



**HAL**  
open science

# Dynamique non linéaire du contact inter-aubes de turbine : caractérisation expérimentale et simulation numérique

Hugo de Filippis

► **To cite this version:**

Hugo de Filippis. Dynamique non linéaire du contact inter-aubes de turbine : caractérisation expérimentale et simulation numérique. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2023. Français. NNT : 2023ECDL0056 . tel-04542293

**HAL Id: tel-04542293**

**<https://theses.hal.science/tel-04542293>**

Submitted on 11 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# École Centrale de Lyon

École doctorale **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

Unité de recherche **Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes**

Thèse présentée par **Hugo DE FILIPPIS**

Soutenue le **18 décembre 2023**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'École Centrale de Lyon

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Dynamique des structures**

# Dynamique non linéaire du contact inter-aubes de turbine : caractérisation expérimentale et simulation numérique

**Thèse dirigée par** Fabrice THOUVEREZ Directeur  
Laurent BLANC Co-Encadrant

## Composition du jury

|                            |                         |  |
|----------------------------|-------------------------|--|
| <i>Rapporteurs</i>         | Jean-François DEÜ       | Professeur, Conservatoire national des arts et métiers, LMSSC    |
|                            | Émeline SADOULET-REBOUL | Maître de conférences HDR, Université de Franche-Comté, FEMTO-ST |
| <i>Examineur</i>           | Patrick GIRARD          | Ingénieur de recherche, Safran Aircraft Engines                  |
| <i>Président</i>           | Michel MASSENZIO        | Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1, LBMC               |
| <i>Directeurs de thèse</i> | Fabrice THOUVEREZ       | Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS                         |
|                            | Laurent BLANC           | Maître de conférences, École Centrale de Lyon, LTDS              |





Cette thèse a été préparée chez les partenaires suivants

**Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes**

UMR 5513

École Centrale de Lyon

36, avenue Guy de Collongue

69134 Écully, France

Site <http://ltds.ec-lyon.fr>



**Safran Aircraft Engines**

Département YRTC

Rond Point René Ravaut - Réau

77550 Moissy-Cramayel, France

Site <https://www.safran-group.com/fr>





**Dynamique non linéaire du contact inter-aubes de turbine : caractérisation expérimentale et simulation numérique****Résumé**

Dans la perspective d'une amélioration des performances et de l'efficacité de la génération future des turboréacteurs, et afin de respecter les réglementations environnementales évolutives concernant les pollutions diverses émises par ces machines, les industriels du secteur de l'aéronautique cherchent des solutions technologiques adaptées. Parmi l'ensemble des pistes étudiées par les fabricants, l'augmentation de la vitesse de rotation de la turbine basse pression au sein du turboréacteur est envisagée pour augmenter le rendement global, en contrepartie du renforcement des phénomènes vibratoires complexes, dont il est nécessaire de maîtriser en phase de conception. En effet, la turbine basse pression qui compose les turboréacteurs de la génération LEAP a la particularité d'être constituée d'un assemblage d'aubes dont la géométrie intègre un talon à l'extrémité supérieure de celles-ci. L'ensemble des talons vient alors s'emboîter les uns avec les autres lors du montage des aubes sur le disque, appliquant de ce fait une précharge statique sur celles-ci, grâce à un angle de pré-torsion prévu dès la phase de conception. La fonctionnalité de ce talon est double : d'une part il sert à garantir l'étanchéité de la veine aérodynamique en limitant les pertes fluides du flux d'air traversant les aubes, et d'autre part il introduit un amortissement par frottement par le biais du contact entre les talons des aubes fixées sur le disque, permettant ainsi de réduire l'amplitude de vibration de celles-ci. L'objectif de cette thèse est alors de pouvoir reproduire le comportement dynamique non-linéaire d'une aube de turbine basse pression sur un modèle numérique, et de valider les résultats obtenus à l'aide d'un banc d'essai expérimental académique. Pour ce faire, une étude bibliographique est menée afin d'établir un état de l'art des bancs d'essai expérimentaux existant, leurs spécificités, les observations réalisées, le matériel employé, etc., afin de positionner par rapport à la littérature le banc d'essai académique conçu dans le cadre de cette thèse, compte-tenu des spécifications souhaitées. Une fois la conception et la fabrication du banc d'essai abouties, des essais préliminaires nécessaires au déverminage de celui-ci sont réalisés, notamment des analyses modales des aubes ainsi que des essais de torsion pour la calibration de jauges de déformation afin de mesurer la précharge statique lors de l'assemblage des aubes sur le banc d'essai. Des réponses forcées sur la plage de fréquence du premier mode de flexion de la structure ont été réalisées à l'aide d'une excitation par un sinus pas à pas pour différentes configurations de précharge statique. De même, la construction du modèle numérique ainsi que la réalisation de calculs de réponses fréquentielles non-linéaires implique la compréhension et le maniement de méthodologies spécifiques, notamment pour traiter les forces non-linéaires liées au contact avec frottement entre les talons des aubes. Par ailleurs, une problématique supplémentaire, intrinsèque à la construction du modèle éléments finis reproduisant la précharge statique par pré-torsion des aubes, est la non-coïncidence des maillages des interfaces de contact, nécessitant dans un premier temps de les contraindre pour les rendre suffisamment réguliers afin de conserver la construction d'éléments de contact nœud à nœud. Dans un second temps, une méthode permettant de traiter cette problématique est proposée, à partir d'une courte bibliographie et en prenant en compte les différentes méthodologies de calcul, des réponses fréquentielles supplémentaires sont alors calculées.

**Mots clés :** aube à talon, modèle de contact avec frottement, amortissement non-linéaire, méthode de l'équilibrage harmonique, maillages non-coïncidents, banc d'essai expérimental, analyses modales

---

### Abstract

With a view of improving the performance and efficiency of the future generation of turbojet engines, and in order to comply with evolving environmental regulations concerning the various pollutants emitted by these machines, aerospace manufacturers are looking for suitable technological solutions. Among all the avenues studied by the manufacturers, increasing the rotational speed of the low-pressure turbine within the turbojet engine is envisaged to increase overall efficiency, in return for the reinforcement of complex vibratory phenomena which need to be taken into account during the design phase. In fact, the low-pressure turbine used in the LEAP generation of jet engines has the particularity of being made up of an assembly of blades whose geometry incorporates a shroud at the upper end of them. All the shrouds interlock with each other when the blades are mounted on the disc, thereby applying a static pre-load to the blades, thanks to a pre-twist angle provided for at the design stage. The function of this shroud is twofold: on the one hand, it serves to guarantee the tightness of the airfoil by limiting the fluid losses of the airflow passing through the blades, and on the other hand, it introduces frictional damping through contact between each blade fixed on the disc, thus reducing their vibration amplitude. The aim of this thesis is to reproduce the non-linear dynamic behavior of a low-pressure turbine blade on a numerical model, and to validate the results obtained using an academic experimental test bench. To this end, a bibliographical study is carried out to establish the state of the art of existing experimental test benches, their specific features, the observations made, the equipment used, etc., in order to position the academic test bench designed as part of this thesis in relation to the literature, taking into account the desired specifications. Once the design and manufacture of the test bench have been completed, the preliminary tests required for its debugging are carried out, including modal analysis of the blades and torsion tests for the calibration of strain gauges to measure the static pre-load when the blades are assembled on the test bench. Forced responses over the frequency range of the structure's first bending mode have been achieved using step sinus excitation for different static pre-load configurations. Similarly, building the numerical model and calculating non-linear frequency responses requires an understanding and handling of specific methodologies, particularly for dealing with the non-linear forces associated with the frictional contact between the blades shrouds. An additional problem, intrinsic to the construction of the finite element model reproducing the static pre-loading by blade pre-twisting, is the non-coincidence of the meshes of the contact interfaces, necessitating firstly to constrain them to make them sufficiently regular in order to preserve the construction of node-to-node contact elements. Secondly, a method for dealing with this problem is proposed, based on a short bibliography and taking into account the various calculation methodologies, additional frequency responses are then calculated.

**Keywords:** shrouded blade, frictional contact model, nonlinear damping, harmonic balance method, non-coincident meshes, experimental test bench, modal analysis

---

# Remerciements

Ces remerciements ressemblent beaucoup à ceux que j'ai prononcés à l'issue de ma soutenance de thèse, simplement parce qu'une bonne partie des personnes concernées par ceux-ci y étaient présentes, et je leur en suis reconnaissant.

Je commence donc par remercier Michel Massenzio pour avoir accepté d'endosser le rôle de président de mon jury de soutenance de thèse. Je remercie Émeline Sadoulet-Reboul et Jean-François Deü d'avoir bien voulu être les rapporteurs de mon mémoire de thèse, et donc la tâche conséquente que cela représentait de le relire et de le critiquer. Je les remercie aussi pour les questions intéressantes qu'ils m'ont posées lors de ma soutenance, ce qui m'a permis de prendre davantage de recul sur mon travail.

Je souhaite maintenant adresser mes remerciements à Fabrice Thouverez, qui m'a fait confiance pour mener ces travaux de thèse, et pour l'ensemble des conseils scientifiques qu'il m'a prescrit, du début de cette aventure jusqu'aux dernières corrections apportées au manuscrit et au support de présentation.

Je poursuis en remerciant Laurent Blanc pour son éternel optimisme, qui bien souvent contrebalançait mes doutes concernant le volet expérimental de ma thèse, et qui a toujours su rebondir lors de nos difficultés ou questionnements pour mener à bien l'élaboration du banc et la réalisation des essais.

Je remercie également Patrick Girard, pour son accueil toujours amical lors de mes rares déplacements sur le site de Villaroche, mais qui a pu malgré tout me transmettre les nombreuses subtilités technologiques de la turbine basse pression aéronautique. Merci aussi à Fabrice Chevillot pour avoir suivi avec intérêt l'avancement de mes travaux de thèse.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du personnel du LTDS auquel j'ai eu affaire à un moment ou à un autre au cours de ma thèse, et qui ont tout mis en œuvre pour que les aspects administratif, logistique, informatique et autres se déroulent sans encombres. Je remercie par ailleurs les personnes qui, au cours de mes études supérieures, ont contribué de près ou de loin à faire en sorte que j'en arrive là où en j'en suis aujourd'hui.

Mes remerciements s'adressent à présent aux doctorants que j'ai côtoyés tout au long de ces années au laboratoire, qui ont bien-sûr tous participé à leur manière au déroulement agréable de ma thèse, et dont je garde avec nostalgie de bons souvenirs. Beaucoup ont cru en moi plus que moi-même, et ont toujours su m'épauler même dans les moments un peu désespérants. J'ai eu la chance de rencontrer des personnes formidables qui sont devenues des amis, qui le demeurent encore aujourd'hui, et qui le resteront certainement.

Je n'oublie pas non plus mes amis de longue date pour toutes les soirées et balades à moto, qui ont rythmées ma thèse et permis de me changer les idées lorsque j'en avais bien besoin.

Et pour finir, je remercie évidemment avec une très vive émotion toute ma famille, sans laquelle je ne serais rien parce qu'elle est tout pour moi. Je suis conscient du soutien extraordinaire et indéfectible reçu de votre part, surtout lors des épreuves difficiles traversées ces dernières années. Ma soutenance de thèse a marqué l'aboutissement d'une période de ma vie : il n'existe pas de plus bel accomplissement à ce jour que d'avoir pu vous rendre si fiers de moi, et de voir avec plaisir ce bonheur dans vos yeux.

*À mes grands-mères.*





# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| Résumé   | v        |
| Remerciements  | vii      |
| Table des matières   | xi       |
| <b>Introduction générale</b>                                       | <b>1</b> |
| Contexte industriel . . . . .                                      | 1        |
| Contexte scientifique . . . . .                                    | 2        |
| Objectifs . . . . .  | 2        |
| Organisation du mémoire . . . . .                                  | 3        |
| <b>I Contexte technologique et théorique</b>                       | <b>5</b> |
| 1 Turboréacteur dans l'aéronautique civile . . . . .               | 6        |
| 1.1 Principe de fonctionnement . . . . .                           | 7        |
| 1.1.1 Cycle thermodynamique . . . . .                              | 7        |
| 1.1.2 Architectures moteur . . . . .                               | 7        |
| 1.2 Programmes de réglementations environnementales . . . . .      | 8        |
| 1.3 Aubes de turbine basse pression . . . . .                      | 9        |
| 1.3.1 Spécificités et géométrie . . . . .                          | 10       |
| 1.3.2 Technologies intrinsèques . . . . .                          | 10       |
| 2 Description théorique d'une structure en rotation . . . . .      | 11       |
| 2.1 Cinématique d'une particule en milieu continu . . . . .        | 12       |
| 2.1.1 Formulation énergétique de l'équation du mouvement . . . . . | 13       |
| 2.1.2 Discrétisation de la formulation continue . . . . .          | 16       |
| 2.1.3 Équilibre sous précharge centrifuge . . . . .                | 17       |
| 2.2 Symétrie cyclique . . . . .                                    | 18       |
| 2.2.1 Définition . . . . .   | 18       |
| 2.2.2 Notion de désaccordage . . . . .                             | 21       |
| 3 Traitement du comportement vibratoire . . . . .                  | 21       |
| 3.1 Sources des phénomènes vibratoires . . . . .                   | 21       |
| 3.1.1 Origine mécanique . . . . .                                  | 21       |
| 3.1.2 Origine aérodynamique . . . . .                              | 22       |
| 3.2 Outils pour le dimensionnement . . . . .                       | 22       |
| 3.2.1 Courbe de Wöhler . . . . .                                   | 22       |
| 3.2.2 Diagramme de Haigh . . . . .                                 | 23       |
| 3.2.3 Diagramme de Campbell . . . . .                              | 24       |
| 3.2.4 Diagramme zig-zag . . . . .                                  | 24       |
| 3.3 Influence des non-linéarités . . . . .                         | 25       |

|   |           |
|---|-----------|
| Bilan du chapitre . . . . .   | 28        |
| <b>II Conception et exploitation d'un banc d'essai</b>                | <b>29</b> |
| 1 Définition du banc d'essai . . . . .                                | 30        |
| 1.1 Objectifs généraux . . . . .                                      | 30        |
| 1.2 État de l'art des bancs d'essai . . . . .                         | 31        |
| 1.2.1 Bancs d'essai pour des aubes avec nageoire . . . . .            | 31        |
| 1.2.2 Bancs d'essai pour une aube seule avec talon . . . . .          | 32        |
| 1.2.3 Bancs d'essai pour plusieurs aubes avec talon . . . . .         | 37        |
| 1.3 Synthèse et spécifications . . . . .                              | 39        |
| 2 Conception et fabrication du banc d'essai . . . . .                 | 41        |
| 2.1 Estimation analytique de la pression de contact normale . . . . . | 41        |
| 2.2 Conception de l'aube et du système de précharge . . . . .         | 42        |
| 2.3 Fabrication des pièces . . . . .                                  | 45        |
| 3 Essais expérimentaux préliminaires . . . . .                        | 47        |
| 3.1 Analyses modales . . . . .  | 48        |
| 3.1.1 Aubes en condition libre . . . . .                              | 48        |
| 3.1.2 Aubes en condition encastrée . . . . .                          | 51        |
| 3.1.3 Assemblage des trois aubes . . . . .                            | 52        |
| 3.2 Essais de torsion . . . . .                                       | 53        |
| 3.3 Calibration de la précharge statique . . . . .                    | 54        |
| 3.4 Métrologie et contrôle du montage . . . . .                       | 56        |
| 4 Essais dynamiques . . . . .   | 58        |
| 4.1 Matrice d'essais . . . . .  | 58        |
| 4.2 Instrumentation et protocole de mesure . . . . .                  | 59        |
| 4.3 Résultats expérimentaux . . . . .                                 | 61        |
| 4.3.1 Précharge statique « faible » . . . . .                         | 62        |
| 4.3.2 Précharge statique « élevée » . . . . .                         | 63        |
| 4.3.3 Sensibilité à la précharge statique . . . . .                   | 64        |
| 4.3.4 Évolution du positionnement de l'aube centrale . . . . .        | 67        |
| Bilan du chapitre . . . . .   | 67        |
| <b>III Problème de contact en dynamique</b>                           | <b>69</b> |
| 1 Problème de référence . . . . .                                     | 70        |
| 1.1 Configuration d'un problème de contact . . . . .                  | 70        |
| 1.1.1 Définition du contact entre deux corps élastiques . . . . .     | 70        |
| 1.1.2 Lois de contact . . . . .                                       | 71        |
| 1.1.3 Lois de frottement . . . . .                                    | 73        |
| 1.2 Formulation variationnelle du problème . . . . .                  | 74        |
| 1.2.1 Formulation forte . . . . .                                     | 74        |
| 1.2.2 Formulation faible . . . . .                                    | 76        |
| 1.2.3 Égalité variationnelle . . . . .                                | 78        |
| 1.2.4 Inégalité variationnelle . . . . .                              | 78        |
| 2 Traitement des contraintes de contact . . . . .                     | 79        |
| 2.1 Méthodes classiques . . . . .                                     | 79        |
| 2.1.1 Méthode de pénalité . . . . .                                   | 79        |
| 2.1.2 Méthode de Nitsche . . . . .                                    | 80        |
| 2.2 Méthodes avec multiplicateurs de Lagrange . . . . .               | 80        |
| 2.2.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .               | 80        |
| 2.2.2 Méthode des Lagrangiens perturbés . . . . .                     | 81        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 2.2.3     | Méthode des Lagrangiens augmentés . . . . .                               | 81         |
| 2.3       | Problématique de la non-coïncidence de maillages . . . . .                | 82         |
| 2.3.1     | Typologie . . . . .   | 83         |
| 2.3.2     | Méthode de mortier . . . . .  | 83         |
| 2.3.3     | Méthode des éléments de jeu virtuels . . . . .                            | 84         |
| 2.3.4     | Méthodes par interpolation du déplacement relatif . . . . .               | 86         |
| 3         | Résolution d'un système d'équations non linéaires . . . . .               | 89         |
| 3.1       | Méthodes temporelles . . . . .  | 90         |
| 3.1.1     | Méthode de perturbation . . . . .   | 90         |
| 3.1.2     | Intégrateurs temporels . . . . .  | 91         |
| 3.1.3     | Méthode de tir . . . . .  | 93         |
| 3.2       | Méthodes fréquentielles . . . . .   | 94         |
| 3.2.1     | Méthode de l'équilibrage harmonique . . . . .                             | 94         |
| 3.2.2     | Collocation trigonométrique . . . . .                                     | 94         |
| 4         | Exemple de mise en œuvre méthodologique . . . . .                         | 95         |
| 4.1       | État de l'art . . . . .   | 95         |
| 4.2       | Condensation du système d'équations . . . . .                             | 98         |
| 4.2.1     | Condensation sur les nœuds non linéaires . . . . .                        | 99         |
| 4.2.2     | Condensation sur le déplacement relatif . . . . .                         | 99         |
| 4.3       | Calcul des forces non linéaires de contact et de frottement . . . . .     | 100        |
| 4.3.1     | Méthode de la pénalité . . . . .  | 101        |
| 4.3.2     | Méthode DLFT . . . . .  | 102        |
| 5         | Algorithmes de recherche de solutions . . . . .                           | 104        |
| 5.1       | Minimisation d'un système algébrique non linéaire . . . . .               | 104        |
| 5.1.1     | Algorithme du gradient . . . . .  | 105        |
| 5.1.2     | Méthode de Newton . . . . .   | 106        |
| 5.1.3     | Méthode de Gauss-Newton . . . . .   | 106        |
| 5.1.4     | Méthode de Newton-Raphson . . . . .                                       | 106        |
| 5.1.5     | Méthode hybride de Powell . . . . .                                       | 107        |
| 5.1.6     | Approximations numériques des dérivées par différences finies . . . . .   | 107        |
| 5.2       | Méthodes de continuation . . . . .  | 108        |
| 5.2.1     | Prédicteurs . . . . .   | 109        |
| 5.2.2     | Paramétrisation . . . . .   | 110        |
|           | Bilan du chapitre . . . . .   | 111        |
| <b>IV</b> | <b>Étude d'un modèle numérique reproduisant le banc d'essai</b> . . . . . | <b>113</b> |
| 1         | Description du modèle numérique . . . . .                                 | 114        |
| 1.1       | Réduction et condensation de la taille du modèle . . . . .                | 115        |
| 1.1.1     | Méthodes de réduction par synthèse modale . . . . .                       | 116        |
| 1.1.2     | Condensation de la taille du problème . . . . .                           | 118        |
| 1.2       | Application de la précharge statique . . . . .                            | 118        |
| 1.2.1     | Méthode de la pénalité . . . . .  | 119        |
| 1.2.2     | Méthode DLFT . . . . .  | 120        |
| 1.3       | Solutions convergées . . . . .  | 120        |
| 1.3.1     | Déplacement des nœuds . . . . .   | 120        |
| 1.3.2     | Forces de contact . . . . .   | 121        |
| 2         | Réponses forcées . . . . .  | 122        |
| 2.1       | Premier mode de flexion . . . . .   | 123        |
| 2.2       | Troisième mode de flexion . . . . .                                       | 124        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.3      | Influence de la non-coïncidence du maillage . . . . .                        | 125        |
| 2.4      | Synthèse comparative . . . . .   | 126        |
| 3        | Traitement de la non-coïncidence des maillages . . . . .                     | 126        |
| 3.1      | Proposition d'une méthode . . . . .  | 126        |
| 3.2      | Réponses forcées . . . . .   | 128        |
| 3.2.1    | Précharge statique « faible » . . . . .                                      | 128        |
| 3.2.2    | Précharge statique « élevée » . . . . .                                      | 130        |
| 4        | Corrélation essais-calculs . . . . .   | 131        |
|          | Bilan du chapitre . . . . .  | 133        |
|          | <b>Conclusion</b> . . . . .  | <b>135</b> |
|          | Résultats . . . . .  | 135        |
|          | Volet expérimental . . . . .   | 135        |
|          | Volet numérique . . . . .  | 136        |
|          | Perspectives . . . . .   | 138        |
|          | Volet expérimental . . . . .   | 138        |
|          | Volet numérique . . . . .  | 138        |
|          | <b>Table des figures</b> . . . . .   | <b>141</b> |
|          | <b>Liste des tableaux</b> . . . . .  | <b>147</b> |
|          | <b>Bibliographie</b> . . . . .   | <b>149</b> |
| <b>A</b> | <b>Illustrations des bancs d'essai de la littérature</b> . . . . .           | <b>163</b> |
| 1        | Banc d'essai NASA 1981 . . . . .   | 163        |
| 2        | Banc d'essai Université Beihang 2007 . . . . .                               | 165        |
| 3        | Banc d'essai METU 2019 . . . . .   | 166        |
| 4        | Banc d'essai Université Hanovre 2016 . . . . .                               | 167        |
| 5        | Banc d'essai École polytechnique de Turin 2022 . . . . .                     | 169        |
| 6        | Banc d'essai Northeastern University (Chine) 2019 . . . . .                  | 170        |
| 7        | Banc d'essai IPS NAS (Ukraine) 2018 . . . . .                                | 171        |
| 8        | Banc d'essai INSA 2004 . . . . .   | 173        |
| <b>B</b> | <b>Définitions des espaces de Hilbert et de Sobolev</b> . . . . .            | <b>175</b> |
| <b>C</b> | <b>Condensation de Guyan</b> . . . . .                                       | <b>177</b> |
| <b>D</b> | <b>Plans des aubes du banc d'essai</b> . . . . .                             | <b>179</b> |
| <b>E</b> | <b>Soudage laser des aubes du banc d'essai © Irepa Laser</b> . . . . .       | <b>181</b> |
| <b>F</b> | <b>Films de mesure de pression FUJIFILM Prescale</b> . . . . .               | <b>185</b> |
| <b>G</b> | <b>Déformées des modes propres de l'assemblage des trois aubes</b> . . . . . | <b>187</b> |
| <b>H</b> | <b>Chaînes de mesure pour les analyses modales expérimentales</b> . . . . .  | <b>189</b> |
| <b>I</b> | <b>Analyses modales expérimentales</b> . . . . .                             | <b>191</b> |
| 1        | Aubes en configuration libre . . . . .                                       | 191        |
| 2        | Aubes en configuration encastrée . . . . .                                   | 193        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>J</b> | <b>Réponses forcées expérimentales</b>                        | <b>195</b> |
| 1        | Espacement des pieds des aubes de 20,00 mm (jeu) . . . . .    | 195        |
| 2        | Espacement des pieds des aubes de 19,90 mm (aube 1) . . . . . | 196        |
| 3        | Espacement des pieds des aubes de 19,90 mm (aube 3) . . . . . | 197        |
| 4        | Espacement des pieds des aubes de 19,80 mm . . . . .          | 198        |
| 5        | Espacement des pieds des aubes de 19,75 mm . . . . .          | 199        |
| 6        | Espacement des pieds des aubes de 19,65 mm . . . . .          | 200        |
| 7        | Espacement des pieds des aubes de 19,55 mm . . . . .          | 201        |
| 8        | Espacement des pieds des aubes de 19,50 mm . . . . .          | 202        |
| 9        | Espacement des pieds des aubes de 19,45 mm . . . . .          | 203        |
| 10       | Espacement des pieds des aubes de 19,30 mm . . . . .          | 204        |
| 11       | Espacement des pieds des aubes de 19,20 mm . . . . .          | 205        |
| <b>K</b> | <b>Maillages aléatoires incompatibles</b>                     | <b>207</b> |
| <b>L</b> | <b>Réponses forcées numériques</b>                            | <b>209</b> |
| 1        | Espacement des pieds des aubes de 20,30 mm . . . . .          | 209        |
| 2        | Espacement des pieds des aubes de 20,10 mm . . . . .          | 209        |
| 3        | Espacement des pieds des aubes de 19,80 mm . . . . .          | 210        |
| 4        | Espacement des pieds des aubes de 19,70 mm . . . . .          | 210        |
| 5        | Espacement des pieds des aubes de 19,60 mm . . . . .          | 211        |
|          | <b>Liste des publications personnelles</b>                    | <b>213</b> |
|          | Colloques internationaux avec actes publiés . . . . .         | 213        |



# Introduction générale

## Contexte industriel

Dans le cadre de l'innovation technologique continue des moteurs d'avions, le partenariat entre Safran Aircraft Engines et General Electric, réunis au sein de la coentreprise CFM International, a permis de développer le moteur LEAP, successeur du CFM56, qui apporte des gains significatifs en matière de performance, une réduction de la consommation de carburant et un meilleur respect de l'environnement. Il a été sélectionné par de nombreuses compagnies aériennes pour motoriser leurs avions Airbus A320neo, Boeing 737 MAX ou encore COMAC C919. Pour assurer la fiabilité de ces moteurs, les motoristes doivent avoir une maîtrise des phénomènes vibratoires au sein des turbines qui les composent, d'où l'intérêt de disposer d'outils de simulation numérique accessibles et prédictifs, éprouvés grâce à des résultats d'essais expérimentaux.

Cette thèse se focalise plus particulièrement sur les aubes de turbine basse pression qui sont des pièces situées en aval des chambres de combustion, juste après la turbine haute pression, et qui subissent des excitations vibratoires diverses lors des cycles de fonctionnement moteur, notamment les phases de décollage et de croisière (*take-off* et *cruise* en anglais). Elles sont constituées d'une aube située dans la veine aérodynamique, d'un talon en extrémité supérieure, et d'une attache sur le rotor de turbine, l'ensemble des aubes forme ainsi une couronne à 360 degrés. À l'avenir, cette turbine basse pression devra avoir une vitesse rotation plus élevée afin d'améliorer le rendement des turboréacteurs.

Au sein de Safran Aircraft Engines, la technologie de talon d'aube mobile de turbine basse pression employée met en jeu une prétorsion au montage, c'est sur celle-ci uniquement que se concentre la thèse, bien qu'il existe d'autres technologies dans l'industrie. La technologie retenue est caractérisée par une découpe de talon en forme de « Z » qui implique un vrillage de l'aube lors du montage, mettant ainsi en contact le talon avec celui des aubes adjacentes. La surface en contact est dénommée « stellite » en référence au matériau d'apport utilisé, qui est un alliage métallique utilisé pour ses propriétés mécaniques, et fixé au chalumeau sur le talon, augmentant ainsi la dureté et la résistance à l'usure de cette zone. Le reste de la surface du talon n'est pas destinée à être en contact, seule la zone évoquée est privilégiée pour le contact. Ainsi, des forces de contact et de frottement sont exercées sur cette zone du talon, et évoluent selon la plage de fonctionnement du moteur, qui dépend de la manœuvre de vol, par exemple lors de la phase de décollage ou bien en phase de croisière. Cela a donc une forte incidence sur le comportement dynamique global d'une turbine basse pression, qui est alors non linéaire.



## Contexte scientifique

Le contact entre les talons des aubes de turbine basse pression est relativement complexe puisqu'il induit différents états lors du fonctionnement moteur : de l'adhérence, du glissement, de l'amortissement par frottement, voire même du décollement, c'est-à-dire une perte de contact. Cette variété de statuts du contact, induisant un comportement dynamique vibratoire fortement non linéaire de la structure, complexifie sa modélisation numérique. En effet, un certain nombre de paramètres entrent en jeu et influent sur cette non-linéarité : coefficient de frottement, précharge statique, géométrie, conditions initiales et limites, température, usure, etc. Cela nécessite des méthodes de calcul adaptées pour traiter ce genre de problème non linéaire, avec les difficultés de simulation numérique qui y sont associées.

De plus, une problématique majeure du modèle numérique est la non-coïncidence des maillages utilisés sur les modèles éléments finis des aubes de turbine basse-pression, plus précisément les interfaces de contact entre les talons, qui complexifie le calcul des forces de contact non linéaires. Celle-ci est la conséquence de plusieurs éléments propres à cette structure : la précharge statique des aubes appliquée par l'interpénétration géométrique des talons, la contrainte de finesse du maillage aux interfaces de contact, la présence de jeu entre elles, ou encore les grands déplacements.

L'enjeu de cette thèse est alors de disposer de méthodes de simulation numérique prenant en compte ces problématiques de non-linéarités de contact inter-talons d'aubes de turbine pour reproduire leur comportement dynamique. Celui-ci perçu aujourd'hui comme un élément clef dans le cas de l'étude de la réponse vibratoire des aubes de turbine basse pression. Cependant, les phénomènes évoqués précédemment restent mal discernés et extrêmement difficiles à quantifier, car la majorité des connaissances sur ceux-ci est basée sur le retour d'expérience et l'utilisation de méthodes de dimensionnement empiriques. De plus, la complexité numérique de ce type de simulation amène une problématique de coût de calcul et de robustesse, qui sont indispensables à prendre en compte.

## Objectifs

C'est pourquoi sera réalisé en premier lieu un état de l'art sur les bancs d'essai existants, ainsi que sur les méthodes de simulations numériques des non-linéarités de contact sur des aubes avec talon, afin de documenter les premiers cas d'études simples. Grâce à cette étude bibliographique, la conception d'un banc d'essai académique innovant, mettant en jeu plusieurs aubes avec talon et la prétorsion de celles-ci, sera menée afin de procéder à des essais expérimentaux qui permettront le recalage et la validation des simulations numériques. Celles-ci seront lancées sur le code de calcul non linéaire Harmonie développé au LTDS, en élaborant de nouvelles méthodologies pour traiter les complexités spécifiques au contact entre les talons d'aubes de turbine, telles que l'interpénétration géométrique de ceux-ci pour l'application de la précharge statique, ou encore la non-coïncidence des maillages aux interfaces de contact. Dans un second temps, une ou plusieurs applications sur des cas industriels seront envisagées, et l'exploration de la sensibilité des modèles vis-à-vis des paramètres principaux sera à prendre en compte lors de l'avancement des travaux de recherche. Par ailleurs, le désaccordage des aubes est un aspect qui ne sera pas abordé dans le cadre de cette thèse, puisque l'on choisit de se focaliser sur l'influence du contact avec frottement entre les talons des aubes, son étude nécessite donc de l'isoler d'autres phénomènes tels que le désaccordage.

## Organisation du mémoire

Le premier chapitre de cette thèse est dédié à la description générale de la technologie des turbomachines, plus particulièrement celles des turboréacteurs dans l'aéronautique civile. Un accent est mis sur les aubes de turbine basse pression qui sont l'objet d'étude de cette thèse, leurs spécificités, la phénoménologie des non-linéarités qui existent et les sources de phénomènes vibratoires auxquels elles sont sujettes, et enfin les technologies mises en jeu, afin de donner un contexte industriel dans lequel s'inscrit ces travaux. La théorie sur la dynamique d'une structure en rotation telle qu'une roue aubagée composée d'aubes avec un talon est abordée, et sert d'introduction au chapitre III.

Le deuxième chapitre est dédié au volet expérimental de la thèse, et commence par la présentation d'un état de l'art sur les bancs d'essai existant de la littérature. À partir de cette étude bibliographique, l'ensemble des spécifications sont établies à partir d'un cahier des charge spécifique, puis la conception et la fabrication du banc d'essai académique de cette thèse sont détaillées. L'étape de commissionnement du banc d'essai se résume à des essais préliminaires afin d'en maîtriser les conditions limites, avant la réalisation des essais dynamiques. Les résultats expérimentaux obtenus ont permis de visualiser l'évolution du taux d'amortissement des réponses fréquentielles des aubes en fonction de la précharge statique qui leur était appliquée ainsi que de la force d'excitation.

Le troisième chapitre est consacré à la description complète d'un problème de contact, depuis la formulation variationnelle jusqu'à sa résolution, en passant par la description des différentes lois de contact et de frottement. Les méthodes de traitement des contraintes de contact sont abordées en tant que contribution énergétique au problème non linéaire que l'on cherche à résoudre. L'influence de la non coïncidence des maillages au sein d'un problème discrétisée est étudiée, notamment les méthodes développées dans la littérature pour traiter cette problématique. Ensuite, les méthodes destinées à la recherche de solutions périodiques d'un tel problème sont détaillées, en séparant leur domaine d'application : temporel ou fréquentiel. La résolution du système d'équations différentielles qui compose le problème à résoudre nécessite des algorithmes adaptés. Pour faciliter la convergence du solveur vers la solution, des méthodes de prédiction et de continuation sont employées, d'autant plus lors de points de retournement. Un exemple de mise en œuvre est proposé afin de mettre en application certaines des méthodes abordées dans le chapitre, en vue d'introduire le modèle numérique présenté dans le chapitre IV reposant sur l'emploi de certaines de ces méthodes.

Le quatrième chapitre propose l'étude d'un modèle numérique réduit construit par éléments finis, reproduisant la dynamique des aubes du banc d'essai conçu dans cette thèse. Les particularités du modèle réduit ainsi que la stratégie adoptée pour sa construction sont explicités. Des réponses forcées sont calculées à l'aide de deux méthodes de calcul des forces non linéaires pour les premier et troisième modes de flexion de la structure. Une méthode pour traiter la non-coïncidence des maillages des interfaces de contact est proposée à partir de l'étude bibliographique réalisée sur cette problématique. Des réponses forcées supplémentaires sont présentées et analysées, elles montrent un phénomène de vibro-impact qui n'était alors pas observé lors des essais expérimentaux, et dont une interprétation est proposée. Une courte corrélation entre les essais et les simulations numériques est abordée.

Un chapitre de conclusion termine ce mémoire, en résumant les points majeurs de ce travail, tant sur le volet expérimental que numérique, tout en annonçant les perspectives que celui-ci apporte.



# Chapitre I

## Contexte technologique et théorique

### Sommaire du chapitre

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Turboréacteur dans l'aéronautique civile</b>              | <b>6</b>  |
| 1.1      | Principe de fonctionnement . . . . .                         | 7         |
| 1.1.1    | Cycle thermodynamique . . . . .                              | 7         |
| 1.1.2    | Architectures moteur . . . . .                               | 7         |
| 1.2      | Programmes de réglementations environnementales . . . . .    | 8         |
| 1.3      | Aubes de turbine basse pression . . . . .                    | 9         |
| 1.3.1    | Spécificités et géométrie . . . . .                          | 10        |
| 1.3.2    | Technologies intrinsèques . . . . .                          | 10        |
| <b>2</b> | <b>Description théorique d'une structure en rotation</b>     | <b>11</b> |
| 2.1      | Cinématique d'une particule en milieu continu . . . . .      | 12        |
| 2.1.1    | Formulation énergétique de l'équation du mouvement . . . . . | 13        |
| 2.1.2    | Discrétisation de la formulation continue . . . . .          | 16        |
| 2.1.3    | Équilibre sous précharge centrifuge . . . . .                | 17        |
| 2.2      | Symétrie cyclique . . . . .                                  | 18        |
| 2.2.1    | Définition . . . . .   | 18        |
| 2.2.2    | Notion de désaccordage . . . . .                             | 21        |
| <b>3</b> | <b>Traitement du comportement vibratoire</b>                 | <b>21</b> |
| 3.1      | Sources des phénomènes vibratoires . . . . .                 | 21        |
| 3.1.1    | Origine mécanique . . . . .                                  | 21        |
| 3.1.2    | Origine aérodynamique . . . . .                              | 22        |
| 3.2      | Outils pour le dimensionnement . . . . .                     | 22        |
| 3.2.1    | Courbe de Wöhler . . . . .                                   | 22        |
| 3.2.2    | Diagramme de Haigh . . . . .                                 | 23        |
| 3.2.3    | Diagramme de Campbell . . . . .                              | 24        |
| 3.2.4    | Diagramme zig-zag . . . . .                                  | 24        |
| 3.3      | Influence des non-linéarités . . . . .                       | 25        |
|          | <b>Bilan du chapitre</b>                                     | <b>28</b> |

---

Ce chapitre pose le cadre industriel et scientifique dans lequel s'inscrit cette thèse, en introduisant plusieurs concepts technologiques et théoriques. Une première section est dédiée à la description succincte d'un turboréacteur en aéronautique civile, son principe de fonctionnement

ainsi que les organes majeurs qui le composent. Elle se concentre aussi sur la description d'une aube de turbine basse pression, ses particularités géométriques et technologiques, ainsi que les phénoménologies non linéaires qui lui sont propres. La deuxième section fournit les bases théoriques de la mécanique des milieux continus pour décrire la dynamique d'une structure en rotation telle qu'une turbine basse pression, dans l'intention de poursuivre cette description lors de la présence d'un contact avec frottement induisant un comportement non linéaire dans le chapitre III, et les méthodologies nécessaires pour la résolution d'un tel problème. La troisième recense les outils classiquement employés pour dimensionner une roue aubagée soumise à une vitesse de rotation et à des sollicitations vibratoires, tout en introduisant l'influence que peut avoir des phénomènes non linéaires amenant aux limites de ces outils.

## 1 Turboréacteur dans l'aéronautique civile

Un turboréacteur est un système de propulsion utilisé sur les avions qui génère la poussée nécessaire pour le décollage et le vol de croisière. Son principe de fonctionnement, établi depuis la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, et son rendement l'ont rendu particulièrement attractif à partir du milieu du XX<sup>e</sup> siècle pour le transport à vitesse subsonique haute et supersonique, au-delà des limites atteintes jusqu'alors par la propulsion avec un moteur à pistons entraînant une hélice. Les différentes architectures et technologies développées depuis la Seconde Guerre mondiale ont continuellement amélioré les performances de ce moyen de propulsion aéronautique. Désormais, la réduction de la pollution environnementale qu'il génère et de son coût de fonctionnement sont les enjeux principaux des motoristes. Cela implique une conception toujours plus efficace des moteurs, en passant par la compréhension et la modélisation de phénomènes et comportements complexes de telles structures. De plus, les tendances de conception liées à la mécanique s'orientent vers la réduction de masse, l'augmentation des dimensions et des chargements, en particulier sur les pièces mobiles. Ainsi, entre un moteur CFM56 et un moteur LEAP (visibles sur la figure I.1 ci-dessous), la consommation de carburant a diminué de 15 % tandis que l'émissions de NO<sub>x</sub><sup>1</sup> a baissé de 50 %.

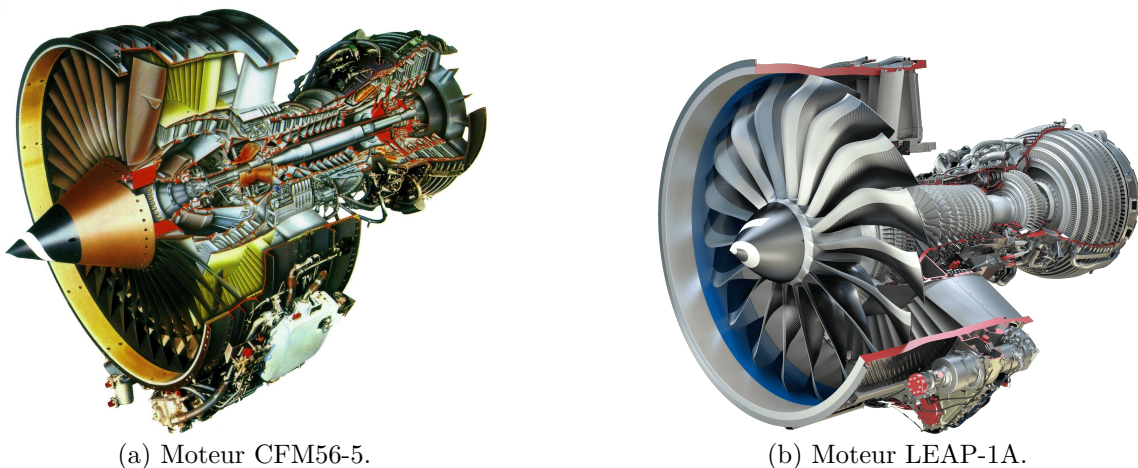


FIGURE I.1 – Vues en coupe de deux générations de turboréacteur © CFM International.

---

1. oxydes d'azote.

## 1.1 Principe de fonctionnement

Le turboréacteur est donc une machine qui transforme le potentiel d'énergie chimique contenue dans le carburant qu'est le kérosène, mélangé à un comburant qu'est le dioxygène contenu dans l'air, en énergie cinétique produite par l'accélération d'un volume d'air qui transite dans le moteur. Cette poussée engendre alors une force de réaction dans le sens opposé à l'éjection de l'air : c'est une application concrète du principe d'action-réaction énoncé dans la troisième loi de Newton.

### 1.1.1 Cycle thermodynamique

Cette transformation énergétique produite au sein d'un turboréacteur correspond au cycle de Brayton, aussi appelé cycle de Joule, qui est un cycle thermodynamique décomposé en trois étapes illustrées sur la figure I.2, ici appliqué au cas d'un turboréacteur [32] :

1. l'air admis par la soufflante est comprimé dans les étages des compresseurs ;
2. l'air comprimé est chauffé à pression constante dans les chambres de combustion et mélangé avec le kérosène ;
3. l'air comprimé et chauffé est détendu dans les turbines qui entraînent les compresseurs et la soufflante ;
4. l'air termine sa détente et est accéléré dans la tuyère avant d'être éjecté à l'extérieur du turboréacteur.

Le cycle théorique idéal implique que les étapes de compression et de détente du gaz sont supposées isentropiques. Le processus serait donc à la fois adiabatique et réversible, et le travail résulterait uniquement de forces conservatives. La combustion quant à elle est supposée isobare. Dans la réalité d'un système tel qu'un turboréacteur, il y a bien évidemment des pertes mécaniques liées au frottement des pièces entre elles, des pertes thermiques et des pertes de pression sur l'ensemble trajet parcouru par le flux d'air chaud, ce qui éloigne le cycle réel d'une évolution idéale.

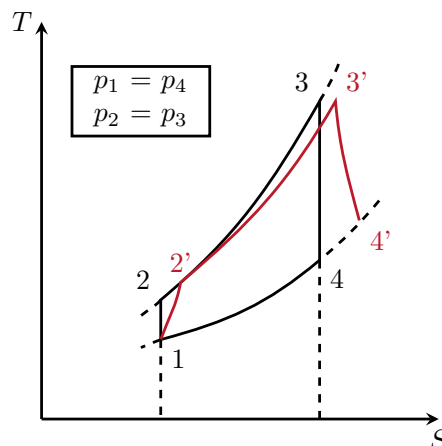


FIGURE I.2 – Diagramme température-entropie du cycle de Brayton théorique (—) et réel (—).

### 1.1.2 Architectures moteur

Sur un avion de ligne, l'architecture moteur la plus répandue aujourd'hui est celle d'un turboréacteur double flux et double corps, schématisée sur la figure I.3. Cette architecture se nomme ainsi car les premiers turboréacteurs étaient à simple flux et mono-corps : la totalité du

flux d'air traversait le corps du moteur, entraînant ainsi une seule turbine et son compresseur. En vue d'améliorer l'efficacité de la compression, le turboréacteur a été séparé en deux corps : le corps primaire générateur de gaz comportant les composants de haute pression (compresseur HP, chambre de combustion et turbine HP), et le corps secondaire générateur de puissance comportant les composants de la basse pression (soufflante, compresseur BP et turbine BP). Les turbines haute et basse pression actionnent les compresseurs correspondants. De plus, l'emploi d'arbres concentriques a permis d'avoir des vitesses de rotation différentes entre ces deux corps distincts, améliorant encore les performances et réduisant la consommation de carburant. L'architecture à simple flux est aujourd'hui obsolète et restait limitée à une utilisation militaire à cause de son faible rendement en régime subsonique, et son fonctionnement bruyant ne satisfaisant pas les normes antibruit. Le concept de double flux apparaît ainsi avec l'ajout d'une soufflante en amont des compresseurs, entraînée par la turbine basse pression, qui vient aspirer le flux d'air secondaire froid, celui-ci ne circule donc pas à l'intérieur du moteur puisqu'il le contourne. C'est ce flux d'air, d'un débit supérieur au flux primaire, qui produit la majeure partie de la poussée totale fournie par le turboréacteur [163].

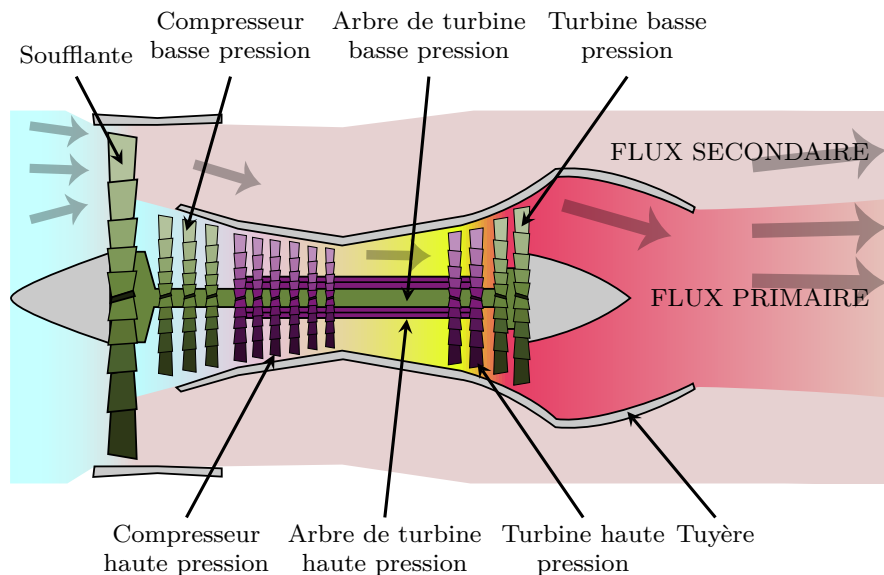


FIGURE I.3 – Schéma d'un turboréacteur double flux et double corps © Wikipédia.

L'objectif pour les motoristes est donc d'avoir le plus fort taux de dilution, qui désigne le rapport entre la masse d'air du flux froid (flux secondaire) et celle du flux chaud (flux primaire). Cette donnée est proportionnelle au rendement du moteur, d'où l'intérêt majeur porté sur cette grandeur pour obtenir des poussées importantes tout en ayant des consommations de carburant plus faibles. À titre d'information, un turboréacteur actuel possède un taux de dilution, noté usuellement  $\lambda$ , d'environ 15 : 1. Ainsi au décollage, la soufflante produit environ 80 % de la poussée totale générée par le moteur.

## 1.2 Programmes de réglementations environnementales

L'évolution des réglementations environnementales pousse les acteurs de l'industrie aéronautique à concevoir des moteurs plus efficaces en améliorant leurs performances, dans le but de réduire la pollution atmosphérique et sonore générée par ceux-ci. Afin de coordonner ces acteurs et établir une stratégie commune pour relever les défis associés, l'organisme européen

nommé ACARE<sup>2</sup> a été établi en 2000 une feuille de route avec des objectifs à atteindre au fur et à mesure des années futures. Les plus marquants sont prévus à l'horizon 2050 :

- une réduction du bruit généré par les aéronefs de 65 % ;
- une diminution des rejets de  $\text{NO}_x$  de 90 % ;
- un abaissement des émissions de  $\text{CO}_2$  de 65 %.

Le programme *Clean Sky* a été lancé en 2007 en tant que *Joint Technology Initiative* pour établir un partenariat au niveau européen entre les acteurs publics et privés afin de répondre aux objectifs défini par l'ACARE. Terminé en 2014, son successeur Clean Sky 2 a démarré cette même année pour s'achever en 2024. Ces programmes permettent d'accélérer la recherche, le développement, la certification et le déploiement de nouvelles technologies au sein des avions futurs.

En parallèle, l'Agence internationale de l'énergie a rédigé le plan d'action *Net Zero by 2050* pour réduire et atteindre un niveau d'émission de dioxyde de carbone nul en 2050 afin de limiter le réchauffement climatique de la Terre à 1,5 °C. Chacun des secteurs émetteurs tels que celui des transports est concerné, et un des objectifs majeurs du transport aérien est d'utiliser 50 % de carburant durables<sup>3</sup> en 2040.

À titre d'exemple des moyens mis en œuvre par l'industrie aéronautique pour répondre à ces directives, le projet RISE<sup>4</sup> porté par CFM International, la coentreprise entre la société américaine General Electric et la société française Safran Aircraft Engines, vise à proposer un moteur avec soufflantes non carénées avec pour objectif la diminution de la consommation de carburant et des émissions de dioxyde de carbone de plus de 20 %, et une compatibilité avec les énergies alternatives (carburants durables, hydrogène, électricité).

Cette quête d'amélioration du rendement des turboréacteurs, parfois sur des architectures nouvelles, nécessite de chercher des solutions technologiques nouvelles pour répondre à des problématiques complexes ayant trait à des domaines de l'ingénierie tels que la mécanique, la thermique ou encore l'aérodynamique. Dans le cadre de ce mémoire de thèse, ce sont les problématiques liées au contact avec frottement au sein des aubes de turbine basse pression qui font l'objet d'une étude particulière, c'est pourquoi il nécessite d'introduire les spécificités de ces pièces dans la section suivante. En effet, il est envisagé à l'avenir que la turbine basse pression tourne à une vitesse rotation plus élevée afin d'améliorer le rendement des turboréacteurs, ce qui aura pour effet d'augmenter les contraintes à supporter par les aubes ainsi que leur comportement dynamique non linéaire.

### 1.3 Aubes de turbine basse pression

La turbine basse pression est située en aval des chambres de combustion, tout comme la turbine haute pression, mais elle est soumise à des températures et des vitesses de rotation moins élevées que cette dernière. Cette différence de conditions thermique et mécanique se traduit par des aubes plus fines et élancées que celles de la turbine haute pression, ces dernières ont la particularité d'être plus courtes et plus massives, mais aussi d'être parsemées de perçages et de circuits internes afin de les refroidir par une circulation d'air frais sous pression, prélevé dans le compresseur haute pression. Comme on peut le voir sur la figure I.4, les aubes de turbine basse pression sont fixées sur un disque par une attache à leur pied afin de former une couronne d'aubes, et ont comme particularité d'avoir un talon en tête d'aube qui a plusieurs fonctions et qui peut avoir différentes géométries.

2. *Advisory Council for Aviation Research and innovation in Europe.*

3. appelés *low-emissions/low-carbon fuels* en anglais.

4. *Revolutionary Innovation for Sustainable Engines.*



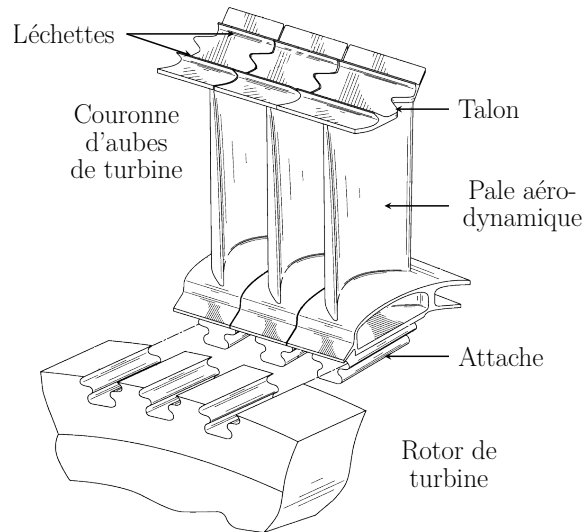


FIGURE I.4 – Illustration de l'assemblage d'aubes de turbine basse pression sur un disque © Safran Aircraft Engines.

### 1.3.1 Spécificités et géométrie

Leur dimension et leur géométrie varient entre les différents étages de la turbine basse pression, mais elles ont pour spécificité d'avoir un talon en tête d'aube qui a deux fonctions. La première est de maximiser la performance de l'étage, d'une part en assurant la continuité de la veine aérodynamique pour améliorer l'écoulement aérodynamique, et d'autre part en intégrant une étanchéité hors veine par des léchettes qui viennent former un joint labyrinthe avec le carter du moteur. La seconde est mécanique et permet en premier lieu de limiter les déplacements tangentiels et les rotations suivant l'axe de l'aube, ainsi qu'un raidissement de celle-ci, lorsque les talons des aubes sont en contact. Cela permet également de limiter l'amplitude des vibrations lors du fonctionnement moteur par le biais d'un amortissement par frottement lié au contact entre les talons. Ces fonctions mécaniques que possède le talon sont donc primordiales et nécessitent d'être maîtrisées tant en statique lors du montage des aubes sur le rotor, qu'en dynamique lors du fonctionnement du moteur. La technologie de prétorsion des aubes, mise en œuvre dès la phase de conception des aubes, permet de jouer ce rôle, et est décrite dans la partie suivante.

L'étude de la géométrie de cette partie sensible qu'est le talon a fait l'objet de quelques publications, où l'influence de plusieurs paramètres tels que le jeu inter-talon et l'orientation de la surface de contact est étudiée [9]. La forme en « Z » ou simplement en pente du talon a également fait l'objet d'une étude [143]. Un algorithme génétique a même été employé pour améliorer la forme de nageoires par exemple sur des aubes de turbine basse pression [70].

### 1.3.2 Technologies intrinsèques

Les aubes de turbine basse pression mettent en jeu une technologie dite de prétorsion qui, lors du montage des aubes, vient appliquer une précharge statique sur les aubes puisque les talons sont alors en contact, leur interpénétration étant bien évidemment physiquement impossible, ce qui est illustré par la figure I.5 ci-dessous. La découpe du talon en forme de « Z » ainsi que leur angle impliquent que les talons viennent s'emboîter les uns avec les autres, produisant un dévissage des pales lors du montage. Ce procédé technologique se traduit en anglais par *interlocking shrouds*. Cette précharge statique est indépendante de la précharge

centrifuge qui s'ajoute lorsque le moteur est en rotation et qui produit aussi un dévissage des aubes. Ces précharges ont pour effet de rigidifier la structure qu'est la roue aubagée composée de ces aubes à talon. L'angle de prétorsion est donc un paramètre essentiel et déterminant pour les sollicitations statique et dynamique des aubes, puisqu'il influe directement sur le niveau d'effort normal appliqué sur les talons, et donc sur le comportement du contact.

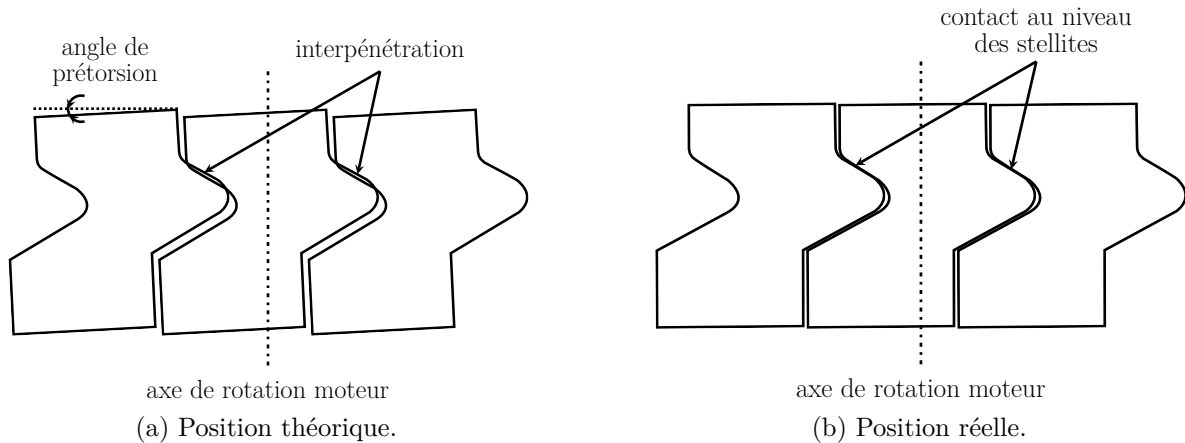


FIGURE I.5 – Schéma de principe de la technologie de prétorsion au montage des aubes de turbine basse pression.

Par ailleurs, ces aubes sont généralement fabriquées en alliage de nickel et de chrome (appelé superalliage ou alliage à haute performance, par exemple René 77, René 125, DS 200), connu sous la marque Inconel®, notamment pour leur bonne tenue mécanique à haute température. Cela dit, on peut aussi trouver sur le dernier étage (le moins chaud) de l'aluminure de titane TiAl, plus léger, qui est un composé intermétallique de titane et d'aluminium. Il est particulièrement apprécié en aéronautique en raison de son module de Young élevé, sa grande résistance mécanique, et de sa bonne tenue à l'oxydation et au feu [35, 178]. De plus, la surface du talon destinée à être en contact est dénommée « stellite » en référence à l'alliage métallique composé principalement de cobalt et de chrome, utilisé pour ses propriétés mécaniques, et fixé sur le talon par un arc électrique gainé de gaz ou par un faisceau laser, augmentant ainsi la dureté et la résistance à l'usure de cette zone [33].

## 2 Description théorique d'une structure en rotation

Le dimensionnement de ces structures doit tenir compte de la rotation qui leur est imposée, pour garantir la tenue à la précharge centrifuge provoquée (qui induit une évolution de la rigidité apparente et donc des fréquences propres), et de leur géométrie intrinsèque faisant apparaître une symétrie cyclique. Vu les sollicitations vibratoires qu'elles subissent une formulation de milieu continu élastique en dynamique est nécessaire. Cette section est donc dédiée à l'introduction de notions théoriques nécessaires à la définition rigoureuse des équations régissant le comportement dynamique d'un solide continu tel qu'une structure en rotation. Le paradigme de milieu continu s'oppose à la représentation discrète, en considérant que l'on observe à une échelle macroscopique, qui ne permet pas de discerner l'infinité de particules dont est composée la matière de façon continue dans l'espace physique. La première sous-section décrit la cinématique d'une particule en milieu continu selon l'approche proposée par [56], et établit les équations du mouvement grâce à une formulation énergétique. Enfin, la deuxième sous-section aborde la propriété de symétrie cyclique et la notion de désaccordage.

## 2.1 Cinématique d'une particule en milieu continu

On considère un corps matériel continu  $\mathcal{M}$ , solide élastique donc par définition déformable, de volume  $\mathcal{V}$  et de frontière  $\partial\mathcal{V}$ , occupant à chaque instant  $t$  un domaine  $\Omega_t$  ouvert de frontière régulière  $\partial\Omega_t$  et connexe de l'espace physique. La configuration initiale  $\Omega_0$  à l'instant  $t = 0$  est observée par rapport au repère fixe orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O; \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathcal{P}$  une particule de  $\mathcal{M}$  quelconque mais fixée, élément matériel de masse  $m$  occupant le volume élémentaire  $v$ , et repérée par le vecteur position  $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^\top$  (voir illustration en figure I.6a). Dans la configuration initiale, la position de la particule est situé au point  $\mathcal{P}_0$  dont le vecteur position est

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

où  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  représente le vecteur déplacement à l'instant  $t = 0$ .

On considère maintenant la configuration actuelle déformée à  $t > 0$  (voir illustration en figure I.6b), la particule s'est déplacée sous l'action d'un mouvement ainsi que d'une déformation, et se situe désormais au point  $\mathcal{P}_t$  de vecteur position  $\mathbf{y} = [y_x, y_y, y_z]^\top$ , repéré par le repère orthonormé  $\mathcal{R}_t$  lié à  $\Omega_t$ . Le vecteur position de  $\mathcal{P}_t$  s'écrit alors

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  représente le vecteur déplacement à l'instant  $t > 0$ .

Ce nouveau repère  $\mathcal{R}_t$  a pour origine le point  $O_t$ , qui se traduit par une translation  $\mathbf{s}(t) = [s_x, s_y, s_z]^\top$  à l'origine  $O$  du repère  $\mathcal{R}$ , combiné à une rotation de vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\top$  autour d'un axe de direction quelconque passant par  $O_t$ . En écrivant le vecteur position  $\mathbf{y}$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{R}(t)$  représente la matrice de changement de repère, qui permet de projeter le vecteur  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  issu du repère mobile  $\mathcal{R}_t$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Cette matrice de rotation est par définition orthogonale et vérifie donc les propriétés suivantes  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^{-1}$ ,  $\mathbf{I}$  étant la matrice identité d'ordre 3.

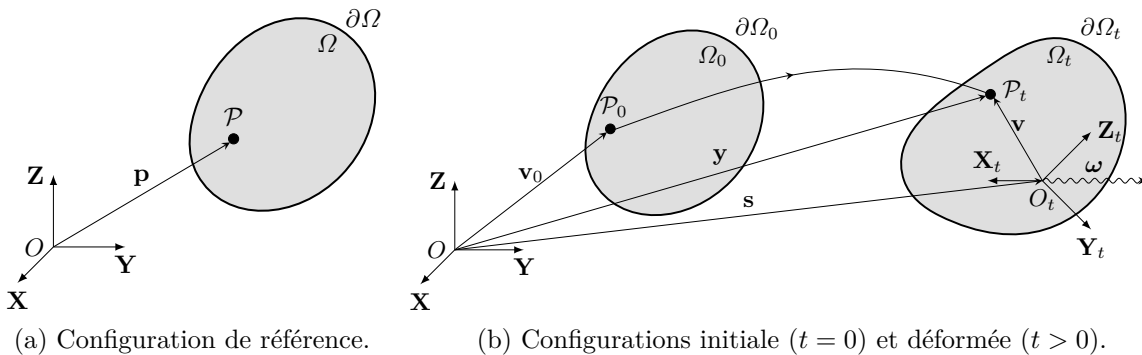


FIGURE I.6 – Configurations d'un corps matériel continu.

Dans l'optique de pouvoir écrire analytiquement le comportement dynamique du corps déformable, il faut écrire les dérivées par rapport au temps du vecteur position de la particule

$\mathcal{P}_t$ . En dérivant l'équation (I.3), on obtient :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t) (\mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{I.4})$$

On peut remarquer que l'équation (I.4) fait intervenir la dérivée de la matrice de changement de repère, que l'on peut exprimer à l'aide des composantes du vecteur de vitesse angulaire (les étapes de calcul pour y arriver ne sont pas détaillées ici), ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}(t) \text{ avec } \boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_1 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.5})$$

### 2.1.1 Formulation énergétique de l'équation du mouvement

Grâce aux expressions décrivant la dynamique d'une particule établies dans la sous-section précédente, la formulation des équations du mouvement peut débuter. Pour ce faire, la méthodologie générale consiste à faire un bilan des différents efforts qui agissent sur la particule au sein du corps matériel, et à écrire les énergies qui en découlent. L'équation du mouvement obtenue a la forme d'un problème dont le déplacement est la solution à déterminer.

La méthode classique est le principe des travaux virtuels : c'est une approche qui fait intervenir un champ de déplacement virtuel (là où le principe des puissances virtuelles utilise un champ de vitesse virtuel) et qui permet d'écrire le travail des efforts intérieurs et extérieurs exercés sur un milieu continu comme égaux au travail virtuel de l'accélération subi par celui-ci [137, 139].

Si l'on considère à nouveau le corps matériel  $\mathcal{M}$  décrit dans la sous-section précédente à la configuration  $\Omega_t$ , composé d'un certain nombre de particules élémentaires de masse  $m_k$ , dont les vecteurs déplacements sont  $\mathbf{y}_k$ , soumises à un champ de force  $\mathbf{f}_k$ , ainsi qu'à l'action des particules les unes par rapport aux autres, leur équilibre s'écrit :

$$m_k \ddot{\mathbf{y}}_k - \mathbf{f}_k - \sum_{\substack{j \in \Omega_t \\ j \neq k}} \mathbf{f}_{jk} = 0 \quad \forall k \in \Omega_t. \quad (\text{I.6})$$

La loi des actions mutuelles, ou principe d'action réaction (troisième loi de Newton), stipule que :

$$\mathbf{f}_{jk} = -\mathbf{f}_{kj} \quad \forall k \neq j \in \Omega_t. \quad (\text{I.7})$$

On fait le choix de négliger ces forces dans un premier temps.

Un champ de déplacement virtuel  $\delta \mathbf{y}_k$  cinématiquement admissible est défini arbitrairement entre deux instants temporels tel que :

$$\delta \mathbf{y}_k(t_1) = \delta \mathbf{y}_k(t_2) = 0 \quad \forall k \in \Omega_t, t_1 < t < t_2. \quad (\text{I.8})$$

Le principe des travaux virtuels des particules élémentaires du système décrit donne alors :

$$\sum_{k \in \Omega_t} (m_k \ddot{\mathbf{y}}_k - \mathbf{f}_k) \delta \mathbf{y}_k = 0. \quad (\text{I.9})$$

On retrouve donc dans l'équation précédente le travail des forces égales au travail de l'accélération subit par les particules, pour un déplacement virtuel donné.

Le principe de moindre action, ou principe de Hamilton, repose sur l'affirmation que la solution d'un problème mécanique (autrement dit son déplacement) réalise le minimum d'une quantité d'action<sup>5</sup> [16]. Selon [58], cela revient en effet à une forme intégrée dans le temps du principe des travaux virtuels.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k \in \Omega_t} (m_k \ddot{\mathbf{y}}_k - \mathbf{f}_k) \delta \mathbf{y}_k \right] dt = 0 \quad \forall k \in \Omega_t. \quad (\text{I.10})$$

On admet que les forces dérivent d'un potentiel  $\mathcal{U}$ , leur travail virtuel s'écrit alors :

$$\sum_{k \in \Omega_t} \mathbf{f}_k \delta \mathbf{y}_k = -\delta \mathcal{U}, \quad (\text{I.11})$$

tandis que celui de l'énergie cinétique s'écrit comme :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \Omega_t} m_k \dot{\mathbf{y}}_k \dot{\mathbf{y}}_k, \quad (\text{I.12})$$

ce qui donne injecté dans l'équation (I.10) :

$$\left[ - \sum_{k \in \Omega_t} m_k \dot{\mathbf{y}}_k \delta \dot{\mathbf{y}}_k \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt = 0 \quad (\text{I.13})$$

où le premier membre de l'équation est nul d'après les conditions limites du déplacement virtuel définies dans l'équation (I.8).

On retrouve donc l'énoncé du principe de Hamilton pour un système conservatif :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (\text{I.14})$$

où  $\mathcal{L}$  désigne le lagrangien du système étudié, qui correspond simplement la différence entre l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  et l'énergie potentielle des forces extérieures  $\mathcal{U}$ .

Dans le cas de notre corps matériel, ce dernier est également soumis des forces non conservatives, l'équation précédente devient

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{E} - \mathcal{F}) dt = 0 \quad (\text{I.15})$$

où  $\mathcal{E}$  correspond au travail des forces extérieures et  $\mathcal{F}$  au travail des forces non conservatives.

On va pour la suite détailler l'expression de chacun des travaux qui constituent l'équation (I.15).

**Énergie cinétique** Pour écrire l'énergie cinétique du corps matériel  $\mathcal{M}$  dans la configuration  $\Omega_t$ , on utilise le déplacement  $\mathbf{y}$  de la particule élémentaire  $\mathcal{P}_t$  définie dans la sous-section précédente. On s'affranchit désormais de l'indication de la dépendance en temps de ce déplacement

---

5. Attribué à Maupertuis, à tort selon Couturat qui estime qu'il est dû à Leibniz [36].

pour alléger les expressions, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^{\top} \dot{\mathbf{y}} d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^{\top} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^{\top} \boldsymbol{\Omega} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^{\top} \boldsymbol{\Omega}^{\top} \boldsymbol{\Omega} \dot{\mathbf{u}} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^{\top} \boldsymbol{\Omega}^{\top} (\mathbf{R}^{\top} \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^{\top} (\mathbf{R}^{\top} \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^{\top} \dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^{\top} \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{\Omega}^{\top} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega.
\end{aligned} \tag{I.16}$$

**Énergie potentielle** L'énergie potentielle de la déformation du corps matériel  $\mathcal{M}$  s'écrit :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \tag{I.17}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  désigne le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange. L'expression complète de ce dernier tenseur s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\top} + (\nabla \mathbf{u})^{\top} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] \tag{I.18}$$

où  $\nabla$  désigne l'opérateur de dérivation ou gradient dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial u_z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u_z} & \frac{\partial}{\partial u_y} \\ \frac{\partial}{\partial u_z} & 0 & \frac{\partial}{\partial u_x} \\ \frac{\partial}{\partial u_y} & \frac{\partial}{\partial u_x} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.19}$$

Le corps matériel  $\mathcal{M}$  étant élastique linéaire, la loi de comportement de Hooke permet de relier le tenseur des contraintes au tenseur des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{I.20}$$

avec  $\mathbf{A}$  le tenseur d'élasticité d'ordre 4. En considérant que le matériau constituant le corps matériel est isotrope et en tirant partie de la symétrie du tenseur des déformations, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \tag{I.21}$$

où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le symbole de Kronecker,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{I.22}$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

En utilisant la notation de Voigt, seuls les termes  $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}]^{\top}$  et  $[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}]^{\top}$  des tenseurs des contraintes et des déformations sont non nuls, le

tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{I.23})$$

L'énergie potentielle de déformation s'écrit alors, en appliquant l'hypothèse des petites déformations qui ne conserve que la partie linéarisée du tenseur des déformations :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^{\top} \mathbf{A} (\nabla \mathbf{u}) \, d\Omega. \quad (\text{I.24})$$

**Travail des forces extérieures et des forces non conservatives** Les forces extérieures appliquées sur le corps matériel  $\mathcal{M}$  se divisent entre les forces volumiques  $\mathbf{f}$  et surfaciques  $\mathbf{t}$  :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^{\top} \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^{\top} \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (\text{I.25})$$

où  $\Gamma_t$  est la portion de la frontière  $\Gamma$  du corps matériel  $\mathcal{M}$  où s'exercent les forces surfaciques.

Les forces non conservatives proviennent de l'amortissement visqueux, leur travail s'écrit :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{\top} \mathbf{A} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (\text{I.26})$$

avec  $\eta$  un coefficient d'amortissement.

### 2.1.2 Discrétisation de la formulation continue

Maintenant que l'ensemble des énergies ont été exprimées, il est nécessaire de passer de la formulation continue à la formulation discrète, dans l'optique d'une résolution classique d'un système d'équations différentielles du second ordre régissant le comportement dynamique de cette structure.

Le déplacement est désormais approximé grâce à la méthode de Rayleigh-Ritz qui permet de l'écrire comme une combinaison de fonctions séparant l'espace et le temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \quad (\text{I.27})$$

où  $\mathbf{\Phi}$  représente la matrice des fonctions de forme cinématiquement admissibles et  $\mathbf{q}$  le vecteur des coordonnées généralisées. Le principe de Hamilton (I.15) peut alors s'écrire à l'aide des équations de Lagrange selon les coordonnées généralisées de la structure :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (\text{I.28})$$

En substituant le déplacement dans les formes continues des énergies par sa forme discrétisée (I.27), on parvient à obtenir l'équation matricielle décrivant la dynamique de la structure dans le repère mobile  $\mathcal{R}_t$  grâce aux équations de Lagrange (I.28) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{\text{ex}} + \mathbf{f}_{\Omega} \quad (\text{I.29})$$

avec

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \Phi^{\top} \Phi d\Omega ; \quad (\text{I.30})$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \eta \Phi^{\top} \Phi d\Omega ; \quad (\text{I.31})$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_{\Omega} \rho \Phi^{\top} \Omega \Phi d\Omega ; \quad (\text{I.32})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi)^{\top} \mathbf{E} (\nabla \Phi) d\Omega ; \quad (\text{I.33})$$

$$\mathbf{N} = - \int_{\Omega} \rho \Phi^{\top} \Omega^{\top} \Omega \Phi d\Omega ; \quad (\text{I.34})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \Phi^{\top} \dot{\Omega} \Phi d\Omega ; \quad (\text{I.35})$$

$$\mathbf{f}_{\text{ex}} = \int_{\Omega} \Phi^{\top} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^{\top} \mathbf{t} d\Gamma ; \quad (\text{I.36})$$

$$\mathbf{f}_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho \Phi^{\top} \left( \mathbf{R}^{\top} \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\Omega} \mathbf{x} + \Omega^2 \mathbf{x} \right) d\Omega. \quad (\text{I.37})$$

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{N}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement, de raideur et d'assouplissement centrifuge, elles sont symétriques. La matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  est généralement définie comme la combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ . Les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P}$  sont les matrices de Coriolis et d'accélération angulaire, et sont antisymétriques. Le vecteur  $\mathbf{f}_{\text{ex}}$  regroupe les forces surfacique et volumique exercées sur le corps matériel  $\mathcal{M}$ . Le vecteur  $\mathbf{f}_{\Omega}$  représente l'excitation due au mouvement du système de coordonnées. Pour la suite, l'équation du mouvement ne fera plus intervenir les termes  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{f}_{\Omega}$  puisque  $\Omega$  est considérée constante, et que les origines respectives du repère fixe  $\mathcal{R}$  et du repère mobile  $\mathcal{R}_t$  sont confondues.

### 2.1.3 Équilibre sous précharge centrifuge

La sous-section précédente a permis d'écrire l'équation du mouvement d'une structure soumise à une vitesse de rotation  $\Omega$  au sein du repère mobile  $\mathcal{R}_t$  qui lui est rattaché. En considérant désormais que cette vitesse de rotation est constante, générant par ailleurs une précharge centrifuge sur la structure, cette dernière est alors dans une position d'équilibre. Par ailleurs, les forces centrifuges génèrent une déformation de la structure, impliquant une modification de la géométrie et des propriétés de ce corps matériel  $\mathcal{M}$ . L'équation du mouvement (I.29) devient alors :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{ex}} + \mathbf{f}_{\Omega} \quad (\text{I.38})$$

où  $\mathbf{f}_{\text{nl}}$  désigne les forces non linéaires. Dans le cadre de cette thèse, celles-ci proviennent du contact avec frottement entre les talons des aubes, mais on pourrait aussi imaginer prendre en compte des effets non linéaires géométriques [46, 93].

La solution  $\mathbf{q}$  de l'équation (I.38) peut se décomposer en une composante statique et une composante dynamique telle que :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{\Omega} + \mathbf{p}(t) \quad (\text{I.39})$$

où  $\mathbf{q}_{\Omega}$  est la position d'équilibre en rotation mentionnée précédemment, solution du problème



statique non linéaire suivant :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{N}) \mathbf{q}_\Omega + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_\Omega) = \mathbf{f}_\Omega. \quad (\text{I.40})$$

En substituant l'équation I.39 au sein de l'équation I.38, on a : déformation de la structure, impliquant une modification de la géométrie et des propriétés de ce corps matériel  $\mathcal{M}$ . L'équation du mouvement (I.29) devient alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) (\mathbf{q}_\Omega + \mathbf{p}) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_\Omega + \mathbf{p}) = \mathbf{f}_{ex} + \mathbf{f}_\Omega. \quad (\text{I.41})$$

Un développement de Taylor à l'ordre un seulement des forces non-linéaires autour de la position d'équilibre statique donne :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_\Omega + \mathbf{p}) = \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_\Omega) + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}_\Omega}(\mathbf{q}_\Omega) \mathbf{p}. \quad (\text{I.42})$$

En introduisant maintenant l'équation I.42 dans l'équation I.38 tout en rappelant la relation I.40, l'équation du mouvement linéarisée autour de la position d'équilibre statique s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}_\Omega \mathbf{p}(t) = \mathbf{f}_{ex} \quad (\text{I.43})$$

où  $\mathbf{K}_\Omega$  désigne la matrice de raideur tangente évaluée au point  $\mathbf{q}$  définie :

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{K} + \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}_\Omega}(\mathbf{q}_\Omega). \quad (\text{I.44})$$

Le calcul de la solution statique de l'équation I.40 peut s'effectuer par exemple grâce à un solveur non-linéaire de type Newton-Raphson, couplé si besoin à une méthode de continuation pour traiter d'éventuelles fortes variations des contributions non-linéaires.

## 2.2 Symétrie cyclique

### 2.2.1 Définition

L'étude de pièces composant des structures telles qu'un turboréacteur, par exemple une roue aubagée au sein d'une turbine basse pression, peut-être menée judicieusement en faisant appel à des propriétés de symétrie. En effet, ces structures sont dites à symétrie cyclique, c'est-à-dire que leur géométrie est le résultat de la répétition circulaire d'un motif autour d'un axe. Dans le cas des turbomachines, ce motif est un secteur (figure I.7) qui peut-être composé d'une ou plusieurs aubes, et l'axe est celui de rotation de la roue aubagée. Cette modélisation permet de reproduire une structure ainsi parfaitement accordée.

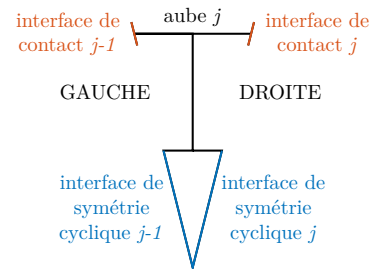


FIGURE I.7 – Schéma d'une aube avec talon définie comme secteur de référence en symétrie cyclique.

Cette propriété de symétrie cyclique a été employée au sein de la méthode du même nom depuis la fin des années 1970 [164] : l'étude de la structure complète peut alors se rapporter à l'étude d'un seul secteur de référence, en définissant des conditions aux limites au niveau des frontières cycliques du secteur. De ce fait, la propagation d'une onde au sein d'une roue aubagée est correctement retranscrite sur le secteur grâce à ces conditions limites. Ces frontières peuvent être linéaires (encastrement par exemple) ou non linéaires (interface de contact avec frottement,

impact, etc.). Ainsi, le déplacement  $\mathbf{u}_j$  d'un secteur  $j$  au sein d'une structure comportant  $N$  secteurs vérifie :

$$\mathbf{u}_{j+N} = \mathbf{u}_j \quad \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (\text{I.45})$$

En s'inspirant du déroulé de l'approche proposée dans [134], l'équation du mouvement du secteur  $j$  dans une configuration sans phénomène non linéaire ni rotation s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}\mathbf{u}_j + \mathbf{f}_j^c = \mathbf{f}_{\text{ex},j} \quad (\text{I.46})$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse, amortissement et raideur du secteur  $j$  qui constitue le secteur de référence,  $\mathbf{f}_j^c$  sont les forces  $\mathbf{f}_{j-1}^c$  et  $\mathbf{f}_{j+1}^c$  exercées par les secteurs adjacents et  $\mathbf{f}_{\text{ex},j}$  sont les forces extérieures.

D'après [168], il est donc possible d'écrire le champ de déplacement  $\mathbf{u}_j$  du  $j$ -ème secteur :

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}_k \exp(ijk\alpha) \quad (\text{I.47})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  représente la composante cyclique d'harmonique  $k$  du secteur de référence,  $\alpha$  son ouverture angulaire égale à  $2\pi/N$ . La relation inverse s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp(-ijk\alpha) \mathbf{u}_j. \quad (\text{I.48})$$

Par analogie, la symétrie cyclique correspond finalement à un déphasage entre les frontières cycliques du secteur de référence par rapport aux autres. On peut maintenant écrire le champ de déplacement de la structure complète grâce aux termes cycliques de l'équation (I.47) :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.49})$$

où  $\otimes$  est le produit de Kronecker,  $\mathbf{I}_{N_d}$  la matrice identité de taille  $N_d$  correspondant au nombre de degrés de liberté dans un secteur, et  $\mathbf{F}$  la matrice de la transformée de Fourier discrète spatiale dont l'expression est :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \exp(i\alpha) & \cdots & \exp(i(N-1)\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \exp(i(N-1)\alpha) & \cdots & \exp(i(N-1)^2\alpha) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.50})$$

En utilisant l'équation (I.50) pour projeter l'équation (I.46) depuis la base physique vers la base cyclique, et en s'appuyant sur les propriétés d'orthogonalité de la fonction exponentielle complexe, pour l'indice harmonique  $k$ , on obtient :

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}_k + (\mathbf{F}_k^* \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \mathbf{f}^c = (\mathbf{F}_k^* \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \mathbf{f}_{\text{ex}} \quad (\text{I.51})$$

où  $\mathbf{F}_k^*$  représente la matrice adjointe ou transconjuguée de la matrice  $\mathbf{F}$  pour l'harmonique  $k$  uniquement. Afin de pouvoir subdiviser ce problème en plusieurs sous-problèmes distincts, il faut tirer partie de la particularité de cette structure qu'est la symétrie cyclique, en se basant sur la notion de continuité entre les secteurs. En séparant au sein du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  les degrés de liberté intérieurs  $\mathbf{u}^i$  des degrés de liberté des frontières de gauche  $\mathbf{u}^g$  et de droite

$\mathbf{u}^d$ , cette condition de continuité entre les secteurs s'écrit, pour le secteur  $j$ , par la relation suivante :

$$\mathbf{u}_j^g = \mathbf{u}_j^d. \quad (\text{I.52})$$

Transposée dans le domaine spectral, l'équation précédente devient [91] :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^g = e^{ik\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_k^d \quad \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (\text{I.53})$$

De la même façon, on peut exprimer la relation liant les efforts non linéaires au niveau des frontières cycliques des talons en appliquant simplement le principe d'action-réaction :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}^g = -e^{i\beta} \mathbf{f}_{\text{nl}}^d. \quad (\text{I.54})$$

Grâce à la relation précédente, une matrice rectangulaire notée  $\tilde{\mathbf{B}}_k$  peut être introduite pour faire intervenir le déplacement des degrés de liberté intérieurs dans la condition de continuité entre les secteurs :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^g \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N_f} \exp(ik\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{N_i} \\ \mathbf{I}_{N_f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^i \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_k \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^i \end{pmatrix} \quad (\text{I.55})$$

où  $N_f$  et  $N_i$  désignent respectivement le nombre de degrés de liberté internes et le nombre de degrés de liberté d'une frontière (indifféremment de droite ou de gauche). En injectant l'équation (I.55) dans l'équation (I.51), pour l'indice harmonique  $k$ , il vient finalement :

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k^d \\ \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k^i \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{C}}_k \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k^d \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k^i \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}_k \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^i \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_k^* (\mathbf{F}_k^* \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \mathbf{f}_{\text{ex}} \quad (\text{I.56})$$

où  $\tilde{\mathbf{M}}_k = \tilde{\mathbf{B}}_k^* \mathbf{M} \tilde{\mathbf{B}}_k$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_k = \tilde{\mathbf{B}}_k^* \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}_k$  et  $\tilde{\mathbf{K}}_k = \tilde{\mathbf{B}}_k^* \mathbf{K} \tilde{\mathbf{B}}_k$ . Les forces exercées par les secteurs adjacents n'apparaissent pas dans l'équation puisque le terme  $\tilde{\mathbf{B}}_k^* (\mathbf{F}_k^* \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \mathbf{f}^c$  est nul par application du principe d'action-réaction de Newton.

La symétrie cyclique d'une structure permet ainsi de la modéliser analytiquement de sorte qu'il suffit d'étudier un seul secteur de référence, sur lequel sont basés un ensemble de sous-problèmes indépendants selon un indice harmonique  $k$ , pour représenter le comportement de la structure complète.

L'analyse modale d'une structure à symétrie cyclique, compte-tenu de la méthodologie déroulée ci-avant pour traiter une telle structure, s'obtient en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé pour chaque indice harmonique  $k$  :

$$\left( \tilde{\mathbf{K}}_k - \omega_k^2 \tilde{\mathbf{M}}_k \right) \tilde{\Phi}_k = \mathbf{0}. \quad (\text{I.57})$$

Parmi la totalité des modes propres  $\tilde{\Phi}$  obtenus, ceux-ci peuvent se distinguer selon deux natures différentes : pour un indice harmonique  $k = \{0, N/2\} \forall N \in 2\mathbb{N}$ , les solutions du problème aux valeurs propres généralisé (I.57) sont qualifiées de non dégénérées, en référence aux déformées modales qui leurs sont associées où les secteurs vibrent soit en phase, soit en opposition de phase deux à deux. Pour tous les autres indices harmoniques, les solutions obtenues sont dégénérées, ce qui signifie qu'il y a pour chaque harmonique  $k$  un sous-espace propre associé comportant deux vecteurs propres orthogonaux. De ce fait, les déformées correspondantes ont la forme de modes tournants avec une onde dont le sens de propagation est direct ou rétrograde. La

combinaison de ces modes propres doubles donne une déformée qui correspond à une onde stationnaire.

### 2.2.2 Notion de désaccordage

Comme précisé en introduction, l'étude du désaccordage n'est pas l'objet de cette thèse, il est cependant intéressant de s'y attarder dans une démarche d'inscription plus globale des travaux présentés ici. Le désaccordage d'une structure cyclique est un phénomène inaliénable de celle-ci, puisqu'il se définit comme la variation des propriétés mécaniques des secteurs qui la composent : c'est la conséquence d'une variation de la géométrie, des propriétés matériaux ou des conditions limites de la structure. Elle peut avoir deux origines distinctes : la première est involontaire (on parle alors de *mistuning* en anglais), elle est liée à la dispersion de fabrication et à l'usure naturelle des pièces, la seconde est volontaire (on parle cette fois de *detuning*) et représente un choix du constructeur afin de maîtriser le facteur d'amplification, conséquence du *mistuning*, mais aussi le phénomène de flottement par exemple. Cela se traduit en pratique par une modification de la géométrie de certains secteurs, d'un ajout ou retrait ponctuel de masses, le changement local de propriétés des matériaux, et numériquement par une matrice de raideur suivant une distribution aléatoire spécifique [160].

## 3 Traitement du comportement vibratoire

### 3.1 Sources des phénomènes vibratoires

La résolution de l'équation (I.29) nécessite de connaître les chargements appliqués aux structures. Il existe plusieurs sources de phénomènes vibratoires qui peuvent affecter les aubes de turbine basse pression au sein d'un turboréacteur en fonctionnement, elles peuvent être d'origine mécanique ou aérodynamique.

#### 3.1.1 Origine mécanique

Le premier type provient en majorité de disparités de fabrication ou de fonctionnement du moteur, ces dernières peuvent avoir des origines diverses parmi lesquelles le phénomène de balourd, ou bien les frottement localisé entre les aubes et le carter par exemple sont les plus courants. Le balourd désigne une masse non parfaitement répartie sur un volume présentant une symétrie de révolution tel que celui d'un arbre ou d'une roue aubagée, qui entraîne alors un déséquilibre puisque l'axe d'inertie n'est plus confondu avec l'axe de rotation [106]. Son origine est variée : mauvais équilibrage lors de l'assemblage des pièces du turboréacteur, dispersions géométriques ou matériaux lors du processus de fabrication, mais aussi dans un contexte plus grave lors de la perte d'une aube ou bien de l'ingestion de corps étranger (oiseau, glace, sable, etc.). Le frottement entre la tête d'aube et le carter est une conséquence de la recherche par les motoristes d'un meilleur rendement des turboréacteurs. En effet, pour réduire les pertes fluides de l'écoulement du flux d'air primaire, les jeux entre les aubes et les carter sont de plus en plus étroits, augmentant de ce fait le risque d'une interaction entre le rotor et le stator, qui pourrait survenir à cause d'une mise en résonance des aubes, d'une déformation thermique ou centrifuge, ou encore d'un balourd par exemple. L'excitation générée par ces deux phénomènes est ainsi périodique et proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur, les premiers harmoniques étant les plus importants. Sachant qu'il y a deux vitesses de rotation, celle de l'arbre basse pression et celle de l'arbre haute pression, on voit donc des réponses associées à ces deux grandeurs, et des combinaisons.

### 3.1.2 Origine aérodynamique

Le second type représente les excitations aérodynamiques et en particulier celles dues aux sillages d'obstacles. Lorsque le moteur est en rotation, les aubes de la turbine basse pression rencontrent, de façon périodique au cours de leur mouvement, des pièces telles que des pales, injecteurs, bras de carter, sondes, etc., aussi bien situées en amont qu'en aval. Ces pièces, qui représentent un obstacle à l'écoulement du flux d'air, provoquent alors une variation brutale de celui-ci, et donc une excitation aérodynamique instationnaire dont la fréquence est celle de la vitesse de rotation multipliée par le nombre d'obstacles. C'est l'un des principaux mécanismes générant le bruit de fonctionnement du turboréacteur. La figure I.8 permet de visualiser la non-uniformité de la vitesse d'écoulement du flux d'air liée au sillage des aubes.

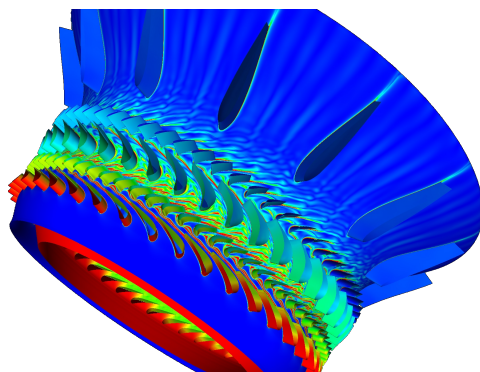


FIGURE I.8 – Simulation du champs de pression statique au sein des étages de compresseur d'un turboréacteur © NASA Glenn Research Center.

## 3.2 Outils pour le dimensionnement

Les aubes de turbine basse pression sont soumises à de fortes sollicitations mécanique vibratoire, aérodynamique et thermique, ce qui peut entraîner une fatigue des ces pièces après un nombre de cycles élevé (appelé *high cycle fatigue* en anglais et abrégé HCF). Les propriétés des matériaux font également partie du défi que représente la conception d'une structure telle qu'une turbine basse pression. Des outils existent pour analyser la tenue mécanique des aubes vis-à-vis des excitations dynamiques qu'elles subissent, afin d'étudier leur résistance à la fatigue. En effet, le motoriste doit s'assurer de la bonne tenue de ces pièces, notamment par l'absence de fissuration, qui pourrait se traduire à termes par une rupture et donc une perte d'aube, ce qui induirait une défaillance du moteur. La difficulté sous-jacente repose sur le fait que cette défaillance se produit à un niveau de contraintes très inférieur à la limite de résistance du matériau, et ce à cause du caractère cyclique des sollicitations de la pièce concernée. Des outils de calcul empiriques tels que la courbe de Wöhler et les diagrammes de Haigh et de Goodman permettent d'estimer la durée de vie de telles pièces.

### 3.2.1 Courbe de Wöhler

Cette courbe est représentée sur un diagramme d'endurance, et elle est aussi appelée courbe S-N (pour *Stress-Number of cycles* en anglais) puisqu'elle représente l'évolution de la contrainte alternée  $\sigma_a$  en fonction du nombre de cycles  $N$  que subi une pièce. Elle divisée en trois domaines visibles sur la figure I.9 :

- domaine de fatigue oligo-cyclique, où la rupture de la pièce intervient pour un nombre de cycles très faible car la contrainte exercée est forte ;

- domaine d'endurance limitée, où la rupture peut-être atteinte pour un nombre limité de cycles qui dépend proportionnellement de la contrainte appliquée sur la pièce ;
- domaine d'endurance illimitée, où la rupture se produit pour un nombre de cycle généralement au-delà de  $1 \times 10^6$  à  $1 \times 10^7$  puisque la contrainte exercée est faible.

Une asymptote à la courbe de Wöhler est tracée et représente la limite d'endurance ou de fatigue  $\sigma_D$ , c'est-à-dire une contrainte alternée en dessous de laquelle il n'y aura en théorie jamais de rupture, et dont il faut dans l'idéal se rapprocher. En présence d'un comportement dynamique non linéaire, la contrainte alternée selon laquelle la pièce a été dimensionnée risque de ne plus être valable, ce qui induirait alors un changement de domaine d'endurance et donc une diminution du nombre de cycles possibles avant la rupture.

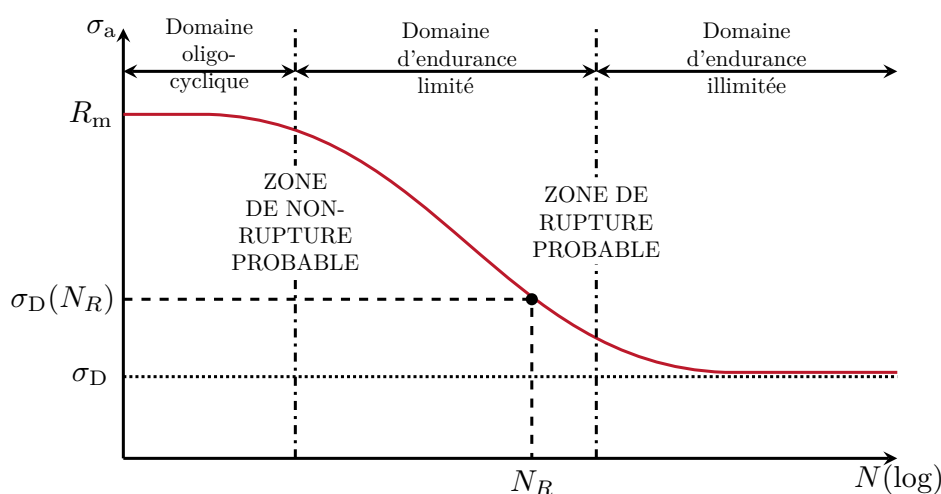


FIGURE I.9 – Courbe de Wöhler sur un diagramme d'endurance.

### 3.2.2 Diagramme de Haigh

Le diagramme de Haigh représente un critère de fatigue défini pour un nombre de cycles  $N_R$  donné en fonction d'une contrainte moyenne  $\sigma_m$  [106]. Ce diagramme est utilisé en complément de la courbe de Wöhler afin de prendre en compte la composante statique des contraintes appliquée sur la structure considérée, et dont la composante dynamique avec de potentiels effets non linéaires ont leur importance dans la validation ou non du critère de fatigue. Plusieurs modèles visibles sur la figure I.10 permettent de calculer ce critère.

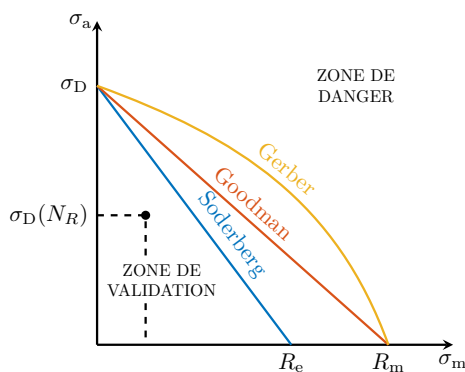


FIGURE I.10 – Diagramme de Haigh selon différents critères.

Les plus répandus sont la droite de Goodman qui relie la limite d'endurance  $\sigma_D$  à la résistance à la rupture  $R_m$ , et celle de Soderberg qui relie la limite d'endurance à la limite d'élasticité  $R_e$ , ainsi que la parabole de Gerber. Elles permettent de déterminer la limite d'endurance selon la sollicitation moyenne en définissant ainsi une limite entre les zones de validation et de danger.

### 3.2.3 Diagramme de Campbell

De plus, les sollicitations cycliques dont il est question proviennent des contraintes mécaniques vibratoires liées au fonctionnement du moteur. En effet, lors du dimensionnement des roues aubagées de la turbine basse pression, une attention particulière est portée au risque de coïncidence entre leurs fréquences propres et les sources d'excitation harmonique de ces pièces, ce qui induirait un phénomène synchrone en régime forcé. Pour ce faire, l'utilisation d'un diagramme de Campbell permet de repérer ces coïncidences. La figure I.11 illustre la composition d'un diagramme de Campbell pour une structure quelconque.

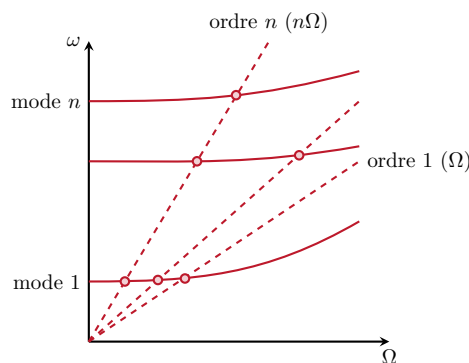


FIGURE I.11 – Diagramme de Campbell.

Les courbes (—) représentent par exemple l'évolution de la fréquence  $\omega$  de chacun des modes propres d'une aube ou bien d'une roue aubagée en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  du moteur. Les droites (--) quant à elles représentent les ordres d'excitation du moteur<sup>6</sup> qui sont des fonction affines, et désignent l'évolution des harmoniques de la vitesse de rotation du moteur. Enfin, les points rouges où se croisent les fréquences propres de la structure avec les ordres moteurs constituent un risque d'une excitation synchronisée, c'est-à-dire qu'un mode propre serait directement excité par le fonctionnement du moteur, ce qui entraînerait potentiellement une résonance et une augmentation indésirable de l'amplitude de vibration. C'est pourquoi ce diagramme permet de déterminer les zones critiques à éviter si possible en jouant sur plusieurs paramètres lors du dimensionnement.

### 3.2.4 Diagramme zig-zag

Ce diagramme, dérivé de celui introduit par [169] sous l'acronyme ZZENZ pour *Zig Zag shaped Excitation line in the Nodal diameter versus Frequency*, permet de déterminer si un mode d'une roue aubagée risque d'entrer en résonance à cause de l'excitation produite par les ordres moteur, ou bien par le nombre d'obstacles. Il s'agit donc de vérifier s'il y a une coïncidence spatiale entre cette excitation et le nombre de diamètres du mode propre de la roue aubagée, comme représenté sur la figure I.12.

6. *engine order* en anglais, abrégé EO.

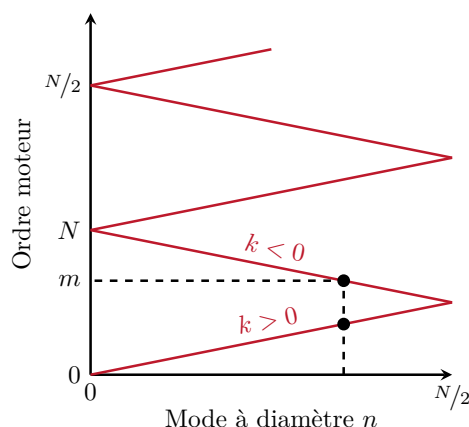


FIGURE I.12 – Diagramme zig-zag.

L'équation suivante permet de tracer des droites sur un diagramme représentant les modes à diamètres (directs si  $k > 0$ , rétrogrades si  $k < 0$ ) en fonction de la fréquence.

$$\omega = (kN \pm n)\Omega \quad (\text{I.58})$$

où  $\omega$  désigne la pulsation propre de la roue aubagée,  $k$  un entier naturel,  $N$  le nombre de secteurs ou d'aubes,  $\Omega$  la vitesse de rotation et  $n$  le mode à diamètre.

### 3.3 Influence des non-linéarités

La non-linéarité liée au contact avec frottement entre les aubes de turbine basse pression dépend de plusieurs paramètres, dont la variation a fait l'objet d'études paramétriques aussi bien numériques qu'expérimentales. La réponse dynamique d'une telle structure possède une fréquence de résonance sensible au statut du contact, elle peut alors se décaler, de même pour l'amplitude de la réponse vibratoire qui peut s'amortir assez fortement.

L'article [97] propose d'étudier l'influence de la précharge statique sur les réponses forcées d'un modèle numérique représentant l'interface de contact entre deux talons d'aube. Les articles [96, 98] complètent cette étude. Une première simulation pour un coefficient de frottement  $\mu$  égal à zéro est effectuée (voir figure I.13a), ce qui signifie que seule la force normale liée au contact contribue au comportement dynamique de la structure, et donc aucun amortissement n'est apporté par le frottement. Lorsque la précharge statique diminue, la fréquence de résonance de l'aube diminue aussi et l'amplitude de la réponse augmente puisque la rigidité de la structure est plus faible. Au contraire si la précharge statique augmente, la réponse tend vers une réponse linéaire où le contact est totalement collé. Dans le cas d'une simulation avec un coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ , les forces de frottement participent dans la réponse dynamique de la structure en apportant un amortissement non linéaire. L'influence de la précharge statique sur la réponse fréquentielle de l'aube est fortement non linéaire comme le montre la figure I.13b : pour une précharge statique forte, la fréquence de résonance ainsi que l'amortissement évolue, dans un premier temps, assez faiblement par rapport à la variation de la précharge statique appliquée. Cependant, il existe un palier à partir duquel une variation faible de la précharge statique induit un changement conséquent de la réponse fréquentielle de l'aube. Ce palier se situe à la base du U formé par les réponses fréquentielles.



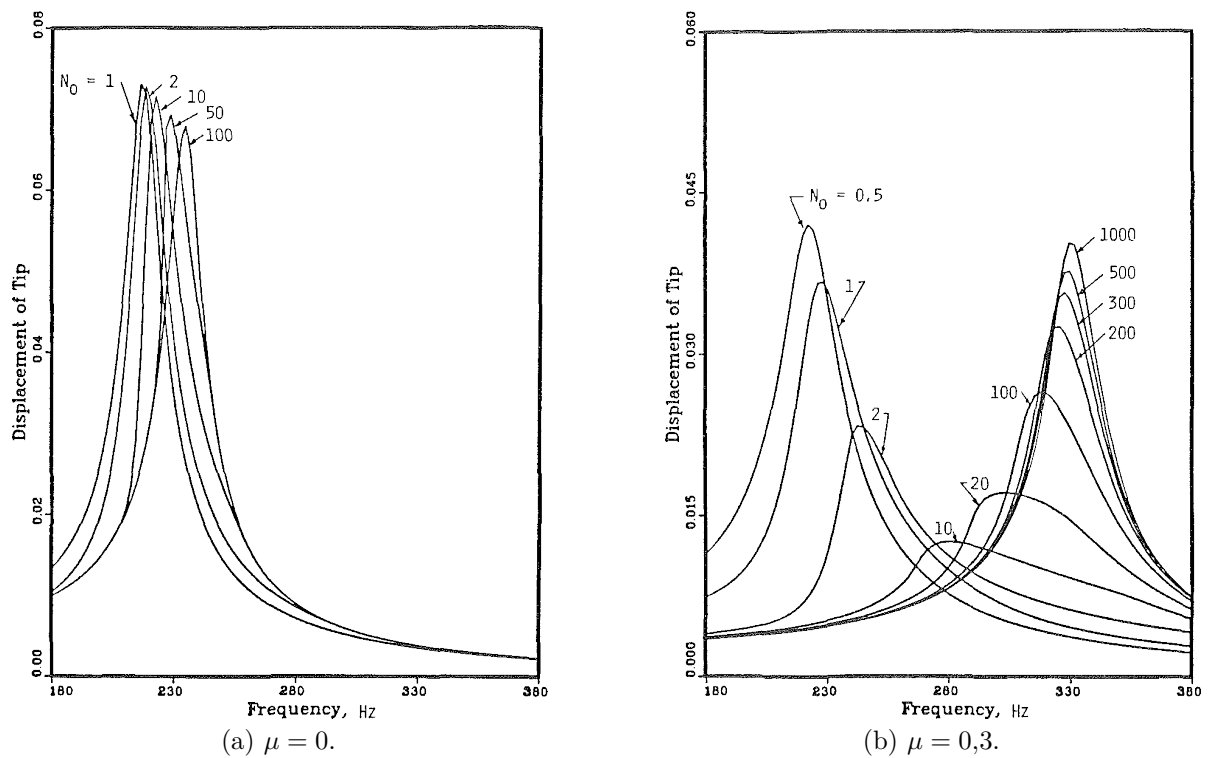


FIGURE I.13 – Réponses fréquentielles en tête d'aube selon le coefficient de frottement et la précharge statique appliquée [97].

Cette évolution des réponses fréquentielles a également été étudiée dans l'article [24] sur un modèle numérique réduit construit par la méthode des éléments finis (voir figure I.14b), dans le cadre d'une comparaison avec des résultats expérimentaux (voir figure I.14a). Plusieurs réponses fréquentielles sont tracées pour différents niveaux de force d'excitation et à un niveau de précharge statique fixé. Une augmentation de la force d'excitation amène à une diminution de la fréquence de résonance et à une augmentation de l'amortissement des réponses fréquentielles.

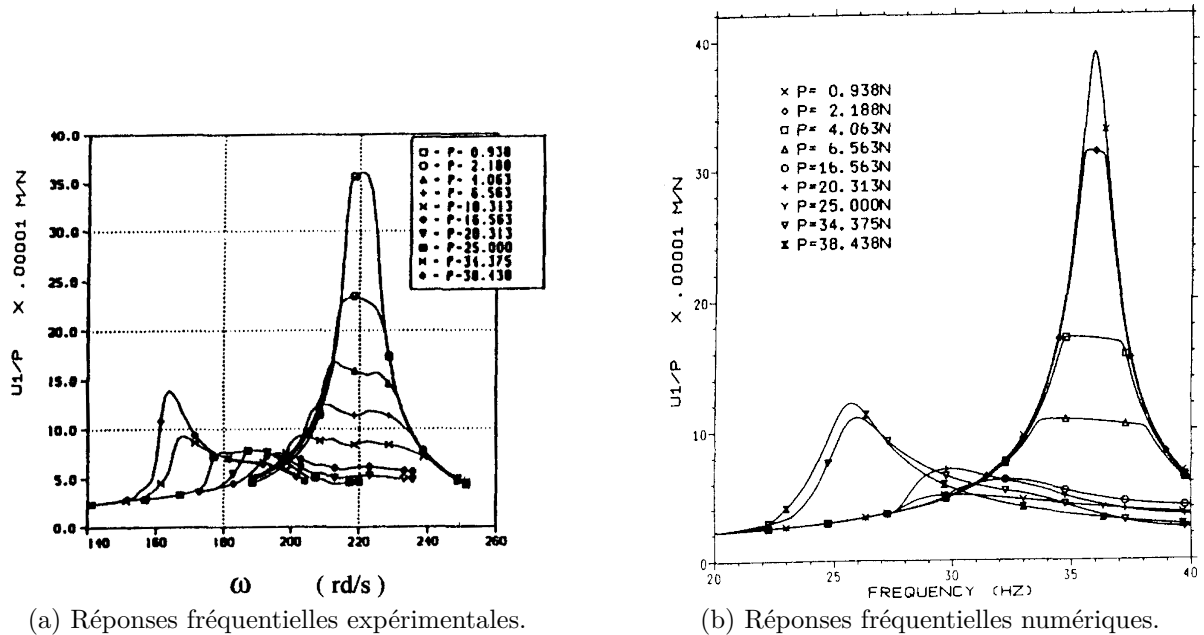


FIGURE I.14 – Réponses fréquentielles normalisées par la force d'excitation appliquée [24].

## Bilan du chapitre

Ce chapitre a permis de mieux connaître le contexte industriel avec les aspects technologiques d'un turboréacteur, plus particulièrement les aubes de turbine basse pression et leurs spécificités. La section sur la théorie de la dynamique d'une structure en rotation, sous le formalisme de la mécanique des milieux continus, en ayant une approche énergétique de l'équation du mouvement d'une roue aubagée telle qu'une turbine basse pression, fourni le contexte théorique. La précharge centrifuge et la symétrie cyclique ont été abordées en fin de ce chapitre bien que le banc d'essai et le modèle numérique présentés dans cette thèse n'intègrent pas ces caractéristiques. Cependant, il semblait tout de même important de les évoquer puisque ce sont des notions incontournables dans le cadre de l'étude de la dynamique d'une structure telle qu'une turbine basse-pression. Les méthodes de dimensionnement d'une roue aubagée ainsi que les phénomènes non linéaires qui les concernent ont été décrit dans leur globalité.

## Chapitre II

# Conception et exploitation d'un banc d'essai

### Sommaire du chapitre

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Définition du banc d'essai</b>                                   | <b>30</b> |
| 1.1 Objectifs généraux . . . . .                                      | 30        |
| 1.2 État de l'art des bancs d'essai . . . . .                         | 31        |
| 1.2.1 Bancs d'essai pour des aubes avec nageoire . . . . .            | 31        |
| 1.2.2 Bancs d'essai pour une aube seule avec talon . . . . .          | 32        |
| 1.2.3 Bancs d'essai pour plusieurs aubes avec talon . . . . .         | 37        |
| 1.3 Synthèse et spécifications . . . . .                              | 39        |
| <b>2 Conception et fabrication du banc d'essai</b>                    | <b>41</b> |
| 2.1 Estimation analytique de la pression de contact normale . . . . . | 41        |
| 2.2 Conception de l'aube et du système de précharge . . . . .         | 42        |
| 2.3 Fabrication des pièces . . . . .                                  | 45        |
| <b>3 Essais expérimentaux préliminaires</b>                           | <b>47</b> |
| 3.1 Analyses modales . . . . .  | 48        |
| 3.1.1 Aubes en condition libre . . . . .                              | 48        |
| 3.1.2 Aubes en condition encastree . . . . .                          | 51        |
| 3.1.3 Assemblage des trois aubes . . . . .                            | 52        |
| 3.2 Essais de torsion . . . . .                                       | 53        |
| 3.3 Calibration de la précharge statique . . . . .                    | 54        |
| 3.4 Métrologie et contrôle du montage . . . . .                       | 56        |
| <b>4 Essais dynamiques</b>  | <b>58</b> |
| 4.1 Matrice d'essais . . . . .  | 58        |
| 4.2 Instrumentation et protocole de mesure . . . . .                  | 59        |
| 4.3 Résultats expérimentaux . . . . .                                 | 61        |
| 4.3.1 Précharge statique « faible » . . . . .                         | 62        |
| 4.3.2 Précharge statique « élevée » . . . . .                         | 63        |
| 4.3.3 Sensibilité à la précharge statique . . . . .                   | 64        |
| 4.3.4 Évolution du positionnement de l'aube centrale . . . . .        | 67        |
| <b>Bilan du chapitre</b>  | <b>67</b> |

---

Maintenant que le contexte industriel et scientifique a été présenté de façon assez générale, en s'attardant plus particulièrement sur les aubes de turbine basse pression et leurs spécificités, les axes de recherche développés au sein de cette thèse vont être développés. Ce chapitre se concentre plus particulièrement sur le volet expérimental, depuis la constitution d'un état l'art conséquent portant sur les bancs d'essai mettant en jeu une ou plusieurs aubes avec un talon, en passant par les différentes étapes de la conception et de la fabrication du banc d'essai académique, puis les essais expérimentaux préliminaires en vue de la préparation des essais dynamiques, en terminant enfin par la réalisation de ceux-ci. Un certain nombre de résultats ont donc été produits, dont une partie a pu être intégrée dans ce chapitre, le reste ayant placé en annexes. Une interprétation des résultats obtenus à l'issue du post-traitement est développée.

## 1 Définition du banc d'essai

### 1.1 Objectifs généraux

Le banc d'essai académique a pour but de répondre à plusieurs objectifs, compte-tenu des connaissances sur le comportement dynamique non linéaire d'une aube de turbine basse pression, et de ce que l'on souhaite observer en essai. Tout d'abord, celui-ci doit permettre de visualiser les différentes natures des modes propres d'une aube de turbine basse pression, en particulier les spécificités des déplacements modaux du talon, notamment pour les modes de flexion tangentielle (direction selon laquelle l'aube a un moment d'inertie le plus faible), visibles sur la figure II.1 ci-dessous.

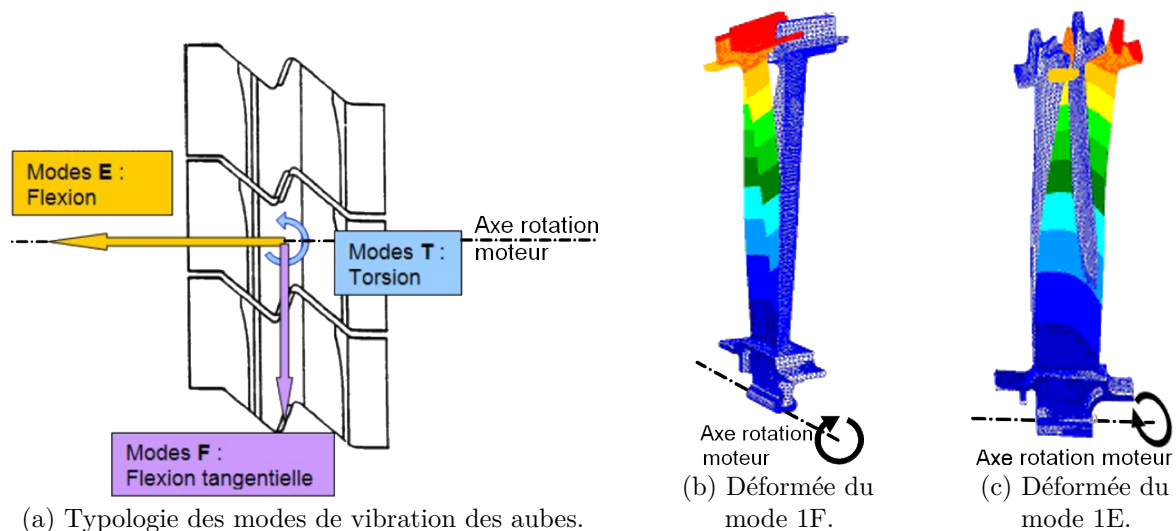


FIGURE II.1 – Modes d'intérêt des aubes de turbine basse pression © Safran Aircraft Engines.

L'étude des modes propres des aubes seules en configurations libre et encastree sera aussi considérée en tant qu'analyses modales préliminaires pour vérifier la concordance des modes propres entre les aubes expérimentales, mais aussi la fidélité du modèle numérique.

Ensuite, il est nécessaire de pouvoir gérer plusieurs niveaux de force d'excitation des aubes, afin de faire varier l'amplitude des réponses mesurées. De plus, l'influence de plusieurs paramètres doit permettre de simuler différents régimes de réponse : par exemple la variation des forces de contact entre les talons par le biais de la précharge statique, mais aussi la sensibilité à la température et au coefficient de frottement éventuellement. Enfin, le désaccordage ne fait pas partie du périmètre d'étude de la thèse.

La distribution des forces de contact au niveau du talon doit être réaliste par rapport à la configuration réelle d'une aube de turbine basse pression. C'est pourquoi la géométrie adoptée pour les talons des aubes du banc d'essai sera aussi conforme que possible par rapport à un vrai talon, tandis que la géométrie du reste de l'aube sera simplifiée tout en restant représentative du comportement dynamique (fréquences et déformées modales). Ces choix de conception sont détaillés dans la sous-section suivante. Enfin, la maîtrise des conditions limites imposées sur le banc d'essai, ainsi que la répétabilité des réponses forcées réalisées, sont primordiales.

## 1.2 État de l'art des bancs d'essai

Dans le but de concevoir un banc d'essai académique permettant de reproduire le comportement dynamique des aubes d'une turbine basse pression, dont le comportement est non linéaire à cause du contact avec frottement entre les talons, une étude bibliographique a été menée afin de recenser les différentes conceptions de banc d'essai existantes dans la littérature. Le banc d'essai académique envisagé a pour but de produire des résultats expérimentaux, en se concentrant sur des mesures mettant en jeu des aubes à la géométrie simplifiée et dans plusieurs configurations. Les points clés qui orientent la recherche bibliographique pour évaluer cet état de l'art sont :

- une aube avec un talon ayant une géométrie plus ou moins réaliste ;
- une mise en œuvre comportant une ou plusieurs aubes ;
- un système de prétorsion ou de précharge d'une ou plusieurs aubes ;
- un système d'excitation pour la production de réponses forcées ;
- une instrumentation adaptée aux analyses envisagées.

### 1.2.1 Bancs d'essai pour des aubes avec nageoire

On retrouve une similarité entre une aube de turbine avec talon et une aube de compresseur avec une nageoire (*clapper* ou *snubber* en anglais) : toutes deux possèdent un élément de contact inter-aubes induisant du frottement lors du fonctionnement moteur (voir figure II.2 ci-contre). Quelques bancs d'essai ont été conçus dès les années 1970 pour étudier l'amortissement induit par le contact avec frottement sur la nageoire d'une aube à la géométrie simplifiée. Le premier banc d'essai décrit dans l'article [48] publié en 1972 (voir figure II.3a ci-après) comprend un ensemble de deux aubes (a) dont la géométrie est simplifiée pour avoir la forme d'une poutre, et dont le pied est encastré entre des mors (h). Les aubes sont mises en contact au niveau d'une nageoire (b) sur lesquelles une précharge statique est appliquée à l'aide d'une tringle de serrage (d). L'ensemble est excité en un point par un système électromagnétique (f) exerçant une force de signal sinusoïdal. Une tête d'impédance est placée au bout de la tringle (e) pour mesurer l'effort normal exercé sur l'interface de contact. De façon similaire, le banc utilisé dans l'article [170] publié en 1974 (voir figure II.3b ci-dessous) n'utilise cette fois qu'une seule aube de géométrie simplifiée (a), possédant des nageoires de chaque côté (b), et encastrée à son pied entre deux mors (f). De même, l'aube est excitée par un système électromagnétique (d) générant une force suivant un signal sinusoïdal, par le biais d'une tringle (e). À la différence du

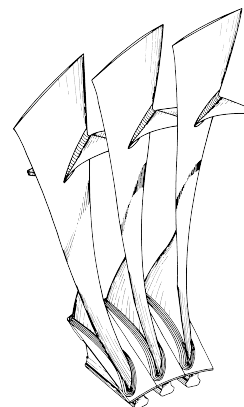


FIGURE II.2 – Illustration d'un assemblage d'aubes de compresseur avec nageoires [113].

banc d'essai précédemment décrit, l'effort normal de précharge est cette fois-ci appliqué par les pièces (c) où sont placés des jauges de déformations pour la mesure des forces de contact normales et de frottement.

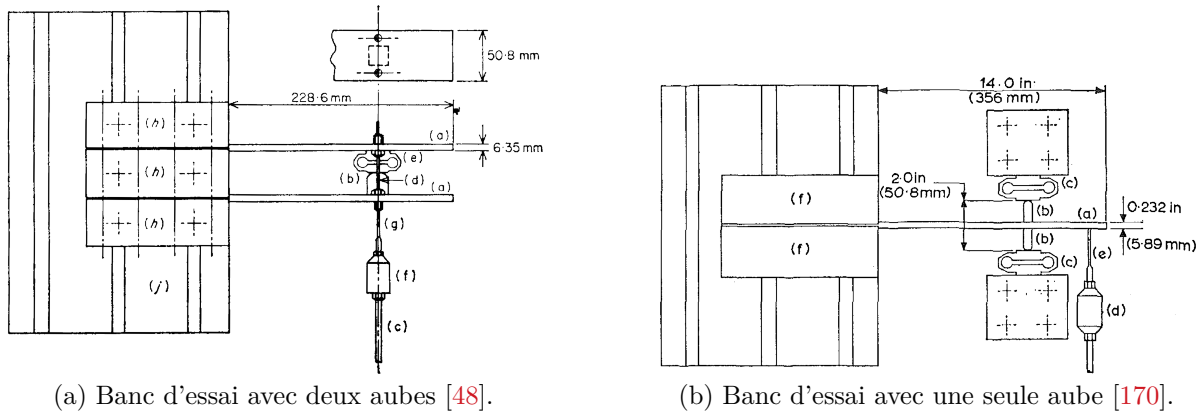


FIGURE II.3 – Bancs d'essai de mesure de l'amortissement pour des aubes avec nageoires.

Ces bancs d'essai, tous deux utilisés pour les travaux de S. W. E. Earles et E. J. Williams, ont permis de comparer des résultats expérimentaux à des résultats analytiques afin d'étudier l'influence de l'amplitude des forces de frottement sur la réponse des aubes, qui étaient proportionnelles au niveau de la force d'excitation appliquée dans le modèle analytique des bancs, mais aussi en fonction du statut de l'interface de contact (glissant ou adhérent).

### 1.2.2 Bancs d'essai pour une aube seule avec talon

Dans cette sous-section, les bancs d'essai mettant en jeu une seule aube avec talon sont recensés, le moyen utilisé pour générer la non-linéarité du contact avec frottement n'est pas toujours le même, cependant l'aube est toujours d'une géométrie plus ou moins simplifiée par rapport à la réalité.

Le premier banc d'essai destiné à l'étude de l'amortissement mécanique induit par le frottement au niveau du talon d'une aube est exposé dans le rapport technique [136] publié en 1979. Une aube de soufflante avec un talon, dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont celles d'une aube réelle d'un turboréacteur à postcombustion Pratt & Whitney F100, est encastrée à son pied. Le talon est chargé de chaque côté par des platines qui exercent un effort normal sur celui-ci. Celles-ci peuvent pivoter dans le cas où l'aube, et par extension le talon, se déplace dans une direction autre que celle normale aux platines. De cette manière, le contact est toujours conservé entre le talon et les platines de chargement. Les forces de contact normales et tangentielles, dont ces dernières dépendantes du coefficient de frottement, sont mesurées. Plusieurs statuts des interfaces de contact sont observés : l'interface glisse localement pour un certain niveau de force d'excitation, cette zone de glissement augmente au fur et à mesure que le chargement dynamique augmente elle aussi, jusqu'à ce que la surface entière du talon glisse (le coefficient de frottement est de 0,4 entre le talon en titane et les platines en alliage nickel-chrome WASPALOY®). La force de frottement est ainsi déterminée à partir de la mesure de l'effort normal exercé sur le talon (qui s'élève à 234 lb soit environ 1040 N). Des jauges de déformation sont positionnées sur les zones d'intérêt pour mesurer les déformées des modes de l'aube, ainsi que des accéléromètres pour enregistrer sa réponse vibratoire. Il est observé que la réponse de l'aube est linéaire jusqu'à ce que le glissement de l'interface de contact du talon se produise. Le taux d'amortissement des réponses est mesuré à  $-3$  dB (appelé

*half-power bandwidth method* en anglais [66]).

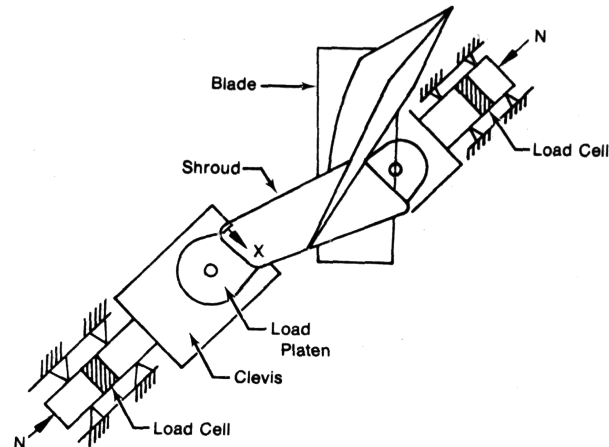


FIGURE II.4 – Illustration du système de précharge du talon de l'aube sur le banc d'essai [136].

Le premier banc d'essai mettant en jeu un système de précharge statique de l'aube, assimilable à une prétorsion, est celui réalisé dans le cadre d'un contrat de recherche dont le rapport a été publié en 1981 [157, 159] et financé par la NASA<sup>1</sup>. Une seule aube de soufflante en alliage de titane, placée à l'horizontale, est excitée près de son pied, les faces du talon frottent contre des platines en alliage de titane également, mais dont la surface est renforcée avec du carbure de tungstène. La force normale appliquée par ces platines sur le talon est gérée par un système de poulies (voir figure II.5). Deux photographies montrant le banc d'essai sont visibles en annexe A.1.

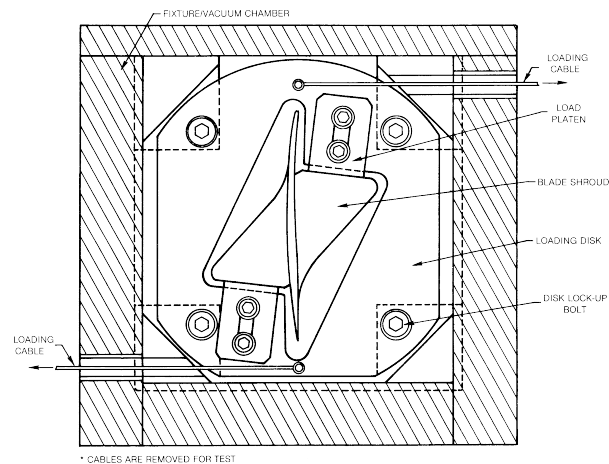


FIGURE II.5 – Illustration du système de précharge du talon de l'aube sur le banc d'essai [159].

Le pied est soudé à un bloc massif pour l'encastrement, et l'ensemble du banc est placé dans une enceinte à vide afin d'éliminer l'amortissement induit par l'air. L'amortissement généré par cette interface de contact avec frottement au niveau du talon est évalué. La pale est instrumentée avec des jauges de déformation et des accéléromètres. Durant les essais expérimentaux, les auteurs observent que le niveau de contraintes au sein de l'aube est proportionnel au chargement normal du talon et au niveau de force d'excitation : une augmentation du l'effort normal pour un niveau de force d'excitation donné provoque une augmentation de la fréquence de résonance

1. National Aeronautics and Space Administration.



(augmentation de la raideur de l'aube). De même, une augmentation du niveau de force d'excitation augmente le phénomène de glissement, et apporte un amortissement de la réponse de l'aube. Le niveau de contraintes au sein de l'aube est également sensible au coefficient de frottement : plus le coefficient de frottement est élevé, plus le niveau de contraintes l'est lui aussi au moment où le glissement des surfaces de contact apparaît.

Un banc d'essai assez similaire a été présenté lors de la conférence ASME<sup>2</sup> Turbo Expo de 2007 [71] (voir figure II.6), à la différence que l'aube est dans ce cas-ci d'une géométrie simplifiée. En effet, celle-ci a la forme d'une poutre fine sur laquelle l'angle et la hauteur du talon sont réglables (voir figures en annexe A.2). L'aube est en acier inoxydable et mesure 240 mm par 60 mm pour 3 mm d'épaisseur. Les angles du talon sont de 45, 60 ou 90°. L'instrumentation est composée d'un pot vibrant pour l'excitation de l'aube, dont un capteur d'effort mesure la force exercée, et d'accéléromètres pour mesurer l'amplitude de vibration de l'aube. Les essais expérimentaux ont permis de démontrer les effets des forces de contact au niveau du talon sur la réponse de l'aube : une augmentation de l'effort normal diminue dans un premier temps l'amplitude du pic de résonance, mais finit par l'amplifier, il existe donc une valeur de précharge du talon pour laquelle l'amortissement lié au frottement permet de réduire au mieux l'amplitude de la réponse de l'aube, pour un certain niveau de force d'excitation. L'angle du contact sur le talon a quant à lui une influence sur la surface de contact du talon en vibration.

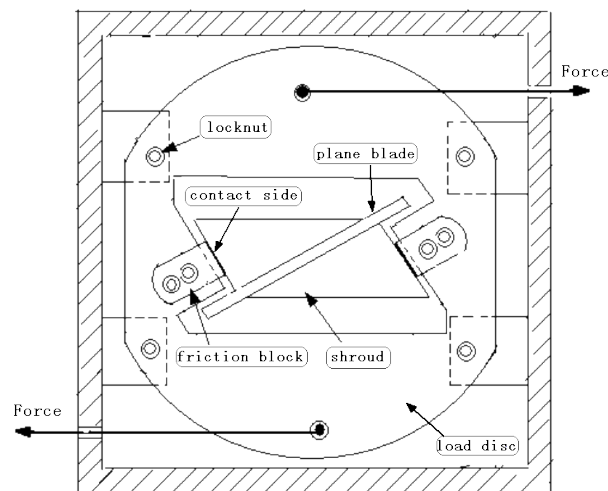


FIGURE II.6 – Illustration du système de précharge du talon de l'aube sur le banc d'essai [71].

Cet article de conférence [111] reprend le principe d'angle et de hauteur de talon réglable, sans toutefois avoir de système de précharge (voir figures en annexe A.3). En revanche, la notion de jeu initial entre le talon et les platines est évoquée, et son influence sur la réponse de l'aube est étudiée. Quatre valeurs de jeu sont sélectionnées pour les essais expérimentaux : 2,0 mm, 1,5 mm, 1,2 mm et 1,0 mm. L'aube est excitée par une force de signal sinusoïdal sur une plage de fréquence de 30 à 70 Hz qui couvre le premier premier mode de flexion, et dont l'effort appliqué varie de 10 à 60 N. L'aube est instrumentée avec un accéléromètre placé à son sommet et un capteur d'effort au niveau de la tige d'excitation du pot vibrant. Les essais expérimentaux ont montré qu'augmenter le niveau de la force d'excitation de l'aube a pour conséquence une plus grande dissipation d'énergie, puisque le talon est en contact plus longtemps avec les platines adjacentes. Si le jeu entre le talon et les platines diminue, l'amplitude de déplacement de l'aube diminue également, et la bande de fréquence pour laquelle le talon rentre en contact avec les platines adjacentes augmente. La position du talon sur l'aube influe sur les fréquences propres

2. American Society of Mechanical Engineers.

de l'aube : plus le talon est fixé bas sur l'aube, plus les fréquences propres augmentent, et inversement. De plus, cela a pour effet de diminuer l'amplitude de déplacement de l'aube. Ces observations démontrent l'importance du positionnement du talon sur l'aube, afin d'être dans la configuration souhaitée et pouvoir réaliser les mesures voulues.

Dans cet article de conférence [80] publié en 2016, le banc d'essai a été financé et développé conjointement par l'université Gottfried-Wilhelm-Leibniz de Hanovre ainsi que les industriels MTU Aero Engines et Siemens Energy. Il réutilise le principe du banc d'essai de [147], lui-même probablement issu de [146]. L'aube possède une géométrie réaliste, sauf son pied qui est massif, cependant le talon n'est pas en forme de « Z ». Le banc d'essai utilise un système de précharge qui vient appliquer une force de contact normale au niveau du talon, mais l'aube n'est pas en torsion, les efforts de part et d'autre du talon étant colinéaires. L'influence de cette précharge sur la réponse de l'aube est évaluée. Une mesure laser est utilisée pour enregistrer l'amplitude de vibration de l'aube, son intérêt étant sa non-intrusivité, tandis qu'un pot vibrant sert à l'exciter à mi-hauteur (voir figures en annexe A.4). Les résultats expérimentaux ont tout d'abord montré que les fréquences de résonance sont sensibles à l'effort normal exercé sur le talon de l'aube. L'amplitude maximale du mode 1E décroît pour une force d'excitation croissante ou un effort normal décroissant, c'est un phénomène que l'on retrouve pour des amortisseurs sous plateformes. Pour le mode 1F, son amplitude augmente dans le cas où il y a une séparation du contact, l'amplitude des déplacements en tête de l'aube augmente. Un banc d'essai avec une couronne complète d'aubes de turbine basse pression prévu pour tourner sous vide est en cours de développement au sein de la même équipe de recherche [79].

Le banc d'essai présenté au sein de l'article de conférence [161] fait intervenir une seule aube de turbine basse pression dont la géométrie a été simplifiée. Elle est constituée d'une poutre de section rectangulaire et d'épaisseur constante, ayant deux surfaces de contact à son sommet, et son pied est encastré à l'aide de boulons. Les fréquences propres les plus basses de l'aube ont été ajustées afin d'être proches de celles d'une vraie aube de turbine. Un piston hydraulique exerce une pression sur l'une des deux surfaces de contact tandis que l'autre s'appuie sur un appareil de mesure de la force exercée sur le talon (voir figures II.7).

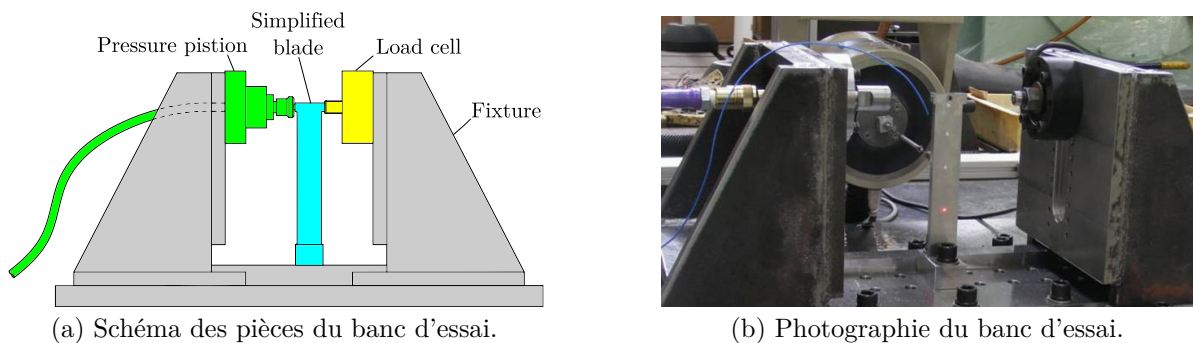


FIGURE II.7 – Banc d'essai de l'article de conférence [161].

Un pot vibrant excite l'aube à mi-hauteur tandis qu'un vibromètre laser mesure sa réponse dynamique. Plusieurs niveaux d'effort statique exercé sur le talon sont appliqués, afin d'évaluer l'effet produit sur la fréquence de résonance et sur l'amortissement. Les résultats expérimentaux sont comparés à un modèle numérique réduit ne conservant que les degrés de liberté des nœuds de contact, ainsi que vingt modes propres de l'aube sans contact. Le type d'élément de contact employé utilise des raideurs de pénalité dans les directions normale et tangentielle, estimées analytiquement à l'aide de la méthode proposée dans l'article [148]. Les résultats numériques

obtenus permettent de retrouver un décalage croissant de la fréquence du pic de résonance lorsque l'effort statique appliqué augmente. L'amortissement augmente jusqu'à une certaine valeur d'effort statique, avant de diminuer progressivement avec l'augmentation du niveau d'effort statique. Cependant, l'amortissement des réponses forcées numériques est sous-estimé par rapport aux résultats expérimentaux, cela est expliqué par un amortissement provenant de sources externes aux surfaces de contact de l'aube au sein du banc d'essai.

Un second article de conférence [4, 5] propose un banc d'essai permettant de mesurer les forces de contact au niveau du talon d'une aube à la géométrie simplifiée dans les trois directions, lorsque celle-ci est soumise à une excitation dynamique (voir photographie en annexe A.5). La précharge statique de l'aube s'effectue à la base, par le biais d'un mécanisme à vis de torsion, afin d'appliquer un effort sur les deux surfaces de contact du talon de l'aube. Comme pour le banc d'essai décrit précédemment, l'aube est constituée d'une poutre rectangulaire de section constante ayant deux surfaces de contact à son sommet qui constituent le talon, et dont le pied est un cylindre monobloc, inséré dans un logement en contrefort réalisant l'encastrement de l'aube (voir figure II.8a). La mesure tri-directionnelle des forces de contact est opérée par un montage orthogonal de trois capteurs de force uni-axiaux HBM U9C (0,5 kN) placés sur chacune des deux surfaces de contact (voir figure II.8b). Pour les essais de réponses forcées expérimentales, une prétorsion est appliquée à la base de l'aube, ce qui a pour but de mettre en contact les surfaces dédiées du talon, et d'appliquer un effort statique mesuré par les capteurs de force. Les résultats expérimentaux ont montré que plus le niveau de force d'excitation augmente, plus l'amortissement non linéaire augmente aussi. Cependant, les forces de contact statiques mesurées en début et en fin d'essai ne sont pas les mêmes, un changement est observé. En répétant les réponses forcées, ces forces de contact statiques atteignent finalement une valeur assez stable, c'est pourquoi les auteurs ont décidé de réaliser cinq chargement avec une force d'excitation d'1 N, puis trois autres avec le niveau de force d'excitation voulu, afin d'éliminer ce phénomène.

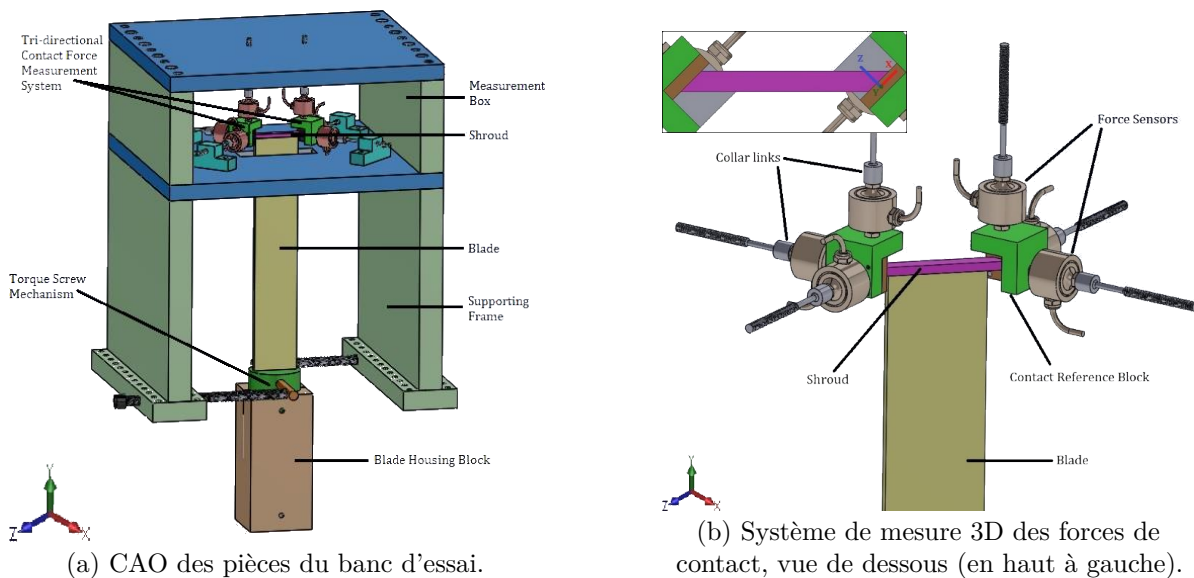


FIGURE II.8 – Banc d'essai de l'article de conférence [5].

### 1.2.3 Bancs d'essai pour plusieurs aubes avec talon

Cette sous-section de la recherche bibliographique se concentre sur les bancs d'essai ayant plus d'une aube pour étudier la non-linéarité de contact avec frottement entre les talons, généralement dans le but d'avoir plus de réalisme.

Dans cet article [40] publié en 2019, deux aubes sont placées côte à côte en faisant glisser leur pied sur des rails, afin d'avoir un jeu au niveau de leur talon, il n'y a aucun système de précharge. L'excitation se fait par pot vibrant sur une des deux aubes, appelée de ce fait « aube active », l'autre étant donc l'« aube passive » (voir figure en annexe A.6). De la même façon que l'article de conférence [111], l'influence du jeu entre les talons sur la réponse des aubes est évaluée. Lorsque la force d'excitation augmente, un phénomène de vibro-impact apparaît et s'amplifie dans la réponse des aubes, le contraire est observé lorsque le jeu entre les talons augmente. Lorsque la fréquence d'excitation augmente, l'amplitude de la réponse s'accroît et donc le phénomène de vibro-impact s'amplifie jusqu'à passer le pic de résonance, où tous deux diminuent ensuite.

De façon analogue, dans l'article de 1994 [184], les auteurs proposent de placer deux aubes en position horizontale dont les pieds sont encastrées dans un mors (3) excité par un pot vibrant (4), tout en laissant un jeu entre les talons (voir figure II.9a). Ce dispositif semble être réutilisé de l'article [94] (figure II.9b). Des jauges de déformation (6) sont placées proches du pied des aubes. Les auteurs remarquent que lorsque la fréquence d'excitation se situe aux fréquences de résonance des aubes pour les deux premiers modes de flexion, l'amplitude de déplacement des talons augmente de sorte qu'ils viennent en contact et glissent, entraînant par conséquent une perte d'énergie et donc un amortissement de la réponse fréquentielle des aubes. Dans le cas où la fréquence d'excitation se situe à la fréquence d'anti-résonance, l'amortissement mesuré est comparable à l'amortissement structural d'une seule aube, puisque l'amplitude de déplacement des aubes est faible, et donc les talons ne viennent pas en contact à cause du jeu.

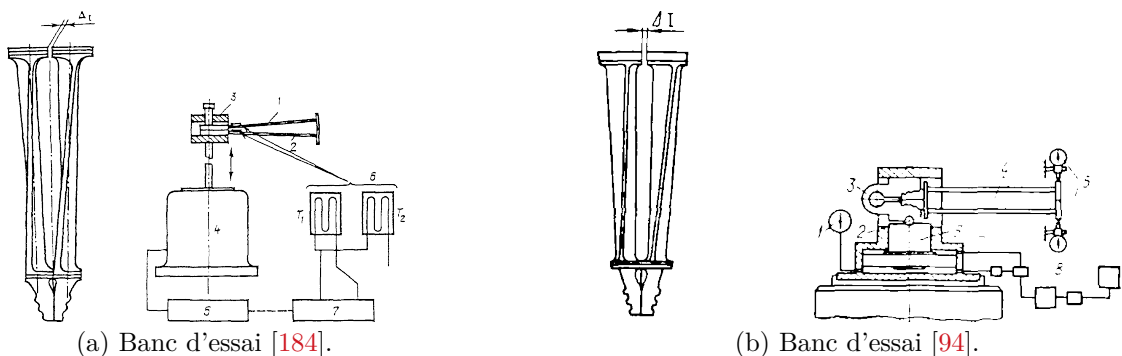


FIGURE II.9 – Banc d'essai avec aubes horizontales excitées par un pot vibrant.

Dans cet article de conférence [144], la géométrie du talon est plus complexe que pour les aubes des bancs présentés précédemment (voir annexe A.7). On retrouve une forme avec plusieurs angles qui se rapproche de la forme en « Z » utilisée en aéronautique. L'angle de contact entre les talons des aubes est ajusté en tournant une aube d'un certain angle puis elle est encastrée, la seconde est placée à côté pour que son talon soit en contact avec celui de l'autre aube. De la même manière que dans l'article présenté précédemment, les aubes sont placées à l'horizontale, leur pied encastré par un mors, et excitées par le biais d'une table vibrante. Les aubes sont instrumentées avec des jauges de déformation afin de pouvoir déterminer l'effort normal lié à la précharge statique lors de la mise en place. Les résultats des

essais expérimentaux montrent dans un premier temps que pour un niveau de force d'excitation assez faible, la structure a un comportement qui reste linéaire. Lorsque le niveau de force d'excitation augmente, les contraintes au sein des aubes augmentent également à l'approche de la fréquence de résonance de la structure, la rigidité de couplage des talons empêchant le glissement relatif entre l'interface de contact. Une diminution du niveau de force d'excitation entraîne un glissement relatif, donc une augmentation de la fréquence de résonance et de l'énergie dissipée (par amortissement). De plus, un effort normal plus élevé entraîne une amplitude de contrainte au sein des aubes plus importante.

De façon similaire aux amortisseurs sous plateforme, le banc d'essai proposé dans l'article [120] utilise un élément de frottement placé entre les talons pour appliquer le chargement statique à l'aide d'une poulie (voir figure II.10). Trois configurations où plusieurs valeurs de force radiale (celle exercée par l'élément de frottement sur les talons) et de force d'excitation ont été testées, afin d'observer différents comportements de la structure. Dans le premier cas, une force radiale faible et une force d'excitation élevée produisent du glissement entre l'élément de frottement et les talons, ce qui a pour effet de réduire l'amplitude de vibration grâce à un amortissement élevé. Dans le second cas, la force radiale est doublée mais la force d'excitation est divisée par deux, ce qui réduit fortement le glissement et l'amortissement. Dans le troisième cas, la force d'excitation est augmentée pour le même niveau de force radiale que précédemment, l'amplitude de déplacement des aubes reste élevé même si l'amortissement a légèrement augmenté dans le même temps. Ces trois configurations montrent donc des comportements différents selon deux paramètres : la force d'excitation et la force radiale (analogue à une précharge statique).

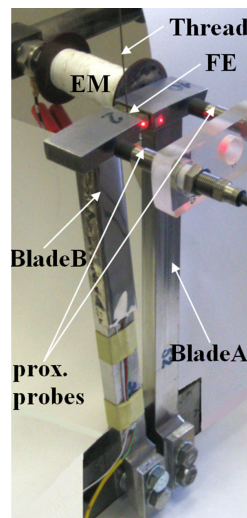


FIGURE II.10 – Banc d'essai [120].

Le banc d'essai présenté dans les articles [22, 23] rédigé par Berruti et al. de l'École polytechnique de Turin utilise un secteur de six aubes réelles d'une turbine basse pression. Une structure maintient les talons assemblés les uns avec les autres, tandis que les pieds des aubes sont en contact avec deux platines de chargement, et un système permettant d'appliquer un angle de torsion aux aubes pour générer une précharge et une force de contact normale entre les talons. Les aubes sont instrumentées avec des jauges de déformation pour mesurer la précharge statique appliquée, ainsi qu'un vibromètre laser ou des accéléromètres pour mesurer le déplacement relatif entre les talons.

Dans l'article [42], un banc d'essai conçu conjointement par l'INSA de Lyon et Thermodyn,

une division de Nuovo Pignone/General Electric, met en place un jeu de vingt-six aubes assemblées à 360 degrés, avec un système de prétorsion pour précharger les talons (voir annexe A.8). Les aubes ont une géométrie simplifiée de poutre de section rectangulaire avec un talon ayant une forme particulière, afin d'avoir des surfaces de contact parallèles entre elles, tandis que les pieds sont encastrés sur un disque. Deux vis au niveau du pied de chacune des aubes permettent d'agir sur l'angle autour de leur axe de symétrie (valeur maximale de  $2,8^\circ$ ), afin de générer une force de contact entre les talons plus ou moins importante. Les aubes sont instrumentées par des jauges de déformation. Les essais expérimentaux ont montré que l'effort normal au niveau du contact inter-talons joue un rôle important dans l'amplitude de la réponse dynamique des aubes.

Les bancs d'essai présentés dans les articles [158] et [124] sont des exemples de bancs beaucoup plus élaborés, dont les structures mises en places pour les mesures sont des roues aubagées réelles. Le premier vise à mesurer l'amplitude vibratoire de dix interfaces de contact entre les talons des aubes d'une soufflante, composée d'un ensemble de quarante aubes, en rotation jusqu'à  $1200 \text{ tr min}^{-1}$  sous vide. Le second a pour vocation d'étudier le comportement de plusieurs étages d'une turbine basse pression à vapeur, soumise à des vitesses de rotation élevées.

### 1.3 Synthèse et spécifications

Le tableau II.1 est un récapitulatif de l'ensemble des bancs d'essai décrits précédemment dans cette revue de l'état de l'art, aussi exhaustif que possible, et représente une analyse de l'existant. Il permet de recenser les similitudes et différences entre les bancs d'essai, notamment concernant le nombre d'aubes mises en place ainsi la façon dont la précharge statique est appliquée, mais aussi les moyens d'essai employés pour l'excitation et la mesure.

La description de la phénoménologie non linéaire du contact avec frottement pour le comportement dynamique des aubes est globalement la même pour chaque banc d'essai, et confirme les observations attendues. Pour un faible niveau de précharge statique, il y a plus de glissement par augmentation de la force d'excitation, et moins d'effet dissipatif de la non-linéarité (il peut même y avoir de l'impact). Si le niveau de précharge statique est élevé, il existe un optimum de dissipation entre les états de contact complètement adhérent et complètement glissant, les deux ayant un aspect linéaire.

Plusieurs points de la revue de la littérature ont été notés et doivent être rappelés. Par exemple, l'amortissement peut provenir des sources externes aux interfaces de contact de frottement du talon des aubes, comme les parties liées à l'encastrement des pieds des aubes. Un phénomène d'hystérésis peut se produire et nécessiter plusieurs cycles de chargement ou d'excitation pour obtenir des valeurs statiques stables de la force de contact. De plus, un phénomène de vibro-impact peut survenir pour un niveau élevé de force d'excitation, ce qui signifie qu'un décollement du contact est possible. En outre, l'utilisation de jauges de déformation peut être appropriée pour mesurer la précharge statique des aubes liée à la prétorsion.

Cette revue de l'état de l'art a permis de mieux définir les spécifications du banc d'essai, afin de se démarquer de la littérature d'une part, mais aussi de répondre le mieux possible aux spécifications à respecter, car aucune des conceptions de la littérature n'est pleinement satisfaisante. Tout d'abord, le nombre d'aubes doit être supérieur à un, afin que le chargement statique puisse être aussi réaliste que possible par rapport à la technologie de prétorsion des aubes de turbine basse pression, et il doit être réglable. Deuxièmement, la géométrie du talon doit avoir une forme de « Z » pour reproduire les conditions de contact d'une vraie aube de



| Banc d'essai                       | Nombre d'aubes | Précharge   | Excitation     | Instrumentation   |
|------------------------------------|----------------|-------------|----------------|---|
| Earles et Williams [48], 1972      | 2              | Normale     | Pot vibrant    | Jauges de déformation, capteur de force normale                 |
| Williams et Earles [170], 1974     | 1              | Normale     | Pot vibrant    | Jauges de déformation, capteur de force normale                 |
| Rimkunas et al. [136], 1979        | 1              | Normale     | Table vibrante | Jauges de déformation, capteur de force normale, accéléromètres |
| Srinivasan et al. [159], 1981      | 1              | Torsion     | Pot vibrant    | Jauges de déformation, accéléromètres                           |
| Hong et al. [71], 2007             | 1              | Torsion     | Pot vibrant    | Capteur de force normale, accéléromètres                        |
| Öney et al. [111], 2019            | 1              | Aucun (jeu) | Pot vibrant    | Capteur de force normale, accéléromètres                        |
| Kaptan et al. [80], 2016           | 1              | Normale     | Pot vibrant    | Capteur de force normale, vibromètre laser                      |
| Tamai et al. [161], 2013           | 1              | Normale     | Pot vibrant    | Capteur de force normale, vibromètre laser                      |
| Ahmed et al. [5], 2022             | 1              | Torsion     | Pot vibrant    | Capteurs de force uni-axiaux, accéléromètres tri-axiaux         |
| Cui et al. [40], 2019              | 2              | Aucun (jeu) | Pot vibrant    | Capteur de force normale, accéléromètres                        |
| Zin'kovskii et al. [184], 1994     | 2              | Aucun (jeu) | Table vibrante | Jauges de déformation   |
| Savchenko et al. [144], 2018       | 2              | Torsion     | Table vibrante | Jauges de déformation   |
| Pešek et al. [120], 2015           | 2              | Normale     | Pot vibrant    | Capteur de force normales, vibromètres laser                    |
| Berruti et al. [22, 23], 2000-2002 | 6              | Torsion     | Pot vibrant    | Jauges de déformation, vibromètre laser/accéléromètres          |
| D'Ambrosio et al. [42], 2004       | 13             | Torsion     | Pot vibrant    | Capteurs à courants de Foucault                                 |

TABLEAU II.1 – Synthèse des critères selon l'état de l'art des bancs d'essai.

turbine basse pression, où le contact est localisé sur des interfaces dédiées, contrairement aux talons de géométrie rectiligne. La géométrie de l'aube elle-même n'est pas aussi importante, tant que les fréquences et les déformées des modes propres sont équivalentes à celles d'une véritable aube de turbine basse pression.

En conclusion de cette section, la valeur ajoutée du banc d'essai sera d'avoir une géométrie du talon en « Z » qui se démarquera de la géométrie de forme rectangulaire classiquement

observée dans la littérature. De plus, un système de précharge du talon sera conçu pour une prétorsion au montage des aubes, mettant ainsi des zones spécifiques, les stellites, en contact et dont l'effort normal devra être maîtrisé. Ensuite, un minimum de trois aubes est envisagé afin d'avoir une aube centrale en torsion pure et deux aubes adjacentes qui subiront en plus de la flexion. Enfin, les paramètres de prétorsion devront être variables afin de constituer une base de plusieurs configurations pour les essais expérimentaux. Les choix de conception du banc d'essai académique sont détaillés dans la section suivante.

## 2 Conception et fabrication du banc d'essai

Comme expliqué précédemment, un des objectifs majeurs du banc d'essai est de reproduire de façon réaliste la précharge statique ainsi que la distribution des forces de contact sur les talons des aubes. Il est donc nécessaire d'étudier en amont quelle serait la pression de contact selon la géométrie du talon pour différents niveaux de force statique normale appliquée.

### 2.1 Estimation analytique de la pression de contact normale

Afin de donner une indication de la pression de contact normale exercée entre les stellites lors de la mise en charges des aubes sur le banc d'essai, des calculs analytiques basés sur la théorie du contact de Hertz sont réalisés. Selon le livre de K. L. Johnson [78], afin de déterminer la pression de contact entre deux cylindres d'axes parallèles schématisés sur la figure II.11, on définit d'abord :

- la courbure relative

$$R \equiv \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} ; \quad (\text{II.1})$$

- le module de Young renormalisé par le coefficient de Poisson

$$E^* \equiv \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} ; \quad (\text{II.2})$$

- la charge par unité de longueur

$$P = \frac{F}{L}. \quad (\text{II.3})$$

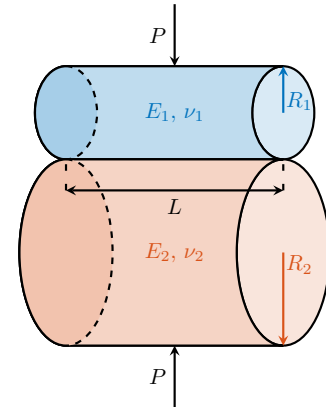


FIGURE II.11 – Schéma du contact de Hertz entre deux cylindres.

On peut donc ensuite exprimer la demi-largeur de la surface de contact rectangulaire :

$$b = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}}, \quad (\text{II.4})$$

et enfin la pression de contact maximale :

$$p_{\max} = \frac{2P}{\pi b}. \quad (\text{II.5})$$



Ainsi, la contrainte de cisaillement est maximale pour :

$$z \approx 0,78b \quad (\text{II.6})$$

et vaut :

$$\tau_{\max} \approx 0,31 \times p_{\max}. \quad (\text{II.7})$$

Dans notre cas d'étude, avec la géométrie de l'aube et le matériau qui la constitue, les constantes désignées dans les équations précédentes sont égales à :

- $E_1 = E_2 = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$  ;
- $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  ;
- $R_1 = 1,74 \times 10^{-2} \text{ m}$  ;
- $R_2 = 1,84 \times 10^{-2} \text{ m}$  ;
- $L = 2,50 \times 10^{-2} \text{ m}$ .

On obtient donc les résultats analytiques affichés dans le tableau II.2 en fonction de la force de contact appliquée sur les deux cylindres :

| $F$ [N]          | 30   | 50   | 65    | 80    | 100   | 150   |
|------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $p_{\max}$ [MPa] | 68,5 | 88,5 | 100,8 | 111,9 | 125,1 | 153,2 |

TABLEAU II.2 – Pression de contact maximale en fonction de l'effort appliqué (contact cylindre-cylindre).

Dans le cas où l'on a désormais un contact cylindre-plan, l'expression de la pression de contact maximale reste la même, sauf que le plan est équivalent à un cylindre de rayon infini et implique donc que  $R_2 = \infty$  et  $R \equiv R_1$ . On obtient ainsi les résultats au sein du tableau II.3 en fonction de la force de contact appliquée sur le cylindre et le plan :

| $F$ [N]          | 30   | 50   | 65   | 80   | 100  | 150 |
|------------------|------|------|------|------|------|-----|
| $p_{\max}$ [MPa] | 49,2 | 63,4 | 72,3 | 80,2 | 89,7 | 110 |

TABLEAU II.3 – Pression de contact maximale en fonction de l'effort appliqué (contact cylindre-plan).

La pression de contact diminue d'environ 30 % par rapport à un contact cylindre-cylindre. C'est donc cette solution qui est retenue pour la géométrie des stellites des aubes pour le banc d'essai. En effet, compte-tenu des efforts de contact normaux connus exercés lors du montage des aubes, et des niveaux souhaités pour le banc d'essai (cf. efforts dans les tableaux II.2 et II.3), cette solution permet de limiter les contraintes maximales appliquées sur les surfaces de contact des talons par rapport à la solution de contact cylindre-cylindre, et par la même occasion l'usure prématurée des surfaces de contact qui aurait pu en découler. L'option de deux plans en contact n'a pas été évoquée puisque celle-ci rend compliqué le contrôle des conditions du contact aussi bien expérimentalement que numériquement.

## 2.2 Conception de l'aube et du système de précharge

La pièce par laquelle la conception a débuté n'est autre que l'aube, dont trois seront mises en place sur le banc d'essai académique, ce qui permet d'avoir une aube centrale, en torsion

pure, en contact avec deux aubes adjacentes, qui sont soumises en plus à de la flexion (cf. figure IV.3 abordée dans le chapitre IV).

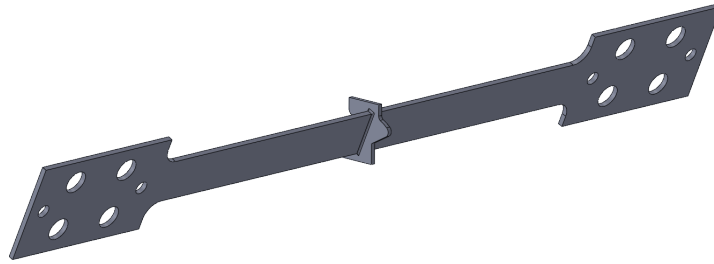


FIGURE II.12 – CAO de l'aube monobloc.

Le premier choix est d'avoir une aube symétrique, c'est-à-dire avec deux pieds de part et d'autre du talon. Cela permet d'une part d'éviter une flexion trop importante de l'aube lors du chargement du talon, et également de maîtriser le mieux possible les conditions de contact entre les talons, qui passe par un espacement et un alignement précis de ceux-ci. La géométrie du corps de l'aube est simplifiée : il n'a plus sa forme aérodynamique mais celle d'une poutre fine de section rectangulaire et d'épaisseur constante égale à 3 mm pour faciliter la fabrication de la pièce, pour une longueur totale de 535 mm, la section libre lorsque les pieds sont encastrés étant de 335 mm. Les pieds sont en forme de mors d'éprouvette pour maximiser les surfaces en contact lors de l'encastrement, afin d'éviter l'introduction d'un amortissement par leur biais. Les perçages visibles ont deux fonctions : ceux de diamètre supérieur servent au passage des vis pour le serrage qui encastré les pieds des aubes, tandis que ceux de diamètre inférieur servent à leur positionnement à l'aide de pions (évoqué en détails dans le paragraphe suivant). Enfin, la géométrie du talon est celle du septième étage de la turbine basse-pression du moteur LEAP-1A, mais dont l'épaisseur est constante et les léchettes ont été retirées. Les surfaces des stellites, qui constituent les interfaces de contact privilégiées du talon lors du fonctionnement moteur sur les aubes réelles, possèdent une surépaisseur qui n'est pas ré-usinée lors de la fabrication. Cette particularité de la géométrie du talon est conservée sur les aubes du banc d'essai, ce qui constitue un contact de Hertz de type cylindre-plan. Les plans de l'aube sont visibles en annexe D, en complément de la figure II.12.

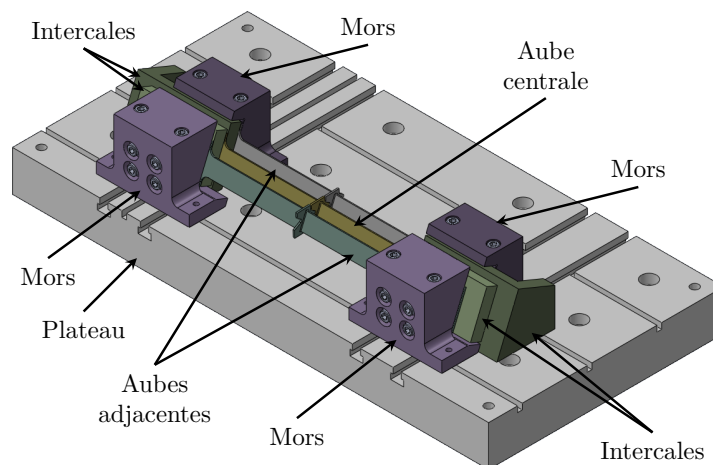


FIGURE II.13 – Vue globale des pièces du banc d'essai.

Ensuite, les pièces autour des aubes destinées à garantir le positionnement et l'encastrement de celles-ci ont été conçues de sorte que leur géométrie reste assez simple pour faciliter leur

fabrication, limiter leur nombre et obtenir une précision d'usinage puis d'assemblage élevée (voir figure II.13). L'objectif est aussi d'avoir des options de réglage possibles afin de compenser d'éventuels défauts d'usinage. Ainsi, un système de mors et d'intercales vient serrer les pieds des aubes à l'aide de quatre vis qui traversent horizontalement l'ensemble, l'objectif étant d'être le plus proche possible d'un encastrement parfait, sans amortissement parasite. Des vis perpendiculaires à ceux citées précédemment viennent encaster les mors au plateau, scellant donc l'ensemble. Les aubes sont donc serrées entre des mors et des intercales dont la géométrie impose l'espacement entre leurs pieds, et donc le jeu entre les talons, lors de leur mise en place. Le positionnement des aubes visible sur la figure II.14 se fait à l'aide de pions de centrage et de positionnement placés entre celles-ci, les intercales et les mors. Des cales pelables spécifiquement usinées pour ce besoin sont placées entre les pieds des aubes et les intercales pour gérer l'espacement des aubes, et donc faire varier le niveau de précharge statique appliqué sur celles-ci.

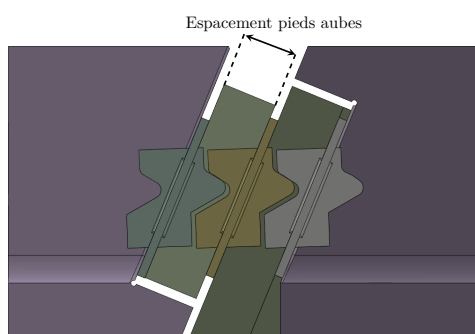


FIGURE II.14 – Vue des aubes entre les mors et les intercales.

Le plateau comporte deux paires de deux rainures en T parallèles entre elles, où viennent se glisser des tasseaux pour que les vis servant à encaster les mors au plateau puissent serrer l'ensemble. Il y a en plus une rainure plus étroite et moins profonde située d'un côté entre les rainures évoquées précédemment, servant à garantir l'isostatisme des pièces pour ne pas sur-contraindre le montage, ainsi qu'une troisième rainure perpendiculaire à toutes les autres destinée à permettre le bon alignement des mors placés sur le plateau (voir figure II.15). Les différents perçages visibles sur la surface du plateau servent à le visser sur un marbre.

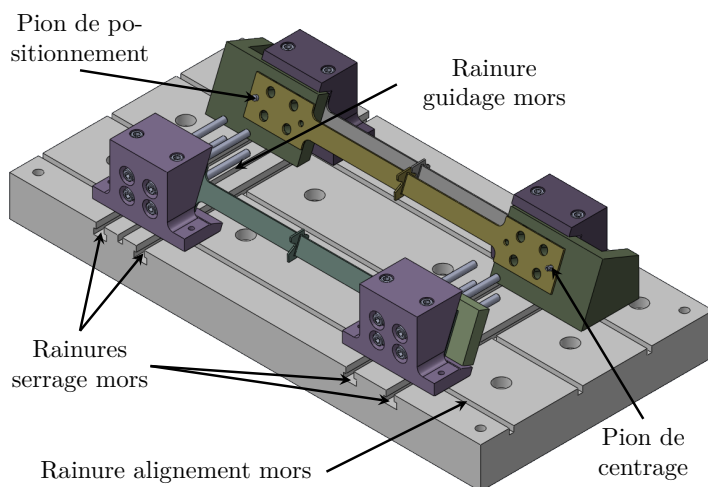


FIGURE II.15 – Indication des parties fonctionnelles du banc d'essai.

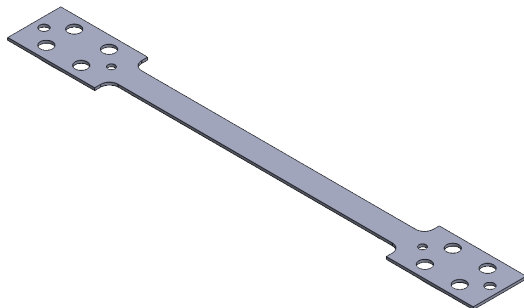
Le tableau II.4 rapporte les choix de conception énoncés précédemment sous la forme d'une analyse fonctionnelle, regroupés dans trois catégories de fonctions spécifiques. La dernière nommée modularité s'oriente plutôt vers les perspectives d'évolution du banc dans le cas de futures campagnes d'essai.

|               | Fonction                                | Choix   |
|---------------|---|---|
| Mise en place | Mise en position des aubes              | Pions de positionnement   |
|               | Mise en position des mors et intercales | Pions et rainures de guidage  |
|               | Alignement des mors                     | Gorge et pions  |
|               | Encastrement des aubes                  | Serrage de vis traversant les mors et intercales au plateau                           |
|               | Encastrement du plateau                 | Vissage sur un marbre   |
|               | Répétabilité du montage                 | Protocole de montage et de serrage  |
| Mesures       | Réglage de la précharge statique        | Cales pelables  |
|               | Mesure de la précharge statique         | Jauges de déformation   |
|               | Mesure du positionnement des talons     | Comparateur numérique guidé   |
|               | Excitation de la structure              | Pot vibrant   |
|               | Mesure de l'amplitude vibratoire        | Vibromètre laser  |
|               | Contrôle des réponses vibratoires       | Système d'acquisition avec sinus pas à pas et asservissement de la force d'excitation |
| Modularité    | Maîtrise de la température              | Installation du banc dans une salle à la température et l'humidité contrôlées         |
|               | Accueil de plus de 3 aubes              | Intercales supplémentaires nécessaires  |
|               | Autres géométries de talon              | Fabrication de nouvelles aubes nécessaire   |

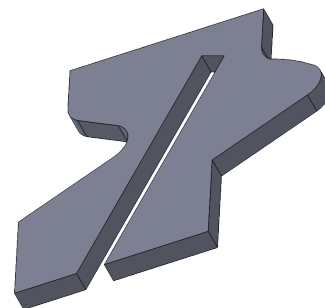
TABLEAU II.4 – Fonctions et solutions techniques du banc d'essai.

### 2.3 Fabrication des pièces

La complexité de fabrication des aubes en une seule pièce monobloc implique un usinage de celles-ci en deux parties séparées. Ainsi, chaque aube et son talon sont découpés individuellement afin d'être assemblés ensuite à la manière de l'empennage d'une fléchette (voir figure II.16 ci-dessous).



(a) Aube seule sans talon.



(b) Talon.

FIGURE II.16 – Géométrie de l'aube et du talon séparés.

Le talon est glissé au centre de l'aube et il est fixé sur celle-ci de sorte à se rapprocher le plus possible d'un encastrement. Pour ce faire, une solution mécano-vissée est exclue car elle impliquerait l'ajout de pièce supplémentaires pour le maintien du talon, induisant un parasitage potentiel des mesures lors des essais expérimentaux. Le collage à l'aide d'une colle appropriée permettrait éventuellement d'avoir un maintien suffisant, malgré l'ajout d'un ajout d'amortissement qui serait cependant connu et mesurable, en faisant par exemple l'hypothèse que celui-ci vaut environ  $1 \times 10^{-3}$ , tel que cela a été mesuré avec une colle epoxy AV119 [1] (voir figure II.17 ci-dessous).

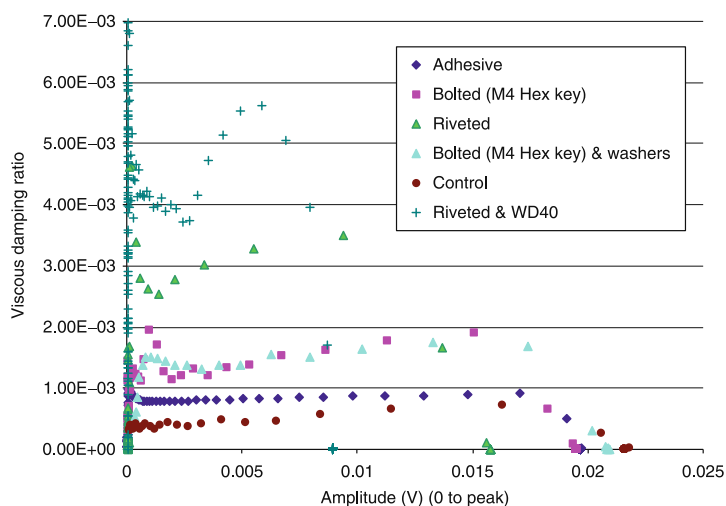


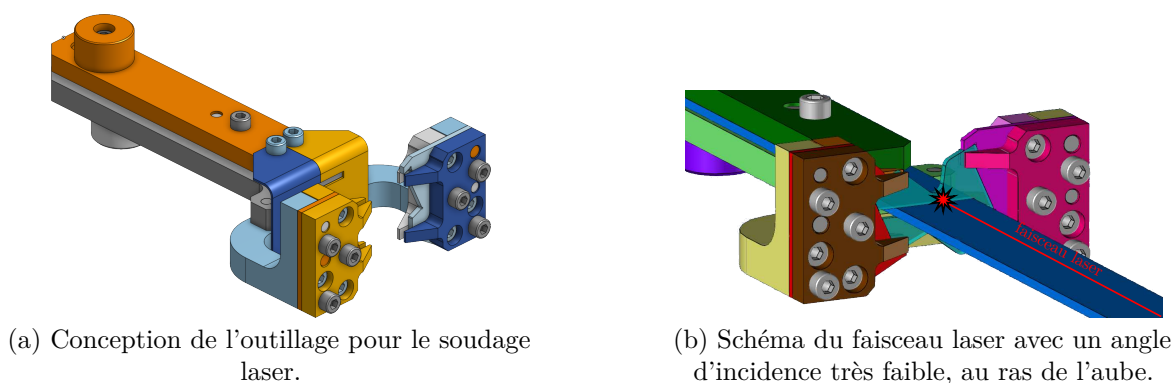
FIGURE II.17 – Évolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude d'excitation d'une poutre selon le type d'encastrement [1].

La dernière option consiste à réaliser des cordons de soudure de part et d'autre du talon, cependant le risque principal de ce procédé est une déformation des pièces liées aux contraintes thermiques importantes lors du soudage à l'arc électrique, avec des technologies classiques telles que l'électrode enrobée ou avec un gaz de protection de l'électrode (MIG-MAG ou TIG). Deux technologies de soudure permettent de limiter fortement ce risque tout en effectuant une soudure précise, sans métal d'apport à la différence des technologies évoquées précédemment : le soudage par faisceau d'électrons et le soudage laser. La seconde est la plus répandue, et donc celle qui a été adoptée pour le soudage de chacune des aubes et de leur talon. Ce choix de procédé de fabrication implique d'avoir un outillage pour le soudage afin de positionner correctement le talon au centre de l'aube. Pour réaliser l'usinage des pièces, l'entreprise Micro Érosion a proposé une découpe par électroérosion au fil dans des tôles de 3 mm d'épaisseur en acier inoxydable de nuance 304L<sup>3</sup>, l'outillage est lui usiné dans la nuance d'acier D2<sup>4</sup>.

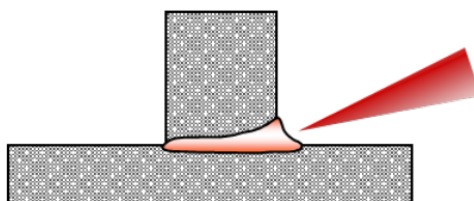
Comme le montre les images en trois dimensions visible en figure II.18, l'outillage se compose d'une plateforme où repose la moitié d'une aube, une pièce symétrique à cette plateforme vient ensuite encastrement cette moitié de l'aube, le reste des pièces sert à positionner le talon perpendiculairement à l'aube et le maintenir pendant la réalisation de la soudure. La complexité de cet outillage repose sur la nécessité de laisser passer le faisceau laser qui arrive par le côté non encastrement de l'aube, aucune pièce ne doit donc obstruer son passage.

3. dénomination selon l'*American Iron and Steel Institute* (AISI), dénomination Z3CN1810 selon l'Association française de normalisation (AFNOR).

4. dénomination selon l'*American Iron and Steel Institute* (AISI), dénomination Z160CDV12 selon l'Association française de normalisation (AFNOR).

FIGURE II.18 – Outillage pour le soudage laser © *Micro Érosion*.

L'entreprise Irepa Laser se charge de la soudure laser et propose de réaliser deux cordons de soudure pour lier le talon à l'aube (voir figures en annexe E). L'objectif est d'avoir une soudure dite débouchante, c'est-à-dire que le cordon de soudure traverse le talon sur toute son épaisseur (voir l'illustration sur la figure II.19). Avant de réaliser la soudure des talons sur les aubes, l'entreprise a d'abord mené une étape de recherche et de validation des paramètres de soudage adéquats, notamment la puissance du faisceau laser, sa vitesse de déplacement, son angle d'incidence, sa trajectoire, tout en veillant à limiter les déformations liées aux contraintes thermiques.

FIGURE II.19 – Schéma d'une soudure laser monopasse débouchante © *Irepa Laser*.

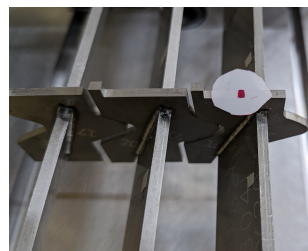
L'entreprise *COMERA* s'est chargée de fabriquer les autres pièces du banc telles que le plateau, les mors et les intercales, qui ont été usinées par des procédés plus traditionnels.

### 3 Essais expérimentaux préliminaires

Une fois que l'ensemble des pièces du banc d'essai a été réceptionné, la préparation des essais dynamiques peut commencer, celle-ci se décompose en plusieurs étapes. La première étape de réception est destinée à vérifier que la fabrication des différentes pièces est conforme aux tolérances voulues, et que l'assemblage est correct. Pour vérifier les conditions limites du banc d'essai, notamment au niveau des pieds des aubes encastrés entre les mors et intercales, ou encore au contact entre les talons, des films de mesure de pression FUJIFILM Prescale peuvent être utilisés, comme cela a déjà été le cas pour la mesure du champ de pression sur l'interface de contact entre le pied d'une aube et un disque dans le cadre de la thèse de Charleux [29] par exemple. Pour ce faire, des films de type *Medium Pressure* (MS) prévus pour une plage de pression de 10 à 50 MPa ont été utilisés (voir fiche d'instruction en annexe F). On peut constater que le serrage des mors et des intercales permet d'exercer une pression sur la plupart des surfaces des pieds des aubes, ce qui permet d'obtenir un encastrement maîtrisé (voir figure II.20a). De plus, le film de mesure de pression placé au niveau du contact entre les talons permet de visualiser la localisation du contact, qui est réduite (voir figure II.20b).



(a) Film de mesure de pression au pied d'une aube.



(b) Film de mesure de pression au niveau du talon.

FIGURE II.20 – Utilisation de films de mesure de pression sur le banc d'essai.

### 3.1 Analyses modales

Les analyses modales expérimentales représentent la deuxième étape de préparation des essais dynamiques. L'objectif est double : d'une part vérifier que les fréquences propres des aubes expérimentales correspondent au modèle numérique construit par la méthode des éléments finis, qui est monobloc, contrairement aux aubes expérimentales dont leur talon a été soudé sur celles-ci. Et d'autre part vérifier que les aubes expérimentales présentent une faible dispersion de leur modes propres, ce qui indiquerait une bonne reproductibilité du procédé de fabrication, et que les aubes peuvent être considérées comme identiques les unes par rapport aux autres.

#### 3.1.1 Aubes en condition libre

La première configuration testée est celle de l'aube en configuration libre, elle est alors suspendue par des fils en nylon à une potence (voir figure II.21).

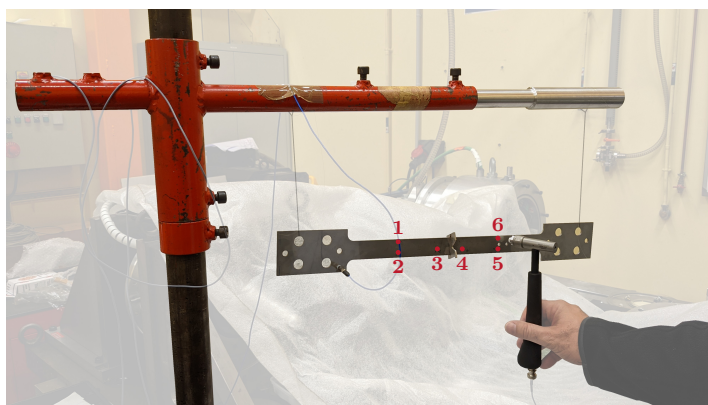


FIGURE II.21 – Positionnement d'une aube en configuration libre-libre avec indication des points d'impact (•).

Les analyses modales expérimentales des aubes sont menées à l'aide d'un marteau de choc<sup>5</sup> et d'un accéléromètre<sup>6</sup> relié à un amplificateur de puissance ICP®<sup>7</sup>, et fixé sur l'aube à l'aide d'une embase magnétique. La chaîne de mesure est schématisée sur la figure H.1 en annexe H. Comme on peut le voir sur la figure II.21, six points d'impact ont été repérés sur l'aube afin d'exciter l'ensemble des modes propres sur la plage de fréquence de mesure qui s'étend jusqu'à mille hertz.

5. Brüel & Kjær Type 8206-001.

6. PCB ICP® M353B18.

7. PCB Piezotronics modèle 482C05.



Le signal d'entrée est celui du marteau de choc et correspond à une force, tandis que le signal de l'accéléromètre est celui de sortie et correspond évidemment à une accélération, tous deux dans le domaine temporel. La mesure est déclenchée automatiquement lors de l'impact au marteau de choc, un fenêtrage rectangulaire est utilisé, tandis que celui pour le signal de l'accéléromètre est exponentiel. Ces deux signaux sont exprimés dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformation de Fourier rapide, la fonction de transfert  $h(\omega)$  s'écrit donc :

$$h(\omega) = \frac{a(\omega)}{f(\omega)} \quad (\text{II.8})$$

où  $a(\omega)$  et  $f(\omega)$  sont respectivement les signaux complexes dans le domaine fréquentiel de l'accéléromètre et du marteau de choc,  $\omega$  étant la pulsation en  $\text{rad s}^{-1}$ .

Le gain en décibel de cette fonction de transfert est calculé afin de visualiser plus facilement les fréquences de résonance et d'anti-résonance de la structure, grâce à une échelle logarithmique :

$$G = 20 \log h(\omega) \quad (\text{II.9})$$

Les réponses fréquentielles des trois aubes en configuration libre sont visibles sur les figures I.1, I.2 et I.3 en annexe I. Si l'on compare les fréquences propres des aubes obtenues expérimentalement à celles du modèle numérique, on obtient un écart de 2,00 % environ pour les quatre premiers modes propres, avec un maximum pour le premier mode de torsion où l'écart s'élève à 3,56 %. Le modèle numérique est donc légèrement plus raide. Si l'on compare les fréquences expérimentales des aubes uniquement entre elles, il y a moins de 0,50 % d'écart, c'est pourquoi il n'a pas été jugé utile de l'afficher dans le tableau II.5 ci-dessous.

| Mode | Numérique [Hz] | Expérimental [Hz] |        |        | Écart num.<br>vs exp. [%] |
|------|----------------|-------------------|--------|--------|---------------------------|
|      |                | Aube 1            | Aube 2 | Aube 3 |                           |
| 1F   | 44,2           | 43,8              | 43,6   | 43,6   | 1,36                      |
| 2F   | 134,7          | 132,6             | 132,4  | 132,5  | 1,71                      |
| 1T   | 235,8          | 228,3             | 227,5  | 227,8  | 3,56                      |
| 3F   | 262,4          | 256,9             | 256,9  | 256,9  | 2,10                      |

TABLEAU II.5 – Comparaison des fréquences propres numériques et expérimentales des aubes en configuration libre.

Enfin, le taux d'amortissement des aubes est déterminé pour chacun des pics de résonance à l'aide d'une méthode itérative d'extraction des paramètres modaux [45]. Elle consiste en premier lieu à écrire une fonction de réponse en fréquence théorique  $h_{\text{th}}(\omega)$  comme le ratio de deux polynômes :

$$h_{\text{th}}(\omega) = \frac{a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n}{1 + b_1\lambda + \dots + b_m\lambda^m} \quad (\text{II.10})$$

où  $\lambda = i\omega$ , et  $a_j$  et  $b_j$  sont des coefficients réels inconnus. L'ordre du numérateur  $n$  et celui du dénominateur  $m$  sont choisis en fonction du nombre de modes présents sur la bande de fréquence analysée. La forme de  $h_{\text{th}}(\omega)$  est approchée de celle de la réponse en fréquence expérimentale  $h$  par une minimisation d'une fonction d'erreur pondérée en résolvant les inconnues  $a_j$  et  $b_j$  :

$$(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = \arg \min \sum_{k=1}^{N_\omega} w_k |h_{\text{th}}(\omega_k) - h(\omega_k)|^2 \quad (\text{II.11})$$



où  $N_\omega$  désigne le nombre de fréquences d'excitation mesurées dans la plage d'intérêt. L'algorithme utilisé pour la recherche itérative est celui de Gauss-Newton, et permet de résoudre le problème direct de minimisation de la somme pondérée de l'erreur quadratique entre les points des réponses théorique et expérimentale. Une fois que les coefficients polynomiaux sont trouvés, les résidus et les pôles du développement partiel du ratio des deux polynômes sont obtenus. Les parties réelle et imaginaire des pôles identifiés sont dérivés ensuite pour extraire les fréquences propres et les taux d'amortissement, puisque le développement partiel peut être identifié avec l'expression classique de  $h_{th}(\omega)$  en termes de paramètres modaux :

$$h_{th}(\omega) = \sum_{k=1}^{N_\omega} \frac{A_k}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\bar{A}_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} + U + \frac{V}{\omega^2} \quad (\text{II.12})$$

où  $\lambda_k = -\zeta\omega_k + i\omega_k\sqrt{(1-\zeta^2)}$  pour le  $k$ -ième pôle et  $\bar{\lambda}_k$  son complexe conjugué,  $A_k$  représente le résidu modal complexe et  $\bar{A}_k$  son complexe conjugué. Les termes  $U$  et  $V$  servent à prendre en compte l'influence des modes en dehors de la plage de fréquence, tandis que les résidus modaux sont utilisés pour identifier les déformées modales.

En résumé, une courbe est calculée pour approximer la réponse en fréquence à l'aide d'une fonction polynomiale, les fréquences propres et taux d'amortissement sont identifiés sur celle-ci. Un pourcentage d'erreur sur l'approximation de la réponse permet de savoir si les valeurs déterminées sont crédibles ou non. Les valeurs de taux d'amortissement relevées sur la réponse fréquentielle du point d'impact numéro 3 pour chaque aube sont listées dans le tableau II.6 ci-après.

| Mode | Taux d'amortissement $\zeta$ |                       |                       |
|------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|
|      | Aube 1                       | Aube 2                | Aube 3                |
| 1F   | $2,80 \times 10^{-3}$        | $2,75 \times 10^{-3}$ | $2,46 \times 10^{-3}$ |
| 2F   | $1,65 \times 10^{-3}$        | $2,40 \times 10^{-3}$ | $2,91 \times 10^{-3}$ |
| 1T   | $1,67 \times 10^{-3}$        | $1,40 \times 10^{-3}$ | $1,33 \times 10^{-3}$ |
| 3F   | $2,65 \times 10^{-4}$        | $2,40 \times 10^{-4}$ | $7,23 \times 10^{-4}$ |

TABLEAU II.6 – Taux d'amortissement mesuré pour chaque mode propre et chaque aube en configuration libre.

Les taux d'amortissement mesurés pour les trois aubes sont globalement du même ordre de grandeur, la précision étant dépendante de la qualité de la mesure de la réponse fréquentielle lors de l'analyse modale, et de la précision de l'approximation des réponses fréquentielles lors de l'identification modale. Pour le premier mode de flexion, qui est le mode d'intérêt, l'écart entre les aubes 1 et 2 est inférieur à 2% tandis qu'il est de 12% entre les aubes 1 et 3. Connaître l'amortissement structural de chaque aube permettra de déterminer l'amortissement lié aux autres pièces du banc d'essai lors de leur montage où leurs pieds seront encastrés, sachant que cet amortissement externe est prévu pour être le plus faible possible.

On peut donc considérer que les aubes expérimentales, dont la fabrication a été réalisée avec une découpe par électro-érosion et une soudure laser du talon, est équivalente à une aube avec talon monobloc. De plus, les aubes expérimentales peuvent être considérées comme identiques les unes par rapport aux autres, le procédé de fabrication est donc répétable.

### 3.1.2 Aubes en condition encastrée

La seconde configuration testée pour les analyses modales expérimentales est la configuration encastrée. L'encastrement successif de chacune des aubes seules se fait simplement en les plaçant entre les mors du banc d'essai (voir figure II.22 ci-dessous).

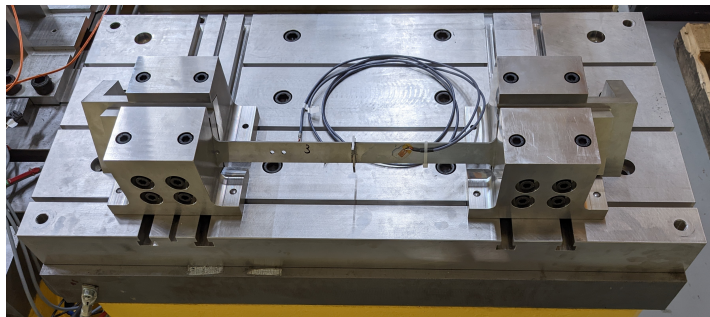


FIGURE II.22 – Positionnement de l'aube 3 seule en configuration encastrée.

On utilise le même marteau de choc mais cette fois l'accéléromètre est remplacé par le vibromètre laser<sup>8</sup> pour l'analyse modale expérimentale. La chaîne de mesure est schématisée en figure H.2 en annexe H. L'encastrement étant particulièrement important puisqu'il définit les conditions limites de l'aube, et donc directement les fréquences propres de celle-ci, il est nécessaire de définir un ordre de serrage des vis ainsi qu'un couple adapté à l'aide d'une clef dynamométrique, afin de garantir la répétabilité du montage. Pour ce faire, à l'aide du document [50], il a été déterminé qu'un couple de serrage maximal de 79 N m était applicable sur les vis utilisées<sup>9</sup> pour serrer les pieds des aubes ainsi que les mors au plateau. Il a été décidé d'appliquer un couple de serrage environ égal à 50 % de cette valeur maximale, soit 40 N m.

Les fréquences des quatre premiers modes propres de chacune des aubes en configuration encastrée sont listées dans le tableau II.7 ci-dessous, et comparées à celles calculées numériquement à l'aide du modèle éléments finis. Les réponses fréquentielles de l'aube 3 selon le point de mesure sont visibles sur la figure I.4 en annexe I.

| Mode | Numérique [Hz] | Expérimental [Hz] |        |        | Écart num.<br>vs exp. [%] |
|------|----------------|-------------------|--------|--------|---------------------------|
|      |                | Aube 1            | Aube 2 | Aube 3 |                           |
| 1F   | 128,1          | 126,4             | 123,2  | 123,4  | 3,83                      |
| 2F   | 377,6          | 366,7             | 365,4  | 364,9  | 3,36                      |
| 3F   | 707,1          | 694,7             | 692,4  | 691,9  | 2,15                      |
| 1T   | 861,8          | 846,2             | 849,1  | 848,3  | 1,81                      |

TABLEAU II.7 – Comparaison des fréquences propres numériques et expérimentales des aubes en configuration encastrée.

On peut remarquer que les fréquences propres expérimentales des premiers modes de flexion ont un écart supérieur à 2 % avec les fréquences propres calculées numériquement, la fréquence du premier mode de torsion est quant à elle plus proche de la fréquence numérique. L'influence de l'encastrement est donc effectivement non négligeable, l'écart des fréquences ne

8. Polytec PSV-400.

9. Vis à tête cylindrique hexagonale creuse d'un diamètre de 10 mm, classe 12.9, en acier brut et lubrification sommaire (état de livraison), soit un coefficient de frottement estimé  $\mu = 0,15$ .

pouvant provenir que de celui-ci puisque les fréquences propres des aubes en condition libre est plus réduit. Par ailleurs, le modèle numérique est classiquement plus raide que les aubes expérimentales. De plus, il est à noter que ces fréquences propres ont été obtenues en réalisant l'analyse modale avec la présence des mors et des intercales pour reproduire l'encastrement. Le fait de ne pas intégrer ces pièces et d'encastrement numériquement les pieds des aubes augmente de façon conséquente les fréquences propres des aubes en configuration encastree (environ 20 %).

Les valeurs de taux d'amortissement relevées sur la réponse fréquentielle au point numéro 3 pour l'aube 3 sont listées dans le tableau II.8 ci-après. L'amortissement apporté par l'encastrement est insignifiant si l'on compare ces valeurs par rapport à celles mesurées sur les aubes en configuration libre. Ces valeurs serviront de comparaison par rapport aux taux d'amortissement mesurés sur les réponses fréquentielles dynamiques de l'assemblage des trois aubes.

| Mode | Taux d'amortissement $\zeta$ |
|------|------------------------------|
| 1F   | $2,08 \times 10^{-3}$        |
| 2F   | $3,18 \times 10^{-3}$        |
| 3F   | $2,84 \times 10^{-3}$        |
| 1T   | $1,73 \times 10^{-3}$        |

TABLEAU II.8 – Taux d'amortissement mesuré pour chaque mode propre de l'aube 3 en configuration encastree.

### 3.1.3 Assemblage des trois aubes

Juste avant de débiter les essais dynamiques, une analyse modale de l'assemblage des trois aubes encastrees, talons en contact, est réalisée à l'aide du marteau de choc et du vibromètre laser, dont la réponse est visible sur la figure II.23. Conformément à l'analyse modale numérique calculée sur ANSYS, on observe le premier mode de flexion aux alentours de 120 Hz, où les trois aubes vibrent ensembles (voir figure G.1 en annexe G). Deux groupes de pics de résonances à des fréquences supérieures sont visibles, ils correspondent à des deuxième et troisième modes de flexion. Ces modes-là ont pour particularité d'avoir des déformées différentes, c'est-à-dire que les aubes répondent ensembles, ou bien qu'une aube répond plus que les autres par exemple, ce qui a été ensuite visualisé par une excitation avec un sinus pas à pas sur les plages de fréquence concernées.

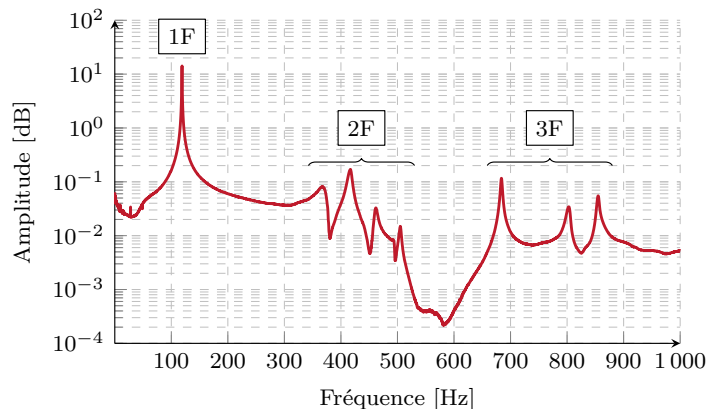


FIGURE II.23 – Analyse modale expérimentale de l'assemblage des trois aubes encastrees.

### 3.2 Essais de torsion

Les aubes ont été instrumentées avec des jauges d'extensométrie<sup>10</sup> collées à 45° afin de pouvoir mesurer la déformation de celles-ci lorsqu'elles sont montées sur le banc d'essai. En effet, l'objectif est de pouvoir relier la précharge statique appliquée sur les aubes, plus particulièrement le couple de torsion subit par l'aube centrale, afin d'estimer une force équivalente appliquée sur le talon. Afin de calibrer les jauges de déformation, des essais de torsion ont été menés sur une machine dédiée, la MTS Bionix® avec mors hydrauliques série 647 (voir figure II.24). Des embouts en aluminium ont été usinés pour s'insérer entre les mors et constituer un assemblage boulonné avec les pieds des aubes pour pouvoir placer les aubes au sein de la machine. L'utilisation de l'aluminium comme matériau pour les embouts permet de préserver l'intégrité des aubes en cas d'incident lors des essais, étant donné que ce matériau est plus malléable que l'acier inoxydable qui constitue les aubes. La machine de torsion est pilotée en couple par un opérateur, et l'angle de torsion obtenu par l'aube est mesuré. Lors du serrage des mors, on s'assure qu'aucune force de traction n'est appliquée sur l'aube avant de commencer les essais de torsion.



FIGURE II.24 – Aube insérée entre les mors de la machine de torsion.

Les déformations obtenues sont réunies dans le tableau II.9, elles serviront pour la calibration et son suivi, l'estimation de la force équivalente appliquée sur le talon liée à la précharge statique, est détaillée dans la sous-section II.3.3.

| Couple [N m] | Déformations [ $\mu\text{m m}^{-1}$ ] |                    | Écart [%] |
|--------------|---------------------------------------|--------------------|-----------|
|              | Essais                                | ANSYS              |           |
| 0,5          | $4,81 \times 10^1$                    | $4,30 \times 10^1$ | 10,65     |
| 1,0          | $9,72 \times 10^1$                    | $8,60 \times 10^1$ | 11,51     |
| 1,5          | $1,44 \times 10^2$                    | $1,30 \times 10^2$ | 9,45      |
| 2,0          | $1,90 \times 10^2$                    | $1,70 \times 10^2$ | 10,60     |
| 2,5          | $2,41 \times 10^2$                    | $2,15 \times 10^2$ | 10,61     |
| 3,0          | $2,85 \times 10^2$                    | $2,60 \times 10^2$ | 8,81      |
| 3,5          | $3,33 \times 10^2$                    | $3,00 \times 10^2$ | 9,88      |
| 4,0          | $3,79 \times 10^2$                    | $3,45 \times 10^2$ | 9,04      |
| 4,5          | $4,27 \times 10^2$                    | $3,90 \times 10^2$ | 8,58      |
| 5,0          | $4,81 \times 10^2$                    | $4,32 \times 10^2$ | 10,24     |

TABEAU II.9 – Comparaison entre la déformation mesurée expérimentalement et calculée numériquement selon le couple de torsion appliqué.

Pour remonter à la déformation mesurée par les jauges, l'équation (II.13) suivante est

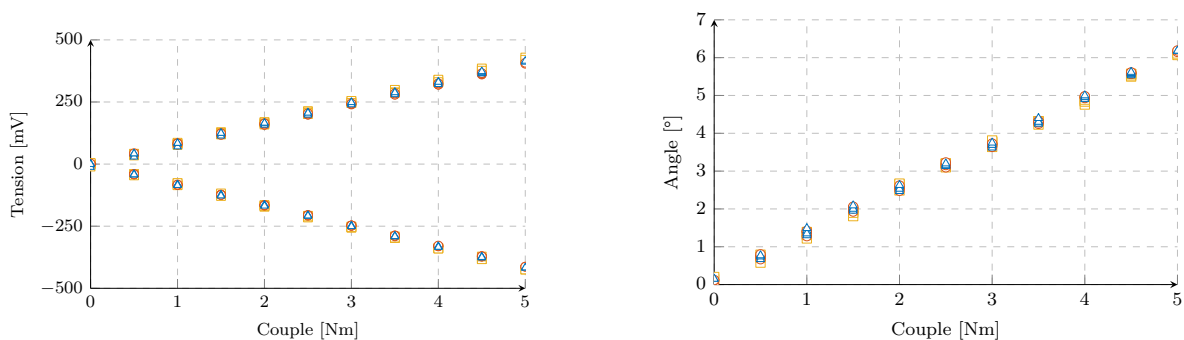
10. Micro-Measurements CEA-06-125UW-350.

employée :

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\gamma_{x\theta}}{2} = \frac{U_{\text{mes}}}{U_{\text{exc}}} \frac{4}{S_G \alpha} \quad (\text{II.13})$$

où  $U_{\text{mes}}$  désigne la tension indiquée par le voltmètre branché en sortie de l'amplificateur<sup>11</sup>,  $U_{\text{exc}}$  la tension d'alimentation des jauges de déformation fournie par l'amplificateur,  $S_G$  le facteur de jauge propre à celles-ci, et  $\alpha$  le coefficient de multiplication de l'amplificateur réglé à 200. En comparant la déformation obtenue sur la machine de torsion à celle calculée sur ANSYS, il y a un écart constant d'environ 10 % lié certainement aux conditions d'encastrement complexes à reproduire numériquement, puisque les pieds des aubes sont d'abord boulonnés à deux pièces en aluminium, elles-mêmes serrées dans les mors de la machine de torsion.

Les tensions des jauges mesurées sur chacune des aubes lors des essais sur la machine de torsion sont affichées sur la figure II.25a. Par ailleurs, ce sont au total deux cycles de chargement puis déchargement qui ont été appliqués sur chacune des aubes, afin d'observer l'évolution de la déformation et de l'angle de celles-ci, au cas où une déviation apparaîtrait, ce qui signifierait la présence d'un hystérésis.



(a) Évolution de la tension des jauges en fonction du couple appliqué.

(b) Évolution de l'angle en fonction du couple appliqué.

FIGURE II.25 – Mesures lors des essais de torsion, aubes 1 (□), 2 (○) et 3 (△).

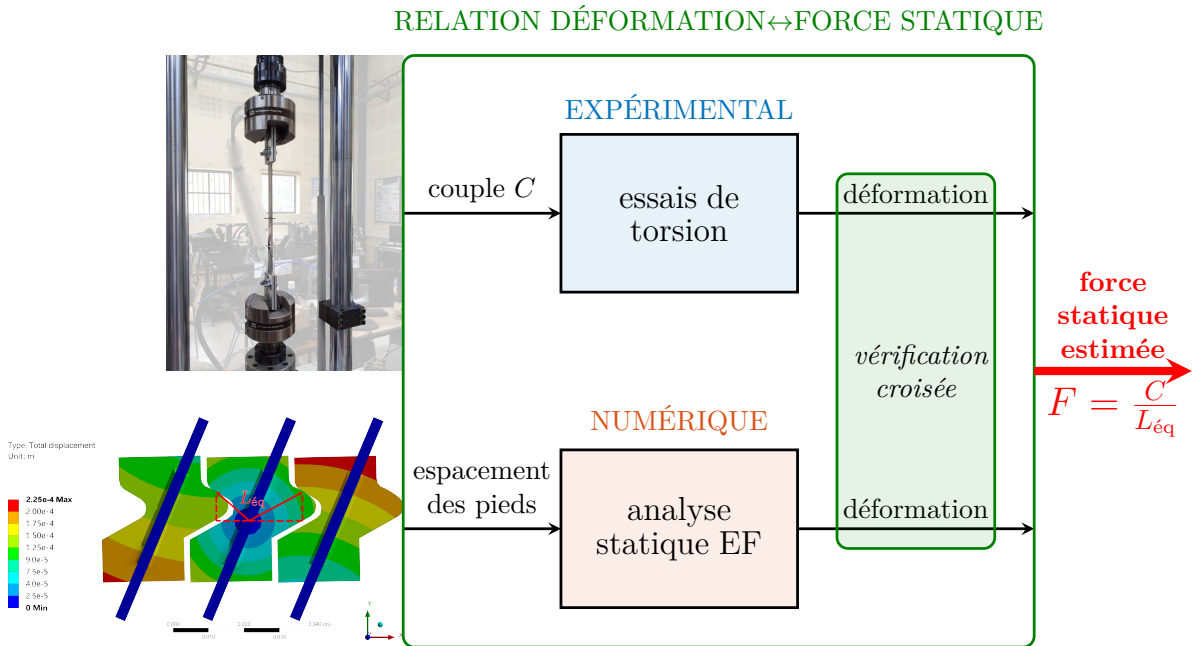
On remarque plusieurs choses : la déformation mesurée par les deux jauges collées sur chaque aube est d'amplitude équivalente et de signe opposé, ce qui est tout à fait cohérent au vu de leur collage. De plus, il y a une dispersion très négligeable des valeurs de déformation relevées, et ceci tout au long du couple de torsion appliqué. Enfin, toutes ces observations sont valables pour les trois aubes, ce qui indique que l'hypothèse selon laquelle celles-ci sont quasiment identiques est confirmée. De même, l'angle lié à la torsion de l'aube est affiché sur la figure II.25b pour chacune d'entre elles. Encore une fois, on note que l'hypothèse reste valable puisque les angles relevés sont très peu dispersés selon le couple de torsion appliqué sur chacune des aubes. Il n'y a pas non plus de phénomène d'hystérésis mesurable.

### 3.3 Calibration de la précharge statique

Afin de calibrer les niveaux de précharge statique appliqués lors du montage pour les essais dynamiques, avec les essais préliminaires de torsion et les analyses statiques sur ANSYS, la première étape consiste à déterminer la donnée commune parmi eux. Cette donnée est la déformation, mesurée par les jauges collées sur les aubes au cours des essais de torsion et lors du montage pour les essais dynamiques, ainsi que celle déterminée par le modèle éléments finis

11. Vishay modèle 2160.

sur ANSYS. La figure II.26 illustre la démarche entreprise.



Si l'on compare la configuration des essais de torsion à celle de l'assemblage pour les essais dynamiques, les conditions limites ne sont pas les mêmes. En effet, comme schématisé sur la figure II.27, pour la configuration des essais de torsion, le couple de torsion est appliqué à un des deux pieds tandis que l'autre est encastré, alors que pour la configuration des essais dynamiques, le couple de torsion est appliqué au centre de l'aube au niveau du talon avec les deux pieds encastrés.

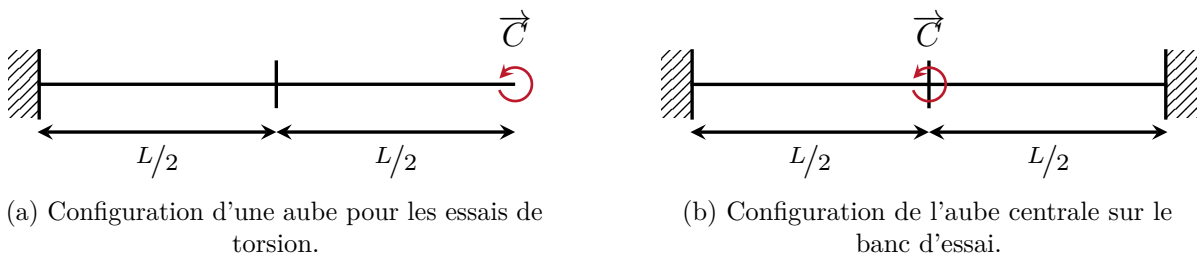


FIGURE II.27 – Différence de conditions limites entre les deux configurations évoquées.

De ce fait, pour un même couple de torsion exercé sur l'aube, la déformation obtenue est deux fois plus grande pour la configuration de l'essai de torsion par rapport à la configuration du montage des aubes sur le banc d'essai, et inversement. Il faut donc veiller à bien prendre en compte ce facteur deux pour les déformations obtenues lors de la calibration de la précharge statique.

L'objectif est maintenant d'exprimer une force de contact normale au talon équivalente au couple de torsion appliqué lors des essais. On utilise le bras de levier qui correspond à la distance entre l'axe de torsion de l'aube et les stellites du talon. Les valeurs de forces déterminées sont comparées à celles issues du calcul statique réalisé sur ANSYS en fonction de



l'espacement des pieds des aubes, tel que c'est le cas sur le banc d'essai, tout en enregistrant la déformation obtenue. La figure II.28 regroupe les valeurs de force calculées selon la configuration expérimentale et numérique.

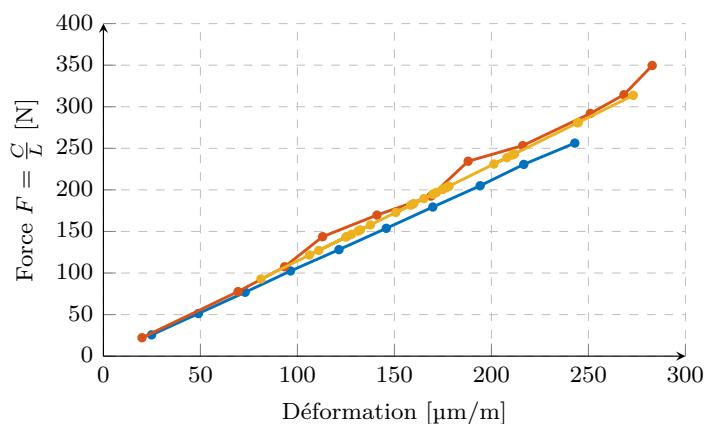


FIGURE II.28 – Estimation de la force normale appliquée sur les talons par la précharge statique en fonction de la déformation, essais de torsion (—), analyses statiques sur ANSYS (—), banc d'essai (—).

La corrélation entre les valeurs expérimentales et numériques est satisfaisante, avec un écart de 10 % maximum. La déformation permettra donc de quantifier la précharge statique pour chaque niveau d'espacement des pieds des aubes, par le biais d'une force équivalente exercée sur le talon de l'aube centrale, pour comparer avec le modèle numérique.

### 3.4 Métrologie et contrôle du montage

Les essais préliminaires achevés, l'étape suivante consistant à préparer la mise en place des essais est celle de la réception du banc d'essai. Il s'agit de vérifier différents critères par rapport aux spécificités prévues du banc d'essai, et notamment définir plusieurs types de mesures afin de vérifier les conditions limites, le positionnement des aubes, la précharge statique, etc. Ensuite, une matrice d'essais est constituée selon les différents paramètres qu'il est prévu de faire varier afin de balayer l'ensemble des configurations à tester.

La métrologie réalisée a pour vocation de contrôler le positionnement des aubes, plus particulièrement celui des talons. Pour ce faire, il est nécessaire de définir un protocole de mesure précis et répétable qui puisse être mis en application lors de l'assemblage des trois aubes pour les essais vibratoires.

Des cales pelables sont placées entre les pieds des aubes et les mors et intercales, elles servent à assurer précisément l'espacement des pieds, ce qui affecte directement le contact entre les talons, et donc la précharge statique appliquée sur l'assemblage des trois aubes. Au fur et à mesure que des feuillets sont retirés des cales pelables, la précharge appliquée sur les aubes par le contact entre les talons augmente, et ceci de manière contrôlée.

La procédure globale de montage des pièces du banc d'essai est détaillée étapes par étapes :

1. Encastrement du plateau sur un marbre à l'aide de dix vis ;
2. Placement de l'aube centrale sur les intercales avec pied à l'aide des pions de centrage et de positionnement ;
3. Placement de la deuxième intercale grâce aux pions ayant servi à positionner l'aube centrale ;

4. Placement d'une paire de mors et d'une aube adjacente positionnée à l'aide des pions de centrage et de positionnement, et associée à une paire de cales pelables ;
5. Placement de la seconde paire de mors et de la seconde aube adjacente positionnée à l'aide des pions de centrage et de positionnement, et associée à une paire de cales pelables ;
6. Rapprochement des aubes les unes aux autres pour le positionnement final ;
7. Serrage des vis verticales pour encastrer les mors au plateau ;
8. Serrage des vis horizontales traversant les pieds des aubes pour les encastrer et appliquer la précharge statique ;
9. Mesure du positionnement des talons (hauteur, angle) avec un comparateur ;
10. Correction de la hauteur des talons si besoin avec des cales à placer sous les mors et intercales ;
11. Relevé de la déformation statique mesurée par les jauges collées sur les aubes.

Un comparateur numérique<sup>12</sup> est fixé sur un support et placé sur le plateau du banc d'essai, une cale étalon sert à définir le zéro vertical du comparateur. Le pied est guidé par une équerre, elle-même fixée en butée contre une règle placée perpendiculairement à la direction des points de mesure qui définit le zéro horizontal. Le déplacement du comparateur le long des talons est mesuré par l'ajout successif d'autres cales étalons placées entre le pied du support de comparateur et la règle, ce qui permet de savoir précisément de quelle distance il a été déplacé sur les talons. La disposition du matériel employé pour ces mesures est visible sur la figure II.29.

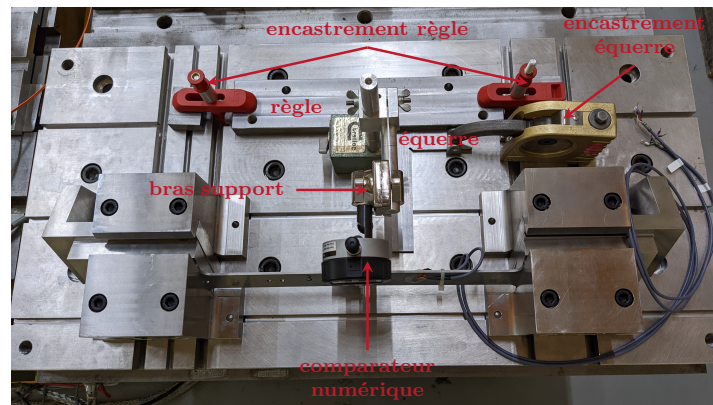


FIGURE II.29 – Mise en place pour la mesure du positionnement du talon sur une aube.

Si l'on résume les données mesurées lors du protocole avec le comparateur, testé dans un premier temps dans une configuration où uniquement l'aube numéro 2 est mise en place par exemple (voir figure II.29), cette mesure est découpée en trois étapes, représentées schématiquement sur la figure II.30, et l'on a :

- hauteur étalon : 69 mm  $\Rightarrow x_0 = 0$  mm ;
- hauteur point A :  $x_A = -1,406$  mm ;
- hauteur point B :  $x_B = -0,812$  mm ;
- distance entre les points A et B :  $y = 17,0$  mm ;
- différence absolue de hauteur :  $|\Delta x| = 0,594$  mm ;
- angle de la pente entre les points A et B :  $\alpha = \arctan\left(\frac{0,594}{17,0}\right) \approx 2,001^\circ$ .



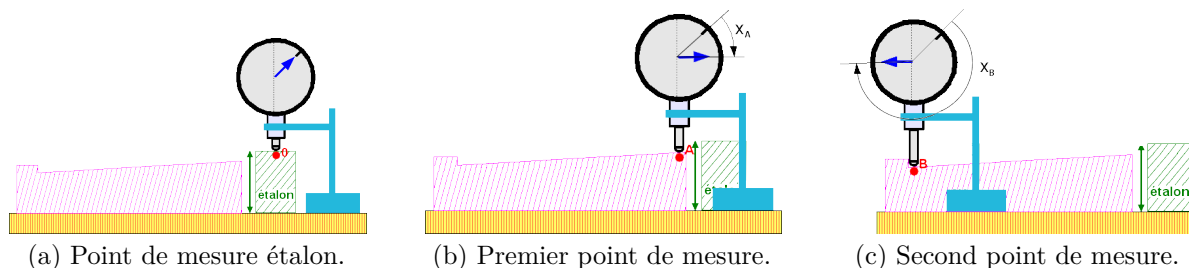


FIGURE II.30 – Étapes de mesure du positionnement du talon.

À titre de comparaison, la CAO du banc d'essai indique une pente de  $2,00^\circ$  entre ces deux points de mesure, pour cette configuration d'espacement des pieds des aubes.

Enfin, la déformation des aubes indiquée par les jauges sera une information complémentaire permettant de savoir si l'on a une symétrie du positionnement des aubes, dont le montage est montré sur la figure II.31, et donc si les talons sont préchargés statiquement de façon identique. Les niveaux de déformation permettront aussi de connaître le couple appliqué sur chaque aube grâce aux essais de torsion réalisés en amont.

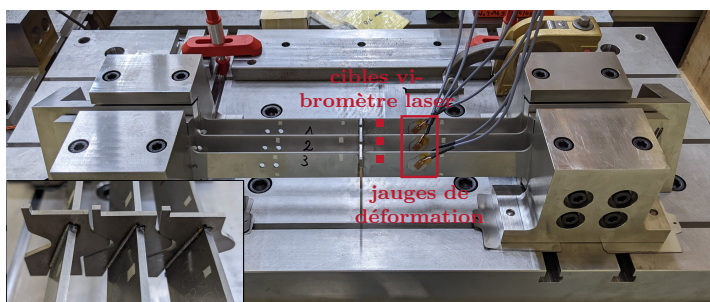


FIGURE II.31 – Montage du banc d'essai avec un zoom sur le positionnement des talons.

## 4 Essais dynamiques

Cette section porte sur les essais dynamiques, en commençant par détailler l'instrumentation mise en place pour la mesure des différentes données disponibles, ainsi que le système d'acquisition pour le contrôle de la force d'excitation. Parmi l'ensemble des réponses forcées obtenues lors de la campagne d'essais, seules quelques-unes sont présentées ici, le reste étant en annexe, pour se concentrer sur certaines réponses qui permettent de comprendre le comportement non linéaire de l'assemblage des trois aubes sur le banc d'essai. Enfin, quelques analyses complémentaires sont proposées, notamment sur la sensibilité de la précharge statique, et sur l'évolution du positionnement du talon de l'aube centrale en fonction de la précharge statique.

### 4.1 Matrice d'essais

Afin de constituer une matrice d'essais, il est nécessaires d'identifier les paramètres de réglage pour traiter l'ensemble des configurations à tester. Ces paramètres sont des données d'entrée telles que :

- l'espacement des pieds des aubes géré par les cales pelables, cela permet de remonter à

12. Mahr MarCator 1086 12,5 mm 0,001 mm.

la précharge statique appliquée sur les aubes. Une mesure de l'espacement des talons à l'aide de cales d'épaisseurs peut être réalisée en complément ;

- la force d'excitation du pot vibrant ;
- la plage de fréquence de l'excitation (choix du mode propre excité) et la nature de l'excitation (pseudo-random pour cibler les pics de résonance, sinus balayé pour le non linéaire).

Les données de sortie peuvent être séparées en deux catégories, statique et dynamique :

- la déformation des aubes mesurée par les jauges (statique) ;
- l'amplitude de déplacement des aubes mesurée par le vibromètre laser (dynamique).

La déformation des aubes enregistrée pendant la phase dynamique des essais pourra toutefois être exploitée si besoin.

Un exemple de matrice d'essais est proposé dans la table II.10 ci-dessous :

| N     | Espacement pieds [mm] | Force d'excitation [N] | Plage fréquence [Hz] |
|-------|-----------------------|------------------------|----------------------|
| 1     | 20,0                  | 0,5                    | 120-130 (1F)         |
| 2     | 20,0                  | 1,0                    | 120-130 (1F)         |
| ⋮     | ⋮                     | ⋮                      | ⋮                    |
| k     | 20,0                  | 4,0                    | 120-130 (1F)         |
| k+1   | 19,9                  | 0,5                    | 120-130 (1F)         |
| k+2   | 19,9                  | 1,0                    | 120-130 (1F)         |
| ⋮     | ⋮                     | ⋮                      | ⋮                    |
| k+n   | 18,0                  | 3,5                    | 120-130 (1F)         |
| k+n+1 | 18,0                  | 4,0                    | 120-130 (1F)         |

TABLEAU II.10 – Exemple de matrice d'essais.

Les cales pelables mesurent 2,0 mm d'épaisseur et sont composées de feuillets de 0,10 mm sur 1,5 mm, et de feuillets de 0,025 mm sur 0,50 mm. Il y a donc quinze feuillets de 0,10 mm et vingt feuillets de 0,025 mm, soit trente-cinq feuillets au total, ce qui signifie qu'il y a potentiellement autant niveaux d'espacement des pieds des aubes et donc des talons à tester. La variation des déformations mesurées par les jauges collées sur les aubes selon l'espacement des pieds appliqué par les cales pelables permettra d'ajuster les niveaux d'espacement à tester dans la matrice d'essais. La répétabilité des essais vibratoires sera aussi à vérifier sur quelques jeux de paramètres.

## 4.2 Instrumentation et protocole de mesure

La chaîne de mesure pour les essais vibratoires est schématisée sur la figure II.32. On retrouve les jauges pour la mesure statique de la déformation des aubes, le conditionneur utilisé étant le même que pour les essais de torsion. Le choix de l'actionneur destiné à réaliser l'excitation des aubes sur le banc d'essai s'est porté sur un pot vibrant<sup>13</sup>, qui est le moyen le plus pratique pour ce genre de manipulation, celui-ci nécessite un amplificateur de puissance<sup>14</sup>. Bien que l'utilisation d'un actionneur à excitation électromagnétique sans contact aurait pu être possible,

13. Brüel & Kjær Type 4809.

14. Brüel & Kjær Type 2706.

son inconvénient est la variation de la force d'excitation en fonction de la distance de l'aimant cible, qui peut être préjudiciable lors des essais. L'utilisation d'actionneurs piézoélectriques aurait pu être envisagée également, mais elle est plus contraignante à mettre en place.

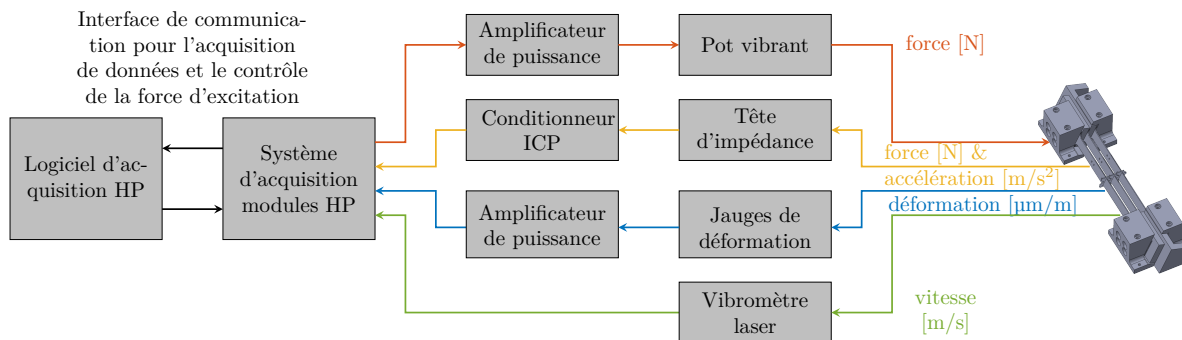


FIGURE II.32 – Chaîne de mesure pour les essais dynamiques.

Une tête d'impédance<sup>15</sup> est collée sur une des deux aubes adjacentes, celle-ci mesure la force d'excitation appliquée par le pot vibrant ainsi que l'accélération, elle nécessite un conditionneur ICP®<sup>16</sup>. Le pot vibrant et son amplificateur ont été remplacés au cours des essais par d'autres modèles<sup>17, 18</sup>, de même pour la tête d'impédance et son conditionneur<sup>19, 20</sup>. Un vibromètre laser<sup>21</sup> permet de mesurer l'amplitude vibratoire sur une seule aube à la fois par essai (voir figure II.33).

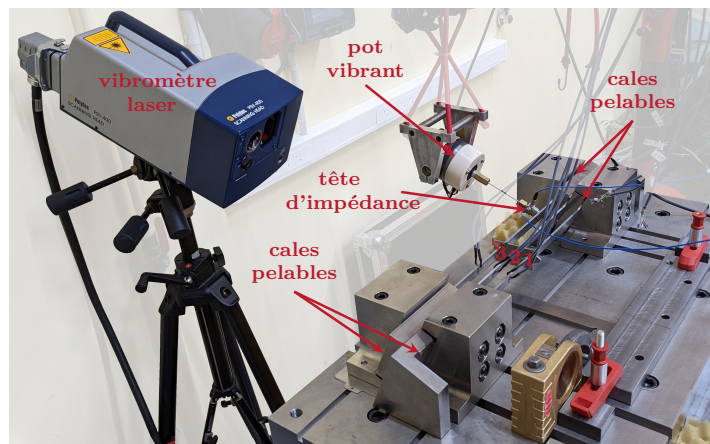


FIGURE II.33 – Instrumentation du banc d'essai pour les essais dynamiques.

Au cours d'un essai vibratoire, la force d'excitation appliquée sur la structure chute à la fréquence de résonance si la consigne définissant la tension d'alimentation nécessaire au pot vibrant est gardée constante. Afin de conserver une force d'excitation correcte au cours de l'essai, celle-ci est donc asservie par le logiciel d'acquisition HP en fonction d'un paramètre de réglage de la sensibilité de la correction. La figure II.34 ci-dessous montre l'évolution de la force

15. PCB Piezotronics 288D01.

16. PCB Piezotronics 482A20 ou PCB Piezotronics 482C.

17. Data Physics GW-V4.

18. Data Physics PA 30E.

19. Brüel & Kjær 8001.

20. Brüel & Kjær NEXUS 2692.

21. Polytec PSV-400.

d'excitation sur la plage de fréquence de l'essai vibratoire, les bandes de couleurs associées représentent environ  $\pm 5\%$  de la consigne et donc la variation autorisée avant correction.

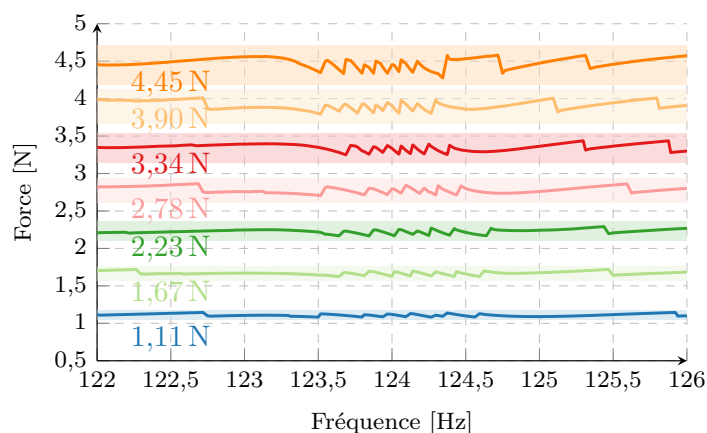


FIGURE II.34 – Évolution de la force d'excitation avec l'asservissement pour différentes consignes.

L'acquisition se fait par un sinus pas à pas, les signaux mesurés sont acquis par pas de fréquence de 25 mHz, ce qui est suffisant pour ne pas manquer le pic de résonance. Pour chaque point, un délai de cent cycles est respecté afin d'éviter le régime transitoire de la réponse, puis une moyenne de vingt cycles est calculée pour ce point [49] (voir figure II.35). Il est possible de parcourir la plage de fréquence dans le sens décroissant puisque cela peut affecter la non-linéarité des réponses fréquentielles, mais toutes les réponses montrées ici ont été calculées dans le sens croissant.

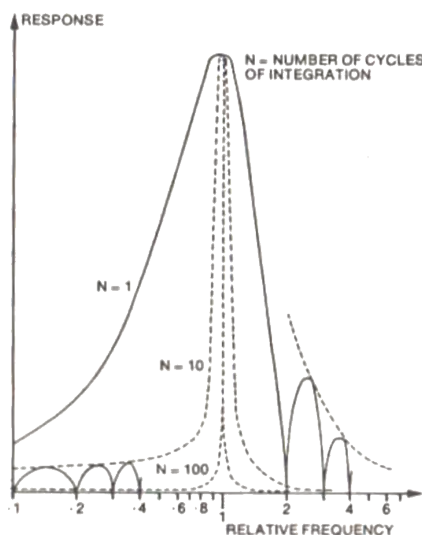


FIGURE II.35 – Influence du nombre de cycles d'intégration [49].

### 4.3 Résultats expérimentaux

De nombreuses réponses forcées ont pu être réalisées en accord avec la matrice d'essais, en conservant un protocole identique pour assurer de bonnes conditions de mesures et une répétabilité des essais. Parmi les résultats présentés dans cette partie, une attention particulière sera portée sur l'amplitude de vibration en fonction de la force d'excitation, puisqu'elle est

directement liée au taux d'amortissement mesuré. L'évolution fréquentielle du pic de résonance, ainsi que les autres paramètres tels que la précharge statique, sont d'autres variables prises en compte. Par ailleurs, dans un souci de gain de temps, les réponses forcées réalisées pendant la campagne d'essais sur le premier mode de flexion ont été mesurées sur l'aube 3, qui est l'aube adjacente sur laquelle est appliquée la force d'excitation sinusoïdale. Il a été vérifié en amont que la mesure de la réponse vibratoire des aubes était équivalente pour la même excitation exercée sur l'assemblage, ce qui est cohérent avec l'identification d'un seul mode 1F sur l'analyse modale commentée précédemment.

### 4.3.1 Précharge statique « faible »

**Espacement de 19,90 mm** Ce niveau d'espacement des pieds des aubes est le plus faible applicable expérimentalement, puisqu'il permet juste de mettre en contact les talons. Le niveau de déformation mesuré par les jauges sur l'aube centrale est de  $81 \mu\text{m m}^{-1}$ , ce qui correspond à un couple de torsion de  $1,7 \text{ N m}$ , soit l'équivalent d'une force de contact normale sur les stellites du talon de  $93 \text{ N}$ .

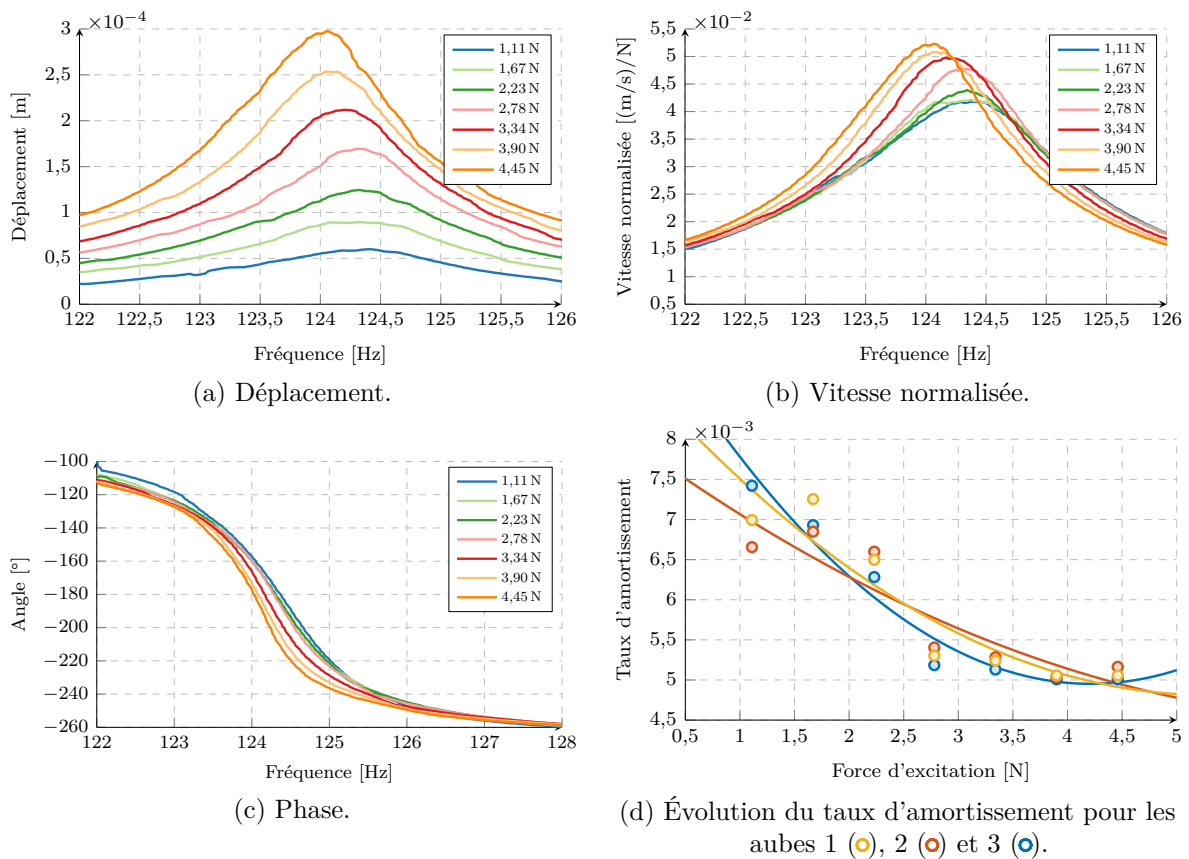


FIGURE II.36 – Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 2.

Les réponses obtenues pour plusieurs niveaux de force d'excitation sont visibles sur la figure II.36a. On peut tout d'abord observer une augmentation du déplacement lorsque la force d'excitation augmente elle aussi, un décalage de la fréquence de résonance se produit également. Cependant il est difficile d'identifier l'évolution du taux d'amortissement des réponses. Si l'on trace les réponses normalisées par la force d'excitation, visibles sur la figure II.36b, on remarque que l'amplitude augmente avec la force d'excitation, et le taux d'amortissement

identifié diminue. La figure II.36c montre l'évolution de la phase des réponses fréquentielles (calculée à partir du signal de vitesse) en fonction du niveau de force d'excitation, on remarque bien le changement de phase de  $-180^\circ$  si l'on prolonge asymptotiquement les courbes aux bornes de la plage de fréquence. De plus, une légère augmentation de la pente est perceptible et indique la baisse du taux d'amortissement. À titre d'information, il est calculé à l'aide de l'équation suivante :

$$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \quad (\text{II.14})$$

avec  $\Delta\omega$  la largeur de bande à  $-3\text{ dB}$  du pic de résonance (qui correspond à  $u_{-3\text{ dB}} = u_{\text{max}}/\sqrt{2}$ ) et  $\omega_0$  la fréquence de résonance. Cette observation se confirme en traçant l'évolution du taux d'amortissement mesurée sur les réponses fréquentielles en fonction de la force d'excitation sur la figure II.36d, celui-ci diminue d'environ 30%. Des courbes de tendance, basées sur un polynôme d'ordre deux, sont tracées en complément sur la figure. Il ressort donc des résultats obtenus, pour ce niveau de précharge statique « faible », que le taux d'amortissement diminue lorsque la force d'excitation augmente, malgré le contact au niveau du talon des aubes.

Les résultats montrés précédemment concernent les mesures réalisés sur l'aube 2, les résultats pour les aubes 1 et 3 sont visibles en annexes J.2 et J.3 et permettent d'illustrer que l'amplitude vibratoire des aubes assemblées sur le banc d'essai est équivalente pour le premier mode de flexion.

#### 4.3.2 Précharge statique « élevée »

**Espacement de 19,40 mm** Ce niveau d'espacement des pieds des aubes permet d'appliquer une précharge statique suffisamment forte sur les talons des aubes. Le niveau de déformation mesuré par les jauges sur l'aube centrale est de  $245\ \mu\text{m m}^{-1}$ , ce qui correspond à un couple de torsion de  $5,0\text{ N m}$  soit l'équivalent d'une force de contact normale sur les stellites du talon de  $281\text{ N}$ .

Les réponses obtenues pour plusieurs niveaux de force d'excitation sont visibles sur la figure II.37a. De prime abord, les mêmes observations faites sur la figure II.36a pour la configuration avec une précharge statique « faible » sont valables ici. Cependant, si l'on examine la figure II.37b, le constat est différent. On remarque que cette fois l'amplitude de la vitesse normalisée des réponses fréquentielles augmente avec la force d'excitation.

La figure II.37c montre l'évolution de la phase des réponses fréquentielles en fonction du niveau de force d'excitation, on observe encore une fois un changement de phase de  $-180^\circ$ , cependant la pente diminue avec l'augmentation de la force d'excitation, ce qui correspond à une hausse du taux d'amortissement. Cela est d'autant plus flagrant sur la figure II.37d montrant directement l'évolution du taux d'amortissement mesurée sur les réponses fréquentielles en fonction de la force d'excitation.

Contrairement à la configuration précédente avec une précharge statique « faible », celle-ci donne une évolution inverse du taux d'amortissement. Si l'on se réfère à la figure I.13b issue de [97] et présentée dans le chapitre I, où l'influence de la précharge statique pour une force d'excitation constante est étudiée, une interprétation des résultats obtenus dans cette sous-section peut être proposée. Dans le cas d'une précharge statique « faible », augmenter la force d'excitation amène à une diminution du taux d'amortissement des réponses obtenues, tandis que dans le cas d'une précharge statique « élevée » la tendance s'inverse, le taux d'amortissement augmente lorsque la force d'excitation augmente elle aussi. Les réponses obtenues se situent donc dans deux situations différentes, où un palier existe et amène à la transition entre ces deux comportements non linéaires observés. Ce palier semble se situer pour un espacement



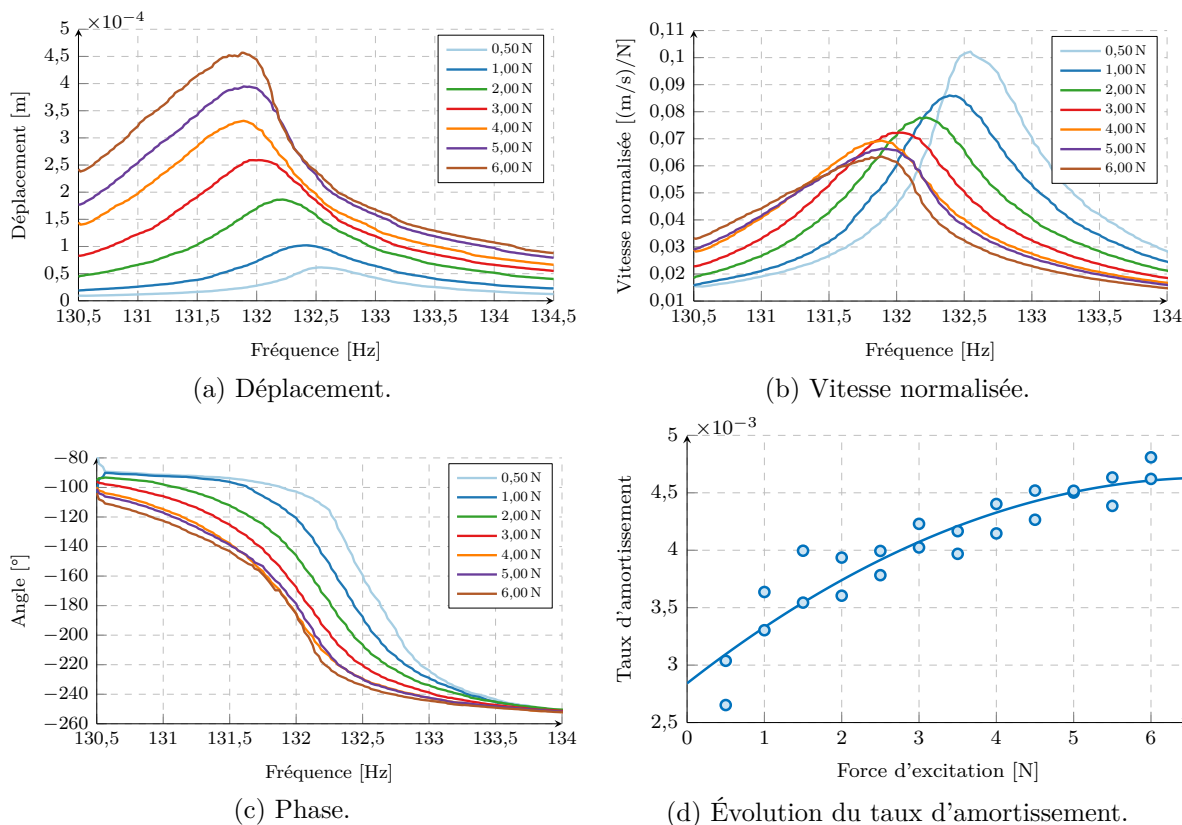


FIGURE II.37 – Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

des pieds de 19,75 mm, dont les résultats sont en annexe J, où le taux d'amortissement évolue peu quelle que soit la force d'excitation appliquée à la structure.

### 4.3.3 Sensibilité à la précharge statique

Le décalage de la fréquence de résonance ne semble pas vraiment lié au comportement non linéaire de l'assemblage des aubes, mais est en majorité produit par le montage. En effet, il a été détecté que celui-ci peut nécessiter une certaine mise en place avant que les réponses se stabilisent en fréquence. C'est ce que l'on observe sur la figure II.38, où la force d'excitation alterne entre 0,5 N et 3,5 N, les chiffres indiquent l'ordre dans lequel ont été réalisées les réponses forcées. Au bout d'un certain nombre de cycles, la fréquence de résonance finit par se stabiliser.

Le décalage de la fréquence de résonance à chacun des cycles est de l'ordre de 0,5 Hz, alors qu'il est bien plus faible lorsque celui-ci s'est a priori stabilisé. Cela montre une nécessité d'effectuer un nombre plus ou moins grand de réponses forcées préliminaires pour mettre en place l'assemblage des aubes, et écarter ainsi ce phénomène avant de réaliser les essais vibratoires.

C'est ce qui a été constaté en refaisant les essais pour l'espacement des pieds à 19,40 mm l'après-midi du jour où ils avaient été réalisés une première fois (voir partie II.4.3.2), cette fois deux cycles sont réalisés à la suite : un premier où la force d'excitation est croissante, puis un second où elle est décroissante. On observe une amplitude de vibration identique mais un décalage de la fréquence des pics de résonance beaucoup moins marqué (voir figure II.39). Il y a

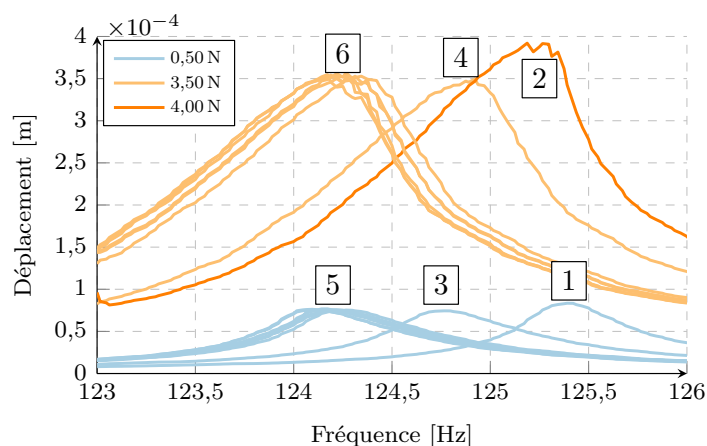


FIGURE II.38 – Évolution de la fréquence de résonance.

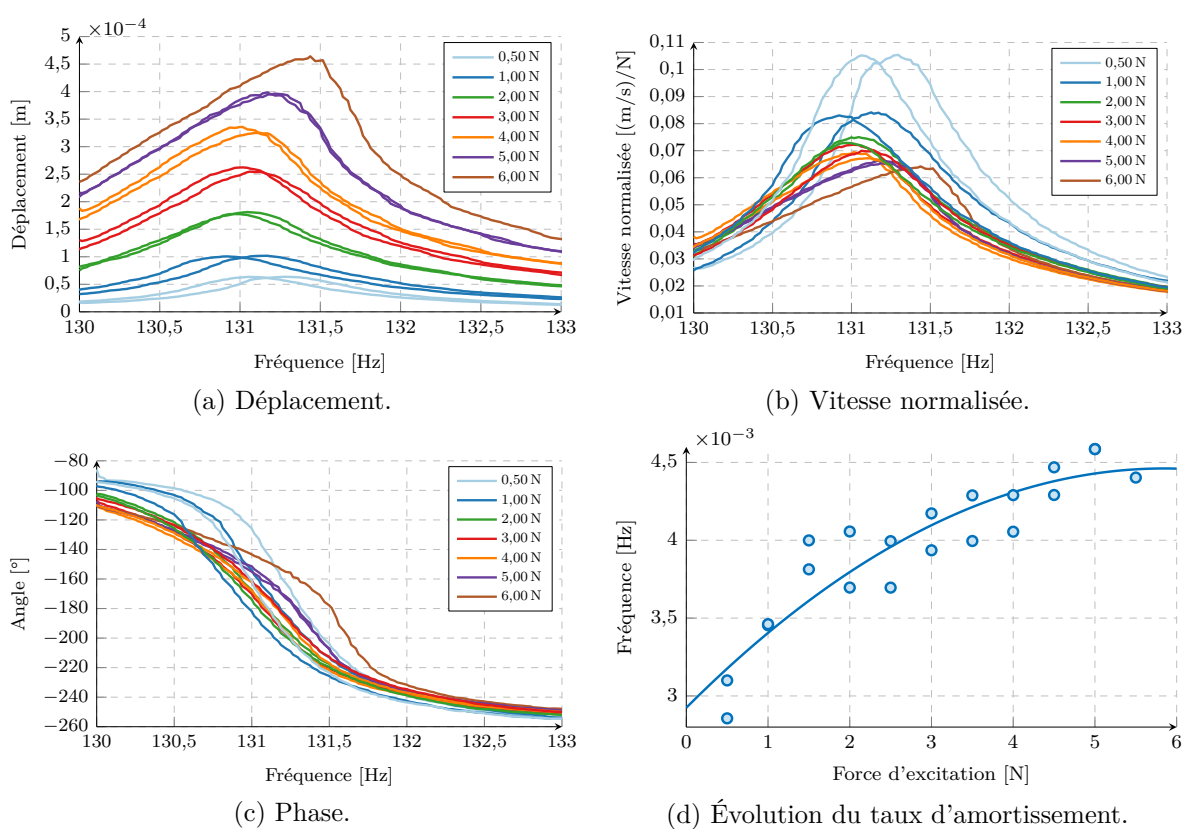


FIGURE II.39 – Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

une diminution de la fréquence de résonance d'environ 0,20 Hz entre la première et la dernière réponse réalisée pour une force d'excitation de 0,50 N, de même entre le niveau le plus faible et le niveau le plus fort de force d'excitation, contrairement aux essais précédents où le décalage fréquentiel était bien plus grand, autour de 0,50 Hz.

L'évolution de la phase pour les réponses fréquentielles en fonction du niveau de force d'excitation appliqué est affichée sur la figure II.39c, ainsi que le taux d'amortissement mesuré sur ces dernières sur la figure II.39d. Les résultats obtenus, en dehors du décalage de la fréquence de résonance, sont très proches de ceux sur les figures de la partie II.4.3.2, démontrant la



répétabilité des essais.

Les essais ont été poursuivis en augmentant encore plus la précharge statique par le retrait de feuillets supplémentaires aux cales pelables. La figure II.40 ci-dessous concerne par exemple un espacement des pieds de 19,10 mm, générant une déformation de l'aube centrale de  $270 \mu\text{m m}^{-1}$ , ce qui correspond à un couple de torsion de 5,6 N m, soit l'équivalent d'une force de contact normale sur les stellites du talon de 310 N. Il a été à nouveau observé que le décalage fréquentiel est inférieur à ce qui avait pu être observé pour les essais précédents.

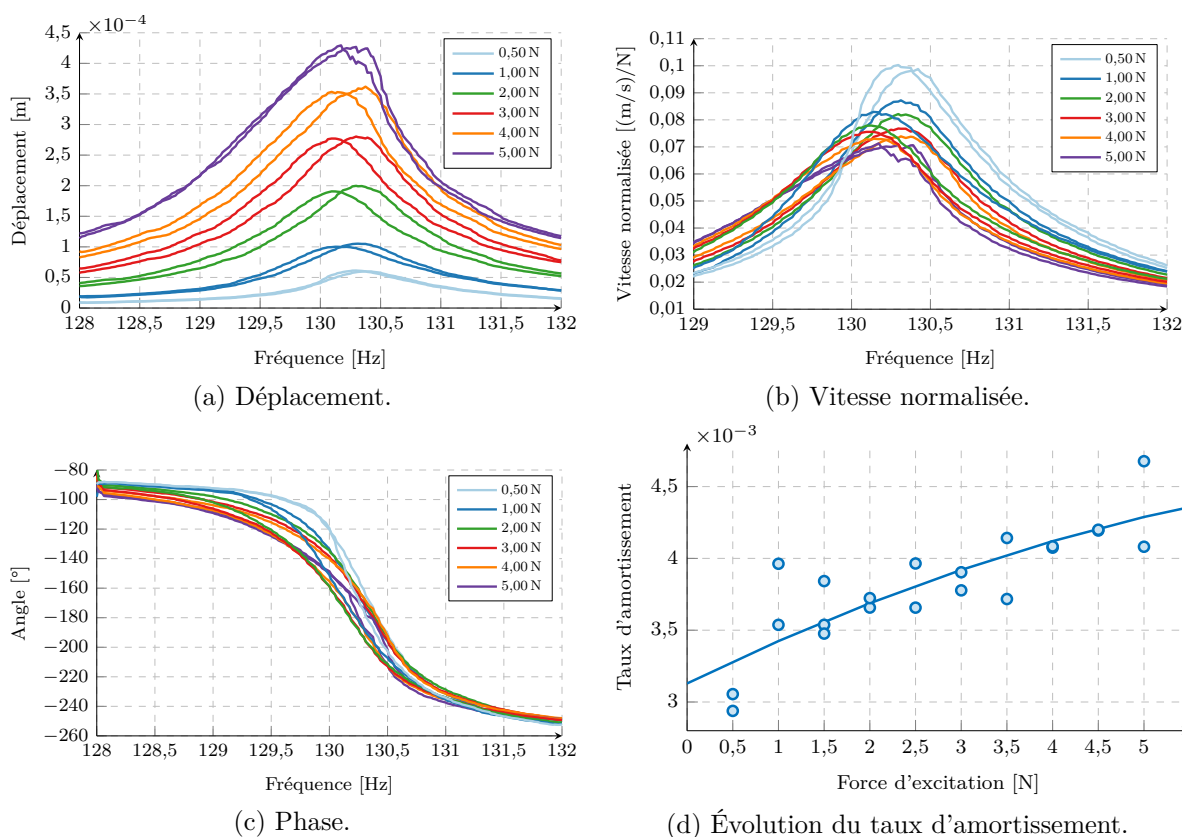


FIGURE II.40 – Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

Le taux d'amortissement mesuré sur les réponses fréquentielles augmente toujours en fonction du niveau croissant de force d'excitation, comme le montre la figure II.40d.

La sensibilité du montage des trois aubes sur le banc d'essai a été démontrée dans cette partie, le fort décalage de la fréquence de résonance sur les réponses mesurées dans les parties II.4.3.1 et II.4.3.2 était majoritairement lié à la mise en place des aubes. Cela montre qu'il est nécessaire de réaliser en amont quelques excitations de mise au point, avant de procéder aux essais à proprement parler pour éviter ce phénomène indésirable.

La majorité des résultats obtenus pour les niveaux de précharge statique restants mais non mentionnés ici sont réunis en annexe J, ils n'ont pas été inclus dans cette partie afin de ne pas la surcharger en figures. On notera que pour un espacement des pieds des aubes laissant un jeu entre les talons, les réponses fréquentielles montraient l'apparition de vibro-impact (voir annexe J.1).

#### 4.3.4 Évolution du positionnement de l'aube centrale

En augmentant progressivement la précharge statique appliquée sur l'assemblage des trois aubes, par le retrait des feuillettes des cales pelables, l'angle du talon de l'aube centrale est relevé en suivant la procédure décrite dans la sous-section II.3.4. On observe naturellement que le talon se redresse, autrement dit l'angle du talon, inhérent à la géométrie de l'aube, diminue peu à peu lorsque la précharge statique augmente par le rapprochement des pieds des aubes (i. e. lorsque l'espacement de ceux-ci diminue). La figure II.41 illustre cette observation.

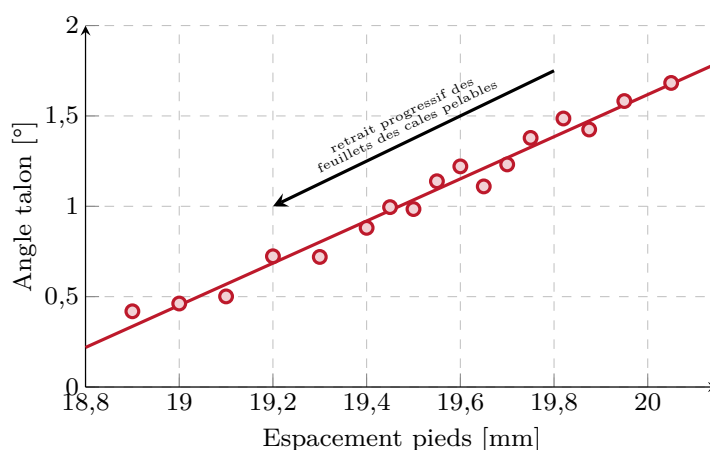


FIGURE II.41 – Évolution de l'angle mesuré sur le talon de l'aube centrale en fonction de la précharge statique, induite par l'espacement des pieds des aubes.

## Bilan du chapitre

Pour conclure ce chapitre sur le volet expérimental, plusieurs points sont à retenir. La recherche bibliographique menée pour constituer un état de l'art sur les bancs d'essai permettant d'étudier le comportement non linéaire lié au contact avec frottement entre les talons d'aubes telles que celle d'une turbine basse pression, a montré une diversité de choix géométrique et technologique dans la conception de ces bancs d'essai.

En connaissance de la littérature et compte-tenu des spécifications retenues pour le banc d'essai de cette thèse, la conception et la fabrication de celui-ci ont été menées à bien en se basant sur les choix de conception et de fabrication retenus. La réception du banc d'essai ainsi que les essais préliminaires, composés des essais de torsion, des analyses modales des aubes et de la métrologie, ont permis de maîtriser l'ensemble des paramètres influant sur la mise en place des essais dynamiques.

Enfin, ceux-ci ont pu être réalisés en nombre pour différents niveaux de précharges statiques, dont les conditions limites ont été mesurées en termes de déformations et de force statique appliquée au niveau du talon de l'aube centrale. Deux comportements distincts ont pu être observés concernant le taux d'amortissement mesurés sur les réponses fréquentielles enregistrées pour une excitation par un sinus pas à pas sur la plage de fréquence du premier mode de flexion de l'assemblage des trois aubes. La non-linéarité de l'amortissement lié au contact avec frottement entre les talons, en fonction de la précharge statique et de la force d'excitation, a pu être observée, ce qui était le but de ce banc d'essai.



# Chapitre III

## Problème de contact en dynamique

### Sommaire du chapitre

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Problème de référence</b>                                    | <b>70</b> |
| 1.1 Configuration d'un problème de contact . . . . .              | 70        |
| 1.1.1 Définition du contact entre deux corps élastiques . . . . . | 70        |
| 1.1.2 Lois de contact . . . . .                                   | 71        |
| 1.1.3 Lois de frottement . . . . .                                | 73        |
| 1.2 Formulation variationnelle du problème . . . . .              | 74        |
| 1.2.1 Formulation forte . . . . .                                 | 74        |
| 1.2.2 Formulation faible . . . . .                                | 76        |
| 1.2.3 Égalité variationnelle . . . . .                            | 78        |
| 1.2.4 Inégalité variationnelle . . . . .                          | 78        |
| <b>2 Traitement des contraintes de contact</b>                    | <b>79</b> |
| 2.1 Méthodes classiques . . . . .                                 | 79        |
| 2.1.1 Méthode de pénalité . . . . .                               | 79        |
| 2.1.2 Méthode de Nitsche . . . . .                                | 80        |
| 2.2 Méthodes avec multiplicateurs de Lagrange . . . . .           | 80        |
| 2.2.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .           | 80        |
| 2.2.2 Méthode des Lagrangiens perturbés . . . . .                 | 81        |
| 2.2.3 Méthode des Lagrangiens augmentés . . . . .                 | 81        |
| 2.3 Problématique de la non-coïncidence de maillages . . . . .    | 82        |
| 2.3.1 Typologie . . . . .   | 83        |
| 2.3.2 Méthode de mortier . . . . .                                | 83        |
| 2.3.3 Méthode des éléments de jeu virtuels . . . . .              | 84        |
| 2.3.4 Méthodes par interpolation du déplacement relatif . . . . . | 86        |
| <b>3 Résolution d'un système d'équations non linéaires</b>        | <b>89</b> |
| 3.1 Méthodes temporelles . . . . .                                | 90        |
| 3.1.1 Méthode de perturbation . . . . .                           | 90        |
| 3.1.2 Intégrateurs temporels . . . . .                            | 91        |
| 3.1.3 Méthode de tir . . . . .                                    | 93        |
| 3.2 Méthodes fréquentielles . . . . .                             | 94        |
| 3.2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . . .               | 94        |
| 3.2.2 Collocation trigonométrique . . . . .                       | 94        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>4 Exemple de mise en œuvre méthodologique</b>                              | <b>95</b>  |
| 4.1 État de l'art . . . . .   | 95         |
| 4.2 Condensation du système d'équations . . . . .                             | 98         |
| 4.2.1 Condensation sur les nœuds non linéaires . . . . .                      | 99         |
| 4.2.2 Condensation sur le déplacement relatif . . . . .                       | 99         |
| 4.3 Calcul des forces non linéaires de contact et de frottement . . . . .     | 100        |
| 4.3.1 Méthode de la pénalité . . . . .  | 101        |
| 4.3.2 Méthode DLFT . . . . .  | 102        |
| <b>5 Algorithmes de recherche de solutions</b>                                | <b>104</b> |
| 5.1 Minimisation d'un système algébrique non linéaire . . . . .               | 104        |
| 5.1.1 Algorithme du gradient . . . . .  | 105        |
| 5.1.2 Méthode de Newton . . . . .   | 106        |
| 5.1.3 Méthode de Gauss-Newton . . . . .                                       | 106        |
| 5.1.4 Méthode de Newton-Raphson . . . . .                                     | 106        |
| 5.1.5 Méthode hybride de Powell . . . . .                                     | 107        |
| 5.1.6 Approximations numériques des dérivées par différences finies . . . . . | 107        |
| 5.2 Méthodes de continuation . . . . .  | 108        |
| 5.2.1 Prédicteurs . . . . .   | 109        |
| 5.2.2 Paramétrisation . . . . .   | 110        |
| <b>Bilan du chapitre</b>  | <b>111</b> |

Grâce à l'introduction qui a été faite en chapitre I sur la dynamique d'une structure en rotation en mécanique des milieux continus, ce chapitre est dédié à la description détaillée de la formulation d'un problème de contact, et toutes les spécificités qui lui sont propres, notamment les lois de contact et de frottement, dans le but d'écrire une formulation variationnelle de celui-ci. Les différentes méthodes consacrées au traitement de la contribution énergétique liée au contact avec frottement sont présentées. De plus, la problématique posée par la non-coïncidence des maillages entre les interfaces de contact est décrite, plusieurs méthodes sont présentées, en vue de proposer une approche pour le modèle numérique utilisé dans le chapitre IV. Ensuite, la résolution d'un problème de contact par le biais de méthodes temporelles et fréquentielles est expliquée, puis un exemple de mise en œuvre est proposé pour mettre en application certaines des méthodes abordées. Enfin, la résolution numérique du problème considéré est détaillée par le biais d'une présentation des algorithmes existants, ainsi que des techniques permettant de faciliter la convergence du solveur lors de la recherche de solutions.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Configuration d'un problème de contact

Cette section peut-être vue comme un prolongement de la section I.2, où la dynamique d'une structure isolée est désormais étendue à deux corps en contact avec frottement, et dont le comportement est non linéaire.

#### 1.1.1 Définition du contact entre deux corps élastiques

Soit deux solides déformables occupant les ouverts  $\Omega^s$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 3$  et  $s = \{1, 2\}$ , à l'instant initial. Chacune des frontières  $\partial\Omega^s$  du domaine  $\Omega^s$  se décompose en trois sous-frontières  $\Gamma_u^s$ ,  $\Gamma_t^s$  et  $\Gamma_c^s$  de mesures non nulles dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ .  $\Gamma_u^s$  représente la sous-frontière de  $\partial\Omega^s$  où un déplacement  $\mathbf{u}_d^s$  est imposé,  $\Gamma_t^s$  décrit la sous-frontière soumise à un effort surfacique de traction

$\boldsymbol{\sigma}^s \mathbf{n}_d^s = \mathbf{t}_d^s$  ( $\mathbf{n}_d^s$  est la normale unitaire sortante de  $\Gamma_t^s$ ) et  $\Gamma_c^s$  correspond à la sous-frontière de contact entre les deux corps, de normale unitaire sortante  $\mathbf{n}_c^s$ . Ce contact produit un effort  $\mathbf{f}_c^s$  sur la partie  $\Gamma_c^s \subset \Omega^s$ . L'union de l'ouvert  $\Omega^s$  et de sa frontière  $\partial\Omega^s$  forment l'ensemble fermé  $\bar{\Omega}^s = \Omega^s \cup \partial\Omega^s$ . Ces corps subissent également une densité d'efforts (surfaciques ou volumiques selon  $d$ )  $\mathbf{f}^s$  sur  $\Omega^s$ . Les frontières décrites précédemment vérifient alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} \partial\Omega^s = \Gamma_u^s \cup \Gamma_t^s \cup \Gamma_c^s & \text{(III.1a)} \\ \Gamma_u^s \cap \Gamma_c^s = \Gamma_c^s \cap \Gamma_t^s = \Gamma_t^s \cap \Gamma_u^s = \emptyset. & \text{(III.1b)} \end{cases}$$

Les particules matérielles de chacun de ces deux corps sont repérées par le vecteur position  $\mathbf{x}^s \in \Omega^s$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_e = (O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  aligné avec les coordonnées du repère cartésien global. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}^s : \bar{\Omega}^s \times t \rightarrow \mathbb{R}^d$  décrit le mouvement depuis la configuration initiale vers la configuration déformée sur l'intervalle de temps  $t = [0, T]$ . La figure III.1 illustre le contact entre deux solides, à la suite d'une déformation qui se décompose en deux étapes : la première où le contact n'a pas encore eu lieu, donc  $\Gamma_c^s = \emptyset$ , et la seconde où le contact se produit, introduisant une nouvelle sous-frontière  $\Gamma_c^s \neq \emptyset$ .

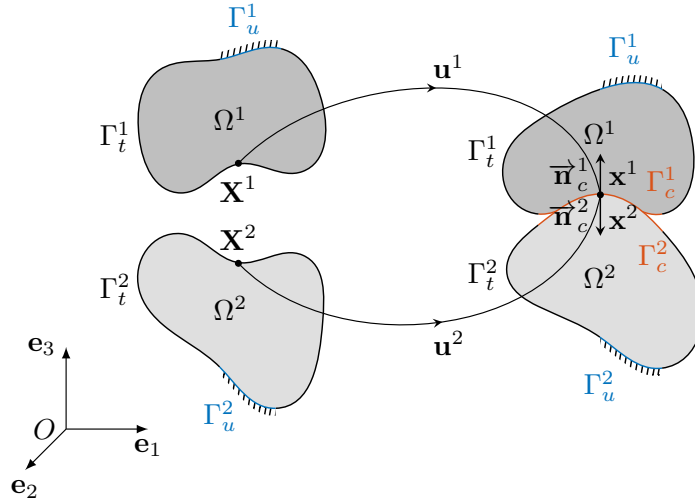


FIGURE III.1 – Contact entre deux solides.

### 1.1.2 Lois de contact

Dans le cadre de la résolution d'un problème de contact unilatéral entre deux solides, on désigne par convention un des deux corps comme le maître, noté numéro 1, et l'autre l'esclave, noté numéro 2, afin de pouvoir définir les équations nécessaires dans un cadre normalisé respectant le principe d'action-réaction. De ce fait, on peut écrire la normale sortante  $\mathbf{n}_c^s$  de  $\Gamma_c^s$  induisant  $\mathbf{n}_c^1 = -\mathbf{n}_c^2$ , et  $p_N^s$  la densité d'effort de contact exercée par un corps sur l'autre. Ainsi, on peut exprimer les conditions de Hertz-Signorini-Moreau (aussi appelées les conditions de Kuhn-Tucker-Karush par analogie à la résolution de problèmes d'optimisation) d'un contact sans frottement sur  $\Gamma_c^1$  avec les équations suivantes [173] :

$$\begin{cases} g_N(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) = (\mathbf{u}_c^2 - \mathbf{u}_c^1) \cdot \mathbf{n}_c \geq 0 & \text{(III.2a)} \\ p_N^s = \mathbf{f}_c^s \cdot \mathbf{n}_c^s \leq 0 & \text{(III.2b)} \\ p_N^s g_N(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) = 0 & \text{(III.2c)} \end{cases}$$

où  $g_N$  représente le jeu normal entre les zones de contact des solides maître et esclave, et  $(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2)$  les vecteurs de déplacement respectifs des deux corps. L'équation (III.2a) signifie que l'interpénétration des corps n'est pas possible mais qu'ils peuvent se décoller l'un de l'autre. L'équation (III.2b) montre que la densité d'effort de contact normale aux surfaces de contact ne peut correspondre qu'à de la compression ( $p_N > 0$  indiquerait de la traction et donc signifierait que les corps s'attirent). Enfin, l'équation (III.2c) implique le respect de la physique du contact, c'est-à-dire le statut adhérent ou ouvert du contact entre les corps, mais les deux à la fois n'est pas possible.

La loi de contact unilatéral n'autorise pas l'interpénétration des corps, et correspond à la description la plus simple du comportement du contact. Elle se définit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} p_N = 0 & \text{si } g_N > 0 \\ p_N = 0 & \text{si } p_N < 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(III.3a)} \\ \text{(III.3b)} \end{matrix}$$

On remarque que cette loi de contact implique un changement brusque de l'état du contact (voir figure III.2a). En effet, la fonction décrivant cette loi est fortement non régulière puisque non dérivable pour  $g_N > 0$ , ce qui peut poser problème pour des applications numériques.

Afin d'adoucir cette loi de contact, l'effort normal est désormais proportionnel à une raideur de pénalité (voir figure III.2b), la fonction qui définit l'effort a donc l'avantage d'être linéaire par morceaux et bijective.

$$\begin{cases} p_N = 0 & \text{si } g_N > 0 \\ p_N = k_N g_N & \text{si } g_N \leq 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(III.4a)} \\ \text{(III.4b)} \end{matrix}$$

Cette loi autorise une interpénétration des corps par le biais de la raideur  $k_N$ , qui est généralement le résultat d'un terme de pénalité  $\varepsilon^{-1}$  : plus  $\varepsilon$  est petit, plus  $k_N$  est grand, ainsi un  $k_N$  tendant en théorie vers l'infini induirait asymptotiquement une interpénétration nulle.

Une autre loi de contact permet d'adoucir la loi de contact unilatéral, cette fois en utilisant la fonction exponentielle pour encore plus de régularité, en contrepartie d'une expression comportant plus de paramètres [43, 86] (voir figure III.2c). Celle-ci s'écrit par exemple :

$$\begin{cases} p_N = 0 & \text{si } g_N \geq c \\ p_N = \frac{p_{N,0}}{\exp(1) - 1} \left[ \left( \frac{c + g_N}{c} \right) \left( -\exp\left( \frac{c + g_N}{c} \right) - 1 \right) \right] & \text{si } g_N < c. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(III.5a)} \\ \text{(III.5b)} \end{matrix}$$

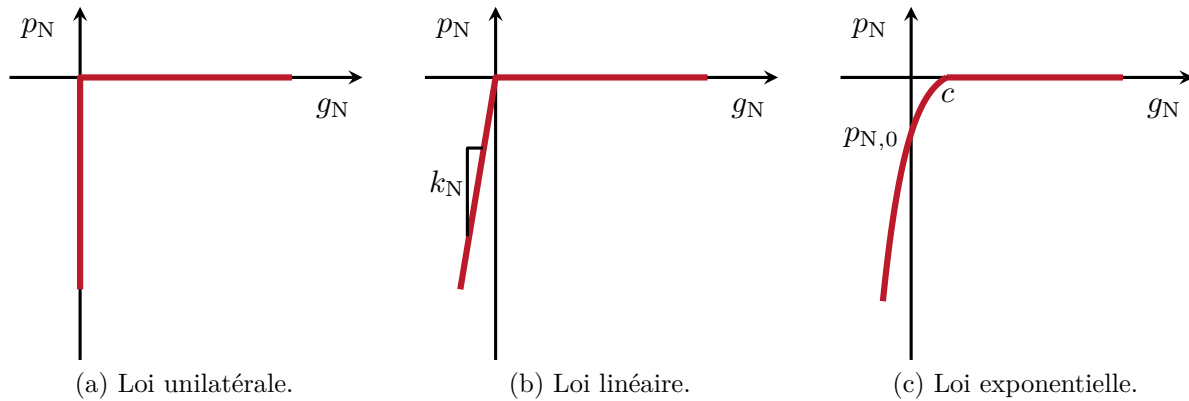


FIGURE III.2 – Représentations des différentes lois de contact.

### 1.1.3 Lois de frottement

De la même manière que pour les lois de contact, il existe plusieurs lois permettant de caractériser le frottement entre deux corps au sein d'une structure. La plus répandue est celle de Coulomb [34], formulée au XVIII<sup>e</sup> siècle, précédemment évoquée par Amontons [7] au XVII<sup>e</sup> siècle, et plus tôt encore par Léonard de Vinci au XV<sup>e</sup> siècle. Elle se définit par le système d'équations ci-dessous [123] :

$$\begin{cases} \|\dot{\mathbf{g}}_T\| = \|\dot{\mathbf{u}}_T^1 - \dot{\mathbf{u}}_T^2\| \geq 0 & \text{(III.6a)} \\ f_T(p_N, \mathbf{f}_T) = \|\mathbf{f}_T\| - \mu|p_N| \leq 0 & \text{(III.6b)} \\ \|\dot{\mathbf{g}}_T\| \cdot f_T(p_N, \mathbf{f}_T) = 0 & \text{(III.6c)} \end{cases}$$

avec  $f_T$  la force de frottement tangentielle en réaction au glissement relatif entre les corps  $\mathbf{g}_T$ ,  $\mu$  le coefficient de frottement et  $p_N$  la densité d'effort de contact normale. Une illustration de  $f_T$  en fonction de la vitesse relative tangentielle  $\dot{g}_T$  (projection de  $\dot{\mathbf{g}}_T$  dans une des deux directions tangentielles) est représentée sur la figure III.3.

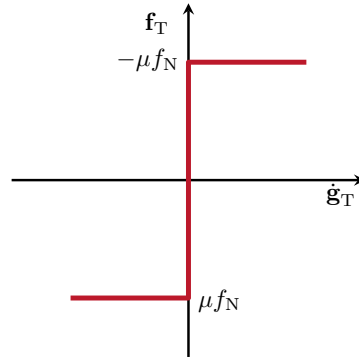


FIGURE III.3 – Loi de frottement de Coulomb.

La loi de Coulomb peut être enrichie en ajoutant un frottement visqueux ou encore de l'adhérence. Elle a également été reprise par Stribeck pour prendre en compte l'évolution de la force de frottement qui diminue pour atteindre, pour de faibles vitesses, un niveau inférieur à la valeur de Coulomb avant d'augmenter à nouveau (voir figure III.5). La formulation adoptée est de la forme [10, 54, 114] :

$$f_T = \left( \mu p_N + (f_s - \mu p_N) \exp\left(-\left(\frac{\dot{g}_T}{v_s}\right)^{\delta_s}\right) \right) \text{sgn}(\dot{g}_T) + f_v \dot{g}_T \quad \text{(III.7)}$$

ou encore

$$f_T = \mu p_N + (f_s - \mu p_N) \frac{1}{1 + (\dot{g}_T/v_s)^{\delta_s}} + f_v \dot{g}_T \quad \text{(III.8)}$$

avec  $f_s$  l'amplitude du frottement de Stribeck,  $v_s$  la vitesse caractéristique du frottement de Stribeck et  $\delta_s$  un paramètre empirique.

La loi de Coulomb régularisée suivante est particulièrement adaptée pour des simulations numériques [76] puisque l'utilisation de la fonction tangente hyperbolique simplifie le calcul de la matrice jacobienne nécessaire pour la résolution numérique du problème de contact avec frottement :

$$f_T = \mu|p_N| \tanh\left(\frac{\dot{g}_T}{\varepsilon}\right). \quad \text{(III.9)}$$

Elle est illustrée sur la figure III.4.



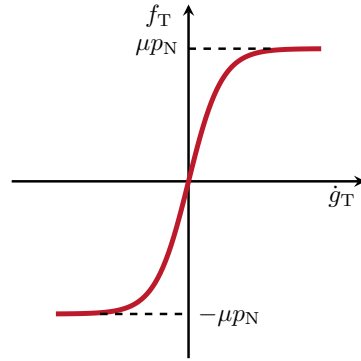


FIGURE III.4 – Loi de frottement de Coulomb régularisée.

D'autres lois de frottement plus ou moins complexes existent en utilisant une forme exponentielle [25], ou encore par exemple pour représenter le phénomène de micro-glissement, notamment celle de Dahl [41] qui a comme particularité d'être équivalente à la loi de Coulomb lors d'un régime établi. Cependant, cette loi ne permet pas de décrire le phénomène de Stribeck et le mouvement de *stick-slip*, d'où l'introduction de la loi de LuGre (développé conjointement par des groupes de recherche de Lund et Grenoble) basée sur celle de Dahl [77]. La loi de Bouc-Wen est également différentielle, plus polyvalente mais plus complexe, permet de se passer de la procédure itérative de prédiction-corrrection. D'autres lois encore sont parfois évoquées dans la littérature (Jenkins, Iwan, Valanis), mais restent moins pertinentes à notre cas d'application.

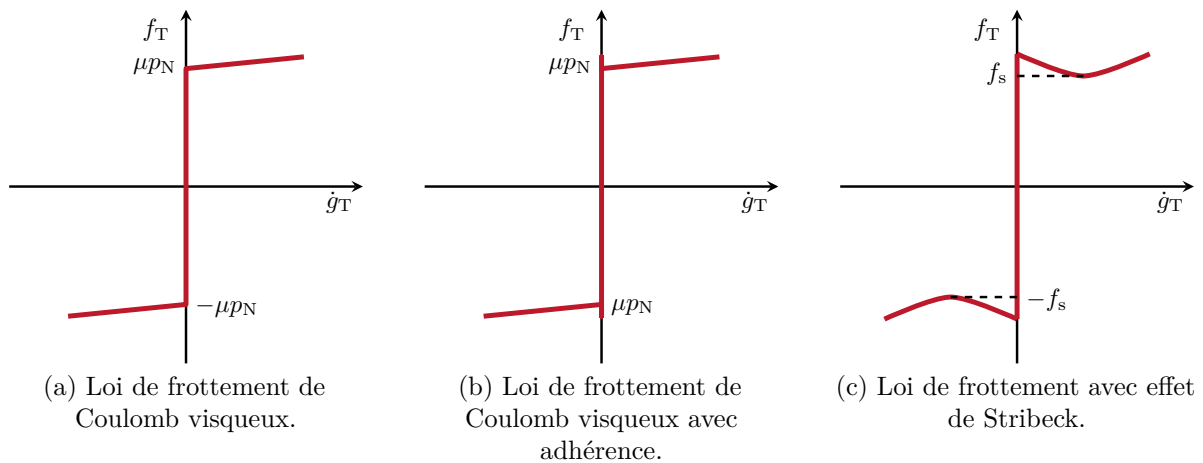


FIGURE III.5 – Représentations des différentes lois de frottement de Coulomb.

## 1.2 Formulation variationnelle du problème

### 1.2.1 Formulation forte

À l'aide des lois de la mécanique des milieux continus, la formulation forte d'un problème de contact en dynamique s'établit de la manière suivante,  $\forall s \in \{1, 2\}$  [89] :

— équation d'équilibre dynamique dans l'ouvert  $\Omega^s$  :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^s + \mathbf{f}^s = \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial u_j^s} + f_i^s = \rho^s \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{III.10})$$

avec  $\rho^s$  la masse volumique du solide occupant l'ouvert  $\Omega^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}^s$  le tenseur des contraintes de Cauchy ;

- conditions limites en déplacement, aussi appelées conditions de Dirichlet :

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{u}_d^s \text{ sur } \Gamma_u^s ; \quad (\text{III.11})$$

- conditions limites d'effort de traction, aussi appelées conditions de Neumann :

$$\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s = \mathbf{t}_d^s \text{ sur } \Gamma_t^s \quad (\text{III.12})$$

avec  $\mathbf{n}^s$  la normale sortante de la sous-frontière  $\Gamma_t^s$  ;

- conditions initiales en déplacement et en vitesse dans  $\overline{\Omega^s}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^s(0) = \mathbf{u}_0^s & (\text{III.13a}) \\ \dot{\mathbf{u}}^s(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^s & (\text{III.13b}) \end{cases}$$

- loi de comportement du matériau avec, comme indiqué dans la sous-section précédente, l'hypothèse des petites déformations est retenue. Le tenseur des déformations linéarisé de Green-Lagrange s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s(\mathbf{u}^s) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^s + (\nabla \mathbf{u}^s)^\top] \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{u}^s) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j^s} + \frac{\partial u_j^s}{\partial x_i^s} \right) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2. \quad (\text{III.14})$$

Sous l'hypothèse que les solides sont constitués de façon homogène et continue d'un matériau élastique linéaire isotrope, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^s$  de Cauchy s'écrit selon la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}^s) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^s(\mathbf{u}^s) \quad (\text{III.15})$$

où  $\mathbf{A}$  est un tenseur d'ordre 4 et de dimension 3 définissant la rigidité du matériau,  $\boldsymbol{\sigma}^s$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^s$  étant des tenseurs d'ordre 2 et de dimension 3. De même, selon la convention de sommation d'Einstein, on peut réécrire l'équation (III.15) sous cette forme :

$$\sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^s(\mathbf{u}^s) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 ; \quad (\text{III.16})$$

- loi de contact unilatéral :

$$\begin{cases} g_N(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) \geq 0 & (\text{III.17a}) \\ \sigma_N^s \leq 0 & (\text{III.17b}) \\ \sigma_N^s g_N(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) = 0 & (\text{III.17c}) \end{cases}$$

où  $\sigma_N^s$  est la composante normale du vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^s$  sur la sous-frontière  $\Gamma_c^s$  portée par la normale  $\mathbf{n}^s$  ;

- loi de frottement de Coulomb :

$$\begin{cases} \|\dot{\mathbf{g}}_T\| = \|\dot{\mathbf{u}}_T^1 - \dot{\mathbf{u}}_T^2\| \geq 0 & (\text{III.18a}) \\ \|\dot{\mathbf{u}}_T^1 - \dot{\mathbf{u}}_T^2\| (\|\boldsymbol{\sigma}_T\| - \mu|\sigma_N^s|) = 0 & (\text{III.18b}) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T\| < \mu|\sigma_N^s| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_T^1 - \dot{\mathbf{u}}_T^2 = 0 & (\text{III.18c}) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T\| = \mu|\sigma_N^s| \Rightarrow \exists \lambda, \dot{\mathbf{u}}_T^1 - \dot{\mathbf{u}}_T^2 = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_T & (\text{III.18d}) \end{cases}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_T$  désigne la composante tangentielle du vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^s$ .

En revanche, cette formulation forte visant la résolution d'un problème d'élasto-dynamique avec conditions limites, appelé problème de Signorini [150], est généralement trop contraignante pour pouvoir être résolue dans la plupart des cas. C'est pourquoi une autre approche dite affaiblie, écrite dans un espace fonctionnel de dimension infinie, permet de formuler ce problème de sorte à pouvoir le résoudre plus aisément.

### 1.2.2 Formulation faible

La forme affaiblie d'un problème de mécanique des milieux continus s'écrit sous la forme d'un bilan énergétique, et permet par la suite de discrétiser le problème de contact étudié ici à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz ou bien de la méthode des éléments finis.

Pour ce faire, on introduit tout d'abord les espaces de fonctions solutions définissant le champs des déplacements cinématiquement admissibles  $\mathbf{u}^s$  des corps  $\Omega^s$  :

$$\forall s = \{1, 2\} \quad \mathcal{C}^s = \left\{ \mathbf{u}^s : \bar{\Omega}^s \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{u}^s \in H^1(\Omega^s), \mathbf{u}^s|_{\Gamma_u^s} = \mathbf{u}_0^s \right\} \quad (\text{III.19})$$

puis l'espace des variations (déplacements virtuels) cinématiquement admissibles correspondant à  $\mathcal{C}^s$  :

$$\forall s = \{1, 2\} \quad \mathcal{V}^s = \left\{ \mathbf{v}^s : \bar{\Omega}^s \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{v}^s \in H^1(\Omega^s), \mathbf{v}^s|_{\Gamma_u^s} = \mathbf{v}_0^s \right\} \quad (\text{III.20})$$

ainsi que l'espace des solutions admissibles respectant la condition de non-interpénétration des corps en contact :

$$\mathcal{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2, g(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c^s \right\}. \quad (\text{III.21})$$

Généralement, ces espaces sont des espaces de Hilbert ou de Sobolev (voir l'annexe B pour leur définition).

À partir de l'équation (III.10) d'équilibre dynamique de chacun des deux corps, on peut écrire le bilan des puissances virtuelles de ceux-ci en introduisant un champ de vitesses virtuelles admissibles  $\dot{\mathbf{v}}^s$  tel que  $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$  :

$$\int_{\Omega^s} \text{div} \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s + \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s = \int_{\Omega^s} \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s. \quad (\text{III.22})$$

D'après la formule de Green [47], on peut réécrire le premier terme de l'équation précédente :

$$\int_{\Omega^s} \text{div} \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s = \int_{\Gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s - \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\sigma}^s : \text{grad} \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s. \quad (\text{III.23})$$

Grâce à la symétrie du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s$  en notation indicielle, celui-ci peut s'écrire [89] :

$$\sigma_{ij}^s \frac{\partial \dot{v}_i^s}{\partial u_j^s} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^s \frac{\partial \dot{v}_i^s}{\partial u_j^s} + \sigma_{ji}^s \frac{\partial \dot{v}_j^s}{\partial u_i^s} \right) = \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{v}}^s). \quad (\text{III.24})$$

Le terme de droite devient alors :

$$\int_{\Omega^s} \boldsymbol{\sigma}^s : \text{grad} \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s = \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\sigma}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}}^s) d\Omega^s = \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^s) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}}^s) d\Omega^s. \quad (\text{III.25})$$

On obtient ainsi la formulation classique du principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\Omega^s} \rho^s \ddot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{v}} d\Omega^s + \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^s) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}}^s) d\Omega^s = \int_{\Gamma^s} \mathbf{t}^s \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s + \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s. \quad (\text{III.26})$$

Si l'on décompose maintenant l'intégrale sur la frontière  $\Gamma^s$  selon les conditions limites du problème explicitées dans la sous-section III.1.2.1, on a :

$$\int_{\Gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s = \int_{\Gamma_t^s} \mathbf{t}_d^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s + \int_{\Gamma_u^s} \mathbf{t}_u^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s + \int_{\Gamma_c^s} \sigma_N^s \dot{v}_N^s d\Gamma^s + \int_{\Gamma_c^s} \boldsymbol{\sigma}_T^s \cdot \dot{\mathbf{v}}_T d\Gamma^s. \quad (\text{III.27})$$

On peut enfin écrire le principe des puissances virtuelles sous la forme suivante :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = L(\dot{\mathbf{v}}) + \Pi_u(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) + \Pi_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) \quad (\text{III.28})$$

où chacun des termes correspond à une puissance virtuelle suivante :

— la puissance virtuelle des efforts d'inertie

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega^s} \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s ; \quad (\text{III.29})$$

— la puissance virtuelle des efforts intérieurs

$$a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{s=1}^2 \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^s) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{v}}^s) d\Omega^s ; \quad (\text{III.30})$$

— la puissance virtuelle des efforts extérieurs

$$L(\dot{\mathbf{v}}) = \sum_{s=1}^2 \left( \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Omega^s + \int_{\Gamma_t^s} \mathbf{t}_d^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s \right) ; \quad (\text{III.31})$$

— la puissance virtuelle des efforts nécessaires pour satisfaire les déplacements imposés  $\mathbf{u}_d^s$  sur la sous-frontière  $\Gamma_u^s$

$$\Pi_u(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{f}_u^s, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\Gamma_u^s} \mathbf{t}_u^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s = \sum_{s=1}^2 \int_{\Gamma^s} (\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s) \cdot \dot{\mathbf{v}}^s d\Gamma^s ; \quad (\text{III.32})$$

— la puissance virtuelle des efforts de contact divisée en une composante normale et une composante tangentielle

$$\Pi_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \langle f_{c,N}, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{c,T}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{s=1}^2 \left( \int_{\Gamma_c^s} \sigma_N^s \dot{v}_N^s d\Gamma^s + \int_{\Gamma_c^s} \boldsymbol{\sigma}_T^s \cdot \dot{\mathbf{v}}_T d\Gamma^s \right). \quad (\text{III.33})$$

Dans le cas où  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  qui correspond à la puissance réelle des forces de contact normales, celle-ci est alors nulle conformément aux conditions limites de la loi de contact unilatéral, et donc  $\langle f_{c,N}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0$ .

Cette formulation dite faible, basée sur une forme intégrale du système d'équations aux dérivées partielles et les conditions limites associées, est moins contraignante que la formulation forte grâce aux espaces de fonctions solutions choisis.

### 1.2.3 Égalité variationnelle

À partir de l'équation (III.28), la formulation du problème à résoudre se rédige ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) = L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \Pi_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Le terme  $\Pi_u$  n'apparaît pas dans l'expression précédente puisque  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}}$  sur  $\Gamma_u^1 \times \Gamma_u^2$ , le déplacement imposé  $\dot{\mathbf{u}}_d$  sur la sous-frontière  $\Gamma_u^s$  donne donc une puissance virtuelle nulle. De plus, le terme  $\Pi_c$  se décompose avec les composantes normale et tangentielle :

$$\Pi_c = \langle f_{N,c}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle f_{T,c}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle. \quad (\text{III.35})$$

### 1.2.4 Inégalité variationnelle

Une autre formulation de III.34 existe sous la forme d'une inégalité, d'après le théorème de Stampacchia qui est un raffinement du théorème de Lax-Milgram. On a alors le problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{C}^s \text{ tel que} \\ &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \geq L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \Pi_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

avec

$$j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_N(\mathbf{u})| \|\dot{\mathbf{v}}_T^1 - \dot{\mathbf{v}}_T^2\| d\Gamma. \quad (\text{III.37})$$

En s'appuyant sur une approche basée sur le principe des travaux virtuels, plutôt que celui des puissances virtuelles, cela permet de simplifier l'expression de l'équation (III.36) sans perte de généralité dans le cas des petites perturbations. Ce qui conduit à l'expression suivante du problème (III.36) :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{C}^s \text{ tel que} \\ &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \Pi_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Cependant, comme pour la puissance réelle des forces de contact normales nulle si  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , le travail virtuel de ces efforts s'écrit :

$$\langle f_{N,c}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = - \int_{\Gamma_c} \sigma_N(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) d\Gamma = 0. \quad (\text{III.39})$$

De plus, on peut montrer que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_T \cdot (\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2) \geq -\|\boldsymbol{\sigma}_T\| \|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2\| & (\text{III.40a}) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T\| \leq \mu |\sigma_N| & (\text{III.40b}) \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\langle \mathbf{f}_{T,c}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (\text{III.41})$$

En transposant l'inégalité (III.41) dans (III.38), la formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{C}^s \text{ tel que} \\ & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Cependant, cette formulation finale du problème faisant intervenir une inégalité, ainsi que les termes  $j(\bullet, \bullet)$  liés au frottement qui ne sont pas différentiables, est fortement non linéaire donc sa résolution est compliquée. En fait, ce problème est équivalent à un problème de minimisation de l'énergie potentielle de la structure composée de deux corps en contact, sous réserve du respect des conditions limites associées. Néanmoins, la présence ou non du frottement au sein des forces non linéaires change la façon dont le problème est traité. Sans frottement, la formulation variationnelle devient un problème de minimisation sous contraintes standard. Par contre, la présence des termes non réguliers  $j(\bullet, \bullet)$  introduit par cette formulation d'inégalité variationnelle implique de régulariser la loi de frottement (cf. la section III.1.1.3 où des alternatives sont évoquées), ou bien la norme employée pour retrouver un problème de minimisation conventionnel [173].

## 2 Traitement des contraintes de contact

Grâce à la section III.1.2 sur la formulation d'un problème de contact, il a été observé que celui-ci revient à un problème de minimisation, et c'est sur cette similitude que reposent les méthodes de gestion du contact entre les solides. Ces méthodes permettent de régulariser les lois de contact et de frottement non linéaires en fonction des déplacements, afin de permettre la résolution du problème statique ou dynamique (l'aspect dynamique consistant en réalité à des résolutions successives de problèmes pseudo-statiques discrétisés sur un intervalle de temps).

L'objectif de ces méthodes est donc de proposer une expression de la contribution énergétique du contact  $\Pi_c$ , afin de minimiser l'énergie totale de la structure  $\Pi$  :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}} \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ avec } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \Pi_c, \quad (\text{III.43})$$

ce qui peut être atteint en exprimant la variation de cette énergie par rapport à  $\mathbf{u}$  et en cherchant à l'annuler :

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \delta a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \delta L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \delta \Pi_c = 0 \quad (\text{III.44})$$

où  $L(\mathbf{v} - \mathbf{u})$  l'énergie des efforts extérieurs et  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})$  l'énergie des efforts intérieurs. Le travail des forces d'inertie est désormais négligé.

### 2.1 Méthodes classiques

#### 2.1.1 Méthode de pénalité

Cette méthode a l'avantage de ne pas introduire d'inconnues supplémentaires, cependant sa convergence dépend fortement du choix des paramètres de pénalité. Il est nécessaire d'introduire préalablement la fonction de pénétration  $\bar{g}_N$  :

$$\bar{g}_N = \begin{cases} (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} & \text{si } (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

La contribution énergétique exprimée avec la méthode de pénalité s'écrit alors :

$$\Pi_c^P = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left( \epsilon_N (\bar{g}_N)^2 + \epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T \right) d\Gamma \quad (\text{III.46})$$

où  $\epsilon_N$  et  $\epsilon_T$  sont les paramètres de pénalité strictement supérieurs à zéro. La variation de  $\Pi_c^P$  donne :

$$\delta \Pi_c^P = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left( \epsilon_N \bar{g}_N \delta \bar{g}_N + \epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T \right) d\Gamma. \quad (\text{III.47})$$

Par ailleurs, si les paramètres de pénalité  $\epsilon_N$  et  $\epsilon_T$  tendent vers l'infini, la solution obtenue ainsi se rapprocherait de celle donnée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (détaillée dans la sous-section suivante), mais n'est pas souhaitable puisque cela mènerait à un mauvais conditionnement numérique du problème ainsi formulé.

Comme pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la cas du glissement amène à l'expression suivante de  $\Pi_c^P$  :

$$\delta \Pi_c^{P,gl} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left( \epsilon_N \bar{g}_N \delta \bar{g}_N + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T \right) d\Gamma. \quad (\text{III.48})$$

### 2.1.2 Méthode de Nitsche

Cette méthode est basée sur les pressions de contact des corps pour exprimer le vecteur de la pression de contact sur l'interface  $\Gamma_c$ , ce qui donne l'expression suivante dans le cas d'un contact sans frottement :

$$\Pi_c^N = - \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} \left( p_N^1 + p_N^2 \right) g_N d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} \epsilon_N (g_N)^2 d\Gamma. \quad (\text{III.49})$$

On remarque que la contribution du contact apparaît dans cette formulation sous la forme d'une moyenne. La seconde intégrale est une pénalité classique permettant d'éviter le mauvais conditionnement de l'ensemble de la formulation. La variation de l'expression précédente donne :

$$\delta \Pi_c^N = - \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} \left( \delta p_N^1 + \delta p_N^2 \right) g_N d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} \left( p_N^1 + p_N^2 \right) \delta g_N d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \epsilon_N \delta g_N d\Gamma. \quad (\text{III.50})$$

## 2.2 Méthodes avec multiplicateurs de Lagrange

### 2.2.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

L'utilisation de cette méthode, sur laquelle beaucoup d'autres sont basées, permet d'exprimer la contribution énergétique du contact de la manière suivante :

$$\Pi_c^{ML} = \int_{\Gamma_c} \left( \lambda_N g_N + \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T \right) d\Gamma \quad (\text{III.51})$$

où  $\lambda_N$  et  $\boldsymbol{\lambda}_T$  sont les multiplicateurs de Lagrange, nouvelles inconnues du problème prenant la place des pressions de contact, et  $g_N$  et  $\mathbf{g}_T$  les jeux dans les directions normale et tangentielle. La variation de cette énergie donne :

$$\delta \Pi_c^{ML} = \int_{\Gamma_c} \left( \lambda_N \delta g_N + \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \left( \delta \lambda_N g_N + \delta \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T \right) d\Gamma \quad (\text{III.52})$$

où la première intégrale décrit le travail virtuel des multiplicateurs de Lagrange associé à la variation des fonctions de jeu, tandis que la seconde intégrale correspond à l'application des contraintes nécessaires à la résolution de la formulation faible du problème de contact.

En cas d'adhérence, le déplacement relatif  $\mathbf{g}_T$  est nul et une équation de contrainte en découle, permettant de déterminer  $\boldsymbol{\lambda}_T$  en réaction. À l'inverse dans le cas du glissement, le multiplicateur de Lagrange est tel que  $\boldsymbol{\lambda}_T = \boldsymbol{\sigma}_T$ , l'équation (III.52) devient :

$$\delta\Pi_c^{\text{ML,gl.}} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N \delta g_N + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \delta \lambda_N g_N d\Gamma. \quad (\text{III.53})$$

### 2.2.2 Méthode des Lagrangiens perturbés

Cette méthode est une combinaison des méthodes des multiplicateurs de Lagrange et de pénalité au sein d'une même formulation [82], le but étant de régulariser la première par la seconde :

$$\Pi_c^{\text{LP}} = \int_{\Gamma_c} \left[ \lambda_N g_N - \frac{1}{2\epsilon_N} \lambda_N^2 + \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T - \frac{1}{2\epsilon_T} \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \boldsymbol{\lambda}_T \right] d\Gamma. \quad (\text{III.54})$$

La variation de la formulation précédente donne :

$$\delta\Pi_c^{\text{LP}} = \int_{\Gamma_c} \left[ \lambda_N \delta g_N + \delta \lambda_N \left( g_N - \frac{1}{\epsilon_N} \lambda_N \right) + \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \delta \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \left( \mathbf{g}_T - \frac{1}{\epsilon_T} \boldsymbol{\lambda}_T \right) \right] d\Gamma. \quad (\text{III.55})$$

Cette formulation n'est valable que pour un contact adhérent ou glissant sans frottement, sinon il est nécessaire d'employer la loi de Coulomb par exemple sous la forme d'une énergie complémentaire.

### 2.2.3 Méthode des Lagrangiens augmentés

Le concept de cette méthode repose sur la combinaison de la méthode de pénalité et les multiplicateurs de Lagrange (tout comme la méthode des Lagrangiens perturbés) mais en introduisant également la loi de frottement choisie dans la formulation. Cela donne :

$$\Pi_{c,N}^{\text{LA}} = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} \left( \lambda_N g_N + \frac{\epsilon_N}{2} (g_N)^2 \right) d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{2\epsilon_N} |\lambda_N|^2 d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases} \quad (\text{III.56})$$

où  $\hat{\lambda}_N = \lambda_N + \epsilon_N g_N$ . La variation donne :

$$\delta\Pi_{c,N}^{\text{LA}} = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} \left( \hat{\lambda}_N \delta g_N + \delta \lambda_N g_N \right) d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_N \leq 0 \\ \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{\epsilon_N} \lambda_N \delta \lambda_N d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_N > 0 \end{cases}. \quad (\text{III.57})$$

La formulation de la composante tangentielle s'écrit [123] :

$$\Pi_{c,T}^{\text{LA}} = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} \left( \boldsymbol{\lambda}_T \cdot \mathbf{g}_T + \frac{\epsilon_T}{2} \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T \right) d\Gamma & \text{pour } \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| \leq 0 \\ \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{2\epsilon_T} \left[ \|\boldsymbol{\lambda}_T\|^2 - 2\mu p_N \|\boldsymbol{\lambda}_T\| + (\mu p_N)^2 \right] d\Gamma & \text{pour } \|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_T\| > 0 \end{cases} \quad (\text{III.58})$$



tandis que le cas sans contact (i. e.  $g_N > 0$  donc  $p_N = 0$ ) donne :

$$\Pi_{c,T}^{LA} = \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{2\epsilon_T} \|\hat{\lambda}_T\|^2 d\Gamma \quad \forall \hat{\lambda}_T \quad (\text{III.59})$$

où  $\hat{\lambda}_T = \lambda_T + \epsilon_T g_T$ .

La variation des équations (III.58) et (III.59) donne :

$$\Pi_{c,T}^{LA} = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} (\hat{\lambda}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \delta \lambda_T \cdot \mathbf{g}_T) d\Gamma & \text{pour } \|\hat{\lambda}_T\| \leq \mu p_N \\ \int_{\Gamma_c} \left( -\frac{\mu p_N \hat{\lambda}_T}{\|\hat{\lambda}_T\|} \cdot \delta \mathbf{g}_T - \frac{1}{\epsilon_T} \left[ \lambda_T - \frac{\mu p_N \hat{\lambda}_T}{\|\hat{\lambda}_T\|} \right] \cdot \delta \mathbf{g}_T \right) d\Gamma & \text{pour } \|\hat{\lambda}_T\| > \mu p_N \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

et

$$\Pi_{c,T}^{LA} = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\epsilon_T} \hat{\lambda}_T \cdot \delta \hat{\lambda}_T d\Gamma \quad \forall \hat{\lambda}_T. \quad (\text{III.61})$$

Cependant, l'inconvénient de cette formulation est son mauvais conditionnement numérique qui découle notamment des termes  $\epsilon_N$  et  $\epsilon_T$ . L'algorithme d'Uzawa [151] permet de contourner cette difficulté lors de la résolution d'un problème de contact avec la méthode des Lagrangiens augmentés. Le principe est de chercher de façon itérative le multiplicateur de Lagrange en considérant à chaque itération qu'il est constant, avant de mettre à jour sa valeur à la fin de l'itération. En prenant pour exemple le cas d'un contact sans frottement, la recherche de  $\lambda_N$  est donc découplée de la recherche du déplacement solution  $\mathbf{u}$  du problème, la variation de la contribution énergétique du contact (III.56) s'écrit alors :

$$\delta \Pi_{c,N}^U = \int_{\Gamma_c} (\bar{\lambda}_N + \epsilon_N g_N) \delta g_N d\Gamma \quad (\text{III.62})$$

où  $\bar{\lambda}_N$  est déterminé par la relation suivante :

$$\bar{\lambda}_N^{k+1} = \bar{\lambda}_N^k + \epsilon_N g_N^{k+1}. \quad (\text{III.63})$$

C'est sur cette méthode que repose la méthode des lagrangiens dynamiques<sup>1</sup> [103], utilisée pour évaluer les forces non linéaires dans le cadre du calcul de la réponse forcée périodique et multi-harmonique d'une structure par le biais de la méthode de l'équilibrage harmonique. C'est elle qui a été retenue pour réaliser les simulations numérique sur le modèle éléments finis réduit décrit dans le chapitre IV, et dont les étapes analytiques pour la résolution numérique sont explicités dans la section III.4.

### 2.3 Problématique de la non-coïncidence de maillages

La méthode des éléments finis permet de résoudre des problèmes multi-physiques en discrétisant les domaines du problème à résoudre. Cette discrétisation passe par l'utilisation d'éléments eux-mêmes constitués de nœuds pour représenter un domaine de dimension  $\mathbb{R}^d$  pour  $d = 3$  et ainsi former un maillage. Cependant, lors du contact de deux domaines discrétisés par éléments finis, leur maillage n'est pas forcément coïncident avec celui de l'autre domaine, et ce pour plusieurs raisons. Par exemple lorsque le maillage de chacune des structures a été réalisé indépendamment, ou bien à cause de la géométrie de l'interface de contact (jeu, interpénétration, etc.). Cela implique donc d'employer des méthodes dédiées pour pouvoir malgré tout exprimer

1. abrégée DLFT pour *Dynamic Lagrangian Frequency Time* en anglais.

analytiquement les forces de contact et les calculer ensuite numériquement.

### 2.3.1 Typologie

Les méthodes pour gérer le contact entre deux domaines de maillages non coïncidents peuvent être classées selon trois types [153] : le nœud-à-nœud (abrégé NTN pour *node-to-node* en anglais), le nœud-à-surface (abrégé NTS pour *node-to-segment/surface* selon en 2D ou 3D) et le surface-à-surface (abrégé STS pour *segment-to-segment/surface-to-surface*).

**Méthode NTN** La première méthode, proposée en 1975 [51], définit les forces de contact en se basant uniquement sur les nœuds du maillage. Cette méthode permet un excellent transfert de la pression de contact d’une interface à l’autre lorsque les maillages sont coïncidents, cependant cette méthode est restreinte aux structures en contact quasi-statique, du moins soumises à de petits glissements en dynamique, avec des maillages suffisamment proches, sinon elle nécessite un remaillage dans le cas où les maillages sont non coïncidents.

**Méthode NTS** La seconde, proposée en 1976 [72, 181, 182], se base uniquement sur les nœuds de contact définis comme esclaves pour interdire leur pénétration dans les mailles des surfaces maîtres au sein de la formulation du contact. La version à deux passages (*double-pass*) permet de l’améliorer afin de réussir le *patch test* : elle consiste à intervertir les surfaces maîtres et esclaves pour le calcul des pression de contact et du jeu. Cette méthode est cependant inadaptée pour les cas de contact avec frottement et les maillages quadratiques par exemple [39]. De plus, elle a pour inconvénients d’avoir un effet rigidifiant sur les structures (approximation d’une pression de contact uniforme sur les surfaces de contact), et de générer des sauts de force de contact lorsqu’un nœud esclave glisse sur la surface maître. Elle a notamment été couplée avec la méthode de pénalité [20, 65, 117, 172] ou bien la méthode des Lagrangiens augmentés [14].

**Méthode STS** La troisième, formulée plus tard en 1998 [180], intègre les efforts de contact sur la surface esclave au lieu de l’intégrer sur les nœuds. Cette approche réussit le *patch test* mais ne remplit pas la condition inf-sup, c’est-à-dire la condition de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi [11]. Cette condition possède des critères qui permettent de savoir quand la discrétisation d’un problème de point selle, tel que la formulation éléments finis, est stable et que la solution convergée est la bonne. En effet, certains problèmes de ce type possèdent de nombreuses discrétisations instables, donnant lieu à des artefacts tels que des oscillations parasites de la solution. Elle a été associée avec la méthode des Lagrangiens perturbés [152], la méthode des Lagrangiens augmentés [183], ou bien encore avec la méthode de pénalité [116, 180].

### 2.3.2 Méthode de mortier

C’est à partir de la méthode STS qu’est issue la méthode de décomposition de domaines des éléments avec joints, ou plus simplement appelée méthode de mortier, traduction de *mortar method* en anglais, tout d’abord pour du contact unilatéral [17, 18, 21, 69] puis du contact avec frottement [95], mais aussi pour des grandes déformations [165, 177] et en trois dimensions également [131-133]. Le travail des efforts de contact est inclus dans la formulation faible du problème et doit donc satisfaire la condition de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi, avec des espaces appropriés pour les multiplicateurs de Lagrange doubles [55, 125, 126, 153, 171] pour rendre cette méthode plus efficace. Cependant, sa formulation discrète nécessaire à la découpe des interfaces de contact est basée sur des fonctions mathématiques complexes, ce qui implique

un coût de calcul plus important. En adoptant la convention  $\lambda^s = -f_c^s$  pour l'expression des multiplicateurs de Lagrange, on peut écrire l'expression de l'énergie liée aux forces de contact :

$$\Pi_c = \sum_{s=1}^2 \int_{\Gamma_c^s} \lambda^s \mathbf{v}^s d\Gamma, \quad (\text{III.64})$$

la variation de l'expression précédente donne :

$$\delta\Pi_c = \sum_{s=1}^2 \int_{\Gamma_c^s} \lambda^s \delta\mathbf{v}^s d\Gamma, \quad (\text{III.65})$$

et par équilibre des forces de contact normales entre les sous-frontières  $\Gamma_c^s$  :

$$\lambda^1 d\Gamma = -\lambda^2 d\Gamma, \quad (\text{III.66})$$

on peut écrire l'énergie sur une seule des sous-frontières de contact :

$$\delta\Pi_c = \int_{\Gamma_c^1} \lambda (\delta\mathbf{v}^1 - \delta\mathbf{v}^2) d\Gamma. \quad (\text{III.67})$$

Le champ virtuel  $\delta\lambda$  sert de fonction de pondération pour la contrainte cinématique du contact, la condition de non-pénétration peut alors être remplacée par une formulation intégrale faible le long de la sous-frontière  $\Gamma_c^1$  :

$$\int_{\Gamma_c^1} \delta\lambda_N g_N d\Gamma \geq 0. \quad (\text{III.68})$$

Par principe, la surface de contact numéro 1 est désignée comme la surface esclave ou non-mortier puisque c'est celle où sont interpolés les multiplicateurs de Lagrange, tandis que la surface de contact numéro 2 est appelée la surface maître ou mortier. La suite de cette méthode consiste à utiliser des fonctions adaptées (polynômes par exemple) pour interpoler le champ de déplacement  $\mathbf{v}^s$ .

### 2.3.3 Méthode des éléments de jeu virtuels

Toujours dans l'optique de traiter la problématique de maillages non coïncidents entre deux interfaces de contact, une méthode propose l'utilisation d'éléments de jeu virtuels (*virtual gap elements* en anglais) [90, 154-156, 174, 175], l'objectif étant de mieux traiter le jeu entre les interfaces de contact, notamment lorsque celles-ci ne sont pas planes, ce qui rend complexe le calcul des forces de contact avec la méthode de mortier. La méthode d'éléments de jeu virtuels est couplée à la méthode des multiplicateurs de Lagrange localisés, qui introduit une surface indépendante entre les interfaces de contact. Ce concept de surface intermédiaire placée entre les surfaces de contact a émergé au début des années 2000 avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange localisés [57, 75, 101, 118, 119, 135]. Ainsi, deux formulations faibles sont appliquées entre la surface indépendante et chacune des deux interfaces de contact. La surface intermédiaire virtuelle contient un nombre  $n_v$  de nœuds égal à :

$$n_v = n_1 + n_2 - n_0 \quad (\text{III.69})$$

avec  $n_1$  et  $n_2$  le nombre de nœuds respectivement des surfaces de contact 1 et 2, et  $n_0$  le nombre de nœuds étant coïncidents (en général égal à 0).

L'objectif est de relier les déplacements des surfaces de contact par rapport à celui de la surface intermédiaire, en utilisant la relation déformation-déplacement d'un élément triangulaire (2D) ou pyramidal (3D), comme on peut le voir sur les figures III.6a et III.6b ci-après.

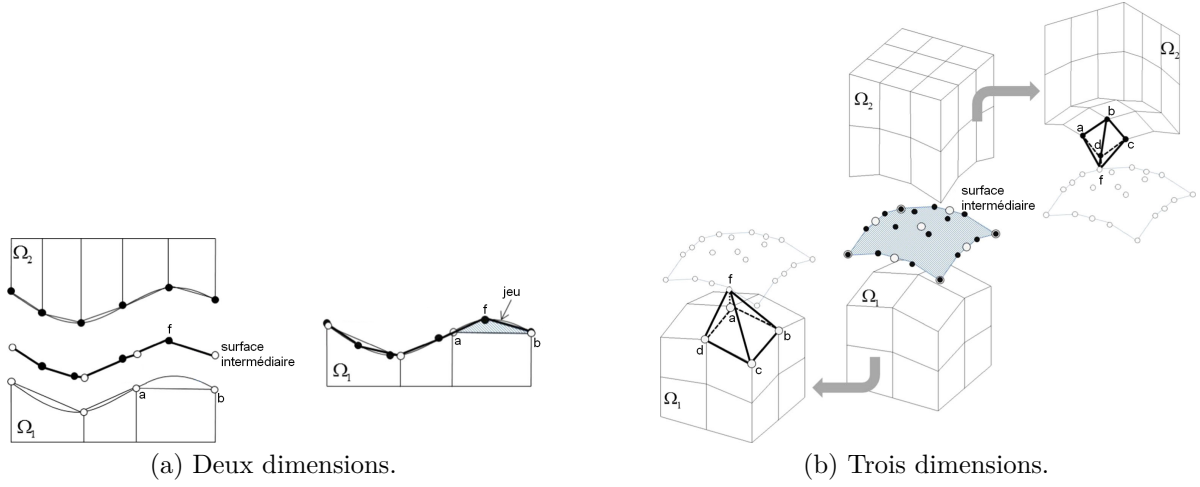


FIGURE III.6 – Principe de la méthode des éléments de jeu virtuels [155].

Pour chaque élément de jeu virtuel, créé à partir des nœuds  $a$  et  $b$  de la surface de contact 1 par exemple, et d'un nœud  $f$  de la surface intermédiaire (voir figure III.6a), on peut écrire sa relation déformation-déplacement (2D) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}, \mathbf{u}^\top = (u_f \quad v_f \quad u_a \quad v_a \quad u_b \quad v_b). \quad (\text{III.70})$$

Pour satisfaire la condition d'énergie nulle, c'est-à-dire qu'aucune énergie n'est injectée ou retirée à cause de l'introduction d'une surface intermédiaire, l'équation précédente est égale à 0 :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} \begin{pmatrix} u_f \\ v_f \\ u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ avec } \mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{ab} & 0 & y_{bf} & 0 & y_{fa} & 0 \\ 0 & x_{ba} & 0 & x_{fb} & 0 & x_{af} \\ x_{ba} & y_{ab} & x_{fb} & y_{bf} & x_{af} & y_{fa} \end{pmatrix} \quad (\text{III.71})$$

où  $x_{ij} = x_i - x_j$  et  $y_{ij} = y_i - y_j \forall i, j = \{a, b, f\}$ .

Ainsi, en séparant les composantes liées à la surface intermédiaires et celles de l'interface de contact considérée, on a :

$$\mathbf{B}_f \begin{pmatrix} u_f \\ v_f \end{pmatrix} = -\mathbf{B}_{ab} \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{pmatrix} \quad (\text{III.72})$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u_f \\ v_f \end{pmatrix} = -[\mathbf{B}_f^\top \mathbf{B}_f]^{-1} \mathbf{B}_f^\top \mathbf{B}_{ab} \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{pmatrix}. \quad (\text{III.73})$$

L'expression précédente reste valide si l'élément de jeu virtuel est plat, c'est-à-dire que le jeu est nul entre la surface intermédiaire et la surface de contact. On obtient donc pour le déplacement de la surface intermédiaire :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{t}_{fk} \mathbf{u}_k \text{ où } \mathbf{t}_{fk} = \left[ \mathbf{B}_f^\top \mathbf{B}_f \right]^{-1} \mathbf{B}_f^\top \mathbf{B}_k \quad (\text{III.74})$$

avec  $k$  désignant le couple de nœuds  $(a, b)$  les plus proches sur la surface de contact concernée par rapport à la surface intermédiaire. L'opération est répétée pour chacun des nœuds de la surface intermédiaire afin de construire la matrice suivante :

$$\mathbf{T}_{f1} = \sum_{j=1}^{n_f} \sum_{k=1}^{n_1} \mathbf{t}_{jk}. \quad (\text{III.75})$$

Enfin, l'ensemble des déplacements des surfaces de contact peut être exprimé en fonction de ceux de l'interface intermédiaire :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{L}_{1f} \mathbf{u}_f = \left( \mathbf{T}_{f1}^\top \mathbf{T}_{f1} \right)^{-1} \mathbf{T}_{f1}^\top \mathbf{u}_f \quad (\text{III.76a})$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{L}_{2f} \mathbf{u}_f = \left( \mathbf{T}_{f2}^\top \mathbf{T}_{f2} \right)^{-1} \mathbf{T}_{f2}^\top \mathbf{u}_f. \quad (\text{III.76b})$$

Il est même possible de calculer la matrice reliant les déplacements d'une surface de contact à l'autre en passant par la surface intermédiaire :

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{L}_{1f} \mathbf{T}_{f2} \quad (\text{III.77a})$$

$$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{L}_{2f} \mathbf{T}_{f1}. \quad (\text{III.77b})$$

Si l'on reprend les équations du mouvement de deux structures en contact, avant la condensation sur le déplacement relatif :

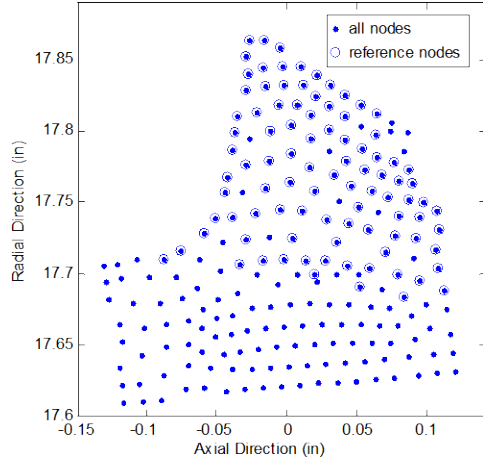
$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{r,1} \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1} = \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r,1} \\ \mathbf{Z}_{r,2} \tilde{\mathbf{u}}_2 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,2} = \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r,2}, \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

on peut a priori écrire le déplacement relatif tel que  $\tilde{\mathbf{u}}_r = \tilde{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{C}_{12} \tilde{\mathbf{u}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{\lambda}} = \tilde{\mathbf{f}}_{nl} = \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1} - \mathbf{C}_{12} \tilde{\mathbf{f}}_{nl,2}$ .

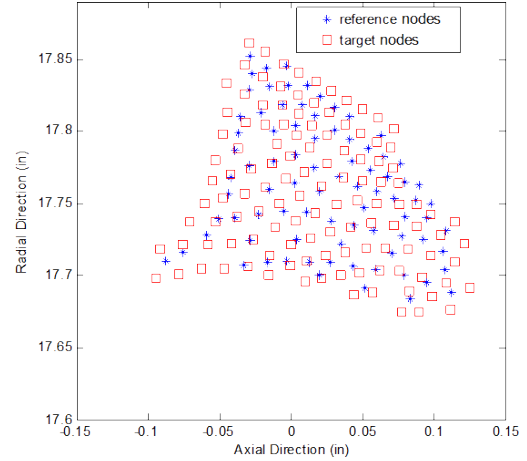
### 2.3.4 Méthodes par interpolation du déplacement relatif

La gestion de la non-coïncidence des maillages entre deux structures en contact est une problématique rencontrée dans la littérature pour des modèles numériques éléments finis d'aubes de turbine. En effet dans l'article de conférence [186], la structure étudiée est une turbine à vapeur basse pression dont les aubes ne sont pas en contact lors du montage, mais le deviennent lors de la précharge centrifuge, ce qui implique généralement une non-coïncidence des maillages de l'interface de contact. Étant donné que la méthode employée pour gérer le contact entre les talons est de type nœud-à-nœud, et que la structure est cyclique à 360 degrés, la qualité de l'appariement des nœuds est essentielle compte-tenu des hypothèses de périodicité de la symétrie cyclique.

La méthode proposée consiste à définir le maillage d'une des deux surfaces de contact comme celle de référence, tandis qu'un ensemble de nœuds virtuels est créé sur l'autre surface de contact cible (voir figure III.7), les nœuds de référence sont sélectionnés selon la moyenne de



(a) Nœuds de référence sur le maillage d'une des deux surface de contact.



(b) Nœuds de contact réels sur les surfaces de référence et cible.

FIGURE III.7 – Procédure d'appariage pour des maillages non coïncidents [186].

la distribution de pression de contact normale liée à la précharge statique calculée par ANSYS. Pour ce faire, pour chacun de ces nœuds sélectionnés, on recherche s'il est situé au sein d'un triangle de nœuds sur la surface cible, si ce n'est pas le cas alors le nœud est exclu et on passe au nœud suivant, sinon le nœud est conservé parmi les nœuds de contact réels sur la surface de référence, et les trois nœuds aux sommets du plus petit triangle sont sélectionnés parmi les nœuds de contact réels de la surface cible. Ensuite, pour chaque nœud de contact réel de la surface de référence, un nœud virtuel parfaitement coïncident est créé sur la surface cible, et ses déplacements sont calculés comme une somme pondérée des déplacements des trois nœuds aux sommets du triangle. Le déplacement du nœud virtuel s'écrit alors :

$$u_{v,x} = \sum_{n=1}^3 w_n u_{n,x} \quad (\text{III.79a})$$

$$u_{v,y} = \sum_{n=1}^3 w_n u_{n,y} \quad (\text{III.79b})$$

$$u_{v,z} = \sum_{n=1}^3 w_n u_{n,z} \quad (\text{III.79c})$$

où le terme  $w_n$  correspond au n-ième poids calculé à l'aide des polynômes de Lagrange du premier ordre d'un élément triangulaire [115].

On a donc pour chaque nœud virtuel :

$$\mathbf{u}_v = \begin{pmatrix} u_{v,x} \\ u_{v,y} \\ u_{v,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 u_{1,x} + w_2 u_{2,x} + w_3 u_{3,x} \\ w_1 u_{1,y} + w_2 u_{2,y} + w_3 u_{3,y} \\ w_1 u_{1,z} + w_2 u_{2,z} + w_3 u_{3,z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.80})$$

où  $w_j = N_j$  les fonctions de forme linéaires d'un élément triangulaire, illustré par la figure III.8, s'écrivent :

$$N_j(s, t) = N_j(s)N_j(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^1 \frac{(s - s_i)}{(s_j - s_i)} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^1 \frac{(t - t_i)}{(t_j - t_i)}, \quad (\text{III.81})$$

soit par exemple :

$$N_1(s, t) = s \quad (\text{III.82a})$$

$$N_2(s, t) = t \quad (\text{III.82b})$$

$$N_3(s, t) = 1 - s - t. \quad (\text{III.82c})$$

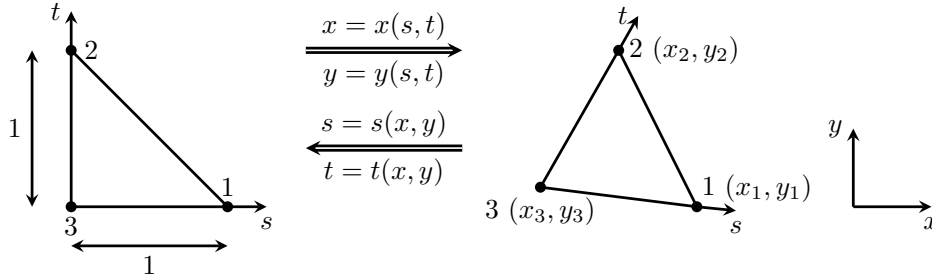


FIGURE III.8 – Éléments triangulaires linéaires isoparamétriques.

Le déplacement relatif s'écrit donc entre un nœud de la surface de référence et son nœud projeté virtuel :

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{\text{ref}} - \mathbf{u}_v. \quad (\text{III.83})$$

Les forces de contact s'écrivent ainsi avec la méthode de pénalité :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},N} = \mathbf{K}_N \mathbf{u}_{r,N} \quad (\text{III.84a})$$

$$\mathbf{f}_{\text{nl},T} = \mathbf{K}_T \mathbf{u}_{r,T}. \quad (\text{III.84b})$$

Dans cet article [15], la méthode proposée pour gérer les maillages non coïncidents dans le cas du calcul de réponses forcées non linéaires avec du contact en talon d'aubes de turbine, est elle aussi basée sur la pondération du déplacement d'un nœud projeté par rapport à plusieurs nœuds voisins, et illustrée par la figure III.9.



FIGURE III.9 – Illustration de la méthode proposée dans [15].

Elle consiste dans un premier temps à déterminer le projeté orthogonal de chacun des nœuds de la surface de contact de référence maillée finement sur celle cible. Ensuite, des coefficients de pondération inversement proportionnels à la distance entre les nœuds voisins sur la surface de contact cible et les nœuds virtuels projetés sont calculés, pour ensuite pondérer la raideur de pénalité.

Cette distance est exprimée ainsi, pour un nombre de nœuds voisins  $n_t$  égal à deux en dimension une, et  $n_t$  supérieur ou égal à trois en deux dimensions :

$$d_j = \sqrt{(x_v - x_j)^2 + (y_v - y_j)^2} \quad \forall j = (1, \dots, n_t). \quad (\text{III.85})$$

Puis les coefficients de pondération inversement proportionnels aux distances sont calculés :

$$w_j = \left( d_j \sum_{i=1}^{n_t} \frac{1}{d_i} \right)^{-1} \quad \forall i = (1, \dots, n_t) \quad (\text{III.86})$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{n_t} w_j = 1. \quad (\text{III.87})$$

Les termes qui composent les matrices de raideur normale et tangentielle de la méthode de pénalité sont alors pondérés pour chaque paire de nœuds  $(c - t_j)$  :

$$\mathbf{K}_{N_{(c,j)}} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & k_{N_j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ avec } k_{N_j} = w_j k_N \quad \forall j = (1, \dots, n_t), \quad (\text{III.88a})$$

$$\mathbf{K}_{T_{(c,j)}} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & k_{T_j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ avec } k_{T_j} = w_j k_T \quad \forall j = (1, \dots, n_t). \quad (\text{III.88b})$$

Enfin, le déplacement relatif entre les nœuds de la surface de référence et la surface cible (un nœud de la surface cible peut être appairé avec plusieurs nœuds de la surface de référence) est exprimé :

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{\text{ref}} - \mathbf{u}_v \quad (\text{III.89})$$

et la pondération intervient dans le calcul des forces non linéaires par la méthode de pénalité :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},N} = \mathbf{K}_N \mathbf{u}_{r,N} \quad (\text{III.90a})$$

$$\mathbf{f}_{\text{nl},T} = \mathbf{K}_T \mathbf{u}_{r,T}. \quad (\text{III.90b})$$

Ces trois approches ont en commun l'utilisation d'une interpolation linéaire pour exprimer le déplacement d'une structure en contact avec une autre, où les nœuds du maillage par éléments finis ne sont pas coïncidents. Cela passe par la définition de nœuds virtuels, qui sont les projetés orthogonaux des nœuds depuis une surface de contact ou bien des deux, pour la constitution d'une matrice de passage, ce qui permet d'écrire le déplacement de chacune des deux structures en contact par le biais d'une surface intermédiaire constituée de ces nœuds virtuels.

### 3 Résolution d'un système d'équations non linéaires

Cette section vise à fournir un ensemble non exhaustif et assez succinct de méthodes les plus couramment utilisées pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires tels que ceux rencontrés dans l'étude de la dynamique des structures. Les méthodes existantes se divisent en deux types : les méthodes temporelles et les méthodes fréquentielles, décrites respectivement dans les sous-sections III.3.1 et III.3.2. Celles-ci nécessitent des algorithmes de résolution de systèmes algébriques non linéaires spécifiques pour la recherche de solutions (section III.5.1), bien souvent assistés par des méthodes de continuation qui permettent de faciliter la convergence du solveur (section III.5.2).

Dans le cadre de cette thèse, le système non linéaire étudié est l'équation différentielle du



second ordre régissant le comportement dynamique d'une structure comportant du contact avec frottement, elle s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ex}(t) \quad (\text{III.91})$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur,  $\mathbf{f}_{nl}$  désigne les forces non linéaires,  $\mathbf{f}_{ex}$  représente la force d'excitation périodique de fréquence  $\omega$ , et  $\mathbf{u}$  correspond au déplacement qui est l'inconnue du problème. L'équation précédente est en fait un système d'équations algébriques non linéaires de taille  $n$  égale au nombre de degrés de liberté de la structure discrétisée.

### 3.1 Méthodes temporelles

#### 3.1.1 Méthode de perturbation

Il existe plusieurs méthodes de perturbation [107, 108], qui consistent à résoudre de façon analytique le système d'équations non linéaires, et dont le principe est basé sur l'introduction d'un paramètre  $\varepsilon$  sans dimension et de l'ordre de grandeur de la non-linéarité au sein du problème modélisé. Le déplacement solution de celui-ci est alors écrit comme un développement de la forme suivante :

$$\mathbf{u}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_o} \varepsilon^j \mathbf{u}_j(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_o+1}) \quad (\text{III.92})$$

où  $n_o$  désigne l'ordre du développement de  $\mathbf{u}$  et qui définit de ce fait la puissance maximale de  $\varepsilon$ . En injectant cette nouvelle expression dans l'équation (III.91), et en regroupant les termes selon les différentes puissances de  $\varepsilon$ , c'est désormais un système composé de  $n_o + 1$  équations qui constitue le problème, permettant alors d'identifier les contributions de chacun des termes  $\mathbf{u}_j(t)$ . La résolution de cette nouvelle formulation du problème non linéaire fait cependant apparaître des termes dits séculaires<sup>2</sup>, dont l'amplitude croît indéfiniment avec le temps, alors que la solution d'un tel problème est en réalité bornée. Deux méthodes sont particulièrement employées pour pallier cet inconvénient : la méthode de Lindstedt-Poincaré et la méthode des échelles multiples, qui s'appuient sur l'expansion en ordres de  $\varepsilon$  de variables supplémentaires.

La première méthode repose sur l'ajout d'une nouvelle variable de temps  $\tau = \omega t$  où  $\omega$  est défini tel que :

$$\omega(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_o} \varepsilon^j \omega_j(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_o+1}). \quad (\text{III.93})$$

L'expression de la solution se réécrit ainsi de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_o} \varepsilon^j \mathbf{u}_j(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_o+1}). \quad (\text{III.94})$$

Comme décrit précédemment, en injectant cette expression dans l'équation (III.91), chacune des contributions  $\mathbf{u}_j$  selon  $\varepsilon$  peut être déterminée, les termes séculaires divergents en temps ont cette fois disparu. De plus, cette expansion de  $\omega$  permet d'avoir une relation de dépendance entre la fréquence et l'amplitude de la réponse du système d'équations non linéaires, qui s'avère avantageuse pour leur étude.

---

2. En référence au terme latin *saeculum* signifiant siècle, qui est l'unité caractéristique pour l'étude à long terme de trajectoires planétaires en astronomie, cette méthode ayant été utilisée à l'origine pour la mécanique céleste.

La seconde méthode mentionnée propose une approche différente [141], où les contributions  $\mathbf{u}_j$  dépendent d'échelles de temps indépendantes  $T_j = \varepsilon^j t$  facteurs de  $\varepsilon$ . Le développement de  $\mathbf{u}_j$  donne donc :

$$\mathbf{u}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_o} \varepsilon^j \mathbf{u}_j(T_0, T_1, \dots, T_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_o+1}). \quad (\text{III.95})$$

Toujours selon la même démarche, on retrouve les expressions des contributions du développement de la solution selon les différentes échelles de temps introduites, permettant de mieux représenter les phénomènes en fonction de la variation en temps du système. Par ailleurs, cette méthode est plus adaptée dans le cadre du traitement de systèmes d'équations non linéaires amortis par rapport à la méthode de Lindset-Poincaré.

Cependant, les méthodes de perturbation se basent sur une formulation analytique de la recherche de solution aux problèmes non linéaires traités, qui s'avère mathématiquement difficile lorsque l'ordre des développements dépasse  $n_o = 3$  en général, ou bien quand la taille du système à résoudre est relativement grande. De plus,  $\varepsilon$  étant par définition petit, c'est pourquoi cette méthode convient surtout pour des systèmes faiblement non linéaires.

### 3.1.2 Intégrateurs temporels

L'utilisation d'un schéma d'intégration temporel est sans doute la méthodologie la plus classique quand il s'agit de résoudre l'équation du mouvement d'un système non linéaire (III.91). Le principe de ce type de méthode repose sur une intégration itérative de la réponse du système d'équation, à partir d'une condition initiale donnée. Il existe un certain nombre de schémas d'intégration pour résoudre les systèmes d'équations différentielles ordinaires<sup>3</sup> du premier ordre, les EDO du second ordre telles que celle de l'équation du mouvement d'une structure nécessitent des schémas plus spécifiques.

Dans un premier temps, afin de retrouver un système d'équations différentielles du premier ordre, il faut exprimer l'équation du mouvement d'un système non linéaire (III.91) sous la forme d'une représentation d'état faisant intervenir le vecteur d'état  $\mathbf{y}(t)$  et ayant pour définition :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.96})$$

ce qui revient à :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_{\text{ex}}(t) \quad (\text{III.97})$$

avec  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{nl}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{nl}} \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{F}_{\text{ex}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{ex}} \end{pmatrix}$ .

C'est en fait un problème de Cauchy qui, posé proprement, s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : [t_0, t_k] \times \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= f(t, \mathbf{y}(t)) \\ \text{avec } \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (\text{III.98})$$

Pour résoudre (III.97), il est nécessaire de discrétiser la solution du système et sa dérivée première. De ce fait,  $\mathbf{y}_k$  représente l'évaluation de la solution  $\mathbf{y}$  à l'instant  $t_k$  tandis que  $\mathbf{y}_{k+1}$  est évalué à partir des valeurs  $\mathbf{y}$  et  $\dot{\mathbf{y}}$  aux instants précédents. L'expression générale valable

3. généralement abrégée EDO.

pour les méthodes à pas multiples s'écrit [58] :

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{l=1}^m \alpha_l \mathbf{y}_{k+1-l} - h \sum_{l=0}^m \beta_l \dot{\mathbf{y}}_{k+1-l} \quad (\text{III.99})$$

avec  $h = t_{k+1} - t_k > 0$  le pas de temps. Les termes  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  définissent ici le type de schéma d'intégration, c'est-à-dire :

- pour  $\beta_0 = 0$ , le schéma d'intégration est explicite,  $\mathbf{y}_{k+1}$  est calculé directement à partir des solutions aux instants précédents ;
- pour  $\beta_0 \neq 0$  alors le schéma d'intégration est implicite,  $\mathbf{y}_{k+1}$  est calculé à partir de la solution à l'instant présent en plus de celles aux instants précédents.
- pour  $\beta_j = 0$  et  $\alpha_j = 0 \forall j > 1$ ,  $\mathbf{y}_{k+1}$  ne dépend que de la solution de l'instant précédent, c'est donc une méthode à un pas.

Compte-tenu des définitions précédentes, la littérature a souvent recours aux schémas d'Euler explicite ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$  et  $\beta_1 = -1$ ) et implicite ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = -1$  et  $\beta_1 = 0$ ) qui utilisent un pas simple, et donc  $m = 1$ , ce qui donne :

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \dot{\mathbf{y}}_k \quad (\text{explicite}), \quad (\text{III.100})$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \dot{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (\text{implicite}). \quad (\text{III.101})$$

Ces schémas, bien que simples, ont une erreur induite pouvant être assez élevée si le pas choisi est trop grand, et donc manque parfois de précision en plus d'un problème de stabilité, d'où l'intérêt de préférer un schéma d'intégration à pas multiples.

La plus courante est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (abrégée RK4) [26], dont l'expression est la suivante :

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{III.102})$$

où

$$\begin{cases} k_1 = f(t, \mathbf{y}) & (\text{III.103a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + h \frac{k_1}{2}\right) & (\text{III.103b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + h \frac{k_2}{2}\right) & (\text{III.103c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_4 = f(t_k + h, \mathbf{y}_k + h k_3) & (\text{III.103d}) \end{cases}$$

avec  $f(t, \mathbf{y}) = \dot{\mathbf{y}}$ . Le terme  $k_1$  correspond à la pente à l'instant  $t_k$  (équivalent au schéma d'Euler explicite),  $k_2$  désigne la pente au milieu du pas de temps  $h$  à  $t_{k+h/2}$  en utilisant la pente  $k_1$ , idem pour  $k_3$  mais en se servant de  $k_2$ , et enfin  $k_4$  la pente à l'instant  $t_{k+h}$  avec  $k_3$ . Le pas global calculé est donc une moyenne de quatre pas différents, les pentes  $k_2$  et  $k_3$  étant celles qui ont le poids le plus important.

Pour les EDO d'ordre 2, le schéma de Newmark [110] est particulièrement adapté, d'autant plus que celui-ci est capable de traiter aussi bien des schémas linéaires et non linéaires. De plus, le calcul des champs de déplacement et de vitesse est direct, il n'y a pas besoin de passer par

une représentation d'état de l'équation (III.91). Le schéma d'intégration s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_k + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{u}}_k + \gamma h \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} & \text{(III.104a)} \\ \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + h \dot{\mathbf{u}}_k + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_k + h^2 \beta \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} & \text{(III.104b)} \end{cases}$$

avec deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  qui définissent directement les propriétés de l'algorithme. En effet, il en existe un certain nombre (explicite, implicite, Fox & Goodwin, accélération linéaire, accélération moyenne, etc.) basés sur le schéma de Newmark, dont la stabilité dépend du choix des valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  [58].

### 3.1.3 Méthode de tir

Contrairement aux schémas d'intégration temporel qui s'appliquent à un problème de Cauchy, la méthode de tir<sup>4</sup> se définit comme un problème aux limites. En effet, la condition initiale du problème n'est pas connue mais supposée, une intégration temporelle est donc réalisée à partir de ce point sur une période présumée. L'exactitude de la condition initiale choisie est déterminée en comparant les états initial et final de la période d'intégration, une divergence indique alors que la condition initiale ne satisfait pas la condition de périodicité, et il faut donc renouveler itérativement ce processus jusqu'à converger vers la solution (selon un certain critère) [102]. Cette méthode a pour avantage d'éviter le calcul de la période transitoire d'un système dynamique, qui a peu d'intérêt lorsque celui-ci est soumis à une excitation harmonique, la réponse périodique établie étant celle sur laquelle se concentre l'étude de la dynamique d'un système.

Si l'on considère le problème aux limites d'une EDO d'ordre 2 suivant :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : [t_0, t_k] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) &= f(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) & \text{(III.105)} \\ \text{avec } \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0, \mathbf{u}(t_k) = \mathbf{u}_k, \end{aligned}$$

on suppose que  $\mathbf{u}(t; a)$  est solution du problème aux conditions initiales associé :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) &= f(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) & \text{(III.106)} \\ \text{avec } \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(t_0) = a. \end{aligned}$$

De façon concrète, la méthode de tir a pour objectif de trouver une solution qui permettra de corriger la condition initiale, afin de vérifier la condition de périodicité. Cette fonction s'écrit :

$$\mathbf{R}(a) = \mathbf{u}(t_k; a) - \mathbf{u}_k \quad \text{(III.107)}$$

avec  $a$  le paramètre de tir que l'on fait varier pour trouver le zéro de cette fonction, par le biais de la méthode de Newton par exemple.

Il y a une équivalence entre les racines de la fonction  $\mathbf{R}$  et les solutions du problème aux limites : si  $a$  est une racine de  $\mathbf{R}$ , alors  $\mathbf{u}(t_k; a) = \mathbf{u}_k$ , et  $\mathbf{u}(t; a)$  est ainsi une solution du problème aux limites. Inversement, si le problème aux limites admet une solution  $\mathbf{u}(t)$ , c'est aussi l'unique solution  $\mathbf{u}(t; a)$  du problème aux conditions initiales où  $a = \dot{\mathbf{u}}(t_0)$ , donc  $a$  est une racine de  $\mathbf{R}$ .

---

4. *shooting method* en anglais.

Cette méthode tire son origine de l'artillerie, interprétable par l'analogie suivante : un canon est placé à la position initiale  $\mathbf{u}(t_0)$ , et il fait feu en faisant varier l'angle de tir tant que la condition limite  $\mathbf{u}(t_k)$  n'est pas atteinte.

## 3.2 Méthodes fréquentielles

### 3.2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique<sup>5</sup> est devenue incontournable quand il s'agit de calculer la réponse fréquentielle d'un système d'équations non linéaires en régime périodique établi, quelque soit le domaine de l'ingénierie concerné. En effet, on considère uniquement le régime stationnaire de la réponse, le régime transitoire est donc négligé, soumis à une excitation elle-même sinusoïdale. La réponse de l'équation (III.91) s'exprime ainsi sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'harmonique  $N_h$  [28, 85, 105] telle que :

$$\mathbf{u}(t) \simeq \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)). \quad (\text{III.108})$$

Le vecteur des déplacements contenant les termes multi-harmoniques dans le domaine fréquentiel s'écrit alors comme :

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_h}, \mathbf{b}_{N_h}]. \quad (\text{III.109})$$

Une projection de Galerkin [166] est appliquée pour formuler l'équation (III.91) dans le domaine fréquentiel, devenant l'équation suivante :

$$\mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl} = \tilde{\mathbf{f}}_{ex} \quad (\text{III.110})$$

où  $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}$  et  $\tilde{\mathbf{f}}_{ex}$  sont respectivement les vecteurs multi-harmoniques des forces de contact non linéaires et des forces extérieures.  $\mathbf{Z}$  est la matrice de rigidité dynamique diagonale par blocs telle que :

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & k\omega\mathbf{C} \\ -k\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{pmatrix} \quad k = \llbracket 1, N_h \rrbracket. \quad (\text{III.111})$$

On pourra se référer à la thèse [167] pour une description détaillée des étapes de la projection de Galerkin pour un problème du même type.

Cette méthode est particulièrement efficace puisqu'elle permet de passer d'un système différentiel (III.91) à un système algébrique (III.110), malgré l'augmentation du nombre d'inconnues dépendant du nombre d'harmoniques considérées dans l'équation (III.108).

### 3.2.2 Collocation trigonométrique

La méthode de collocation trigonométrique<sup>6</sup> [44, 74, 176] décompose elle aussi la réponse du système considérée sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'harmonique  $N_h$ , en revanche l'équation du mouvement est d'abord déclinée pour un nombre  $N_t$  d'instant temporels

5. abrégée HBM pour *Harmonic Balance Method* en anglais.

6. abrégée TCM pour *Trigonometric Collocation Method* en anglais.

$t_k$ , ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t_1) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t_1) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t_1) + \mathbf{f}_{nl}(t_1, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ex}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t_k) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t_k) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t_k) + \mathbf{f}_{nl}(t_k, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ex}(t_k) \\ \vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t_{N_t}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t_{N_t}) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t_{N_t}) + \mathbf{f}_{nl}(t_{N_t}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ex}(t_{N_t}) \end{array} \right. \quad (\text{III.112})$$

où l'on injecte ensuite le développement en série de Fourier tronquée de  $\mathbf{u}$ . La fonction résidu à minimiser pour trouver la solution du système d'équations non linéaires s'écrit alors :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{F}^{-1}\mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}_{ex}(\omega, t) \quad (\text{III.113})$$

avec  $\mathcal{F}^{-1}$  la matrice de Fourier discrète inverse pour passer le terme  $\mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{u}}$  dans le domaine temporel, les forces non linéaires et extérieures l'étant déjà.

Le choix de  $N_t$  est assez primordial puisqu'il agit directement sur la taille du système, la méthode à adopter pour le résoudre n'est donc pas la même si le système est carré (i. e.  $N_t = 2N_h + 1$ ), alors l'algorithme de Newton-Raphson convient, ou bien s'il est rectangulaire (i. e.  $N_t > 2N_h + 1$ ), dans ce cas l'algorithme de Gauss-Newton est plus adapté. Ces algorithmes sont détaillés dans la section III.5.1.

## 4 Exemple de mise en œuvre méthodologique

### 4.1 État de l'art

Dans le cas d'un modèle numérique mettant en jeu du contact, afin de réduire le temps de calcul de la réponse non linéaire d'un système que prendrait une intégration temporelle classique, la méthode de l'équilibrage harmonique, couplée à la procédure d'alternance temps/fréquence, permet de calculer la réponse en régime établi de ce système. De nombreux articles emploient systématiquement cette méthode dès lors qu'il s'agit de calculer la réponse en régime établi d'un système excité par une force périodique [30, 63, 68, 84, 87, 121, 127, 149, 162]. De plus, les auteurs ont bien souvent recours à des méthodes de condensation permettant de réduire la taille des problèmes construits par la méthode des éléments finis à résoudre. La plus courante est la méthode de condensation de Craig-Bampton, qui est une des méthodes dites à interfaces fixes, et donc bien adaptées pour des structures à interfaces frottantes [52, 83, 145]. D'autres méthodes de réduction existent selon les conditions d'interface de la structure considérées (par exemples libres ou mixtes), telles que les méthodes de Rubin-Martinez [67] et de Craig-Chang. La méthode de Guyan est plus rarement utilisée dans le cadre de structures à symétrie cyclique avec interfaces frottantes.

D'autres articles proposent des méthodes de réduction plus complexes que les méthodes de réduction classique, par exemple l'article [185] utilise une méthode faisant appel à des modes bi-linéaires pour réduire une structure comportant une interface de contact avec frottement, déjà réduite par la méthode de Craig-Bampton. Une autre méthode, dite procédure AMP *adaptive microslip projection* [99], consiste à réduire une structure avec une base de fonctions obtenue en étudiant un ensemble de systèmes linéaires avec des conditions limites aux interfaces de contact spécifiquement choisies. Dans cet article [53], les auteurs proposent une méthode appelée *Jacobian Projection* qui utilise un ensemble de systèmes linéaires avec des conditions limites aux interfaces de contact spécifiquement choisies pour calculer la matrice jacobienne des forces de contact par rapport aux déplacements des structures. Cette matrice jacobienne

est utilisée avec les matrices linéaires de masse et de raideur pour déterminer l'espace propre dominant dans la bande de fréquence d'intérêt, d'où est finalement formée la base de réduction à partir des vecteurs propres de cet espace propre.

Plusieurs articles traitent des effets du désaccordage sur les aubes avec talons [60, 99, 100, 128, 145], mais cet aspect n'est pas abordé dans le cadre de cette thèse.

Pour résumer, la simulation des non-linéarités liées au contact avec frottement au niveau du talon des aubes de turbine emploie des méthodes de mise en données et de calcul similaires à d'autres pièces de l'industrie aéronautique, telles que l'interface entre le pied d'une aube et le disque sur lequel elle est fixée. On peut citer notamment la construction du modèle numérique sur un logiciel de calcul éléments finis, sa réduction à l'aide d'une méthode par synthèse modale telle que Craig-Bampton, et l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique couplée à la méthode d'alternance fréquence temps pour le calcul de la réponse fréquentielle en supposant le régime périodique établi.

Des problématiques inhérentes à ces modèles numériques sont évoquées, notamment la non-coïncidence des maillages présente à l'interface de contact les talons des aubes. Les exemples de la littérature n'ont généralement pas de problématique de maillages non coïncidents, puisque les structures sont déjà en contact à l'instant initial, donc les maillages générés sont souvent coïncidents. En effet, une géométrie relativement simple par rapport à la géométrie réelle d'une aube avec un talon facilite cette coïncidence de maillages, plusieurs articles l'ont mis en pratique [2, 53, 62, 68, 83, 99, 128, 142].

La distribution des forces de contact localisée aux bords des surfaces dédiées à cet effet est une autre problématique majeure. Ce phénomène est constaté dans cet article [186] qui utilise un modèle éléments finis d'aubes de turbine basse pression avec talons, et dont l'objectif est dans un premier temps de calculer la précharge statique avec une précharge centrifuge à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis ANSYS (voir figure III.10).

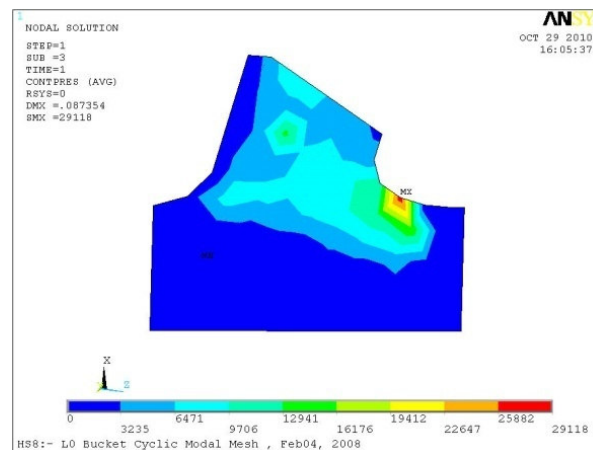


FIGURE III.10 – Distribution de la pression de contact normale sur le talon [186].

En effet, les talons des aubes de la turbine étudiée dans l'article ne sont pas en contact à l'arrêt (il s'agit d'une turbine à vapeur, sans prétorsion au montage), mais c'est lors de la mise en rotation de la turbine que ceux-ci peuvent le devenir. Les résultats obtenus mettent en avant des difficultés finalement assez courantes quand il s'agit de déterminer numériquement la répartition des forces de contact entre des interfaces planes que sont les talons ici : une localisation de la pression de contact en un point, et une non-coïncidence des maillages aussi bien dans la configuration non déformée que déformée.



On retrouve une distribution de la pression de contact normale similaire (maximum localisé en un point et sur une arête de la surface de contact) dans l'article [3], où un modèle d'aubes de turbine avec talon à  $360^\circ$  est placé sous une précharge centrifuge pour une vitesse de rotation de  $2800 \text{ tr min}^{-1}$  calculée sur ANSYS. Plusieurs configurations sont évaluées en fonction de l'interpénétration géométrique au niveau des talons avant le calcul de la précharge centrifuge, ce qui influe sur la distribution de la pression de contact obtenue à l'issue du calcul statique (voir figure III.11).

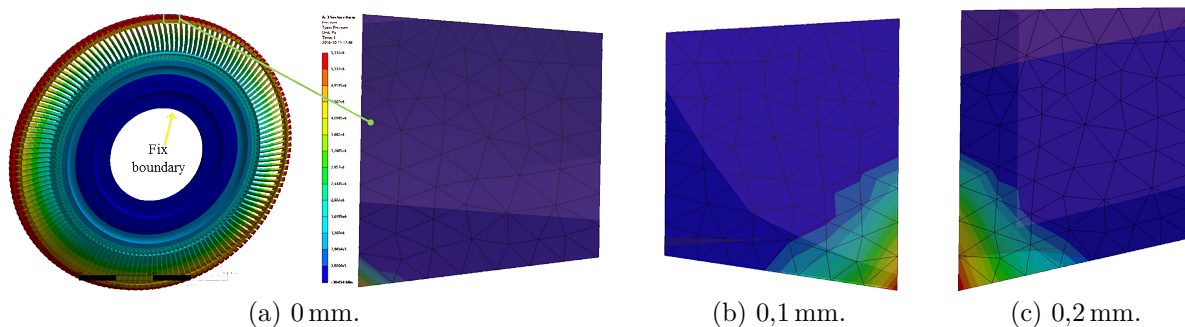


FIGURE III.11 – Distribution de la pression de contact normale sur le talon selon différents niveaux d'interpénétration géométrique initiale [3].

De même dans l'article [142], c'est l'influence de l'angle d'inclinaison entre le plan des interfaces de contact des talons et l'axe de rotation de la turbine qui est étudiée (voir figure III.12).

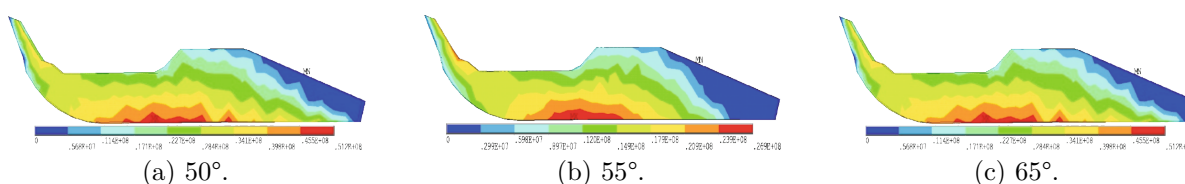


FIGURE III.12 – Distribution de la pression de contact normale sur le talon en fonction de l'angle d'inclinaison [142].

Dans cet article de conférence de 2011 [13], les auteurs rappellent que les aubes avec talon utilisées pour les turbines sont montées selon deux procédés différents : soit un jeu entre les talons est volontairement laissé lors du montage des aubes, soit une prétorsion est appliquée afin que les talons soient en contact après montage, induisant un effort de contact entre eux (voir figure III.13). Ils proposent un modèle éléments finis sur ANSYS composé de deux aubes avec une prétorsion, mettant ainsi les talons en contact (avec un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ ), elles subissent également une précharge centrifuge. Ils remarquent que pour une force d'excitation relativement faible, le contact entre les talons est glissant, générant ainsi un amortissement lié à une dissipation d'énergie par frottement. Cependant, si la force d'excitation augmente au point de provoquer une séparation du contact entre les talons, l'amplitude de la réponse des aubes augmente, et conduit à une dynamique proche du vibro-impact.

On propose maintenant dans cette section de détailler le déroulement des étapes de calcul dans le cas d'une application concrète, où l'on a deux structures en contact avec frottement, en fonction de certaines méthodes retenues parmi celles présentées précédemment. Le système d'équations non linéaires considéré ici est toujours celui de l'équation (III.91), valable pour chacune des deux structures. On fait le choix d'utiliser la méthode de l'équilibrage harmonique pour



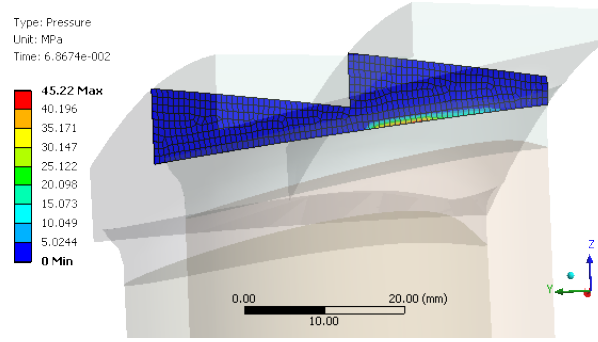


FIGURE III.13 – Distribution de la pression de contact normale sur le talon [12, 13].

rechercher des solutions périodiques, couplée à la méthode d’alternance fréquence/temps<sup>7</sup> [27] pour le calcul des forces non linéaires dans le domaine temporel à l’aide de deux méthodes : la pénalité et la DLFT. De plus, le solveur choisi pour minimiser la fonction résidu du système utilisera la matrice jacobienne associée pour déterminer les solutions, elle sera donc calculée analytiquement.

## 4.2 Condensation du système d’équations

Grâce à la méthode de l’équilibrage harmonique décrite dans la sous-section III.3.2.1, l’équation différentielle du second ordre (III.91) devient l’équation algébrique suivante :

$$\mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl} = \tilde{\mathbf{f}}_{ex} \quad (\text{III.114})$$

et dont la recherche de solution, à chaque pas de fréquence  $\omega$  de la plage de calcul, est écrite comme une fonction résidu à minimiser par le solveur non linéaire choisi :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl} - \tilde{\mathbf{f}}_{ex} \quad (\text{III.115})$$

avec  $\mathbf{Z}$  la matrice de rigidité dynamique,  $\tilde{\mathbf{u}}$  le vecteur multi-harmonique du déplacement,  $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}$  le vecteur multi-harmonique des forces non linéaires, et  $\tilde{\mathbf{f}}_{ex}$  le vecteur des forces extérieures.

On fait le choix de calculer l’expression analytique de la matrice jacobienne associée à la fonction résidu contenant toutes les dérivées partielles du premier ordre, qui est utilisée par le solveur non linéaire, afin d’avoir une convergence plus rapide et plus précise, à la place de la méthode des différences finies [68]. La matrice jacobienne est carrée de taille  $n(2N_h + 1) \times n(2N_h + 1)$  :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{a_0, N}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{r, a_0, N}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{R}_{a_0, N}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{r, b_{N_h}, T_y}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{b_{N_h}, T_y}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{r, a_0, N}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{R}_{b_{N_h}, T_y}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{r, b_{N_h}, T_y}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.116})$$

et s’écrit :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{Z} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}. \quad (\text{III.117})$$

Le terme  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}$  est calculé analytiquement en fonction de la méthode choisie pour déterminer les composantes normale et tangentielle des forces non linéaires.

7. abrégée *Alternate Frequency Time* en anglais.

Afin de limiter le temps de calcul nécessaire à la recherche de solutions, il est naturel de réduire la taille du système à résoudre. Pour ce faire, deux condensations sont pratiquées sur le système d'équations non linéaires [104], les étapes de calcul inhérentes sont détaillées dans les deux sous-sections suivantes.

#### 4.2.1 Condensation sur les nœuds non linéaires

Grâce à l'équation (III.114), il est possible de dissocier les degrés de liberté correspondant d'une part aux nœuds non linéaires (tels que les nœuds de contact soumis à des forces non linéaires) et d'autre part aux nœuds linéaires (nœuds d'application de force d'excitation ou de forces extérieures). L'objectif est de condenser la taille du système, qui est égale à  $n(2N_h + 1)$  à l'origine, pour réduire le nombre d'inconnues à trouver.

En décomposant l'équation du mouvement pour chaque structure, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\text{ln,ln}} & \mathbf{Z}_{\text{ln,nl}} \\ \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}} & \mathbf{Z}_{\text{nl,nl}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ln}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\text{nl}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,ln}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,nl}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.118})$$

où la notation  $\bullet_{\text{ln}}$  désigne les degrés de liberté linéaires et  $\bullet_{\text{nl}}$  les degrés de liberté non linéaires.

En isolant le déplacement linéaire :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ln}} = \mathbf{Z}_{\text{ln,ln}}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,ln}} - \mathbf{Z}_{\text{ln,nl}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{nl}} \right) \quad (\text{III.119})$$

et les termes non linéaires :

$$\mathbf{Z}_{\text{nl,ln}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ln}} + \mathbf{Z}_{\text{nl,nl}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{nl}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,nl}}, \quad (\text{III.120})$$

puis en injectant l'équation (III.119) dans l'équation (III.120), on a :

$$\underbrace{\left( \mathbf{Z}_{\text{nl,nl}} - \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\text{ln,ln}}^{-1} \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}} \right)}_{\mathbf{Z}_{\text{red}}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{nl}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,nl}} - \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\text{ln,ln}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,ln}}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}}}. \quad (\text{III.121})$$

le nouveau système d'équation non linéaire, dont la taille est réduite désormais à  $n_{\text{nl}}(2N_h + 1)$  inconnues,  $n_{\text{nl}}$  étant le nombre de degrés de liberté non linéaires. On peut remarquer que la matrice de rigidité dynamique réduite  $\mathbf{Z}_{\text{red}}$  est le complément de Schur du bloc  $\mathbf{Z}_{\text{nl,nl}}$  de la matrice complète  $\mathbf{Z}$ .

#### 4.2.2 Condensation sur le déplacement relatif

La seconde condensation se base sur l'appairage des nœuds de contact, qui consiste à déterminer le nœud le plus proche sur la surface de contact opposée appartenant à l'autre structure (voir figure III.14), et ensuite les désigner comme un élément de contact, pour former le vecteur de déplacement relatif entre les deux structures, qui s'écrit comme suit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\text{r}} = \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2, \quad (\text{III.122})$$

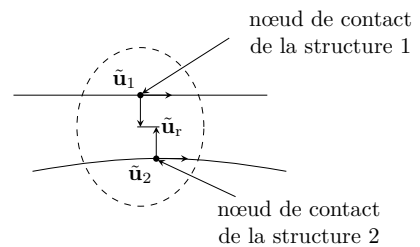


FIGURE III.14 – Un élément de contact nœud-à-nœud.

soit pour l'harmonique 0 uniquement :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{r,0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_{nl}} & -\mathbf{I}_{n_{nl}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{1,0} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{2,0} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.123})$$

Le vecteur multi-harmoniques des forces non linéaires  $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}$  découlant de l'équation (III.122) est écrit ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl,1} = -\tilde{\mathbf{f}}_{nl,2} = \tilde{\mathbf{f}}_{nl} \text{ soit } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{nl} \\ -\tilde{\mathbf{f}}_{nl} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_{nl}} \\ -\mathbf{I}_{n_{nl}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{f}}_{nl}. \quad (\text{III.124})$$

On peut donc écrire d'après les équations (III.121), (III.122) et (III.124) :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{r,0} = - \left( \mathbf{P}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{r,1,0}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{r,2,0}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{P} \right) \tilde{\mathbf{f}}_{nl,0} + \mathbf{P}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{r,1,0}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{r,2,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{r,\text{ex},1,0} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{r,\text{ex},2,0} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.125})$$

On obtient ainsi l'équation du mouvement pour l'harmonique 0 :

$$\mathbf{Z}_{r,0} \tilde{\mathbf{u}}_{r,0} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,0} = \tilde{\mathbf{f}}_{r,\text{ex},0} \quad (\text{III.126})$$

avec

$$\mathbf{Z}_{r,0} = \left( \mathbf{P}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{r,1,0}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{r,2,0}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{P} \right)^{-1}, \quad \mathbf{P}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_{nl}} & -\mathbf{I}_{n_{nl}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.127})$$

et

$$\tilde{\mathbf{f}}_{r,\text{ex},0} = \mathbf{Z}_{r,0} \mathbf{P}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{r,1,0}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{r,2,0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{r,\text{ex},1,0} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{r,\text{ex},2,0} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.128})$$

Pour les harmoniques supérieurs  $k$ , le principe est le même, sauf que cette fois on a :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,k} \\ \mathbf{b}_{1,k} \\ \mathbf{a}_{2,k} \\ \mathbf{b}_{2,k} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.129})$$

d'où

$$\tilde{\mathbf{u}}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,k} - \mathbf{a}_{2,k} \\ \mathbf{b}_{1,k} - \mathbf{b}_{2,k} \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{P})^\top \mathbf{T}_h^\top \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,k} \\ \mathbf{b}_{1,k} \\ \mathbf{a}_{2,k} \\ \mathbf{b}_{2,k} \end{pmatrix} \quad (\text{III.130})$$

avec  $\mathbf{T}_h^\top$  la matrice de réorganisation des termes harmoniques en cosinus et sinus. La taille finale du système d'équations non linéaires est donc de  $\frac{n_{nl}}{2} (N_h + 1)$ .

### 4.3 Calcul des forces non linéaires de contact et de frottement

On cherche à présent à calculer les forces non linéaires qui interviennent dans la fonction résidu à minimiser par le solveur. Pour ce faire, deux méthodes ont été employées : la méthode de pénalité et la méthode DLFT. La première est classique et simple, puisqu'elle consiste à définir les forces non linéaires liées au contact normal et au frottement tangentiel par une raideur de pénalité et sont proportionnelles au déplacement des nœuds de contact. La seconde

est plus complexe puisqu'elle se base sur une prédiction des forces non linéaires par le biais de lagrangiens augmentés dans le domaine fréquentiel. Les deux méthodes vérifient que les forces non linéaires calculées respectent les lois de contact et de frottement employées, pour la recherche de solutions.

### 4.3.1 Méthode de la pénalité

La méthode de la pénalité conduit à exprimer les composantes normale et tangentielles des forces non linéaires, dans le domaine temporel (pour le  $k$ -ième instant temporel), de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_N^k = k_N \mathbf{u}_{r,N}^k \quad (\text{III.131a})$$

$$\mathbf{f}_T^k = k_T \mathbf{u}_{r,T}^k \quad (\text{III.131b})$$

avec  $k_N$  et  $k_T$  les raideurs de pénalité normale et tangentielle.

Les conditions de non-pénétration de la loi de contact à vérifier dans la direction normale sont illustrées sur la figure III.15, et écrites ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{si } k_N \mathbf{u}_{r,N}^k \leq \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{f}_N^k = k_N \mathbf{u}_{r,N}^k & (\text{contact}) \\ \text{si } k_N \mathbf{u}_{r,N}^k > \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{f}_N^k = \mathbf{0} & (\text{séparation}) \end{cases} \quad (\text{III.132})$$

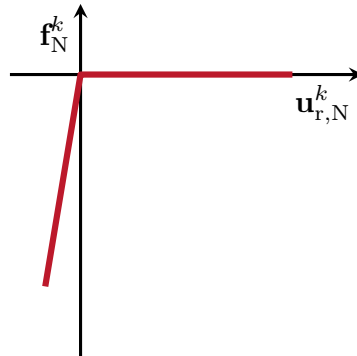


FIGURE III.15 – Loi de contact linéaire suivie par la méthode de pénalité.

Le calcul des forces de contact tangentielles fait appel à une procédure de prédiction et correction dans le domaine temporel :

$$\mathbf{f}_{T,\text{pre}}^k = k_T (\mathbf{u}_{r,T}^k - \mathbf{z}^{k-1}) \quad (\text{III.133})$$

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{f}_{T,\text{pre}}^k < \mu \mathbf{f}_N^k \text{ alors } \mathbf{f}_T^k = \mathbf{f}_{T,\text{pre}}^k & (\text{adhérence}) \\ \text{si } \mathbf{f}_{T,\text{pre}}^k \geq \mu \mathbf{f}_N^k \text{ alors } \mathbf{f}_T^k = k_T (\mathbf{u}_{r,T}^k - \mathbf{z}^k) & (\text{glissement}) \end{cases} \quad (\text{III.134})$$

où  $\mathbf{z}^k$  est déterminé selon la loi de Coulomb, en prenant comme valeur initiale  $\mathbf{z}^0 = \mathbf{0}$  :

$$\mathbf{z}^k = \mathbf{u}_{r,T}^k - \frac{\mu}{k_T} |\mathbf{f}_N^k| \mathbf{v} \quad (\text{III.135})$$

avec  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_{r,T}^k - \mathbf{z}^{k-1}}{\|\mathbf{u}_{r,T}^k - \mathbf{z}^{k-1}\|}$  un vecteur indiquant la direction de glissement.  $\mathbf{f}_T^k$  est évidemment égal à zéro en cas de séparation.

Le vecteur des forces non linéaires  $\mathbf{f}_{nl}$  dans le domaine temporel, composé des composantes normale et tangentielle, est ensuite transposé dans le domaine fréquentiel afin d'être utilisé dans l'équation (III.115).

### 4.3.2 Méthode DLFT

La méthode DLFT, comme indiqué précédemment, propose une estimation des composantes normale et tangentielle qui constituent le vecteur des forces non linéaires, en utilisant la méthode des lagrangiens augmentés  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  exprimés dans le domaine fréquentiel tels que :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N = \tilde{\mathbf{f}}_{r,ex,N} - \mathbf{Z}_{r,N}(\omega)\tilde{\mathbf{u}}_{r,N} + \varepsilon_N(\tilde{\mathbf{u}}_{r,N} - \tilde{\mathbf{x}}_{r,N}) \quad (\text{III.136a})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T = \tilde{\mathbf{f}}_{r,ex,T} - \mathbf{Z}_{r,T}(\omega)\tilde{\mathbf{u}}_{r,T} + \varepsilon_T(\tilde{\mathbf{u}}_{r,T} - \tilde{\mathbf{x}}_{r,T}) \quad (\text{III.136b})$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N$  et  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T$  sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange dans les directions normale et tangentielle,  $\varepsilon_N$  et  $\varepsilon_T$  sont les coefficients de pénalité en général estimé à l'aide du rayon spectral de la matrice de rigidité dynamique [29] (ce qui assure un bon conditionnement numérique pour la convergence du solveur non linéaire).  $\tilde{\mathbf{x}}_{r,N}$  représente le vecteur du déplacement relatif calculé dans le domaine temporel pour respecter les conditions des lois de contact et de frottement, et est utilisé pour corriger les multiplicateurs de Lagrange. Les équations (III.136a) et (III.136b) sont annotées de la façon suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N = \underbrace{\tilde{\mathbf{f}}_{r,ex,N} - \mathbf{Z}_{r,N}(\omega)\tilde{\mathbf{u}}_{r,N} + \varepsilon_N\tilde{\mathbf{u}}_{r,N}}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{N,u}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,N})} - \underbrace{\varepsilon_N\tilde{\mathbf{x}}_{r,N}}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{N,x}(\tilde{\mathbf{x}}_{r,N})} \quad (\text{III.137a})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T = \underbrace{\tilde{\mathbf{f}}_{r,ex,T} - \mathbf{Z}_{r,T}(\omega)\tilde{\mathbf{u}}_{r,T} + \varepsilon_T\tilde{\mathbf{u}}_{r,T}}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{T,u}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,T})} - \underbrace{\varepsilon_T\tilde{\mathbf{x}}_{r,T}}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{T,x}(\tilde{\mathbf{x}}_{r,T})} \quad (\text{III.137b})$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{N,u}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,N})$  et  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{T,u}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,T})$  sont respectivement les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange normal et tangentiel connus depuis le domaine fréquentiel, tandis que  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{N,x}(\tilde{\mathbf{x}}_{r,N})$  et  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{T,x}(\tilde{\mathbf{x}}_{r,T})$  sont les termes de correction. Ils doivent être déterminés à l'aide d'une procédure de prédiction et correction dans le domaine temporel, pour que les vecteurs des forces de contact normale et tangentielle, exprimés dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète inverse (iDFT), vérifient respectivement les conditions des lois de contact et de frottement.

En utilisant la méthode AFT pour vérifier les conditions de la loi de contact dans le domaine temporel, pour la direction normale uniquement dans un premier temps, le calcul du vecteur des multiplicateurs de Lagrange prédit au  $k$ -ième instant temporel  $\boldsymbol{\lambda}_{N,pre}^k$ , est formulé à partir de l'hypothèse que les éléments de contact sont en adhérence, ce qui signifie que  $\mathbf{x}_{r,N}^k = 0$  et

$$\boldsymbol{\lambda}_{N,pre}^k = \boldsymbol{\lambda}_{N,u}^k - \underbrace{\boldsymbol{\lambda}_{N,x}^k}_{=0}. \quad (\text{III.138})$$

Les conditions de contact à vérifier dans la direction normale (voir illustration en figure III.16) sont écrites dans l'équation suivante :

$$\begin{cases} \text{si } \boldsymbol{\lambda}_{N,pre}^k < \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}_{r,N}^k \leq \mathbf{0} \text{ alors } \boldsymbol{\lambda}_{N,x}^k = \mathbf{0} & (\text{contact}) \\ \text{si } \boldsymbol{\lambda}_{N,pre}^k \geq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}_{r,N}^k > \mathbf{0} \text{ alors } \boldsymbol{\lambda}_{N,x}^k = \boldsymbol{\lambda}_{N,u}^k & (\text{séparation}) \end{cases}. \quad (\text{III.139})$$

La valeur obtenue pour  $\boldsymbol{\lambda}_N^k$  est ensuite injectée dans l'équation (III.137a).

En considérant maintenant la direction tangentielle, et en partant de l'hypothèse qu'il y

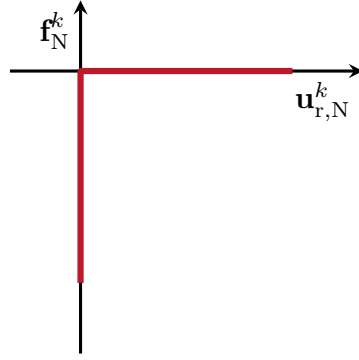


FIGURE III.16 – Loi de contact unilatéral suivie asymptotiquement par la méthode DLFT.

a contact entre les structures (aucune force de contact tangentielle ne peut avoir lieu s'il y a séparation, i. e.  $\lambda_{N,\text{pre}}^k = \mathbf{0}$ ), l'état adhérent ou glissant est déterminé grâce aux conditions de la loi de frottement de Coulomb :

$$\begin{cases} \text{si } \|\lambda_{T,\text{pre}}^k\| < \mu|\lambda_N^k| \text{ alors } \lambda_{T,x}^k = \mathbf{0} & \text{(adhérence)} \\ \text{si } \|\lambda_{T,\text{pre}}^k\| \geq \mu|\lambda_N^k| \text{ alors } \lambda_{T,x}^k = \lambda_{T,x}^{k-1} + \lambda_{T,\text{pre}}^k \left(1 - \mu \frac{|\lambda_{N,\text{pre}}^k|}{\|\lambda_{T,\text{pre}}^k\|}\right) & \text{(glissement)} \end{cases} \quad \text{(III.140)}$$

L'expression du multiplicateur de Lagrange tangent  $\lambda_{T,x}^k$  dans le cas glissant s'obtient en plusieurs étapes détaillées par Charleux [29], tout d'abord en écrivant la loi de frottement de Coulomb :

$$\lambda_T^k = \mu|\lambda_{N,\text{pre}}^k| \frac{\dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k}{\|\dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k\|} \quad \text{(III.141)}$$

où  $\dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k$  désigne la vitesse du déplacement relatif tangentiel harmonique exprimée par différence finie mais inconnue :

$$\dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k = \frac{\mathbf{u}_{r,T}^k - \mathbf{u}_{r,T}^{k-1}}{t_k - t_{k-1}}. \quad \text{(III.142)}$$

À l'aide des équations (III.137b) et (III.138), on peut écrire :

$$\lambda_{T,\text{pre}}^k - \lambda_T^k = \lambda_{T,x}^k - \lambda_{T,x}^{k-1} \quad \text{(III.143)}$$

et sachant que l'on a :

$$\lambda_{T,x}^k = \varepsilon_N \mathbf{u}_{r,T}^k \quad \text{(III.144)}$$

il vient alors d'après l'équation (III.142) :

$$\lambda_{T,\text{pre}}^k - \lambda_T^k = \varepsilon (t_k - t_{k-1}) \dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k. \quad \text{(III.145)}$$

Grâce aux équations (III.141) et (III.143), on trouve :

$$\lambda_{T,\text{pre}}^k = \left( \mu \frac{|\lambda_{N,\text{pre}}^k|}{\|\dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k\|} + \varepsilon (t_k - t_{k-1}) \right) \dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k, \quad \text{(III.146)}$$

ce qui montre que les termes  $\lambda_{T,\text{pre}}^k$  et  $\lambda_{T,x}^k$  sont colinéaires puisque  $\left( \mu \frac{|\lambda_{N,\text{pre}}^k|}{\|\dot{\mathbf{u}}_{r,T}^k\|} + \varepsilon (t_k - t_{k-1}) \right)$

est un scalaire. Ainsi :

$$\lambda_T^k = \mu |\lambda_{N,\text{pre}}^k| \frac{\lambda_{T,\text{pre}}^k}{\|\lambda_{T,\text{pre}}^k\|}. \quad (\text{III.147})$$

Enfin d'après l'équation (III.143) et la précédente, on obtient l'expression de  $\lambda_{T,x}^k$  :

$$\lambda_{T,x}^k = \lambda_{T,x}^{k-1} + \lambda_{T,\text{pre}}^k \left( 1 - \mu \frac{|\lambda_{N,\text{pre}}^k|}{\|\lambda_{T,\text{pre}}^k\|} \right). \quad (\text{III.148})$$

La valeur obtenue pour  $\lambda_T^k$  est injectée dans l'équation (III.137b). Le vecteur  $\lambda$ , composé des composantes normale et tangentielle, est enfin transformé dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète (DFT), afin d'être utilisée dans l'équation (III.115).

La figure III.17 ci-après résume graphiquement les étapes majeures de la méthode DLFT, et permet de se repérer parmi les différentes étapes de calculs détaillées précédemment.

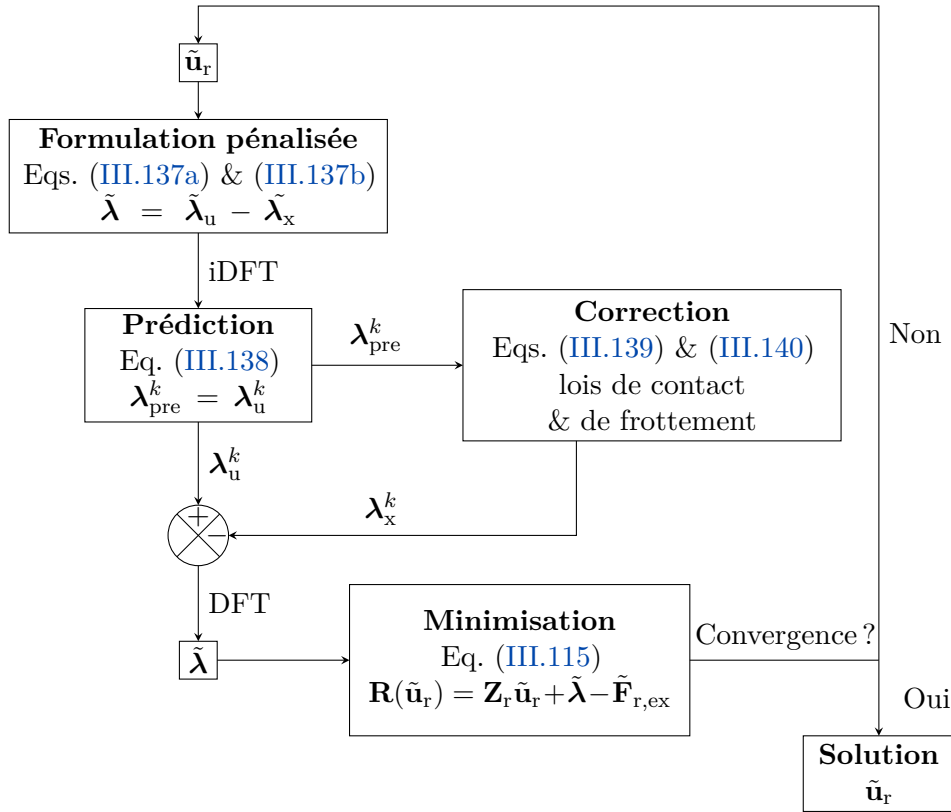


FIGURE III.17 – Algorithme de la méthode DLFT.

## 5 Algorithmes de recherche de solutions

### 5.1 Minimisation d'un système algébrique non linéaire

Dans notre cas, on souhaite minimiser l'équation (III.115) en cherchant le déplacement  $\tilde{\mathbf{u}}$  solution. La résolution d'une équation différentielle telle que celle-ci est, d'un point de vue mathématique, un problème d'optimisation où l'on cherche à minimiser une fonction sur un

ensemble. Il se pose de la façon suivante [88] :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \mathbf{R} : \mathbb{R}^d &\longmapsto \mathbb{R} \\ \text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d &\text{ tel que } \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}) \text{ soit minimal.} \end{aligned} \quad (\text{III.149})$$

Le cas du système d'équations non linéaires que l'on cherche à résoudre ici est en fait un cas particulier de ce problème, où l'on a en fait :

$$\begin{aligned} \text{Soit } r_i : \mathbb{R}^d &\longmapsto \mathbb{R} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{Trouver } u \in \mathbb{R}^d &\text{ tel que } r_i(u) = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.150})$$

et en posant :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^n r_i(u)^2 \quad (\text{III.151})$$

où le minimum de la somme des carrés est atteint lorsque le gradient s'annule. L'objectif est donc de se diriger le plus rapidement possible vers le minimum de cette fonction afin de trouver sa solution. Plusieurs méthodes basées sur ce principe existent, et dont le but est d'avoir le meilleur compromis entre vitesse et précision de la recherche de solution.

Selon le problème de dynamique des structures modélisé, intégrant des phénomènes non linéaires (contact, frottement, géométrique, etc.), la recherche de solutions peut-être plus ou moins délicate.

### 5.1.1 Algorithme du gradient

L'algorithme du gradient [112] est la plus simple puisqu'elle consiste à réaliser une descente de plus forte pente et la plus profonde possible vers la solution, aussi appelé point de Cauchy, en utilisant uniquement l'opposé du gradient de la fonction à minimiser pour déterminer la direction, soit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}_k + \alpha_k \boldsymbol{\delta}_g \quad (\text{III.152})$$

où  $\boldsymbol{\delta}_g = -\mathbf{J}^\top \mathbf{R}(\mathbf{u}_k)$  désigne la direction du pas de descente de plus forte pente avec  $\mathbf{J} = \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in \mathbb{R}^d$  la matrice jacobienne, qui est une généralisation du gradient aux fonctions à plusieurs variables à valeur vectorielle, tandis que  $\alpha_k$  est la longueur de ce pas.

Pour déterminer la longueur  $\alpha_k$ , l'approche classique est celle de la recherche linéaire (*line search strategy* en anglais) qui consiste à déterminer le minimum global :

$$\alpha_k = \min_{\alpha_k > 0} \mathbf{R}(\mathbf{u}_k + \alpha_k \boldsymbol{\delta}_g). \quad (\text{III.153})$$

La méthode de Barzilai-Borwein utilise les deux dernières itérations pour proposer deux longueurs différentes de pas telles que :

$$\alpha_{k,\text{long}} = \frac{\Delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \Delta \boldsymbol{\delta}_g} \quad (\text{III.154})$$

$$\alpha_{k,\text{court}} = \frac{\Delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \Delta \boldsymbol{\delta}_g}{\Delta \boldsymbol{\delta}_g \cdot \Delta \boldsymbol{\delta}_g} \quad (\text{III.155})$$

avec  $\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$  et  $\Delta \boldsymbol{\delta}_g = \boldsymbol{\delta}_{g,k} - \boldsymbol{\delta}_{g,k-1}$ .



L'inconvénient de l'algorithme du gradient est qu'il est très sensible à la taille du pas de la descente. Il existe cependant une amélioration de celui-ci, nommée la méthode du gradient conjugué, qui consiste à utiliser les directions calculées aux pas précédents pour déterminer la direction suivante.

### 5.1.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton est basée sur le développement de Taylor à l'ordre deux de la fonction que l'on cherche à minimiser autour de la solution  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  obtenue à l'itération  $k$  :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}) = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\delta}_k + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_k^\top \mathbf{H}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\delta}_k \quad (\text{III.156})$$

avec  $\boldsymbol{\delta}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$  et  $\mathbf{H} = \left( \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  la matrice hessienne. Cette dernière apporte une information supplémentaire qui permet d'assurer une convergence quadratique vers la solution. Le minimum de l'équation (III.156) peut être trouvé en écrivant sa dérivée comme égale à zéro, en supposant la dérivée seconde de  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k)$  supérieure à zéro, d'où :

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{H}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) \boldsymbol{\delta}_k \text{ donc } \boldsymbol{\delta}_k = -\frac{\mathbf{J}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k)}{\mathbf{H}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k)}, \quad (\text{III.157})$$

et peut donc s'écrire comme le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}) = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) + \alpha_k \left[ -\left( \mathbf{H}^\top \mathbf{R}(\mathbf{u}_k) \right)^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{R}(\mathbf{u}_k) \right], \quad (\text{III.158})$$

la direction de recherche de solution est donc :

$$\boldsymbol{\delta}_N = -\left( \mathbf{H}^\top \mathbf{R}(\mathbf{u}_k) \right)^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{R}(\mathbf{u}_k). \quad (\text{III.159})$$

L'inconvénient majeur de cet algorithme est le coût numérique supplémentaire que représente le calcul de la matrice hessienne.

### 5.1.3 Méthode de Gauss-Newton

La méthode de Gauss-Newton peut être vue comme une modification de la méthode de Newton, où l'on a cette fois :

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{GN}} = -\left( \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \right)^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_r) \quad (\text{III.160})$$

basée sur l'approximation que

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^\top \mathbf{J}, \quad (\text{III.161})$$

ce qui a l'avantage de se passer du calcul de la matrice hessienne. Le schéma itératif de la méthode s'écrit donc :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}) = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k) - \left( \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \right)^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_k). \quad (\text{III.162})$$

### 5.1.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson peut-être vue comme un cas particulier de la méthode de Gauss-Newton, puisqu'elle correspond à la situation où le système à résoudre est carré,

c'est-à-dire qu'il y a autant d'équations que d'inconnues. Dans ce cas, la pseudo inverse de la matrice jacobienne devient simplement son inverse, la direction de descente devient alors :

$$\delta_{\text{NR}} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_r). \quad (\text{III.163})$$

### 5.1.5 Méthode hybride de Powell

La méthode hybride de Powell [129, 130], aussi nommée *trust-region dog leg*<sup>8</sup>, combine la méthode de Gauss-Newton (Newton-Raphson dans le cas d'un système carré) et l'algorithme du gradient [179]. Cependant, le calcul de la longueur du pas  $\delta_{\text{P}}$  ne repose pas sur la stratégie de recherche linéaire mais sur le concept de région de confiance  $\Delta_k$  que la norme du pas  $\|\delta_{\text{P}}\|$  ne peut pas dépasser, et ceci pour chaque itération. Cette région de confiance est en fait un cercle de rayon  $\Delta_k$ , dont la valeur est ajustée à chaque itération, et de centre  $\tilde{\mathbf{u}}_k$ . C'est la méthode sélectionnée par défaut par la fonction `fsolve` dans MATLAB.

Pour un rayon de la zone de confiance  $\Delta_k$ , la méthode du *dog leg* de Powell détermine une mise à jour du pas  $\delta_{\text{P}}$  en fonction des pas précédemment cités. À chaque itération, l'algorithme détermine en premier lieu si le pas de Gauss-Newton est à l'intérieur de la zone de confiance. Si oui, alors il est directement utilisé pour calculer la solution :

$$\delta_{\text{P}} = \delta_{\text{GN}} \text{ si } \|\delta_{\text{GN}}\| \leq \Delta_k. \quad (\text{III.164})$$

Si non, l'algorithme détermine si le point de Cauchy est à l'extérieur de la zone de confiance, le pas de *steepest descent* est alors tronqué à la frontière de la zone de confiance et est utilisé pour calculer la solution :

$$\frac{\Delta_k}{\|\delta_{\text{g}}\|} \delta_{\text{g}} \text{ si } \|\delta_{\text{GN}}\| > \Delta_k \text{ et } \|\delta_{\text{g}}\| > \Delta_k. \quad (\text{III.165})$$

Et si le point de Cauchy est à l'intérieur de la zone de confiance, la solution est calculée à partir de l'intersection entre la frontière de la zone de confiance, et la ligne liant le point de Cauchy et le pas de Gauss-Newton, ce qui constitue le *dog leg step* amenant au point  $\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$  sur la figure III.18. Le pas est alors égal à :

$$\delta_{\text{P}} = \theta \delta_{\text{g}} + \delta_{\text{GN}}(1 - \theta) \text{ si } \|\delta_{\text{GN}}\| > \Delta_k \text{ et } \|\delta_{\text{g}}\| \leq \Delta_k \quad (\text{III.166})$$

avec  $\theta \in [0, 1]$  un paramètre choisi de sorte que  $\|\delta_{\text{P}}\| = \Delta_k$ .

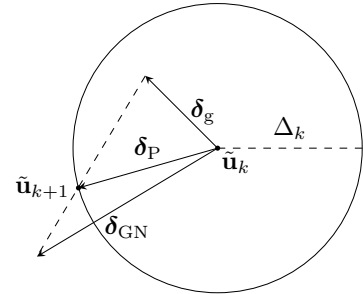


FIGURE III.18 – Illustration de la construction du *dog leg step*.

### 5.1.6 Approximations numériques des dérivées par différences finies

Toutes les méthodes présentées précédemment sont pratiques seulement si les expressions des matrices jacobienne et hessienne sont faciles à calculer analytiquement. Si ce n'est pas possible, alors on peut se contenter d'une approximation de celles-ci qui peut s'avérer suffisante pour déterminer la solution du problème. La méthode la plus courante dans ce cas est celle par différences finies [109] qui permet de calculer une approximation numérique de la matrice

8. *dog leg* fait référence à l'allée du même nom en forme de coude sur un terrain de golf, elle-même nommée en référence à l'angle de la cheville d'une patte arrière chez le chien...

jacobienne, et s'écrit dans le cas dit « en avant » :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_k}{\delta} + \mathcal{O}(\delta) \quad (\text{III.167})$$

ou bien « en arrière »

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-1}}{\delta} + \mathcal{O}(\delta) \quad (\text{III.168})$$

ou encore dite « centrée » :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_{k-1}}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{III.169})$$

avec  $\delta$  le pas constant et  $\mathcal{O}(\cdot)$  l'erreur de troncature (notation de Landau). En effet, ces deux équations sont basées sur l'approximation suivante, qui est raisonnable si  $\delta$  est suffisamment petit :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_k}{\delta}, \quad (\text{III.170})$$

et en écrivant le développement de Taylor de  $\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$  autour du point  $k$ , on a :

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \frac{\delta}{1!} \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right|_k + \frac{\delta^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}^2} \right|_k + \cdots + \frac{\delta^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}} \right|_k + \frac{\delta^n}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}^n} \right|_k + \mathcal{O}(\delta^n). \quad (\text{III.171})$$

À partir de cette dernière équation on peut retrouver l'équation (III.167).

L'inconvénient majeur de cette méthode est son coût de calcul puisqu'il faut évaluer numériquement toutes les composantes de la matrice jacobienne, là où la connaissance de son expression analytique permet de l'évaluer instantanément. De plus, le pas constant  $\delta$  choisi a une très forte influence sur la précision de l'approximation numérique et donc sur la convergence de cette méthode. Elle a néanmoins l'avantage de permettre une comparaison par rapport à l'expression analytique de la matrice jacobienne, dans le cas où l'on souhaite vérifier globalement si celle-ci est correcte.

## 5.2 Méthodes de continuation

Afin d'aider le solveur dans sa recherche de solution, l'utilisation d'un algorithme de prédiction permet de calculer une approximation de la solution à partir des  $n$  solutions précédentes, qui sera utilisée comme initialisation de la fonction résidu à minimiser. On suppose que les  $n$  premières solutions de (III.115), notées  $(\tilde{\mathbf{u}}_{r,1}, \omega_1), \dots, (\tilde{\mathbf{u}}_{r,n}, \omega_n)$ , sont connues et servent à déterminer une approximation de la solution  $(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k+1}, \omega_{k+1})$ . Ici le terme  $\tilde{\mathbf{u}}_{r,k}$  correspond au vecteur de déplacement relatif harmonique tandis que le terme  $\omega_k$  désigne la pulsation.

Cependant lors du calcul pas à pas de la réponse solution du système d'équations non linéaires considéré, il est possible d'avoir plusieurs solutions pour un même point  $\omega_k$ , conséquence d'un point de retournement par exemple. Sans une méthode dite de paramétrisation associée au prédicteur, l'espace des solutions indiqué au solveur n'est pas approprié, ce dernier ne peut donc pas trouver de solution au système d'équation. Plusieurs méthodes de paramétrisation sont à distinguer : naturelle, par longueur d'arc<sup>9</sup> et orthogonale<sup>10</sup>.  $\omega$  devient un paramètre variable intégré comme une nouvelle inconnue dans le système d'équations non linéaires à résoudre, permettant ainsi de mieux évaluer la réponse d'un tel système.

9. *arc-length* en anglais.

10. *pseudo arc-length* en anglais.

### 5.2.1 Prédicteurs

Afin d'alléger la notation, on écrira la solution  $k$  de la manière suivante :  $\tilde{\mathbf{y}}_k = [\tilde{\mathbf{u}}_{r,k}^\top, \omega_k]^\top$ .

**Prédicteur sécant** La méthode de la sécante est la plus simple des prédicteurs, puisqu'elle consiste à extrapoler la solution approximée à partir d'une interpolation linéaire des deux dernières solutions calculées. Ainsi, l'expression suivante permet de calculer la solution au pas  $k$  [46] :

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \tilde{\mathbf{y}}_{k-1} + \Delta s_k \frac{\Delta \tilde{\mathbf{y}}_{k-1}}{\|\Delta \tilde{\mathbf{y}}_{k-1}\|} \quad (\text{III.172})$$

où  $\Delta \tilde{\mathbf{y}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{y}}_{k-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{k-2}$ , et  $\Delta s_k$  désigne le pas de prédiction sur la droite passant par les points  $\tilde{\mathbf{y}}_{k-1}$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_{k-2}$ , illustré par la figure III.19a. Cette méthode a pour avantage d'être simple à programmer, puisqu'elle ne fait pas intervenir la matrice jacobienne contrairement à la méthode de la tangente par exemple, mais elle nécessite les solutions calculées aux deux pas précédents.

**Prédicteur d'ordre supérieur** Il existe une autre méthode de prédicteur de ce type mais d'ordre supérieur, où la prédiction de la solution au pas  $k+1$  se calcule à l'aide des  $m$  dernières solutions par une interpolation polynomiale de degré  $d = m$ . De ce fait, la prédiction ne se fait plus selon une droite mais une courbe (cela reviendra au prédicteur sécant dans le cas où  $d = 1$ ). L'expression de la solution au pas  $k$  est donc la suivante :

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=0}^d \tilde{\mathbf{y}}_{k-d+i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^d \frac{s_k - s_{k-d+j}}{s_{k-d+i} - s_{k-d+j}} \quad (\text{III.173})$$

où l'on retrouve l'expression d'une interpolation lagrangienne de degrés  $d$  sur l'abscisse curviligne  $s$ .

Cette méthode, illustrée par la figure III.19b pour un ordre 2, a été appliquée dans le cas d'une interpolation cubique par [31]. Bien que cette méthode s'avère plus précise que la méthode de la sécante (que l'on retrouve en prenant  $d = 1$ ), il est préférable de conserver un degré des polynômes relativement faible (quadratique voire cubique) pour des questions de robustesse de la méthode [61].

**Prédicteur tangent** La méthode de prédiction tangente fournit une estimation de la solution à l'aide de la tangente au dernier point convergé. La tangente au point  $(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k}, \omega_k)$ , obtenue par différentiation de l'équation du résidu (III.115), nécessite l'emploi de matrices jacobienes :

$$\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}, \omega_{k-1}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k} + \mathbf{J}_{\omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}, \omega_{k-1}) \Delta \omega_k = \mathbf{0} \quad (\text{III.174})$$

où  $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{u}}}$  et  $\mathbf{J}_{\omega_k}$  sont donc les matrices jacobienes du système par rapport aux variables  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\omega$ , tandis que  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k}$  et  $\Delta \omega_k$  sont les incréments tels que  $\tilde{\mathbf{u}}_{r,k} = \tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k}$  et  $\omega_k = \omega_{k-1} + \Delta \omega_k$ . En isolant le terme  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k}$  de l'équation précédente, on a :

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k} = -\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{u}}}^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}, \omega_{k-1}) \mathbf{J}_{\omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}, \omega_{k-1}) \Delta \omega_k = \mathbf{T} \Delta \omega_k. \quad (\text{III.175})$$

On fixe la tangente définie par les incréments à une longueur unitaire :

$$(\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k})^\top \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{r,k} + (\Delta \omega_k)^2 = 1 \quad (\text{III.176})$$

de sorte que

$$\Delta\omega_k = \frac{\pm 1}{\sqrt{\mathbf{T}^\top \mathbf{T} + 1}}. \quad (\text{III.177})$$

La sens de l'incrément  $\Delta\omega_k$ , défini par son signe, doit nécessairement suivre celui du parcours de la courbe calculée jusque-là pour ne pas revenir en arrière, ce qui est garanti par l'inégalité suivante :

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}, \omega_{k-1}) & \mathbf{J}_{\omega_k}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}, \omega_{k-1}) \\ \mathbf{T}^\top & 1 \end{pmatrix} \Delta\omega_k > 0. \quad (\text{III.178})$$

Cette méthode est particulièrement efficace en comparaison des autres présentées précédemment, d'autant plus qu'elle se conjugue bien avec les méthodes de paramétrisation, décrites dans la section III.5.2.2 suivante. Son inconvénient majeur est son coût numérique inhérent, puisqu'elle nécessite l'inversion d'une des deux matrices jacobienues.

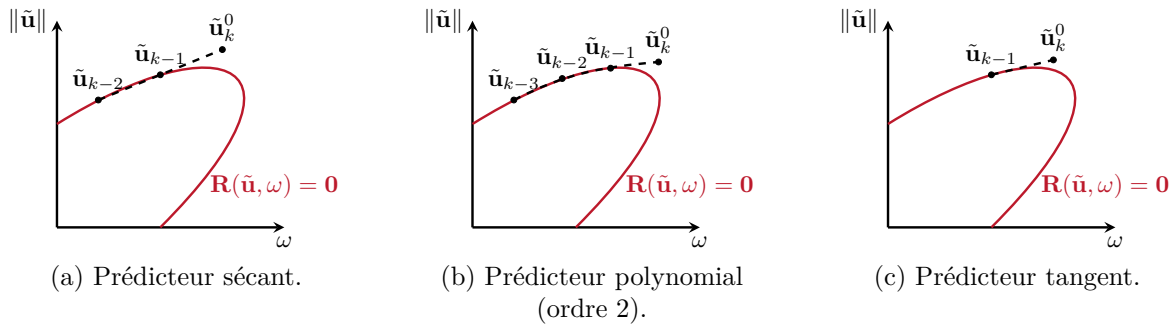


FIGURE III.19 – Différents types de prédicteurs, solution (●).

### 5.2.2 Paramétrisation

**Naturelle** La paramétrisation naturelle, aussi appelée par continuation séquentielle, implique simplement que  $\omega$  n'est pas une inconnue du système à résoudre, mais évolue avec un pas fixe décidé en amont de la résolution du système d'équations non linéaires (illustrée par la figure III.20a). Le calcul se fait donc de façon itérative avec un algorithme classique tel que ceux présentés dans la section III.5.1. En revanche, comme indiqué dans l'introduction de cette section, en cas de rencontre d'un point de retournement, l'algorithme utilisé par le solveur non linéaire ne sera pas capable de traiter une multiplicité de solutions pour un  $\omega_k$  donné.

**Longueur d'arc** Dans ce cas précis, la paramétrisation de la courbe de réponse solution du système d'équations non linéaires comble cette lacune de la résolution. Pour ce faire, une équation supplémentaire est ajoutée dans le système d'équations non linéaires à résoudre, augmentant par la même occasion le nombre d'inconnues [59]. Le couple solution  $(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k+1}, \omega_{k+1})$  est alors recherché sur une hypersphère de centre  $(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k}, \omega_k)$  et de rayon  $\Delta s_k$ , appelée longueur d'arc [6] (voir l'illustration par la figure III.20b). L'équation supplémentaire en question est donc celle qui définit cette hypersphère, elle joue le rôle d'une équation de fermeture au système d'équations, qui était à l'origine sous-déterminé :

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k}, \omega_k, \Delta s_k) = \|\tilde{\mathbf{u}}_{r,k} - \tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}\|^2 + (\omega_k - \omega_{k-1})^2 - \Delta s_k^2 = 0. \quad (\text{III.179})$$

La résolution de ce nouveau système d'équations non linéaires, augmenté de l'équation de fermeture, peut se faire à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson, où les incréments de

correction sont les solutions de l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \Delta \omega \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{u}}_r}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) & \mathbf{J}_\omega(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_r}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \omega}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) \\ \mathcal{S}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.180})$$

Cependant, il convient de remarquer que l'intersection entre l'hypersphère et la courbe de solution  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) = \mathbf{0}$  contient normalement au moins deux solutions, dont une en amont de la courbe qu'il faut éliminer des solutions possibles, ce qui implique de déterminer le sens correct de recherche de solution au solveur. La méthode de continuation par *pseudo arc-length* permet de contrer cet inconvénient.

**Orthogonale (pseudo longueur d'arc)** De façon analogue, la paramétrisation orthogonale utilise un hyperplan à la place de l'hypersphère pour rechercher la solution en fermant le système d'équations non linéaires [81]. L'équation de fermeture s'écrit cette fois :

$$\mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}_{r,k}, \omega_k, \Delta s_k) = \Delta \tilde{\mathbf{u}}_r^\top (\tilde{\mathbf{u}}_{r,k} - \tilde{\mathbf{u}}_{r,k-1}) + \Delta \omega (\omega_k - \omega_{k-1}) - \Delta s_k = 0. \quad (\text{III.181})$$

De la même manière que pour la méthode par longueur d'arc, le calcul des incréments peut se faire par un algorithme de Newton-Raphson tel que dans l'équation (III.180).

L'avantage de cette méthode, par rapport à la paramétrisation par longueur d'arc, est qu'elle donne une unique intersection entre l'hyperplan et la courbe de solution  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_r, \omega) = \mathbf{0}$ , qui se trouvera forcément dans le bon sens de parcours si ce dernier a été correctement déterminé, le solveur ne risque donc pas de revenir en arrière. Cela est illustré par la figure III.20c.

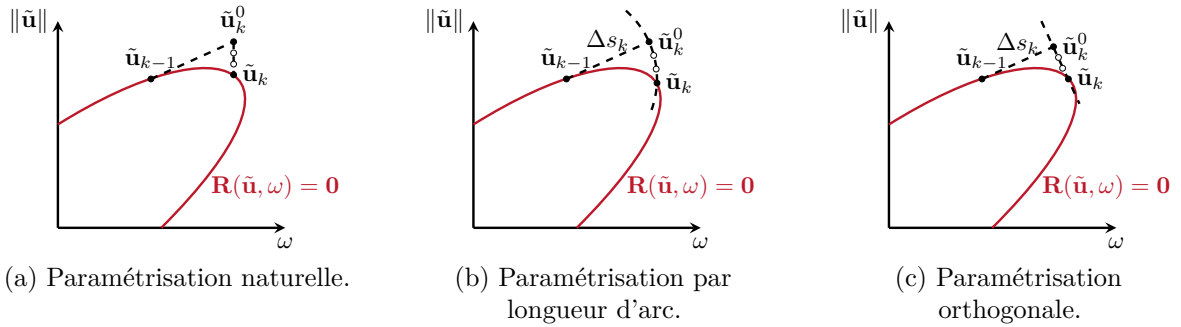


FIGURE III.20 – Différents types de paramétrisation, itération (○), solution (●).

## Bilan du chapitre

Ce chapitre de théorie a permis d'expliciter un certain nombre de méthodes qui concernent la formulation et la résolution d'un problème de contact, en amont du chapitre IV où le modèle numérique utilisé pour le calcul de réponses forcées non linéaires est présenté. De ce fait, ce dernier se contentera de rappeler les méthodes effectivement utilisées, et s'attardera sur la construction du modèle numérique et certains aspects concrets de celui-ci.



## Chapitre IV

# Étude d'un modèle numérique reproduisant le banc d'essai

### Sommaire du chapitre

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>1 Description du modèle numérique</b>                       | <b>114</b> |
| 1.1 Réduction et condensation de la taille du modèle . . . . . | 115        |
| 1.1.1 Méthodes de réduction par synthèse modale . . . . .      | 116        |
| 1.1.2 Condensation de la taille du problème . . . . .          | 118        |
| 1.2 Application de la précharge statique . . . . .             | 118        |
| 1.2.1 Méthode de la pénalité . . . . .                         | 119        |
| 1.2.2 Méthode DLFT . . . . .                                   | 120        |
| 1.3 Solutions convergées . . . . .                             | 120        |
| 1.3.1 Déplacement des nœuds . . . . .                          | 120        |
| 1.3.2 Forces de contact . . . . .                              | 121        |
| <b>2 Réponses forcées</b>                                      | <b>122</b> |
| 2.1 Premier mode de flexion . . . . .                          | 123        |
| 2.2 Troisième mode de flexion . . . . .                        | 124        |
| 2.3 Influence de la non-coïncidence du maillage . . . . .      | 125        |
| 2.4 Synthèse comparative . . . . .                             | 126        |
| <b>3 Traitement de la non-coïncidence des maillages</b>        | <b>126</b> |
| 3.1 Proposition d'une méthode . . . . .                        | 126        |
| 3.2 Réponses forcées . . . . .                                 | 128        |
| 3.2.1 Précharge statique « faible » . . . . .                  | 128        |
| 3.2.2 Précharge statique « élevée » . . . . .                  | 130        |
| <b>4 Corrélation essais-calculs</b>                            | <b>131</b> |
| <b>Bilan du chapitre</b>                                       | <b>133</b> |

---

Ce chapitre débute par une description du modèle numérique par éléments finis qui est proposé dans ce chapitre. Celui-ci est détaillé, notamment le calcul de la précharge statique, et met en application les méthodes mises en avant dans la section III.4. Plusieurs réponses forcées sont présentées selon les deux méthodes de calcul des forces non linéaires pour les premier et troisième modes de flexion. Par ailleurs, l'influence de la non-coïncidence des maillages au niveau des interfaces de contact est étudiée. Un état de l'art des méthodes dédiées au traitement



de cette difficulté au sein d'un modèle numérique construit par la méthode des éléments finis est établi, permettant de proposer une approche prenant en compte les méthodologies de calcul actuellement employées. Enfin, de nouvelles réponses forcées calculées en intégrant cette méthode sont présentées.

## 1 Description du modèle numérique

L'objectif du modèle numérique créé par la méthode des éléments finis est de reproduire la configuration du banc d'essai, et de calculer des réponses forcées pour évaluer la non-linéarité de l'amortissement liée au contact avec frottement entre les talons des aubes. La géométrie du modèle numérique est donc celle de l'assemblage des trois aubes simplifiées sur le banc d'essai, cependant les autres pièces, notamment les mors et intercales qui servent au positionnement des aubes et à l'encastrement de leurs pieds (ils sont encastres numériquement), ne sont pas conservées. Les deux super-éléments définis dans ANSYS sont l'aube centrale ainsi que les aubes adjacentes, il y a donc deux interfaces de contact entre elles. L'aube centrale possède un nœud d'observation au niveau du talon, tandis qu'une des deux aubes adjacentes possède un nœud d'excitation (voir figure IV.1). L'aube centrale est désignée comme la structure numéro 1 tandis que les aubes adjacentes représentent la structure numéro 2. Le modèle numérique, une fois maillé, est composé de 11 892 éléments linéaires et 11 518 nœuds au total. Le maillage des interfaces de contact a été contraint pour être suffisamment régulier et proche d'une coïncidence. Enfin, les modes propres étudiés pour la suite sont les premier et troisième modes de flexion localisés autour de 142 Hz et 764 Hz. Les déformées des modes propres de cet assemblage des trois aubes du banc d'essai sont visibles en annexe G.

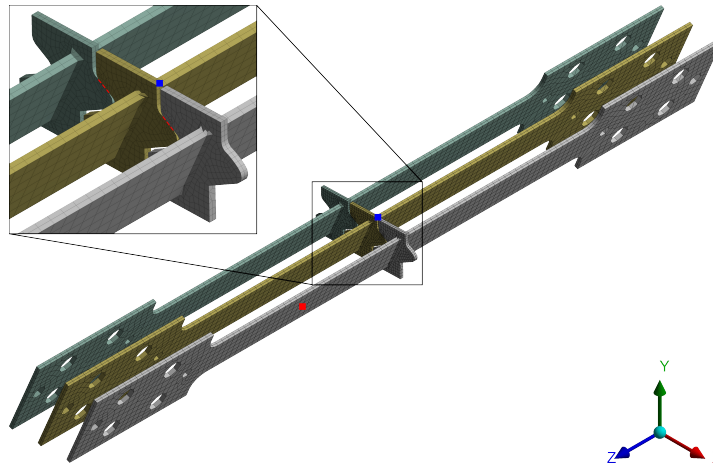


FIGURE IV.1 – Modèle éléments finis de l'assemblage de trois aubes, nœud d'excitation (■), nœud d'observation (■), et interfaces de contact (--).

On s'attarde désormais à la description analytique du modèle numérique, composée de deux structures en contact discrétisée par la méthode des éléments finis, on peut donc écrire le système d'équations non linéaires comportant leur équation du mouvement respectif :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^1 \ddot{\mathbf{u}}^1(t) + \mathbf{C}^1 \dot{\mathbf{u}}^1(t) + \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^1(t) + \mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ex}^1(t) \\ \mathbf{M}^2 \ddot{\mathbf{u}}^2(t) + \mathbf{C}^2 \dot{\mathbf{u}}^2(t) + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^2(t) - \mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ex}^2(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où les matrices de masse et de raideur  $\mathbf{M}^s$  et  $\mathbf{K}^s$  sont carrées symétriques définies positives de taille  $n$  égal au nombre de degrés de liberté,  $\mathbf{C}^s$  désigne la matrice d'amortissement qui

peut-être de type modal ou de Rayleigh,  $\mathbf{u}^s(t)$  correspond au vecteur des déplacements associés aux degrés de liberté de la structure  $s$ , et  $\mathbf{f}_{\text{ex}}^s(t)$  au vecteur des forces extérieures sources d'excitation sur chaque structure. L'amortissement modal se fonde sur la base modale  $\Phi^s$  de la structure considérée, composée des vecteurs propres issus de la résolution du problème aux valeurs propres, permettant également de déterminer les valeurs propres qui sont les fréquences propres  $\omega$  du solide. En projetant l'équation du mouvement (IV.1) d'une des deux structures, on a :

$$\Phi^{s\top} \mathbf{M}^s \Phi^s \ddot{\mathbf{q}}^s + \Phi^{s\top} \mathbf{C}^s \Phi^s \dot{\mathbf{q}}^s + \Phi^{s\top} \mathbf{K}^s \Phi^s \mathbf{q}^s = \Phi^{s\top} \mathbf{f}_{\text{ex}}^s \quad (\text{IV.2})$$

avec  $\mathbf{q}^s$  les coordonnées modales du solide. On obtient alors les propriétés suivantes :

$$\mathbf{M}_g^s = \Phi^{s\top} \mathbf{M}^s \Phi^s = \text{diag}(m_i^s), \quad (\text{IV.3})$$

$$\mathbf{K}_g^s = \Phi^{s\top} \mathbf{K}^s \Phi^s = \text{diag}(\omega_i^2), \quad (\text{IV.4})$$

$$\Phi^{s\top} \mathbf{C}^s \Phi^s = \text{diag}(2\zeta \omega_i^s m_i^s) = 2\zeta \sqrt{\Lambda^s} \mathbf{M}_g^s \quad (\text{IV.5})$$

avec  $\mathbf{M}_g^s$  et  $\mathbf{K}_g^s$  les matrices de masse et de raideur généralisées,  $\Lambda^s$  la matrice des pulsations propres au carré, et  $\zeta$  le taux d'amortissement. La matrice d'amortissement peut donc s'écrire

$$\mathbf{C}^s = 2\zeta \Phi^{s-\top} \sqrt{\Lambda^s} \mathbf{M}_g^s \Phi^{s-1}. \quad (\text{IV.6})$$

Il est possible d'éviter le calcul d'inversion de la matrice  $\Phi^s$  en utilisant les équations (IV.4) et (IV.5) :

$$\Phi^{s-\top} = \mathbf{M}^s \Phi^s \mathbf{M}_g^{s-1}, \quad (\text{IV.7})$$

$$\Phi^{s-1} = \mathbf{M}_g^{s-1} \Phi^s \mathbf{M}^s, \quad (\text{IV.8})$$

ce qui donne au final

$$\mathbf{C}^s = 2\zeta \mathbf{M}^s \Phi^s \mathbf{M}_g^{s-1} \sqrt{\Lambda^s} \Phi^{s\top} \mathbf{M}^s. \quad (\text{IV.9})$$

Si l'on fait le choix d'un amortissement de Rayleigh (selon l'hypothèse de Basile), la matrice d'amortissement est proportionnelle aux matrices de masse et de raideur, deux paramètres sont alors introduits :

$$\mathbf{C}^s = \alpha \mathbf{K}^s + \beta \mathbf{M}^s \quad (\text{IV.10})$$

ce qui, pour un mode donné, correspond à un taux d'amortissement égal à

$$\zeta(\omega_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right). \quad (\text{IV.11})$$

Afin de mettre en application la procédure de calcul dont les étapes ont été détaillées dans la section III.4, l'objectif de la partie suivante est d'expliquer la mise en données du modèle numérique qui intervient juste avant, lors de l'export de celui-ci par ANSYS.

## 1.1 Réduction et condensation de la taille du modèle

Tout comme l'on peut effectuer la caractérisation modale d'une structure de façon expérimentale, il est possible de le faire sur un modèle numérique discrétisée par la méthode des éléments finis. En effet, la structure est découpée en un nombre finis d'éléments composés de plusieurs nœuds possédant eux-mêmes plusieurs degrés de liberté mécaniques. Cependant, dans le cas d'un comportement non linéaire de la structure, la résolution du système d'équations associé nécessite un temps de calcul important à cause de l'estimation des forces non linéaires,

d'où le besoin de réduire la taille du système à résoudre, qui est directement lié au nombre de degrés de liberté de la structure. C'est pourquoi il est opportun de séparer les degrés de liberté en deux catégories : les degrés de liberté maîtres qui sont principalement les degrés de liberté non linéaires des nœuds de contact (mais aussi les degrés de liberté des nœuds d'observation et d'excitation par exemple, nécessaires pour le calcul de réponses forcées), et les degrés de liberté esclaves qui sont ceux de tous les nœuds restant, qu'on choisit de ne pas conserver. Dans notre cas, la méthode de réduction retenue permet d'obtenir deux super-éléments, qui représentent le comportement des deux corps en contact de la structure modélisée, par le biais des degrés de liberté non linéaires, et dont la taille est bien inférieure à la structure complète.

En reprenant l'équation (IV.1) pour une seule structure  $s$  discrétisée par la méthode des éléments finis, permettant ainsi de définir sa matrice de masse  $\mathbf{M}^s$ , sa matrice de raideur  $\mathbf{K}^s$  et sa matrice d'amortissement  $\mathbf{C}^s$ , et en mettant de côté les forces non linéaires, l'équation homogène de celle-ci s'écrit :

$$\left(\mathbf{K}^s - \omega^2 \mathbf{M}^s\right) \mathbf{u}^s(t) = \mathbf{0}, \quad (\text{IV.12})$$

dont la résolution fournit ainsi les modes propres et les vecteurs propres de la structure considérée [140]. Il existe d'autres méthodes comme la condensation de Guyan qui n'utilise pas les modes propres de la structure pour en réduire sa taille (voir annexe C pour plus de détails).

### 1.1.1 Méthodes de réduction par synthèse modale

Ces méthodes de réduction, appelées *component mode synthesis*, ont pour particularité d'utiliser des « modes composants », c'est-à-dire des modes avec un sens physique tels que les modes propres et les modes statiques, pour constituer la base de réduction de la structure à réduire. Par exemple, les modes propres utilisés peuvent être à interfaces fixes, libres ou chargées, tandis que les modes statiques sont issus de déformées à déplacement ou chargement imposé.

**Méthodes à interfaces fixes** La méthode de Craig-Bampton [37, 76, 122] est une méthode de sous-structuration très couramment utilisée dans le cadre de la résolution de problème où les structures ont un nombre important de degrés de liberté, et particulièrement adaptée dans le cas d'une non-linéarité telle qu'une interface de contact avec frottement. De ce fait, cette méthode uniquement sera détaillée afin de rester concis. La structure que l'on souhaite réduire est donc divisée entre des degrés de liberté des nœuds de frontière (indices  $b$  pour *boundary*) et intérieurs (indice  $i$  pour *interior*), ce que l'on retrouve explicitement dans les matrices de masse et de raideur ci-dessous :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.13})$$

Les modes contraints correspondent aux déformées calculées en imposant un déplacement unitaire successivement sur chacun des degrés de liberté de frontière, et en encastrant ceux restant, les degrés de liberté intérieurs sont égaux à zéro, ce qui revient à écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

d'où

$$\mathbf{K}_{ib} \mathbf{u}_b + \mathbf{K}_{ii} \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \text{ soit } \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \mathbf{u}_b \equiv \Psi \mathbf{u}_b. \quad (\text{IV.15})$$

Ainsi, on peut écrire le vecteur des déplacements  $\mathbf{u}$  en fonction des degrés de liberté maîtres uniquement, et l'on obtient donc la matrice des modes contraints :

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{u}_b \text{ avec } \Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{K}_{ib}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.16})$$

Les modes normaux sont obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres suivant, pour lequel les degrés de liberté de frontière sont totalement encastés :

$$(\mathbf{K}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii}) \Phi = \mathbf{0} \quad (\text{IV.17})$$

avec  $\Phi$  les modes normaux.

On peut donc enfin écrire la matrice de passage dans la base réduite :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.18})$$

D'autres méthodes existent mais sont cependant moins fréquemment utilisées dans les cas d'études similaires au nôtre, par exemple les méthodes de Benfield-Hruda [19], de Hurty ou encore de Craig-Hale. Pour le modèle numérique étudié ici, on fait le choix d'utiliser la méthode de Craig-Bampton et de retenir cinquante modes internes pour la constitution des super-éléments. Les degrés de liberté des nœuds de contact sont désignés comme maîtres ainsi qu'un nœud d'observation et un nœud d'excitation, le reste des nœuds sont esclaves (voir figure IV.2).

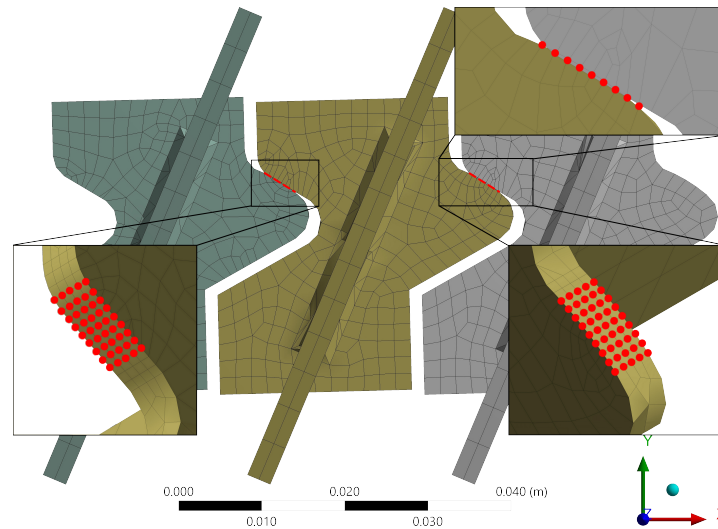


FIGURE IV.2 – Vue axiale du modèle éléments finis avec une interpénétration géométrique initiale des talons des aubes, indication du nœud d'excitation (•) et des interfaces de contact (--).

**Méthodes à interfaces libres** De façon similaire à la méthode de Craig-Bampton, la méthode de MacNeal [92] utilise non pas les modes propres à interfaces fixes mais à interfaces libres. D'autres méthodes existent telles que celle de Rubin [138] ou de Craig-Chang [38]. Ces méthodes ne seront pas traitées en détails puisqu'elles ne correspondent pas à la physique du

problème de contact étudié dans cette thèse.

### 1.1.2 Condensation de la taille du problème

Deux condensations prennent part à la réduction de la taille du système à résoudre : premièrement une condensation sur les degrés de liberté non linéaires, et deuxièmement une condensation sur le déplacement relatif entre les deux structures qui, en plus de la première condensation, permet de diviser par deux la taille du système à résoudre. Elles sont décrites dans la sous-section III.4.2.

Le code de calcul existant ainsi que les méthodes employées ont été conçus principalement pour réaliser des calculs non linéaires sur du contact aube-disque avec une interface de contact plane ainsi que des maillages réguliers et parfaitement coïncidents. Cette configuration est donc bien adaptée pour la procédure d'appairage des nœuds dans la condensation sur le déplacement relatif. En revanche, la configuration de la structure étudiée ici est plus contraignante puisque ces zones ne sont pas planes (contact de Hertz type cylindre-plan) et les maillages ne sont pas coïncidents, il faut donc dans un premier temps faire en sorte que les nœuds à appairer soient suffisamment proches. De plus, il faut s'assurer que les nœuds appairés n'effectuent pas des déplacements trop importants par rapport à la taille des mailles, pour que ceux-ci restent globalement toujours suffisamment proches, et que l'appairage reste cohérent au cours du calcul de la réponse forcée non linéaire. Il faut donc trouver un compromis entre finesse du maillage et coût du calcul des simulations numériques non linéaires, pour que l'appairage soit réalisable et correct, sans que le temps de calcul soit prohibitif. Comme annoncé dans la section précédente, il a été choisi d'utiliser un maillage linéaire, il n'y a donc pas de nœuds au milieu des mailles.

## 1.2 Application de la précharge statique

La précharge statique des aubes résulte de l'interpénétration géométrique initiale des talons, conséquence d'une part de leur design, et d'autre part de leur positionnement imposé à leurs pieds, qui sont encastres et responsables de l'angle du talon et de leur position finale. L'objectif est de la reproduire comme elle l'est sur le banc d'essai et en situation réelle sur une turbine basse pression. Un calcul statique sans frottement en utilisant le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS permet de visualiser le déplacement statique, conséquence de l'interpénétration géométrique initiale des talons (voir figure IV.3). On remarque que l'aube centrale est en torsion pure, tandis que les aubes adjacentes subissent en plus de la flexion.

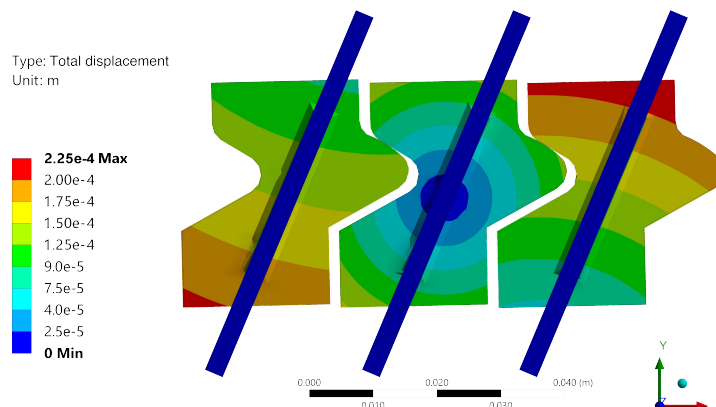


FIGURE IV.3 – Amplitude de déplacement total des aubes résultant de l'interpénétration géométrique initiale des talons.

L'objectif est donc de gérer l'interpénétration géométrique initiale entre les talons des aubes au sein d'un calcul statique sur le modèle réduit, afin d'exploiter le déplacement et les forces de contact statiques obtenues pour initialiser le calcul de réponses forcées non linéaires. Dans le cas de la structure étudiée ici, le calcul du chargement statique n'implique pas de forces centrifuges ni aucune autres forces extérieures sur les aubes, elles subissent une pré-torsion qui est uniquement liée à l'interpénétration géométrique initiale des talons, de laquelle proviennent les forces de contact, puisque l'interpénétration des interfaces de contact n'est physiquement pas possible. Pour le calcul des réponses forcées, une force d'excitation harmonique est bien évidemment appliquée sur le nœud d'excitation désigné.

L'équation (III.115) à résoudre pour le calcul statique préliminaire est écrite de la façon suivante, puisqu'il n'y a pas de forces extérieures :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{Z}_r(\omega)\tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}. \quad (\text{IV.19})$$

La procédure de calcul des forces non linéaires statiques à suivre est la même que celle décrite en section III.4, cependant une variable supplémentaire est introduite au sein de la composante normale des multiplicateurs de Lagrange pour traiter l'interpénétration géométrique des interfaces de contact.

### 1.2.1 Méthode de la pénalité

La composante normale des forces non linéaires, dans le domaine temporel (pour le k-ième instant temporel), s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_N^k = k_N \left( \mathbf{u}_{r,N}^k - \mathbf{u}_{p,N}^k \right) \quad (\text{IV.20})$$

avec  $\mathbf{u}_{p,N}^k$  la nouvelle variable désignant la distance normale initiale entre les nœuds de contact, qui est une constante, et qui correspond soit à un jeu soit à une interpénétration des nœuds de contact.

Les conditions de non-pénétration de la loi de contact à vérifier dans la direction normale sont illustrées sur la figure III.15, et écrites ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{si } k_N \left( \mathbf{u}_{r,N}^k - \mathbf{u}_{p,N}^k \right) \leq \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{f}_N^k = k_N \left( \mathbf{u}_{r,N}^k - \mathbf{u}_{p,N}^k \right) & (\text{contact}) \\ \text{si } k_N \left( \mathbf{u}_{r,N}^k - \mathbf{u}_{p,N}^k \right) > \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{f}_N^k = \mathbf{0} & (\text{séparation}) \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

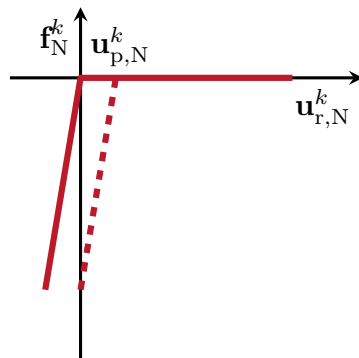


FIGURE IV.4 – Loi de contact linéaire suivie par la méthode de pénalité, ajustée pour prendre en compte la distance normale entre les nœuds de contact (--).

### 1.2.2 Méthode DLFT

La composante normale des multiplicateurs de Lagrange  $\tilde{\lambda}$  est exprimée telle que :

$$\tilde{\lambda}_N = -\mathbf{Z}_{r,N}(\omega)\tilde{\mathbf{u}}_{r,N} + \varepsilon_N (\tilde{\mathbf{u}}_{r,N} + \tilde{\mathbf{u}}_{p,N} - \tilde{\mathbf{x}}_{r,N}) \quad (\text{IV.22})$$

où l'on retrouve  $\tilde{\lambda}_N$  le multiplicateur de Lagrange dans la direction normale. Le terme  $\tilde{\mathbf{u}}_{p,N}$  est identique à celui introduit dans la méthode de pénalité.

Les conditions de contact à vérifier dans la direction normale (voir illustration en figure III.16) sont écrites dans l'équation suivante :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda_{N,\text{pre}}^k < \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}_{r,N}^k \leq \mathbf{u}_{p,N}^k \text{ alors } \lambda_{N,x}^k = \mathbf{0} & (\text{contact}) \\ \text{si } \lambda_{N,\text{pre}}^k \geq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{u}_{r,N}^k > \mathbf{u}_{p,N}^k \text{ alors } \lambda_{N,x}^k = \lambda_{N,u}^k & (\text{séparation}) \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

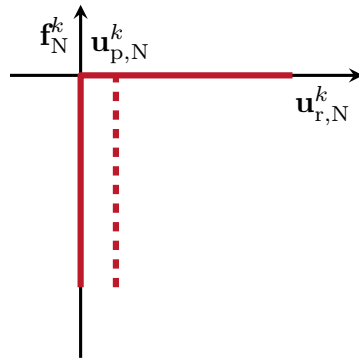


FIGURE IV.5 – Loi de contact unilatéral suivie asymptotiquement par la méthode DLFT, ajustée afin de prendre en compte la distance normale entre les nœuds de contact (---).

## 1.3 Solutions convergées

### 1.3.1 Déplacement des nœuds

La figure IV.6 ci-dessous montre une vue dans l'axe du maillage des interfaces de contact des talons des aubes (la vue axiale mentionnée est celle de la figure IV.2), contraint pour être suffisamment régulier et quasi-coincident, comparant les situations avant et après le calcul statique. On remarque que l'interpénétration géométrique des nœuds des interfaces de contact de chacune des deux structures a été éliminée.

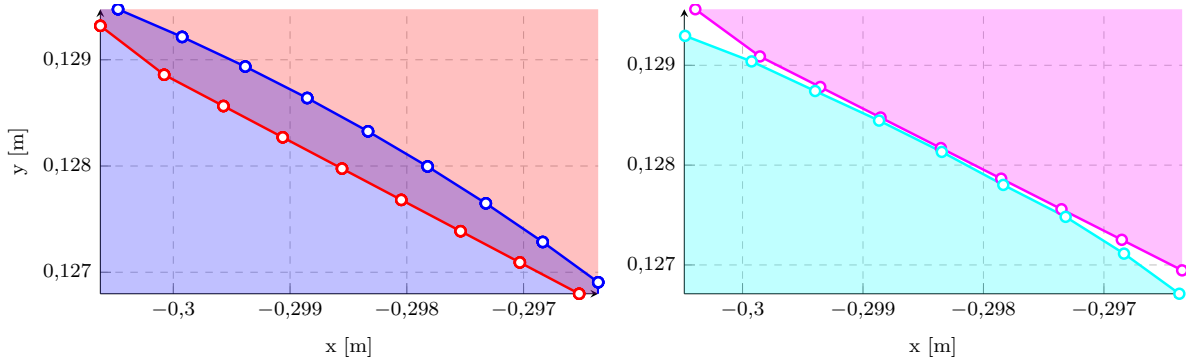


FIGURE IV.6 – Vue axiale des nœuds de contact de l'une des deux interfaces de contact entre les talons des aubes, avant (◦, ◦) et après (◦, ◦) le calcul statique.

### 1.3.2 Forces de contact

Pour illustrer les résultats obtenus avec les deux méthodes, la distribution des efforts de contact statiques normaux sur les nœuds est affichée sur la figure IV.7 pour la méthode DLFT, et sur la figure IV.8 pour la méthode de pénalité.

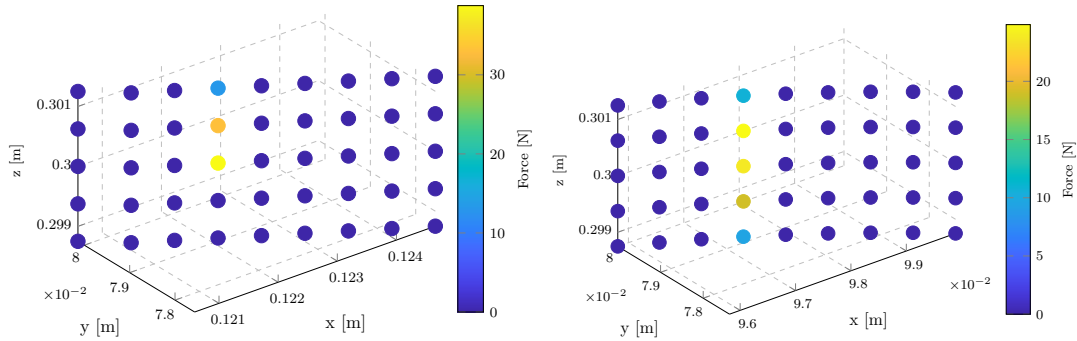


FIGURE IV.7 – Distribution des forces de contact normales sur les nœuds de l’aube centrale en utilisant la méthode DLFT pour le calcul statique.

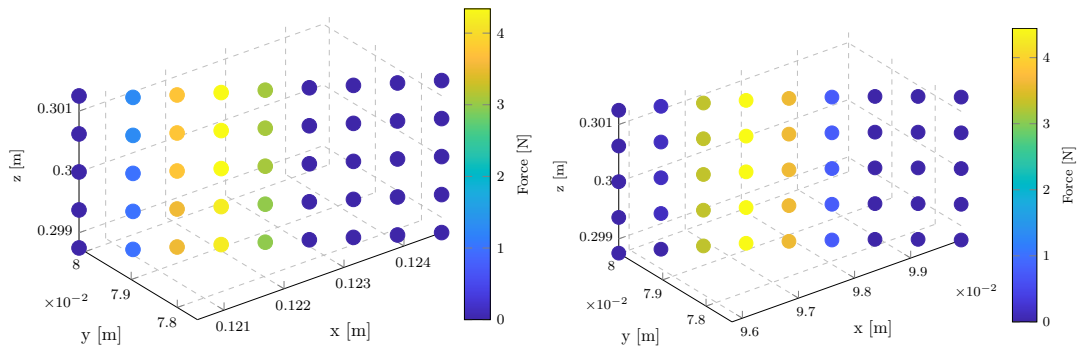


FIGURE IV.8 – Distribution des forces de contact normales sur les nœuds de l’aube centrale en utilisant la méthode de pénalité ( $k_N = 1 \times 10^5 \text{ N m}^{-1}$ ) pour le calcul statique.

Étant donné que l’une des deux interfaces de contact est arrondie tandis que l’autre est plane, la mécanique du contact est du type d’un contact de Hertz cylindre-plan. On peut remarquer qu’avec la méthode DLFT, par la loi de contact unilatéral qu’elle suit, la distribution des forces de contact normales est assez localisée et rectiligne, ce qui influe sur la convergence de la résolution du système non linéaire, puisqu’elle est plus sujette aux singularités. Avec la méthode de pénalité, la distribution des forces de contact normales obtenues est plus étalée, avec des valeurs plus régulières et plus faibles, ce qui facilite la convergence des calculs, mais est moins représentative de la physique du contact de Hertz comparé à la méthode DLFT. L’efficacité de la méthode de pénalité pour évaluer les forces de contact normales, nécessaires pour éliminer l’interpénétration géométrique initiale des talons, dépend fortement de la valeur choisie pour la raideur de pénalité. Augmenter la raideur de pénalité jusqu’à un certain niveau ferait tendre à terme la distribution des forces de contact normales vers celle obtenue par la méthode DLFT, ce qui a été vérifié par des calculs numériques.

Rappelons que le calcul de précharge statique réalisé par ANSYS, le logiciel de calcul par éléments finis utilisé pour générer le modèle numérique réduit de l’assemblage des trois aubes du banc d’essai, consiste à résoudre l’équation suivante, en reprenant la notation de la



documentation technique [8] :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_n = 0 \quad (\text{IV.24})$$

avec  $\mathbf{F}_n$  l'effort de contact lié à l'interpénétration des aubes. Sachant que la loi de contact utilisée par défaut sur ANSYS est du type pénalité (voir figure IV.9), l'effort de contact normal s'écrit :

$$|\mathbf{F}_n| = \mathbf{k}_n \mathbf{x}_p \quad (\text{IV.25})$$

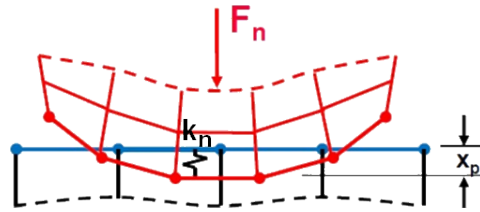


FIGURE IV.9 – Illustration de loi de contact de type pénalité utilisée par ANSYS [8].

La distribution de pression de contact visible sur la figure IV.10 résulte d'une analyse statique. D'expérience, la distribution de la pression de contact dépend fortement de la finesse du maillage de l'interface de contact, car elle est corrélée avec la raideur de pénalité utilisée par ANSYS. On remarque la distribution de la pression de contact répartie de façon assez localisée et rectiligne sur l'interface de contact.

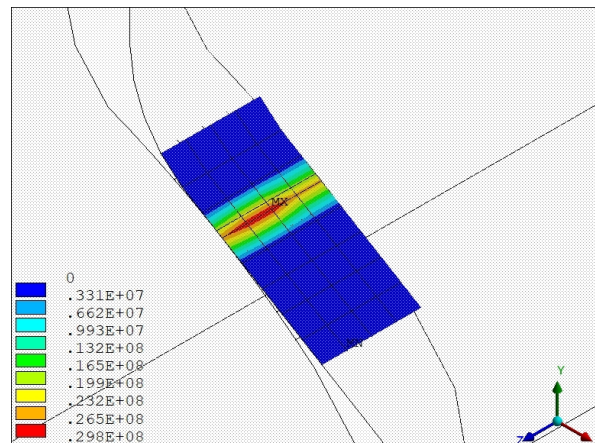


FIGURE IV.10 – Distribution de la pression de contact normale [Pa] calculée par ANSYS sur l'une des interfaces de contact.

## 2 Réponses forcées

Maintenant que le calcul statique est effectué, les réponses forcées peuvent être calculées à leur tour, en utilisant le déplacement et les forces de contact statiques obtenues précédemment en tant que valeurs initiales pour le solveur non linéaire.

Plusieurs réponses forcées ont été calculées avec différents jeux de paramètres tels que la force d'excitation, appliquée sur le nœud d'excitation, et le coefficient de frottement. L'amortissement des réponses forcées non linéaires est particulièrement examiné, de même pour l'éventuel décalage de la fréquence du pic de résonance. À l'instar du calcul statique, la raideur de pénalité utilisée pour le calcul des réponses forcées est toujours égale à  $1 \times 10^5 \text{ N m}^{-1}$ .

Les figures présentées par la suite montrent le déplacement du nœud d'observation, dans la même direction que la force d'excitation, pour deux situations différentes : linéaire, c'est-à-dire que les nœuds de contact appairés sont liés, forçant l'adhérence du contact, et non linéaire, signifiant que les nœuds peuvent glisser si les forces tangentielles sont suffisamment grandes.

Cinq harmoniques sont conservées pour la HBM, ce qui est un compromis suffisamment confortable entre le coût numérique que cela représente, et la précision de calcul des réponses forcées. La procédure AFT contient quant à elle cent instants temporels.

À titre d'information, ces calculs ont été réalisés antérieurement aux résultats expérimentaux obtenus avec le banc d'essai.

## 2.1 Premier mode de flexion

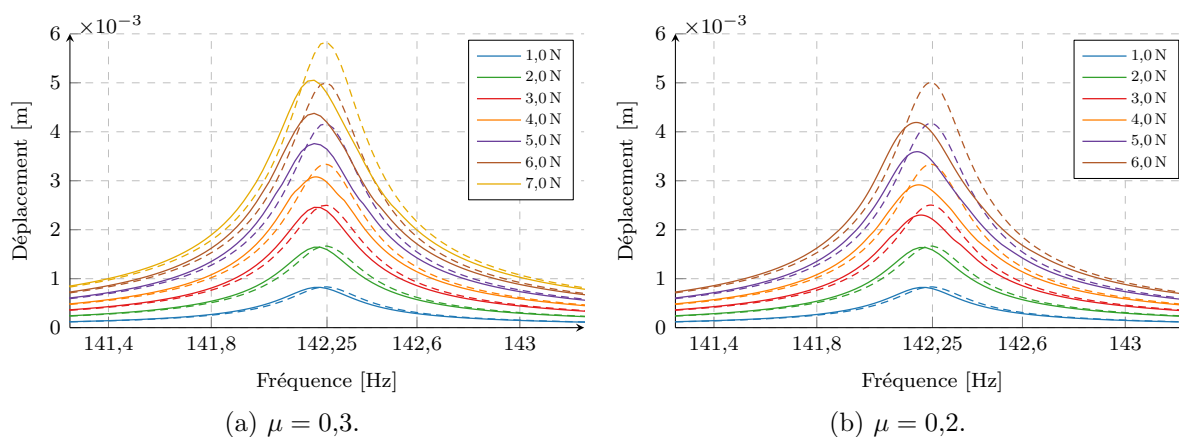


FIGURE IV.11 – Réponses forcées linéaires (---) et non linéaires (—) autour du premier mode de flexion en utilisant la méthode de pénalité pour différents niveaux de force d'excitation avec un taux d'amortissement  $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ .

La première simulation, visible sur la figure IV.11a, a été calculée autour du premier mode de flexion avec un coefficient de frottement  $\mu = 0,3$  en utilisant la méthode de pénalité. Pour des niveaux faibles de force d'excitation, les réponses forcées linéaires et non linéaires ont les mêmes amplitudes de déplacement, avec un décalage négligeable de la fréquence du pic de résonance. Pour des niveaux de force d'excitation plus élevés, l'amplitude du déplacement des réponses non linéaires, à la résonance, diminue par rapport à la solution linéaire. De plus, la fréquence du pic de résonance diminue elle aussi par rapport à la solution linéaire avec l'augmentation de la force d'excitation.

La seconde simulation (figure IV.11b) a été effectuée avec un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ . Des observations similaires sont notées, cependant la diminution de l'amplitude de déplacement des réponses non linéaires est plus importante que sur la figure IV.11a, le coefficient de frottement plus faible ici favorise le glissement et donc le comportement non linéaire. Le décalage de la fréquence du pic de résonance est toujours clairement visible sur cette simulation.

On peut noter que le comportement non linéaire apparaît pour une valeur plus grande de la force d'excitation, environ 4,0 N, lorsque le coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ , comparé à  $\mu = 0,2$  où il se produit approximativement à 3,0 N.

## 2.2 Troisième mode de flexion

Des réponses forcées autour du troisième mode de flexion de l'assemblage des trois aubes ont été calculées avec les deux méthodes de calcul des forces de contact, puisque les résultats obtenus pour les réponses forcées font apparaître une plus grande différence visible pour ce mode. Les mêmes valeurs de coefficient de frottement sont utilisées.

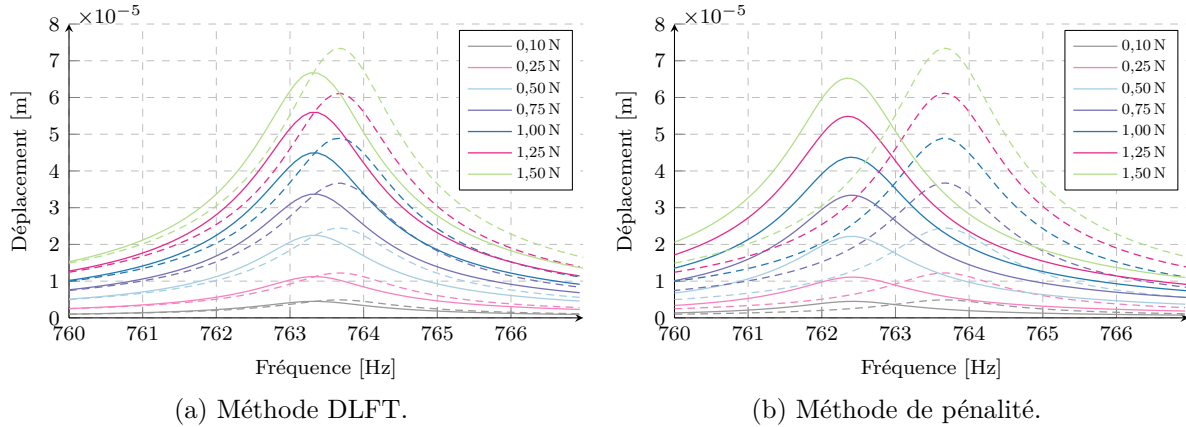


FIGURE IV.12 – Réponses forcées linéaires (---) et non linéaires (—) autour du troisième mode de flexion pour différents niveaux de force d'excitation avec un taux d'amortissement  $\zeta = 5 \times 10^{-4}$  et un coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .

Les réponses forcées visibles sur les figures IV.12a et IV.12b ont toutes les deux été calculées pour un coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ , la différence majeure est le décalage de la fréquence du pic de résonance qui est beaucoup plus important avec la méthode de pénalité, c'est la conséquence de l'utilisation d'une loi de contact linéaire, comparé à la loi de contact unilatéral utilisée par la méthode DLFT. À part cela, les amplitudes de déplacement des réponses forcées sont équivalentes. De plus, l'amortissement non linéaire semble être constant même si la force d'excitation augmente, la même observation peut être faite pour le décalage de la fréquence du pic de résonance sur les réponses non linéaires.

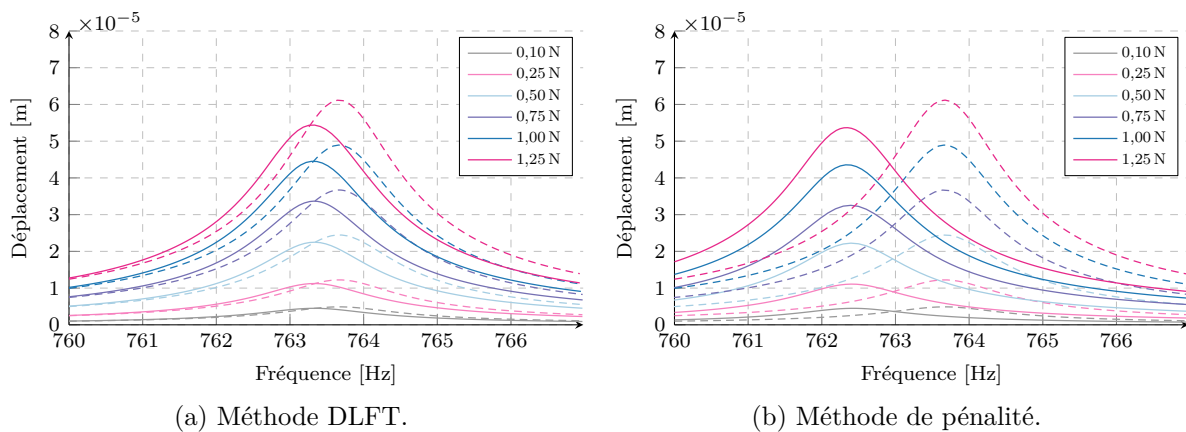


FIGURE IV.13 – Réponses forcées linéaires (---) et non linéaires (—) autour du troisième mode de flexion pour différents niveaux de force d'excitation avec un taux d'amortissement  $\zeta = 5 \times 10^{-4}$  et un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ .

Les figures IV.13a et IV.13b montrent des simulations de réponses forcées pour un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ , et partage les mêmes observations faites avec les figures IV.12a et IV.12b.

### 2.3 Influence de la non-coïncidence du maillage

L'influence de la non-coïncidence du maillage entre les interfaces de contact est étudiée, notamment vis-à-vis de la validité de la condensation basée sur le déplacement relatif, qui permet la constitution d'éléments de contact nœud-à-nœud lors de la phase d'appairage. Elle repose intégralement sur l'hypothèse supposant que le maillage des interfaces de contact est suffisamment régulier et quasi-coïncident pour que l'appairage nœud-à-nœud soit appliqué. Afin d'étudier la sensibilité de celui-ci, le maillage de la structure est artificiellement modifié en ajoutant aux coordonnées nodales un déplacement dans le plan local  $(x, y)$ , suivant une distribution aléatoire uniforme  $U(a, b)$  avec  $a = 0$  et  $b = 1 \times 10^{-4}$ . Cela correspond à environ 20 % de taille des éléments finis du maillage, et permet d'accroître l'incompatibilité entre les nœuds des interfaces de contact. Pour rappel, la loi uniforme continue a une densité de probabilité qui s'écrit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

et une fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } a \leq x < b \\ 1 & \text{pour } x \geq b \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

L'objectif est d'observer si les réponses forcées non linéaires sont dégradées à cause de cela, plus particulièrement à cause du couplage plus imprécis qui sert à constituer les éléments de contact.

La figure IV.14a est à comparer avec la figure IV.11a, et respectivement la figure IV.14b avec la figure IV.11b. L'amortissement des réponses non linéaires est légèrement plus important sur ces simulations avec le maillage non coïncident (quantifié dans le tableau IV.1). Le décalage de la fréquence du pic de résonance est bien visible mais apparaît insensible à l'incompatibilité du maillage (un écart relatif inférieur ou égal à 0,01 % par rapport aux simulations avec le maillage quasi-coïncident).

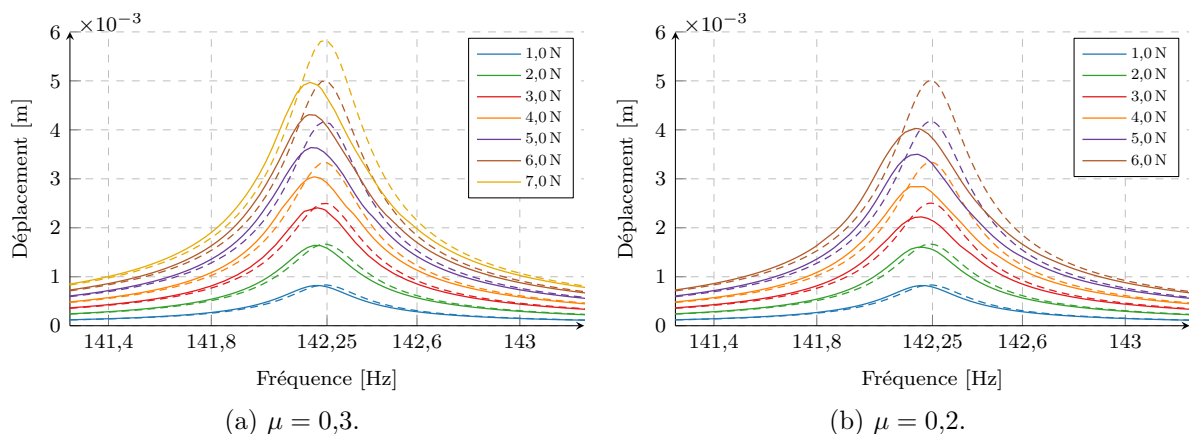


FIGURE IV.14 – Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) autour du premier mode de flexion en utilisant la méthode de pénalité avec un taux d'amortissement  $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ , avec un maillage artificiellement non coïncident

## 2.4 Synthèse comparative

Pour résumer les résultats numériques obtenus dans les différentes configurations étudiées, l'écart relatif entre les amplitudes de déplacement obtenues est calculé à l'aide de l'expression suivante :

$$\frac{|u_{q.-c.} - u_{a.-i.}|}{u_{q.-c.}} \times 100 \quad (\text{IV.28})$$

où  $u_{q.-c.}$  et  $u_{a.-i.}$  sont respectivement les amplitudes maximales des réponses forcées non linéaires obtenues avec le maillage quasi-coïncident et aléatoirement non coïncident.

| $F_{\text{ex}}$ | $\mu = 0,3$             |                              |               | $\mu = 0,2$             |                              |               |
|-----------------|-------------------------|------------------------------|---------------|-------------------------|------------------------------|---------------|
|                 | Quasi-coïncident        | Aléatoirement non coïncident | Écart relatif | Quasi-coïncident        | Aléatoirement non coïncident | Écart relatif |
| 1 N             | $0,82 \times 10^{-3}$ m | $0,82 \times 10^{-3}$ m      | 0 %           | $0,82 \times 10^{-3}$ m | $0,82 \times 10^{-3}$ m      | 0 %           |
| 2 N             | $1,64 \times 10^{-3}$ m | $1,64 \times 10^{-3}$ m      | 0 %           | $1,64 \times 10^{-3}$ m | $1,60 \times 10^{-3}$ m      | 2,4 %         |
| 3 N             | $2,46 \times 10^{-3}$ m | $2,40 \times 10^{-3}$ m      | 2,4 %         | $2,30 \times 10^{-3}$ m | $2,22 \times 10^{-3}$ m      | 3,5 %         |
| 4 N             | $3,08 \times 10^{-3}$ m | $3,04 \times 10^{-3}$ m      | 1,3 %         | $2,92 \times 10^{-3}$ m | $2,84 \times 10^{-3}$ m      | 2,7 %         |
| 5 N             | $3,76 \times 10^{-3}$ m | $3,64 \times 10^{-3}$ m      | 3,2 %         | $3,59 \times 10^{-3}$ m | $3,50 \times 10^{-3}$ m      | 2,5 %         |
| 6 N             | $4,38 \times 10^{-3}$ m | $4,31 \times 10^{-3}$ m      | 1,6 %         | $4,19 \times 10^{-3}$ m | $4,03 \times 10^{-3}$ m      | 3,8 %         |
| 7 N             | $5,05 \times 10^{-3}$ m | $4,97 \times 10^{-3}$ m      | 1,6 %         |                         |                              |               |

TABLEAU IV.1 – Amplitudes maximales de déplacement des réponses forcées non linéaires, et écarts relatifs entre les cas de maillage quasi-coïncident et aléatoirement non coïncident.

D'après le tableau IV.1, les écarts relatifs mesurés sont légèrement plus importants avec un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ . Cela suggère qu'un coefficient de frottement plus petit implique forcément plus de phases de glissement, et rend alors les simulations numériques plus sensibles à un maillage non coïncident des interfaces de contact. La même observation peut être faite lorsque la force d'excitation est assez grande. De plus, une erreur de coïncidence d'environ 20 % entre les nœuds de contact du maillage mène finalement à un écart relatif des amplitudes de déplacement maximales autour de 3 % seulement pour la configuration testée du modèle numérique.

## 3 Traitement de la non-coïncidence des maillages

### 3.1 Proposition d'une méthode

À partir des méthodes proposées dans les articles de la section III.2.3, une méthode est décrite ici pour gérer la problématique des maillages non coïncidents dans le cas du modèle numérique traité ici. En détaillant les équations du mouvement des deux structures en contact à partir du début, après une condensation sur les degrés de liberté non linéaires uniquement, le système s'écrit dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{r,1} \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex},r,1} \\ \mathbf{Z}_{r,2} \tilde{\mathbf{u}}_2 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,2} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ex},r,2} \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{r,1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{r,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{nl,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r,1} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r,2} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.30})$$

On choisit de créer des matrices d'interpolation qui sont utilisées dans la construction de la matrice de condensation sur le déplacement relatif. De ce fait, la matrice jacobienne est inchangée, la procédure de résolution par AFT reste la même. Pour chaque nœud de la surface de contact de la structure 1, son projeté orthogonal sur la surface de contact de la structure 2 est calculé, et ses quatre nœuds voisins sont déterminés. On peut écrire la fonction de forme linéaire associée pour interpoler le déplacement du nœud projeté :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad (\text{IV.31})$$

ce qui donne par exemple pour le nœud 1 de la figure IV.15 ci-dessous, illustrant un élément quadrilatère linéaire tel que ceux qui constitue le maillage de l'interface de contact :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta). \quad (\text{IV.32})$$

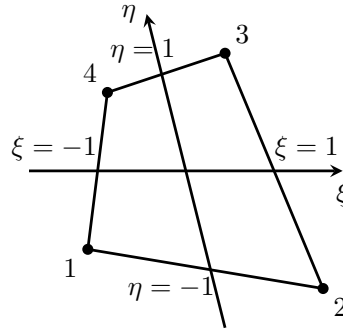


FIGURE IV.15 – Élément quadrilatère isoparamétrique à 4 nœuds.

En répétant la procédure pour chacun des nœuds de contact de la structure 1, on obtient donc une matrice d'interpolation  $\mathbf{N}_1$  de taille  $n_1 \times n_2$  qui permet de transférer les déplacements des nœuds d'une structure à l'autre. La condensation sur les coordonnées relatives devient alors, une fois l'interpolation achevée (composante harmonique 0 uniquement) :

$$\tilde{\mathbf{u}}_r = \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2 \approx \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_{P_1} = \tilde{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{N}_1 \tilde{\mathbf{u}}_2 \text{ soit } \tilde{\mathbf{a}}_{r,0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & -\mathbf{N}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{1,0} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{2,0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_{P_1}$  désigne le déplacement des nœuds projetés de la structure 1 sur la structure 2, et  $n_1$  le nombre de degrés de liberté non linéaires de la structure 1. Le vecteur des forces non linéaires s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl} = \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1} = -\tilde{\mathbf{f}}_{nl,2} = \text{soit } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{nl} \\ -\tilde{\mathbf{f}}_{nl} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} \\ -\mathbf{N}_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{f}}_{nl} \quad (\text{IV.34})$$

où l'on retrouve l'expression de la matrice  $\mathbf{P}$  introduite dans la sous-section III.4.2.

On pourrait aussi écrire  $\tilde{\mathbf{u}}_r = \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2 \approx \tilde{\mathbf{u}}_{P_2} - \tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{N}_2 \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2$ , ce qui aurait donné une

matrice  $\mathbf{P} = (\mathbf{N}_2, -\mathbf{I}_n)^\top$ . On aurait aussi pu interpoler les nœuds de chacune des structures en contact sur une surface intermédiaire virtuelle, où les nœuds auraient été coïncidents, afin d'avoir une matrice de  $\mathbf{P} = (\mathbf{N}_2, -\mathbf{N}_1)^\top$  utilisant les deux matrices d'interpolation.

### 3.2 Réponses forcées

Un certain nombre de réponses forcées ont pu être calculées à l'aide de cette méthode, selon différents paramètres, dont le plus important est l'espacement des pieds des aubes induisant directement le niveau de précharge statique appliqué sur les aubes. D'autres paramètres tels que le coefficient de frottement, la force d'excitation ou encore le taux d'amortissement font partie de l'étude paramétrique menée. L'objectif est d'être le plus fidèle possible à la configuration du banc d'essai concernant les conditions limites (précharge statique, excitation), mais aussi l'observation de la réponse de la structure pour le tracé des résultats et leur interprétation.

À la différence des résultats numériques présentés précédemment, le modèle numérique pour lequel ceux-ci ont été obtenus a été légèrement modifié, ce que l'on peut constater sur la figure IV.16 : les nœuds d'excitation et d'observation ont été déplacés pour mieux représenter la configuration du banc d'essai, puisque ces calculs ont été réalisés a posteriori des essais expérimentaux.

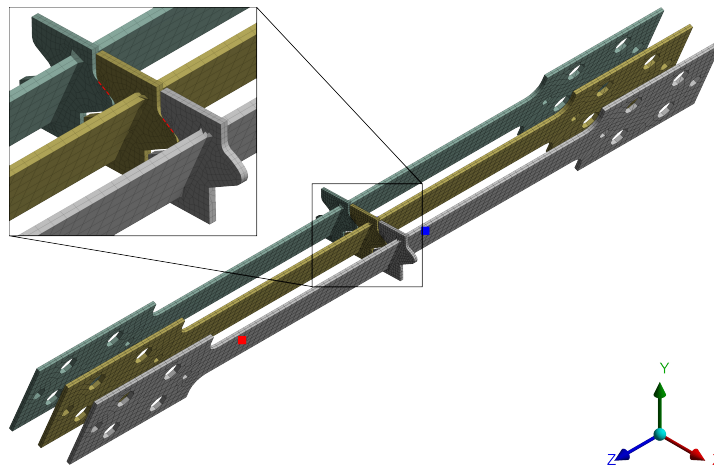


FIGURE IV.16 – Modèle éléments finis de l'assemblage de trois aubes (seconde version), nœud d'excitation (■), nœud d'observation (■), et interfaces de contact (---).

Le reste de la configuration du modèle numérique concernant les paramètres de calcul ont été également changés pour certains : le nombre d'instantanés temporels pour l'AFT est réduit à trente-deux, tandis que le taux d'amortissement modal est fixé à  $3,0 \times 10^{-3}$  (pour mieux correspondre à l'amortissement structural mesuré lors des analyses modales expérimentales sur les aubes en configuration encastree), le nombre d'harmoniques pour la HBM reste égal à cinq.

#### 3.2.1 Précharge statique « faible »

**Espaceur de 19,90 mm** La configuration présentée en II.4.3.1 est reproduite numériquement, des réponses forcées linéaires (contact adhérent) et non linéaires sont calculées selon différents niveaux de force d'excitation.

D'après la figure IV.17, on remarque que l'amplitude de déplacement des réponses linéaires augmente proportionnellement avec la force d'excitation appliquée. En revanche pour les réponses non linéaires, elles se superposent à celles linéaires pour un bas niveau de force



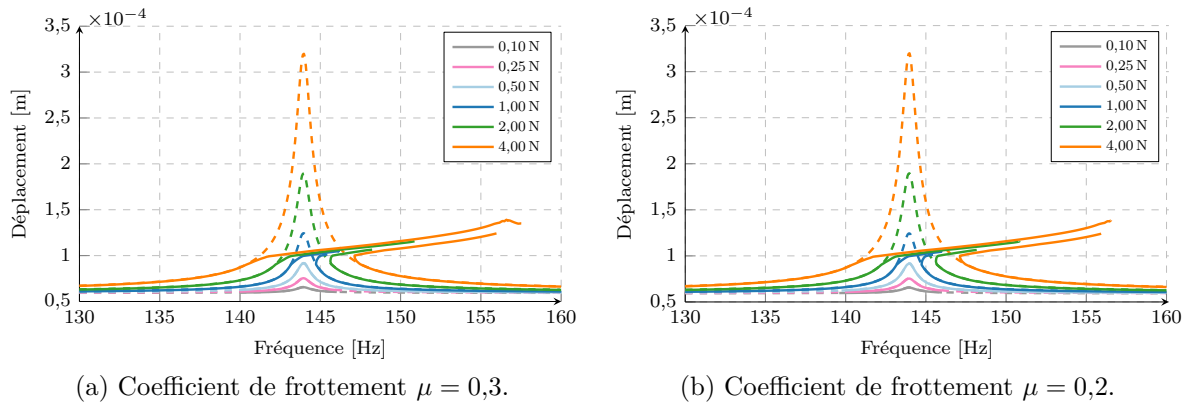


FIGURE IV.17 – Réponses forcées linéaires (---) et non linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation pour une précharge statique donnée par un espacement des pieds de 19,9 mm.

d'excitation, avant d'entamer un comportement non linéaire au-delà de 0,50 N. En effet, on observe ensuite du vibro-impact sur les réponses forcées pour des niveaux de force d'excitation supérieurs.

Le phénomène de vibro-impact s'observe plus clairement sur la figure IV.18, où sont tracées les évolutions des forces non linéaires sur une période temporelle, dans les directions normale et tangentielle, pour chacun des nœuds de contact (selon une précharge statique générée par un espacement des pieds de 19,9 mm, cf. figure IV.17a). On remarque tout d'abord que très peu de nœuds sont en contact, mais surtout les variations marquées des forces normales notamment autour de zéro, ce qui confirme une alternance du statut des nœuds entre les états de contact ouvert et fermé.

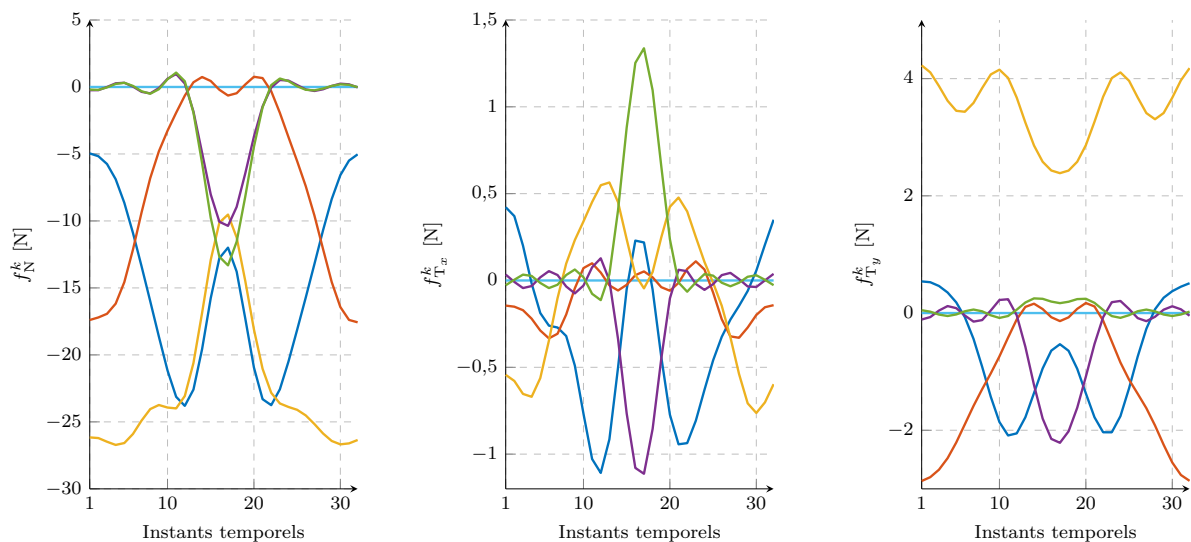


FIGURE IV.18 – Évolution des forces non linéaires normale et tangentielle sur une période temporelle pour l'ensemble des nœuds de contact, à la fréquence de 150 Hz, pour une force d'excitation de 4,0 N et un coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .



### 3.2.2 Précharge statique « élevée »

**Espacement de 19,40 mm** De même, on reproduit la configuration avec une précharge statique « faible » présentée dans la partie II.4.3.1 avec le modèle numérique, et l'on obtient les réponses fréquentielles suivantes.

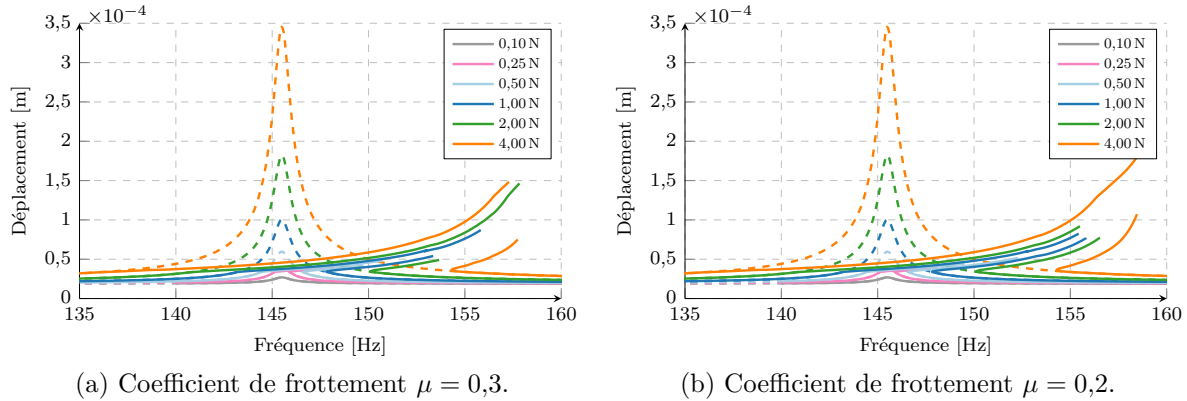


FIGURE IV.19 – Réponses forcées linéaires (---) et non linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation pour une précharge statique donnée par un espacement des pieds de 19,4 mm.

La figure IV.19 montre une nouvelle fois la présence de vibro-impact sur les réponses forcées non linéaires. Cependant, l'apparition du comportement non linéaire se déclenche pour une force d'excitation inférieure, par rapport à la configuration avec une précharge statique « faible », c'est-à-dire visiblement à partir d'une valeur supérieure à 0,10 N. De plus, si l'on compare encore une fois les amplitudes de déplacement des réponses linéaires pour une force d'excitation de 4,0 N, l'écart est plus important (environ 35,2 %) :  $3,3 \times 10^{-4}$  m sur le modèle numérique contre  $5,09 \times 10^{-4}$  m expérimentalement (déterminé par extrapolation). L'écart s'est accru puisque l'amplitude de déplacement obtenue sur le modèle numérique n'a que très peu évolué, malgré l'augmentation de la précharge statique, à la différence des essais expérimentaux.

Par ailleurs, on s'aperçoit avec les figures IV.17 et IV.19 que le coefficient de frottement semble avoir très peu d'influence sur la réponse vibratoire de la structure, ce qui suggère que le statut du contact entre les talons des aubes passe directement de l'état adhérent à du vibro-impact. Cela se confirme en traçant les réponses non linéaires à niveau de force d'excitation constant mais, en faisant varier le coefficient de frottement, visibles sur la figure IV.20.

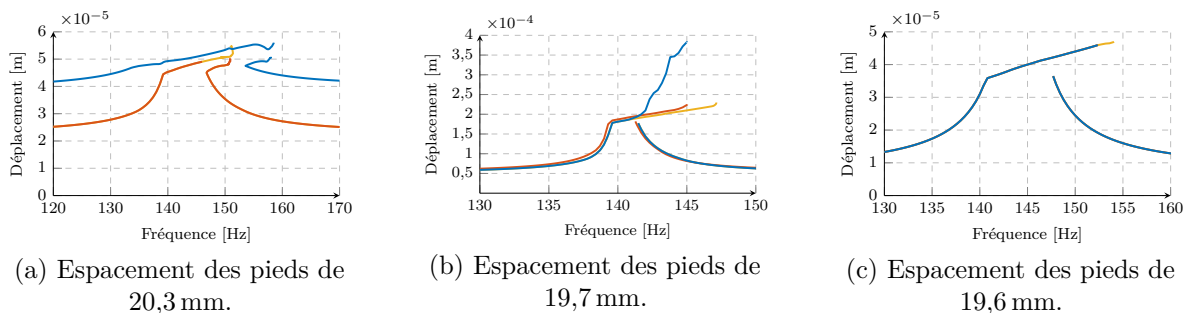


FIGURE IV.20 – Influence du coefficient de frottement égal à 0,1 (—), 0,2 (—) ou 0,3 (—) pour différents niveaux de précharge statique et une force d'excitation de 4,0 N.

L'ensemble des réponses forcées calculées pour les niveaux de précharge statique restants, définis selon les espacements des pieds des aubes, sont réunis en annexe L et montrent la même

phénoménologie. Elles n'ont pas été incluses dans cette partie afin de ne pas la surcharger en figures.

## 4 Corrélacion essais-calculs

Bien que la fréquence de résonance du modèle numérique soit plus élevée d'environ 20 Hz que celle du banc d'essai (le modèle numérique est donc plus rigide que la structure du banc d'essai, à cause du choix de la modélisation numérique de l'encastrement qui n'inclut pas les mors et intercales, un recalage serait donc nécessaire), l'amplitude du déplacement de la réponse linéaire est assez comparable à celle des essais expérimentaux. À titre d'exemple, on compare sur les figures IV.21 et IV.22 l'amplitude de déplacement calculé avec le modèle numérique et celle mesuré sur le banc d'essai. Trois niveaux de force d'excitation égaux à 1,0 N, 2,0 N et 4,0 N sont affichés. Les fréquences de résonance ont été normalisées dans le but de pouvoir comparer les amplitudes et la forme des réponses fréquentielles, afin d'éliminer le décalage fréquentiel.

Pour la première figure IV.21, qui correspond à la précharge statique « faible », on remarque que les réponses expérimentales pour les niveaux de force d'excitation à 1,0 N et 2,0 N sont beaucoup plus amorties, que les réponses numériques. L'écart d'amplitude de déplacement est plus faible pour une force d'excitation plus grande égale à 4,0 N. Cet écart important pour les réponses à plus faibles niveaux de force d'excitation semble lié à la composante statique des réponses numériques (environ égale à  $0,70 \times 10^{-4}$  m), qui participe de façon non négligeable à l'amplitude de déplacement globale calculée. On remarque également que la réponse expérimentale à ce niveau de force d'excitation n'a plus une forme symétrique de part et d'autre du pic de résonance, contrairement aux réponses pour des niveaux de force d'excitation plus faibles.

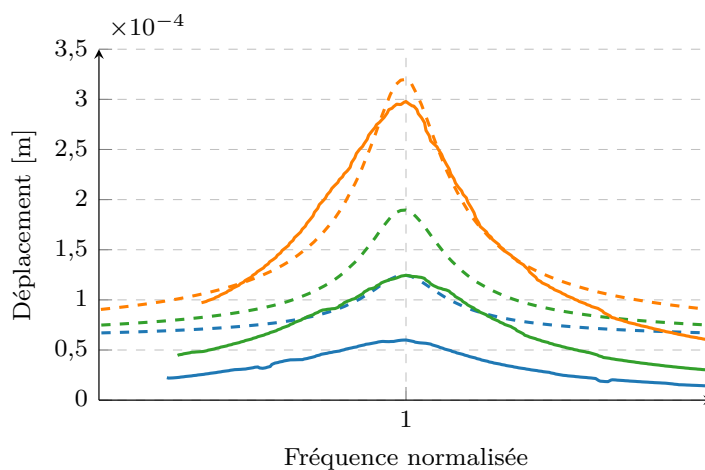


FIGURE IV.21 – Réponses fréquentielles numériques (linéaires,  $\zeta = 3 \times 10^{-3}$ ) (---) et expérimentales (—) pour une précharge statique liée à un espacement des pieds de 19,90 mm, selon une force d'excitation de 1,0 N (■), 2,0 N (■), 4,0 N (■).

Pour cette seconde figure IV.22 de comparaison, on remarque que l'observation faite précédemment sur l'évolution des réponses en fonction de la force d'excitation, n'est plus la même et semble presque s'être inversée. En effet, les réponses fréquentielles expérimentales ont une amplitude de déplacement quasiment identique aux réponses numériques. En revanche pour la réponse obtenue à un niveau de force d'excitation de 4,0 N, son amplitude de déplacement est plus faible de 7,1 % environ que celle calculée numériquement, le taux d'amortissement

obtenu est supérieur. De plus, la participation de la composante statique parmi les réponses numériques calculées s'est réduite de moitié, à environ  $0,35 \times 10^{-4}$  m.

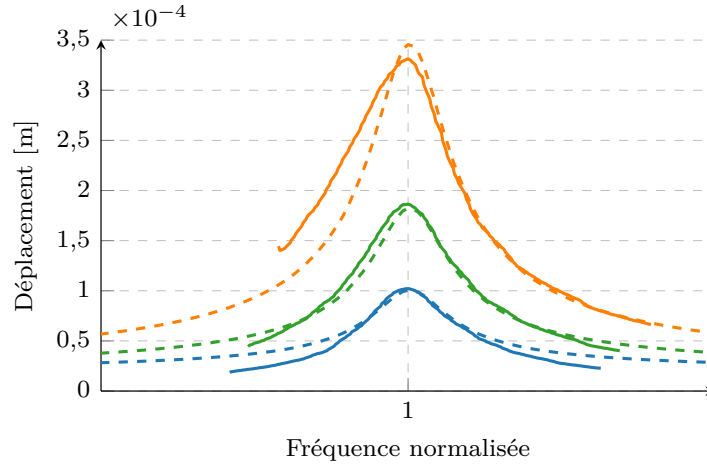


FIGURE IV.22 – Réponses fréquentielles numériques (linéaires,  $\zeta = 3 \times 10^{-3}$ ) (--) et expérimentales (—) pour une précharge statique liée à un espacement des pieds de 19,40 mm, selon une force d'excitation de 1,0 N (■), 2,0 N (■), 4,0 N (■).

Cette inversion du comportement du taux d'amortissement des réponses expérimentales en fonction de la force d'excitation, c'est-à-dire une diminution pour une précharge statique « faible » mais une augmentation pour une précharge statique plus forte, avait été observée sur les résultats expérimentaux. La comparaison avec les réponses numériques linéaires complète cette observation.

L'amplitude de déplacement des réponses fréquentielles numériques linéaires, obtenues a posteriori des essais expérimentaux et regroupés dans la section IV.3.2 et en annexe L, sont finalement comparables aux réponses expérimentales.

On peut noter que les premières simulations numériques présentées dans la section IV.2 étaient plus proches des essais expérimentaux en termes de comportement non linéaire observé. En effet, elles indiquaient une augmentation progressive de l'amortissement et du décalage de la fréquence de résonance des réponses en fonction de la force d'excitation. Néanmoins, les amplitudes de déplacement semblent surévaluées d'un facteur important par rapport aux réponses expérimentales, qui peut cependant s'expliquer par un taux d'amortissement modal beaucoup plus faible, de  $5 \times 10^{-4}$ , par rapport au taux d'amortissement mesuré expérimentalement et utilisé pour les simulations numériques réalisées ensuite, défini à  $3 \times 10^{-3}$ . Un recalage du modèle numérique par un ajustement du taux d'amortissement fixé pourrait permettre d'améliorer la corrélation essais-calculs des réponses forcées.

Il semble donc que le calcul de la précharge statique initialisant le calcul des réponses forcées soit un paramètre sensible dans l'estimation des réponses non linéaires. Une explication est possible en comparant le déplacement des nœuds des interfaces de contact calculé à l'issue du calcul statique, au déplacement solution déterminé par ANSYS. C'est ce qui est affiché sur la figure IV.23 qui est à comparer à la figure IV.6.

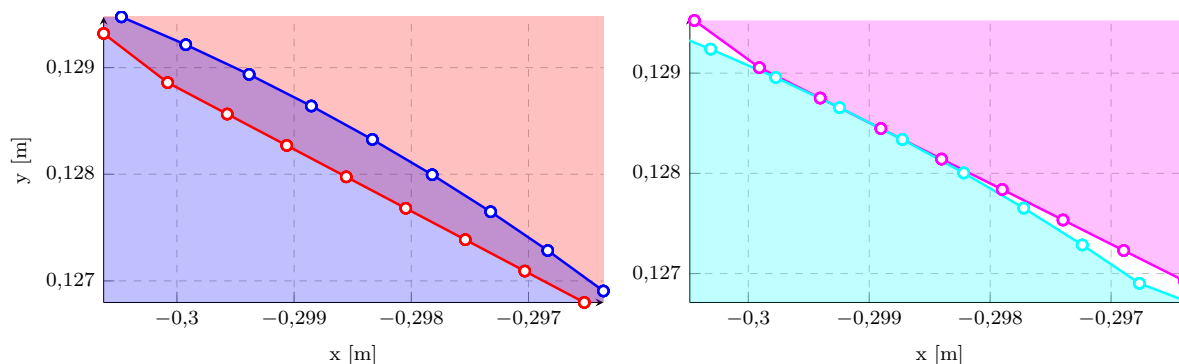


FIGURE IV.23 – Vue axiale des nœuds de contact de l’une des deux interfaces de contact entre les talons des aubes, avant (◦, ◦) et après (◦, ◦) le calcul statique d’ANSYS.

## Bilan du chapitre

En conclusion de ce chapitre sur le volet numérique de la thèse, malgré une comparaison difficile avec les résultats des essais expérimentaux décrits dans le chapitre II, empêchant une réelle corrélation essais-calculs, il en ressort plusieurs aspects importants à noter. Tout d’abord, la construction du modèle numérique par la méthode des éléments finis, dont la taille a été réduite par la méthode de Craig-Bampton, a permis ensuite d’employer des méthodes adaptées pour le calcul de réponses forcées non linéaires d’une telle structure, c’est-à-dire avec des non-linéarités de contact sur des interfaces. La principale difficulté a été de reproduire fidèlement la précharge statique appliquée sur l’assemblage des trois aubes par le biais de l’interpénétration géométrique des talons, liée à l’angle de prétorsion.

Il a fallu trouver une approche permettant d’intégrer la distance normale entre les nœuds des interfaces de contact des talons au sein des lois de contact utilisées par l’algorithme de calcul non linéaire. Grâce aux résultats issus de ce calcul statique, c’est-à-dire le déplacement et les forces de contact des nœuds maîtres, cela a permis d’initialiser le solveur pour le calcul de réponses forcées non linéaires sur les modes propres souhaités, et selon différents jeux de paramètres tels que la force d’excitation et le coefficient de frottement.

La seconde problématique à traiter sur ce modèle numérique était la non coïncidence des maillages de l’interface de contact, inhérente à l’interpénétration géométrique. Dans un premier temps, la construction des maillages sur le logiciel ANSYS a été contrainte de sorte que ceux-ci soient suffisamment réguliers, pour que l’on puisse supposer que l’appairage nœud-à-nœud est valable pour le calcul des forces de contact qui en découlent. Des réponses forcées non linéaires ont pu être calculées à partir de cette configuration, où l’influence du contact avec frottement, induisant un amortissement et un décalage de la fréquence de résonance, a pu être observé.

Dans un second temps, une technique pour traiter cette problématique de non coïncidence des maillages de l’interface de contact est proposée à partir d’une recherche bibliographique réalisée précédemment, tout en tenant compte des contraintes liées à l’algorithme de calcul non linéaire. Des réponses non linéaires supplémentaires ont donc été simulées en intégrant cette nouvelle composante de l’algorithme de calcul. Contrairement aux résultats précédents et aux essais expérimentaux, l’apparition de vibro-impact est nouvelle mais ne correspond pas à ce qui a été observé au cours des essais expérimentaux, la physique semble donc ne pas avoir été correctement reproduite par le modèle numérique. Une comparaison entre les réponses expérimentales et les réponses numériques linéaires a tout de même pu être effectuée.



# Conclusion

L'ensemble des travaux de recherche menés au cours de cette thèse, et résumés dans ce mémoire, se concentrent sur l'étude de la non-linéarité de contact avec frottement entre les talons des aubes de la turbine basse pression d'un turboréacteur. L'objectif était de caractériser expérimentalement et de reproduire numériquement le comportement d'une telle structure, dont la dynamique vibratoire est fortement non linéaire, et donc complexe à traiter. Cela nécessite ainsi l'emploi d'outils et méthodes numériques adaptés à cette problématique, afin d'élaborer un modèle pertinent pour le calcul de réponses forcées non linéaires, tout en préparant en parallèle un banc d'essai innovant et adapté pour reproduire le montage avec prétorsion des aubes, induisant le préchargement statique de celles-ci, et ainsi observer le comportement dynamique non linéaire de cette structure, lié au contact avec frottement entre les talons.

En effet, pour rappeler le contexte industriel évoqué en introduction de cette thèse, la compréhension de ce phénomène est particulièrement importante pour les motoristes de l'industrie aéronautique civile, puisque l'enjeu est d'améliorer les performances et le rendement des turboréacteurs, tout en réduisant les pollutions émises. De ce fait, augmenter la vitesse de rotation de la turbine basse pression est un choix technologique envisagé, ce qui induit une augmentation des contraintes mécaniques à supporter par les aubes de la turbine. Il est donc primordial de pouvoir calculer en amont de la phase de conception l'amplitude vibratoire de celles-ci, en estimant assez précisément l'amortissement non linéaire produit par le contact avec frottement des talons, et donc in fine les contraintes à supporter, afin d'éviter la rupture d'une pièce telle qu'une aube de turbine basse pression.

## Résultats

Cette section en conclusion du mémoire rappelle l'ensemble des résultats obtenus au sein des deux volets, afin de faciliter la prise de recul et le rapprochement de ceux-ci, pour mener ainsi vers les perspectives de ce travail.

### Volet expérimental

Le premier objectif était de concevoir un banc d'essai à partir d'un état de l'art sur les bancs d'essai de la littérature mettant en jeu une ou plusieurs aubes avec un talon, afin de mesurer leur réponse vibratoire et l'influence du contact avec frottement, produisant un amortissement non linéaire, ainsi que de la précharge statique appliquée sur la structure par un dispositif dédié. Le cahier des charges du banc d'essai contenait plusieurs objectifs, tels que pouvoir visualiser différents modes propres représentatifs d'une aube de turbine basse pression, reproduire aussi fidèlement que possible la précharge statique par prétorsion des aubes, et pouvoir produire des réponses pour une variété de configurations selon des paramètres tels que la force d'excitation et la précharge statique. C'est pourquoi il a été choisi de concevoir un assemblage de trois

aubes sur le banc d'essai, afin d'avoir une aube centrale ayant les conditions limites voulues concernant la précharge statique appliquée par prétorsion au montage. De plus, le choix a été fait d'avoir une géométrie des aubes avec deux pieds afin d'empêcher toute flexion de celles-ci lors du montage et de la mise en contact des talons, qui viendrait dégrader le contrôle des conditions limites de la précharge statique.

Une fois la conception du banc d'essai validée, la fabrication des pièces de celui-ci représentait le deuxième objectif, et a nécessité de faire appel à des procédés de fabrication sophistiqués pour respecter les tolérances de la géométrie souhaitée. La fabrication en une seule pièce de chacune des aubes et de leur talon n'étant pas possible pour des raisons de coût et de complexité, il a été nécessaire de les décomposer en deux parties distinctes, le corps de l'aube et le talon, pour les assembler ensuite par un procédé spécifique. L'objectif étant d'avoir au final une aube et son talon assemblés comme s'ils étaient encastrés, les solutions technologiques telles que le collage ou le vissage n'étant pas satisfaisantes, le soudage laser a été retenu (par rapport au soudage par électrode avec métal d'apport). L'avantage de ce procédé est de limiter les contraintes thermiques risquant de déformer les pièces, et de ne nécessiter qu'un seul cordon de soudure de part et d'autre de l'aube au niveau du talon. Les autres pièces ont été usinées de façon plus traditionnelle puisque leur géométrie ne posait pas de problème majeur.

La prise en main du banc d'essai a nécessité la réalisation d'essais préliminaires afin de valider le modèle numérique, grâce à des analyses modales en plaçant les aubes en configurations libre et encastrée, qui se sont révélées satisfaisantes. Des essais de torsion des aubes ont été menés pour calibrer les jauges de déformation collées sur les aubes, qui sont nécessaires à la mesure de la précharge statique appliquée sur celles-ci lors de leur montage sur le banc d'essai pour les essais vibratoires. Encore une fois, les essais ont montré une grande qualité de fabrication des aubes puisque celles-ci peuvent être considérées comme identiques à l'issue de ces essais. Un protocole précis étape par étape a été défini, afin de mesurer de façon répétable le positionnement du talon de chacune des aubes lors du montage, en fonction de la précharge statique appliquée selon l'espacement des pieds imposé.

Les essais dynamiques ont pu être réalisés en imposant une force d'excitation par un pot vibrant sur une des deux aubes adjacentes, selon un sinus pas à pas sur la plage de fréquence du premier mode de flexion. Plusieurs réponses ont été mesurées selon différentes configurations de précharge statique, permettant d'observer le comportement non linéaire de celles-ci. En effet, le taux d'amortissement varie en fonction de la force d'excitation exercée sur l'assemblage des trois aubes du banc d'essai : pour une précharge statique « faible », celui-ci diminue lorsque la force d'excitation augmente, alors qu'il croît pour une précharge statique « élevée ». Il a alors été constaté qu'il existe un palier de précharge statique des trois aubes pour lequel la tendance de l'amortissement non linéaire s'inverse.

### **Volet numérique**

La géométrie du modèle numérique s'est naturellement calquée sur celle du banc d'essai, plus particulièrement celle de l'assemblage des trois aubes. En effet, le reste des pièces n'est pas conservé, l'encastrement des pieds des aubes est réalisé numériquement en bloquant les degrés de liberté associés. Le positionnement des talons est donc celui de la CAO qui a servi pour la fabrication du banc d'essai, l'espacement des pieds est modifié selon le niveau de précharge statique appliqué de la même manière que cela est fait en essai. Ce modèle numérique intègre plusieurs complexités qu'il a fallu traiter pour mener à bien le calcul de réponses forcées non linéaires, afin d'envisager une comparaison avec les résultats des essais expérimentaux.

Tout d'abord, le premier défi consistait à reproduire le calcul de la précharge statique

réalisé par ANSYS, lors de la génération des super-éléments à l'issue de la réduction de Craig-Bampton, où seulement les degrés de liberté des nœuds de contact sont conservés. En effet, cette précharge statique découle uniquement de l'interpénétration géométrique des talons, aucune force extérieure ne la produit, ce qui signifie que l'export des données d'ANSYS contient un vecteur des forces extérieures nul, ce qui ne permet pas de reproduire ce calcul et obtenir la configuration déformée de la structure. Il a donc fallu réaliser un calcul statique en amont du calcul de réponses forcées non linéaires, pour pouvoir initialiser le solveur avec un déplacement des nœuds de contact et une force statique sur ceux-ci. Pour ce faire, la distance normale entre les nœuds de contact appairés a été calculée et intégrée dans les lois de contact normales, afin de générer une force normale en conséquence pour repousser les interfaces de contact, et supprimer l'interpénétration des talons, jusqu'à converger vers une situation valable par rapport aux lois de contact, et permettant ainsi d'initialiser le solveur pour le calcul de réponses forcées.

Pour le calcul de ces réponses, il a été fait le choix dans un premier temps de supposer que les maillages sont quasiment coïncidents, afin de pouvoir réaliser l'appairage nœud-à-nœud pour la condensation sur le déplacement relatif. À partir de là, plusieurs réponses forcées non linéaires ont pu être calculées autour du premier et troisième mode de flexion, pour différentes configurations de paramètres tels que la force d'excitation et le coefficient de frottement, mais aussi la méthode employée pour le calcul des forces de contact normales et tangentielles. Parmi les résultats obtenus (une seule configuration de précharge statique définie par l'espacement des pieds a été modélisée), les observations suivantes ont été faites : l'augmentation de la force d'excitation induit un décalage de la fréquence de résonance, en plus d'un amortissement non linéaire croissant, ceci pour les deux modes de flexion excités. De plus, un coefficient de frottement plus faible produit plus d'amortissement des réponses forcées non linéaires, puisque le glissement survient plus facilement. Concernant l'influence de la méthode employée pour le calcul des forces non linéaires, la méthode DLFT génère une distribution des forces de contact normales beaucoup plus localisée et rectiligne, contrairement à la méthode de pénalité qui, quant à elle, engendre logiquement une répartition beaucoup plus étendue des forces de contact normales, à cause de la loi de contact qu'elle utilise. De plus, la raideur à l'interface de contact étant plus faible, le décalage obtenu de la fréquence de résonance est plus important et est visible même à bas niveau de force d'excitation. En augmentant la raideur de pénalité, cet écart diminue jusqu'à tendre vers ce que donne la méthode DLFT.

Ensuite, une méthode pour traiter la problématique des maillages non coïncidents aux interfaces de contact a été proposée, tout en prenant en compte les contraintes du modèle numérique liées aux méthodes de calculs des forces non linéaires, et à l'algorithme de résolution du système d'équations, notamment la condensation sur le déplacement relatif. Une étude bibliographique a permis de constater quelles démarches pouvaient être mises en place pour gérer cette problématique sur des modèles numériques similaires, et la plupart reposent sur une interpolation du déplacement relatif. Cette méthodologie a été mise en place au sein du modèle numérique, et des réponses non linéaires ont été calculées en faisant varier le niveau de précharge statique de la même manière que pour les essais expérimentaux, mais aussi la force d'excitation et le coefficient de frottement. Contrairement aux résultats obtenus précédemment, ces derniers mettent en avant un nouveau phénomène qui n'était pas présent jusqu'alors : du vibro-impact. Celui-ci ne se déclenche pas au même niveau de force d'excitation selon la précharge statique appliquée. En effet à précharge statique « faible », le vibro-impact se produit pour une force d'excitation supérieure à 0,5 N, alors que c'est seulement à 0,10 N pour une précharge statique forte. Cependant, les amplitudes de déplacement obtenues pour les réponses linéaires (c'est-à-dire en forçant l'adhérence des interfaces de contact) sont comparables en termes d'ordre de grandeur à celles des essais expérimentaux. En revanche, contrairement



aux réponses expérimentales, les réponses numériques sont peu sensibles au changement de la précharge statique, puisque leur amplitude de déplacement ne varie que très peu. Il semble donc que le modèle numérique rencontre des difficultés à reproduire la physique du comportement de l'assemblage des trois aubes du banc d'essai.

## Perspectives

À la lumière des résultats obtenus à l'issue de ces travaux de thèse, et compte-tenu des choix qui ont été faits aussi bien pour le banc d'essai que pour le modèle numérique, un certain nombre d'observations peuvent être établies en tant que perspectives par rapport à la problématique abordée ici.

### Volet expérimental

Le banc d'essai est très sensible aux conditions limites imposées par l'espacement des pieds des aubes qui sont encastrés par les mors et les intercales, et qui impose la précharge statique subie par celles-ci avec le contact entre les talons. C'est pourquoi la dérive de la fréquence de résonance lors des essais qui finit par se stabiliser, indique une mise en place progressive de l'assemblage des trois aubes, et est à prendre en compte pour d'éventuels essais futurs. De plus, la géométrie des aubes avec un double pied symétrique, équivalent à une poutre bi-encastrée, la rend sensible aux variations de température par exemple, ce qui a été observé en essai et se confirme numériquement. En effet, à titre d'information, une différence de 3 °C implique un décalage de la fréquence propre du premier mode de flexion de 6 Hz environ. De plus, cette configuration des aubes qui est celle d'une poutre bi-encastrée, élancée, assez fine, et avec la masse du talon au centre, fait qu'elle est très certainement sujette à des effets de non-linéarité géométrique, dont il faudrait approfondir l'étude pour mieux cerner le comportement dynamique du banc d'essai. En ce qui concerne la matrice d'essais prévue avant les essais vibratoires, et la façon dont ceux-ci ont été concrètement réalisés, il serait plus judicieux de prévoir des cales pelables dont les feuillets seraient découpés différemment à l'avenir si des essais devaient être à nouveau réalisés. En effet, l'idéal serait de progresser suffisamment vite lors du retrait successif des feuillets afin de constater un réel changement de la précharge statique, ce qui n'était pas le cas lors des essais puisque les feuillets étaient trop fins, et de raffiner les essais aux abords de la transition observée du comportement non linéaire concernant le taux d'amortissement, afin de ne pas la manquer. Enfin, d'autres géométries des aubes et de leur talon (angle, forme, etc.) ainsi que de matériaux peuvent être envisagées, afin de tester de nouvelles configurations si la fabrication de pièces supplémentaires est possible.

### Volet numérique

Le point majeur qui ressort des résultats obtenus est qu'une corrélation entre les réponses expérimentales et numériques est compliquée, puisque le comportement non linéaire relevé n'est pas le même. Les essais expérimentaux étant la référence concernant le comportement dynamique de l'assemblage des trois aubes, en particulier le phénomène non linéaire lié au contact avec les talons, la différence de résultats par rapport au modèle numérique ne peut venir que de ce dernier. Le calcul de la précharge statique étant crucial pour initialiser ensuite le calcul des réponses forcées non linéaires, ce dernier peut être incriminé concernant la différence dans les résultats numériques par rapport aux résultats expérimentaux. En effet, bien que les interfaces de contact ont été repoussées pour supprimer l'interpénétration géométrique de celles-ci, générant des forces de contact normales, il a été constaté que le déplacement statique obtenu ne semble pas être absolument identique à celui issu du calcul statique réalisé par ANSYS

lors de la génération des super-éléments. De ce fait, la précharge statique a malgré tout des chances d'être différente et de ne pas reproduire fidèlement la réalité. Plusieurs options ont été explorées pour s'affranchir de cette difficulté, par exemple en ajoutant le déplacement statique solution d'ANSYS aux coordonnées des nœuds de contact, mais il faut par contre calculer les forces de contact normales correspondantes à ce déplacement. L'idéal aurait été de pouvoir récupérer directement les forces statiques sur chacun des nœuds de contact depuis ANSYS, pour ensuite les exporter et les intégrer dans les conditions initiales du calcul de réponses forcées non linéaires. Autrement, une autre solution impliquant de modifier la géométrie de l'assemblage des trois aubes, ainsi que la façon dont la précharge statique est appliquée par l'interpénétration géométrique, aurait été de mettre en contact les talons de sorte à reproduire aussi fidèlement que possible le positionnement obtenu sur le banc d'essai, et d'appliquer manuellement une distribution des forces de contact statique sur les nœuds des interfaces, ou du moins une résultante, issue des calculs de corrélation de la précharge statique grâce à la déformation mesurée par les jauges sur les aubes du banc d'essai. De plus, compte-tenu de la dynamique du premier mode de flexion de l'assemblage de ces trois aubes, et de la localisation des interfaces de contact non linéaire, située à l'emplacement de plus grande déformation, cela rend d'autant plus sensible la simulation numérique de la réponse de cette structure compte-tenu de l'amplitude de déplacement à cet endroit.



# Table des figures

|       |   |    |
|-------|---|----|
| I.1   | Vues en coupe de deux générations de turboréacteur © CFM International. . . .   | 6  |
| I.2   | Diagramme température-entropie du cycle de Brayton théorique (—) et réel (—). . . .   | 7  |
| I.3   | Schéma d'un turboréacteur double flux et double corps © Wikipédia. . . . .  | 8  |
| I.4   | Illustration de l'assemblage d'aubes de turbine basse pression sur un disque © Safran Aircraft Engines. . . . .                                       | 10 |
| I.5   | Schéma de principe de la technologie de prétorsion au montage des aubes de turbine basse pression. . . . .  | 11 |
| I.6   | Configurations d'un corps matériel continu. . . . .   | 12 |
| I.7   | Schéma d'une aube avec talon définie comme secteur de référence en symétrie cyclique. . . . .   | 18 |
| I.8   | Simulation du champs de pression statique au sein des étages de compresseur d'un turboréacteur © <a href="#">NASA Glenn Research Center</a> . . . . . | 22 |
| I.9   | Courbe de Wöhler sur un diagramme d'endurance. . . . .  | 23 |
| I.10  | Diagramme de Haigh selon différents critères. . . . .   | 23 |
| I.11  | Diagramme de Campbell. . . . .  | 24 |
| I.12  | Diagramme zig-zag. . . . .  | 25 |
| I.13  | Réponses fréquentielles en tête d'aube selon le coefficient de frottement et la précharge statique appliquée [97]. . . . .                            | 26 |
| I.14  | Réponses fréquentielles normalisées par la force d'excitation appliquée [24]. . . .   | 27 |
| II.1  | Modes d'intérêt des aubes de turbine basse pression © Safran Aircraft Engines. . .  | 30 |
| II.2  | Illustration d'un assemblage d'aubes de compresseur avec nageoires [113]. . . . .   | 31 |
| II.3  | Bancs d'essai de mesure de l'amortissement pour des aubes avec nageoires. . . . .   | 32 |
| II.4  | Illustration du système de précharge du talon de l'aube sur le banc d'essai [136]. . . .  | 33 |
| II.5  | Illustration du système de précharge du talon de l'aube sur le banc d'essai [159]. . . .  | 33 |
| II.6  | Illustration du système de précharge du talon de l'aube sur le banc d'essai [71]. . . .   | 34 |
| II.7  | Banc d'essai de l'article de conférence [161]. . . . .  | 35 |
| II.8  | Banc d'essai de l'article de conférence [5]. . . . .  | 36 |
| II.9  | Banc d'essai avec aubes horizontales excitées par un pot vibrant. . . . .   | 37 |
| II.10 | Banc d'essai [120]. . . . .   | 38 |
| II.11 | Schéma du contact de Hertz entre deux cylindres. . . . .  | 41 |
| II.12 | CAO de l'aube monobloc. . . . .   | 43 |
| II.13 | Vue globale des pièces du banc d'essai. . . . .   | 43 |
| II.14 | Vue des aubes entre les mors et les intercales. . . . .   | 44 |
| II.15 | Indication des parties fonctionnelles du banc d'essai. . . . .  | 44 |
| II.16 | Géométrie de l'aube et du talon séparés. . . . .  | 45 |
| II.17 | Évolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude d'excitation d'une poutre selon le type d'encastrement [1]. . . . .                           | 46 |
| II.18 | Outillage pour le soudage laser © <a href="#">Micro Érosion</a> . . . . .   | 47 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| II.19  | Schéma d'une soudure laser monopasse débouchante © Irepa Laser. . . . .   | 47  |
| II.20  | Utilisation de films de mesure de pression sur le banc d'essai. . . . .   | 48  |
| II.21  | Positionnement d'une aube en configuration libre-libre avec indication des points d'impact (●). . . . .   | 48  |
| II.22  | Positionnement de l'aube 3 seule en configuration encastrée. . . . .  | 51  |
| II.23  | Analyse modale expérimentale de l'assemblage des trois aubes encastrées. . . . .  | 52  |
| II.24  | Aube insérée entre les mors de la machine de torsion. . . . .   | 53  |
| II.25  | Mesures lors des essais de torsion, aubes 1 (□), 2 (○) et 3 (△). . . . .  | 54  |
| II.26  | Calibration de la précharge statique estimée. . . . .   | 55  |
| II.27  | Différence de conditions limites entre les deux configurations évoquées. . . . .  | 55  |
| II.28  | Estimation de la force normale appliquée sur les talons par la précharge statique en fonction de la déformation, essais de torsion (—), analyses statiques sur ANSYS (—), banc d'essai (—). . . . . | 56  |
| II.29  | Mise en place pour la mesure du positionnement du talon sur une aube. . . . .   | 57  |
| II.30  | Étapes de mesure du positionnement du talon. . . . .  | 58  |
| II.31  | Montage du banc d'essai avec un zoom sur le positionnement des talons. . . . .  | 58  |
| II.32  | Chaîne de mesure pour les essais dynamiques. . . . .  | 60  |
| II.33  | Instrumentation du banc d'essai pour les essais dynamiques. . . . .   | 60  |
| II.34  | Évolution de la force d'excitation avec l'asservissement pour différentes consignes. . . . .  | 61  |
| II.35  | Influence du nombre de cycles d'intégration [49]. . . . .   | 61  |
| II.36  | Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 2. . . . .   | 62  |
| II.37  | Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 64  |
| II.38  | Évolution de la fréquence de résonance. . . . .   | 65  |
| II.39  | Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 65  |
| II.40  | Réponses fréquentielles selon différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 66  |
| II.41  | Évolution de l'angle mesuré sur le talon de l'aube centrale en fonction de la précharge statique, induite par l'espacement des pieds des aubes. . . . .   | 67  |
| III.1  | Contact entre deux solides. . . . .   | 71  |
| III.2  | Représentations des différentes lois de contact. . . . .  | 72  |
| III.3  | Loi de frottement de Coulomb. . . . .   | 73  |
| III.4  | Loi de frottement de Coulomb régularisée. . . . .   | 74  |
| III.5  | Représentations des différentes lois de frottement de Coulomb. . . . .  | 74  |
| III.6  | Principe de la méthode des éléments de jeu virtuels [155]. . . . .  | 85  |
| III.7  | Procédure d'appairage pour des maillages non coïncidents [186]. . . . .   | 87  |
| III.8  | Élément triangulaire linéaire isoparamétrique. . . . .  | 88  |
| III.9  | Illustration de la méthode proposée dans [15]. . . . .  | 88  |
| III.10 | Distribution de la pression de contact normale sur le talon [186]. . . . .  | 96  |
| III.11 | Distribution de la pression de contact normale sur le talon selon différents niveaux d'interpénétration géométrique initiale [3]. . . . .   | 97  |
| III.12 | Distribution de la pression de contact normale sur le talon en fonction de l'angle d'inclinaison [142]. . . . .   | 97  |
| III.13 | Distribution de la pression de contact normale sur le talon [12, 13]. . . . .   | 98  |
| III.14 | Un élément de contact nœud-à-nœud. . . . .  | 99  |
| III.15 | Loi de contact linéaire suivie par la méthode de pénalité. . . . .  | 101 |
| III.16 | Loi de contact unilatéral suivie asymptotiquement par la méthode DLFT. . . . .  | 103 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| III.17 | Algorithme de la méthode DLFT. . . . .   | 104 |
| III.18 | Illustration de la construction du <i>dog leg step</i> . . . . .   | 107 |
| III.19 | Différents types de prédicteurs, solution (●). . . . .   | 110 |
| III.20 | Différents types de paramétrisation, itération (○), solution (●). . . . .  | 111 |
| IV.1   | Modèle éléments finis de l'assemblage de trois aubes, nœud d'excitation (■), nœud d'observation (■), et interfaces de contact (--). . . . .  | 114 |
| IV.2   | Vue axiale du modèle éléments finis avec une interpénétration géométrique initiale des talons des aubes, indication du nœud d'excitation (●) et des interfaces de contact (--). . . . .  | 117 |
| IV.3   | Amplitude de déplacement total des aubes résultant de l'interpénétration géométrique initiale des talons. . . . .  | 118 |
| IV.4   | Loi de contact linéaire suivie par la méthode de pénalité, ajustée pour prendre en compte la distance normale entre les nœuds de contact (--). . . . .   | 119 |
| IV.5   | Loi de contact unilatéral suivie asymptotiquement par la méthode DLFT, ajustée afin de prendre en compte la distance normale entre les nœuds de contact (--). . . . .  | 120 |
| IV.6   | Vue axiale des nœuds de contact de l'une des deux interfaces de contact entre les talons des aubes, avant (○, ○) et après (○, ○) le calcul statique. . . . .   | 120 |
| IV.7   | Distribution des forces de contact normales sur les nœuds de l'aube centrale en utilisant la méthode DLFT pour le calcul statique. . . . .   | 121 |
| IV.8   | Distribution des forces de contact normales sur les nœuds de l'aube centrale en utilisant la méthode de pénalité ( $k_N = 1 \times 10^5 \text{ N m}^{-1}$ ) pour le calcul statique. . . . .   | 121 |
| IV.9   | Illustration de loi de contact de type pénalité utilisée par ANSYS [8]. . . . .  | 122 |
| IV.10  | Distribution de la pression de contact normale [Pa] calculée par ANSYS sur l'une des interfaces de contact. . . . .  | 122 |
| IV.11  | Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) autour du premier mode de flexion en utilisant la méthode de pénalité pour différents niveaux de force d'excitation avec un taux d'amortissement $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ . . . . .           | 123 |
| IV.12  | Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) autour du troisième mode de flexion pour différents niveaux de force d'excitation avec un taux d'amortissement $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,3$ . . . . . | 124 |
| IV.13  | Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) autour du troisième mode de flexion pour différents niveaux de force d'excitation avec un taux d'amortissement $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,2$ . . . . . | 124 |
| IV.14  | Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) autour du premier mode de flexion en utilisant la méthode de pénalité avec un taux d'amortissement $\zeta = 5 \times 10^{-4}$ , avec un maillage artificiellement non coïncident . . . . .      | 125 |
| IV.15  | Élément quadrilatère isoparamétrique à 4 nœuds. . . . .  | 127 |
| IV.16  | Modèle éléments finis de l'assemblage de trois aubes (seconde version), nœud d'excitation (■), nœud d'observation (■), et interfaces de contact (--). . . . .  | 128 |
| IV.17  | Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation pour une précharge statique donnée par un espacement des pieds de 19,9 mm. . . . .   | 129 |
| IV.18  | Évolution des forces non linéaires normale et tangentielles sur une période temporelle pour l'ensemble des nœuds de contact, à la fréquence de 150 Hz, pour une force d'excitation de 4,0 N et un coefficient de frottement $\mu = 0,3$ . . . . .    | 129 |
| IV.19  | Réponses forcées linéaires (--) et non linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation pour une précharge statique donnée par un espacement des pieds de 19,4 mm. . . . .   | 130 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| IV.20 | Influence du coefficient de frottement égal à 0,1 (—), 0,2 (—) ou 0,3 (—) pour différents niveaux de précharge statique et une force d'excitation de 4,0 N. . . . .   | 130 |
| IV.21 | Réponses fréquentielles numériques (linéaires, $\zeta = 3 \times 10^{-3}$ ) (--) et expérimentales (—) pour une précharge statique liée à un espacement des pieds de 19,90 mm, selon une force d'excitation de 1,0 N (■), 2,0 N (■), 4,0 N (■). . . . . | 131 |
| IV.22 | Réponses fréquentielles numériques (linéaires, $\zeta = 3 \times 10^{-3}$ ) (--) et expérimentales (—) pour une précharge statique liée à un espacement des pieds de 19,40 mm, selon une force d'excitation de 1,0 N (■), 2,0 N (■), 4,0 N (■). . . . . | 132 |
| IV.23 | Vue axiale des nœuds de contact de l'une des deux interfaces de contact entre les talons des aubes, avant (○, ○) et après (○, ○) le calcul statique d'ANSYS. . . . .  | 133 |
| A.1   | Vue globale du banc d'essai. . . . .  | 163 |
| A.2   | Vue en détails des pièces du banc d'essai. . . . .  | 164 |
| A.3   | Vue des pièces du banc d'essai. . . . .   | 165 |
| A.4   | Vue des pièces du banc d'essai. . . . .   | 166 |
| A.5   | Photographie du banc d'essai. . . . .   | 166 |
| A.6   | Vue globale du banc d'essai. . . . .  | 167 |
| A.7   | Vue des pièces du banc d'essai. . . . .   | 167 |
| A.8   | Vue en détails du talon de l'aube. . . . .  | 168 |
| A.9   | Photographie du banc d'essai [5]. . . . .   | 169 |
| A.10  | Vue en détails des pièces du banc d'essai. . . . .  | 170 |
| A.11  | Schéma de principe du banc d'essai. . . . .   | 170 |
| A.12  | Photographie du banc d'essai. . . . .   | 171 |
| A.13  | Plan des aubes du banc d'essai. . . . .   | 172 |
| A.14  | Vue du banc d'essai. . . . .  | 173 |
| A.15  | Plan des aubes et de leur instrumentation. . . . .  | 174 |
| D.1   | Plan du corps de l'aube d'essai. . . . .  | 179 |
| D.2   | Plan du talon de l'aube d'essai. . . . .  | 180 |
| E.1   | Vue globale de la mise en place pour le soudage des aubes. . . . .  | 181 |
| E.2   | Vue en coupe du cordon de soudure débouchant. . . . .   | 182 |
| E.3   | Vue macroscopique de l'envers du cordon de soudure débouchant. . . . .  | 182 |
| E.4   | Vue macroscopique de l'endroit du cordon de soudure débouchant. . . . .   | 183 |
| E.5   | Vue du talon soudé sur une des aubes. . . . .   | 183 |
| F.1   | Fiche d'instruction des films de type <i>Medium Pressure</i> (MS). . . . .  | 185 |
| G.1   | Déformée du mode 1F. . . . .  | 187 |
| G.2   | Déformée du mode 3F. . . . .  | 188 |
| G.3   | Déformée du mode 1E. . . . .  | 188 |
| H.1   | Chaîne de mesure pour l'analyse modale expérimentale d'une aube en configuration libre. . . . .   | 189 |
| H.2   | Chaîne de mesure pour l'analyse modale expérimentale d'une aube en configuration encastree. . . . .   | 190 |
| I.1   | Réponses fréquentielles de l'aube 1 selon le point de frappe du marteau de choc. . . . .  | 191 |
| I.2   | Réponses fréquentielles de l'aube 2 selon le point de frappe du marteau de choc. . . . .  | 192 |
| I.3   | Réponses fréquentielles de l'aube 3 selon le point de frappe du marteau de choc. . . . .  | 192 |
| I.4   | Réponses fréquentielles de l'aube 3 selon le point de frappe du marteau de choc. . . . .  | 193 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| J.1  | Déplacement selon différents niveaux de force d'excitation mesuré sur l'aube 3. . . . .  | 195 |
| J.2  | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 1. . . . .   | 196 |
| J.3  | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 1. . . . .   | 196 |
| J.4  | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 197 |
| J.5  | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 197 |
| J.6  | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 198 |
| J.7  | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 198 |
| J.8  | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation, aubes 3 (◐), 2 (◑) et 1 (◒). . . . .   | 198 |
| J.9  | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 199 |
| J.10 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 199 |
| J.11 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 199 |
| J.12 | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 200 |
| J.13 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 200 |
| J.14 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 200 |
| J.15 | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 201 |
| J.16 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 201 |
| J.17 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 201 |
| J.18 | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 202 |
| J.19 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 202 |
| J.20 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 202 |
| J.21 | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 203 |
| J.22 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 203 |
| J.23 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 203 |
| J.24 | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 204 |
| J.25 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 204 |
| J.26 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 204 |
| J.27 | Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 205 |
| J.28 | Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3. . . . .   | 205 |
| J.29 | Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation. . . . .  | 205 |
| K.1  | Maillage des surfaces de contact après avoir ajouté un déplacement aléatoire uniforme aux coordonnées nodales. . . . .   | 207 |
| L.1  | Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation. . . . .   | 209 |
| L.2  | Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation pour une précharge statique donnée par un espacement des pieds de 20,1 mm. . . . . | 209 |



---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| L.3 | Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation. . . . . | 210 |
| L.4 | Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation. . . . . | 210 |
| L.5 | Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation. . . . . | 211 |

# Liste des tableaux

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| II.1  | Synthèse des critères selon l'état de l'art des bancs d'essai. . . . .   | 40  |
| II.2  | Pression de contact maximale en fonction de l'effort appliqué (contact cylindre-cylindre). . . . .   | 42  |
| II.3  | Pression de contact maximale en fonction de l'effort appliqué (contact cylindre-plan). . . . .   | 42  |
| II.4  | Fonctions et solutions techniques du banc d'essai. . . . .   | 45  |
| II.5  | Comparaison des fréquences propres numériques et expérimentales des aubes en configuration libre. . . . .  | 49  |
| II.6  | Taux d'amortissement mesuré pour chaque mode propre et chaque aube en configuration libre. . . . .   | 50  |
| II.7  | Comparaison des fréquences propres numériques et expérimentales des aubes en configuration encastrée. . . . .  | 51  |
| II.8  | Taux d'amortissement mesuré pour chaque mode propre de l'aube 3 en configuration encastrée. . . . .  | 52  |
| II.9  | Comparaison entre la déformation mesurée expérimentalement et calculée numériquement selon le couple de torsion appliqué. . . . .  | 53  |
| II.10 | Exemple de matrice d'essais. . . . .   | 59  |
| IV.1  | Amplitudes maximales de déplacement des réponses forcées non linéaires, et écarts relatifs entre les cas de maillage quasi-coïncident et aléatoirement non coïncident. . . . . | 126 |



# Bibliographie

- [1] Robert D. ADAMS, Duncan G. A. COOPER et Stuart PEARSON. « Vibration Damping of Adhesively Bonded Joints ». *Handbook of Adhesion Technology*. Sous la dir. de Lucas F. M. da SILVA, Andreas ÖCHSNER et Robert D. ADAMS. 2018, p. 853-876. ISBN : 978-3-319-55411-2. DOI : [10.1007/978-3-319-55411-2\\_30](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55411-2_30) (cf. p. 46).
- [2] Mohammad AFZAL, Ines LOPEZ ARTEAGA et Leif KARI. « An analytical calculation of the Jacobian matrix for 3D friction contact model applied to turbine blade shroud contact ». *Computers & Structures* 177 (2016), p. 204-217. ISSN : 0045-7949. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.08.014> (cf. p. 96).
- [3] Mohammad AFZAL, Ines LOPEZ ARTEAGA et Leif KARI. « Numerical analysis of multiple friction contacts in bladed disks ». *International Journal of Mechanical Sciences* 137 (2018), p. 224-237. ISSN : 0020-7403. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.01.016> (cf. p. 97).
- [4] Rizwan AHMED, Christian Maria FIRRONE et Stefano ZUCCA. « Design and Calibration of a Tri-Directional Contact Force Measurement System ». *Applied Sciences* 11.2 (jan. 2021). ISSN : 2076-3417. DOI : <https://doi.org/10.3390/app11020877> (cf. p. 36).
- [5] Rizwan AHMED, Christian Maria FIRRONE et Stefano ZUCCA. « Experimental Investigation of Three-Dimensional Shroud Contact Forces in Forced-Vibration Testing of a Shrouded Blade ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2022 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. T. 8B : Structures and Dynamics : Structural Mechanics and Vibration. V08BT27A037. Rotterdam, Netherlands, juin 2022. DOI : [10.1115/GT2022-84205](https://doi.org/10.1115/GT2022-84205) (cf. p. 36, 40, 169).
- [6] Eugene L. ALLGOWER et Kurt GEORG. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Classics in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 2003 (cf. p. 110).
- [7] Guillaume AMONTONS. *De la résistance causée dans les machines*. 1699 (cf. p. 73).
- [8] ANSYS INC. *Ansys® Academic Research Mechanical, Version 19.2, Système d'aide, Mechanical Application 19.2, Mechanical User's Guide, Setting Connections, Contact Formulation Theory*. Sept. 2018 (cf. p. 122).
- [9] Alexander N. ARKHIPOV, Andrey V. PIPOULO et Igor V. PUTCHKOV. « Design Tuning of High Aspect Ratio Shrouded Turbine Blades ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2008 : Power for Land, Sea, and Air*. T. 5 : Structures and Dynamics, Parts A and B. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. Berlin, Germany, juin 2008, p. 393-401. DOI : [10.1115/GT2008-50670](https://doi.org/10.1115/GT2008-50670) (cf. p. 10).
- [10] Brian ARMSTRONG-HÉLOUVRY, Pierre DUPONT et Carlos CANUDAS DE WIT. « A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction ». *Automatica* 30.7 (1994), p. 1083-1138. ISSN : 0005-1098. DOI : [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(94\)90209-7](https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)90209-7) (cf. p. 73).
- [11] Ivo BABUŠKA. « The finite element method with Lagrangian multipliers ». *Numerische Mathematik* 20 (1973), p. 179-192. ISSN : 0945-3245. DOI : [10.1007/BF01436561](https://doi.org/10.1007/BF01436561) (cf. p. 83).

- [12] N. BACHSCHMID, S. BISTOLFI, S. CHATTERTON, M. FERRANTE et E. PESATORI. « Some Remarks on the Dynamic Behaviour of Integrally Shrouded Blade Rows ». *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. T. 1 : 23rd Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Parts A and B. Washington, DC, USA, août 2011, p. 1015-1021. DOI : [10.1115/DETC2011-48320](https://doi.org/10.1115/DETC2011-48320) (cf. p. 98).
- [13] Nicolò BACHSCHMID, Simone BISTOLFI, Michele FERRANTE, Paolo PENNACCHI, Emanuel PESATORI et Massimiliano SANVITO. « An investigation on the dynamic behavior of blades coupled by shroud contacts ». *SIRM 2011 – 9th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*. Darmstadt, fév. 2011 (cf. p. 97 sq.).
- [14] Alex Alves BANDEIRA, Peter WRIGGERS et Paulo de MATTOS PIMENTA. « Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D deformation ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59.2 (nov. 2004), p. 173-195. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.867> (cf. p. 83).
- [15] Giuseppe BATTIATO. « Self-adaptive macroslip array for friction force prediction in contact interfaces with non-conforming meshes ». *Nonlinear Dynamics* 106 (sept. 2021), p. 745-764. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-021-06888-0](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06888-0) (cf. p. 88).
- [16] Anthony BEDFORD. *Hamilton's Principle in Continuum Mechanics*. 1985. ISBN : 978-3-030-90306-0. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90306-0> (cf. p. 14).
- [17] F. B. BELGACEM, P. HILD et P. LABORDE. « Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 09.02 (1999), p. 287-303. DOI : [10.1142/S0218202599000154](https://doi.org/10.1142/S0218202599000154) (cf. p. 83).
- [18] F. B. BELGACEM, P. HILD et P. LABORDE. « The mortar finite element method for contact problems ». *Mathematical and Computer Modelling* 28.4 (1998). Recent Advances in Contact Mechanics, p. 263-271. ISSN : 0895-7177. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00121-6](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00121-6) (cf. p. 83).
- [19] W. A. BENFIELD et R. F. HRUDA. « Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution ». *AIAA Journal* 9.7 (1971), p. 1255-1261. DOI : [10.2514/3.49936](https://doi.org/10.2514/3.49936) (cf. p. 117).
- [20] David J. BENSON et John O. HALLQUIST. « A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 78.2 (jan. 1990), p. 141-163. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90098-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90098-7) (cf. p. 83).
- [21] Christine BERNARDI, Yvon MADAY et Anthony T. PATERA. « A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method ». *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*. Sous la dir. de H. BREZIS et J. L. LIONS. T. XI. 1994, p. 13-51 (cf. p. 83).
- [22] T. BERRUTI, S. FILIPPI, M. M. GOLA et S. SALVANO. « Friction Damping of Interlocked Vane Segments : Experimental Results ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124.4 (sept. 2002), p. 1018-1024. ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.1494097](https://doi.org/10.1115/1.1494097) (cf. p. 38, 40).
- [23] T. BERRUTI, L. GOGLIO, S. FILIPPI, M. M. GOLA et S. SALVANO. « A Test Rig for Frictionally Damped Bladed Segments ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2000 : Power for Land, Sea, and Air*. T. 4 : Manufacturing Materials and Metallurgy ; Ceramics ; Structures and Dynamics ; Controls, Diagnostics and Instrumentation ; Education. V004T03A066. Munich, Allemagne, mai 2000. DOI : [10.1115/2000-GT-0538](https://doi.org/10.1115/2000-GT-0538) (cf. p. 38, 40).

- [24] Marc BERTHILLIER, Christian DUPONT, Richard MONDAL et Jean-Jacques BARRAU. « Blades Forced Response Analysis With Friction Dampers ». *Journal of Vibration and Acoustics* 120.2 (avr. 1998), p. 468-474. DOI : <https://dx.doi.org/10.1115/1.2893853> (cf. p. 27).
- [25] Hugo C. BISCAIA. « Closed-form solutions for modelling the response of adhesively bonded joints under thermal loading through exponential softening laws ». *Mechanics of Materials* 148 (2020), p. 103527. ISSN : 0167-6636. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103527> (cf. p. 74).
- [26] J. C. BUTCHER et G. WANNER. « Runge-Kutta methods : some historical notes ». *Applied Numerical Mathematics* 22.1 (1996). Special Issue Celebrating the Centenary of Runge-Kutta Methods, p. 113-151. ISSN : 0168-9274. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(96\)00048-7](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(96)00048-7) (cf. p. 92).
- [27] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN. « An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems ». *ASME Journal of Applied Mechanics* 56.1 (mar. 1989), p. 149-154. DOI : <https://doi.org/10.1115/1.3176036> (cf. p. 98).
- [28] Alberto CARDONA, Thierry COUNE, Albert LERUSSE et Michel GERADIN. « A multiharmonic method for non-linear vibration analysis ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.9 (mai 1994), p. 1593-1608. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620370911> (cf. p. 94).
- [29] Damien CHARLEUX. « Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2006 (cf. p. 47, 102 sq.).
- [30] J. J. CHEN et C. H. MENQ. « Periodic Response of Blades Having Three-Dimensional Nonlinear Shroud Constraints ». *Journal of Engineering Gas Turbines and Power* 123.4 (2001), p. 901-909. DOI : <https://doi.org/10.1115/1.1385828> (cf. p. 95).
- [31] Y. K. CHEUNG, S. H. CHEN et S. L. LAU. « Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems ». *Journal of Sound and Vibration* 140.2 (1990), p. 273-286. ISSN : 0022-460X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90528-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90528-8) (cf. p. 109).
- [32] Olivier CLEYNEN. *Thermodynamique de l'ingénieur*. 3<sup>e</sup> éd. 2021. ISBN : 9781794848207 (cf. p. 7).
- [33] Yannick COLLIN, Thomas LARDELLIER, David MATHIEU, Denis TRAHOT, Christophe REMY et Xavier GODFRIND. « Aube mobile de turbomachine et turbomachine associée ». en. Brev. amér. US 9,303,516 B2 (Paris). Avr. 2016 (cf. p. 11).
- [34] Charles Augustin COULOMB. *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*. Sous la dir. de PARIS. Nouv. 1821 (cf. p. 73).
- [35] Alain COURET, Marjolaine GRANGE, Alain LASALMONIE, Yves BRÉCHET et Philippe BELAYGUE. « Le Contrat de Programme et de Recherche TiAl : un exemple de collaboration coordonnée entre recherche académique et Industrie ». *Materials & Techniques* 92.1-2 (2004), p. 3-12. DOI : <https://doi.org/10.1051/mattech:2004001> (cf. p. 11).
- [36] Louis COUTURAT. *La logique de Leibniz : d'après des documents inédits*. Collection historique des grands philosophes. Paris, 1901 (cf. p. 14).
- [37] Roy CRAIG et Mervyn BAMPTON. « Coupling of Substructures for Dynamic Analyses ». *AIAA Journal* 6.7 (1968), p. 1313-1319. DOI : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741) (cf. p. 116).
- [38] Roy R. CRAIG et Ching-Jone CHANG. *Substructure coupling for dynamic analysis and testing*. Rapp. tech. NASA-CR-2781. Université du Texas à Austin, fév. 1977 (cf. p. 117).
- [39] M. A. CRISFIELD. « Re-visiting the contact patch test ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48.3 (avr. 2000), p. 435-449. DOI : [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000530\)48:3<435::AID-NME891>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000530)48:3<435::AID-NME891>3.0.CO;2-V) (cf. p. 83).

- [40] Can CUI, Hui MA, Yezhuang JIN, Fangtao XIE, Tong YANG et Shiyu LIU. « Numerical and experimental investigation on the vibro-impact responses analysis of shrouded blade ». *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* 38.3-4 (2019), p. 1188-1201. DOI : [10.1177/1461348418811456](https://doi.org/10.1177/1461348418811456) (cf. p. 37, 40).
- [41] Phil R. DAHL. *A Solid Friction Model*. Rapp. tech. SAMSO-TR-77-131. El Segundo, CA : The Aerospace Corporation, mai 1968. DOI : [10.21236/ada041920](https://doi.org/10.21236/ada041920) (cf. p. 74).
- [42] Flavio D'AMBROSIO, Eric CHATELET, Julien RAVOUX et Georges JACQUET-RICHARDET. « Forced response of shrouded bladed disc assemblies : a jointed experimental numerical approach ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2004 : Power for Land, Sea, and Air*. T. 6 : Turbo Expo 2004. Vienne, Autriche, juin 2004, p. 337-347. DOI : [10.1115/gt2004-53705](https://doi.org/10.1115/gt2004-53705) (cf. p. 38, 40).
- [43] DASSAULT SYSTÈMES. *Abaqus Analysis User's Guide, Interactions, Contact Property Models, Mechanical contact properties, Contact pressure-overclosure relationships*. Ver. 6.14. 2014 (cf. p. 72).
- [44] David DEMAÏLLY. « Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application à la dynamique rotor ». Theses. Ecole Centrale de Lyon, jan. 2003 (cf. p. 94).
- [45] John E. (Jr.) DENNIS et Robert B. SCHNABEL. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall Series in Computational Mathematics. Englewood Cliffs, NJ, 1983. ISBN : 0136272169 (cf. p. 49).
- [46] Nicolas DI PALMA. « Dynamique non linéaire des aubages : comportement multi-harmonique avec couplage torsion-flexion ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2022 (cf. p. 17, 109).
- [47] Georges DUVAUT et Jacques-Louis LIONS. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Sous la dir. de Springer-Verlag Berlin Heidelberg New YORK. T. 219. 1976. ISBN : 978-3-642-66167-9. DOI : [10.1007/978-3-642-66165-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-66165-5) (cf. p. 76).
- [48] S. W. E. EARLES et E. J. WILLIAMS. « A linearized analysis for frictionally damped systems ». *Journal of Sound and Vibration* 24.4 (1972), p. 445-458. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(72\)90716-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(72)90716-X) (cf. p. 31 sq., 40).
- [49] David J. EWINS. *Modal testing : theory, practice, and application*. Seconde. Mechanical engineering research studies. Engineering dynamics series. 2000. ISBN : 0863802184 (cf. p. 61).
- [50] FACOM. *Clés dynamométriques : Guide de serrage contrôlé*. [https://www.facom.fr/partage/dynamometrie/guide\\_serrage\\_controle.pdf](https://www.facom.fr/partage/dynamometrie/guide_serrage_controle.pdf) (cf. p. 51).
- [51] A. FRANCAVILLA et O. C. ZIENKIEWICZ. « A note on numerical computation of elastic contact problems ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9.4 (1975), p. 913-924. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620090410> (cf. p. 83).
- [52] Alwin FÖRSTER et Malte KRACK. « An efficient method for approximating resonance curves of weakly-damped nonlinear mechanical systems ». *Computers & Structures* 169 (2016), p. 81-90. ISSN : 0045-7949. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.03.003> (cf. p. 95).
- [53] Chiara GASTALDI, Stefano ZUCCA et Bogdan I. EPUREANU. « Jacobian projection reduced-order models for dynamic systems with contact nonlinearities ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 100 (2018), p. 550-569. ISSN : 0888-3270. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.07.049> (cf. p. 95 sq.).
- [54] L. GAUL et R. NITSCHKE. « The Role of Friction in Mechanical Joints ». *ASME Applied Mechanics Reviews* 54.2 (mar. 2001), p. 93-106. DOI : <https://doi.org/10.1115/1.3097294> (cf. p. 73).
- [55] Markus GITTERLE, Alexander POPP, Michael W. GEE et Wolfgang A. WALL. « Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth Newton method with



- consistent linearization ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84.5 (mai 2010), p. 543-571. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2907> (cf. p. 83).
- [56] Thomas GMÜR. *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. Mécanique (Lausanne). 1997. ISBN : 9782880743338 (cf. p. 11).
- [57] José A. GONZÁLEZ, K. C. PARK et Carlos A. FELIPPA. « Partitioned formulation of frictional contact problems using localized Lagrange multipliers ». *Communications in Numerical Methods in Engineering* 22.4 (oct. 2006), p. 319-333. DOI : <https://doi.org/10.1002/cnm.821> (cf. p. 84).
- [58] Michel GÉRADIN et Daniel J. RIXEN. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Paris, 1993. ISBN : 2-225-83952-2 (cf. p. 14, 92 sq.).
- [59] Götz von GROLL et David EWINS. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *Journal of Sound and Vibration* 241.2 (2001), p. 223-233. ISSN : 0022-460X. DOI : <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3298> (cf. p. 110).
- [60] Johann GROSS et Malte KRACK. « Multiwave Vibrations in Mistuned Cascades With Tip-Shroud Friction ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.5 (mar. 2021). ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4047889](https://doi.org/10.1115/1.4047889) (cf. p. 96).
- [61] Marion GRUIN. « Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2012 (cf. p. 109).
- [62] W. GU, Z. XU et Y. LIU. « A method to predict the non-linear vibratory response of bladed disc system with shrouded dampers ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science* 226.6 (2012), p. 1620-1632. DOI : [10.1177/0954406211424671](https://doi.org/10.1177/0954406211424671) (cf. p. 96).
- [63] J. GUILLEN et C. PIERRE. « An Efficient, Hybrid, Frequency-Time Domain Method for The Dynamics of Large-Scale Dry-Friction Damped Structural Systems. » *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*. Sous la dir. de F. PFEIFFER et Ch. GLOCKER. Dordrecht, 1999, p. 169-178. ISBN : 978-94-011-4275-5. DOI : [10.1007/978-94-011-4275-5\\_17](https://doi.org/10.1007/978-94-011-4275-5_17) (cf. p. 95).
- [64] Robert J. GUYAN. « Reduction of stiffness and mass matrices ». *AIAA journal* 3.2 (1965), p. 380-380. DOI : [10.2514/3.2874](https://doi.org/10.2514/3.2874) (cf. p. 177).
- [65] J. O. HALLQUIST, G. L. GOUDREAU et D. J. BENSON. « Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51.1 (sept. 1985), p. 107-137. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90030-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90030-1) (cf. p. 83).
- [66] Cyril M. HARRIS et Charles E. CREDE. *Shock and Vibration Handbook*. 2nde. 1976. ISBN : 0070267995 (cf. p. 33).
- [67] Torsten HEINZE, Lars Panning-von SCHEIDT, Jörg WALLASCHEK et Andreas HARTUNG. « Rotational Speed-Dependent Contact Formulation for Nonlinear Blade Dynamics Prediction ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.4 (déc. 2018). 042503. ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4040843](https://doi.org/10.1115/1.4040843) (cf. p. 95).
- [68] Anna HERZOG, Malte KRACK, Lars Panning-von SCHEIDT et Jörg WALLASCHEK. « Comparison of Two Widely-Used Frequency-Time Domain Contact Models for the Vibration Simulation of Shrouded Turbine Blades ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition*. T. 7B : Structures and Dynamics. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. V07BT33A018. Juin 2014. DOI : [10.1115/GT2014-26226](https://doi.org/10.1115/GT2014-26226) (cf. p. 95 sq., 98).
- [69] Christian HESCH et Peter BETSCH. « A mortar method for energy-momentum conserving schemes in frictionless dynamic contact problems ». *International Journal for Numerical*



- Methods in Engineering* 77.10 (sept. 2009), p. 1468-1500. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2466> (cf. p. 83).
- [70] Matthias HÜLS, Lars Panning-von SCHEIDT et Jörg WALLASCHEK. « Combined Airfoil and Snubber Design Optimization of Turbine Blades With Respect to Friction Damping ». T. 140. 8. 081007. Août 2018. DOI : [10.1115/1.4040679](https://doi.org/10.1115/1.4040679) (cf. p. 10).
- [71] Jie HONG, Yajie SHI, Dayi ZHANG et Zigen ZHU. « Experimental study of damping characteristic of shrouded blade ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2007 : Power for Land, Sea, and Air*. T. 5 : Turbo Expo 2007. Montréal, Canada, mai 2007, p. 485-491. DOI : [10.1115/gt2007-27610](https://doi.org/10.1115/gt2007-27610) (cf. p. 34, 40).
- [72] Thomas J. R. HUGHES, Robert L. TAYLOR, Jerome L. SACKMAN, Alain CURNIER et Worsak KANOKNUKULCHAI. « A finite element method for a class of contact-impact problems ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 8.3 (1976), p. 249-276. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(76\)90018-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(76)90018-9) (cf. p. 83).
- [73] Jean-François IMBERT. *Analyse des structures par éléments finis*. 3e. École nationale de l'aéronautique et de l'espace Supaéro. Toulouse, 1991. ISBN : 2-85428-273-6 (cf. p. 177).
- [74] A. N. JEAN et H. D. NELSON. « Periodic response investigation of large order non-linear rotordynamic systems using collocation ». *Journal of Sound and Vibration* 143.3 (1990), p. 473-489. ISSN : 0022-460X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90737-K](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90737-K) (cf. p. 94).
- [75] Gil-Eon JEONG, Yeo-Ul SONG, Sung-Kie YOUN et K. C. PARK. « A new approach for nonmatching interface construction by the method of localized Lagrange multipliers ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 361 (2020), p. 112728. ISSN : 0045-7825. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112728> (cf. p. 84).
- [76] Colas JOANNIN. « Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires : application à la dynamique des roues aubagées ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2017 (cf. p. 73, 116).
- [77] Karl JOHANASTROM et Carlos Canudas-de WIT. « Revisiting the LuGre friction model ». *IEEE Control Systems Magazine* 28.6 (déc. 2008), p. 101-114. DOI : [10.1109/MCS.2008.929425](https://doi.org/10.1109/MCS.2008.929425) (cf. p. 74).
- [78] Kenneth Langstreth JOHNSON. *Contact Mechanics*. 1987. ISBN : 9780521347969. DOI : [10.1016/b978-0-444-51140-9.50042-1](https://doi.org/10.1016/b978-0-444-51140-9.50042-1) (cf. p. 41).
- [79] Ferhat KAPTAN, Lars Panning-von SCHEIDT et Jörg WALLASCHEK. « Numerical and Experimental Study of Shrouded Blade Dynamics Considering Variable Operating Points ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2018 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. T. 7C : Structures and Dynamics. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. V07CT35A034. Oslo, Norvège, juin 2018. DOI : [10.1115/GT2018-76692](https://doi.org/10.1115/GT2018-76692) (cf. p. 35).
- [80] Ferhat KAPTAN, Lars Panning-von SCHEIDT, Jörg WALLASCHEK et Victor SALIT. « Forced response of shrouded blades with variable operating points ». *Proceedings of the VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*. Crète, Grèce, juin 2016. DOI : [10.7712/100016.2188.4914](https://doi.org/10.7712/100016.2188.4914) (cf. p. 35, 40).
- [81] Herbert Bishop KELLER. *Lectures on Numerical Methods In Bifurcation Problems*. Tata Institute of Fundamental Research. 1987. ISBN : 0-387-20228-5 (cf. p. 111).
- [82] Noboru KIKUCHI et John Tinsley ODEN. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. Studies in Applied and Numerical Mathematics 8. Philadelphie, 1988. ISBN : 0-89871-202-5. DOI : [10.1137/1.9781611970845](https://doi.org/10.1137/1.9781611970845) (cf. p. 81).
- [83] Malte KRACK, Lars PANNING, Jörg WALLASCHEK, Christian SIEWERT et Andreas HARTUNG. « Robust Design of Friction Interfaces of Bladed Disks With Respect to Parameter Uncertainties ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2012 : Turbine Technical*

- Conference and Exposition. T. 7 : Structures and Dynamics, Parts A and B. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. Juin 2012, p. 1193-1204. DOI : [10.1115/GT2012-68578](https://doi.org/10.1115/GT2012-68578) (cf. p. 95 sq.).*
- [84] Malte KRACK, Lars PANNING-VON SCHEIDT, Jörg WALLASCHEK, Christian SIEWERT et Andreas HARTUNG. « Reduced Order Modeling Based on Complex Nonlinear Modal Analysis and Its Application to Bladed Disks With Shroud Contact ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 135.10 (oct. 2013). ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4025002](https://doi.org/10.1115/1.4025002) (cf. p. 95).
- [85] Nikolai Mitrofanovich KRYLOV et Nikolai Nikolaevich BOGOLIUBOV. *Introduction to Non-linear Mechanics*. Annals of Mathematics Studies. 1950. ISBN : 9780691079851 (cf. p. 94).
- [86] Denis LAXALDE. « Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2007 (cf. p. 72).
- [87] Denis LAXALDE, Fabrice THOUVEREZ et Jean-Pierre LOMBARD. « Vibration Control for Integrally Bladed Disks Using Friction Ring Dampers ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2007 : Power for Land, Sea, and Air. T. 5 : Turbo Expo 2007. Montreal, Canada, mai 2007, p. 255-265. DOI : [10.1115/GT2007-27087](https://doi.org/10.1115/GT2007-27087) (cf. p. 95).*
- [88] Nicholas LEIB. « Modélisation du comportement impactant d'un ensemble câble-gaine dans le domaine fréquentiel : Application aux commandes à câbles ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2008 (cf. p. 105).
- [89] Nicolas LESAFFRE. « Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator ». Thèse de doct. École centrale de Lyon, 2007 (cf. p. 74, 76).
- [90] Ruoyu LI, Jianyao YAO, Linlin WANG, Chen JIANG, Fei WU et Ning HU. « A Novel Gap Element for the Coupling of Incompatible Interface in Component Mode Synthesis Method ». *International Journal of Computational Methods* 17.07 (2020), p. 1950033. DOI : [10.1142/S0219876219500336](https://doi.org/10.1142/S0219876219500336) (cf. p. 84).
- [91] R. H. MACNEAL, R. L. HARDER et J. B. MASON. « NASTRAN cyclic symmetry capability ». *NASTRAN : Users' Experiences*. Sept. 1973 (cf. p. 20).
- [92] Richard H. MACNEAL. « A hybrid method of component mode synthesis ». *Computers & Structures* 1.4 (1971). Special Issue on Structural Dynamics, p. 581-601. ISSN : 0045-7949. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. p. 117).
- [93] Adrien MARTIN. « Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2019 (cf. p. 17).
- [94] V. V. MATVEEV, I. G. TOKAR', S. S. GORODETSKII et A. B. ROITMAN. « Damping capacity of paired shrouded turbine blades in relation to shroud contact conditions ». *Strength of Materials* 10 (1978), p. 962-966. DOI : [10.1007/BF01528892](https://doi.org/10.1007/BF01528892) (cf. p. 37).
- [95] T. W. MCDEVITT et T. A. LAURSEN. « A mortar-finite element formulation for frictional contact problems ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48.10 (2000), p. 1525-1547. DOI : [https://doi.org/10.1002/1097-0207\(20000810\)48:10<1525::AID-NME953>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20000810)48:10<1525::AID-NME953>3.0.CO;2-Y) (cf. p. 83).
- [96] C.-H. MENQ, J. BIELAK et J. H. GRIFFIN. « The influence of microslip on vibratory response, Part I : A new microslip model ». *Journal of Sound and Vibration* 107.2 (1986), p. 279-293. ISSN : 0022-460X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(86\)90238-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(86)90238-5) (cf. p. 25).
- [97] C.-H. MENQ, J. H. GRIFFIN et J. BIELAK. « The Forced Response of Shrouded Fan Stages ». *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 108.1 (jan. 1986), p. 50-55. ISSN : 0739-3717. DOI : [10.1115/1.3269303](https://doi.org/10.1115/1.3269303) (cf. p. 25 sq., 63).

- [98] C.-H. MENQ, J. H. GRIFFIN et J. BIELAK. « The influence of microslip on vibratory response, Part II : A comparison with experimental results ». *Journal of Sound and Vibration* 107.2 (1986), p. 295-307. ISSN : 0022-460X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(86\)90239-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(86)90239-7) (cf. p. 25).
- [99] Mainak MITRA, Stefano ZUCCA et Bogdan I. EPUREANU. « Adaptive Microslip Projection for Reduction of Frictional and Contact Nonlinearities in Shrouded Blisks ». *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 11.4 (mai 2016). ISSN : 1555-1415. DOI : [10.1115/1.4033003](https://doi.org/10.1115/1.4033003) (cf. p. 95 sq.).
- [100] Mainak MITRA, Stefano ZUCCA et Bogdan I. EPUREANU. « Effects of Contact Mistuning on Shrouded Blisk Dynamics ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2016 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. T. 7A : Structures and Dynamics. Seoul, South Korea, juin 2016. DOI : [10.1115/GT2016-57812](https://doi.org/10.1115/GT2016-57812) (cf. p. 96).
- [101] Y. MIYAZAKI et K. C. PARK. « A formulation of conserving impact system based on localized Lagrange multipliers ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68.1 (mar. 2006), p. 98-124. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1703> (cf. p. 84).
- [102] Tsung Yen NA. *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*. T. 145. Mathematics in science and engineering. New York, 1979. ISBN : 0125126506 (cf. p. 93).
- [103] Samuel NACIVET. « Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2002 (cf. p. 82).
- [104] Samuel NACIVET, C. PIERRE, Fabrice THOUVEREZ et Louis JEZEQUEL. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *Journal of Sound and Vibration* 265.1 (2003), p. 201-219. ISSN : 0022-460X. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01447-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01447-5) (cf. p. 99).
- [105] M. NAKHLA et J. VLACH. « A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems ». *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2 (1976), p. 85-91. DOI : [10.1109/TCS.1976.1084181](https://doi.org/10.1109/TCS.1976.1084181) (cf. p. 94).
- [106] Martial NAUDIN et Jean-Marc PUGNET. « Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines ». *Techniques de l'ingénieur Frottement, usure et lubrification* (1999). DOI : [10.51257/a-v1-bm4175](https://doi.org/10.51257/a-v1-bm4175) (cf. p. 21, 23).
- [107] A. H. NAYFEH. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley Classics Library. 2011. ISBN : 9783527618453 (cf. p. 90).
- [108] A. H. NAYFEH. *Perturbation Methods*. 2000. ISBN : 9780471399179. DOI : [10.1002/9783527617609](https://doi.org/10.1002/9783527617609) (cf. p. 90).
- [109] Ali H. NAYFEH et Balakumar BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley Series in Nonlinear Science. 1995. ISBN : 978-0-471-59348-5. DOI : [10.1002/9783527617548](https://doi.org/10.1002/9783527617548) (cf. p. 107).
- [110] Nathan M. NEWMARK. « A Method of Computation for Structural Dynamics ». *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85.3 (1959), p. 67-94. DOI : [10.1061/JMCEA3.0000098](https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098) (cf. p. 92).
- [111] Eren ÖNEY et Ender CİĞEROĞLU. « Design of an Experimental Setup for Periodic Forced Response Analysis of Shrouded Blades with Frictional Contacts ». Ankara, Turquie, nov. 2019 (cf. p. 34, 37, 40).
- [112] Jorge NOCEDAL et Stephen J. WRIGHT. *Numerical Optimization*. Sous la dir. de Thomas V. MIKOSCH, Sidney I. RESNICK et Stephen M. ROBINSON. 2<sup>e</sup> éd. Déc. 2006. ISBN : 978-0-387-40065-5 (cf. p. 105).
- [113] Christian ODOUL, Marc Gilles PATY et Jean-Pierre Roger SEREY. « Aube mobile de turbomachine à moment de pied compensé ». FR. Brev. europ. EP0385833A1 (Paris). Sept. 1990 (cf. p. 31).

- [114] Henrik OLSSON. « Control Systems with Friction ». Thèse de doct. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH), 1996 (cf. p. 73).
- [115] Hervé OUDIN. « Méthode des éléments finis ». Engineering school. Lecture. Nantes, France, sept. 2008 (cf. p. 87).
- [116] P. PAPADOPOULOS et R. L. TAYLOR. « A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems ». *Computers & Structures* 46.6 (mar. 1993), p. 1107-1118. ISSN : 0045-7949. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90096-V](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90096-V) (cf. p. 83).
- [117] Panayiotis PAPADOPOULOS et Robert L. TAYLOR. « A mixed formulation for the finite element solution of contact problems ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94.3 (fév. 1992), p. 373-389. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90061-N](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90061-N) (cf. p. 83).
- [118] K. PARK, C. FELIPPA et U. GUMASTE. « A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications ». *Computational Mechanics* 24.6 (jan. 2000), 476—490. ISSN : 1432-0924. DOI : [10.1007/s004660050007](https://doi.org/10.1007/s004660050007) (cf. p. 84).
- [119] K. C. PARK, C. A. FELIPPA et G. REBEL. « A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53.9 (jan. 2002), p. 2117-2142. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.374> (cf. p. 84).
- [120] Luděk PEŠEK, Ladislav PŮST, Michal HAJŽMAN, Vladimír ZEMAN, Miroslav BYRTUS et Jan BRŮHA. « Experimental and numerical investigation of friction element dissipative effects in blade shrouding ». *Nonlinear Dynamics* 79 (2015), p. 1711-1726. DOI : [10.1007/s11071-014-1769-3](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1769-3) (cf. p. 38, 40).
- [121] E. P. PETROV. « A Method for Use of Cyclic Symmetry Properties in Analysis of Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Bladed Disks ». *Journal of Turbomachinery* 126.1 (jan. 2004), p. 175-183. ISSN : 0889-504X. DOI : [10.1115/1.1644558](https://doi.org/10.1115/1.1644558) (cf. p. 95).
- [122] Jonathan PHILIPPE. « Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2016 (cf. p. 116).
- [123] G. PIETRZAK et A. CURNIER. « Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3 (1999), p. 351-381. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00388-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00388-0) (cf. p. 73, 81).
- [124] Francesco PIRACCINI, Roberto BIONDI et Lorenzo COSI. « Aeromechanic Validation of a New Steam Turbine LP Section : Test Major Outcomes ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea, and Air*. T. 6 : Structures and Dynamics, Parts A and B. Glasgow, Royaume-Uni, juin 2010, p. 819-826. DOI : [10.1115/GT2010-22353](https://doi.org/10.1115/GT2010-22353) (cf. p. 39).
- [125] Alexander POPP, Michael W. GEE et Wolfgang A. WALL. « A finite deformation mortar contact formulation using a primal–dual active set strategy ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11 (avr. 2009), p. 1354-1391. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2614> (cf. p. 83).
- [126] Alexander POPP, Markus GITTERLE, Michael W. GEE et Wolfgang A. WALL. « A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83.11 (2010), p. 1428-1465. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2866> (cf. p. 83).
- [127] Olivier PODOU et Christophe PIERRE. « Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping ». *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2003. DOI : [10.2514/6.2003-1411](https://doi.org/10.2514/6.2003-1411) (cf. p. 95).



- [128] S. Mehrdad POURKIAEE et Stefano ZUCCA. « A Reduced Order Model for Nonlinear Dynamics of Mistuned Bladed Disks With Shroud Friction Contacts ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.1 (oct. 2018). ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4041653](https://doi.org/10.1115/1.4041653) (cf. p. 96).
- [129] M. J. D. POWELL. « A hybrid method for nonlinear equations ». *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Sous la dir. de P. ROBINOWITZ. 1970, p. 87-144 (cf. p. 107).
- [130] M. J. D. POWELL. « A new algorithm for unconstrained optimization ». *Nonlinear Programming*. Sous la dir. de J. B. ROSEN, O. L. MANGASARIAN et K. RITTER. 1970, p. 31-65. ISBN : 978-0-12-597050-1. DOI : <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-597050-1.50006-3> (cf. p. 107).
- [131] Michael A. PUSO. « A 3D mortar method for solid mechanics ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59.3 (2004), p. 315-336. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.865> (cf. p. 83).
- [132] Michael A. PUSO et Tod A. LAURSEN. « A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.6 (2004), p. 601-629. ISSN : 0045-7825. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.10.010> (cf. p. 83).
- [133] Michael A. PUSO et Tod A. LAURSEN. « A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.45 (nov. 2004), p. 4891-4913. ISSN : 0045-7825. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.001> (cf. p. 83).
- [134] Samuel QUAEGBEUR, Benjamin CHOUVION, Fabrice THOUVEREZ et Loic BERTHE. « Energy transfer between nodal diameters of cyclic symmetric structures exhibiting polynomial nonlinearities : Cyclic condition and analysis ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 139 (2020), p. 106604. ISSN : 0888-3270. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106604> (cf. p. 19).
- [135] G. REBEL, K. C. PARK et C. A. FELIPPA. « A contact formulation based on localized Lagrange multipliers : formulation and application to two-dimensional problems ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54.2 (fév. 2002), p. 263-297. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.426> (cf. p. 84).
- [136] Donald A. RIMKUNAS et Murray H. FRYE. *Investigation of fan blade shroud mechanical damping*. Rapp. tech. West Palm Beach, Florida 33402 : Pratt & Whitney Aircraft Group Government Products Division, juin 1979. DOI : [10.21236/ada078439](https://doi.org/10.21236/ada078439) (cf. p. 32 sq., 40).
- [137] Patrick ROYIS. *Mécanique des milieux continus : cours, exercices et problèmes*. ENTPE. 2005. ISBN : 9782729707705 (cf. p. 13).
- [138] S. RUBIN. « Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis ». *AIAA Journal* 13.8 (1975), p. 995-1006. DOI : [10.2514/3.60497](https://doi.org/10.2514/3.60497) (cf. p. 117).
- [139] Jean SALENÇON. *Mécanique des milieux continus*. T. I. Concepts généraux. X École polytechnique. Paris, 1988. ISBN : 2-7298-8854-3 (cf. p. 13).
- [140] Loïc SALLES. « Étude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d'aubes de turbomachines ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, Université Technique d'État de Moscou, 2010 (cf. p. 116).
- [141] E. SANCHEZ-PALENCIA. « Justification de la méthode des échelles multiples pour une classe d'équations aux dérivées partielles ». *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 116 (1978), p. 159-176. DOI : [10.1007/BF02413873](https://doi.org/10.1007/BF02413873) (cf. p. 91).
- [142] K. V. SAVCHENKO, A. P. ZINKOVSKII et R. RZADKOWSKI. « Effect of the Contact Surfaces Orientation in the Shrouded Flanges and Level of Vibration Excitation in the Rotor

- Blades on their Vibration Stress State ». *Strength of Materials* 52 (2020), p. 205-213. DOI : [10.1007/s11223-020-00167-w](https://doi.org/10.1007/s11223-020-00167-w) (cf. p. 96 sq.).
- [143] Kyrylo SAVCHENKO, Anatoliy ZINKOVSKII, Romuald RZADKOWSKI, Radoslaw PRZYSOWA et Vadym KRUTS. « An influence of shroud design parameters on the static stresses of blade assemblies ». T. 304. 03002. Déc. 2019. DOI : [10.1051/mateconf/201930403002](https://doi.org/10.1051/mateconf/201930403002) (cf. p. 10).
- [144] Kyrylo SAVCHENKO, Anatoliy ZINKOVSKII et Ivan TOKAR. « Determination of contact interaction influence on forced vibrations of shrouded blades ». *Proceedings of the 25th International Congress on Sound and Vibration (ICSV 25)*. T. 5. Hiroshima, Japon, juil. 2018, p. 2635-2640 (cf. p. 37, 40).
- [145] F. SCHREYER, J. GROSS, P. REUSS, M. JUNGE et H. SCHOENENBORN. « Consideration of Interface Damping in Shrouded Mistuned Turbine Blades ». *Dynamics of Coupled Structures*. Sous la dir. de Matt ALLEN, Randy MAYES et Daniel RIXEN. T. 1 : Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. 2014, p. 105-112. ISBN : 978-3-319-04501-6. DOI : [10.1007/978-3-319-04501-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-04501-6_9) (cf. p. 95 sq.).
- [146] Walter SEXTRO. « Experimental Verification Of A Non-Hertzian Contact Model ». *Computational methods in contact mechanics*. T. 4. International conference on computational methods in contact mechanics. Stuttgart, juil. 1999, p. 181-190 (cf. p. 35).
- [147] Walter SEXTRO. « The Calculation of the Forced Response of Shrouded Blades With Friction Contacts and its Experimental Verification ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2000 : Power for Land, Sea, and Air*. T. 4 : Manufacturing Materials and Metallurgy ; Ceramics ; Structures and Dynamics ; Controls, Diagnostics and Instrumentation ; Education. V004T03A067. Munich, Allemagne, mai 2000. DOI : [10.1115/2000-GT-0540](https://doi.org/10.1115/2000-GT-0540) (cf. p. 35).
- [148] Christian SIEWERT, Lars PANNING, Annika SCHMIDT-FELLNER et Andreas KAYSER. « The Estimation of the Contact Stiffness for Directly and Indirectly Coupled Turbine Blading ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2006*. T. 5 : Marine ; Microturbines and Small Turbomachinery ; Oil and Gas Applications ; Structures and Dynamics, Parts A and B. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. Mai 2006, p. 841-853. DOI : [10.1115/GT2006-90473](https://doi.org/10.1115/GT2006-90473) (cf. p. 35).
- [149] Christian SIEWERT, Lars PANNING, Jörg WALLASCHEK et Christoph RICHTER. « Multi-harmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132.8 (août 2010). ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4000266](https://doi.org/10.1115/1.4000266) (cf. p. 95).
- [150] Antonio SIGNORINI. « Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata ». *Italian. Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*. Sous la dir. d'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA. T. 18-19. 5. 1959, p. 95-139 (cf. p. 76).
- [151] J. C. SIMO et T. A. LAURSEN. « An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction ». *Computers & Structures* 42.1 (1992), p. 97-116. ISSN : 0045-7949. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90540-G](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90540-G) (cf. p. 82).
- [152] Juan C. SIMO, Peter WRIGGERS et Robert L. TAYLOR. « A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 50.2 (août 1985), p. 163-180. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90088-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90088-X) (cf. p. 83).
- [153] Saskia SITZMANN. « Robust algorithms for contact problems with constitutive contact laws ». Thèse de doct. Faculté de technologie de l'université Friedrich-Alexander d'Erlangen-Nuremberg, 2016 (cf. p. 83).

- [154] Y. U. SONG, S. K. YOUN et K. C. PARK. « A gap element for treating non-matching discrete interfaces ». *Computational Mechanics* 56 (2015), p. 551-563. DOI : [10.1007/s00466-015-1186-6](https://doi.org/10.1007/s00466-015-1186-6) (cf. p. 84).
- [155] Y. U. SONG, S. K. YOUN et K. C. PARK. « Virtual gap element approach for the treatment of non-matching interface using three-dimensional solid elements ». *Computational Mechanics* 60 (2017), p. 585-594. DOI : [10.1007/s00466-017-1423-2](https://doi.org/10.1007/s00466-017-1423-2) (cf. p. 84 sq.).
- [156] Yeo-Ul SONG, Gil-Eon JEONG, Sung-Kie YOUN et K. C. PARK. « Virtual tetrahedral gap element to connect three-dimensional non-coincident interfaces ». *Finite Elements in Analysis and Design* 152 (2018), p. 18-26. ISSN : 0168-874X. DOI : [10.1016/j.finel.2018.08.005](https://doi.org/10.1016/j.finel.2018.08.005) (cf. p. 84).
- [157] A. V. SRINIVASAN et D. G. CUTTS. « Dry Friction Damping Mechanisms in Engine Blades ». *Proceedings of the ASME 1982 International Gas Turbine Conference and Exhibit*. T. 5 : Manufacturing Materials and Metallurgy ; Ceramics ; Structures and Dynamics ; Controls, Diagnostics and Instrumentation ; Education ; Process Industries ; Technology Resources ; General. V005T13A003. London, Angleterre, avr. 1982. DOI : [10.1115/82-GT-162](https://doi.org/10.1115/82-GT-162) (cf. p. 33).
- [158] A. V. SRINIVASAN et D. G. CUTTS. « Measurement of Relative Vibratory Motion at the Shroud Interfaces of a Fan ». *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 106.2 (avr. 1984), p. 189-197. ISSN : 0739-3717. DOI : [10.1115/1.3269168](https://doi.org/10.1115/1.3269168) (cf. p. 39).
- [159] A. V. SRINIVASAN, D. G. CUTTS et S. SRIDHAR. *Turbojet Engine Blade Damping*. Rapp. tech. United Technologies Research Center, juil. 1981 (cf. p. 33, 40).
- [160] Anthony TACHER. « Forced response and stability of mistuned structures subject to the Coriolis effectâ ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2022 (cf. p. 21).
- [161] Ryoji TAMAI, Ryozo TANAKA, Yoshichika SATO, Karsten KUSTERER, Gang LIN, Martin KEMPER et Lars Panning-von SCHEIDT. « Vibration Analysis of Shrouded Turbine Blades for a 30 MW Gas Turbine ». *Proceedings of the ASME 2013 Turbine Blade Tip Symposium*. V001T03A004. Hambourg, Allemagne, sept. 2013. DOI : [10.1115/TBTS2013-2014](https://doi.org/10.1115/TBTS2013-2014) (cf. p. 35, 40).
- [162] Lakshminarayana Reddy TAMATAM, Daniele BOTTO et Stefano ZUCCA. « A coupled approach to model wear effect on shrouded bladed disk dynamics ». *International Journal of Mechanical Sciences* 237 (2023), p. 107816. ISSN : 0020-7403. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107816> (cf. p. 95).
- [163] Jean-Claude THEVENIN. *Le turboréacteur, moteur des avions à réaction*. Association Aéronautique et Astronautique de France. Juin 2004 (cf. p. 8).
- [164] D. L. THOMAS. « Dynamics of rotationally periodic structures ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.1 (1979), p. 81-102. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620140107> (cf. p. 18).
- [165] M. TUR, F. J. FUENMAYOR et P. WRIGGERS. « A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.37 (2009), p. 2860-2873. ISSN : 0045-7825. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.04.007> (cf. p. 83).
- [166] Minoru URABE. « Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 20 (1965), p. 120-152. DOI : [10.1007/BF00284614](https://doi.org/10.1007/BF00284614) (cf. p. 94).
- [167] Thibaut VADCARD. « Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon ; Polytechnique Montréal (Québec, Canada), avr. 2023 (cf. p. 94).

- [168] Roger VALID et Roger OHAYON. « Static and dynamic analysis of cyclically symmetric structures ». *La Recherche Aéronautique* 1985-4 (1985), p. 41-53 (cf. p. 19).
- [169] J. WILDHEIM. « Excitation of rotating circumferentially periodic structures ». *Journal of Sound and Vibration* 75.3 (1981), p. 397-416. ISSN : 0022-460X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90386-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90386-2) (cf. p. 24).
- [170] E. J. WILLIAMS et S. W. E. EARLES. « Optimization of the response of frictionally damped beam type structures with reference to gas turbine compressor blading ». *Journal of Engineering for Industry* (mai 1974), p. 471-476. DOI : [10.1115/1.3438353](https://doi.org/10.1115/1.3438353) (cf. p. 31 sq., 40).
- [171] Barbara I. WOHLMUTH. « A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38.3 (2000), p. 989-1012. DOI : [10.1137/S0036142999350929](https://doi.org/10.1137/S0036142999350929) (cf. p. 83).
- [172] P. WRIGGERS, T. VU VAN et E. STEIN. « Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction ». *Computers & Structures* 37.3 (1990), p. 319-331. ISSN : 0045-7949. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90324-U](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90324-U) (cf. p. 83).
- [173] Peter WRIGGERS. *Computational Contact Mechanics*. 2006. ISBN : 978-3-540-32608-3. DOI : [10.1007/978-3-540-32609-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0) (cf. p. 71, 79).
- [174] Peter WRIGGERS et Wilhelm T. RUST. « A virtual element method for frictional contact including large deformations ». *Engineering Computations* 36.7 (2019), p. 2133-2161. ISSN : 0264-4401. DOI : [10.1108/ec-02-2019-0043](https://doi.org/10.1108/ec-02-2019-0043) (cf. p. 84).
- [175] Peter WRIGGERS, Wilhelm T. RUST et B. D. REDDY. « A virtual element method for contact ». *Computational Mechanics* 58 (2016), p. 1039-1050. DOI : [10.1007/s00466-016-1331-x](https://doi.org/10.1007/s00466-016-1331-x) (cf. p. 84).
- [176] Geng XIE et Jack Y. K. LOU. « Alternating frequency/coefficient (AFC) technique in the trigonometric collocation method ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 31.4 (1996), p. 531-545. ISSN : 0020-7462. DOI : [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(96\)00003-0](https://doi.org/10.1016/0020-7462(96)00003-0) (cf. p. 94).
- [177] Bin YANG, Tod A. LAURSEN et Xiaonong MENG. « Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62.9 (2005), p. 1183-1225. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1222> (cf. p. 83).
- [178] Kim YOUNG-WON. « Ordered intermetallic alloys, part III : Gamma titanium aluminides ». *JOM* 46.7 (juil. 1994), p. 30-39. ISSN : 1543-1851 (cf. p. 11).
- [179] Ya xiang YUAN. « A review of trust region algorithms for optimization ». *International Council for Industrial and Applied Mathematics*. T. 99. 1. 2000, p. 271-282 (cf. p. 107).
- [180] G. ZAVARISE et P. WRIGGERS. « A segment-to-segment contact strategy ». *Mathematical and Computer Modelling* 28.4 (1998). Recent Advances in Contact Mechanics, p. 497-515. ISSN : 0895-7177. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00138-1](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00138-1) (cf. p. 83).
- [181] Giorgio ZAVARISE et Laura DE LORENZIS. « A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.4 (fév. 2009), p. 379-416. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2559> (cf. p. 83).
- [182] Giorgio ZAVARISE et Laura DE LORENZIS. « The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact : Classical formulation and special cases ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.41 (sept. 2009), p. 3428-3451. ISSN : 0045-7825. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.06.022> (cf. p. 83).
- [183] Brandon K. ZIMMERMAN et Gerard A. ATESHIAN. « A Surface-to-Surface Finite Element Algorithm for Large Deformation Frictional Contact in febio ». *Journal of Biomechanical*



- Engineering* 140.8 (juil. 2018), p. 081013. ISSN : 0148-0731. DOI : [10.1115/1.4040497](https://doi.org/10.1115/1.4040497) (cf. p. 83).
- [184] A. P. ZIN'KOVSKII, A. Ya. ADAMENKO, I. N. BUSLENKO et I. G. TOKAR'. « Resonant vibrations of shrouded blades with differing frequencies with clapper interference ». *Strength Mater* 26 (1994), p. 821-824. ISSN : 0039-2316. DOI : [10.1007/BF02216112](https://doi.org/10.1007/BF02216112) (cf. p. 37, 40).
- [185] S. ZUCCA et B. I. EPUREANU. « Bi-linear reduced-order models of structures with friction intermittent contacts ». *Nonlinear Dynamics* 77.3 (2014), p. 1055-1067. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1363-8> (cf. p. 95).
- [186] Stefano ZUCCA, Muzio M. GOLA et Francesco PIRACCINI. « Non-Linear Dynamics of Steam Turbine Blades With Shroud : Numerical Analysis and Experiments ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2012 : Turbine Technical Conference and Exposition*. T. 6 : Oil and Gas Applications ; Concentrating Solar Power Plants ; Steam Turbines ; Wind Energy. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. Juin 2012, p. 665-674. DOI : [10.1115/GT2012-69692](https://doi.org/10.1115/GT2012-69692) (cf. p. 86 sq., 96).

## Annexe A

# Illustrations des bancs d'essai de la littérature

### 1 Banc d'essai NASA 1981

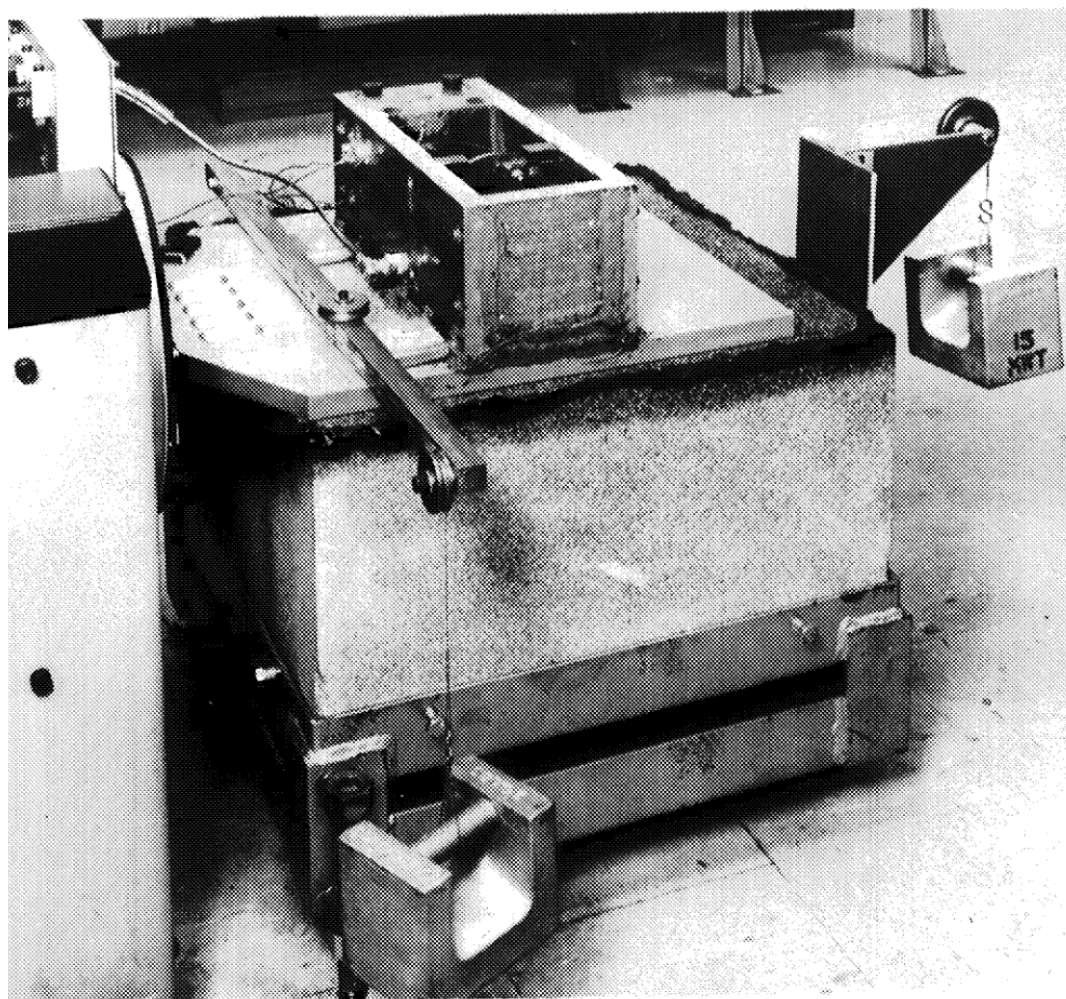


FIGURE A.1 – Vue globale du banc d'essai.

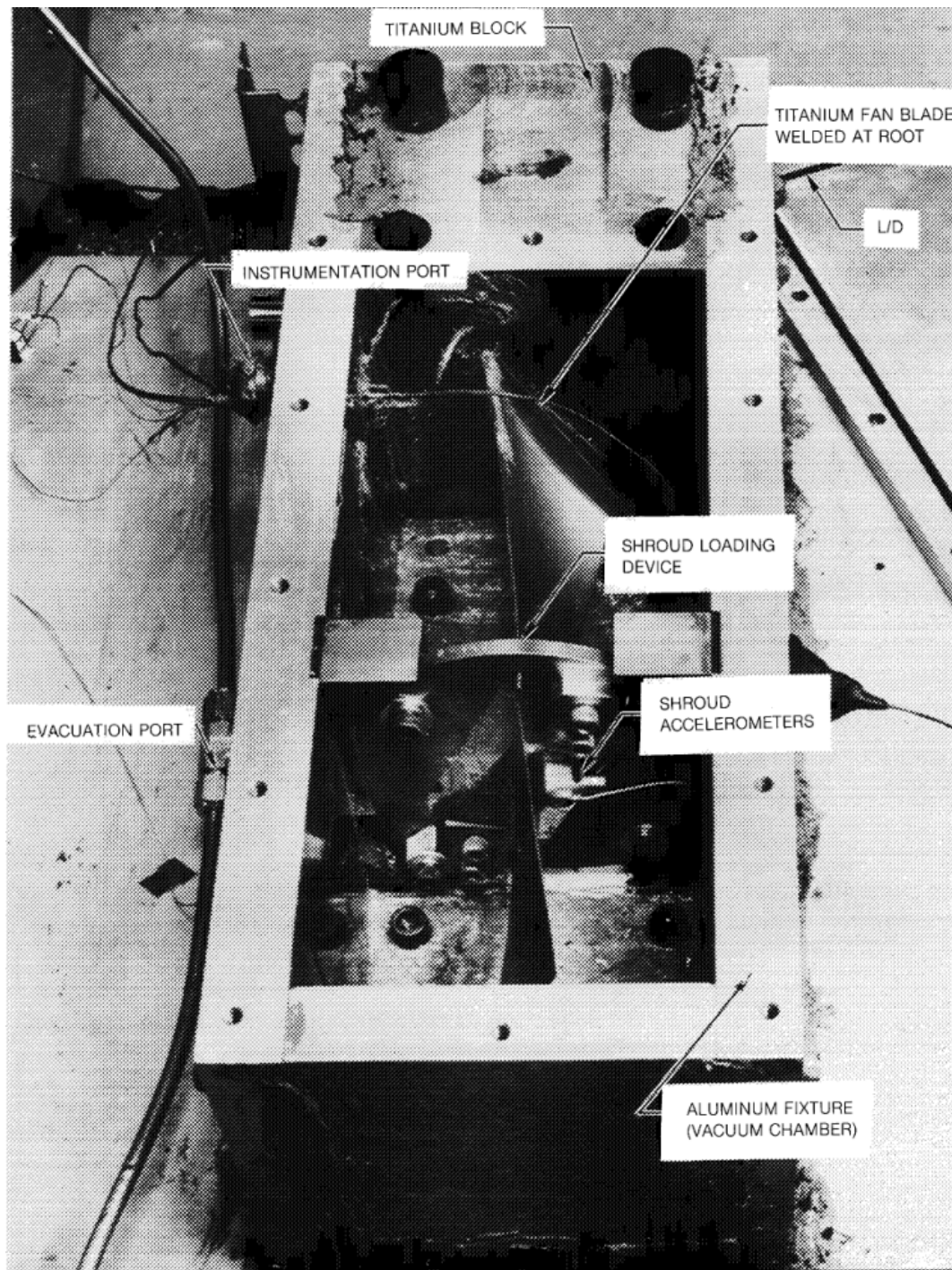
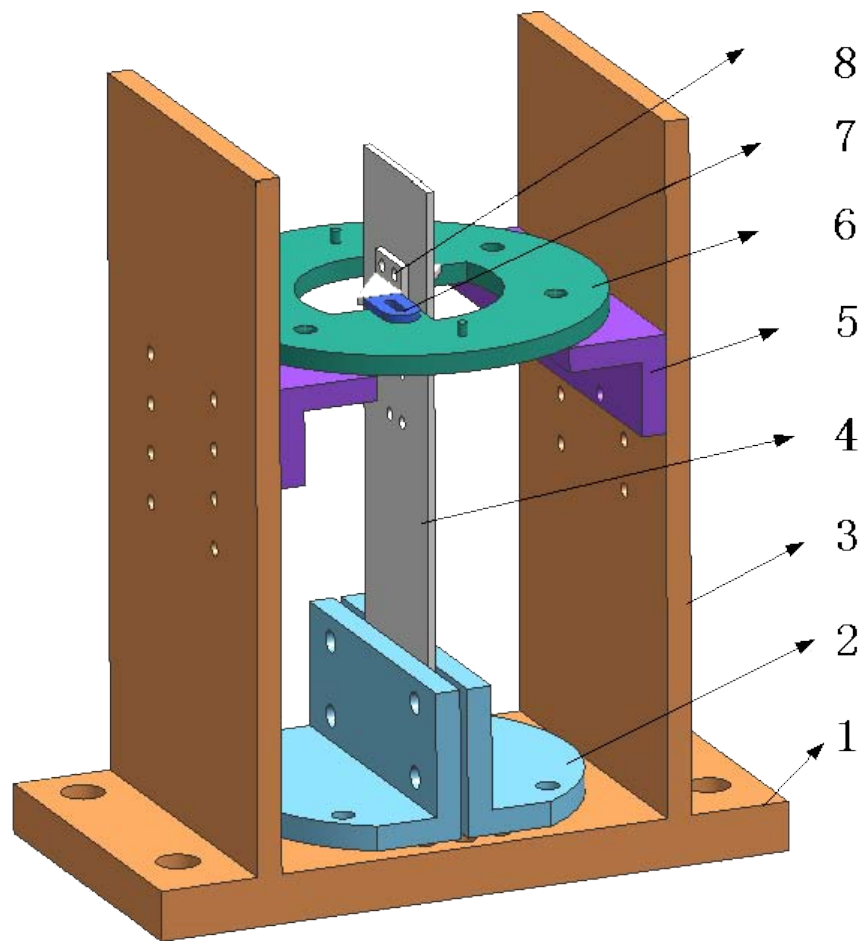


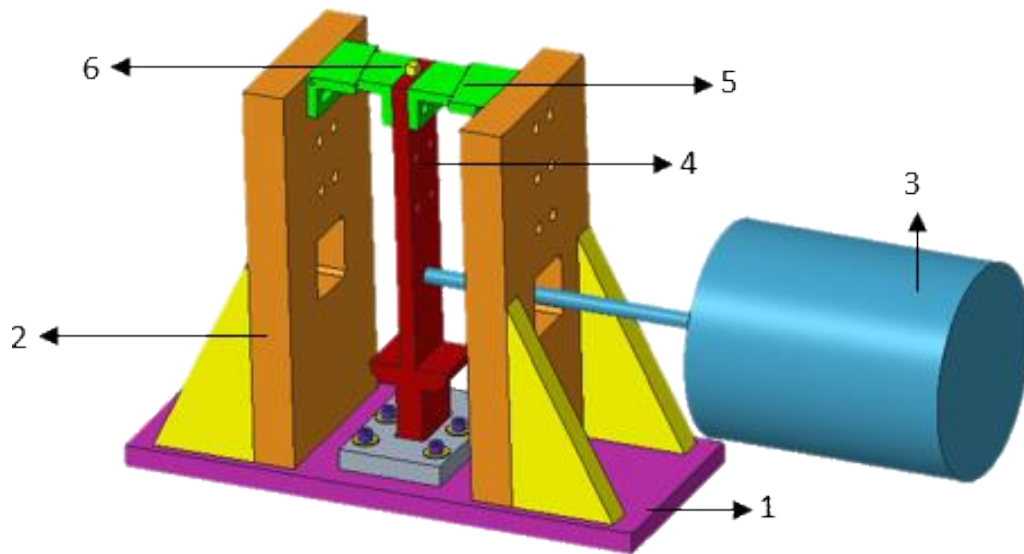
FIGURE A.2 – Vue en détails des pièces du banc d'essai.

## 2 Banc d'essai Université Beihang 2007



1.Base 2.Clamp 3.Side bracket 4.Plane blade  
5.Middle bracket 6.Load disc 7.Friction block 8.Shroud  
FIGURE A.3 – Vue des pièces du banc d'essai.

### 3 Banc d'essai METU 2019



1-Base 2-Fixture 3-Shaker 4-Blade 5-Shrouds 6-Triaxial Accelerometer  
FIGURE A.4 – Vue des pièces du banc d'essai.

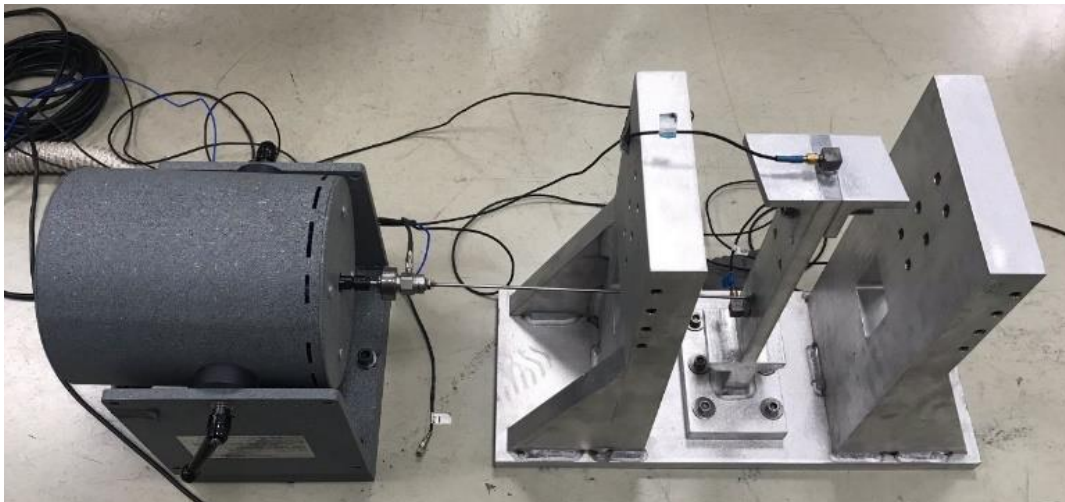


FIGURE A.5 – Photographie du banc d'essai.



## 4 Banc d'essai Université Hanovre 2016



FIGURE A.6 – Vue globale du banc d'essai.

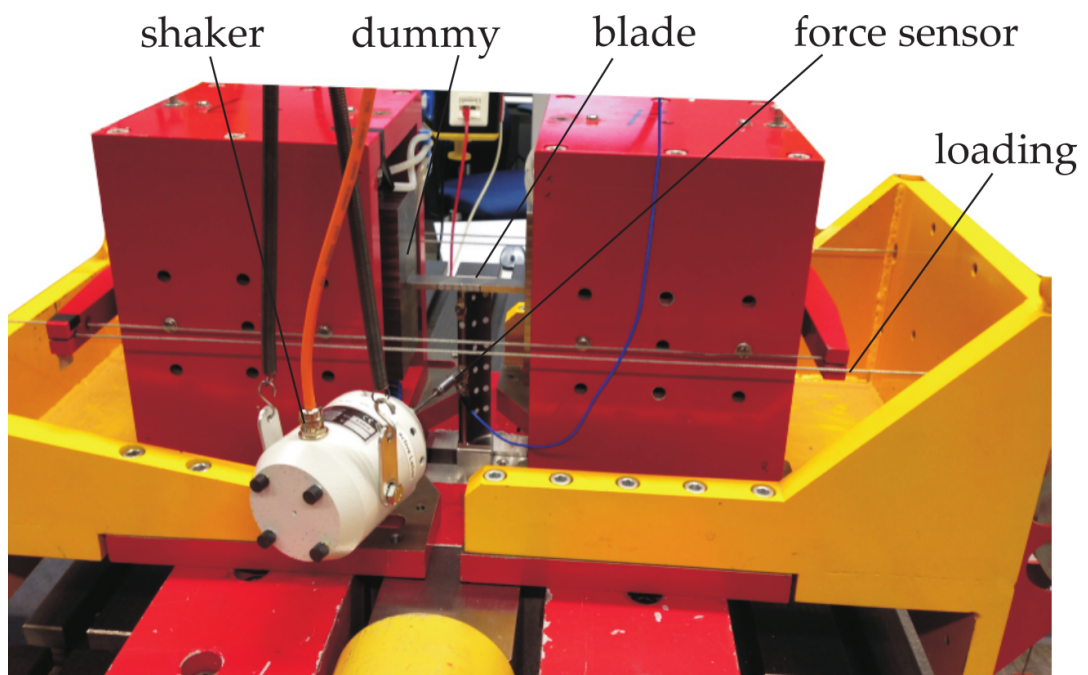


FIGURE A.7 – Vue des pièces du banc d'essai.

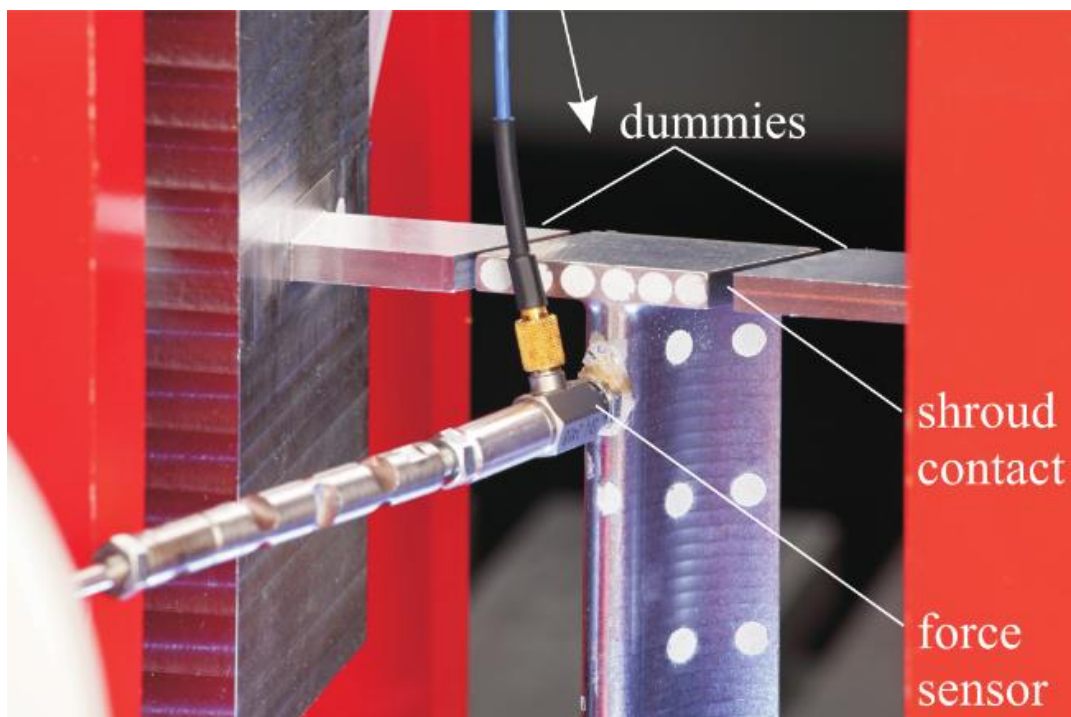


FIGURE A.8 – Vue en détails du talon de l'aube.

## 5 Banc d'essai École polytechnique de Turin 2022

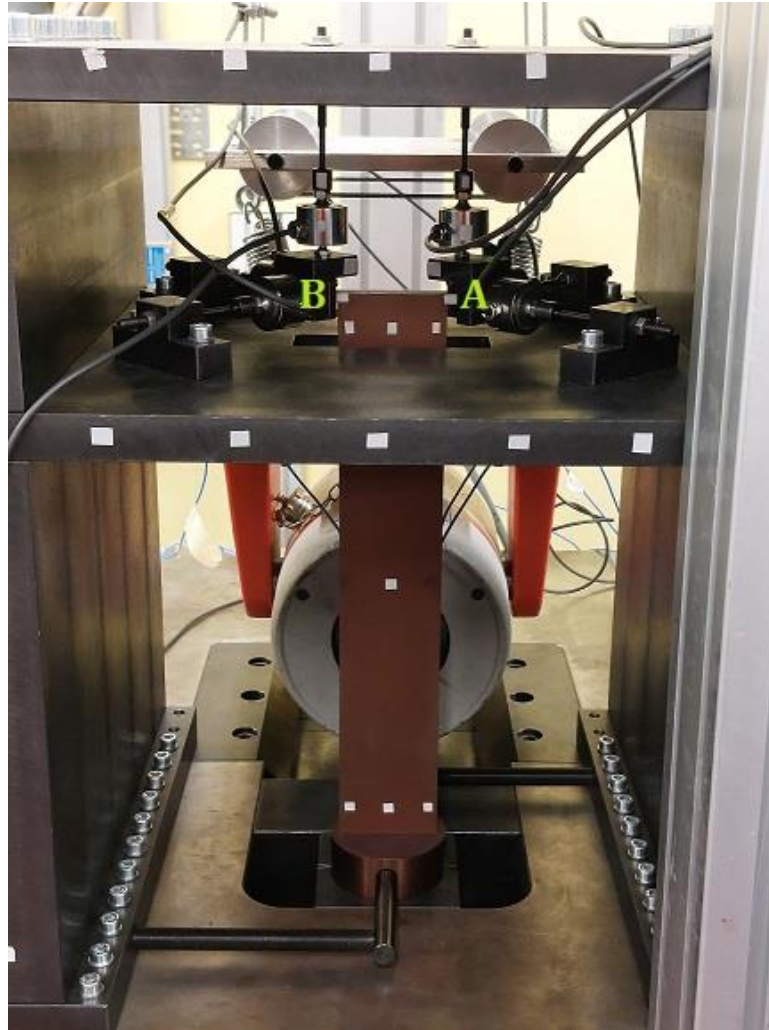


FIGURE A.9 – Photographie du banc d'essai [5].



## 6 Banc d'essai Northeastern University (Chine) 2019

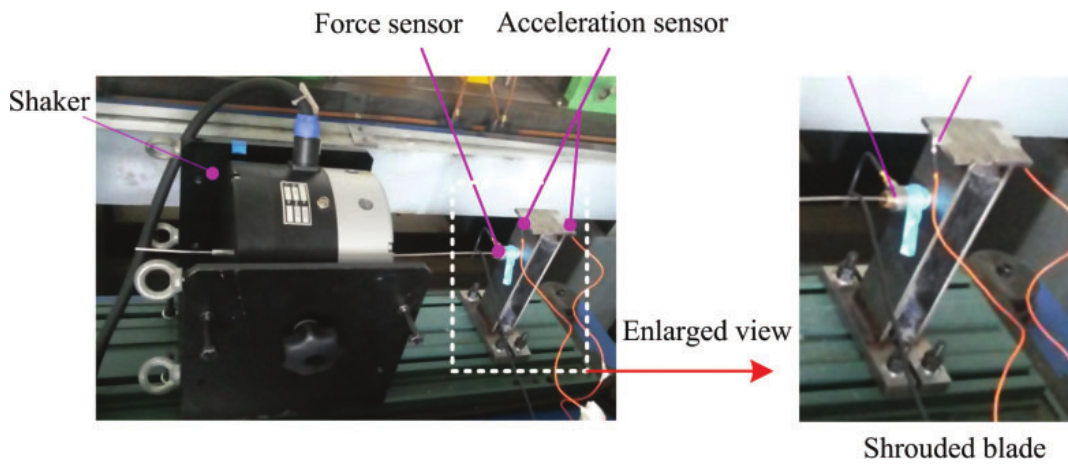


FIGURE A.10 – Vue en détails des pièces du banc d'essai.

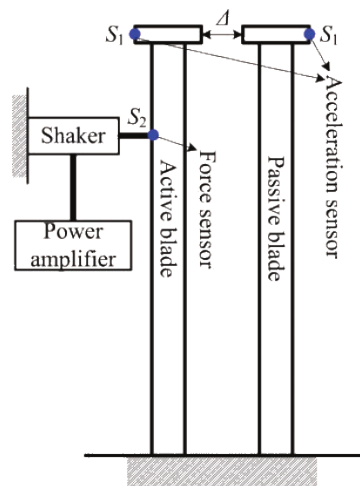


FIGURE A.11 – Schéma de principe du banc d'essai.

## 7 Banc d'essai IPS NAS (Ukraine) 2018

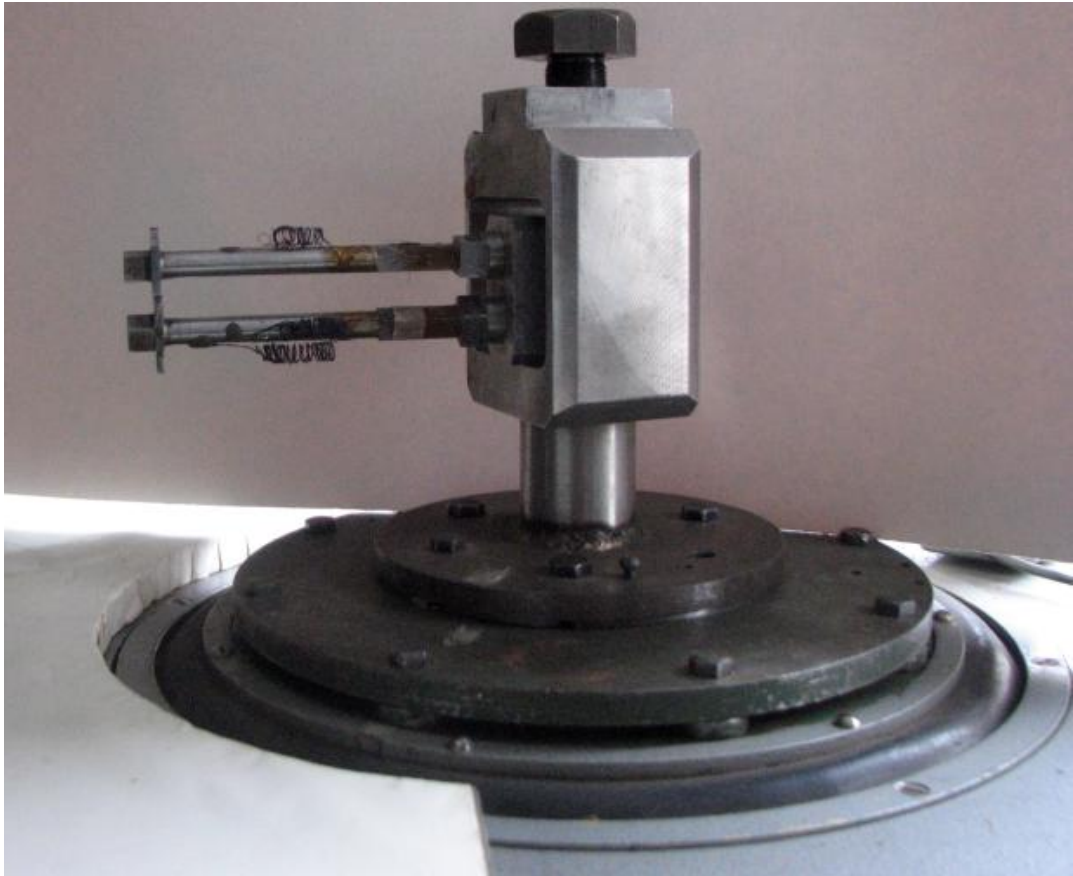


FIGURE A.12 – Photographie du banc d'essai.

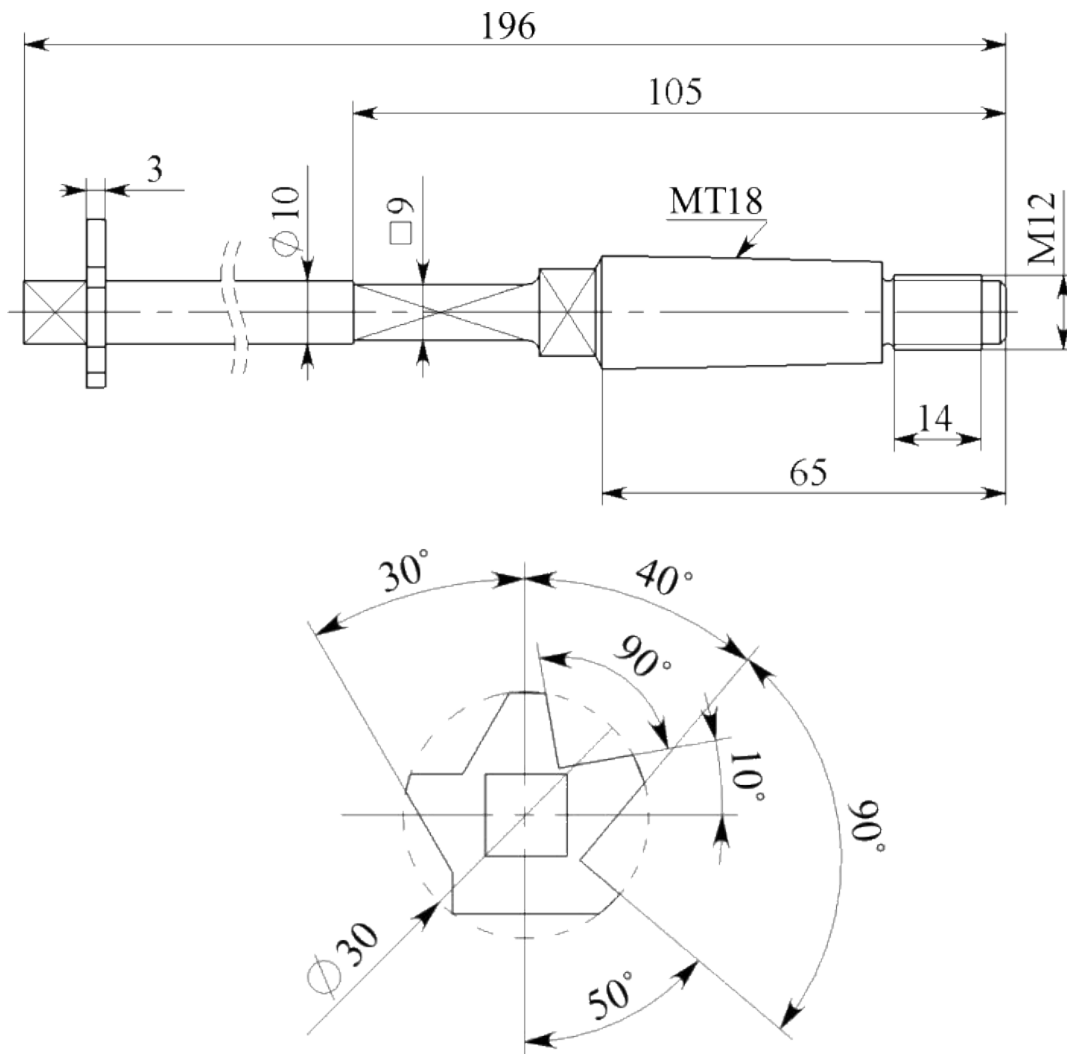


FIGURE A.13 – Plan des aubes du banc d'essai.

## 8 Banc d'essai INSA 2004



FIGURE A.14 – Vue du banc d'essai.

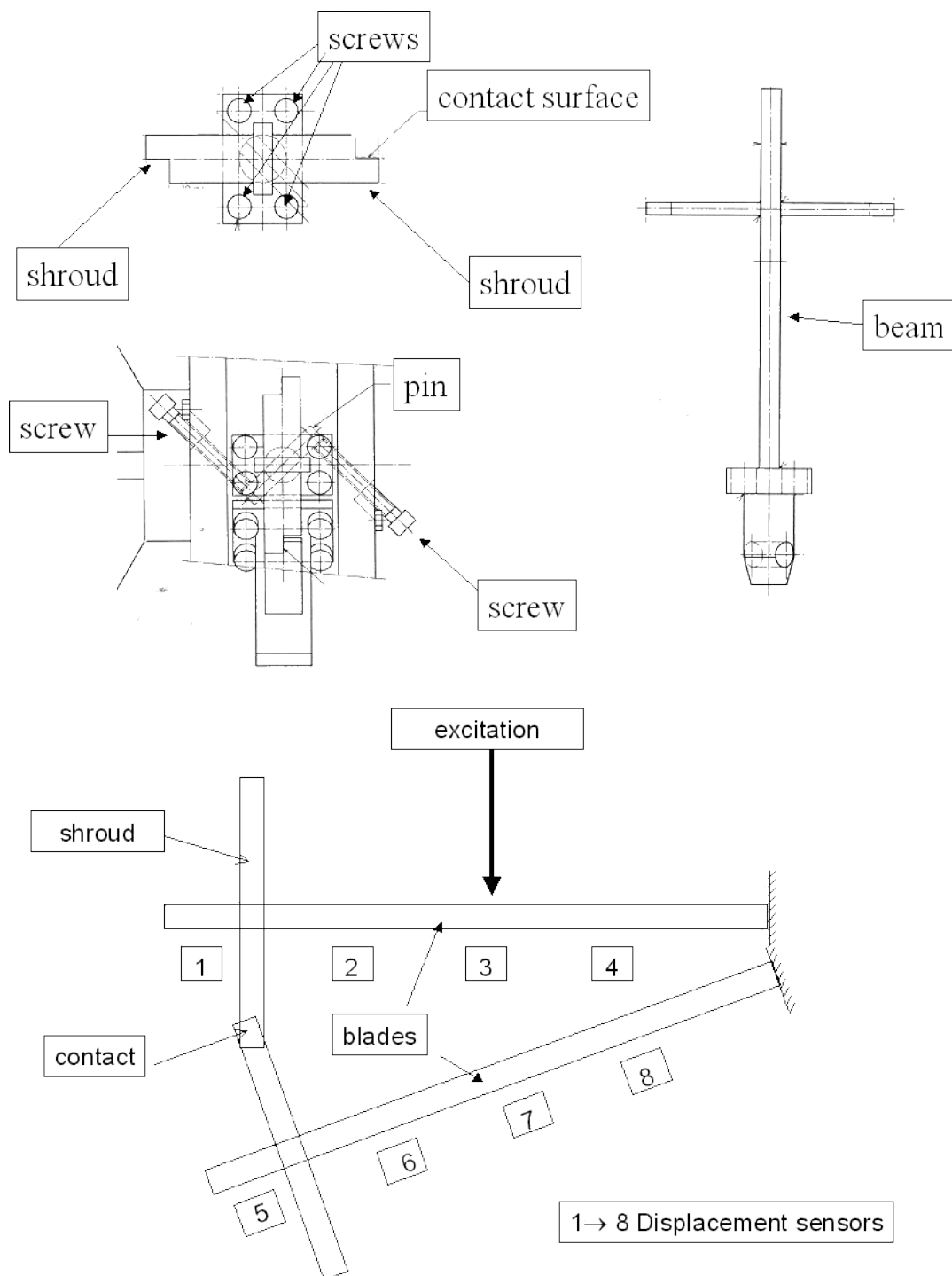


FIGURE A.15 – Plan des aubes et de leur instrumentation.

## Annexe B

# Définitions des espaces de Hilbert et de Sobolev

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien (espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire) complet (où toute suite de Cauchy converge), c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien, soit l'expression suivante :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (\text{B.1})$$

qui est une généralisation d'un espace euclidien ou hermitien.

L'espace de Lebesgue  $L^2$ , cas particulier de l'espace  $L^p$  pour lequel  $p = 2$ , est un exemple d'espace de Hilbert dont le produit scalaire de deux fonctions de carré sommable donne :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \quad (\text{B.2})$$

et dont la norme correspondante est :

$$\|f\| = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (\text{B.3})$$

Un espace de Sobolev, noté  $H^m(\Omega)$ , toujours dans le cas où  $p = 2$ , est un espace doté de la norme :

$$\|f\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

où  $\alpha$  est un multi-indice de  $\mathbb{N}^d$ ,  $\partial_\alpha$  correspond à la dérivée partielle d'ordre  $\alpha$ .



## Annexe C

# Condensation de Guyan

La condensation de Guyan [64, 73] est une méthode de réduction de modèle qui consiste à condenser les degrés de liberté ayant une faible influence sur la dynamique de la structure que l'on souhaite réduire. Pour ce faire, les degrés de liberté sont classés en deux catégories : les degrés de liberté maîtres et esclaves. En partant classiquement de l'équation du mouvement homogène d'une structure (IV.12), on a :

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u} \quad (\text{C.1})$$

et séparant les degrés de liberté maîtres et esclaves, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{me} \\ \mathbf{M}_{em} & \mathbf{M}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_e \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

En prenant  $\mathbf{f}_e = 0$ , on peut écrire le vecteur des déplacements  $\mathbf{u}$  en fonction des degrés de liberté maîtres uniquement :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_m \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{em}\mathbf{K}_{ee}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

La matrice  $\mathbf{T}$  obtenue contient autant de colonnes que de degrés de liberté maîtres, chacune d'entre elles correspond à la déformée statique de la structure pour laquelle un déplacement unitaire est imposé sur un de ses degrés de liberté maîtres, et nul pour ceux restant. La qualité de la réduction dépend donc intégralement du choix des degrés de liberté désignés comme maîtres : on choisit donc ceux pour lesquels les forces d'inertie sont prédominantes par rapport à celles des degrés de liberté esclaves, qui sont donc négligeables. Dans le cas d'une structure avec du contact, on retient les degrés de liberté de frontière entre les sous-structure/super-éléments, auxquels on peut ajouter des degrés de liberté d'excitation et d'observation par exemple.









## Annexe E

# Soudage laser des aubes du banc d'essai © Irepa Laser

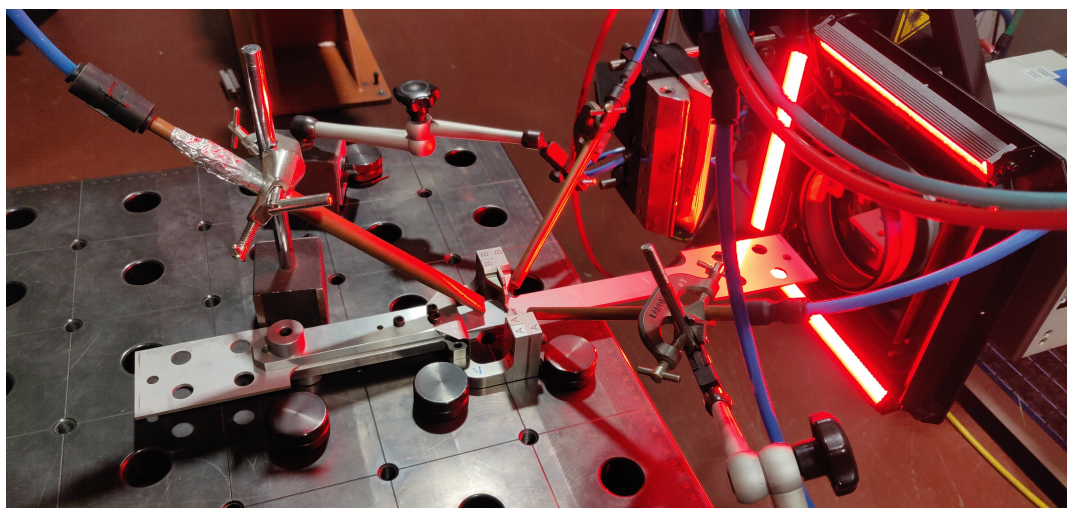


FIGURE E.1 – Vue globale de la mise en place pour le soudage des aubes.

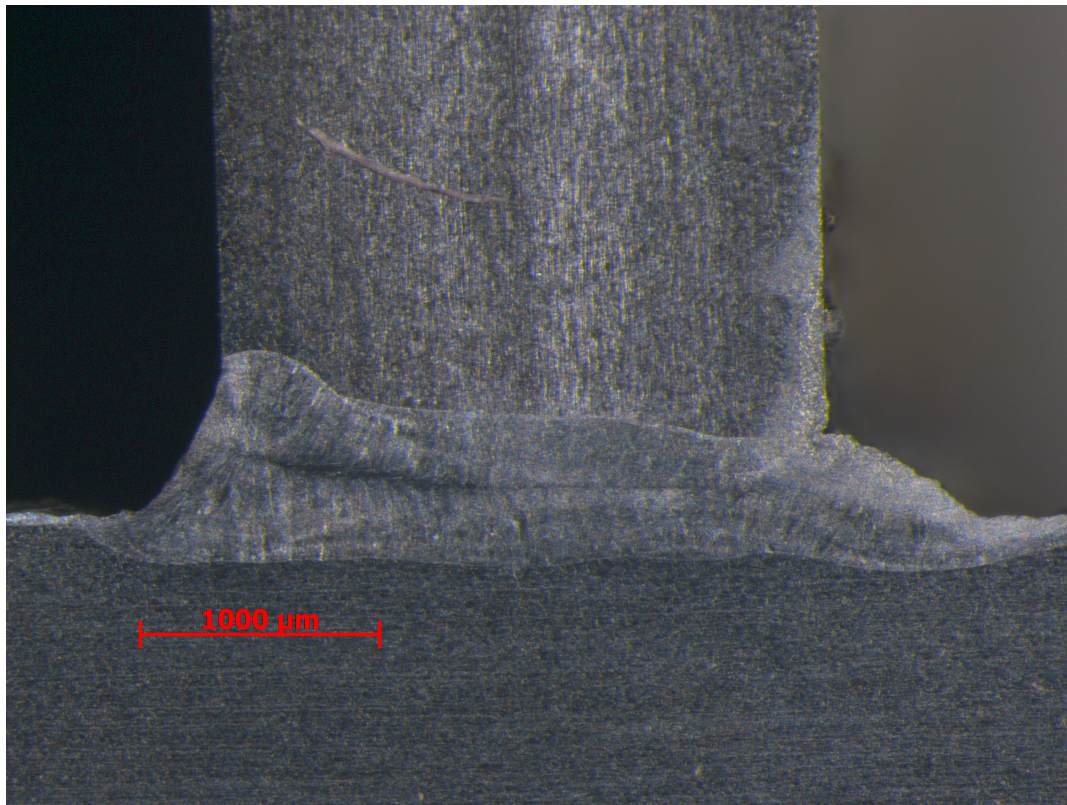


FIGURE E.2 – Vue en coupe du cordon de soudure débouchant.

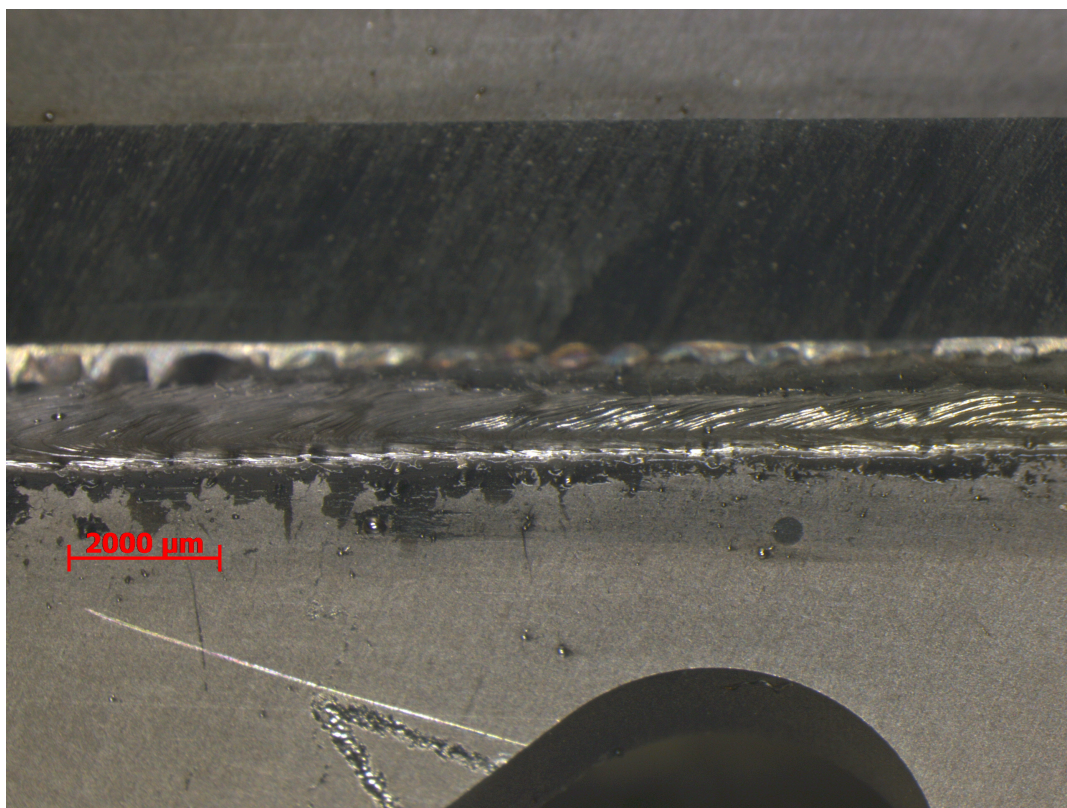


FIGURE E.3 – Vue macroscopique de l'envers du cordon de soudure débouchant.



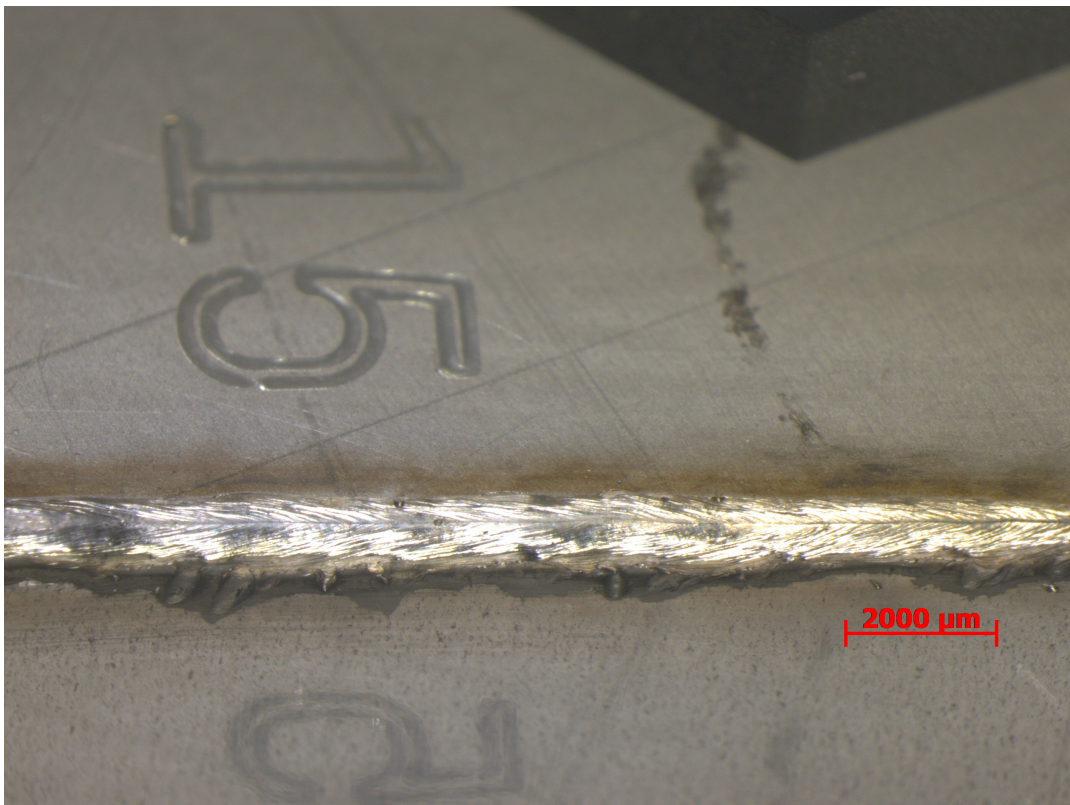


FIGURE E.4 – Vue macroscopique de l'endroit du cordon de soudure débouchant.

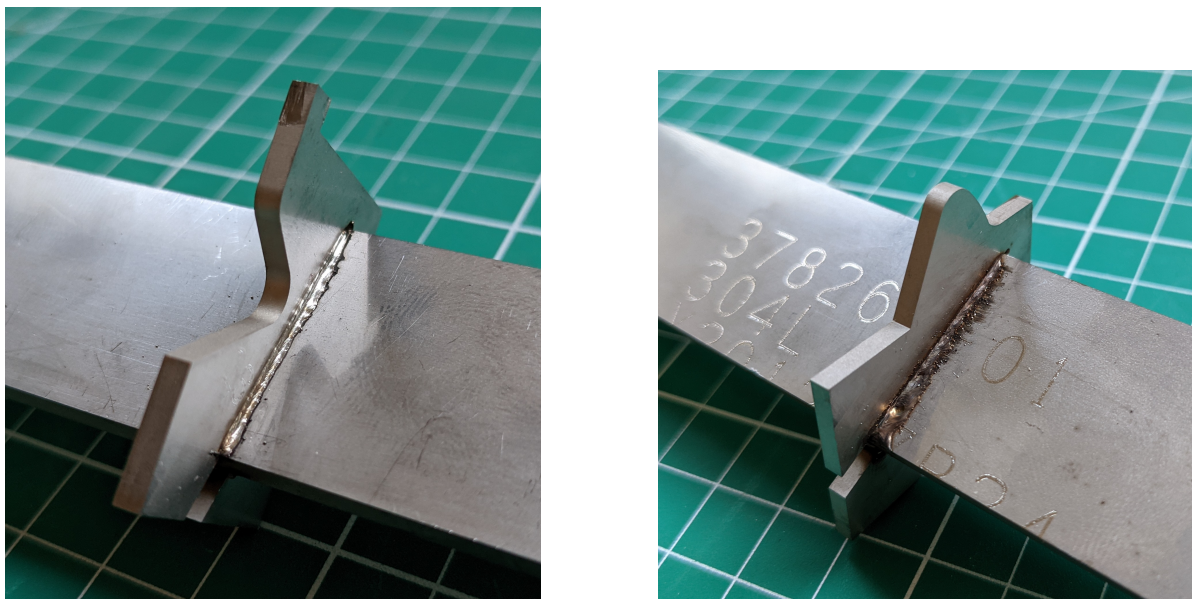


FIGURE E.5 – Vue du talon soudé sur une des aubes.



# Annexe F

## Films de mesure de pression FUJIFILM Prescale

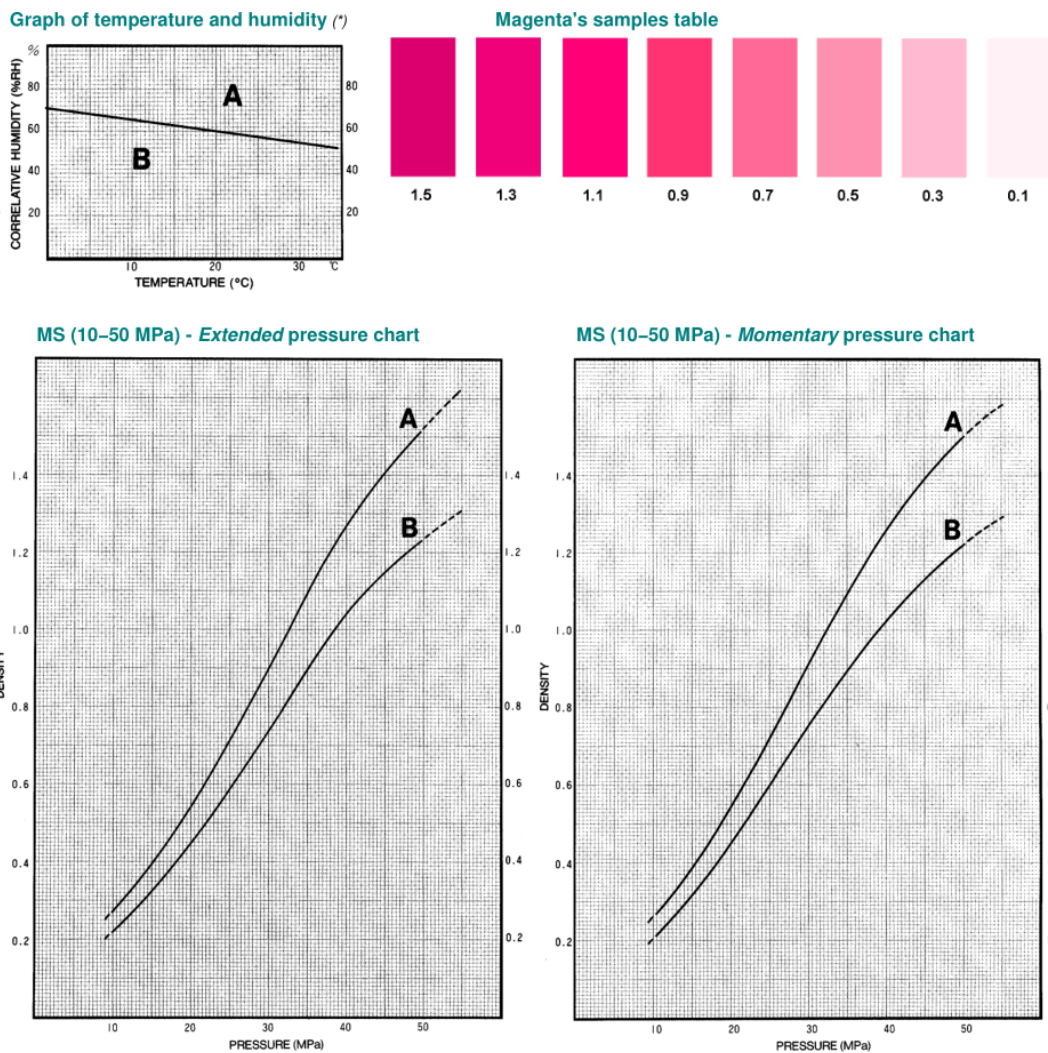


FIGURE F.1 – Fiche d’instruction des films de type *Medium Pressure* (MS).





## Annexe G

# Déformées des modes propres de l'assemblage des trois aubes

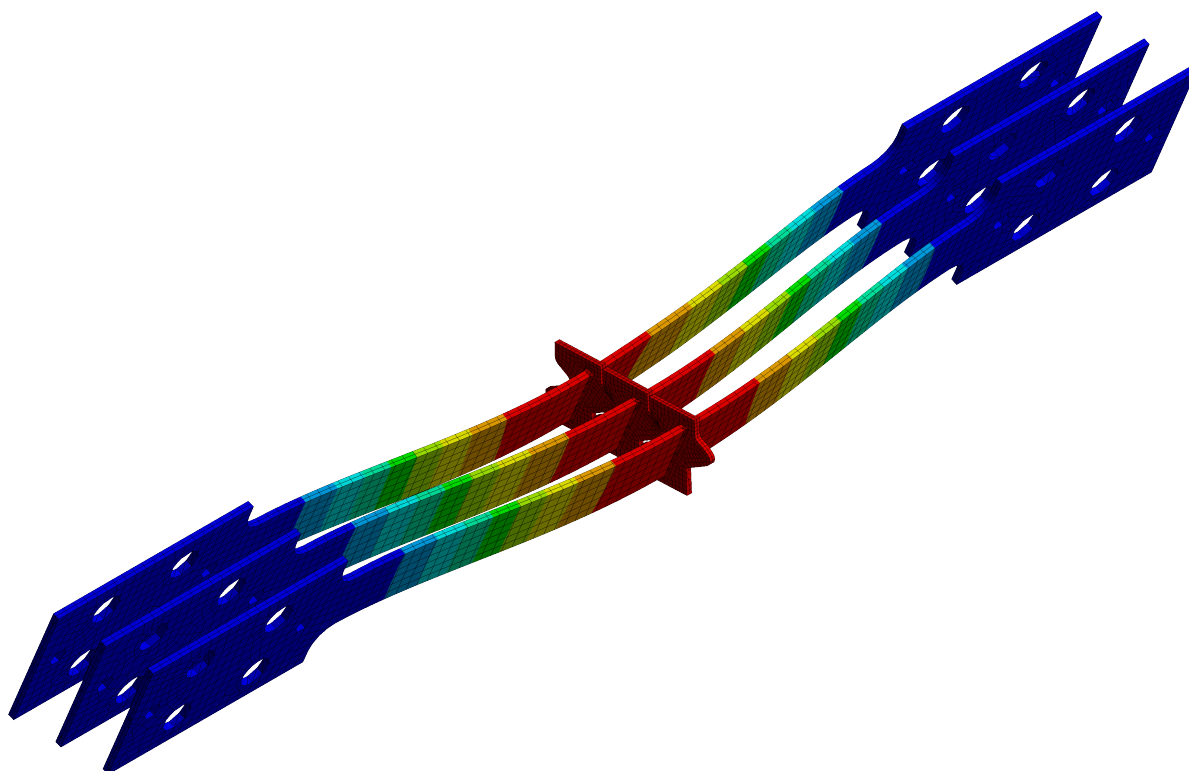


FIGURE G.1 – Déformée du mode 1F.

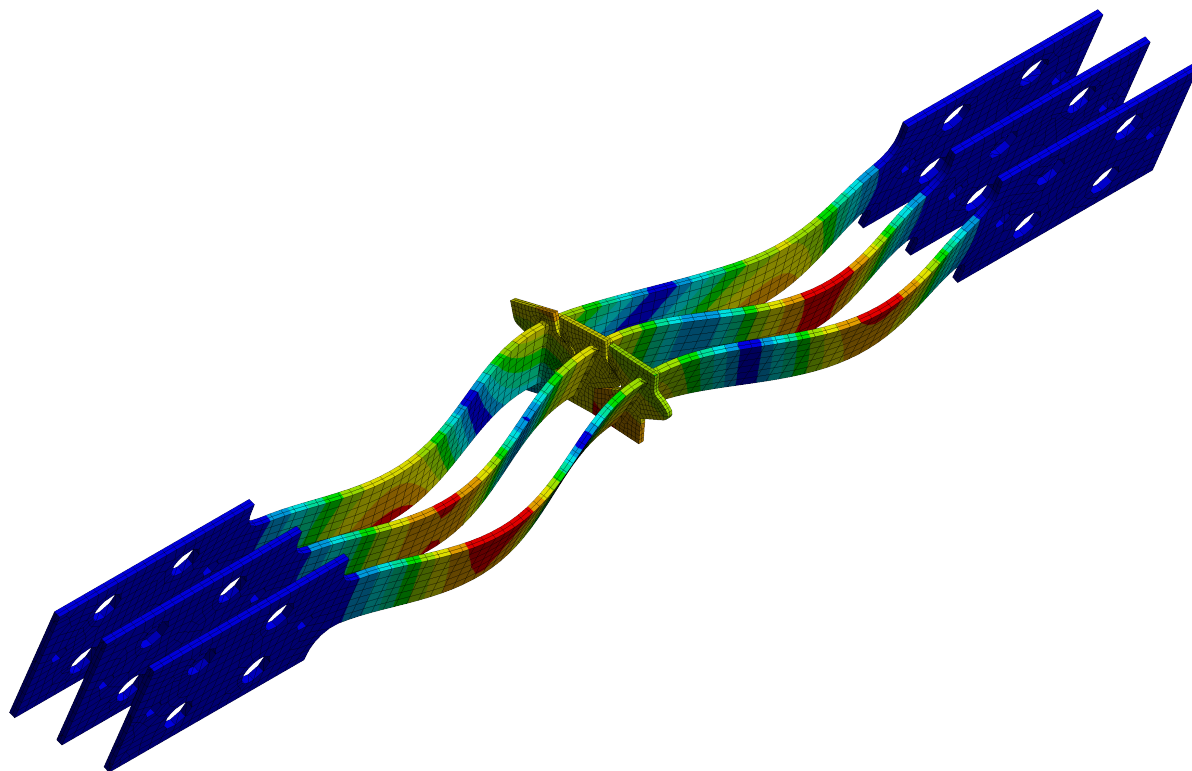


FIGURE G.2 – Déformée du mode 3F.

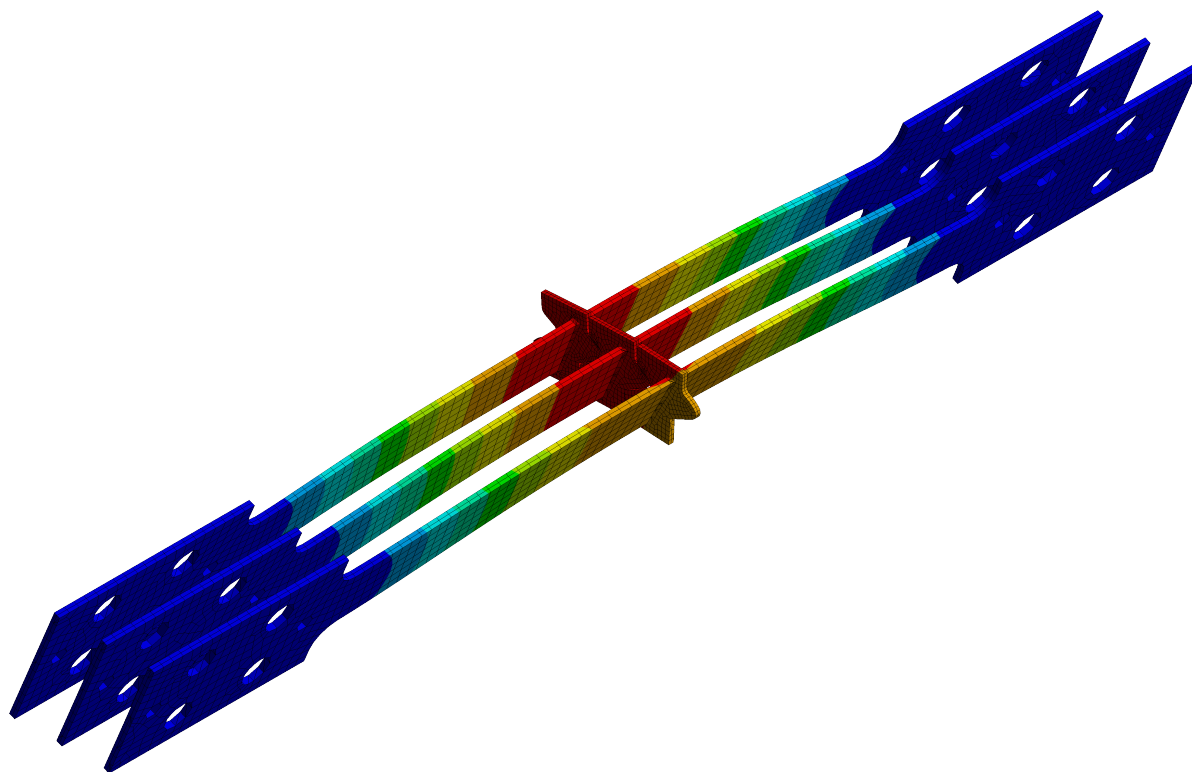


FIGURE G.3 – Déformée du mode 1E.

## Annexe H

# Chaînes de mesure pour les analyses modales expérimentales

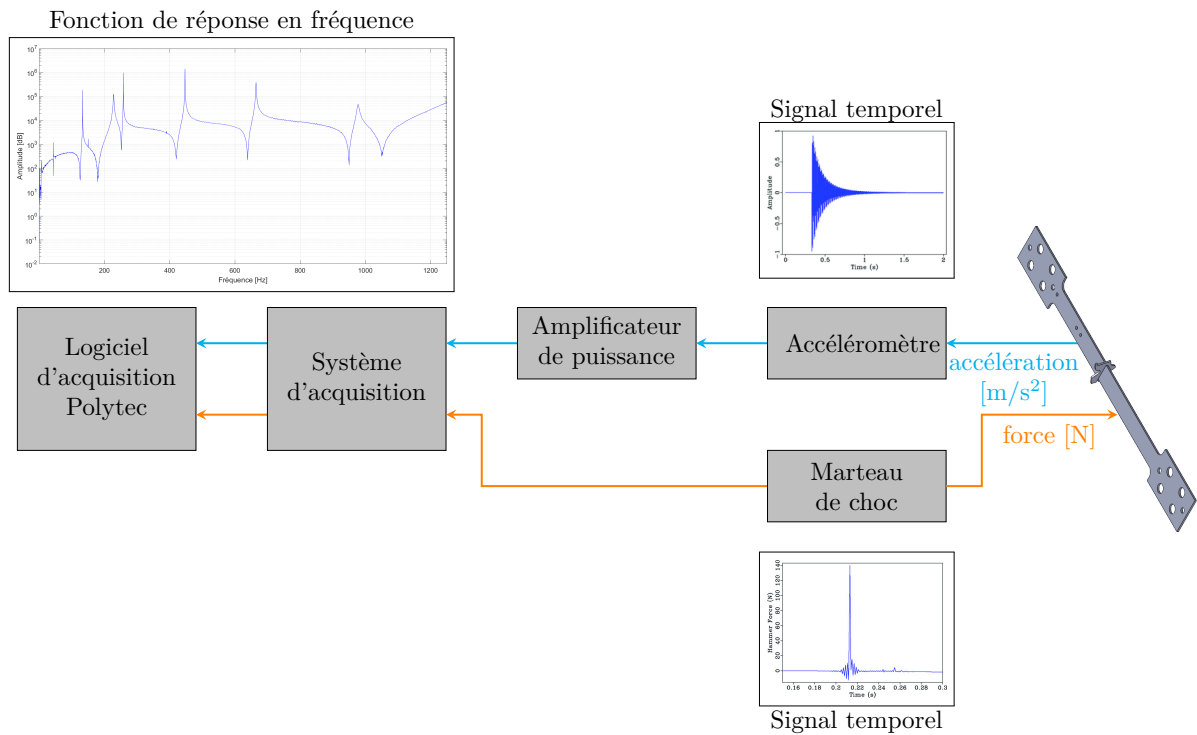


FIGURE H.1 – Chaîne de mesure pour l'analyse modale expérimentale d'une aube en configuration libre.

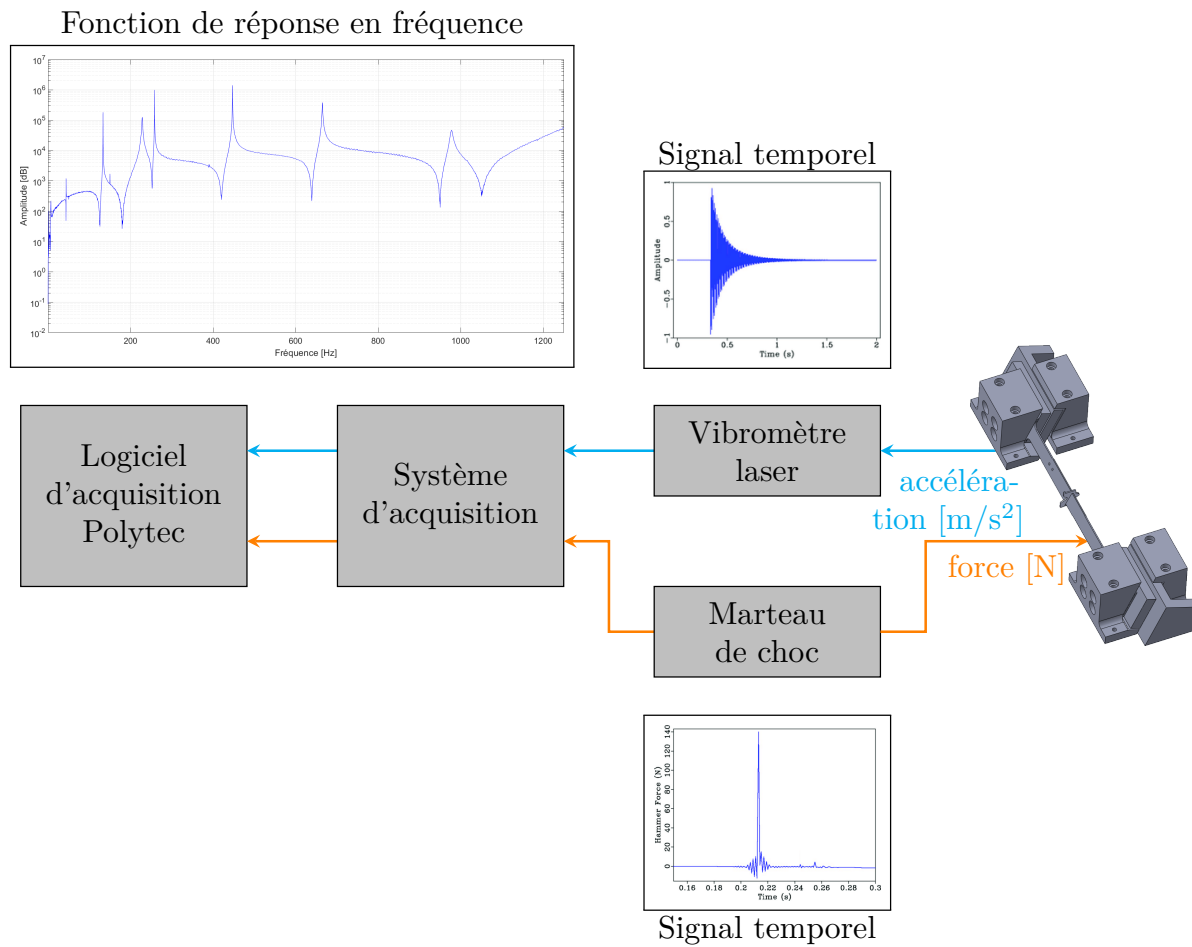


FIGURE H.2 – Chaîne de mesure pour l'analyse modale expérimentale d'une aube en configuration encastree.

# Annexe I

## Analyses modales expérimentales

### 1 Aubes en configuration libre

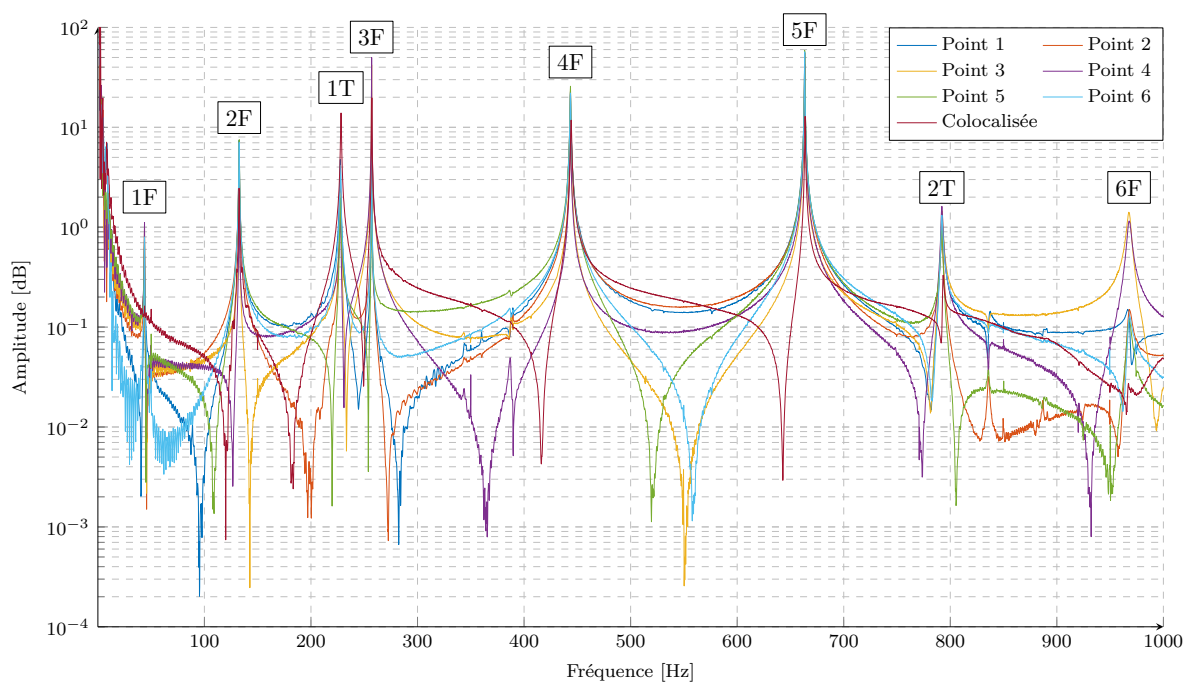


FIGURE I.1 – Réponses fréquentielles de l'aube 1 selon le point de frappe du marteau de choc.

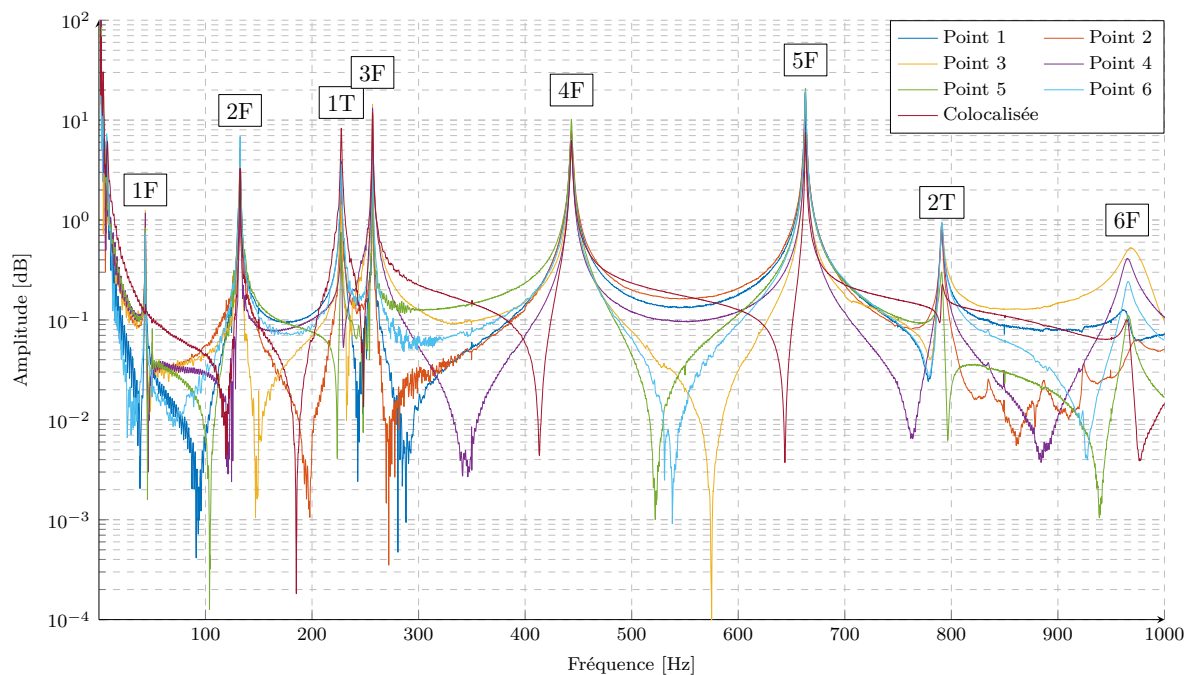


FIGURE I.2 – Réponses fréquentielles de l'aube 2 selon le point de frappe du marteau de choc.

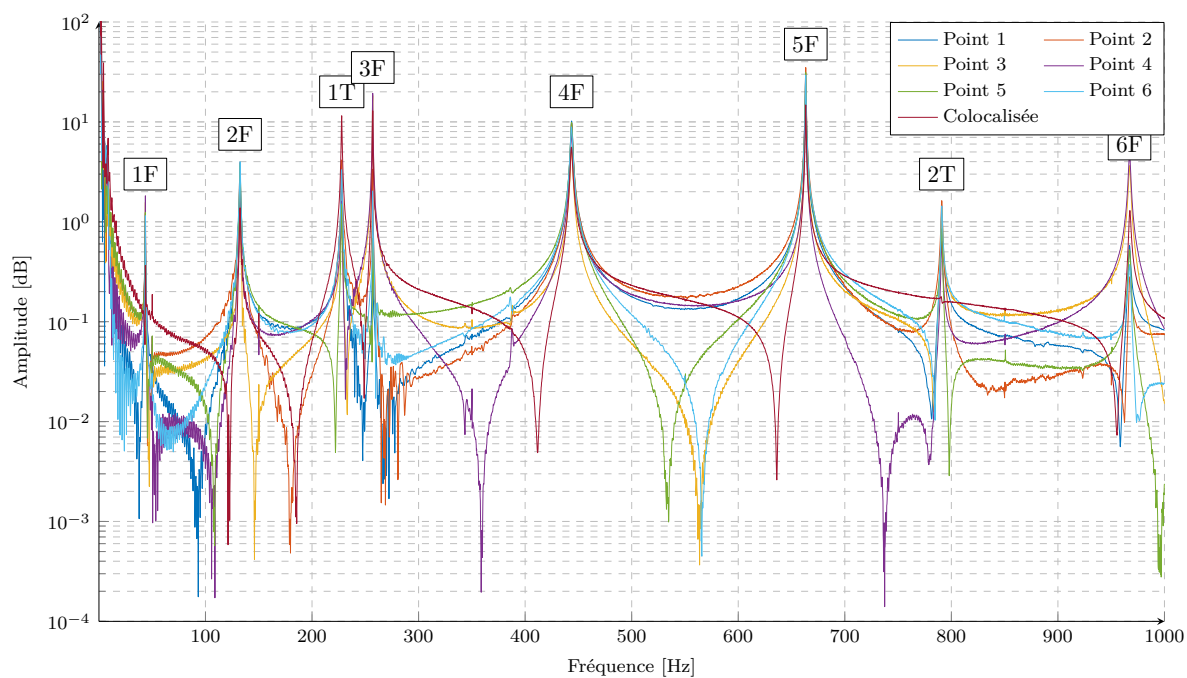


FIGURE I.3 – Réponses fréquentielles de l'aube 3 selon le point de frappe du marteau de choc.

## 2 Aubes en configuration encastrée

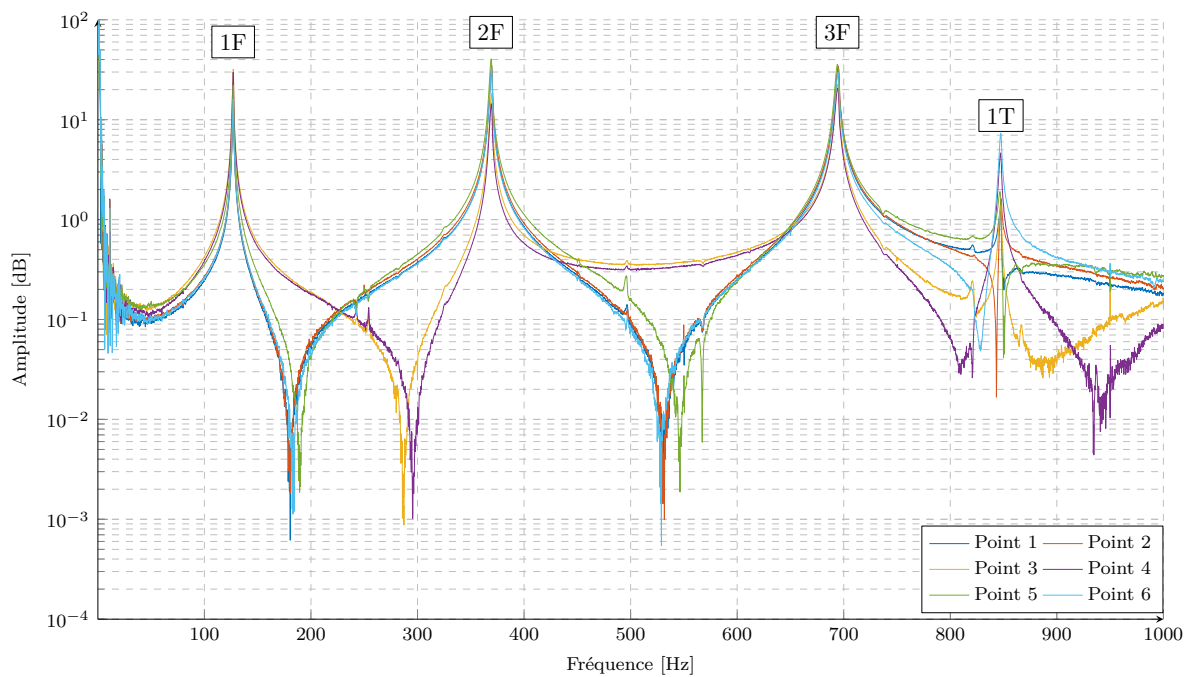


FIGURE I.4 – Réponses fréquentielles de l'aube 3 selon le point de frappe du marteau de choc.





## Annexe J

# Réponses forcées expérimentales

### 1 Espacement des pieds des aubes de 20,00 mm (jeu)

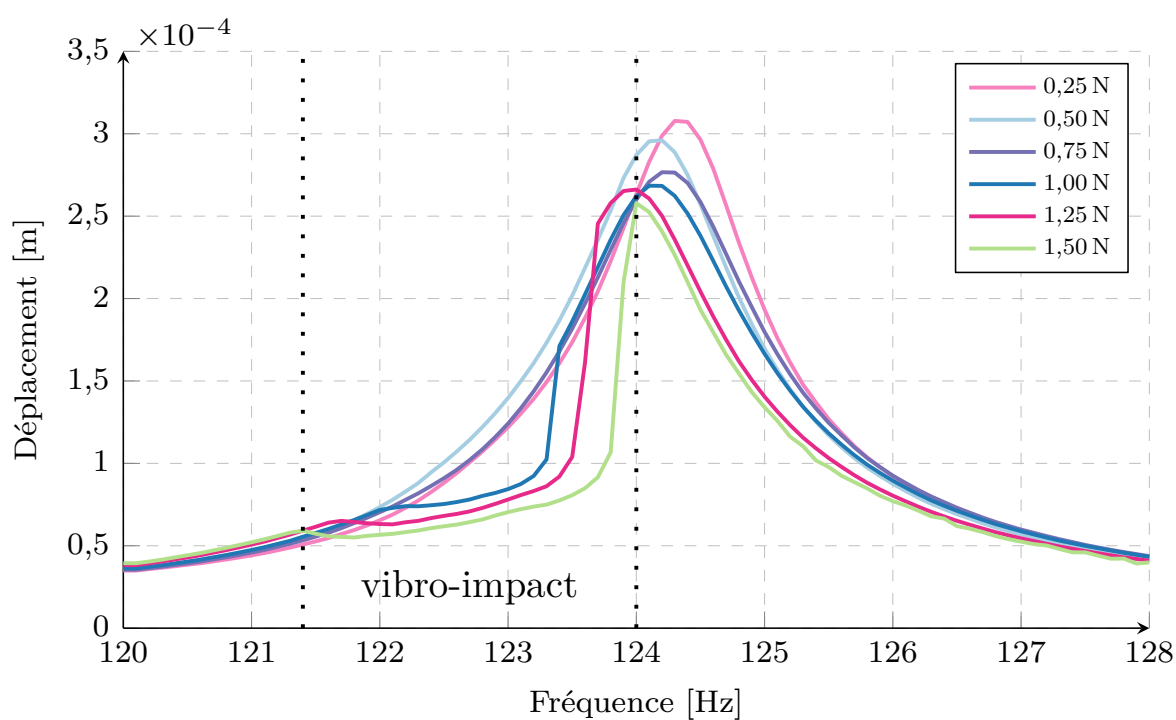


FIGURE J.1 – Déplacement selon différents niveaux de force d'excitation mesuré sur l'aube 3.

## 2 Espacement des pieds des aubes de 19,90 mm (aube 1)

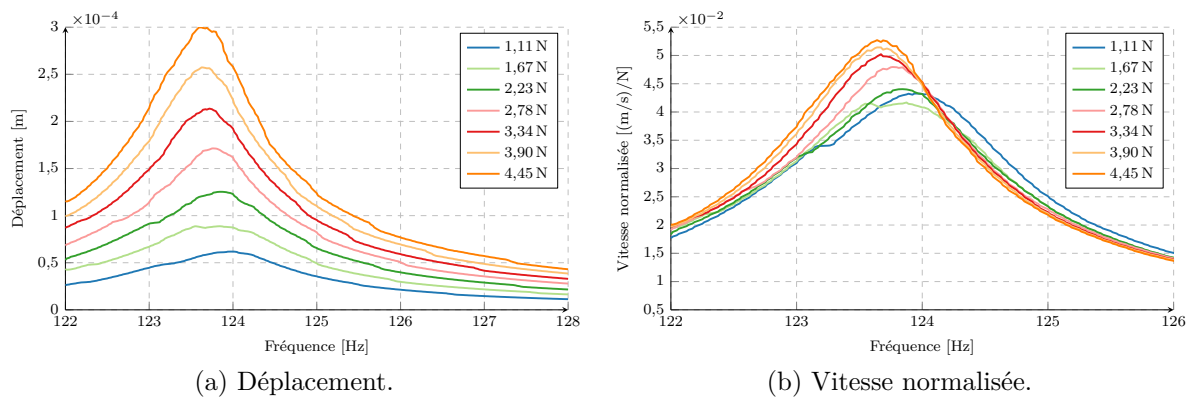


FIGURE J.2 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 1.

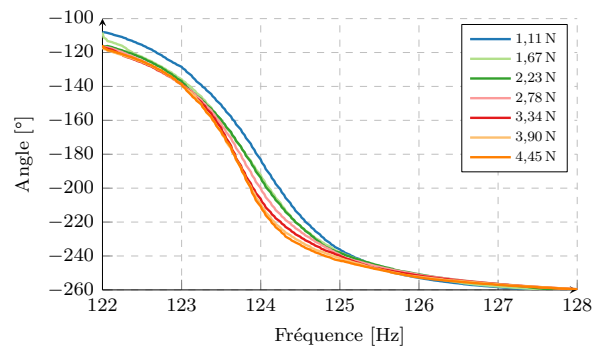


FIGURE J.3 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 1.

### 3 Espacement des pieds des aubes de 19,90 mm (aube 3)

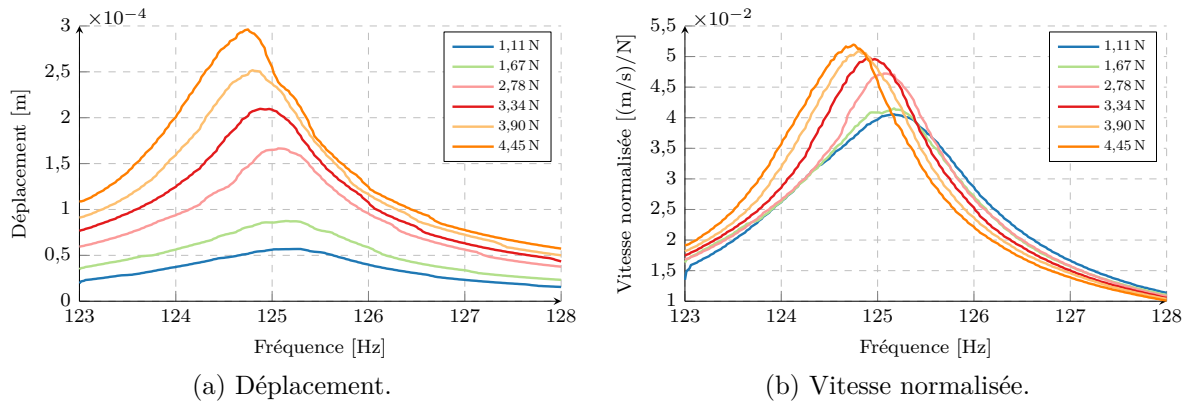


FIGURE J.4 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

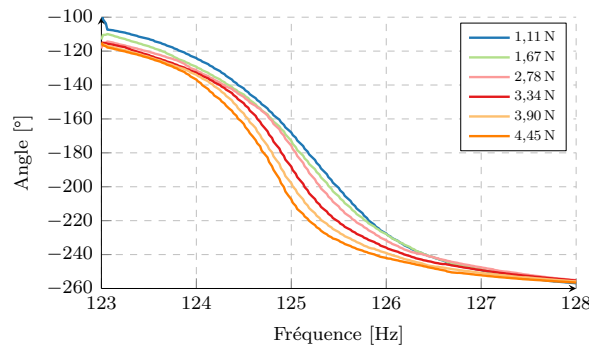


FIGURE J.5 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

#### 4 Espacement des pieds des aubes de 19,80 mm

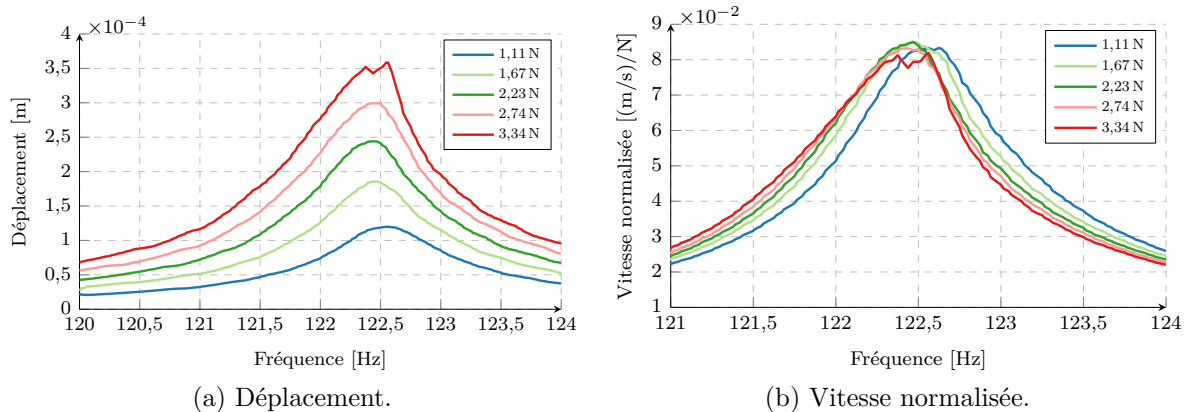


FIGURE J.6 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

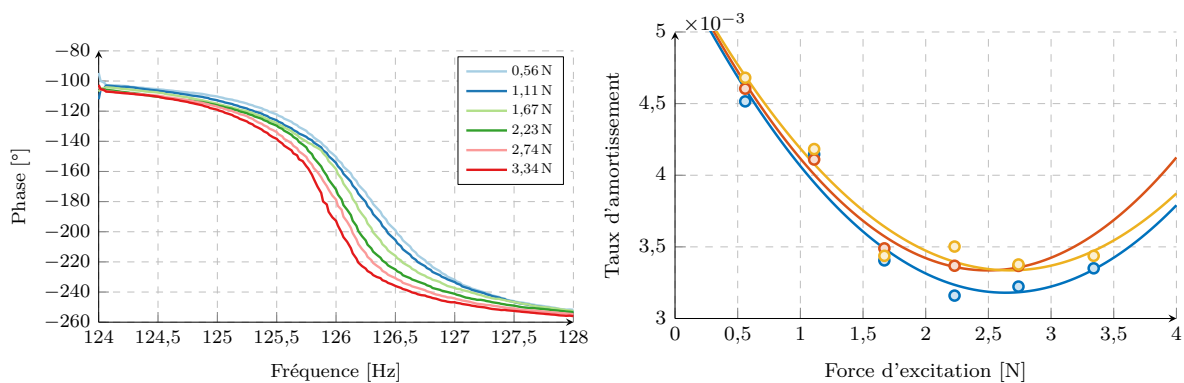


FIGURE J.7 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.8 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation, aubes 3 (●), 2 (○) et 1 (◐).

## 5 Espacement des pieds des aubes de 19,75 mm

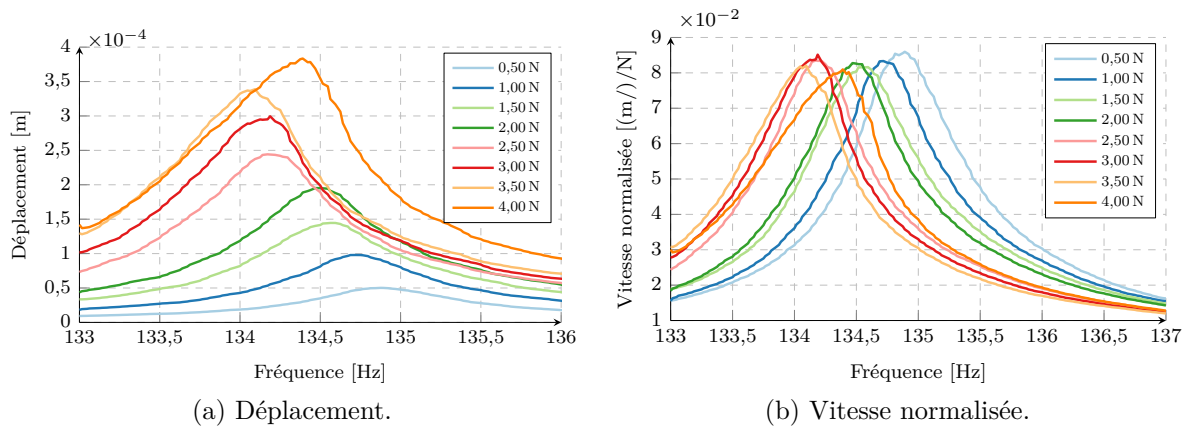


FIGURE J.9 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

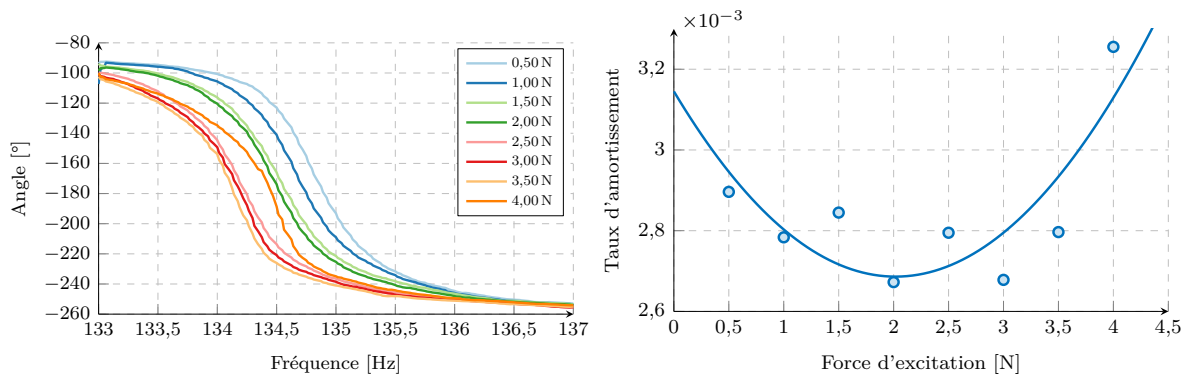


FIGURE J.10 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.11 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.

## 6 Espacement des pieds des aubes de 19,65 mm

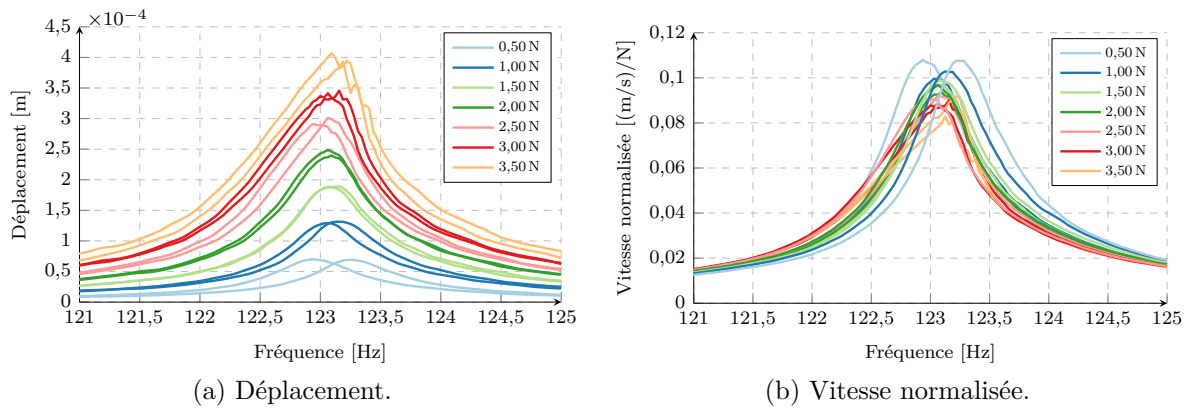


FIGURE J.12 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

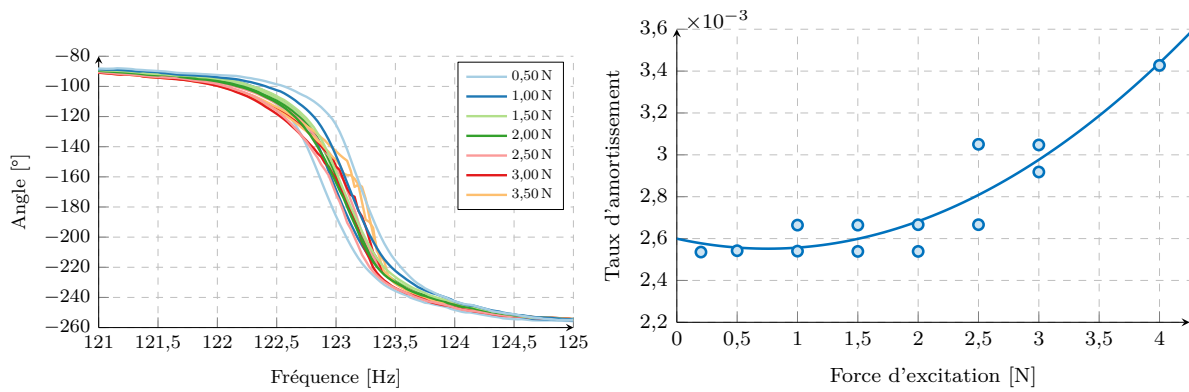


FIGURE J.13 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.14 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.

## 7 Espacement des pieds des aubes de 19,55 mm

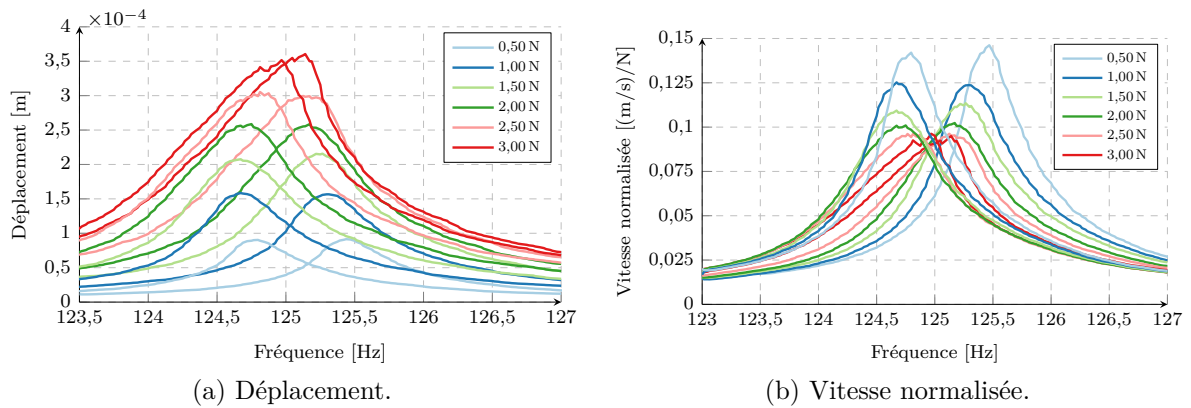


FIGURE J.15 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

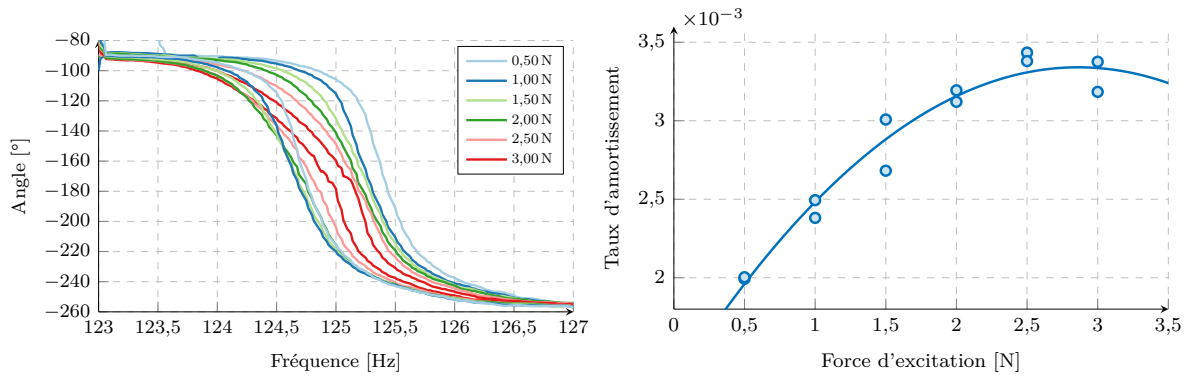


FIGURE J.16 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.17 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.



## 8 Espacement des pieds des aubes de 19,50 mm

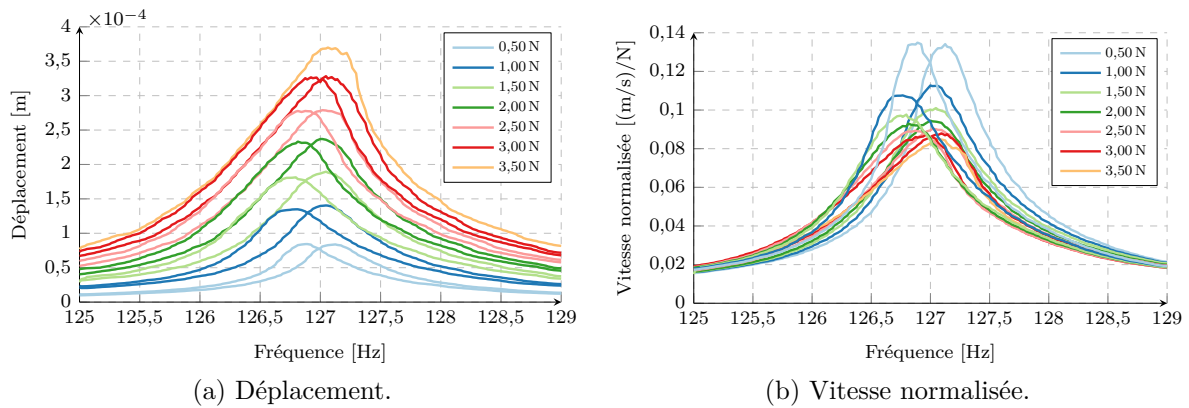


FIGURE J.18 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

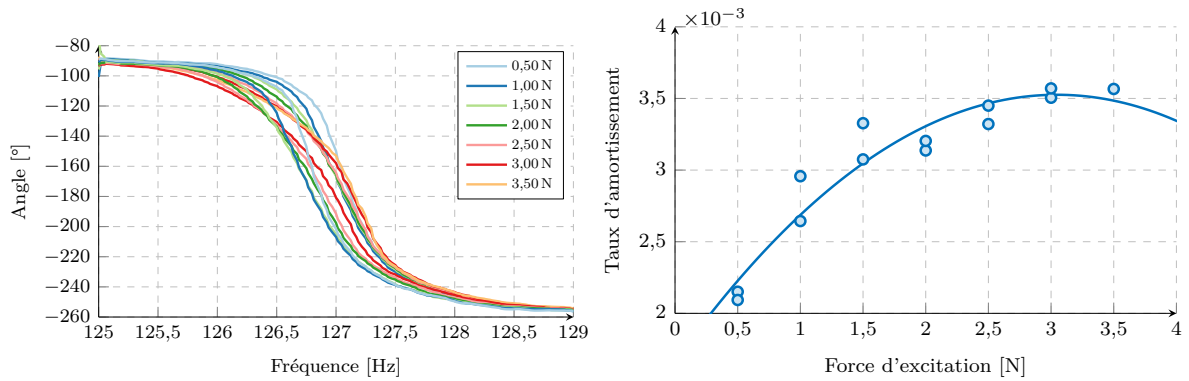


FIGURE J.19 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.20 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.

## 9 Espacement des pieds des aubes de 19,45 mm

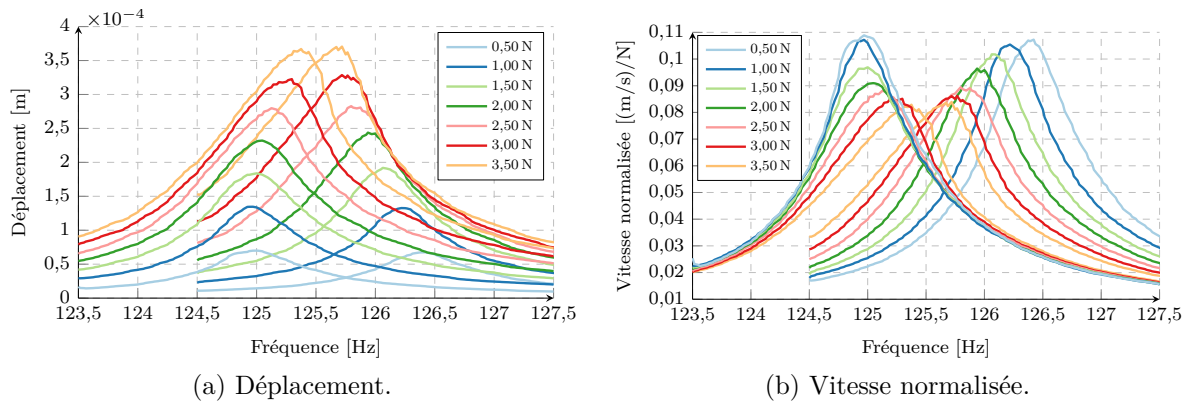


FIGURE J.21 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

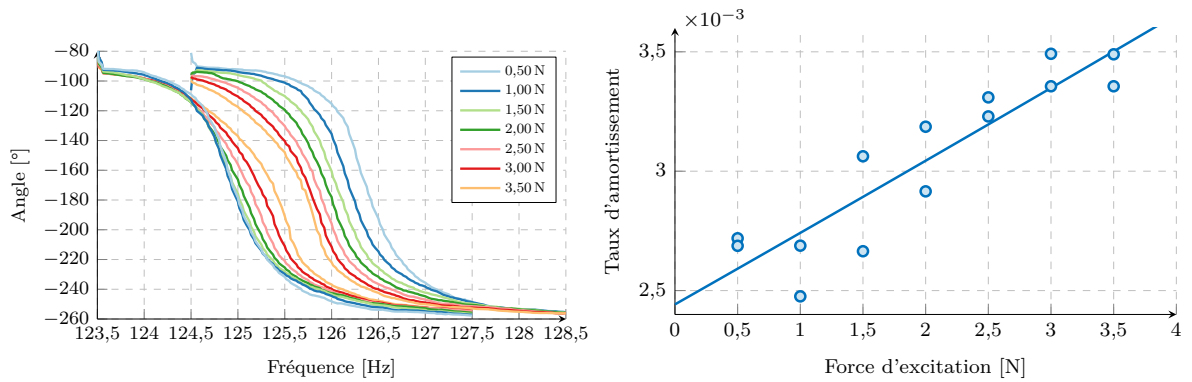


FIGURE J.22 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.23 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.

## 10 Espacement des pieds des aubes de 19,30 mm

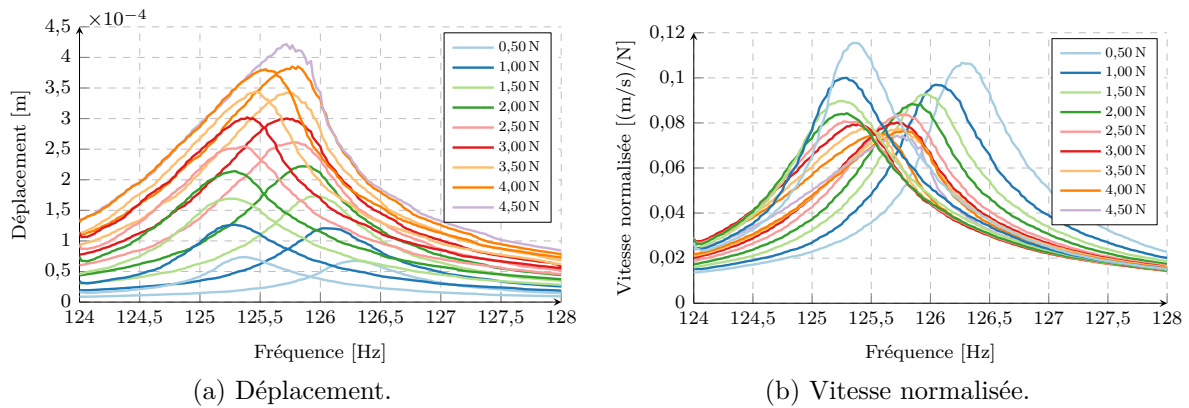


FIGURE J.24 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

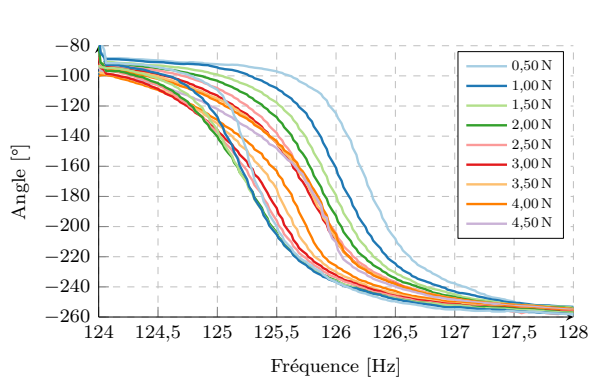


FIGURE J.25 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

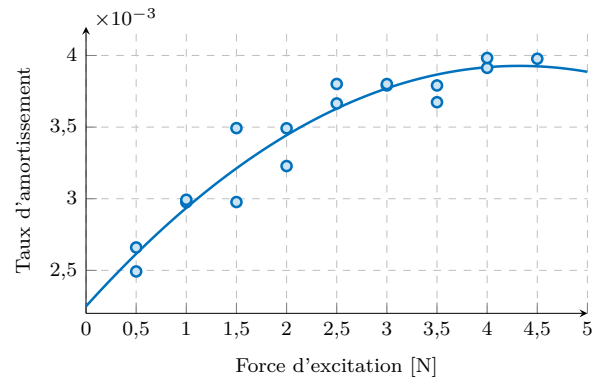


FIGURE J.26 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.

## 11 Espacement des pieds des aubes de 19,20 mm

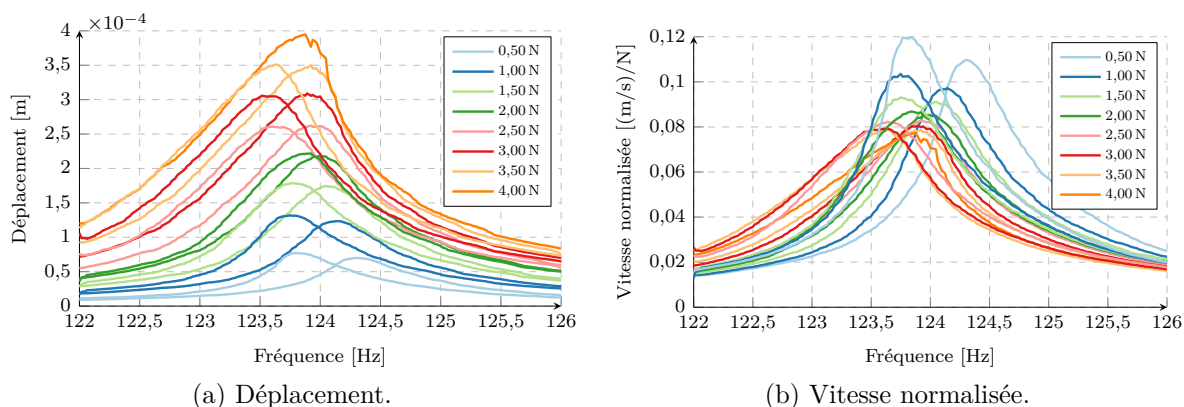


FIGURE J.27 – Réponses fréquentielles pour différents niveaux de force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

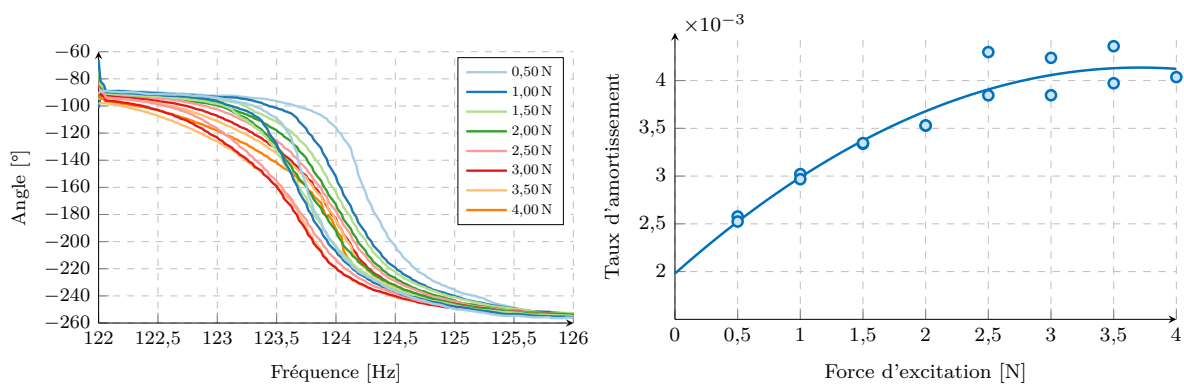


FIGURE J.28 – Phases en fonction de la force d'excitation mesurées sur l'aube 3.

FIGURE J.29 – Évolution du taux d'amortissement en fonction de la force d'excitation.



## Annexe K

# Maillages aléatoires incompatibles

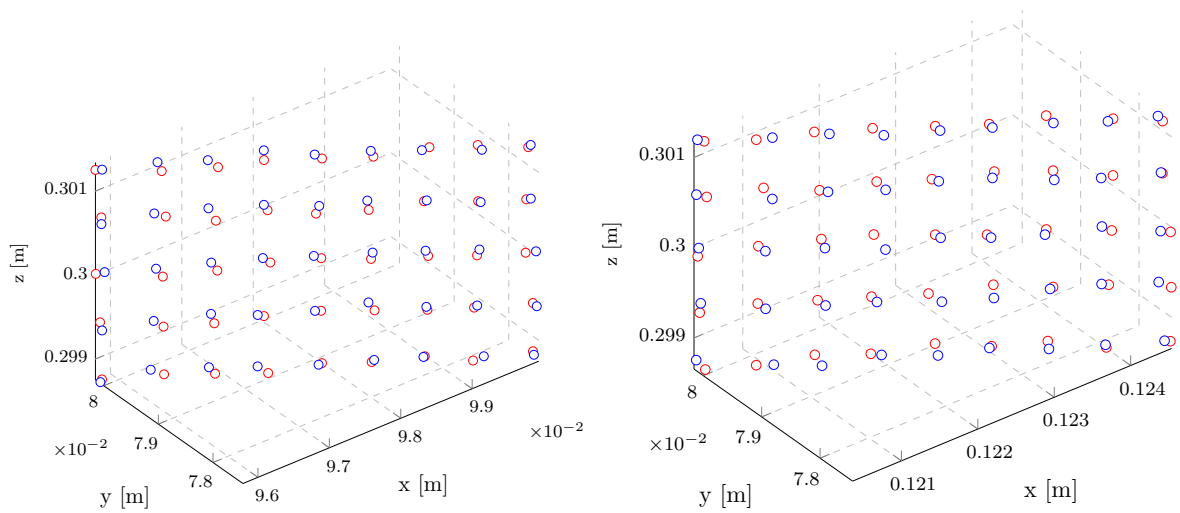


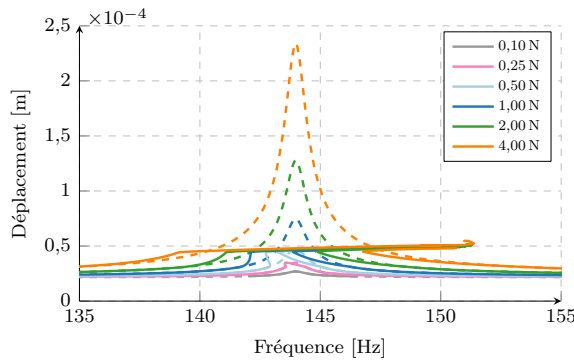
FIGURE K.1 – Maillage des surfaces de contact après avoir ajouté un déplacement aléatoire uniforme aux coordonnées nodales.



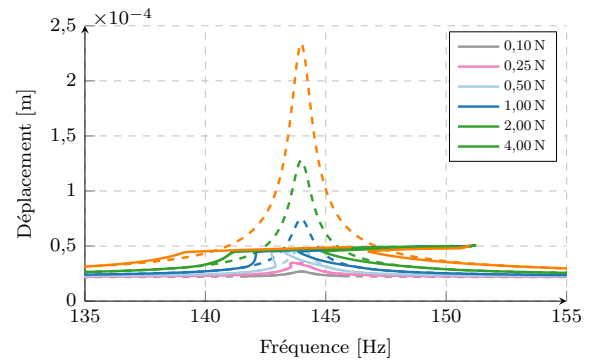
# Annexe L

## Réponses forcées numériques

### 1 Espacement des pieds des aubes de 20,30 mm



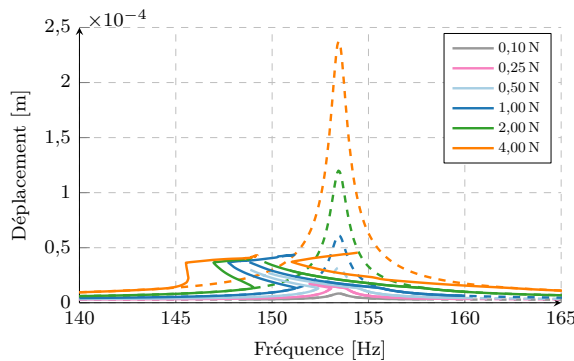
(a) Coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .



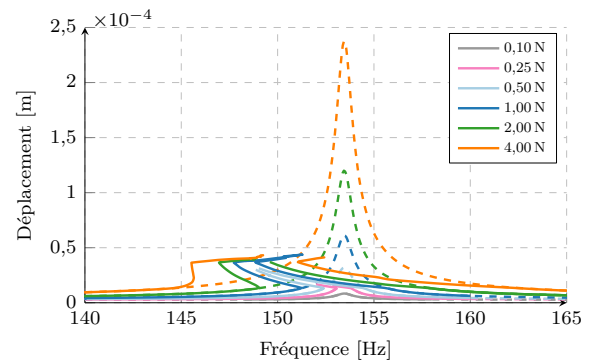
(b) Coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ .

FIGURE L.1 – Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation.

### 2 Espacement des pieds des aubes de 20,10 mm



(a) Coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .



(b) Coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ .

FIGURE L.2 – Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation pour une précharge statique donnée par un espacement des pieds de 20,1 mm.



### 3 Espacement des pieds des aubes de 19,80 mm

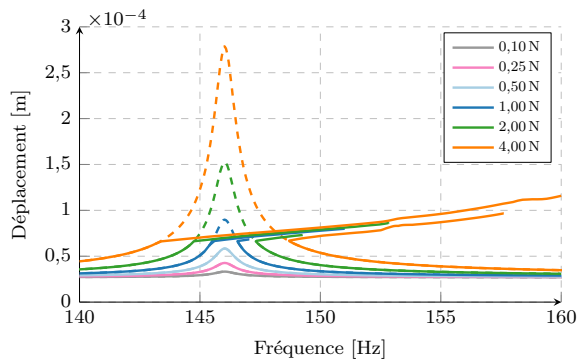
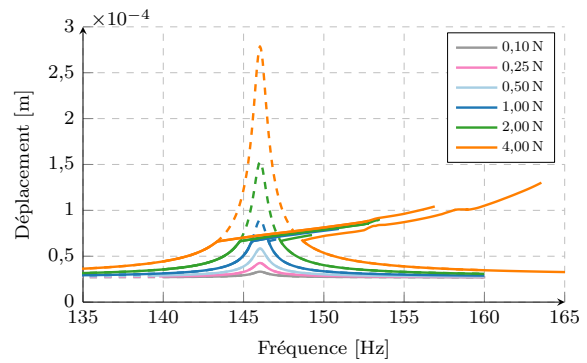
(a) Coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .(b) Coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ .

FIGURE L.3 – Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation.

### 4 Espacement des pieds des aubes de 19,70 mm

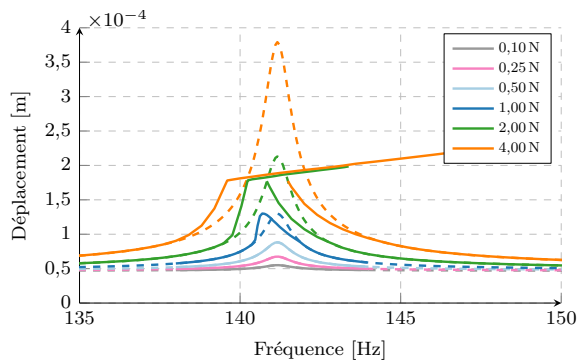
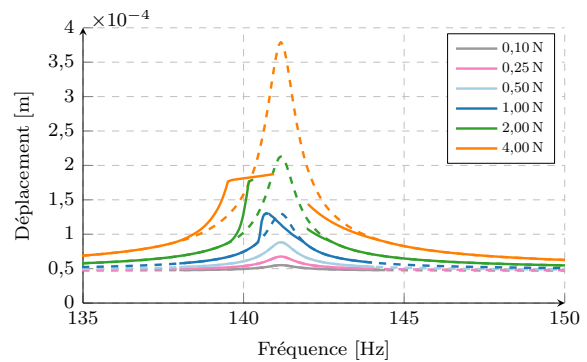
(a) Coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .(b) Coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ .

FIGURE L.4 – Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation.

## 5 Espacement des pieds des aubes de 19,60 mm

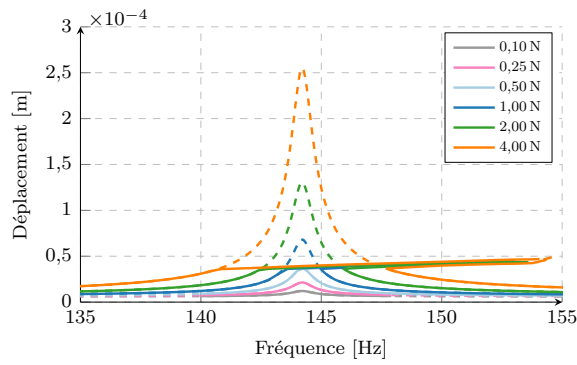
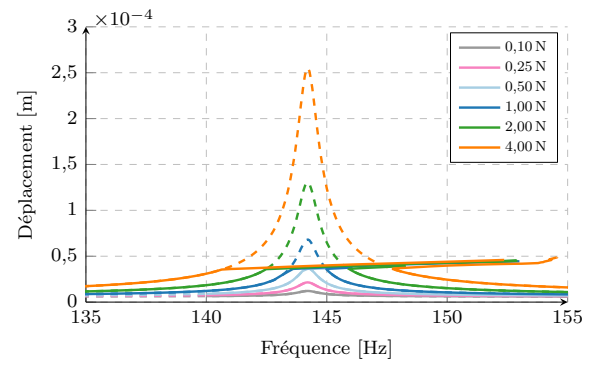
(a) Coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ .(b) Coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ .

FIGURE L.5 – Réponses forcées linéaires (--) et non-linéaires (—) selon différents niveaux de force d'excitation.



# Liste des publications personnelles

## Colloques internationaux avec actes publiés

- Hugo DE FILIPPIS, Fabrice THOUVEREZ, Laurent BLANC, Patrick GIRARD, Fabrice CHEVILLOT. « Non-Linear Numerical Simulation of Pre-Loaded Turbine Blades With Frictional Shroud Contact Under Dynamic Conditions ». Proceedings of the ASME Turbo Expo 2022 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition. Volume 8B : Structures and Dynamics — Probabilistic Methods ; Rotordynamics ; Structural Mechanics and Vibration. Rotterdam, Netherlands. June 13–17, 2022. V08BT27A003. ASME. DOI : <https://doi.org/10.1115/GT2022-79918>
- Hugo DE FILIPPIS, Fabrice THOUVEREZ, Laurent BLANC, Patrick GIRARD, Fabrice CHEVILLOT. « Experimental Nonlinear Analysis of Pre-Loaded Turbine Blades Dynamics With Frictional Shroud Contact ». Proceedings of the ASME Turbo Expo 2023 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition. Volume 11B : Structures and Dynamics — Emerging Methods in Engineering Design, Analysis, and Additive Manufacturing ; Fatigue, Fracture, and Life Prediction ; Probabilistic Methods ; Rotordynamics ; Structural Mechanics and Vibration. Boston, Massachusetts, USA. June 26–30, 2023. V11BT27A008. ASME. DOI : <https://doi.org/10.1115/GT2023-101727>



## COLOPHON

Mémoire de thèse intitulé « Dynamique non linéaire du contact inter-aubes de turbine : caractérisation expérimentale et simulation numérique », écrit par **Hugo DE FILIPPIS**, achevé le 29 février 2024, composé au moyen du système de préparation de document **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** et de la classe **yathesis** dédiée aux thèses préparées en France.

## **AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

Mme E. SADOULET-REBOUL

Maître de Conférences HDR- ENSMM, Département Mécanique Appliquée, équipes V3MQI, D-SMART, UFC - UFR ST, 15B avenue des Montboucons, 25030 Besançon cedex

et de

M. J-F. DEU

Professeur - CNAM Paris, LMSSC, Mécanique - case courrier 2D6R10, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris cedex 03

**Monsieur DE FILIPPIS Hugo**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale** Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 11 décembre 2023

Pour le directeur de l'École Centrale de Lyon  
Le directeur de la recherche



Christophe CORRE