augmentant la raideur  $(-\lambda_3)$  le long de la trajectoire cyclique articulaire composée de plusieurs objectifs  $\mathbf{q}_{goal}$ .

Lors d'une trajectoire articulaire, à chaque itération nous ajouterons ainsi une nouvelle composante  $\Delta \mathbf{v}_n \in T_{\mathbf{q}_n} \mathcal{M}_{g_0}$  à l'incrément de variation de forme de corps  $\Delta \mathbf{q}_n$ . On obtient une nouvelle rétraction en faisant alors le changement de variable  $\mathbf{u}_n \mapsto \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{v}_n$  dans l'Eq. (3.18) donnant ainsi

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + (t\mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{v}_n) + \mathbf{h}[t\mathbf{u} + \Delta \mathbf{v}_n] \quad (3.28)$$

Cette nouvelle composante  $\Delta \mathbf{v}_n$  devient le degré de liberté supplémentaire pour explorer les formes de corps les plus avantageuses dans le voisinage du point  $\mathbf{q}_n + t\mathbf{u}_n$ . Nous chercherons donc la configuration optimale orthogonalement à la direction  $\mathbf{u}_n$  pour ne pas dévier trop fortement de notre objectif, tout en exploitant des formes de corps dans le noyau de  $D_q \widetilde{\mathbf{W}}$ .

On propose alors de ré-arranger les vecteurs  $\{(\mathbf{v}_\parallel)_i\}$  (avec  $i \in [1, N - 3]$ ) formant la

base de l'espace vectoriel  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}_{g_0}$ . La nouvelle base prend la forme suivante :

$$\{\mathbf{u}, (\mathbf{v}_{\parallel})'_1, \dots, (\mathbf{v}_{\parallel})'_{N-4}\} \quad (3.29)$$

avec  $\mathbf{u}$  donné par l'Eq. (3.26) et les vecteurs  $(\mathbf{v}_{\parallel})'_i$  construit par le procédé de Gram-Schmidt à partir des vecteurs  $(\mathbf{v}_{\parallel})_i$ . On peut alors utiliser cette base restreinte  $\{(\mathbf{v}_{\parallel})'_i\}$  (avec  $i \in [1, N - 4]$ ) pour paramétrer l'incrément  $\Delta\mathbf{v}$  tel que

$$\Delta\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N-4} p_i (\mathbf{v}_{\parallel})'_i \quad (3.30)$$

avec  $\mathbf{p}$  le vecteur dont les composantes seront obtenues par notre procédé d'optimisation. Nous chercherons par ailleurs ces valeurs dans un hypervolume tel que  $|p_i| < d$  avec  $d$  une distance qu'on fixera égale à  $c = 0.02$ .

On veut alors résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} [\lambda_3(\mathbf{p})], & \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N-4}, \\ |p_i| \leq c, & \forall i \in [i, N - 4], \\ \widetilde{\mathbf{W}}(g_0, t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{v}(\mathbf{p}) + \mathbf{h}) = \mathbf{0}_3, \end{cases} \quad (3.31)$$

où  $\lambda_3$  est la valeur propre de  $D_{g_0}\widetilde{\mathbf{W}}$  correspondant au roulis, de telle sorte que la raideur hydrostatique  $k_3 = -\lambda_3$  est maximisée. Ce processus est résumé sur la Fig. 3.8.

Concernant la méthode de résolution, nous imposons des petits déplacements sur l'espace tangent en prenant  $t$  (le pas dans la direction de l'objectif) et  $c$  (le pas maximum d'optimisation) faibles. La fonction  $\lambda_3$  étant non-linéaire et *a priori* non-convexe, ce problème d'optimisation doit être résolu par des méthodes de programmation non-linéaire. Comme l'optimisation est effectuée à chaque itération, nous avons choisi un algorithme non heuristique de la librairie "scipy" en python nommé "minimize.SLSQP" (pour Sequential Least Squares Programming). Cet algorithme est adapté aux fonctions non linéaires avec des contraintes du type inégalité.

## 3.5 Études du mode prédictif

### 3.5.1 Stabilisation de la tête durant la nage anguilliforme

En premier lieu, nous souhaitons utiliser la méthode des rétractions (sans optimisation) pour générer une allure de nage qui minimise les mouvements de la tête. Plus précisément,

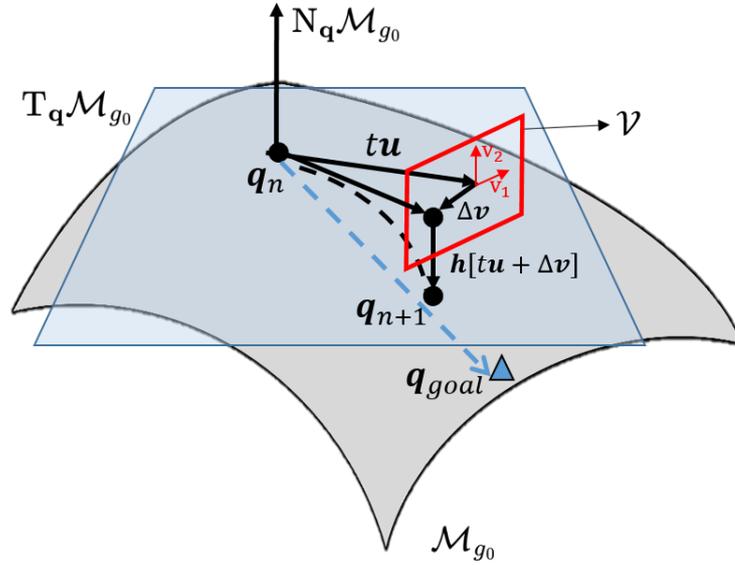


FIGURE 3.8 – Illustration de la rétraction avec une optimisation sur l’espace tangent  $T_q \mathcal{M}_{g_0}$

on veut produire une trajectoire articulaire fermée dont les formes de corps sont proches de celles de la nage anguilliforme avec la contrainte supplémentaire qu’elles ont toutes la même configuration de la tête à l’équilibre. Avec une telle allure, on espère que le nageur reste stable dans la limite quasi-statique (très faibles vitesses et accélérations). Nous verrons dans la dernière section que cette allure stable aura aussi son utilité lorsque les vitesses et accélérations articulaires ne seront plus négligeables.

Nous proposons ainsi de décomposer la nage anguilliforme (du type fonction serponoide donnée par l’Eq. (1.1)) en une séquence de formes du corps partageant toutes la même configuration  $g_0$  à l’équilibre. Pour ce faire, nous prenons  $k$  formes de corps cibles le long de la trajectoire articulaire, puis nous les connectons grâce à la méthode des rétractions. Ce procédé permet de projeter la trajectoire articulaire sur l’ensemble  $\mathcal{M}_{g_0}$  comme l’illustre le chemin noir sur la Fig. 3.9. Nous prendrons comme condition initiale la forme en “cosinus” (cf. Tab.3.1) dont la configuration de la tête  $g_0$  déterminera l’ensemble  $\mathcal{M}_{g_0}$ .

Nous comparerons ces résultats à la même allure sans le processus de rétraction, comme l’illustre le chemin rouge sur la Fig. 3.9. Dans ce cas, seule la flexion est modifiée et les autres composantes articulaires (roulis d’ARIM et cou) seront celles de la condition initiale du mode “cosinus” (cf. Tab.3.1).

Nous proposons une ré-écriture de la génération d’allure en imposant aux coordonnées

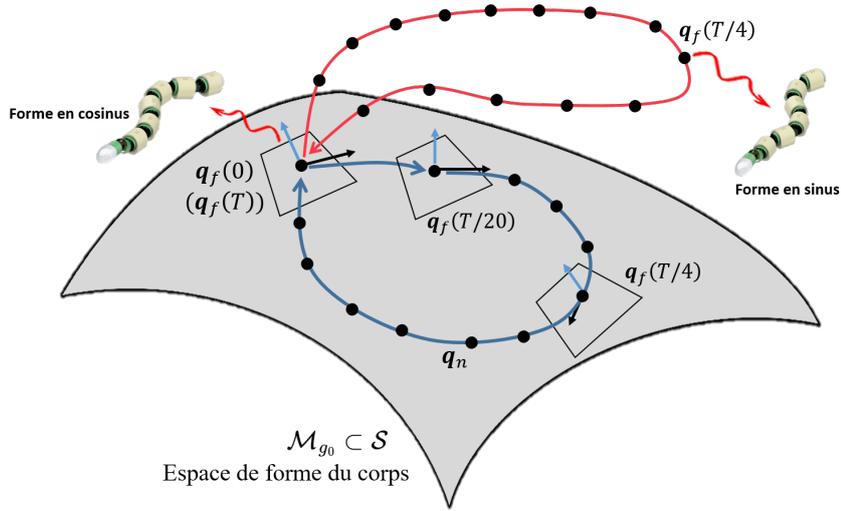


FIGURE 3.9 – Illustration des “chemins” dans l’espace de forme  $\mathcal{S}$  connectant les allures d’un nage anguilliforme, le chemin bleu est sur la variété invariante  $\mathcal{M}_{g_0}$  et celui rouge est à l’extérieur de  $\mathcal{M}_{g_0}$

articulaires de flexion la loi suivante

$$(\mathbf{q}_{goal})_f(t) = (\mathbf{q}_{cos})_f \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + (\mathbf{q}_{sin})_f \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (3.32)$$

avec  $(\mathbf{q}_{cos})_f$  et  $(\mathbf{q}_{sin})_f$  les formes en cosinus et en sinus données dans le tableau 3.1, et  $T$  la période. Pour rappel, les angles de tangage du cou sont  $(q_1 = 27^\circ, q_2 = -30^\circ)$  pour que la tête soit relevée tandis que les angles de roulis des modules ARIM restent à 0. Cette formulation est équivalente à la courbe serponoïde (Eq. (1.1)) introduite dans l’état de l’art. Son intérêt est de montrer que la nage n’est rien d’autre que la superposition de deux formes spatiales oscillant en quadrature. Elle met aussi en évidence les liens entre périodicité et symétries spatiales qu’on étudiera dans cette section et dans le chapitre V.

Nous avons échantillonné 20 formes de corps à partir de l’allure données par l’Eq. (3.32) grâce à la période d’échantillonnage  $\Delta t = T/20$  en commençant par la forme à  $t = 0$  en “cosinus”. Nous avons ensuite appliqué la méthode de rétraction pour projeté la trajectoire articulaire dans l’intervalle entre les formes  $k$  et  $(k + 1)$  du corps. La forme de corps initiale pour la  $k$ -ième itération de ce processus est donné par celle finale pour la  $(k - 1)$ -ième itération. Les  $k$  intervalles sont ensuite décomposés par 97 rétractions en moyenne, soit au total 1940 rétractions.

Nous avons reporté l’évolution des angles de flexion résultant de ce processus sur la Fig. 3.10, et les angles du cou et de roulis des coques ARIM sur la Fig. 3.11. On remarque tout

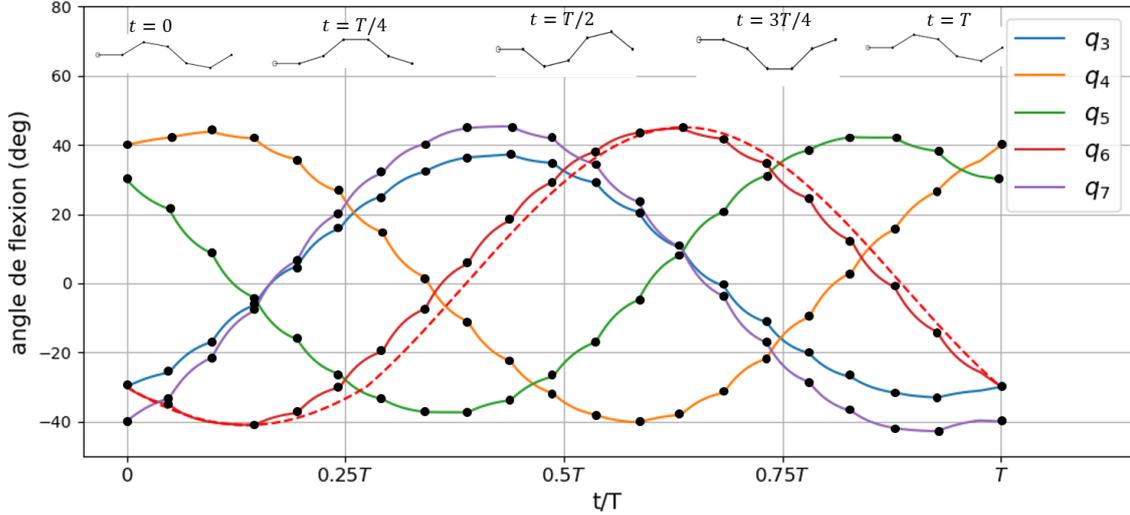


FIGURE 3.10 – Évolution des angles de flexion  $(\mathbf{q})_f$  durant un cycle pour une trajectoire articulaire satisfaisant le même équilibre  $g_0$ , la courbe pointillée est la trajectoire articulaire objective calculée par l'Eq. (3.32).

d'abord que les courbes sont continues par morceaux, ce qui résulte de la décomposition de l'allure en sous-intervalle. Les angles de flexions (Fig. 3.10) restent dans le voisinage des consignes initiales avec des variations d'angles de  $\Delta q_f = \pm 0.27^\circ$ .

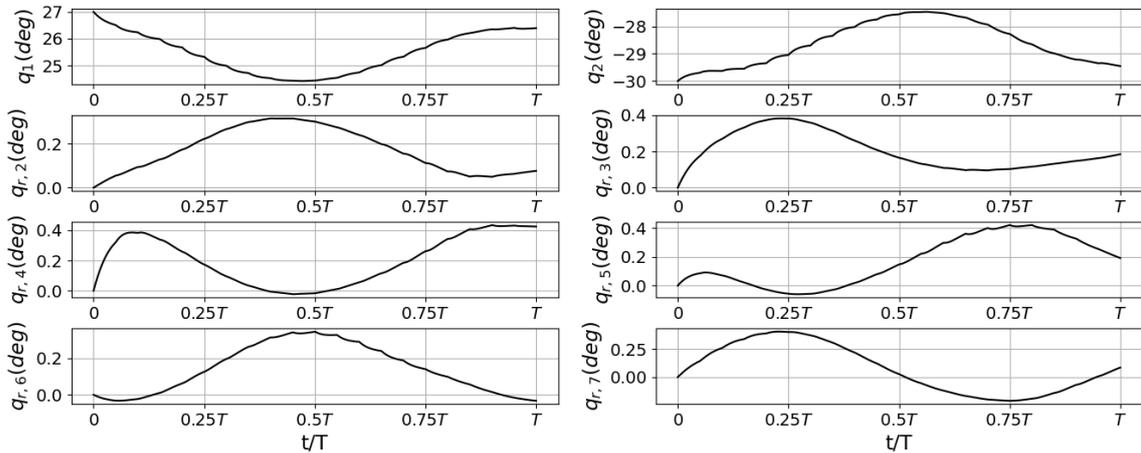


FIGURE 3.11 – Évolution des angles articulaire du cou  $(q_1, q_2)$  (les deux figures du haut) et des modules ARIM  $(q_r)_i$  durant un cycle pour une trajectoire articulaire satisfaisant le même équilibre  $g_0$ .

Les angles d'inclinaison du cou varient dans un faible intervalle ( $\Delta q_1, \Delta q_2 \simeq \pm 2^\circ$ ) (cf. Fig. 3.11) alors que les roulis des modules ARIM sont peu exploités avec des amplitudes

$\pm 0.5^\circ$ . Les deux angles du cou  $q_1$  et  $q_2$  tournent dans la direction opposée ( $q_1 > 0$  diminue,  $q_2 < 0$  augmente) pour compenser la variation de hauteur de la tête comme dans une structure “pan tilt”. Tous les roulis contrôlés tournent du même côté (Fig. 3.11) sur la première demi-période, puis le roulis du dernier module (en bas à droite) va changer de signe contrairement aux autres qui restent positifs durant toute la trajectoire.

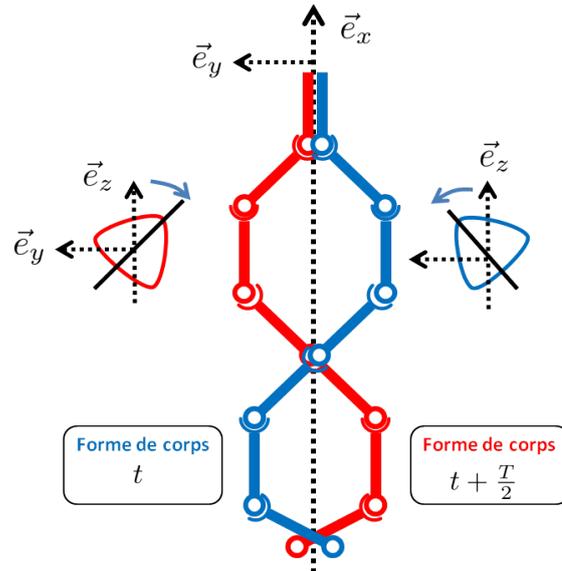


FIGURE 3.12 – Illustration de la relation entre périodicité de l’allure et les symétries. La représentation du robot est vu de dessus et on a uniquement représenté. On suppose que le plan  $x0z$  est un plan de symétrie par réflexion du corps. Noter qu’il y a plus de joints de flexion que le robot NATRIX, pour faciliter l’illustration.

On remarque que les trajectoires ne se referment pas entre les deux points identiques à  $t = 0$  (point initial) et  $t = T$  (point final) sur la Fig. 3.11 : les courbes ne sont malheureusement pas périodiques. Pour aller plus loin, on peut s’intéresser aux liens entre périodicité et symétries en supposant que le roulis de la tête reste très faible, voir nul. Cette hypothèse est presque vérifiée avec un roulis initial de  $2.8^\circ$ . Dans ce cas, un décalage d’une demi-période  $t \mapsto t + T/2$  change les coordonnées articulaires de flexion en  $\mathbf{q}_f \mapsto -\mathbf{q}_f$  (voir la Fig. 3.12). Cette transformation est une réflexion par rapport au plan transversal du robot ( $x0z$ ,  $0x$  étant l’axe rostro-caudal). Une telle symétrie change les coordonnées du roulis en  $\mathbf{q}_r \mapsto -\mathbf{q}_r$ , alors que l’élévation de la tête étant dans le plan transversal on, a  $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, q_2)$ .

Par ailleurs comme  $q_1$  et  $q_2$  sont non nuls à  $t = 0$ , les courbes  $q_1$  et  $q_2$  doivent être des fonctions paires décomposables par des fonctions cosinus. Au contraire les courbes

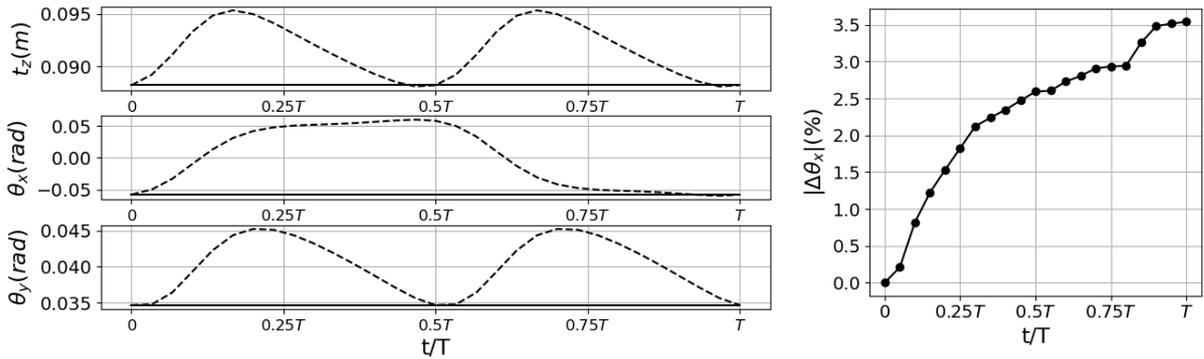


FIGURE 3.13 – Gauche : Évolutions de la position (pilonnement  $t_z$ ) et des orientation (roulis  $\theta_x$ , tangage  $\theta_y$ ) de la tête d'équilibre par rapport au repère global pendant un cycle de locomotion. Les courbes solides et pointillées correspondent respectivement aux formes de corps stabilisé et sans stabilisation. Droite : erreurs en pourcentage du roulis de la tête correspondantes au formes du corps stabilisées

$q_r$  doivent être impaires décomposables par des fonctions sinus (car  $q_r = 0$  pour  $t = 0$ ). Cette propriété est globalement vérifiée par les coordonnées articulaires du cou  $q_1$  et  $q_2$ , bien qu'elles ne reviennent pas exactement au point initial (absence de périodicité). Le cas des coordonnées articulaires du roulis sont plus problématiques. Seule la composante  $q_{r,7}$  (roulis du dernier module, Fig.3.11, en bas à droite) vérifie globalement bien la parité prédite (impair). Au contraire les autres roulis  $q_r$  n'ont pas les bonnes symétries. Notre algorithme actuel ne permet pas de retrouver la périodicité et les bonnes symétries de l'allure.

Aussi, une piste d'amélioration consisterait à renforcer la périodicité et la parité des fonctions pour maintenir la tête à l'équilibre. Par exemple, on pourrait proposer une décomposition de Fourier des coordonnées articulaires (selon leur parité) puis faire varier uniquement leur composantes de Fourier. Par ailleurs, cette stratégie nous permettrait de calculer l'allure uniquement sur une demi-période. Nous n'avons pas eu le temps d'explorer cette possibilité.

Nous avons vérifié que le résidu du torseur des forces étaient très faible durant le cycle avec  $|\widetilde{\mathbf{W}}| \approx 10^{-8}$ . Ce résidu reste faible car à chaque rétraction, nous appliquons l'algorithme présenté dans la section 3.3 qui cherche la configuration de la tête à l'équilibre. Aussi, on pourrait observer une légère modification de la configuration de la tête  $g_0$ . or il n'en est rien, comme l'illustre la Fig. 3.13. Les courbes noires correspondent (de bas en haut) au pilonnement, au roulis et au tangage qui restent quasiment constant.

En comparaison, nous avons calculé le pilonnement, le roulis et le tangage (courbes en pointillés) lorsque le nageur utilise des formes de corps de la nage anguilliforme sans stabilisation. On remarque les variations de roulis de  $\pm 5^\circ$ , qui correspondent aux variations quasi-statique de la tête lorsque la période du cycle  $T$  tend vers l'infini. On verra dans la section que 3.5.3 que ces amplitudes augmenteront avec la fréquence.

### 3.5.2 Optimisation de la stabilité de la nage anguilliforme

Nous poursuivons notre analyse de la nage en étudiant dans quelle mesure les degrés de liberté supplémentaires (le cou et les module ARIM) peuvent renforcer la stabilité statique du robot qu'on supposera associée aux raideurs hydrostatiques. Nous avons donc appliqué la stratégie présentée dans la section précédente en y intégrant l'algorithme d'optimisation de la section 3.4.3. L'ajout de cette étape d'optimisation augmente le temps de calcul moyen de chaque itération d'un facteur 10 (0.7s sans optimisation et 8s avec optimisation).

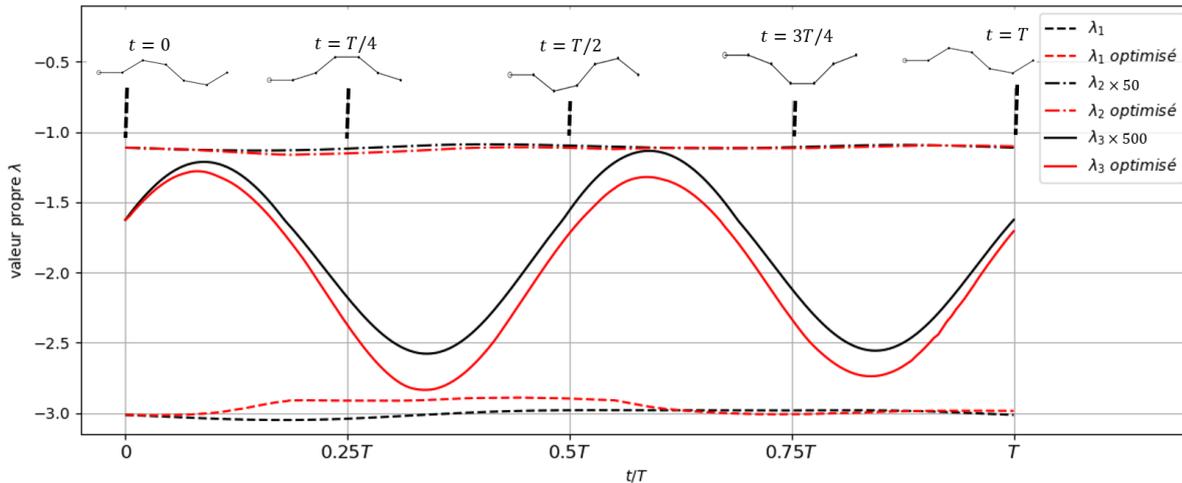


FIGURE 3.14 – Évolution des valeurs propres de la matrice de raideur hydrostatique  $D_{g_0} \widetilde{W}$  pendant une période  $T$ , les courbes rouges représentent la locomotion avec la minimisation de  $\lambda_3$  et les courbes noires représentent la locomotion sans la minimisation.

Les trois valeurs propres  $\lambda_i$  de la jacobienne  $D_{g_0} \widetilde{W}$  sont illustrées sur la Fig. 3.14 en fonction de la durée du cycle, avec en rouge les courbes associées au cas optimisé et en noir, les valeurs propres issus de la section précédente. Pour rappel, les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondent aux modes combinant pilonnement et tangage (courbes pointillés et

hachés) et  $\lambda_3$ , un mode dominé par le roulis. Pour les représenter sur le même graphique, nous avons multiplié  $\lambda_2$  par 50 et  $\lambda_3$  par 500.

On remarque que la valeur  $\lambda_3$  associée au roulis varie significativement au cours de la locomotion contrairement aux deux autres valeurs propres. Ce changement périodique de la raideur hydrostatique crée une modulation paramétrique à deux fois la fréquence du cycle, ce qui peut affecter la stabilité dynamique du robot, effet que nous étudierons au chapitre V. La valeur moyenne de  $\lambda_3$  optimisée décroît de 5% à 10%, ce qui correspond à un gain de raideur hydrostatique.

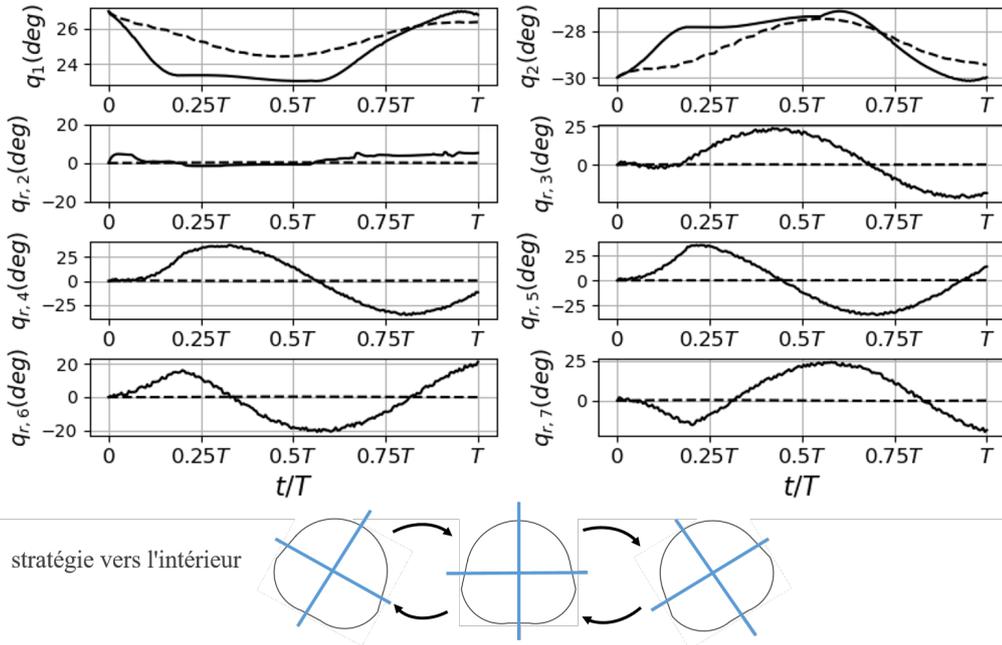


FIGURE 3.15 – Évolution des angles d’inclinaison du cou et du roulis des modules ARIM pendant un cycle de nage. Les courbes noires représentent le mouvement optimisé et les courbes pointillées sans optimisation.

Sur la Fig. 3.15, nous comparons les angles d’inclinaison du cou et de roulis des modules ARIM avec (courbes pleines) et sans optimisation (courbes en pointillés). On observe que l’évolution de l’inclinaison du cou donnée par  $q_1$  et  $q_2$  est globalement comparable pour le cas avec et sans optimisation. Quant aux angles de roulis d’ARIM associés aux composantes  $q_{r,i}$ , on remarque qu’ils augmentent tous significativement durant le processus d’optimisation hormis le premier module avec  $q_{r,1}$ . Cet effet est peut-être corrélé avec le fait que ce module est justement dans le plan de symétrie du robot (voir Fig. 3.12). On observe aussi que chaque coque tourne vers l’intérieur lorsque le module s’écarte de

la forme rectiligne (voir le petit schéma en bas de la Fig. 3.15), un comportement qu’on retrouve chez les mocassins d’eau. Quant aux symétries et à la périodicité, on observe bien la composante impaire prédite dans la section précédente pour les  $q_{r,i}$ , mais la périodicité est fortement compromise avec des écarts de  $20^\circ$  entre les conditions initiale et finale.

### 3.5.3 Impact du modèle prédictif sur la dynamique du nageur

Est-ce que ces trajectoires articulaires sont pertinentes lorsque le robot nage avec des vitesses et accélérations articulaires non-négligeables? Nous allons répondre à cette question dans cette section. Nous utiliserons le modèle dynamique inverse présenté dans le chapitre 2 qui prend comme entrées les séries temporelles  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t))$  et donne en sortie l’évolution de la configuration de la tête  $g_0(t)$  et les vitesses associées. Les vitesses  $\dot{\mathbf{q}}$  et accélérations  $\ddot{\mathbf{q}}$  articulaires sont estimées par des différences finies.

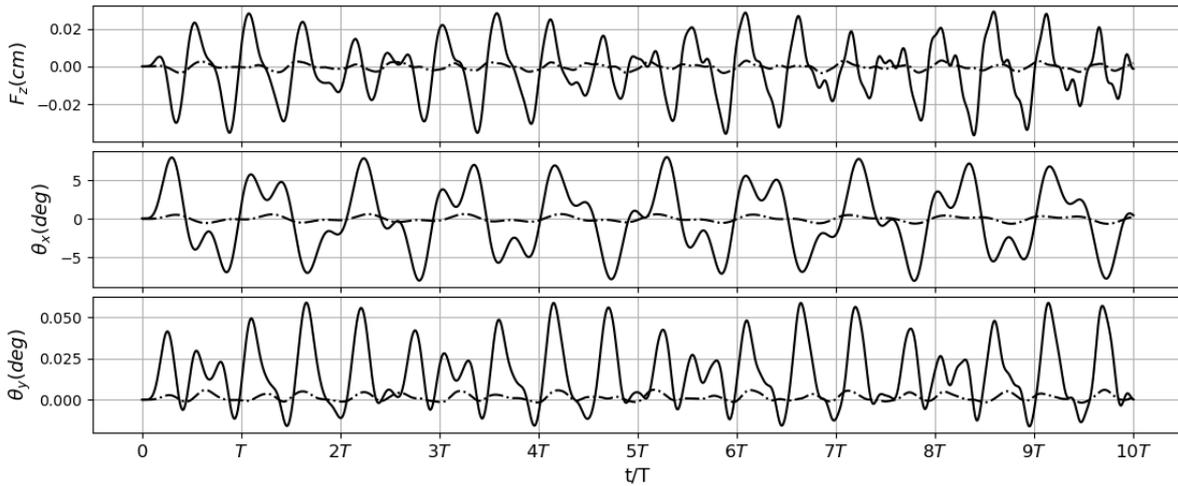


FIGURE 3.16 – Évolution de la variation de la tête  $\Delta\psi = (t_z, \theta_x, \theta_y)^T$  pendant 10 périodes avec la fréquence  $F = 0.4\text{Hz}$ , les courbes pleines représentent le chemin à l’extérieur de  $\mathcal{M}_{g_0}$  et les courbes pointillées représentent celui sur  $\mathcal{M}_{g_0}$ .

Puisque le mouvement optimisé dans la section 3.5.2 présente des discontinuités significatives lors de l’alternance du cycle, nous prendrons l’allure issue du mouvement non optimisé présentée dans la section 3.5.1 comme entrée du modèle dynamique inverse. Le mouvement de la tête résultant sera comparé à celui produit par la nage “libre” donnée par l’allure de l’Eq. (3.32), c’est à dire la nage anguilliforme couramment utilisé dans la littérature. Les vitesses et accélérations de cette allure peuvent être calculées analytiquement.

La fréquence de la nage  $F = 1/T$  variera entre 0.1 et 0.5 Hz et les simulations dureront typiquement 10 périodes. Cette gamme de fréquences est proche de celle utilisée par les servomoteurs du robot. Les conditions initiales de ces simulations sont toujours définies par la forme de corps en “cosinus” (cf Tab. 3.1) initialement à l’équilibre.

Les variations de pilonnement, roulis et tangage données par  $\Delta\psi = (t_z, \theta_x, \theta_y)^T$  autour la configuration d’équilibre initiale sont calculées grâce au logarithme sur SE(3) (cf appendices) avec

$$\Delta\hat{\psi}(t) = \log(g_0(t)g_{eq}^{-1})$$

avec  $g_{eq}$  la configuration d’équilibre initiale  $g_0(t = 0)$ .

L’évolution de  $(t_z, \theta_x, \theta_y)$  est reportée sur la Fig. 3.16 pour une fréquence de 0.4Hz. On observe que le mouvement de roulis domine les trois degrés de liberté avec des oscillations non-linéaires d’amplitudes  $\pm 7^\circ$ . En comparaison, l’amplitude du roulis pour l’allure stabilisé est de  $0.4^\circ$ , soit une réduction drastique de presque 95% des oscillations.

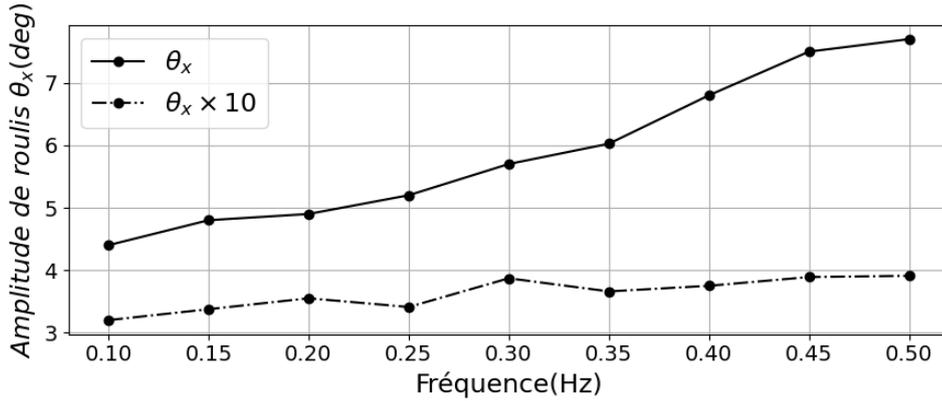


FIGURE 3.17 – Amplitude de roulis en fonction de la fréquence  $F \in [0.1, 0.5]Hz$ , les courbes solides et pointillées correspondent au chemin à l’extérieur de  $\mathcal{M}_{g_0}$  et au celui sur  $\mathcal{M}_{g_0}$ .

En répétant cette étude pour différentes fréquences (cf. Fig.3.17), on constate que cette observation est robuste. Il est aussi intéressant d’observer que l’amplitude du roulis croit de  $4,5^\circ$  à quasiment  $8^\circ$  sur une demi-décade de fréquence, soit un accroissement de 70% pour le cas sans stabilisation. Pour rappel, les amplitudes du roulis en quasi-statique sont de  $5^\circ$  (cf Sec. 5.3.1).

Avec la stabilisation, on passe d’une amplitude de  $0,1^\circ$  à presque  $0,4^\circ$  soit une progression de 300%. Bien que ces angles de roulis restent faibles, la progression du roulis pour le cas stable est significative. Néanmoins, on préserve une atténuation forte du roulis dans

ces gammes fréquentielles avec une réduction de 98% des oscillations pour  $F = 0.1\text{Hz}$  à 95% pour  $F = 0.5\text{Hz}$ .

On peut donc supposer qu’une source importante d’oscillation de la tête lors de la nage provient du fait que les formes de corps empruntées ont des configurations de la tête à l’équilibre différentes. Le système mécanique “souhaite” donc revenir à un équilibre qui varie perpétuellement. Cet effet peut être quantifié en reformulant la différentielle de  $\widetilde{\mathbf{W}}$  (cf Eq.3.20) de la manière suivante

$$\Delta\widetilde{\mathbf{W}} = -K_0 \left( \Delta\widetilde{\boldsymbol{\psi}} - \Delta\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{eq}(t) \right) \quad (3.33)$$

avec

$$\Delta\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{eq}(t) = K_0^{-1} (D_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathbf{W}}) \Delta\mathbf{q}(t) \quad (3.34)$$

où  $K_0$  est la matrice des raideurs hydrostatique et  $\Delta\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{eq}$  la variation de la configuration d’équilibre de la tête produite par la variation de forme de corps  $\Delta\mathbf{q}(t)$  durant la nage. Si la nage est stabilisée par des mouvements prédictifs alors ce terme est en théorie nul. Au contraire, la nage sans contrôle est excitée par un effet de rappel vers une configuration d’équilibre instationnaire. Nous verrons dans le chapitre 5 les conséquences de cet effet lorsqu’il est couplé aux modulations de raideurs observées sur la Fig. 3.14.

## 3.6 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons reporté les premières étapes d’une recherche sur la stabilité posturale de notre robot serpentiforme à la surface de l’eau.

Les problèmes direct et inverse ont été étudiés. Le problème direct consiste à déterminer la configuration d’équilibre de la tête  $g_0$ , étant donnée une forme du corps  $\mathbf{q}$ . Un algorithme d’optimisation de gradient (voir l’algorithme 1) a été proposé pour traiter efficacement ce problème. Cette optimisation sur le groupe de Lie SE(3) peut être appliquée aux structures élancées discrètes (robot NATRIX) et continues (poutre de Cosserat [95]) à la surface de l’eau. En analysant les poses d’équilibre obtenues, nous avons montré que la stabilité statique de notre robot est déterminée par une matrice de raideur hydrostatique. La raideur la plus faible, dominée par le mouvement de roulis, confirme que le roulis est le degré de liberté le plus dangereux du robot.

Le problème inverse nous demande de déterminer une succession continue de formes

du corps  $\mathbf{q}$  tout en préservant une même configuration d'équilibre de la tête  $g_0$ . Dans l'espace articulaire, ces formes du corps sont associées à une courbe géodésique sur une variété d'équilibre de  $g_0$ . Le concept de rétraction a été proposé pour approximer cette courbe en utilisant les propriétés de l'espace ambiant (voir l'algorithme 2). À partir des résultats de simulations statique et dynamique, cette méthode de rétraction nous a permis d'anticiper les mouvements de corps du robot pour minimiser le mouvement de la tête. Cependant, les trajectoires articulaires générées par cette méthode manquent de périodicité et n'observent pas toutes les symétries attendues. Pour investiguer ce problème, nous avons intégré un processus d'optimisation locale de la stabilité du roulis dans la génération des trajectoires. L'ajout de ce processus permet d'augmenter légèrement la raideur du roulis (environ 10%) au cours du mouvement. Plus intéressant encore, nous avons reproduit les symétries du roulis des coques d'ARIM au fil de la flexion du corps, telles qu'observées chez les serpents semi-aquatiques. Les pistes d'améliorations dans le futur est de trouver une méthode pour reproduire la périodicité des trajectoires.

En résumé, nous avons proposé un contrôle statique par anticipation pour contrôler la stabilité posturale du robot à la surface de l'eau. Les simulations des mouvements du corps prédits par le contrôleur montrent une bonne atténuation du mouvement de la tête, même en régime dynamique. Cependant, le robot est encore perturbé par d'autres effets internes ou externes tel que l'inertie du corps, du vent et des vagues, l'onde de surface, etc. Ces perturbations ne peuvent pas être rejetées par anticipation. Nous allons présenter donc dans le prochain chapitre un contrôle en boucle fermée pour le rejet de ces perturbations.

# STABILITÉ POSTURALE : REJET DE PERTURBATION

---

## 4.1 Introduction

### 4.1.1 Problématique et méthodologie

Dans le dernier chapitre, nous avons développé une loi de contrôle en boucle ouverte pour le mouvement quasi-statique de NATRIX. L'algorithme prédictif nous permet de générer une trajectoire dans l'espace articulaire qui préserve la pose d'équilibre de la tête tout en faisant varier la forme du corps. Nous avons montré que grâce à cet algorithme, la stabilité statique peut être améliorée en exploitant les rotations actives des coques extérieures d'ARIM. Cependant, avec cet algorithme, les mouvements perturbatifs du robot peuvent encore être produit par des perturbations internes (par exemple le couplage inertiel de tête-corps) et externes (par exemple l'onde de surface). Pour réaliser la stabilisation du robot à la présence de ces perturbations, il est nécessaire à développer une autre stratégie de contrôle en boucle fermée. Cette stratégie de contrôle consiste à rejeter une perturbation initiale sur la pose de la tête pour converger d'une position instable à une position statique et stable sur l'eau. Pour ce faire, nous souhaitons concevoir une commande de rétroaction basée sur des méthodes linéaires (par exemple la commande à retour d'état), qui seront ensuite testées sur le simulateur de la dynamique non linéaire de notre robot.

Notre stratégie de contrôle consiste à amortir les oscillations non linéaires de la tête en transférant l'énergie de son mouvement rigide aux degrés de liberté internes, où elle est dissipée par les servomoteurs. Tout d'abord, nous introduisons une force virtuelle sur la tête qui amortit les perturbations. Ensuite, nous développons une méthode pour générer les trajectoires dans l'espace articulaire qui "réalise" cette force virtuelle. Le défi majeur est de définir ces trajectoires qui génèrent cette force virtuelle, produisent un amortissement

sur le mouvement de la tête, tout en préservant la stabilité de l'ensemble du système.

L'originalité des travaux de ce chapitre est d'explorer les nouvelles possibilités de mouvement interne offertes par la conception originale du robot NATRIX. Cette étude est donc motivée par les conséquences du design du robot et son interaction avec son environnement. En ce sens, nous porterons une attention particulière à la compréhension des mécanismes de génération de trajectoires qui conduisent soit à la stabilisation, soit à l'instabilité du robot. Réciproquement, l'étude des symétries du robot et de son espace de travail jouera (encore) un rôle crucial dans la conception du contrôleur.

Cette approche s'inscrit dans la lignée du concept d'intelligence incarnée (embodied intelligence [111]) puisque nous croyons fermement que le rôle de la bio-mécanique et des interactions physiques prévaut sur les méthodes de contrôle. Nous sommes convaincus que bon nombre des résultats présentés ici peuvent être améliorés par des méthodes non linéaires, un contrôle optimal ou des réseaux de neurones. Néanmoins, toutes ces méthodes seront confrontées aux problèmes imposés par la mécanique et la physique de ce système. Par conséquent, les résultats du chapitre seront utiles pour concevoir des stratégies de contrôle plus élaborées dans le futur.

### 4.1.2 Énoncé du problème

Tout d'abord, nous considérons une situation initiale caractérisée par la configuration du robot  $(g_0, \mathbf{q})$  qui n'est originalement pas à l'équilibre. À partir de cette configuration initiale, notre stratégie vise à rétablir une configuration d'équilibre stable pour le robot caractérisée par les deux éléments  $g_{eq}$  et  $\mathbf{q}_{eq}$  satisfaisant la condition d'équilibre hydrostatique donnée par l'Eq. 3.6 (torseur des efforts nul).

En l'absence de dissipation externe (traînée, onde) et interne (amortissement passif des articulations), le robot converge vers un équilibre si et seulement si l'énergie induite par les perturbations est dissipée par les servomoteurs, sinon le robot oscillera sur la surface de l'eau autour de sa configuration d'équilibre. Notre objectif est donc de générer une trajectoire  $\mathbf{q}(t) \in \mathcal{S}$  dans l'espace articulaire depuis la forme initiale du corps  $\mathbf{q}(0)$  jusqu'à la forme cible  $\mathbf{q}_{eq}$  tout en dissipant l'énergie de la perturbation. Cet objectif peut être résumé par la condition suivante :

$$\lim_{\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}_{eq}} g_0(t) = g_{eq}. \quad (4.1)$$

Ici, l'entrée est  $\mathbf{q}(t)$ , l'état est  $g_0(t)$  et la sortie est la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  (celle exprimée dans le

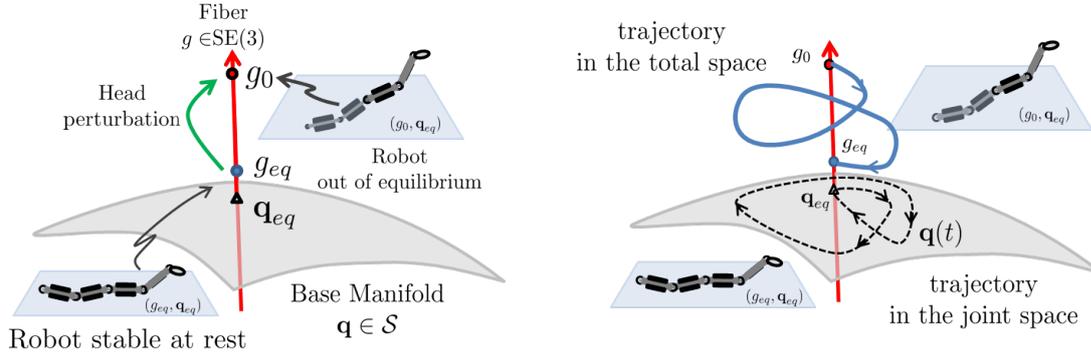


FIGURE 4.1 – Illustration du rejet de perturbation dans l'espace total  $SE(3) \times \mathcal{S}$  comprenant la configuration de la tête  $g_0 \in SE(3)$  et la forme de corps  $\mathbf{q}(t)$  prenant valeur dans l'espace articulaire  $\mathcal{S}$ . Cet espace total peut être représenté par un fibré principal [90] (voir Sec. 2.4.1) dont la structure topologique généralise le cas d'un produit cartésien au produit d'un espace topologique (ici  $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ , la base) avec un groupe ( $g_0 \in SE(3)$ , la fibre). Une fibre (en rouge) correspond à toutes les configurations possibles du robot  $g_0$  dans  $SE(3)$  pour une coordonnée de forme corporelle donnée  $\mathbf{q}$ . Nous disons que la fibre est au-dessus de la forme de corps  $\mathbf{q}$  prenant valeur dans la base  $\mathcal{S}$ . Avec cette structure, on peut alors distinguer la dynamique avec ou sans déformation du corps. Aussi, un mouvement de corps solide avec une forme de corps fixe  $\mathbf{q}$  correspond à un déplacement le long de la fibre au-dessus de  $\mathbf{q}$ . Gauche : nous considérons d'abord une perturbation initiale de la tête à partir de la configuration stable  $g_{eq}$  le long de la fibre au-dessus de la forme du corps  $\mathbf{q}_{eq}$ . Sans rétroaction, le mouvement du corps solide produira un mouvement périodique le long de la fibre correspondant aux oscillations autour de l'équilibre  $g_{eq}$ . A droite : le processus de rejet des perturbations consistera à passer d'une fibre à l'autre en générant une trajectoire  $\mathbf{q}(t)$  dans l'état de base (courbe en pointillés). Notre but est de trouver la trajectoire dans l'espace total qui relie le point initial au point final  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$ .

repère de la tête, que l'on suppose mesurée par une IMU). Nous utiliserons une condition initiale simple correspondant à  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_{eq}$  pour ne considérer qu'une perturbation sur la configuration de la tête  $g_0$ . Par conséquent, nous cherchons à trouver des trajectoires commençant à  $(g_0, \mathbf{q}_{eq})$  et se terminant à  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$ .

### 4.1.3 Organisation du chapitre

Dans un premier temps, nous allons donner un premier aperçu de notre stratégie de contrôle ainsi que sa mise en œuvre dans la section 4.2. Dans la section 4.3, nous décrivons comment dériver le modèle linéaire pour la commande en tirant parti de la structure de l'espace de configuration et des symétries du système. La stratégie de contrôle va être

ensuite détaillée dans la section 4.4 avec le rejet des perturbations basé sur un retour d'état complet. La méthode pour produire des trajectoires dans l'espace articulaire va être présentée dans la section 4.5. Enfin, nous allons reporter dans la section 4.6 le réglage et les performances du contrôleur pour deux configurations d'équilibre différentes, et analyser son domaine de validité.

## 4.2 Vue d'ensemble de la stratégie de contrôle

### 4.2.1 Stratégie proposée

Nous donnons ici une première image globale pour générer la trajectoire  $\mathbf{q}(t)$  de notre loi de contrôle, qui sera ensuite détaillée dans les sections suivantes. La dynamique se déroulant au voisinage d'un équilibre, nous optons pour une méthode de contrôle linéaire. Notre premier défi est de reconstruire rigoureusement l'espace tangent de l'espace de configuration  $SE(3) \times \mathcal{S}$ , à partir de la vitesse de sortie  $g_0$  et de l'entrée  $\mathbf{q}$ . On montre que la dynamique linéarisé autour de la configuration d'équilibre  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  peut être paramétrée par les vecteurs  $(\Delta\boldsymbol{\psi}, \Delta\mathbf{q})$ . D'une part, le mouvement de la tête est paramétré par  $\Delta\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^3$  avec uniquement les mouvements de roulis, de tangage et de pilonnement dans le repère galiléen de surface, qui est reconstruit à partir de la sortie  $g_0$  grâce au développement de Magnus (voir la section 2.6 pour les détails). D'autre part, la perturbation de la forme du corps se lit simplement  $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{eq}$ .

Par conséquent, nous obtenons un modèle linéarisé reliant la configuration réduite de la tête et son accélération, aux positions et accélérations articulaires, donné par :

$$\widetilde{M}_0 \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + K_0 \Delta\boldsymbol{\psi} = -\widetilde{M}_q \Delta\ddot{\mathbf{q}} - K_q \Delta\mathbf{q}, \quad (4.2)$$

avec  $\widetilde{M}_0, K_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , et  $\widetilde{M}_q, K_q \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  (le symbole "tilde" représente les matrices d'inertie et de raideur réduite, cf. section 3.2.1). Cependant, un tel modèle ne peut pas être réduit directement à une représentation de l'espace d'états :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{x}^T = (\Delta\boldsymbol{\psi}^T, \Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}^T)$  est l'état du système, et  $A, B$  les matrices constantes. En effet, l'évolution temporelle de l'état  $\mathbf{x}$  dépend de l'entrée  $\Delta\mathbf{q}$  et aussi de sa dérivée seconde donnée par l'accélération  $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$  qui ne sont pas indépendantes. Autrement dit, la contribu-

tion du mouvement interne empêche la réduction à une représentation très générale de l'espace d'état.

Pour surmonter ce second problème, nous introduisons une commande virtuelle  $\mathbf{u}$ , et divisons le système donné par Eq. (4.2) en deux sous-systèmes définis par

$$\widetilde{M}_0 \Delta \ddot{\boldsymbol{\psi}} + K_0 \Delta \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

$$\widetilde{M}_q \Delta \ddot{\mathbf{q}} + K_q \Delta \mathbf{q} = -\mathbf{u}. \quad (4.5)$$

Nous nous référons à *la dynamique de la tête* pour le premier niveau (4.4) régissant la dynamique de  $\Delta \boldsymbol{\psi}$ . Réciproquement, on définit *la dynamique interne* pour le deuxième niveau associé à la forme du corps  $\Delta \mathbf{q}$ . Le système résultant est illustré sur la Fig. 4.2. Le système d'équations (4.4), et (4.5) peut être réécrit sous une forme très générale donnée par l'Eq. (4.3) avec un état augmenté  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}$  où  $\mathbf{X}^T = (\Delta \boldsymbol{\psi}^T, \Delta \dot{\boldsymbol{\psi}}^T, \Delta \mathbf{q}^T, \Delta \dot{\mathbf{q}}^T)$ , donnée par :

$$E \dot{\mathbf{X}} = A \mathbf{X} + B \mathbf{u}, \quad (4.6)$$

avec  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $E$  et  $A$  deux matrices fonctions des matrices d'inertie  $(\widetilde{M}_0, \widetilde{M}_q)$ , et  $(K_0, K_q)$  respectivement. En considérant l'entrée  $\Delta \mathbf{q}$  comme un paramètre inconnu, cette stratégie permet de résoudre le problème du rejet de perturbation par un contrôleur à deux niveaux associé aux équations (4.4) et (4.5).

Comme prévu, l'état de la forme du corps donné par  $(\Delta \mathbf{q}^T, \Delta \dot{\mathbf{q}}^T)$  dans l'Eq. (4.6), est analogue à la dynamique interne dans l'approche de linéarisation entrée-sortie [112] puisqu'il a été rendu "inobservable". Cependant, il s'agit d'un artefact causé par l'introduction de la commande virtuelle  $\mathbf{u}$  et l'augmentation de l'espace d'état. Nous devons garder à l'esprit que la dynamique interne du corps est en fait la vraie commande. Cette remarque sera utile dans la section 4.5.3 pour comparer à l'instabilité de la *dynamique interne du corps*.

Notre loi de contrôle ne sera pas directement obtenue en résolvant le système (4.6), c'est-à-dire en considérant tout l'état étendu  $\mathbf{X}$ , mais plutôt en adressant séquentiellement chaque niveau de commande défini par les Eqs. (4.4) et (4.5) (voir la Fig. 4.2).

Pour le contrôleur de premier niveau, le rejet des perturbations est effectué en définissant un retour d'état complet. Ce contrôle consiste simplement à amortir l'énergie par une commande linéaire  $\mathbf{u} \propto -\widetilde{M}_0 \eta_0$ , où  $\eta_0$  est la sortie. Par contre, la dynamique interne est beaucoup plus complexe à gérer. Une fois le premier niveau de contrôle est défini, la commande virtuelle  $\mathbf{u}$  est connue, et la variation de la forme du corps doit

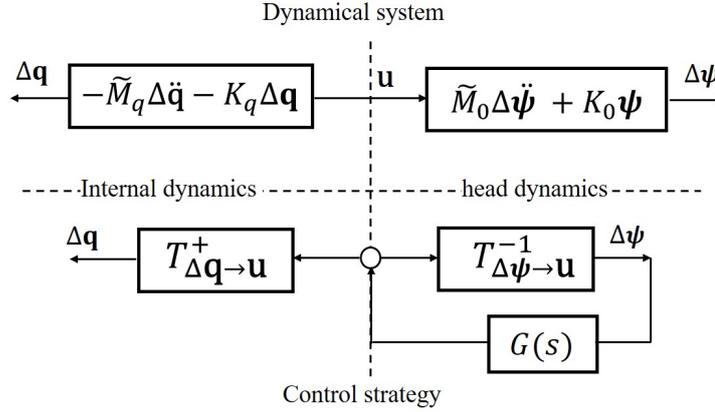


FIGURE 4.2 – Nous résumons notre stratégie en divisant le système en un diagramme à quatre parties. La partie supérieure correspond au schéma bloc issu du système dynamique donné par l'Eq. (4.2). Les parties gauches et droites correspondent respectivement à la dynamique interne du corps et à la dynamique de la tête. La partie inférieure est le schéma de la stratégie de contrôle proposée en réécrivant le système dynamique avec une rétroaction virtuelle  $\mathbf{u}$ . Ici, le système donné par Eqs. (4.4) et (4.5) a été réécrit en terme de fonction de transfert avec  $T_{\Delta \boldsymbol{\psi} \rightarrow \mathbf{u}}$  mappant l'entrée  $\Delta \boldsymbol{\psi}$  à la sortie  $\mathbf{u}$  pour la dynamique de la tête, et  $T_{\Delta \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{u}}$  mappant l'entrée  $\Delta \mathbf{q}$  à la sortie  $\mathbf{u}$  pour la dynamique interne du corps.  $G(s)$  est le gain du retour d'état complet appliqué au système de tête.

la réaliser. Mathématiquement, cela implique d'inverser l'Eq. (4.5). Deux problèmes se posent alors. Premièrement, la fonction de transfert associée possède un zéro à partie réelle positive, ce qui implique que la dynamique interne du corps est naturellement instable. Deuxièmement, cette fonction de transfert ne peut pas être simplement inversée puisque l'application linéaire est injective en raison de l'hyper-redondance du robot.

Pour surmonter le second problème, une décomposition en valeurs singulières des matrices  $\tilde{M}_q$  et  $K_q$  de l'Eq. (4.2) nous permet de réduire l'espace de la forme du corps en divisant les modes de déformation en trois catégories : trois modes produisant des effets inertiels, trois modes produisant uniquement des variations de flottabilité et des modes neutres sans effets sur le modèle linéaire qui ne seront pas utilisés. Les six premiers modes de déformation du corps seront exploités pour simultanément stabiliser la dynamique interne et réaliser la commande virtuelle  $\mathbf{u}$ .

## 4.2.2 Mise en oeuvre du système de contrôle

Cette stratégie de rejet des perturbations fait partie d'un système de contrôle postural pour notre robot où un mode de feedforward et un mode de feedback sont appliqués. Avant

de décrire plus en détail les processus mis en oeuvre dans le rejet de perturbation, nous montrons comment ce contrôleur s’articule aux autres blocs développés dans le chapitre 3. Par conséquent, le système postural proposé remplit deux fonctions distinctes. Pour cela, remarquons tout d’abord que le mode prédictif reporté dans le chapitre 3 prédit une forme du corps nécessaire pour maintenir une configuration d’équilibre de la tête stable souhaitée  $g_{eq}$ . Ensuite, le mode de feedback régule la dynamique autour de cet équilibre en rejetant les perturbations qui l’affectent. Le schéma fonctionnel de ce système est reporté sur la Fig. 4.3, qui comprend le contrôleur prédictif (boîte bleue), le simulateur non linéaire de la dynamique du robot (boîte orange), et le contrôleur actuel composé d’un observateur d’état (boîte verte) et du régulateur linéaire (boîte rouge) avec le générateur de trajectoires dans l’espace articulaire. Ce schéma fonctionnel sera ensuite utilisé dans la section 4.6 pour évaluer les performances de notre contrôleur.

Le simulateur du chapitre 2 (boîte orange) émule la dynamique du robot. La configuration de la tête  $g_0$  et la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  à un instant  $t$  sont mises à jour à l’instant  $t + dt$  grâce à une forme de corps donnée  $\mathbf{q}(t)$  et ses première et seconde dérivées temporelles. Notons que la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  et l’accélération  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$  sont exprimées dans le repère de tête, telles que la dynamique perçue par une centrale à inertie (IMU) embarquée dans la tête.

Maintenant, nous considérons que le robot est dans une configuration initiale déséquilibrée, caractérisée par  $(g_0(0), \mathbf{q}(0))$  tel que  $\mathbf{W}(g_0, \mathbf{q}) \neq \mathbf{0}_6$ . Pour revenir à l’équilibre, le mode d’anticipation introduit dans le chapitre 3 calcule un état d’équilibre  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  au voisinage de cet état initial (en haut à gauche du diagramme). Comme décrit dans le chapitre 3, le solveur prédictif peut également modifier la forme pour améliorer la stabilité tout en maintenant la même configuration de tête  $g_{eq}$ .

Une fois que le mode feedforward a donné les consignes  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$ , le mode feedback produit des déformations de corps rejetant la perturbation de cet état. Ensuite, le but de l’observateur est d’estimer la dynamique des mouvements nets (pilonnement, roulis et tangage) par rapport à la surface. Pour ce faire, il transporte la vitesse de tête  $\boldsymbol{\eta}_0$  donnée par l’IMU dans le repère de surface  $\mathcal{F}_G$  pour obtenir la vitesse spatiale  $\boldsymbol{\eta}_G$ . À partir de cette vitesse, on introduit la vitesse réduite de la perturbation de tête  $\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}$  ne contenant que la vitesse linéaire  $v_z$  et les composantes angulaires  $\omega_x$  et  $\omega_y$ . Connaissance de cette vitesse, l’observateur estime également la perturbation de la tête  $\Delta\boldsymbol{\psi}$  à partir de  $\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}$  et sa valeur initiale  $\Delta\boldsymbol{\psi}(0)$ .

À partir de la vitesse réduite  $\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}$ , on peut établir une commande par retour d’état sur le mouvement de la tête en définissant une commande virtuelle  $\mathbf{u}$ . Cette fonction

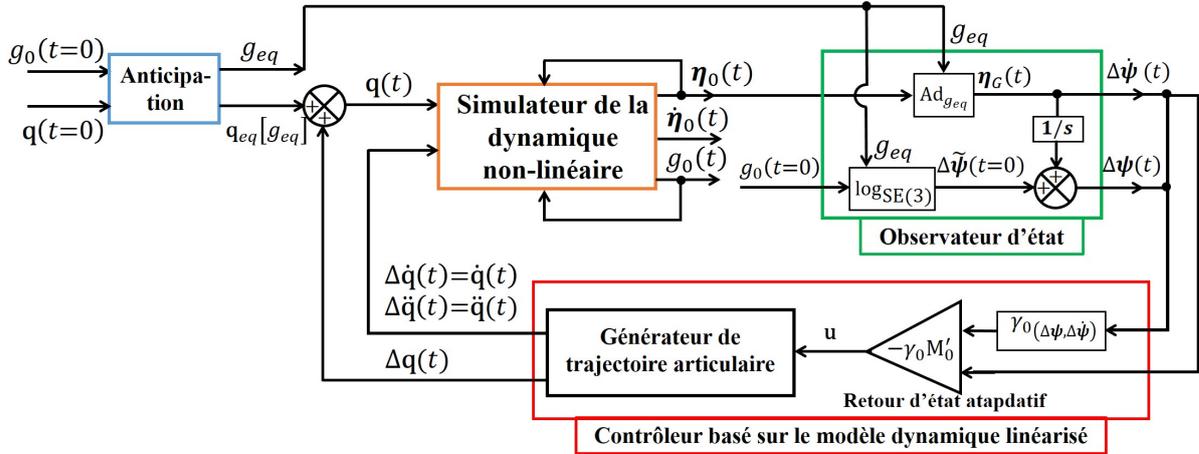


FIGURE 4.3 – Vue schématique du processus de contrôle.

agit comme un effort d'amortissement virtuel sur la tête avec un coefficient d'amortissement adaptatif  $\gamma_0(E)$  qui dépend de l'estimation linéaire de l'énergie nette  $E(\Delta\psi, \Delta\dot{\psi})$ . Le générateur de trajectoire articulaire prend, quant à lui, en entrée  $-\mathbf{u}$  et génère une dynamique interne qui reproduit cette force. La sortie de ce générateur est  $\Delta\mathbf{q}$  et ses dérivées temporelles qui sont définies comme la variation de la forme du corps autour des coordonnées articulaires  $\mathbf{q}_{eq}$ . Enfin, la trajectoire articulaire  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t))$  est reconstruite et transférée au simulateur de la dynamique inverse.

## 4.3 Modèle de linéarisation et sa réduction

Dans cette section, nous développons la méthodologie pour obtenir le modèle réduit utilisé pour le contrôleur linéaire.

### 4.3.1 Système invariant

Pour commencer, nous proposons (encore) de réduire l'espace de travail en exploitant les symétries du système. Comme vu dans la section 3.2.1, les efforts de gravité et de flottabilité sont invariants pour tout mouvement rigide le long de la surface de l'eau, qui sont composés de translations parallèles à la surface et de rotations selon la direction verticale. Ils définissent l'ensemble des transformations rigides produites par la navigation du robot sur le plan de l'eau (voir Fig. 2.10 dans la section 3.1).

Cette invariance a un impact sur la dynamique du robot que nous cherchons à formaliser. Un système mécanique est dit “G-invariant” si son Lagrangien remplit la condition [90] :

$$\mathcal{L}(g, \mathbf{q}, \dot{g}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(hg, \mathbf{q}, h\dot{g}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \forall h \in G, \quad (4.7)$$

où  $G$  est l’ensemble des transformations solides rigides  $h$  sur la surface de l’eau qui préservent le lagrangien du système. Il convient de noter que l’énergie cinétique est (à gauche) invariante pour toute transformation de  $SE(3)$ , alors que l’énergie potentielle n’est invariante qu’à la transformation  $h$ . Par conséquent, nous définissons l’ensemble  $G \subset SE(3)$  dont les éléments  $h$  sont paramétrés par le lacet, l’embarquée et le cavement  $(\theta_z, t_x, t_y)$ . Ces transformations homogènes sont définies par :

$$h = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & t_x \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

où l’espace  $G \subset SE(3)$  est isomorphe à  $SE(2)$ . Cette invariance a deux conséquences majeures. Premièrement, notre objectif défini par la limite dans l’Eq. (4.1) est également  $G$ -invariant, puisque le système reste à l’équilibre après une multiplication à gauche par  $h \in G$ . Le système peut ainsi atteindre l’équilibre sur n’importe quelle configuration arbitraire  $g = hg_{eq}$  pour  $h \in G$ . Cela implique qu’il n’y a que trois degrés de liberté pertinents nécessaires pour décrire la convergence vers un état d’équilibre. Ils sont donnés par le roulis, le tangage et le pilonnement. Ces éléments prennent des valeurs dans le nouvel espace de travail  $S^2 \times \mathbb{T}(1)$ , caractérisé par le produit de deux cercles et un sous-groupe  $\mathbb{T}(1)$  donné par la translation  $t_z$ . Deuxièmement, pour exploiter cette invariance spatiale, la dynamique doit être exprimée dans le repère de surface  $\mathcal{F}_G$  pour supprimer les trois degrés de liberté liés à la locomotion et ne garder que le roulis, le tangage et le pilonnement (voir Fig. 2.10).

### 4.3.2 Voisinage et espace tangent

Pour établir la commande par retour d’état, le modèle lagrangien de la dynamique de la tête autour de la configuration d’équilibre  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  doit être linéarisé à partir de l’entrée et de la sortie. Notre méthode consiste d’abord à définir le voisinage de  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  à partir de la sortie  $\boldsymbol{\eta}_0$  (i.e. la vitesse de la tête) et de l’entrée  $\mathbf{q}$ , puis à identifier l’espace

tangent produit par des variations infinitésimales de ces paramètres. Ce processus est résumé à la Fig. 4.4.

Ainsi, on définit le voisinage de  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  grâce au système d'équations :

$$\begin{cases} g_0(t) = h(t) ({}_0g^{eq}) g_{eq}, \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{eq} + \Delta\mathbf{q}(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

Ici, le voisinage est paramétré par les éléments  $({}_0g^{eq}, \Delta\mathbf{q}) \in C$  avec  ${}_0g^{eq} \in \text{SE}(3)$  la transformation relative de la configuration d'équilibre  $g_{eq}$  à la configuration de tête  $g_0(t)$ . La présence de la transformation  $h \in G$  dans la première équation permet d'exprimer l'écart à l'équilibre donné par  ${}_0g^{eq}$  dans n'importe quel repère  $\mathcal{F}_G$  sur la surface de l'eau (voir la Fig. 4.4) tout en préservant le lagrangien.

Supposons d'abord que  $h$  est la transformation identité dans  $\text{SE}(3)$ . Dans ce cas, la transformation relative  ${}_0g^{eq}$  est exprimée dans le repère  $\mathcal{F}_{G^*}$  avec  ${}_0g^{eq} = g_0g_{eq}^{-1}$ . Cependant, la transformation  ${}_0g^{eq}$  décrit à la fois la perturbation que nous voulons rejeter et le mouvement du robot sur la surface, qui ne nous intéresse pas.

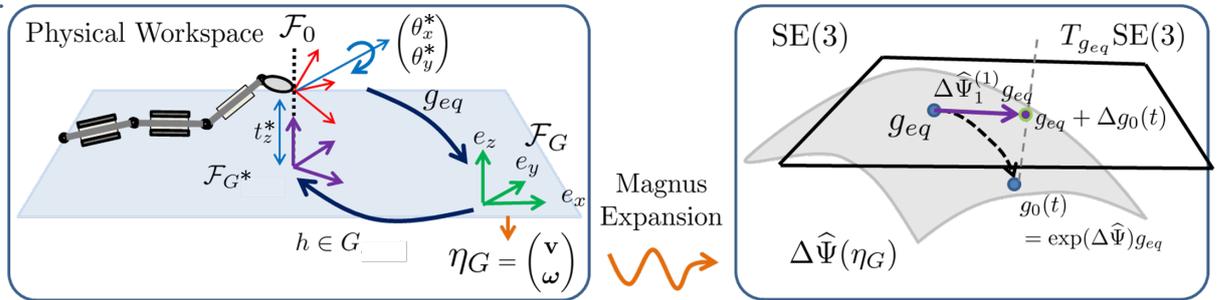


FIGURE 4.4 – Représentation schématique de la linéarisation. Tout d'abord, nous reconstruisons la configuration de la tête  $g_0(t)$  (un élément du groupe  $\text{SE}(3)$ ) à partir de la vitesse de la tête  $\eta_G$  exprimée dans le repère galiléen  $\mathcal{F}_G$  (extrait de la dynamique dans l'espace de travail physique). Pour ce faire, nous utilisons l'expansion de Magnus pour calculer le torseur de mouvement  $\Delta\Psi$ . Enfin, on ne retient que le premier terme  $\Delta\Psi_1$  de l'expansion pour rester dans l'espace tangent local  $T_{g_{eq}}\text{SE}(3)$ .

Ainsi, nous proposons d'utiliser un repère mobile  $\mathcal{F}_{G^*}$  défini par une transformation rigide  $h \in G$  correspondant à la projection orthogonale du mouvement de la tête sur la surface de l'eau. Pour ce faire, la transformation  ${}_0g^{eq}$  décrit uniquement le pilonnement  $t_z^*$ , le roulis  $\theta_x^*$  et le tangage  $\theta_y^*$  exprimés dans le repère mobile  $\mathcal{F}_{G^*}$ . Par commodité, nous

supposerons qu'à  $t = 0$ , les repères  $\mathcal{F}_{G^*}$  et  $\mathcal{F}_G$  coïncident de sorte que  $h(t = 0)$  est une matrice d'identité. Plus de détails sur les définitions de  $h$  et de  ${}_0g^{eq}$  sont donnés dans l'annexe A.6.

À partir de la première équation du système (4.9), nous introduisons la décomposition de la vitesse de la tête  $\boldsymbol{\eta}_0$  comme

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \text{Ad}_{(g_0^{-1}h)}(\boldsymbol{\eta}_{G^*} + \mathbf{V}_{surf}), \quad (4.10)$$

avec

$$\frac{d}{dt}({}_0g^{eq}) = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{G^*}({}_0g^{eq}) \quad (4.11)$$

et

$$\dot{h} = h\hat{\mathbf{V}}_{surf}. \quad (4.12)$$

Nous avons ainsi décomposé la vitesse du robot (Eq. 4.10) en deux composantes : la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_{G^*}$  de la tête relativement au repère  $\mathcal{F}_{G^*}$  ( Eq. 4.11) comprenant uniquement le roulis, tangage et pillonnement dans le repère de la surface ; et la vitesse  $\mathbf{V}_{surf}$  du repère  $\mathcal{F}_G^*$  (Eq. 4.12) définissant ainsi la navigation plan “vue par le nageur”.

Cette décomposition nous permet ainsi d'extraire de la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  idéalement mesurée par une centrale inertielle, la composante  $\boldsymbol{\eta}_{G^*}$  associée aux perturbations de la nage planaire. Néanmoins, le principal défi consiste alors à cartographier le voisinage de  $g_{eq}$  sur le groupe SE(3) à partir de la sortie  $\boldsymbol{\eta}_{G^*}$ .

Nous proposons tout d'abord de paramétrer ce voisinage à l'aide de la carte exponentielle  $\exp(-)$  (voir la section 3.2.1). À partir de cette carte exponentielle, nous pouvons exploiter un isomorphisme entre un espace vectoriel  $\Delta\Psi$  et la transformation relative  ${}_0g^{eq}$  telle que :

$${}_0g^{eq} = \exp(\Delta\hat{\Psi}) \quad (4.13)$$

Rappelons que le torseur  $\Delta\Psi \in \mathbb{R}^6$  n'a que trois composantes non nulles données par le pillonnement, le roulis et le tangage. Nous l'avons paramétré avec le vecteur  $\Delta\boldsymbol{\psi}^T = (t_z, \theta_x, \theta_y) \in \mathbb{R}^3$  (cf. Eq.(3.2) dans le chapitre 3).

Maintenant,  $\Delta\boldsymbol{\psi}$  doit être évalué à partir de la sortie  $\boldsymbol{\eta}_0$ , et plus précisément de la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_{G^*}$  qui est donnée par l'inversion de l'Eq. (4.10) avec

$$\boldsymbol{\eta}_{G^*} = \text{Ad}_{h^{-1}g_0}\boldsymbol{\eta}_0 - \mathbf{V}_{surf}. \quad (4.14)$$

Il faut maintenant intégrer  $\boldsymbol{\eta}_{G^*}$  pour obtenir  $\Delta\boldsymbol{\psi}$ . Néanmoins,  $\Delta\boldsymbol{\Psi}$  est la solution d'une équation différentielle non linéaire de  $\boldsymbol{\eta}_G^*$ . En effet, on peut montrer que

$$\frac{d}{dt}e^{\Delta\hat{\Psi}} \neq \dot{\hat{\Psi}}e^{\Delta\hat{\Psi}} \quad (4.15)$$

car les matrices  $\Delta\hat{\Psi}$  et  $\dot{\hat{\Psi}}$  ne commutent pas. La dérivée de l'application exponentielle va ainsi faire émerger des applications adjointe  $\text{ad}_{\hat{\Psi}}$  induite par la non-commutativité du groupe SE(3).

Il vient que la combinaison des équations (4.11) et (4.13) ne permet pas d'obtenir l'identité triviale que  $\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \neq \boldsymbol{\eta}_G^*$ . Il faut donc résoudre le problème non-linéaire suivant

$$\frac{d}{dt}e^{\Delta\hat{\Psi}} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_G^*e^{\Delta\hat{\Psi}} \quad (4.16)$$

Cette solution peut être approchée par une expansion de Magnus [113] qui prend la forme suivante :

$$\Delta\boldsymbol{\Psi} = \sum_k \Delta\boldsymbol{\Psi}_k(\boldsymbol{\eta}_{G^*}). \quad (4.17)$$

Dans ce développement, chaque terme contient la primitive des commutations des termes d'ordre inférieur. Dans notre problème, nous nous intéressons uniquement au premier terme  $\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}_1(t)$  qui est linéaire par rapport à  $\boldsymbol{\eta}_G G^*$  et donné par :

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}_1(t) = \Delta\boldsymbol{\Psi}_1(0) + \int_0^t \boldsymbol{\eta}_{G^*}(t')dt', \quad (4.18)$$

où  $\Delta\boldsymbol{\Psi}_1(0)$  est la condition initiale correspondant à la perturbation qui doit être rejetée. Nous supposons que cette composante est initialement connue et peut être calculée par le logarithme sur SE(3) avec  $\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}_1(0) = \log[g_0(0)g_{eq}^{-1}]$  (voir le schéma bloc 4.3). Nous venons de montrer que le voisinage de  $g_{eq}$  est finalement donné par l'intégration de  $\boldsymbol{\eta}_G^*(\boldsymbol{\eta}_0)$  grâce à l'expansion de Magnus. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à la première composante  $\Delta\boldsymbol{\Psi}_1$  qui nous permettra d'approximer localement le groupe SE(3) par le plan tangent à la configuration d'équilibre  $g_{eq}$ .

La dernière étape consiste ainsi à estimer l'espace tangent de  $C$  (le groupe de la configuration  $({}_0g^{eq}, \Delta\mathbf{q})$ ) à partir de la paramétrisation du voisinage que nous venons d'établir. Nous supposons qu'il est généré par des variations infinitésimales de la vitesse du corps  $\boldsymbol{\eta}_0$  et de la variation de la forme du corps  $\Delta\mathbf{q}$  telles que  $(\boldsymbol{\eta}_0, \Delta\mathbf{q}) \mapsto (\epsilon\boldsymbol{\eta}_0, \epsilon\Delta\mathbf{q})$  avec  $\epsilon \ll 1$ . Nous avons reporté dans l'annexe A.6 les détails techniques permettant de développer les terme  $g_0$ ,  $\boldsymbol{\eta}_0$ , et  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$  en fonction de  $\epsilon$ . Dans ces étapes, nous avons linéarisé

l'application exponentielle donnée par 4.13 puis utilisé le développement de Magnus. Nous avons aussi traité rigoureusement la décomposition en puissance de  $\epsilon$  la composition des vitesses donnée par 4.14.

Notre calcul montre ainsi que la dynamique sur l'espace tangent peut être réduite à une fonction unique  $\Delta\psi_1^{(1)}$  et ses dérivées temporelles correspondant à la correction du premier ordre de la série de perturbations en  $\epsilon$  (indexée par l'exposant (1)) du premier terme du développement de Magnus (indexé par l'indice 1). Cette expansion se lit

$$\begin{cases} g_0(t) = g_{eq} + \epsilon \Delta\widehat{\psi}_1^{(1)}(t) g_{eq} + O(\epsilon^2), \\ \epsilon\boldsymbol{\eta}_0(t) = \epsilon \text{Ad}_{g_{eq}^{-1}} \mathcal{P} \Delta\dot{\psi}_1^{(1)}(t) + \epsilon \text{Ad}_{g_{eq}^{-1}} \mathbf{V}_{surf} + O(\epsilon^2), \\ \epsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}_0(t) = \epsilon \text{Ad}_{g_{eq}^{-1}} \mathcal{P} \Delta\ddot{\psi}_1^{(1)}(t) + \epsilon \text{Ad}_{g_{eq}^{-1}} \dot{\mathbf{V}}_{surf} + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (4.19)$$

avec  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  la matrice de projection permettant de projeter l'état réduit de dimension 3 dans la dynamique de dimension 6 (cf. Eq. (3.2)).

Nous récupérons naturellement la configuration d'équilibre statique lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro dans le système 4.19. La première ligne correspond à la petite perturbation de la stabilité et les deuxième et troisième sont la décomposition de la vitesse et de l'accélération pour les petites perturbations proches de l'équilibre. A noter que nous avons omis dans le développement de  $g_0(t)$  le terme issu de la navigation à la surface de l'eau  $h(t)$  qui n'a pas d'impact sur la dynamique des perturbations.

Nous pouvons ainsi exprimer toutes les forces et termes inertiels de l'équation en fonction de l'écart à l'équilibre paramétré par la variable  $\Delta\psi_1^{(1)}(t)$ . La deuxième du système 4.19 permet de reconstruire  $\Delta\psi_1^{(1)}(t)$  en fonction de la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  en connaissant la configuration d'équilibre  $g_{eq}$  constante.

Dans la suite du chapitre, nous allons simplifier les notations en utilisant  $\Delta\psi$  au lieu de  $\Delta\psi_1^{(1)}$ .

### 4.3.3 Dynamique linéarisée

L'objectif de cette section est de dériver le système linéaire reliant l'évolution temporelle de la perturbation de la charge de l'équilibre  $\Delta\psi$  aux coordonnées articulaires  $\Delta\mathbf{q}(t)$ .

Ce système est obtenu en introduisant les perturbations données par les Eqs. 4.19 dans

le modèle dynamique donné par l'équation suivante (voir la section 2.8 pour les détails) :

$$\mathcal{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + M_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{W}_{stat}(g_0, \mathbf{q}), \quad (4.20)$$

en appliquant  $d/d\epsilon$  et en prenant  $\epsilon = 0$ . Enfin, nous transportons la dynamique initialement développée dans le repère de la tête  $\mathcal{F}_0$  dans le repère global  $\mathcal{F}_G$  par une multiplication à gauche avec la transposée de  $\text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}\mathcal{P}$ . Ce système prend la forme suivante :

$$\widetilde{M}_0(\mathbf{q}_{eq})\Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \widetilde{M}_q(\mathbf{q}_{eq})\Delta\ddot{\mathbf{q}} = (D_g\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\boldsymbol{\psi} + (D_q\widetilde{\mathbf{W}})\Delta\mathbf{q} \quad (4.21)$$

Les matrices d'inertie  $\widetilde{M}_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\widetilde{M}_q \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  sont gelées dans la forme du corps à l'équilibre, tandis que les forces de Coriolis et centrifuges sont négligées puisqu'elles apparaissent via des termes d'ordre  $\epsilon^2$ . Ici, ces matrices d'inertie sont exprimées dans le repère global et projetées dans l'espace G-invariant, définies par :

$$\begin{cases} \widetilde{M}_0 = (\text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}\mathcal{P})^T \mathcal{M}(\text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}\mathcal{P}) \\ \widetilde{M}_q = (\text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}\mathcal{P})^T M_q \end{cases} \quad (4.22)$$

Par commodité, nous ignorons le symbole “tilde” de  $\widetilde{M}_0$  et de  $\widetilde{M}_q$  dans la suite du chapitre.

Remarquons que la matrice  $\widetilde{M}_0$  reste définie positive. De plus, nous avons négligé la contribution inertielle de la navigation induite par  $\dot{\mathbf{V}}_{surf}$  en énonçant que

$$(\text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}\mathcal{P})^T \mathcal{M}\text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}(\epsilon\dot{\mathbf{V}}_{surf}) = O(\epsilon^2) \quad (4.23)$$

En effet, l'étude de la matrice d'inertie projetée définie ci-dessus montre que les coefficients de couplage entre le mouvement de perturbation et la locomotion en surface sont au minimum d'ordre  $\epsilon$ . De manière plus détaillée, remarquons que les configurations d'équilibres considérées  $g_{eq}$  sont caractérisées par de faibles angles de roulis et de tangage, de sorte que le plan frontal du robot est légèrement incliné par rapport à la surface de l'eau. Ainsi, puisque le robot reste presque parallèle à la surface de l'eau, la contribution inertielle de la navigation provient des termes croisés dans la matrice d'inertie. Or, les moments d'inertie couplant les rotations dont l'axe est dans le plan  $x0y$  et la rotation selon  $\mathbf{e}_z$  sont entre 2 ou 3 ordres de grandeur plus petits que les autres moments d'inertie. Par conséquent, les interactions entre les composantes rotationnelles  $(\omega_x, \omega_y)$  et  $\omega_z$  peuvent être négligées au premier ordre, justifiant l'Eq. (4.23).

Les deux matrices  $(D_g \widetilde{\mathbf{W}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $(D_q \widetilde{\mathbf{W}}) \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  dans l'Eq. (4.21) sont les matrices jacobiennes du torseur hydrostatique  $\widetilde{\mathbf{W}}$  par rapport à la variation de la tête et à la déformation du corps évaluées à  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  (définies dans la section 3.3.2). Puisque  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  est un équilibre stable qui correspond à un minimum d'énergie potentielle, la matrice de raideur hydrostatique  $K_0 = -D_g \widetilde{\mathbf{W}}$  est donc une matrice définie positive quantifiant la stabilité locale de l'équilibre (voir la section 3.3.5). Réciproquement, on peut définir une matrice rectangulaire de pseudo-raideur  $K_q = -D_q \widetilde{\mathbf{W}}$  qui est *a priori* non définie positive. Son interprétation directe est moins évidente, mais on peut introduire une variation du torseur d'équilibre  $\Delta \boldsymbol{\psi}_{eq}$  donnée par la relation (3.21) dans le chapitre 3. Dans la prochaine section, nous allons présenter la loi de contrôle en boucle fermée basée sur la dynamique linéarisée (4.21). Par simplicité, le symbole "tilde" va être ignoré dans la suite de ce chapitre.

## 4.4 Rejet de perturbation de la tête

### 4.4.1 Commande virtuelle par retour d'état

La dynamique de tête linéarisée étant caractérisée par deux matrices définies positives  $M_0$  et  $K_0$ , le système n'est rien d'autre qu'un système conservatif de type masse-ressort dans  $\mathbb{R}^3$ . En l'absence de feedback, ses pôles ont des valeurs purement imaginaires correspondante aux fréquences propres des mouvements libres couplant pilonnement, tangage et roulis. Comme ces matrices sont définies positives, le système donné par (4.4) est contrôlable. Par conséquent, le rejet de perturbation peut être effectué en exploitant la sortie  $\eta_0$  de sorte que

$$\mathbf{u} = -\gamma_0(t) M_0 \Delta \dot{\boldsymbol{\psi}} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{avec} \quad \Delta \dot{\boldsymbol{\psi}} = P^T \text{Ad}_{g_{eq}} \eta_0 \quad (4.24)$$

avec  $\gamma_0(t) \in \mathbb{R}^+$  coefficient d'amortissement dépendant du temps pour permettre un amortissement adaptatif des oscillations. Comme ce feedback est linéaire par rapport à la sortie, il peut être facilement mis en œuvre.

La convergence vers l'équilibre est garantie pour tout  $\gamma_0(t) > 0$  en utilisant l'approximation linéaire de l'énergie nette du système  $E(t)$  comme fonction de Lyapunov. Cette énergie est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \Delta \dot{\boldsymbol{\psi}}^T M_0 \Delta \dot{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\psi}^T K_0 \Delta \boldsymbol{\psi}, \quad (4.25)$$

### 4.4.2 Coefficient d'amortissement adaptatif

Le coefficient d'amortissement doit être suffisamment grand pour assurer la convergence en quelques oscillations du corps. Cependant, la puissance transférée à la dynamique interne  $|\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{u}|$  est également linéairement proportionnel au coefficient d'amortissement. Par conséquent, un amortissement important peut entraîner une surcharge du moteur en raison d'un transfert excessif d'énergie du mouvement du corps solide vers la dynamique interne. Un compromis doit donc être trouvé.

Pour résoudre ce problème sans contrainte explicite, nous proposons d'adapter l'amortissement en fonction de l'énergie  $E(t)$  du mouvement de la tête (cf. l'Eq. (4.25)). En régime linéaire, la puissance transmise au moteur et l'énergie nette satisfont l'inégalité suivante

$$|\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{u}| \leq 2\gamma_0 E(t). \quad (4.26)$$

Cette relation implique que le coefficient d'amortissement doit diminuer à mesure que l'énergie augmente pour garder la quantité  $|\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{u}|$  bornée. Par conséquent, nous introduisons le coefficient d'amortissement adaptatif suivant

$$\gamma_0(E) = \gamma_0(0) \exp \left[ -\frac{E(t)}{\bar{E}} \right] \quad (4.27)$$

avec l'énergie  $E(t)$  introduite dans l'Eq. (4.25),  $\bar{E}$  une barrière d'énergie et  $\gamma_0(0)$  le coefficient d'amortissement asymptotique lorsque  $E(t)/\bar{E} \rightarrow 0$ .

Loin de l'équilibre avec  $E(t) \gg \bar{E}$ , le taux d'amortissement est faible, ce qui évite une surcharge des moteurs. Inversement, au fur et à mesure que la dynamique se rapproche du bassin d'attraction de l'équilibre, le taux d'amortissement peut être augmenté pour accélérer le rejet des perturbations. Ainsi, le coefficient  $\bar{E}$  est assimilable à une barrière énergétique (cf. l'équation d'Arrhenius [114]) définissant le bassin d'attraction. Un filtre passe-bas numérique de premier ordre est ensuite appliqué pour lisser la fluctuation du taux d'amortissement de sorte que son évolution soit très lente par rapport à la dynamique de la tête (voir l'annexe A.6.3). Fort de ce choix, nous considérerons le taux d'amortissement comme une "constante variant lentement" dans le processus de rejet de perturbation.

## 4.5 Génération de trajectoire dans l'espace articulaire

### 4.5.1 Principal de génération de trajectoire

Pour réaliser la commande virtuelle  $\mathbf{u}$ , l'entrée  $\Delta\mathbf{q}(t)$  doit être une solution particulière du système linéaire (4.5) avec  $-\mathbf{u}(t)$  le terme de forçage défini dans la section précédente (cf. l'Eq. (4.24)). Comme cette application linéaire est surjective (une conséquence directe de la redondance), de différentes trajectoires  $\Delta\mathbf{q}(t) \in \mathcal{S}^{14}$  peuvent produire la même commande virtuelle  $-\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^3$ , et une fois qu'une solution particulière est trouvée, cette trajectoire peut être superposée à l'une des solutions homogènes de l'équation (4.5) qui ne produit aucune commande  $\mathbf{u}$ .

Pour réduire cette complexité apparente, nous proposons d'abord d'identifier le sous-espace  $\mathcal{S}_u$  de l'espace articulaire  $\mathcal{S}$ , où chaque élément produit un effort d'amortissement sur la tête. Nous montrons que ce sous-espace peut être paramétré par six coordonnées articulaires modales indépendantes, qui pourraient être combinées linéairement pour obtenir une bijection entre  $\mathcal{S}_u$  et l'image de l'opérateur donnant  $\mathbf{u}$ . Ce processus nous amène à définir trois stratégies différentes, où les deux premières stratégies s'avèrent instables. Ces instabilités sont liées à la physique et au conditionnement du système. Enfin, nous introduisons une stratégie stable qui consiste à combiner linéairement les coordonnées articulaires sous la forme d'une dérivée proportionnelle.

### 4.5.2 Réduction de l'espace de forme

Dans cette section, nous allons identifier le sous-espace pertinent  $\mathcal{S}_u$  de l'espace des formes du corps  $\mathcal{S}$ , qui peut générer l'entrée virtuelle. Pour toutes les formes du corps étudiées dans cette étude (cf. tableau 3.1), le rang de chaque matrice  $M_q$  et  $K_q$  est toujours trois. Cela implique que la dimension du sous-espace est comprise entre 3 et 6. Notamment,  $\dim(\mathcal{S}_u) = 3$  correspond au cas où le système n'est plus redondant et où une bijection existe entre  $\mathcal{S}_u$  et l'image de l'application linéaire. Pour identifier ce sous-espace, nous introduisons la décomposition en valeurs singulières de  $M_q$  :

$$M_q = U_m \begin{pmatrix} \Sigma_m & 0_{3 \times (n-3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_m^T \\ N_m^T \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

avec la matrice unitaire  $U_m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la matrice diagonale  $\Sigma_m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et les matrices de projection  $N_m \in \mathbb{R}^{n \times (n-3)}$  formées par le noyau de  $M_q$ , et  $Q_m \in \mathbb{R}^{n \times (3)}$  générant l'image de  $M_q$ . La même décomposition peut être effectuée pour  $K_q$  en changeant l'indice  $m$  en  $k$  pour  $Q$  et  $N$ .

Nous proposons d'étendre le sous-espace  $\mathcal{S}_u$  avec les vecteurs donnés par les colonnes de  $Q_m$  et  $Q_k$  qui génèrent respectivement l'image de  $M_q$  et  $K_q$ . Par conséquent, nous avons divisé l'espace des formes en trois sous-ensembles paramétrés par les composantes suivantes :

$$\Delta \mathbf{q} = Q_m \hat{\mathbf{q}} + P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{r} \quad (4.29)$$

Le sous-espace  $\mathcal{S}_u$  est engendrée par les vecteurs indépendants qui constituent les colonnes des matrices  $\{Q_m, P\}$ . Le vecteur  $\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$  correspond aux composantes de l'espaces vectoriel formé par les trois colonnes de  $Q_m$  (cf. Eq. (4.28)). Le vecteur  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$  correspond aux composantes de l'espace formé par les trois colonnes de  $Q_k$  qui sont ensuite projetées sur le noyau de la matrice  $M_q$ . Cette base est obtenue par l'algorithme de Gram–Schmidt (cf. Annexe A.5) appliqué colonnes de  $N_m(N_m^T Q_k)$  empilés dans  $P$ . Pour la forme du corps étudiée dans notre étude, le rang de  $N_m^T Q_k$  est toujours 3, ce qui implique que le sous-espace  $\mathcal{S}_u$  de base  $\{Q_m, P\}$  est de dimension 6. Enfin, la composante restante  $\mathbf{r}$  correspond aux éléments appartenant à l'intersection des noyaux de  $M_q$  et  $K_q$ . Elle ne joue donc aucun rôle dans la dynamique interne du corps (à l'ordre linéaire). Par souci de simplicité, nous choisissons de fixer  $r$  à zéro et de travailler uniquement avec  $\Delta \mathbf{q} \in \mathcal{S}_u$ . Cependant, cette composante pourrait être utilisée dans le future pour nager sur la surface de l'eau ou produire des trajectoires articulaires plus lisses.

Pour la forme en cosinus, nous avons calculé les six vecteurs de l'ensemble de base  $\{Q_m, P\}$  qui forment une base orthonormée (leurs coordonnées articulaires sont reportées en annexe). À des fins d'illustration, nous avons reconstruit certaines des formes du corps générées par le sous-espace  $\mathcal{S}_u$ . Elles sont illustrées sur la Fig. 4.5. Les formes du corps de la colonne de gauche (respectivement de droite) correspondent aux trois vecteurs générant la matrice  $Q_m$  (respectivement  $P$ ). Il convient de rappeler que la déformation du corps utilisant les formes du corps générées par les vecteurs de  $P$  (colonne de droite) ne produit aucun effet inertiel net, c'est-à-dire que les accélérations de chaque module se compensent. Ces types de déformations pourraient être interprétées comme des déformations quasi-statiques qui ne produisent aucun effet d'inertie qu'au second ordre ( $\simeq \epsilon^2$ ).

Maintenant, en introduisant l'Eq. (4.29) dans le système linéaire (4.5), on obtient la



FIGURE 4.5 – Six formes de corps générées par les modes indépendants de déformation du corps engendrant le sous-ensemble  $\mathcal{S}_U$  pour une forme de corps  $q_{eq}$  à l'équilibre correspondant à une forme en cosinus. Colonne de gauche : forme du corps correspondant aux coordonnées articulaires  $\mathbf{q}_{eq} + Q_m \hat{\mathbf{q}}$  où (de haut en bas)  $\hat{\mathbf{q}}^T = [\hat{q}_1, 0, 0]$ ,  $[0, \hat{q}_2, 0]$  and  $[0, 0, \hat{q}_3]$ . Colonne de droite : formes correspondant aux coordonnées articulaires  $\mathbf{q}_{eq} + P \tilde{\mathbf{q}}$  où (de haut en bas)  $\tilde{\mathbf{q}}^T = [\tilde{q}_1, 0, 0]$ ,  $[0, \tilde{q}_2, 0]$  and  $[0, 0, \tilde{q}_3]$ .

dynamique réduite pour le mouvement interne du corps :

$$(M_q Q_m) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + (K_q Q_m) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (K_q P) \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{u}(t) \quad (4.30)$$

Par conséquent, on peut exploiter six composants indépendants  $\hat{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}$  pour générer la commande virtuelle. Par construction,  $P \tilde{\mathbf{q}}$  ne contribue pas aux effets d'inertie, tandis que les composantes  $Q_m \hat{\mathbf{q}}$  peuvent produire des effets d'inertie et de gravité.

Sous sa forme actuelle, l'équation (4.30) n'a pas de solution unique puisque la bijectivité entre  $\Delta \mathbf{q}$  et  $\mathbf{u}$  n'est satisfaite que lorsque  $\Delta \mathbf{q}$  est paramétré par seulement trois composants. Il existe donc trois possibilités pour réduire cette redondance : utiliser uniquement  $\hat{\mathbf{q}}$  en fixant  $\tilde{\mathbf{q}} = 0$  (stratégie I), utiliser uniquement  $\tilde{\mathbf{q}}$  en fixant  $\hat{\mathbf{q}} = 0$  (stratégie II), ou exploiter une combinaison linéaire des deux composants avec une contrainte supplémentaire qui peut prendre la forme  $\phi(\hat{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}_3$  (stratégie III).

Ces combinaisons forment trois stratégies différentes qui sont étudiées dans les sections suivantes : les deux premières étant instables tandis que la dernière vise à combiner les avantages des stratégies (I) et (II) tout en évitant leurs limitations.

### 4.5.3 Stratégie I

En fixant  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , le choix I consiste à résoudre le système du second ordre (4.30) pour  $\hat{\mathbf{q}}$  donné par

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + A\dot{\hat{\mathbf{q}}} = -(M_q Q_m)^{-1} \mathbf{u}(t) \quad (4.31)$$

Cependant, la matrice  $A = (M_q Q_m)^{-1} (K_q Q_m)$  comporte toujours une valeur propre négative conduisant à une solution homogène illimitée de l'Eq. (4.31) qui ne peut pas satisfaire la condition  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_{eq}$ . Par conséquent, si la solution particulière reste bornée, tout écart par rapport à cette solution particulière pourrait conduire à une croissance exponentielle du mouvement interne du corps, ce qui a été confirmé dans les simulations. En effet, cette valeur propre négative correspond à une raideur négative éloignant la dynamique interne de la forme du corps à l'équilibre  $\mathbf{q}_{eq}$ .

Nous observons que cette instabilité existe dans une large gamme de formes corporelles  $\mathbf{q}_{eq}$ , ce qui suggère que ce phénomène est inhérent à notre système. Ce couplage instable entre l'inertie et la flottabilité est une généralisation du problème bien connu de stabilité hydrostatique appliqué au mouvement interne d'un robot [63]. Les oscillations non bornées du mouvement interne proviennent du fait qu'il existe toujours une variation de la forme du corps telle que les effets d'inertie du mouvement interne ne sont pas progressivement compensés par l'effort hydrostatique, mais au contraire l'amplifient. Une étude plus approfondie de cette instabilité est reportée dans l'annexe A.6.3. Par conséquent, la stratégie I n'est pas acceptable car elle peut conduire à des solutions non bornées pour  $\Delta q$ .

### 4.5.4 Stratégie II

Le deuxième choix consiste à fixer  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire à s'assurer qu'aucune accélération du mouvement interne. Il permet une application linéaire entre  $\hat{\mathbf{q}}$  et  $\mathbf{u}$  telle que  $\text{rang}(K_q P) = 3$  sans résoudre une équation différentielle. En éliminant la partie inertielle,  $\Delta \mathbf{q}$  agit comme une commande avec une représentation classique de l'espace d'état, et aucune commande virtuelle n'est alors nécessaire. En combinant les Eqs. (4.30) et (4.24)

on obtient la commande  $\Delta \mathbf{q}$  en fonction du feedback  $\dot{\psi}$  :

$$\Delta \mathbf{q} = -P(K_q P)^{-1} (-\gamma_0 M_0 \Delta \dot{\psi}) \quad (4.32)$$

Ensuite, la vitesse  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  et l'accélération  $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$  sont estimées grâce respectivement à  $\Delta \ddot{\psi}$  et  $\Delta \dddot{\psi}$ . La dérivée  $\Delta \ddot{\psi}$  est calculée numériquement par un schéma temporel du second ordre. Cependant, on observe à nouveau une instabilité de la dynamique lorsque ce feedback est introduit dans le système non linéaire. Le mouvement de la tête présente une croissance exponentielle inattendue. Cette instabilité diffère de celle produite par la raideur négative observée dans la stratégie I, puisque l'ensemble du système (mouvement interne du corps + mouvement de la tête) devient instable dans cette stratégie alors que seul le mouvement interne était instable dans la stratégie I.

En outre, il convient de noter que la dynamique linéaire de la tête donnée par l'Eq. (4.4) ne peut pas rendre compte de l'instabilité (au moins à l'ordre  $\epsilon$ ) car elle reste stable par construction. Par conséquent, nous soupçonnons que cette instabilité est causée par un autre mécanisme associé à l'introduction de la rétroaction dans le système non linéaire. Ici, une rupture de causalité, introduite par l'Eq. (4.32) due à l'estimation de  $\Delta \ddot{\psi}$  pour obtenir l'accélération  $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$ , pourrait expliquer l'instabilité.

En effet, nous avons effectué de nouvelles simulations en fixant artificiellement  $\Delta \ddot{\mathbf{q}} = 0$  pour la trajectoire articulaire tout en conservant les entrées  $\Delta \mathbf{q}$  et  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  données par l'Eq. (4.32). Dans ce cas, la dynamique du robot reste stable. Ensuite, nous avons vérifié que la stabilité n'est pas dépendante de la précision de l'estimation de  $\Delta \ddot{\psi}$  pour exclure l'instabilité numérique. Ainsi, ces différents indices suggèrent que le système devient instable du fait de l'introduction de l'accélération  $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$ , qui dépend linéairement de  $\Delta \ddot{\psi}$ . Nous montrons dans l'annexe C que la stratégie II augmente l'ordre de l'EDO non linéaire décrivant la dynamique de la tête, qui devient un système linéaire d'ordre 3, et qu'un tel système peut devenir instable. Les détails sont reportés dans l'annexe A.6.4.

Finalement, la stratégie II n'est également pas acceptable, ce qui motive le développement d'un contrôleur qui ne dépend pas de l'estimation de  $\Delta \ddot{\psi}$ .

### 4.5.5 Stratégie III

Il s'avère que chacune des deux premières stratégies a la qualité pouvant compenser les défauts de l'autre. La stratégie I est causale mais le système linéaire est instable, tandis que la stratégie II est toujours stable mais introduit des termes non causaux. Par

conséquent, la seule solution restante est de combiner les deux approches.

Nous proposons d'exploiter la dynamique inertielle donnée par  $\hat{\mathbf{q}}$  tout en la stabilisant grâce sur la composante  $\tilde{\mathbf{q}}$ . Pour ce faire, nous proposons de combiner linéairement  $\tilde{\mathbf{q}}$  et  $\hat{\mathbf{q}}$  en utilisant  $\tilde{\mathbf{q}}$  comme un contrôleur PD avec

$$B\tilde{\mathbf{q}} = D_p\hat{\mathbf{q}} + D_d\dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (4.33)$$

où  $B = (M_q Q_m)^{-1}(K_q P) < D_p$  et  $D_d$  sont deux matrices de gain pour le feedback proportionnel et dérivé.

En introduisant l'Eq. (4.33) dans l'Eq. (4.30), nous obtenons l'équation suivante pour la composante  $\hat{\mathbf{q}}$  :

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + D_d\dot{\hat{\mathbf{q}}} + [A + D_p]\hat{\mathbf{q}} = -(M_q Q_m)^{-1}\mathbf{u} \quad (4.34)$$

Ainsi, ce système peut être stabilisé grâce à un placement de pôles judicieux via le choix des matrices  $D_p$  et  $D_d$ . En plus, la variable  $\hat{\mathbf{q}}$  a l'ordre de dérivée le plus élevé dans l'Eq. (4.34), ce qui évite une instabilité analogue à celle observée dans la stratégie II.

En utilisant les Eqs (4.29) et (4.33), la vraie commande  $\Delta\mathbf{q}$  peut alors être exprimée en fonction de  $\hat{\mathbf{q}}$  via

$$\Delta\mathbf{q} = (Q_m + PB^{-1}D_p)\hat{\mathbf{q}} + PB^{-1}D_d\dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (4.35)$$

Une fois l'Eq. (4.34) résolue, les composantes  $\hat{\mathbf{q}}$  et  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}$  sont introduites dans l'équation. (4.35) pour produire la déformation du corps  $\Delta\mathbf{q}$ . De plus, par des combinaisons des Eqs. (4.34) et (4.35), on peut aussi exprimer  $\Delta\dot{\mathbf{q}}$  et  $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$  comme un fonction linéaire de  $\hat{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}$  et  $\Delta\dot{\psi}$ . Par conséquent, le système reste causal comme prévu.

Le contrôleur proportionnel peut également être interprété en termes de stabilité du robot. En effet, le terme  $D_p$  permet de modifier la raideur hydrostatique dans l'Eq. (4.34). En ajustant la contribution de la déformation de la forme du corps  $P\hat{\mathbf{q}}$ , on peut changer la position du centre de flottabilité par rapport au centre de masse de sorte que le bras de levier correspondant produise un couple de rappel (cf annexe A.6.3). Ainsi, la stratégie I peut être re-stabilisée grâce au contrôleur proportionnel (P) tandis que le contrôleur dérivé (D) permet, quant à lui, de placer les pôles dans la moitié gauche du plan complexe.

Au bout du compte, nous avons proposé une stratégie qui satisfait la réalisation de  $\mathbf{u}$  tout en étant stable. Cette stabilisation dépend du placement des pôles défini par  $D_p$  et  $D_d$ , point traité dans la section suivante.

### 4.5.6 Détermination des matrices de gain $D_p$ et $D_d$

Afin de déterminer les matrices de gain  $D_p$  et  $D_d$ , nous procédons à une transformation du système de contrôle  $\Delta\mathbf{q}(\mathbf{u})$  du domaine temporel au domaine opérationnel  $s$ , tel que le mouvement interne du corps de l'Eq. 4.4 devient :

$$\mathcal{L}\{\Delta\mathbf{q}\} = T_{\mathbf{u}\rightarrow\Delta\mathbf{q}}(s) \mathcal{L}\{\mathbf{u}\} \quad (4.36)$$

avec la matrice de fonction de transfert  $T_{\mathbf{u}\rightarrow\Delta\mathbf{q}}$  qui peut être décomposée en

$$T_{\mathbf{u}\rightarrow\Delta\mathbf{q}} = T_{\hat{\mathbf{q}}\rightarrow\Delta\mathbf{q}} T_{\mathbf{u}\rightarrow\hat{\mathbf{q}}} \in \mathbb{C}^{N \times 3} \quad (4.37)$$

où  $T_{\mathbf{u}\rightarrow\hat{\mathbf{q}}} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  correspond à la transformée de Laplace de l'Eq. (4.34) et détermine la localisation des pôles, et  $T_{\hat{\mathbf{q}}\rightarrow\Delta\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{N \times 3}$  correspond à l'application sur le sous-espace  $\mathcal{S}_u$  donnée par l'Eq. (4.35). Ces fonctions de transfert sont données par :

$$T_{\hat{\mathbf{q}}\rightarrow\Delta\mathbf{q}} = Q_m + PA^{-1}(sD_d + D_p), \quad (4.38)$$

et

$$T_{\mathbf{u}\rightarrow\hat{\mathbf{q}}} = -\left(s^2 + sD_d + W\Lambda W^T + D_p\right)^{-1} (M_q Q_m)^{-1} \quad (4.39)$$

Nous utilisons la forme diagonalisée de la matrice  $A$  avec des valeurs propres  $\Lambda_i$  associées à des vecteurs propres  $\mathbf{w}_i$  tels que la troisième composante  $i = 3$  correspond à la valeur propre négative. Nous définissons  $W$  comme la matrice contenant les vecteurs  $\mathbf{w}_i$ , et introduisons les pôles  $\pm\lambda_i$  associés à chacune des valeurs propres  $\Lambda_i$  avec  $|\lambda_i| = \left|\sqrt{-\Lambda_i}\right|$ .

À partir de ce système, on détermine les matrices  $D_p$  et  $D_d$  selon les conditions suivantes

1. les pôles de la fonction de transfert  $T_{\mathbf{u}\rightarrow\Delta\mathbf{q}}$  doivent être situés dans la moitié gauche du plan complexe pour éviter l'instabilité et atteindre  $\Delta\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$  lorsque  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$  (sinon la forme du corps oscille même si la perturbation de la tête a été rejetée) ;
2. le gain de la fonction de transfert  $T_{\mathbf{u}\rightarrow\Delta\mathbf{q}}$  doit être suffisamment petit dans la bande de fréquence de travail pour limiter l'amplitude articulaire requise ainsi que la puissance fournie par les servomoteurs.

La première condition est donc directement liée au placement des pôles sur la fonction de transfert  $T_{\mathbf{u}\rightarrow\hat{\mathbf{q}}}$ , et la matrice  $D_d$  doit être définie positive pour la satisfaire. Par conséquent, il y a *a priori* quinze paramètres libres (neuf pour  $D_p$  et six pour  $D_d$ ) à

déterminer.

La deuxième condition vise à minimiser les amplitudes des trajectoires articulaires pour générer la commande virtuelle dans la bande de fréquences de travail. Ce processus fournit des contraintes supplémentaires pour déterminer les quinze paramètres libres qui peuvent être trouvés en optimisant le placement des pôles et des zéros. Dans notre étude, nous nous concentrons sur la première condition en proposant un modèle simple de placement des pôles, qui donne des solutions acceptables et opérationnelles mais non optimales pour la deuxième condition.

Nous proposons de changer les pôles en modifiant le système linéaire  $T_{\mathbf{u} \rightarrow \hat{\mathbf{q}}}$  tout en préservant ses vecteurs propres et en ajustant leur raideur et amortissement modaux avec seulement deux paramètres libres.

Pour définir  $D_p$ , nous utilisons une méthode standard qui consiste à déplacer les pôles réels du système vers l'axe imaginaire. Par conséquent, la matrice  $D_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  peut être exprimée sous la forme simple :

$$D_p = W \text{diag} \left( 0, 0, |\lambda'_3|^2 + |\lambda_3|^2 \right) W^{-1} \quad (4.40)$$

où la composante  $(\lambda_3)^2$  annule la raideur négative de sorte que la nouvelle valeur propre prend une valeur positive  $\Lambda_3 \mapsto (\lambda'_3)^2$ . Ensuite, nous définissons la matrice de gain  $D_d$  par

$$D_d = \gamma_d W \text{diag} \left( 1, \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}, \frac{|\lambda'_3|}{|\lambda_1|} \right) W^{-1} \quad (4.41)$$

avec  $\gamma_d > 0$  un paramètre libre, et  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , et  $\lambda'_3$  les pôles sur l'axe imaginaire. En variant le paramètre  $\gamma_d$ , le module de chaque pôle est conservé et seuls leurs arguments varient comme illustré dans le plan complexe sur la Fig. 4.6.

Après avoir satisfait à la première condition, nous cherchons à produire une forte rétroaction sur la tête avec les plus petites amplitudes possibles de déformation du corps  $\Delta \mathbf{q}(t)$ . Pour ce faire, le module de  $T_{\mathbf{u} \rightarrow \Delta \mathbf{q}}$  doit être aussi petit que possible dans la bande de fréquences du mouvement de la tête, c'est-à-dire, la bande de fréquence de travail, mais non nul pour réaliser la commande virtuelle. En d'autres termes, le système doit être proche mais pas exactement d'une anti-résonance. En effet, le système MIMO ne peut pas satisfaire une transmission nulle correspondant à une diminution du rang de  $T_{\mathbf{u} \rightarrow \Delta \mathbf{q}}$ .

Néanmoins, il est toujours possible d'observer un *zéro local* correspondant au zéro du

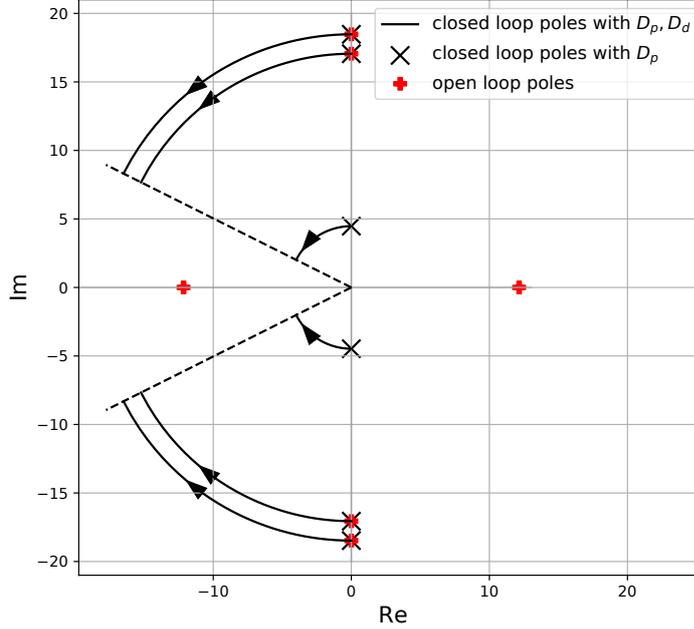


FIGURE 4.6 – La distribution de six pôles de la fonction transfert  $T_{\mathbf{u} \rightarrow \hat{\mathbf{q}}}$  dans le plan complexe : Les points rouges représentent les pôles en boucle ouverte du mouvement interne sans retour, les symboles  $\times$  représentent les zéros après avoir assigné  $D_p$  comme dans l’Eq.4.40 avec  $\lambda'_3 = \pm 4.4721$  rad/s ; les courbes continues correspondent aux positions des pôles en fonction de  $\gamma_d \in [0, 30]$  dans l’Eq. 4.41, avec des flèches pointant dans le sens croissant de  $\gamma_d$

système SISO  $\Delta q_i(u_j)$ . La fonction de transfert correspondante est appelée une “réceptance”[115] et pour notre système cette fonction de “réceptance” est donnée par :

$$(T_{\mathbf{u} \rightarrow \Delta \mathbf{q}})_{ij} = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+j} \frac{(T_{\hat{\mathbf{q}} \rightarrow \Delta \mathbf{q}})_{ik} \det([T_{\hat{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{u}}]_{jk})}{\det(T_{\hat{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{u}})} \quad (4.42)$$

avec  $\det([T_{\hat{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{u}}]_{jk})$  la matrice mineure de  $T_{\hat{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{u}}$ . En terme du dénominateur à droite de l’Eq. (4.42), les pôles de cette fonction de transfert sont communs à toutes les réceptances, et définis par le placement des pôles. En pratique, on observe que notre implémentation des matrices  $D_p$  et  $D_d$ , qui dépend uniquement des paramètres  $\lambda'_3$  et  $\gamma_d$ , laisse peu de place au positionnement du zéro. La meilleure stratégie consiste à positionner  $\lambda'_3$  vers les basses fréquences loin de la bande de fréquences du mouvement de la tête. Il doit néanmoins être suffisamment grand pour produire un amortissement sur ce mode propre puisque sa composante imaginaire est bornée par  $\lambda'_3$ . Ensuite, un compromis doit être

trouvé entre un fort amortissement  $\gamma_d$ , qui permet une relaxation rapide après le rejet de la perturbation, et un amortissement modéré pour obtenir une faible “réceptance” dans la bande de fréquence concernée.

Habituellement, le placements de zeros peut être obtenu par la méthode de réceptance utilisée dans la théorie du contrôle des vibrations [116, 117]. Cependant, ces méthodes ont été développées pour des systèmes linéaires du second ordre avec des matrices définies positives. D’autres développements sont nécessaires pour adapter cette approche à notre problème linéaire donné par les Eqs. (4.37) et (4.38). Malheureusement, une telle extension dépasse largement le cadre de la présente étude.

## 4.6 Réglage, performances et domaine de validité du contrôleur

Dans cette section, nous rapportons une série d’essais numériques démontrant la faisabilité de notre stratégie de rejet des perturbations, et permettant l’analyse des trajectoires articulaires résultantes. La méthode consiste à perturber deux postures à l’équilibre, l’une avec une forme du corps en “cosinus” (test I) et l’autre avec une forme du corps en “sinus” (test II) (voir le tableau 3.1). Par ailleurs, nous allons évaluer la plage de validité du modèle linéarisé en comparant le temps de rejet attendu du modèle linéarisé, à celui obtenu par le modèle non linéaire du robot en fonction de l’amplitude de la perturbation.

### 4.6.1 Méthodologie

Le contrôleur présenté est implémenté dans le schéma fonctionnel reporté dans la section 4.2.2. Le processus de contrôle a été codé en Python. Les essais sont effectués avec deux formes de corps en cosinus ou en sinus dont les coordonnées articulaires  $\mathbf{q}_{eq}$  sont reportées dans le tableau 3.1 et illustrées sur la Fig. 3.3.

Pour définir les conditions initiales, nous introduisons une perturbation de la tête  $g_0(0)$  telle que sa configuration relative par rapport à la configuration de la tête d’équilibre  $g_{eq}$  est quantifiée par le vecteur  $\Delta\psi \in \mathbb{R}^3$  défini par :

$$\Delta\psi_0 = (t_{z0}, \theta_{x0}, \theta_{y0})^T, \quad (4.43)$$

avec  $t_{z0}, \theta_{x0}, \theta_{y0}$  la translation de pilonnement, les rotations de roulis et de tangage ini-

tiales. Le robot est initialement au repos avec  $\boldsymbol{\eta}_0(0) = 0$  avec un mouvement interne  $\Delta\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ . Dans ce cas, son énergie initiale est uniquement composée de sa composante potentielle  $E_p(g_0, \mathbf{q}_{eq})$ .

Pour quantifier le rejet de perturbation, nous introduisons le résidu  $\epsilon$  (différent du coefficient perturbatif) défini comme la fraction relative d'énergie nette (cinétique + potentiel) restant dans le système au cours du rejet. La valeur du résidu est calculée par :

$$\epsilon = \frac{[E_c(t) + E_p(t)] - E_{p,eq}}{E_p(t=0) - E_{p,eq}} (\%) \quad (4.44)$$

Les simulations commencent à  $\epsilon = 1$  et devraient finir à  $\epsilon = 0$ . Nous avons pris comme origine l'énergie potentielle asymptotique  $E_{p,eq}$  associée à la configuration d'équilibre  $(g_{eq}, \mathbf{q}_{eq})$  au repos. Ici, le calcul de l'énergie  $(E_c(t) + E_p(t))$  prend en compte les contributions de la variation de forme et de l'énergie cinétique interne. Lorsque le résidu de convergence est inférieur à 5%, la perturbation est considérée comme rejetée et le temps de convergence noté  $T$  est relevé.

## 4.6.2 Réglage du contrôleur

Tout d'abord, nous décrivons le réglage des matrices  $D_p$  et  $D_d$  introduites dans la section 4.2.2 pour la forme en cosinus. Les performances du contrôleur seront évaluées dans la bande de fréquence typique des oscillations de la tête. Pour évaluer ces fréquences, nous calculons les fréquences propres du mouvement linéarisé de la tête en boucle ouverte qui sont données par  $\pm 17.8j$  rad/s,  $\pm 15.9j$  rad/s et  $\pm 13.5j$  rad/s. Elles sont faiblement modifiées par le retour d'état (une variation  $< 1\%$ ) de sorte que nous nous attendons à ce que le mouvement de la tête se produise dans la bande de fréquence  $[13.5 - 17.8]$  rad/s correspondant approximativement à  $F \in [2.1 - 2.8]$  Hz.

Les matrices de gain  $D_p$  et  $D_d$  sont paramétrisées par une valeur propre  $\lambda'_3$  et un coefficient d'amortissement  $\gamma_d$ . Nous avons effectué d'abord le réglage de  $\lambda'_3 \in [3, 15]$  rad/s en fixant le coefficient d'amortissement faible  $\gamma_d = 1$ . Pour cela, nous avons calculé les magnitudes de la réceptance  $(T_{\mathbf{u} \rightarrow \Delta\mathbf{q}})_{ij}$  (voir l'Eq. 4.42) dans la bande de fréquence de la dynamique de la tête. Dans le diagramme de magnitude 4.7, nous avons reporté le gain de chaque commande virtuelle  $u_1, u_2, u_3$  pour trois sorties articulaires (la première, la troisième et la sixième articulation de flexion  $\Delta q_0, \Delta q_4, \Delta q_7$ ). La bande de fréquences se situe entre les lignes pointillées verticales sur le diagramme 4.7. On constate que l'augmentation de  $\lambda'_3$  vers la bande de fréquences du mouvement de la tête conduit à une augmentation du

gain (voir les courbes vertes sur la diagraphme 4.7). Par conséquence, cet impact négatif sur le gain nous conduit à choisir de fixer  $\lambda'_3$  à une relativement petite valeur  $\lambda'_3 = \pm 4.4721$  rad/s ou 0.71Hz (voir les courbes noires sur la diagraphme 4.7).

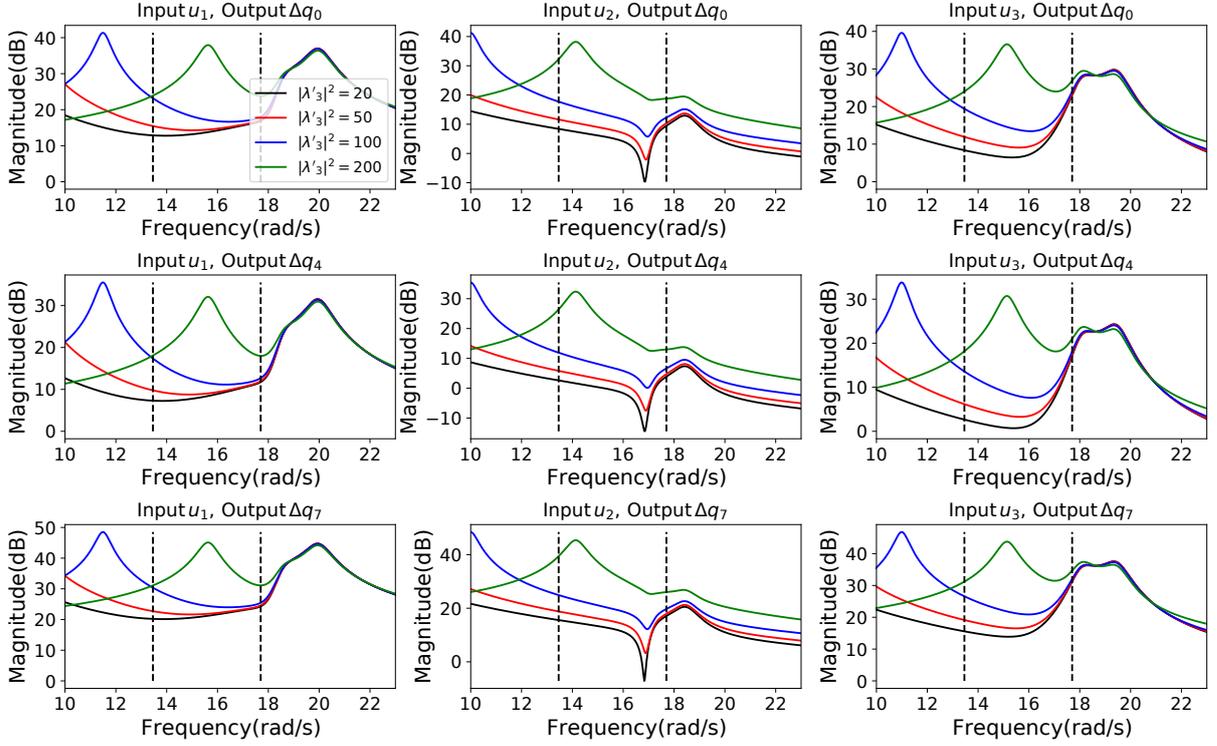


FIGURE 4.7 – La diagraphme de magnitude de Bode  $20 \log_{10} G(\omega)$  des fonctions de transfert  $(T_{\mathbf{u} \rightarrow \Delta \mathbf{q}})_{ij}$  pour  $i = 1$  (force virtuelle  $u_1$  le long de la verticale, colonne de gauche),  $i = 2$  (couple virtuel  $u_2$  agissant sur l'angle de roulis, colonne du milieu) et  $i = 3$  (couple virtuel  $u_3$  agissant sur l'angle de tangage, colonne de droite). Nous n'avons reporté la fonction de transfert que pour trois angles articulaires correspondant à  $\Delta q_0$  (lacet de tête),  $\Delta q_4$  et  $\Delta q_7$ . La magnitude a été calculée pour une valeur propre différente  $\lambda'_3$  et un coefficient d'amortissement fixé  $\gamma_d = 1$ . La bande de fréquence typique du mouvement de la tête se situe entre les lignes verticales noires.

Concernant le coefficient d'amortissement  $\gamma_d$ , nous avons illustré le placement des pôles pour un coefficient  $\gamma_d$  variant entre 0.1 et 30 sur la Fig. 4.6. Les pôles se déplacent vers l'axe réel, et si  $\gamma_d$  est encore augmenté, chaque pôle complexe conjugué se heurte, et tend respectivement vers  $-\infty$  et 0, ce qui correspond à des oscillations sur-amorties.

Identique au réglage de  $\lambda'_3$ , nous avons reporté le gain de chaque commande virtuelle  $u_1, u_2, u_3$  pour trois sorties articulaires en fonction de  $\gamma_d$  dans la diagraphme 4.8. On observe que l'amortissement tend à augmenter le gain, ce qui suggère de le prendre le plus petit

possible. Fait intéressant, pour le plus petit rapport d'amortissement, nous reconnaissons deux résonances (pics noirs sur la diagraphme ) se produisant à  $\omega = \lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

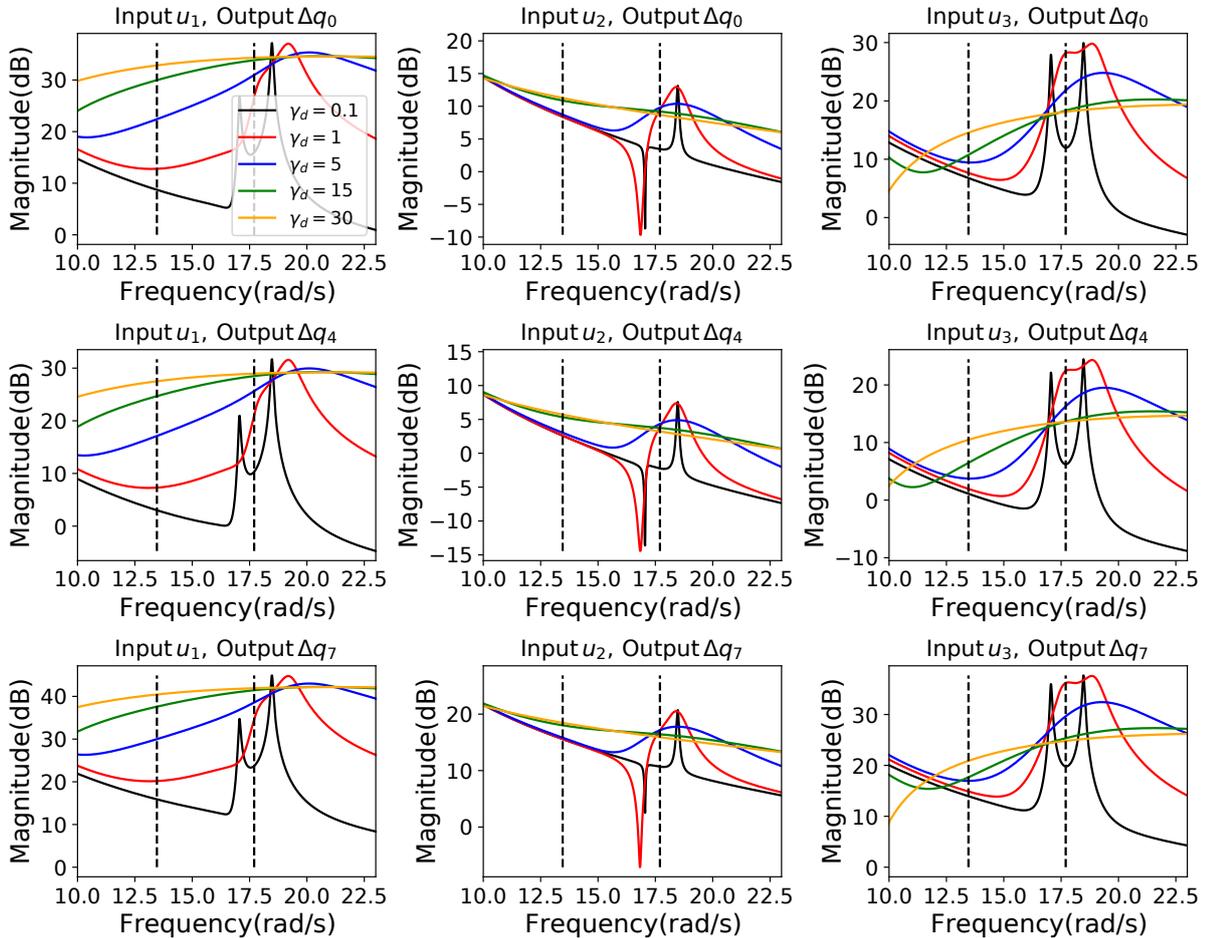


FIGURE 4.8 – La diagraphme de magnitude de Bode  $20 \log_{10} G(\omega)$  des fonctions de transfert  $(T_{\mathbf{u} \rightarrow \Delta \mathbf{q}})_{ij}$ . La magnitude a été calculée pour des coefficients d'amortissement différents  $\gamma_d$  et une valeur propre fixe  $\lambda_3 = \pm 4,4721$  rad/s. La bande de fréquence typique du mouvement de la tête se situe entre les lignes verticales noires.

Étonnamment, les courbes de gain pour la commande  $u_2$  affichent une chute brutale proche de la fréquence  $\omega = 17$  rad/s. Nous avons vérifié qu'il ne s'agit pas d'une anti-résonance. En fait, cela correspond à un zéro de la réceptance avec une petite composante réelle, où la partie imaginaire est proche de la fréquence  $\omega = 17$  rad/s mais diffère légèrement entre chaque sortie  $q_j$ . Le faible gain dans cette bande permet de produire un fort feedback  $u_2$  sur le mouvement de roulis avec une amplitude modérée des articulations. Sur la base de cette étude paramétrique de la réceptance, nous considérons que la valeur

$\gamma_d = 1 \text{ rad.s}$  est également acceptable.

### 4.6.3 Dynamique du rejet des perturbations

L'objectif du présent test est d'étudier la relaxation du robot à l'équilibre. De plus, nous visons à comprendre comment les composantes articulaires données par  $P\tilde{\mathbf{q}}$  et  $Q_m\hat{\mathbf{q}}$  dans l'Eq. (4.29) contribuent au rejet des perturbations, et quelles sont les forces résultant des trajectoires articulaires produites par le contrôleur. Par conséquent, nous considérons d'abord une forme de corps en cosinus à l'équilibre qui est initialement perturbée par un mouvement solide donné par l'angle de roulis  $\theta_{x0} = 20^\circ$  (0.35rad).

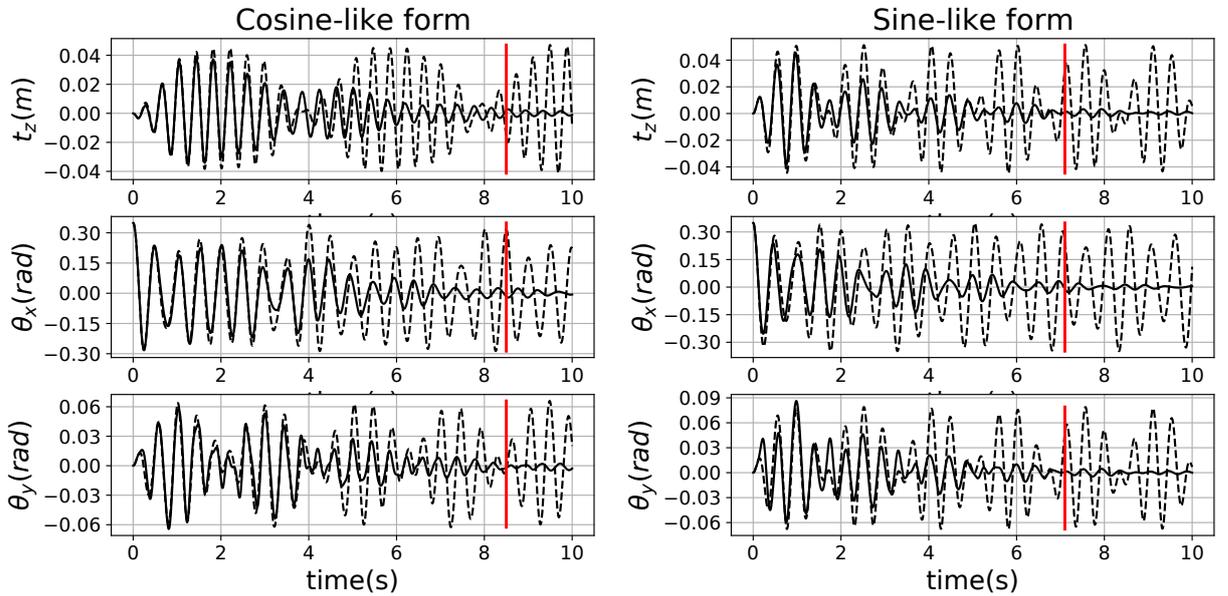


FIGURE 4.9 – Évolution des trois composantes  $\Delta\psi^T = (t_z, \theta_x, \theta_y)$  pendant les 10 premières secondes pour la forme du corps en cosinus (respectivement en sinus) à l'équilibre correspondant à la colonne de gauche (colonne de droite). Les courbes solides correspondent au mouvement de la tête sans rétroaction. Les courbes pointillés représentent le processus de rejet des perturbations où les lignes verticales rouges indiquent le temps de rejet  $T$  (95% d'énergie est amortie).

Sur la Fig. 4.9(colonne de gauche), nous rapportons la réponse du mouvement de la tête via les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , et le pilonnement  $t_z$ , pour deux cas : sans (pointillé) et avec (solide) le contrôleur. Alors que seul le roulis de tête est initialement perturbé, on observe que les autres degrés de liberté  $t_z$  (pilonnement) et  $\theta_y$  (tangage) sont progressivement excités, de sorte que la perturbation doit être rejetée pour les trois degrés de liberté.

Comme prévu, sans commande par retour d'état, la tête effectue des oscillations non linéaires et non amorties (les courbes en pointillés). Ces courbes confirment également notre hypothèse en supposant que les fréquences typiques du mouvement de la tête sont comparables entre les cas non amortis et les cas amortis.

Près de 10 secondes sont nécessaires pour rejeter complètement la perturbation (courbes épaisses). En utilisant comme critère une diminution de 95% de l'énergie initiale, une estimation plus précise du rejet conduit au temps de rejet  $T = 8.54s$  (voir lignes verticales rouges sur la Fig. 4.9). De manière notable, le rejet s'accélère à mesure que l'énergie diminue grâce à l'amortissement adaptatif, qui évite la surcharge des moteurs.

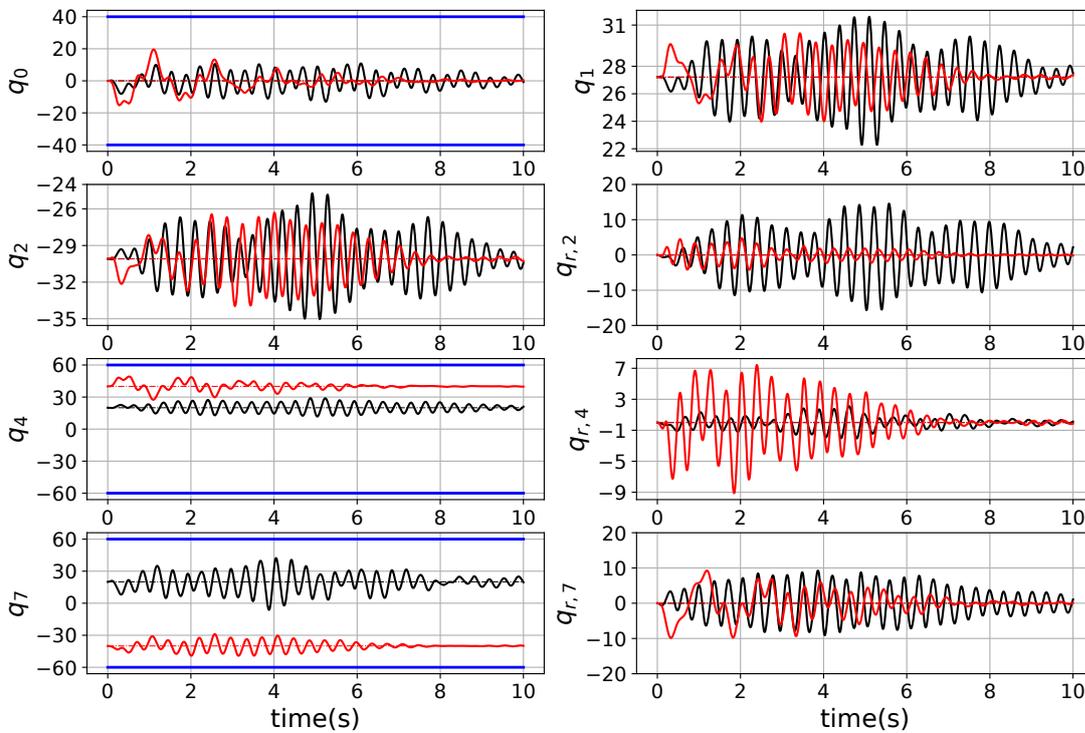


FIGURE 4.10 – Les trajectoires articulaire  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_{r,2}$ ,  $q_4$ ,  $q_{r,4}$ ,  $q_7$ ,  $q_{r,7}$  correspondantes aux simulations sur la Fig. 4.9. Les courbes noires (respectivement rouges) correspondent à la forme du corps en cosinus (sinus). Les limites géométriques des articulations sont en bleu.

Pour caractériser la dynamique du corps, nous avons reporté sur la Fig. 4.10 (courbes noires) l'évolution de certaines amplitudes articulaires, tel que celle du cou, des flexions articulaires et des roulis des coques ARIM. Notons qu'elles restent toujours dans les limites géométriques (lignes bleues) du robot réel. Ce point confirme notre choix de paramètres de contrôle qui évitent les dépassements ou les amplitudes articulaires excessives.

Une caractéristique intéressante est le temps nécessaire pour converger vers la forme du corps d'équilibre  $\mathbf{q}_{eq}$  qui dure plus longtemps que le temps de rejet  $T = 8.54s$ . Ici, les articulations oscillent toujours pour  $t > T$ , même si la tête converge vers sa configuration d'équilibre. Ces composantes du mouvement interne correspondent aux solutions homogènes de l'Eq. (4.34) qui ne produisent pas d'effort sur la tête, au moins à l'ordre linéaire, et sont excitées lors du rejet. L'amortissement de ce mouvement interne résiduel est contrôlé par le coefficient  $\gamma_d = 1 s^{-1}$ , qui doit être suffisamment grand pour amortir ces oscillations. Cependant, trop augmenter son amplitude conduit à de fortes amplitudes articulaires. Par conséquent, nous avons adopté un compromis en autorisant un temps de relaxation des articulations plus long, afin de maintenir les amplitudes articulaires dans les limites géométriques nominal.

Il convient également d'étudier la contribution relative des composantes des déformations du corps  $Q_m \hat{\mathbf{q}}$  (inertie + flottabilité) et  $P \tilde{\mathbf{q}}$  (flottabilité). Sur la Fig. 4.11, nous avons reporté onze instantanés de la forme du corps, vue de dessus, avec les coordonnées articulaires  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{eq} + P \tilde{\mathbf{q}}$  (rouge, en haut) et  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{eq} + Q_m \hat{\mathbf{q}}$  (rouge, en bas). Étonnamment, la composante  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{eq} + Q_m \hat{\mathbf{q}}$  domine l'évolution de la forme du corps et il s'avère qu'elle correspond à 90% de l'amplitude de la déformation du corps.

Il est tentant de penser que si la composante  $P \tilde{\mathbf{q}}$  domine la dynamique, alors le processus de stabilisation est assuré par les forces de flottabilité puisque les modes internes  $P$  appartiennent au noyau de  $M_q$ . Au contraire, la comparaison des efforts d'inertie (courbes rouges sur la Fig. 4.12) produits par  $M_q \Delta \ddot{\mathbf{q}}$  et les efforts de flottabilité avec  $K_q \Delta \mathbf{q}$  (courbes noires) montre que leurs amplitudes sont comparables sur les trois degrés de liberté du mouvement de la tête ( $F_z, \tau_x, \tau_y$ ). La stabilisation implique à la fois des effets d'inertie et de flottabilité.

On remarque que l'enveloppe du signal augmente (typiquement jusqu'à  $t = 4s$ ), ce qui correspond à la croissance progressive du coefficient d'amortissement adaptatif. Par la suite, cette même enveloppe diminue à mesure que la perturbation du mouvement de la tête devient significativement plus petite. Pour la force verticale  $F_z$  et le couple de tangage  $\tau_y$ , les composantes inertielles (rouge sur la Fig. 4.12) et la composante de flottabilité (noir) sont presque en opposition de phase. C'est la signature d'une forte contribution de la solution homogène qui ne joue aucun rôle dans le processus de rejet. Ainsi, les effets de flottabilité et d'inertie produits par les déformations du corps compensent presque la plupart du temps le pilonnement et le tangage.

En revanche, on observe que la composante inertielle (rouge) de  $\tau_x$  due au mouvement

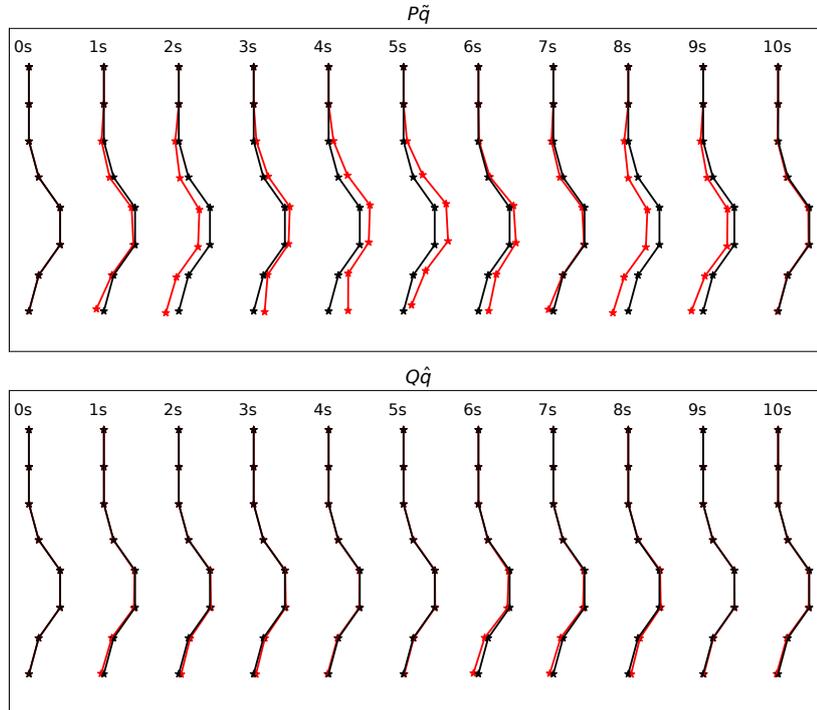


FIGURE 4.11 – Vue de dessus illustrant la contribution produite par le mouvement interne (en rouge) à partir de l'ensemble de vecteurs  $\{P\}$  avec des composantes  $\tilde{\mathbf{q}}$  (en haut) et  $\{Q\}$  avec des composantes  $\hat{\mathbf{q}}$  (en bas) à différents intervalles de temps. La pose d'équilibre  $\mathbf{q}_{eq}$  (noir) est superposée comme référence.

interne est un peu plus grande que la composante de flottabilité. Même si la composante  $Q_m\hat{\mathbf{q}}$  est beaucoup plus petite que  $P\tilde{\mathbf{q}}$ , sa contribution à la relaxation est primordiale. Ce point est plus évident lorsque nous divisons l'effort respectif produit par les composantes de mouvement internes  $Q_m\hat{\mathbf{q}}$  (rouge sur la Fig.4.13), ce qui conduit à des effets d'inertie et de flottabilité, et  $P\tilde{\mathbf{q}}$  (courbes noires), qui génère uniquement des effets de flottabilité. L'effort produit par  $Q_m\hat{\mathbf{q}}$  peut être au moins trois fois plus grande que celle due à  $P\tilde{\mathbf{q}}$ . Par conséquent, on peut conclure que le processus de rejet est dominé par la composante  $\tilde{\mathbf{q}}$  alors qu'elle a la plus petite contribution à la déformation de forme. De l'autre côté, la composante  $\tilde{\mathbf{q}}$  est là pour assurer la stabilité du mouvement interne du corps.

Pour conclure cette étude sur la dynamique de rejet, nous aimerions tester l'influence de la forme du corps dans le processus de rejet. Nous comparons les résultats reportés avec ceux obtenus pour une forme de corps sinusoïdale à l'équilibre. Nous gardons le même processus pour régler notre contrôleur, comme décaler les pôles sur l'axe imaginaire avec la même amplitude  $\lambda'_3$  via le contrôleur proportionnel puis utiliser le même coefficient

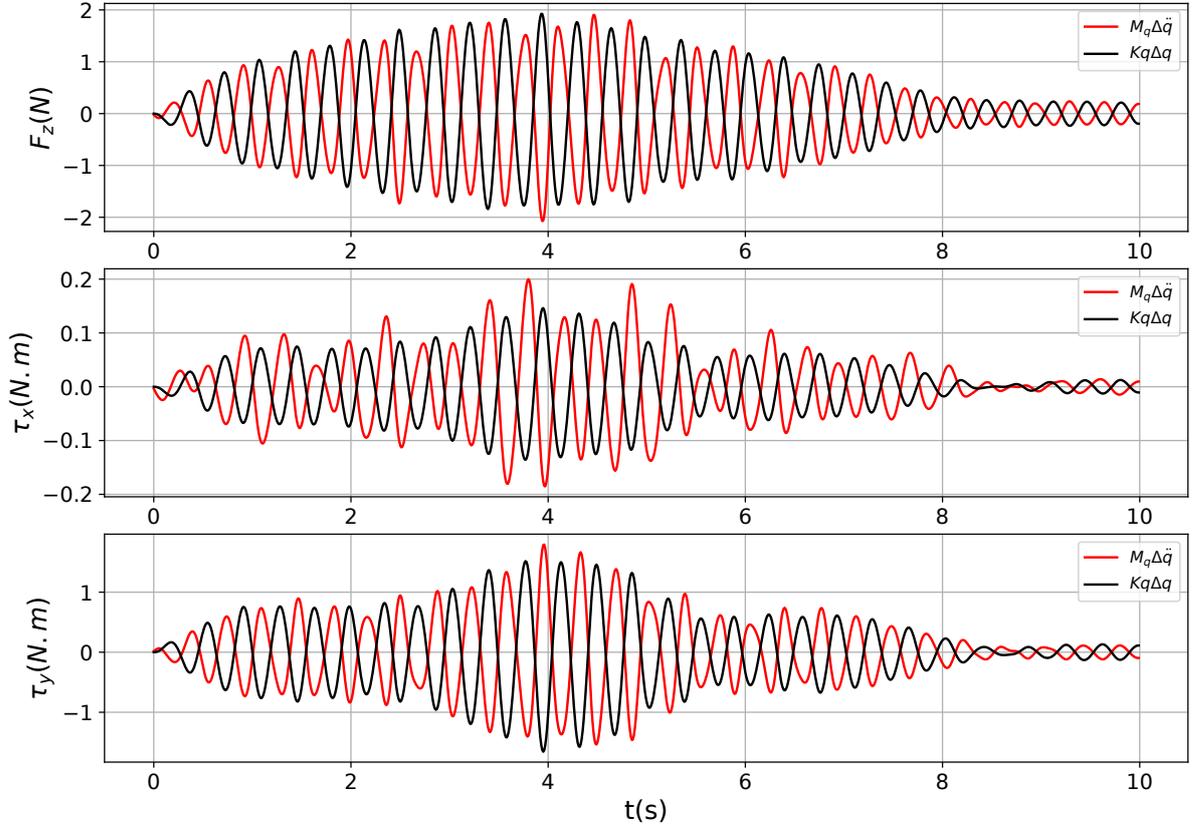


FIGURE 4.12 – Comparaison des composantes de l’effort virtuelle  $\mathbf{u}^T = (F_z, \Gamma_x, \Gamma_y)$  provenant de l’inertie interne  $M_q \Delta \ddot{\mathbf{q}}$  (rouge) et de l’effort de flottabilité  $K_q \Delta \mathbf{q}$  (noir) lors du rejet de la perturbation.

d’amortissement  $\gamma_d$ . En préservant les coefficients  $\lambda'_3$  et  $\gamma_d$ , on ne peut quantifier que l’influence de la variation de la forme du corps qui est caractérisée par un sous-espace différent  $\mathcal{S}_u$  généré par un autre ensemble de vecteurs  $\{Q_m, P\}$ .

Les résultats sont reportés sur la Fig. 4.9 (colonne de droite) représentant le mouvement de la tête. Pour une forme de corps en “cosinus” (colonne de gauche) et en “sinus” (droite), les mouvements de pilonnement, de tangage et de roulis ont généralement les mêmes amplitudes au début du processus de rejet. Cependant, une fois le processus de rejet démarre (généralement à  $t > 2$ s), l’amortissement du mouvement de la tête pour la forme de corps en “sinus” est plus rapide avec un temps de rejet plus court  $T = 7.14$ s. Cette observation implique que même si l’amortissement  $\gamma_d$  est le même pour les deux formes de corps, le processus de rejet dépend fortement du sous-espace  $\mathcal{S}_U$ . En faisant varier la forme du corps  $\mathbf{q}_{eq}$ , on s’attend également à modifier les trajectoires articulaires.

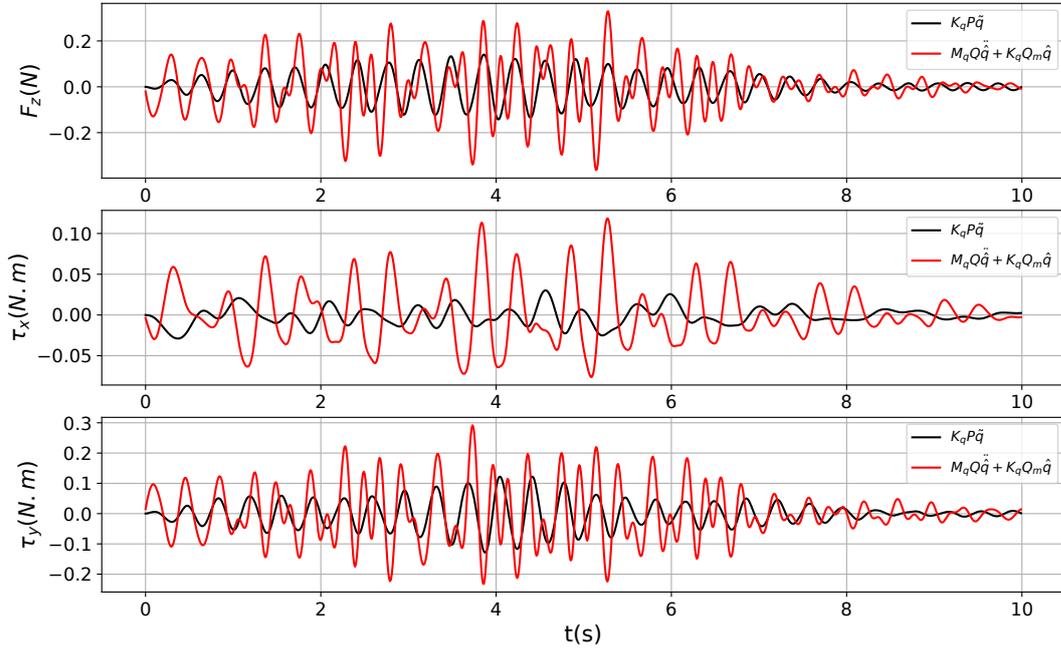


FIGURE 4.13 – Effort virtuel  $\mathbf{u}^T = (F_z, \Gamma_x, \Gamma_y)$  provenant de la composante de mouvement interne  $\hat{\mathbf{q}}$  (rouge) donnée par  $M_q Q_m \ddot{\hat{\mathbf{q}}} + K_q Q_m \dot{\hat{\mathbf{q}}}$ , et de la composante de mouvement interne  $\tilde{\mathbf{q}}$  (courbes noires) donnée par  $K_q P \tilde{\mathbf{q}}$ .

En comparant les trajectoires articulaires sur la Fig. 4.10, on observe que, pour la plupart des articulations, les amplitudes pour la forme du corps en sinus sont soit comparables, soit plus petites que celle pour la forme en cosinus.

Ces dernières observations nous permettent de conclure que le choix de la forme du corps  $\mathbf{q}_{eq}$  a un impact sur le temps de rejet et les trajectoires articulaires générées. Cela suggère qu'il existe des formes du corps optimales minimisant le temps de rejet pour les paramètres de contrôle constant.

#### 4.6.4 Validité du contrôleur basé sur un modèle linéaire

Enfin, nous voulons déterminer dans quelle mesure notre contrôleur basé sur un modèle linéaire est pertinent lorsqu'il est soumis à de fortes perturbations. Ici, notons que  $T_{nl}$  est le temps de rejet donné par la dynamique non linéaire complète obtenue par le simulateur, et  $T_l$  est le temps de rejet, quant à lui, donné par la dynamique linéarisée de l'Eq. (4.2). Pour évaluer le domaine de validité du modèle linéaire, nous proposons de comparer  $T_{nl}$  avec  $T_l$ . Nous avons introduit le rapport  $\tilde{T} = T_{nl}/T_l$  et étudié son évolution en fonction de

l'amplitude des perturbations initiales. Les résultats sont reportés sur la Fig. 4.14 pour les perturbations initiales uniquement sur le pilonnement (gauche), le roulis (milieu) ou le tangage (droite) pour des formes de corps cosinus (noir) et sinus (rouge).

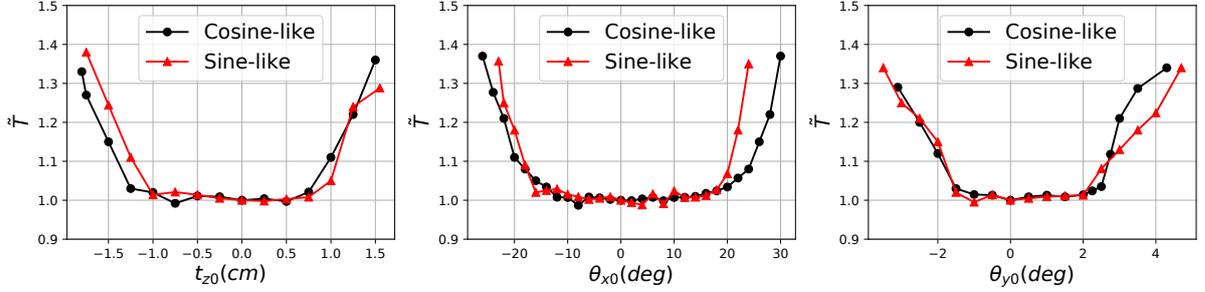


FIGURE 4.14 – Rapport  $T_{nl}/T_l$  du temps de rejet  $T_{nl}$  donné par la dynamique non linéaire complète sur le temps de rejet  $T_l$  donné par la dynamique linéarisée pour les perturbations initiales uniquement sur le pilonnement (gauche), le roulis (milieu) et la hauteur (droite), les courbes noires et rouges représentent respectivement la forme du corps en cosinus et en sinus.

Pour la forme du corps en cosinus, ce rapport est proche de 1 ( $\pm 5\%$ ), soit  $T_{nl} \simeq T_l$ , si la perturbation initiale reste dans les intervalles  $t_{z0} \in [-1.7, 1.5]$ cm,  $\theta_{x0} \in [-26^\circ, 30^\circ]$ , et  $\theta_{y0} \in [-3.1^\circ, 4.3^\circ]$ . Ainsi, le système linéaire (4.2) décrit bien la dynamique de la tête dans ces domaines. Les domaines de validité sur le pilonnement  $t_{z0}$  et le tangage  $\theta_{y0}$  sont relativement petits, car ils conduisent à une variation importante du niveau d’immersion nécessitant une correction non linéaire du torseur de flottabilité. Dans ces conditions, l’approximation linéaire du torseur de flottabilité n’est plus valable, ce qui explique la différence entre modèle linéaire et non linéaire.

En revanche, le domaine de validité du modèle linéaire est beaucoup plus grand pour les perturbations du roulis  $\theta_{x0}$ . Notre contrôleur linéaire fonctionne bien pour ces perturbations. Rappelons que ces perturbations sont les plus dangereuses que les autres (tangage et pilonnement) puisqu’elles peuvent provoquer le chavirement du robot. En effet, les effets non linéaires empêchant le chavirement sont relativement faibles lorsque le roulis augmente, ce qui explique à la fois pourquoi le domaine de validation est plus grand et pourquoi le chavirement se produit facilement. De plus, on peut également montrer que la nature des effets de flottabilité non linéaire diffère entre ces trois degrés de liberté. La raideur hydrostatique augmente à mesure que le tangage ou le pilonnement augmentent, ce qui correspond à un phénomène similaire au “*spring hardening*”. Au contraire, elle diminue à mesure que le roulis augmente, comme un “*spring softening*” [118, 119]. Dans le

chapitre suivant, nous allons démontrer l’impact de cet effet non-linéaire sur la stabilité dynamique de la nage.

## 4.7 Bilan

Dans ce chapitre, nous proposons une loi de contrôle en boucle fermée pour maintenir la stabilité d’une pose d’équilibre. Ce contrôleur permet de rejeter les perturbations en transférant l’énergie du mouvement solide au mouvement interne via des trajectoires articulaires spécifiques. Ces trajectoires articulaires sont générées dans un sous-espace articulaire composé de trois modes produisant des effets d’inertie et de flottabilité, et de trois modes produisant uniquement des forces de flottabilité. Notre étude a montré que pour générer de telles trajectoires articulaires stables et causales, il était nécessaire d’utiliser ces six modes, couplés linéairement par un contrôleur proportionnel-dérivé (PD). Ce contrôleur proposé montre de bonnes performances, bien que ces paramètres soient choisis manuellement.

Une première piste d’amélioration serait d’établir un algorithme d’optimisation trouvant le jeu de paramètres optimal couplant linéairement ces six modes de déformation articulaire. Notre étude a également montré que certaines formes du corps d’équilibre pouvaient être stabilisées plus facilement avec des temps de rejet plus courts. Il serait donc intéressant de trouver la forme optimale pour garder le robot stable et rejeter rapidement les perturbations. De telles formes du corps pourraient être utilisées pour surveiller l’environnement et maintenir la stabilité statique du regard du robot. C’est effectivement la stratégie adoptée par les serpents, qui peuvent s’enrouler sur l’eau et maintenir un contact visuel avec une menace potentielle [39].

Enfin, pour réaliser cette stabilisation dans les scénarios réels, deux défis majeurs doivent être résolus. Premièrement, le robot doit être équipé d’un observateur capable d’estimer sa configuration sur la surface de l’eau (pilonnement, roulis et tangage) en temps réel. Ces aspects sont actuellement en cours de développement. Notre groupe explore actuellement une approche qui ne nécessiterait pas l’utilisation de la vision, mais plutôt des capteurs de détection de niveau d’eau répartis sur la tête et une centrale à inertie (IMU) pour coupler la proprioception et l’extéroception. En effet, nous préférons doter le robot d’un sens de l’équilibre qui ne dépend pas de la scène visuelle, et qui fonctionnerait aussi bien dans des environnements encombrés, ou au contraire, sans repères visuels. Deuxièmement, comment tous les effets hydrodynamiques sont négligés dans notre modèle

actuel, le mouvement interne du robot est la seule dissipation rejetant les perturbations. Le second défi est donc de prendre en compte l'hydrodynamique de surface pour profiter de la dissipation induite par les traînées du fluide pour accélérer la perturbation de rejet.

# STABILITÉ DYNAMIQUE DE LA NAGE :

## EFFET DE LA FLOTTABILITÉ

---

### 5.1 Introduction et motivations

#### 5.1.1 Objectifs du chapitre

Nous avons traité dans les deux chapitres précédents le contrôle posturale pour les robots nageurs en boucles ouverte (Chapitre 3) et fermée (Chapitre 4). Dans ces deux cas, nous avons proposé des stratégies pour que le robot converge vers une forme de corps donnée soit par une succession d'équilibres statiques soit en rejetant dynamiquement les perturbations autour d'un équilibre statique. Ici, nous souhaitons comprendre comment la stabilité est influencée par la nage et comment le contrôle postural peut interagir avec la locomotion.

Ce chapitre propose donc une étude paramétrique de la stabilité de la nage, initiée dans la section 3.5.3, en fonction de la fréquence et de l'amplitude des flexions latérales. À l'instar du chapitre précédent, cette étude ne prendra en compte que les couplages entre effets inertiels et les efforts de flottabilité. Nous verrons que ce système dont la physique est simplifiée est finalement assez complexe. Cette analyse vise donc à construire les fondations de la stabilité dynamique de la nage, qui pourra dans un second temps inclure des effets plus complexes comme les traînées turbulentes, la variation de la masse ajoutée du fait du changement d'immersion du corps ou la dynamique des vagues générées par le nageur.

Nous souhaitons tout d'abord étudier passivement (sans contrôle) les propriétés et la stabilité de la nage. À partir de ces résultats, nous introduirons un modèle simplifié (ou réduit), qu'on nommera le *template*, pour capturer les mécanismes élémentaires de la dynamique de la tête. Grâce à ce modèle simplifié, nous étudierons en détails les différents états et transitions possibles du robot. Finalement, nous proposerons une stratégie de

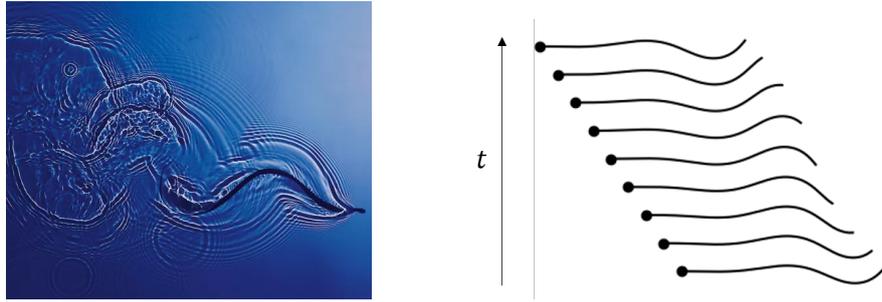


FIGURE 5.1 – Gauche : photographie de la flexion latérale d’un serpent nageur (voir section 1.1.2. Droite : l’évolution de la forme au cours de l’allure anguilliforme approximée par l’équation de courbure (5.1).

stabilisation de la nage.

Dans une grande partie de ce chapitre, nous nous appuyerons sur ce modèle pour produire des intuitions sur notre système et communiquer plus facilement avec différentes communautés (physique, biologie, etc.). Durant la nage, le robot modifie en temps réel ses inerties qui dépendent de la distribution des masse et des forces de flottabilité le long de son corps (ces dernières dépendant du niveau d’immersion). Aussi, la dynamique de la tête ne peut plus être considérée comme un système à inertie et raideur hydrostatique constantes mais à paramètres variables et périodiques. Deuxièmement, il est nécessaire de considérer les échanges de quantités de mouvement entre les degrés de libertés internes et externes. Les inerties internes et la variation du torseur des forces de flottabilité peuvent ainsi perturber la planéité du mouvement et mettre le système dans un régime d’auto-excitation. Finalement, l’hypothèse de linéarité autour d’un point d’équilibre n’est ici plus justifiée. En conclusion, la dynamique des degrés de liberté externes est décrite par un système à paramètres périodiques, auto-excité et très certainement non-linéaire. Nous allons développer dans ce chapitre un modèle minimal/réduit (*template*) qui peut décrire cette dynamique.

## 5.1.2 Organisation du chapitre

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : Dans la section 5.2, nous étudierons l’influence des allures et de leurs paramètres sur la stabilité du robot. Une instabilité du roulis, provoquant le chavirement du robot sur la surface de l’eau, sera identifiée.

Dans la section 5.3, nous allons décrire la dynamique du roulis par un modèle simplifié unidimensionnel, sous la forme d’une équation de Duffing-Mathieu forcée. Ce modèle

peut être analogue à un mécanisme élémentaire : un pendule paramétrique non-linéaire. Ensuite, les paramètres de ce modèle sont identifiés en analysant la succession de configuration d'équilibre du robot au cours de la nage.

Dans la section 5.4, la pertinence du modèle sera confirmée en simulant directement ce modèle. Ensuite, une approche mathématique, basée sur ce modèle, sera appliquée pour prédire plus rapidement l'instabilité du robot. À la fin, en exploitant les caractères du modèle, nous proposerons une stratégie pour atténuer cette instabilité.

### 5.1.3 Définition des allures

Les nageurs élancés génèrent une poussée grâce à une allure appelée nage anguilliforme consistant à accélérer le fluide environnant par une onde de flexion progressive [120, 121]. Pour reproduire cette allure cyclique, nous proposons ici une consigne pour chaque articulation de flexion indexée par  $j \in [0, 3, 4, \dots, 7]$  ( $j = 0$  étant l'articulation proche de la tête) en fonction du temps  $t$  et de l'abscisse curviligne  $s$  [13, 103, 43] :

$$q_j(t, s_j) = \alpha e^{\frac{ns_j}{L}} \cdot \sin \left[ 2\pi \left( \frac{ks_j}{L} - F \cdot t \right) \right] + \alpha_0 \quad (5.1)$$

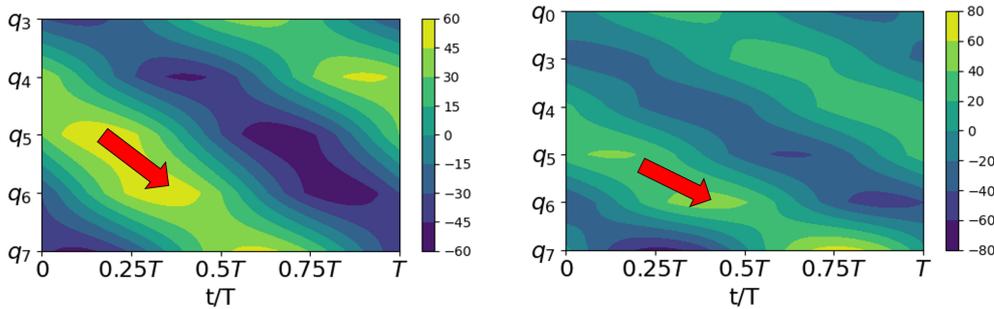


FIGURE 5.2 – Vérification de la direction de propagation d'onde pour deux allures : le maximum (ou minimum) de l'angle de flexion se déplace toujours vers la queue au fil du temps (voir la flèche rouge). Gauche : Évolution des angles de flexion  $(q_j)_{[3,\dots,7]}$  pour l'allure anguilliforme ; droite : Évolution des angles de flexion  $(q_j)_{[0,3,\dots,7]}$  pour l'allure serpentine

avec  $L$  la longueur du robot,  $\alpha$  l'amplitude de flexion et  $k$  la fréquence spatiale définissant l'enveloppe de l'onde. Ici,  $s_j$  devient la variable discrétisée le long du robot. Ainsi,  $s_j$  est la position curviligne du jème module le long de la vertèbre du robot au repos ( $s_j = 0$

est le début de la tête). Le paramètre  $\alpha_0$  est une courbure constante qui sera nulle dans notre étude.

Lorsque la fréquence temporelle  $F$  est fixée, la vitesse de propagation de l'onde est naturellement proportionnelle à  $k$ . De même, le signe positif de  $k$  assure le sens de propagation de la tête vers la queue. Cette propriété est vérifiée par les tracés spatiotemporels des amplitudes articulaires sur la Fig. 5.2 et indiquée par la flèche rouge. Le nombre d'onde pour les allures étudiées est fixé à  $k = 1.5$ . Nous définirons deux types d'allure qui se distinguent par le facteur  $n$  déterminant la forme de l'enveloppe de l'onde. Lorsque  $n = 0$ , nous parlerons d'allure anguilliforme, dont l'amplitude de courbure reste constante et donnée par  $\alpha$ . Pour faciliter la comparaison avec l'autre allure, nous effectuerons le changement de paramètre  $\alpha \mapsto \alpha e$  où  $e$  est un pré-facteur. De plus, toutes les articulations de flexion suivent la fonction (5.1) et nous imposerons  $q_0 = 0$  sur le lacet de la tête.

Au contraire, l'allure serpentiforme est caractérisée par un facteur  $n$  non nul qu'on choisira égal à 1. Dans ce cas, la courbure augmente le long de l'axe rostro-caudal comme le démontre les précédentes études sur l'allure des serpents [13]. Les évolutions des angles de flexion pour les deux allures sont reportées sur la Fig.5.3 avec  $\alpha = 0.4$  rad. Ici, nous remarquons que lorsque les deux allures ont le même paramètre d'amplitude  $\alpha$ , elle ont une même amplitude de rotation pour la dernière articulation  $|q_7| = \alpha e$  (voir par exemple la Fig. 5.3).

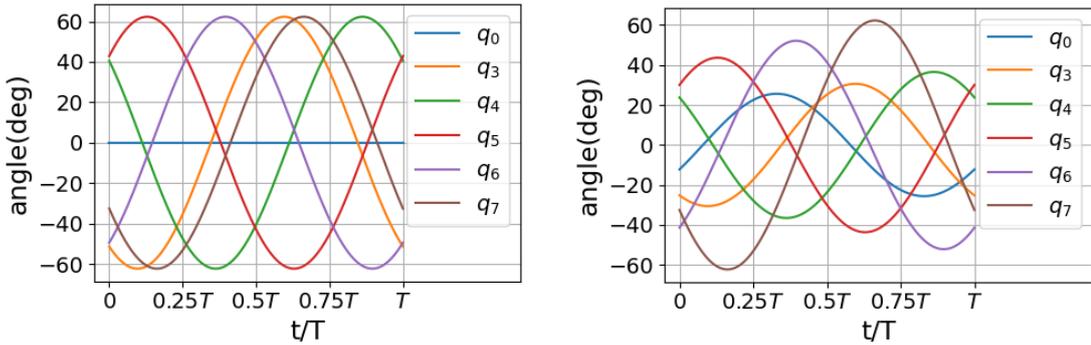


FIGURE 5.3 – Évolution des coordonnées articulaires  $(q_j)_{[0,3,\dots,7]}$  pour les deux allures étudiées avec  $\alpha = 0.4$  rad. Les figures à gauche et à droite représentent respectivement les allures anguilliforme et serpentiforme.

Ayant fixé la forme des allures, les paramètres libres restant  $F$  et  $\alpha$  vont nous permettre d'étudier l'impact de la fréquence du cycle et de l'amplitude caractéristique de

la flexion latérale.

## 5.2 Étude paramétrique de la stabilité

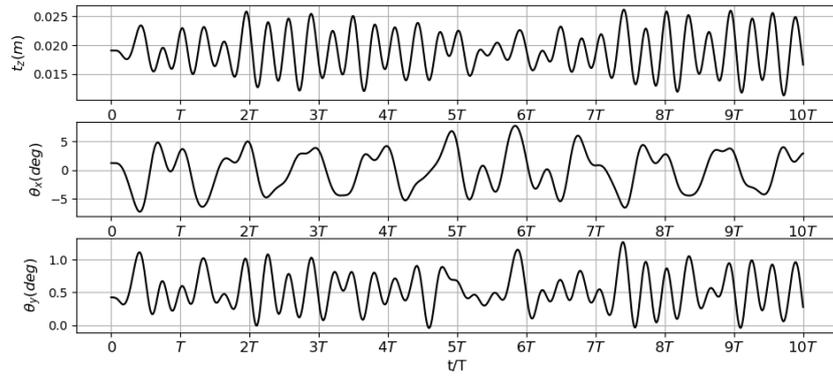
### 5.2.1 Étude paramétrique dans l'espace amplitude-fréquence

Dans cette section, nous allons étudier la réponse du nageur et plus spécifiquement l'impact des effets de gravité et d'inertie sur la stabilité dynamique du robot *Natrix*. Nous effectuerons une série de simulations numériques en faisant varier  $\alpha$  et  $F$ . Le simulateur de la dynamique du robot a été introduit dans le chapitre 2, où seuls les effets d'inertie et hydrostatique (gravité+flottabilité) sont pris en compte.

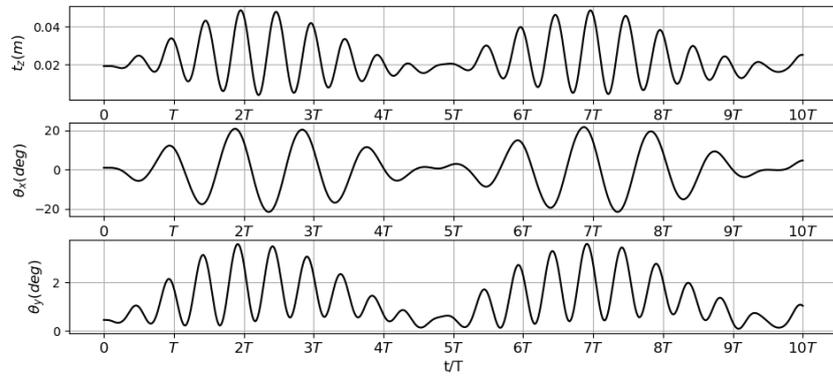
En l'absence d'effets hydrodynamiques, les degrés de liberté liés à la navigation (cavalement, embardée et lacet) apparaissent uniquement sous la forme d'oscillations autour de la position initiale (cf. section 2.10.3). Par ailleurs, nous avons déjà étudié la réponse du système à basse fréquence (cf. section 3.5.3) pour les degrés de liberté associés aux perturbations (pilonnement, roulis et tangage). On observait alors des oscillations autour de la configuration d'équilibre. Ces oscillations prennent la forme d'une superposition de différents modes, dont l'amplitude augmente avec la fréquence  $F$ . Nous proposerons ici une étude plus systématique de ces oscillations.

Nous fixons tout d'abord l'amplitude de flexion  $\alpha$  et varions la fréquence  $F \in [0.8, 3]$ Hz. La configuration initiale de la tête  $g_{eq}(t = 0)$  est en équilibre statique déterminée par l'algorithme proposé dans la section 3.3.3. La vitesse de la tête est initialement nulle. Les angles de roulis et de tangage sont déterminées par les angles d'Euler par rapport aux axes du repère global  $\mathcal{F}_G$ .

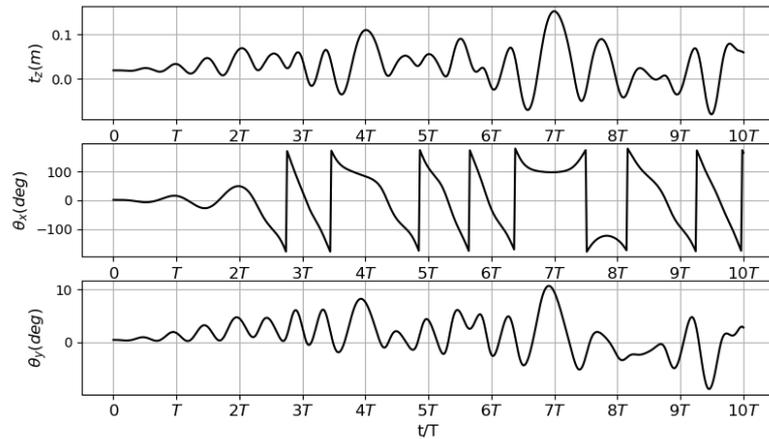
La première série de simulations est effectuée avec l'allure anguilliforme. En fixant l'amplitude  $\alpha = 0.2$ rad, nous avons simulé le mouvement de la tête pendant dix périodes en fonction de  $F$  et constaté trois régimes distinct pour le roulis. Sur la Fig. 5.4 nous rapportons les évolutions des 3 degrés de liberté pour les trois régimes identifiés. Pour  $F = 1.2$ Hz (voir Fig. 5.4.(a)), les trois mouvements présentent des oscillations non linéaires. Néanmoins, les amplitudes restent faibles ( $\theta_x < 20^\circ$ ). À mesure que la fréquence augmente, le mouvement de roulis décrit des battements (voir la Fig. 5.4.(b)), c'est-à-dire, la superposition de deux modes de Fourier avec des fréquences très proches menant à une modulation à très basse fréquence du signal caractéristique du battement. Pour ce régime, les amplitudes des trois mouvements augmentent significativement ( $20^\circ < \theta_x < 50^\circ$ ). Fi-



(a) Régime d'oscillation non-linéaire avec  $F = 1.2\text{Hz}$



(b) Régime de battements avec  $F = 2.4\text{Hz}$



(c) Régime instable avec  $F = 1.7\text{Hz}$

FIGURE 5.4 – Les évolutions trois mouvements perturbatifs du pilonnement  $t_z$ , du roulis  $\theta_x$ , du tangage  $\theta_y$  pour les trois régimes avec l'allure anguilliforme avec le paramètre  $\alpha = 0.2\text{rad}$

nalement pour  $F = 2.4\text{Hz}$ , l'évolution de l'angle de roulis n'est plus bornée et atteint une amplitude de  $180^\circ$  (voir la Fig. 5.4.(c)). Dans ce cas, le robot chavire et tourne sur lui même car nos angles d'Euler sont définis modulo  $180^\circ$ . Ce phénomène ne se produit que pour le degré de liberté de roulis, le pilonnement et le tangage restent bornés. Nous avons donc identifié trois régimes

- un régime d'oscillation non-linéaire avec des amplitudes de roulis bornées <sup>1</sup> ;
- un régime de battement ;
- un régime d'instabilité du roulis avec des amplitudes non-bornées.

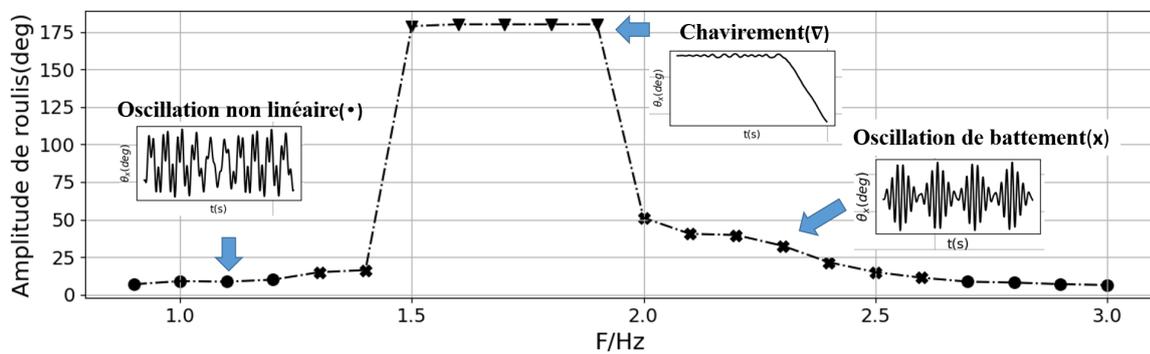


FIGURE 5.5 – Amplitude d'oscillation de roulis en fonction de  $F$  avec  $\alpha = 0.2\text{rad}$  ; les cercles correspondent à des oscillations non linéaires ; triangles au phénomène de battement ; croix au robot qui chavire

Cette première analyse motive l'exploration de la réponse fréquentielle dans un plus grand intervalle de fréquence  $F$ . La réponse fréquentielle du roulis est illustrée sur la Fig. 5.5 avec en ordonnée l'amplitude maximum du roulis. Le régime d'oscillations apparaît aux basses et hautes fréquences (cercles noirs) et l'amplitude décrit la réponse fréquentielle caractéristique d'un phénomène de résonance se situant dans la bande de fréquences  $[1.5 - 2]\text{Hz}$ . Néanmoins dans cette région, on observe justement l'instabilité du roulis (triangles noirs). La transition entre ces deux régions se fait par le régime de battement (croix noirs sur la Fig. 5.6).

Nous effectuons ensuite une étude paramétrique dans le plan amplitude-fréquence  $(\alpha, F)$  toujours pour l'allure anguilliforme. Nous retrouvons encore ces trois régimes dont la distribution dans le plan  $(\alpha, F)$  est reportée sur la Fig. 5.6. On remarque que la Fig. 5.5 est un échantillon horizontal de la Fig. 5.6.

1. ce régime peut se transformer en un régime d'oscillations linéaires à faible amplitude  $\alpha$  et fréquence  $F$

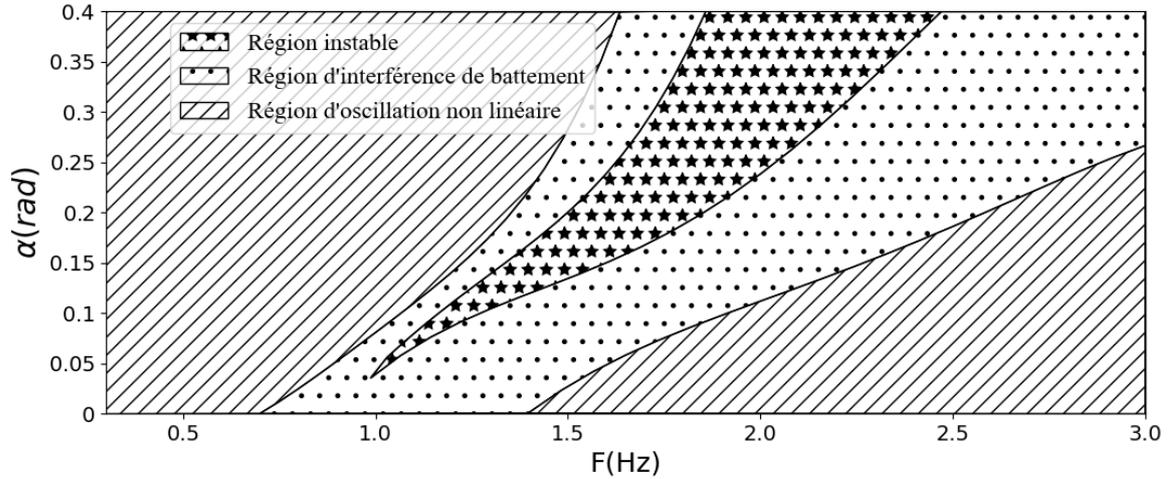


FIGURE 5.6 – Distribution des 3 régimes du mouvement de roulis dans l'espace  $(F, \alpha)$  pour l'allure anguilliforme : le régime d'oscillation non-linéaire (zone barrée) ; le régime d'interférence de battement (zone pointillée) ; le régime instable (zone étoilée).

L'instabilité est présente pour la plupart des amplitudes  $\alpha$  (zone étoilée) et se produit toujours dans une bande de fréquences finie encadrée par le régime de battement (zone pointillée). Lorsque l'amplitude  $\alpha$  augmente, il y a un déplacement de la zone d'instabilité vers les fréquences plus élevées. On reconnaît dans ce diagramme de stabilité la présence d'une langue d'Arnold [122], confirmant la présence d'un phénomène de synchronisation ou de verrouillage en fréquence entre deux modes, déjà suggérées par la présence des battements.

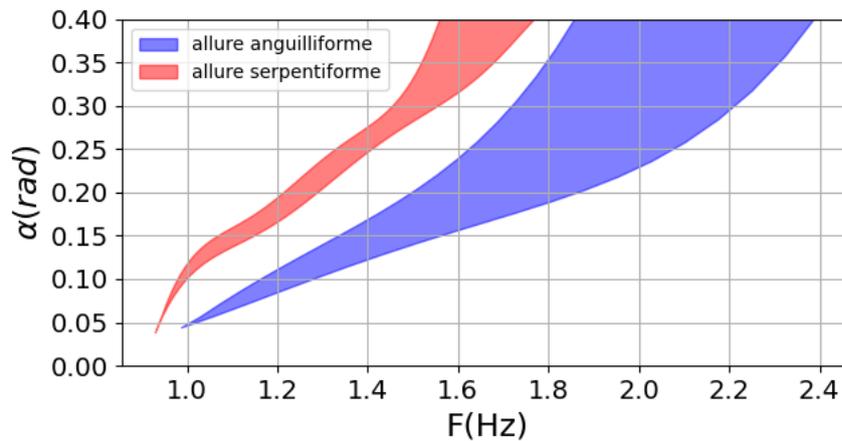


FIGURE 5.7 – Comparaison entre les régions instables de l'allure serpentiforme (région rouge) et de l'allure anguilliforme (région bleue)

Nous avons répété la même procédure pour l’allure serpentiforme. Nous avons retrouvé l’instabilité de roulis et comparé la localisation des bandes d’instabilité sur la Fig. 5.7 avec en rouge l’allure serpentiforme et en bleue l’allure anguilliforme. Pour une même amplitude  $\alpha$ , la zone instable est plus étroite pour l’allure serpentiforme et se situent relativement à plus basse fréquence par rapport à l’allure anguilliforme. A l’amplitude maximale  $\alpha = 0.4\text{rad}$ , les bandes de fréquence instables sont respectivement  $F \in (1.55, 1.75)\text{Hz}$  (serpentiforme) et  $F \in (1.85, 2.4)\text{Hz}$  (anguilliforme), soit une largeur de bande trois fois plus grande pour l’allure anguilliforme.

### 5.2.2 Analyse des résultats

Nos résultats numériques suggèrent fortement la présence d’une résonance paramétrique analogue à celle observée lorsqu’un navire est soumis à des ondes obliques (voir Fig. 1.15 dans la section 1.3.2). Pour rappel, ce phénomène apparaît lorsque les fréquences propres d’oscillation du corps se synchronisent avec les fréquences d’excitation du système. Or dans notre cas, aucune perturbation externe ne vient exciter cette instabilité. On peut donc conclure que cette instabilité provient d’une “auto-excitation” du système, c’est à dire d’une modulation temporelle des paramètres physiques (raideurs, inerties .etc) due à la nage. À notre connaissance, aucune étude n’a reporté ou étudié ce phénomène d’instabilité pour les robots nageurs. Il est probable que cette instabilité peut être modifiée, masquée ou supprimé par les effets dissipatifs ou autres phénomènes stabilisateurs pour les vrais robots.

On notera aussi que ces plages fréquentielles instables sont pertinentes pour la nage (environ 1-2Hz) [43, 103] et peuvent être exploitées par notre robot. Ces observations confirment de nouveau que le mouvement de roulis est bien le degré de liberté le plus dangereux pour les robots. On remarque aussi que les propriétés de l’allure modifient significativement le diagramme de stabilité dans le plan  $(\alpha, F)$ . On peut d’ores et déjà avancer que la nage avec l’allure serpentiforme est moins menacée par le risque d’instabilité.

Par conséquent, le reste de ce chapitre sera dédié à l’étude de cette instabilité. Nous souhaitons donc

- produire un modèle minimal capturant les éléments essentiels de l’instabilité ;
- procéder à l’identification de ce modèle pour sa simulation ;
- étudier systématiquement la stabilité du robot grâce à ce modèle et suggérer une loi pour réduire la zone d’instabilité.

## 5.3 Le *template* de la stabilité du nageur

### 5.3.1 Modèle du pendule paramétrique non-linéaire

#### Le modèle linéaire

Dans cette section, nous souhaitons produire un modèle simplifié pour l'angle de roulis  $\theta(t)$  (on omettra l'indice  $x$ ), qu'on nomme généralement *template* (ou *patron*) dans la littérature, qui capture les mécanismes essentiels du phénomène d'instabilité. L'exemple de template le plus connu est celui de la marche humaine modélisée (selon les degrés de complexité) par un pendule inverse [123]. Nous proposons ici d'inférer ce modèle à partir d'analogies et d'arguments physiques pour ensuite justifier/déduire ce modèle sur la base de la formulation lagrangienne de la dynamique introduite dans la section précédente lors de l'identification. Le but de cette section est donc de décrire les phénomènes physiques en jeu.

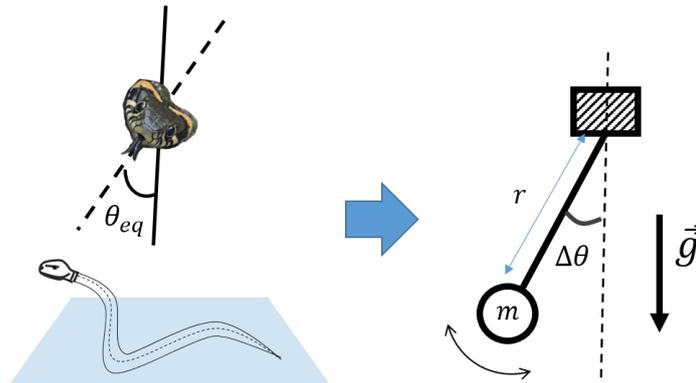


FIGURE 5.8 – Gauche : la dynamique du roulis de robot avec une forme de corps fixée ; droit : analogie d'un pendule direct avec une angle d'équilibre non nulle  $\theta_{eq}$

Nous souhaitons tout d'abord démontrer l'analogie entre la stabilité du robot et la dynamique d'un pendule paramétrique non-linéaire. Contrairement au cas des navires ou la stabilité est étudiée proche d'un équilibre (voir la section 1.3.2), nous analyserons la dynamique du roulis dans l'approximation des faibles perturbations autour des équilibres associées à chaque forme de corps de l'allure.

Tout d'abord, nous avons observé la présence d'oscillations harmoniques dans la réponse de roulis à très basses fréquences ( $F < 0.5Hz$ ), dont l'amplitude augmente avec la fréquence, indiquant la réponse d'un système du second ordre proche de la résonance. En considérant une petite variation du roulis  $\Delta\theta = \theta(t) - \theta_{eq} \ll 1$ , la dynamique autour

de l'orientation d'équilibre  $\theta_{eq}$  (supposé initialement constante) est analogue à celle du pendule libre (voir la Fig. 5.8) pour les petites oscillations (voir Eq. (3.34) dans le chapitre III)

$$\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \theta_{eq}) = 0 \quad (5.2)$$

avec la fréquence propre  $\omega$  du système inertie-ressort, donnée par  $\omega^2 = K/I$  où  $K$  la raideur et  $I$  est le moment angulaire. Les raideurs étant définies sur la configuration d'équilibre, le système est toujours stable et  $\omega$  réel. Poursuivant l'analogie avec le pendule libre, cet angle  $\theta_{eq}$  résulterait d'un couple extérieur  $\Gamma$  qui imposerait un nouvel équilibre  $\theta_{eq} = \Gamma/\omega^2$  pour  $\Gamma$  petit.

Dans cet exemple similaire à celui de la stabilité d'un navire, nous n'avons pas pris en compte le fait que le robot se déforme. La première problématique est donc d'identifier la source d'excitation du roulis. Nous avons montré dans le chapitre 3 que les formes de corps utilisées durant le roulis étaient caractérisées par des positions à l'équilibre différentes. Aussi, on peut supposer que  $\theta_{eq}(t)$  est une fonction périodique de la fréquence  $F$  de l'allure et qu'elle peut s'écrire à l'ordre dominant  $\theta_{eq}(t) \sim \cos(\Omega t)$  avec  $\Omega = 2\pi F$  la pulsation de l'allure (voir gauche de la Fig. 5.9). En reprenant l'analogie avec le couple externe, notre équation harmonique (5.2) devient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \Gamma \cos(\Omega t) \quad (5.3)$$

À cause de la déformation cyclique du corps, les paramètres physiques tels que l'inertie et la raideur hydrostatique ne peuvent plus être considérés comme constants. Aussi, il est nécessaire de considérer une fréquence propre  $\omega(t)$  variable dans la dynamique du roulis. Quelle est la fréquence typique de variation de la fréquence propre ? On remarque qu'après une demi-période, les formes de corps à  $t$  et à demi-période  $t + T/2$  sont symétriques par rapport au plan orthographe du robot comme l'illustrent la Fig. 5.9 (gauche). La distribution de masse par rapport à un axe longitudinal est donc la même, ce qui implique que les inerties axiales entre deux formes de corps à  $t$  et  $t + T/2$  sont identiques. Par conséquent, l'inertie axiale est à l'ordre dominant modulée par la fréquence  $2\Omega$  soit une fonction périodique  $I_x(t) \sim e^{2i\Omega t}$ . De même pour la raideur, la variation de la partie immergée (du moins la composante symétrique) est identique pour deux formes de corps symétriques par rapport au plan orthographe. Ainsi, on peut aussi en déduire que la modulation de la raideur  $K_x$  est donnée par  $K_x(t) \sim e^{2i\Omega t}$ .

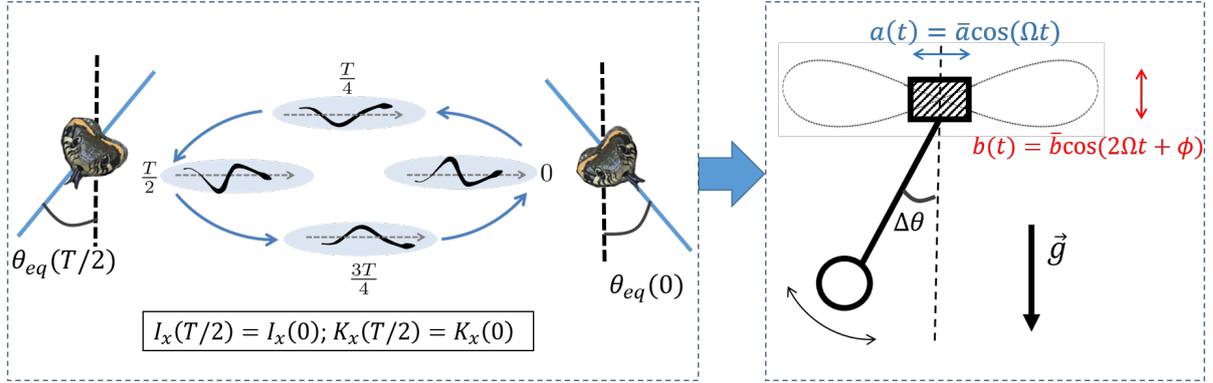


FIGURE 5.9 – Gauche : la dynamique du roulis de robot avec une allure cyclique ; Droite : analogie d'un pendule direct avec une angle d'équilibre non nulle  $\theta_{eq}$  et avec sa base périodiquement mobile.

On peut donc poser que l'inertie et la raideur axiales  $I_x(t)$  et  $K_x(t)$  sont données par

$$\begin{cases} I_x(t) = \bar{I} (1 + \delta_I \cos(2\Omega t + \phi_I)) \\ K_x(t) = \bar{K} (1 + \delta_K \cos(2\Omega t + \phi_K)) \end{cases} \quad (5.4)$$

avec  $\bar{(\cdot)}$  la valeur moyenne,  $\delta$  l'amplitude de modulation (dominante) et  $\phi$  le déphasage. Ce déphasage est définie par rapport à une certaine référence temporelle qui sera définie relativement au forçage.

La superposition des effets des modulations d'inertie et raideur entraîne ainsi une perturbation de la fréquence propre du roulis, dont le carré de la fréquence propre est donné par le rapport  $\omega^2(t) = K_x(t)/I_x(t)$ . Pour des modulations relativement faibles par rapport aux valeurs moyennes, on a

$$\frac{K(t)}{I(t)} = \omega_0^2 (1 + \delta \cos(2\Omega t + \phi) + \dots), \quad (5.5)$$

avec la fréquence propre moyenne  $\omega_0^2 = \bar{K}/\bar{I}$  et l'amplitude de modulation et le déphasage donnés par

$$\begin{cases} \delta = \sqrt{[\delta_K \cos(\phi_k) - \delta_I \cos(\phi_I)]^2 + [\delta_K \sin(\phi_k) - \delta_I \sin(\phi_I)]^2} \\ \phi = \text{atan2} \left( \frac{\delta_K \sin(\phi_k) - \delta_I \sin(\phi_I)}{\delta_K \cos(\phi_k) - \delta_I \cos(\phi_I)} \right) \end{cases} \quad (5.6)$$

Nous avons aussi négligé dans l'Eq. (5.5) les termes supérieurs, c'est à dire au moins

quadratique en  $\delta_K \delta_I$ , qui font apparaître des fréquences plus hautes.

Finalement, nous obtenons l'équation linéaire pour la dynamique du roulis

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + \delta \cos(2\Omega t + \phi)] \theta = \Gamma \cos(\Omega t) \quad (5.7)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence propre moyenne du roulis,  $\delta \ll 1$  est une perturbation sur  $\omega_0^2$  et  $\phi$  le déphasage. On remarquera aussi que l'Eq. (5.7) respecte bien les symétries du problème, c'est à dire que l'équation respecte la symétrie  $\theta \mapsto -\theta$  lorsque  $t \mapsto t + T/2$  (on généralisera cette propriété dans la dernière sous-section).

Cette équation est donc le point de départ de notre étude de stabilité. On reconnaît bien ici l'équation de Mathieu avec un terme de forçage dans le membre de droite [124], qui ne modifie en rien sa stabilité linéaire. En effet, nous montrerons dans les sections suivantes que l'instabilité paramétrique correspond à la solution homogène de l'Eq. (5.7) qui n'est donc pas influencée par la solution particulière.

### Analogie avec le pendule paramétrique

Nous souhaitons ici montrer que l'Eq. (5.7) peut être représentative du mouvement d'un pendule (cf. Fig. 5.9 de droite) soumis à des accélérations horizontales et verticales dans la limite des petites angles.

En effet, une force sur le pendule peut être produite par la translation horizontale  $a(t) = \bar{a} \cos(\Omega t)$  de sa base (voir la flèche bleue la Fig. 5.9), qui introduit un couple inertiel périodique dans la dynamique du pendule dont la dynamique aux petits angles donnerait

$$\Delta \ddot{\theta} + \omega^2 \Delta \theta = \Gamma \cos(\Omega t) \quad (5.8)$$

avec l'amplitude de forçage équivalente  $\Gamma = \frac{mr}{I} \bar{a} \Omega^2$  où  $m$  et  $r$  sont respectivement la masse et la longueur du pendule.

Quant à l'effet de modulation sur la fréquence propre, elle peut être produite par un faible déplacement de la base dans le sens vertical avec  $b = \bar{b} \cos(2\Omega t + \phi)$  (voir la flèche rouge sur la Fig. 5.9). Comme le déplacement horizontal, ce déplacement vertical génère également un couple inertiel tel que l'équation du pendule est

$$I \Delta \ddot{\theta} + mr \left( g \sin(\Delta \theta) - \bar{a} \Omega^2 \cos(\Delta \Omega t) \cos(\Delta \theta) - 4\bar{b} \Omega^2 \cos(2\Omega t + \phi) \sin(\Delta \theta) \right) = 0. \quad (5.9)$$

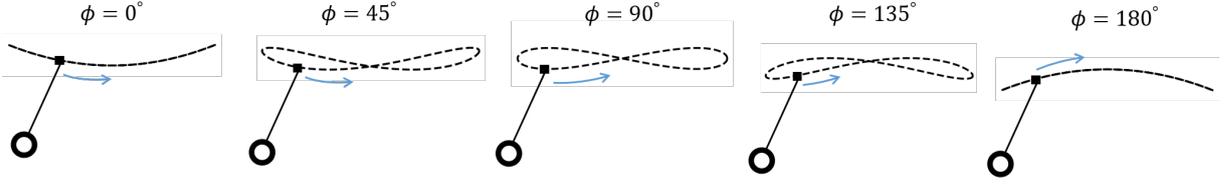


FIGURE 5.10 – La trajectoire de la base du pendule en fonction du déphasage  $\phi \in [0, 180^\circ]$  avec les amplitudes des déplacements  $\bar{a} = 1$ ,  $\bar{b} = 0.1$ .

En utilisant l'approximation linéaire, on obtient l'équation du pendule paramétrique forcé

$$\Delta\ddot{\theta} + \omega^2 \left( 1 - \frac{4\bar{b}\Omega^2}{g} \cos(2\Omega t + \phi) \right) \Delta\theta = \frac{mr}{I} \bar{a}\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (5.10)$$

avec la perturbation de fréquence ( $\delta = -\frac{4\bar{b}\Omega^2}{g}$ ). En fixant les amplitudes des déplacements  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , la trajectoire bidimensionnelle de la base est déterminée par le déphasage  $\phi$  entre les deux déplacements (voir la Fig. 5.10). Dans la plupart des cas, la trajectoire dessine un 8 sauf pour les cas  $\phi = 0 + [\pi]$ .

Nous avons ainsi montré que la dynamique du robot est équivalente à celle d'un pendule dont la trajectoire de sa base dessine un huit (voir la Fig. 5.10).

### Effet non-linéaire : l'équation de Duffing-Mathieu

Les deux dernières sections reposent sur une approximation aux petits angles proche de l'équilibre. Or à l'instar des navires, nous savons que cette approximation souffre d'une forte limitation pour le mouvement de roulis à cause de la diminution de la raideur angulaire axiale.

Comme l'illustre la Fig. 5.11, une meilleure description du bassin d'attraction de l'énergie  $E_p(\theta)$  autour d'un équilibre est donnée par

$$E_p = K_x(t) \left( \frac{1}{2} \Delta\theta^2 - \frac{1}{4} \beta \Delta\theta^4 \right) \quad (5.11)$$

avec  $\beta$  un coefficient positif caractérisant l'effet de *spring softening* et  $\Delta\theta = \theta - \theta_{eq}$ . L'ajout du terme en  $\Delta\theta^4$  préserve la symétrie  $\Delta\theta \rightarrow -\Delta\theta$ . Nous avons négligé ici les autres composantes  $\Delta\theta^n$  pour  $n > 4$  ainsi que  $n = 3$ . Nous verrons par la suite que ce terme en  $\Delta\theta^3$  produisant une force en  $\Delta\theta^2$  peut être présente mais que son pré-facteur est en moyenne nul. Le bassin d'attraction ainsi défini est limité par les angles  $\Delta\theta_{max} = \pm 1/\sqrt{\beta}$

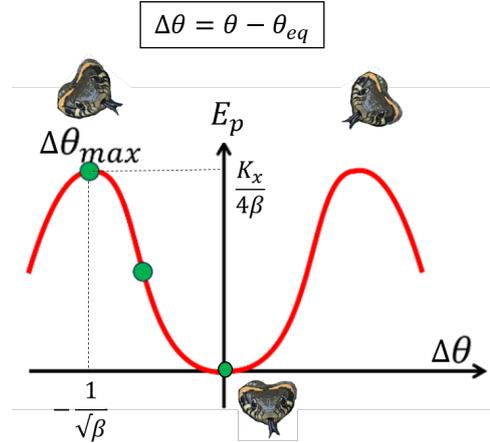


FIGURE 5.11 – Le puits de potentiel (bassin énergétique) du robot en fonction de l'angle de roulis

associés à la barrière d'énergie  $E_{p,max} = K_x(t)/(4\beta)$  (voir la Fig. 5.11).

Finalement, l'équation de Mathieu linéaire peut être modifiée pour incorporer une correction non-linéaire. L'équation résultante est à mi-chemin entre celle de Mathieu et de Duffing

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + \delta \cos(2\Omega t + \phi)] \theta - \omega_0^2 \beta \Delta\theta^3 = \Gamma \cos(\Omega t) \quad (5.12)$$

où  $\beta$  est le coefficient non-linéaire de Duffing. Lorsque  $\beta > 0$ , la raideur du système diminue à mesure que le système s'éloigne de son point d'équilibre, ce qui est appelé un ressort "softened". Nous n'avons considéré que la partie constante de  $\beta$  pour simplifier notre étude (voir section suivante).

On notera aussi le caractère hybride de notre équation qui inclut des  $\theta$  et des  $\Delta\theta$  (voir par exemple Fig. 5.12). D'un côté, nous avons introduit des petits écarts à l'équilibre  $\Delta\theta$  pour décrire les effets non-linéaires de la raideur hydrostatique. Ces propriétés sont donc locales, c'est à dire en référence à une configuration de corps ( $g_{eq}, \mathbf{q}(t)$ ) le long du cycle. Or le reste de l'équation est défini par rapport à l'écart entre la configuration de la tête le long du cycle et la configuration de référence donnée par la forme de corps moyenne  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  comme l'illustre la Fig. 5.12.

On veut donc tout ré-écrire en fonction de  $\theta$  en faisant le changement de variable  $\Delta\theta = (\theta - \theta_{eq})$ , ce qui va introduire de nouveaux termes donnés par

$$-\omega_0^2 \beta \Delta\theta^3 = -\omega_0^2 \beta \theta^3 + 3\omega_0^2 \beta \theta_{eq}(t) \theta^2 - 3\omega_0^2 \beta \theta_{eq}^2 \theta + \omega_0^2 \beta \theta_{eq}^3 \quad (5.13)$$

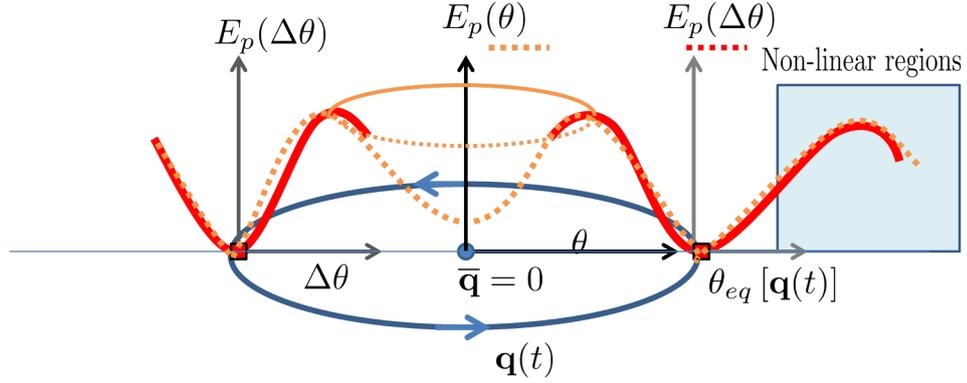


FIGURE 5.12 – Visualisation schématique de la dynamique de la tête piégée dans le puits de potentiel périodique. En rouge, nous avons tracé l’approximation locale du puits de potentiel et en orange, l’approximation du puits de potentiel pour la dynamique de  $\theta$ . La région bleue claire correspond à la région non-linéaire que nous souhaitons traiter.

En plus du terme cubique  $\theta^3$ , cette non-linéarité va modifier la raideur linéaire instantanée, ainsi que le forçage, et faire apparaître un terme brisant la symétrie. En toute rigueur, ces nouveaux termes doivent être pris en compte. Mais sont-ils pertinents pour décrire les régimes instables ? En effet, l’instabilité arrive proche de la résonance avec une bande fréquentielle limitée telle que  $\Delta F/F \simeq 0.1$  avec  $\Delta F$  la demi largeur de la bande sans doute représentative de l’écart à la résonance. Une rapide estimation de l’ordre de grandeur montre que la réponse de l’oscillateur harmonique donne une réponse harmonique  $\theta \simeq \theta_{eq}(\Delta F/F)^{-1}$  et donc que  $\theta$  est au moins d’un ordre de grandeur plus grand que  $\theta_{eq}$ , ce qui est confirmé numériquement. En effet,  $\theta_{eq}$  est de l’ordre de quelques degrés alors que  $\theta$  varie typiquement entre  $20^\circ$  à  $40^\circ$  avant l’instabilité, comme le confirme la Fig. 5.5. Aussi, nous ne garderons que le terme en  $-\omega_0^2\beta\theta^3$  représentatif des corrections pour les oscillations à grandes amplitudes telles que  $|\theta| \gg |\theta_{eq}|$ . Nous avons alors l’équation pouvant décrire la dynamique du roulis proche de l’instabilité

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + \delta \cos(2\Omega t + \phi) - \beta\theta^2] \theta = \Gamma \cos(\Omega t) \quad (5.14)$$

Nous la nommerons équation de Mathieu-Duffing car elle intègre une modulation de fréquence propre comme dans l’équation de Mathieu, un terme de forçage, et un terme cubique comme dans l’équation de Duffing [125].

Or si ces deux équations ont été largement étudiées séparément, on ne trouve pas dans la littérature une analyse de la stabilité de l’équation de Mathieu-Duffing. Le point intéressant est la possibilité de coupler les phénomènes propres à l’instabilité paramétrique

(Eq. de Mathieu) avec la dynamique de l'oscillateur forcé non-linéaire (Eq. de Duffing). Contrairement au cas linéaire, l'instabilité paramétrique peut être influencée par le terme de forçage grâce aux effets non-linéaires. Nous allons analyser ce type de comportement pour expliquer les diagrammes de stabilité obtenus précédemment.

### Rôle des symétries

Nous proposons dans cette dernière sous-section de retrouver notre équation par les seules propriétés de symétrie du système. En effet, nous avons vu que lorsque le temps est décalé d'une demi-période  $t \mapsto t + T/2$ , on obtient

$$t \mapsto t + \frac{T}{2} \implies \begin{cases} \mathbf{q}(t) \mapsto -\mathbf{q}(t), \\ \theta(t) \mapsto -\theta(t). \end{cases} \quad (5.15)$$

En effet, nous avons utilisé le fait que  $\mathbf{q}(t + T/2) = -\mathbf{q}(t)$ , c'est à dire que les coordonnées articulaires changent de signe après une demi-période. La symétrie du système impose donc, qu'ayant changé la forme de corps en son opposé, le système reste ainsi symétrique par rapport au plan orthographe (voir Fig. 3.12). Par symétrie, on obtient donc  $\theta(\mathbf{q}) = -\theta(-\mathbf{q})$ .

Pour exploiter ces symétries, nous allons poser que l'accélération angulaire suit une fonction  $F(\theta, t)$  non-linéaire et *a priori* inconnue dérivant d'un potentiel, telle que

$$\ddot{\theta} = F(\theta, t) \quad (5.16)$$

Nous proposons maintenant de développer cette équation en une série de Taylor en  $\theta^m$

$$\ddot{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}(t)\theta^m \quad (5.17)$$

avec  $F^{(m)}(t)$  une fonction périodique caractérisant la correction à l'ordre  $m$  de la fonction  $F$ . Par identification, on notera que le coefficient  $m = 0$  caractérise le forçage,  $m = 1$  la fréquence intrinsèque au carré  $\omega^2(t)$  (au signe près) et les autres termes non-linéaires provenant des corrections associées au puits de potentiel.

Nous proposons d'appliquer les symétries données par l'Eq. (5.15) : premièrement on impose un décalage en temps de l'équation précédente  $t \mapsto t + T/2$ , puis on utilise les symétries  $\theta(t + T/2) = -\theta(t)$ . Par identification, on obtient que les termes pairs et impairs doivent vérifier les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{(2m+1)}(t) = F^{(2m+1)}\left(t + \frac{T}{2}\right) \implies F^{(2m+1)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}_k^{(2m+1)} \cos [2k\Omega t + \phi_k^{(2m+1)}] \\ F^{(2m)}(t) = -F^{(2m)}\left(t + \frac{T}{2}\right) \implies F^{(2m)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}_k^{(2m)} \cos [(2k+1)\Omega t + \phi_k^{(2m)}] \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Nous avons exploité le fait que les fonctions  $F^{(2m+1)}(t)$  impaires doivent être invariantes par un changement  $t \mapsto t + T/2$ , ce qui implique que ces fonctions  $F^{(2m)}(t)$  sont décomposables en série de Fourier avec des harmoniques  $\Omega_k$  paires : un décalage en temps de  $T/2$  produit un déphasage nul modulo  $2\pi$  sur les phases. On a le raisonnement opposé avec les fonctions  $F^{(2m)}(t)$  paires décomposables en harmoniques impaires : un décalage en temps de  $T/2$  produit un déphasage de  $\pi$  modulo  $2\pi$  sur les phases.

Il vient que

- le forçage  $F^{(0)}(t)$  est à l'ordre dominant donné par  $\Gamma(t) \propto \cos(\Omega t + \phi_0)$  (comme nous l'analyserons par la suite)
- le terme de fréquence intrinsèque  $\omega^2(t)$  ( $F^{(1)}(t)$ ) peut être décomposé au premier ordre par une constante plus une fonction en  $\cos(2\Omega t)$ .
- La correction cubique avec pré-facteur  $\beta$  peut être aussi donnée par une constante au premier ordre.

On pourra aussi s'intéresser à la correction quadratique en  $\theta^2$  brisant la symétrie  $\theta(t) \mapsto -\theta(t)$  (à temps fixe), qui sera pondérée par un terme en  $\cos(\Omega t)$ .

Nous avons donc ici retrouvé, par de simples arguments de symétries, l'équation de Mathieu-Duffing avec les bonnes périodicités des coefficients. Comme nous allons le voir dans la prochaine section, ces propriétés nous permettront de mieux ajuster les fonctions de régression requises par l'identification paramétrique.

### 5.3.2 Identification des paramètres

Dans cette section, nous présentons notre méthodologie pour identifier numériquement les paramètres de l'équation Duffing-Mathieu (5.14). Pour cela, nous décomposerons l'allure cyclique comme une succession des poses statiques à l'équilibre. Les paramètres seront alors obtenus en analysant la dynamique au voisinage de chacun des équilibres.

### Modulation de la fréquence $\omega(t)$

Nous souhaitons d'abord identifier la modulation de la fréquence  $\omega(t)$ , c'est-à-dire les coefficients  $\omega_0$ ,  $\delta$  et  $\phi$  définis par le ratio entre la raideur et le moment d'inertie du roulis  $K_x(t)/I_x(t)$ .

Nous utiliserons la dynamique (pilonnement, roulis et tangage) exprimée dans le repère global  $\mathcal{F}_G$ . Pour extraire le moment d'inertie  $I_x$ , la matrice d'inertie est donc exprimée dans  $\mathcal{F}_G$ . Dans la section 4.3.3, nous avons montré que le couplage de la dynamique de locomotion sur la surface est négligeable sur le mouvement de roulis. Par conséquent, nous utiliserons la matrice d'inertie réduite  $\widetilde{M}_0(t)$  donnée par l'Eq. (4.22)

$$I_x(t) = \mathbf{u}_\theta^T \widetilde{M}_0(t) \mathbf{u}_\theta \quad (5.19)$$

avec  $\mathbf{u}_\theta^T = (0, 1, 0)$  un vecteur de projection extrayant le terme du roulis.

De même, on utilisera directement la valeur propre de la matrice de raideur  $K_0$  dépendant de  $[g_{eq}(t), \mathbf{q}(t)]$  pour obtenir la raideur hydrostatique  $K_x$  (voir la section 3.3.5) avec

$$K_x(t) = \mathbf{u}_\theta^T K_0(t) \mathbf{u}_\theta \simeq -\lambda_3 \quad (5.20)$$

où  $\lambda_3$  est la valeur propre de  $(-K_0)$  dominée par le mouvement de roulis (voir la section 3.3.2).

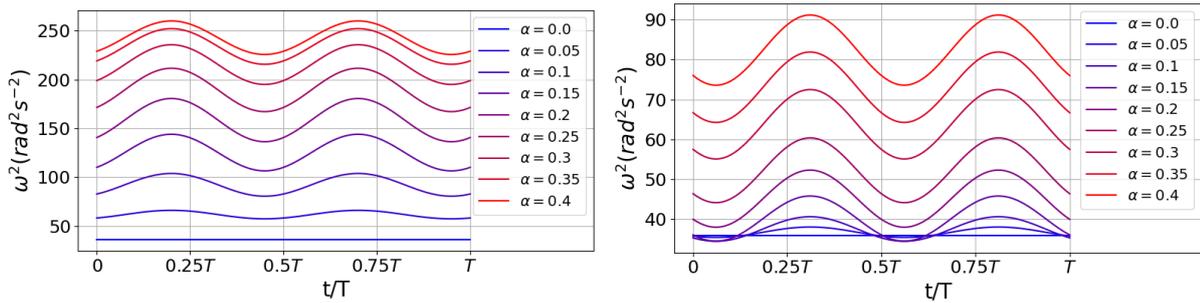


FIGURE 5.13 – Évolution du carré de la fréquence propre  $\omega^2(t)$  en fonction du temps pendant une période de l'allure avec différentes amplitudes  $\alpha$ . Les figures à gauche et à droite représentent respectivement les allures anguilliforme et serpentiforme.

Les évolutions du carré de la fréquence propre  $\omega^2(t) = K_x/I_x$  pour l'allure anguilliforme sont reportées sur la Fig. 5.13. Comme attendu,  $\omega^2$  présente une modulation à deux

fois la fréquence de l'allure dont l'amplitude moyenne augmente avec  $\alpha$ . Pour les deux allures, la courbe de référence pour  $\alpha = 0$  est une ligne droite, le robot se maintenant dans sa forme de corps rectiligne.

Nous pouvons donc extraire les paramètres de ces courbes (Fig. 5.13) en posant la fonction de régression

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 [1 + \delta \cos(2\Omega t + \phi')] \quad (5.21)$$

avec les trois paramètres libres  $\omega_0$ ,  $\delta$  et  $\phi'$  qui varient en fonction de  $\alpha$ . On notera l'utilisation d'une phase  $\phi'$  qui sera ensuite corrigée par la référence de départ du cycle donnée par le forçage.

Toutes les régressions dans ce chapitre sont effectuées grâce à la librairie python "scipy" nommée "optimize.curve\_fit". Les régressions montrent que le paramètre  $\phi'$  est constant pour une allure donnée avec  $\phi' = -2.51\text{rad}$  (anguilliforme) et  $\phi' = 2.38\text{rad}$  (serpentiforme). En effet, on remarque que les extrema des courbes  $\omega^2(t)$  ne varient pas (ou très peu) lorsque l'amplitude de la courbure  $\alpha$  augmente.

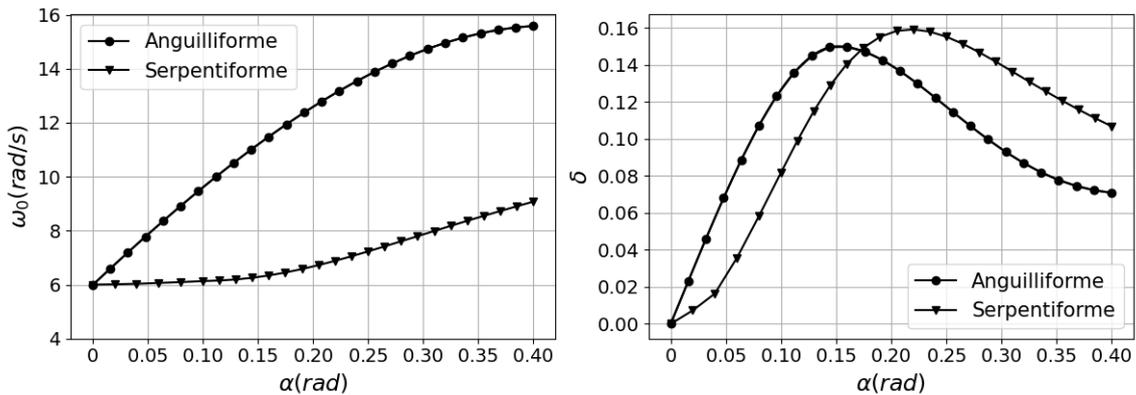


FIGURE 5.14 – Paramètres  $\omega_0$  et  $\delta$  ajustés par la fonction de régression (5.21) en fonction de l'amplitude de flexion  $\alpha$

Les dépendances des paramètres  $\omega_0$  et  $\delta$  en fonction de  $\alpha$  pour les deux allures sont illustrées sur la Fig. 5.14. La valeur de la fréquence propre moyenne  $\omega_0$  est toujours positive comme attendu d'un système à l'équilibre. Pour un même  $\alpha$ , la valeur de  $\omega_0$  pour l'allure serpentiforme (triangles) est significativement plus petite que celle de l'allure anguilliforme (cercles). Ceci explique en partie pourquoi on observe un diagramme de stabilité décalé vers les basses fréquences pour l'allure serpentiforme.

La fréquence propre moyenne  $\omega_0$  augmente à mesure que l'amplitude de flexion  $\alpha$  augmente et sature vers  $\alpha \simeq 0.4$  rad pour l'allure anguilliforme. Les paramètres  $\omega_0^2$  et  $\delta$  diffèrent d'au moins deux ordres de grandeur, voir trois pour les petites amplitudes  $\alpha$ . Ceci implique que la modulation de fréquence propre est faible et que des méthodes dites perturbatives peuvent être exploitées pour analyser l'impact de ce terme (cf. la section 5.4.3). Pour les deux allures, les coefficients  $\delta$  atteignent un maximum respectivement à  $\alpha \simeq 0.15$ rad (anguilliforme) et  $\alpha \simeq 0.22$ rad (serpentiforme) et peuvent atteindre entre 14 et 16% de la fréquence propre.

### Amplitude de forçage $\Gamma$ et déphasage $\phi$

Nous présentons maintenant l'identification des paramètres  $\Gamma$  et  $\phi$ . La première étape consiste à identifier quels effets contribuent à la source d'excitation. À partir de l'équation du mouvement de la tête (2.63), les contributions possibles sont les efforts centrifuges et de Coriolis  $\beta(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , le torseur d'effort hydrostatique  $\mathbf{W}_{stat}(g_0, \mathbf{q})$  et l'effort d'inertie du corps  $M_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ .

On peut en première approche négliger les efforts centrifuges et de Coriolis puisqu'ils sont des fonctions quadratiques des vitesses qui ne sont pertinentes que pour les grandes amplitudes et fréquences de déformations. Nous avons montré dans le chapitre précédent (voir section 4.3.3) que les couplages inertiels induits par  $M_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$  étaient faibles car le plan de nage du robot restait globalement proche du plan de la surface.

Aussi, ces deux termes sont négligeables par rapport à la contribution du torseur d'effort hydrostatique  $\mathbf{W}_{stat}$  associée aux déformations  $\mathbf{q}(t)$ . Plus précisément, nous savons qu'une variation de forme  $\Delta\mathbf{q}$  par rapport à une forme de référence  $\mathbf{q}$  induit une nouvelle position d'équilibre  $\Delta\boldsymbol{\psi}_{eq}(\Delta\mathbf{q})$  donnée par l'Eq. (3.34) fonction de  $\Delta\mathbf{q}$ . En extrayant la composante  $\theta_{eq}$ , on peut alors reconstruire le couple "excitateur"  $\Gamma$  comme étant la force attractive ramenant la tête à la configuration  $\theta_{eq}[\mathbf{q}(t)]$  avec  $\Gamma \simeq \omega^2(t)\theta_{eq}(t)$  (voir section 5.3.1).

Afin d'estimer cette composante, on calcule toutes les poses  $g_{eq}$  à l'équilibre le long du cycle  $\mathbf{q}(t)$ . Nous définissons la forme du corps de référence par la forme rectiligne  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  car elle correspond au barycentre des formes de corps  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . On nommera alors la pose d'équilibre  $g_{eq,0}$ , associée à la forme de référence, et l'écart à l'équilibre seront ainsi calculés en référence à cette configuration. Le changement d'équilibre autour de la forme de référence est schématisé sur la Fig. 5.15. Selon l'étude de la section 3.3.5 du chapitre 3, les variations de la forme  $\Delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t)$  produisent un changement d'équilibre  $g_{eq}(t)$  avec

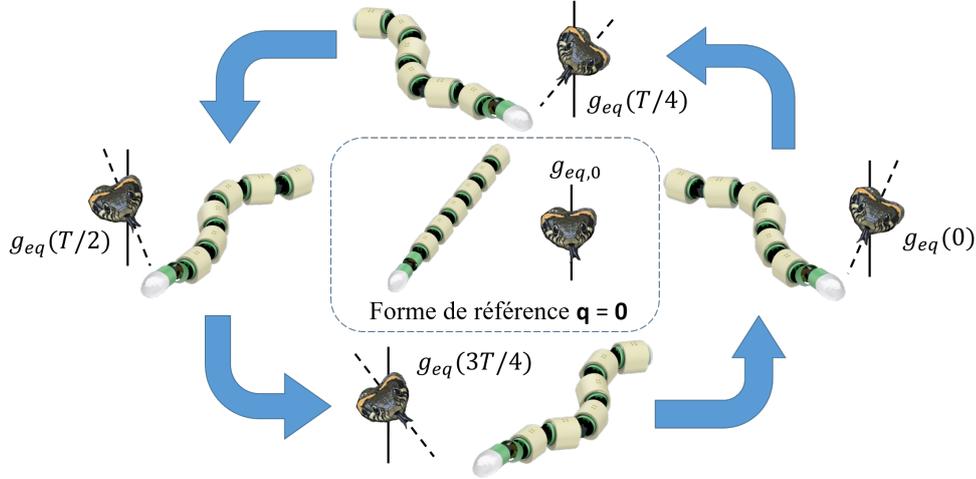


FIGURE 5.15 – Représentation schématique de périodicité et de symétrie du changement d’équilibre autour de la forme de référence au cours de l’allure cyclique

une période  $T$  (cf. la Fig. 5.15). La variation de la configuration de la tête  $\Delta\Psi(t)$  dans le repère  $\mathcal{F}_G$  par rapport à  $g_{eq,0}$  est calculée par la relation (3.1) :

$$\Delta\hat{\Psi}_{eq}(t) = \log(g_{eq}(t)g_{eq,0}^{-1}). \quad (5.22)$$

On retrouve alors que  $\Delta\Psi_{eq}(t)$  a la même périodicité que la configuration  $g_{eq}(t)$ . Finalement, ce couple “excitateur” peut s’écrire :

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{I_x(t)} \mathbf{u}_\theta^T \left( K_0 \Delta\hat{\psi}_{eq}(t) \right), \quad (5.23)$$

où  $K_0$  est la matrice de raideur introduite dans le chapitre précédent et estimée sur un cycle de  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\Delta\hat{\psi}_{eq} = \mathcal{P}\Delta\hat{\Psi}_{eq}$  est la projection de la configuration sur la dynamique des perturbations, et  $\mathbf{u}_\theta^T$  est la projection sur l’axe de roulis

Nous avons reporté l’évolution de  $\Gamma(t)$  sur la Fig. 5.16 pendant une période de l’allure en fonction du temps rapporté à la période du cycle, pour différents  $\alpha$ . On remarque que les allures respectent bien l’invariance  $t \mapsto t + T/2$ . L’allure anguilliforme (droite) est caractérisée par des oscillations “relativement” symétriques alors que la force associée à l’allure serpentiforme est composée de phases de croissance lentes de zéro à l’extrema, suivies de phase de décroissance rapides vers zéro. À l’instar de sa fréquence propre  $\omega_0$ , l’amplitude du forçage de l’allure anguilliforme présente un effet de saturation avec l’aug-

mentation de l'amplitude de flexion  $\alpha$ .

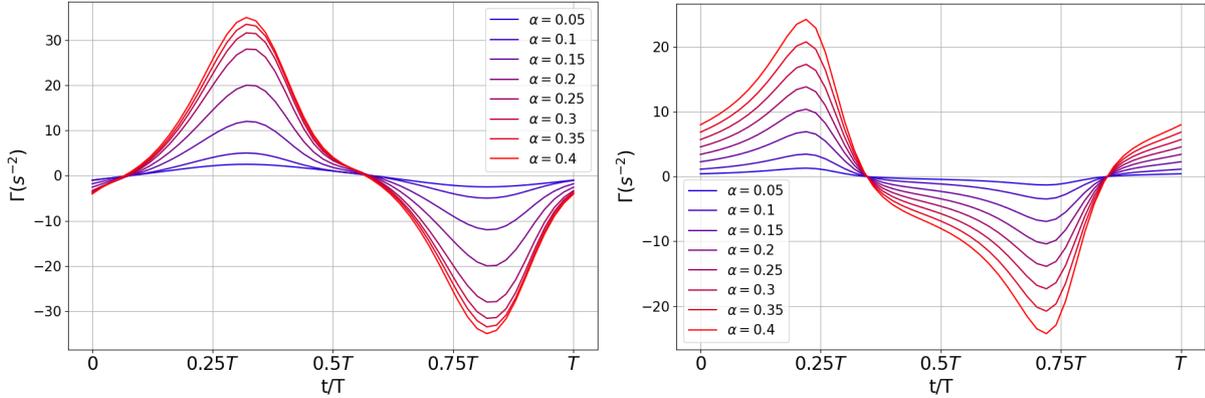


FIGURE 5.16 – Estimations du forçage de roulis  $\Gamma(t)$  pendant une période  $T$  pour des différentes amplitudes  $\alpha \in (0, 0.4)$ rad. Les figures à gauche et à droite représentent respectivement les allures anguilliforme et serpentiforme. Les figures à gauche et à droite représentent respectivement les allures anguilliforme et serpentiforme.

Bien que ces courbes de  $\Gamma(t)$  présentent clairement la présence de plusieurs harmoniques de  $\Omega$ , nous proposons de ne garder que le fondamental tel que la fonction de régression est donnée par :

$$\Gamma_{reg}(t) = \Gamma \cos(\Omega t + \bar{\phi}) \quad (5.24)$$

où  $\Gamma$  et  $\bar{\phi}$  sont respectivement l'amplitude et le déphasage à déterminer par la régression des courbes. À partir de la régression des courbes  $\Gamma(t)$  avec la fonction (5.24), on observe néanmoins que les variances de régression pour les paramètres de l'allure serpentiforme sont d'un ordre de grandeur supérieur à celles de l'allure anguilliforme, ce qui est sûrement dues aux oscillations dissymétriques.

Sur la Fig. 5.17, nous avons reporté les paramètres obtenus  $\Gamma$  et  $\bar{\phi}$  en fonction de l'amplitude  $\alpha$  pour les deux allures. Pour l'allure serpentiforme (ronds noirs), l'amplitude de  $\Gamma$  augmente presque proportionnellement avec  $\alpha$ . L'amplitude du forçage  $\Gamma$  de l'allure serpentiforme est notablement inférieure à celle de l'allure anguilliforme. Lorsque l'amplitude de flexion  $\alpha$  atteint son maximum, l'amplitude de forçage de l'allure serpentiforme n'est qu'à 70% de celle de l'allure anguilliforme. La valeur du déphasage  $\bar{\phi}$  varie peu (moins de 3%) en fonction de  $\alpha$ . On notera alors que les déphasages  $\bar{\phi}$  sont indépendants de  $\alpha$  avec  $\bar{\phi} \approx -1.98$  rad pour l'allure anguilliforme et  $\bar{\phi} \approx -0.93$  rad pour l'allure serpentiforme.

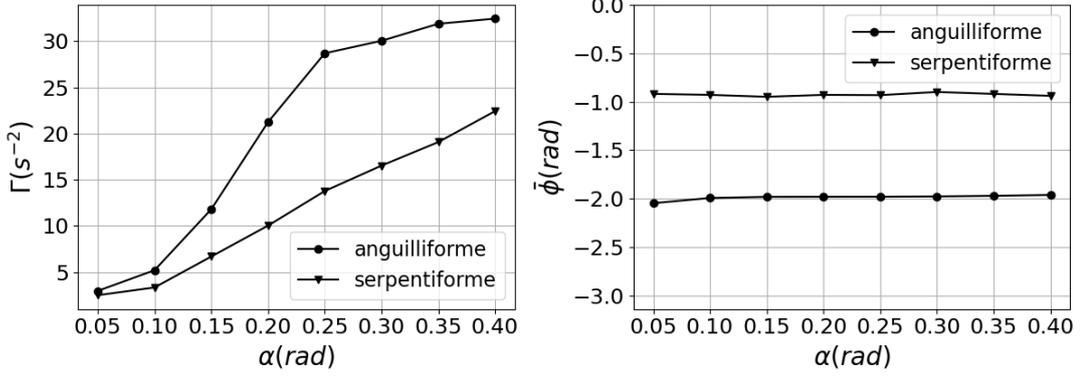


FIGURE 5.17 – Paramètres  $\Gamma(t)$  et  $\bar{\phi}$  ajustés par la fonction de régression (5.24) en fonction de  $\alpha$

Nous avons défini l'évolution des fonctions de la fréquence propre  $\omega^2(t)$  et du forçage  $\Gamma(t)$  à partir de la condition initiale  $\mathbf{q}(0)$  associée à la forme en cosinus. Pour simplifier l'équation, on souhaite redéfinir l'origine du cycle tel que  $\Gamma(t) \propto \cos(\Omega t)$ . Il est donc nécessaire d'effectuer le changement de variable  $t \mapsto t - \bar{\phi}/\Omega$  dans le modèle simplifié (5.14), ce qui nous donne le nouveau déphasage  $\phi$  de la modulation de raideur à partir de  $\phi'$  et  $\bar{\phi}$  (modulo  $2\pi$ )

$$\phi = \phi' - 2\bar{\phi} \quad (5.25)$$

Pour rappel, le déphasage  $\phi$  est un élément déterminant comme l'illustre l'analogie du pendule. En effet, il représente le déphasage entre les déplacements verticaux et horizontaux de la base (voir la Fig. 5.10). Dans notre étude, ces déphasages  $\phi$  estimés pour les allures anguilliforme et serpentiforme sont respectivement 1.45rad (proche de  $\pi/2$ ) et  $-2.04$ rad (proche de  $-2\pi/3$ ).

### Coefficient non-linéaire $\beta$

Dans cette section, nous allons identifier le coefficient non-linéaire  $\beta$ , dit de "softening", qui nous permet de corriger la raideur loin de l'équilibre

En première approche, nous souhaitons décrire le puits de potentiel pour une forme de corps constante, puis nous étudierons le cas plus général où le corps se déforme. Sur la Fig. 5.18, nous avons reporté l'énergie potentielle  $E_p$  en fonction de  $\Delta\theta$  pour la forme du corps en cosinus soumis à une perturbation en roulis. Les extrema du puits sont localisés à  $\Delta\theta_m = -89^\circ$  et  $86^\circ$ . Pour rappel, au-delà de ces angles, le couple hydrostatique n'est plus un couple de rappel. On constate aussi que l'évolution de  $E_p$  n'est pas exactement

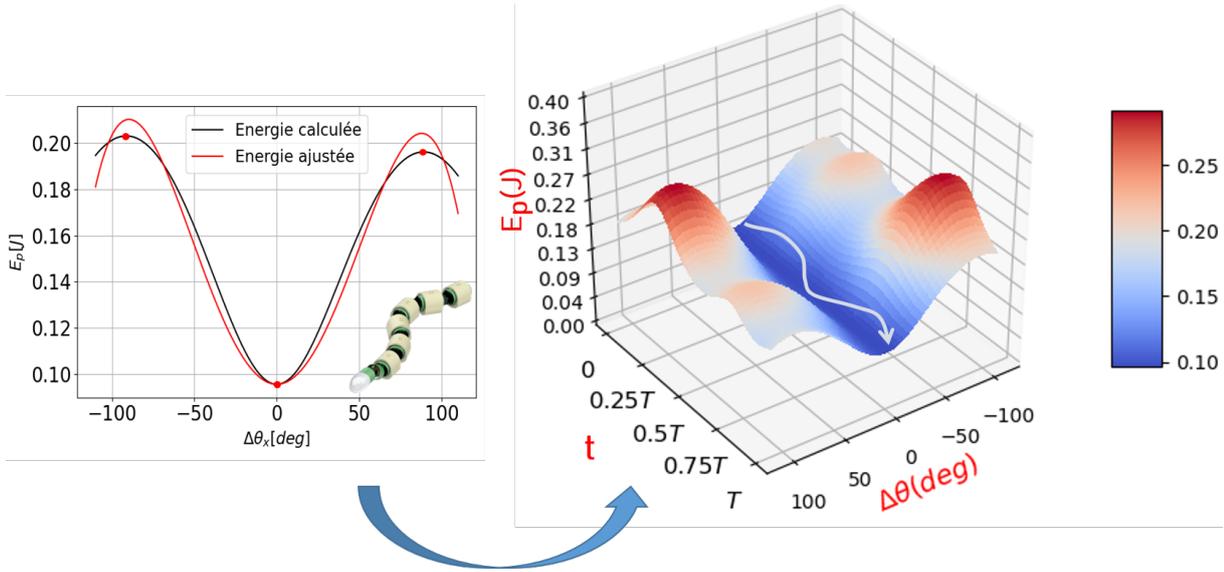


FIGURE 5.18 – Gauche : Forme du bassin énergétique  $E_p$  par rapport au mouvement de roulis  $\Delta\theta \in [-110^\circ, 110^\circ]$  avec la forme du corps “en cosinus” dans l’allure anguilliforme (noir) et la courbe d’ajustement de  $E_p$  avec la relation polynomiale (5.26) (rouge) ; droite : paysage énergétique par rapport de l’angle de roulis au fil de l’allure anguilliforme, La flèche blanche correspond au mouvement du roulis dans ce paysage.

symétrique par rapport à  $\Delta\theta = 0$ . Par conséquent, la relation proposée pour approximer les puits de potentiel doit inclure un terme cubique apte à rendre compte de cette asymétrie. Elle se détermine comme :

$$E_{p,reg}(\Delta\theta) = E_p(0) + K_x \left( \frac{1}{2}\Delta\theta^2 + \frac{1}{3}\kappa\Delta\theta^3 - \frac{1}{4}\beta\Delta\theta^4 \right), \quad (5.26)$$

avec  $E_p(0)$  l’énergie potentielle du robot en équilibre, et  $\kappa$  le pré-facteur du terme brisant la symétrie locale du puits de potentiel.

L’évolution de  $E_p(\Delta\theta)$  durant un cycle d’allure anguilliforme est illustrée sur la Fig. 5.18 de droite. La Fig. 5.18 de gauche est ainsi la tranche à l’instant  $t = 0$  de la figure de droite. Le mouvement de roulis est bien analogue au mouvement d’une masse ponctuelle dans un bassin périodique. Les trajectoires non-bornées, i.e. les mouvements instables, correspondent ici au cas où la masse s’échappe du puits à cause de l’amplification des oscillations latérales.

On remarque que la forme du puits d’énergie potentielle n’est pas seulement déterminée par une modulation paramétrique de la raideur  $K_x$ , mais aussi par celle des coefficients de “softening”  $\beta(t)$  et d’asymétrie  $\kappa(t)$ . Cette combinaison d’effets non linéaires peut

compliquer le processus d'analyse.

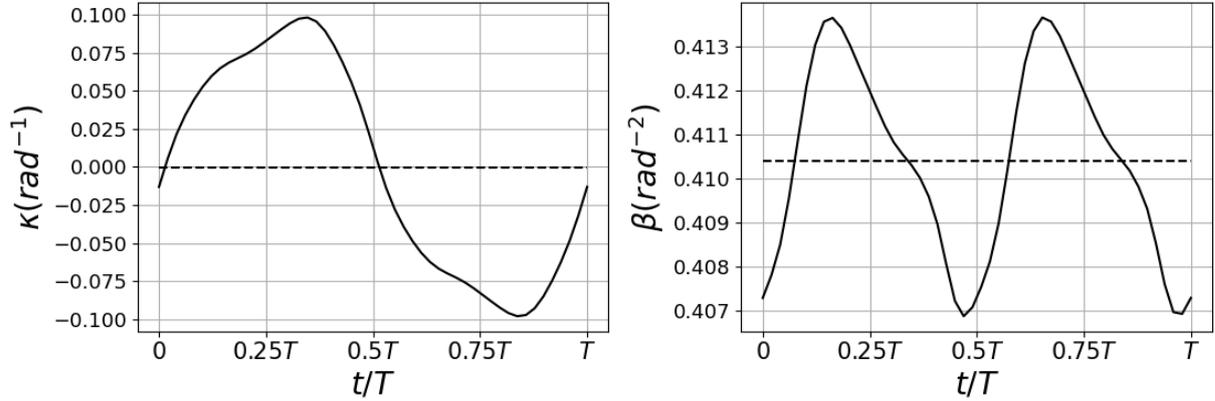


FIGURE 5.19 – Évolutions des coefficients  $\kappa$ (gauche) et  $\beta$ (droit) ajustés par la fonction de régression (5.26) au cours d'une période pour l'allure anguilliforme avec  $\alpha = 0.3\text{rad}$ , les lignes pointillées correspondent aux valeurs moyennes.

Grâce à la régression du puits de potentiel au cours du temps par la fonction (5.26), on obtient l'évolution des coefficients  $\kappa$  et  $\beta$  illustrée sur la Fig. 5.19. On constate que  $\kappa$  comprend des composantes de Fourier impaires (essentiellement le mode fondamental), alors que  $\beta$  comprend des composantes paires avec une partie constante et une modulation à  $2\Omega$ . Cette observation est en accord avec les symétries et la périodicité identifiées dans l'Eq. (5.18). On remarque que l'amplitude d'oscillation de  $\kappa$  est du même ordre de grandeur que  $\beta$ , typiquement 0.1 pour  $\kappa$  et 0.05 pour  $\beta$ . Néanmoins, la valeur moyenne de  $\bar{\beta}$  est proche de 0.41 alors qu'elle est par symétrie, nulle pour  $\kappa$ .

Peut-on néanmoins négliger le terme de brisure de symétrie? Une analyse en ordre de grandeur montre que le terme  $\beta\Delta\theta^3$  est 3.6 fois plus grand, que le terme  $\kappa\Delta\theta^2$ , pour une amplitude d'oscillation de roulis de  $40^\circ$ . Afin de simplifier notre analyse, nous ne prendrons pas en compte cet effet, ce qui permet aussi de préserver la symétrie de la dynamique du roulis. De plus, nous ne considérerons pas non plus les faibles oscillations de  $\beta$  (autour de 1% de la valeur moyenne) et supposons donc ce coefficient constant.

La valeur moyenne de  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  pour les deux allures est illustrée sur la Fig. 5.20. On vérifie bien que  $\beta$  a toujours une valeur positive, ce qui implique que l'effet non-linéaire sur la raideur est toujours "softened" mais pas "hardened". Étonnamment, à mesure que  $\alpha$  augmente, la valeur du  $\beta$  varie légèrement avec une amplitude inférieure à 10%. La valeur de  $\beta$  pour l'allure serpentiforme est légèrement supérieure à celle de l'allure anguilliforme. D'une manière générale, l'impact de l'amplitude de déformation sur

le coefficient de softening est relativement faible, comparé à celui des autres paramètres tels que la fréquence propre  $\omega(t)$  ou le forçage  $\Gamma(t)$ .

Nous avons finalement identifié tous les paramètres du modèle simplifié de Duffing-Mathieu (5.14).

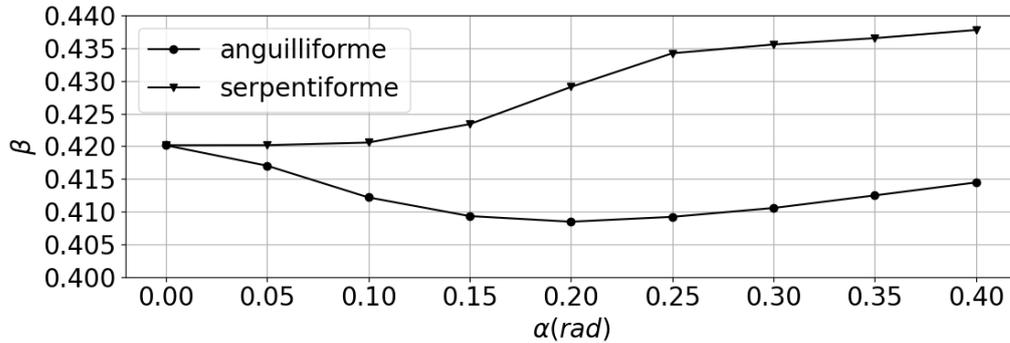


FIGURE 5.20 – Coefficient non-linéaire  $\beta$  ajustés par la fonction de régression (5.26) en fonction de  $\alpha$

## 5.4 Analyse de la stabilité et des régimes de l'équation de Duffing-Mathieu

### 5.4.1 Pertinence du modèle et motivations

Dans la section précédente, nous avons établi par des arguments physiques et de symétrie, une équation simplifiée de la dynamique du roulis de la tête au voisinage des équilibres durant un cycle de déformation du corps. L'identification des paramètres a ainsi confirmé notre approche. Nous avons aussi montré que le comportement du roulis est analogue à celui du pendule paramétrique. Or de tels systèmes ont déjà été étudiés dans la littérature [68, 124, 126]. Cette analogie va nous permettre d'utiliser différentes méthodes mathématiques connues pour analyser la résonance paramétrique. De plus, nous avons choisi d'intégrer un terme non-linéaire cubique pour étendre la dynamique dans les régimes de grandes amplitudes d'oscillations.

Par ordre d'importance, le second résultat de la section précédente consiste en la mise en évidence de la variation des paramètres de cette équation, en fonction de l'amplitude des déformations  $\alpha$ . Aussi, on peut en première approche expliquer les diagrammes de stabilité relativement à la variation de ces coefficients. En effet, la fréquence propre  $\omega_0$

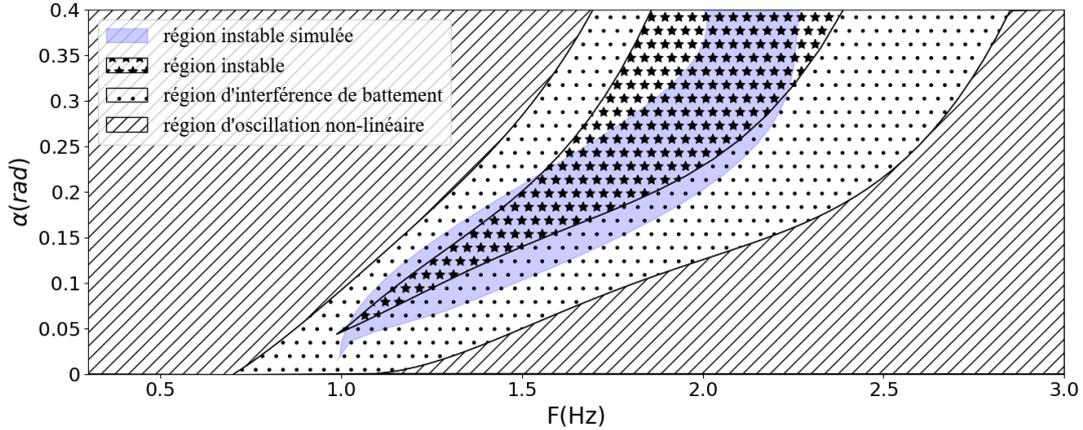


FIGURE 5.21 – Estimation de la zone d’instabilité via la simulation directe de l’équation de Duffing-Mathieu (5.14) (région bleu) avec les paramètres identifiés.

est significativement plus petite pour la nage serpentiforme ce qui peut expliquer *a priori* pourquoi la région instable associée à l’allure serpentiforme se situe à des fréquences plus basses (cf. Fig. 5.7).

Pour confirmer la pertinence du modèle, et avant d’analyser plus en détails l’équation de Mathieu-Duffing, nous souhaitons savoir si elle reproduit la région d’instabilité observée pour le robot. Pour cela, nous avons reporté sur la Fig. 5.21 la zone d’instabilité estimée grâce au modèle (en bleue) en surimpression de celle donnée par le simulateur du robot (région étoilée). On observe qu’elle reproduit relativement bien la position de la langue d’Arnold pour les valeurs de  $\alpha < 0.25\text{rad}$ , et s’en écarte sensiblement plus, pour les plus grandes valeurs. Ce résultat est probant, malgré la prise en compte d’un unique degré de liberté  $\theta_x$ , et en dépit de toutes les simplifications liées à la troncature des termes non-linéaires, de la sélection d’un nombre fini de composantes de Fourier ou des erreurs inhérentes à la régression. Un autre aspect important et aussi surprenant est que nous avons uniquement estimé les paramètres à partir des propriétés du système à l’équilibre. On peut donc conclure que l’équation de Mathieu-Duffing est le bon outil mathématique pour analyser la stabilité.

Pour une analyse plus fine des résultats, il faut regarder plus précisément les mécanismes à l’origine de l’instabilité, et évaluer l’impact des paramètres  $\omega_0, \delta, \phi, \Gamma$  ou  $\beta$  sur cette stabilité. Au lieu d’effectuer une exploration systématique de l’espace paramétrique par des simulations, ce qui est très coûteux, nous voulons traiter la stabilité du point de vu analytique. L’objectif est donc d’établir un lien explicite entre ces paramètres et

la zone d'instabilité dans l'espace des paramètres de la nage. En d'autres termes, nous voulons prédire la région instable de la nage, à partir du modèle simplifié.

Dans cette section, nous proposons deux approches pour évaluer le risque d'un comportement non-borné du roulis grâce au modèle simplifié. Ces deux approches sont

1. **une analyse linéaire de stabilité** à partir du modèle linéarisé ;
2. **une second analyse linéaire** basée sur un développement perturbatif prenant en compte les effets non-linéaires.

La première approche [118] nous donnera une première prédiction du domaine de stabilité en considérant uniquement l'instabilité provoquée par une résonance paramétrique. Malheureusement, cette première estimation se révélera être bien loin du seuil observé par la simulation numérique du robot. La deuxième approche est une extension de la première qui permettra de prendre en compte l'effet d'excitation (ou de forçage) sur la résonance paramétrique via les couplages induits par les termes non-linéaires. En effet, nous prendrons en compte la modification de la fréquence propre et de la modulation induite par la réponse de l'oscillateur de Duffing. Nous verrons que nous obtiendrons alors une bonne estimation de la zone d'instabilité, justifiant ainsi la prise en compte des effets de forçage non-linéaires.

### 5.4.2 Stabilité de l'équation linéaire

Nous proposons de prendre en compte uniquement les termes linéaires en  $\theta$  de l'équation de Mathieu-Duffing pour analyser la stabilité linéaire. Nous obtenons ainsi l'équation de Mathieu suivante

$$\ddot{\theta} + \omega^2(t)\theta = 0, \quad (5.27)$$

avec

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \delta \cos(2\Omega t)).$$

Nous n'avons pas considéré le terme de forçage qui produira une solution particulière du système, qu'on sait être stable et bornée. Seule la solution homogène de l'équation ci-dessus nous intéresse.

Pourquoi cette équation produit-elle des solutions non-bornées dans une certaine bande de fréquences ? Ce phénomène est produit par un accrochage en fréquence entre la réponse de l'oscillateur harmonique et la modulation de raideur, accrochage possible si le rapport

$\omega_0/\Omega$  est un nombre rationnel. Par ailleurs, la bande d'accrochage dépend de l'intensité  $\delta$  de la modulation. La résonance la plus "dangereuse" est celle caractérisée par  $\omega_0 = \Omega$ . Aussi, il faut qu'à proximité de cette résonance la différence de fréquence  $\Delta\omega = \Omega - \omega_0$  soit supérieure à  $\delta$  (on verra à quel point) pour que le système reste stable.

### Analyse énergétique

La façon la plus intuitive d'expliquer cette résonance consiste à calculer l'évolution temporelle de l'énergie totale du système. En multipliant l'Eq. (5.7) par  $\dot{\theta}$  et après une reformulation, on obtient l'équation d'évolution de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)\theta^2 \right] = \frac{\theta^2}{2} \frac{d\omega^2}{dt} \quad (5.28)$$

Le terme de gauche est proportionnel à la somme de l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle du système, tandis que le terme de droite correspond à la puissance transmise au système lorsque la fréquence est modulée. On s'intéressera donc à l'énergie moyenne échangée par cette modulation, notée  $\Pi$  et donnée par

$$\Pi = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left( \theta^2 \frac{d\omega^2}{dt} \right) dt' \quad (5.29)$$

Loin de la résonance, la puissance moyenne temporelle du système s'annule car le produit de  $\theta^2$  avec  $d\omega^2/dt$  est aussi une fonction périodique. Il existe alors des échanges d'énergie mais l'énergie du système reste bornée car la puissance échangée est en moyenne nulle. Cependant à la résonance  $\Delta\omega = 0$ , la puissance moyennée temporelle peut avoir une composante non nulle puisque les grandeurs  $\theta^2$  et  $d\omega^2/dt$  ont toutes les deux une composante de Fourier à  $2\Omega$ . Leur produit fera ainsi apparaître une valeur moyenne non nulle. Dans ce cas, l'énergie du système peut augmenter si la corrélation de " $\theta^2(d\omega^2/dt)$ " pendant une période est positive. En pratique, l'instabilité sélectionnera le mode le plus instable maximisant la puissance transmise au système, ce qui induira la croissance exponentielle de la perturbation initiale. On voit donc que lorsque  $\theta$  oscille à la fréquence  $\Omega$ , un transfert d'énergie peut expliquer l'instabilité. Nous traiterons dans la suite comment  $\theta$  peut osciller à la fréquence  $\Omega$ , dans une bande de fréquence où la différence  $\Delta\omega$  est petite mais non nécessairement nulle.

### Analyse par la méthode de Poincaré-Lindstedt

Lorsque  $\Delta\omega$  et  $\delta$  sont du même ordre de grandeur, un mécanisme de verrouillage en fréquence peut se produire [127]. Pour analyser cette résonance, nous appliquerons l’approche dite de Poincaré-Lindstedt qui consiste à développer la solution comme une série de Taylor en fonction d’une petite perturbation, d’où l’appellation de *développement perturbatif*, en annulant les termes dits “séculaires” qui empêchent la convergence de cette série.

Nous poserons donc que la faible perturbation  $\epsilon$  provient du fait que le système est proche de la résonance  $\Delta\omega \sim \epsilon$  et que la modulation  $\delta$  est du même ordre de grandeur. Nous introduisons alors le changement de variable  $\delta \mapsto \delta = \epsilon\Delta$  pour  $0 < \epsilon \ll 1$ . En introduisant cette perturbation dans l’Eq. (5.27), on obtient un oscillateur harmonique faiblement perturbé :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\epsilon\omega_0^2\Delta \cos[2\Omega t]\theta \quad (5.30)$$

Sa solution homogène prend naturellement la forme  $\theta(t, \epsilon)$ . En développant cette solution en une série de puissances de  $\epsilon$ , on obtient alors la série suivante

$$\theta(t, \epsilon) = \theta_0(t, \epsilon) + \epsilon\theta_1(t, \epsilon) + \epsilon^2\theta_2(t, \epsilon) + \dots \quad (5.31)$$

Or on sait que cette série ne converge pas si elle est tronquée, car elle fait apparaître des monômes (non bornés) issus du développement de Taylor de fonctions périodiques (bornées). L’intérêt de la méthode Poincaré-Lindstedt est d’éliminer ces termes séculaires en introduisant une seconde variable lente telle que  $\tau = \epsilon t$ . Dans ce cas, on peut ré-intégrer ces monômes dans une fonction périodique bornée dépendant de la variable lente  $\tau$ . Les fonctions issues du développement (5.31) dépendent alors des deux variables  $(t, \tau)$  avec  $\theta_i(t, \tau)$ .

En extrayant l’ordre dominant  $\theta_0(t, \tau) = A(\tau)e^{i\omega_0 t} + c.c.$  (voir Annexe A.7), on peut alors éliminer les termes séculaires grâce à la fonction  $A(\tau)$  qui satisfait une équation de solvabilité donnée par

$$\frac{dA}{d\tau} = i\frac{\omega_0\delta}{4}\bar{A}. \quad (5.32)$$

On notera que nous avons remplacé  $\Delta$  par  $\delta$ . Les détails de cette analyse sont reportés dans l’annexe A.7. Dans cette approche, on montre que la fonction  $\theta_0$  se décompose comme la superposition de deux ondes :

$$\theta(t) = A_+(0)e^{i\Omega t + \sigma t} + A_-(0)e^{i\Omega t - \sigma t} + c.c. \quad (5.33)$$

avec  $c.c.$  le complexe conjugué, et  $\sigma$  modélisant la modification de la fréquence (dont on prendra uniquement la valeur réelle ou imaginaire positive) donné par :

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 \delta}{4}\right)^2 - \Delta\omega^2} \quad (5.34)$$

On remarque que  $\sigma$  peut être réel ou complexe selon les valeurs des coefficients. Ce paramètre caractérise la transition entre stabilité et instabilité. Le système est alors marginalement stable pour  $\sigma = 0$ , lorsque la modulation de raideur vaut  $\delta_c = 4\Delta\omega/\omega_0$ . Pour  $\delta < \delta_c$ , la partie réelle de  $\sigma$  est nulle, et la solution est composée de deux modes de fréquences distinctes. Notons que lorsque  $\delta \rightarrow \delta_c$  pour  $\delta < \delta_c$ , les fréquences  $\pm\sigma$  tendent vers 0 le long de l'axe des imaginaires. Les fréquences des deux ondes de l'Eq. (5.33) vont donc tendre vers  $\Omega$  respectivement par valeurs inférieures et supérieures, ce qui explique le phénomène de battement observé au voisinage de l'instabilité.

Pour  $\delta \geq \delta_c$ , les modes oscillent à la même fréquence  $\Omega$  : leurs fréquences sont verrouillées. Grâce à l'accrochage en fréquence de ces solutions avec la modulation de raideur, la puissance moyenne transmise à l'oscillateur devient non nulle : le système extrait de l'énergie de la variation de raideur. Selon les Eqs. (5.33) et (5.34), la solution est composée d'un mode amorti et d'un mode croissant exponentiellement : c'est donc bien une instabilité paramétrique. Il convient de noter que les Eqs. (5.33) et (5.34) ne sont valables que pour de petits  $\delta$ . Ainsi, des corrections sont nécessaires pour estimer plus précisément le domaine d'instabilité formant la langue d'Arnold.

Réciproquement, on peut définir une bande d'instabilité à partir d'une fréquence seuil  $\Omega_c$ . Les bornes de stabilité critique sont alors définies par :

$$(\Omega_c)_\pm = \left(1 \pm \frac{\delta}{4}\right) \omega_0. \quad (5.35)$$

Le système (5.28) présente une résonance paramétrique lorsque la fréquence  $\Omega \in [(\Omega_c)_-, (\Omega_c)_+]$  : la modulation de raideur  $\delta$  étant assez grande pour accrocher la fréquence propre de l'oscillateur. Grâce à l'identification des paramètres  $\omega_0$  et  $\delta$  en fonction de l'amplitude de l'allure  $\alpha$  (Sec. 5.3.2), on peut comparer la bande d'instabilité donnée par Eq. (5.35) avec la zone de résonance paramétrique dans l'espace  $(F, \alpha)$  du robot. Sur la Fig. 5.3.2, on compare la région instable de l'allure anguilliforme (zone étoilée) et la

langue d’Arnold estimée par notre modèle (zone grisée).

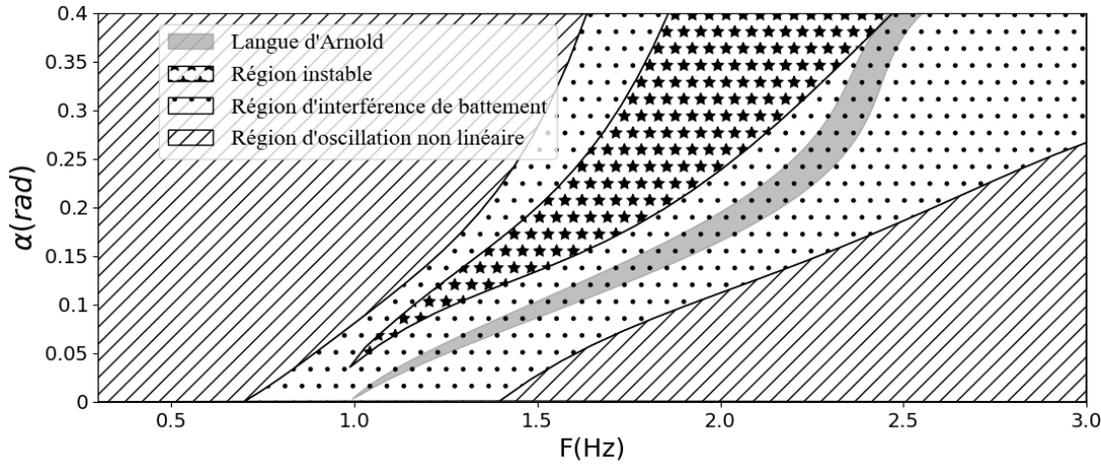


FIGURE 5.22 – Estimation de la langue d’Arnold dans l’espace  $(F - \alpha)$  avec les paramètres  $\omega_0, \delta$  identifiés numériquement

On remarque que le comportement global est similaire mais que la fréquence centrale de la bande grise donnée par  $\omega_0$  ne permet pas de reproduire la zone d’instabilité. La région grise est clairement en dehors de cette zone et décalée vers les hautes fréquences. De plus la largeur de la bande d’instabilité  $\pm\delta\omega_0/4$  donnée par Eq. (5.35) sous-estime aussi la largeur de la bande instable du robot.

On peut donc conclure en première approche que l’approche linéaire basée uniquement sur l’équation de Mathieu reproduit la tendance mais pas la bonne zone d’instabilité. Il est donc très vraisemblable que nous sommes en présence d’une instabilité paramétrique mais il apparaît que la fréquence centrale est modifiée et tend vers des valeurs plus faibles. Inversement, il est fort possible que la modulation de raideur  $\delta(\alpha)$  augmente afin d’expliquer une largeur d’accrochage plus grande que celle estimée par le modèle linéaire. Or on sait que l’effet non-linéaire du “spring softening” peut diminuer les fréquences de résonances vers les basses fréquences, et qu’il peut aussi changer la valeur de la modulation. Nous explorerons donc cette piste dans la suite.

### 5.4.3 Approche perturbative du système non-linéaire

#### Méthodes de Lindstedt-Poincaré

Nous proposons donc de modifier l’équation de Mathieu en prenant en compte le forçage et le terme non-linéaire. Néanmoins, nous supposons que le terme de forçage est

d'ordre 1 alors que la modulation de raideur et la raideur non-linéaire sont d'ordre  $\epsilon$ , et telles que

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \Gamma \cos(\Omega t) = \epsilon \omega_0^2 \left( -\delta \cos[2\Omega t + \phi] + \beta \theta^2 \right) \theta \quad (5.36)$$

Les termes à gauche d'ordre 1 correspondent à l'oscillateur harmonique forcé et les termes de droite aux perturbations d'ordre  $\epsilon$  responsables de l'instabilité.

La méthode de Lindstedt-Poincaré peut être ré-utilisée. En appliquant encore les solutions sous la forme  $\theta(t, \tau)$  (5.31), on retrouve la solution dominante à l'ordre ( $\epsilon^0$ ) :

$$\theta_0(t, \tau) = A(\tau) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} + c.c. \quad (5.37)$$

Les solutions sont respectivement décomposées en la superposition d'une solution homogène proportionnelle à  $A$ , responsable de l'instabilité, et d'une la solution particulière, liée au forçage  $\Gamma$ . La solution pour la fonction  $A(\tau)$  est donnée par une nouvelle équation de solvabilité prenant en compte les effets non-linéaires et de modulation de raideur. En prenant en compte uniquement les termes linéaires en  $A$  et  $\bar{A}$ , on obtient l'équation de solvabilité suivante en identifiant les termes résonants (via la même méthode présentée en annexe A.7)

$$\frac{dA}{d\tau} \simeq -i \left( \frac{3}{4} \omega_0 \beta |\theta_F|^2 \right) A + i \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{\delta e^{i\phi}}{2} - \frac{3}{4} \beta |\theta_F|^2 \right) \bar{A} e^{i2\Delta\omega\tau} + i \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{\delta e^{i\phi}}{2} - 3\beta |\theta_F|^2 \right) \theta_F e^{i\Delta\omega\tau} \quad (5.38)$$

en posant  $\theta_F = \Gamma/(\omega_0^2 - \Omega^2)$ , la réponse harmonique. Encore une fois, nous ne nous intéresserons pas à la solution particulière qui reste bornée mais bien à la solution de l'équation homogène, qui peut être ré-écrite sous la forme suivante

$$\frac{dA}{d\tau} \simeq i\omega' A + i \frac{\omega_0 \delta'}{4} \bar{A}, \quad (5.39)$$

avec les nouveaux coefficients ( $\omega'$ ,  $\delta'$ ) donnés par

$$\begin{cases} \omega' &= -\frac{3}{4} \omega_0 \beta |\theta_F|^2 \\ \delta' &= \delta e^{i\phi} - \frac{3}{2} \beta |\theta_F|^2. \end{cases} \quad (5.40)$$

En comparant avec l'équation de solvabilité de Mathieu (cf. Eq. (5.32)), on remarque

qu'on a introduit un décalage en fréquence  $\omega'$  et un changement de la modulation avec  $\delta \mapsto \delta'$ . Ainsi, pour  $\beta > 0$ , on observe bien une diminution de la fréquence intrinsèque proportionnelle au carré de la solution particulière.

En appliquant la méthode présentée en annexe A.7, on retrouve alors l'équation caractéristique pour le taux de croissance  $\sigma$

$$(\sigma)^2 + (\Delta\omega - \omega')^2 - \left(\frac{\omega_0|\delta'|}{4}\right)^2 = 0 \quad (5.41)$$

En faisant le changement de variable  $\Delta\omega' = \Delta\omega - \omega'$ , le taux de croissance prend exactement la même forme que dans le cas linéaire

$$\sigma = \pm \sqrt{(\Delta\omega')^2 - \left(\frac{\omega_0|\delta'|}{4}\right)^2} \quad (5.42)$$

où les nouveaux coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} \Delta\omega' &= \Omega - (\omega_0 + \omega') \\ |\delta'| &= \sqrt{\delta^2 - 3\delta\beta|\theta_F|^2 \cos(\phi) + \left(\frac{3}{2}\beta|\theta_F|^2\right)^2} \end{cases} \quad (5.43)$$

On remarque qu'on a recentré la bande d'accrochage  $\Delta\omega'$  par rapport à la nouvelle fréquence  $\omega_0 + \omega'$  avec la fréquence  $\omega' < 0$  donnée par la première équation de (5.40). Ainsi, la nouvelle bande d'instabilité  $\Omega \in \left[ \left(\Omega_c^{(\beta)}\right)_-, \left(\Omega_c^{(\beta)}\right)_+ \right]$  est dorénavant donnée par

$$\left(\Omega_c^{(\beta)}\right)_\pm = \omega' + \left(1 \pm \frac{|\delta'|}{4}\right) \omega_0. \quad (5.44)$$

Cette analyse souligne le rôle important de la phase  $\phi$  relative entre le forçage et la modulation de raideur. En effet, on remarque que si  $\phi \simeq 0$ , on a un antagonisme entre les effets de modulation de raideur physique (liés à  $\delta$ ) et ceux produits par les effets non-linéaires. Réciproquement,  $\phi \simeq \pi$  permet d'avoir des interférences constructives. Or il se trouve que  $\phi$  est proche de  $\pi/2$  pour l'allure anguilliforme, un cas où les non-linéarités ont un effet non négligeable sur la modulation.

Ce développement confirme qu'une prise en compte de la non-linéarité est cruciale pour expliquer le décalage de la bande instable vers les basses fréquences et l'accroissement de la largeur de la bande instable. Cet élément va motiver une prise en compte du terme non-linéaire de manière plus directe.

### Seconde perturbation

On retrouve dans la section précédente de manière récurrente le terme  $3/2\beta|\theta_F|^2$ , à la fois pour la modulation de raideur et pour  $\omega'$  (à un facteur 1/2 prêt). Ce terme suggère fortement de rechercher la solution sous la forme de la solution de l'oscillateur forcé d'amplitude  $\theta_F$  plus une perturbation  $\theta_i$  avec

$$\theta \simeq \theta_F \cos(\Omega t) + \epsilon \theta_i(t, \epsilon) \quad (5.45)$$

En effet, en introduisant cette forme de solution dans l'équation de Matthieu-Duffing, on obtient une équation pour  $\theta_i(t, \epsilon)$  à l'ordre  $\epsilon$

$$\ddot{\theta}_i + \omega_0^2 \left(1 - \frac{3}{2}\beta|\theta_F|^2\right) \theta_i + \omega_0^2 \left(\delta \cos(2\Omega t + \phi) - \frac{3}{2}\beta|\theta_F|^2 \cos(2\Omega t)\right) \theta_i = 0 \quad (5.46)$$

On note qu'on retrouve bien les termes en  $3\beta|\theta_F|^2/2$  provenant du développement de  $\beta\theta^3$ . Cette équation peut se mettre sous la forme de l'équation de Mathieu initiale en introduisant la nouvelle fréquence  $\omega \mapsto \omega_0^*$ , et la nouvelle modulation de raideur  $\delta \mapsto \delta^*$  :

$$\begin{cases} \omega_0^* &= \omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\beta|\theta_F|^2\right)} \\ \delta^* &= \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\beta|\theta_F|^2} \sqrt{\delta^2 - 3\delta\beta|\theta_F|^2 \cos(\phi) + \left(\frac{3}{2}\beta|\theta_F|^2\right)^2} \end{cases} \quad (5.47)$$

On remarque que l'accroissement de fréquence  $\omega'$  est donnée par la première correction en  $\beta$  du développement de  $\omega_0^*$ . Ces nouveaux paramètres  $(\omega_0^*, \delta^*)$  sont donc une extension des paramètres précédents  $(\omega_0', \delta')$ .

Nous avons reporté l'estimation de la zone d'instabilité à partir des coefficients  $(\omega_0^*, \delta^*)$  sur la Fig. 5.23 en prenant l'amplitude de  $\theta_F$  donnée par la solution de l'oscillateur de Duffing-Mathieu (cf. l'Eq. (5.37)). La région rouge correspond à la nouvelle zone d'instabilité estimée selon la condition (5.44). Cette bande de fréquence se déplace vers les basses fréquences. Le décalage maximal entre les bandes estimées (rouge) et les bandes obtenues par la simulation directe du modèle simplifié (bleu) est d'environ 0.1Hz. Ce résultat montre que l'expansion de l'approche perturbative est capable de traiter analytiquement la stabilité. On a donc bien retrouvé la zone d'instabilité grâce à l'expansion de la méthode de Lindstedt-Poincaré. Ce résultat justifie la prise en compte des effets de

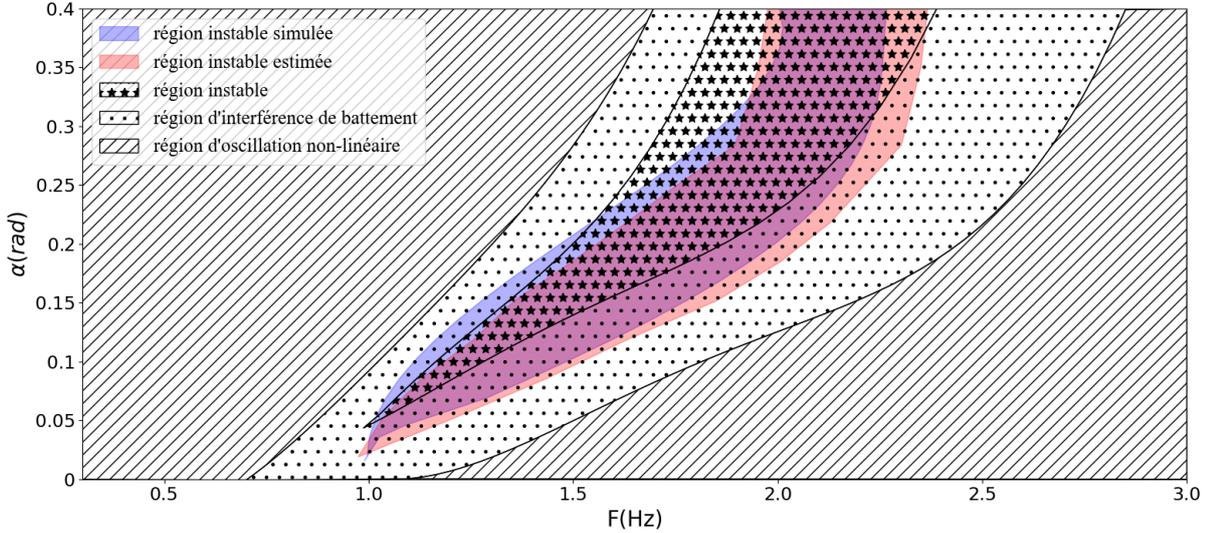


FIGURE 5.23 – Estimation de la zone d’instabilité via la simulation directe de l’équation de Duffing-Mathieu (5.14) (région bleu) ou en utilisant l’expansion de l’approche perturbative (région rouge) décrite dans la section 5.4.3

forçage et les termes non-linéaires. Cette analyse établit un lien explicite entre les paramètres du modèle simplifié et la zone d’instabilité, fournissant une méthode rapide pour la prédiction de l’instabilité. Dans la section suivant, nous proposerons une stratégie pour limiter l’instabilité à travers les propriétés de ce *template*.

#### 5.4.4 Réduction de la zone d’instabilité

Nous avons décrit les principaux mécanismes de l’instabilité de roulis. Comme la zone “dangereuse” de roulis coïncide avec une zone potentielle de nage, il est nécessaire de proposer une stratégie pour stabiliser le mouvement de roulis.

Dans la section précédente, nous avons montré que l’excitation  $\Gamma$  et l’effet non-linéaire  $\beta$  augmentent la zone d’instabilité. Lorsque l’amplitude de flexion  $\alpha$  diminue, l’amplitude de la solution forcée  $\theta_F$  diminue et par conséquent la bande instable se resserre (cf. Fig. 5.23). Ainsi, nous souhaitons ici stabiliser le robot en éliminant l’excitation  $\Gamma$  à l’origine de la solution  $\theta_F$ . Dans la section 5.3.2, nous avons identifié la source principale de l’excitation  $\Gamma$  qui est le couple axiale hydrostatique généré par le changement de forme du corps au cours de la nage. Plus précisément, une variation de forme  $\Delta \mathbf{q}$  induit une nouvelle position d’équilibre de la tête. Le robot est donc forcé d’atteindre un nouvel angle de roulis d’équilibre durant le cycle. Ceci signifie que, si le robot garde la même configuration

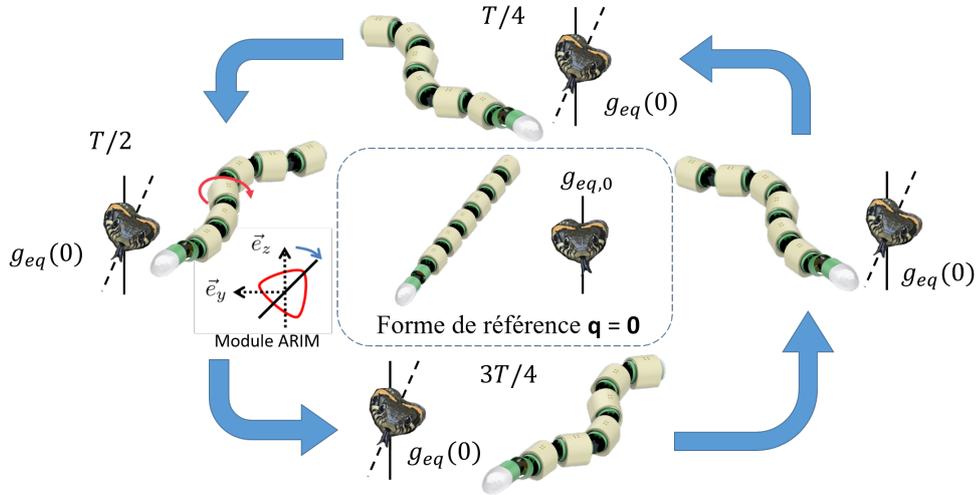


FIGURE 5.24 – Stratégie de la réduction de la zone d’instabilité : l’algorithme prédictif (cf. section 3.4.2) calcule les angles de rotation des modules ARIM pour compenser le changement de la configuration de la tête due à la déformation du corps au cours de la nage. Par conséquent, le robot maintient statiquement une même configuration de la tête  $g_{eq}(0)$  pendant la déformation cyclique.

d’équilibre de la tête  $g_{eq}$ , le terme de forçage  $\Gamma$  s’annule en théorie (voir Fig. 5.24). Ainsi, l’algorithme prédictif proposé dans la section 3.4.2 est appliqué pour stabiliser le robot. Cet algorithme peut être appliqué pour maintenir la tête dans la même orientation durant la nage grâce aux degrés de liberté additionnels (les coques extérieurs d’ARIM et le cou). Par conséquent, le robot nage tout en maintenant la configuration de tête  $g_{eq}$  constante relativement à la surface de l’eau(cf. Fig. 5.24).

Sur la Fig. 5.25, nous reportons un exemple de simulation numérique de la dynamique du robot pour un cas instable dans l’espace  $(\alpha, F)$ . Lorsque les degrés de liberté additionnels sont bloqués et les articulations de flexion effectuent la nage, le robot chavire (voir la courbe noire à droite). Par contre, en appliquant l’algorithme prédictif, l’amplitude du roulis est énormément diminuée ( $|\Delta\theta| < 1.2^\circ$ ) pendant dix périodes (voir la courbe rouge à gauche).

Ensuite, nous avons généralisé l’algorithme prédictif dans l’espace des paramètres  $(F \in (0.75\text{Hz}, 2.75\text{Hz}), \alpha \in (0, 0.4)\text{rad})$  et étudié le changement de la zone d’instabilité. On constate que la zone d’instabilité existe toujours (voir la zone bleue sur la Fig. 5.26). Grâce à notre algorithme prédictif, la largeur de cette zone est significativement réduite. La largeur atteint son maximum quand  $\alpha = 0.4\text{rad}$ , soit environ 0.27 Hz, ce qui ne

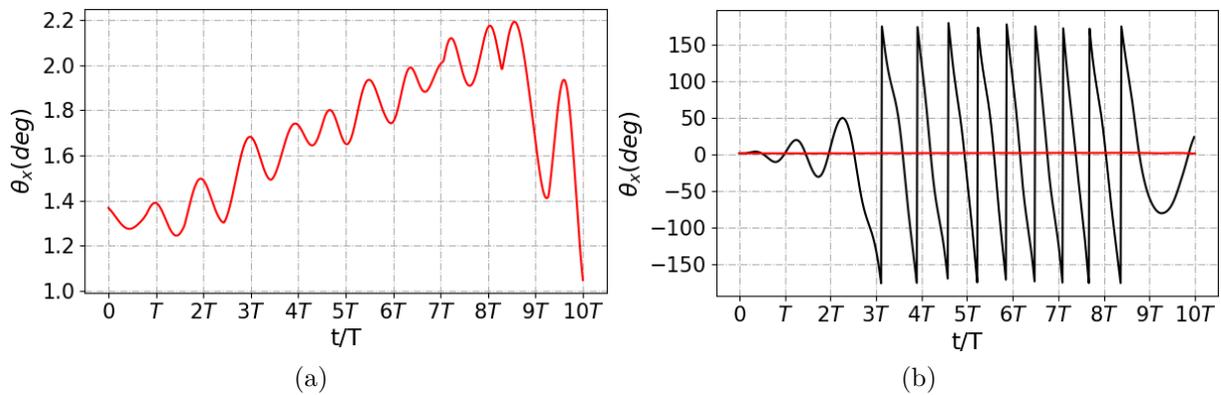


FIGURE 5.25 – Gauche : l'évolution de l'angle de roulis (mesuré en angle euler) pour l'allure anguilliforme avec l'amplitude de flexion  $\alpha = 0.25\text{rad}$  et la fréquence de nage  $F = 1.8\text{Hz}$ , Ici on applique l'algorithme prédictif pour compenser le changement de flottabilité avec les degrés de liberté supplémentaires ; Droite : La comparaison entre les mouvements de roulis sans (courbe noire) et avec (courbe rouge) l'algorithme prédictif pour  $\alpha = 0.25\text{rad}$  et  $F = 1.8\text{Hz}$ .

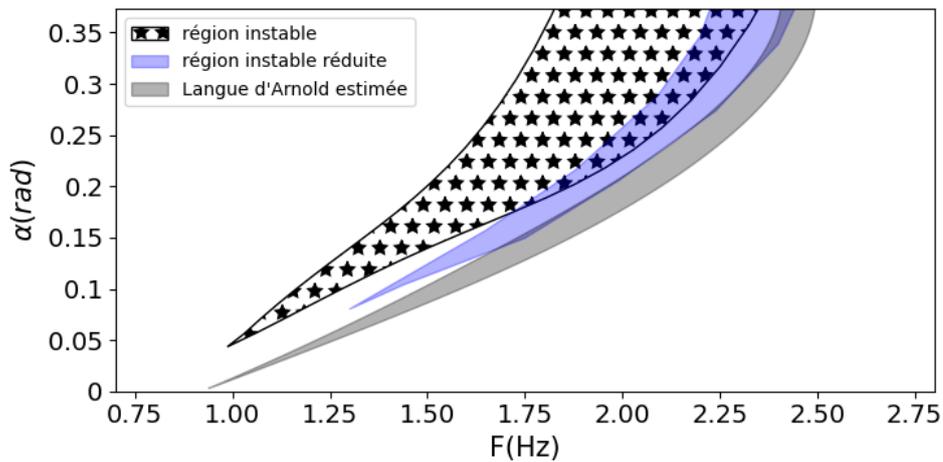


FIGURE 5.26 – Essais de la réduction de la zone d'instabilité pour l'allure anguilliforme, la zone étoilée est la zone d'instabilité où le robot chavire sans utiliser l'algorithme prédictif ; la zone bleue est la zone d'instabilité avec l'algorithme prédictif ; la zone grise est la langue d'arnold estimée dans la section 5.4.2.

représente qu'un tiers de la largeur d'origine, soit  $0.88\text{Hz}$ . Pour de faibles amplitudes ( $\alpha < 0.1$ )rad, l'instabilité ne peut pas être détectée. Il est intéressant de noter que la zone d'instabilité se déplace vers les hautes fréquences, approchant la langue d'Arnold estimée sans le terme de forçage (cf. la section 5.4.2), ce qui est cohérent avec notre analyse

linéaire.

Comme les effets de modulation et de “softened spring” existent toujours, le roulis se comporte comme un oscillateur Duffing-Mathieu. La résonance paramétrique peut encore être excitée. Quels effets permettent l’existence de la zone d’instabilité après avoir compensé le torseur d’effort hydrostatique produit par le changement de  $g_{eq}$  ? En effet, la contribution des couplages inertiels tête-corps n’est pas exactement nulle mais reste très petite par rapport au couple hydrostatique avant compensation. Selon notre calcul, ce couple produit une excitation autour de la configuration d’équilibre et provoque la résonance paramétrique.

## 5.5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux types d’allure adaptés à la nage du robot. En utilisant le modèle dynamique du robot NATRIX dans le chapitre 2, les mouvements de roulis, de tangage et de pilonnement sont étudiés en variant les paramètres de la nage, où le roulis a montré une instabilité inattendue dans une bande de fréquence spécifique. Cette instabilité auto-excitée, menant au chavirement du robot, coïncide avec l’espace nominal de nage.

Par conséquent, nous nous sommes intéressées à étudier le processus physique de ce comportement de roulis. Inspiré de l’analyse classique de l’instabilité dynamique des navires, nous avons étudié la dynamique du roulis au voisinage de la configuration d’équilibre et avons pris en compte l’impact du changement de la forme du corps au cours de la nage. Enfin, nous avons proposé un modèle simplifié unidimensionnel capturant l’instabilité du mouvement de roulis sous la forme une équation Duffing-Mathieu forcée. La pertinence de ce modèle a été confirmée par une simulation directe. Avec ce modèle, nous avons utilisé une approche perturbative (la méthodes de Lindstedt-Poincaré) pour estimer analytiquement la zone d’instabilité. Compte tenu de l’effet non-linéaire de “softened spring”, nous avons alors obtenu une bonne prédiction de l’instabilité. À la fin de ce chapitre, nous avons montré que la loi de contrôle en boucle ouverte (cf. section 3.4.2) peut permettre de réduire la bande fréquentielle du chavirement du robot.

Le modèle simplifié proposé comporte deux contributions suivantes : d’une part, à notre connaissance, les recherches actuelles sur la stabilité des robots de surface ou sous-marins s’arrêtent à la stabilité statique analogue à celle des navires. De nombreux robots utilisent des ballasts pour améliorer passivement leur stabilité statique [28, 38, 40]. Nous avons

étudié pour la première fois les impacts d'effets non-linéaire sur la stabilité de nage d'un système multicorps, tel que les modulations de raideur, d'inertie et d'effet non-linéaires du puits de potentiel. En effet, notre étude fournit un *template* de stabilité (comme un double pendule inversé des robots bipèdes [128, 129]), pouvant servir de référence pour d'autres robots nageurs. D'autre part, cette étude a encore une grande marge de progression dans de nombreux domaines. Elle fournit une possibilité de communication avec différentes communautés (robotique, physique, biologie...Etc.). Les perspectives futures sont sur les axes suivants :

- Du point de vue de l'expérimentation, pourrions nous détecter cette instabilité sur le vrai robot NATRIX ? En effet, l'instabilité paramétrique peut probablement être modifiée, masquée ou supprimé par les effets hydrodynamiques pour le vrais robot. La masse ajoutée due à l'inertie du fluide va diminuer la fréquence propre du roulis, modifiant la fréquence propre de roulis. Les dissipations du fluide (vague, visqueuse, traînée turbulente) peuvent limiter cette instabilité. Dans le future, il sera intéressant de confirmer l'existence de cette instabilité par des expérimentations et d'ajouter les effets hydrodynamiques dans le modèle simplifié de roulis.
- Du point de vue de la biologie, des biologistes ont-ils observé des phénomènes similaires chez les serpents nageurs ? À partir des observations (voir la section 1.5), les serpents ne naissent pas avec un sens de l'équilibre à la surface de l'eau. Comment les serpents ont obtenu la capacité de stabilisation ?
- Du point de vue du contrôle, comment concevoir une loi de contrôle en boucle fermée à partir de ce modèle ? Dans le chapitre 4, nous avons développé un contrôleur en boucle fermé pour la stabilisation postural. Ce contrôleur génère des trajectoires articulaires telles que l'énergie induite par les perturbations soit dissipée par le mouvement interne. Pour cela, la dynamique interne du corps a été décomposé en trois parties (voir la section 4.5.2). Deux parties contribuent au rejet de perturbation et la partie restante n'y contribuent pas. Il est possible donc de générer la flexion latérale avec cette partie libre et de stabiliser la tête en couplant les deux autres. L'obstacle à l'extension de cette stratégie à la stabilisation de la nage est de tenir compte du changement de la configuration d'équilibre au cours de nage.

# CONCLUSION

---

## Résumé des travaux de thèse

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur la modélisation, le contrôle et la stabilité d'un robot serpent nageur à la surface de l'eau. Ces travaux partent du constat que le problème de la stabilité du robot, bien qu'étant essentiel à tout mouvement contrôlé, est un sujet très peu évoqué dans la littérature académique. Paradoxalement, la stabilité des robots élancés peut devenir précaire lors de la nage ou de manoeuvres lentes et reste incertaine lors de tâches réalisées dans des environnements réels soumis aux ondes, vents et autres perturbations. Pour contrecarrer ces effets indésirables, ces robots sont généralement dotés de flotteurs ou de lests [12, 46], stabilisant passivement les mouvements perturbatifs, un effet aussi observé en présence d'un ombilical [34, 51]. Cependant, l'ajout de ces stabilisateurs peut limiter les performances hydrodynamiques de ces robots. On constate donc que les solutions empiriques actuelles ne répondent que partiellement au problème de la stabilité et que le gain de stabilité s'effectue au détriment de la nage. Dans ce mémoire, nous avons donc proposé de nouvelles stratégies de stabilisation des robots nageurs en générant des trajectoires articulaires assurant sa stabilité statique ou dynamique.

Pour tester ces lois de contrôle, nous avons tout d'abord produit un simulateur du robot NATRIX dont le design repose sur de nouveaux degrés de libertés internes comprenant les articulations du cou et des coques externes rotatives. Nous avons ainsi développé un nouveau modèle dynamique inverse pour notre robot dont le traitement de la structure cinématique arborescente nécessitait de nouvelles contributions théoriques. Le modèle présenté permet de prendre en compte tous les effets inertiels des mouvements des solides en exploitant une formulation basée sur une approche géométriquement exacte. Pour cela, nous avons utilisé un algorithme numérique basé sur la formulation de Newton-Euler, permettant de simuler le mouvement tridimensionnel du robot à la surface. Le point fort de cet algorithme est qu'il intègre d'une manière très concise et rapide la dynamique du robot.

Nous avons pour l'instant réduit les interactions fluide-structures au seules forces d'Ar-

chimède en l’absence de modèle hydrodynamique pertinent pour la nage en surface. Nous avons ainsi proposé une méthode géométriquement exacte pour calculer le torseur hydrostatique (poussée d’Archimède et gravité). Dans le futur, ce simulateur devra intégrer des interactions fluide-structure plus réalistes dont la masse ajoutée du robot à la surface de l’eau, la poussée calculée grâce aux théories de Lightill, ainsi que les effets dissipatifs comprenant les traînées turbulentes et celles induites par l’émission des ondes de surface.

La seconde partie de ce thèse porte sur le contrôle de la stabilité du robot afin de maintenir le robot dans une pose en équilibre à la surface de l’eau. Nous avons conçu deux lois de contrôle : une en boucle ouverte afin d’anticiper la stabilité statique du robot et une seconde en boucle fermée pour réguler dynamiquement cette stabilité et rejeter des perturbations externes.

L’objectif de la boucle ouverte est de prédire les poses et les postures du robot satisfaisant un équilibre statique à la surface de l’eau. Pour cela, nous avons d’abord traité le problème direct, consistant à trouver une configuration d’équilibre de la tête pour une forme de corps donnée. Nous avons adapté dans ce manuscrit un algorithme d’optimisation [95] pour trouver ces poses, dont le processus de convergence respecte la structure géométrique de l’espace des configurations spatiales  $SE(3)$ . Dans un second temps, nous avons abordé le problème inverse qui consiste à prédire une séquence de déformations du corps préservant à la fois la pose et l’équilibre du robot. Nous avons montré que cet algorithme consiste à se déplacer sur une sous-variété de l’espace des formes de corps en exploitant une construction géométrique nommée “rétraction”. Le robot peut ainsi maintenir son regard fixe tout en changeant sa posture à la surface de l’eau.

Grâce à cet algorithme, nous avons ensuite proposé d’optimiser la raideur hydrostatique du nageur durant un cycle de nage en modifiant les formes de corps associées à la nage anguilliforme. Bien que les premières simulations montrent des résultats encourageant, nous avons mis en évidence l’absence de périodicité du cycle. Une amélioration possible de cet algorithme consisterait à “renforcer” les symétries temporelles et spatiales des formes de corps en exploitant des modes de Fourier.

L’objectif de la boucle fermée est d’étendre le contrôle de la stabilité quasi-statique au cas dynamique lorsque le robot est soumis à des perturbations externes (vent, vague) ou internes (inertie interne, formes de corps instables). Cette boucle fermée consiste à rejeter des perturbations de la pose  $g_{eq}$  du robot grâce aux déformations du robot. La spécificité de notre approche est de produire cette commande en utilisant uniquement un contrôle en position des servomoteurs, alors que la plupart des algorithmes connues

---

exploitent un contrôle en couple. Cette régulation en boucle fermée est ainsi basée sur une méthode linéaire via une commande par retour d'état, qui permet de transférer l'énergie du mouvement solide au mouvement interne du robot. Le système étant hyper-rendondant, nous avons montré qu'il existe une infinité de trajectoires articulaires pouvant produire la commande par retour d'état. Néanmoins, nous avons observé que certaines trajectoires articulaires pouvaient déstabiliser soit la dynamique interne soit la dynamique interne et externe du robot. La première source d'instabilité est associée à l'amplification des perturbations inertielles par un couple de flottabilité déstabilisateur. Le second mécanisme est plus complexe mais nous suspectons la possibilité d'une instabilité provoquée par la brisure de causalité de la boucle fermée. Pour résoudre ces problèmes, nous avons introduit un contrôleur PD couplant les degrés de liberté internes du robot et assurant ainsi la stabilité et la causalité de notre commande.

Cette première boucle fermée nous a permis de contrôler la stabilité du corps pour une pose et une posture à l'équilibre initialement données. Pour étendre ces résultats au cas dynamique de la nage, il est nécessaire d'étudier au préalable l'impact de la nage sur la stabilité. Plus spécifiquement, nous avons souhaité faire le lien entre les résultats en quasi-statique et la nage. Nous avons donc initialement étudié le roulis décrit par le mouvement de la tête lorsqu'une onde de déformation latérale parcourait le corps du robot et ceci pour différentes allures, amplitudes de déformation et fréquences de nage. Nous avons constaté une instabilité associée à un mouvement de roulis non-bornée et observée dans une certaine bande de fréquences de nage à amplitude fixe. La présence d'un régime de battement entourant la zone d'instabilité, qui par ailleurs forme une langue d'Arnold, indique la présence d'une instabilité paramétrique associée à la modulation dynamique des inerties et raideurs hydrostatiques.

Pour modéliser les processus physiques à l'origine de ce phénomène, nous avons proposé un *template* (ou modèle simplifié) analogue à un pendule droit soumis à des excitations verticales (modulations de la fréquence propre) et horizontales (excitation interne). Ce *template* rend compte de la modulation dynamique du minimum (l'excitation) et de la forme du bassin énergétique (pesanteur+flottabilité) induite par les déformations cycliques du corps. Nous avons ensuite montré comment les paramètres libres du *template* pouvaient être identifiés par l'analyse des propriétés quasi-statique associées à chaque forme de corps empruntée lors de la nage. La simulation de ce modèle réduit confirma la pertinence et la validité de du *template* malgré toutes les simplifications.

Dans un second temps, nous avons proposé une étude analytique de la stabilité de ce

*template* via des approches dites perturbatives. La conclusion surprenante de cette étude est que la zone d’instabilité dépend fortement de l’excitation interne qui, par le biais des effets de raideur non-linéaire, amplifie la modulation de raideur et décale les fréquences propres vers les basses fréquences. Aussi, la zone instable peut être fortement réduite si cette excitation interne s’annule. Nous avons alors utilisé les résultats de l’étude quasi-statique en corrigeant la forme de corps durant la nage pour que le nageur garde toujours la même pose à l’équilibre. Le résultat fut probant car la zone instable associée à cette loi en boucle ouverte est presque identique à la zone sans forçage interne.

Il serait pertinent d’étudier l’impact des ondes et des effets de masse ajoutée sur ce *template* qui modifient les fréquences propres et la dissipation. De plus, il serait aussi intéressant d’adapter notre commande en boucle fermée pour réguler l’amplitude du roulis dans tous les régimes observés.

## Perspectives

En résumé, les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent la voie à un contrôle actif de la stabilisation des robots serpents nageurs sur la surface de l’eau. Jusqu’à maintenant, le traitement de la stabilité des robots se résumait aux ajustements définitifs de flottabilité du robot dans la forme de corps droite. Nous avons montré que cette approche ne permettait pas de résoudre les problèmes de stabilité statique et dynamique d’un robot nageur dont les formes du corps à l’équilibre varient. En effet, le chapitre 5 a confirmé que ce mécanisme de changement des configurations d’équilibre pouvait amplifier significativement l’instabilité paramétrique des nageurs.

Ces résultats plaident donc pour un contrôle actif de la stabilité pour toutes les formes de corps explorées lors de la nage ou de manœuvres. Pour atteindre cet objectif, nous avons démontré dans le cadre de cette thèse que l’ajout de nouveaux degrés de liberté internes localisés dans le cou et le long du corps (les systèmes ARIM) était la solution bio-inspirée au problème de stabilité. Aussi, les résultats de ce travail de thèse confortent l’idée que la stabilité doit être tout d’abord abordée du point de vue de la bio-mécanique et lors de la phase de conception du robot. Cette approche met donc en avant une “intelligence incarnée” dans la morphologie du robot. Nous verrons à la fin de cette conclusion comment l’ajout d’autres organes peut aussi contribuer à la stabilité du robot.

Deux nouvelles stratégies en boucle ouverte et boucle fermée sur le contrôle postural ont été présentées dans ce mémoire. On espère que les outils théoriques et numériques développés ici pourront être généralisés à d’autres robots similaires tels que l’ajustement

---

prédicatif des formes de corps (chapitre 3) ou la réduction du nombre de degrés de liberté internes par l’analyse des modes de déformation du corps (chapitre 4). Ces efforts permettront aux robots serpents nageurs de maintenir leur stabilité dans des environnements plus complexes.

Les travaux expérimentaux sont cruciaux pour le déploiement des robots dans des conditions réelles. Parmi les perspectives expérimentales liées à ce mémoire, on peut identifier trois grands axes

- l’implémentation des contrôles proposés via l’identification des paramètres physiques du robot et le développement d’un observateur ;
- l’étude expérimentale de la stabilité de la nage ;
- l’ajout de nouveaux appendices permettant un contrôle réactif de la stabilité.

Implanter les contrôles proposés dans les chapitres 3 et 4 est la suite logique de ce travail théorique numérique. Pour réguler sa stabilité, le robot doit être avant tout capable de détecter la configuration et la vitesse de la tête. Un premier observateur fusionnant les mesures d’une centrale inertielle et des mesures de l’élévation de la tête par des capteurs ultrason a été récemment développé dans notre équipe [130]. La prochaine étape consiste à intégrer ces capteurs dans le robot. Comme nos contrôleurs sont essentiellement basés sur des modèles physiques, il est nécessaire de s’assurer de la validité des inerties et masse du robot principalement estimés par des logiciels de CAO.

Notre étude a démontré que des couplages entre les effets inertiels du robot et de flottabilité pouvaient provoquer une instabilité paramétrique. Il reste donc à confirmer la pertinence de ce modèle pour un robot dans des conditions réelles. Des études préliminaires du robot ont permis de mesurer les fréquences propres d’oscillation axiale du robot associée à son inertie et sa raideur hydrostatique. On observe des fréquences typiques de  $F_0 \simeq 1\text{Hz}$ , des valeurs plus faibles mais proches de celles obtenues dans notre étude numérique. Aussi, il est tout à fait possible que notre robot puisse être instable dans ces gammes de fréquences de nage.

Finalement, notre équipe travaille sur le design d’une queue versatile assurant soit la propulsion soit la stabilité du robot. Il a été démontré dans plusieurs études [43, 131] que l’ajout d’une queue flexible améliore significativement l’efficacité de la nage. Notre objectif est de concevoir une queue qui aurait deux modes possibles : un mode “nage” avec une faible raideur lorsque l’empennage est droit pour générer de la poussée (voir la Fig. 5.27 gauche), et un mode “quille” avec une forte raideur lorsque la queue est pliée (voir la Fig. 5.27 droite). Il serait ainsi intéressant d’intégrer cette queue flexible dans

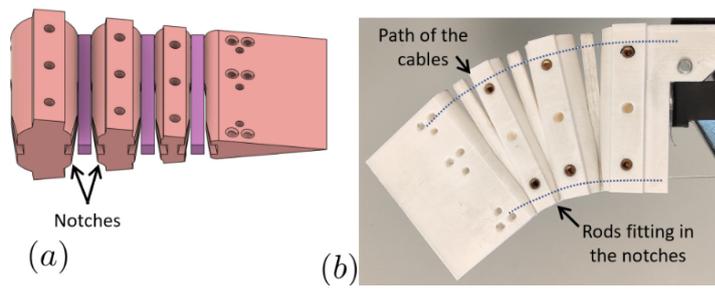


FIGURE 5.27 – Gauche : illustration de la queue multicorps avec son mode “nage”. Droite : Mode “quille”, le pliage de la queue est contrôlé en tirant des câbles.

le modèle du robot afin d’étudier son impact sur les commandes en boucle ouvertes et fermées développées dans cette thèse.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Daniel OB JONES *et al.* « Autonomous marine environmental monitoring : Application in decommissioned oil fields », in : *Science of the total environment* 668 (2019), p. 835-853.
- [2] D RODRIQUEZ, Matthew FRANKLIN et Christopher BYRNE, « A study of the feasibility of autonomous surface vehicles », in : *Worcester Polytechnic Institute* (2012).
- [3] David GRÉMILLET *et al.* « Robots in ecology : welcome to the machine », in : *Open Journal of Ecology* 2.2 (2012), p. 49-57.
- [4] Frank E FISH, « Advantages of aquatic animals as models for bio-inspired drones over present AUV technology », in : *Bioinspiration & biomimetics* 15.2 (2020), p. 025001.
- [5] Behzad BAYAT *et al.* « Environmental monitoring using autonomous vehicles : a survey of recent searching techniques », in : *Current opinion in biotechnology* 45 (2017), p. 76-84.
- [6] R SALAZAR, V FUENTES et A ABDELKEFI, « Classification of biological and bioinspired aquatic systems : A review », in : *Ocean Engineering* 148 (2018), p. 75-114.
- [7] Pål LILJEBÄCK *et al.* « A review on modelling, implementation, and control of snake robots », in : *Robotics and Autonomous systems* 60.1 (2012), p. 29-40.
- [8] Pål LILJEBÄCK et Richard MILLS, « Eelume : A flexible and subsea resident IMR vehicle », in : *Oceans 2017-Aberdeen*, IEEE, 2017, p. 1-4.
- [9] AJ WIENS et M NAHON, « Optimally efficient swimming in hyper-redundant mechanisms : control, design, and energy recovery », in : *Bioinspiration & biomimetics* 7.4 (2012), p. 046016.
- [10] Thor I FOSSEN, « Guidance and control of ocean vehicles. University of Trondheim, Norway, Printed by John Wiley & Sons, Chichester, England, ISBN : 0 471 94113 1 », thèse de doct., Doctors Thesis, 1999.

- [11] Mazen ALAMIR *et al.* « Feedback design for 3d movement of an eel-like robot », in : *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 2007, p. 256-261.
- [12] Behzad BAYAT, Alessandro CRESPI et Auke IJSPEERT, « Envirobot : A bio-inspired environmental monitoring platform », in : *2016 Ieee/Oes Autonomous Underwater Vehicles (Auw)*, Ieee, 2016, p. 381-386.
- [13] Bruce C JAYNE, « Swimming in constricting (*Elaphe g. guttata*) and nonconstricting (*Nerodia fasciata pictiventris*) colubrid snakes », in : *Copeia* (1985), p. 195-208.
- [14] JMT THOMPSON, « Global dynamics of driven oscillators- Fractal basins and indeterminate bifurcations », in : *Nonlinear mathematics and its applications(A 97-26560 06-70)*, Cambridge, United Kingdom and New York, Cambridge University Press, 1996, (1996), p. 1-47.
- [15] Carl M BENDER et Steven A ORSZAG, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I : Asymptotic methods and perturbation theory*, t. 1, Springer Science & Business Media, 1999.
- [16] Maher EL RAFEI *et al.* « Multi-variable constrained control approach for a three-dimensional eel-like robot », in : *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2008, p. 3152-3157.
- [17] Xiao XIE *et al.* « Recursive inverse dynamics of a swimming snake-like robot with a tree-like mechanical structure », in : *2023 IEEE International Conference on Advanced Robotics and Its Social Impacts (ARSO)*, IEEE, 2023, p. 65-70.
- [18] Xiao XIE *et al.* « Quasi-static motion of a new serial snake-like robot on a water surface : a geometrical approach », in : *2021 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, IEEE, 2021, p. 7372-7377.
- [19] Shigeo HIROSE et Hiroya YAMADA, « Snake-like robots [tutorial] », in : *IEEE Robotics & Automation Magazine* 16.1 (2009), p. 88-98.
- [20] Michael H DICKINSON *et al.* « How animals move : an integrative view », in : *science* 288.5463 (2000), p. 100-106.
- [21] Guang-Zhong YANG *et al.* « The grand challenges of science robotics », in : *Science robotics* 3.14 (2018), eaar7650.
- [22] Yi LI *et al.* « A comprehensive review on fish-inspired robots », in : *International Journal of Advanced Robotic Systems* 19.3 (2022), p. 17298806221103707.

- 
- [23] Frederic BOYER, Mathieu POREZ et Alban LEROYER, « Poincaré–Cosserat equations for the Lighthill three-dimensional large amplitude elongated body theory : application to robotics », in : *Journal of Nonlinear Science* 20 (2010), p. 47-79.
- [24] Fabien CANDELIER, Frédéric BOYER et Alban LEROYER, « Three-dimensional extension of Lighthill’s large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion », in : *Journal of Fluid Mechanics* 674 (2011), p. 196-226.
- [25] Alexander J SMITS, « Undulatory and oscillatory swimming », in : *Journal of Fluid Mechanics* 874 (2019), P1.
- [26] Jay WILLIS, « Wake sorting, selective predation and biogenic mixing : potential reasons for high turbulence in fish schools », in : *PeerJ* 1 (2013), e96.
- [27] MJ LIGHTHILL, « Note on the swimming of slender fish », in : *Journal of fluid Mechanics* 9.2 (1960), p. 305-317.
- [28] Eleni KELASIDI, « Modeling, control and energy efficiency of underwater snake robots », in : (2015).
- [29] Baker POTTS, Brandon TARAVELLA et Ryan THIEL, « Proof of concept development and motion verification of a swimming anguilliform robot (NEELBOT-1.0) », in : *Proceedings of the 2013 Grand Challenges on Modeling and Simulation Conference*, 2013, p. 1-10.
- [30] James GRAY, « Studies in animal locomotion : VI. The propulsive powers of the dolphin », in : *Journal of experimental biology* 13.2 (1936), p. 192-199.
- [31] KA MELSAAC et James P OSTROWSKI, « A geometric approach to anguilliform locomotion : modelling of an underwater eel robot », in : *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 99CH36288C)*, t. 4, IEEE, 1999, p. 2843-2848.
- [32] Makoto MORI et Shigeo HIROSE, « Three-dimensional serpentine motion and lateral rolling by active cord mechanism ACM-R3 », in : *IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems*, t. 1, IEEE, 2002, p. 829-834.
- [33] Hiroya YAMADA, « S. development of amphibious snake-like robot acm-r5 », in : *the 36th International Symposium on Robotics (ISR 2005), Tokyo*, 2005.
- [34] Shumei YU *et al.* « An amphibious snake-like robot : Design and motion experiments on ground and in water », in : *2009 International Conference on Information and Automation*, IEEE, 2009, p. 500-505.

- [35] Frédéric BOYER *et al.* *Robot anguille sous-marin en 3D*, 2006.
- [36] Guillaume GALLOT, « Modélisation Dynamique et Commande d'un robot Anguille », thèse de doct., Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2007.
- [37] Frédéric BOYER, Mathieu POREZ et Wisama KHALIL, « Macro-continuous computed torque algorithm for a three-dimensional eel-like robot », in : *IEEE transactions on robotics* 22.4 (2006), p. 763-775.
- [38] Stefano MINTCHEV *et al.* « An underwater reconfigurable robot with bioinspired electric sense », in : *2012 IEEE international conference on robotics and automation*, IEEE, 2012, p. 1149-1154.
- [39] Johann HERAULT *et al.* « Standing on the Water : Stability Mechanisms of Snakes on Free Surface », in : *Biomimetic and Biohybrid Systems : 9th International Conference, Living Machines 2020, Freiburg, Germany, July 28–30, 2020, Proceedings 9*, Springer, 2020, p. 165-175.
- [40] Alessandro CRESPI *et al.* « Salamandra robotica II : an amphibious robot to study salamander-like swimming and walking gaits », in : *IEEE Transactions on Robotics* 29.2 (2013), p. 308-320.
- [41] Alessandro CRESPI *et al.* « AmphiBot I : an amphibious snake-like robot », in : *Robotics and Autonomous Systems* 50.4 (2005), p. 163-175.
- [42] Alessandro CRESPI et Auke Jan IJSPEERT, « AmphiBot II : An amphibious snake robot that crawls and swims using a central pattern generator », in : *Proceedings of the 9th international conference on climbing and walking robots (CLAWAR 2006)*, CONF, 2006, p. 19-27.
- [43] Mathieu POREZ, Frédéric BOYER et Auke Jan IJSPEERT, « Improved Lighthill fish swimming model for bio-inspired robots : Modeling, computational aspects and experimental comparisons », in : *The International Journal of Robotics Research* 33.10 (2014), p. 1322-1341.
- [44] Alessandro CRESPI et Auke Jan IJSPEERT, « Online optimization of swimming and crawling in an amphibious snake robot », in : *IEEE Transactions on robotics* 24.1 (2008), p. 75-87.
- [45] Yannick MOREL *et al.* « Nonlinear motion control of CPG-based movement with applications to a class of swimming robots », in : *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, IEEE, 2011, p. 6331-6336.

- 
- [46] Robin THANDIACKAL *et al.* « Emergence of robust self-organized undulatory swimming based on local hydrodynamic force sensing », in : *Science Robotics* 6.57 (2021), eabf6354.
- [47] Pål LILJEBÄCK *et al.* « Mamba-A waterproof snake robot with tactile sensing », in : *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2014, p. 294-301.
- [48] Kristin Y PETERSEN, « Snake robots », in : *Annual Reviews in Control* 44 (2017), p. 19-44.
- [49] Henrik M SCHMIDT-DIDLAUKIES, Asgeir J SØRENSEN et Kristin Y PETERSEN, « Modeling of articulated underwater robots for simulation and control », in : *2018 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicle Workshop (AUV)*, IEEE, 2018, p. 1-7.
- [50] Eleni KELASIDI *et al.* « Locomotion efficiency of underwater snake robots with thrusters », in : *2016 IEEE international symposium on safety, security, and rescue robotics (SSRR)*, IEEE, 2016, p. 174-181.
- [51] Eleni KELASIDI *et al.* « Integral line-of-sight guidance for path following control of underwater snake robots : Theory and experiments », in : *IEEE Transactions on Robotics* 33.3 (2017), p. 610-628.
- [52] Eleni KELASIDI *et al.* « Experimental investigation of locomotion efficiency and path-following for underwater snake robots with and without a caudal fin », in : *Annual Reviews in Control* 46 (2018), p. 281-294.
- [53] Tareq ASSAF, Cesare STEFANINI et Paolo DARIO, « Autonomous underwater bio-robots : A wireless system for power transfer », in : *IEEE Robotics & Automation Magazine* 20.3 (2013), p. 26-32.
- [54] Aditi RAJ et Atul THAKUR, « Fish-inspired robots : design, sensing, actuation, and autonomy—a review of research », in : *Bioinspiration & biomimetics* 11.3 (2016), p. 031001.
- [55] Michael S TRIANTAFYLLOU, GS TRIANTAFYLLOU et DKP YUE, « Hydrodynamics of fishlike swimming », in : *Annual review of fluid mechanics* 32.1 (2000), p. 33-53.
- [56] Geoffrey Ingram TAYLOR, « Analysis of the swimming of long and narrow animals », in : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 214.1117 (1952), p. 158-183.

- [57] Michael James LIGHTHILL, « Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency », in : *Journal of Fluid Mechanics* 44.2 (1970), p. 265-301.
- [58] Michael James LIGHTHILL, « Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion », in : *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences* 179.1055 (1971), p. 125-138.
- [59] Chris E JORDAN, « Coupling internal and external mechanics to predict swimming behavior : a general approach », in : *American Zoologist* 36.6 (1996), p. 710-722.
- [60] Boyer FREDERIC *et al.* « Fast dynamics of an eel-like robot—comparisons with Navier–Stokes simulations », in : *IEEE Transactions on Robotics* 24.6 (2008), p. 1274-1288.
- [61] Kelasidi ELENI *et al.* « Modeling of underwater snake robots », in : *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, 2014, p. 4540-4547.
- [62] J Baker POTTS III, « Developing and testing an anguilliform robot swimming with theoretically high hydrodynamic efficiency », thèse de doct., University of New Orleans, 2015.
- [63] Thor I FOSSEN, *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*, John Wiley & Sons, 2011.
- [64] Odd FALTINSEN, *Sea loads on ships and offshore structures*, t. 1, Cambridge university press, 1993.
- [65] RW BLAKE, « Biological implications of the hydrodynamics of swimming at or near the surface and in shallow water », in : *Bioinspiration & Biomimetics* 4.1 (2009), p. 015004.
- [66] Alexandr I KOROTKIN, *Added masses of ship structures*, t. 88, Springer Science & Business Media, 2008.
- [67] SF HOERNER, « 1965 Fluid dynamic drag », in : *Published by the author* 2 (1965).
- [68] KJ SPYROU et JMT THOMPSON, « The nonlinear dynamics of ship motions : a field overview and some recent developments », in : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 358.1771 (2000), p. 1735-1760.

- 
- [69] John Michael Tutill THOMPSON, RCT RAINEY et MS SOLIMAN, « Mechanics of ship capsize under direct and parametric wave excitation », in : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Physical and Engineering Sciences* 338.1651 (1992), p. 471-490.
- [70] KJ SPYROU, « Designing against parametric instability in following seas », in : *Ocean Engineering* 27.6 (2000), p. 625-653.
- [71] Neha Sunil PATIL, Awanish Chandra DUBEY et V Anantha SUBRAMANIAN, « Fin based active control for ship roll motion stabilization », in : *MATEC Web of Conferences*, t. 272, EDP Sciences, 2019, p. 01026.
- [72] Christian HOLDEN *et al.* « Stabilization of parametric roll resonance with active u-tanks via lyapunov control design », in : *2009 European Control Conference (ECC)*, IEEE, 2009, p. 4889-4894.
- [73] Fay B HORAK et Jane M MACPHERSON, *Postural orientation and equilibrium comprehensive physiology*, 2010.
- [74] Jean MASSION, « Postural control system », in : *Current opinion in neurobiology* 4.6 (1994), p. 877-887.
- [75] Grigori ORLOVSKY, TG DELIAGINA et Sten GRILLNER, « Neuronal control of locomotion : from mollusc to man », in : (1999).
- [76] Tatiana G DELIAGINA *et al.* « Neural bases of postural control », in : *Physiology* 21.3 (2006), p. 216-225.
- [77] Hiroya YAMADA, Makoto MORI et Shigeo HIROSE, « Stabilization of the head of an undulating snake-like robot », in : *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2007, p. 3566-3571.
- [78] Nataliia SERGIENKO et Lei CHEN, « Adaptive head stabilisation system for a snake-like robot », in : *Proceedings of Australasian Conference on Robotics and Automation*, 2014, p. 1-7.
- [79] Augustin MANECY, Stéphane VIOLLET et Nicolas MARCHAND, « Bio-inspired hovering control for an aerial robot equipped with a decoupled eye and a rate gyro », in : *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2012, p. 1110-1117.

- [80] Quentin SABATIER, Holger G KRAPP et Reiko J TANAKA, « Dynamic optimisation for fly gaze stabilisation based on noisy and delayed sensor information », in : *2014 European Control Conference (ECC)*, IEEE, 2014, p. 1783-1788.
- [81] Ravi KAUSHIK *et al.* « Implementation of bio-inspired vestibulo-ocular reflex in a quadrupedal robot », in : *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 2007, p. 4861-4866.
- [82] Cristina P SANTOS *et al.* « Head motion stabilization during quadruped robot locomotion : Combining dynamical systems and a genetic algorithm », in : *2009 IEEE international conference on robotics and automation*, IEEE, 2009, p. 2294-2299.
- [83] Marek MARCINKIEWICZ *et al.* « Towards a methodology for stabilizing the gaze of a quadrupedal robot », in : *RoboCup 2006 : Robot Soccer World Cup X 10*, Springer, 2007, p. 540-547.
- [84] Marek MARCINKIEWICZ *et al.* « Learning to stabilize the head of a walking quadrupedal robot using a bioinspired artificial vestibular system », in : *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008.
- [85] Lorenzo VANNUCCI *et al.* « Adaptive gaze stabilization through cerebellar internal models in a humanoid robot », in : *2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*, IEEE, 2016, p. 25-30.
- [86] Lorenzo VANNUCCI *et al.* « A comprehensive gaze stabilization controller based on cerebellar internal models », in : *Bioinspiration & biomimetics* 12.6 (2017), p. 065001.
- [87] Ryo KURAZUME et Shigeo HIROSE, « Development of image stabilization system for remote operation of walking robots », in : *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065)*, t. 2, IEEE, 2000, p. 1856-1861.
- [88] Roy FEATHERSTONE, *Rigid body dynamics algorithms*, Springer, 2014.
- [89] Dimitri A SCHREIBER *et al.* « ARCSnake : an Archimedes' screw-propelled, reconfigurable serpentine robot for complex environments », in : *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, 2020, p. 7029-7034.

- 
- [90] Frédéric BOYER et Mathieu POREZ, « Multibody system dynamics for bio-inspired locomotion : from geometric structures to computational aspects », in : *Bioinspiration & biomimetics* 10.2 (2015), p. 025007.
- [91] Richard M MURRAY *et al.* *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC press, 1994.
- [92] Scott D KELLY et Richard M MURRAY, « Geometric phases and robotic locomotion », in : *Journal of Robotic Systems* 12.6 (1995), p. 417-431.
- [93] Wisama KHALIL et Etienne DOMBRE, *Modeling identification and control of robots*, CRC Press, 2002.
- [94] Basile GRAF, « Quaternions and dynamics », in : *arXiv preprint arXiv :0811.2889* (2008).
- [95] Johann HERAULT, « A geometrically exact approach for floating slender bodies with finite deformations », in : *Applied Ocean Research* 101 (2020), p. 102220.
- [96] Hayder FN AL-SHUKA, Burkhard J CORVES et Wen-Hong ZHU, « Dynamic modeling of biped robot using Lagrangian and recursive Newton-Euler formulations », in : *International Journal of Computer Applications* 101.3 (2014).
- [97] M BENNANI et Fouad GIRI, « Dynamic modelling of a four-legged robot », in : *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 17 (1996), p. 419-428.
- [98] Priyaranjan BISWAL et Prases K MOHANTY, « Kinematic and Dynamic Modeling of a Quadruped Robot », in : *Machines, Mechanism and Robotics : Proceedings of iNaCoMM 2019*, Springer, 2022, p. 369-378.
- [99] Shugen MA, Yoshihiro OHMAMEUDA et Kousuke INOUE, « Dynamic analysis of 3-dimensional snake robots », in : *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)(IEEE Cat. No. 04CH37566)*, t. 1, IEEE, 2004, p. 767-772.
- [100] HTMN ELKHOLY, « Dynamic modeling and control of a quadrotor using linear and nonlinear approaches », in : *American University in Cairo* (2014).
- [101] Ahmed ALKAMACHI et Ergun ERÇELEBI, « Modelling and genetic algorithm based-PID control of H-shaped racing quadcopter », in : *Arabian Journal for Science and Engineering* 42 (2017), p. 2777-2786.

- [102] Frederic BOYER et Shaukat ALI, « Recursive inverse dynamics of mobile multibody systems with joints and wheels », in : *IEEE Transactions on Robotics* 27.2 (2011), p. 215-228.
- [103] Wisama KHALIL, Guillaume GALLOT et Frédéric BOYER, « Dynamic modeling and simulation of a 3-D serial eel-like robot », in : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)* 37.6 (2007), p. 1259-1268.
- [104] Oliver M O'REILLY, *Intermediate Dynamics for Engineers : Newton-Euler and Lagrangian Mechanics*, Cambridge University Press, 2020.
- [105] Wisama KHALIL, « Dynamic modeling of robots using recursive newton-euler techniques », in : *ICINCO2010*, 2010.
- [106] John YS LUH, Michael W WALKER et Richard PC PAUL, « On-line computational scheme for mechanical manipulators », in : (1980).
- [107] Jorge NOCEDAL et Stephen J WRIGHT, « Quadratic programming », in : *Numerical optimization* (2006), p. 448-492.
- [108] Jorge NOCEDAL et Stephen J WRIGHT, *Numerical optimization*, Springer, 1999.
- [109] P-A ABSIL et Jérôme MALICK, « Projection-like retractions on matrix manifolds », in : *SIAM Journal on Optimization* 22.1 (2012), p. 135-158.
- [110] John M LEE, *Introduction to Riemannian manifolds*, t. 2, Springer, 2018.
- [111] Rolf PFEIFER, Max LUNGARELLA et Fumiya IIDA, « Self-organization, embodiment, and biologically inspired robotics », in : *science* 318.5853 (2007), p. 1088-1093.
- [112] Jean-Jacques E SLOTINE, Weiping LI *et al.* *Applied nonlinear control*, t. 199, Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [113] Sergio BLANES *et al.* « The Magnus expansion and some of its applications », in : *Physics reports* 470.5-6 (2009), p. 151-238.
- [114] Henry HESS, « A Landauer limit for robotic manipulation », in : *arXiv preprint arXiv :1803.07415* (2018).
- [115] M Ghandchi TEHRANI et JE MOTTERSHEAD, « An overview of the receptance method in active vibration control », in : *IFAC Proceedings Volumes* 45.2 (2012), p. 1174-1178.

- 
- [116] YM RAM et S ELHAY, « Pole assignment in vibratory systems by multi-input control », in : *Journal of Sound and Vibration* 230.2 (2000), p. 309-321.
- [117] Dario RICHIEDEI, Iacopo TAMELLIN et Alberto TREVISANI, « Pole-zero assignment by the receptance method : Multi-input active vibration control », in : *Mechanical Systems and Signal Processing* 172 (2022), p. 108976.
- [118] Hayashi CH, « Nonlinear oscillations in physical systems », in : *McCraw-hill book company* (1964).
- [119] PJ HOLMES et DA RAND, « The bifurcations of Duffing's equation : An application of catastrophe theory », in : *Journal of Sound and Vibration* 44.2 (1976), p. 237-253.
- [120] Eleni KELASIDI *et al.* « Innovation in underwater robots : Biologically inspired swimming snake robots », in : *IEEE robotics & automation magazine* 23.1 (2016), p. 44-62.
- [121] J Edward COLGATE et Kevin M LYNCH, « Mechanics and control of swimming : A review », in : *IEEE journal of oceanic engineering* 29.3 (2004), p. 660-673.
- [122] Edward OTT, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge university press, 2002.
- [123] Robert J FULL et Daniel E KODITSCHKEK, « Templates and anchors : neuromechanical hypotheses of legged locomotion on land », in : *Journal of experimental biology* 202.23 (1999), p. 3325-3332.
- [124] James A BLACKBURN, HJT SMITH et N GRO/NBECH-JENSEN, « Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum », in : *American journal of physics* 60.10 (1992), p. 903-908.
- [125] Chihiro HAYASHI, *Nonlinear oscillations in physical systems*, t. 432, Princeton University Press, 2014.
- [126] Xu XU et Marian WIERCIGROCH, « Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum », in : *Nonlinear Dynamics* 47 (2007), p. 311-320.
- [127] Bill YOUNG *et al.* « Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics 1991. Patterns in Fluid Flow. », in : (1991).
- [128] Andrew T PEEKEMA, « Template-based control of the bipedal robot atrias », in : (2015).

- [129] Sharon R BULLIMORE et Jeremy F BURN, « Ability of the planar spring-mass model to predict mechanical parameters in running humans », in : *Journal of Theoretical Biology* 248.4 (2007), p. 686-695.
- [130] Marie-Jeanne PAUL, *Development of an acoustico-vestibular system for head rolling stabilization : Aperception system to stabilize a bio-inspired swimming snake robot*, 2023.
- [131] Francois BRISCHOUX et Richard SHINE, « Morphological adaptations to marine life in snakes », in : *Journal of morphology* 272.5 (2011), p. 566-572.
- [132] Richard MONTGOMERY, « Gauge theory of the falling cat », in : *Fields Inst. Commun* 1.10.1090 (1993).
- [133] Eric D TYTELL et George V LAUDER, « The hydrodynamics of eel swimming : I. Wake structure », in : *Journal of Experimental Biology* 207.11 (2004), p. 1825-1841.
- [134] E KELASIDI *et al.* « Biologically inspired swimming snake robots : Modeling, control and experimental investigation », in : *IEEE Robotics and Automation Magazine* (2015).
- [135] Peter B MOYLE et Joseph J CECH, « Fishes : an introduction to ichthyology », in : (2000).
- [136] Cesare STEFANINI *et al.* « A compliant bioinspired swimming robot with neuro-inspired control and autonomous behavior », in : *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 2012, p. 5094-5098.
- [137] Frédéric BOYER *et al.* « The eel-like robot », in : *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, t. 49040, 2009, p. 655-662.
- [138] Biorobotic lab from EPFL, *AmphiBot III at the first human-robot swimming race*, Youtube, 2011, URL : <https://www.youtube.com/watch?v=-fDi00orEEU>.
- [139] Ahmed ISLAM et Brandon TARAVELLA, « Design of a Depth Control Mechanism for an Anguilliform Swimming Robot », in : *Biomimetics* 6.2 (2021), p. 39.
- [140] Daisy LACHAT, Alessandro CRESPI et Auke Jan IJSPEERT, « BoxyBot, the fish robot », in : *Biologically inspired robotics group (BIRG)* (2005).
- [141] Alessandro CRESPI *et al.* « Controlling swimming and crawling in a fish robot using a central pattern generator », in : *Autonomous Robots* 25 (2008), p. 3-13.

- 
- [142] Daisy LACHAT, Alessandro CRESPI et Auke Jan IJSPEERT, « BoxyBot : a swimming and crawling fish robot controlled by a central pattern generator », in : *The First IEEE/RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics, 2006. BioRob 2006*. IEEE, 2006, p. 643-648.
- [143] Yiwei HAO *et al.* « Course control of a manta robot based on amplitude and phase differences », in : *Journal of Marine Science and Engineering* 10.2 (2022), p. 285.
- [144] HR WIDDITSCH, *SPURV-The first decade*, rapp. tech., Washington Univ Seattle Applied Physics Lab, 1973.
- [145] Avilash SAHOO, Santosha K DWIVEDY et PS ROBI, « Advancements in the field of autonomous underwater vehicle », in : *Ocean Engineering* 181 (2019), p. 145-160.
- [146] Hanumant SINGH *et al.* « Seabed AUV offers new platform for high-resolution imaging », in : *Eos, Transactions American Geophysical Union* 85.31 (2004), p. 289-296.
- [147] CR GERMAN *et al.* « Hydrothermal exploration by AUV : Progress to-date with ABE in the Pacific, Atlantic & Indian Oceans », in : *2008 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles*, IEEE, 2008, p. 1-5.
- [148] Shuai KANG *et al.* « Development of multibody marine robots : A review », in : *Ieee Access* 8 (2020), p. 21178-21195.
- [149] David Scott BARRETT, « Propulsive efficiency of a flexible hull underwater vehicle », thèse de doct., Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [150] Jamie M ANDERSON et Narender K CHHABRA, « Maneuvering and stability performance of a robotic tuna », in : *Integrative and comparative biology* 42.1 (2002), p. 118-126.
- [151] Huosheng HU *et al.* « Design of 3D swim patterns for autonomous robotic fish », in : *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2006, p. 2406-2411.
- [152] Hans-Ortwin NALBACH, « Multisensory control of eyestalk orientation in decapod crustaceans : an ecological approach », in : *Journal of Crustacean Biology* 10.3 (1990), p. 382-399.
- [153] Michael F LAND, « Motion and vision : why animals move their eyes », in : *Journal of Comparative Physiology A* 185 (1999), p. 341-352.

- [154] Christopher J BOCKISCH et Thomas HASLWANTER, « Three-dimensional eye position during static roll and pitch in humans », in : *Vision research* 41.16 (2001), p. 2127-2137.
- [155] Daniel M MERFELD *et al.* « The dynamic contributions of the otolith organs to human ocular torsion », in : *Experimental brain research* 110 (1996), p. 315-321.
- [156] Carl M ROVAINEN, « Vestibulo-ocular reflexes in the adult sea lamprey », in : *Journal of comparative physiology* 112.2 (1976), p. 159-164.
- [157] Isaac J YEATON *et al.* « Undulation enables gliding in flying snakes », in : *Nature physics* 16.9 (2020), p. 974-982.
- [158] Ashley E PETE *et al.* « The role of passive avian head stabilization in flapping flight », in : *Journal of The Royal Society Interface* 12.110 (2015), p. 20150508.
- [159] DC SANDEMAN et A OKAJIMA, « Statocyst-induced eye movements in the crab *Scylla serrata* : I. the sensory input from the statocyst », in : *Journal of Experimental Biology* 57.1 (1972), p. 187-204.
- [160] Benjamin CELLINI, Wael SALEM et Jean-Michel MONGEAU, « Complementary feedback control enables effective gaze stabilization in animals », in : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 119.19 (2022), e2121660119.
- [161] Alessandro RONCONE *et al.* « Gaze stabilization for humanoid robots : A comprehensive framework », in : *2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, IEEE, 2014, p. 259-264.
- [162] Hairong ZOU *et al.* « A pan-tilt camera control system of UAV visual tracking based on biomimetic eye », in : *2006 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, IEEE, 2006, p. 1477-1482.
- [163] Friedrich KRETSCHMER *et al.* « A system to measure the Optokinetic and Optomotor response in mice », in : *Journal of neuroscience methods* 256 (2015), p. 91-105.
- [164] Paolo ARENA, *Dynamical systems, wave-based computation and neuro-inspired robots*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [165] A SHUMWAY-COOK et M WOLLACOTT, « Motor control : Translating research to practice », in : *Lippincott Williams and Wilkins, Philadelphia USA* (2016).
- [166] Auke Jan IJSPEERT, « Central pattern generators for locomotion control in animals and robots : a review », in : *Neural networks* 21.4 (2008), p. 642-653.

- 
- [167] Robert CREATH *et al.* « A unified view of quiet and perturbed stance : simultaneous co-existing excitable modes », in : *Neuroscience letters* 377.2 (2005), p. 75-80.
- [168] Hamid Reza KOOFIGAR, « Robust adaptive motion control with environmental disturbance rejection for perturbed underwater vehicles », in : *Journal of Marine Science and Technology* 22.4 (2014), p. 7.
- [169] Joseph D SKUFCA *et al.* « Eigenposes : using principal components to describe body configuration for analysis of postural control dynamics », in : *The 2010 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, IEEE, 2010, p. 1-3.
- [170] Se Young KIM et Suk Yung PARK, « Human postural feedback response described by eigenvector », in : *Key Engineering Materials*, t. 326, Trans Tech Publ, 2006, p. 739-742.
- [171] Wei-Li HSU *et al.* « Control and estimation of posture during quiet stance depends on multijoint coordination », in : *Journal of neurophysiology* 97.4 (2007), p. 3024-3035.
- [172] Thomas HUMBERT, Sébastien AUMAÎTRE et Basile GALLET, « Wave-induced vortex recoil and nonlinear refraction », in : *Physical Review Fluids* 2.9 (2017), p. 094701.
- [173] PV ZELENIN *et al.* « Postural control in the lamprey : a study with a neuro-mechanical model », in : *Journal of Neurophysiology* 84.6 (2000), p. 2880-2887.
- [174] Elie RAPHAËL et P-G DE GENNES, « Capillary gravity waves caused by a moving disturbance : wave resistance », in : *Physical Review E* 53.4 (1996), p. 3448.
- [175] Yury IVANENKO et Victor S GURFINKEL, « Human postural control », in : *Frontiers in neuroscience* 12 (2018), p. 171.
- [176] Anne-Sophie DARMAILLACQ et Frédéric LÉVY, *Éthologie animale : une approche biologique du comportement*, De Boeck Supérieur, 2019.
- [177] Glenn CARRUTHERS, « Types of body representation and the sense of embodiment », in : *Consciousness and cognition* 17.4 (2008), p. 1302-1316.
- [178] Adrian BIRAN et Rubén LÓPEZ-PULIDO, *Ship hydrostatics and stability*, Butterworth-Heinemann, 2013.
- [179] Bart BRADEN, « The surveyor's area formula », in : *The College Mathematics Journal* 17.4 (1986), p. 326-337.

- [180] Charles EHRESMANN, « Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable », in : *Colloque de topologie, Bruxelles*, t. 29, 1950, p. 55-75.
- [181] M SPIVAK, « A comprehensive introduction to differential geometry, vol. I, 3rd edn. Publish or Perish », in : *Inc., Houston* (1999).
- [182] José Luis BLANCO-CLARACO, « A tutorial on SE(3) transformation parameterizations and on-manifold optimization », in : *arXiv preprint arXiv :2103.15980* (2021).
- [183] Gary B GILLIS, « Environmental effects on undulatory locomotion in the American eel *Anguilla rostrata* : kinematics in water and on land », in : *Journal of Experimental Biology* 201.7 (1998), p. 949-961.
- [184] Norman William MCLACHLAN, « Theory and application of Mathieu functions », in : *Publisher to the University Geoffrey Cumberlege, Oxford University Press* (1951).
- [185] C HOLMES et P HOLMES, « Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation », in : *Journal of Sound and Vibration* 78.2 (1981), p. 161-174.
- [186] BR Nana NBENDJO, Y SALISSOU et P WOAFUO, « Active control with delay of catastrophic motion and horseshoes chaos in a single well Duffing oscillator », in : *Chaos, Solitons & Fractals* 23.3 (2005), p. 809-816.

# ANNEXE

## A.1 Calcul exact de la surface d'immersion et du barycentre

Dans cette annexe, nous présentons les méthodes exactes pour calculer la surface d'immersion et la position du barycentre d'une section qui sont utilisés pour calculer le torseur de flottabilité dans la section 2.7.2. L'idée principale est que la ligne de flottaison est exprimée comme une équation de ligne droit  $\mathcal{L}(x, y) = 0$  dans le repère 2D de section  $\mathcal{F}_s = (O_s, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ . La zone délimitée par la ligne droite et le contour de section est donc le domaine d'immersion noté par  $\mathcal{D}_s$  et la surface d'immersion  $S_{im}$  et le barycentre pondéré  $S_{im}\mathbf{q}_B$  sont exprimé par les intégrations suivantes :

$$\begin{cases} S_{im} = \int \int_{\mathcal{D}_s} dx dy \\ S_{im}\mathbf{q}_B = \int \int_{\mathcal{D}_s} \mathbf{q} dx dy \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec  $\mathbf{q}$  sont les coordonnées d'un point dans le domaine  $\mathcal{D}_s$ . De plus, à partir de l'étude de [[95]] l'équation du niveau de l'eau est  $\mathcal{L}(x, y) = R_{23}x + R_{33}y + p_3 = 0$  avec les paramètres extraits dans la matrice de configuration  $g_s$  et les coordonnées  $(x, y)$  avec  $\mathcal{L}(x, y) < 0$  impliquent un point immergé.

D'abord nous introduisons le calcul pour la section circulaire. Pour la tête, le cou et les manchons, la section est considérée circulaire avec un même rayon  $r$  et ses termes sont calculés par la méthode exacte proposée dans l'étude de [[95]] qui se repose sur le niveau d'immersion  $h$  par rapport au l'origine  $O_s$  et l'angle de rotation  $\theta$  du vecteur radial perpendiculaire à la ligne de flottaison (voir Fig. A.1). L'algorithme précis est introduit au-dessous :

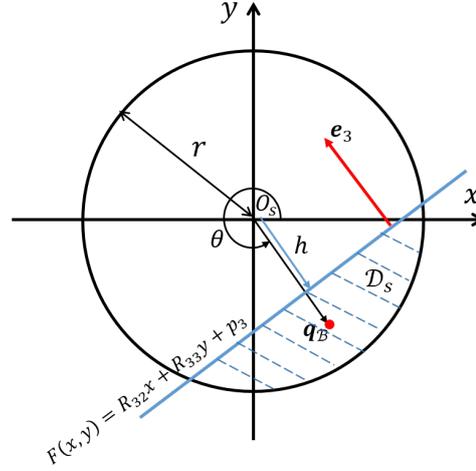


FIGURE A.1 – Description de la géométrie de la section circulaire

$$\theta = \arctan2(-R_{33}, -R_{32})$$

$$h = \frac{P_3}{\sqrt{R_{32}^2 + R_{33}^2}}$$

si  $h \geq r$ , la section est sèche :

$$S_{im} = 0 \text{ and } S_{im} \mathbf{q}_B = (0, 0)^T$$

si  $|h| < r$ , la section est partiellement immergée :

$$S_{im} = r^2 \left[ \arccos\left(\frac{h}{r}\right) - \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} \right]$$

$$S_{im} \mathbf{q}_B = \frac{2r^3}{3} \left(1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

si  $h < -r$ , la section est entièrement immergée :

$$S_{im} = \pi r^2 \text{ et } S_{im} \mathbf{q}_B = (0, 0)^T$$

Pour les enveloppes d'ARIM, une section triangulaire est divisée en plusieurs zones pour simplifier les calculs. Comme illustré dans la figure A.2.(a), la section se compose d'un hexagone (la zone 1) et 3 sections au-dessus d'une corde (les zones 2,3,4).

Pour l'hexagone 1 :

La zone immergée de l'hexagone 1 est un polygone déterminé par des sommets de l'hexagone et des intersections entre la ligne de flottaison et des côtés de l'hexagone (voir la zone rouge dans Fig.A.2.(b)). Pour calculer la surface et le barycentre de ce polygone, nous avons choisi "le formule de lacet" [[179]], qui demande la connaissance des coordonnées des sommets. Le défi est de mettre les sommets voisins en ordre (voir les sommets  $P_1 \sim P_6$  dans Fig.A.2.(b)). Pour le réaliser, il faut identifier si tous les sommets sont immergés ou sèches avec le discriminant  $\mathcal{L}(x, y) < 0$ . Si deux sommets d'un côté sont dans des états

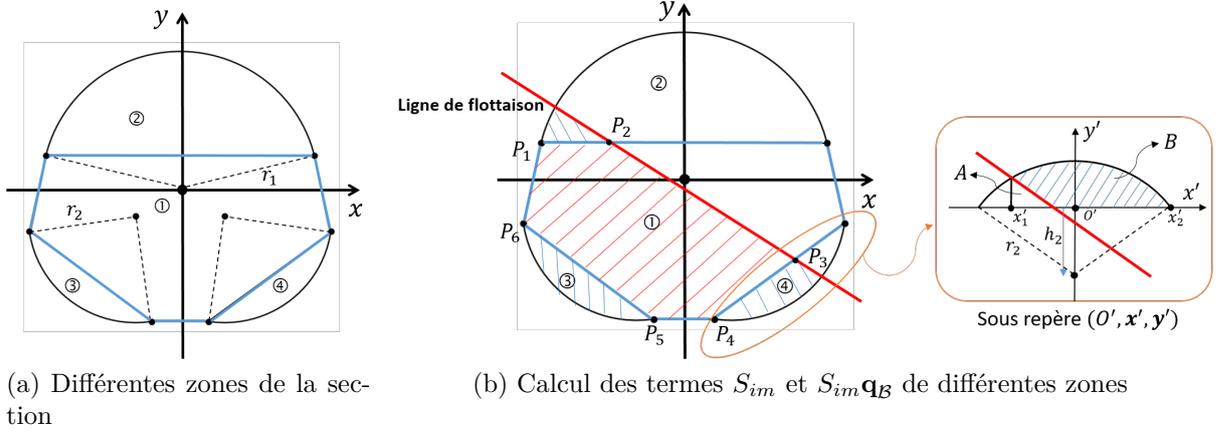


FIGURE A.2 – Description de la géométrie de la section triangulaire

différents, ce côté est traversée par la ligne de flottaison et les coordonnées d'intersection peuvent être calculées et enregistrées comme un nouveau sommet du polygone immergé.

Étant donné les coordonnées des sommets du polygone, la surface d'immersion  $S_{im,1}$  et le barycentre pondéré  $S_{im}\mathbf{q}_{B,\infty}$  peuvent être trouvés par les relations suivantes :

$$S_{im,1} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_{i+1} + y_i) \right| \quad (\text{A.2})$$

avec  $n$  le nombre de sommets et les coordonnées  $P_i = (x_i, y_i)^T$  et

$$S_{im}\mathbf{q}_{B,1} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

En complément nous définissons les coordonnées  $(x_{n+1}, y_{n+1}) \rightarrow (x_1, y_1)$ .

Pour les sections au-dessus d'une corde 2,3 et 4 :

Pour une corde complètement immergée tel la zone 3 dans Fig. A.2.(b), les calculs de la surface  $S_{im}$  et du barycentre  $\mathbf{q}_B$  sont similaires de celles pour la section circulaire. Dans la condition d'immersion partielle tel les zones 2 et 4, nous traitons le problème dans le sous-repère  $(O', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  pour simplifier les intégrales analytiques (voir Fig. A.2.(b)). En prenant la section 4 comme exemple, la partie d'immersion est définie comme la forme irrégulière ( $A$ ), dont la surface est déterminée par l'écart de la zone combinée ( $A + B$ ) et la zone triangulaire ( $B$ ). Puisque les calculs de surface et de barycentre pour le triangle ( $B$ ) sont simples, nous concentrons sur la surface de la zone combinée ( $A + B$ ), qui est

déterminée l'intégrale de la fonction  $f(x') = \sqrt{r_2^2 - x'^2} - h_2$  entre  $x'_1$  et  $x'_2$  dans le repère  $(O', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  :

$$S_{A+B} = \int_{x'_1}^{x'_2} f(x') dx' = \left[ \frac{r_2^2 \arcsin\left(\frac{x'}{r_2}\right)}{2} + \frac{x' \sqrt{r_2^2 - x'^2}}{2} + h_2 x' \right]_{x'_1}^{x'_2} \quad (\text{A.4})$$

Ensuite, le barycentre pondéré de la zone combinée est calculé par l'équation suivante :

$$S_{A+B} \mathbf{q}_B = \left( \frac{\int_{x'_1}^{x'_2} f(x') x' dx'}{\int_{x'_1}^{x'_2} f(x')^2 dx'} \right) = \left( \frac{\frac{1}{3}(x'^2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} 3h_2 x'^2}{-\frac{h_2}{2} \left( r_2^2 \arcsin\left(\frac{x'}{r_2}\right) + x' \sqrt{r_2^2 - x'^2} \right) - \frac{x'^3}{6} + \frac{1}{2}(r_2^2 + h_2^2)x'} \right) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \quad (\text{A.5})$$

L'avantage des Eqs. (A.4) et (A.5) est que la seule variable à calculer n'est que les coordonnées des intersections entre la ligne de flottaison et le contour. Ceci permet d'économiser du temps de calcul. Enfin, la surface d'immersion  $S_{im}$  globale et le barycentre pondéré  $S_{im} \mathbf{q}_B$  sont la somme de toutes les zones :

$$S_{im} = \sum_{i=1}^4 S_{im,i}, \quad S_{im} \mathbf{q}_B = \sum_{i=1}^4 S_{im} \mathbf{q}_{B,i} \quad (\text{A.6})$$

## Intégrateur spatial

Pour avoir une simulation numérique efficace, nous avons utilisé la quadrature gaussienne d'ordre fixe pour l'intégration spatiale dans l'Eq. (2.40). En pratique, nous avons choisi l'intégrateur spectral de Gauss-Legendre qui contient 10 nœuds pour chaque module. Pour tester la performance de l'intégrateur numérique, nous l'avons comparé à un intégrateur de Simpson avec 100 nœuds par module dont les résultats sont considérés comme étant précis. L'essai numérique consiste à calculer 500 fois le torseur de flottabilité d'un module ARIM dans des configurations différentes. Les résultats ont montré que l'intégrateur de Gauss est énormément plus efficace (1.67s/500calculs) par rapport à celui de Simpson (22.24s/500calculs), tandis que son erreur moyenne par rapport à l'intégrateur de Simpson est inférieure à 3%.

## A.2 Paramètres d'inertie prototype

Dans ce paragraphe, nous introduisons les quantités d'inertie dans le tableau A.1 tel que les masses, les centres de masse et les matrices de moment d'inertie exprimées dans le repère propre. Ces quantités de chaque module du robot sont estimées par le logiciel CAO, où les modules ARIM sont considérés pareils et les servomoteurs sont considérés comme des rectangles homogènes.

TABLE A.1 – Paramètres d'inertie du robot NATRIX

Module $\mathcal{B}_j$	Masse $m_j$ (kg)	Centre de masse $\mathbf{p}^{com}$ (m)	Moments d'inertie $J_{G_j}$ ( $\times 10^{-6} \text{kg/m}^2$ )
Tête $\mathcal{B}_0$	0.153	(0.0462, 0, 0)	diag(196,189,179)
Masse virtuelle $\mathcal{B}_v$	0	(0,0,0)	diag(0,0,0)
Cou $\mathcal{B}_1$	0.147	(0.0536, 0, 0.0019)	diag(183,181,175)
Module du corps $\mathcal{B}_j$ , ( $j \in [2, 3, \dots, 7]$ )	0.394	(0.1112, 0, -0.0028)	diag(260,1390,1360)
Enveloppe extérieure $\mathcal{B}_{j,shell}$ , ( $j \in [2, 3, \dots, 7]$ )	0.113	(0., 0., -0.0028)	diag(316,244,249)

## A.3 Bilan de quantité de mouvement dans l'algorithme N-E

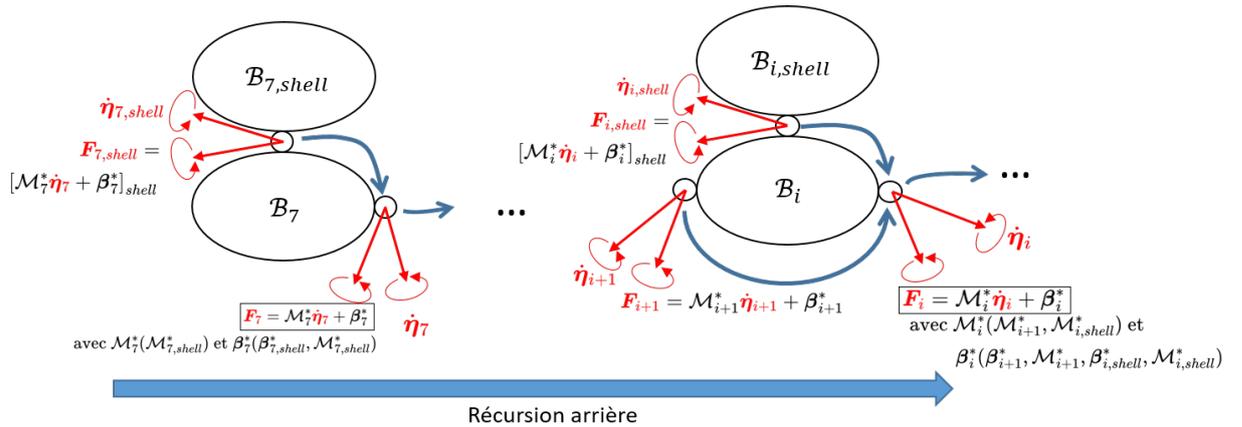


FIGURE A.3 – Diagramme de la récursion arrière de l'algorithme N-E (les notations rouges impliquent les quantités inconnues)

Dans cette paragraphe nous construisons le bilan de quantité de mouvement de chaque module sous une forme généralisée :

$$\mathbf{F}_j = \mathcal{M}_j^* \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j^* \quad (\text{A.7})$$

Puisque les enveloppes d'ARIM ne sont pas connectées par un module arrière, leurs équations Newton-Euler (2.51) peuvent directement se ré-écrire sous la forme :

$$\mathbf{F}_{j,shell} = [\mathcal{M}_j^* \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j^*]_{shell} \quad (\text{A.8})$$

avec  $[\mathcal{M}_j^*]_{shell} = [\mathcal{M}_j]_{shell}$  et  $[\boldsymbol{\beta}_j^*]_{shell} = [\boldsymbol{\beta}_j - F_{ext,j}]_{shell}$ . Ensuite nous commençons par transférer cette quantité de mouvement au module avant (i.e.  $\mathcal{B}_7$  dans Fig. A.3). En substituant l'Eq. (2.18) dans l'Eq. (A.8), le vecteur d'effort  $\mathbf{F}_{7,shell}$  est déduit par l'accélération  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_7$  :

$$\mathbf{F}_{7,shell} = \mathcal{M}_{7,shell}^* \text{Ad}_{h_7} \dot{\boldsymbol{\eta}}_7 + [\mathcal{M}_7^* (\boldsymbol{\zeta}_7 + \mathbf{A}_7 \ddot{q}_7) + \boldsymbol{\beta}_7^*]_{shell} \quad (\text{A.9})$$

En remplaçant  $\mathbf{F}_{7,shell}$  dans les équations Newton-Euler de  $\mathcal{B}_7$  par la relation (A.9), nous déduisons le nouveau bilan de quantité de mouvement suivant :

$$\mathbf{F}_7 = \mathcal{M}_7^* \dot{\boldsymbol{\eta}}_7 + \boldsymbol{\beta}_7^* \quad (\text{A.10})$$

où l'inertie et l'effort généralisés sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_7^* &= \mathcal{M}_7 + \text{Ad}_{h_7}^T \mathcal{M}_{7,shell}^* \text{Ad}_{h_7} \\ \boldsymbol{\beta}_7^* &= \boldsymbol{\beta}_7 + \text{Ad}_{h_7}^T [\mathcal{M}_7^* (\boldsymbol{\zeta}_7 + \mathbf{A}_7 \ddot{q}_7) + \boldsymbol{\beta}_7^*]_{shell} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Pour un module intermédiaire  $[\mathcal{B}_j]_{j \in [2, \dots, 6]}$ , il est connecté par le module arrière  $\mathcal{B}_{j+1}$  et son enveloppe  $\mathcal{B}_{j,shell}$  (voir Fig. A.3). De même, en remplaçant les accélérations  $\eta_{j+1}$  et  $\eta_{j,shell}$  dans les bilans de quantité de mouvement (A.7) par l'Eq. (2.18), nous obtenons les efforts articulaires  $\mathbf{F}_{j+1}$  et  $\mathbf{F}_{j+1}$  en fonction de  $\boldsymbol{\eta}_j$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j+1} &= \mathcal{M}_{j+1}^* \text{Ad}_{j+1g_j} \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \mathcal{M}_{j+1}^* (\boldsymbol{\zeta}_{j+1} + \mathbf{A}_{j+1} \ddot{q}_{j+1}) + \boldsymbol{\beta}_{j+1}^* \\ \mathbf{F}_{j,shell} &= \mathcal{M}_{j,shell}^* \text{Ad}_{h_j} \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + [\mathcal{M}_j^* (\boldsymbol{\zeta}_j + \mathbf{A}_j \ddot{q}_j) + \boldsymbol{\beta}_j^*]_{shell} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En remplaçant les efforts  $\mathbf{F}_{j+1}$  et  $\mathbf{F}_{j+1}$  dans les équations de Newton-Euler de  $\mathcal{B}_j$ , nous

construisons le nouveau bilan de quantité de mouvement pour le module  $\mathcal{B}_j$  :

$$\mathbf{F}_j = \mathcal{M}_j^* \dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \boldsymbol{\beta}_j^* \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j^* &= \mathcal{M}_j + \text{Ad}_{j+1}^T g_j \mathcal{M}_{j+1}^* \text{Ad}_{j+1} g_j + \text{Ad}_{h_j}^T \mathcal{M}_{j,shell}^* \text{Ad}_{h_j} \\ \boldsymbol{\beta}_j^* &= \boldsymbol{\beta}_j + \text{Ad}_{j+1}^T g_j \left[ \boldsymbol{\beta}_{j+1}^* + \mathcal{M}_{j+1}^* (\boldsymbol{\zeta}_{j+1} + \mathbf{A}_{j+1} \ddot{\mathbf{q}}_{j+1}) \right] \\ &\quad + \text{Ad}_{h_j}^T \left[ \boldsymbol{\beta}_j + \mathcal{M}_j (\boldsymbol{\zeta}_j + \mathbf{A}_j \ddot{\mathbf{q}}_j) \right]_{shell}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

## A.4 Applications exponentielle et logarithmique entre $SE(3)$ et $se(3)$

Dans cette section nous présentons les conversions réciproques entre un algèbre de Lie  $\delta\hat{\boldsymbol{\psi}} \in se(3)$  et un élément du groupe de Lie  $g \in SE(3)$  référé des travaux de [[91, 182]].

D'abord nous définissons les coordonnées  $\delta\boldsymbol{\psi}$  correspondants à  $\delta\hat{\boldsymbol{\psi}}$  :

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\psi} &= (\mathbf{t}^T, \boldsymbol{\theta}^T)^T \in \mathbb{R}^6 \\ \mapsto \delta\hat{\boldsymbol{\psi}} &= \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in se(3) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Ensuite l'application exponentielle  $\exp : se(3) \mapsto SE(3)$  est défini par :

$$\exp(\delta\hat{\boldsymbol{\psi}}) = \begin{pmatrix} \exp(\hat{\boldsymbol{\theta}}) & \text{T}_{so(3)} \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

où  $\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  correspond à l'application exponentielle  $\exp : so(3) \mapsto SO(3)$  défini par la formule de Rodrigue :

$$\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = I_3 + \frac{\sin|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^2$$

et la matrice  $\text{T}_{so(3)}$  est calculé par la relation :

$$\text{T}_{so(3)}(\boldsymbol{\theta}) = I_3 + \frac{1 - \cos|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{|\boldsymbol{\theta}| - \sin|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|^3} \hat{\boldsymbol{\theta}}^2.$$

Nous remarquons que lorsqu'il y a aucune rotation effectuée ( $|\boldsymbol{\theta}| = 0$ ), nous avons

$\exp(\delta\hat{\psi}) = I_3$  et  $T_{\text{so}(3)} = I_3$ .

Ensuite l'application logarithmique  $\exp : \text{se}(3) \mapsto \text{SE}(3)$  est définie par :

$$\delta\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \log(R) & T_{\text{so}(3)}^{-1} \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

où  $R$  et  $p$  sont respectivement la matrice de rotation et le vecteur de translation de la matrice de configuration  $g$ . À partir de l'étude de [[182]], le norme du vecteur de rotation  $\boldsymbol{\theta}$  est calculé en fonction de  $R$  :

$$\begin{aligned} \cos(|\boldsymbol{\theta}|) &= \frac{1}{2} (\text{tr}(R) - 1) \\ \sin(|\boldsymbol{\theta}|) &= \frac{1}{2} \sqrt{(3 - \text{tr}(R))(1 + \text{tr}(R))} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

À partir de l'Eq. (A.18),  $\sin(|\boldsymbol{\theta}|)$  a une signe positive et l'angle de rotation  $|\boldsymbol{\theta}|$  est donc dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Si la valeur  $\sin(|\boldsymbol{\theta}|) \neq 0$ , l'algèbre  $\delta\hat{\theta}$  peut être directement déterminer par  $\log(R)$  :

$$\log(R) = \frac{\boldsymbol{\theta}}{2 \sin \boldsymbol{\theta}} (R - R^T) \quad (\text{A.19})$$

Si non l'angle de rotation  $|\boldsymbol{\theta}|$  vaut 0 ou  $\pi$  rad. Dans ce cas nous pouvons obtenir le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{0}_3, \text{ si } |\boldsymbol{\theta}| = 0 \\ \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} &= \left( \epsilon_1 \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R_{11})}, \epsilon_2 \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R_{22})}, \epsilon_3 \sqrt{\frac{1}{2}(1 + R_{33})} \right), \text{ si } |\boldsymbol{\theta}| = \pi \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

où le symbole  $\epsilon = \pm 1$  détermine la signe de rotation qui est obtenu par la relation suivante :

$$\epsilon_i \epsilon_j = \frac{R_{ij}}{\sqrt{(1 + R_{ii})(1 + R_{jj})}}, \text{ pour } i \neq j, R_{ii} \neq -1, R_{jj} \neq -1 \quad (\text{A.21})$$

Ensuite le vecteur de coordonnées  $\mathbf{t}$  est obtenu par la relation (A.17) avec la matrice  $T_{\text{so}(3)}^{-1}$  définie par :

$$T_{\text{so}(3)}^{-1} = I_3 - \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{|\boldsymbol{\theta}|} \left( 1 - \frac{|\boldsymbol{\theta}| \cos(|\boldsymbol{\theta}|/2)}{2 \sin(|\boldsymbol{\theta}|/2)} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}^2 \quad (\text{A.22})$$

## A.5 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

L'objectif de ce processus est de construire une séquence de vecteurs de base linéairement indépendante et orthogonaux à un vecteur donné  $\boldsymbol{\varpi} \in \mathbb{R}^{N-3}$ . Nous avons d'abord

mis en place un ensemble de bases canoniques  $\{\boldsymbol{\varpi}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{N-4}\}$ , donné par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)^T \\
 \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0)^T \\
 &\vdots \\
 \mathbf{v}_{N-5} &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0)^T \\
 \mathbf{v}_{N-4} &= (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)^T
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

où  $\mathbf{v}_j$  n'est pas forcément orthogonal à  $\boldsymbol{\varpi}$ . Ensuite, on orthogonalise cette base canonique et obtient les vecteurs de base linéairement indépendants  $\{\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_{N-4}\}$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_0 &= \boldsymbol{\varpi} \\
 \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - \text{proj}_{\mathbf{v}'_0} \mathbf{v}_1 \\
 \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}'_1} \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}'_0} \mathbf{v}_2 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{v}'_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=0}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{v}'_j} \mathbf{v}_k
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

où l'opération  $\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$  est la projection orthogonale de  $\mathbf{v}$  sur la droite dirigée par  $\mathbf{u}$ , donné par :

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

Après les projections (A.24), les vecteurs obtenus doivent être normalisés.

## A.6 Technical supplement of the section 4

### A.6.1 définition de la transformation rigide $h$

Pour définir la transformation, nous devons d'abord projeter le repère de tête  $\mathcal{F}_0$  dans le repère mobile sur la surface  $\mathcal{F}_{g^*}$ , c'est-à-dire d'abord extraire le pilonnement, le roulis et le tangage. En fait, la transformation  $h$  est définie par :

$$h = \underbrace{g_0}_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_G} \underbrace{\left( \begin{matrix} eqg^0 & g_{eq} \end{matrix} \right)^{-1}}_{\mathcal{F}_{G^*} \rightarrow \mathcal{F}_0} \tag{A.25}$$

Nous proposons donc d'identifier le deuxième terme de gauche définissant la transformation  $\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_{G^*}$ , puis de le "récupérer" de  $g_0$  à obtenir  $h$ .

Pour extraire le pilonnement, nous projetons simplement verticalement l'origine de  $\mathcal{F}_0$  sur la surface afin que l'origine de  $\mathcal{F}_{G^*}$  se trouve à  $z = 0$  dans  $\mathcal{F}_G$ . L'origine de  $\mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{F}_{G^*}$  ont maintenant les mêmes coordonnées  $(t_x, t_y)$  dans  $\mathcal{F}_G$ , définissant les coordonnées de  $h$  dans l'espace euclidien  $E(3)$ .

Ensuite, nous cherchons à identifier quelle rotation transforme l'ensemble de vecteurs de base de  $\mathcal{F}_0$  donné par  $R_0$  en  $R_{G^*}$ . Cette transformation consiste à faire tourner le vecteur  $\mathbf{e}_3^0$  (orthogonal au plan de tête) en  $\mathbf{e}_z$ . On introduit donc le produit vectoriel suivant :

$$\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_z \equiv \sin(\Theta)\mathbf{k}, \quad (\text{A.26})$$

avec  $\mathbf{k}$  le vecteur unitaire définissant le sens de rotation et  $\Theta$  l'amplitude de rotation. Ensuite, on définit la transformation suivante :

$$R_{G^*} = \exp(\Theta\hat{k}) R_0 \quad (\text{A.27})$$

avec  $\exp(\cdot)$  l'application exponentielle de  $SO(3)$  définie par la formule de Rodrigue :

$$\exp(\Theta\hat{k}) = I + \sin(\Theta)\hat{k} + (1 - \cos(\Theta))\hat{k}^2 \quad (\text{A.28})$$

Ici, les coordonnées du vecteur  $(\Theta\mathbf{k})$  sont  $(\theta_x^*, \theta_y^*, 0)$ , c'est-à-dire le mouvement de roulis et de tangage exprimé dans le repère  $\mathcal{F}_{G^*}$ .

## A.6.2 La dynamique sur l'espace tangent o $SE(3)$

Dans cette section, nous rapportons les grandes lignes pour obtenir les expansions d'états (4.19). Tout d'abord, nous voulons développer la configuration de tête  $g_0(t)$  comme une série de puissances de  $\epsilon$  où  $g_0$  est donné par la combinaison de l'équation 4.9 et 4.13

$$g_0(t, \epsilon) = h(t, \epsilon) \exp(\Delta\hat{\Psi}(t, \epsilon)) g_{eq}, \quad (\text{A.29})$$

Le torseur  $\Delta\Psi(t, \epsilon)$  peut être exprimé en fonction de  $\epsilon\boldsymbol{\eta}_0$  en utilisant les Eqs. (4.18) et (4.14). On obtient :

$$\Delta\Psi_1(t, \epsilon) = \epsilon\Delta\Psi_1(0) + \int_0^t (\epsilon\text{Ad}_{h^{-1}g_0}\boldsymbol{\eta}_0 - \mathbf{V}_{surf}) dt' \quad (\text{A.30})$$

Nous avons supposé que la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  et la perturbation  $\Delta\Psi_1(0)$  sont proportionnelles

à  $\epsilon$ , ce qui est cohérent avec l'hypothèse de petite perturbation initiale. La vitesse  $\mathbf{V}_{surf}$  peut alors être supprimée en projetant l'Eq. (A.30) sur l'état réduit avec la matrice  $\mathcal{P}^T$  telle que :

$$\Delta\boldsymbol{\psi}_1(t, \epsilon) = \epsilon\Delta\boldsymbol{\psi}_1(0) + \epsilon \int_0^t \mathcal{P}^T \text{Ad}_{h^{-1}g_0} \boldsymbol{\eta}_0 dt' \quad (\text{A.31})$$

avec  $\mathcal{P}^T \Delta\boldsymbol{\Psi}_1 = \Delta\boldsymbol{\psi}_1$  (cf l'Eq. (3.2)). Deux remarques importantes s'imposent. Tout d'abord, on observe que le premier terme  $\Delta\boldsymbol{\psi}_1$  de l'expansion de Magnus est linéaire à l'ordre supérieur avec  $\epsilon$ . Plus généralement, le  $j$ -ième terme  $\Delta\boldsymbol{\psi}_j$  est d'ordre supérieur proportionnel à  $\epsilon^j$ , ce qui motive l'omission de tout le terme  $j > 1$  dans l'expansion de Magnus.

Deuxièmement, la représentation adjointe  $\text{Ad}_{h^{-1}g_0(t, \epsilon)}$  dans l'Eq. (A.30) dépend non linéairement de  $\Delta\boldsymbol{\psi}_1$  puisque la transformation  $h^{-1}g_0$  est définie à partir de l'expansion de Magnus (cf. l'Eq. (A.33)). Par conséquent, l'Eq. (A.30) est implicite par rapport à la fonction  $\Delta\boldsymbol{\psi}_1$ .

Pour simplifier ce problème, nous proposons également de développer  $\Delta\boldsymbol{\psi}_1$  et  $\Delta\boldsymbol{\Psi}_1$  comme une série de puissance de  $\epsilon$  :

$$\Delta\boldsymbol{\psi}_j = \sum_{i=j}^{\infty} \epsilon^i \Delta\boldsymbol{\psi}_j^{(i)} \quad (\text{A.32})$$

où  $\Delta\boldsymbol{\psi}_j^{(i)}$  est la  $i$ -ième correction d'ordre du  $j$ -ième terme de l'expansion de Magnus. En exploitant cette propriété, la transformation  $h^{-1}g_0$  obtenue à partir de l'Eq. (A.33) peut être étendue de telle sorte que

$$h^{-1}g_0 = g_{eq} + \epsilon\Delta\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_1^{(1)} g_{eq} + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.33})$$

Réciproquement, on peut aussi montrer avec le même processus que  $\mathbf{V}_{surf} = 0(\epsilon)$  et  $h = e + O(1)$  avec  $e$  est l'élément neutre de  $\text{SE}(3)$ . La première équation du système (4.19) est alors obtenue en combinant l'Eq. (A.33) et la simplification  $h = e + O(1)$ .

Pour obtenir la deuxième équation du système (4.19), on dérive l'équation (A.30) et on utilise l'approximation  $\Delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}_1(t, \epsilon) = \Delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}_1^{(1)}(t) + O(\epsilon)$ . Les termes d'ordre dominant sont :

$$\epsilon\Delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}_1^{(1)}(t) = \epsilon\text{Ad}_{g_{eq}} \boldsymbol{\eta}_0 - \epsilon\mathbf{V}_{surf} + O(\epsilon), \quad (\text{A.34})$$

où l'Eq. (A.33) a été utilisée pour écrire  $h^{-1}g_0 = g_{eq} + O(1)$ . Enfin, la vitesse  $\boldsymbol{\eta}_0$  peut être

exprimée en fonction de  $\Delta\dot{\Psi}_1^{(1)} = \mathcal{P}\Delta\dot{\psi}_1^{(1)}$  en utilisant la propriété :

$$\left(\text{Ad}_{g_{eq}}\right)^{-1} = \text{Ad}_{g_{eq}^{-1}}. \quad (\text{A.35})$$

L'accélération est dérivée avec le même processus.

### A.6.3 La stabilité de stratégie I

Nous présentons ici une analyse plus détaillée du mécanisme physique d'instabilité interne du robot. Pour la forme du corps instable (voir la Fig. 4.5), la position du centre de flottabilité (le barycentre du volume immergé) par rapport au centre de masse produit un bras de levier associé à un couple net de flottabilité qui amplifie le mouvement initié par l'inertie interne. Par conséquent, il n'y a pas d'effort de rappel qui compense l'inertie, ce qui provoque des oscillations illimitées. Cette propriété peut être généralisée à toute structure multicorps déformable car il est difficile de satisfaire la stabilité hydrostatique pour toutes les formes de corps. Notez que le mouvement interne peut être instable alors que le corps solide reste stable puisque  $M'_0$  et  $K_0$  sont définis positifs.



FIGURE A.4 – Les trois modes propres de la dynamique interne pour le corps droit où toutes les articulations du corps sont mises à zéro. Le mode instable est à gauche et les deux autres sont stables. Nous avons représenté schématiquement la position du centre de flottabilité (triangle rouge, cob) et de masse (carré noir, com). Ils sont en fait plus proches avec une distance relative de 2mm pour une longueur de robot de 1m.

Pour illustrer cette propriété, nous avons rapporté sur la Fig. A.4 les trois formes de corps correspondant aux vecteurs propres de la matrice  $A(\mathbf{q}_{eq})$  où  $\mathbf{q}_{eq} = 0$ , c'est-à-dire, la configuration rectiligne. Nous choisissons cette configuration en raison de sa symétrie par rapport au plan sagittal. Le mode instable est le premier en partant de la gauche, les deux autres sont stables. Les deux modes stables restent symétriques par rapport à la symétrie sagittale, seules les altitudes du cou et de la tête sont modifiées. Cela implique que le centre de masse et le centre de flottabilité sont également dans ce plan, et qu'aucun

bras de levier ne peut produire de roulis. Au contraire, le mode instable affiche un corps courbe avec des modules de coque tournant avec  $q_{r,i} > 0$ , c'est-à-dire vers l'intérieur du centre du rayon de la courbure globale.

Pour cette forme, le centre de masse et la flottabilité ne sont plus sur le robot. Sur la Fig. A.4, nous avons représenté schématiquement leurs positions relatives sur le plan de la surface. Étant donné que la force de flottabilité est dans la direction verticale ascendante, le couple de flottabilité résultant produira un mouvement de roulis dans le même sens de rotation du module de coque, c'est-à-dire une rotation positive  $\theta_x > 0$  de tout le corps.

#### A.6.4 La stabilité de stratégie II

À partir de cette évaluation, nous proposons le scénario suivant pour l'instabilité. Premièrement, la stratégie II consiste à travailler dans le noyau de  $M_q[\mathbf{q}_{eq}]$  en utilisant les déformations de corps  $\Delta\mathbf{q} = P\hat{\mathbf{q}}$  ne produisant aucune accélération. Cependant, les matrices inertielles  $M_q[\mathbf{q}_{eq}]$  et  $M_q[\mathbf{q}_{eq} + \epsilon\Delta\mathbf{q}]$  n'ont pas *a priori* exactement le même noyau si  $\epsilon\Delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ . En poursuivant la correction au second ordre de la dynamique (cf section 4.3.3), on obtient pour  $\epsilon\Delta q = \epsilon P\hat{\mathbf{q}}$  :

$$M_q[\mathbf{q}_{eq} + \epsilon\Delta\mathbf{q}](\epsilon\Delta\ddot{\mathbf{q}}) = \epsilon^2 M_e [\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}] \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.36})$$

pour  $\epsilon \ll 1$  et où  $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$  est estimé à partir de la dérivée seconde de l'équation 4.32. La matrice  $M_e$  est directement proportionnelle au premier terme du développement de Taylor de  $M_q[\mathbf{q}_{eq} + \epsilon\Delta\mathbf{q}]$ , c'est-à-dire à son jacobien par rapport à  $\Delta\mathbf{q}$ . Cette matrice est *a priori* non nulle, et va changer l'ordre de l'EDO pour la dynamique de la tête et introduire une non-linéarité.

En introduisant ce nouveau composant dans la dynamique linéaire du mouvement de la tête, le système est maintenant donné par :

$$\epsilon M_e [\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}] \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + M'_0 \Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \gamma_0 M'_0 \Delta\dot{\boldsymbol{\psi}} + K_0 \Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (\text{A.37})$$

où le feedback linéaire  $\mathbf{u}$  a été remplacée par l'Eq. (4.32) pour obtenir le système masse-ressort amorti avec un terme supplémentaire proportionnel à  $\Delta\ddot{\boldsymbol{\psi}}$ .

Nous proposons de donner une preuve de l'instabilité du système linéaire (A.37) rapporté dans la section 4.5.4. Nous étudions la stabilité du mouvement de la tête  $\Delta\boldsymbol{\psi}(t)$  en

utilisant la perturbation suivante :

$$\Delta\psi(t) = x(t)\boldsymbol{\chi} \quad (\text{A.38})$$

avec  $\boldsymbol{\chi}$  un mode stationnaire arbitraire et  $x(t)$  son amplitude. Nous supposons seulement que  $\boldsymbol{\chi}$  n'appartient pas au noyau de  $M_e$ .

Le système linéaire (A.37) peut être réduit à une simple équation du troisième ordre pour  $x(t)$  en introduisant la relation (A.38) dans l'Eq. (A.37) , puis en appliquant le produit scalaire avec  $\boldsymbol{\chi}$ . Finalement, on obtient

$$m_e \ddot{x} + m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{A.39})$$

avec les coefficients

$$\begin{cases} m_e = & \epsilon (\boldsymbol{\chi}^T M_e \boldsymbol{\chi}), \\ m = & (\boldsymbol{\chi}^T M'_0 \boldsymbol{\chi}), \\ c = & \gamma_0 (\boldsymbol{\chi}^T M'_0 \boldsymbol{\chi}), \\ k = & (\boldsymbol{\chi}^T K_0 \boldsymbol{\chi}). \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Les coefficients  $m, k, c$  sont strictement positifs puisque la matrice d'inertie  $M'_0$  et la matrice de rigidité  $K_0$  sont définies positives, tandis que  $m_e$  n'est que non nul. En introduisant  $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$  avec  $\lambda$  la valeur propre, on obtient une équation cubique pour  $\lambda$  :

$$m_e \lambda^3 + m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (\text{A.41})$$

Cette équation a trois valeurs propres données par  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ , et le système devient instable si  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ . Réciproquement, si la partie réelle de chaque racine est négative, soit  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , le système est dit stable. Nous allons montrer que la stabilité ne peut être garantie quel que soit le signe de  $m_e$  pour  $m, c, k > 0$ .

Selon le discriminant de l'équation cubique, les trois racines sont soit réelles, soit l'une est réelle et les deux autres sont complexes conjuguées. Notons que comme  $m_e \rightarrow 0$ , on devrait retrouver le second cas puisque l'on obtient deux racines complexes conjuguées pour  $m_e = 0$  et  $m, k, c > 0$ .

En utilisant ces valeurs propres comme solution de l'équation caractéristique, on ob-

tient après développement les pré-facteurs suivants pour les termes quadratiques et linéaires :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{m}{m_e} \quad (\text{A.42})$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{c}{m_e} \quad (\text{A.43})$$

La première condition stipule que la somme de la partie réelle doit avoir le signe  $-m/m_e$ . Donc, si  $m_e < 0$  alors  $-m/m_e$  est positif, ce qui est impossible si les trois parties réelles  $\text{Re}(\lambda_i)$  sont négatives. Au moins une valeur propre doit avoir une partie réelle positive représentant l'instabilité.

## A.7 Analyse d'une équation de Mathieu avec l'approche perturbative

La forme standard de l'équation de Mathieu non amortie s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + \delta \cos(2\Omega t))\theta = 0 \quad (\text{A.44})$$

où  $\omega_0$  est la fréquence propre,  $\delta$  est l'amplitude de perturbation et  $2\Omega$  est la fréquence de perturbation externe.

Pour définir la stabilité linéaire dans l'espace des paramètres de  $\omega_0$  et  $\delta$ , nous obtenons l'équation d'amplitude par la méthode de Poincaré–Lindstedt [127]. D'abord, l'amplitude de perturbation mise à l'échelle  $\Delta$  est notée par :

$$\delta = \epsilon\Delta \quad (\text{A.45})$$

Puis la solution de  $u$  est supposée d'une superposition des composantes  $\theta_0, \theta_1$ , donnée par :

$$\theta(t, \tau) = \theta_0(t, \tau) + \epsilon\theta_1(t, \tau) \quad (\text{A.46})$$

avec  $\tau$  une nouvelle variable défini par  $\tau = \epsilon t$ .

En remplaçant  $\theta(t, \tau)$  dans l'Eq. (A.44) on obtient le terme d'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$  qui est une équation différentielle de  $\theta_0$  :

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 \theta_0 = 0 \quad (\text{A.47})$$

ce qui donne la solution homogène :

$$\theta_0 = A(\tau)e^{i\omega_0 t} + \bar{A}(\tau)e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{A.48})$$

avec  $\bar{A}(\tau)$  le conjugué complexe de  $A(\tau)$ . Ensuite, le terme d'ordre  $\epsilon^\infty$  donne une équation différentielle de  $\theta_1$  :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \theta_1 = -2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t \partial \tau} - \omega_0^2 \Delta \cos(2\Omega t) \theta_0 \quad (\text{A.49})$$

À partir de la solution homogène de  $\theta_0$ , les termes  $\left(2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t \partial \tau}\right)$  et  $(\omega_0^2 \Delta \sin(2\Omega t) \theta_0)$  sont respectivement donnés par :

$$2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t \partial \tau} = (2i\omega_0) \left( \frac{dA}{d\tau} e^{i\omega_0 t} - \frac{d\bar{A}}{d\tau} e^{-i\omega_0 t} \right) \quad (\text{A.50})$$

$$\omega_0 \Delta \cos(2\Omega t) \theta_0 = -\frac{i\omega_0^2 \Delta}{2} (e^{i\omega_e t} - e^{-i\omega_e t}) (Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t}) \quad (\text{A.51})$$

On définit une variation  $(\Delta\omega)$  entre 2 fois de la fréquence propre  $\omega_0$  et la perturbation  $\omega_e$  par la relation suivante :

$$2\epsilon(\Delta\omega) = \omega_0 - \Omega \quad (\text{A.52})$$

En remplaçant  $\omega_e$  dans l'expression (A.51) par la relation (A.52), le terme  $(\omega_0^2 \Delta \sin(\omega_e t) \theta_0)$  se réduit en fonction de  $\omega_0$  et  $\Delta\omega$  :

$$\omega_0 \Delta \cos(2\omega t) \theta_0 = -\frac{i\omega_0^2 \Delta}{2} [A(e^{i(3\omega_0 - 4\Delta\omega)t} - e^{-i(\omega_0 - 4\Delta\omega)t}) + \bar{A}(e^{i(\omega_0 - 4\Delta\omega)t} - e^{-i(3\omega_0 - 4\Delta\omega)t})] \quad (\text{A.53})$$

En introduisant l'Eq. (A.50) et l'Eq. (A.53) dans l'Eq. (A.49), on retrouve les termes résonnants (ou termes séculaires) dans la partie droite de l'Eq. (A.49) :

$$\begin{aligned} & e^{i\omega_0 t} \left( 2i\omega_0 \frac{dA}{d\tau} - \frac{i\omega_0^2 \Delta}{2} \bar{A} e^{-i4\Delta\omega t} \right) \\ & + e^{-i\omega_0 t} \left( -2i\omega_0 \frac{d\bar{A}}{d\tau} + \frac{i\omega_0^2 \Delta}{2} A e^{i4\Delta\omega t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

La condition de solvabilité pour éliminer les termes résonnants est définie comme un

système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\tau} - \frac{i\omega_0\Delta}{4}\bar{A}e^{-i4\Delta\omega t} = 0 \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} - \frac{i\omega_0\Delta}{2}Ae^{i4\Delta\omega t} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

En définissant les transformations  $(A = B(\tau)e^{-2i\Delta\omega\tau})$  et  $(\bar{A} = \bar{B}(\tau)e^{2i\Delta\omega\tau})$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{dB}{d\tau} \\ \frac{d\bar{B}}{d\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2i\Delta\omega & -\frac{\omega_0\Delta}{4} \\ -\frac{\omega_0\Delta}{4} & 2i\Delta\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \bar{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.56})$$

La stabilité du système linéaire (A.56) est déterminée par les valeurs propres  $\sigma$  de la matrice de coefficient :

$$\sigma = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0\Delta}{4}\right)^2 - 4(\Delta\omega)^2} \quad (\text{A.57})$$

Si la valeur propre  $\sigma$  est un nombre réel, l'amplitude  $A(\tau)$  est une fonction exponentielle et l'oscillateur paramétrique présente une instabilité résonnante. Le critère instable est donc défini par :

$$\frac{\omega_0\Delta}{4} > |2\Delta\omega| \quad (\text{A.58})$$

En substituant les relations (A.45) et (A.52) dans les critères (A.58), on obtient les critères instables par rapport à  $\omega_0, \delta$  étant donné  $\omega_e$  :

$$\begin{cases} \delta > 4 - 4\frac{\Omega}{\omega_0} & 0 \leq \frac{\omega_e}{\omega_0} \leq 2 \\ \delta > -4 + 4\frac{\Omega}{\omega_0} & 2 < \frac{\omega_e}{\omega_0} \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Dans l'espace de  $(\frac{\Omega}{\omega_0} - \delta)$ , le critère instable entoure une région triangulaire appelée langue de résonance de l'équation de Mathieu et à partir des critères instables, nous trouvons que lorsque  $(\Omega = \omega_0)$  l'oscillateur Mathieu a la bande de résonance la plus large. Étant donné la fréquence naturelle  $\omega_0$  et l'amplitude de forçage  $\delta$ , nous définissons la plage de fréquence de perturbation instable  $\omega_e$  par :

$$\left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\omega_0 < \Omega < \left(1 + \frac{\delta}{4}\right)\omega_0 \quad (\text{A.60})$$

**Titre :** Processus de stabilisation d'un robot serpentiniforme à la surface de l'eau : modélisation, contrôle et stabilité

**Mot clés :** Bio-inspiration, Modélisation dynamique, robot serpent, contrôle basé sur un modèle

**Résumé :** Les robots nageurs élancés, inspirés par des serpents aquatiques ou des anguilles, gagnent en popularité au milieu académique. Ils sont manoeuvrable et écoénergétiques par rapport aux navires autonomes de surface. Cependant, ils souffrent d'instabilité sur la surface de l'eau dans des conditions extrêmes (houle, vent, débris de surface). Le processus de stabilisation pour ces nageurs multicorps élancés reste une question ouverte. Le projet SSSNAEQ cherche à résoudre ce problème en s'inspirant des serpents pour stabiliser ces robots de manière active. À travers cet objectif, un nouveau robot serpentiniforme, nommé NATRIX, a été développé, équipé des "organes" bio-inspirés localisés dans le cou et le long du corps pour réaliser une stabilisation active.

Dans ce cadre, cette thèse reporte l'exploration de la stabilité statique et dynamique du robot sur la surface de l'eau sous l'aspect de simulation numérique. Elle porte d'abord sur la modélisation géométrique, cinématique et dynamique du robot. Basées sur ces modèles, deux nouvelles stratégies en boucle

ouverte et boucle fermée sur le contrôle postural ont été proposées. Ces lois de contrôle permettent de calculer les trajectoires articulaires qui stabilisent la posture du robot sur la surface de l'eau pour des poses statiques ou lors de la nage. Ensuite, nous reportons une résonance paramétrique auto-excitée au cours de la nage cyclique, provoquant le chavirement du robot à travers un mouvement de roulis illimité. Le processus physique de cette instabilité est lié aux mouvements internes du robot, différents de celui des navires monocoque [69]. Un template de stabilité, différent de celui pour les locomoteurs bipèdes [123], a été développé pour prédire cette instabilité. À la fin, on a confirmé que, en exploitant les organes additionnels, cette instabilité est considérablement atténuée.

Ces travaux représentent des premières briques méthodologiques, ouvrant la voie à un contrôle actif de la stabilisation des robots serpents nageurs sur la surface de l'eau.

**Title:** Stabilization process of a serpentiniform robot on the water surface: modeling, control and stability

**Keywords:** Bio-inspiration, Dynamic Modeling, snake-like robot, model-based control

**Abstract:** Slender swimming robots, inspired by aquatic snakes or eels, are gaining popularity in academia. They are maneuverable and energy efficient compared to autonomous surface ships. However, they suffer from surface instability under extreme conditions (swell, wind and surface debris). The stabilization process for these multibody swimmers remains an open question. The SSSNAEQ project seeks to solve this problem by taking inspiration from snakes to actively stabilize these robots. Through this objective, a new serpentiniform robot prototype, named NATRIX, was developed, equipped with bio-inspired "organs" located in the neck and along the body to achieve active stabilization.

In this context, this thesis reports the exploration of the static and dynamic stability of the robot on the surface from a numerical aspect. It focuses at first on the geometric, kinematic and dynamic modeling of the robot. Based on these models, two new open-loop and closed-loop strategies on postu-

ral control were proposed. These control laws make it possible to calculate the joint trajectories which stabilize the robot's posture on the water surface for static poses or when swimming. Then, we report a self-excited parametric resonance during cyclic swimming, causing the robot to capsize through an unrestricted rolling motion. The physical process of this instability is associated with the internal movements of the robot, which are different from those of monobody vessels [69]. A stability template, different from that for bipedal locomotors [123], was developed to predict this instability. In the end, it was confirmed that, by exploiting the additional organs, this instability is considerably reduced.

This work represents the first methodological blocks, paving the way for the development of active control for the stabilization of swimming snake robots on the water surface.