



**HAL**  
open science

# Modélisation de la magnétostriction en ferromagnétisme.

Mouna Kassan

► **To cite this version:**

Mouna Kassan. Modélisation de la magnétostriction en ferromagnétisme.. Physique mathématique [math-ph]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2023. Français. NNT : 2023PAUU3028 . tel-04536410

**HAL Id: tel-04536410**

**<https://theses.hal.science/tel-04536410v1>**

Submitted on 8 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Projet ANR MOSICOF

---

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Préparée dans le cadre d'une codirection entre

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR ET L'UNIVERSITÉ LIBANAISE

Présentée par

**Mouna KASSAN**

---

# Modélisation de la Magnétostriction en Ferromagnétisme

---

Directeurs de thèse

**Gilles CARBOU & Moustapha JAZAR**

Soutenue le 26 juin 2023, 10h :00 à l'UPPA devant la commission d'examen

## JURY

Gilles CARBOU	Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	Directeur
Mutapha JAZAR	Professeur, Université Libanaise	Directeur
Stéphane LABBE	Professeur des universités, Sorbonne Université	Président
Brigitte BIDEGARAY	Chargée de recherche, Université Grenoble Alpes	Examineur
Clémentine COURTES	Maîtresse de conférences, Université de Strasbourg	Examineur
Rejeb HADIJI	Professeur, Université-Paris Est Créteil	Rapporteur
Olivier GUES	Professeur, Aix Marseille Université	Rapporteur

## RAPPORTEURS

Rejeb HADIJI	Professeur, Université-Paris Est Créteil
Olivier GUES	Professeur, Aix Marseille Université



# *Remerciement*

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mes deux directeurs de thèse, Gilles Carbou et Mustapha Jazar, pour avoir placé leur confiance en moi en me proposant ce sujet de recherche et pour leur précieux soutien tout au long de ce parcours. Je souhaite adresser mes remerciements les plus chaleureux à Gilles Carbou pour m'avoir accompagné de manière infaillible durant mon travail de thèse. Son soutien moral et son expertise scientifique ont été une source constante de motivation, en particulier dans les moments les plus difficiles. Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance envers Mustapha Jazar pour son soutien inestimable et son expertise mathématique qui ont grandement contribué à mon développement et à ma progression.

Je tiens tout particulièrement à remercier Rejeb Hadiji et Olivier Gues d'avoir accepté d'être rapporteurs pour ce travail. Leur intérêt pour mes recherches et les appréciations qu'ils en ont formulées contribuent à leur valorisation et me comblent d'honneur. J'exprime également ma gratitude envers Stéphane Labbé, le président du jury, ainsi que Brigitte Bidegaray et Clémentine Courtes pour leur participation à mon jury. Leurs remarques pertinentes et leurs conseils instructifs ont été d'une grande valeur pour moi.

En outre, je souhaite exprimer ma reconnaissance envers ma famille, mon fiancé Abdallah Zakaria, mon frère Hamzeh Kassan, mon cousin Abdallah Ammar et mes amis pour leur amour, leur soutien et leurs encouragements constants. Votre présence dans ma vie a été une source inépuisable de motivation et de réconfort tout au long de cette aventure académique exigeante. Je vous suis profondément reconnaissant pour votre soutien indéfectible.

Je tiens à vous exprimer à tous ma gratitude la plus sincère. Votre contribution a été inestimable et a joué un rôle crucial dans la réalisation de ma thèse.

Merci du fond du cœur.

## *Résumé*

### **Modélisation de la magnétostriction en ferromagnétisme**

Les matériaux ferromagnétiques présentent la propriété de se déformer lorsqu'ils subissent une variation d'aimantation. Ce phénomène physique est appelé la magnétostriction. Le modèle considéré dans cette thèse consiste en un couplage non linéaire de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec l'équation d'ondes de l'élasticité.

L'objectif principal de cette thèse est d'obtenir par méthodes asymptotiques des modèles 2d pour des plaques minces et 1d pour des nanofils ferromagnétiques en présence de magnétostriction.

Dans un premier temps, le modèle complet est étudié, ce qui permet d'obtenir des modèles décrivant de manière précise les propriétés magnétiques et les déformations tangentielles (longitudinales pour les fils). Cependant, ces modèles ne prennent pas en compte ni les déformations normales à la plaque ni les déformations transverses pour les fils.

Par la suite, un modèle simplifié, appelé "quasi-stationnaire", a été examiné. Dans ce modèle, l'équation d'ondes élastiques a été remplacée par une équation stationnaire. Ce modèle simplifié a permis d'obtenir un modèle asymptotique qui prend également en compte les déformations normales à la plaque (transversales pour les fils). En outre, dans le cas des nanofils, ce modèle à une dimension permet d'analyser la stabilité de certaines configurations d'aimantation en fonction de l'intensité de l'étirement appliqué au fil.

Dans un autre ordre d'idée, la dernière partie du manuscrit est consacrée à l'étude du comportement des murs dans un fil ferromagnétique avec encoche, en présence d'un champ magnétique appliqué. On a démontré que lorsque le champ appliqué fait s'éloigner le mur de l'encoche, la dynamique de celui-ci se rapproche de celle observée en l'absence d'encoche.

**Mots clés :** magnétostriction, solution faible, nanofil, plaque mince, mur, stabilité.

# *Abstract*

## **Modeling of Magnetostriction in Ferromagnetism**

Ferromagnetic materials have the property of deforming when are subject to a change in magnetization. This physical phenomenon is called magnetostriction. The model considered in this thesis consists of a nonlinear coupling of the Landau-Lifschitz-Gilbert equation with the elasticity wave equation.

The main objective of this thesis is to obtain 2D models for thin plates and 1D models for ferromagnetic nanowires in the presence of magnetostriction using asymptotic methods.

Initially, the complete model is studied and we obtain models that accurately describe magnetic properties and tangential deformations (longitudinal for wires). However, these models do not take into account neither normal deformations of the plate nor transverse deformation for the wires.

Subsequently, a simplified model, called "quasi-stationary", was examined. In this model, the elastic wave equation was replaced by a stationary equation. This simplified model allowed for the derivation of an asymptotic model that also takes into account normal deformations of the plate (transverse deformation for wires). Additionally, in the case of nanowires, this one-dimensional model allows for the analysis of the stability of certain magnetization configurations as a function of the applied stretching intensity of the wire.

On a different note, the last part of the manuscript is devoted to the study of wall behavior in a ferromagnetic wire with a notch in the presence of an applied magnetic field. It was demonstrated that when the applied field moves the wall away from the notch, wall dynamic approaches those observed in the absence of a notch.

**Keywords :** magnetostriction, weak solution, nanowires, thin plates, wall, stability.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
I.1	Modélisation des matériaux ferromagnétiques . . . . .	1
I.1.1	Modèle statique . . . . .	2
I.1.2	Modèle dynamique . . . . .	6
I.2	Équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction . . . . .	8
I.3	Avantages des modèles asymptotiques pour l'étude de phénomènes complexes . . . . .	12
I.4	Problèmes étudiés et résultats obtenus . . . . .	15
I.4.1	Existence de solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction et modèles asymptotiques . . . . .	16
I.4.2	Modèle quasi stationnaire et modèles équivalents asymptotiques . . . . .	18
I.4.3	Stabilisation des murs loin de l'encoche pour des nanofils ferromagnétiques . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Modèle non-stationnaire de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction</b>	<b>26</b>
II.1	Introduction . . . . .	27
II.2	Outils pour l'analyse fonctionnelle et l'algèbre tensorielle. . . . .	29
II.2.1	Analyse fonctionnelle . . . . .	29
II.2.2	Calcul tensoriel . . . . .	31
II.2.3	Inégalité de Korn . . . . .	33
II.3	Existence de solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction . . . . .	35
II.3.1	Rappel du modèle . . . . .	35
II.3.2	Système pénalisé . . . . .	39
II.3.3	Passage à la limite dans le système pénalisé (II.3.8) . . . . .	65
II.4	Plaque mince ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	70
II.4.1	Modèle tridimensionnel de plaque ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	70
II.4.2	Modèle redimensionné . . . . .	72
II.4.3	Borne uniforme et passage à la limite lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro . . . . .	75
II.5	Fil ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	85
II.5.1	Modèle tridimensionnel de fil ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	85

II.5.2	Passage à la limite dans les formulations faibles lorsque le rayon du fil tend vers zéro . . . . .	92
<b>III</b>	<b>Modèle quasi-stationnaire pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction</b>	<b>98</b>
III.1	Introduction . . . . .	99
III.2	Modèle quasi stationnaire . . . . .	99
III.2.1	Limite de $m^n$ . . . . .	101
III.2.2	Moyenne temporelle appropriée . . . . .	103
III.2.3	Passage à la limite lorsque $n$ tend vers l'infini . . . . .	105
III.3	Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction . . . . .	118
III.3.1	Modèle tridimensionnel, changement d'échelle et passage à la limite . . . . .	118
III.3.2	Cas particulier de $\lambda^e$ . . . . .	124
III.4	Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	130
III.4.1	Modèle tridimensionnel, changement d'échelle et passage à la limite . . . . .	130
III.4.2	Cas particulier de $\lambda^e$ . . . . .	137
III.4.3	Étude de la stabilité des solutions stationnaires . . . . .	140
III.4.4	Études numériques du modèle unidimensionnel pour un nanofil ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	151
<b>IV</b>	<b>Stabilisation des murs loin de l'encoche pour des nanofils ferromagnétiques</b>	<b>161</b>
IV.1	Modèle unidimensionnel pour un nanofil ferromagnétique . . . . .	162
IV.2	Formes équivalentes de l'équation . . . . .	166
IV.2.1	Repère mobile . . . . .	167
IV.2.2	Parti linéaire de l'équation et nouvelles coordonnées . . . . .	169
IV.2.3	Estimations variationnelles . . . . .	174
IV.3	Preuve du Théorème IV.1.1 . . . . .	179
IV.3.1	Première étape : Nouveau produit scalaire . . . . .	179
IV.3.2	Deuxième étape : Estimations variationnelles sur $W$ . . . . .	181
IV.3.3	Troisième étape : Estimation pour $\Lambda$ et fin de la preuve . . . . .	184
<b>V</b>	<b>Conclusion et problèmes ouverts</b>	<b>187</b>





---

---

# CHAPITRE I

---

## INTRODUCTION

### Sommaire

---

I.1	Modélisation des matériaux ferromagnétiques . . . . .	1
I.1.1	Modèle statique . . . . .	2
I.1.2	Modèle dynamique . . . . .	6
I.2	Équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction . . . . .	8
I.3	Avantages des modèles asymptotiques pour l'étude de phénomènes complexes . .	12
I.4	Problèmes étudiés et résultats obtenus . . . . .	15
I.4.1	Existence de solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction et modèles asymptotiques . . . .	16
I.4.2	Modèle quasi stationnaire et modèles équivalents asymptotiques . . . . .	18
I.4.3	Stabilisation des murs loin de l'encoche pour des nanofils ferromagnétiques	22

---

### I.1 Modélisation des matériaux ferromagnétiques

Le ferromagnétisme est un phénomène physique au cours duquel certains matériaux présentent une aimantation spontanée en l'absence d'un champ magnétique externe. Cette propriété résulte de l'existence de moments magnétiques localisés dans la structure cristalline de ces matériaux, qui ont tendance à s'aligner les uns avec les autres pour former des domaines magnétiques cohérents à l'échelle macroscopique. Lorsqu'un champ magnétique externe est appliqué, ces domaines magnétiques peuvent être orientés dans la direction du champ, induisant une aimantation nette de la matière. Après avoir enlevé le champ magnétique, les moments magnétiques restent alignés et le matériau conserve une aimantation permanente. Le ferromagnétisme est un phénomène complexe qui dépend de nombreux facteurs comme la composition chimique, la structure cristalline et la température du matériau. À partir d'un certain seuil de température, appelé température de Curie,

les matériaux ferromagnétiques perdent leurs propriétés magnétiques. Par exemple, la température de Curie pour le fer est de  $770^{\circ}\text{C}$ . Les matériaux ferromagnétiques sont largement utilisés dans les applications industrielles telles que la protection radar, les disques durs, les puces magnétiques, les matériels de télécommunications, la gestion de l'énergie et les dispositifs de stockage de données numériques.

La modélisation des matériaux ferromagnétiques ainsi que des matériaux magnétiques en général est une tâche complexe qui a connu de nombreux progrès au cours des années [42]. Les équations de Maxwell servent de point de départ à la compréhension du champ magnétique produit par un barreau uniformément aimanté. Les premiers travaux relatifs à la modélisation des matériaux ferromagnétiques remontent à 1905, lorsque P. Langevin a proposé une description du champ moléculaire reliant les moments magnétiques et luttant contre le désordre thermique [44].

En 1907, le physicien français Pierre-Ernest Weiss a identifié le champ moléculaire de Weiss. Ce champ décrit l'interaction entre les moments magnétiques des atomes dans un matériau magnétique [54].

En 1928, le physicien allemand Werner Heisenberg a proposé une reformulation du champ moléculaire de Weiss en termes de champ d'échange [35]. Cette reformulation a joué un rôle important en développement de la théorie quantique de la matière condensée. Le champ d'échange décrit l'interaction entre les moments magnétiques des électrons dans un matériau magnétique en termes de la théorie quantique. Cette théorie a permis de mieux comprendre les propriétés magnétiques de différents matériaux, notamment les ferromagnétiques et les antiferromagnétiques.

L'hypothèse émise par F. Bloch en 1932, appelée hypothèse de Bloch, est aujourd'hui considérée comme fondamentale pour la compréhension du comportement des matériaux ferromagnétiques. Elle stipule que lorsqu'un matériau ferromagnétique est soumis à une excitation magnétique externe non nulle, l'aimantation du matériau se divise en petits domaines qui sont presque uniformément aimantés et séparés les uns des autres par des parois de Bloch très minces [8]. Ces parois de Bloch sont des zones où l'orientation de l'aimantation change brusquement de direction, créant ainsi une zone de transition entre deux domaines avec une orientation différente de l'aimantation [40]. L'hypothèse de Bloch a été confirmée par des expériences ultérieures et a permis une meilleure compréhension du comportement des matériaux ferromagnétiques, tels que le fer, le nickel ou le cobalt. Elle a également contribué à la compréhension des phénomènes de magnétisme et de l'enregistrement magnétique, ce qui a été utile dans la conception de dispositifs de stockage de données tels que les disques durs.

Dans les années 1940, W.F. Brown a proposé une théorie révolutionnaire appelée "théorie du micromagnétisme". Cette théorie traite la magnétisation comme un continuum et cherche à minimiser une énergie libre. Elle explique le comportement non linéaire de certains matériaux magnétiques, ce qui représente une avancée majeure dans le domaine [12].

### I.1.1 Modèle statique

La théorie du micromagnétisme [5], [12], [42], [43] est une approche pour modéliser le comportement magnétique des milieux continus. Selon cette théorie, les matériaux magnétiques peuvent

être considérés comme étant constitués de nombreux petits aimants élémentaires qui sont appelés "mini-aimants permanents". Ces mini-aimants sont distribués dans tout le matériau et sont décrits par un champ de vecteurs appelé l'aimantation  $\mathbf{m}$  exprimé en  $\text{A.m}^{-1}$ . Le domaine occupé par le matériau ferromagnétique  $\Omega$  soit saturé, c'est-à-dire que  $\mathbf{m}$  est soumis à la contrainte

$$|\mathbf{m}(x)| = m_s \text{ p.p. dans } \Omega.$$

La grandeur  $m_s$  est appelée aimantation à saturation, exprimée en  $\text{A.m}^{-1}$  et varie uniquement en fonction de la température.

L'avancement des études sur les matériaux ferromagnétiques a été entravé pendant un certain temps par la complexité des équations qui régissent le comportement magnétique des matériaux à l'échelle microscopique. Ces équations étaient trop compliquées pour permettre des simulations réalistes et convaincantes en raison de la faiblesse des moyens informatiques de l'époque. Cependant, dans les années 70, avec l'apparition du premier supercalculateur, l'activité dans le domaine du micromagnétisme a repris de plus belle, et cela a marqué un tournant dans l'étude des matériaux ferromagnétiques, avec un accent mis sur l'approche mathématique.

Dans le cas statique, il existe une méthode variationnelle utilisée pour étudier les propriétés magnétiques des matériaux ferromagnétiques. Cette méthode est basée sur la minimisation de l'énergie libre du matériau, notée  $\mathcal{E}_{tot}$  et donnée par

$$\mathcal{E}_{tot}(\mathbf{m}) = \mathcal{E}_{exch} + \mathcal{E}_{zee} + \mathcal{E}_{ani} + \mathcal{E}_{dem}.$$

La modélisation énergétique des matériaux ferromagnétiques a commencé dans les années 30, où L. D. Landau et E. M. Lifshitz ont proposé une théorie qui associait l'énergie d'échange  $\mathcal{E}_{exch}$ , l'énergie d'anisotropie  $\mathcal{E}_{ani}$ , l'énergie de Zeemann  $\mathcal{E}_{zee}$  et l'énergie démagnétisante  $\mathcal{E}_{dem}$  pour décrire le comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques. Ils ont montré que des configurations d'aimantation à divergence nulle minimisent l'énergie démagnétisante et qu'une énergie d'échange trop élevée correspondrait à une aimantation discontinue. Cette preuve a consolidé l'hypothèse présentée par F. Bloch des années plus tôt. Cette énergie  $\mathcal{E}_{tot}(M)$  est liée à une excitation magnétique notée  $H_{tot} = H_{exch} + H_{zee} + H_{ani} + H_{dem}$  par la formule de dérivation fonctionnelle suivante :

$$H_{tot} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{tot}}{\partial \mathbf{m}}.$$

Chacune des énergies contributrices est décrite de la manière suivante :

### Énergie d'échange :

L'énergie d'échange est l'une des énergies magnétiques les plus importantes pour les matériaux ferromagnétiques. Cette énergie est purement locale et d'origine quantique, et elle est responsable de l'alignement des moments magnétiques dans le matériau. Elle est dérivée du modèle d'interaction d'Heisenberg entre deux spins magnétiques, qui stipule que les mo-

ments magnétiques ont tendance à s'aligner parallèlement pour minimiser l'énergie totale du système. L'énergie d'échange est exprimée par

$$\mathcal{E}_{exch} = \frac{A}{m_s^2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}|^2,$$

où  $A$  est la constante d'échange. Cette équation montre que l'énergie d'échange dépend de la façon dont l'aimantation varie à travers le matériau. Si l'aimantation varie brusquement, par exemple, cela augmentera l'énergie d'échange et rendra le matériau moins stable et si l'aimantation est uniforme cette énergie s'annule. W.F. Brown a proposé la condition au bord vérifiée par  $\mathbf{m}$  qui est la condition de Neumann homogène :

$$\partial_n \mathbf{m} = 0.$$

Alors, l'excitation magnétique  $H_{exch}$  est donnée par :

$$H_{exch}(\mathbf{m}) = \frac{A}{m_s^2} \Delta \mathbf{m}.$$

### Énergie locale de Zeemann (ou énergie extérieure) :

L'énergie de Zeeman décrit l'interaction entre l'aimantation d'un matériau ferromagnétique et un champ magnétique extérieur appliqué. Lorsqu'un échantillon magnétique est placé dans un champ magnétique extérieur  $H_{zee}$ , il a tendance à avoir sa magnétisation alignée avec la direction du champ magnétique. Cette interaction est décrite par l'énergie de Zeeman, qui peut être exprimée comme :

$$\mathcal{E}_{zee} = -\mu_0 \int_{\Omega} H_{Zee} \cdot \mathbf{m},$$

où  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{kg.m.s}^{-2}.\text{A}^{-2}$  est la perméabilité du vide. Il est important de noter que l'effet de l'énergie de Zeeman dépend de la direction et de l'intensité du champ magnétique appliqué par rapport à l'orientation de l'aimantation du matériau. Lorsque le champ magnétique extérieur est suffisamment fort, il peut même surmonter l'interaction d'échange et inverser l'orientation de l'aimantation, ce qui conduit à l'effet d'hystérésis magnétique. Et dans le cas où la direction de l'aimantation est cohérente avec la direction du champ magnétique extérieur, l'énergie Zeemann est minimale.

### Énergie d'anisotropie :

L'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques n'est pas orientée arbitrairement, elle est alignée selon des directions préférentielles déterminées par la structure cristalline du matériau. Cette préférence est due à une force interne appelée anisotropie, qui est responsable de l'énergie d'anisotropie du matériau. Cette énergie est une fonctionnelle de l'aimantation

du matériau, qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{E}_{ani} = K\mu_0 \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{m}),$$

où  $\Psi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction paire s'annulant sur un ensemble de directions appelées 'directions de faciles aimantation' et  $K$  est la constante d'anisotropie (sans dimension). En pratique, on peut trouver différentes formes d'anisotropie magnétique, parmi lesquelles les plus courantes sont l'anisotropie uniaxiale et l'anisotropie planaire. L'anisotropie uniaxiale se produit lorsque la direction préférentielle d'orientation de l'aimantation est alignée avec un seul axe  $v \in S^2$ , dans ce cas

$$\Psi(m) = -(m \cdot v)^2 \quad \text{et } K > 0.$$

Tandis que l'anisotropie planaire se produit lorsque cette direction préférentielle est limitée à un plan particulier  $P$ , dans ce cas

$$\Psi(m) = -(m \cdot v)^2 \quad \text{et } K < 0,$$

où  $v \in S^2$  est orthogonale à  $P$ . Alors, l'excitation magnétique  $H_{ani}$  dans ces deux cas est donnée par

$$H_{ani} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{ani}}{\partial \mathbf{m}} = K(\mathbf{m} \cdot v)v.$$

L'anisotropie cubique, qui correspond à une orientation préférentielle de l'aimantation dans les directions diagonales de la maille cristalline, est également possible, mais elle est moins courante. Les propriétés magnétiques d'un matériau ferromagnétique dépendent fortement de la nature de l'anisotropie et de son orientation dans le matériau. Ainsi, la compréhension et le contrôle de l'anisotropie sont des éléments clés pour la conception et la fabrication de matériaux magnétiques à des fins spécifiques.

### Énergie démagnétisante :

Le champ démagnétisant est créé par l'aimantation locale et s'étend sur l'ensemble du système. Il est décrit par les équations statiques de Maxwell sans charge ni courant. Plus précisément, le champ démagnétisant peut être obtenu en résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{rot}(h_d(\mathbf{m})) = 0, \\ \text{div}(h_d(\mathbf{m}) + \bar{\mathbf{m}}) = 0, \end{cases}$$

au sens de distribution, où  $\bar{\mathbf{m}}$  est le prolongement de  $\mathbf{m}$  par zéro en dehors de  $\Omega$ . Donc,

l'énergie démagnétisant associée à ce champ est calculée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}_{dem} = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(\mathbf{m})|^2.$$

La non-localité du champ démagnétisant est un élément important dans l'étude du micro-magnétisme.

Le problème micromagnétique est un problème de minimisation qui implique plusieurs termes d'énergie concurrents. L'énergie d'échange cherche à minimiser les configurations d'aimantation constantes, tandis que l'énergie extérieure est minimisée pour les configurations alignées dans la direction du champ magnétique appliqué. L'énergie démagnétisante est minimisée pour des configurations dont la divergence est nulle et qui sont tangentes au bord du matériau, tandis que l'énergie d'anisotropie est minimisée pour les configurations alignées dans les directions des axes faciles. Ces différentes énergies doivent être prises en compte simultanément pour résoudre le problème micromagnétique.

### I.1.2 Modèle dynamique

Le modèle dynamique principal du micromagnétisme est basé sur le modèle introduit par Landau et Lifschitz (en 1935), a été repris par W. F. Brown (cf. [43]) et est donné par

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m}) - \frac{\alpha \gamma}{m_s} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m})), \quad (\text{I.1.1})$$

où  $\times$  est le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique (exprimé en A.s.kg<sup>-1</sup>) et  $\alpha$  est le coefficient d'amortissement (terme sans dimension) et  $\mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m})$  est le champ effectif à l'intérieure du matériau ferromagnétique (exprimé en Tesla=kg.s<sup>-2</sup>.A<sup>-1</sup>) donné par

$$\mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m}) = \frac{A}{m_s^2} \Delta \mathbf{m} + \mu_0 h_d(\mathbf{m}) + \mu_0 K \Psi(\mathbf{m}) + \mu_0 H_{zee}, \quad (\text{I.1.2})$$

Les équations de ce modèle sont utilisées pour étudier l'évolution de l'aimantation  $\mathbf{m}$  dans le temps, en tenant compte des interactions entre les mini-aimants qui constituent le matériau. Ainsi, l'équation de Landau-Lifschitz (I.1.1) est une équation aux dérivées partielles vectorielle parabolique quasi linéaire.

L'équation de Landau-Lifschitz (I.1.1) possède deux propriétés fondamentales : La conservation formelle de la norme au cours du temps : le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  de l'équation (I.1.1) avec  $\mathbf{m}$  donne

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{m}|^2 = 0.$$

Et la décroissance formelle de l'énergie qui assure que l'énergie magnétique du système diminue au cours du temps (cf. [49]).

Le modèle de Landau-Lifschitz (I.1.1), couplé aux équations de Maxwell, a été étudié mathématiquement par plusieurs chercheurs. A. Vistintin (voir [53]) a d'abord étudié l'existence de solutions régulières dans un domaine borné, en considérant les contributions d'énergie d'échange et d'énergie anisotropique uniquement. Dans le cas d'un champ effectif réduit au champ d'échange, F. Alouges et A. Soyeur ont montré l'existence et la non-unicité de solutions faibles en temps et en espace. G. Carbou et P. Fabrie (voir [18]) ont ensuite prouvé l'existence locale, l'unicité et l'existence globale de solutions régulières pour des données initiales petites dans le même cadre (voir [17]). S. Labbé (voir [41]) a étendu ces résultats au cas d'un champ effectif prenant en compte toutes les contributions magnétiques. Dans le cas d'un champ composé de la partie d'échange et du champ démagnétisant, G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès ont étudié le comportement asymptotique des équations de Landau-Lifschitz lorsque le coefficient d'échange tend vers zéro (voir [19]), révélant la formation d'une couche limite au bord du matériau. L'existence d'une solution forte sans échange a été établie en dimension 1 par P. Joly et O. Vacus (voir [38], [52]), et dans un domaine infini pour un champ uniquement composé de la partie donnée par les équations de Maxwell par J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch (voir [37]). En ce qui concerne les méthodes numériques, S. Labbé a utilisé une méthode de volumes finis pour étudier le modèle 3D en présence des interactions d'échange, démagnétisant, Zeeman et anisotropie, tandis que François Alouges a résolu l'équation de Landau-Lifschitz à l'aide de la méthode des éléments finis dans [4].

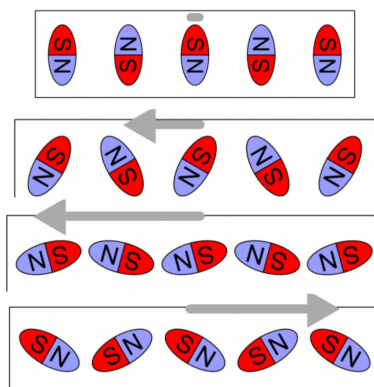
La formulation de l'équation de Landau-Lifschitz a été modifiée en 1955 par Gilbert, donnant lieu à l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert. Cette dernière s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} - \frac{\alpha}{m_s} \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -(1 + \alpha^2) \gamma \mathbf{m} \times \mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m}), \\ \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{m} = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.3})$$

On peut remarquer que l'équation de Landau-Lifschitz (I.1.1) et l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert (I.1.3) sont formellement équivalentes, grâce à  $\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$ , le calcul formel de  $\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$  et l'utilisation de la formule du double produit vectoriel  $X \times Y \times Z = (X \cdot Z) \cdot Y - (X \cdot Y) \cdot Z$ .

Alouges et Soyeur ont démontré l'existence de solutions faibles pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert (voir [6]). Cette dernière est plus adaptée pour construire des solutions faibles. En effet, en utilisant cette équation, on supprime la partie trilineaire  $\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{m})$  qui ne peut pas être définie pour les solutions faibles. De plus, la partie bilinéaire  $\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{m}$





**FIGURE I.1** – Lorsque l’intensité du champ magnétique (flèche grise) varie près de pôles magnétiques (pastilles), ceux-ci changent d’orientation. Le volume de la matière à proximité varie en conséquence (boîte rectangulaire).(<https://www.wikiwand.com/fr/Magn%C3%A9tostriction>)

peut être contrôlée en utilisant la formule suivante :

$$\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{m} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left( \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}_i} \right).$$

## I.2 Équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

La magnétostriction est un phénomène physique qui se produit lorsqu’un matériau change de forme en réponse à un champ magnétique appliqué. Plus précisément, la magnétostriction correspond à un changement de longueur ou de volume d’un matériau ferromagnétique en réponse à une variation de champ magnétique (voir figure I.1). Lorsque le champ magnétique est appliqué, les domaines magnétiques du matériau se réorientent, ce qui peut entraîner une déformation de la structure cristalline du matériau [34].

La magnétostriction a été découverte pour la première fois par le physicien anglais James Joule en 1847. Joule a observé que l’application d’un champ magnétique à certains matériaux, tels que le fer et le nickel, provoquait une déformation mécanique de ces matériaux. Le physicien français Pierre Weiss a étudié la magnétostriction en détail et a proposé une théorie quantitative en 1907 pour décrire la relation entre la magnétisation et la déformation mécanique d’un matériau. Cette théorie est connue sous le nom de loi de Weiss. Plus tard, le physicien allemand Werner Heisenberg a utilisé la mécanique quantique pour développer une théorie de la magnétostriction en 1928. Sa théorie a permis de mieux comprendre les propriétés magnétiques des matériaux et a été largement utilisée dans le domaine de la physique des matériaux.

La magnétostriction est un phénomène physique utilisable dans de nombreuses applications industrielles (capteurs de déplacement et de champ magnétique, de transducteur de

## I.2. Équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

pression, etc, voir section I.3). La compréhension de ce phénomène est donc importante pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent dans ces domaines.

La modélisation de la magnétostriction en ferromagnétisme repose sur la théorie de Landau-Lifshitz-Gilbert. Cette théorie décrit l'évolution de la magnétisation d'un matériau ferromagnétique sous l'effet des interactions d'échange et d'anisotropie magnétique. La magnétostriction est prise en compte dans cette théorie par l'ajout d'un terme de couplage magnétoélastique dans l'équation Landau-Lifshitz-Gilbert. Ce terme relie la magnétisation à la déformation élastique du matériau (cf. [2], [12], [16], [42]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} - \frac{\alpha}{m_s} \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -(1 + \alpha^2) \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{m}), \\ \partial_n \mathbf{m} = 0. \end{cases} \quad (\text{I.2.1})$$

Le champ effectif  $\mathbf{H}_{eff}$  dans ce cas est donné par :

$$\mathbf{H}_{eff} = \frac{A}{m_s^2} \Delta \mathbf{m} + \mu_0 h_d(\mathbf{m}) + \mu_0 \Psi(\mathbf{m}) + h_m.$$

le terme additionnel  $h_m$ , dû à la magnétostriction, relie le moment magnétique  $\mathbf{m}$  au tenseur des contraintes  $\sigma$  par :

$$h_m = (\Lambda^m : \sigma) \mathbf{m},$$

où  $\Lambda^m$  est un 4-tenseur exprimé en  $\text{m}^2 \cdot \text{A}^{-2}$  et  $\sigma$  est un 2-tenseur exprimé en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  (cf. [43]).

La frontière de  $\Omega$  est supposée être divisée en deux parties  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Le matériau est encastré sur  $\Gamma_1$ . Sur l'autre partie  $\Gamma_2$ , une force surfacique  $\mathbf{f}$ , exprimée en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ , est supposée être appliquée. L'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (I.2.1) est couplée avec l'équation des ondes élastiques :

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{div } \sigma = 0, \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (\text{I.2.2})$$

où  $\tilde{\rho}$  est la masse volumique (exprimée en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Le tenseur des contraintes  $\sigma$  est donné par :

$$\sigma = \Lambda^e : \varepsilon^e,$$

où  $\Lambda^e$  est un 4-tenseur exprimé en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ . La déformation totale  $\varepsilon^e$  est obtenue à partir

du tenseur de déformation  $\varepsilon(\mathbf{u})$  et la déformation magnétostrictive  $\varepsilon^m$  par la relation suivante

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon^e + \varepsilon^m.$$

Les deux tenseurs  $\varepsilon(\mathbf{u})$  et  $\varepsilon^m$  sont donnés respectivement par

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon^m = \Lambda^m : \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}.$$

Pour obtenir un modèle sans dimension, on écrit  $\mathbf{m}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_s m(\frac{\mathbf{t}}{\tau}, \frac{\mathbf{x}}{\ell})$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \ell u(\frac{\mathbf{t}}{\tau}, \frac{\mathbf{x}}{\ell})$  où le temps caractéristique  $\tau$  et la longueur d'échange  $\ell$  sont respectivement donnés par :

$$\tau = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mathbf{m}_s} \quad \text{and} \quad \ell^2 = \frac{A}{\mu_0 \mathbf{m}_s^2}.$$

On désigne par  $t = \mathbf{t}/\tau$  le temps sans dimension et par  $x = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}/\ell \in R^3$  la position sans dimension. Alors  $m(t, x)$  et  $u(t, x)$  sont définis pour  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in \Omega$ , où  $\Omega = \{\mathbf{x}/\ell; \mathbf{x} \in \Omega\}$ . Pour simplifier on écrit  $\Lambda^m = \widetilde{\Lambda}^m \lambda^m$ ,  $\Lambda^e = \widetilde{\Lambda}^e \lambda^e$  et  $\mathbf{f} = \widetilde{\mathbf{f}} f$ , où  $\lambda^m$  et  $\lambda^e$  sont deux 4-tenseurs symétriques positifs sans dimension et  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ , et on prend

$$\widetilde{\Lambda}^m = \frac{1}{\mathbf{m}_s^2} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Lambda}^e = \widetilde{\mathbf{f}} = \mu_0 \mathbf{m}_s^2.$$

Remarquons que dans le cas isotrope, le tenseur  $\Lambda^e$  peut s'écrire comme

$$\Lambda_{ijkl}^e = \frac{\hat{E}}{1 + \nu} \left( \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

où  $\hat{E}$  est le module de Young (exprimé en  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$ ),  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Ainsi, dans ce cas,  $\lambda^e$  est donné par

$$\lambda_{ijkl}^e = \frac{E}{1 + \nu} \left( \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (\text{I.2.3})$$

où  $E$  est une constante sans dimension donnée par

$$E = \frac{\hat{E}}{\mu_0 \mathbf{m}_s^2}.$$

On obtient le modèle adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - \alpha m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -(1 + \alpha^2)m \wedge H_{eff} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ H_{eff} = \Delta m + h_d(m) + \Psi(m) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u)))m - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)))m, \end{cases} \quad (\text{I.2.4})$$

couplée avec

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(u)) = -\operatorname{div} (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (\text{I.2.5})$$

où

$$\rho = \frac{\tilde{\rho} \gamma^2 A}{m_s^2},$$

et les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \partial_n m = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(t, x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1, \\ (\lambda^e : \varepsilon(u))n - (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))n = f \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2, \end{cases} \quad (\text{I.2.6})$$

avec  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  est la frontière de  $\Omega$ , telle que la mesure de surface de  $\Gamma_1$  n'est pas zéro. On remarque que la constante  $\alpha$  n'influe pas sur l'analyse mathématique des équations. On la prend égale à 1.

**Remarque I.2.1.** *Le champ effectif  $H_{eff}$  n'est pas défini de manière unique. Cela est dû au fait qu'il est possible d'ajouter à  $H_{eff}$  un terme proportionnel à l'aimantation  $m$ . En d'autres termes, si on ajoute un terme de la forme  $km$  à  $H_{eff}$ , où  $k$  est une constante réelle, cela n'altère pas le produit vectoriel  $m \wedge H_{eff}$ . Cela signifie que l'effet global sur le système magnétique reste le même, même si on change la définition du champ effectif de cette manière.*

L'existence de solution faible globale en temps pour le modèle (I.2.4)-(I.2.5) est prouvée dans [16] pour des conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour la déformation. Le modèle (I.2.4)-(I.2.5)-(I.2.6) vérifie également la propriété de décroissance formelle de l'énergie, car si on prend le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  de (I.2.4) avec  $\frac{\partial m}{\partial t} - 2H_{eff}$  et de (I.2.5) avec  $\frac{\partial u}{\partial t}$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial m}{\partial t} \cdot H_{eff} = 0, \quad (\text{I.2.7})$$

et

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 - \int_{\Omega} \operatorname{div} ((\lambda^e : \varepsilon(u)) - (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (\text{I.2.8})$$

On a :

- $\int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u)))m \cdot \frac{\partial m}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)) \cdot \varepsilon(u),$
- $\int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)))m \cdot \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)))m \cdot m,$
- 

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} ((\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u)) - (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m))) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) \\ &\quad - \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)) : \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(u) \\ &\quad - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} f \cdot u. \end{aligned}$$

Donc, la somme de (I.2.7) avec (I.2.8) donne

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0,$$

où l'énergie du modèle est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_{\Omega} [|\nabla m|^2 + \Phi(m)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m) - 2\varepsilon(u) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m))] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] - \int_{\Gamma_2} f \cdot u \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq 0.$$

### I.3 Avantages des modèles asymptotiques pour l'étude de phénomènes complexes

Les modèles asymptotiques bidimensionnels et unidimensionnels sont des approximations mathématiques qui servent à étudier les phénomènes qui se produisent dans des systèmes tridimensionnels complexes. Ces modèles simplifiés sont obtenus à partir d'une simplification des équations mathématiques qui régissent le comportement des systèmes tridimensionnels.

L'idée derrière ces modèles est que dans de nombreux cas, certains phénomènes se produisent principalement dans une direction ou un plan spécifique et ont une influence limitée dans les autres directions. Par conséquent, en négligeant les variations dans les directions

### I.3. Avantages des modèles asymptotiques pour l'étude de phénomènes complexes

---

perpendiculaires, on peut simplifier les équations mathématiques afin d'obtenir un modèle unidimensionnel ou bidimensionnel plus facile à étudier.

Ces modèles simplifiés peuvent être dérivés à partir d'un modèle tridimensionnel en utilisant des techniques mathématiques telles que l'analyse asymptotique, qui permet de déterminer le comportement des solutions des équations lorsque certaines variables tendent vers des limites particulières.

Il convient de noter que ces modèles simplifiés ne sont que des approximations et peuvent ne pas être précis dans toutes les situations. Il est donc important de comprendre leurs limites et leurs hypothèses simplificatrices lors de leur utilisation pour étudier des phénomènes dans des systèmes tridimensionnels réels.

Des résultats de justification pour les modèles asymptotiques bidimensionnel et unidimensionnel en ce qui concerne le ferromagnétisme sans magnétostriction ont déjà été obtenus. G. Carbou (voir [15]) a montré que, dans le cas d'une plaque mince, le champ démagnétisant se localise et se comporte comme une anisotropie planaire. Des modèles unidimensionnels pour les fils rectilignes à section circulaire et incurvés à section constante le long du fil ont été développés respectivement par G. Carbou et S. Labbé dans [22], et par V. Slatiskov et C. Sonnenberg dans [52]. Une modèle bidimensionnel a été obtenu grâce à la méthode de  $\Gamma$ -convergence par A. Desimone, R. V. Kohn, S. Muller et F. Otto dans [31].

Les modèles asymptotiques bidimensionnels et unidimensionnels du ferromagnétisme présentent plusieurs avantages en comparaison avec les modèles tridimensionnels complets. Voici certains de ces avantages :

- Simplification des équations : Les modèles unidimensionnels et bidimensionnels permettent de simplifier de façon significative les équations qui décrivent le comportement magnétique du système, ce qui facilite la résolution des équations et permet une analyse plus rapide et plus efficace des phénomènes étudiés.
- Réduction des coûts de calcul : Les modèles unidimensionnels et bidimensionnels nécessitent moins de ressources de calcul que les modèles tridimensionnels complets, ce qui permet d'utiliser plus efficacement les ressources informatiques et de réduire les coûts associés.
- Compréhension simplifiée : Les modèles unidimensionnels et bidimensionnels permettent une meilleure compréhension visuelle des phénomènes étudiés par la réduction de la complexité spatiale du système. Cela facilite la compréhension des comportements magnétiques et permet de mettre en évidence les aspects les plus pertinents du ferromagnétisme.

**Utilisation industrielle de plaques et fils ferromagnétique avec magnétostriction**

Les plaques et fils ferromagnétiques avec magnétostriction sont utilisés dans plusieurs applications industrielles à l'échelle microscopique, telles que :

1. Capteurs de déplacement : Les plaques et fils ferromagnétiques peuvent être utilisés dans les capteurs de déplacement afin de mesurer les variations de distance entre deux objets. La magnétostriction est utilisée pour convertir les changements de distance en variations de champ magnétique (voir le cite <https://stroysystems.ru/fr/lighting/the-principle-of-operation-of-inductive-displacement-sensors-motion-sensors.html>).
2. Capteurs de champ magnétique : Les fils ferromagnétiques avec magnétostriction peuvent être utilisés comme capteurs de champ magnétique. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué sur le fil, sa longueur et sa résistance électrique changent. Ces changements peuvent être détectés par des circuits électroniques et servent à mesurer le champ magnétique [55].
3. Transducteurs : Les plaques et fils ferromagnétiques avec magnétostriction peuvent être utilisés comme transducteurs pour convertir une énergie d'un type en une autre. Par exemple, ils peuvent être utilisés pour convertir une énergie mécanique en énergie électrique ou inversement [45].
4. Transducteurs de pression : Les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction peuvent être utilisées comme transducteurs de pression pour mesurer les changements de pression dans les systèmes hydrauliques et pneumatiques. Les variations de pression induisent des variations de champ magnétique, qui sont mesurées pour déterminer la pression (<https://www.waycon.fr/produits/capteurs-de-systemes-hydrauliques-pneumatiques/>).
5. Dispositifs de stockage de données : Les plaques et fils ferromagnétiques avec magnétostriction peuvent être utilisés dans les dispositifs de stockage de données, tels que les disques durs. Les variations de champ magnétique induites par la magnétostriction peuvent être utilisées pour l'enregistrement et la lecture des données stockées sur le disque dur ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Applications\\_du\\_magn%C3%A9tisme](https://fr.wikipedia.org/wiki/Applications_du_magn%C3%A9tisme))).
6. Actionneurs : Les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction peuvent également être utilisées comme actionneurs pour effectuer des mouvements mécaniques précis. Lors de l'application d'un champ magnétique, la plaque subit une déformation, ce qui peut être utilisé pour entraîner un système mécanique. Cette technologie est utilisée dans les micro-actionneurs et les micropompes. De même, les fils ferromagnétiques avec magnétostriction peuvent également être utilisés comme actionneurs dans les systèmes microscopiques. En appliquant un courant électrique sur le fil, il subit une déformation qui peut servir à conduire un système mécanique [27].

## I.4 Problèmes étudiés et résultats obtenus

Le premier objectif de cette thèse est d’obtenir et de justifier des modèles 2d (respectivement 1d) pour des plaques fines (respectivement des nanofils) de matériau ferromagnétique prenant en compte la magnétostriction. Afin de tenir compte des contraintes appliquées aux objets étudiés, on partira du modèle tridimensionnel (I.2.4)-(I.2.5) avec conditions au bord mixtes : encastrement ( $u = 0$ ) sur une partie du bord et force appliquée ( $\sigma \cdot n = f$ ) sur l’autre partie du bord. Notons que dans [16], les auteurs étudient le même système (I.2.4)-(I.2.5) avec des conditions d’encastrement sur tout le bord. D’une part, les forces appliquées ne sont pas prises en compte, et d’autre part, les modèles 1d et 2d obtenus dans ce cas ne tiennent plus compte de la magnétostriction puisque le déplacement  $u$  est réduit à zéro à la limite.

Dans le Chapitre II, l’existence de solutions faibles pour cette équation avec des conditions mixtes au bord sera démontrée. Ensuite, un modèle bidimensionnel de plaque mince ferromagnétique sera dérivé lorsque l’épaisseur du domaine tend vers zéro. Le modèle obtenu ne tient pas compte de la troisième composante de la déformation, puisque dans le régime étudié, la magnétisation n’influence pas les déformations normales. De plus, un modèle unidimensionnel de nanofil ferromagnétique sera dérivé lorsque le rayon du fil tend vers zéro. Ce modèle caractérise les déformations longitudinales seulement. Comme observé dans [15] et [13], le champ démagnétisant est local dans les modèles asymptotique bidimensionnel et unidimensionnel alors que ce n’est pas le cas dans le modèle tridimensionnel.

Afin de caractériser la déformation dans la direction normale pour le modèle asymptotique bidimensionnel et dans les directions transverses pour le modèle asymptotique unidimensionnel, il a été nécessaire de partir du modèle tridimensionnel quasi-stationnaire de l’équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction. Pour cela, dans le Chapitre III de cette thèse, on va dériver un modèle quasi-stationnaire en utilisant une méthode de moyenne temporelle appropriée. Ensuite, on va utiliser le cas isotrope du 4-tenseur  $\lambda^e$  pour caractériser la déformation dans les directions requises pour les modèles bidimensionnel et unidimensionnel. En outre, le modèle unidimensionnel permet d’étudier la stabilité pour certaines solutions statiques, et on va également étudier la convergence numérique pour ce modèle.

Le modèle quasi stationnaire obtenu n’est pas physique. En effet, pour l’obtenir, on fait tendre vers zéro une quantité qui n’est pas petite. Par contre, ce modèle a un intérêt mathématique car il permet d’une part de caractériser les déplacements normaux (dans le cas des plaques) et transverses (dans le cas des fils) du déformations. D’autre part, les solutions stationnaires de ce modèle sont les mêmes que celle du système complet, et on est capable d’étudier la stabilité de certaines solutions d’intérêt dans le cadre du modèle quasi stationnaire.

Le dernier chapitre de cette thèse porte sur un travail un peu différent. Dans les nanofils, l’aimantation se structure en domaines, qui sont de larges zones où la magnétisation est



constante, séparés par des murs, qui sont des zones fines de renversement de l'aimantation. Cette propriété permet d'encoder l'information dans les nanofils par la position des murs l'un par rapport à l'autre [47]. La stabilité de ces murs est donc un point crucial pour assurer la pérennité du stockage des informations numériques. Une manière de stabiliser la position des murs est de créer des encoches le long du fil. Ces encoches ont la particularité de fixer le mur et de le retenir si le champ appliqué ne dépasse pas un certain seuil (cf. [26]). Dans le Chapitre IV, on va étudier le comportement des murs soumis à un champ magnétique lorsqu'ils s'éloignent de l'encoche. On va démontrer que la dynamique du mur se rapproche de celle observée en l'absence d'encoche.

#### I.4.1 Existence de solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction et modèles asymptotiques

On considère un domaine ferromagnétique régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que  $\Omega$  est encastré sur une partie du bord notée  $\Gamma_1$  et est soumis à une force surfacique  $f$  sur l'autre partie du bord. On démontre dans le chapitre II qu'il existe  $(m, u)$  solution faible globale en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -2m \wedge H_{eff} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ H_{eff} = \Delta m + h_d(m) + \Psi(m) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u)))m - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)))m, \end{cases} \quad (\text{I.4.1})$$

couplée avec

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(u)) = -\operatorname{div} (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (\text{I.4.2})$$

et avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \partial_n m = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(t, x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1, \\ (\lambda^e : \varepsilon(u))n - (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))n = f \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2. \end{cases} \quad (\text{I.4.3})$$

Ce résultat généralise au cas de conditions mixtes au bord le résultat obtenu dans [16] avec des conditions d'encastrement au bord. On obtient aussi une inégalité d'énergie cruciale pour obtenir des estimations uniformes.

**I.4.1.1 Modèle bidimensionnel de plaque mince ferromagnétique :**

On considère une plaque mince  $\Omega = \omega \times ]-\eta, \eta[$  de matériau ferromagnétique d'épaisseur  $2\eta$ . On suppose que  $\partial\omega = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , avec  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ . La plaque est encastrée sur  $\mathcal{C}_1 \times ]-\eta, \eta[$ , une force  $h$  est appliquée sur  $\mathcal{C}_1 \times ]-\eta, \eta[$  et sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque il y a des forces appliquées  $g^+$  et  $g^-$  respectivement. Alors, la solution  $(m^\eta, u^\eta)$  du modèle (I.4.1)-(I.4.2)-(I.4.3) converge vers une limite noté  $(M, \tilde{u})$  lorsque  $\eta$  tends vers zéro et  $(M, \tilde{u}_T)$  vérifie le modèle asymptotique bidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge H_{eff}(M) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \omega \\ H_{eff}(M) = \Delta M - (M, \vec{e}_3)\vec{e}_3 + \Psi(M) + (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A}))M - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)))M, \end{cases}$$

où  $\bar{A}$  est un 2-tenseur symétrique satisfaisant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}_T}{\partial t^2} - \tilde{\text{div}}(\lambda^e : \bar{A}) = -\frac{1}{2}(g_T^+ + g_T^-) - \tilde{\text{div}}(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \omega, \\ \bar{A}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_T) & \text{pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \\ (\lambda^e : \bar{A})_{i3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \omega, \\ \tilde{u}_T(0, \cdot) = (u_0)_T(\cdot) & \text{sur } \omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_T}{\partial t}(0, \cdot) = (u_1)_T(\cdot) & \text{sur } \omega, \\ (Q(\lambda^e : \bar{A}) - Q(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) \cdot \nu = h_T & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_2, \end{cases}$$

où  $\tilde{u}_T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ ,  $\nu$  est la normale sur  $\mathcal{C}_2$ ,  $(u_0)_T \in H^1(\omega)$  tel que  $(u_0)_T = 0$  sur  $\mathcal{C}_2$ ,  $(u_1)_T \in L^2(\omega)$ ,  $\tilde{\text{div}}(S)$  et  $Q(S)$ , si  $S$  est un 2-tenseur, définissent par : pour  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ ,

$$\left( \tilde{\text{div}}(S) \right)_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 \partial_\beta S_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad (Q(S))_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}. \quad (\text{I.4.4})$$

On remarque que les forces appliquées sur les deux faces de la plaque apparaissent comme un terme source dans le modèle bidimensionnel alors qu'elles sont modélisées par des conditions au bord dans le modèle tridimensionnel.

Ce modèle bidimensionnel décrit le comportement de la magnétisation et de la partie tangentielle de la déformation. Dans ce régime, les déformations normales n'influent pas sur la magnétisation.

### I.4.1.2 Modèle unidimensionnel de nanofil ferromagnétique :

On considère maintenant un fil ferromagnétique  $\Omega = ]0, L[ \times B_2(0, \eta)$ . On suppose que le fil est encastrée à son extrémité  $\{0\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , qu'une force  $F\vec{e}_1$  est appliquée sur l'autre extrémité  $\{L\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , et qu'il est aussi soumis à une force  $f$  sur sa surface  $]0, L[ \times S^1(0, \eta)$ . Dans ce cas, la solution  $(m^n, u^n)$  de (I.4.1)-(I.4.2)-(I.4.3) converge vers une limite noté  $(M, \bar{u})$  lorsque le rayon du fil tend vers zéro et  $(M, \bar{u})$ , dans le cas isotrope de  $\lambda^e$  (I.2.3), vérifie le modèle asymptotique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge \tilde{H}_{eff}, \\ \tilde{H}_{eff} = \partial_{11}M + \Psi(M) + (M \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\lambda^m : \mathcal{U})M \end{cases}$$

couplé avec

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} - E\partial_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1 - E\partial_x(\lambda^m : M \otimes M)_{11} & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L), \\ \bar{u}_1(0, x) = (u_0)_1(x) & \text{sur } (0, L), \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}(0, x) = (u_1)_1(x) & \text{sur } (0, L), \\ \bar{u}_1(t, 0) = 0 & \forall t, \\ \partial_x \bar{u}_1(t, L) = \frac{F}{E} + (\lambda^m : M \otimes M)_{11}(t, L) & \forall t. \end{cases}$$

où  $\partial_{11}\cdot$  représente la dérivée seconde,  $(u_0)_1 \in H^1(0, L)$  tel que  $(u_0)_1(0) = 0$ ,  $(u_1)_1 \in L^2(\omega)$  et  $\mathcal{U}$  est un 2-tenseur donné par :

$$\mathcal{U}_{11} = E(\partial_1 \bar{u}_1 - (\lambda^m : M \otimes M)_{11}) \text{ et } \mathcal{U}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}.$$

On remarque que dans ce régime, seule l'élongation du fil a une influence sur la magnétisation.

### I.4.2 Modèle quasi stationnaire et modèles équivalents asymptotiques

Le couplage de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec l'équation des ondes élastiques ne nous a pas permis de caractériser complètement les modèles asymptotiques 1d et 2d. On va considérer un modèle simplifié couplant l'équation de (I.4.1) avec l'équation statique de l'élasticité.

Ce modèle est obtenu par des méthodes de moyennisation en temps en faisant tendre  $\rho$  vers zéro. Il est décrit par le couplage suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -2m \wedge H_{eff} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ H_{eff} = \Delta m + h_d(m) + \Psi(m) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u)))m - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)))m, \end{array} \right. \quad (\text{I.4.5})$$

couplée avec

$$\operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(u)) = \operatorname{div} (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) \text{ dans } \Omega, \quad (\text{I.4.6})$$

et avec les conditions aux limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_n m = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(t, x) = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ (\lambda^e : \varepsilon(u))n - (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))n = f \text{ sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (\text{I.4.7})$$

Comme déjà dit ce modèle n'est pas physique, mais ses solutions stationnaires le sont, puisqu'elles sont les mêmes que celles du couplage initial (I.4.1)-(I.4.2)-(I.4.3). De plus, on va pouvoir pour ce modèle caractériser complètement les modèles de plaque mince et de nanofil dans le cas isotrope pour le tenseur  $\lambda^e$ .

#### I.4.2.1 Modèle bidimensionnel de plaque mince :

Comme dans le cas précédent, on prend une plaque ferromagnétique sous la forme  $\Omega = \omega \times ]-\eta, \eta[$ , tel que  $\partial\omega = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . On suppose que  $\Omega$  est encastré sur  $\mathcal{C}_1 \times ]-\eta, \eta[$ , sur  $\mathcal{C}_2 \times ]-\eta, \eta[$  on a une force appliquée  $h$  et sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque on a des forces appliquées  $g^+$  et  $g^-$  respectivement. Alors la solution  $(m^\eta, u^\eta)$  de (I.4.5)-(I.4.6)-(I.4.7) converge vers une limite notée  $(M, \tilde{u})$  lorsque l'épaisseur du domaine tend vers zéro, et  $(M, \tilde{u}_T)$  vérifie le modèle asymptotique bidimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge H_{eff}(M) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \omega \\ H_{eff}(M) = \Delta M - (M, \vec{e}_3)\vec{e}_3 + \Psi(M) + (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A}))M - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)))M, \end{array} \right.$$

où  $\bar{A}$  est un 2-tenseur symétrique satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\text{div}}(\lambda^e : \bar{A}) + g_T^+ + g_T^- = 2\tilde{\text{div}}(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \omega \\ \bar{A}_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}) \text{ pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\} \\ (\lambda^e : \bar{A})_{i3} = 2(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \omega \\ (Q(\lambda^e : \bar{A}) - Q(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) \cdot n = 2h_T \text{ sur } \mathcal{C}_2, \end{array} \right.$$

où  $\tilde{\text{div}}$  et  $Q$  sont donnés dans (I.4.4).

Dans le cas isotrope de  $\lambda^e$ , la composante normale de  $\tilde{u}$  vérifie l'équation aux dérivées partielles d'ordre 4 suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} \text{div} \left( \tilde{\text{div}}(\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\nabla \tilde{u}_3)) \right) = \frac{1}{2}(g_N^+ + g_N^-) + \text{div}(g_T^+ - g_T^-) & \text{dans } \omega, \\ (\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\nabla \tilde{u}_3))\nu = 0 & \text{sur } \mathcal{C}_2, \\ \tilde{\text{div}}((\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\nabla \tilde{u}_3))) \cdot \nu = -h_N + \frac{1}{2}(g_T^+ - g_T^-) \cdot \nu & \text{sur } \mathcal{C}_2, \\ \tilde{u}_3 = 0 & \text{sur } \mathcal{C}_1, \end{array} \right.$$

où  $\nabla \tilde{u}_3$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$\nabla \tilde{u}_3 = \begin{pmatrix} \partial \tilde{u}_3 / \partial x_1 \\ \partial \tilde{u}_3 / \partial x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière équation caractérise les déplacements normaux à la plaque à la limite quand  $\eta$  tend vers zéro. On observe que ces déformations normales sont décorréliées du micromagnétisme et des déformations transverses.

#### I.4.2.2 modèle unidimensionnel de nanofil :

Comme dans la sous section précédente, on prend un fil ferromagnétique  $\Omega = ]0, L[ \times B_2(0, \eta)$ . On suppose que le fil est encastree à son extrémité  $\{0\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , qu'une force  $F\bar{e}_1$  est appliquée sur l'autre extrémité  $\{L\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , et qu'il est aussi soumis à une force  $f$  sur sa surface  $]0, L[ \times S^1(0, \eta)$ . Alors la solution de modèle quasi stationnaire de (I.4.5)-(I.4.6)-(I.4.7) converge lorsque le rayon du fil tend vers zéro vers une limite  $(M, \bar{A})$ , tel que  $M$  vérifie l'équa-

tion de Landau-Lifschitz-Gilbert suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge \tilde{H}_{eff}, \\ \tilde{H}_{eff} = \partial_{11}M + \Psi(M) + (M \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A}))M - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)))M, \end{cases}$$

et  $\bar{A}$  est obtenue à partir de  $M$  par le modèle suivant :

$$\begin{cases} -\partial_1 ((\lambda^e : \bar{A})_{11} - (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11}) = \bar{f}_1 \text{ dans } L^2(0, L) \\ (\lambda^e : \bar{A})_{\alpha i} = -(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha i} \text{ dans } L^2(0, L) \text{ pour } \alpha = 2, 3 \text{ et } i = 1, 2, 3 \\ ((\lambda^e : \bar{A})_{11} - (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11})(L) = F. \end{cases}$$

avec

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} f(x, y, z) dydz.$$

Donc,

$$(\lambda^e : \bar{A}) = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) + \mathcal{F},$$

avec  $\mathcal{F}$  est un 2-tenseur donné par :

$$\mathcal{F}_{11} = \int_0^x \bar{f}_1(s) ds + F \text{ et } \mathcal{F}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ce qui donne que  $M$  est une solution faible pour

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge \tilde{H}_{eff}(M) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ \tilde{H}_{eff}(M) = \partial_{11}M + \Psi(M) + 1/2(M \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\lambda^m : \mathcal{F})M \\ \mathcal{F}_{11} = \int_0^x \bar{f}_1(s) ds + F \text{ et } \mathcal{F}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \partial_x M(0) = \partial_x M(L) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (\text{I.4.8})$$

Dans le cas isotrope de  $\lambda^e$ , on peut calculer explicitement les déformations dans les directions transverses  $(\bar{u}_2, \bar{u}_3)$  et obtenir :

$$\bar{u}_2(x) = \frac{3}{E} \int_0^x \left[ \int_0^s \left( \tilde{f}_1(L)(\tau - L) + \int_\tau^L \left[ (\tau - r)(\partial_x \tilde{f}_1(r) + \bar{f}_2(r)) \right] dr \right) d\tau \right] ds \quad (\text{I.4.9})$$

et

$$\bar{u}_3(x) = \frac{3}{E} \int_0^x \left[ \int_0^s \left( \tilde{f}_1(L)(\tau - L) + \int_\tau^L \left[ (\tau - r)(\partial_x \tilde{f}_1(r) + \bar{f}_3(r)) \right] dr \right) d\tau \right] ds, \quad (\text{I.4.10})$$

avec

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} y f_1 dy dz \quad \text{et} \quad \bar{f}_1 = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} z f_1 dy dz$$

On se place maintenant dans le cas où le fil est soumis à son extrémité à une force dans la direction du fil et où le 4-tenseur  $\lambda^{\text{m}}$  vérifie :

$$\forall S \text{ symétrique, } (\lambda^{\text{m}} : S) = \alpha S + (1 - \alpha) \text{tr}(S) I_3, \quad \text{où } \alpha \in ]0, 1[,$$

le modèle (I.4.8) devient donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -2m \wedge \tilde{H}_{eff}(m) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ \tilde{H}_{eff}(m) = \partial_{11} m + (1/2 + F)(m \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1, \\ \partial_x m(0) = \partial_x m(L) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (\text{I.4.11})$$

On va étudier la stabilité, selon la valeur de  $F$ , des solutions statiques constantes égales à  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .

Si  $1/2 + F > 0$ , la solution statique  $\vec{e}_1$  est asymptotiquement stable alors que  $\vec{e}_2$  est instable.

Si  $1/2 + F < 0$ ,  $\vec{e}_1$  est instable alors que  $\vec{e}_2$  est stable et asymptotiquement stable modulo rotation d'axe  $\vec{e}_1$ , du fait de l'invariance du modèle par rotation autour de l'axe  $\vec{e}_1$ .

Dans le cas critique  $1/2 + F = 0$ , les deux solutions sont stables et asymptotiquement stable modulo rotation, le système (I.4.11) étant alors invariant par rotation.

Pour le modèle (I.4.8), on propose un schéma numérique implicite en temps, et utilisant la même discrétisation en espace que dans [3]. On montre la convergence numérique de ce schéma.

### I.4.3 Stabilisation des murs loin de l'encoche pour des nanofils ferromagnétiques

On considère un nanofil ferromagnétique de longueur infinie avec une encoche symétrique centrée en zéro, en présence d'un champ magnétique appliqué de la forme  $H_a(t, x) = -h(t) \vec{e}_1$ . La variation de la magnétisation  $m$  est décrite par le modèle asymptotique unidimensionnel

de Landau-Lifshitz suivant (cf. [14]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ H_e = \partial_{xx}m + \frac{s'}{s}\partial_x m + (m \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - h(t)\vec{e}_1, \end{cases} \quad (\text{I.4.12})$$

avec  $s : \mathbb{R} \rightarrow [\rho_1, 1] \subset \mathbb{R}^{*,+}$ , est proportionnel à l'aire de la section du fil, où  $0 < \rho_1 < 1$  (voir figure I.2).

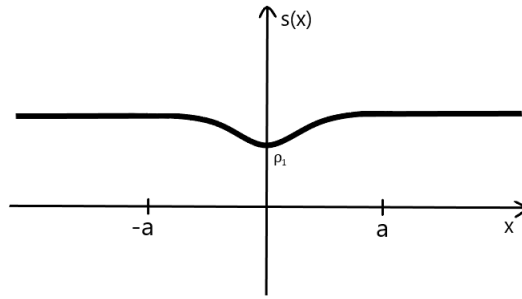


FIGURE I.2 – Fonction  $s(x)$

En l'absence d'encoche, on considère le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e - m \wedge (m \wedge H_e) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ H_e = \partial_{xx}m + (m \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - h(t)\vec{e}_1. \end{cases} \quad (\text{I.4.13})$$

Pour  $h = 0$ , une configuration statique à un mur séparant un domaine où  $m(x) \approx -\vec{e}_1$  quand  $x$  est très négatif d'un domaine où  $m(x) \approx +\vec{e}_1$  quand  $x$  est très positif est décrite par le profil

$$M_0(x) = \begin{pmatrix} \tanh x \\ \frac{1}{\cosh x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que (I.4.13) étant invariant par translation en  $x$  et par rotation autour de l'axe du fil,  $x \rightarrow \mathbf{R}_\varphi M_0(x - \sigma)$  est encore solution statique de (I.4.13) avec  $h = 0$ , où

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$



Lorsque  $h \neq 0$ , la solution de (I.4.13) avec  $m(0, x) = M_0(x)$  comme donnée initiale est :

$$x \longrightarrow \mathbf{R}_{-H(t)}M_0(x - H(t)), \quad \text{où } H(t) = \int_0^t h(s)ds. \quad (\text{I.4.14})$$

Lorsqu'une encoche est présente (sans certaines hypothèses sur  $s$ , voir [26]), une solution statique à un mur localisé dans l'encoche existe pour  $h$  constant assez petit. Autrement dit, l'encoche retient le mur même quand le champ appliqué est non nul (sous condition de petitesse). Il est aussi montré que pour  $h$  assez grand, une telle solution n'existe pas, ce qui illustre qu'un champ magnétique assez fort 'pousse' le mur en dehors de l'encoche. On étudie dans la dernière partie de la thèse le comportement du mur lorsqu'il est loin de l'encoche, et on montre sous certaines hypothèses sur  $h$  (vérifiées par exemple s'il existe  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$  assez petits tel que  $\forall t, \delta_1 < h(t) \leq \delta_2$ ) que plus le mur s'éloigne de l'encoche, puis il se comporte comme la solution (I.4.14), c'est-à-dire que sa dynamique n'est plus influencée par la présence de l'encoche.



---

---

# CHAPITRE II

---

## MODÈLE NON-STATIONNAIRE DE L'ÉQUATION DE LANDAU-LIFSCHITZ-GILBERT AVEC MAGNÉTOSTRICTION

### Sommaire

---

II.1	Introduction . . . . .	27
II.2	Outils pour l'analyse fonctionnelle et l'algèbre tensorielle. . . . .	29
II.2.1	Analyse fonctionnelle . . . . .	29
II.2.2	Calcul tensoriel . . . . .	31
II.2.3	Inégalité de Korn . . . . .	33
II.3	Existence de solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction . . . . .	35
II.3.1	Rappel du modèle . . . . .	35
II.3.2	Système pénalisé . . . . .	39
II.3.3	Passage à la limite dans le système pénalisé (II.3.8) . . . . .	65
II.4	Plaque mince ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	70
II.4.1	Modèle tridimensionnel de plaque ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	70
II.4.2	Modèle redimensionné . . . . .	72
II.4.3	Borne uniforme et passage à la limite lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro . . . . .	75
II.5	Fil ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	85
II.5.1	Modèle tridimensionnel de fil ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	85

II.5.2 Passage à la limite dans les formulations faibles lorsque le rayon du fil  
tend vers zéro . . . . . 92

Dans ce chapitre, on va travailler sur le modèle tridimensionnel de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction, lorsque le matériau ferromagnétique est encastré sur une partie du bord et est soumis sur l'autre partie à une force extérieure appliquée. On justifiera également par analyse asymptotique un modèle bidimensionnel de plaque ferromagnétique lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro et un modèle unidimensionnel de fil ferromagnétique lorsque le diamètre du fil tend vers zéro.

## II.1 Introduction

On considère un domaine ferromagnétique régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On divise la frontière de  $\Omega$  en deux parties

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

tel que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$  et la mesure de surface de  $\Gamma_1$  est non nulle. On définit l'espace  $V(\Omega)$  par

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Le moment magnétique  $m$  et la déformation  $u$  vérifient l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -2m \wedge H_{eff} & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ H_{eff} = \Delta m + h_d(m) + \Psi(m) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u)))m - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)))m, \end{cases} \quad (\text{II.1.1})$$

couplée avec l'équation des ondes élastiques

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(u)) = -\operatorname{div} (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (\text{II.1.2})$$

où :

- le champ démagnétisant  $h_d(m)$  est calculé à partir de  $m$  en résolvant les équations statiques de Maxwell couplées à la loi de Faraday (pour plus de détails, voir la section II.3.1.1) :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (h_d(m) + \bar{m}) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} h_d(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (\text{II.1.3})$$

où  $\bar{m}$  est l'extension de  $m$  par zéro en dehors de  $\Omega$ .

- Le terme d'anisotropie  $\Psi(m)$  satisfait :  $\Psi(m) = \nabla\Phi(m)$ , où  $\Phi$  est une forme quadratique

positive :  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Le tenseur de déformation  $\varepsilon(u)$  est donné par  $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u^i / \partial x_j + \partial u^j / \partial x_i)$ .
- $\lambda^e$  et  $\lambda^m$  sont deux 4-tenseurs symétriques positifs.
- $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$  est une constante indépendante de la déformation. Dans la suite du chapitre, on prend  $\rho = 1$ .

On suppose que le domaine  $\Omega$  est encastré sur  $\Gamma_1$  et qu'une force surfacique  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$  est appliquée sur  $\Gamma_2$ , ce qui donne les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t=0) = m_0 \text{ dans } \Omega, \\ u(t=0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} m = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(t, x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1, \\ (\lambda^e : \varepsilon(u))n - (\lambda^m : (m \otimes m))n = f \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (\text{II.1.4})$$

tel que  $m_0 \in H^1(\Omega; S^2)$ ,  $u_0 \in V(\Omega; \mathbb{R}^3)$  et  $u_1 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ .

**Remarque II.1.1.** *Les notations et définitions habituelles concernant le calcul du tenseur sont rappelées dans la Sous-section II.2.2.*

Ce chapitre est organisé comme suit : la deuxième section présente un rappel pour les outils de l'analyse fonctionnelle utilisés dans ce chapitre, quelques éléments utiles du calcul tensoriel et l'inégalité de Korn.

Dans la troisième section, on va établir le théorème de l'existence de solution faibles pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction soumis à des conditions mixtes aux bords. On va prouver ce théorème en utilisant la méthode due à Alouges et Soyeur [6] et généralisée dans [18]. Premièrement, on va prouver l'existence de solutions pour un système pénalisé, dans lequel la contrainte de saturation est relaxée. Ensuite, on prend la limite quand la constante de pénalisation tend à zéro. Dans [16], l'existence globale pour (II.1.1)-(II.1.2) est obtenue dans le cas d'un domaine encastré, c'est-à-dire avec  $u = 0$  sur  $\Omega$ . La preuve est très proche de la preuve dans [16].

Dans les quatrième et cinquième sections, on va dériver par analyse asymptotique un modèle bidimensionnel de plaque ferromagnétique lorsque l'épaisseur du domaine tend vers

zéro et un modèle unidimensionnel lorsque le rayon du fil tend vers zéro. Afin de travailler sur un domaine fixe, on utilise un redimensionnement adapté qui permet de passer à la limite dans l'équation après changement de variable.

## II.2 Outils pour l'analyse fonctionnelle et l'algèbre tensorielle.

Au début de cette section, on va rappeler le Théorème de Cauchy-Lipschitz et le Lemme d'Aubin-Simon. Ensuite, on va présenter quelques éléments de calcul tensoriel. Finalement, on rappelle l'inégalité de Korn pour écrire la norme utilisée pour mesurer la déformation.

### II.2.1 Analyse fonctionnelle

**Théorème II.2.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz :**

On considère une fonction  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , on considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ainsi, il existe une unique solution maximale  $(]a, b[, Y)$ , où  $Y \in \mathcal{C}^1(]a, b[; \mathbb{R}^n)$  et  $]a, b[$  est l'intervalle maximum d'existence.

(i) Si  $b < +\infty$ , alors  $\|Y(t)\| \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow b$ .

(ii) **Critère de globalité :** si  $Y$  est bornée sur tout intervalle borné  $[t_0, b[$ , avec  $t_0 \in ]a, b[$ , alors  $b = +\infty$ .

**Théorème II.2.2.** Soit  $p$  une constante vérifiant :  $1 \leq p \leq +\infty$ , et soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, toute suite de Cauchy dans  $L^p(\Omega)$  admet une sous suite convergente presque partout dans  $\Omega$ . (voir [1]).

**Lemme II.2.3. Lemme d'Aubin-Simon**

Soient  $V, E, F$  trois espaces de Banach, avec  $V \subset E \subset F$  et  $V$  s'injecte dans  $E$  de manière compacte. Soit  $p, q \in [1, +\infty]$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une famille bornée dans  $W^{1,p}(0, T; F)$  et dans  $L^q(0, T; V)$ . Alors,  $\mathcal{A}$  est d'adhérence compacte dans  $\mathcal{C}^0(0, T; F) \cap L^q(0, T; E)$ . (voir [17] théorème II.5.16)

**Théorème II.2.4.** Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe et soit  $g \in (L^2(\Omega))^3$  vérifiant

$$\operatorname{rot} g = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors, il existe  $v \in H^1(\Omega)$  tel que

$$g = \nabla v.$$

*Preuve.* Voir [33], Chapitre I, Théorème 2.3. □

**Théorème II.2.5.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $(U_m)_m$  une suite qui converge faiblement vers  $U$  dans  $L^2(0, T; H)$  et vérifie :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|U_m(t)\|_H \leq C,$$

avec  $C$  est une constante positive. Alors, pour presque tout  $t$ ,

$$\|U(t)\|_H \leq C.$$

*Preuve.* Soit  $(U_m)_m$  une suite bornée dans  $L^\infty(0, T; H)$  qui converge faiblement vers  $U$  dans  $L^2(0, T; H)$ . Donc, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $t < T$

$$\|U_m(t)\|_H \leq C,$$

donc, il existe  $W(t)$  dans  $H$  tel que  $(U_m(t))_m$  admet une sous suite noté aussi  $(U_m(t))_m$ , tel que

$$U_m(t) \rightharpoonup W(t) \text{ dans } H \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Alors,

$$\langle U_m(t), v \rangle_{H \times H'} \rightarrow \langle W(t), v \rangle_{H \times H'} \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

pour tout  $v$  dans  $H'$ , où  $H'$  est le dual de  $H$ . De plus,

$$|\langle U_m(t), v \rangle_{H \times H'}| \leq \|U_m(t)\|_H \|v\|_{H'} \leq C \|v\|_{H'}$$

Donc, par le théorème de la convergence dominée, on a

$$\int_0^T \langle U_m(t), v \rangle_{H \times H'} \rightarrow \int_0^T \langle W(t), v \rangle_{H \times H'}.$$

Par ailleurs,

$$\int_0^T \langle U_m(t), \varphi \rangle_{H \times H'} \rightarrow \int_0^T \langle U(t), \varphi \rangle_{H \times H'}$$

pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H')$ , en particulier pour  $v \in H'$ . Donc, l'unicité de la limite donne  $W = U$  et

$$\|U(t)\|_H = \|W(t)\|_H \leq \liminf \|U_m(t)\|_H \leq C \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

□

### II.2.2 Calcul tensoriel

**Définition II.2.6.** • Soit  $\lambda$  un 4-tenseur  $\lambda = (\lambda_{ijkl})$ . On dit que  $\lambda$  est symétrique si

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl} = \lambda_{ijlk} = \lambda_{klij}.$$

- On dit qu'un 4-tenseur symétrique est positif s'il existe une constante  $\lambda^*$  tel que :

$$\forall \xi^{ij} \text{ symétrique, } \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} \xi^{ij} \xi^{kl} \geq \lambda^* \sum_{ij} (\xi^{ij})^2$$

- Si  $\lambda$  est un 4-tenseur et  $A$  est un 2-tenseur, on note  $\lambda : A$  le 2-tenseur donné par

$$(\lambda : A)_{ij} = \sum_{kl} \lambda_{ijkl} A_{kl}.$$

- Si  $A$  et  $B$  sont deux 2-tenseurs, alors  $A : B$  est un scalaire donné par

$$A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}.$$

- Pour  $(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , alors  $X \otimes Y$  est le 2-tenseur dont les entrées sont donnés par

$$(X \otimes Y)_{ij} = X^i Y^j.$$

- Si  $A$  un 2-tenseur,  $M$  une matrice dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $X$  un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ , alors  $A : M$  est un scalaire dans  $\mathbb{R}$  et  $AX$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ , définis par :

$$A : M = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \cdot M_{ij} \quad \text{et} \quad (AX)^i = \sum_j A_{ij} \cdot X^j.$$

**Proposition II.2.7.** Soient  $\lambda$  est un 4-tenseur symétrique positif,  $A$  et  $B$  deux 2-tenseurs,  $X$  et  $Y$  deux vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ , alors

- (i) Si  $A$  est 2-tenseur symétrique, on a  $(\lambda : A) : A \geq 0$ .
- (ii)  $(\lambda : A) : B = (\lambda : B) : A$ .
- (iii)  $\lambda : X \otimes Y = \lambda : Y \otimes X$ .

**Preuve.** On utilise la symétrie de  $\lambda$  :

- (i) On a  $\lambda$  est positif, alors il existe  $\lambda^*$  tel que

$$(\lambda : A) : A = \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \geq \lambda^* \sum_{ij} (A_{ij})^2 \geq 0.$$



(ii) On a

$$(\lambda : A) : B = \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} A_{kl} B_{ij} = \sum_{ijkl} \lambda_{klij} B_{ij} A_{kl} = (\lambda : B) : A.$$

(iii) De plus,

$$(\lambda : X \otimes Y)_{ij} = \sum_{kl} \lambda_{ijkl} X^k Y^l = \sum_{lk} \lambda_{ijlk} Y^l X^k = (\lambda : Y \otimes X)_{ij}.$$

□

**Lemme II.2.8.** Soit  $\lambda$  un 4-tenseur symétrique,  $A$  un 2-tenseur,  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors,

$$(\lambda : A)X \cdot Y = A : (\lambda : X \otimes Y).$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} (\lambda : A)X \cdot Y &= \sum_{ij=1}^3 (\lambda : A)_{ij} X^j Y^i \\ &= \sum_{ijkl=1}^3 \lambda_{ijkl} A_{kl} X^j Y^i \\ &= \sum_{kl=1}^3 A_{kl} \left( \sum_{ij=1}^3 \lambda_{klij} X^j Y^i \right) \\ &= A : (\lambda : X \otimes Y). \end{aligned}$$

□

**Lemme II.2.9.** Soit  $\lambda$  un 4-tenseur symétrique positif,  $A$  et  $B$  deux 2-tenseurs. Alors,

$$(\lambda : A) : B \leq ((\lambda : A) : A)^{\frac{1}{2}} ((\lambda : B) : B)^{\frac{1}{2}}.$$

*Preuve.* On définit l'espace  $\mathcal{M}_3^s$  par

$$\mathcal{M}_3^s = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; A \text{ est symétrique} \}.$$

Et on définit l'application  $\psi$  par

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_3^s \times \mathcal{M}_3^s &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto (\lambda : A) : B. \end{aligned}$$

Alors,

- $\psi$  est bilinéaire,

- $\psi$  est symétrique, d'après Proposition II.2.7 (ii)
- $\psi(A, A) = (\lambda : A) : A \geq 0$ , d'après Proposition II.2.7 (i)
- Soit  $A \in \mathcal{M}_3^s$  tel que  $\psi(A, A) = 0$ . Alors, il existe  $\lambda^*$  tel que

$$0 = \psi(A, A) = (\lambda : A) : A \geq \lambda^* \sum_{ij} A_{ij}^2,$$

donc,  $A_{ij} = 0 \forall i, j$  et  $A = 0$ .

Par conséquent,  $\psi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_3^s$  et on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\psi(A, B) \leq (\psi(A, A))^{\frac{1}{2}} \cdot (\psi(B, B))^{\frac{1}{2}},$$

pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_3^s$ , d'où la preuve. □

### II.2.3 Inégalité de Korn

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière régulière. Soit  $v \in H^1(\Omega)$ , on définit le 2-tenseur  $\varepsilon(v)$  par

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Alors, il existe une constante  $c(\Omega) > 0$ , tel que (voir [29])

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) + \int_{\Omega} |v|^2 \geq c(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Soit  $\Gamma_0$  une partie de la frontière de  $\Omega$  de mesure surfacique positive. On définit  $V(\Omega)$  par

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

**Lemme II.2.10.** *Il existe  $c_0 > 0$  tel que*

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \geq c_0 \int_{\Omega} |v|^2 \quad \forall v \in V(\Omega). \tag{II.2.1}$$

*Ceci donne que  $\|\cdot\|_V = \left(\int_{\Omega} \varepsilon(\cdot) : \varepsilon(\cdot)\right)^{\frac{1}{2}}$  est une norme sur  $V(\Omega)$ , équivalent à la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\cdot|^2 + |\nabla \cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ , et alors c'est équivalent à la norme  $|\cdot|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ .*

**Proposition II.2.11.** *Soit  $\lambda$  un 4-tenseur symétrique positive. On définit l'application  $l$  par*

$$l : V(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto \left( \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(h)) : \varepsilon(h) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors,  $l$  est une application semi continue inférieure sur  $V(\Omega)$  pour la topologie faible.

*Preuve.* On va démontrer que  $l$  est une application continue et convexe.

- $l$  est bien défini, car  $\lambda$  est positif, donc il existe  $\lambda^*$  tel que, pour tout  $v \in V(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \geq \lambda^* \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0,$$

- $l$  est positif (c'est clair),
- $l$  est continue : Soit  $(v_n)_n$  une suite qui converge vers  $v$  dans  $V(\Omega)$ , donc  $\varepsilon(v_n)$  converge vers  $\varepsilon(v)$  dans  $L^2(\Omega)$ , et alors

$$\int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v_n)) : \varepsilon(v_n) \rightarrow \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v),$$

- $l$  est convexe : Soient  $u, v \in V(\Omega)$ , tel que  $u \neq v$ , alors pour  $t \in ]0, 1[$  on a

$$\begin{aligned} (l(tu + (1-t)v))^2 &= \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(tu + (1-t)v)) : \varepsilon(tu + (1-t)v) \\ &= t^2 \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) + 2t(1-t) \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \\ &\quad + (1-t)^2 \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \\ &\leq t^2 \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) \\ &\quad + 2t(1-t) \left( \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (1-t)^2 \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \quad (\text{d'après Lemme II.2.9}) \\ &= \left[ t \left( \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) \right)^{\frac{1}{2}} + (1-t) \left( \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= (tl(u) + (1-t)l(v))^2, \end{aligned}$$

et  $l$  est positif, donc

$$l(tu + (1-t)v) \leq tl(u) + (1-t)l(v).$$

D'où,  $l$  est semi-continu inférieurement pour la topologie faible. □

**Corollaire II.2.12.** Soit  $L$  une application définie par

$$\begin{aligned} L : V(\Omega) \times V(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(u)) : \varepsilon(v), \end{aligned}$$

### II.3. Existence du solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

---

alors,  $L$  est bilinéaire, symétrie (Proposition II.2.7) et définie positif ( $\lambda$  est positif), donc  $L$  est une produit scalaire sur  $V(\Omega)$  et  $l$ , définie dans Proposition II.2.11, est la norme induite par  $L$ . De plus, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $v \in V(\Omega)$ , on a

$$\lambda^* \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (\lambda : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \leq C \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

donc,  $l(\cdot)$  et la norme  $\|\cdot\|_V$  sont équivalentes sur  $V(\Omega)$ .

## II.3 Existence du solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

### II.3.1 Rappel du modèle

**Définition II.3.1.** On dit que  $(m, u)$  est une solution faible pour (II.1.1)-(II.1.2)-(II.1.4) si

1.  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$  satisfait la contrainte de saturation :

$$|m(t, x)| = 1 \text{ p.p.t. } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

2.  $\frac{\partial m}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,

3.  $m(0, \cdot) = m_0$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ ,

4.  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$  et  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,

5.  $u(0, \cdot) = u_0$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ ,

6. pour tout  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} \right) \chi(t, x) dt dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m \wedge \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \\ -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge (h_d(m) + \Psi(m)) \cdot \chi &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u)))m \\ &- (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))))m) \cdot \chi, \end{aligned}$$

7. pour tout  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(\chi) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2} f \cdot \chi \\ - \int_{\Omega} u_1 \chi(0, x) &= - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) : \varepsilon(\chi), \end{aligned}$$

8. pour tout  $t \geq 0$ , on a l'inégalité de l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}(0),$$

où,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \int_{\Omega} [|\nabla m|^2 + \Phi(m)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) : (\lambda^m : m \otimes m) - 2\varepsilon(u) : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] - \int_{\Gamma_2} f \cdot u \, d\Gamma. \end{aligned}$$

**Remarque II.3.2.** Puisque  $m \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\frac{\partial m}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , alors  $m \in C^0(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$  (cf. [46]) et  $m \in C^0(0, T; H_w^1(\Omega))$  (cf. [10] Lemme II.5.9). Donc, la trace de  $m$  pour  $t = 0$  existe dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$  par exemple. De la même manière,  $u \in C^0(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ .

**Théorème II.3.3.** Soient  $m_0 \in H^1(\Omega; S^2)$ ,  $u_0 \in V(\Omega)$ ,  $u_1 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  and  $f \in L^2(\Gamma_2)$ . Il existe alors  $(m, u)$  une solution faible globale en temps pour (II.1.1)-(II.1.2)-(II.1.4).

L'existence de solutions faibles globales en temps pour (II.1.1)-(II.1.2) est établie dans [16] pour des conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour la déformation, c'est-à-dire  $u = 0$  sur toute la frontière. Avec la même méthode, on aborde des conditions aux limites mixtes pour démontrer le Théorème II.3.3. Notons que ces conditions mixtes au bord permettent d'obtenir des modèles 2d de plaques minces intéressants (cf. Section II.4) alors que le même processus asymptotique pour des conditions d'encastrement sur tout le domaine mince entraîne à la limite que la déformation est nulle sur le modèle asymptotique, et donc que la magnétostriction n'apparaît pas dans le modèle final.

Dans la sous-section suivante, on va discuter quelques propriétés pour les champs démagnétisant  $h_d(m)$ .

### II.3.1.1 Propriétés du champ démagnétisant $h_d$

La magnétisation locale crée un champ magnétique qui s'étend sur l'intégralité du système. Le champ créé est dit démagnétisant parce qu'il a tendance à s'opposer à l'aimantation. En cherchant les solutions stationnaires de l'équation statique de Maxwell (sans charge ni courant), il est possible de déterminer le champ démagnétisant à partir de la distribution  $m$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

de l'aimant en tant que solution au problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} (h_d(m)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} (h_d(m) + \bar{m}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (\text{II.3.1})$$

au sens des distributions, où  $\bar{m}$  est le prolongement de  $m$  par 0 en dehors de  $\Omega$  dans tout  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , on note  $\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^3)$  la transformée de Fourier de  $v$ .

**Proposition II.3.4.** *Soit  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction mesurable, vérifiant la contrainte de saturation  $|m(x)| = 1$  presque pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . Soit  $h_d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une solution du problème (II.3.1). Alors, la transformée de Fourier du champ démagnétisant  $\widehat{h_d(m)}$  est donnée par : pour  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,*

$$\widehat{h_d(m)}(\xi) = -\frac{\xi \cdot \widehat{\bar{m}}(\xi)}{|\xi|^2} \xi$$

*Preuve.* D'une part,  $m$  est mesurable vérifie  $|m| = 1$  et  $\bar{m}$  est le prolongement de  $m$  par zéro, donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\bar{m}|^2 dx = \int_{\Omega} |m|^2 dx = \operatorname{mes}(\Omega) < +\infty.$$

De plus,

$$\operatorname{rot} (h_d(m)) = 0,$$

donc,

$$\operatorname{rot} (\widehat{h_d(m)})(\xi) = 0,$$

d'où,

$$\xi \wedge \widehat{h_d(m)}(\xi) = 0,$$

donc,  $\widehat{h_d(m)}(\xi)$  et  $\xi$  sont colinéaires et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tel que

$$\widehat{h_d(m)}(\xi) = \lambda \cdot \xi. \quad (\text{II.3.2})$$

D'autre part,

$$\operatorname{div} (h_d(m) + \bar{m}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{div} (\widehat{h_d(m)} + \bar{m})(\xi) = 0,$$

donc,

$$\xi \cdot (\widehat{h_d(m)} + \bar{m})(\xi) = 0. \quad (\text{II.3.3})$$

Donc, (II.3.2) avec (II.3.3) donnent

$$\lambda = -\frac{\xi \cdot \widehat{m}(\xi)}{|\xi|^2},$$

et alors,

$$\widehat{h_d(m)}(\xi) = -\frac{\xi \cdot \widehat{m}(\xi)}{|\xi|^2} \xi.$$

□

Par la Proposition II.3.4, on a :

$$\begin{aligned} \|h_d(m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|\widehat{h_d(m)}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \left\| \frac{\xi \cdot \widehat{m}(\xi)}{|\xi|^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\xi \cdot \widehat{m}(\xi)}{|\xi|^2} \xi \right|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi \cdot \widehat{m}(\xi)|^2 \frac{|\xi|^2}{|\xi|^4} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 \cdot |\widehat{m}|^2 \cdot \frac{|\xi|^2}{|\xi|^4} \\ &= \|\widehat{m}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\overline{m}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donc,

$$\|h_d(m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|m\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.3.4})$$

La transformée de Fourier inverse était linéaire et  $\mathcal{C}^0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , alors  $h_d$  est linéaire continue de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et

$$\frac{\partial}{\partial t} h_d(m) = h_d\left(\frac{\partial}{\partial t} m\right) \quad (\text{II.3.5})$$

**Proposition II.3.5.** *L'application  $h_d : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  est autoadjoint et vérifie :  $\forall m \in H^1(\Omega)$ , on a*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 = - \int_{\Omega} m \cdot h_d(m) \quad (\text{II.3.6})$$

**Preuve.** Soit  $u, v \in H^1(\Omega)$  satisfait (II.3.1). Donc, d'après le Théorème II.2.4, il existe  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $H^1(\Omega)$ , tel que

$$h_d(u) = \nabla \varphi \quad \text{et} \quad h_d(v) = \nabla \psi.$$

De plus,

$$\operatorname{div}(h_d(u) + \bar{u}) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(h_d(v) + \bar{v}) = 0,$$

donc,

$$\Delta\varphi = -\operatorname{div}(\bar{u}) \quad \text{et} \quad \Delta\psi = -\operatorname{div}(\bar{v}),$$

ça donne :

$$\langle h_d(u), \bar{v} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \bar{v} = - \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \cdot \operatorname{div}(\bar{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \cdot \Delta\psi = - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \int_{\mathbb{R}^3} h_d(u) \cdot h_d(v),$$

donc,

$$\langle h_d(u), \bar{v} \rangle = -\langle h_d(u), h_d(v) \rangle. \tag{II.3.7}$$

A travers l'échange des rôles de  $u$  et  $v$  dans (II.3.7), on a

$$\langle h_d(v), \bar{u} \rangle = -\langle h_d(v), h_d(u) \rangle = -\langle \bar{v}, h_d(u) \rangle,$$

donc  $h_d$  est autoadjoint. Par ailleurs, si on pose  $u = v = m$  dans (II.3.7), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_d(m) \cdot \bar{m} = - \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2.$$

□

### II.3.2 Système pénalisé

Par [43], il est nécessaire de construire une solution qui vérifie la contrainte de saturation

$$|m(t, x)| = 1 \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega.$$

Pour cela, on va prendre un système pénalisé dans lequel la contrainte de saturation est relaxée et on prend la limite lorsque la constante de pénalisation tend à zéro, pour obtenir une solution qui vérifie cette contrainte. La nouvelle difficulté dans ce cas est que l'énergie provenant de la magnétostriction est non coercive (voir Remarque II.3.11). L'absence de coercivité est compensée par le couplage de la magnétostriction avec le terme de pénalisation (voir Proposition II.3.12). Par ailleurs, la méthode de Galerkin servira à démontrer l'existence de solutions du système pénalisé.

Soient  $m_0 \in H^1(\Omega; S^2)$ ,  $u_0 \in V(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $u_1 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ . On fixe  $\eta > 0$  et on



définit le système pénalisé par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m^\eta}{\partial t} + m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} - 2H_{eff}^\eta + \frac{1}{\eta}(|m^\eta|^2 - 1)m^\eta = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ H_{eff}^\eta = \Delta m^\eta + h_d(m^\eta) + \Psi(m^\eta) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)))m^\eta - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)))m^\eta \\ \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) = -\operatorname{div}(\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ m^\eta(t=0) = m_0, \\ u^\eta(t=0) = u_0, \\ \frac{\partial u^\eta}{\partial t}(t=0) = u_1, \\ \partial_{\mathbf{n}} m^\eta = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u^\eta(t, x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1, \\ ((\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) - (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta))).n = f \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (\text{II.3.8})$$

**Définition II.3.6.** On dit que  $(m^\eta, u^\eta)$  est une solution faible pour le système pénalisé (II.3.8) si :

1.  $m^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,
2.  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,
3.  $m^\eta(0, \cdot) = m_0$ ,
4.  $u^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$  et  $\frac{\partial u^\eta}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,
5.  $u^\eta(0, \cdot) = u_0$ ,
6. pour tout  $T > 0$  et  $w \in L^p(0, T; H^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot w + \int_0^T \int_\Omega (m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t}) \cdot w - 2 \int_0^T \int_\Omega [\nabla m^\eta \cdot \nabla w + h_d(m^\eta) \cdot w] \\ & - 2 \int_0^T \int_\Omega [\Psi(m^\eta) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)))m^\eta - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)))m^\eta] \cdot w \\ & + \frac{1}{\eta} \int_0^T \int_\Omega (|m^\eta|^2 - 1)m^\eta \cdot w = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.3.9})$$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

7. pour tout  $T > 0$  et  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(0, T; V)$

$$\begin{aligned} \int_{0, T \times \Omega} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} - \int_0^T \int_\Omega (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\chi) - \int_\Omega u_1 \chi(0, x) dx + \int_0^T \int_{\Gamma_2} f \cdot \chi \\ = - \int_0^T \int_\Omega (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\chi), \end{aligned} \quad (\text{II.3.10})$$

8. pour tout  $T \geq 0$ , on a l'inégalité d'énergétique suivant :

$$\mathcal{E}^\eta(T) + \frac{1}{4\eta} \int_\Omega (|m^\eta| - 1)^2 + \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\eta(T) = & \int_\Omega [|\nabla m^\eta|^2 + \Phi(m^\eta)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_\Omega [\mathcal{Q}(m^\eta) - 2\varepsilon(u^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) + (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta)] \\ & + \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 - \int_{\Gamma_2} f \cdot u^\eta d\Gamma, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{Q}(m) = (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) : (\lambda^m : m \otimes m)$ . On remarque que  $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  avec

$$\nabla \mathcal{Q}(m) = 4(\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)))m.$$

### II.3.2.1 Première étape : Approximation de Galerkin

Dans les deux propositions suivantes, deux bases Hilbertiennes seront construites sur  $L^2(\Omega)$ .

**Proposition II.3.7.** *L'espace  $L^2(\Omega)$  admet une base hilbertienne  $(e_1, e_2, \dots)$  de vecteur propre de  $-\Delta$  avec des conditions de Neumann homogènes à la frontière :*

$$\begin{cases} -\Delta e_i = a_i e_i \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} e_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On note  $V_N = \text{vect}(e_1, \dots, e_N)$  et par  $P_N$  l'application de la projection orthogonale sur  $V_N$ .

*Preuve.* Soit

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) & \longrightarrow H^1(\Omega) \\ f & \longmapsto U \text{ avec } \begin{cases} -\Delta U + U = f \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} U = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

$T$  est autoadjoint de  $L^2(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ , et comme l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est

compacte, alors  $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est autoadjoint compact. D'où  $L^2(\Omega)$  admet une base hilbertienne  $(e_n)_n$  formé de vecteurs propres de  $-\Delta$ . (voir [11])  $\square$

**Proposition II.3.8.** *On a  $L^2(\Omega)$  admet une base de hilbertienne  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$  de vecteurs propres de  $-\text{div}(\lambda^e : \varepsilon(\cdot))$  avec des conditions mixtes au bord :*

$$\begin{cases} -\text{div}(\lambda^e : \varepsilon(\varphi_j)) = b_j \varphi_j \text{ dans } \Omega, \\ \varphi_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ (\lambda^e : \varepsilon(\varphi_j)) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (\text{II.3.11})$$

On note  $W_N = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  et par  $\Pi_N$  l'application de la projection orthogonale sur  $W_N$ .

*Preuve.* Pour  $g \in L^2(\Omega)$ , on note  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  la solution de :

$$\begin{cases} -\text{div}(\lambda^e : \varepsilon(h)) = g \text{ dans } \Omega, \\ (\lambda^e : \varepsilon(h))n = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (\text{II.3.12})$$

Montrons que le problème (II.3.12) admet une solution unique. On a l'équivalence entre (II.3.12) et la formulation variationnelle : pour tout  $r \in V(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(r) = \int_{\Omega} g \cdot r. \quad (\text{II.3.13})$$

- Premier sens de l'équivalence :

On multiplie la première équation de (II.3.12) par  $r \in V(\Omega)$  et on intègre sur  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g \cdot r &= \int_{\Omega} -\text{div}(\lambda^e : \varepsilon(h))r \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \nabla(r) - \int_{\partial\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h))r \cdot nd\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^3 (\lambda^e : \varepsilon(h))_{ij} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \quad (\text{car } r = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } (\lambda^e : \varepsilon(h))n = 0 \text{ sur } \Gamma_2) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^3 (\lambda^e : \varepsilon(h))_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^3 (\lambda^e : \varepsilon(h))_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{car } \lambda^e \text{ est symétrique}) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(r). \end{aligned}$$

- Deuxième sens de l'équivalence :

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V(\Omega)$ , alors  $\phi = 0$  sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(\phi) = \int_{\Omega} -\operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(h)) \phi,$$

donc

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(h)) \phi = \int_{\Omega} g \cdot \phi,$$

et  $\mathcal{D}(\Omega)$  dense dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$-\operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(h)) = f \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{II.3.14}$$

Si on multiplie (II.3.14) par  $r \in V(\Omega)$  et on intègre sur  $\Omega$ , on obtient par comparaison avec (II.3.13) que  $(\lambda^e : \varepsilon(h))n = 0$  sur  $\Gamma_2$ .

**On définit les opérateurs  $A$  et  $\ell$  par :**

$$\begin{aligned} A : V(\Omega) \times V(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} & \ell : V(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, r) &\longmapsto \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(r) & r &\longmapsto \int_{\Omega} g \cdot r \end{aligned} \quad \text{et}$$

L'opérateur  $A$  est :

- *Bilinéaire* : facile à vérifier.
- *Continu* :

$$\begin{aligned} \|A(h, r)\| &= \left\| \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(r) \right\| \\ &\leq \left\| \left( \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(h) \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(r)) : \varepsilon(r) \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \quad (\text{Lemme II.2.9}) \\ &\leq C \cdot \|h\|_{V(\Omega)} \cdot \|r\|_{V(\Omega)} \quad (\text{Corollaire II.2.12}), \end{aligned}$$

- *Coercif* :

$$\begin{aligned} A(h, h) &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(h)) : \varepsilon(h) \\ &\geq \lambda^{e*} \int_{\Omega} \varepsilon(h) : \varepsilon(h) \quad (\text{car } \lambda^e \text{ est positif et } \varepsilon(h) \text{ est symétrique}) \\ &= \lambda^{e*} \|h\|_{V(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De plus, par le Théorème de Cauchy-Schwarz et le Théorème II.2.10, on a pour  $r \in V(\Omega)$ ,

$$|\ell(r)| = \left| \int_{\Omega} g \cdot r \right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|r\|_{V(\Omega)}.$$

En ce cas, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique  $h \in V(\Omega)$  tel que pour

tout  $r \in V(\Omega)$ ,

$$A(h, r) = \ell(r).$$

Par conséquent, on a l'existence et l'unicité de la solutions du problème (II.3.12).

Maintenant, on définit l'application  $P$  par

$$P : L^2(\Omega) \longrightarrow V(\Omega)$$

$$g \longmapsto h \text{ avec } \begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda^e : \varepsilon(h)) = g \text{ dans } \Omega, \\ (\lambda^e : \varepsilon(h))n = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

$P$  est autoadjoint : Soient  $g, h \in L^2(\Omega)$  et soient  $r, v \in V(\Omega)$  tel que  $P(g) = r$  et  $P(h) = v$ . Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \langle P(g), h \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} r \cdot h = \int_{\Omega} -r \operatorname{div}(\lambda^e : \varepsilon(v)) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) \cdot \nabla r - \int_{\partial\Omega} r \cdot (\lambda^e : \varepsilon(v))n \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(r) \quad (\text{car } r = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } (\lambda^e : \varepsilon(r))n = 0 \text{ sur } \Gamma_2) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(r)) : \varepsilon(v) \quad (\text{Proposition II.2.7}) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(r)) \cdot \nabla v \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda^e : \varepsilon(r)) \cdot v + \int_{\partial\Omega} v \cdot (\lambda^e : \varepsilon(r))n \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} g \cdot v = \langle g, P(h) \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Comme  $V(\Omega)$  s'injecte dans  $L^2(\Omega)$  de manière compacte, alors,  $P : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  est autoadjoint compact, ceci donne que  $L^2(\Omega)$  admet une base hilbertienne  $(\varphi_j)_j$  formé de vecteurs propres de  $P$ .  $\square$

On considère, pour  $N$  fixé, le problème suivant : Trouver  $m_N^n : [0, T_N[ \rightarrow V_N$  et  $u_N^n :$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

$[0, T_N[ \rightarrow W_N$ , tel que  $\forall g_1 \in V_N$  et  $g_2 \in W_N$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} m_N^\eta \cdot g_1 + \int_{\Omega} m_N^\eta \wedge \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \cdot g_1 - 2 \int_{\Omega} H_{eff}^N \cdot g_1 + \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot g_1 = 0 \text{ p.p. } t \in \mathbb{R}^+, \\ H_{eff}^N = \Delta m_N^\eta + h_d(m_N^\eta) + \Psi(m_N^\eta) + (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta))) m_N^\eta - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta))) m_N^\eta, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} u_N^\eta \cdot g_2 + \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(g_2) - \int_{\Gamma_2} f \cdot g_2 = \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \varepsilon(g_2) \text{ p.p. } t \in \mathbb{R}^+, \\ m_N^\eta(t=0) = P_N(m_0), \\ u_N^\eta(t=0) = \Pi_N(u_0), \\ \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t}(t=0) = \Pi_N(u_1), \end{array} \right. \quad (\text{II.3.15})$$

Le problème précédent a été construit en projetant de la première et la troisième équation du système pénalisé (II.3.8) respectivement sur  $V_N$  et  $W_N$ . On utilise le Théorème de Cauchy-Lipschitz dans la proposition suivante afin de démontrer l'existence et l'unicité de solution pour le problème de Galerkin.

**Proposition II.3.9.** *Le problème (II.3.15) admet une unique solution  $(m_N^\eta, u_N^\eta)$  dans  $\mathcal{C}^1(0, T_N; V_N \times W_N)$ , où  $T_N$  est le temps d'existence maximale de la solution.*

**Preuve.** On cherche  $(m_N^\eta, u_N^\eta)$  dans  $V_N \times W_N$ , de façon qu'il existe  $\alpha = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_N(t))$  et  $\beta = (\beta_1(t), \dots, \beta_N(t))$  dans  $\mathbb{R}^N$ , tel que

$$m_N^\eta = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) e_i(x) \text{ et } u_N^\eta = \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \varphi_j(x). \quad (\text{II.3.16})$$

On a  $(e_i)_i$  est une base orthonormée, alors pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \cdot e_i = \frac{d\alpha_i(t)}{dt} := \alpha'_i(t),$$

c'est pourquoi, si on prend  $g_1 = e_i$  dans la première équation de (II.3.15), on obtient

$$\alpha'_i(t) + \sum_{k,l=1}^N \alpha'_l(t) \alpha_k(t) \int_{\Omega} (e_k \wedge e_l) \cdot e_i = 2 \int_{\Omega} H_{eff}^N \cdot e_i - \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot e_i.$$

On définit  $A(\alpha)$  dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  par

$$A_{il}(\alpha) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \int_{\Omega} (e_k \wedge e_l) \cdot e_i,$$

et on définit l'application  $g$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  par

$$\begin{aligned} [g]_i(c, d) = & -c_i a_i + \sum_{j=1}^N c_j \int_{\Omega} (h_d(e_j) + \Psi(e_j)) e_i + \sum_{jk=1}^N c_j d_k \int_{\Omega} (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(\varphi_k))) e_j e_i \\ & - \sum_{jkl=1}^N c_j c_k c_l \int_{\Omega} (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : e_j \otimes e_i))) e_l e_i + \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^N (c_j^2 - 1) c_i, \end{aligned}$$

pour lors,  $[g]_i(c, d)$  est un polynôme de  $2N$  variables, donc  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et

$$[g]_i(\alpha(t), \beta(t)) = \int_{\Omega} H_{eff}^N \cdot e_i - \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot e_i.$$

Par suite, on a

$$\left( Id + A(\alpha) \right) \frac{d\alpha(t)}{dt} = g(\alpha(t), \beta(t)) \quad (\text{II.3.17})$$

On définit l'opérateur  $K^\alpha$  par :

$$\begin{aligned} K^\alpha : \mathbb{R}^N & \rightarrow \mathbb{R}^N \\ \xi & \mapsto (Id + A(\alpha))\xi \end{aligned}$$

L'opérateur  $K^\alpha$  est injectif : Soit  $\xi \in \mathbb{R}^N$  tel que  $K^\alpha(\xi) = 0$ , ceci donne  $(Id + A(\alpha))\xi = 0$ , donc  $\forall i = 1..N$ , on a

$$\xi_i + \sum_{kl} \xi_l \alpha_k \int_{\Omega} (e_k \wedge e_l) \cdot e_i = 0,$$

alors,

$$\int_{\Omega} \sum_j \xi_j e_j \cdot e_i + \int_{\Omega} \left( \sum_k \alpha_k e_k \wedge \sum_l \xi_l e_l \right) \cdot e_i = 0,$$

ainsi,

$$\int_{\Omega} (r + m_N^\eta \wedge r) \cdot e_i = 0,$$

avec  $r \in V_N$  défini par

$$r = \sum_{i=1}^N \xi_i e_i.$$

### II.3. Existence du solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

---

Puisque les  $(e_i)_{i=1..N}$  forment une base de  $V_N$ , alors pour tout  $w \in V_N$ , on a

$$\int_{\Omega} (r + m_N^\eta \wedge r) \cdot w = 0. \quad (\text{II.3.18})$$

Posons  $w = r$  dans (II.3.18), on obtient

$$\int_{\Omega} |r|^2 + (m_N^\eta \wedge r) \cdot r = 0,$$

donc,

$$\int_{\Omega} |r|^2 = 0,$$

donc  $r = 0$  et  $\xi_i = 0 \forall i$ .

L'opérateur  $K^\alpha$  est une application injective définie dans un espace de dimension finie  $\mathbb{R}^N$ , donc  $K^\alpha$  est bijective. Ceci donne que  $K^\alpha$  est dans l'espace  $Gl_N(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}); M \text{ est bijectif}\}$ . de plus, l'application

$$\begin{aligned} Gl_N(\mathbb{R}) &\rightarrow Gl_N(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M^{-1} \end{aligned}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors l'application  $K$  définit par

$$\begin{aligned} K : \mathbb{R}^N &\rightarrow Gl_N(\mathbb{R}) \rightarrow Gl_N(\mathbb{R}) \\ \alpha &\mapsto K^\alpha \mapsto (K^\alpha)^{-1} \end{aligned}$$

est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . D'après (II.3.17), on peut écrire

$$\alpha'(t) = (K^{\alpha(t)})^{-1} (g(\alpha(t), \beta(t))).$$

On a  $(\varphi_j)_j$  est une base orthonormée. Pour  $j \in \{1, \dots, N\}$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2} \cdot \varphi_j = \frac{d^2 \beta_j}{dt^2} := \beta_j''(t).$$

Posons  $g_2 = \varphi_j$  dans la troisième équation de (II.3.15), on obtient

$$\beta_j''(t) = B_j(\alpha(t), \beta(t)),$$



avec  $B_j$  est un polynôme de  $2N$  variables définit par

$$B_j(\alpha, \beta) = - \sum_i \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\beta_i \varphi_i)) : \varepsilon(\varphi_j) + \int_{\Gamma_2} f \cdot \varphi_j \\ + \sum_{ik} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : e_i \otimes e_k)) : \varepsilon(\varphi_j).$$

Par suite,  $\beta''(t) = B(\alpha, \beta)$  où  $B(\alpha, \beta)$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^N$  de composantes  $B_j(\alpha, \beta)$ .

On définit un inconnu  $X$  par

$$X = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \delta(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix},$$

alors,

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

où,

$$F(X) = F \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K^{\alpha(t)})^{-1} (g(\alpha(t), \beta(t))) \\ \delta(t) \\ B(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix}.$$

On note  $\alpha(0) = (\alpha_i(0))_{i=1, \dots, N}$  avec  $(\alpha_i(0))_{i=1, \dots, N}$  sont les coefficients de  $P_N(m_0)$  dans la base  $(e_i)_{i=1, \dots, N}$  et on note  $\beta(0) = (\beta_j(0))_{j=1, \dots, N}$  et  $\delta(0) = (\delta_j(0))_{j=1, \dots, N}$ , avec  $(\beta_i(0))_{i=1, \dots, N}$ , respectivement  $(\delta_j(0))_{j=1, \dots, N}$ , sont les coefficients de  $\Pi_N(u_0)$ , respectivement  $\Pi_N(u_1)$ , dans le base  $(\varphi_j j)_{j=1, \dots, N}$ .

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \\ \delta(0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.3.19})$$

On a  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz [II.2.1](#) et il existe une solution unique  $X$  du problème [\(II.3.19\)](#) dans  $\mathcal{C}^1([0, T_N[; \mathbb{R}^{3N})$ , où  $T_N$  est le temps maximale d'existence de la solution, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution  $(m_N^\eta, u_N^\eta)$  pour le problème [\(II.3.15\)](#).  $\square$

L'égalité énergétique ci-dessous permet de trouver une borne uniforme par rapport à  $N$  pour  $m_N^\eta$  et  $u_N^\eta$ .

**II.3. Existence du solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

**Proposition II.3.10.** *La solution  $(m_N^\eta, u_N^\eta)$  de (II.3.15) vérifie l'égalité suivante : pour tout  $T < T_N$ ,*

$$\mathcal{E}_N^\eta(T) + \frac{1}{4\eta} \int_\Omega (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 + \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \right|^2 = \mathcal{E}_N^\eta(0) + \frac{1}{4\eta} \int_\Omega (|P_N(m_0)|^2 - 1)^2, \quad (\text{II.3.20})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^\eta(t) &= \int_\Omega (|\nabla m_N^\eta|^2 + \Phi(m_N^\eta)) + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_N^\eta)|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega \mathcal{Q}(m_N^\eta) \\ &\quad - \int_\Omega \varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) + \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_\Omega (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta) - \int_{\Gamma_2} f \cdot u_N^\eta d\Gamma. \end{aligned}$$

*Preuve.* Tous les calculs sont licites car les fonctions considérés sont  $\mathcal{C}^\infty$ . En partie **(a)** qui suit, on prend la première équation de II.3.15 et en partie **(b)** on prend la troisième équation de II.3.15.

**(a)** Pour  $T < T_N$ , on prend  $g_1 = \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}(T)$  dans la première équation de (II.3.15), on obtient

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \right|^2 + \int_\Omega (m_N^\eta \wedge \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} - 2 \int_\Omega (H_{eff}^N) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} + \int_\Omega \frac{1}{\eta} (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} = 0. \quad (\text{II.3.21})$$

On a

- $2 \int_\Omega \Delta m_N^\eta \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} = -2 \int_\Omega \nabla m_N^\eta \cdot \nabla \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} + 2 \int_{\partial\Omega} \partial_n m_N^\eta \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}$   
 $= -\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla m_N^\eta|^2 \quad \text{car } m_N^\eta \in V_N \text{ et } \partial_n e_i = 0.$

- $h_d$  est un opérateur linéaire de  $L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ , donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot m_N^\eta &= \int_\Omega \frac{\partial h_d(m_N^\eta)}{\partial t} \cdot m_N^\eta + \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \\ &= \int_\Omega h_d\left(\frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}\right) \cdot m_N^\eta + \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \\ &= 2 \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}, \quad (h_d \text{ est autoadjoint}) \end{aligned}$$

d'où par Proposition II.3.5,

$$-2 \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} = -\frac{d}{dt} \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot m_N^\eta = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_N^\eta)|^2.$$

- $\int_\Omega \frac{1}{\eta} (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} = \int_\Omega \frac{1}{4\eta} \frac{\partial}{\partial t} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 = \frac{1}{4\eta} \frac{d}{dt} \int_\Omega (|m_N^\eta|^2 - 1)^2.$
- $-2 \int_\Omega \Psi(m_N^\eta) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi(m_N^\eta)$ , puisque  $\Psi$  est la différentielle de  $\Phi$ .

- Comme dans le cas formel, on remarque que par symétrie du 4-tenseur  $\lambda^{\mathbf{m}}$  on a

$$2 \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta))) m_N^\eta \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m_N^\eta)$$

avec  $\mathcal{Q}(m) = (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)$ .

- Par le Lemme II.2.8 et Proposition II.2.7(ii), on a

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u_N^\eta))) m_N^\eta \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} &= 2 \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u_N^\eta)) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}) \\ &= 2 \int_{\Omega} \varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t})) \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon(u_N^\eta) : \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)). \end{aligned}$$

Donc, on peut réécrire (II.3.21) et obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \right|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( |\nabla m_N^\eta|^2 + \Phi(m_N^\eta) + \frac{1}{4\eta} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 \right) + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_N^\eta)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m_N^\eta) - \int_{\Omega} \varepsilon(u_N^\eta) : \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)). \end{aligned} \tag{II.3.22}$$

- (b) Pour  $T < T_N$ , on prend  $g_2 = \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t}(t)$  dans la troisième équation de (II.3.15), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} + \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon \left( \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right) - \int_{\Gamma_2} f \cdot \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \\ = \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \varepsilon \left( \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

de plus,

- $\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right|^2$

- Par la symétrie de  $\lambda^{\mathbf{e}}$  on a,

$$\int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon \left( \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta)$$

et

$$\int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \varepsilon \left( \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right) = \int_{\Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(u_N^\eta)$$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

- $f$  est indépendant du temps donc,

$$\int_{\Gamma_2} f \cdot \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} d\Gamma = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} f \cdot u_N^\eta d\Gamma.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right|^2 + \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta) \right] - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} f \cdot u_N^\eta \\ = \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(u_N^\eta). \end{aligned} \quad (\text{II.3.23})$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) &= \varepsilon(u_N^\eta) : \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)), \end{aligned}$$

la somme de (II.3.23) et (II.3.22) donne

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \right|^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{E}_N^\eta + \frac{1}{4\eta} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 = 0. \quad (\text{II.3.24})$$

On intègre sur  $[0, T[$  l'équation (II.3.24) avec  $T < T_N$ , on obtient (II.3.20).  $\square$

**Remarque II.3.11.** On raisonne de la positivité de  $\lambda^e$ , dans l'égalité d'énergie (II.3.15),  $\mathcal{Q}(m_N^\eta)$  et  $(\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta)$  sont positifs ( Proposition II.2.7(i)). Le terme de signe négatif  $-2\varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta))$  peut être contrebalancé par les deux termes de signe corrects, par appliquer le Lemme II.2.9 avec  $\lambda = \lambda^e$ ,  $A = \varepsilon(u_N^\eta)$  et  $B = (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)$ , on a :

$$\varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) \leq \mathcal{Q}(m_N^\eta)^{\frac{1}{2}} \cdot ((\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta))^{\frac{1}{2}}.$$

Au contraire, la partie de l'énergie provenant des termes de magnétostriction est non coercive puisqu'elle ne contrôle pas le terme  $\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2$  si on applique seulement l'inégalité d'Young pour équilibrer le terme de mauvais signe.

**Proposition II.3.12.** Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $T < T_N$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^\eta(T) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 \geq & \|\nabla m_N^\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \lambda^{e*} \|\varepsilon(u_N^\eta)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{1}{8\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 - 2C \text{mes}(\Omega) \\ & - c \|g\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\varepsilon(u_N^\eta)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.25})$$

*Preuve.* Avec le lemme II.2.9 et avec l'inégalité de Young  $ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) \\
 & \leq \int_{\Omega} ((\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta))^{\frac{1}{2}} \cdot ((\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta))^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{4} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta) + (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta) \right) \\
 & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{4} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta) + C \|m_N^\eta\|_{L^4(\Omega)}^4
 \end{aligned} \tag{II.3.26}$$

où  $C$  est une constante positive. De plus, l'application trace de  $H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$  est linéaire continue et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe  $c > 0$  tel que

$$\int_{\Gamma_2} f \cdot u_N^\eta d\Gamma \leq c \|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u_N^\eta\|_{H^1(\Omega)}. \tag{II.3.27}$$

Donc, pour tout  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_N^\eta(T) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 & \geq \|\nabla m_N^\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m_N^\eta) + \\
 & \quad \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 \\
 & \quad - C \|m_N^\eta\|_{L^4(\Omega)}^4 - c \|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u_N^\eta\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, on utilise le fait que  $(|\xi|^2 - 1)^2 \geq \frac{1}{2}|\xi|^4 - 1$ , pour obtenir :

$$C \|m_N^\eta\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq 2C \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 + 2C \text{mes}(\Omega),$$

et si  $\eta$  est petit, tel que  $2C \leq \frac{1}{8\eta}$ , alors,

$$\frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 - C \|m_N^\eta\|_{L^4(\Omega)}^4 \geq \frac{1}{8\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 - 2C \text{mes}(\Omega). \tag{II.3.28}$$

Par l'inégalité de Korn, on a

$$\|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u_N^\eta\|_{H^1(\Omega)} \geq \|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\varepsilon(u_N^\eta)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{II.3.29}$$

En utilisant (II.3.26)-(II.3.27)-(II.3.28) et (II.3.29) on obtient (II.3.25).  $\square$

**Remarque II.3.13.** *L'astuce précédente dans la preuve de Proposition II.3.12 pour absorber le terme de mauvais signe sera réutilisée dans la partie II.3.3.*

### II.3.2.2 Limite dans l'approximation Galerkin

**Proposition II.3.14.** *Le côté droit de l'égalité d'énergie (II.3.20) est majoré par une constante positive  $Q^\eta$ , indépendante de  $N$ .*

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^\eta(0) &= \int_{\Omega} (|\nabla P_N(m_0)|^2 + \Phi(P_N(m_0))) + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(P_N(m_0))|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \mathcal{Q}(P_N(m_0)) \right. \\ &\quad \left. - 2\varepsilon(\Pi_N(u_0)) : (\lambda^e : (\lambda^m : P_N(m_0) \otimes P_N(m_0))) + |\Pi_N(u_1)|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \right) \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} f \cdot \Pi_N(u_0) d\Gamma. \end{aligned}$$

On divise la preuve en deux parties, dans la première partie on va majorer  $\mathcal{E}_N^\eta(0)$  par des termes dépendant de  $N$  et dans la deuxième partie, on va démontrer que ces termes sont bornés uniformément par rapport à  $N$ .

#### Étape 1 :

- On applique le Lemme II.2.9 pour  $A = (\lambda^m : P_N(m_0) \otimes P_N(m_0))$  et  $B = \varepsilon(\Pi_N(u_0))$ , alors

$$\begin{aligned} |(\lambda^e : A) : B| &\leq ((\lambda^e : A) : A)^{\frac{1}{2}} \cdot ((\lambda^e : B) : B)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\lambda^e : A) : A + (\lambda^e : B) : B. \end{aligned}$$

De plus, l'injection de Sobolev  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$  donne

$$\int_{\Omega} \mathcal{Q}(P_N(m_0)) \leq \int_{\Omega} K |P_N(m_0)|^4 \leq K \|P_N(m_0)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq C \|P_N(m_0)\|_{H^1(\Omega)}^4.$$

- D'après (II.3.4),

$$\|h_d(P_N(m_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- $\Phi$  est une forme quadratique non négative, donc,

$$\int_{\Omega} \Phi(P_N(m_0)) \leq C \|P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma_2)$ , on a

$$- \int_{\Gamma_2} f \cdot \Pi_N(u_0) d\Gamma \leq c \|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\Pi_N(u_0)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^\eta(0) &\leq C\|P_N(m_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + C\|P_N(m_0)\|_{H^1(\Omega)}^4 + \|\Pi_N(u_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + c\|f\|_{L^2(\Gamma_2)}\|\Pi_N(u_0)\|_{H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \end{aligned} \quad (\text{II.3.30})$$

**Étape 2 :** On a  $L^2(\Omega) = V_N + V_N^\perp$ , parce que  $P_N$  est une projection orthogonale sur  $L^2(\Omega)$ , puis il existe  $w \in V_N^\perp$  tel que

$$m_0 = P_N(m_0) + w.$$

Puisque  $P_N(m_0)$  est orthogonale à  $w$ , on a par Pythagore :

$$\int_{\Omega} \|m_0\|^2 = \int_{\Omega} |P_N(m_0)|^2 + \int_{\Omega} |w|^2,$$

donc,

$$\int_{\Omega} \|m_0\|^2 \geq \int_{\Omega} |P_N(m_0)|^2$$

De même,  $\Pi_N$  est une projection orthogonale sur  $L^2(\Omega)$ , donc

$$\|\Pi_N(u_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ et } \|\Pi_N(u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} \nabla P_N(m_0) \cdot \nabla P_N(m_0) \\ &= - \int_{\Omega} \Delta P_N(m_0) \cdot P_N(m_0) + \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} P_N(m_0) \cdot P_N(m_0) \\ &= - \int_{\Omega} \Delta P_N(m_0) \cdot m_0, \end{aligned}$$

car  $P_N(m_0) \in V_N$  et  $\partial_{\mathbf{n}} e_i = 0$ , c'est pourquoi  $\partial_{\mathbf{n}} P_N(m_0) = 0$ , et  $V_N$  est stable par  $\Delta$  parce que  $\Delta e_i = -\alpha_i e_i$  et  $P_N$  est autoadjoint, alors

$$\begin{aligned} \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \nabla P_N(m_0) \cdot \nabla m_0 - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} P_N(m_0) \cdot m_0 \\ &\leq \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla m_0\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc,

$$\|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla m_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.3.31})$$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

De la même manière,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \\
&= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) \Pi_N(u_0) + \int_{\partial\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) \Pi_N(u_0) \cdot n d\sigma \\
&= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) u_0,
\end{aligned}$$

car  $\Pi_N(u_0) \in W_N$ , donc  $(\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0)))n = 0$  sur  $\Gamma_2$  et  $\Pi_N(u_0) = 0$  sur  $\Gamma_1$ . De plus,  $W_N$  est stable par  $\operatorname{div} (\lambda^e : \varepsilon(\cdot))$  et  $\Pi_N$  est autoadjoint, alors par le Lemme II.2.9 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \\
&= \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(u_0) \\
&\leq \int_{\Omega} ((\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)))^{\frac{1}{2}} \cdot ((\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left( \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0) \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donc,

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \leq \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0). \quad (\text{II.3.32})$$

Par l'inégalité de Korn (Corollaire II.2.12) et (II.3.32), il existe  $c > 0$  tel que

$$\|\Pi_N(u_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0). \quad (\text{II.3.33})$$

Par (II.3.31) et (II.3.33), on a une nouvelle borne de (II.3.30) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N^\eta(0) &\leq C\|m_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + C\|m_0\|_{H^1(\Omega)}^4 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0)
\end{aligned} \quad (\text{II.3.34})$$



On remarque maintenant que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|P_N(m_0)|^2 - 1)^2 &\leq \frac{1}{2\eta} \left( \text{mes}(\Omega) + \|P_N(m_0)\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) \\
 &\leq \frac{1}{2\eta} \left( \text{mes}(\Omega) + \|P_N(m_0)\|_{H^1(\Omega)}^4 \right) \quad \text{par injection de Sobolev.} \\
 &\leq \frac{1}{2\eta} \left( \text{mes}(\Omega) + \|m_0\|_{H^1(\Omega)}^4 \right)
 \end{aligned} \tag{II.3.35}$$

Les inégalités (II.3.34) et (II.3.35) font que le côté droit de (II.3.20) est majoré par  $Q^\eta$ , avec

$$\begin{aligned}
 Q^\eta &= C\|m_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + C\|m_0\|_{H^1(\Omega)}^4 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0) + \frac{1}{2\eta} \left( \text{mes}(\Omega) + \|m_0\|_{H^1(\Omega)}^4 \right).
 \end{aligned}$$

□

À partir de (II.3.25) et avec l'estimation de l'énergie (II.3.20), on a

$$\begin{aligned}
 &\|\nabla m_N^\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \lambda^{e*} \|\varepsilon(u_N^\eta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{8\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 \\
 &\quad - c\|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\varepsilon(u_N^\eta)\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \mathcal{E}_N^\eta(T) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 + 2C\text{mes}(\Omega) \\
 &\leq \mathcal{E}_N^\eta(0) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|P_N(m_0)|^2 - 1)^2 + 2C\text{mes}(\Omega) \\
 &\leq Q^\eta + 2C\text{mes}(\Omega) \text{ (Proposition II.3.14)}
 \end{aligned} \tag{II.3.36}$$

Pour  $\eta$  assez petit, d'après (II.3.36) et l'égalité d'énergie (II.3.20), on a une borne uniforme par rapport à  $N$  pour les quantités suivantes :

- $\frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T_N; L^2(\Omega))$ ,
- $\nabla m_N^\eta$  dans  $L^\infty(0, T_N; L^2(\Omega))$ ,
- $\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T_N; L^2(\Omega))$ ,
- $\varepsilon(u_N^\eta)$  dans  $L^\infty(0, T_N; L^2(\Omega))$ , car  $(\varepsilon(u_N^\eta))_N$  est bornée dans  $L^\infty(0, T_N; L^2(\Omega))$ ,
- $m_N^\eta$  dans  $L^\infty(0, T_N; L^4(\Omega))$ , car  $\int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2$  est borné uniformément par rapport à  $N$  et pour tout  $a > 0$ ,  $a \leq k + \frac{1}{8k}(a-1)^2$  avec  $k$  constante positive dans  $]0, \frac{1}{4}]$ ,  
alors  $\|m_N^\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k \text{mes}(\Omega) + \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2$ , d'où  $(m_N^\eta)_N$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$  qui s'injecte dans  $L^4(\Omega)$ .

### II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

Les espaces  $V_N$  et  $W_N$  sont de dimensions finies, ainsi toutes les normes sont équivalentes. De plus  $(m_N^\eta)_N$  et  $(u_N^\eta)_N$  sont, respectivement, deux suites bornées uniformément par rapport à  $N$  dans  $L^4(\Omega)$  et  $V(\Omega)$ , donc le temps maximal d'existence  $T_N$  est égale à  $+\infty$ . De plus, on peut extraire des sous suites encore notées  $(m_N^\eta, u_N^\eta)_N$  telles que, pour tout  $T > 0$  :

- $m_N^\eta \rightharpoonup m^\eta$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  faible\*,
- $m_N^\eta \rightarrow m^\eta$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  fort, car : On applique le lemme II.2.3 avec  $V = H^1(\Omega)$ ,  $E = L^4(\Omega)$ ,  $F = L^2(\Omega)$ ,  $p = 2$  et  $q = +\infty$ . On a  $m_N^\eta$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  et dans  $W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ , donc elle admet une suite qui converge fortement dans  $C^0([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ ,
- $\frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m^\eta}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  faible,
- $u_N^\eta \rightharpoonup u^\eta$  dans  $L^\infty(0, T; V(\Omega))$  faible\*,
- $\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^\eta}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\*.

**Proposition II.3.15.** *On a  $\bigcup_{N \geq 1} W_N$  dense dans  $V(\Omega)$ .*

*Preuve.* Soit  $v \in V(\Omega)$ , alors  $\Pi_N(v)$  est aussi dans  $V(\Omega)$ . Comme dans (II.3.32), on a

$$\forall N, \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(v))) : \varepsilon(\Pi_N(v)) \leq \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v), \quad (\text{II.3.37})$$

donc,  $(\varepsilon(\Pi_N(v)))_N$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  et admet une sous suite qui converge. Puisque  $\Pi_N(v)$  converge fortement vers  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ , on identifie la limite faible :

$$\varepsilon(\Pi_N(v)) \rightharpoonup \varepsilon(v) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

alors, D'après Proposition II.2.11, on a

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v) \leq \liminf \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(v))) : \varepsilon(\Pi_N(v)),$$

et par (II.3.37), on a

$$\limsup \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(v))) : \varepsilon(\Pi_N(v)) \leq \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v),$$

alors,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(v))) : \varepsilon(\Pi_N(v)) = \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v), \quad (\text{II.3.38})$$

donc,

$$\|\varepsilon(\Pi_N(v))\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

**Proposition II.3.16.** *Pour  $\eta$  assez petit, la limite  $(m^\eta, u^\eta)$  satisfait l'inégalité d'énergie suivante : pour tout  $T > 0$ ,*

$$\mathcal{E}^\eta(T) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} (|m^\eta|^2 - 1)^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0). \quad (\text{II.3.39})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\eta(t) = & \int_{\Omega} \left( |\nabla m^\eta|^2 + \Phi(m^\eta) + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(m^\eta) \right) + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 \\ & - \int_{\Omega} \varepsilon(u^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 + \lambda^e : \varepsilon(u^\eta) : \varepsilon(u^\eta) \right) - \int_{\Gamma_2} f \cdot u^\eta d\Gamma \end{aligned}$$

*Preuve.* On prend la limite dans la formule d'énergie (II.3.20).

a) Pour  $t=0$  :

- $m_N^\eta(t=0) = P_N(m_0)$  converge fortement vers  $m_0$  dans  $L^2(\Omega)$  fort (propriétés de la base hilbertienne), et par le lemme d'Aubin,  $m_N^\eta$  converge vers  $m^\eta$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega))$  fort, alors

$$m_N^\eta(0, \cdot) \longrightarrow m^\eta(0, \cdot) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

d'où  $m^\eta \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega))$  et  $m^\eta(t=0) = m_0$  (par unicité de la limite).

- $u_N^\eta(t=0) = \Pi_N(u_0)$  converge fortement vers  $u_0$  dans  $L^2(\Omega)$  fort (propriétés de la base hilbertienne). On applique le lemme II.2.3 pour  $V = V(\Omega)$ ,  $E = L^2(\Omega)$ ,  $F = L^2(\Omega)$ ,  $p = q = +\infty$ . On a  $\varepsilon(u_N^\eta)_N$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , donc  $(u_N^\eta)_N$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; V)$ . De plus,  $(u_N^\eta)_N$  et  $(\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t})_N$  sont bornés dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , d'où  $(u_N^\eta)_N$  est bornée dans  $W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ . Par suite,  $(u_N^\eta)_N$  admet une sous suite notée aussi  $(u_N^\eta)_N$  qui converge fortement dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega))$  vers  $u^\eta$ , alors  $u^\eta(t=0)$  existe et

$$u_N^\eta(0, \cdot) \longrightarrow u^\eta(0, \cdot) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Par conséquent,  $u^\eta(t=0) = u_0$  par unicité de la limite.

- D'une part,  $(m_N^\eta)_N$  et  $(u_N^\eta)_N$  sont bornées uniformément par rapport à  $N$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  avec  $T > 0$ . De plus, on peut utiliser la troisième équation de (II.3.15), pour écrire  $\frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2}$  en fonction de  $m_N^\eta$  et  $u_N^\eta$ , ceci donne que  $(\frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2})_N$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  par rapport à  $N$ . Pour lors,  $(\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t})_N$  est bornée dans

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

$W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$  et admet une sous suite notée aussi  $\left(\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t}\right)_N$  tel que,

$$\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \text{ faible dans } W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)),$$

car  $\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^\eta}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\*. L'application  $tr$  définit par

$$\begin{aligned} tr : W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ h &\longmapsto h(0) \end{aligned}$$

est linéaire continue, donc  $tr$  est continue pour la topologie faible et

$$tr \left( \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right) \rightharpoonup tr \left( \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right).$$

D'autre part,  $\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t}(t=0) = \Pi_N(u_1)$  converge fortement vers  $u_1$  dans  $L^2(\Omega)$ . Par suite, d'après l'unicité de la limite faible,

$$\frac{\partial u^\eta}{\partial t}(t=0) = u_1.$$

**b) Passage à la limite lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  dans la deuxième membre de l'égalité d'énergie (II.3.20) :**

- $(P_N(m_0))_N$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$  et  $P_N(m_0)$  converge fortement vers  $m_0$  dans  $L^2(\Omega)$ . Donc, elle admet une sous suite qui converge faiblement vers  $m_0$  dans  $H^1(\Omega)$ . Alors, toute la suite converge faiblement vers  $m_0$  dans  $H^1(\Omega)$ . D'où,

$$\|\nabla m_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, par (II.3.31),

$$\limsup \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla m_0\|_{L^2(\Omega)},$$

Alors,

$$\limsup \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)} = \liminf \|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla m_0\|_{L^2(\Omega)},$$

donc,

$$\|\nabla P_N(m_0)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\nabla m_0\|_{L^2(\Omega)},$$

et

$$\nabla P_N(m_0) \longrightarrow \nabla m_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Grâce à cette méthode, on peut démontrer que  $(V_N)_N$  dense dans  $H^1(\Omega)$ .

- D'après l'injection de Sobolev  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$ , on a  $P_N(m_0)$  converge fortement vers  $m_0$  dans  $L^4(\Omega)$ , donc

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\Pi_N(u_0)) : (\lambda^e : (\lambda^m : P_N(m_0) \otimes P_N(m_0))) \longrightarrow \int_{\Omega} \varepsilon(u_0) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_0 \otimes m_0))$$

et

$$\int_{\Omega} \mathcal{Q}(P_N(m_0)) \longrightarrow \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m_0)$$

et puisque  $|m_0| = 1$  p.p.,

$$\int_{\Omega} (|P_N(m_0)|^2 - 1)^2 \longrightarrow 0.$$

- $P_N(m_0)$  converge vers  $m_0$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\Phi$  est une forme quadratique et  $h_d : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  est continue, donc

$$\int_{\Omega} \Phi(P_N(m_0)) \longrightarrow \int_{\Omega} \Phi(m_0)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(P_N(m_0))|^2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_0)|^2$$

- $\Pi_N(u_0)$  converge fortement vers  $u_0$  et  $\varepsilon(\Pi_N(u_0))_N$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Donc, elle admet une sous suite qui converge faiblement vers  $\varepsilon(u_0)$  dans  $L^2(\Omega)$ . De plus  $P_N(m_0)$  converge vers  $m_0$  dans  $L^4(\Omega)$  fort, ainsi

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\Pi_N(u_0)) : (\lambda^e : (\lambda^m : P_N(m_0) \otimes P_N(m_0))) \longrightarrow \int_{\Omega} \varepsilon(u_0) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_0 \otimes m_0)).$$

- Par (II.3.38),

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\Pi_N(u_0))) : \varepsilon(\Pi_N(u_0)) \longrightarrow \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0).$$

- Par la continuité de l'application de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma_2)$ ,  $(\Pi_N(u_0))_N$  est bornée dans  $L^2(\Gamma_2)$  et

$$\Pi_N(u_0) \rightharpoonup u_0 \text{ dans } L^2(\Gamma),$$

alors,

$$\int_{\Gamma_2} f \cdot \Pi_N(u_0) \longrightarrow \int_{\Gamma_2} f \cdot u_0.$$

D'où,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_N^\eta(t=0) = \mathcal{E}^\eta(t=0).$$

On remarque que  $P_N(m_0)$  converge vers  $m_0$  fort dans  $L^4(\Omega)$ , et  $|m_0| = 1$ , donc

$$\int_{\Omega} (|P_N(m_0)|^2 - 1)^2 \rightarrow 0.$$

c) **Passage à la limite inférieure dans le premier membre de l'égalité d'énergie (II.3.20) :**

- $\frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}$  converge faiblement vers  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ , donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \liminf \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \right|^2.$$

- $m_N^\eta(t)$  converge vers  $m^\eta(t)$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $(\nabla m_N^\eta(t))_N$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  pour  $t > 0$ , donc il admet une sous suite qui converge faiblement vers  $\nabla m^\eta(t)$  dans  $L^2(\Omega)$ . Par suite

$$\int_{\Omega} |\nabla m^\eta|^2 \leq \liminf \int_{\Omega} |\nabla m_N^\eta|^2.$$

- $m_N^\eta$  converge vers  $m^\eta$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $h_d$  est continue et  $\Phi$  est quadratique, donc :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_N^\eta)|^2$$

et

$$\int_{\Omega} \Phi(m_N^\eta) \longrightarrow \int_{\Omega} \Phi(m^\eta).$$

- $m_N^\eta$  converge fortement vers  $m^\eta$  dans  $L^4(\Omega)$  et  $\varepsilon(u_N^\eta)$  converge faiblement vers  $\varepsilon(u^\eta)$  dans  $L^2(\Omega)$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m_N^\eta) &\longrightarrow \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m^\eta), \\ \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1)^2 &\longrightarrow \int_{\Omega} (|m^\eta|^2 - 1)^2, \\ \int_{\Omega} \varepsilon(u_N^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) &\longrightarrow \int_{\Omega} \varepsilon(u^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)), \end{aligned}$$

et par Proposition II.2.11

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta) \leq \liminf \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(u_N^\eta).$$

- $(\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t})_N$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  pour  $t > 0$ , donc on peut extraire une sous suite qui

converge faiblement vers  $\frac{\partial u^\eta}{\partial t}$  et

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \liminf \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \right|^2.$$

- $(u_N^\eta)_N$  est bornée dans  $L^2(\Gamma_2)$  d'après la continuité de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma_2)$ , puis il admet une sous suite qui converge faiblement vers  $u^\eta$  dans  $L^2(\Gamma_2)$  et

$$\int_{\Gamma_2} g \cdot u_N^\eta \longrightarrow \int_{\Gamma_2} f \cdot u^\eta.$$

Par conséquent, les deux parties **b)** et **c)** donnent que la limite inférieure lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  de (II.3.20) implique (II.3.39).  $\square$

Dans la suite, on passe à la limite lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  dans le modèle de Galerkin (II.3.15), pour trouver les formulations faibles vérifiées par  $m^\eta$  et  $u^\eta$ .

**Passage à la limite dans la première équation de (II.3.15) :**

On fixe  $N' < N$  et on prend  $v \in V_{N'}$  et  $\ell \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R})$ . En ce cas,  $v\ell(t) \in V_N$  pour tout  $t$ , et l'intégration sur  $(0, T)$  de la première équation de (II.3.15) donne :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \cdot v\ell + \int_0^T \int_{\Omega} m_N^\eta \wedge \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \cdot hg - 2 \int_0^T \int_{\Omega} H_{eff}^N \cdot v\ell + \frac{1}{\eta} \int_0^T \int_{\Omega} (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot v\ell = 0. \quad (\text{II.3.40})$$

On a  $\ell \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R})$  et  $v \in V_{N'}$ , donc  $v\ell \in L^p(0, T \times \Omega)$  pour tout  $p \leq 4$  et  $h\nabla p \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

On justifie la convergence de (II.3.40) lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  terme par terme :

- $\frac{\partial m_N^\eta}{\partial t}$  converge faiblement vers  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T \times \Omega)$ , donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \cdot v\ell \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot v\ell,$$

et  $m_N^\eta$  converge fortement vers  $m^\eta$  dans  $L^4(0, T \times \Omega)$ , alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} (m_N^\eta \wedge v\ell) \cdot \frac{\partial m_N^\eta}{\partial t} \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (m^\eta \wedge v\ell) \cdot \frac{\partial m^\eta}{\partial t}.$$

De plus  $\varepsilon(u_N^\eta)$  converge vers  $\varepsilon(u^\eta)$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\*, ainsi

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(u_N^\eta))) m_N^\eta \cdot v\ell \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(u^\eta))) m^\eta \cdot v\ell.$$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

- $m_N^\eta$  converge fortement vers  $m^\eta$  dans  $L^2(0, T \times \Omega)$ ,  $h_d$  et  $\Psi$  sont continus, donc

$$\int_0^T \int_\Omega h_d(m_N^\eta) \cdot v \ell \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega h_d(m^\eta) \cdot v \ell$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega \Psi(m_N^\eta) \cdot v \ell \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \Psi(m^\eta) \cdot v \ell.$$

- $m_N^\eta$  converge faiblement vers  $m^\eta$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , alors

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla m_N^\eta \cdot h \nabla p \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla m^\eta \cdot h \nabla p.$$

- $m_N^\eta$  converge fortement vers  $m^\eta$  dans  $L^3(0, T \times \Omega)$ , ainsi

$$\int_0^T \int_\Omega (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_N^\eta \otimes m_N^\eta))) m_N^\eta \cdot v \ell \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta))) m^\eta \cdot v \ell$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega (|m_N^\eta|^2 - 1) m_N^\eta \cdot v \ell \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (|m^\eta|^2 - 1) m^\eta \cdot v \ell.$$

Par conséquent, le passage à la limite lorsque  $N$  tend vers  $\infty$  dans (II.3.40) donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot v \ell + \int_0^T \int_\Omega (m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t}) \cdot v \ell - 2 \int_0^T \int_\Omega (\nabla m^\eta \cdot \nabla(v \ell) + h_d(m^\eta) \cdot v \ell) \\ & - 2 \int_0^T \int_\Omega (\Psi(m^\eta) \cdot v \ell + (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta))) m^\eta \cdot v \ell - (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta))) m^\eta \cdot v \ell) = 0. \end{aligned}$$

Or  $(V_N)_N$  dense dans  $H^1(\Omega)$ , donc on peut écrire la même égalité pour  $v \in H^1(\Omega)$ . De plus, les combinaisons linéaires de  $(t, x) \mapsto \ell(t)v(x)$  où  $\ell \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R})$  et  $v \in H^1(\Omega)$  sont denses dans  $L^q(0, T; H^1(\Omega))$  avec  $q < +\infty$ . D'où la limite  $(m^\eta, u^\eta)$  vérifie : pour tout  $w \in L^p(0, T; H^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot w + \int_0^T \int_\Omega (m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t}) \cdot w - 2 \int_0^T \int_\Omega (\nabla m^\eta \cdot \nabla w + h_d(m^\eta) \cdot w \\ & + \Psi(m^\eta) \cdot w + (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta))) m^\eta \cdot w - (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta))) m^\eta \cdot w) = 0 \end{aligned} \tag{II.3.41}$$

**Passage à la limite dans la deuxième équation de (II.3.15) :**

On fixe  $N' < N$  ; On prend  $v \in W_{N'}$  et  $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ . Donc,  $v \ell \in W_{N'}$  et l'intégralité



sur  $[0, T]$  de la troisième équation de (II.3.15), donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2} \cdot hp + \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(v\ell) - \int_{\Gamma_2} f \cdot v\ell \, d\Gamma \\ = \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \varepsilon(hg) \end{aligned} \quad (\text{II.3.42})$$

On justifie la convergence de (II.3.42) lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  terme par terme :

- on a la fonction test  $\ell$  s'annule sur  $T$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2} \cdot hg &= - \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial hg}{\partial t} + \int_{\Omega} \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t}(t=0) \cdot h(0)g \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial hg}{\partial t} + \int_{\Omega} \Pi_N(u_1) \cdot h(0)g. \end{aligned}$$

De plus,  $\frac{\partial u_N^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u^\eta}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\*,  $\Pi_N(u_1) \rightarrow u_1$  dans  $L^2(\Omega)$  fort et  $\frac{\partial v\ell}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , donc

$$\int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial^2 u_N^\eta}{\partial t^2} \cdot v\ell \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial v\ell}{\partial t} + \int_{\Omega} u_1 \cdot \ell(0)v.$$

- $\varepsilon(u_N^\eta) \rightharpoonup \varepsilon(u^\eta)$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\* et  $\varepsilon(v\ell) \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_N^\eta)) : \varepsilon(v\ell) \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(v\ell).$$

- $m_N^\eta \rightarrow m^\eta$  dans  $L^4(0, T \times \Omega)$  fort, et  $\varepsilon(v\ell) \in L^2(0, T \times \Omega)$ , donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m_N^\eta \otimes m_N^\eta)) : \varepsilon(v\ell) \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(v\ell).$$

Donc, la limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$  de (II.3.40) donne :

$$\begin{aligned} \int_{0, T \times \Omega} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial v\ell}{\partial t} - \int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(v\ell) - \int_{\Omega} u_1 \cdot \ell(0)v + \int_{0, T \times \Gamma_2} f \cdot v\ell \\ = - \int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(v\ell). \end{aligned} \quad (\text{II.3.43})$$

Par Proposition II.3.15, on a  $(W_N)_N$  dense dans  $V(\Omega)$ , donc l'équation (II.3.43) est vrai  $\forall v \in V(\Omega)$ . De plus, les combinaisons linéaires de  $(t, x) \mapsto \ell(t)v(x)$  avec  $\ell \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[, \mathbb{R})$  et  $v \in V(\Omega)$  sont denses dans  $W^{n,q}(0, T; V(\Omega))$  avec  $1 \leq q < \infty$ , d'où la limite  $(m^\eta, u^\eta)$  vérifie :

pour tout  $w \in W^{n,q}(0, T; V(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{0,T \times \Omega} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - \int_{0,T \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(w) - \int_{\Omega} u_1 \cdot w(0, x) + \int_{0,T \times \Gamma_2} f \cdot w \\ = - \int_{0,T \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(w). \end{aligned} \quad (\text{II.3.44})$$

Pour conclure,  $(m^\eta, u^\eta)$  vérifie (II.3.39)-(II.3.41)-(II.3.44), donc c'est une solution faible pour le système pénalisé (II.3.8).

### II.3.3 Passage à la limite dans le système pénalisé (II.3.8)

**Remarque II.3.17.** *Puisque la donnée initiale  $m_0$  satisfait  $|m_0| = 1$  p.p., le côté droit de l'estimation de l'énergie II.3.39 ne dépend pas de  $\eta$  et le terme de pénalisation disparaît pour  $t = 0$ .*

Ainsi, d'après l'estimation d'énergie (II.3.39) et la Remarque II.3.17, en utilisant les mêmes arguments que dans la section précédente, on obtient que les quantités suivantes sont uniformément bornées par rapport à  $\eta$  :

- $\frac{\partial m^\eta}{\partial t}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ ,
- $\nabla m^\eta$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ ,
- $m^\eta$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^4(\Omega))$ ,
- $\varepsilon(u^\eta)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ ,
- $\frac{\partial u^\eta}{\partial t}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ .

Avec cette borne, on peut extraire une sous suite, encore notée  $(m^\eta, u^\eta)_\eta$ , qui converge faiblement vers une limite notée  $(m, u)$  tel que pour tout  $T > 0$ ,

- $m^\eta \rightharpoonup m$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  faible\*,
- $m^\eta \rightarrow m$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  fort (d'après Lemme II.2.3),
- $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  faible,
- $u^\eta \rightharpoonup u$  dans  $L^\infty(0, T; V)$  faible\*,
- $\frac{\partial u^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\*.

**Proposition II.3.18.** *La limite  $m$  vérifie la contrainte de saturation*

$$|m(t, x)| = 1 \text{ p.p. } t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega.$$

*Preuve.* Le premier membre de l'inégalité (II.3.39) est borné uniformément par rapport à  $\eta$  par Remarque II.3.17, de sorte que pour tout  $T > 0$  et  $\eta$  assez petit, il existe  $C$  indépendant de  $\eta$  tel que :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (|m^\eta|^2 - 1)^2 \leq 4C\eta T,$$

d'où  $\forall T > 0$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (|m^\eta|^2 - 1)^2 \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0.$$

en outre,  $m^\eta \rightarrow m$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} (|m^\eta|^2 - 1)^2 \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (|m|^2 - 1)^2,$$

et d'après l'unicité de la limite

$$\int_0^T \int_{\Omega} (|m|^2 - 1)^2 = 0.$$

D'où  $(|m|^2 - 1)^2$  est mesurable positive d'intégrale nulle, dans ce condition, elle est nulle p.p. et  $|m| = 1$  p.p. sur  $(0, T) \times \Omega$ .  $\square$

**Proposition II.3.19.** *La limite  $(m, u)$  vérifie l'inégalité d'énergie suivante : pour tout  $T > 0$ ,*

$$\mathcal{E}(T) + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}(0). \quad (\text{II.3.45})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \int_{\Omega} \left( |\nabla m|^2 + \Phi(m) + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(m) \right) + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 - \int_{\Omega} \varepsilon(u) : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) \right) - \int_{\Gamma_2} f \cdot v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

*Preuve.* Puisque  $|m_0| = 1$  presque partout, alors  $\forall \eta$ ,  $\mathcal{E}^\eta(0) = \mathcal{E}(0)$ , donc par l'inégalité (II.3.39), on a

$$\forall T; \mathcal{E}^\eta(T) + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}(0). \quad (\text{II.3.46})$$

On passe à la limite inférieure de (II.3.46), lorsque  $\eta$  tend vers zéro, terme par terme :

- $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 \leq \liminf \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2.$$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

- $m^\eta \rightharpoonup m$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , alors

$$\int_{\Omega} |\nabla m|^2 \leq \liminf \int_{\Omega} |\nabla m^\eta|^2.$$

- $m^\eta \rightarrow m$  dans  $L^2(\Omega)$  fort,  $\Phi$  et  $h_d$  sont deux applications continues, ainsi

$$\int_{\Omega} \Phi(m^\eta) \rightarrow \int_{\Omega} \Phi(m),$$

et

$$\int_{\Omega} h_d(m^\eta) \rightarrow \int_{\Omega} h_d(m).$$

- $m^\eta \rightarrow m$  dans  $L^4(\Omega)$  fort, donc

$$\int_{\Omega} \mathcal{Q}(m^\eta) \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m).$$

De plus  $\varepsilon(u^\eta) \rightharpoonup \varepsilon(u)$  dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta)) \rightarrow \int_{\Omega} \varepsilon(u) : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))$$

et par Proposition [II.2.11](#),

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) \leq \liminf \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta).$$

- $\frac{\partial u^\eta(t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u(t)}{\partial t}$  dans  $L^2(\Omega)$  faible, ainsi

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq \liminf \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2.$$

- Par la continuité de la trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma_2)$ ,  $u^\eta \rightharpoonup u$  dans  $L^2(\Gamma_2)$ , donc

$$\int_{\Gamma_2} f \cdot u^\eta \, d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_2} f \cdot u \, d\Gamma.$$

Par conséquent, le passage à la limite inférieure de [\(II.3.46\)](#) lorsque  $\eta$  tend vers zéro donne [\(II.3.45\)](#). □

Pour passer à la limite lorsque le terme de pénalisation  $\eta$  tend vers zéro dans [\(II.3.41\)](#), on considère une fonction  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$  à support compact dans  $[0, T[$  avec  $T > 0$  et on prend comme fonction test dans l'équation [\(II.3.41\)](#) du système pénalisé,  $(t, x) \mapsto$

$m^\eta(t, x) \wedge \chi(t, x) \in L^p(0, T; H^1(\Omega))$ , car  $m^\eta \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ . On obtient,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} + m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \cdot m^\eta \wedge \chi = -2 \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial m^\eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{x_i} (m^\eta \wedge \chi) \\ & + 2 \int_0^T \int_\Omega (h_d(m^\eta) + \Psi(m^\eta) + (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)))m^\eta) \cdot (m^\eta \wedge \chi) \\ & - 2 \int_0^T \int_\Omega (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)))m^\eta \cdot (m^\eta \wedge \chi). \end{aligned} \quad (\text{II.3.47})$$

car

$$\int_0^T \int_\Omega (|m^\eta|^2 - 1)^2 m^\eta \cdot m^\eta \wedge \chi = 0.$$

Par des calculs algébriques, on a

$$\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot (m^\eta \wedge \chi) = -(m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t}) \cdot \chi$$

et

$$(m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t}) \cdot (m^\eta \wedge \chi) = -(m^\eta \wedge (m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t})) \cdot \chi = -(m^\eta \cdot \frac{\partial m^\eta}{\partial t})m^\eta \cdot \chi + |m^\eta|^2 \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot \chi.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} + m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \cdot m^\eta \wedge \chi &= \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} - m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \cdot \chi \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (|m^\eta|^2 - 1) \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \cdot \chi \\ &- \int_0^T \int_\Omega (m^\eta \cdot \frac{\partial m^\eta}{\partial t})(m^\eta \cdot \chi). \end{aligned}$$

On a  $m^\eta \rightarrow m$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  fort et  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  faible, donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} + m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \cdot m^\eta \wedge \chi &\longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} \right) \cdot \chi \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (|m|^2 - 1) \frac{\partial m}{\partial t} \cdot \chi \\ &- \int_0^T \int_\Omega \left( m \cdot \frac{\partial m}{\partial t} \right) (m \cdot \chi). \end{aligned}$$

Comme  $|m|^2 = 1$ , alors  $\frac{\partial}{\partial t}|m|^2 = 0$  et  $2m \cdot \frac{\partial m}{\partial t} = 0$ , ceci donne

$$\int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} + m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \cdot m^\eta \wedge \chi \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} \right) \cdot \chi.$$

**II.3. Existence des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction**

---

Par le même genre d'arguments, on prend la limite dans la partie droite de (II.3.47) et on obtient que pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} \right) \chi(t, x) dt dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m \wedge \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \\ -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge (h_d(m) + \Psi(m)) \cdot \chi &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge \left( (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u))) m \right. \\ &\left. - (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m))) m \right) \cdot \chi \end{aligned} \quad (\text{II.3.48})$$

On passe à la limite dans l'équation d'onde (II.3.44) du système pénalisé. Soit  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$ , il existe  $T > 0$  tel que  $\text{supp}(\chi) \subset [0, T[$  et

$$\begin{aligned} \int_{0, T \times \Omega} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} - \int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\chi) &- \int_{\Omega} u_1 \chi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2} f \cdot \chi \\ &= - \int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\chi). \end{aligned}$$

On a

- $\frac{\partial u^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\* et  $\frac{\partial \chi}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , alors

$$\int_{0, T \times \Omega} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} \longrightarrow \int_{0, T \times \Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

- $\varepsilon(u^\eta) \rightharpoonup \varepsilon(u)$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  faible\* et  $\varepsilon(\chi) \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , donc

$$\int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\chi) \longrightarrow \int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(\chi).$$

- $m^\eta \rightarrow m$  dans  $L^4(0, T; L^4(\Omega))$  fort et  $\varepsilon(\chi) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , ainsi

$$\int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\chi) \longrightarrow \int_{0, T \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)) : \varepsilon(\chi).$$

Par conséquent, pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(\chi) &- \int_{\Omega} u_1 \chi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2} f \cdot \chi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m \otimes m)) : \varepsilon(\chi) \end{aligned} \quad (\text{II.3.49})$$

En conclusion, on obtient que  $(m, u)$  est une solution faible globale en temps pour (II.1.1)-(II.1.2)-(II.1.4), d'où Théorème II.3.3.

## II.4 Plaque mince ferromagnétique avec magnétostriction

### II.4.1 Modèle tridimensionnel de plaque ferromagnétique avec magnétostriction

On considère une plaque mince ferromagnétique  $\Omega_\eta$ , avec  $\eta$  est une constante positive, de la forme

$$\Omega_\eta = \omega \times ]-\eta, \eta[,$$

avec  $\omega$  est un domaine régulier de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que cette plaque est encastrée sur  $\Gamma_1^\eta = \mathcal{C}_1 \times ]-\eta, \eta[$ , avec  $\mathcal{C}_1 \subset \partial\omega$ . On suppose que la mesure 1d de  $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{R}^2$  est strictement positive, ce qui entraîne qu'il en est de même pour la mesure surfacique de  $\Gamma_1^\eta$ . On désigne par  $\mathcal{C}_2 = \partial\omega \setminus \mathcal{C}_1$ ,  $\Gamma_2^\eta = \mathcal{C}_2 \times ]-\eta, \eta[$  et  $\Gamma_\pm^\eta = \bar{\omega} \times \{\pm\eta\}$ .

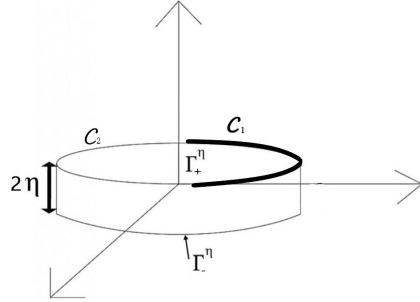


FIGURE II.1 –  $\Omega_\eta = \omega \times ]-\eta, \eta[$

**Définition II.4.1.** On définit les espaces utilisés dans cette section :

$$V^\eta = \{v \in H^1(\Omega_\eta) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\eta\},$$

$$V^1 = \{v \in H^1(\Omega_1) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^1\},$$

$$V(\omega) = \{v = (v_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega) ; v_i = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_1 \text{ et } \partial_1 v_3 = \partial_2 v_3 = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_1\},$$

$$V_{KL}(\Omega_1) = \{\xi \in H^1(\Omega_1) ; \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^1 \text{ et } \varepsilon_{i3}(\xi) = 0 \text{ dans } \Omega_1 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

**Lemme II.4.2.** L'application  $I$  définie par

$$\begin{aligned} I : V(\omega) &\longrightarrow V_{KL}(\Omega_1) \\ v &\longmapsto ((v_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3), v_3), \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

*Preuve.* Pour la preuve, voir [28] Théorème 1.4.1. □

On utilise cet isomorphisme pour prendre une condition initiale convenable et dans la section II.4.3 pour trouver une déformation  $\tilde{u}$  ne dépendant pas de la troisième variable  $x_3$ , c'est à dire définie seulement sur  $\omega$ .

## II.4. Plaque mince ferromagnétique avec magnétostriction

Soient  $m_0 \in H^1(\omega; S^2(0, 1))$ ,  $\tilde{u}_0 \in V(\omega)$ ,  $u_1 \in L^2(\omega)$  tel que la troisième composante  $(u_1)_3 = 0$ ,  $g^+$  et  $g^- \in L^2(\omega)$  et  $h \in L^2(\mathcal{C}_2)$ . À partir de ces conditions, et pour obtenir une solution faible sur  $\Omega_\eta$ , on définit les conditions initiales et limites suivantes : en posant  $u_0 = I(\tilde{u}_0)$  (voir Lemme II.4.2), on pose :

$$\begin{aligned} m_0^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) &= m_0(x_1^\eta, x_2^\eta), \\ u_{0\alpha}^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) &= u_{0\alpha} \left( x_1^\eta, x_2^\eta, \frac{x_3^\eta}{\eta} \right), \\ u_{03}^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) &= \frac{1}{\eta} u_{03} \left( x_1^\eta, x_2^\eta, \frac{x_3^\eta}{\eta} \right), \\ u_1^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) &= u_1(x_1^\eta, x_2^\eta). \end{aligned} \tag{II.4.1}$$

On définit les forces appliquées à la frontière de  $\Omega_\eta$ ,  $g^{\eta+}$ ,  $g^{\eta-}$  et  $h^\eta$  par :

$$\begin{aligned} g_\alpha^{\eta\pm}(x_1^\eta, x_2^\eta, \pm\eta) &= \eta g_\alpha^\pm(x_1^\eta, x_2^\eta) \quad \text{et} \quad g_3^{\eta\pm}(x_1^\eta, x_2^\eta, \pm\eta) = \eta^2 g_3^\pm(x_1^\eta, x_2^\eta) \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\eta, \\ h_\alpha^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) &= h_\alpha(x_1^\eta, x_2^\eta) \quad \text{et} \quad h_3^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) = \eta h_3(x_1^\eta, x_2^\eta) \quad \text{sur } \Gamma_2^\eta, \end{aligned} \tag{II.4.2}$$

On a  $m_0^\eta \in H^1(\Omega_\eta; S^2(0, 1))$ ,  $u_0^\eta \in V^\eta$ ,  $u_1^\eta \in L^2(\Omega_\eta)$ ,  $g^{\eta\pm} \in L^2(\Gamma_\pm^\eta)$  et  $h^\eta \in L^2(\Gamma_2^\eta)$ . Donc, par le Théorème II.3.3, pour chaque  $\eta > 0$ , il existe  $(m^\eta, u^\eta)$  une solution globale faible pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction (II.1.1)-(II.1.1)-(II.1.4) avec les données initiales  $m_0^\eta$ ,  $u_0^\eta$  et  $u_1^\eta$  et vérifiant les conditions aux bords :

$$\sigma^\eta \cdot n = \begin{cases} g^{\eta\pm} & \text{sur } \Gamma_\pm^\eta, \\ h^\eta & \text{sur } \Gamma_2^\eta, \end{cases}$$

avec  $\sigma^\eta = (\lambda^e : \varepsilon(u^\eta)) - (\lambda^e : (\lambda^m : m^\eta \otimes m^\eta))$ . Donc,  $(m^\eta, u^\eta)$  satisfait :

1.  $m^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$  satisfait la contrainte de saturation  $|m^\eta(t, x)| = 1$  pour presque tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta$ ,
2.  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$ ,
3.  $m^\eta(0, \cdot) = m_0^\eta$  au sens de la trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\eta)$ ,
4.  $u^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^\eta)$  et  $\frac{\partial u^\eta}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$ ,
5.  $u^\eta(0, \cdot) = u_0^\eta$  et  $\frac{\partial u^\eta}{\partial t}(0, \cdot) = u_1^\eta(\cdot)$  au sens de la trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\eta)$ ,



6. pour tout  $\chi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} - m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \chi^\eta(t, x) dt dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \sum_{i=1}^3 m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi^\eta}{\partial x_i} \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge (h_d(m^\eta) + \Psi(m^\eta) + (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta))) m^\eta) \cdot \chi^\eta \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta))) m^\eta) \cdot \chi^\eta, \end{aligned} \quad (\text{II.4.3})$$

7. pour tout  $\xi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V^\eta)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi^\eta}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_-^\eta} g^{\eta-} \cdot \xi^\eta + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_+^\eta} g^{\eta+} \cdot \xi^\eta \\ + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^\eta} h \cdot \xi^\eta - \int_{\Omega_\eta} u_1^\eta \cdot \xi^\eta(0, x) = - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta), \end{aligned} \quad (\text{II.4.4})$$

8. pour tout  $t \geq 0$ , on a l'inégalité de l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}(m^\eta, u^\eta) + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}(m_0^\eta, u_0^\eta),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(m^\eta, u^\eta) &= \int_{\Omega_\eta} [|\nabla m^\eta|^2 + \Phi(m^\eta)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \mathcal{Q}(m^\eta) \\ &- \int_{\Omega_\eta} \varepsilon(u^\eta) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 - \int_{\Gamma_-^\eta} g^{\eta-} \cdot u^\eta - \int_{\Gamma_+^\eta} g^{\eta+} \cdot u^\eta - \int_{\Gamma_2^\eta} h^\eta \cdot u^\eta. \end{aligned}$$

Le domaine  $\Omega_\eta$  dépend de  $\eta$ , donc il n'est pas facile de passer à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro. Pour cela, on définit un nouveau modèle sur  $\Omega_1$  dans la sous-section suivante, c'est à dire dans un domaine fixé indépendant de  $\eta$ , par un changement d'échelle convenable.

## II.4.2 Modèle redimensionné

À un point courant  $x^\eta = (x_i^\eta)$  de l'ensemble  $\Omega_\eta$ , on associe, notamment dans les relations (II.4.5)-(II.4.10), le point  $x = (x_i)$  de l'ensemble  $\Omega_1 = \omega \times ]0, 1[$  défini par  $x_\alpha = x_\alpha^\eta$  pour  $\alpha = 1$  ou  $2$  et  $x_3 = \frac{1}{\eta} x_3^\eta$ . On pose  $\partial_i = \partial / \partial x_i$  et  $\partial_{ij} = \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ ; on a donc  $\partial_\alpha^\eta = \partial_\alpha$  pour  $\alpha = 1$  ou  $2$  et  $\partial_3^\eta = \frac{1}{\eta} \partial_3$ . À la solution  $(m^\eta, u^\eta)$ , à  $h_d(m^\eta)$  et aux champs  $\chi^\eta = (\chi_i^\eta)$  et  $\xi^\eta = (\xi_i^\eta)$  apparaissant dans (II.4.3), (II.4.4), on associe la solution mise à l'échelle  $M^\eta, H^\eta$

et  $U^\eta$  définissent par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 M^\eta(t, x_1, x_2, x_3) &= m^\eta(t, x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta), \\
 H^\eta(t, x_1, x_2, x_3) &= h_d(m^\eta(t, x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta)), \\
 U_\alpha^\eta(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) \text{ pour } \alpha = 1 \text{ ou } 2, \\
 U_3^\eta(x_1, x_2, x_3) &= \eta u_3^\eta(x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta).
 \end{aligned} \tag{II.4.5}$$

Pour  $\xi \in V(\Omega_1)$ , on définit le 2-tenseur  $\varepsilon(\eta, \xi)$  par

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta}(\eta, \xi) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) \text{ pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \\
 \varepsilon_{\alpha 3}(\eta, \xi) &= \frac{1}{\eta} \varepsilon_{\alpha 3}(\xi) \text{ pour } \alpha \in \{1, 2\}, \\
 \varepsilon_{33}(\eta, \xi) &= \frac{1}{\eta^2} \varepsilon_{33}(\xi).
 \end{aligned} \tag{II.4.6}$$

On a alors :

$$\varepsilon(u^\eta) = \varepsilon(\eta, U^\eta), \tag{II.4.7}$$

et pour tout  $\xi^\eta \in V(\Omega_\eta)$ , on a

$$\varepsilon(\xi^\eta) = \varepsilon(\eta, \xi), \tag{II.4.8}$$

où  $\xi$  est donné par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \xi_\alpha(t, x_1, x_2, x_3) &= \xi_\alpha^\eta(t, x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta) \text{ pour } \alpha = 1, 2, \\
 \xi_3(t, x_1, x_2, x_3) &= \eta \xi_3^\eta(t, x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta).
 \end{aligned} \tag{II.4.9}$$

En outre, pour  $\chi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$ , on définit  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$  par la relation

$$\chi(t, x_1, x_2, x_3) = \chi^\eta(t, x_1^\eta, x_2^\eta, x_3^\eta). \tag{II.4.10}$$

Par conséquent,  $(M^\eta, U^\eta)$  satisfait les propriétés suivantes sur  $\Omega_1$  :

- $M^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$  et  $|M^\eta(t, x)| = 1$  p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1$ ,
- $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ ,
- $M^\eta(0, x_1, x_2, x_3) = m_0^\eta(0, x_1, x_2, \eta x_3) = m_0(x_1, x_2)$  au sens de la trace,
- $U^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^1)$  et  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1))$ ,
- $U^\eta(0, x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2)$  et  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2)$  au sens de la trace,

- pour tous  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ , on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \chi &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 M^\eta \wedge \partial_\alpha M^\eta \cdot \partial_\alpha \chi \\
 + \frac{2}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge \partial_3 M^\eta \cdot \partial_3 \chi &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (H^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \chi \\
 - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (M^\eta \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta))) M^\eta) \cdot \chi & \\
 + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta))) M^\eta) \cdot \chi, & \tag{II.4.11}
 \end{aligned}$$

- pour tout  $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V^1)$ , on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_3}{\partial t} &- \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi) \\
 + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_-^1} g^+ \cdot \xi - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_+^1} g^+ \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^1} h \cdot \xi &- \int_{\Omega_1} u_1 \cdot \xi(0, x) \tag{II.4.12} \\
 = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi), &
 \end{aligned}$$

- pour tout  $t > 0$ , on a

$$\mathcal{E}^\eta(t) + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0), \tag{II.4.13}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^\eta(t) &:= \frac{1}{\eta} \mathcal{E}(m^\eta, u^\eta) = \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 |\partial_\alpha M^\eta|^2 + \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega_1} |\partial_3 M^\eta|^2 + \int_{\Omega_1} \Phi(M^\eta) + \int_{\mathbb{R}^3} |H^\eta|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(M^\eta) - \int_{\Omega_1} \varepsilon(\eta, U^\eta) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left[ (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta) + \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{\eta^2} \left| \frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \right|^2 \right] \\
 &- \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U^\eta - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U^\eta - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U^\eta,
 \end{aligned}$$

**Remarque II.4.3.** *Puisqu'on prend des conditions initiales vérifiant :  $\partial_3 m_0 = 0$ ,  $\varepsilon_{i3}(u_0) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $(u_1)_3 = 0$ , alors  $\mathcal{E}^\eta(0)$  est indépendant de  $\eta$ .*

### II.4.3 Borne uniforme et passage à la limite lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro

Dans cette section, on utilise l'inégalité (II.4.13) et la Remarque II.4.3, pour trouver une borne uniforme de  $M^\eta$  et  $U^\eta$  par rapport à  $\eta$ .

Pour équilibrer le terme de mauvais signe dans l'inégalité d'énergie, on utilise Lemme II.2.9 et l'inégalité Cauchy-Schwarz, pour obtenir :

$$\int_{\Omega_1} \varepsilon(\eta, U^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)) \leq \int_{\Omega_1} \frac{1}{4} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta) + \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(M^\eta). \quad (\text{II.4.14})$$

Le fait que  $\lambda^e$  est un 4-tenseur symétrique positif implique qu'il existe une constante positive  $\lambda^{e*}$ , de sorte que

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta) \geq \lambda^{e*} \|\varepsilon(\eta, U^\eta)\|_{L^2(\Omega_1)}^2. \quad (\text{II.4.15})$$

En outre, par continuité de la trace de  $H^1(\Omega)$  à valeur dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , il existe  $C_1$ , une constante dépendant uniquement de  $\Omega_1$ , telle que

$$\int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U^\eta + \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U^\eta + \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U^\eta \leq C_1 \|U^\eta\|_{H^1(\Omega_1)}. \quad (\text{II.4.16})$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité d'énergie (II.4.13), et les inégalités (II.4.14), (II.4.15), (II.4.16) et le fait que  $\mathcal{Q}(M^\eta)$  et  $\Phi(M^\eta)$  sont positifs, on obtient que pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \|\partial_\alpha M^\eta\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{\eta^2} \|\partial_3 M^\eta\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|H^\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right|^2 \\ + \frac{\lambda^{e*}}{4} \|\varepsilon(\eta, U^\eta)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - C_1 \|U^\eta\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \mathcal{E}^\eta(0), \end{aligned} \quad (\text{II.4.17})$$

Par la définition (II.4.6) et l'inégalité de Korn II.2.1, il existe  $c > 0$  tel que

$$\|\varepsilon(\eta, \xi)\|_{L^2(\Omega_1)} \geq \|\varepsilon(\xi)\|_{L^2(\Omega_1)} \geq c \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \text{ pour tout } \xi \in V^1. \quad (\text{II.4.18})$$

Par conséquent, si on applique l'inégalité (II.4.18) dans (II.4.17), on obtient que, pour tous  $T > 0$  et  $\eta$  dans un voisinage de zéro, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\eta$  telle que

- $\left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\|\partial_1 M^\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} + \|\partial_2 M^\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\frac{1}{\eta} \|\partial_3 M^\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\|U^\eta\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C,$

- $\left\| \frac{\partial U_1^\eta}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} + \left\| \frac{\partial U_2^\eta}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\frac{1}{\eta} \left\| \frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\|\varepsilon(\eta, U^\eta)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C,$
- $\|H^\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C.$

Ainsi, on peut extraire des sous-suites, encore notées  $(M^\eta, U^\eta)$  et  $H^\eta$ , de telle sorte que :

- $M^\eta \rightharpoonup M$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$  faible\*,
- $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial M}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible,
- $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $L^\infty(0, T; V^1)$  faible\*,
- $\frac{\partial U^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible\*,
- $H^\eta \rightharpoonup H$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$  faible\*.

De plus, on a

$$\partial_3 M^\eta \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \text{ fort ,}$$

et

$$\frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \text{ fort ,}$$

donc  $M$  dépend seulement de  $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \omega$  et ne dépend pas de  $x_3$  et  $U_3$  ne dépend pas du temps.

On remarque également que  $(\frac{1}{\eta} \varepsilon_{\alpha 3}(U^\eta))_\eta$  pour  $\alpha \in \{1, 2\}$  et  $(\frac{1}{\eta^2} \varepsilon_{33}(U^\eta))_\eta$  sont bornées dans  $L^2(\Omega_1)$ , car  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, cela donne que

$$\varepsilon_{i3}(U^\eta) \longrightarrow 0 \text{ fort dans } L^2(\Omega),$$

c'est à dire  $\varepsilon_{i3}(U) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Par conséquent,  $U \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V_{KL}(\Omega_1))$ , puis par Lemme II.4.2, il existe  $\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\omega))$  de sorte que

$$\begin{aligned} U_\alpha(t, x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_\alpha(t, x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha \tilde{u}_3 \text{ pour } \alpha \in \{1, 2\}, \\ U_3(t, x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_3(t, x_1, x_2). \end{aligned} \tag{II.4.19}$$

**Notation II.4.4.** Pour  $v = (v_1, v_2, v_3) \in V(\omega)$ , on note  $v_T = (v_1, v_2)$ .

Puisque  $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $V^1$  faible, on a

$$\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \tag{II.4.20}$$

où  $A$  est un 2-tenseur symétrique vérifiant

$$A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \quad \text{pour } \alpha = 1, 2.$$

On pose

$$\bar{A} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A dx_3.$$

Alors  $\bar{A}$  est un 2-tenseur satisfaisant

$$\bar{A}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad (\text{II.4.21})$$

car

$$\int_{-1}^1 x_3 dx_3 = 0.$$

De plus, on peut prouver que

$$M^\eta \rightarrow M \text{ dans } L^\infty(0, T; L^r(\Omega_1)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega_1)) \text{ fort pour } r < 6,$$

en utilisant le Lemme d'Aubin-Simon en [10], théorème II.5.16. Ainsi, on peut extraire une sous-suite, toujours notée  $(M^\eta)_\eta$ , de sorte que

$$M^\eta \rightarrow M \text{ p.p. dans } [0, T] \times \Omega_1.$$

Donc  $M$  vérifie la contrainte de saturation  $|M(t, x_1, x_2)| = 1$  p.p. dans  $\mathbb{R}^+ \times \omega$ , et par continuité en temps et valeurs dans  $L^2(\Omega_1)$ ,  $M(0, x) = m_0(x)$  au sens de la trace.

### II.4.3.1 Passage à la limite dans l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert

Maintenant, on essaie de passer à la limite dans la formulation faible (II.4.11).

Soit  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\bar{\omega}))$ . On définit  $\zeta$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \Omega_1$  à partir de  $\chi$  par :

$$\zeta(t, x_1, x_2, x_3) = \chi(t, x_1, x_2).$$

Alors,  $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$  et  $\partial_3 \zeta = 0$ . On prend  $\zeta$  comme fonction test dans (II.4.11), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \cdot \zeta &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \\ -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (h_d^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \zeta &+ 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta))) M^\eta \cdot \zeta \\ +2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta))) M^\eta) \cdot \zeta. \end{aligned} \quad (\text{II.4.22})$$

Soit  $[0, T]$  le support de  $\chi$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On passe à la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , terme par terme :

- on a  $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial M}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible,  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega_1))$  fort et  $\zeta \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \cdot \zeta &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \cdot \zeta \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \cdot \chi. \end{aligned}$$

- On a  $M^\eta \rightharpoonup M$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$  faible\* et  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega_1))$  fort et  $\zeta \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 M \wedge \frac{\partial M}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha=1}^2 M \wedge \frac{\partial M}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha}, \end{aligned}$$

- de plus,  $\Psi$  est continue et  $H^\eta \rightharpoonup H$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$  faible\*, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (h_d^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \zeta &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M \wedge (H + \Psi(M)) \cdot \zeta \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (H + \Psi(M)) \cdot \chi. \end{aligned}$$

- On a  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega_1))$  fort et  $\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A$  faible\* dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) M^\eta) \cdot \zeta &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M \wedge (\lambda^m : (\lambda^e : A)) M \cdot \zeta \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A})) M \cdot \chi \end{aligned}$$

car  $M$  et  $\zeta$  sont indépendants de  $x_3$ .

- On a  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega_1))$  fort, donc

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta))) M^\eta) \cdot \zeta \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) M) \cdot \zeta \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) M) \cdot \chi. \end{aligned}$$

Par conséquent, la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro de (II.4.22) donne : Pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\omega))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \cdot \chi &= -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge \Delta M \cdot \chi - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (H + \Psi(M)) \cdot \chi \\ -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \bar{A})) M \cdot \chi &+ 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge ((\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : M \otimes M))) M) \cdot \chi, \end{aligned} \quad (\text{II.4.23})$$

Décrivons  $H$ , la limite du champ démagnétisant  $H^\eta$ . Puisque  $h_d(m^\eta)$  et  $m^\eta$  satisfont (II.1.3), puisque  $H^\eta$  (resp.  $M^\eta$ ) est déduit de  $h_d(m^\eta)$  (resp.  $m^\eta$ ) par (II.4.5) (resp. (II.4.5)), et utilisant le fait que  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^2(\Omega_1)$ , on peut appliquer le Lemme 2.1 dans [15] pour obtenir

$$H(t, x, y, z) = \begin{cases} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3(t, x, y) \end{pmatrix} & \text{pour } (x, y, z) \in \Omega_1, \\ 0 & \text{pour } x \notin \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_1. \end{cases} \quad (\text{II.4.24})$$

Par l'utilisation (II.1.3), on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^3} |H^\eta|^2 = - \int_{\Omega_1} H^\eta \cdot M^\eta.$$

Puisque  $H^\eta \rightarrow H$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^2(\Omega_1)$  fort, donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} |H^\eta|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (|M_2|^2 + |M_3|^2) = \int_{\mathbb{R}^3} |H|^2,$$

de sorte que  $H^\eta \rightarrow H$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

### II.4.3.2 Passage à la limite dans l'équation d'onde

Dans cette section, en explicitant la limite de la formulation faible de l'équation d'onde (II.4.12), on va caractériser  $\tilde{u}_T$  ainsi que tous les coefficients de  $\bar{A}$ .

On prend une fonction test dans la formulation faible (II.4.12) de la forme

$$\xi(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(t, x_1, x_2) \\ v_2(t, x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1,$$

avec  $v_\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\omega))$ , tel que  $v_\alpha = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$ . Donc,  $\varepsilon_{i3}(\xi) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et on



obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\xi) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_-^1} g^+ \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_+^1} g^+ \cdot \xi \\ + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^1} h \cdot \xi - \int_{\Omega_1} u_1 \cdot \xi(0, x) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)) : \varepsilon(\xi), \end{aligned} \quad (\text{II.4.25})$$

Soit  $[0, T]$  le support de  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On a  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible\*, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \frac{\partial \tilde{u}_T}{\partial t} \cdot \frac{\partial v_T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{II.4.26})$$

De plus,  $\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A$  faible\* dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  et  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega_1))$  fort, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\xi) &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : A) : \varepsilon(\xi) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta} (\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T), \end{aligned} \quad (\text{II.4.27})$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)) : \varepsilon(\xi) &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) : \varepsilon(\xi) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T). \end{aligned} \quad (\text{II.4.28})$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_\pm^1} g^\pm \cdot \xi &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times \{\pm 1\}} g^\pm \cdot \xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} g_T^\pm \cdot v_T, \end{aligned} \quad (\text{II.4.29})$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^1} h \cdot \xi &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_2 \times ]-1, 1[} h \cdot \xi \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T, \end{aligned} \quad (\text{II.4.30})$$

puisque  $h$  ne dépend pas de  $x_3$  et  $\int_{-1}^1 x_3 = 0$ .

Par conséquent, la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$  de (II.4.25) donne : pour tous  $v_T \in H^1(\omega)$  tel que

$v_T = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \frac{\partial \tilde{u}_T}{\partial t} \cdot \frac{\partial v_T}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} (g_T^+ + g_T^-) \cdot v_T + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T \\ - \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} u_{1T} v_T(0, x) = - \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v). \end{aligned} \quad (\text{II.4.31})$$

Dans la suite, on va caractériser  $\bar{A}$ , et on va voir qu'on peut écrire  $\bar{A}$  d'une manière unique en fonction de  $M$  et  $\tilde{u}_T$ .

La multiplication de (II.4.12) par  $\eta^2$ , l'utilisation de  $\frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  fort, et le passage à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro donne

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : A)_{33} \varepsilon_{33}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{33} \varepsilon_{33}(\xi). \quad (\text{II.4.32})$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ , on choisit  $\xi$  tel que :

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= 0 \text{ pour } \alpha = 1, 2 \\ \xi_3 &= x_3 \varphi, \end{aligned}$$

donc,  $e_{33}(\xi) = \varphi$ , et (II.4.32) implique

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} (\lambda^e : \bar{A})_{33} \varphi = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{33} \varphi,$$

car  $M$  et  $\varphi$  sont indépendants de  $x_3$ , et c'est vrai pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ . Donc,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{33} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{33} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega). \quad (\text{II.4.33})$$

On fixe  $\alpha \in \{1, 2\}$ . On multiplie maintenant (II.4.12) par  $\eta$  et on choisit la fonction test  $\xi$  sous la forme :

$$\xi_i = \begin{cases} x_3 \varphi & \text{si } i = \alpha, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ . Ensuite, on passe à la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : A)_{\alpha 3} \varphi = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha 3} \varphi.$$

Alors,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha 3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha 3} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega). \quad (\text{II.4.34})$$

Par conséquent, pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on a

$$(\lambda^e : \bar{A})_{i3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega). \quad (\text{II.4.35})$$

**Proposition II.4.5.** *Soit  $D \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  une matrice définie par*

$$D_{ij} = \lambda_{i3k3}^e,$$

*Alors,  $D$  est une matrice symétrique positive.*

*Preuve.* -  $D$  est symétrique :  $D_{ik} = \lambda_{i3k3}^e = \lambda_{k3i3}^e = D_{ki}$  (car  $\lambda^e$  est symétrique).

-  $D$  est définie positive : Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ , et soit  $\xi$  une 2-tenseur défini par

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} & \frac{x_2}{2} & x_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl=1}^3 \lambda_{ijkl}^e \xi^{ij} \xi^{kl} &= \sum_{\alpha\beta=1}^2 \sum_{kl=1}^3 \lambda_{\alpha\beta kl}^e \xi^{\alpha\beta} \xi^{kl} + 2 \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{kl=1}^3 \lambda_{\alpha 3kl}^e \xi^{\alpha 3} \xi^{kl} + \sum_{kl=1}^3 \lambda_{33kl}^e \xi^{33} \xi^{kl} \\ &= 0 + 2 \sum_{kl=1}^3 \lambda_{13kl}^e \xi^{13} \xi^{kl} + 2 \sum_{kl=1}^3 \lambda_{23kl}^e \xi^{23} \xi^{kl} + \sum_{kl=1}^3 \lambda_{33kl}^e \xi^{33} \xi^{kl} \\ &= \sum_{kl=1}^3 \lambda_{13kl}^e x_1 \xi^{kl} + \sum_{kl=1}^3 \lambda_{23kl}^e x_2 \xi^{kl} + \sum_{kl=1}^3 \lambda_{33kl}^e x_3 \xi^{kl} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{kl=1}^3 \lambda_{i3kl}^e x_i \xi^{kl} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha\beta=1}^2 \lambda_{i3\alpha\beta}^e x_i \xi^{\alpha\beta} + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{i3\alpha 3}^e x_i \xi^{\alpha 3} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{i333}^e x_i \xi^{33} \\ &= 0 + 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_{i313}^e x_i \xi^{13} + 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_{i323}^e x_i \xi^{23} + \sum_{i=1}^3 \lambda_{i333}^e x_i \xi^{33} \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_{i313}^e x_i x_1 + \sum_{i=1}^3 \lambda_{i323}^e x_i x_2 + \sum_{i=1}^3 \lambda_{i333}^e x_i x_3 \\ &= \sum_{ik=1}^3 x_i D_{ik} x_k, \end{aligned}$$

et puisque  $\lambda^e$  est symétrique positif donc il existe  $\lambda^{e*}$  tel que

$$\sum_{ik=1}^3 x_i D_{ik} x_k = \sum_{ijkl=1}^3 \lambda_{ijkl}^e \xi^{ij} \xi^{kl} \geq \lambda^{e*} \sum_{ij=1}^3 (\xi^{ij})^2 \geq \lambda^{e*} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |x_i|^2 > 0.$$

□

Pour dire que  $\tilde{u}_T$  est unique à partir de  $M$  on utilise le Théorème de J.L. Lions (Theorem 10.14 dans [11]). Pour cela, on écrit  $\bar{A}$  de la manière suivante :

$$\bar{A} = \bar{A}^1 + \bar{A}^2,$$

avec

$$\bar{A}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{A}_1^1 \\ 0 & 0 & \bar{A}_2^1 \\ \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{A}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\tilde{u}_T) & \varepsilon_{12}(\tilde{u}_T) & \bar{A}_1^2 \\ \varepsilon_{21}(\tilde{u}_T) & \varepsilon_{22}(\tilde{u}_T) & \bar{A}_2^2 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 \end{pmatrix}.$$

C'est à dire on écrit

$$\bar{A}_{i3} = \bar{A}_i^1 + \bar{A}_i^2 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Et on suppose que

$$(\lambda^e : \bar{A}^1)_{i3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Alors,

$$(\lambda^e : \bar{A}^2)_{i3} = 0 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{II.4.36}$$

Par l'inversibilité de la matrice  $D$  dans Proposition II.4.5,  $(\bar{A}_i^1)_i$  s'écrit d'une manière unique en fonction de  $M$  et  $(\bar{A}_i^2)_i$  s'écrit d'une manière unique en fonction de  $\varepsilon(\tilde{u}_T)$ .

Finalement, l'équation (II.4.31) peut s'écrire comme suit : pour tout  $v_T \in H^1(\omega)$  tel que  $v_T = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$  on a :

$$- \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \frac{\partial \tilde{u}_T}{\partial t} \frac{\partial v_T}{\partial t} + \int_{\omega} (u_1)_T v_T(0, x) + a(t, \tilde{u}_T, v_T) = F(t, v_T), \tag{II.4.37}$$

avec

$$a(t, \tilde{u}_T, v_T) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{A}^2)_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T),$$

et

$$\begin{aligned} F(t, v_T) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} (g_T^+ + g_T^-) \cdot v_T + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T + \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{A}^1)_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T). \end{aligned}$$

On définit l'espace  $H_{\mathcal{C}_1}(\omega)$  par

$$H_{\mathcal{C}_1}(\omega) = \{v_T = (v_1, v_2) \in (H^1(\omega))^2 \text{ tel que } v_T = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_1\}.$$

On remarque maintenant que l'application  $N$  définit par

$$\begin{aligned} N : H_{\mathcal{C}_1}(\omega) \times H_{\mathcal{C}_1}(\omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_T &\longmapsto \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\varepsilon_{\alpha\beta}(v_T))^2 \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique, et par l'inégalité de Korn (II.2.1) dans  $\Omega_1$ , on peut démontrer que la semi-norme induite par  $N$  est une norme sur  $H_{\mathcal{C}_1}(\omega)$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\omega)}$ . Et maintenant, il est clair que  $a$  est une application bilinéaire continue symétrique de  $H_{\mathcal{C}_1}(\omega) \times H_{\mathcal{C}_1}(\omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , car  $\lambda^e$  est symétrique et  $F$  est une application linéaire continue de  $H_{\mathcal{C}_1}(\omega)$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . De plus,  $a$  est coercive : soit  $\tilde{u}_T \in H_{\mathcal{C}_1}(\omega)$ ,

$$\begin{aligned} a(t, \tilde{u}_T, \tilde{u}_T) &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{A}^2)_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_T) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} (\lambda^e : \bar{A}^2) : \bar{A}^2, \end{aligned}$$

car  $\bar{A}^2$  vérifie (II.4.36). Puisque  $\lambda^e$  est symétrique, il existe alors  $\lambda^{e*}$  tel que

$$a(t, \tilde{u}_T, \tilde{u}_T) \geq \lambda^{e*} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_T))^2.$$

Par conséquent, on peut appliquer le Théorème de J.L. Lions et obtenir que  $\tilde{u}_T$  est déduit de  $M$  d'une manière unique par (II.4.37). Le couplage (II.4.23) avec (II.4.37) décrit le comportement de la magnétisation et de la déformation tangentielle. Dans ce régime, les déformations normales n'ont aucun impact sur la magnétisation.

En conclusion, le modèle obtenu pour une plaque mince de matériau ferromagnétique avec

magnétostriction est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge H_{eff}(M) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \omega \\ H_{eff}(M) = \Delta M - (M, \vec{e}_3)\vec{e}_3 + \Psi(M) + (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A}))M - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)))M, \end{array} \right.$$

où  $\bar{A}$  est un 2-tenseur symétrique satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{u}_T}{\partial t^2} - \tilde{\text{div}}(\lambda^e : \bar{A}) = -\frac{1}{2}(g_T^+ + g_T^-) - \tilde{\text{div}}(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \omega, \\ \bar{A}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_T) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \\ (\lambda^e : \bar{A})_{i3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \omega, \\ \tilde{u}_T(0, \cdot) = (u_0)_T(\cdot) \quad \text{sur } \omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_T}{\partial t}(0, \cdot) = (u_1)_T(\cdot) \quad \text{sur } \omega, \\ (Q(\lambda^e : \bar{A}) - Q(\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) \cdot \nu = h_T \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_2, \end{array} \right.$$

où  $\nu$  est la normale sur  $\mathcal{C}_2$ ,  $\tilde{\text{div}}(S)$  et  $Q(S)$ , si  $S$  est un 2-tenseur, définissent par : pour  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ ,

$$\left( \tilde{\text{div}}(S) \right)_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 \partial_\beta S_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad (Q(S))_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}.$$

## II.5 Fil ferromagnétique avec magnétostriction

### II.5.1 Modèle tridimensionnel de fil ferromagnétique avec magnétostriction

On considère un fil ferromagnétique  $\Omega_\eta$  de la forme

$$\Omega_\eta = ]0, L[ \times B_2(0, \eta),$$

avec  $B_2(0, \eta)$  est la boule de rayon  $\eta$  et de centre 0 dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\eta$  est une petite constante positive. On divise la frontière de  $\Omega_\eta$  en trois parties  $\partial\Omega_\eta = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i^\eta$ , tel que le matériau est encastré sur  $\Gamma_1^\eta = \{0\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , et on désigne par  $\Gamma_2^\eta = ]0, L[ \times S^1(0, \eta)$  et  $\Gamma_3^\eta = \{L\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , tel que  $S^1(0, \eta) = \{(y, z); y^2 + z^2 = \eta^2\}$ .

Cette section est organisée comme suit ; au début, on définit l'isomorphisme qui permet

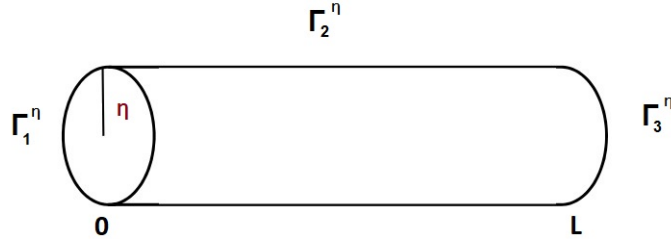


FIGURE II.2 –  $\Omega_\eta = ]0, L[ \times B_2(0, \eta)$ .

de trouver une déformation définit seulement sur  $]0, L[$  (voir (II.5.8)). Ensuite, on considère une solution pour le modèle (II.1.1)-(II.1.2) sur  $\Omega_\eta$  et à partir de ce modèle, on définit un nouveau modèle sur  $\Omega_1$  par un changement d'échelle convenable, qui permet de passer à la limite lorsque le rayon du fil  $\eta$  tend vers zéro.

**Définition II.5.1.** On définit les espaces suivants :

$$V^\eta = \{v \in H^1(\Omega_\eta); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\eta\}$$

$$\tilde{V}_{KL}(\Omega_1) = \{v \in H^1(\Omega_1); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^1 \text{ et } \varepsilon_{\alpha i}(v) = 0 \text{ dans } \Omega_1 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}\}$$

$$V(0, L) = \left\{ (v_i)_i \in H^1(0, L) \times (H^2(0, L))^2; v_i(0) = 0 \text{ et } \partial_1 v_\alpha(0) = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\} \right\}.$$

**Proposition II.5.2.** Soit  $J$  l'application définie par

$$\begin{aligned} J : V(0, L) &\longrightarrow \tilde{V}_{KL}(\Omega_1) \\ (v_i)_i &\longmapsto ((v_1 - y\partial_1 v_2 - z\partial_1 v_3), v_2, v_3). \end{aligned}$$

Alors,  $J$  est un isomorphisme.

**Preuve.** La procédure consiste à prouver que  $J$  est une application continue, injectif et surjectif.

Soit  $v \in V(0, L)$ , on remarque que  $J(v) \in H^1(\Omega_1)$  et il existe un constant positif  $c$  tel que :

$$\|J(v)\|_{H^1(0, L)} \leq C\|v\|_{V(0, L)},$$

alors  $J$  est continu parce qu'il est linéaire.

Supposons que  $J(v) = 0$ , cela force clairement  $v = 0$ , donc  $J$  est injectif.

Soit  $g \in \tilde{V}_{KL}(\Omega_1)$ , alors  $g = 0$  sur  $\Gamma_1^1$  et

$$\varepsilon_{\alpha i}(g) = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\},$$

donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial g_3}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial z} + \frac{\partial g_3}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_3}{\partial z} = 0.\end{aligned}$$

Pour contourner l'ambiguïté, on se limitera désormais à des solutions pour lesquelles la régularité supplémentaire

$$(g_2, g_3) \in (H^2(\Omega_1))^2.$$

Des équations ci-dessus, on déduit que

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} = 0,$$

donc, il existe  $v_1, v_2$  et  $v_3$  dans  $H^1(0, L)$  tel que

$$g_1(x, y, z) = v_1(x) + yv_2(x) + zv_3(x).$$

De plus,

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial g_3}{\partial x} = 0$$

donc,

$$v_2(x) = -\frac{\partial g_2}{\partial x} \quad \text{et} \quad v_3(x) = -\frac{\partial g_3}{\partial x}.$$

Par ailleurs,  $g = 0$  sur  $\Gamma_1^1$ , donc  $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$ , et la preuve de la Proposition [II.5.2](#) est complète.  $\square$

On considère  $m_0 \in H^1(]0, L[; S^2(0, 1))$ ,  $\bar{u}_0 \in V(0, L)$ ,  $u_1 \in L^2(0, L)$  tel que  $(u_1)_\alpha = 0$  pour  $\alpha = 2, 3$ ,  $f = (f_i) \in H^1(\Gamma_2^1) \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2^1)\right)^2$  et  $F \in \mathbb{R}$ . On désigne par  $u_0$  l'image de  $\bar{u}_0$  par l'isomorphisme  $J$  donné dans la Proposition [II.5.2](#) et on définit  $m_0^\eta, u_0^\eta$  dans  $H^1(\Omega_\eta)$ ,  $u_1^\eta \in L^2(\Omega_\eta)$  et  $f^\eta$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2^\eta)$  par le suivant : pour  $(x, y, z) \in \Omega_\eta$ ,

$$\begin{aligned}m_0^\eta(x, y, z) &= m_0(x), \\ u_{01}^\eta(x, y, z) &= u_{01} \left(x, \frac{y}{\eta}, \frac{z}{\eta}\right), \quad u_{0\alpha}^\eta(x, y, z) = \frac{1}{\eta} u_{0\alpha} \left(x, \frac{y}{\eta}, \frac{z}{\eta}\right) \quad \text{pour } \alpha \in \{2, 3\}, \\ u_1^\eta(x, y, z) &= u_1(x), \\ f_1^\eta(x, y, z) &= f_1 \left(x, \frac{y}{\eta}, \frac{z}{\eta}\right), \quad f_\alpha^\eta(x, y, z) = \eta f_\alpha \left(x, \frac{y}{\eta}, \frac{z}{\eta}\right) \quad \text{pour } \alpha \in \{2, 3\}.\end{aligned} \tag{II.5.1}$$

Donc, par le Théorème [II.3.3](#), il existe  $(m^\eta, u^\eta)$  vérifie :



1.  $m^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$  satisfait  $|m^\eta(t, x)| = 1$  p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta$ ,
2.  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$ ,
3.  $m^\eta(0, \cdot) = m_0^\eta$ ,  $u^\eta(0, \cdot) = u_0^\eta$  et  $\frac{\partial u^\eta}{\partial t}(0, \cdot) = u_1^\eta(\cdot)$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\eta)$ ,
4.  $u^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^\eta)$  et  $\frac{\partial u^\eta}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$ ,
5. pour tout  $\chi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} - m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \chi^\eta(t, x) dt dx = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \sum_{i=1}^3 m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi^\eta}{\partial x_i} \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge (h_d(m^\eta) + \Psi(m^\eta) + (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)))m^\eta) \cdot \chi^\eta \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)))m^\eta) \cdot \chi^\eta, \end{aligned}$$

6. pour tout  $\xi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V^\eta)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi^\eta}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^\eta} f^\eta \cdot \xi^\eta + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_3^\eta} F \xi^\eta \cdot \vec{e}_1 \\ & - \int_{\Omega_\eta} u_1^\eta \cdot \xi^\eta(0, x) = - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta), \end{aligned} \tag{II.5.2}$$

7. pour tout  $t \geq 0$ , on a l'inégalité de l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}(m^\eta, u^\eta) + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}(m_0^\eta, u_0^\eta)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(m^\eta, u^\eta) = & \int_{\Omega_\eta} [|\nabla m^\eta|^2 + \Phi(m^\eta)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \mathcal{Q}(m^\eta) \\ & - \int_{\Omega_\eta} \varepsilon(u^\eta) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 - \int_{\Gamma_2^\eta} f^\eta \cdot u^\eta - \int_{\Gamma_3^\eta} F u^\eta \cdot \vec{e}_1 d\Gamma. \end{aligned}$$

Le domaine  $\Omega_\eta$  dépend de  $\eta$ . Pour résoudre ce problème, on va traiter une nouvelle version

du système en introduisant  $M^\eta$ ,  $h_d^\eta$  et  $U^\eta$  donnés par : pour  $(x, y, z) \in \Omega_1$

$$\begin{aligned}
 M^\eta(t, x, y, z) &= m^\eta(t, x, \eta y, \eta z) \\
 h_d^\eta(t, x, y, z) &= h_d(m^\eta(t, x, \eta y, \eta z)) \\
 U_1^\eta(t, x, y, z) &= u_1^\eta(t, x, \eta y, \eta z) \\
 U_\alpha^\eta(t, x, y, z) &= \eta u_\alpha^\eta(t, x, \eta y, \eta z) \text{ pour } \alpha, \beta \in \{2, 3\}.
 \end{aligned} \tag{II.5.3}$$

On définit le 2-tenseur  $\varepsilon(\eta, \xi)$  par : pour  $\xi \in V^1$  :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}(\eta, \xi) &= \varepsilon_{11}(\xi), \\
 \varepsilon_{\alpha 1}(\eta, \xi) &= \frac{1}{\eta} \varepsilon_{\alpha 1}(\xi) \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\}, \\
 \varepsilon_{\alpha\beta}(\eta, \xi) &= \frac{1}{\eta^2} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) \text{ pour } \alpha, \beta \in \{2, 3\}.
 \end{aligned} \tag{II.5.4}$$

Ainsi, l'énergie redimensionné écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^\eta(t) &= \frac{1}{\eta^2} \mathcal{E}(t) \\
 &= \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega_1} \left( \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial z} \right|^2 \right) + \int_{\Omega_1} \Phi(M^\eta) + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d^\eta|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} [(\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)) : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta) - 2\varepsilon(\eta, U^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta))] \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left[ (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta) + \left| \frac{\partial U_1^\eta}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{\eta^2} \sum_{\alpha=2}^3 \left| \frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t} \right|^2 \right] \\
 &- \int_{\Gamma_2^1} f \cdot U^\eta - \int_{\Gamma_3^1} F U^\eta \cdot \vec{e}_1 d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(M^\eta, U^\eta)$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $M^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$  satisfait  $|M^\eta(t, x)| = 1$  p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1$ ,
2.  $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ ,
3.  $M^\eta(0, \cdot) = m_0$  et  $U^\eta(0, \cdot) = u_0$  et  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t}(0, \cdot) = u_1$  dans le sens de trace,
4.  $U^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^1)$  et  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1))$ ,

5. pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \chi = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \\
 & + \frac{2}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (h_d^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \chi \\
 & - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta))) M^\eta) \cdot \chi \\
 & + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta))) M^\eta) \cdot \chi,
 \end{aligned} \tag{II.5.5}$$

6. pour tous  $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V^1)$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \frac{\partial U_1^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{1}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=2}^3 \frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi) \\
 & + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^1} f \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_3^1} F \xi \cdot \vec{e}_1 i - \int_{\Omega_1} u_1 \cdot \xi(0, x) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi),
 \end{aligned} \tag{II.5.6}$$

7. pour tout  $t > 0$ , on a l'inégalité d'énergie suivante

$$\mathcal{E}^\eta(t) + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0). \tag{II.5.7}$$

Depuis que les données initiales  $m_0$ ,  $\bar{u}_0$  et  $u_1$ , on a  $M^\eta(0)$ ,  $\varepsilon(\eta, U^\eta(0))$  et  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t}(0)$  ne dépendent pas de  $\eta$ , car  $U^\eta(0) = u_0 \in \tilde{V}_{Kl}(\Omega_1)$  et  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t}(0) = u_1$  tel que  $(u_1)_\alpha = 0$  pour  $\alpha = 2, 3$ . Donc, le côté droit de l'inégalité d'énergie (II.5.7) est uniformément borné par rapport à  $\eta$ . On applique la même astuce de calcul de Section II.4.3, on obtient que les quantités suivantes sont bornées uniformément par rapport à  $\eta$  : c'est à dire, il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $T > 0$  on a :

- $\|M^\eta\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega_1))} \leq C$
- $\left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial y} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} + \left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial z} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq \eta C,$
- $\|U^\eta\|_{L^\infty(0,T;V^1)} \leq C,$
- $\left\| \frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\frac{1}{\eta} \left\| \frac{\partial U_2^\eta}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} + \frac{1}{\eta} \left\| \frac{\partial U_3^\eta}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\|\varepsilon(\eta, U^\eta)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$

- $\|h_d^\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C$ .

Ainsi, on peut maintenant extraire des sous-suites encore notées par  $M^\eta$ ,  $U^\eta$  et  $h_d^\eta$ , de sorte que :

- $M^\eta \rightharpoonup M$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$  faible\*,
- $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial M}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible,
- $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $L^\infty(0, T; V^1)$  faible\*,
- $\frac{\partial U^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible\*,
- $h_d^\eta \rightharpoonup H$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$  faible\*.

De plus, on a  $\frac{\partial M^\eta}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial M^\eta}{\partial z}$  et  $\frac{\partial U_\alpha^\eta}{\partial t}$  pour  $\alpha = 2, 3$  tend vers zéro dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  fort, donc  $M$  dépend seulement de  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, L[$  et ne dépend pas de  $y$  et  $z$  et  $U_\alpha^\eta$  ne dépend pas du temps pour  $\alpha = 2, 3$ . On remarque également que  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, cela donne que

$$\varepsilon_{\alpha i}(U^\eta) \rightarrow 0 \text{ fort dans } L^2(\Omega) \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\},$$

et puisque  $U = 0$  sur  $\Gamma_1^1$ , on a  $U \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \tilde{V}_{KL}(\Omega_1))$ . Il existe donc  $\bar{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V(0, L))$  antécédent de  $U$  par isomorphisme  $J$  (Proposition II.5.2), tel que :

$$U_1(t, x, y, z) = \bar{u}_1(t, x) - y\partial_1\bar{u}_2(t, x) - z\partial_1\bar{u}_3(t, x), \tag{II.5.8}$$

$$U_\alpha(t, x, y, z) = \bar{u}_\alpha(t, x) \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\},$$

avec  $\partial_1 \cdot$  représente  $\frac{\partial \cdot}{\partial x}$ .

Par ailleurs, on a  $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $V^1$  faible et  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, donc

$$\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A \text{ faible* dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1)), \tag{II.5.9}$$

avec  $A$  est un 2-tenseur symétrique vérifie

$$A_{11} = \varepsilon_{11}(U). \tag{II.5.10}$$

Par l'utilisation de la Lemme II.2.3 d'Aubin-Simon, on peut prouver que  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^r(\Omega_1))$  fort pour  $r < 6$ , et en extrayant une sous-suite de  $M^\eta$ , on peut supposer que  $M^\eta \rightarrow M$  presque partout dans  $\mathbb{R}^+ \times ]0, L[$ , donc  $M$  satisfait la contrainte de saturation  $|M(t, x)| = 1$  presque partout dans  $\mathbb{R}^+ \times ]0, L[$ , et  $M(0, x) = m_0(x)$  dans le sens de trace.

### II.5.2 Passage à la limite dans les formulations faibles lorsque le rayon du fil tend vers zéro

Soit  $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}([0, L]))$ . On définit  $\chi$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \Omega_1$  par  $\chi(t, x, y, z) = \tilde{\chi}(t, x)$ . Donc,  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1))$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$ , donc on peut mettre  $\chi$  comme fonction test dans (II.5.5) et obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \chi &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (h_d^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \chi \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge [(\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)))M^\eta - (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)))M^\eta] \cdot \chi. \end{aligned} \quad (\text{II.5.11})$$

Maintenant, on passe à la la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro dans (II.5.11) terme par terme :

On a  $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial M}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible et  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega_1))$  fort, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \chi &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \chi \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^+ \times ]0, L[} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \tilde{\chi}. \end{aligned}$$

On a  $\Psi$  est continue,  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  fort et  $h_d^\eta \rightharpoonup H$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$  faible\*, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (h_d^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \chi &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M \wedge (h_d^0 + \Psi(M)) \cdot \chi \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^+ \times ]0, L[} M \wedge (h_d^0 + \Psi(M)) \cdot \tilde{\chi}. \end{aligned}$$

De plus,  $M^\eta \rightharpoonup M$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$  faible\* et  $\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A$  dans  $L^2(\Omega_1)$  faible, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M \wedge \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^+ \times ]0, L[} M \wedge \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)))M^\eta) \cdot \chi \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)))M) \cdot \chi \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^+ \times ]0, L[} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)))M) \cdot \tilde{\chi} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta)))M^\eta) \cdot \chi &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\wedge((\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : A))M) \cdot \chi \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times ]0, L[} M^\wedge((\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \bar{A}))M) \cdot \tilde{\chi}, \end{aligned}$$

avec  $\bar{A}$  est donné par

$$\bar{A}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{B_2(0,1)} A(x, y, z) dydz,$$

donc, par (II.5.10),  $\bar{A}$  est un 2-tenseur symétrique vérifie

$$\bar{A}_{11} = \varepsilon_{11}(\bar{u}), \quad (\text{II.5.12})$$

car

$$\int_{B_2(0,1)} y dydz = \int_{B_2(0,1)} z dydz = 0.$$

Par conséquent, la limite de (II.5.11) lorsque  $\eta$  tends vers zéro, donne : pour tout  $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1([0, L]))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \tilde{\chi} &= -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} M \wedge \nabla M \cdot \nabla \tilde{\chi} - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} M \wedge (H + \Psi(M)) \cdot \tilde{\chi} \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} M \wedge (\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \bar{A}))M \cdot \tilde{\chi} + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} M \wedge ((\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : M \otimes M)))M) \cdot \tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.13})$$

La limite du champ de démagnétisant  $H$  est déjà décrite dans [13] comme suit :

$$H(t, x, y, z) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2(t, x) \\ M_3(t, x) \end{pmatrix} & \text{pour } (x, y, z) \in \Omega_1, \\ \frac{1}{2} \frac{1}{(y^2 + z^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2(t, x)(y^2 - z^2) + 2M_3(t, x)yz \\ -M_3(t, x)(y^2 - z^2) - 2M_2(t, x)yz \end{pmatrix} & \\ \text{for } x \in [0, L] \text{ et } y^2 + z^2 > 1, & \\ 0 & \text{pour } x \notin [0, L]. \end{cases} \quad (\text{II.5.14})$$

Pour passer à la limite dans la formulation faible (II.5.2), on prend le cas isotrope de  $\lambda^{\text{e}}$

donné par : pour tout 2-tenseur symétrique  $S$  :

$$(\lambda^e : S) = \frac{E}{1 + \nu} \left( S + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(S) I_3 \right), \quad (\text{II.5.15})$$

avec  $E$  et  $\nu$  sont deux constantes positives et

$$\text{tr}(S) = S_{11} + S_{22} + S_{33}.$$

Soit  $v \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(0, L))$  tel que  $v(0) = 0$ . On définit  $\xi \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^1)$  par :

$$\begin{aligned} \xi_1(t, x, y, z) &= v(t, x), \\ \xi_\alpha(t, x, y, z) &= 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\}, \end{aligned}$$

donc,

$$\varepsilon_{11}(\xi) = \partial_1 v \text{ et } \varepsilon_{i\alpha}(\xi) = 0 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\} \text{ et } \alpha \in \{2, 3\}.$$

On met  $\xi$  comme fonction test dans la formulation faible (II.5.6), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \frac{\partial U_1^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta))_{11} \varepsilon_{11}(\xi) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2^1} f \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_3^1} F \xi \cdot \vec{e}_1 \\ & - \int_{\Omega_1} u_1 \cdot \xi(t=0) = - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta))_{11} \varepsilon_{11}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.16})$$

On passe à la limite dans (II.5.16) lorsque  $\eta$  tend vers zéro.

Soit  $[0, T]$  le support de  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On a  $\frac{\partial U^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U}{\partial t}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible\*, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \frac{\partial U_1^\eta}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \frac{\partial \bar{u}_T}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.17})$$

Donc, par utilisation de (II.5.9) et la limite fort de  $M^\eta$  dans  $L^4(\Omega_1)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} \frac{\partial \bar{u}_T}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} (\lambda^e : \bar{A})_{11} \partial_1 v + \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} \bar{f}_1 \cdot v + F \int_{\mathbb{R}}^+ v(t, L) \\ & - \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} (u_1)_1 v(0, x) = - \int_0^L (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11} \partial_1 v, \end{aligned} \quad (\text{II.5.18})$$

tel que

$$\bar{f}_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} f_1(x, y, z) dydz.$$

Dans ce qui suit, on va décrire  $(\lambda^e : \bar{A})$  à l'indice  $(\alpha, i)$ , pour  $\alpha \in \{2, 3\}$  et  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Étape 1 :** Pour  $\xi \in V^1$ , on multiplie (II.5.6) par  $\eta^2$  et on passe à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha\beta=2}^3 (\lambda^e : A)_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha\beta=2}^3 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi).$$

Prendre

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ y\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times (0, L))$ , donc  $\varepsilon_{22}(\xi) = \varphi$  et  $\varepsilon_{23}(\xi) = \varepsilon_{33}(\xi) = 0$ . Puisque  $M$  et  $\varphi$  dépend seulement de  $(t, x)$ , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} (\lambda^e : \bar{A})_{22} \varphi = \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, L)} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{22} \varphi,$$

et c'est vrai pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times (0, L))$ , donc vrai pour tout  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^+ \times (0, L))$ . Donc,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{22} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{22} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times (0, L)). \quad (\text{II.5.19})$$

De la même manière et si on prend  $\xi = (0, z\varphi, 0)$  or  $\xi = (0, 0, z\varphi)$ , on obtient : pour  $\alpha \in \{2, 3\}$

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha 3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha 3} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times (0, L)). \quad (\text{II.5.20})$$

**Étape 2 :** Prendre  $\xi = (y\varphi, 0, 0)$  ou  $\xi = (z\varphi, 0, 0)$  dans (II.5.6), avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times (0, L))$  et multiplier cette équation par  $\eta$ , puis prendre  $\eta$  vers zéro, on obtient : pour  $\alpha \in \{2, 3\}$

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha 1} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha 1} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+ \times (0, L)). \quad (\text{II.5.21})$$

Par les équations (II.5.12) et (II.5.15) , on a

$$(\lambda^e : \bar{A})_{11} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \partial_1 \bar{u}_1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\bar{A}) \right),$$

avec

$$\text{tr}(\bar{A}) = \partial_1 \bar{u}_1 + \bar{A}_{22} + \bar{A}_{33}.$$

Donc, la somme de (II.5.19) avec (II.5.20) pour  $\alpha = 3$  s'ensuit que

$$\bar{A}_{22} + \bar{A}_{33} = -2\nu \partial_1 \bar{u}_1 + 2\nu (\lambda^m : M \otimes M)_{11} + (\lambda^m : M \otimes M)_{22} + (\lambda^m : M \otimes M)_{33}. \quad (\text{II.5.22})$$



Donc,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{11} - (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11} = E(\partial_1 \bar{u}_1 - (\lambda^m : M \otimes M)_{11}). \quad (\text{II.5.23})$$

Par conséquent, (II.5.18) avec (II.5.23) donne que  $\bar{u}_1$  est déduit de  $M$  par l'équation d'onde unidimensionnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} - E \partial_{xx} \bar{u}_1 = \bar{f}_1 - E \partial_x (\lambda^m : M \otimes M)_{11} \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L), \\ \bar{u}_1(0, x) = (u_0)_1(x) \quad \text{sur } (0, L), \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}(0, x) = (u_1)_1(x) \quad \text{sur } (0, L), \\ \bar{u}_1(t, 0) = 0 \quad \forall t, \\ \partial_x \bar{u}_1(t, L) = \frac{F}{E} + (\lambda^m : M \otimes M)_{11}(t, L) \quad \forall t. \end{array} \right. \quad (\text{II.5.24})$$

Par conséquent, les équations (II.5.19)-(II.5.20)-(II.5.21) et (II.5.23) permettent de réécrire (II.5.13) et obtenir que  $M$  est une solution faible pour le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge \tilde{H}_{eff}, \\ \tilde{H}_{eff} = \partial_{11} M + \Psi(M) + (M \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\lambda^m : \mathcal{U}) M \end{array} \right. \quad (\text{II.5.25})$$

où  $\partial_{11} \cdot$  représente  $\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$  et  $\mathcal{U}$  est un 2-tenseur donné par :

$$\mathcal{U}_{11} = E(\partial_1 \bar{u}_1 - (\lambda^m : M \otimes M)_{11}) \text{ et } \mathcal{U}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Le modèle (II.5.25) couplé avec (II.5.24) est fermé par le Théorème de J.L. Lions (Théorème 10.14 dans [11]). En outre, ce couplage caractérise seulement les déformations longitudinales, de sorte que seule l'extension du fil a une influence sur la magnétisation.



---

---

# CHAPITRE III

---

## MODÈLE QUASI-STATIONNAIRE POUR L'ÉQUATION DE LANDAU-LIFSCHITZ-GILBERT AVEC MAGNÉTOSTRICTION

### Sommaire

---

III.1	Introduction . . . . .	99
III.2	Modèle quasi stationnaire . . . . .	99
III.2.1	Limite de $m^n$ . . . . .	101
III.2.2	Moyenne temporelle appropriée . . . . .	103
III.2.3	Passage à la limite lorsque $n$ tend vers l'infini . . . . .	105
III.3	Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction . . . . .	118
III.3.1	Modèle tridimensionnel, changement d'échelle et passage à la limite . . . . .	118
III.3.2	Cas particulier de $\lambda^e$ . . . . .	124
III.4	Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	130
III.4.1	Modèle tridimensionnel, changement d'échelle et passage à la limite . . . . .	130
III.4.2	Cas particulier de $\lambda^e$ . . . . .	137
III.4.3	Étude de la stabilité des solutions stationnaires . . . . .	140
III.4.4	Études numériques du modèle unidimensionnel pour un nanofil ferromagnétique avec magnétostriction . . . . .	151

---

## III.1 Introduction

Dans le Chapitre II, on a démontré l'existence de solutions faibles globale en temps pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction et avec des conditions mixtes aux bords. Dans ce chapitre, en faisant tendre  $\rho$  vers zéro, on obtient un modèle quasi stationnaire couplant l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert et l'élasticité stationnaire. Le modèle obtenu n'est pas physique car en réalité la constante  $\rho$  n'est pas petite, donc la faire tendre vers zéro n'est pas justifiée sur le plan de la physique. L'avantage de ce modèle c'est qu'il permet d'écrire le comportement asymptotique normal pour la déformation dans le cas des plaques et les comportements asymptotiques transversales dans le cas des fils.

Ce chapitre est organisé comme suit ; Dans la section suivante, on va dériver un modèle quasi stationnaire en utilisant une méthode de moyenne temporelle appropriée (cf. [18]).

Dans la troisième section, on va dériver un modèle bidimensionnel de plaque mince en utilisant une méthode d'expansion asymptotique déjà utilisée dans la Section II.4 de Chapitre II, qui permet de caractériser les déplacements normaux de la déformation dans le cas isotrope de  $\lambda^e$ .

Dans la dernière section, on va considérer un nanofil ferromagnétique et on va obtenir par les processus asymptotiques utilisés dans la Section II.5 de Chapitre II, un modèle unidimensionnel de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert qui ne dépend que de la magnétisation. On va étudier la stabilité de quelques solutions stationnaires dans le sens de Liapunov de ce modèle, ainsi que la convergence de son schéma numérique. Le cas isotrope de  $\lambda^e$  permet de calculer explicitement les comportements asymptotiques transverses pour la déformation.

## III.2 Modèle quasi stationnaire

On considère un matériau ferromagnétique occupant le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , de frontière régulière  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , tel que le matériau est encastré sur  $\Gamma_1$ . On suppose qu'une force surfacique  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$  est appliquée sur  $\Gamma_2$ . On définit l'espace  $V(\Omega)$  par

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit la suite  $(\rho_n)_n$ , tel que  $\rho_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Soit  $m_0 \in H^1(\Omega; S^2)$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega)$  et  $u_1 \in L^2(\Omega)$ . Donc, d'après le Théorème II.3.3, il existe  $(m^n, u^n)$  une famille de solutions faibles de (II.1.1)-(II.1.2)-(II.1.4), avec  $\rho = \rho_n$ , qui vérifie

1.  $m^n \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$  satisfait la contrainte de saturation  $|m^n(t, x)| = 1$  pour presque tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ ,
2.  $\frac{\partial m^n}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,
3.  $m^n(0, \cdot) = m_0$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ ,

4.  $u^n \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$  et  $\frac{\partial u^n}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,

5.  $u^n(0, \cdot) = u_0$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ ,

6. pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \frac{\partial m^n}{\partial t} - m^n \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t} \right) \chi(t, x) dt dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m^n \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n \wedge (h_d(m^n) + \Psi(m^n)) \cdot \chi - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^n))) m^n \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n \otimes m^n))) m^n \cdot \chi, \end{aligned} \quad (\text{III.2.1})$$

7. pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$

$$\begin{aligned} \rho_n \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \frac{\partial u^n}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^n)) : \varepsilon(\chi) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \Gamma_2} f \cdot \chi - \rho_n \int_{\Omega} u_1 \chi(0, x) \\ = - \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n \otimes m^n)) : \varepsilon(\chi), \end{aligned} \quad (\text{III.2.2})$$

8. pour tout  $t \geq 0$ , on a l'inégalité de l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}^n(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^n(0) \quad (\text{III.2.3})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n(t) &= \int_{\Omega} [|\nabla m^n|^2 + \Phi(m^n)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^n)|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathcal{Q}(m^n) - 2\varepsilon(u^n) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n \otimes m^n))] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^n)) : \varepsilon(u^n) + \rho_n \left| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right|^2 \right] - \int_{\Gamma_2} f \cdot u^n d\Gamma. \end{aligned}$$

**Définition III.2.1.** On dit que  $(m, u)$  est une solution faible du modèle quasi-stationnaire si

1.  $(m, u)$  satisfait

$$m \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)), |m(t, x)| = 1 \text{ p.p.}, \frac{\partial m}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)), u \in V(\Omega) \quad (\text{III.2.4})$$

2.  $m(0, \cdot) = m_0$  and  $u(0, \cdot) = u_0$ ,

3. pour tout  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} \right) \chi(t, x) dt dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m \wedge \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \\ -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge (h_d(m) + \Psi(m)) \cdot \chi &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : \varepsilon(u)))m \\ &- (\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)))m) \cdot \chi, \end{aligned} \quad (\text{III.2.5})$$

4. pour tout  $\xi \in V(\Omega)$ ,

$$- \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(\xi) + \int_{\Gamma_2} f \cdot \xi = - \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) : \varepsilon(\xi), \quad (\text{III.2.6})$$

5. on a l'inégalité d'énergie suivante : pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathcal{E}_q(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}_q(0) \quad (\text{III.2.7})$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(t) &= \int_{\Omega} [|\nabla m|^2 + \Phi(m)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m)) : (\lambda^m : m \otimes m) - 2\varepsilon(u) : (\lambda^e : (\lambda^m : m \otimes m))] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u)) : \varepsilon(u) - \int_{\Gamma_2} f \cdot u d\Gamma. \end{aligned}$$

Par processus asymptotique, on obtient le théorème suivant :

**Théorème III.2.2.** *Il existe une suite désignée par  $(m_n, u_n)_n$  tel que  $m_n$  tend vers une limite  $m^\infty$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$  faible\* et  $u_n$  tend vers une limite  $u^\infty$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$  faible\*, où  $(m^\infty, u^\infty)$  est une solution du modèle quasi-stationnaire (III.2.4)-(III.2.7).*

Dans la suite de cette section, on va prouver le Théorème III.2.2.

### III.2.1 Limite de $m^n$

**Proposition III.2.3.** *les suites suivantes sont bornées uniformément par rapport à  $n$  :*

- $(m^n)_n$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$ ,
- $(u^n)_n$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$ ,
- $(\frac{\partial m^n}{\partial t})_n$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ ,
- $(\rho_n^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u^n}{\partial t})_n$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ .

*Preuve.* On a  $(m^n, u^n)$  vérifie l'inégalité d'énergie :

$$\mathcal{E}^n(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^n(0)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n(0) = & \int_{\Omega} [|\nabla m_0|^2 + \Phi(m_0)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_0)|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda^e : (\lambda^m : m_0 \otimes m_0)) : (\lambda^m : m_0 \otimes m_0) - 2\varepsilon(u_0) : (\lambda^e : (\lambda^m : m_0 \otimes m_0))] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda^e : \varepsilon(u_0)) : \varepsilon(u_0) + \rho_n |u_1|^2] - \int_{\Gamma_2} f \cdot u_0 \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Puisque  $(\rho_n)_n$  est bornée uniformément par rapport à  $n$ ,  $\mathcal{E}^n(t)$  est aussi borné et il existe  $C > 0$  indépendant de  $n$  tel que

$$\mathcal{E}^n(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right|^2 \leq C.$$

On a  $\Phi(m^n)$  et  $\mathcal{Q}(m^n)$  sont positifs, par le Lemme II.2.9,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^n) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^n \otimes m^n)) \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^n)) : \varepsilon(u^n) + \int_{\Omega} \mathcal{Q}(m^n)$$

et par la continuité de  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_2)$ , il existe  $c > 0$  tel que

$$\int_{\Gamma_2} f \cdot u^n \, d\Gamma \leq c \|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u^n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc, l'utilisation de l'inégalité de Korn II.2.1 et la positivité du 4-tenseur  $\lambda^e$ , donne qu'il existe  $\lambda^{e*}$  et  $C > 0$  tel que

$$\|\nabla m^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho_n}{2} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda^{e*}}{4} \|\varepsilon(u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - c \|f\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\varepsilon(u^n)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right|^2 \leq C. \quad (\text{III.2.8})$$

De plus  $|m^n| = 1$  pour tout  $n$ , c'est pourquoi  $(m^n)_n$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$  et par l'inégalité (III.2.8) les autres termes de la Proposition III.2.3 sont bornés.  $\square$

Par suite, par Proposition III.2.3, on peut extraire une sous suite, notée aussi  $(m^n)_n$ , tel qu'il existe  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; S^2))$  qui vérifie

- $m^n \rightharpoonup m$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$  faible\*,
- $m^n \rightarrow m$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  fort, pour tout  $T > 0$  (d'après Lemme II.2.3),

- $\frac{\partial m^n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  faible pour tout  $T > 0$ .

### III.2.2 Moyenne temporelle appropriée

Pour une constante  $a > 0$ . On définit les moyennes temporelles  $m_a^n$  et  $u_a^n$  par

$$\begin{aligned} m_a^n(t, x) &:= \frac{1}{a} \int_0^a m^n(t + s, x) ds \\ u_a^n(t, x) &:= \frac{1}{a} \int_0^a u^n(t + s, x) ds. \end{aligned} \tag{III.2.9}$$

**Lemme III.2.4.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $a > 0$ ,  $(m_a^n, u_a^n)$  satisfait les estimations suivantes :*

1.  $\|m_a^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))} \leq \|m^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))}$ ,
2.  $\|u_a^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))} \leq \|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V)}$ ,
3.  $\left\| \frac{\partial m_a^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \leq \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}$ .

*Preuve.* 1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |m_a^n|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \frac{1}{a} \int_0^a m^n(t + s, x) ds \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} \left( \int_0^a ds \cdot \int_0^a |m^n(t + s, x)|^2 ds \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{\Omega} \int_0^a |m^n(t + s, x)|^2 ds dx \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^a \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left( \int_{\Omega} |m^n(t, x)|^2 dx \right) \\ &= \|m^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

2. On utilise les même argument pour démontrer la deuxième inégalité.

3. On a

$$\frac{\partial m_a^n}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{a} (m^n(t + a, x) - m^n(t, x)) = \int_0^1 \frac{\partial m^n}{\partial t}(t + \theta a, x) d\theta,$$



alors,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m_a^n}{\partial t}(s, x) \right|^2 ds &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \int_0^1 \frac{\partial m^n}{\partial t}(s + \theta a, x) d\theta \right|^2 ds \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^+} \left( \int_0^1 d\theta \cdot \int_0^1 \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(s + \theta a, x) \right|^2 d\theta \right) ds \\
 &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(s + \theta a, x) \right|^2 ds d\theta \\
 &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \right|^2 ds d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \right|^2 ds,
 \end{aligned}$$

donc,

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m_a^n}{\partial t}(s, x) \right|^2 ds dx \leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \right|^2 ds dx.$$

□

**Lemme III.2.5.** *Pour tout  $a > 0$ , on a l'estimation suivante*

$$\|m_a^n - m^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \leq \sqrt{a} \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \quad (\text{III.2.10})$$

*Preuve.* Par la définition (III.2.9) de  $m_a^n$  on a

$$\begin{aligned}
 m_a^n(t, x) - m^n(t, x) &= \frac{1}{a} \int_0^a (m^n(t + s, x) - m^n(t, x)) ds \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^s \frac{\partial m^n}{\partial t}(t + \tau) d\tau ds,
 \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 |m_a^n(t, x) - m^n(t, x)|^2 &\leq \left| \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^s \frac{\partial m^n}{\partial t}(t + \tau) d\tau ds \right|^2 \\
 &\leq \frac{1}{a^2} \left( \int_0^a \int_0^s d\tau ds \right) \cdot \left( \int_0^a \int_0^s \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t + \tau) \right|^2 d\tau ds \right) \\
 &\leq \frac{1}{a^2} \frac{a^2}{2} a \int_t^{t+a} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(\tau) \right|^2 d\tau, \\
 &\leq a \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(\tau) \right|^2 d\tau
 \end{aligned}$$

d'où,

$$\int_{\Omega} |m_a^n(t, x) - m^n(t, x)|^2 dx \leq a \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(\tau, x) \right|^2 d\tau dx$$

□

III.2.3 Passage à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini

On choisit

$$a_n = \rho_n^{\frac{1}{4}}.$$

On définit les suites  $(m_n)_n$  et  $(u_n)_n$  par

$$m_n := m_{a_n}^n \quad \text{et} \quad u_n := u_{a_n}^n.$$

Grâce à la Proposition III.2.3 et au Lemme III.2.4, il existe  $m_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; S^2))$  et  $u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$ , après l'extraction des sous suites, tel que

- $m_n \rightharpoonup m^\infty$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$  faible\*,
- $m_n \rightarrow m^\infty$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  fort, pour tout  $T > 0$  (d'après Lemme d'Aubin-Simon II.2.3),
- $u_n \rightharpoonup u^\infty$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$  faible\*,
- $\frac{\partial m_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m^\infty}{\partial t}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$  faible.

De plus le Lemme III.2.5 assure que  $m^\infty = m$  et  $m_n(0, \cdot) \rightarrow m_0(\cdot)$  dans  $L^2(\Omega)$  fort.

On introduit maintenant une fonction régularisée  $\gamma_\delta$ . Pour chaque  $\delta > 0$  donné, avec  $0 < \delta < a_n$ , on définit

$$\gamma_\delta(s) = \begin{cases} 1 & \delta \leq s \leq a_n - \delta, \\ 0 & s \leq 0 \text{ ou } s \geq a_n, \\ \text{fonction } \mathcal{C}^\infty & 0 \leq s \leq \delta \text{ et } a_n - \delta \leq s \leq a_n. \end{cases}$$

On choisit  $\gamma_\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+)$  telle que  $\text{supp}(\gamma_\delta) \subset [0, a_n]$ ,  $0 \leq \gamma_\delta \leq 1$  et  $|\gamma'_\delta(s)| \leq \frac{2}{\delta}$ .

Pour le reste de cette section, On pose

$$\delta = a_n^2.$$

Soit  $t > 0$ . Pour  $\xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , on définit  $\chi$  par

$$\chi = \frac{1}{a_n} \gamma_\delta(s - t) \xi.$$

Alors,  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; V(\Omega))$  et on peut le prendre comme fonction test

dans (III.2.1) et (III.2.2), pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s-t) \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \xi(x) - \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \xi(x) \\
&= 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(s, x) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) \\
&\quad - 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge (h_d(m^n(s, x)) + \Psi(m^n(s, x))) \cdot \xi(x) \\
&\quad - 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^n(s, x)))) m^n(s, x) \cdot \xi(x) \\
&\quad + 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(s, x) \otimes m^n(s, x)))) m^n(s, x) \cdot \xi(x).
\end{aligned} \tag{III.2.11}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_n}{a_n} \int_t^{\delta+t} \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial t}(s, x) \cdot \gamma'_{\delta}(s-t) \xi(x) + \frac{\rho_n}{a_n} \int_{a_n+t-\delta}^{a_n+t} \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial t}(s, x) \cdot \gamma'_{\delta}(s-t) \xi(x) \\
&\quad - \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s) (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) + \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \gamma_{\delta}(s) ds \int_{\Gamma_2} f \cdot \xi d\Gamma \\
&= -\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s) (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s, x) \otimes m^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)).
\end{aligned} \tag{III.2.12}$$

On multiplie l'équation (III.2.11) par une fonction test  $\mu(t)$  tel que  $\mu \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ , donc il existe  $T > 0$  tel que  $\text{supp}(\mu) \subset [0, T]$ . On intègre l'équation obtenue sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_{\delta}(s-t) \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \\
&\quad - \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \\
&= 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(s, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) \\
&\quad - 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge (h_d(m^n(s, x)) + \Psi(m^n(s, x))) \cdot \mu(t) \xi(x) \\
&\quad - 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^n(s, x)))) m^n(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \\
&\quad + 2 \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_{\delta}(s-t) m^n(s, x) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(s, x) \otimes m^n(s, x)))) m^n(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x).
\end{aligned} \tag{III.2.13}$$

Maintenant, on passe à la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  dans (III.2.13) terme par terme :

• On a

$$\frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \frac{\partial m_n}{\partial t}(t, x) \cdot \mu(t) \xi(x) + K_1^{1,n} \quad (\text{III.2.14})$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t, x) \wedge \frac{\partial m_n}{\partial t}(t, x) \cdot \mu(t) \xi(x) + K_2^{1,n} + K_3^{1,n}, \end{aligned} \quad (\text{III.2.15})$$

avec

$$\begin{aligned} K_1^{1,n} &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x), \\ K_2^{1,n} &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) m^n(t+s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x), \\ K_3^{1,n} &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (m^n(t+s, x) - m^n(t, x)) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x). \end{aligned}$$

On fait les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |K_1^{1,n}| &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{a_n} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \right| + \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{a_n} \int_0^\delta \left( \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \right|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} |\mu(t) \xi(x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\quad + \int_{a_n-\delta}^{a_n} \left( \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \right|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} |\mu(t) \xi(x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \frac{2\delta}{a_n} \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \|\mu\|_{L^2(0,T)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|K_2^{1,n}| &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) m^n(t+s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{a_n} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} |m^n(t+s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x)| \\
&\quad + \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} |m^n(t+s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x)| \\
&\leq \frac{1}{a_n} \|\mu\|_{L^\infty} \|\xi\|_{L^\infty} \left( \int_0^\delta \left( \int_{0,T \times \Omega} |m^n(t+s, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{0,T \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{a_n-\delta}^{a_n} \left( \int_{0,T \times \Omega} |m^n(t+s, x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{0,T \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \right|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \right) \\
&\leq 2 \frac{\delta}{a_n} \|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} T^{\frac{1}{2}} \|m^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}, \\
|K_3^{1,n}| &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (m^n(t+s, x) - m^n(t, x)) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \left( \int_0^s \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+\tau, x) d\tau \right) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{a_n} \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \int_0^s \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+\tau, x) d\tau \right)^2 ds dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left( \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+s, x) \right|^2 ds dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{a_n} \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \int_0^s ds \cdot \int_0^s \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+\tau, x) \right|^2 d\tau \right) ds dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \sqrt{a_n} \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \\
&\leq \frac{1}{a_n} \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \int_0^{a_n} s ds \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(t+\tau, x) \right|^2 d\tau dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \sqrt{a_n} \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \\
&= \frac{1}{a_n} \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{a_n} \frac{a_n}{\sqrt{2}} \sqrt{a_n} \left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Donc,  $K_i^{1,n} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , car par Proposition III.2.3,  $\|m^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))}$  et  $\left\| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}$  sont bornées uniformément par rapport à  $n$ . De plus,  $m^n \rightarrow m$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  fort et  $\frac{\partial m^n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial m}{\partial t}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$  faible, alors la limite

lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de (III.2.14)-(III.2.15) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \frac{\partial m^\infty}{\partial t}(t, x) \cdot \mu(t) \xi(x), \\ \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial t}(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) & \\ \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty(t, x) \wedge \frac{\partial m^\infty}{\partial t}(t, x) \cdot \mu(t) \xi(x). & \end{aligned}$$

• On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 \gamma_\delta(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(s, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) & \\ = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m^n(t, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(t, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) + K_4^{1,n} + K_5^{1,n}, & \end{aligned}$$

avec

$$K_4^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 (\gamma_\delta(s) - 1) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(t+s, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x),$$

$$K_5^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 (m^n(t+s, x) - m^n(t, x)) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(t+s, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x).$$

On a  $K_i^{1,n} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  pour  $i \in \{4, 5\}$  (preuve similaire à  $K_i^{1,n}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ). Puisque  $m_n \rightarrow m$  faible dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  et  $m^n \rightarrow m^\infty$  fort dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 \gamma_\delta(s-t) m^n(s, x) \wedge \frac{\partial m^n}{\partial x_i}(s, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) & \\ \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m^\infty(t, x) \wedge \frac{\partial m^\infty}{\partial x_i}(t, x) \cdot \mu(t) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x). & \end{aligned}$$

• On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(s) \otimes m^n(s)))) m^n(s) \cdot \mu(t) \xi & \\ = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m^n(t)))) m_n(t) \cdot \mu(t) \xi + \sum_{i=6}^9 K_i^{1,n}, & \end{aligned}$$

avec

$$K_6^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) m^n(t+s) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s)))) m^n(t+s) \cdot \mu(t) \xi,$$

$$K_7^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (m^n(t+s) - m^n(t)) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s)))) m^n(t+s) \cdot \mu(t) \xi,$$

$$K_8^{1,n} = + \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : (m^n(t+s) - m^n(t)) \otimes m^n(t+s)))) m^n(t+s) \cdot \mu(t) \xi$$

et

$$K_9^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes (m^n(t+s) - m^n(t)))) m^n(t+s) \cdot \mu(t) \xi.$$

On a  $K_i^{3,n} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  pour  $i \in \{6, 7, 8, 9\}$  (preuve similaire à  $K_i^{1,n}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ). Puisque  $m^n \rightarrow m^\infty$  et  $m_n \rightarrow m^\infty$  fort dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(s) \otimes m^n(s)))) m^n(s) \cdot \mu(t) \xi \\ & \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\infty(t) \otimes m^\infty(t)))) m^\infty(t) \cdot \mu(t) \xi. \end{aligned}$$

- On a  $h_d$  et  $\Psi$  sont linéaires continus, alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s, x) \wedge (h_d(m^n(s, x)) + \Psi(m^n(s, x))) \cdot \mu(t) \xi(x) \\ & = \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t, x) \wedge (h_d(m_n(t, x)) + \Psi(m_n(t, x))) \cdot \mu(t) \xi(x) + K_{10}^{1,n} + K_{11}^{1,n}, \end{aligned}$$

avec

$$K_{10}^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) m^n(t+s, x) \wedge (h_d(m^n(t+s, x)) + \Psi(m^n(t+s, x))) \cdot \mu(t) \xi(x),$$

$$K_{11}^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (m^n(t+s, x) - m^n(t, x)) \wedge (h_d(m^n(t+s, x)) + \Psi(m^n(t+s, x))) \cdot \mu(t) \xi(x).$$

On a  $K_i^{1,n} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  pour  $i \in \{10, 11\}$  (preuve similaire à  $K_i^{1,n}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ). Puisque  $m^n \rightarrow m^\infty$  et  $m_n \rightarrow m^\infty$  fort dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s, x) \wedge (h_d(m^n(s, x)) + \Psi(m^n(s, x))) \cdot \mu(t) \xi(x) \\ & \longrightarrow \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty(t, x) \wedge (h_d(m^\infty(t, x)) + \Psi(m^\infty(t, x))) \cdot \mu(t) \xi(x). \end{aligned}$$

• On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^n(s, x)))) m^n(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \\ &= \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u_n(t, x)))) m^n(t, x) \cdot \mu(t) \xi(x) + \sum_{i=12}^{14} K_i^{1,n}, \end{aligned}$$

Avec

$$K_{12}^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (\gamma_\delta(s) - 1) m^n(t+s) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x)))) m^n(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x),$$

$$K_{13}^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} (m^n(t+s) - m^n(t)) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x)))) m^n(t+s, x) \cdot \mu(t) \xi(x),$$

$$K_{14}^{1,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^n(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x)))) (m^n(t+s, x) - m^n(t)) \cdot \mu(t) \xi(x).$$

On a  $K_i^{1,n} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  pour  $i \in \{12, 13, 14\}$  (preuve similaire à  $K_i^{1,n}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ). Puisque  $m^n \rightarrow m^\infty$  fort dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  et  $u_n \rightarrow u^\infty$  faible dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_t^{t+a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \gamma_\delta(s-t) m^n(s) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^n(s, x)))) m^n(s, x) \cdot \mu(t) \xi(x) \\ & \longrightarrow \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty(t) \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^\infty(t, x)))) m^\infty(t, x) \cdot \mu(t) \xi(x). \end{aligned}$$

Puisque l'application  $(t, x) \rightarrow \mu(t) \xi(x)$  avec  $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+)$  et  $\xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , tel que  $\xi = 0$  sur  $\Gamma_1$ , dense dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$ , la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de (III.2.11) donne :  $\forall \chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \left( \frac{\partial m^\infty}{\partial t} - m^n \wedge \frac{\partial m^\infty}{\partial t} \right) \cdot \chi(t, x) dt dx = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sum_{i=1}^3 m^\infty \wedge \frac{\partial m^\infty}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty \wedge (h_d(m^\infty) + \Psi(m^\infty)) \cdot \chi - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(u^\infty))) m^n \cdot \chi \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} m^\infty \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\infty \otimes m^\infty))) m^\infty \cdot \chi, \end{aligned} \tag{III.2.16}$$

Maintenant, on passe à la limite terme par terme dans (III.2.12) :



- on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_n}{a_n} \left| \int_{]t, \delta+t[ \times \Omega} \frac{\partial u^n}{\partial t}(s, x) \cdot \gamma'_\delta(s-t) \xi(x) \right| &\leq \frac{\rho_n}{a_n} \|\gamma'_\delta\|_{L^\infty} \left( \int_{]t, \delta+t[ \times \Omega} \left| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{]t, \delta+t[ \times \Omega} |\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{\rho_n^{\frac{1}{2}}}{a_n} \frac{2}{\delta} \delta^{\frac{1}{2}} \rho_n^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \delta^{\frac{1}{2}} \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \\
 &= \frac{\rho_n^{\frac{1}{2}}}{a_n} 2 \rho_n^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \\
 &= \rho_n^{\frac{1}{4}} 2 \rho_n^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

car  $\rho_n^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))}$  est borné d'après Proposition III.2.3 et  $a_n$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- Selon le même genre d'argument, le deuxième terme de (III.2.12) tend vers zéro.

- On a

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_\Omega \gamma_\delta(s) (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \\
 &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_\Omega (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \\
 &+ \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_\Omega (\gamma_\delta(s) - 1) (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \\
 &= \int_\Omega (\lambda^e : \varepsilon(u_n(t, x))) : \varepsilon(\xi(x)) + K_1^{2,n},
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 |K_1^{2,n}| &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\gamma_{\delta}(s) - 1) (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{\delta} \int_{\Omega} (\gamma_{\delta}(s) - 1) (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} \int_{\Omega} (\gamma_{\delta}(s) - 1) (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \right| \\
 &\leq \frac{1}{a_n} \int_0^{\delta} \int_{\Omega} |(\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x))| \\
 &\quad + \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} \int_{\Omega} |(\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x))| \\
 &\leq c \frac{1}{a_n} \int_0^{\delta} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon(u^n(t+s, x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon(\xi(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + c \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon(u^n(t+s, x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon(\xi(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2c \frac{\delta}{a_n} \|\varepsilon(u^n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq a_n \cdot 2c \|\varepsilon(u^n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}
 \end{aligned}$$

et  $\|\varepsilon(u^n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))}$  est borné d'après Proposition III.2.3, donc  $K_1^{2,n}$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Puisque  $u_n \rightarrow u^\infty$  faible dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , on obtient

$$\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s) (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \longrightarrow \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\infty(x))) : \varepsilon(\xi(x))$$

• On a

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \gamma_{\delta}(s) ds - 1 \right| &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} (\gamma_{\delta}(s) - 1) ds \right| \\
 &= \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{\delta} (\gamma_{\delta}(s) - 1) ds + \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} (\gamma_{\delta}(s) - 1) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{a_n} \int_0^{\delta} |\gamma_{\delta}(s) - 1| ds + \frac{1}{a_n} \int_{a_n-\delta}^{a_n} |\gamma_{\delta}(s) - 1| ds \\
 &\leq \frac{2\delta}{a_n},
 \end{aligned}$$

et comme  $\delta = a_n^2$ , on obtient

$$\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \gamma_{\delta}(s) ds \longrightarrow 1,$$

alors,

$$\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \gamma_{\delta}(s) ds \int_{\Gamma_2} f \cdot \xi d\Gamma \longrightarrow \int_{\Gamma_2} f \cdot \xi d\Gamma.$$

• On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s) (\lambda^e : (\lambda^m : m^n(t+s, x) \otimes m^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \\ &= \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^n(t, x) \otimes m_n(t, x))) : \varepsilon(\xi(x)) + K_3^{2,n} + K_2^{2,n}, \end{aligned}$$

avec

$$K_2^{2,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\gamma_{\delta}(s) - 1) (\lambda^e : (\lambda^m : m^n(t+s, x) \otimes m^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x))$$

et

$$K_3^{2,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : (m^n(t+s, x) - m^n(t, x)) \otimes m^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)).$$

On a  $K_2^{2,n}$  et  $K_3^{2,n}$  tendent vers zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (même argument du preuve de  $K_2^{1,n}$  et  $K_3^{1,n}$ ). Puisque  $m^n \rightarrow m^\infty$  et  $m_n \rightarrow m^\infty$  fort dans  $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \gamma_{\delta}(s) (\lambda^e : (\lambda^m : m^n(t+s, x) \otimes m^n(t+s, x))) : \varepsilon(\xi(x)) \\ & \longrightarrow \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^\infty(t, x) \otimes m^\infty(t, x))) : \varepsilon(\xi(x)), \end{aligned}$$

Puisque  $\{\xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}); \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$  est dense dans  $V(\Omega)$ , on obtient à la limite dans (III.2.12) que :  $\forall \chi \in V(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\infty)) : \varepsilon(\chi) - \int_{\Gamma_2} f \cdot \chi = \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty)) : \varepsilon(\chi). \quad (\text{III.2.17})$$

**Proposition III.2.6.** *Les limites  $m^\infty$  et  $u^\infty$  vérifient l'inégalité d'énergie suivante : Pour tout  $t > 0$ , on a*

$$\mathcal{E}_q(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^\infty}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}_q(0), \quad (\text{III.2.18})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(t) = & \int_{\Omega} [|\nabla m^\infty|^2 + \Phi(m^\infty)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\infty)|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda^e : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty)) : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty) - 2\varepsilon(u^\infty) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty))] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\infty)) : \varepsilon(u^\infty) - \int_{\Gamma_2} f \cdot u^\infty d\Gamma. \end{aligned}$$

*Preuve. Étape 1 :* Par (III.2.3), pour tout  $t$  positif, on a

$$\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \left[ \mathcal{E}^n(t+s) + \int_0^{t+s} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right|^2 \right] ds \leq \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \mathcal{E}^n(0) ds.$$

De plus,

- On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla m_n|^2 &= \int_{\Omega} \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \nabla m^n(t+s, x) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{a_n^2} \left( \int_0^{a_n} ds \right) \left( \int_0^{a_n} |m^n(t+s, x)|^2 ds \right) dx \\ &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} |m^n(t+s, x)|^2 dx ds, \end{aligned}$$

- on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_n)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} h_d(m^n(t+s, x)) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{a_n^2} \left( \int_0^{a_n} ds \right) \left( \int_0^{a_n} |h_d(m^n(t+s, x))|^2 ds \right) dx \\ &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^n(t+s, x))|^2 ds dx, \end{aligned}$$

- $\Phi$  est une forme quadratique non négative, de manière qu'il existe  $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application bilinéaire continue telle que  $\Phi(m) = B(m, m)$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \Phi(m^n(t+s)) dx ds &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} B(m^n(t+s), m^n(t+s)) \\ &= \int_{\Omega} B(m^n(t), m_n(t)) dx + K_1^{3,n}, \end{aligned}$$

avec

$$K_1^{3,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} B(m^n(t+s) - m^n(t), m^n(t+s)) ds dx,$$

- on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s))) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s)) \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m^n(t))) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m_n(t)) + K_2^{3,n} + K_3^{3,n} + K_4^{3,n}, \end{aligned}$$

avec

$$K_2^{3,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) - m^n(t) \otimes m^n(t+s))) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s)),$$

$$K_3^{3,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m^n(t+s) - m^n(t))) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s)),$$

et

$$K_4^{3,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m^n(t))) : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) - m^n(t) \otimes m^n(t+s)),$$

- on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \varepsilon(u^n(t+s)) : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) \otimes m^n(t+s))) \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon(u_n(t)) : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m^n(t))) + K_5^{3,n} + K_6^{3,n}, \end{aligned}$$

avec

$$K_5^{3,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \varepsilon(u^n(t+s)) : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t+s) - m^n(t) \otimes m^n(t+s))),$$

et

$$K_6^{3,n} = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} \varepsilon(u^n(t+s)) : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^n(t) \otimes m^n(t+s) - m^n(t))),$$

- on a

$$\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \left( \int_{\Gamma_2} f \cdot u^n(t+s) d\Gamma \right) ds = \int_{\Gamma_2} f \cdot u_n(t) d\Gamma,$$

- puisque l'application  $v \rightarrow \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v)$ , avec  $v \in V(\Omega)$ , est convexe alors,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} u^n(t+s) ds)) : \varepsilon(\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} u^n(t+s) ds) \\ & \leq \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^n(t+s))) : \varepsilon(u^n(t+s)) \end{aligned}$$

- de plus,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m_n}{\partial t}(s) \right|^2 ds dx &= \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \frac{\partial m^n}{\partial t}(\tau+s, x) d\tau \right|^2 ds dx \\ &\leq \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \int_0^{t+s} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t}(\tau, x) \right|^2 d\tau dx ds. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} |\nabla m_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_n)|^2 + \int_{\Omega} B(m^n(t), m_n(t)) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^n(t) \otimes m^n(t))) : (\lambda^m : m^n(t) \otimes m_n(t)) \\
 & - \int_{\Omega} \varepsilon(u_n(t)) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^n(t) \otimes m^n(t))) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_n(t))) : \varepsilon(u_n(t)) \\
 & - \int_{\Gamma_2} f \cdot u_n(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m_n}{\partial t}(s) \right|^2 + K_1^{3,n} + \frac{1}{2} (K_2^{3,n} + K_3^{3,n} + K_4^{3,n}) - (K_5^{3,n} + K_6^{3,n}) \\
 & \leq \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \left[ \mathcal{E}^n(t+s) + \int_0^{t+s} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m^n}{\partial t} \right|^2 \right] ds \\
 & \leq \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \mathcal{E}^n(0) ds.
 \end{aligned} \tag{III.2.19}$$

**Étape 2 :** On a passe à la lim inf dans (III.2.19) :

- les  $K_i^{3,n} \rightarrow 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (preuve similaire à  $K_2^{1,n}$ ),
- on a  $m_n \rightharpoonup m^\infty$  faible dans  $H^1(\Omega)$  donc

$$\int_{\Omega} |m^\infty|^2 \leq \liminf \int_{\Omega} |\nabla m_n|^2.$$

- on a  $h_d$  continue et  $m_n \rightarrow m^\infty$  dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_n)|^2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\infty)|^2.$$

- on a  $m^n$  et  $m_n$  tendent vers  $m^\infty$  dans  $L^4(\Omega)$ , ainsi

$$\int_{\Omega} B(m^n, m_n) \longrightarrow \int_{\Omega} B(m^\infty, m^\infty) = \int_{\Omega} \Phi(m^\infty)$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^n \otimes m^n)) : (\lambda^m : m^n \otimes m_n) \longrightarrow \\
 & \int_{\Omega} (\lambda^e : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty)) : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty).
 \end{aligned}$$

De plus,  $u_n \rightharpoonup u^\infty$  faible dans  $V(\Omega)$ , donc

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u_n) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^n \otimes m^n)) \longrightarrow \int_{\Omega} \varepsilon(u^\infty) : (\lambda^e : (\lambda^m : m^\infty \otimes m^\infty))$$

et

$$\int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u^\infty)) : \varepsilon(u^\infty) \leq \liminf \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(u_n)) : \varepsilon(u_n).$$

- Puisque  $(u_n)_n$  est borné dans  $H^1(\Omega)$ ,  $(u_n)_n$  est borné dans  $L^2(\Gamma)$ , alors il admet une sous suite également noté  $(u_n)_n$  qui converge faiblement vers  $u^\infty$ , donc

$$\int_{\Gamma_2} f \cdot u_n d\Gamma \longrightarrow \int_{\Gamma_2} f \cdot u^\infty d\Gamma.$$

- De plus,  $\rho_n \rightarrow 0$ , donc

$$\int_{\Omega} \rho_n |u_1|^2 \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, la limite inférieure de (III.2.19) lorsque  $n$  tends vers  $+\infty$  donne (III.2.18).  $\square$

### III.3 Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction

Le début de cette section ressemble à celui de la Section II.4 du Chapitre II. Pour cela, dans la première sous-section, on va donner un court aperçu de ce qui a été présenté dans les trois sous-sections de la Section II.4 de Chapitre II. La nouveauté ici est que la direction asymptotique normale de la déformation peut être caractérisée par une équation elliptique d'ordre 4 dans la sous-section III.3.2.

#### III.3.1 Modèle tridimensionnel, changement d'échelle et passage à la limite

Comme la Section II.4, on considère une plaque ferromagnétique  $\Omega_\eta = \omega \times ]-\eta, \eta[$ , avec  $\omega$  est un domaine régulier de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que cette plaque est encastré sur  $\Gamma_1^\eta = \mathcal{C}_1 \times ]-\eta, \eta[$  (où  $\mathcal{C}_1 \subset \partial\omega$  de sorte que la mesure unidimensionnelle de  $\mathcal{C}_1$  est non nulle). On pose  $\mathcal{C}_2 = \partial\omega \setminus \mathcal{C}_1$ ,  $\Gamma_2^\eta = \mathcal{C}_2 \times ]-\eta, \eta[$  et  $\Gamma_\pm^\eta = \bar{\omega} \times \{\pm\eta\}$ .

On définit  $V^\eta$ ,  $V^1$ ,  $V_{KL}(\Omega_1)$  et  $V(\omega)$  comme Définition II.4.1 de Chapitre II.

Soient  $m_0 \in H^1(\omega; S^2(0, 1))$ ,  $\tilde{u}_0 \in V(\omega)$ ,  $g^+$  et  $g^- \in H^{\frac{1}{2}}(\omega)$  et  $h \in H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{C}_2)$ . À partir de ces conditions, on définit les conditions initiales  $m_0^\eta \in H^1(\Omega_\eta; S^2(0, 1))$ ,  $u_0^\eta \in V^\eta$  comme dans (II.4.1) de Chapitre II et on définit les conditions aux limites  $g^{\eta\pm} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\pm^\eta)$  et  $h^\eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2^\eta)$  comme dans (II.4.2) de Chapitre II. D'où, par le Théorème III.2.2, pour chaque  $\eta > 0$ , il existe  $(m^\eta, u^\eta)$  une solution globale faible pour le modèle quasi stationnaire, c'est à dire  $(m^\eta, u^\eta)$  satisfait :

1.  $m^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$  satisfait  $|m^\eta(t, x)| = 1$  p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta$ ,
2.  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$  et  $u^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^\eta)$ ,
3.  $m^\eta(0, \cdot) = m_0^\eta$  et  $u^\eta(0, \cdot) = u_0^\eta$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\eta)$ ,

4. pour tout  $\chi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3))$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} - m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \chi^\eta(t, x) dt dx = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \sum_{i=1}^3 m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi^\eta}{\partial x_i} \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge (h_d(m^\eta) + \Psi(m^\eta) + (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)))m^\eta) \cdot \chi^\eta \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)))m^\eta) \cdot \chi^\eta, \end{aligned} \quad (\text{III.3.1})$$

5. pour tout  $\xi^\eta \in V^\eta$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta) - \int_{\Gamma_-^\eta} g^{\eta-} \cdot \xi^\eta - \int_{\Gamma_+^\eta} g^{\eta+} \cdot \xi^\eta \\ & - \int_{\Gamma_2^\eta} h \cdot \xi^\eta = \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta), \end{aligned} \quad (\text{III.3.2})$$

6. pour tout  $t \geq 0$ , on a l'inégalité de l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}_q(t) + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}_q(0)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(t) = & \int_{\Omega_\eta} [|\nabla m^\eta|^2 + \Phi(m^\eta)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \mathcal{Q}(m^\eta) \\ & - \int_{\Omega_\eta} \varepsilon(u^\eta) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta) \\ & - \int_{\Gamma_-^\eta} g^{\eta-} \cdot u^\eta - \int_{\Gamma_+^\eta} g^{\eta+} \cdot u^\eta - \int_{\Gamma_2^\eta} h^\eta \cdot u^\eta. \end{aligned}$$

Maintenant, on définit un nouveau modèle sur  $\Omega_1$  par un changement d'échelle convenable. On définit  $M^\eta$ ,  $H^\eta$  et  $U^\eta$  à partir de  $m^\eta$  et  $u^\eta$  comme dans (II.4.5) de Chapitre II. De plus, on définit le 2-tenseur  $\varepsilon(\eta, U^\eta)$  comme dans (II.4.6) de Chapitre II. Donc,  $(M^\eta, U^\eta)$  satisfait les propriétés suivantes sur  $\Omega_1$  :

- $M^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$  et  $|M^\eta(t, x)| = 1$  pour p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1$ ,
- $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ ,
- $M^\eta(0, x_1, x_2, x_3) = m_0^\eta(0, x_1, x_2, \eta x_3) = m_0(x_1, x_2)$  dans le sens de trace,
- $U^\eta \in V^1$ ,



- pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \chi = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 M^\eta \wedge \partial_\alpha M^\eta \cdot \partial_\alpha \chi \\
 & + \frac{2}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge \partial_3 M^\eta \cdot \partial_3 \chi - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (H^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \chi \\
 & - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} (M^\eta \wedge (\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta))) M^\eta) \cdot \chi \\
 & + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta))) M^\eta) \cdot \chi,
 \end{aligned} \tag{III.3.3}$$

- pour tout  $\xi \in V^1$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi) - \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot \xi - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot \xi - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot \xi \\
 & = \int_{\Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi),
 \end{aligned} \tag{III.3.4}$$

- pour tout  $t > 0$ , on a

$$\mathcal{E}^\eta(t) + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0), \tag{III.3.5}$$

où

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^\eta(t) & := \frac{1}{\eta} \mathcal{E}_q(t) = \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 |\partial_\alpha M^\eta|^2 + \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega_1} |\partial_3 M^\eta|^2 + \int_{\Omega_1} \Phi(M^\eta) + \int_{\mathbb{R}^3} |H^\eta|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(M^\eta) - \int_{\Omega_1} \varepsilon(\eta, U^\eta) : (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta) - \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U^\eta - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U^\eta - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U^\eta,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^\eta(0) & := \frac{1}{\eta} \mathcal{E}_q(0) = \int_{\Omega_1} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 |\partial_\alpha m_0|^2 + \Phi(m_0) \right] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_0)|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(m_0) - \int_{\Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : (\lambda^{\mathbf{m}} : m_0 \otimes m_0)) : \varepsilon(\eta, u_0) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\lambda^{\mathbf{e}} : \varepsilon(\eta, u_0)) : \varepsilon(\eta, u_0) - \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot u_0 - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot u_0 - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot u_0.
 \end{aligned}$$

On a  $\partial_3 m_0 = 0$  et  $\varepsilon_{i3}(u_0) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , alors  $\mathcal{E}^\eta(0)$  est indépendant de  $\eta$ . Ainsi, on peut appliquer la même astuce de calcul de Section II.4.3 de Chapitre II et on obtient une borne uniforme par rapport à  $\eta$  pour les quantités suivantes : il existe  $C > 0$  tel que pour

tout  $T > 0$  on a :

- $\left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\left\| \partial_1 M^\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} + \left\| \partial_2 M^\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\frac{1}{\eta} \left\| \partial_3 M^\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\left\| U^\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\left\| \varepsilon(\eta, U^\eta) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\left\| H^\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C.$

Ainsi, on peut extraire des sous-suites, encore notées  $(M^\eta, U^\eta)$  et  $H^\eta$ , de telle sorte que :

- $M^\eta \rightharpoonup M$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$  faible\*,
- $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial M}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible,
- $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $L^\infty(0, T; V^1)$  faible\*,
- $H^\eta \rightharpoonup H$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$  faible\*.

De plus, on a  $\partial_3 M^\eta \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  fort, donc  $M$  ne dépend que de  $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \omega$  et ne dépend pas de  $x_3$ . On remarque également que  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, cela donne que  $\varepsilon_{i3}(U) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , donc  $U \in V_{KL}(\Omega_1)$ , et par le Lemme II.4.2 de Chapitre II, il existe  $\tilde{u} \in V(\omega)$  tel que

$$\begin{aligned} U_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha \tilde{u}_3 \text{ pour } \alpha \in \{1, 2\}, \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_3(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{III.3.6}$$

Puisque  $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $V^1$  faible et  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, on a

$$\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A \text{ faible dans } L^2(\Omega_1), \tag{III.3.7}$$

avec  $A$  est un 2-tenseur symétrique vérifie

$$A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \text{ pour } \alpha, \beta = 1, 2. \tag{III.3.8}$$

De plus, on peut prouver par le Lemme II.2.3 d'Aubin-Simon que  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^r(\Omega_1)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega_1))$  fort pour  $r < 6$ , c'est pourquoi  $M$  vérifie la contrainte de saturation  $|M(t, x_1, x_2)| = 1$  p.p. dans  $\mathbb{R}^+ \times \omega$  et  $M(0, x) = m_0(x)$  dans le sens de trace.

Par les mêmes arguments de calcul pour passer à la limite de (II.4.11) dans la sous-section II.4.3 de Chapitre II, on passe à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro dans la formulation faible

(III.3.3) et on obtient que pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\omega))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \chi &= -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge \nabla M \cdot \nabla \chi - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (H + \Psi(M)) \cdot \chi \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A})) M \cdot \chi + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) M) \cdot \chi, \end{aligned} \quad (\text{III.3.9})$$

avec  $\bar{A} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A dx_3$ , donc

$$\bar{A}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}) \text{ pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\}. \quad (\text{III.3.10})$$

Pour passer à la limite dans (III.3.4), on prend la fonction test  $\xi$  sous la forme

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= v_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha v_3 \text{ pour } \alpha = 1, 2, \\ \xi_3(x_1, x_2, x_3) &= v_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{III.3.11})$$

avec  $v = (v_1, v_2, v_3) \in V(\omega)$ . Donc,  $e_{i3}(\xi) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et si on met  $\xi$  par sa valeur dans (III.3.4), on obtient

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^n)) : \varepsilon(\xi) - \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot \xi - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot \xi - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot \xi = \int_{\Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M^n \otimes M^n)) : \varepsilon(\xi). \quad (\text{III.3.12})$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot \xi &= \int_{\omega \times \{-1\}} g^- \cdot \xi \\ &= \int_{\omega} g_1^-(x_1, x_2) (v_1 - (-1)\partial_1 v_3) + g_2^-(x_1, x_2) (v_2 - (-1)\partial_2 v_3) + g_3^- v_3 \\ &= \int_{\omega} g^- \cdot v + \int_{\omega} \sum_{\alpha=1}^2 g_\alpha^- \partial_\alpha v_3, \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2^1} h \cdot \xi &= \int_{\mathcal{C}_2 \times ]-1, 1[} h \cdot \xi \\ &= \int_{\mathcal{C}_2 \times ]-1, 1[} h_1 (v_1 - x_3 \partial_1 v_3) + h_2 (v_2 - x_3 \partial_2 v_3) + h_3 v_3 \\ &= 2 \int_{\mathcal{C}_2} h \cdot v \end{aligned} \quad (\text{III.3.14})$$

On prend  $v_3 = 0$  dans (III.3.11). Par les mêmes astuces de calcul pour passer à la limite de (II.4.25) dans la sous-section II.4.3.2 de Chapitre II et par l'utilisation de (III.3.13) et

### III.3. Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction

---

(III.3.14), on obtient que le passage à la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$  donne : pour tout  $v_T = (v_1, v_2) \in (H^1(\omega))^2$ , avec  $v_T = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T) - \frac{1}{2} \int_{\omega} (g_T^+ + g_T^-) \cdot v_T - \int_{\mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T \\ = \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T). \end{aligned} \quad (\text{III.3.15})$$

Maintenant, par les mêmes arguments utilisés dans la sous-section II.4.3.2 de Chapitre II, on peut démontrer que pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{i3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} \text{ dans } L^2(\omega). \quad (\text{III.3.16})$$

Soit  $v_T \in (H^1(\omega))^2$  tel que  $v_T = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$  et soit  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in (L^2(\omega))^3$ . En utilisant (III.3.15) et (III.3.16) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v) + \int_{\omega} \sum_{i=1}^3 (\lambda^e : \bar{A})_{i3} \xi_i - \frac{1}{2} \int_{\omega} (g_T^+ + g_T^-) \cdot v_T - \int_{\mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T \\ = \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T) + \int_{\omega} \sum_{i=1}^3 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{i3} \xi_i. \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

Maintenant, on introduit l'espace  $\mathcal{H}$  par

$$\mathcal{H} = \{(v_1, v_2; \xi, \xi_2, \xi_3) \in (H^1(\omega))^2 \times (L^2(\omega))^3, \text{ tel que } v_1 = v_2 = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_1\},$$

muni de la norme

$$\|(v_T; \xi, \xi_2, \xi_3)\|_{\mathcal{H}} = \left( \|v_T\|_{H^1(\omega)}^2 + \|\xi_1\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\xi_2\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\xi_3\|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $w = (v_1, v_2; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  dans  $\mathcal{H}$ , on définit le 2-tenseur symétrique  $\tau(w)$  par :

$$\tau(w) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(v_T) & \varepsilon_{12}(v_T) & \xi_1 \\ \varepsilon_{21}(v_T) & \varepsilon_{22}(v_T) & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\bar{A}$  est caractérisé par  $\bar{A} = \tau(\tilde{w})$ , avec  $\tilde{w} = \tau(\tilde{u}_T; \bar{A}_{31}, \bar{A}_{32}, \bar{A}_{33})$ , et par l'équation (III.3.17),  $\tilde{w} \in \mathcal{H}$ , satisfait :

$$\forall w \in \mathcal{H}, a(\tilde{w}, w) = l(w), \quad (\text{III.3.18})$$

avec

$$a(\tilde{w}, w) = \int_{\omega} (\lambda^e : \tau(\tilde{w})) : \tau(w),$$

et

$$l(w) = \frac{1}{2} \int_{\omega} (g_T^+ + g_T^-) \cdot v_T + \int_{\mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T + \int_{\omega} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) : \tau(w).$$

Il est clair que  $l$  est une application linéaire continue de  $\mathcal{H}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  est une application bilinéaire continue de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . De plus, par la positivité du 4-tenseur  $\lambda^e$ , il existe  $\lambda^{e*}$ , tel que

$$a(w, w) \geq \lambda^{e*} \left( \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_T))^2 + \|\xi_1\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\xi_2\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\xi_3\|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

Donc, par l'utilisation de l'inégalité de Korn (II.2.1), on obtient que  $a$  est coercive. Par conséquent, on peut appliquer le Théorème de Lax-Milgram à l'équation (III.3.18) et obtenir que si  $M$  est fixé, alors  $\tilde{u}_T$  existe et unique.

La caractérisation de  $H$ , la limite du champs démagnétisant  $H^\eta$  est fait comme la sous-section II.4.3 du chapitre II. Alors, on a

$$H^\eta \longrightarrow H \text{ fort dans } L^2(\Omega_1)$$

et

$$H(t, x, y, z) = \begin{cases} -(M \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 & \text{pour } (x, y, z) \in \Omega_1, \\ 0 & \text{pour } x \notin \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_1. \end{cases} \quad (\text{III.3.19})$$

### III.3.2 Cas particulier de $\lambda^e$

On remarquons que le modèle (III.3.9)-(III.3.18) ne décrit pas le comportement asymptotique de la troisième composante de  $\tilde{u}$ . Afin de caractériser  $\tilde{u}_3$ , on prend le cas isotrope où  $\lambda^e$  est donné par : pour tout 2-tenseur symétrique  $S$ , on a

$$(\lambda^e : S) = \frac{E}{1 + \nu} \left( S + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(S) I_3 \right), \quad (\text{III.3.20})$$

avec  $E$  et  $\nu$  sont deux constantes positives et

$$\text{tr}(S) = S_{11} + S_{22} + S_{33}.$$

Par (III.3.20), on a :

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \bar{A}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\bar{A}) \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{III.3.21})$$

### III.3. Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction

---

et par (III.3.10), on a

$$\text{tr}(\bar{A}) = \varepsilon_{11}(\tilde{u}_T) + \varepsilon_{22}(\tilde{u}_T) + \bar{A}_{33}. \quad (\text{III.3.22})$$

Pour caractériser  $\bar{A}_{33}$ , on utilise (III.3.16). Alors, on a

$$(\lambda^e : \bar{A})_{33} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{33} \text{ dans } L^2(\omega),$$

alors, par un simple calcul, on obtient

$$\bar{A}_{33} = \left[ \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\lambda^m : M \otimes M)_{33} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}(\lambda^m : M \otimes M) - \frac{\nu}{1-\nu} \sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon_{\alpha\alpha}(\tilde{u}_T) \right]. \quad (\text{III.3.23})$$

Donc,

$$\text{tr}(\bar{A}) = \left[ \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon_{\alpha\alpha}(\tilde{u}_T) + \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\lambda^m : M \otimes M)_{33} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}(\lambda^m : M \otimes M) \right],$$

et alors,

$$\begin{aligned} (\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_T) \\ &+ \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-\nu} \left( \sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon_{\alpha\alpha}(\tilde{u}_T) + (\lambda^m : M \otimes M)_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\lambda^m : M \otimes M) \right) \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.24})$$

Par conséquent, on en déduit que

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha\beta} - (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} = (\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\tilde{u}_T))_{\alpha\beta} - (\lambda^{\text{et}} : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta}, \quad (\text{III.3.25})$$

avec  $\lambda^{\text{et}}$  est un 4-tenseur qui transforme tout 2-tenseurs  $X = (X_{ij})$  en un 2-tenseur  $Y = (\lambda^{\text{et}} : X) = (Y_{ij})$  selon la formule

$$Y_{\alpha\beta} = (\lambda^{\text{et}} : X)_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left[ X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \tilde{\text{tr}}(X) \delta_{\alpha\beta} \right], \quad (\text{III.3.26})$$

$$Y_{i3} = (\lambda^{\text{et}} : X)_{i3} = 0 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\},$$

avec

$$\tilde{\text{tr}}(X) = X_{11} + X_{22}.$$

Puisque  $(M, \bar{A})$  est une solution de (III.3.9) et (III.3.15), et par l'utilisation de (III.3.19) et (III.3.25),  $(M, \tilde{u}_T)$  est une solution faible pour

- Pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\omega))$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \chi &= -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge \nabla M \cdot \nabla \chi + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge ((M, \vec{e}_3) \vec{e}_3 - \Psi(M)) \cdot \chi \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge (\lambda^m : (\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\tilde{u}_T))) M \cdot \chi + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^{\text{et}} : (\lambda^m : M \otimes M))) M) \cdot \chi. \end{aligned}$$

- Pour tout  $v_T \in H^1(\omega)$ , tel que  $v_T = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\tilde{u}_T))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T) - \int_{\mathcal{C}_2} h_T \cdot v_T - \frac{1}{2} \int_{\omega} (g^+ + g^-)_T \cdot v_T \\ = \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^{\text{et}} : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(v_T). \end{aligned}$$

### III.3.2.1 Équation satisfaite par la composante normale de la déformation

Pour trouver l'équation satisfaite par  $\tilde{u}_3$ , on prend  $\eta \rightarrow 0$  dans l'équation (III.3.12). Alors, pour tout  $\xi \in V_{kl}(\Omega_1)$ , on a

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : A) : \varepsilon(\xi) - \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot \xi - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot \xi - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot \xi = \int_{\Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) : \varepsilon(\xi), \quad (\text{III.3.27})$$

Pour  $v_3 \in H^2(\omega)$ , tel que  $\partial_1 v_3 = \partial_2 v_3 = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$ , on prend la fonction test  $\xi$  sous la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} x_3 \partial_1 v_3 \\ x_3 \partial_2 v_3 \\ -v_3 \end{pmatrix},$$

puis, on remplace  $\xi$  par sa valeur dans (III.3.27), pour obtenir

$$\int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^e : \bar{B})_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} v_3 + \int_{\omega} (g^+ + g^-)_3 v_3 - \int_{\omega} \sum_{\alpha} (g^+ - g^-)_{\alpha} \partial_{\alpha} v_3 + 2 \int_{\mathcal{C}_2} h_3 v_3 = 0, \quad (\text{III.3.28})$$

avec  $\bar{B}$  est définie par :

$$\bar{B} = \int_{-1}^1 x_3 A dx_3.$$

Donc, par (III.3.8),  $\bar{B}$  vérifie :

$$\bar{B}_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} \tilde{u}_3 \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\}. \quad (\text{III.3.29})$$

### III.3. Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction

---

Par la définition de  $\lambda^e$  dans (III.3.20), on a

$$(\lambda^e : \bar{B})_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left( \bar{B}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\bar{B}) \delta_{\alpha\beta} \right),$$

avec

$$\text{tr}(\bar{B}) = -\frac{2}{3} \Delta \tilde{u}_3 + \bar{B}_{33}. \quad (\text{III.3.30})$$

Pour caractériser  $\bar{B}_{33}$ , on multiplie (III.3.4) par  $\eta^2$ , on passe à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro et on prend la fonction test  $\xi$  dans cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= 0 \text{ pour } \alpha = 1, 2 \\ \xi_3 &= x_3^2 \varphi, \end{aligned}$$

avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ , alors  $\varepsilon_{33}(\xi) = 2x_3\varphi$  et on a

$$\int_{\Omega_1} x_3 (\lambda^e : A)_{33} \varphi = \int_{\Omega_1} x_3 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{33} \varphi.$$

Puisque  $M$  et  $\varphi$  sont indépendants de  $x_3$ , on obtient

$$\int_{\omega} (\lambda^e : \bar{B})_{33} \varphi = 0,$$

donc,

$$(\lambda^e : \bar{B})_{33} = 0 \text{ dans } L^2(\omega). \quad (\text{III.3.31})$$

L'utilisation de (III.3.30), (III.3.31) et une simple calcul donnent

$$\text{tr}(\bar{B}) = -\frac{2}{3} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta \tilde{u}_3,$$

donc,

$$(\lambda^e : \bar{B})_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \frac{E}{1+\nu} \left[ \partial_{\alpha\beta} \tilde{u}_3 + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \tilde{u}_3 \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{III.3.32})$$

Pour  $v_3 \in H^2(\omega)$ , on note

$$\nabla v_3 = \begin{pmatrix} \partial_1 v_3 \\ \partial_2 v_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\nabla v_3) = \partial_{\alpha\beta} v_3.$$



Donc, par l'utilisation de (III.3.32), on peut réécrire (III.3.28), et obtenir que  $\tilde{u}_3$  satisfait : pour tout  $v_3 \in H^2(\omega)$ , tel que  $v_3 = \partial_\alpha v_3 = 0$  sur  $\mathcal{C}_1$ , on a

$$\frac{2}{3} \int_{\omega} (\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\nabla \tilde{u}_3)) : \varepsilon(\nabla v_3) - 2 \int_{\mathcal{C}_2} h_3 v_3 = \int_{\omega} (g^+ + g^-)_3 v_3 - \int_{\omega} (g^+ - g^-) \cdot \nabla v_3. \quad (\text{III.3.33})$$

### III.3.2.2 Inégalité d'énergie

Par l'utilisation de l'inégalité d'énergie (II.4.13) satisfait par  $M^n$  et  $U^n$  et puisque  $\frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega_1} |\partial_3 M^n|^2 \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial M^n}{\partial x_i} \right|^2 + \int_{\Omega_1} \Phi(M^n) + \int_{\mathbb{R}^3} |H^n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(M^n) \\ & - \int_{\Omega_1} \varepsilon(\eta, U^n) : (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : M^n \otimes M^n)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(\eta, U^n)) : \varepsilon(\eta, U^n) \\ & - \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U^n - \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U^n - \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U^n + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^n}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0). \end{aligned} \quad (\text{III.3.34})$$

Rappeler que  $u_0 = I(\tilde{u}_0)$  où  $I$  est l'isomorphisme donné dans Lemme II.4.2, de Chapitre II, donc  $\mathcal{E}^\eta(0)$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(0) & := \frac{1}{2} \mathcal{E}^\eta(0) = \int_{\omega} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial m_0}{\partial x_\alpha} \right|^2 + \Phi(m_0) \right] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m_0)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\omega} \mathcal{Q}(m_0) \\ & - \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : m_0 \otimes m_0))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{u}_0) \\ & + \frac{1}{3} \int_{\omega} \sum_{\alpha\beta=1}^2 \sum_{\alpha'\beta'=1}^2 \lambda_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{\text{e}} \partial_{\alpha\beta} \tilde{u}_{03} \partial_{\alpha'\beta'} \tilde{u}_{03} - \frac{1}{2} \int_{\omega} (g^+ + g^-) \cdot \tilde{u}_0 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{\alpha} (g^+ - g^-)_{\alpha} \partial_{\alpha} \tilde{u}_{03} - \int_{\mathcal{C}_2} h \cdot \tilde{u}_0. \end{aligned} \quad (\text{III.3.35})$$

On a  $M^n \rightharpoonup M$  faible dans  $L^2(\Omega_1)$ , donc

$$\int_{\Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial M}{\partial x_\alpha} \right|^2 \leq \liminf \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial M^n}{\partial x_\alpha} \right|^2.$$

De plus,  $M^n \rightarrow M$  dans  $L^4(\Omega_1)$  fort et  $H^n \rightarrow (M \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3$  dans  $L^2(\Omega_1)$  fort, donc

$$\int_{\Omega_1} \Phi(M^n) + \int_{\mathbb{R}^3} |H^n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(M^n) \longrightarrow \int_{\Omega_1} \Phi(M) + \int_{\mathbb{R}^3} |M_3|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}(M).$$

### III.3. Justification d'un modèle bidimensionnel pour les plaques ferromagnétiques avec magnétostriction

---

On a  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^4(\Omega_1)$  fort et  $\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A$  faible dans  $L^2(\Omega_1)$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \varepsilon(\eta, U^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta)) &\longrightarrow \int_{\Omega_1} A : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) \\ &= 2 \int_{\omega} \bar{A} : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)). \end{aligned}$$

La convexité de l'application  $v \rightarrow \int_{\Omega} (\lambda^e : \varepsilon(v)) : \varepsilon(v)$ , pour  $v \in V^1$  implique

$$\int_{\omega} \left( \lambda^e : \int_{-1}^1 A dx_3 \right) : \int_{-1}^1 A dx_3 \leq \int_{-1}^1 \int_{\omega} (\lambda^e : A) : A,$$

et également on a  $\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A$  dans  $L^2(\Omega_1)$ , donc

$$\int_{\omega} (\lambda^e : \bar{A}) : \bar{A} \leq \liminf \int_{\Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta).$$

Par ailleurs,  $(U^\eta)_\eta$  est bornée dans  $L^2(\partial\Omega)$ , donc elle admet une sous suite notée aussi  $(U^\eta)_\eta$  et cette sous suite converge faiblement vers  $U$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , donc,

$$\int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U^\eta + \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U^\eta + \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U^\eta \longrightarrow \int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U + \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U + \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U,$$

et par (III.3.13)-(III.3.14), on a

$$\int_{\Gamma_-^1} g^- \cdot U + \int_{\Gamma_+^1} g^+ \cdot U + \int_{\Gamma_2^1} h \cdot U = \int_{\omega} (g^+ + g^-) \cdot \tilde{u} - \int_{\omega} \sum_{\alpha=1}^2 (g^+ - g^-)_\alpha \partial_\alpha \tilde{u}_3 + 2 \int_{\mathcal{C}_2} h \cdot \tilde{u}.$$

Par conséquent, la semi-continuité de norme pour la topologie faible dans (III.3.34) donne que  $(M, \bar{A})$  satisfait l'inégalité d'énergie suivante : pour tout  $T > 0$ ,

$$\tilde{\mathcal{E}}(T) + \int_0^T \int_{\omega} \left| \frac{\partial M}{\partial t} \right|^2 \leq \tilde{\mathcal{E}}(0), \quad (\text{III.3.36})$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(T) &= \int_{\omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial M}{\partial x_\alpha} \right|^2 + \int_{\omega} \Phi(M) + \int_{\mathbb{R}^3} |H|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\omega} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) : (\lambda^m : M \otimes M) - \frac{1}{2} \int_{\omega} \bar{A} : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\omega} (\lambda^e : \bar{A}) : \bar{A} - \frac{1}{2} \int_{\omega} (g^+ + g^-) \cdot \tilde{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{\alpha=1}^2 (g^+ - g^-)_\alpha \partial_\alpha \tilde{u}_3 - \int_{\mathcal{C}_2} h \cdot \tilde{u}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.37})$$

et  $\tilde{\mathcal{E}}(0)$  est donnée par (III.3.35).

Pour simplifier, on utilise la forme de  $(\lambda^e : \bar{A})$  donnée dans (III.3.25), pour réécrire  $\tilde{\mathcal{E}}(T)$  comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(T) = & \int_{\omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial M}{\partial x_{\alpha}} \right|^2 + \int_{\omega} |M_3|^2 + \int_{\omega} \Phi(M) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\omega} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) : (\lambda^m : M \otimes M) - 2\varepsilon(\tilde{u}) : (\lambda^{\text{et}} : (\lambda^m : M \otimes M)) \\ & + \int_{\omega} (\lambda^{\text{et}} : \varepsilon(\tilde{u})) : \varepsilon(\tilde{u}) - \frac{1}{2} \int_{\omega} (g^+ + g^-) \cdot \tilde{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{\alpha=1}^2 (g^+ - g^-)_{\alpha} \partial_{\alpha} \tilde{u}_3 - \int_{\mathcal{C}_2} h \cdot \tilde{u}. \end{aligned}$$

### III.4 Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

Cette section est organisée comme suit ; Dans la sous-section III.4.1, on considère une solution pour le modèle quasi stationnaire pour un nanofil ferromagnétique  $\Omega_{\eta}$  et à partir de ce modèle, on définit un nouveau modèle sur  $\Omega_1$  par un changement d'échelle convenable, comme la Section II.5 du Chapitre II, qui permet de passer à la limite lorsque le rayon du fil  $\eta$  tend vers zéro. On conclut que la déformation dans la direction longitudinale peut écrire en fonction du moment magnétique  $m$  (voir (III.4.21)) et on obtient une équation de Landau-Lifschitz-Gilbert unidimensionnel dépend seulement de  $m$  (voir (III.4.23)). Pour caractériser la partie transversale de la déformation  $(\bar{u}_2, \bar{u}_3)$ , on travaille avec un cas particulier de  $\lambda^e$  (Section III.4.2).

Dans la Section III.4.3, on étudie la stabilité des solutions statiques  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  pour le nouveau modèle unidimensionnel. Enfin, on propose un schéma explicite en temps, implicite en espace avec un pas d'espace non uniforme et on étudie sa convergence numérique.

#### III.4.1 Modèle tridimensionnel, changement d'échelle et passage à la limite

Comme la Section II.5 de Chapitre II, on considère un fil ferromagnétique  $\Omega_{\eta} = ]0, L[ \times B_2(0, \eta)$ , avec  $\eta$  est le rayon du fil. Le fil est encastré sur  $\Gamma_1^{\eta} = \{0\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , et on pose  $\Gamma_2^{\eta} = ]0, L[ \times S^1(0, \eta)$  et  $\Gamma_3^{\eta} = \{L\} \times \bar{B}_2(0, \eta)$ , tel que  $S^1(0, \eta) = \{(y, z) ; y^2 + z^2 = \eta^2\}$ .

On définit les espaces  $V^{\eta}$ ,  $\tilde{V}_{KL}(\Omega_1)$  et  $V(0, L)$  comme Définition II.5.1 de Chapitre II.

Soient  $m_0 \in H^1(]0, L[ ; S^2(0, 1))$ ,  $\bar{u}_0 \in V(0, L)$ ,  $f = (f_i) \in H^1(\Gamma_2^{\eta}) \times \left( H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2^{\eta}) \right)^2$  et  $F \in \mathbb{R}$ . on désigne par  $u_0$  l'image de  $\bar{u}_0$  par l'isomorphisme  $J$  donné dans la Proposition II.5.2 de Chapitre II et on définit les conditions initiales et limites  $m_0^{\eta} \in H^1(\Omega_{\eta}; S^2(0, 1))$ ,  $u_0^{\eta} \in V^{\eta}$  et  $f^{\eta} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2^{\eta})$  comme (II.5.1) de Chapitre II. Donc, par le Théorème III.2.2, il existe  $(m^{\eta}, u^{\eta})$  vérifie :

1.  $m^{\eta} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+ ; H^1(\Omega_{\eta}; \mathbb{R}^3))$  satisfait  $|m^{\eta}(t, x)| = 1$  p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_{\eta}$ ,

2.  $\frac{\partial m^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3)),$
3.  $m^\eta(0, \cdot) = m_0^\eta$  et  $u^\eta(0, \cdot) = u_0^\eta$  dans le sens de trace en  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\eta),$
4.  $u^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V^\eta),$
5. pour tout  $\chi^\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_\eta; \mathbb{R}^3)),$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \left( \frac{\partial m^\eta}{\partial t} - m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right) \chi^\eta(t, x) dt dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} \sum_{i=1}^3 m^\eta \wedge \frac{\partial m^\eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi^\eta}{\partial x_i} \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge (h_d(m^\eta) + \Psi(m^\eta) + (\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(u^\eta)))m^\eta) \cdot \chi^\eta \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_\eta} m^\eta \wedge ((\lambda^{\text{m}} : (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)))m^\eta) \cdot \chi^\eta, \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

6. pour tout  $\xi^\eta \in V^\eta,$

$$\int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta) - \int_{\Gamma_2^\eta} f^\eta \cdot \xi^\eta - \int_{\Gamma_3^\eta} F \xi^\eta \cdot \vec{e}_1 = \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) : \varepsilon(\xi^\eta), \quad (\text{III.4.2})$$

7. pour tout  $t \geq 0,$  on a l'inégalité de l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}_q(t) + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \left| \frac{\partial m^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}_q(0),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(t) &= \int_{\Omega_\eta} [|\nabla m^\eta|^2 + \Phi(m^\eta)] + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m^\eta)|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \left[ \mathcal{Q}(m^\eta) - 2\varepsilon(u^\eta) : (\lambda^{\text{e}} : (\lambda^{\text{m}} : m^\eta \otimes m^\eta)) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} (\lambda^{\text{e}} : \varepsilon(u^\eta)) : \varepsilon(u^\eta) - \int_{\Gamma_2^\eta} f^\eta \cdot u^\eta - \int_{\Gamma_3^\eta} F u^\eta \cdot \vec{e}_1 d\Gamma. \end{aligned}$$

En partant du modèle posé sur  $\Omega_\eta,$  on définit un nouveau modèle sur  $\Omega_1$  par un changement d'échelle. Alors, on définit  $M^\eta, h_d^\eta$  et  $U^\eta$  à partir de  $m^\eta$  et  $u^\eta$  comme (II.5.3) de Chapitre II. En outre, on définit le 2-tenseur  $\varepsilon(\eta, U^\eta)$  comme (II.5.4) de Chapitre II. Donc, on obtient que  $(M^\eta, U^\eta)$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $M^\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$  satisfait  $|M^\eta(t, x)| = 1$  p.p.  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1,$
2.  $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)),$
3.  $M^\eta(0, \cdot) = m_0$  et  $U^\eta(0, \cdot) = u_0$  dans le sens de trace,
4.  $U^\eta \in V^1,$

5. pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3))$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( \frac{\partial M^\eta}{\partial t} - M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right) \chi = 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \\
 & + \frac{2}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} \left( M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + M^\eta \wedge \frac{\partial M^\eta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge (h_d^\eta + \Psi(M^\eta)) \cdot \chi \\
 & - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta))) M^\eta) \cdot \chi \\
 & + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega_1} M^\eta \wedge ((\lambda^{\mathbf{m}} : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta))) M^\eta) \cdot \chi,
 \end{aligned} \tag{III.4.3}$$

6. pour tout  $\xi \in V^1$ , on a

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi) - \int_{\Gamma_2^1} f \cdot \xi - \int_{\Gamma_3^1} F \xi \cdot \vec{e}_1 = \int_{\Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) : \varepsilon(\eta, \xi), \tag{III.4.4}$$

7. pour tout  $t > 0$ , on a l'inégalité d'énergie suivante

$$\mathcal{E}^\eta(t) + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right|^2 \leq \mathcal{E}^\eta(0), \tag{III.4.5}$$

où,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^\eta(t) &= \frac{1}{\eta^2} \mathcal{E}_q(t) \\
 &= \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega_1} \left( \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial M^\eta}{\partial z} \right|^2 \right) + \int_{\Omega_1} \Phi(M^\eta) + \int_{\mathbb{R}^3} |h_d^\eta|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} [(\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta)) : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta) - 2\varepsilon(\eta, U^\eta) : (\lambda^e : (\lambda^{\mathbf{m}} : M^\eta \otimes M^\eta))] \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta)) : \varepsilon(\eta, U^\eta) - \int_{\Gamma_2^1} f \cdot U^\eta - \int_{\Gamma_3^1} F U^\eta \cdot \vec{e}_1 d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Puisque  $m_0$  est indépendant de  $(y, z)$  et  $\varepsilon_{\alpha i}(\bar{u}_0) = 0$  pour  $\alpha = 2, 3$  et  $i = 1, 2, 3$ , on a  $M^\eta(0)$  et  $\varepsilon(\eta, U^\eta(0))$  ne dépendent pas de  $\eta$ . Donc, le côté droit de l'inégalité d'énergie (III.4.5) est uniformément borné par rapport à  $\eta$ . En procédant comme dans la Section II.4.3 du Chapitre II, on obtient que les quantités suivantes sont bornées uniformément par rapport à  $\eta$  : c'est à dire, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $T > 0$  on a :

- $\|M^\eta\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))} \leq C$
- $\left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_1))} \leq C,$
- $\left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial y} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))} + \left\| \frac{\partial M^\eta}{\partial z} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))} \leq \eta C,$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

- $\|U^\eta\|_{L^\infty(0,T;V^1)} \leq C$ ,
- $\|\varepsilon(\eta, U^\eta)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq C$ ,
- $\|h_d^\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C$ .

Ainsi, on peut maintenant extraire des sous-suites encore notées par  $M^\eta$ ,  $U^\eta$  et  $h_d^\eta$ , de sorte que :

- $M^\eta \rightharpoonup M$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$  faible\*,
- $\frac{\partial M^\eta}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial M}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$  faible,
- $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $L^\infty(0, T; V^1)$  faible\*,
- $h_d^\eta \rightharpoonup H$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$  faible\*.

De plus, on a  $\frac{\partial M^\eta}{\partial y}$  et  $\frac{\partial M^\eta}{\partial z}$  tend vers 0 dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$  fort, donc  $M$  dépend seulement de  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, L[$  et ne dépend pas de  $y$  et  $z$ . On remarque également que  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, cela donne que

$$\varepsilon_{\alpha i}(U^\eta) \rightarrow 0 \text{ fort dans } L^2(\Omega) \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\},$$

et puisque  $U = 0$  sur  $\Gamma_1^1$ , on a  $U \in \tilde{V}_{KL}(\Omega_1)$ . Il existe donc  $\bar{u} \in V(0, L)$  antécédent de  $U$  par isomorphisme  $J$  (Proposition II.5.2 de Chapitre II), tel que :

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \bar{u}_1(x) - y\partial_1\bar{u}_2(x) - z\partial_1\bar{u}_3(x), \\ U_\alpha(x, y, z) &= \bar{u}_\alpha(x) \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\}, \end{aligned} \tag{III.4.6}$$

avec  $\partial_1 \cdot$  représente  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

Par ailleurs, on a  $U^\eta \rightharpoonup U$  dans  $V^1$  faible et  $(\varepsilon(\eta, U^\eta))_\eta$  est bornée, donc

$$\varepsilon(\eta, U^\eta) \rightharpoonup A \text{ faible dans } L^2(\Omega_1), \tag{III.4.7}$$

avec  $A$  est un 2-tenseur symétrique vérifie

$$A_{11} = \varepsilon_{11}(U). \tag{III.4.8}$$

Par l'utilisation de la Lemme II.2.3 d'Aubin-Simon, on a  $M^\eta \rightarrow M$  dans  $L^\infty(0, T; L^r(\Omega_1))$  fort pour  $r < 6$ , et en extrayant une sous-suite de  $M^\eta$ , on peut supposer que  $M^\eta \rightarrow M$  presque partout dans  $\mathbb{R}^+ \times ]0, L[$ , donc  $M$  satisfait la contrainte de saturation  $|M(t, x)| = 1$  presque partout dans  $\mathbb{R}^+ \times ]0, L[$ , et  $M(0, x) = m_0(x)$  au le sens de la trace.

Par les mêmes arguments de calcul pour passer à la limite de (II.5.5) dans la sous-section II.5.2 de Chapitre II, on passe à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro dans la formulation faible

(III.4.3) et on obtient que pour tout  $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1([0, L]))$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \tilde{\chi} &= -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} M \wedge \partial_1 M \cdot \partial_1 \tilde{\chi} - 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} M \wedge (H + \Psi(M)) \cdot \tilde{\chi} \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} M \wedge (\lambda^m : (\lambda^e : \bar{A})) M \cdot \tilde{\chi} + 2 \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} M \wedge ((\lambda^m : (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))) M) \cdot \tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (\text{III.4.9})$$

avec  $\bar{A}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{B_2(0,1)} A(x, y, z) dydz$ . Donc,

$$\bar{A}_{11} = \varepsilon_{11}(\bar{u}), \quad (\text{III.4.10})$$

Pour passer à la limite dans le formulation faible (III.4.2), on prend une fonction test  $\xi$  sous la forme :

$$\xi_1(x, y, z) = v_1(x) - y\partial_1 v_2 - z\partial_1 v_3, \quad (\text{III.4.11})$$

$$\xi_\alpha(x, y, z) = v_\alpha(x) \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\},$$

avec  $v = (v_1, v_2, v_3) \in V(0, L)$ . Donc,  $\varepsilon_{\alpha i}(\xi) = 0$  pour  $\alpha = 2, 3$  et  $\xi = 1, 2, 3$ . On met  $\xi$  comme fonction test dans la formulation faible (III.4.4), on obtient

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : \varepsilon(\eta, U^\eta))_{11} \varepsilon_{11}(\xi) - \int_{\Gamma_2^1} f \cdot \xi - \int_{\Gamma_3^1} F\xi \cdot \vec{e}_1 = \int_{\Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M^\eta \otimes M^\eta))_{11} \varepsilon_{11}(\xi). \quad (\text{III.4.12})$$

On passe à la limite dans (III.4.12) lorsque  $\eta$  tend vers zéro. Par utilisation de (III.4.7) et la limite fort de  $M^\eta$  dans  $L^4(\Omega_1)$ , on obtient

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : A)_{11} \varepsilon_{11}(\xi) - \int_{\Gamma_2^1} f \cdot \xi - \int_{\Gamma_3^1} F\xi \cdot \vec{e}_1 = \int_{\Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11} \varepsilon_{11}(\xi). \quad (\text{III.4.13})$$

On prend  $v_2 = v_3 = 0$  dans (III.4.11). En utilisant le fait que  $M$  et  $v_1$  dépendent seulement de  $x$ , on peut réécrire (III.4.13) et on obtient : pour tout  $v_1 \in H^1(0, L)$  tel que  $v_1(0) = 0$ ,

$$\int_0^L (\lambda^e : \bar{A})_{11} \partial_1 v_1 - \int_0^L \bar{f}_1 \cdot v_1 - Fv_1(L) = \pi \int_0^L (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11} \partial_1 v_1, \quad (\text{III.4.14})$$

tel que

$$\bar{f}_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} f_1(x, y, z) dydz.$$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

Par conséquent  $(M, \bar{A})$  est une solution faible pour

$$\begin{cases} -\partial_1 ((\lambda^e : \bar{A})_{11} - (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11}) = \bar{f}_1 \text{ dans } L^2(0, L) \\ ((\lambda^e : \bar{A})_{11} - (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11})(L) = F. \end{cases} \quad (\text{III.4.15})$$

Donc,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{11} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11} + \int_x^L \bar{f}_1(y) dy + F. \quad (\text{III.4.16})$$

Dans ce qui suit, on va décrire  $(\lambda^e : \bar{A})$  à l'indice  $(\alpha, i)$ , pour  $\alpha \in \{2, 3\}$  et  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Étape 1 :** Pour  $\xi \in V^1$ , on multiplie (III.4.4) par  $\eta^2$  et on passe à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro, on obtient :

$$\int_{\Omega_1} \sum_{\alpha\beta=2}^3 (\lambda^e : A)_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) = \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha\beta=2}^3 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi). \quad (\text{III.4.17})$$

Prendre

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ y\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$ , donc  $\varepsilon_{22}(\xi) = \varphi$  et  $\varepsilon_{23}(\xi) = \varepsilon_{33}(\xi) = 0$ . Puisque  $M$  et  $\varphi$  dépend seulement de  $(t, x)$ , on obtient :

$$\int_0^L (\lambda^e : \bar{A})_{22} \varphi = \int_0^L (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{22} \varphi,$$

et c'est vrai pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$ , donc vrai pour tout  $\varphi \in L^2(0, L)$ . Donc,

$$(\lambda^e : \bar{A})_{22} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{22} \text{ dans } L^2(0, L). \quad (\text{III.4.18})$$

De la même manière et si on prend  $\xi = (0, z\varphi, 0)$  or  $\xi = (0, 0, z\varphi)$ , on obtient : pour  $\alpha \in \{2, 3\}$

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha 3} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha 3} \text{ dans } L^2(0, L). \quad (\text{III.4.19})$$

**Étape 2 :** Prendre  $\xi = (y\varphi, 0, 0)$  ou  $\xi = (z\varphi, 0, 0)$  dans (III.4.4), avec  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$  et multiplier cette équation par  $\eta$ , puis prendre  $\eta$  vers zéro, on obtient : pour  $\alpha \in \{2, 3\}$

$$(\lambda^e : \bar{A})_{\alpha 1} = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha 1} \text{ dans } L^2(0, L). \quad (\text{III.4.20})$$



Donc, (III.4.18)-(III.4.20) s'ensuit que le 2-tenseur  $(\lambda^e : \bar{A})$  peut être écrit

$$(\lambda^e : \bar{A}) = (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M)) + \mathcal{F}, \quad (\text{III.4.21})$$

avec  $\mathcal{F}$  est un 2-tenseur donné par :

$$\mathcal{F}_{11} = \int_0^x \bar{f}_1(s) ds + F \text{ et } \mathcal{F}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Par conséquent, on peut réécrire (III.4.9) par : pour tout  $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(0, L))$

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} \left( \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \right) \tilde{\chi} = -2 \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, L]} (M \wedge \tilde{H}_{eff}) \tilde{\chi}, \quad (\text{III.4.22})$$

avec  $\tilde{H}_{eff} = \partial_{11}M + \Psi(M) + H + (\lambda^m : \mathcal{F})M$ , et  $\partial_{11} \cdot$  représente  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

La limite pour le champ de démagnétisant  $H$  est déjà décrite dans [13] comme suit :

$$H(t, x, y, z) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2(t, x) \\ M_3(t, x) \end{pmatrix} & \text{pour } (x, y, z) \in \Omega_1, \\ \frac{1}{2} \frac{1}{(y^2 + z^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2(t, x)(y^2 - z^2) + 2M_3(t, x)yz \\ -M_3(t, x)(y^2 - z^2) - 2M_2(t, x)yz \end{pmatrix} \\ \text{for } x \in [0, L] \text{ et } y^2 + z^2 > 1, \\ 0 & \text{pour } x \notin [0, L]. \end{cases}$$

Par conséquent,  $M$  est une solution faible pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial t} - M \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = -2M \wedge \tilde{H}_{eff}(M) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ \tilde{H}_{eff}(M) = \partial_{11}M + \Psi(M) + 1/2(M \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\lambda^m : \mathcal{F})M \\ \mathcal{F}_{11} = \int_0^x \bar{f}_1(s) ds + F \text{ et } \mathcal{F}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \partial_x M(0) = \partial_x M(L) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (\text{III.4.23})$$

Le modèle (III.4.23) est fermé, mais en se plaçant dans le cas où  $\lambda^e$  est isotrope, on pourra

caractériser les déformations transverses au fil dans le modèle 1d.

### III.4.2 Cas particulier de $\lambda^e$

On considère le cas isotrope de  $\lambda^e$  donné par : pour tout 2-tenseur symétrique  $S$  :

$$(\lambda^e : S) = \frac{E}{1 + \nu} \left( S + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(S) I_3 \right), \quad (\text{III.4.24})$$

avec  $E$  et  $\nu$  sont deux constantes positives et

$$\text{tr}(S) = S_{11} + S_{22} + S_{33}.$$

Dans (III.4.13), et pour  $v_2 \in H^2(0, L)$  tel que  $\partial_1 v_2(0) = v_2(0) = 0$ , on prend comme fonction test  $\xi = \begin{pmatrix} y \partial_1 v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Puisque  $\varepsilon_{11}(\xi) = y \partial_{11} v_2$  et  $\varepsilon_{\alpha i}(\xi) = 0$ , on obtient

$$\int_{\Omega_1} (\lambda^e : A)_{11} y \partial_{11} v_2 - \int_{\Gamma_2^1} (f_1 y \partial_1 v_2 + f_2 v_2) - \int_{\Gamma_3^1} F y \partial_1 v_2 = \int_{\Omega_1} (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{11} y \partial_{11} v_2. \quad (\text{III.4.25})$$

Puisque  $\int_{B_2(0,1)} y dy dz = 0$ , on a

$$\int_{0,L} (\lambda^e : \bar{B})_{11} \partial_{11} v_2 - \int_{0,L} \tilde{f}_1 \partial_1 v_2 - \int_{0,L} \bar{f}_2 v_2 = 0, \quad (\text{III.4.26})$$

avec

$$\bar{B} = \frac{1}{\pi} \int_{B_2(0,1)} y A dy dz, \quad \tilde{f}_1 = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} y f_1 dy dz \quad \text{et} \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} f_2 dy dz.$$

Maintenant, dans (III.4.13), on prend  $\xi = \begin{pmatrix} z \partial_1 v_3 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , avec  $v_3 \in H^2(0, L)$  satisfait  $\partial_1 v_3(0) = v_3(0) = 0$ . Une étape similaire à ci-dessus implique que

$$\int_{0,L} (\lambda^e : \bar{C})_{11} \partial_{11} v_3 - \int_{0,L} \tilde{f}_1 \partial_1 v_3 - \int_{0,L} \bar{f}_3 v_3 = 0, \quad (\text{III.4.27})$$

avec

$$\bar{C} = \frac{1}{\pi} \int_{B_2(0,1)} z A dy dz, \quad \tilde{f}_1 = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} z f_1 dy dz \quad \text{et} \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\pi} \int_{S^1(0,1)} f_3 dy dz.$$

En outre, on remarque que

$$\bar{B}_{11} = -\frac{1}{3} \partial_{11} \bar{u}_2 \quad \text{et} \quad \bar{C}_{11} = -\frac{1}{3} \partial_{11} \bar{u}_3. \quad (\text{III.4.28})$$

On a

$$(\lambda^e : \bar{B})_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left( -\frac{1}{3} \partial_{11} \bar{u}_2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\bar{B}) \right)$$

et

$$(\lambda^e : \bar{C})_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left( -\frac{1}{3} \partial_{11} \bar{u}_3 + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\bar{C}) \right)$$

avec

$$\text{tr}(\bar{B}) = -\frac{1}{3} \partial_{11} \bar{u}_2 + \bar{B}_{22} + \bar{B}_{33} \quad \text{et} \quad \text{tr}(\bar{C}) = -\frac{1}{3} \partial_{11} \bar{u}_3 + \bar{C}_{22} + \bar{C}_{33}.$$

Pour caractériser  $\bar{B}_{\alpha\alpha}$  et  $\bar{C}_{\alpha\alpha}$  pour  $\alpha \in \{2, 3\}$ , on multiplie (III.4.4) par  $\eta^2$  et on passe à la limite lorsque  $\eta$  tend vers zéro, on obtient :

$$\int_{\Omega_1} \sum_{\alpha\beta=2}^3 (\lambda^e : A)_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi) = \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha\beta=2}^3 (\lambda^e : (\lambda^m : M \otimes M))_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi). \quad (\text{III.4.29})$$

On prend la fonction test  $\xi$  dans (III.4.29) sous la forme  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ , avec  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$ .

Puisque  $\varepsilon_{22}(\xi) = 2y\varphi$  et  $\varepsilon_{\alpha 3}(\xi) = 0$  pour  $\alpha \in \{2, 3\}$ , on obtient

$$(\lambda^e : \bar{B})_{22} = 0. \quad (\text{III.4.30})$$

On prend  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \varphi \end{pmatrix}$  avec  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$ . Puisque  $\varepsilon_{33}(\xi) = 2z\varphi$  et  $\varepsilon_{\alpha 2}(\xi) = 0$  pour  $\alpha \in \{2, 3\}$ , on obtient

$$(\lambda^e : \bar{C})_{33} = 0, \quad (\text{III.4.31})$$

Maintenant, dans (III.4.17), on prend  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \varphi \end{pmatrix}$  avec  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$ . Puisque  $\varepsilon_{23}(\xi) = y\varphi$  et  $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\xi) = 0$  pour  $\alpha \in \{2, 3\}$ , on obtient

$$(\lambda^e : \bar{B})_{23} = 0,$$

et si on prend  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ yz\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ , on obtient  $\varepsilon_{23}(\xi) = y\varphi$ ,  $\varepsilon_{22}(\xi) = z\varphi$  et  $\varepsilon_{33}(\xi) = 0$ , et alors

$$(\lambda^e : \bar{B})_{23} + (\lambda^e : \bar{C})_{22} = 0,$$

donc,

$$(\lambda^e : \bar{C})_{22} = 0, \quad (\text{III.4.32})$$

Par un calcul semblable, on a

$$(\lambda^e : \bar{B})_{33} = 0, \quad (\text{III.4.33})$$

Donc, par (III.4.30)-(III.4.33), et grâce à un simple calcul, on obtient

$$\bar{B}_{22} = \bar{B}_{33} = -\nu \bar{B}_{11} \quad \text{et} \quad \bar{C}_{22} = \bar{C}_{33} = -\nu \bar{C}_{11},$$

il suit que

$$\text{tr}(\bar{B}) = (1 - 2\nu)\bar{B}_{11} \quad \text{et} \quad \text{tr}(\bar{C}) = (1 - 2\nu)\bar{C}_{11},$$

ensuite,

$$(\lambda^e : \bar{B})_{11} = E\bar{B}_{11} \quad \text{et} \quad (\lambda^e : \bar{C})_{11} = E\bar{C}_{11}. \quad (\text{III.4.34})$$

En conséquence, par (III.4.26), (III.4.28) et (III.4.34),  $\bar{u}_2$  est une solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{3}\partial_1^4(\bar{u}_2) - \partial_1\tilde{f}_1 - \bar{f}_2 = 0 \quad \text{dans } ]0, L[, \\ \left(\frac{E}{3}\partial_1^3(\bar{u}_2) - \tilde{f}_1\right)(L) = 0, \quad \partial_{11}\bar{u}_2(L) = 0, \\ \partial_1\bar{u}_2(0) = 0, \quad \bar{u}_2(0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{III.4.35})$$

et par (III.4.27), (III.4.28) et (III.4.34),  $\bar{u}_3$  est une solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{3}\partial_1^4(\bar{u}_3) - \partial_1\tilde{f}_1 - \bar{f}_3 = 0 \quad \text{dans } ]0, L[, \\ \left(\frac{E}{3}\partial_1^3(\bar{u}_3) - \tilde{f}_1\right)(L) = 0, \quad \partial_{11}\bar{u}_3(L) = 0, \\ \partial_1\bar{u}_3(0) = 0, \quad \bar{u}_3(0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{III.4.36})$$

avec  $\partial_1^4 \cdot$  représente  $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$  et  $\partial_1^3 \cdot$  représente  $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$ . Donc, (III.4.35) et (III.4.36) permettent de résoudre  $\bar{u}_2$  et  $\bar{u}_3$  explicitement et on obtient :

$$\bar{u}_2(x) = \frac{3}{E} \int_0^x \left[ \int_0^s \left( \tilde{f}_1(L)(\tau - L) + \int_\tau^L \left[ (\tau - r)(\partial_x \tilde{f}_1(r) + \bar{f}_2(r)) \right] dr \right) d\tau \right] ds \quad (\text{III.4.37})$$

et

$$\bar{u}_3(x) = \frac{3}{E} \int_0^x \left[ \int_0^s \left( \tilde{f}_1(L)(\tau - L) + \int_\tau^L [(\tau - r)(\partial_x \tilde{f}_1(r) + \bar{f}_3(r))] dr \right) d\tau \right] ds. \quad (\text{III.4.38})$$

### III.4.3 Étude de la stabilité des solutions stationnaires

Dans cette section, on se place dans le cas d'un fil ferromagnétique de longueur  $L$ , tel que  $\lambda^m$  est de la forme

$$\forall S \text{ symétrique, } (\lambda^m : S) = \alpha S + (1 - \alpha) \text{tr}(S) I_3, \quad \text{où } \alpha \in ]0, 1[,$$

soumis à son extrémité à une force dans la directions du fil. Le modèle obtenu est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -2m \wedge \tilde{H}_{eff}(m) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ \tilde{H}_{eff}(m) = \partial_{11} m + (1/2 + F)(m \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1, \\ \partial_x m(0) = \partial_x m(L) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (\text{III.4.39})$$

On remarque que les constantes  $+\vec{e}_1$  ou  $+\vec{e}_2$  sont solutions statiques de (III.4.39). On étudie maintenant leur stabilité au sens de Lyapunov. Concernant  $\vec{e}_1$ , on démontre le théorème suivant :

**Théorème III.4.1.** *Soit  $F \in \mathbb{R}$ . Si  $1/2 + F$  positif, alors  $\vec{e}_1$  est asymptotiquement stable et si  $1/2 + F$  négatif, alors  $\vec{e}_1$  est instable. Dans le cas critique  $1/2 + F = 0$ ,  $\vec{e}_1$  est stable et il existe  $\delta_1$  tel que si  $m$  solution de (III.4.39) satisfait  $\|m(0, \cdot) - \vec{e}_1\|_{H^1} \leq \delta_1$ , il existe  $(\theta_\infty, \sigma_\infty) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|(\theta_\infty, \sigma_\infty)| \leq 1$ ,*

$$m_{(\theta_\infty, \sigma_\infty)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \theta_\infty^2 - \sigma_\infty^2} \\ \theta_\infty \\ \sigma_\infty \end{pmatrix},$$

et  $m(t, \cdot)$  tend vers  $m_{(\theta_\infty, \sigma_\infty)}$  dans  $H^1(\mathbb{R})$  lorsque  $t$  tend vers infini.

Pour prouver Théorème III.4.1, on décrit la perturbation de  $\vec{e}_1$  dans le repère  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , en écrivant

$$m(t, x) = r_1(t, x) \vec{e}_2 + r_2(t, x) \vec{e}_3 + \mu(r) \vec{e}_1. \quad (\text{III.4.40})$$

avec  $\mu(r) = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} - 1$ , de sorte qu'on ne considère que les perturbations vérifiant la contrainte de saturation  $|m| = 1$  (voir [20], [23] et [25]).

On écrit l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec la nouvelle inconnue  $r$  et par projection dans  $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$  on obtient que si  $m$  satisfait (III.4.39), alors  $r$  satisfait l'équation quasi-

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

linéaire suivante :

$$R(r)\partial_t r = K\mathcal{L}r + G(r)(\partial_{11}r) + H(r)(\partial_1 r, \partial_1 r) + P(r), \quad (\text{III.4.41})$$

avec

- la matrice inversible  $R(r)$  définit par

$$R(r) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} & \frac{r_2^2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} + \mu(r) \\ -\mu(r) - \frac{r_1^2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} & -\frac{r_1 r_2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} \end{pmatrix},$$

alors,  $(R(r))^{-1}$  est égale :

$$(R(r))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + Z(r),$$

où  $Z \in \mathcal{C}^\infty(B(0, \frac{1}{2}); L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$ , et  $|Z(r)| \leq |r|^2$ .

- La matrice  $K$  définit par

$$K = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.42})$$

-  $\mathcal{L}r = -\partial_{11}r + (1/2 + F)r$ ,

- la matrice  $G(r)$  définit par

$$G(r) = 2 \begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} & \frac{r_2^2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} + \mu(r) \\ -\mu(r) - \frac{r_1^2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} & \frac{r_1 r_2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.43})$$

-  $H(r)$  est une forme bilinéaire symétrique définit par : pour tout  $X_1, X_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$H(r)(X_1, X_2) = 2 \begin{pmatrix} \frac{r_2}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}^3} \\ \frac{r_1}{\sqrt{1-r_1^2-r_2^2}^3} \end{pmatrix} [(1-r_1^2-r_2^2)(X_1 \cdot X_2) + (r \cdot X_1)(r \cdot X_2)] \quad (\text{III.4.44})$$

-  $P$  définit par

$$P(r) = 2 \begin{pmatrix} -(1/2 + F)r_2\mu(r) \\ (1/2 + F)r_1\mu(r) \end{pmatrix}$$

Par suite, l'équation (III.4.41) peut être réécrit comme suit :

$$\partial_t r = J\mathcal{L}(r) + Q(r) \quad (\text{III.4.45})$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$Q(r) = Z(r)K\mathcal{L}r + (R(r))^{-1}(K\mathcal{L}r + G(r)(\partial_{11}r) + H(r)(\partial_1r, \partial_1r) + P(r)).$$

Cette construction a déjà été utilisée dans [21]. La contrainte de saturation est automatiquement satisfaite à partir de la définition de  $r$  (III.4.40). On a donc que  $m$  satisfait (III.4.39) si et seulement si  $r$  satisfait (III.4.45). De plus,  $\vec{e}_1$  est une solution stable pour (III.4.39) si et seulement si zéro est une solution stable pour (III.4.45). En outre, les termes non linéaires de (III.4.45) peuvent être estimés par : pour tout  $r \in B(0, \frac{1}{2})$ , il existe  $c$  tel que

$$|Z(r)| \leq c|r|^2, |G(r)| \leq c|r|^2, |H(r)| \leq c|r| \text{ et } |P(r)| \leq c|r|^2. \quad (\text{III.4.46})$$

### Stabilité asymptotique de $\vec{e}_1$ dans le cas $1/2 + F > 0$ :

Dans ce cas,  $\mathcal{L} = -\partial_{11} + (1/2 + F)$  est un opérateur coercif auto-adjoint tel que pour tout  $r \in H^2(0, L)$ , on a

$$\min(1, 1/2 + F)\|r\|_{H^1}^2 \leq \langle \mathcal{L}r, r \rangle \leq \max(1, 1/2 + F)\|r\|_{H^1}^2, \quad (\text{III.4.47})$$

et

$$\min(1, 1/2 + F)\|r\|_{H^2}^2 \leq \|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2 \leq \max(1, 2(1/2 + F))\|r\|_{H^2}^2,$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans  $L^2(0, L)$ .

Les inégalités dans (III.4.46) permettent d'utiliser la preuve du Lemme 1 dans [25]. Alors, il existe une constante  $c$  tel que pour tout  $r \in H^2(0, L)$  avec  $|r| \leq \frac{1}{2}$ , on a

$$\|Q(r)\|_{L^2} \leq c \langle \mathcal{L}r, r \rangle^{1/2} \|\mathcal{L}r\|_{L^2}. \quad (\text{III.4.48})$$

On prend le produit scalaire dans  $L^2$  de l'équation (III.4.45) avec  $\mathcal{L}r$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}r, r \rangle &= -\|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2 + \langle Q(r), \mathcal{L}r \rangle \\ &\leq -\|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2 + \|Q(r)\|_{L^2} \|\mathcal{L}r\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc, par (III.4.48), tant que  $|r| \leq \frac{1}{2}$ , on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}r, r \rangle \leq -\|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2 + c \langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2,$$

donc,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}r, r \rangle + (1 - c \langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}}) \|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Par l'utilisation de l'injection de Sobolev  $H^1(0, L) \subset L^\infty(0, L)$  et l'estimation (III.4.47), on fixe  $\delta > 0$  tel que  $\delta \leq \frac{1}{2c}$  et si  $\langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \delta$  implique  $\|r\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2}$ . Donc, tant que  $\langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \delta$ , on obtient  $(1 - c \langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}$ , alors

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}r, r \rangle + \|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Grâce à

$$\|r\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{1/2 + F} \langle \mathcal{L}r, r \rangle,$$

on obtient, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que

$$\|r\|_{L^2} \leq \frac{1}{1/2 + F} \|\mathcal{L}r\|_{L^2},$$

donc,

$$\langle \mathcal{L}r, r \rangle \leq \frac{1}{1/2 + F} \|\mathcal{L}r\|_{L^2}^2.$$

Par suite, tant que  $\langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \delta$ , on a

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}r, r \rangle + (1/2 + F) \langle \mathcal{L}r, r \rangle \leq 0.$$

En utilisant une lemme de comparaison, on déduit que : tant que  $\langle \mathcal{L}r, r \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \delta$ , on a

$$\langle \mathcal{L}r(t), r(t) \rangle \leq \langle \mathcal{L}r(0), r(0) \rangle e^{-(1/2+F)t}. \quad (\text{III.4.49})$$

Maintenant, on fixe  $\delta_0 = \frac{\delta}{2}$  et on suppose que

$$\langle \mathcal{L}r(0), r(0) \rangle \leq \delta_0.$$

Ainsi, on a

$$\forall t > 0, \langle \mathcal{L}r(t), r(t) \rangle^{\frac{1}{2}} < \delta. \quad (\text{III.4.50})$$

Si ce n'est pas le cas, il existe  $t_0 > 0$  de sorte que

$$\langle \mathcal{L}r(t_0), r(t_0) \rangle^{\frac{1}{2}} \geq \delta.$$



Soit  $t_1$  le premier temps en lequel (III.4.50) n'est pas vérifié. On a alors, par continuité :

$$\langle \mathcal{L}r(t_1), r(t_1) \rangle^{\frac{1}{2}} = \delta, \quad (\text{III.4.51})$$

et pour tout  $t < t_1$ , on a

$$\langle \mathcal{L}r(t), r(t) \rangle \leq \langle \mathcal{L}r(0), r(0) \rangle e^{-(1/2+F)t} \leq \delta_0^2 = \frac{1}{4}\delta^2.$$

Par continuité de  $\langle \mathcal{L}\cdot, \cdot \rangle$ , on a  $\langle \mathcal{L}r(t), r(t) \rangle \leq \frac{1}{4}\delta^2$  et cela est en contradiction avec (III.4.51). Ainsi, dans l'hypothèse  $\langle \mathcal{L}r(0), r(0) \rangle \leq \delta_0$ , pour tout  $t > 0$ , l'estimation (III.4.49) est valide, alors  $\|r\|_{H^1}$  est petit pour tout  $t$  et  $\|r\|_{H^1}$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers infini. Donc,  $\vec{e}_1$  est asymptotiquement stable dans le cas  $1/2 + F > 0$ .

### Instabilité de $\vec{e}_1$ dans le cas $1/2 + F < 0$ :

On considère une condition initiale  $r_0$  constante en  $x$ . Puisque les coefficients de (III.4.45) ne dépendent pas de  $x$ , alors la solution  $r$  reste constante dans la variable  $x$  et satisfait l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dr}{dt} = J(1/2 + F)r + Q_1(r), \quad (\text{III.4.52})$$

avec

$$Q_1(r) = Z(r)K(1/2 + F)r + (R(r))^{-1}P(r),$$

alors,

$$Q_1(r) = \mathcal{O}(|r|^2).$$

Donc, si on démontre que 0 est instable pour (III.4.52), alors 0 est instable pour (III.4.45). Pour cela, on démontre que  $(1/2 + F)J$  admet au moins une valeur propre avec une partie réelle strictement positive. On désigne par

$$\Delta = -4(1/2 + F)^2$$

le discriminant du polynôme caractéristique

$$X^2 + 2(1/2 + F)X + 2(1/2 + F)^2.$$

Donc,  $\Delta$  est négatif et la partie réelle des valeurs propres est égale  $-(1/2 + F)$ , qui est positive. Ainsi 0 est une solution instable pour (III.4.52), donc  $\vec{e}_1$  est instable pour (III.4.39) quand  $1/2 + F < 0$ .

### Cas critique $1/2 + F = 0$ :

Dans ce cas, l'équation (III.4.45) écrit

$$\frac{dr}{dt} = J\mathcal{L}r + Q_2(r), \quad (\text{III.4.53})$$

avec

$$\mathcal{L}r = -\partial_{11}r,$$

et

$$Q_2(r) = Z(r)K\mathcal{L}r + (R(r))^{-1}(K\mathcal{L}r + G(r)(\partial_{11}r) + H(r)(\partial_1r, \partial_1r)).$$

Donc, 0 est stable pour (III.4.53), si et seulement si  $\vec{e}_1$  est stable pour (III.4.39) quand  $1/2 + F = 0$ .

On remarque que (III.4.39) a une famille de deux paramètres de solution de régime permanent, donnée par

$$m_{(\theta, \sigma)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \theta^2 - \sigma^2} \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix}.$$

Donc, la projection de  $m_{(\theta, \sigma)}$  dans le repère mobile  $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , donne que (III.4.53) admet une famille de deux paramètres de solution de régime permanent donnée par

$$V(\theta, \sigma) = \begin{pmatrix} \theta \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (\text{III.4.54})$$

Alors, on remarque que  $V$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  satisfaisant :

- $V(\theta, \sigma)$  est une solution de régime permanent pour (III.4.53).
- $V(0, 0) = (0, 0)$  ;  $\frac{\partial V}{\partial \theta}(0, 0) = (1, 0)$  et  $\frac{\partial V}{\partial \sigma}(0, 0) = (0, 1)$ .
- Puisque  $V(0, 0)$  est une solution pour (III.4.53) et  $Q_2(r)$  est plus que quadratique, alors

$$\mathcal{L} \frac{\partial V}{\partial \theta}(0, 0) = \mathcal{L} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(0, 0) = 0,$$

et  $\text{Ker } \mathcal{L} = \text{Vect}((1, 0), (0, 1))$ .

- Pour  $w \in (\text{Ker } \mathcal{L})^\perp \cap H^2$ , on a

$$\int_0^L w_1 = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^L w_2 = 0,$$

donc, on peut appliquer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, et obtenir

$$\langle \mathcal{L}w, w \rangle = \int_0^L (|\partial_1 w_1|^2 + |\partial_1 w_2|^2) \geq \|w_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|w_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (\text{III.4.55})$$

On définit l'espace  $\mathcal{V}$  par :

$$\mathcal{V} = (\text{Ker } \mathcal{L})^\perp \cap H^2(0, L).$$

On affirme que la décomposition de  $r$  par :

$$r(x) = V(\theta, \sigma)(x) + w(x),$$

est unique, avec la propriété qu'il existe  $\delta_0 > 0$  et  $\|r\|_{L^\infty} \leq \delta_0$ . Il faut que  $w$  soit dans  $\mathcal{V}$ . Cette décomposition a été utilisée dans [39] pour établir les propriétés de stabilité des solutions statiques des équations paraboliques semi-linéaires, et dans [7], [50] pour prouver la stabilité des ondes progressives. Alors, dans ces nouvelles coordonnées, l'équation III.4.53 conduit à (voir [21], [25] pour les détails des calculs) :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = J\mathcal{L}w + \mathcal{R}(\Lambda, w, \partial_1 w, \partial_{11} w), \quad (\text{III.4.56})$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{N}(\Lambda, w, \partial_1 w),$$

avec  $\Lambda = (\theta, \sigma)$ , les applications  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \times H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{N} : \mathbb{R}^2 \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont non linéaires, pour lesquels il existe des constantes  $C > 0$  et  $\eta > 0$  tel que

$$\|\mathcal{R}(\Lambda, w, \partial_1 w, \partial_{11} w)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C (\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}) \|w\|_{H^2(\mathbb{R})}, \quad (\text{III.4.57})$$

$$\|\mathcal{N}(\Lambda, w, \partial_1 w)\|_{\mathbb{R}^2} \leq C (\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}) \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad (\text{III.4.58})$$

pour tout  $w \in \mathcal{V}$  et  $\Lambda \in \mathbb{R}^2$  satisfait  $\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} \leq \eta$ .

On remarque maintenant que  $\langle \mathcal{L}w, w \rangle$  est équivalent à la norme  $\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}$  dans l'espace  $\mathcal{V}$  car par l'inégalité (III.4.55) on a

$$\frac{1}{2} \|w\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \langle \mathcal{L}w, w \rangle \leq \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad (\text{III.4.59})$$

c'est clair aussi que pour tout  $w \in \mathcal{V}$ , on a

$$\|\mathcal{L}w\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|w\|_{H^2(\mathbb{R})}.$$

On considère une solution  $(\Lambda, w)$  de (III.4.56), tel que  $w(0, \cdot) = w_0(\cdot)$  et  $\Lambda(0) = \Lambda_0$ . Le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la première équation de (III.4.56) avec  $\mathcal{L}w$  donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}w, w \rangle = \langle J\mathcal{L}w, \mathcal{L}w \rangle + \langle \mathcal{R}(\Lambda, w, \partial_1 w, \partial_{11} w), \mathcal{L}w \rangle, \quad (\text{III.4.60})$$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

car  $\mathcal{L}$  est autoadjoint. Concernant le premier terme du côté droit de (III.4.60), on calcule

$$\langle J\mathcal{L}w, \mathcal{L}w \rangle = -\|\mathcal{L}w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq -\|w\|_{H^2(\mathbb{R})}^2. \quad (\text{III.4.61})$$

En ce qui concerne le deuxième terme du côté droit de (III.4.60), on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'estimation (III.4.57) que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(\Lambda, w, \partial_1 w, \partial_{11} w), \mathcal{L}w \rangle &\leq \|\mathcal{R}(\Lambda, w, \partial_1 w, \partial_{11} w)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\mathcal{L}w\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C (\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}) \|w\|_{H^2(\mathbb{R})} \|\mathcal{L}w\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (\text{III.4.62}) \\ &\leq C (\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}) \|w\|_{H^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de (III.4.60), (III.4.61) et (III.4.62), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}w, w \rangle \leq (-1 + C (\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R})})) \|w\|_{H^2(\mathbb{R})}^2.$$

Si l'estimation

$$\|\Lambda\|_{\mathbb{R}^2} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2C}$$

s'applique, alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}w, w \rangle \leq -\frac{1}{2} \|w\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 \leq -\frac{1}{2} \|\mathcal{L}w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq -\frac{1}{2} \langle \mathcal{L}w, w \rangle.$$

Donc, par le lemme de comparaison on a

$$\langle \mathcal{L}w(t), w(t) \rangle \leq \langle \mathcal{L}w_0, w_0 \rangle \exp(-t) \quad (\text{III.4.63})$$

Il s'ensuit que si  $\|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{10C}$  et si l'estimation  $|\Lambda| \leq \frac{1}{4C}$  s'applique, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\|w\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{4C}.$$

En effet, dans le cas contraire, il existe un temps  $t_1$ , tel que  $\forall t < t_1$ ,  $\|w(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{1}{4C}$  et  $\|w(t_1)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{4C}$ . Par l'inégalité (III.4.63) on a pour tout  $t < t_1$ ,

$$\langle \mathcal{L}w(t), w(t) \rangle \leq \frac{1}{10C},$$

par continuité de  $\langle \mathcal{L}w, w \rangle$ , on obtient pour  $t = t_1$ ,

$$\langle \mathcal{L}w(t_0), w(t_0) \rangle \leq \frac{1}{10C}.$$

alors par l'inégalité (III.4.59), on obtient

$$\|w(t_1)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{5C},$$

ceci est contraire à  $\|w(t_1)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{4C}$ . Donc, sous l'hypothèse  $\|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{10C}$  et  $|\Lambda| \leq \frac{1}{4C}$ , on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\|w(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \exp(-t). \quad (\text{III.4.64})$$

En outre, on déduit de (III.4.56), (III.4.58) et (III.4.64) que, si l'estimation a priori  $|\Lambda| \leq \frac{1}{4C}$  est vraie, alors

$$\begin{aligned} \|\Lambda(t)\|_{\mathbb{R}^2} &\leq \|\Lambda_0\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{1}{2}\|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \int_0^t \exp(-s) ds \\ &\leq \|\Lambda_0\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{1}{2}\|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (\text{III.4.65})$$

Par toutes les estimations a priori précédentes, on conclut que, si  $\|\Lambda_0\|_{\mathbb{R}^2} + \|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$  est suffisamment petit, alors  $\|\Lambda(t)\|_{\mathbb{R}^2}$  reste petit, pour tout  $t \geq 0$ , et  $\|w(t, \cdot)\|_{H^1}$  diminue exponentiellement vers zéro. De plus, par (III.4.56), (III.4.58) et (III.4.64) on obtient que  $\|\frac{d\Lambda}{dt}\|_{\mathbb{R}^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty)$ , et donc  $\Lambda(t)$  admet une limite dans  $\mathbb{R}^2$ , dénoté  $\Lambda_\infty = (\theta_\infty, \sigma_\infty)$ , lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Cela conclut la preuve de théorème III.4.1.

Dans la suite, on va étudier la stabilité de  $\vec{e}_2$  pour  $1/2 + F$  positif et négatif. Dans le cas où  $1/2 + F = 0$ ,  $\vec{e}_2$  est stable et la preuve est similaire à la preuve de stabilité de  $\vec{e}_1$ .

**Théorème III.4.2.** *Soit  $F \in \mathbb{R}$ . Si  $1/2 + F$  positif, donc  $\vec{e}_2$  est instable.*

*Dans le cas critique  $1/2 + F$  négatif,  $\vec{e}_2$  est stable et il existe  $\delta_2$  tel que si  $m$  solution pour (III.4.39) satisfait  $\|m(0, \cdot) - \vec{e}_2\|_{H^1} \leq \delta_2$ , il existe  $\varphi_\infty \in \mathbb{R}$  avec la propriété que  $m(t, \cdot)$  tend vers  $M_{\varphi_\infty}$  dans  $H^1$  lorsque  $t$  tend vers infini, avec*

$$M_{\varphi_\infty} = \cos \varphi_\infty \vec{e}_2 + \sin \varphi_\infty \vec{e}_3.$$

*Pour le cas critique  $1/2 + F = 0$ ,  $\vec{e}_2$  est stable et il existe  $\delta_2$  tel que si  $m$  solution de (III.4.39) satisfait  $\|m(0, \cdot) - \vec{e}_2\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta_2$ , il existe  $(\xi_\infty, \zeta_\infty) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|(\xi_\infty, \zeta_\infty)| \leq 1$ ,*

$$m_{(\xi_\infty, \zeta_\infty)} = \begin{pmatrix} \xi_\infty \\ \sqrt{1 - \xi_\infty^2 - \zeta_\infty^2} \\ \zeta_\infty \end{pmatrix},$$

*et  $m(t, \cdot)$  tend vers  $m_{(\xi_\infty, \zeta_\infty)}$  dans  $H^1(\mathbb{R})$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .*

Comme précédemment, on décrit la perturbation de  $\vec{e}_2$  dans le repère mobile  $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ , en écrivant

$$m(t, x) = \tilde{r}_1(t, x) \vec{e}_1 + \tilde{r}_2(t, x) \vec{e}_3 + \mu(\tilde{r}) \vec{e}_2. \quad (\text{III.4.66})$$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

Donc, par la projection de (III.4.39) dans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ , on obtient que  $\tilde{r}$  satisfait l'équation suivante :

$$\partial_t \tilde{r} = J^T L(\tilde{r}) + \tilde{Q}(\tilde{r}) \quad (\text{III.4.67})$$

avec

$$L\tilde{r} = -\partial_{11}\tilde{r} - (1/2 + F)(\tilde{r}, \vec{e}_1)\vec{e}_1,$$

et

$$\tilde{Q}(\tilde{r}) = \tilde{Z}(\tilde{r})KL\tilde{r} + (\tilde{R}(\tilde{r}))^{-1}(KL\tilde{r} - G(\tilde{r})(\partial_{11}\tilde{r}) - H(\tilde{r})(\partial_1\tilde{r}, \partial_1\tilde{r}) + \tilde{P}(\tilde{r})).$$

tel que

- la matrice inversible  $\tilde{R}(\tilde{r})$  définit par

$$\tilde{R}(\tilde{r}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\tilde{r}_1\tilde{r}_2}{\sqrt{1-\tilde{r}_1^2-\tilde{r}_2^2}} & \frac{\tilde{r}_2^2}{\sqrt{1-\tilde{r}_1^2-\tilde{r}_2^2}} + \mu(\tilde{r}) \\ -\mu(\tilde{r}) - \frac{\tilde{r}_1^2}{\sqrt{1-\tilde{r}_1^2-\tilde{r}_2^2}} & -\frac{\tilde{r}_1\tilde{r}_2}{\sqrt{1-\tilde{r}_1^2-\tilde{r}_2^2}} \end{pmatrix},$$

puis  $(\tilde{R}(\tilde{r}))^{-1}$  peut écrire :

$$(\tilde{R}(\tilde{r}))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{Z}(\tilde{r}),$$

tel que  $\tilde{Z} \in C^\infty(B(0, \frac{1}{2}); L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$ .

-  $K$ ,  $G(\tilde{r})$  et  $H(\tilde{r})$  sont donnés respectivement dans (III.4.42), (III.4.43) et (III.4.44),

-  $\tilde{P}(\tilde{r})$  définit par

$$\tilde{P}(\tilde{r}) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ (1/2 + F)\tilde{r}_1\mu(\tilde{r}) \end{pmatrix}.$$

#### Instabilité de $\vec{e}_2$ dans le cas $1/2 + F > 0$ :

Comme dans le cas précédent, on prend une donnée initiale  $\tilde{r}_0$  indépendant de  $x$ , donc la solution  $\tilde{r}$  est également indépendant de  $x$  parce que les coefficients de (III.4.67) ne dépendent pas de  $x$ , puis  $\tilde{r}$  satisfait :

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} = A\tilde{r} + \tilde{Q}_1(\tilde{r}), \quad (\text{III.4.68})$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 + F & 0 \\ 1/2 + F & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{Q}_1(\tilde{r}) = \tilde{Z}(\tilde{r})K(1/2 + F)(\tilde{r}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\tilde{R}(\tilde{r}))^{-1}\tilde{P}(\tilde{r}).$$

Donc,  $Q_1(\tilde{r}) = \mathcal{O}(|\tilde{r}|^2)$  est dans le voisinage de zéro. Clairement, 0 et  $1/2 + F$  sont les valeurs propres de  $A$ , et depuis  $1/2 + F > 0$ , alors  $A$  admet une valeur propre qui est strictement positive ; donc 0 est instable pour (III.4.68), cela implique que  $\vec{e}_2$  est instable pour (III.4.39) quand  $1/2 + F > 0$ .

**Stabilité de  $\vec{e}_2$  dans le cas  $1/2 + F < 0$  :**

On remarque dans ce cas que (III.4.39) admet une famille à un paramètre de solutions du régime permanent donnée par

$$M_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_2 + \sin \varphi \vec{e}_3. \quad (\text{III.4.69})$$

Par la projection de (III.4.69) dans le repère mobile  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ , on obtient que (III.4.67) admet également une famille à un paramètre de solutions du régime permanent donnée par :

$$W(\varphi) = \begin{pmatrix} M_\varphi \cdot \vec{e}_1 \\ M_\varphi \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{III.4.70})$$

Donc,  $W$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , satisfait :

- $W(\varphi)$  est une régime permanent de (III.4.67).
- $W(0) = (0, 0)$ , et  $W'(0) = (0, 1)$ .
- on peut remarquer que  $\text{Ker } L = \text{Vect } W'(0)$ . Soit  $w = (w_1, w_2) \in (\text{Ker } L)^\perp \cap H^2$ , donc

$$\int_0^L w_2 = 0,$$

et en appliquant l'inégalité Poincaré-Wirtinger, on obtient

$$\langle Lw, w \rangle = \int_0^L (|\partial_1 w_1|^2 - (1/2 + F)|w_1|^2) + \int_0^L |\partial_1 w_2|^2 \geq -(1/2 + F)\|w_1\|_{L^2}^2 + \|w_2\|_{L^2}^2.$$

Par conséquent, on peut appliquer la proposition 2 dans [25] et obtenir que zéro est stable pour (III.4.67), et à partir proche de zéro, une solution  $\tilde{r}$  pour (III.4.67) satisfait qu'il existe  $\varphi_\infty$  tel que  $\tilde{r}(t, \cdot)$  tend vers  $W(\varphi_\infty)$  dans  $H^1$  lorsque  $t$  tends vers infini. Donc,  $\vec{e}_2$  est stable pour (III.4.39), et si  $m$  est une solution de (III.4.39) satisfait  $\|m(0, \cdot) - \vec{e}_2\|_{H^1}$  suffisamment petite, alors il existe  $\varphi_\infty$  tel que  $\|m(t, \cdot) - M_{\varphi_\infty}\|_{H^1}$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers infini. Et la preuve de Théorème III.4.2 est complète.

### III.4.4 Études numériques du modèle unidimensionnel pour un nanofil ferromagnétique avec magnétostriction

Dans cette section on utilise la même discrétisation en espace que dans [3], sauf qu'on fait de l'implicite en temps pour éviter la CFL du type  $dt \leq Cdx^2$ .

#### III.4.4.1 Schéma numérique

On considère un nanofil rectiligne de longueur  $L$ . On prend une force appliqué  $g \in H^{\frac{1}{2}}(0, L)$  et  $F \in \mathbb{R}$  et une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tel que le terme anisotrope  $\Psi(m) = Am$ . Grâce à la section III.4.1, le moment magnétique  $m$  est une solution faible pour (III.4.23), c'est à dire  $m$  est une solution faible de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -2m \wedge \tilde{H}_{eff}(m) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ \tilde{H}_{eff}(m) = \partial_{11}m + Am + 1/2(m, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\lambda^m : \mathcal{F})m. \end{cases} \quad (\text{III.4.71})$$

avec le 2-tenseur  $\mathcal{F}$  est donné par :

$$\mathcal{F}_{11} = \int_0^x 2g(y)dy + F \text{ et } \mathcal{F}_{\alpha i} = 0 \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2, 3\}.$$

De plus,  $m$  vérifie le condition de Neumann homogène :

$$\partial_x m(0) = 0 \text{ et } \partial_x m(L) = 0.$$

On considère un maillage non régulier de  $[0, L]$  avec  $N$  points de discrétisation :

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_N = L.$$

On désigne par  $w_i$  le volume de contrôle autour de  $x_i$  donné par :

$$w_1 = \left] 0, \frac{x_2}{2} \right[ ,$$

$$w_i = \left] \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right[ \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, N-1\},$$

et

$$w_N = \left] \frac{x_{N-1} + x_N}{2}, L \right[ .$$

On désigne par  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ .

On considère l'ensemble des points de discrétisation en temps du segment  $[0, T]$ . A l'instant



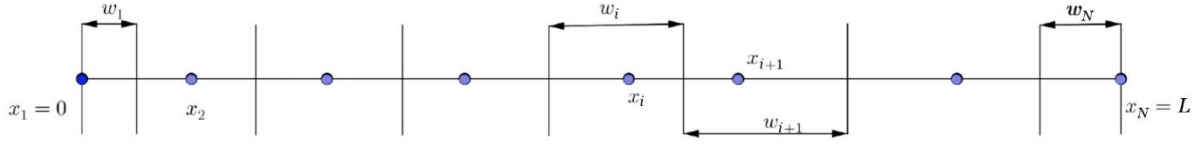


FIGURE III.1 – Discrétisation du segment  $[0, L]$ .

$t_j$ , la solution discrète  $m^j$  est décrite par

$$m^j = (m_2^j, \dots, m_{N-1}^j),$$

où  $m_i^j$  approche la valeur de  $m$  à l'instant  $t_j$  et au point  $x_i \in ]0, L[$ .

On note  $\mathcal{I}_{\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}}(\{y_{i-1}, y_i, y_{i+1}\})$  l'interpolation de Lagrange en trois points  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$ , tel que  $y_i$  représentant les valeurs de la fonction aux points  $x_i$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}}(\{y_{i-1}, y_i, y_{i+1}\}) = & \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} y_i \\ & + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} y_{i+1}. \end{aligned}$$

On approche  $m$  sur  $w_1$  et  $w_N$  par

$$V^j(x) = \mathcal{I}_{\{x_1, x_2, x_3\}}(\{m_1^j, m_2^j, m_3^j\}) \mathbf{1}_{w_1},$$

$$V_N^j(x) = \mathcal{I}_{\{x_{N-2}, x_{N-1}, x_N\}}(\{m_{N-2}^j, m_{N-1}^j, m_N^j\}) \mathbf{1}_{w_N},$$

où  $m_1^j$  et  $m_N^j$  sont inconnues. Puisque  $\partial_x m(0) = \partial_x m(L) = 0$ , on a  $\partial_x V^j(0) = \partial_x V_N^j(L) = 0$ , donc

$$\partial_x V^j(0) = -\frac{2h_1 + h_2}{h_1(h_1 + h_2)} m_1^j + \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} m_2^j - \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} m_3^j = 0,$$

et

$$\partial_x V_N^j(L) = \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}(h_{N-1} + h_{N-2})} m_{N-2}^j - \frac{h_{N-1} + h_{N-2}}{h_{N-1} h_{N-2}} m_{N-1}^j + \frac{2h_{N-1} + h_{N-2}}{h_{N-2}(h_{N-1} + h_{N-2})} m_N^j = 0.$$

Ceci permet de déterminer  $m_1^j$  et  $m_N^j$  comme suit :

$$m_1^j = \frac{(h_1 + h_2)^2}{h_2(2h_1 + h_2)} m_2^j - \frac{h_1^2}{h_2(2h_1 + h_2)} m_3^j, \quad (\text{III.4.72})$$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

et

$$m_N^j = \frac{(h_{N-1} + h_{N-2})^2}{h_{N-2}(2h_{N-1} + h_{N-2})} m_{N-1}^j - \frac{(h_{N-1})^2}{h_{N-2}(2h_{N-1} + h_{N-2})} m_{N-2}^j. \quad (\text{III.4.73})$$

A l'instant  $t_j$ , sur chaque volume de contrôle intérieur  $w_i$ , ( $2 \leq i \leq N-1$ ), on approche  $m(t_j, x)$  par une interpolation polynomiale de Lagrange  $u_i^j$ , polynôme de degré 2 sur  $w_i$  tel que

$$u_i^j(x_{i-1}) = m_{i-1}^j, \quad u_i^j(x_i) = m_i^j \quad \text{et} \quad u_i^j(x_{i+1}) = m_{i+1}^j.$$

Alors, on prend

$$\begin{aligned} u_i^j(x) &= \mathcal{I}_{\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}}(\{m_{i-1}^j, m_i^j, m_{i+1}^j\}) \\ &= \alpha_i m_{i-1}^j + \beta_i m_i^j + \gamma_i m_{i+1}^j, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_i = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)}, \quad \beta_i = -\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h_{i-1}h_i} \quad \text{et} \quad \gamma_i = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_i(h_{i-1} - h_i)}.$$

Donc, par (III.4.72) et (III.4.73), on obtient que

$$u_2^j = \sigma_1 m_2^j + \sigma_2 m_3^j \quad \text{et} \quad u_{N-1}^j = \sigma_3 m_{N-2}^j + \sigma_4 m_{N-1}^j,$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(h_1 + h_2)^2}{h_2(2h_1 + h_2)} \alpha_2 + \beta_2, \quad \sigma_2 = -\frac{h_1^2}{h_2(2h_1 + h_2)} \alpha_2 + \gamma_2, \\ \sigma_3 &= -\frac{(h_{N-1})^2}{h_{N-2}(2h_{N-1} + h_{N-2})} \gamma_{N-1} + \alpha_{N-1} \quad \text{et} \quad \sigma_4 = \frac{(h_{N-1} + h_{N-2})^2}{h_{N-2}(2h_{N-1} + h_{N-2})} \gamma_{N-1} + \beta_{N-1}. \end{aligned}$$

En utilisant un schéma Euler explicite en temps, on écrit le schéma de différence finie semi-implicite en espace par : pour  $i \in \{2, \dots, N-1\}$ ,

$$\int_{w_i} \left( \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{dt} - u_i^j \wedge \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{dt} \right) dx \simeq -2 \int_{w_i} u_i^j \wedge \tilde{H}_{eff} \left( \frac{u_i^{j+1} + u_i^j}{2} \right) dx. \quad (\text{III.4.74})$$

On approche  $\partial_{11} u_i^j$ , pour tout  $i \in \{3, \dots, N-2\}$ , pour tout  $x \in w_i$ , par

$$\partial_{11} u_i^j(x) \simeq \frac{2}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} m_{i-1}^j - \frac{2}{h_i h_{i-1}} m_i^j + \frac{2}{h_i(h_i + h_{i-1})} m_{i+1}^j.$$

Pour les volumes des contrôles  $w_2$  et  $w_{N-1}$ , on utilise (III.4.72)-(III.4.73) et on obtient

$$\partial_{11} u_2^j(x) \simeq \left( \frac{2(h_1 + h_2)}{h_1 h_2(2h_1 + h_2)} - \frac{2}{h_1 h_2} \right) m_2^j + \left( \frac{-2h_1}{h_2(h_2 + h_1)(2h_1 + h_2)} + \frac{2}{h_2(h_2 + h_1)} \right) m_3^j,$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{11} u_{N-1}^j(x) &\simeq \left( \frac{2(h_{N-1} + h_{N-2})}{h_{N-1}h_{N-2}(2h_{N-1} + h_{N-2})} - \frac{2}{h_{N-1}h_{N-2}} \right) m_{N-1}^j \\ &+ \left( \frac{-2h_{N-2}}{h_{N-2}(h_{N-2} + h_{N-1})(2h_{N-1} + h_{N-2})} + \frac{2}{h_{N-2}(h_{N-2} + h_{N-1})} \right) m_{N-2}^j. \end{aligned}$$

Alors, la matrice du laplacien est écrit sous la forme

$$Lap = \begin{pmatrix} d_1 I_3 & d_2 I_3 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_3 I_3 & b_3 I_3 & c_3 I_3 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{N-2} I_3 & b_{N-2} I_3 & c_{N-2} I_3 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & d_3 I_3 & d_4 I_3 \end{pmatrix},$$

avec

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \frac{2(h_1 + h_2)}{h_1 h_2 (2h_1 + h_2)} - \frac{2}{h_1 h_2},$$

$$d_2 = \frac{-2h_1}{h_2(h_2 + h_1)(2h_1 + h_2)} + \frac{2}{h_2(h_2 + h_1)},$$

$$d_3 = \frac{-2h_{N-2}}{h_{N-2}(h_{N-2} + h_{N-1})(2h_{N-1} + h_{N-2})} + \frac{2}{h_{N-2}(h_{N-2} + h_{N-1})},$$

$$d_4 = \frac{2(h_{N-1} + h_{N-2})}{h_{N-1}h_{N-2}(2h_{N-1} + h_{N-2})} - \frac{2}{h_{N-1}h_{N-2}}.$$

et pour  $i \in \{3, \dots, N-2\}$ , on a

$$a_i = \frac{2}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})}, \quad b_i = -\frac{2}{h_i h_{i-1}} \quad \text{et} \quad c_i = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i-1})}.$$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

On prend le troisième terme du membre gauche de (III.4.74), on a :

$$\begin{aligned} \int_{w_i} u_i^j \wedge u_i^{j+1} &= \int_{w_i} (\alpha_i m_{i-1}^j + \beta_i m_i^j + \gamma_i m_{i+1}^j) \wedge (\alpha_i m_{i-1}^{j+1} + \beta_i m_i^{j+1} + \gamma_i m_{i+1}^{j+1}) \\ &= q_i \wedge m_{i-1}^{j+1} + r_i \wedge m_i^{j+1} + s_i \wedge m_{i+1}^{j+1}, \end{aligned}$$

avec  $q_i, r_i, s_i$  sont dans  $\mathbb{R}^3$  donnés par : pour  $i \in \{3, \dots, N-2\}$

$$q_i = \int_{w_i} \alpha_i^2 m_{i-1}^j + \int_{w_i} \alpha_i \beta_i m_i^j + \int_{w_i} \alpha_i \gamma_i m_{i+1}^j, \quad (\text{III.4.75})$$

$$r_i = \int_{w_i} \alpha_i \beta_i m_{i-1}^j + \int_{w_i} \beta_i^2 m_i^j + \int_{w_i} \beta_i \gamma_i m_{i+1}^j, \quad (\text{III.4.76})$$

$$s_i = \int_{w_i} \alpha_i \gamma_i m_{i-1}^j + \int_{w_i} \beta_i \gamma_i m_i^j + \int_{w_i} \gamma_i^2 m_{i+1}^j, \quad (\text{III.4.77})$$

et pour  $i \in \{2, N-1\}$ ,

$$q_2 = 0 \quad \text{et} \quad q_{N-1} = \int_{w_{N-1}} \sigma_3^2 m_{N-2}^j + \int_{w_{N-1}} \sigma_3 \sigma_4 m_{N-1}^j, \quad (\text{III.4.78})$$

$$r_2 = \int_{w_2} \sigma_1^2 m_2^j + \int_{w_2} \sigma_1 \sigma_2 m_3^j \quad \text{et} \quad r_{N-1} = \int_{w_{N-1}} \sigma_3 \sigma_4 m_{N-2}^j + \int_{w_{N-1}} \sigma_4^2 m_{N-1}^j, \quad (\text{III.4.79})$$

$$s_2 = \int_{w_2} \sigma_1 \sigma_2 m_2^j + \int_{w_2} \sigma_2^2 m_3^j \quad \text{et} \quad s_{N-1} = 0. \quad (\text{III.4.80})$$

Maintenant, on prend  $X = (X_2, \dots, X_{N-1})$  et  $Y = (Y_2, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{R}^{3(N-2)}$ . Un simple calcul du produit vectoriel permet de conclure que

$$X_i \wedge Y_i = B_i(X) Y_i,$$

avec  $B_i(X)$  est une matrice dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définit par :

$$B_i(X) = \begin{pmatrix} 0 & -(X_i)_3 & (X_i)_2 \\ (X_i)_3 & 0 & -(X_i)_1 \\ -(X_i)_2 & (X_i)_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\int_{w_i} u_i^j \wedge u_i^{j+1} = B_i(q) m_{i-1}^{j+1} + B_i(r) m_i^{j+1} + B_i(s) m_{i+1}^{j+1}.$$

Par un argument similaire, on conclue que la solution numérique  $m^{j+1}$  recherchée à l'instant

### Chapitre III. Modèle quasi-stationnaire pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction

---

$t^{j+1}$  peut être déduite de  $m^j$  par :

$$[M - Z + dt (V(Mm^j)Lap + Z(H + P) + F\lambda)] m^{j+1} = [M - dt (V(Mm^j)Lap + Z(H + P) + F\lambda)] m^j,$$

avec  $M$ , la matrice de masse intervenant grâce à l'interpolation sur chaque volume de contrôle, est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \int_{w_2} \sigma_1 I_3 & \int_{w_2} \sigma_2 I_3 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \int_{w_3} \alpha_3 I_3 & \int_{w_3} \beta_3 I_3 & \int_{w_3} \gamma_3 I_3 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \int_{w_{N-2}} \alpha_{N-2} I_3 & \int_{w_{N-2}} \beta_{N-2} I_3 & \int_{w_{N-2}} \gamma_{N-2} I_3 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \int_{w_{N-1}} \sigma_3 I_3 & \int_{w_{N-1}} \sigma_4 I_3 & \end{pmatrix}.$$

La matrice  $V(Mm^j) \in \mathcal{M}_{N-2}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  est donnée par

$$(V(Mm^j))_{ij} = \begin{cases} B_i(Mm^j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

La matrice  $Z \in \mathcal{M}_{N-2}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  est donnée par

$$Z = \begin{pmatrix} B_2(r) & B_2(s) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ B_3(q) & B_3(r) & B_3(s) & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & B_{N-2}(q) & B_{N-2}(r) & B_{N-2}(s) \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & B_{N-1}(q) & B_{N-1}(r) \end{pmatrix},$$

avec  $q, r, s \in \mathbb{R}^{3(N-2)}$  sont donnés dans (III.4.75)-(III.4.80).

La matrice  $F \in \mathcal{M}_{N-2}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  est donnée par

$$F = \begin{pmatrix} B_2(f^2) & B_2(f^3) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ B_3(f^1) & B_3(f^2) & B_3(f^3) & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & B_{N-2}(f^1) & B_{N-2}(f^2) & B_{N-2}(f^3) \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & B_{N-1}(f^1) & B_{N-1}(f^2) \end{pmatrix},$$

avec  $f^1, f^2, f^3 \in \mathbb{R}^{3(N-2)}$  définissent par : pour  $i \in \{3, \dots, N-2\}$

$$f_i^1 = \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \alpha_i^2 m_{i-1}^j + \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \alpha_i \beta_i m_i^j + \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \alpha_i \gamma_i m_{i+1}^j,$$

$$f_i^2 = \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \alpha_i \beta_i m_{i-1}^j + \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \beta_i^2 m_i^j + \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \beta_i \gamma_i m_{i+1}^j,$$

$$f_i^3 = \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \alpha_i \gamma_i m_{i-1}^j + \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \beta_i \gamma_i m_i^j + \int_{w_i} \mathcal{F}_{11} \gamma_i^2 m_{i+1}^j,$$

et pour  $i \in \{2, N-1\}$ ,

$$f_2^1 = 0 \quad \text{et} \quad f_{N-1}^1 = \int_{w_{N-1}} \mathcal{F}_{11} \sigma_3^2 m_{N-2}^j + \int_{w_{N-1}} \mathcal{F}_{11} \sigma_3 \sigma_4 m_{N-1}^j,$$

$$f_2^2 = \int_{w_2} \mathcal{F}_{11} \sigma_1^2 m_2^j + \int_{w_2} \mathcal{F}_{11} \sigma_1 \sigma_2 m_3^j \quad \text{et} \quad f_{N-1}^2 = \int_{w_{N-1}} \mathcal{F}_{11} \sigma_3 \sigma_4 m_{N-2}^j + \int_{w_{N-1}} \mathcal{F}_{11} \sigma_4^2 m_{N-1}^j,$$

$$f_2^3 = \int_{w_2} \mathcal{F}_{11} \sigma_1 \sigma_2 m_2^j + \int_{w_2} \mathcal{F}_{11} \sigma_2^2 m_3^j \quad \text{et} \quad f_{N-1}^3 = 0.$$

Les matrices  $H$ ,  $P$  et  $\lambda$  sont dans  $\mathcal{M}_{N-2}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  indépendantes de  $m^j$  et données par :

$$H_{ij} = \begin{cases} E & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}, \quad P_{ij} = \begin{cases} A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda_{ij} = \begin{cases} \Lambda & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si non} \end{cases},$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_{ij} = \lambda_{ij11}^m \quad \text{pour } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

#### III.4.4.2 Convergence numérique du schéma : Erreur pour plusieurs cas de $F$

Dans le reste de cette section, on suppose que  $A = 0$ ,  $g = 0$ , et la matrice  $\Lambda$  est donnée par :  $\Lambda_{11} = 1$  et  $\Lambda_{ij} = 0$  si  $i \neq 1$  ou  $j \neq 1$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in ]0, L[$ , on considère un vecteur  $M(t, x)$  satisfait la contrainte de saturation  $\|M\| = 1$  et donné par :

$$M(t, x) = \begin{pmatrix} \sin(t) \cos \theta(x) \\ \sin(t) \sin \theta(x) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

avec

$$\theta(x) = \frac{x^2(x-L)^2}{16}.$$

Donc, il est clair que  $M$  vérifie la condition de Neumann homogène sur  $\{0, L\}$ . Pour que  $M$  soit une solution analytique pour (III.4.71), on peut choisir un champ appliqué particulier

### III.4. Justification d'un modèle unidimensionnel pour les nanofils ferromagnétique avec magnétostriction

---

comme suit :

$$H_a = \frac{1}{2}M \wedge \partial_t M - \frac{1}{2}M \wedge (M \wedge \partial_t M) + M \wedge (M \wedge [\partial_{11}M + (1/2 + F)(M, \vec{e}_1)\vec{e}_1]),$$

et dans ce cas,  $M$  est une solution exacte de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert. Dans la suite, on considère un maillage régulier.

Soit  $m$  la solution numérique de (III.4.71) tel que

$$m : \{jdt\}_{j=0}^J \times \{idx\}_{i=0}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

avec  $J$  est le nombre de points de discrétisation en temps,  $N$  est le nombre de points de discrétisation en espace, et  $dt$  (respectivement  $dx$ ) est le pas de discrétisation en temps (respectivement en espace). On note

$$m_i^j = m(jdt, idx) \text{ et } m^j = \{m(jdt, idx)\}_{i=0}^{N-1}.$$

Soit  $X = (X_0, \dots, X_{N-1})$  tel que  $X_n \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . On note :

$$\|X\|_2 = \left( \frac{1}{3N} \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

Pour calculer l'erreur, on utilise la norme suivante :

$$\|X\|_{2,\infty} = \sup_{j \in \{0, J\}} \|X\|_2.$$

Donc, on obtient le tableau d'erreur III.1.

$N$	$F = 0$	$F = 2$	$F = -2$
100	0.001451312	0.007458352	0.000929658
200	0.000738238	0.003752018	0.000553878
400	0.000373297	0.001880226	0.000300872
800	0.000187792	0.000940971	0.000156554
1600	0.000094192	0.000470675	0.000079820
3200	0.000047171	0.000235381	0.000040297

**TABLE III.1** – L'erreur à l'instant  $T = 1$ .

À l'aide de l'échelle logarithmique, on trouve que la variation de l'erreur selon le nombre de points de discrétisation (pour  $dt = dx/10$ ) est donnés par la figure III.2. Après une régression linéaire, la pente des courbes de ces figures est proche de -1. Notre schéma est donc d'ordre 1.



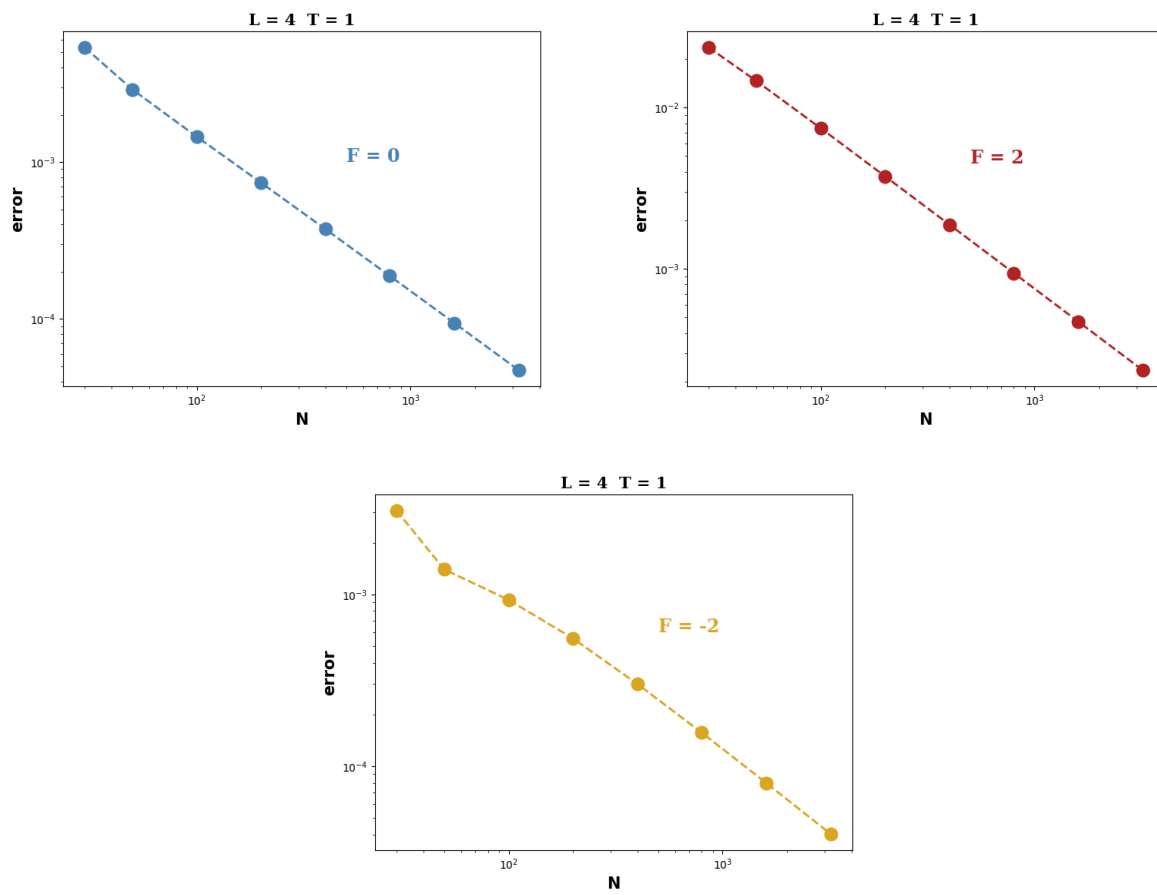


FIGURE III.2 – Erreur numérique selon le nombre de points de discrétisation

---

---

# CHAPITRE IV

---

## STABILISATION DES MURS LOIN DE L'ENCOUCHE POUR DES NANOFILS FERROMAGNÉTIQUES

### Sommaire

---

IV.1	Modèle unidimensionnel pour un nanofil ferromagnétique . . . . .	162
IV.2	Formes équivalentes de l'équation . . . . .	166
IV.2.1	Repère mobile . . . . .	167
IV.2.2	Parti linéaire de l'équation et nouvelles coordonnées . . . . .	169
IV.2.3	Estimations variationnelles . . . . .	174
IV.3	Preuve du Théorème IV.1.1 . . . . .	179
IV.3.1	Première étape : Nouveau produit scalaire . . . . .	179
IV.3.2	Deuxième étape : Estimations variationnelles sur $W$ . . . . .	181
IV.3.3	Troisième étape : Estimation pour $\Lambda$ et fin de la preuve . . . . .	184

---

Du fait de leurs applications prometteuses pour l'enregistrement des données numériques (cf. [47]), les nanofils ferromagnétiques font l'objet de nombreuses études, tant en physique (cf. [9], [48], [51]) qu'en mathématiques (cf. [21], [22], [26]). Dans ces nanofils, l'aimantation se structure en domaines, larges zones dans lesquelles la magnétisation est constante, séparés par des murs, fines zones de renversement de l'aimantation. L'information est alors codée par la position relative des murs. Leur stabilité est donc un point clé pour assurer la pérennité du stockage. Dans [21], à partir d'un modèle monodimensionnel de nanofil ferromagnétique, il est démontré que dans un fil rectiligne de longueur infinie, les configurations à un mur sont stables mais pas asymptotiquement stables, en raison de l'invariance du modèle par

translation et rotation. Dans [26], on établit que la position des murs est stabilisée par des encoches faites le long du fil, qui ont la propriété de fixer les murs, comme cela est observé expérimentalement. Ceci permet d'assurer la pérennité de ce mode d'enregistrement, sans consommation d'énergie. Afin d'amener l'information à une tête de lecture ou de modifier l'information, on observe que l'injection d'un courant électrique ou l'application d'un champ magnétique extérieur permet de décrocher le mur de l'encoche (cf. [32], [47]). Dans [26], il est démontré que si le champ appliqué est petit, le mur reste fixé à l'encoche, mais qu'au dessus d'un certain seuil, il n'existe plus de solution statique modélisant un mur fixé par l'encoche. Ceci confirme qu'un champ magnétique assez fort permet de sortir le mur du domaine d'attraction de l'encoche. Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement du mur soumis à un champ magnétique lorsqu'il s'éloigne de l'encoche. On établit que la dynamique du mur se rapproche de celle observée en l'absence d'encoche.

## IV.1 Modèle unidimensionnel pour un nanofil ferromagnétique

On considère dans ce travail un nanofil ferromagnétique de longueur infinie (assimilé à la droite réelle) avec une encoche symétrique centrée en zéro. On travaille sur le modèle

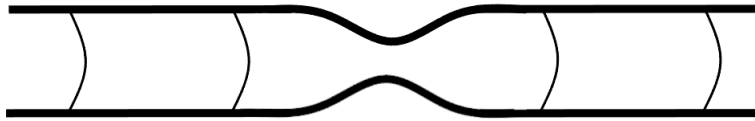


FIGURE IV.1 – Fil avec encoche

monodimensionnel de fil avec section variable obtenu par processus asymptotique dans [14]. On introduit le paramètre  $s : \mathbb{R} \rightarrow [\rho_1, 1] \subset \mathbb{R}^{*,+}$ , fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $s(x)$  est proportionnel à l'aire de la section du fil à l'abscisse  $x$ , où  $0 < \rho_1 < 1$ . On suppose que  $s$  est paire (encoche symétrique autour de 0), que  $s = 1$  en dehors de  $[-a, a]$  et que  $s$  est croissante sur  $[0, a]$ .

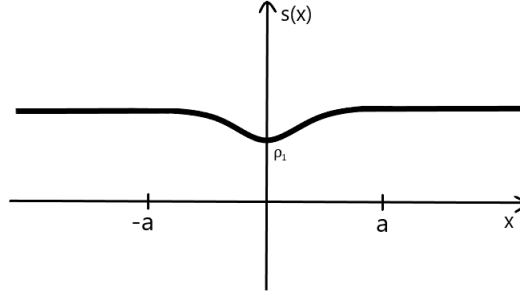
On note  $m : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}$  le moment magnétique vérifiant la contrainte de saturation

$$|m(t, x)| = 1 \quad \text{p.p. } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Dans le cas statique, l'énergie associée à une configuration  $m : \mathbb{R}_x \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  est donnée par :

$$\mathcal{E}(m) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} s(x) |\partial_x m|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} s(x) (1 - |m(x) \cdot \vec{e}_1|^2) dx,$$

où le premier terme est l'énergie d'échange 1d, et le deuxième est l'énergie démagnétisante,


 FIGURE IV.2 – Fonction  $s(x)$ 

qui est locale en dimension 1 comme observé dans [21], et qui est analogue à une énergie d'anisotropie avec  $\vec{e}_1$  comme axe de facile aimantation.

Dans le cas dynamique, en présence d'un champ magnétique appliqué de la forme  $H_a(t, x) = -h(t)\vec{e}_1$ , les variations de  $m$  sont décrites par l'équation de Landau-Lifschitz suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e(m) - m \wedge (m \wedge H_e(m)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ H_e(m) = \partial_{xx}m + \frac{s'}{s}\partial_x m + (m \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - h(t)\vec{e}_1. \end{cases} \quad (\text{IV.1.1})$$

On remarque que le modèle ci dessus est invariant par rotation autour de l'axe  $\mathbb{R}\vec{e}_1$ .

En l'absence d'encoche sur le fil,  $s$  est constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}$  et le modèle étudié est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_{ef}(m) - m \wedge (m \wedge H_{ef}(m)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ H_{ef}(m) = \partial_{xx}m + (m \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - h(t)\vec{e}_1. \end{cases} \quad (\text{IV.1.2})$$

Remarquons que dans ce cas, le système est invariant par translation et rotation autour de l'axe du fil, c'est-à-dire : si  $m$  satisfait (IV.1.2), alors  $(t, x) \rightarrow \mathbf{R}_\varphi m(t, x - \sigma)$  est aussi solution, où  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  et

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Pour  $h = 0$ , une solution statique décrivant un renversement d'aimantation de  $-\vec{e}_1$  (lorsque

$x \rightarrow -\infty$ ) vers  $+\vec{e}_1$  (lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ) est donnée par :

$$M_0(x) = \begin{pmatrix} \tanh x \\ \frac{1}{\cosh x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les solutions statiques de (IV.1.2) tendant vers  $\pm\vec{e}_1$  lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$  s'écrivent comme une rotation translation de  $M_0$ .

En effet, pour un champ appliqué  $h(t)\vec{e}_1$ , où  $h$  est  $\mathcal{C}^0$ , si la donnée initiale est  $M_0$ , alors on observe une rotation-translation du mur décrit par la fonction  $\mathcal{M}_h$  :

$$\mathcal{M}_h(t, x) = \mathbf{R}_{(-H(t))} M_0(x - H(t)), \quad \text{où } H(t) = \int_0^t h(s) ds. \quad (\text{IV.1.3})$$

En notant :

$$M_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh x} \\ -\tanh x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

un simple calcul donne :

$$\frac{\partial \mathcal{M}_h}{\partial t} = \mathbf{R}_{-H(t)} \left( \frac{h(t)}{\cosh(x - \sigma(t))} M_2 - \frac{h(t)}{\cosh(x - \sigma(t))} M_1(x - \sigma(t)) \right),$$

$$H_{ef}(m) = \mathbf{R}_{-H(t)} \left[ \begin{aligned} &(2 \tanh^2(x - H(t)) - 1) M_0(x - H(t)) \\ &-h(t) (\tanh(x - H(t)) M_0(x - H(t)) + \frac{1}{\cosh(x - H(t))} M_1(x - H(t))) \end{aligned} \right],$$

et en utilisant que  $(M_0, M_1, M_2)$  est un repère orthonormé, on vérifie que  $\mathcal{M}_h$  est solution de (IV.1.2).

Pour  $h$  constante vérifiant  $|h| < 1$ , il est démontré dans [36] que  $\mathcal{M}_h$  est stable au sens de Liapunov, et asymptotiquement stable modulo translation-rotation, c'est-à-dire pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe  $\mu_0 > 0$  tel que si  $m$  est une solution de (IV.1.2) avec  $\|m(0, \cdot) - M_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \mu_0$ , alors

$$\forall t \geq 0, \|m(t, \cdot) - \mathcal{M}_h(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon,$$

et il existe  $\varphi_\infty$  et  $\sigma_\infty \in \mathbb{R}$  tel que

$$\|m(t, \cdot) - \mathbf{R}_{\varphi_\infty} \mathcal{M}_h(t, \cdot + \sigma_\infty)\|_{H^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Il est aussi démontré dans [36] que  $\mathcal{M}_h$  est linéairement instable pour  $h$  constante avec  $|h| > 1$ .

Pour  $h$  non constante, il est démontré dans [30] que si  $\|h\|_\infty$  est suffisamment petite, alors  $\mathcal{M}_h$  est stable.

En présence d'une encoche (modèle (IV.1.1) qui n'est plus invariant par translation) pour  $h = 0$  on établit dans [26] qu'il existe une solution stationnaire représentant un mur, de la forme  $(\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  où  $\varphi$  vérifie l'équation du pendule modifiée :

$$\varphi'' + \frac{s'}{s}\varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0 \text{ et } \varphi \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}.$$

Il est aussi démontré que pour  $h$  constante suffisamment petite, il existe une solution stationnaire  $M_h$  de la forme  $(\sin \varphi_h, \cos \varphi_h, 0)$  où  $\varphi_h$  vérifie

$$\varphi_h'' + \frac{s'}{s}\varphi_h + \sin \varphi_h \cos \varphi_h + h \cos \varphi_h = 0 \text{ et } \varphi \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}. \quad (\text{IV.1.4})$$

A noter qu'une telle solution statique du pendule (IV.1.4) pour  $s$  constante n'existe pas, puisque dans ce cas, pour  $h \neq 0$ , la séparatrice issue de  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  ne recoupe pas dans l'espace des phase celle issue de  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , et que c'est l'encoche qui permet de relier les deux séparatrices (cf. [26]). Cette propriété illustre le fait observé expérimentalement que l'encoche fixe le mur pour des champs magnétiques appliqués petits.

Pour des champs magnétiques plus grands, il est démontré dans [26] qu'une telle solution statique n'existe plus, ce qui illustre le désancrage des murs qui quittent l'encoche si le champ appliqué est suffisamment grand.

On s'intéresse dans ce chapitre au comportement du mur après le désancrage, et on montre qu'une fois loin de l'encoche, la dynamique du mur est proche de celle en l'absence d'encoche décrite dans (IV.1.3). On établit le théorème suivant :

**Théorème IV.1.1.** *Il existe  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$  deux constantes petites avec  $0 < \delta_1 < \delta_2$ , tel que pour tout fonction continue  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant*

$$\forall t, \quad \delta_1 < h(t) \leq \delta_2,$$

*alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\sigma^*$  et  $\eta > 0$  tels que si  $m_0 \in H^1(\mathbb{R}; S^2)$  vérifie : il existe  $\sigma_0 \geq \sigma^*$  et  $\varphi_0$  tels que  $\|m_0(\cdot) - \mathbf{R}_{\varphi_0} M_0(\cdot - \sigma_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \eta$ , alors  $m$ , la solution de (IV.1.1) avec  $m_0$  comme donnée initiale vérifie : pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $\|m(t, \cdot) - \mathbf{R}_{(\varphi_0 - H(t))} M_0(\cdot - \sigma_0 - H(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$ . De plus, il existe  $(\varphi_\infty, \sigma_\infty) \in \mathbb{R}^2$  tel que*

$$\left\| m(t, \cdot) - \mathbf{R}_{(\varphi_0 - H(t) + \varphi_\infty)} M_0(\cdot - \sigma_0 - H(t) + \sigma_\infty) \right\|_{H^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On note

$$\mathcal{M}_h = \mathbf{R}_{(\varphi_0 - H(t))} M_0(x - \sigma_0 - H(t)).$$

La preuve de Théorème IV.1.1 est organisée en quatre étapes :

1. Pour se ramener à l'étude du profil stationnaire, on effectue le changement d'inconnue suivant : on prend  $M(t, x) = (\mathbf{R}_{(\varphi_0 - H(t))})^{-1}m(t, x + \sigma_0 + H(t))$ , on obtient une équation équivalente avec  $M$  avec la propriété :  $m$  proche de  $\mathcal{M}_h$  si et seulement si  $M$  proche de  $M_0$ . On se ramène ainsi à étudier la stabilité d'une solution stationnaire en temps.
2. Afin d'assurer que les perturbations de  $M_0$  considérées vérifient la contrainte de saturation  $|M| = 1$ , on décrit  $M$  dans le repère mobile  $M = r_1M_1 + r_2M_2 + \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}M_0$ , avec  $(M_0, M_1, M_2)$  est le repère orthonormé, déjà défini, dépendant de  $x$ . La nouvelle inconnu  $r = (r_1, r_2)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et satisfait une nouvelle équation qui est équivalente à l'équation en  $M$ . De plus, on a :  $M$  proche de  $M_0$  si et seulement si  $r$  proche de zéro.
3. En raison de l'invariance du système par rotation autour de l'axe  $\vec{e}_1$ , et de la quasi-invariance par translation lorsque le mur est loin de l'encoche, on dispose d'une famille  $R_\Lambda$  à deux paramètres de quasi-solutions de l'équation en  $r$ . On décompose alors  $r$  sous la forme  $r = R_\Lambda + W$ , où  $W$  est dans l'orthogonal du noyau du linéarisé, ce qui implique que l'équation en  $W$  le fera tendre vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
4. La quatrième étape est consacrée aux estimations variationnelles. On va traiter la partie linéaire complète et on va prouver qu'elle a de bonnes propriétés. En outre, par une étude attentive de la partie non linéaire, on est en mesure d'effectuer des estimations variationnelles pour la norme  $H^1$ .

Dans la sous-section suivante, on va aborder brièvement les deux premières étapes de la preuve, similaire aux travaux [21], [24], [36].

## IV.2 Formes équivalentes de l'équation

Soit  $m : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$  une solution pour le modèle (IV.1.1). On définit  $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$  par

$$m(t, x) = \mathbf{R}_{(\varphi_0 - H(t))}M(t, x - \sigma_0 - H(t)),$$

c'est équivalent à dire

$$M(t, x) = \mathbf{R}_{(-\varphi_0 + H(t))}m(t, x + \sigma_0 + H(t)),$$

car  $\mathbf{R}_{(-\varphi_0 + H(t))}$  est la matrice inverse de  $\mathbf{R}_{(\varphi_0 - H(t))}$ . De plus, on a  $|M(t, x)| = 1$  pour tout  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ , parce que  $\mathbf{R}_{(-\varphi_0 + H(t))}$  préserve la norme euclidienne.

**Proposition IV.2.1.** *La fonction  $m(t, x) \rightarrow S^2$  est une solution de (IV.1.1) si et seulement*

si  $M$  est une solution pour le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = -M \wedge q(M) - M \wedge (M \wedge q(M)) - \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))(M \wedge \partial_x M + M \wedge (M \wedge \partial_x M)) \\ \quad + h(t)(\partial_x M + M \wedge (M \wedge \vec{e}_1)), \\ q(M) = \partial_{xx} M + (M \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1. \end{cases} \quad (\text{IV.2.1})$$

En outre, on a l'équivalence entre :  $\mathcal{M}_h$  proche de  $m$  et  $M$  proche de  $M_0$ .

**Preuve.** Pour simplifier, on note

$$\check{\varphi} = \varphi_0 - H(t) \quad \text{et} \quad \check{x} = x - \sigma_0 - H(t),$$

donc

$$\partial_t \check{\varphi} = \partial_t \check{x} = -h(t).$$

On a  $m(t, x) = \mathbf{R}_{\check{\varphi}} M(t, \check{x})$ , donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= -h(t)\partial_{\check{\varphi}} \mathbf{R}_{\check{\varphi}} M(t, \check{x}) + \mathbf{R}_{\check{\varphi}} \partial_t M(t, \check{x}) - h(t)\mathbf{R}_{\check{\varphi}} \partial_x M(t, \check{x}) \\ &= -h(t)\mathbf{R}_{\check{\varphi}} J M(t, \check{x}) + \mathbf{R}_{\check{\varphi}} \partial_t M(t, \check{x}) - h(t)\mathbf{R}_{\check{\varphi}} \partial_x M(t, \check{x}), \end{aligned}$$

donc,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \mathbf{R}_{\check{\varphi}} (-h(t)\vec{e}_1 \wedge M(t, \check{x}) + \partial_t M(t, \check{x}) - h(t)\partial_x M(t, \check{x})) \quad (\text{IV.2.2})$$

De plus,

$$H_e = \mathbf{R}_{\check{\varphi}} (\partial_{xx} M(t, \check{x}) + \frac{s'}{s}(\check{x} + \sigma_0 + H(t))\partial_x M(t, \check{x}) + (M(t, \check{x}) \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - h(t)\vec{e}_1), \quad (\text{IV.2.3})$$

Or  $m$  est une solution de (IV.1.1), c'est-à-dire

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge H_e(m) - m \wedge (m \wedge H_e(m)). \quad (\text{IV.2.4})$$

Par conséquent, la comparaison de (IV.2.4) avec (IV.2.2) et (IV.2.3) donne que  $M$  vérifie le modèle (IV.2.1).  $\square$

### IV.2.1 Repère mobile

On considère une perturbation  $M$  de  $M_0$  satisfaisant la contrainte de saturation  $|M(t, x)| = 1$ . On peut décrire  $M$  dans le repère mobile  $(M_0(x), M_1(x), M_2)$  en écrivant :

$$M(t, x) = r_1(t, x)M_1(x) + r_2(t, x)M_2 + \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}M_0(x). \quad (\text{IV.2.5})$$



On définit l'application  $\mu$  par

$$\begin{aligned} \mu : B(0, \frac{1}{2}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \mu(r) = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} - 1, \end{aligned}$$

où  $B(0, \frac{1}{2})$  est la boule de centre 0 et rayon  $\frac{1}{2}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Donc,  $\mu$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On note  $\mu'(r)$  et  $\mu''(r)$  les différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de  $\mu(r)$  respectivement.

**Proposition IV.2.2.** *On a  $M$  est une solution de (IV.2.1) si et seulement si  $r = (r_1, r_2)$  est une solution pour le système suivant*

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} = & \vartheta(t, x) + (\mathcal{J}\mathcal{L} + h(t)\ell)r + G(r)(\partial_{xx}r) \\ & + H_1(x, r)(\partial_x r) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))H_2(r)(\partial_x r) + H_3(r)(\partial_x r, \partial_x r) \\ & + P_1(x, r) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))P_2(x, r) + h(t)P_3(x, r), \end{aligned} \quad (\text{IV.2.6})$$

avec  $\vartheta(t, x)$  est défini par

$$\vartheta(t, x) = \frac{1}{\cosh(x)} \frac{s'}{s} (x + \sigma_0 + H(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et les deux opérateurs  $\mathcal{L}$  et  $\ell$  sont donnés par

$$\mathcal{L}(r) = -\partial_{xx}r - \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))\partial_x r + g(x)r \quad \text{et} \quad \ell(r) = \partial_x r + \tanh(x)r,$$

avec  $g(x) = 2 \tanh^2(x) - 1$ . La matrice  $G$  est définie par

$$G(r) = \begin{pmatrix} 2\mu(r) + \mu^2(r) + r_1^2 & \mu(r) - r_1 r_2 \\ -\mu(r) + r_1 r_2 & 2\mu(r) + \mu^2(r) + r_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_1(1 + \mu(r)) + r_2 \\ r_1 + r_2(1 + \mu(r)) \end{pmatrix} \mu'(r).$$

Les deux matrices  $H_1(x, r)$  et  $H_2(r)$  sont définies par

$$H_1(x, r) = \frac{2}{\cosh(x)} \begin{pmatrix} r_1(1 + \mu(r)) + r_2 & 0 \\ -r_1 + r_2(1 + \mu(r)) & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\cosh(x)} \begin{pmatrix} (1 + \mu(r))^2 + r_2^2 \\ -(1 + \mu(r))^2 - r_1 r_2 \end{pmatrix} \mu'(r)$$

et

$$H_2(r) = \begin{pmatrix} 2\mu(r) + \mu^2(r) + r_2^2 & \mu(r) - r_1 r_2 \\ -\mu(r) - r_1 r_2 & 2\mu(r) + \mu^2(r) + r_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_1(1 + \mu(r)) - r_2 \\ r_1 - r_2(1 + \mu(r)) \end{pmatrix} \mu'(r).$$

La forme bilinéaire symétrique  $H_3(r)$  est définie par

$$H_3(r) = \begin{pmatrix} -r_1(1 + \mu(r)) + r_2 \\ r_1 - r_2(1 + \mu(r)) \end{pmatrix} \mu''(r).$$

Les trois vecteurs  $P_1(x, r)$ ,  $P_2(x, r)$  et  $P_3(x, r)$  sont définis par

$$P_1(x, r) = \left( \frac{2 \sinh(x)}{\cosh^2(x)} r_1 + \mu(r)g(x) \right) \begin{pmatrix} -r_1(1 + \mu(r)) - r_2 \\ r_1 - r_2(1 + \mu(r)) \end{pmatrix} - \mu(r)g(x)r,$$

$$P_2(x, r) = \frac{1}{\cosh(x)} \begin{pmatrix} \mu^3(r) + 3\mu(r)(1 + \mu(r)) + (r_1^2 + r_2^2)(1 + \mu(r)) + r_1 r_2 \\ -r_1^2 \end{pmatrix}$$

et

$$P_3(x, r) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu(r)}{\cosh(x)}(1 + \mu(r)) + \mu(r)r_1 \tanh(x) - \frac{r_2^2}{\cosh(x)} \\ \frac{r_1 r_2}{\cosh(x)} + \mu(r)r_2 \tanh(x) \end{pmatrix}.$$

**Preuve.** En intégrant (IV.2.5) dans (IV.2.1) et on projetant sur  $M_1(x)$  et  $M_2$ , on obtient que  $r$  vérifie (IV.2.6). Pour la réciproque, voir la Remarque 3 dans [21].  $\square$

**Remarque IV.2.3.** Il est clair que :

- $G \in \mathcal{C}^\infty(B(0, \frac{1}{2}); \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ , et  $G(r) = \mathcal{O}(\|r\|^2)$ .
- $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times B(0, \frac{1}{2}); \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ , et  $H_1(x, r) = \mathcal{O}(\|r\|)$ .
- $H_2 \in \mathcal{C}^\infty(B(0, \frac{1}{2}); \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ , et  $H_2(r) = \mathcal{O}(\|r\|)$ .
- $H_3 \in \mathcal{C}^\infty(B(0, \frac{1}{2}); L^2(\mathbb{R}^2))$ , et  $H_3(r) = \mathcal{O}(\|r\|)$ .
- $P_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times B(0, \frac{1}{2}); \mathbb{R}^2)$ , et  $P_1(r) = \mathcal{O}(\|r\|^2)$ .
- $P_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times B(0, \frac{1}{2}); \mathbb{R}^2)$ , et  $P_2(r) = \mathcal{O}(\|r\|^2)$ .
- $P_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times B(0, \frac{1}{2}); \mathbb{R}^2)$ , et  $P_3(r) = \mathcal{O}(\|r\|^2)$ .

### IV.2.2 Parti linéaire de l'équation et nouvelles coordonnées

On définit l'opérateur  $L$  par

$$L = -\partial_{xx} + g, \quad \text{où } g(x) = 2 \tanh^2(x) - 1.$$

On rappelle (voir [36]) que  $L$  est autoadjoint pour le produit scalaire  $L^2(\mathbb{R})$ , et peut se factoriser sous la forme :

$$L = \ell^* \circ \ell, \quad \text{où } \ell = \partial_x + \tanh(x).$$

**Chapitre IV. Stabilisation des murs loin de l'encoche pour des nanofils ferromagnétiques**

---

La seule valeur propre de  $L$  est zéro, de vecteur propre associé  $\frac{1}{\cosh(x)}$ . Le spectre essentiel de  $L$  étant  $[1, +\infty[$ , on a

$$\forall u \in (\text{Ker}L)^\perp, \quad \|u\|_{L^2} \leq \|Lu\|_{L^2}.$$

Pour tenir compte de l'invariance par rotation de l'équation de Landau-Lifschitz et de la 'quasi'-invariance par translation de l'équation de Landau-Lifschitz lorsqu'on est loin de l'encoche, on définit, pour  $\Lambda = (\theta, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M_\Lambda$  par

$$M_\Lambda(x) = \mathbf{R}_\theta(M_0(x - \sigma)),$$

et par projection sur le repère mobile, on définit  $R_\Lambda$  par

$$R_\Lambda = \begin{pmatrix} M_\Lambda \cdot M_1 \\ M_\Lambda \cdot M_2 \end{pmatrix},$$

donc,

$$R_\Lambda(x) = R_{(\theta, \sigma)}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\tanh(x - \sigma)}{\cosh x} - \cos \theta \frac{\tanh(x)}{\cosh(x - \sigma)} \\ -\sin \theta \frac{1}{\cosh(x - \sigma)} \end{pmatrix}.$$

Par la proposition 3 de [36], si  $r \in H^k(\mathbb{R})$  est dans un voisinage de 0, il existe un et un seul couple  $(\Lambda, W) \in \mathbb{R}^2 \times (H^k(\mathbb{R}) \cap (\text{Ker}L)^\perp)$  tel que

$$r(t, x) = R_\Lambda(x) + W(t, x). \tag{IV.2.7}$$

Ainsi, si  $(t, x) \rightarrow r(t, x)$  reste dans un voisinage de 0, on peut définir de manière unique  $\Lambda : t \rightarrow \Lambda(t) \in \mathbb{R}^2$  et  $W : (t, x) \rightarrow W(t, x) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall t \geq 0, \forall i \in \{1, 2\}, \quad \int_{\mathbb{R}} W_i(t, x) \cdot \frac{1}{\cosh(x)} dx = 0.$$

Notons que l'écriture (IV.2.7) n'est valide que si  $|r(t, x)| < 1$ . On fixe donc  $\nu_0$  tel que si  $\|W\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \nu_0$  et si  $|\Lambda| \leq \nu_0$ , alors,  $\|R_\Lambda + W\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}$ . Tant que  $|\Lambda(t)| \leq \nu_0$  et  $\|W(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \nu_0$ , en injectant (IV.2.7) dans (IV.2.6), on obtient

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial R_\Lambda}{\partial \Lambda} \cdot \frac{d\Lambda}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}; \tag{IV.2.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial t} = & (\mathcal{J}\mathcal{L} + h(t)\ell)(W) + (\mathcal{J}\mathcal{L} + h(t)\ell)(R_\Lambda) + G(R_\Lambda + W)(\partial_{xx}R_\Lambda + \partial_{xx}W) \\
& + H_1(x, R_\Lambda + W)(\partial_x R_\Lambda + \partial_x W) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))H_2(R_\Lambda + W)(\partial_x R_\Lambda + \partial_x W) \\
& + H_3(R_\Lambda + W)(\partial_x R_\Lambda + \partial_x W, \partial_x R_\Lambda + \partial_x W) \\
& + P_1(x, R_\Lambda + W) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))P_2(x, R_\Lambda + W) + h(t)P_3(x, R_\Lambda + W) \\
& + \vartheta(t, x).
\end{aligned} \tag{IV.2.9}$$

On remarque que  $M_0$  est une solution stationnaire pour (IV.2.1) si  $\frac{s'}{s} = 0$ , c'est-à-dire si le fil est sans encoche et dans ce cas, l'équation est invariante par rotation autour de l'axe  $R\vec{e}_1$  et translation en  $x$ . Donc,  $R_\Lambda$  est une solution stationnaire de (IV.2.6) pour  $\frac{s'}{s} = 0$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{J}L + h(t)\ell)(R_\Lambda) + G(R_\Lambda)(\partial_{xx}R_\Lambda) + H_1(x, R_\Lambda)(\partial_x R_\Lambda) \\
& + H_3(R_\Lambda)(\partial_x R_\Lambda, \partial_x R_\Lambda) + P_1(x, R_\Lambda) + h(t)P_3(x, R_\Lambda) = 0.
\end{aligned}$$

Afin d'isoler la partie linéaire de l'équation vérifiée par  $W$ , on effectue le développement de Taylor pour  $G$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , puis on a à l'ordre 1 :

$$G(R_\Lambda + W) = G(R_\Lambda) + \tilde{G}(R_\Lambda, W)(W),$$

avec

$$\tilde{G}(R_\Lambda, W)(W) = \int_0^1 G'(R_\Lambda + yW)(W) dy,$$

et à l'ordre 2 :

$$G(R_\Lambda + W) = G(R_\Lambda) + G'(R_\Lambda)(W) + \hat{G}(R_\Lambda, W)(W, W),$$

avec

$$\hat{G}(R_\Lambda, W)(W, W) = \int_0^1 (1-y)G''(R_\Lambda + yW)(W, W) dy.$$

On utilise les mêmes notations pour  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  et les équation (IV.2.8) et (IV.2.9) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_\Lambda}{\partial \Lambda} \cdot \frac{d\Lambda}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t} = & (\mathcal{J}\mathcal{L} + h(t)\ell)(W) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))K(R_\Lambda) \\
& + \vartheta(t, x) + \sum_{i=1}^5 T_i,
\end{aligned} \tag{IV.2.10}$$

avec

$$K(R_\Lambda) = -\mathcal{J}\partial_x R_\Lambda + H_2(R_\Lambda)(\partial_x R_\Lambda) + P_2(x, R_\Lambda),$$

et les  $T_i$  sont donnés par

$$T_1 = G(R_\Lambda)(\partial_{xx}W),$$

$$\begin{aligned} T_2 = & H_1(x, R_\Lambda)(\partial_x W) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))H_2(R_\Lambda)(\partial_x W) + 2H_3(R_\Lambda)(\partial_x W, \partial_x R_\Lambda) \\ & + G'(R_\Lambda)(W)(\partial_{xx}R_\Lambda) + H'_1(x, R_\Lambda)(W)(\partial_x R_\Lambda) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))H'_2(R_\Lambda)(W)(\partial_x R_\Lambda) \\ & + H'_3(R_\Lambda)(W)(\partial_x R_\Lambda, \partial_x R_\Lambda) \\ & + \partial_r P_1(x, R_\Lambda)(W) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))\partial_r P_2(x, R_\Lambda)(W) + h(t)\partial_r P_3(x, R_\Lambda)(W), \end{aligned}$$

$$T_3 = \tilde{G}(R_\Lambda, W)(W)(\partial_{xx}W),$$

$$\begin{aligned} T_4 = & H_3(R_\Lambda + W)(\partial_x W, \partial_x W) + \tilde{H}_1(x, R_\Lambda, W)(W)(\partial_x W) \\ & + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))\tilde{H}_2(R_\Lambda, W)(W)(\partial_x W) + 2\tilde{H}_3(R_\Lambda, W)(W)(\partial_x R_\Lambda, \partial_x W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5 = & \hat{G}(R_\Lambda, W)(W, W)(\partial_{xx}R_\Lambda) + \hat{H}_1(x, R_\Lambda, W)(W, W)(\partial_x R_\Lambda) \\ & + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))\hat{H}_2(R_\Lambda, W)(W, W)(\partial_x R_\Lambda) + \hat{H}_3(R_\Lambda, W)(W, W)(\partial_x R_\Lambda, \partial_x R_\Lambda) \\ & + \hat{P}_1(x, R_\Lambda, W)(W, W) + \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))\hat{P}_2(x, R_\Lambda, W)(W, W) + h(t)\hat{P}_3(x, R_\Lambda, W)(W, W). \end{aligned}$$

On a  $W \in (\text{Ker}L)^\perp$  et  $L$  est indépendant de temps, donc  $\frac{\partial W}{\partial t} \in (\text{Ker}L)^\perp$  et

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, a_\alpha \right\rangle = 0, \quad (\text{IV.2.11})$$

avec

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cosh(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cosh(x) \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}W, a_\alpha \rangle &= \langle LW, a_\alpha \rangle - \int_0^L \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t)) \frac{1}{\cosh(x)} \partial_x W \\ &= - \int_0^L \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t)) \frac{1}{\cosh(x)} \partial_x W. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.12})$$

Les deux équations précédentes (IV.2.11)-(IV.2.12) donne que le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  de (IV.2.10) avec  $a_\alpha$ , pour  $\alpha \in \{1, 2\}$ , donne

$$A(\Lambda) \frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{JN}(W) + h(t)\bar{\ell}(W) + \bar{K}(R_\Lambda) + \bar{C}(t, x) + \sum_{i=1}^5 T'_i, \quad (\text{IV.2.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(W) &= - \int_0^L \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t)) \frac{1}{\cosh(x)} \partial_x W, \\ \bar{\ell}(W) &= \begin{pmatrix} \langle \ell(W), a_1 \rangle \\ \langle \ell(W), a_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad \bar{K}(R_\Lambda) = \begin{pmatrix} \langle \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))K(R_\Lambda), a_1 \rangle \\ \langle \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))K(R_\Lambda), a_2 \rangle \end{pmatrix}, \\ \bar{C}(t, x) &= \begin{pmatrix} \langle \vartheta(t, x), a_1 \rangle \\ \langle \vartheta(t, x), a_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad T'_i = \begin{pmatrix} \langle T_i, a_1 \rangle \\ \langle T_i, a_2 \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et  $A(\Lambda)$  est la matrice suivante

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial R_\Lambda}{\partial \theta}, a_1 \rangle & \langle \frac{\partial R_\Lambda}{\partial \sigma}, a_1 \rangle \\ \langle \frac{\partial R_\Lambda}{\partial \theta}, a_2 \rangle & \langle \frac{\partial R_\Lambda}{\partial \sigma}, a_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

alors  $A(\Lambda)$  est inversible lorsque  $\Lambda$  est assez petit et on a

$$\frac{d\Lambda}{dt} = (A(\Lambda))^{-1} \left( \mathcal{JN}(W) + h(t)\bar{\ell}(W) + \bar{K}(R_\Lambda) + \bar{C}(t, x) + \sum_{i=1}^5 T'_i \right) := \mathcal{G}(t, x, \Lambda, W). \quad (\text{IV.2.14})$$

Remplacer  $\frac{d\Lambda}{dt}$  par son expression dans (IV.2.10) donne

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{J}\mathcal{L}(W) + h(t)\ell(W) + \vartheta(t, x) + F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W), \quad (\text{IV.2.15})$$

avec  $F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W)$ , la partie non linéaire de (IV.2.15), est donnée par

$$\begin{aligned} F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W) = & \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))K(R_\Lambda) + \sum_{i=1}^5 T_i \\ & - \frac{\partial R_\Lambda}{\partial \Lambda}(A(\Lambda))^{-1} \left( \mathcal{J}\mathcal{N}(W) + h(t)\bar{\ell}(W) + \bar{K}(R_\Lambda) + \bar{C}(t, x) + \sum_{i=1}^5 T'_i \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, (IV.2.6) est équivalent au système (IV.2.14)-(IV.2.15) et le rapprochement de  $r$  à zéro dans (IV.2.6) est équivalent au rapprochement de  $(\Lambda, W)$  à  $(0, 0)$  dans (IV.2.14)-(IV.2.15). Notons aussi que le système (IV.2.14)-(IV.2.15) est valide tant que  $|\Lambda(t)| \leq \nu_0$  et  $\|W\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \nu_0$ .

### IV.2.3 Estimations variationnelles

On définit la fonction  $\mathcal{I}$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2), \\ \Lambda & \longmapsto \mathcal{I}(\Lambda) = R_\Lambda. \end{aligned}$$

où  $\mathcal{S}$  désigne l'espace des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  à décroissance rapide. Alors, par [36],  $\mathcal{I}$  est une fonction régulière et vérifie  $\partial_x R_\Lambda = \partial_{xx} R_\Lambda = 0$  pour  $\Lambda = 0$ . Il existe alors une constante  $c > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} - |R_\Lambda| & \leq c \frac{|\Lambda|}{\cosh(x)}, \\ - |\partial_x R_\Lambda| & \leq c \frac{|\Lambda|}{\cosh(x)}, \\ - |\partial_{xx} R_\Lambda| & \leq c \frac{|\Lambda|}{\cosh(x)}, \end{aligned}$$

**Lemme IV.2.4.** *Pour  $|\Lambda| < 1$ , on a*

$$\|T\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|W\|_{H^2(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}),$$

avec  $C$  est une constante positive et  $T = \sum_{i=1}^5 T_i$ .

*Preuve.* On estime chaque terme de  $T_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Les estimations suivantes sont

valables tant que  $|\Lambda(t)| \leq \nu_0$  et  $\|W(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \nu_0$ . En utilisant la Remarque IV.2.3, on obtient

•

$$\begin{aligned} \|T_1\|_{L^2} &\leq \|G(R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_{xx} W\|_{L^2} \\ &\leq c |R_\Lambda| \|\partial_{xx} W\|_{L^2} \\ &\leq C |\Lambda| \|W\|_{H^2}. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \|T_2\|_{L^2} &\leq \|H_1(x, R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_x W\|_{L^2} + \|\frac{s'}{s}\|_{L^\infty} \|H_2(R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_x W\|_{L^2} \\ &\quad + 2 \|H_3(R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty} \|\partial_x W\|_{L^2} + \|G'(R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_{xx} R_\Lambda\|_{L^\infty} \|W\|_{L^2} \\ &\quad + \|H'_1(x, R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty} \|W\|_{L^2} + \|\frac{s'}{s}\|_{L^\infty} \|H'_2(R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty} \|W\|_{L^2} \\ &\quad + \|H'_3(R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty}^2 \|W\|_{L^2} + \|\partial_r P_1(x, R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|W\|_{L^2} \\ &\quad + \|\frac{s'}{s}\|_{L^\infty} \|\partial_r P_2(x, R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|W\|_{L^2} + \|h\|_{L^\infty} \|\partial_r P_3(x, R_\Lambda)\|_{L^\infty} \|W\|_{L^2} \\ &\leq C |\Lambda| \|W\|_{H^2}, \end{aligned}$$

car  $|\Lambda|$ ,  $\|h\|_{L^\infty}$  sont plus petit que 1 et  $\frac{s'}{s}$  est borné.

•

$$\begin{aligned} \|T_3\|_{L^2} &\leq \|\tilde{G}(R_\Lambda, W)\|_{L^\infty} \|\partial_{xx} W\|_{L^2} \|W\|_{L^2} \\ &\leq c |\Lambda| \|W\|_{H^2} \|W\|_{H^1} \\ &\leq C \|W\|_{H^2} \|W\|_{H^1}. \end{aligned}$$



- Par l'inégalité d'interpolation on a

$$\begin{aligned}
\|T_4\|_{L^2} &\leq k\|R_\Lambda + W\|_{L^\infty}\|\partial_x W\|_{L^4}^2 + \|\tilde{H}_1(x, R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|\partial_x W\|_{L^2}\|W\|_{L^2} \\
&\quad + \|\frac{s'}{s}\|_{L^\infty}\|\tilde{H}_2(R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|\partial_x W\|_{L^2}\|W\|_{L^2} \\
&\quad + 2\|\tilde{H}_3(R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty}\|\partial_x W\|_{L^2}\|W\|_{L^2} \\
&\leq k(|\Lambda| + \|W\|_{H^1})\|\partial_x W\|_{L^\infty}\|\partial_x W\|_{L^2} + C\|W\|_{H^2}\|W\|_{H^1} \\
&\leq C(|\Lambda| + \|W\|_{H^1})\|W\|_{H^2}
\end{aligned}$$

- 

$$\begin{aligned}
\|T_5\|_{L^2} &\leq \|\hat{G}(R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2\|\partial_{xx}R_\Lambda\|_{L^\infty} + \|\hat{H}_1(x, R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2\|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty} \\
&\quad + \|\frac{s'}{s}\|_{L^\infty}\|\hat{H}_2(R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2\|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty} + \|\hat{H}_3(R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2\|\partial_x R_\Lambda\|_{L^\infty}^2 \\
&\quad + \|\hat{P}_1(x, R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2 + \|\frac{s'}{s}\|_{L^\infty}\|\hat{P}_2(x, R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \|h\|_{L^\infty}\|\hat{P}_3(x, R_\Lambda, W)\|_{L^\infty}\|W\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\|W\|_{H^2}\|W\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\left\| \sum_{i=1}^5 T_i \right\| \leq \sum_{i=1}^5 \|T_i\| \leq C\|W\|_{H^2(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})})$$

□

**Lemme IV.2.5.** *Sous l'hypothèse  $\|h\|_{L^\infty} < 1$  et pour  $|\Lambda|$  assez petit, il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$|T'| \leq C\|W\|_{H^1(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}), \tag{IV.2.16}$$

avec  $T' = \sum_{i=1}^5 T'_i$  (on rappelle que les  $T'_i$  sont définis sous la formule (IV.2.13)).

*Preuve.* Par intégration par partie, on a pour  $\alpha \in \{1, 2\}$  :

$$\begin{aligned} \langle T_1, a_\alpha \rangle &= \int_{\mathbb{R}} G(R_\Lambda) \partial_{xx} W \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (G'(R_\Lambda) \partial_x R_\Lambda \cdot a_\alpha + G(R_\Lambda) \partial_x a_\alpha) \partial_x W \\ &\leq C |\Lambda| \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On continue comme ainsi, en utilisant la preuve de Lemme IV.2.4, on obtient (IV.2.16).  $\square$

**Lemme IV.2.6.** *Il existe une constante positive  $C$  telle que :*

$$|\bar{\ell}(W)| \leq C \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}. \quad (\text{IV.2.17})$$

*Preuve.* Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on a pour  $\alpha \in \{1, 2\}$  :

$$\begin{aligned} \langle \ell(W), a_\alpha \rangle &\leq \left\| \frac{1}{\cosh(x)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\ell(W)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\partial_x W + \tanh(x)W\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq c \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

avec  $c$  est une constante positive, d'où (IV.2.17)  $\square$

**Lemme IV.2.7.** *Il existe une constante positive  $C$  telle que :*

$$\left\| \frac{s'}{s} (x + \sigma_0 + H(t)) K(R_\Lambda) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))).$$

*Preuve.* On a  $K(R_\Lambda) = -\mathcal{J} \partial_x R_\Lambda + H_2(R_\Lambda) (\partial_x R_\Lambda) + P_2(x, R_\Lambda)$ .

On a déjà dit que  $R_\Lambda$  est la projection de  $M_\Lambda$  sur  $(M_1, M_2)$ , donc

$$|\mathcal{J} \partial_x R_\Lambda| \leq \frac{c}{\cosh(x)}.$$

De plus, par la définition de  $H_2$  et  $P_2$  on peut remarquer que

$$|H_2(R_\Lambda) (\partial_x R_\Lambda) + P_2(x, R_\Lambda)| \leq \frac{c}{\cosh(x)},$$

avec  $c$  est une constante positive. Donc,

$$|K(R_\Lambda)| \leq \frac{2c}{\cosh(x)}.$$

On a  $\frac{s'}{s}$  est de support  $[-a, a]$  et il existe  $S > 0$  tel que  $|\frac{s'}{s}| \leq S$ . Donc, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{s'}{s} (x + \sigma_0 + H(t)) K(R_\Lambda) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} S^2 \left| \frac{4c^2}{\cosh^2(x)} \mathbb{1}_{[-\sigma_0 - H(t) - a, -\sigma_0 - H(t) + a]} \right| \\ &= 4Sc^2 (\tanh(-\sigma_0 - H(t) + a) - (\tanh(-\sigma_0 - H(t) - a))) \\ &\leq (C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))))^2, \end{aligned}$$

avec  $\mathbb{1}$  est la fonction caractéristique. D'où la preuve de Lemme IV.2.7.  $\square$

**Proposition IV.2.8.** *Pour  $\|h\|_{L^\infty} < 1$  et pour  $|\Lambda|$  assez petit, il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|W\|_{H^2(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}) + C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))). \quad (\text{IV.2.18})$$

*Preuve.* On a

$$|\mathcal{N}(W)| \leq c \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) + c \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \quad (\text{IV.2.19})$$

avec  $c$  est une constante positive. Donc, par les Lemme IV.2.4-IV.2.5-IV.2.6-IV.2.7, on a

$$\begin{aligned} \|F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq c \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) + c \|W\|_{H^2(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}) \\ &\quad + c \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) |\Lambda| + c |\Lambda| \|h\|_{L^\infty} \|W\|_{H^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + c |\Lambda| \|W\|_{H^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (IV.2.18).  $\square$

**Proposition IV.2.9.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\mathcal{G}(t, \Lambda, W)$  définie dans (IV.2.14) vérifie :*

$$|\mathcal{G}(t, \Lambda, W)| \leq C \|W\|_{H^1(\mathbb{R})} (\|h\|_{L^\infty} + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}) + C \exp(-(\sigma_0 + H(t))).$$

*Preuve.* On a

$$|\mathcal{G}(t, \Lambda, W)| \leq c \left( |\mathcal{N}(W)| + \|h\|_{L^\infty} |\bar{\ell}(W)| + |\bar{K}(R_\Lambda)| + |\bar{K}(t, x)| + \sum_{i=1}^5 |T'_i| \right),$$

avec  $c$  est une constante positive. Grâce aux Lemmes IV.2.5-IV.2.6-IV.2.7 et l'inégalité (IV.2.19), il est évident de déduire le résultat requis.  $\square$

### IV.3 Preuve du Théorème IV.1.1

#### IV.3.1 Première étape : Nouveau produit scalaire

On munit  $L^2(\mathbb{R})$  du produit scalaire pondéré suivant : pour  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\langle u, v \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t))u(x)v(x) dx,$$

associée à la norme  $\|\cdot\|_{L^2_s(\mathbb{R})}$  définie par

$$\|u\|_{L^2_s(\mathbb{R})} = \left( \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t))|u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette norme est utilisée dans [26]. Et on définit la norme  $\|\cdot\|_{H^1_s(\mathbb{R})}$  par : pour  $u \in H^1_s(\mathbb{R})$ ,

$$\|u\|_{H^1_s(\mathbb{R})} = \left( \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t))|\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t))|u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque  $s$  est borné, il existe  $S_1$  et  $S_2$  deux constantes strictement positives telles que

$$S_1\|u\|_{H^1_s(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq S_2\|u\|_{H^1_s(\mathbb{R})},$$

donc  $\|\cdot\|_{H^1_s(\mathbb{R})}$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R})}$  sont deux normes équivalentes. De même,  $\|\cdot\|_{H^2_s(\mathbb{R})}$  et  $\|\cdot\|_{H^2(\mathbb{R})}$  sont aussi deux normes équivalentes, avec

$$\|u\|_{H^2_s(\mathbb{R})} = \left( \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t)) (|\partial_{xx}u(x)|^2 dx + |\partial_x u(x)|^2 dx + |u(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque IV.3.1.** Puisque  $s(-\partial_{xx} - \frac{s'}{s}\partial_x) = -\partial_x(s\partial_x)$ , l'opérateur  $\mathcal{L}$  est auto-adjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  et vérifie : pour tout  $u \in H^2(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t)) (|\partial_x u|^2 + g(x)|u|^2), \quad (\text{IV.3.1})$$

Donc,

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle_s \geq S_1 \langle Lu, u \rangle. \quad (\text{IV.3.2})$$

**Proposition IV.3.2.** Pour tous  $W \in H^2_s(\mathbb{R}) \cap (\text{Ker}L)^\perp$ ,

1.  $\|W\|_{L^2_s(\mathbb{R})} \leq \frac{S_2}{S_1} \|\mathcal{L}W\|_{L^2_s(\mathbb{R})}$ ,
2.  $\|W\|_{H^1_s(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{S_2}{S_1} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s$ ,
3.  $\|W\|_{H^2_s(\mathbb{R})} \leq C_1 \|\mathcal{L}W\|_{L^2_s(\mathbb{R})}$ , avec  $C_1$  est une constante positive.

Par conséquent,  $\|\cdot\|_{H^1_s(\mathbb{R})}$  et  $(\langle \mathcal{L}\cdot, \cdot \rangle_s)^{\frac{1}{2}}$  sont équivalents, et  $\|\cdot\|_{H^2_s(\mathbb{R})}$  et  $\|\mathcal{L}\cdot\|_{L^2_s(\mathbb{R})}$  sont équivalents.

*Preuve.* 1. Soit  $W \in H_s^2(\mathbb{R}) \cap (\text{Ker}L)^\perp$ . On déjà vu que  $\|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 \leq \langle LW, W \rangle$  et par l'utilisation de l'inégalité (IV.3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 &\leq S_2 \|W\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq S_2 \langle LW, W \rangle \\ &\leq \frac{S_2}{S_1} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \\ &\leq \frac{S_2}{S_1} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}). \end{aligned}$$

D'où,

$$\|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \leq \frac{S_2}{S_1} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}.$$

2. On a

$$\langle \mathcal{L}W, W \rangle_s = \|\partial_x W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} s(x + \sigma_0 + H(t))g(x)|W|^2,$$

avec  $g$  est une fonction positive, donc

$$\|\partial_x W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 \leq \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s,$$

ainsi, par le précédent, on a

$$\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{S_2}{S_1} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \|\partial_{xx} W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{L}W - \frac{s'}{s}(x + \sigma_0 + H(t))\partial_x W + g(x)W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} + \left\| \frac{s'}{s} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\partial_x W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Or

$$\|\partial_x W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 \leq \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \quad \text{et} \quad \|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \leq \frac{S_2}{S_1} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}$$

donc,

$$\|\partial_x W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}.$$

Donc,

$$\|\partial_{xx} W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \leq C_1 \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})},$$

avec  $C_1 = 1 + \left\| \frac{s'}{s} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ .

□

IV.3.2 Deuxième étape : Estimations variationnelles sur  $W$ 

On a  $W$  vérifie l'équation (IV.2.15), c'est-à-dire

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = -\mathcal{L}W_1 - \mathcal{L}W_2 + h(t)\ell(w_1) + \vartheta_1(t, x) + F_1,$$

et

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = \mathcal{L}W_1 - \mathcal{L}W_2 + h(t)\ell(w_2) + \vartheta_2(t, x) + F_2,$$

avec  $F_1$  et  $F_2$  dépend de  $\Lambda$  et  $W$ . On prend le produit scalaire dans  $L_s^2(\mathbb{R})$  de  $\frac{\partial W_1}{\partial t}$  avec  $\mathcal{L}W_1$  et de  $\frac{\partial W_2}{\partial t}$  avec  $\mathcal{L}W_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial W}{\partial t}, \mathcal{L}W \rangle_s = & -\|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} + h(t) \langle \ell(W), \mathcal{L}W \rangle_s + \langle \vartheta(t, x), \mathcal{L}W \rangle_s \\ & + \langle F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W), \mathcal{L}W \rangle_s. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.3})$$

On remarque maintenant que

$$\langle \frac{\partial W}{\partial t}, \mathcal{L}W \rangle_s = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle W, \mathcal{L}W \rangle_s - \frac{1}{2} h(t) \int_{\mathbb{R}} (s'(x + \sigma_0 + H(t)) |\partial_x W|^2 + g(x) |W|^2).$$

De plus,

- par (IV.3.2) on a

$$\begin{aligned} h(t) \int_{\mathbb{R}} (s'(x + \sigma_0 + H(t)) |\partial_x W|^2 + g(x) |W|^2) & \leq \|h\|_{L^\infty} \|s'\|_{L^\infty} \langle LW, W \rangle \\ & \leq \frac{\|h\|_{L^\infty} \|s'\|_{L^\infty}}{S_1} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \\ & \leq c \|h\|_{L^\infty} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

- Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a

$$\begin{aligned} \langle \ell(W), \mathcal{L}W \rangle_s & \leq \|\ell(W)\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \\ & \leq \|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \\ & \leq c \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

- Il existe  $c > 0$  tel que

$$\langle \vartheta(t, x), \mathcal{L}W \rangle_s \leq c \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}.$$

- On a

$$\langle F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W), \mathcal{L}W \rangle_s \leq \|F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W)\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}.$$

Puisque  $\|h\|_{L^\infty} \leq 1$ , on peut utiliser Proposition IV.2.8 pour obtenir

$$\begin{aligned} \|F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W)\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 &\leq S_2 \|F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C \|W\|_{H^2(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}) + C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) \\ &\leq C \|W\|_{H_s^2(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})}) + C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))), \end{aligned}$$

par équivalence de norme. Donc, on obtient

$$\begin{aligned} \langle F(t, x, \Lambda, W, \partial_x W, \partial_{xx} W), \mathcal{L}W \rangle_s &\leq C (|\Lambda| + \|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})}) \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\quad + C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les inégalités précédents avec (IV.3.3) donnent qu'il existe  $c_1 > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s &\leq -\|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 + c_1 (\|h\|_{L^\infty} + |\Lambda| + \|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})}) \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\quad + C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, il existe  $c_2 > 0$  tel que

$$C \exp(-c(\sigma_0 + H(t))) \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \leq c_2 \exp(-2c(\sigma_0 + H(t))) + \frac{1}{8} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L_s^2(\mathbb{R})$  on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s &\leq \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \|W\|_{L_s^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{S_2}{S_1} \|\mathcal{L}W\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s &+ \frac{S_1}{S_2} \left( 1 - \frac{1}{8} - c_1 (\|h\|_{L^\infty} + |\Lambda| + \|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})}) \right) \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \\ &\leq c_2 \exp(-2c(\sigma_0 + H(t))) \end{aligned}$$

Soit  $\alpha = \frac{\nu_1}{\delta_2}$ . On choisit le champs appliqué  $h$  tel que

$$\|h\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{8c_1}.$$

Donc, on obtient : tant que  $|\Lambda| \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$  et  $\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$ , on a

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s + \alpha \langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \leq c_2 \exp(-2c(\sigma_0 + H(t))),$$

donc, par théorème de comparaison,

$$\langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \leq \langle \mathcal{L}W_0, W_0 \rangle_s \exp(-\alpha t) + c_2 \exp(-2c\sigma_0) \int_0^t \exp(-2cH(s) + \alpha(s-t)) ds. \quad (\text{IV.3.4})$$

Alors, par équivalence de norme, il existe  $K > 0$ , tel que tant que  $|\Lambda| \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$  et  $\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$ , on a

$$\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \leq K \|W_0\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \exp(-\alpha t) + c_2 \exp(-2c\sigma_0) \int_0^t \exp(-2cH(s) + \alpha(s-t)) ds.$$

En outre, on a  $H(s) \geq \delta_1 s$ , donc

$$c_2 \exp(-2c\sigma_0) \int_0^t \exp(-2cH(s) + \alpha(s-t)) ds \leq \frac{c_2}{\alpha - 2c\delta_1} \exp(-2c(\sigma_0 + t)), \quad (\text{IV.3.5})$$

ça donne que  $\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})}$  est intégrable et si  $t \rightarrow \infty$  alors  $\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ . De plus, par (IV.3.4) et (IV.3.5), on remarque que

$$\langle \mathcal{L}W, W \rangle_s \leq \langle \mathcal{L}W_0, W_0 \rangle_s + \frac{c_2}{\alpha - 2c\delta_1} \exp(-2c\sigma_0). \quad (\text{IV.3.6})$$

On prend  $\delta_1$  petit et  $\sigma_0$  grand tel que

$$\frac{c_2}{\alpha - 2c\delta_1} \exp(-2c\sigma_0) \leq \frac{\alpha}{2} \min\left(\nu_0^2, \left(\frac{1}{8c_1}\right)^2\right).$$

**Proposition IV.3.3.** *Tant que  $|\Lambda| \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$ , si  $|\langle \mathcal{L}W_0, W_0 \rangle_s| \leq \frac{\alpha}{2} \min\left(\nu_0^2, \left(\frac{1}{8c_1}\right)^2\right)$ , alors*

$$|\langle \mathcal{L}W, W \rangle_s| \leq \alpha \min\left(\nu_0^2, \left(\frac{1}{8c_1}\right)^2\right).$$



*Preuve. Par absurde :* Pour  $t = 0$  l'inégalité est vraie car on a

$$| \langle \mathcal{L}W_0, W_0 \rangle_s | \leq \alpha \min \left( \nu_0^2, \left( \frac{1}{8c_1} \right)^2 \right).$$

Par la continuité de  $\langle \mathcal{L}W, W \rangle_s$ , supposons qu'il existe  $t_0$  tel que l'inégalité est vraie jusqu'à  $t_0$ , c'est à dire pour tout  $t < t_0$ ,

$$| \langle \mathcal{L}W(t), W(t) \rangle_s | \leq \alpha \min \left( \nu_0^2, \left( \frac{1}{8c_1} \right)^2 \right),$$

et pour  $t = t_0$ , on a

$$| \langle \mathcal{L}W(t_0), W(t_0) \rangle_s | = \alpha \min \left( \nu_0^2, \left( \frac{1}{8c_1} \right)^2 \right). \quad (\text{IV.3.7})$$

Par Proposition [IV.3.2](#), on a pour  $t < t_0$ ,

$$\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha} \langle \mathcal{L}W(t), W(t) \rangle_s} \leq \min \left( \nu_0, \frac{1}{8c_1} \right),$$

donc,

$$|\Lambda| \leq \min \left( \nu_0, \frac{1}{8c_1} \right) \text{ et } \|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \leq \min \left( \nu_0, \frac{1}{8c_1} \right),$$

alors, par [\(IV.3.6\)](#), on a pour  $t < t_0$ ,

$$| \langle \mathcal{L}W(t), W(t) \rangle_s | \leq \frac{\alpha}{2} \min \left( \nu_0^2, \left( \frac{1}{8c_1} \right)^2 \right).$$

Donc, par continuité de  $\langle \mathcal{L}W, W \rangle_s$  on obtient que pour  $t = t_0$  on a

$$| \langle \mathcal{L}W(t_0), W(t_0) \rangle_s | \leq \frac{\alpha}{2} \min \left( \nu_0^2, \left( \frac{1}{8c_1} \right)^2 \right),$$

ce qui contredit [\(IV.3.7\)](#). □

### IV.3.3 Troisième étape : Estimation pour $\Lambda$ et fin de la preuve

Selon la Proposition [IV.2.9](#), il existe  $C > 0$  telle que :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{G}(t, \Lambda, W) \leq C \|W\|_{H^1(\mathbb{R})} (|\Lambda| + \|h\|_{L^\infty} + \|W\|_{H^1(\mathbb{R})}) + C \exp(-(\sigma_0 + H(t))).$$

Tant que  $|\Lambda| \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$  et  $\|W\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \leq \min\left(\nu_0, \frac{1}{8c_1}\right)$  on a

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &\leq \frac{3C}{8c_1} \|W\|_{H^1(\mathbb{R})} + C \exp(-(\sigma_0 + H(t))) \\ &\leq \frac{3C}{8c_1} K \|W_0\|_{H_s^1(\mathbb{R})} \exp(-\alpha t) + \frac{3C}{8c_1} \frac{c_2}{\alpha - 2c\delta_1} \exp(-2c(\sigma_0 + t)) + C \exp(-(\sigma_0 + H(t))). \end{aligned}$$

Par intégration sur  $[0, t]$ , on obtient

$$|\Lambda| \leq |\Lambda_0| + \frac{3C}{8c_1} K \|W_0\|_{H_s^1(\mathbb{R})} + \frac{3C}{8c_1} \frac{c_2}{\alpha - 2c\delta_1} \exp(-2c\sigma_0) + C \exp(-\sigma_0), \quad (\text{IV.3.8})$$

car

$$\int_0^t \exp(-\beta s) ds \leq 1, \quad \forall \beta > 0.$$

Finalement, par Proposition IV.3.3 et l'équation (IV.3.8), pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que : si  $|\Lambda_0| \leq \eta$  et  $|\langle \mathcal{L}W_0, W_0 \rangle_s| \leq \eta$  alors  $|\Lambda(t)| \leq \varepsilon$  et  $|\langle \mathcal{L}W(t), W(t) \rangle_s| \leq \varepsilon$ .

Par équivalence entre toutes les équations, on obtient le résultat du Théorème IV.1.1.



---

---

# CHAPITRE V

---

## CONCLUSION ET PROBLÈMES OUVERTS

En conclusion, notre étude a permis une meilleure compréhension du comportement asymptotique du modèle de Landau-Lifschitz-Gilbert avec magnétostriction pour décrire la magnétisation et la déformation. Nous avons montré, au début, l'existence globale de solutions pour le modèle tridimensionnel complet qui est un couplage entre l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert et l'équation des ondes élastiques avec conditions mixtes au bord du domaine considéré. En utilisant des techniques asymptotiques, nous avons dérivé des modèles pour les plaques minces et les nanofils ferromagnétiques.

Pour les plaques minces, le modèle bidimensionnel est un couplage entre l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert et une équation d'ondes décrivant la dynamique de la magnétisation et des déformations tangentielles à la plaque. Notons que le modèle obtenu ne décrit pas les déformations normales qui n'influencent pas sur l'aimantation dans le régime obtenu. Pour les nanofils ferromagnétiques, le modèle unidimensionnel est un couplage entre l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert et une équation des ondes qui ne décrit pas les déformations transverses au fil.

Nous avons ensuite étudié un modèle dit quasi-stationnaire dans lequel l'équation des ondes élastiques est remplacée par l'équation stationnaire de l'élasticité. Dans le cas anisotrope, on est capable pour ce modèle de caractériser aussi les déformations normales dans le cas des plaques et transverses dans le cas des fils.

Le modèle quasi-stationnaire n'étant pas pertinent sur le plan de la physique, il serait intéressant de caractériser les déformations normales en 2d (transverses en 1d) pour le modèle complet. La difficulté que nous n'avons pas encore résolue est que la dérivée en temps de la composante normale de la déformation apparaît dans la formulation faible avec un coefficient en  $1/\eta^2$  (voir formule (II.4.12)). Il faut donc réfléchir à un autre rescaling pour pouvoir conclure.

Pour le modèle monodimensionnel quasi-statique de fils, on a pu étudier la stabilité de certaines solutions d'intérêt et constater que selon l'étirement appliqué au fil, l'aimantation stable est soit dans le sens du fil, soit perpendiculaire à celui-ci. Pour les mêmes raisons que plus haut, il serait important d'étudier la stabilité de ces configurations pour le modèle complet. Le couplage avec l'équation d'ondes sans amortissement est cependant susceptible de compliquer les études de stabilité.

Toujours sur le modèle monodimensionnel de fil, on a proposé un schéma implicite en temps dont on a montré la convergence numérique. La discrétisation en espace utilisée a été conçue pour simuler les jonctions de fils. Il serait naturel d'étudier les performances de notre schéma implicite sur des réseaux complexes de nanofils afin de vérifier sa pertinence lorsque la matrice à inverser est de grande taille.

Dans la dernière partie, nous avons étudié le cas particulier d'un nanofil ferromagnétique avec une encoche, montrant que la dynamique des murs loin de l'encoche se rapproche de celle observée en l'absence de l'encoche. Plusieurs questions ouvertes se posent dans cette thématique, notamment lorsqu'on remplace le champ magnétique appliqué par un courant injecté dans le fil. S'il est bien démontré qu'un courant d'intensité faible ne peut pas détacher le mur de l'encoche, on ne sait montrer ni qu'un courant assez fort en a la capacité, ni que l'effet de l'encoche est négligeable lorsque le mur en est loin.



---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*. Harcourt Brace Jovanovich, 1975, t. 65, p. 26-27.
- [2] A. AHARONI, *Introduction of the Theory of Ferromagnetism* (International Series of Monograph on Physics). Oxford University Press, 2000, t. 109.
- [3] A. K. AL SAYED, « Modélisation mathématique des nano-fils ferromagnétiques, » Theses, Université de Pau et Des Pays de L'Adour, 2017.
- [4] F. ALOUGES, « A new finite element scheme for Landau-Lifchitz equations, » *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, t. 1, n° 2, p. 187-196, 2008.
- [5] F. ALOUGES, *Introduction à la théorie du micromagnétisme (cours)*. école Polytechnique, 2008.
- [6] F. ALOUGES et A. SOYEUR, « On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations : Existence and nonuniqueness, » *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, t. 18, n° 11, p. 1071-1084, 1992.
- [7] A. L. BERTOZZI, A. MÜNCH, M. SHEARER et K. ZUMBRUN, « Stability of compressive and undercompressive thin film travelling waves, » *European Journal of Applied Mathematics*, t. 12, n° 3, p. 253-291, 2001.
- [8] F. BLOCH, « Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika, » t. 74, p. 295-335, 1932.
- [9] O. BOULLE, G. MALINOWSKI et M. KLÄUI, « Current-induced domain wall motion in nanoscale ferromagnetic elements, » *Materials science and engineering : R*, t. 72, n° 9, p. 159-187, 2011.
- [10] F. BOYER et P. FABRIE, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles* (Mathématiques & applications). Berlin Heidelberg New York : Springer, 2006.
- [11] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* (Universitext). Springer New York, NY, 2010.

- 
- [12] W. F. BROWN, *Micromagnetics*. Wiley, Philadelphia : Classics in Applied Mathematics, 1963, t. 40.
- [13] G. CARBOU, « Domain Walls Dynamics for One Dimensional Models of Ferromagnetic Nanowires, » *Differential and integral equations*, t. 26, n° 3-4, p. 201-236, 2013.
- [14] G. CARBOU, « Domain Walls Dynamics for One Dimensional Models of Ferromagnetic Nanowires, » *Differential and integral equations*, t. 26, n° 3-4, p. 201-236, 2013.
- [15] G. CARBOU, « Thin Layers in Micromagnetism, » *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, t. 11, n° 9, p. 1529-1546, 2001.
- [16] G. CARBOU, M. EFENDIEV et P. FABRIE, « Global weak Solutions for the Landau-Lifschitz equation with magnetostriction, » *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, t. 34, n° 10, p. 1274-1288, 2011.
- [17] G. CARBOU et P. FABRIE, « Regular solutions for Landau-Lifschitz equation in a bounded domain, » *Differential Integral Equations*, t. 14, n° 2, p. 213-229, 2001.
- [18] G. CARBOU et P. FABRIE, « Time Average in Micromagnetism, » *Journal of Differential Equations*, t. 147, n° 2, p. 383-409, 1998.
- [19] G. CARBOU, P. FABRIE et O. GUÈS, « Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme, » *Communications in Partial Differential Equations*, t. 27, n° 7-8, p. 1467-1495, 2002.
- [20] G. CARBOU et R. JIZZINI, « Domain walls dynamics in a nanowire subject to an electric current, » *Journal of Differential Equations*, t. 258, n° 8, p. 2941-2965, 2015.
- [21] G. CARBOU et S. LABBÉ, « Stability for static walls in ferromagnetic nanowires, » *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, t. 6, n° 2, p. 273-290, 2006.
- [22] G. CARBOU et S. LABBÉ, « Stabilization of walls for nano-wires of finite length, » *ESAIM Control Optim*, t. 18, n° 1, p. 1-21, 2012.
- [23] G. CARBOU, S. LABBÉ et E. TRÉLAT, « Control of travelling walls in a ferromagnetic nanowire, » *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, t. 1, n° 1, p. 51-59, mars 2008.
- [24] G. CARBOU, S. LABBÉ et E. TRÉLAT, « Smooth control of nanowires by means of a magnetic field, » *Communications on Pure and Applied Analysis*, t. 8, n° 3, p. 871-879, 2009.
- [25] G. CARBOU, M. MOUSSAOUI et R. RACHI, « Stability of Steady States in Ferromagnetic Rings, » *Journal of Mathematical Physics*, t. 63, n° 3, 2022.
- [26] G. CARBOU et D. SANCHEZ, « Stabilization of walls in notched ferromagnetic nanowires, » working paper or preprint, juin 2018.
- [27] C. CARTIER-MILLON, « ACTIONNEURS ROTATIFS MAGNETOSTRICTIFS A ACCUMULATION DE PAS, » Theses, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2002.



- [28] P. G. CIARLET, *Plates and junctions in elastic multi-structures : an asymptotic analysis* (Recherches en mathématiques appliquées), eng. Paris Milan Barcelone Mexico Berlin Heidelberg New-York : Masson Springer-Verlag, 1990.
- [29] P. G. CIARLET, *Three-dimensional elasticity* (Studies in mathematics and its applications). Amsterdam San Diego (Calif.) Kidlington (UK) London : Elsevier, 1993, t. 1.
- [30] R. CÔTE et R. IGNAT, *Asymptotic stability of precessing domain walls for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in a nanowire with Dzyaloshinskii-Moriya interaction*.
- [31] A. DESIMONE, R. V. KOHN, S. MÜLLER et F. OTTO, « A reduced theory for thin-film micromagnetics, » *Communications on Pure and Applied Mathematics*, t. 55, n° 11, p. 1408-1460, 2002.
- [32] S. FUKAMI, M. YAMANOCHI, S. IKEDA et H. OHNO, « Depinning probability of a magnetic domain wall in nanowires by spin-polarized currents, » *Nature communications*, t. 4, p. 2293, 2013.
- [33] V. GIRAULT et P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Berlin, Heidelberg, 2012, t. 5, p. X, 376.
- [34] P. HARTEMANN, « Effets et matériaux magnétostrictifs, » *Matériaux fonctionnels - Matériaux biosourcés*, 1992.
- [35] W. HEISENBERG, « Zur Theorie des Ferromagnetismus, » p. 580-597, 1985.
- [36] R. JIZZINI, « Optimal stability criterion for a wall in a ferromagnetic wire in a magnetic field, » *Journal of Differential Equations*, t. 250, n° 8, p. 3349-3361, 2011.
- [37] J.-L. JOLY, G. METIVIER et J. RAUCH, « Global Solutions to Maxwell Equations in a Ferromagnetic Medium, » *Annales Henri Poincaré*, t. 1, n° 2, p. 307-340, 2000.
- [38] P. JOLY et O. VACUS, « Propagation d'ondes en milieu ferromagnétique 1D : existence et unicité des solutions, » *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, t. 324, n° 1, p. 29-35, 1997.
- [39] T. KAPITULA, « Multidimensional stability of planar travelling waves, » n° 1, p. 257-269, 1997.
- [40] E. KRITSIKIS, « Modélisation de la dynamique de l'aimantation par éléments finis, » thèse de doct., 2011.
- [41] S. LABBÉ, « Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques, » Theses, Paris XIII, 1998.
- [42] S. LABBÉ et L. HALPERN, « Modélisation et simulation du comportement des matériaux ferromagnétiques, » *Matapli*, t. 66, 2001.
- [43] L. LANDAU et E. LIFSCHITZ, *Electrodynamique des milieux continus* (cours de physique théorique). (ed. Mir) Moscou, 1969, t. VIII.
- [44] P. LANGEVIN, *Magnétisme et théorie des électrons*. Annales de chimie et de physique, 1905, t. 5, p. 68-125.

- 
- [45] F. LE GOFF, « Récupération d'énergie et magnétostriction Contexte vibratoire, » Theses, 'Université Laval, 2010.
- [46] J.-L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications 2*. Travaux et recherches mathématiques Dunod, Paris, 1968, t. 1.
- [47] S. S. P. PARKIN, M. HAYASHI et L. THOMAS, « Magnetic Domain-Wall Racetrack Memory, » *Science*, t. 320, n° 5873, p. 190-194, 2008.
- [48] O. V. PYLYPOVSKYI, D. D. SHEKA, V. P. KRAVCHUK, K. V. YERSHOV, D. MAKAROV et Y. GAIDIDEI, « Rashba Torque Driven Domain Wall Motion in Magnetic Helices, » *Scientific reports*, t. 6, p. 23 316, 2016.
- [49] R. RACHI, « Modélisation mathématique des anneaux ferromagnétiques, » Theses, Université de Pau et Des Pays de L'Adour, 2022.
- [50] V. ROUSSIER, « Stability of radially symmetric travelling waves in reaction–diffusion equations, » t. 21, n° 3, p. 341-379, 2004.
- [51] D. D. SHEKA, V. P. KRAVCHUK, K. V. YERSHOV et Y. GAIDIDEI, « Torsion-induced effects in magnetic nanowires, » *Phys. Rev. B*, t. 92, p. 054 417, 5 2015.
- [52] V. V. SLASTIKOV et C. SONNENBERG, « Reduced models for ferromagnetic nanowires, » *IMA Journal of Applied Mathematics*, t. 77, n° 2, p. 220-235, 2011.
- [53] A. VISINTIN, « On Landau-Lifshitz equations for ferromagnetism, » *Japan Journal of Applied Mathematics*, t. 2, n° 1, p. 69-84, 1985.
- [54] P. WEISS, « Recherches sur l'aimantation de la magnétite cristallisée, » thèse de doct., 1896, p. 435-453.
- [55] V. ZHUKOVA, P. CORTE-LEÓN, M. IPATOV, J. BLANCO, L. GONZALEZ-LEGARRETA et A. ZHUKOV, « Development of Magnetic Microwires for Magnetic Sensor Applications, » *Sensors (Basel, Switzerland)*, t. 19, nov. 2019.