



HAL
open science

L'approche arithmétique et géométrique de Poincaré au crible des neurosciences cognitives

Stéphane Ange Gondo

► **To cite this version:**

Stéphane Ange Gondo. L'approche arithmétique et géométrique de Poincaré au crible des neurosciences cognitives. Philosophie. Université de Lorraine; Université Alassane Ouattara (Bouaké), 2023. Français. NNT : 2023LORR0201 . tel-04546957

HAL Id: tel-04546957

<https://theses.hal.science/tel-04546957>

Submitted on 15 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Université Alassane Ouattara de Bouaké

Thèse

Présentée et soutenue publiquement pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Mention : **PHILOSOPHIE**

par **Stéphane Ange GONDO**

**L'APPROCHE ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DE POINCARÉ
AU CRIBLE DES NEUROSCIENCES COGNITIVES**

Sous la direction de Gerhard HEINZMANN et Ignace Ayénon YAPI

Date de la soutenance : 16 novembre 2023

Membres du jury :

Directeur de thèse : M. Gerhard HEINZMANN	Professeur émérite, Université de Lorraine, Nancy
Co-directeur de thèse : M. Ignace Ayénon YAPI	Professeur, Université Alassane Ouattara, Bouaké
Rapporteurs : Shahid RAHMAN	Professeur, Université de Lille III, Lille
: Depry Antoine N'GUESSAN	Professeur, Université Félix Houphouët Boigny, Abidjan
Président du jury : M. Christophe BOURIAU	Professeur, Université de Lorraine, Metz
Examinatrices : Mme Catherine ALLAMEL-RAFFIN	Professeure, Université de Strasbourg, Strasbourg
: Mme Paola CANTU	Chargée de recherche (CNRS), HDR, Université d'Aix-Marseille, Marseille
Invitée : Mme Adjoua Bernadette épouse Kouakou DANGO	Docteur, Université Alassane Ouattara, Bouaké

RÉSUMÉ :

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons d'examiner l'approche intuitionniste de l'arithmétique et psycho-physiologique de la géométrie de Poincaré à travers le prisme de la recherche moderne sur le cerveau et la capacité des humains à appréhender le nombre et la géométrie/l'espace. L'objectif de cette analyse est de déterminer si les recherches sur les corrélats neuronaux de l'acquisition des nombres et de la géométrie/l'espace peuvent contribuer à une meilleure compréhension des idées de Poincaré sur les mathématiques, tout en examinant la compatibilité de son approche constructiviste avec l'approche neuroconstructiviste des neurosciences cognitives.

À cette fin, nous avons choisi de nous focaliser sur quatre neuroscientifiques cognitivistes : Changeux, Dehaene, Damasio et Berthoz, qui font référence aux idées de Poincaré pour décrire les mécanismes neurobiologiques qui sous-tendent la compréhension et l'acquisition du nombre, de la géométrie/l'espace et de la prise de décision. Ainsi, nous examinons l'approche constructiviste de Poincaré, qui admet que l'expérience guide l'activité intuitive de création des nombres, à travers le prisme de l'approche neurocognitive de Changeux et l'intuition du nombre de Dehaene. De même, nous examinons l'approche psycho-physiologique de la géométrie à travers le prisme de l'approche neurophysiologique et cognitive de la géométrie proposée par Berthoz. Enfin, nous confrontons l'hypothèse poincaréenne selon laquelle l'intuition et l'émotion sont des composantes essentielles à l'invention à la théorie des marqueurs somatiques de Damasio.

À l'issue de cet examen, une première constatation met en évidence que les neurosciences cognitives renforcent certaines idées de Poincaré sur les mathématiques. Cependant, après une analyse approfondie, nous constatons que les idées fondamentales constituant l'édifice de la philosophie poincaréenne des mathématiques sont incompatibles avec les neurosciences cognitives. Cette incompatibilité s'explique par la volonté des neuroscientifiques cognitivistes d'ancrer les fondements des mathématiques au niveau de l'activité neuronale sous-jacente à l'évolution biologique, tout en défendant un déterminisme se réclamant de la dominance des aspects ontogénétiques sur les prédispositions phylogénétiques. Afin de préserver la liberté créatrice de l'esprit et le conventionnalisme défendus par Poincaré, et pour une compréhension plus large des processus cognitifs sous-jacents à la construction des concepts mathématiques abstraits et à la résolution des problèmes mathématiques complexes, nous prenons du recul par rapport à une telle vision déterministe.

Poincaré's arithmetic and geometric approach through the lens of cognitive neuroscience

ABSTRACT:

In this thesis, we propose to examine Poincaré's intuitionistic approach to arithmetic and his psycho-physiological approach to geometry through the prism of modern research on the brain and the human capacity to apprehend number and geometry/space. The aim of this analysis is to determine whether research into the neural correlates of number and geometry/space acquisition can contribute to a better understanding of Poincaré's ideas on mathematics, while examining the compatibility of his constructivist approach with the neuroconstructivist approach of cognitive neuroscience.

To this end, we have chosen to focus on four cognitive neuroscientists: Changeux, Dehaene, Damasio and Berthoz, who refer to Poincaré's ideas to describe the neurobiological mechanisms underlying the understanding and acquisition of number, geometry/space and decision-making. Thus, we examine Poincaré's constructivist approach, which accepts that experience guides the intuitive activity of creating numbers, through the prism of Changeux's neurocognitive approach and Dehaene's intuition of number. Similarly, we examine the psycho-physiological approach to geometry through the prism of Berthoz's neurophysiological and cognitive approach to geometry. Finally, we compare the Poincarean hypothesis that intuition and emotion are essential components of invention with Damasio's theory of somatic markers.

At the end of this examination, an initial observation is that cognitive neuroscience reinforces some of Poincaré's ideas on mathematics. However, on closer analysis, we find that the fundamental ideas that make up the edifice of Poincaré's philosophy of mathematics are incompatible with cognitive neuroscience. This incompatibility is explained by the desire of cognitive neuroscientists to anchor the foundations of mathematics at the level of the neuronal activity underlying biological evolution, while defending a determinism claiming the dominance of ontogenetic aspects over phylogenetic predispositions. In order to preserve the creative freedom of the mind and conventionalism defended by Poincaré, and for a broader understanding of the cognitive processes underlying the construction of abstract mathematical concepts and the resolution of complex mathematical problems, we step back from such a deterministic vision.

MOTS-CLÉS : Intuition, espace, intuition du nombre, fondements cognitifs de l'arithmétique et de la géométrie, neurosciences cognitives, émotion, nombre, neuroconstructivisme.

KEYWORDS: Intuition, space, number intuition, cognitive foundations of arithmetic and geometry, cognitive neuroscience, emotion, number, neuroconstructivism.

REMERCIEMENTS

La rédaction de cette thèse s'est faite, en grande partie, lors de notre séjour de recherche au sein du laboratoire des Archives Henri-Poincaré (Nancy). Par conséquent, nos premiers remerciements vont à l'endroit de notre directeur de recherche, le professeur Gerhard HEINZMANN, pour avoir suivi minutieusement l'évolution de cette thèse jusqu'à la fin. Pendant notre séjour à Nancy, nous avons énormément bénéficié de ses enseignements, de ses séminaires, de ses colloques et de ses nombreux écrits sur la philosophie des mathématiques de Poincaré.

Nous tenons également à exprimer notre sincère gratitude au professeur Philippe NABONNAND (ex Directeur des AHP) et à la direction des Archives Henri-Poincaré pour leur accueil chaleureux et surtout pour le soutien financier dont nous avons bénéficié au cours de l'année académique 2020/2021. Nous n'oublions pas ses précieuses remarques et suggestions pertinentes qui ont conduit au choix définitif du sujet de cette thèse. Nous sommes également reconnaissants envers tous les doctorants et les membres des Archives Henri-Poincaré, en particulier Pierre Édouard Bour et Ramatoulaye Touré, qui nous ont accueilli à bras ouverts depuis notre arrivée à Nancy.

Nos remerciements ne se limitent pas aux membres des Archives Henri-Poincaré de Nancy, mais s'étendent également au professeur Ignace Ayénon YAPI, notre co-directeur de thèse, qui nous a guidé dans nos premiers pas dans la recherche du côté de la Côte d'Ivoire. Il a été le directeur de nos travaux de recherche de master à l'Université Alassane Ouattara de Bouaké et l'aboutissement de cette thèse est dû à ses encouragements, à ses instructions et son soutien sans faille.

Nous tenons à exprimer notre chaleureuse reconnaissance à Otmar ÖHLINGER, qui a contribué à l'aboutissement de cette thèse par ses suggestions et remarques critiques sur la partie consacrée aux neurosciences cognitives, ainsi qu'au docteur Richard Axel EBA pour la correction et la mise en forme de cette thèse.

Nous ne pouvons pas omettre de remercier nos collègues et le personnel administratif du Lycée Mixte 1 de Yamoussoukro, notamment Madame INAO née Zapé Marie Rachelle, pour son soutien indéfectible et ses conseils qui nous ont été d'une grande utilité.

Enfin, nous sommes reconnaissants envers tous les membres de notre famille, en particulier Diane KACOU et Kiriane GONDO, qui ont supporté les sacrifices financiers ainsi que nos longs moments d'absence pendant la rédaction de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE : DES FONDEMENTS PHILOSOPHIQUES AUX FONDEMENTS COGNITIFS DES MATHÉMATIQUES.....	8
PREMIÈRE PARTIE : LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE POINCARÉ	24
CHAPITRE I : LES CONCEPTIONS « LOGIQUES » DES MATHÉMATIQUES AU TRIBUNAL DE POINCARÉ	27
I- Les prémisses de la critique poincaréenne des conceptions « logiques » des mathématiques	27
I-1- L'axiomatique logique	28
I-2- Le logicisme	33
II- Les recensions poincaréennes des conceptions « logiques » des mathématiques.....	42
II-1- Critique poincaréenne de l'axiomatique logique.....	42
II-2- Critique poincaréenne du logicisme : le raisonnement logique en mathématiques est insuffisant.....	51
CHAPITRE II : L'ARITHMÉTIQUE ET LA GÉOMÉTRIE COMME ARTEFACT DE L'ESPRIT GUIDÉ PAR L'EXPÉRIENCE	62
I- S'écarter des conceptions « logiques » des mathématiques	65
I-1- Le fondement des nombres selon Poincaré.....	65
I-2- L'interaction intuition / émotion dans l'invention	79
II- La théorie psycho-physiologique de la géométrie de Poincaré.....	93
II-1- De l'expérience sensori-motrice à la géométrie : la genèse logique de la géométrie selon Poincaré (1898).....	94
II-2- L'espace géométrique et l'espace sensible	105
II-3- La genèse psychologique de la géométrie selon Poincaré (1903) : le continu physique comme structure intuitive	122

DEUXIÈME PARTIE : L'APPROCHE NEUROCONSTRUCTIVISTE DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE LA GÉOMÉTRIE	139
CHAPITRE I : LE CONSTRUCTIVISME ARITHMÉTIQUE ET LA PRISE DE DECISION DANS LA SPHÈRE DES NEUROSCIENCES COGNITIVES.....	141
I- La construction mathématique par épigénèse neuronale : l'approche neurocognitive de Changeux	141
II-L'intuition numérique ou le sens du nombre selon Dehaene.....	154
III-L'interaction intuition / émotion dans la prise de décision.....	172
CHAPITRE II : LE CONSTRUCTIVISME GÉOMÉTRIQUE SELON LES NEUROSCIENCES COGNITIVES	184
I-Du corps à l'espace : l'approche neurophysiologique de l'espace de Berthoz	185
II-Phylo-ontogenèse de la représentation spatiale à la base de la géométrie	195
TROISIÈME PARTIE : LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE POINCARÉ À L'ÉPREUVE DES NEUROSCIENCES COGNITIVES	206
CHAPITRE I : LA THÉORIE INTUITIONNISTE DE POINCARÉ ET LE NEUROCOGNITIVISME ARITHMÉTIQUE.....	208
CHAPITRE II : BERTHOZ ET LA THÉORIE SPATIALE DE POINCARÉ.....	224
CONCLUSION GÉNÉRALE	234
Résumé des principaux résultats	235
Limites des neurosciences cognitives dans la construction et la compréhension des constructions arithmético-géométriques et actualité de la pensée de Poincaré.....	246
Les défis actuels et implications futures des neurosciences cognitives	249
BIBLIOGRAPHIE	251
INDEX DES NOMS	271

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Des fondements philosophiques aux fondements cognitifs des mathématiques

Dans le cadre de ce travail de recherche, nous proposons d'examiner les idées philosophiques de Poincaré au crible des résultats des neurosciences cognitives. Cette démarche est justifiée d'une part par cette déclaration de Brenner : « *aujourd'hui, le développement des sciences [et des neurosciences] cognitives incite à adopter un autre regard sur les travaux de Poincaré* »¹, et d'autre part, par la préoccupation exprimée par Longo en ces termes : « *il est temps de reprendre les idées esquissées par Poincaré (...), pour redémarrer une réflexion scientifique, en fait mathématique, sur l'épistémologie des mathématiques et leur origine cognitive* »². Ces deux déclarations expriment la nécessité d'étudier les rapports entre l'approche poincaréenne des mathématiques et les récents résultats des neurosciences cognitives en ce qui concerne la recherche des fondements cognitifs des mathématiques. Ce travail de recherche se propose ainsi de répondre à la question de savoir si les neurosciences cognitives permettent de jeter un nouveau regard sur les mathématiques de Poincaré et sur sa philosophie des mathématiques. Plus précisément, nous souhaitons comprendre comment les différentes théories neurocognitives récemment proposées par les experts en neurosciences cognitives pour expliquer nos capacités cognitives d'acquisition mathématique, qui n'existaient pas à l'époque de Poincaré, peuvent être mises en relation avec son épistémologie mathématique développée à la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e siècle.

Nous avons jugé nécessaire et pertinent d'analyser les relations entre l'approche poincaréenne des mathématiques et les découvertes des neuroscientifiques cognitivistes concernant les fondements cognitifs des mathématiques, car comme le souligne Brenner, Poincaré s'est distingué de manière significative des logiciens et logicistes de son époque en proposant une conception mathématique qui invite à explorer les liens entre la psychologie et la physiologie. Sa position « intuitionniste »³, qui constitue un rejet ferme du réalisme mathématique de Platon, repose sur l'idée que l'intuition et l'expérience sont indispensables à la construction des nombres, de la géométrie et de l'espace, ainsi qu'à la démonstration

¹ BRENNER, Anastasios. La réception du logicisme en France en réaction à la controverse Poincaré-Russell. *Revue d'histoire des sciences*, juillet-décembre 2014, Tome 67-2, p. 242. Disponible sur : <https://www.cairn.info/revue-d-histoire-des-sciences-2014-2-page-231.htm>.

² LONGO, Giuseppe. Géométrie et Cognition. Entre fondements des mathématiques, Théorie de la connaissance et cognition. *Revue de synthèse*. Disponible sur le web : https://synth.revuesonline.com/gratuit/SYNTH124_1_11873_2008_Article_BF02963398.pdf.

³ Nous utilisons dans la suite ce terme non pas pour désigner une éventuelle similitude de l'approche de Poincaré avec l'intuitionnisme mathématique de Brouwer, mais pour souligner que Poincaré attribue à notre intellect une capacité intellectuelle particulière. C'est avec regret que nous laisserons de côté la polémique autour de la question de savoir si oui ou non Poincaré fait partie des mathématiciens intuitionnistes.

mathématique. Poincaré faisait également appel à la théorie de l'évolution darwinienne pour justifier sa position anti-réaliste et son approche de la reconstruction (logique) des nombres et de la géométrie. Notre ambition étant d'étudier les rapports entre l'approche constructiviste de Poincaré et l'approche neuroconstructiviste des neurosciences cognitives, nous devons relater la philosophie poincaréenne des mathématiques en mettant en évidence les éléments ou les idées centrales allant dans le sens des résultats des neurosciences cognitives ainsi que celles qui s'en distinguent.

Dans la plupart de ses écrits philosophiques, Poincaré a insisté à maintes reprises sur le rôle significatif de l'esprit créatif, donc de l'aspect actif de l'esprit humain, mais aussi de l'expérience qui est l'aspect passif de l'esprit humain, dans la construction de la géométrie et de l'arithmétique. Ses articles portant sur les fondements de l'arithmétique sont consacrés à une vive critique du logicisme et du formalisme. Cela est particulièrement vrai pour les deux premiers chapitres de *La science et l'hypothèse*, où Poincaré examine de manière critique le raisonnement mathématique mis en avant par ceux qu'il appelle « logicistes » (Couturat, Russell, etc.). Il remarque de manière polémique que le raisonnement mathématique des logicistes repose en partie sur le syllogisme aristotélicien⁴, et il considère que la méthode analytique, qui est à la base du logicisme, ne permet pas une compréhension complète du raisonnement mathématique. Poincaré soutient donc, contre la démarche logiciste, que le raisonnement mathématique ne peut se faire exclusivement dans le cadre de la logique, mais qu'il est indissociable de ses fondements empiriques et intuitives. En outre, dans *La logique de l'infini (1912)*⁵, Poincaré observe que l'approche logiciste s'inscrit dans le prolongement du réalisme mathématique de Platon. Par conséquent, il critique l'approche réaliste des logicistes, dont l'objectif était de transposer les mathématiques dans un cadre logico-formel afin de justifier que les entités mathématiques ne sont pas des constructions mentales ou intuitives, mais qu'elles sont des pensées *objectives* appartenant en dernière instance à une troisième sphère intermédiaire entre les objets physiques et les idées.

Après avoir remis en question les présupposés du logicisme, Poincaré entreprit de poser les fondements « cognitifs » des mathématiques en établissant un lien entre l'esprit créatif et

⁴ Bien qu'il soit vrai que la logique de Russell soit bien différente du syllogisme aristotélicien qu'il admettait, Poincaré faisait remarquer que la méthode analytique n'est rien d'autre qu'une extension de la logique aristotélicienne. Cf. POINCARÉ, Henri. *Les mathématiques et la logique*. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1905, 13, p. 826. Voir aussi *Science et méthode*. Paris, éd. Kimé, 1999, p. 139.

⁵ POINCARÉ, Henri. *La logique de l'infini*. *Scientia* 12, 1912, p. 1-11.

l'expérience à travers une approche « intuitionniste ». Dans ce travail de recherche, nous utilisons le terme « intuitionniste » pour souligner le rôle de l'intuition et de l'expérience dans la construction mathématique⁶. Alors, pourquoi Poincaré a-t-il trouvé nécessaire d'associer intuition et expérience ? Bien que nous ayons mentionné que Poincaré considère sa position intuitionniste comme une alternative au platonisme des logicistes, il convient de noter que les formalistes ne sont pas platonistes non plus. En fait, Poincaré s'intéresse à la nature du raisonnement mathématique et estime qu'une position intuitionniste est nécessaire pour comprendre le raisonnement par récurrence, qui est considéré comme le raisonnement par « excellence » dans les démonstrations mathématiques. Poincaré jugeait ce mode de raisonnement bénéfique pour l'arithmétique, du fait qu'il offre à l'intuition la possibilité de construire une suite indéfinie de nombres avec l'aide de l'expérience. Notre objectif étant d'étudier les rapports entre les réflexions philosophiques de Poincaré et les résultats des neurosciences cognitives, nous chercherons à comprendre, par le biais des récents résultats disponibles dans ce domaine, la façon dont se fait cette coordination qui serait à l'origine de la création/ construction des nombres.

Poincaré a exploré diverses réflexions philosophiques en géométrie qui ont fonctionné en parallèle de son approche intuitionniste pour expliquer la construction des nombres en arithmétique. Dans ce domaine, il s'est opposé aux conceptions géométriques dominantes de son époque, à savoir le kantisme et l'empirisme géométrique. Sa critique et son rejet du kantisme furent liés à l'apparition des géométries non-euclidiennes qui, fustigeant l'absoluité de la géométrie euclidienne, prouvait que les axiomes de la géométrie ne sont pas des jugements synthétiques *a priori* au sens de Kant. Sa critique de l'empirisme géométrique reposait sur l'idée que si la géométrie était une science expérimentale, elle serait nécessairement « *approximative et provisoire* »⁷, alors que la réalité démontre le contraire. Son argument décisif⁸ reposait sur l'impossibilité de trouver une propriété pouvant servir de critère absolu pour reconnaître, par exemple, une ligne droite et la distinguer de toute autre ligne : chaque expérience porte autant

⁶ Nous verrons plus loin que le terme « intuitionnisme », dans la perspective de Poincaré, fait référence à [l'interaction entre l'«intuition pure ou intellectuelle» et l'«intuition sensible»](#). Cette précision faite, nous cesserons de mettre les guillemets autour du terme intuitionnisme dans la suite du texte.

⁷ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. Paris, éd. Champs Flammarion, 2000, p. 93.

⁸ En fait, l'approximation à la géométrie euclidienne pourrait être si bonne que l'on peut décider qu'elle est la géométrie de l'espace.

sur la propriété qu'elle est censée tester que sur le contexte théorique.⁹ C'est ainsi qu'il rejeta systématiquement cette conception géométrique.

En plus de rejeter ces deux conceptions géométriques, Poincaré s'est vigoureusement opposé à Couturat (1897), Russell (1898) et Hilbert (1899)¹⁰, qui suivaient une conception mixte, kantienne et empirique (Russell, Couturat) ou formaliste (Hilbert). Refusant de dissocier l'expérience et la créativité humaine dans la construction géométrique, Poincaré conçoit la géométrie comme étant sortie de l'expérience sensori-motrice sans pour autant tomber dans l'empirisme géométrique. Sa principale thèse est que la créativité humaine engendre la géométrie à partir des déplacements, des parades ou des mouvements que nous effectuons lors de notre orientation dans l'espace sensible. Dans *Des fondements de la géométrie (1898)*¹¹ où la théorie psycho-physiologique de la géométrie est présentée pour la première fois en intégralité, Poincaré, montra que la genèse logique de la géométrie peut s'effectuer grâce aux sensations visuelles, musculaires, tactiles, proprioceptives, vestibulaires qui sont greffées au corps biologique. Dans le but de sauvegarder les éléments empirico-intuitives à la base de la construction de la géométrie, il conçoit l'accès cognitif à la géométrie et à la notion d'espace à travers la coordination entre la créativité humaine et l'expérience. La teneur épistémologique essentielle de cet essai est sans doute le fait de montrer comment la créativité humaine œuvre à la compensation des diverses sensations issues du corps pour donner naissance à la géométrie et à la notion de l'espace.

En plus d'insister sur l'interconnexion des facultés innées et de l'expérience externe dans la genèse de la géométrie, la théorie psycho-physiologique de la géométrie proposée par

⁹ « *Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, rit ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace* ». Cf. POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, op. cit. , p. 101.

¹⁰ Pour ce qui concerne la polémique entre Poincaré et les auteurs cités au sujet des fondements de la géométrie, voir POINCARÉ, Henri. Réponse à quelques critiques. *Revue de Métaphysique et de Morale*, volume 5, 1987, p. 59-70. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1893&submit_search=Recherche.

RUSSELL, Bertrand. Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques ? *Revue de la Métaphysique et de la Morale*, tome 6, n°6, 1898, p. 759-776. POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie : à propos d'un livre de M. Russell. *Revue de métaphysique et de morale*, volume 7, 1899, p. 251-279. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1899&submit_search=Recherche. HILBERT, David. *Les Principes fondamentaux de la géométrie (1899)*. Traduit par L. Laugel. Paris. Gauthier-Villars, 1900. POINCARÉ, Henri. Rapport sur les Travaux de M. Hilbert... Présentés au Troisième Concours du Prix Lobatchefsky. *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan*, volume 14, 1904, p. 10-48. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1904&submit_search=Recherche.

¹¹ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportunisme scientifique*, Berlin, publications des Archives Henri-Poincaré-Poincaré, 2002.

Poincaré en 1898 souligne également, de manière implicite, l'implication des prédispositions phylogénétiques et du développement ontogénétique. Ces facteurs phylo-ontogénétiques deviendront plus apparents dans les articles de 1903¹² et 1907¹³, où ce mathématicien s'inscrit dans la continuité de l'évolution darwinienne en considérant l'espace tridimensionnel euclidien comme un héritage phylogénétique. Bien que cet aspect ne soit pas véritablement au cœur des préoccupations de Poincaré, les spécialistes de la cognition spatiale précisent aujourd'hui les relations entre la phylogenèse et l'ontogenèse dans la représentation de l'espace. Il serait donc intéressant d'explorer, grâce à leurs contributions, le rôle des éléments héréditaires dans la construction de l'espace qui se produit au cours du développement post-natal, et de comprendre dans quelle mesure notre perception de la tridimensionnalité de l'espace repose partiellement sur la phylogenèse des corrélats neurophysiologiques, considérée comme une donnée *a priori*.

L'approche arithmético-géométrique de Poincaré, du fait de son plaidoyer en faveur de l'anthropocentrisme mathématique (c'est-à-dire la mise en avant de la créativité humaine et des éléments héréditaires dans la construction mathématique), peut être considérée comme une vision prémonitoire de la conception naturaliste¹⁴ promulguée aujourd'hui par les neuroscientifiques cognitivistes. Cependant, au fil de l'histoire, cette vision mathématique a été reléguée au second plan en raison de l'hégémonie des théories logico-formalistes développées par des logicistes tels que Frege, Russell, Couturat, etc., ainsi que par des formalistes, notamment Hilbert, au début du XX^e siècle. Mais qu'enseignent les neurosciences cognitives d'aujourd'hui sur les fondements des mathématiques ?

Avant d'aborder cette question, il est essentiel de définir ce que sont les neurosciences cognitives. Émergées à partir de 1980 avec l'essor considérable des neurosciences fondamentales, les neurosciences cognitives peuvent être considérées, selon les expressions de Gazzaniga, comme « la biologie de l'esprit ». Plus précisément, les neurosciences cognitives

¹² POINCARÉ, Henri. L'espace et ses trois dimensions, article publié dans la *Revue de métaphysique et de morale*, 1903, tome II, p. 407- 429. Cet article est repris, avec quelques modifications, dans *La valeur de la science*.

¹³ POINCARÉ, Henri. La relativité de l'espace, article publié dans *L'année psychologique*, 1907, 13, p. 1-17. Cet article est repris dans *Science et méthode*.

¹⁴ Promulguée par les neurosciences cognitives, la conception naturaliste des mathématiques tente de réfuter le réalisme mathématique de Platon en proposant une interprétation du processus de construction et d'acquisition mathématique basée sur la phylogenèse et l'ontogenèse. La thèse centrale du naturalisme mathématique est que les entités mathématiques n'existent pas dans un monde idéal et abstrait, mais qu'elles existent phylogénétiquement dans les neurones et les synapses (que comporte le cerveau humain) sous forme de pré-représentation et que l'acquisition des connaissances mathématiques se fait grâce aux séances d'apprentissage qui ont lieu au cours du développement individuel.

sont la branche des neurosciences qui cherche à expliquer de façon empirique la cognition par rapport aux mécanismes neurobiologiques. Combinant les sciences cognitives (qui considèrent que la cognition est indépendante de la matière cérébrale et des neurones) et les neurosciences fondamentales (sciences du système nerveux), les neurosciences cognitives cherchent à rendre compte des phénomènes psychologiques (pensée, réflexion, imagination, invention, l'appréhension, la reconnaissance, l'acquisition, etc.) à partir d'une description des neurones¹⁵. Les neuroscientifiques cognitivistes s'attachent tout d'abord à l'étude empirique des processus psychologiques, puis cherchent à concevoir des modèles cognitifs permettant de déterminer les structures cérébrales spécifiques et les mécanismes neuronaux impliqués dans les tâches cognitives ainsi que leur rôle précis. Fustigeant la thèse des sciences cognitives affirmant que les phénomènes psychologiques sont complètement indépendants des neurones, ainsi que le platonisme mathématique soutenant l'existence d'entités mathématiques dans un monde suprasensible, les neurosciences cognitives considèrent que la cognition, y compris la cognition mathématique, nécessite une activité neuronale. C'est cette vision des choses qui poussent les neurosciences cognitives à montrer comment le processus de construction mathématique est lié aux processus cérébraux et aux circuits neuronaux. Au cours des dernières décennies, les recherches en neurosciences cognitives ont été dominées par cette vision de la recherche des fondements cognitifs de l'arithmétique et de la géométrie.

Évidemment, pour déterminer les fondements cognitifs des mathématiques, les neurosciences cognitives vont se servir de l'explication mécaniste causale¹⁶ en vigueur dans les neurosciences fondamentales. Cependant, elles vont plus loin que les premières en développant de nouvelles techniques (notamment l'imagerie cérébrale, l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), la Tomographie par émission de positrons (TEP), l'électrophysiologie, la stimulation cérébrale non invasive, l'optogénétique, la modélisation informatique, etc.) qui permettent aux chercheurs de visualiser les mécanismes cérébraux à la base des phénomènes mentaux et cognitifs, de cartographier les zones cérébrales qui sont activées lors de l'exécution de tâches cognitives spécifiques, ainsi que les interactions entre les différentes régions du

¹⁵ REVONSUO, Antti. Sur la nature des explications dans les neurosciences. In *Des neurosciences à la philosophie : neurophilosophie et philosophie des neurosciences*. Paris, Éditions Syllepse, 2008, p. 42.

¹⁶ Opposée à l'explication théorique des phénomènes psychologiques, l'explication mécaniste causale se réfère à la tentative d'expliquer les processus psychologiques ou cognitifs (pensée, perception, attention, mémoire, langage, raisonnement) en termes de mécanismes neuronaux. Ces mécanismes sont supposés être à l'œuvre dans le cerveau lors de l'exécution de tâches cognitives, et peuvent être décrits à différents niveaux d'abstraction, allant des réseaux de neurones individuels aux systèmes neuronaux plus larges.

cerveau. Ces nouvelles techniques, quoique largement controversées en raison de leur caractère formel et des nombreux problèmes philosophiques qu'elles suscitent¹⁷, fournissent une explication plausible de la façon dont les processus cognitifs émergent à partir de l'activité neuronale et comment le cerveau et ses neurones engendrent la pensée mathématique. Étant donné le grand nombre de techniques et méthodes utilisées par les neuroscientifiques dans ce domaine, nous avons choisi de nous focaliser sur trois d'entre elles qui se réfèrent à Poincaré dans la description des corrélats neuronaux ou fondements cognitifs de l'arithmétique et de la géométrie.

La première est la méthode neurobiologique et neurophysiologique stimulée par Jean-Pierre Changeux et Antonio Damasio. Depuis quelques années, ces deux neurobiologistes se sont engagés dans des recherches approfondies sur le cerveau humain afin de découvrir les corrélats neuronaux des objets mathématiques (Changeux) ainsi que les bases neuronales de la prise de décision intuitive (Damasio). La seconde méthode est celle de la neuroimagerie (appelée aussi l'imagerie cérébrale), qui est largement utilisée par Stanislas Dehaene et ses collaborateurs en psychologie cognitive. Cette approche permet de décrypter les mécanismes de la pensée ou des états psychiques. Grâce à cette méthode, ils sont parvenus à confirmer l'existence des systèmes neuronaux de numérosités liés au concept de nombres et à nos intuitions mathématiques. La dernière est la méthode neurophysiologique et neuroanatomique qui a permis, récemment, à Alain Berthoz de déceler les processus physiologiques des processus neurocognitifs de la représentation spatiale et ainsi d'élaborer sa théorie neurophysiologique de l'espace.

Les expériences que ces neuroscientifiques cognitivistes ont mené à l'aide de ces trois méthodes indiquent d'une manière similaire que les fondements empiriques des mathématiques sont à rechercher dans l'organisation du cerveau et des neurones, ainsi que dans leur fonctionnement et évolution post-natale. En interprétant la pensée mathématique en termes d'organisation, de fonctionnement et d'évolution de l'appareil cérébral (et des mécanismes neuronaux qui les sous-tendent), les neurosciences cognitives soutiennent implicitement que les mathématiques ne sont pas séparables de l'homme, de son cerveau et de son histoire. De fait, les résultats fournis par les investigations de ces neuroscientifiques cognitivistes ont donné lieu à un vaste mouvement de réexamen et de réévaluation de certaines théories importantes de

¹⁷ Pour une critique détaillée des méthodes des neurosciences cognitives, voir REVONSUO, Antti. Sur la nature des explications dans les neurosciences in *Des neurosciences à la philosophie : neurophilosophie et philosophie des neurosciences*. Paris, Éditions Syllepse, 2008, p. 57-63.

la philosophie des mathématiques du XIX^e et du XX^e siècles. C'est dans ce contexte que plusieurs idées centrales de Poincaré ont été revisitées et réévaluées en vue de leur donner l'attention qu'elles n'avaient pas reçue pendant les deux siècles derniers. Il convient cependant de souligner que les résultats des neurosciences cognitives ont donné lieu à deux interprétations contradictoires.

La première interprétation consiste à considérer les résultats des neurosciences cognitives comme un changement de paradigme par rapport à l'époque de Poincaré. En effet, si nous considérons les neurosciences cognitives comme des sciences spécialisées qui n'existaient pas à l'époque de Poincaré dans ses formes spécifiques d'accès aux corrélats neuronaux, les techniques et méthodes d'analyse des états psychiques et des processus physiologiques des processus neurocognitifs, développées bien plus tard, conduisent à des manières de voir si fondamentalement différentes qu'il en résulte un changement de paradigme. C'est dans cette optique que certains détracteurs des neurosciences cognitives estiment qu'il n'y a pas de lien entre les neurosciences cognitives et les mathématiques au sens où il n'y a pas de « neuroconnaissances » mathématiques. Pour Olivier Keller, par exemple, ce que nous apprennent les neurosciences cognitives du fonctionnement du cerveau et du sens du nombre ne peut pas nous aider à comprendre la construction des concepts mathématiques avancés. Car le programme de recherche des neurosciences cognitives repose, selon lui, sur un protocole d'expériences non fiables et comporte un préjugé nuisible à la recherche des fondements des mathématiques¹⁸.

À l'opposé de cette interprétation négative, certains historiens et philosophes des mathématiques, tels que Longo, estiment que les résultats des expériences des neurosciences cognitives méritent d'être analysés pour comprendre réellement le fondement des nombres, de la géométrie et de l'espace. C'est cette dernière interprétation que nous suivons dans ce travail de recherche. En effet, notre objectif est d'établir un pont entre l'approche poincaréenne des mathématiques et les théories neurocognitives. Pour cela, nous examinerons les arguments avancés par Poincaré lui-même ainsi que par les neuroscientifiques cognitivistes, et les traduirons dans une perspective élargie afin de déterminer les convergences et divergences spécifiques dans ce domaine, en tenant compte du changement de paradigme déjà présent dans la question initiale. Notre démarche consistant à mettre en relation les réflexions de Poincaré à

¹⁸ KELLER, Olivier. *L'invention du nombre*. Paris, Classiques Garnier, 2016, annexe A, p. 171-179.

celles des neuroscientifiques cognitivistes tourne autour de la question suivante : comment le nombre et la géométrie/ l'espace peuvent-ils résulter d'une évolution biologique ?

Comme indiqué précédemment, ce problème ne fut qu'une préoccupation sous-jacente aux réflexions philosophiques de Poincaré. En revanche, ce problème concerne de manière particulièrement forte les neuroscientifiques cognitivistes, car ils cherchent à établir les fondements des mathématiques en s'appuyant sur les prédispositions phylogénétiques et le développement ontogénétique post-natal. En effet, leur explication naturaliste repose sur l'idée que les corrélats neurophysiologiques sont innés, selon Dehaene et Berthoz, par exemple. Selon eux, le nombre et l'espace sont présents chez les individus dès la naissance sur le plan phylogénétique, et ils se précisent et se perfectionnent grâce à l'apprentissage synaptique qui se déroule au cours de l'évolution individuelle (ontogénèse). Ainsi, le choix de la seconde interprétation nous semble pertinent pour comprendre, en accord avec les neuroscientifiques cognitivistes, l'importance de la phylogénèse et du développement ontogénétique dans le processus de construction et de compréhension des mathématiques.

Mais, si nous optons pour cette seconde interprétation, nous rencontrons immédiatement une difficulté liée à la relation entre Poincaré et Kant. Si l'on interprète l'épistémologie poincaréenne, en particulier sa conception intuitionniste, comme comportant un « *kantian flavour* »¹⁹, cela exclut toute possibilité de rapprocher les idées de Poincaré des découvertes des neurosciences cognitives, car la vision spécifique de la spontanéité de l'esprit acceptée par Poincaré est implicitement rejetée par Kant à travers son rejet de l'« intuition intellectuelle ». Dans la *Critique de la raison pure*, Kant qui semble adhérer à quelques idées de Locke affirme ceci à propos de la production des concepts :

*les impressions des sens nous fournissent, en effet, la première occasion de déployer (...) toute notre faculté de connaître et de constituer l'expérience. Celle-ci contient deux éléments très différents, à savoir : une matière de connaissance fournie par les sens, et une certaine forme servant à ordonner cette matière et venant de la source intérieure de la pensée pure, lesquelles n'entrent en jeu et ne produisent les concepts qu'à l'occasion de la première*²⁰.

En affirmant que notre faculté de connaissance commence par les impressions sensorielles, Kant laisse entendre que l'esprit humain est incapable de produire spontanément des concepts en l'absence réelle d'objets physiques. Par conséquent, lorsqu'il vante l'utilité des

¹⁹ LADYMAN, James. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Structural réalism, 2014.

²⁰ KANT, Emmanuel. *Critique de la raison pure*. Paris, Tome I, seconde édition, Librairie Joseph Gibert, 1943, p. 122.

travaux de Locke en la matière²¹, il sous-entend que l'esprit humain serait dépourvu de capacités cognitives innées à la naissance. Bien que Kant ait eu le mérite de mettre en évidence le caractère intuitif et synthétique du raisonnement mathématique dans son ouvrage, il a sous-estimé les performances intuitives (ou mentales) innées en s'efforçant de distinguer l'« intuition sensible et pure »²² et l'« intuition intellectuelle ». Il considérait cette dernière comme une réalité intelligible, donc inaccessible à l'esprit humain.

Bon nombre de commentateurs, après avoir étudié la relation entre Poincaré et Kant²³, ont démontré que l'approche intuitionniste de Poincaré a été influencée par la conception kantienne des mathématiques. L'influence philosophique de Kant sur Poincaré peut être évaluée en examinant sa position contre les logicistes. En effet, lors du débat opposant Poincaré à Russell, Couturat et Zermelo sur la nature du raisonnement arithmétique, Poincaré soutenait ardemment Kant, qui avait démontré que les propositions de l'arithmétique étaient des jugements synthétiques *a priori*²⁴. S'il est vrai que la conception intuitionniste de Poincaré a un fondement kantien, nous tentons de lever la difficulté relevée ci-dessus en montrant, au sein de cette étude, que Poincaré se démarque de Kant en ce qui concerne la nature et les performances de l'intuition.

Contrairement à Kant, qui a rejeté l'activité spontanée de l'intuition et a ainsi nié la capacité de l'esprit humain à accéder directement aux choses nouménales, Poincaré met en

²¹ *Idem*

²² Chez Kant, l'intuition est dite « sensible » ou « empirique » lorsque l'esprit établit le contact avec l'objet par la sensation. Par contre, l'intuition est dite « pure » lorsqu'elle est vide de toute matière issue de la sensation. Dans l'intuition pure, l'esprit n'a pas recours aux objets sensibles. À partir de cette distinction, Kant concentre son étude sur l'intuition pure en étudiant la possibilité d'intuitionner sans les formes pures de la sensibilité. Il en conclut qu'il est impossible d'intuitionner sans recourir aux formes pures de la sensibilité que sont l'espace et le temps. La conséquence de cette conclusion de Kant est que l'homme ne possède pas l'intuition intellectuelle, car il n'a pas la possibilité d'intuitionner les choses dans leur réalité nouménale sans recourir aux objets sensibles. Sur la question du rejet de l'intuition intellectuelle par Kant, voir THORAVAL, Joël. La question de l'intuition intellectuelle et la philosophie confucéenne contemporaine. *Revue Internationale de Philosophie*. 2005/2, n° 232, p. 231-245.

²³ Cf. par exemple DETLEFSEN, Michael. Poincaré versus Russell sur le rôle de la logique dans les mathématiques. *Les études philosophiques*, Presse Universitaire de France, 2011, p. 153-178 ; GABRIELLA, Crocco. Intuition, construction et convention dans la théorie de la connaissance de Poincaré. *Philosophiques*. 2004, 31(1), p. 151-177 ; HEINZMANN, Gerhard. Poincaré et la philosophie des mathématiques. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*. 1988, 9, p. 99-121. Dans ces articles cités, les auteurs montrent que les premières influences philosophiques qui agissent sur Poincaré proviennent de Kant. C'est en effet chez Kant que Poincaré a trouvé le caractère intuitif et synthétique des mathématiques qui lui permettra d'élaborer son approche intuitionniste.

²⁴ Pour repousser les attaques et les critiques de Couturat, Russell et Zermelo dirigées contre sa conception des mathématiques, Poincaré se défendait en affirmant que les logicistes et les cantoriciens, malgré leurs efforts, n'ont pas pu ruiner les mathématiques kantienues, « s'ils ont cru le faire, ils se sont trompés ». Cf. POINCARÉ, Henri Les mathématiques et la logique, *Revue de Métaphysique et de Morale*. 1905, 13, p. 835. Cf. aussi *Science et méthode*. 1999, op. cit., p. 152.

avant d'une part la puissance et la capacité de l'intuition à agir de manière spontanée (c'est-à-dire sans faire appel aux objets sensibles), et d'autre part l'aide apportée par l'expérience à l'esprit pour éviter d'éventuelles contradictions dans la construction des nombres²⁵. Malgré la capacité de l'esprit humain à créer intuitivement une suite infinie de nombres, il a besoin d'être guidé par l'expérience. L'approche intuitionniste de Poincaré combine les facteurs innés de l'esprit avec les éléments extérieurs provenant du monde sensible, postulant que l'« intuition pure » d'ordre intellectuel et l'« intuition sensible » sont toutes deux impliquées dans le processus de construction des nombres. Cet aspect est essentiel non seulement pour distinguer les approches poincaréenne et kantienne, mais aussi pour rapprocher les idées de Poincaré de celles des neurosciences cognitives.

L'apparente difficulté de la seconde interprétation étant levée, il nous paraît nécessaire, avant de continuer, de présenter les grandes interrogations qui seront analysées dans ce travail de recherche : l'approche arithmético-géométrique de Poincaré est-elle aisément superposable à celle proposée aujourd'hui par les neuroscientifiques cognitivistes ? Pour dire les choses autrement, le constructivisme arithmético-géométrique de Poincaré et le neuroconstructivisme arithmético-géométrique proposé par les neurosciences cognitives pour expliquer l'accès cognitif au nombre, à la géométrie et à l'espace sont-ils oui ou non compatibles ? Quels sont, selon les neurosciences cognitives, les fondements cognitifs ou les corrélats neuronaux de l'arithmétique et de la géométrie ? Quelle relecture peut-on faire des idées philosophiques de Poincaré à la lumière de ce que nous proposent les neurosciences cognitives sur la question des fondements des mathématiques ?

En choisissant d'étudier les rapports entre l'approche poincaréenne des mathématiques et les modèles cognitifs des mathématiques proposés par les neuroscientifiques cognitivistes, nous entrevoyons faire une exégèse des textes de Poincaré sur les fondements des mathématiques à la lumière des résultats des recherches en neurosciences cognitivistes. Il s'agit, en clair, de déceler dans la philosophie des mathématiques de Poincaré, mais surtout dans ses réflexions sur la genèse psycho-physiologique de la géométrie/de l'espace et la construction des nombres par itération, qui doivent être interprétées comme des constructions cognitives, c'est-à-dire liant l'esprit d'une manière précise à l'expérience, des éléments compatibles, voire

²⁵ En raison de la confusion que cela pourrait engendrer, précisons que chez Poincaré, l'expérience joue un rôle secondaire et non primaire, c'est-à-dire que l'expérience sert de guide à l'esprit, mais cela ne signifie pas que l'esprit humain est dépendant des impressions des sens comme le croyait Kant.

précurseurs, de l'approche neuroconstructiviste de la géométrie/l'espace et du nombre proposée par des neuroscientifiques cognitivistes. Notre but est également de mettre en évidence les différences significatives.

Cependant, en adoptant cette perspective, notre intention n'est pas de défendre l'empirisme ou le déterminisme qui est inhérent aux théories des neuroscientifiques cognitivistes. En effet, certains neuroscientifiques cognitivistes, qui adoptent une approche évolutionniste et déterministe, semblent pencher du côté de l'empirisme en ce qui concerne l'origine de la connaissance. Ils affirment que les principes *a priori* de la connaissance découlent d'une longue interaction avec le monde sensible, supposant ainsi que les capacités mentales et la possibilité d'une connaissance *a priori* sont principalement déterminées par l'expérience²⁶. Cependant, faire ancrer les performances de l'esprit au niveau du développement ontogénétique (qui implique l'apprentissage et l'interaction avec le monde sensible), revient à défendre une conception empiriste ou déterministe qui est en contradiction avec Poincaré. Si l'on considère que le processus de construction de la pensée mathématique fait appel à des potentiels neurocognitifs innés (phylogénèse) et à un développement ontogénétique ultérieur, il est donc inapproprié de défendre un déterminisme qui privilégie les aspects ontogénétiques par rapport aux prédispositions phylogénétiques. De même, il est erroné de soutenir un nativisme qui exclut par principe les aspects ontogénétiques en les considérant comme non significatifs. Afin de préserver la liberté créatrice de l'esprit et le conventionnalisme défendus par Poincaré, nous prenons du recul vis-à-vis du nativisme et, surtout, du déterminisme qui suggère une dominance de l'ontogenèse sur la phylogénèse.

Notre analyse des liens entre l'approche constructiviste de Poincaré et l'approche neuroconstructiviste des neuroscientifiques cognitivistes (Changeux, Damasio, Dehaene, Berthoz, etc.) sera structurée en trois parties principales. Dans la première partie, nous présenterons la philosophie des mathématiques de Poincaré. Compte tenu de l'originalité des idées de ce mathématicien par rapport aux théories logico-formalistes qui émergeaient au tournant du XIX^e au XX^e siècle, il est essentiel de débiter cette première partie par la présentation des conceptions « logiques » des mathématiques qui étaient en vogue au cours de ces deux siècles. Nous faisons référence ici à des conceptions axiomatiques et logicistes qui ont eu un écho retentissant dans sa philosophie des mathématiques, par l'ampleur des difficultés épistémologiques qu'elles ont suscitées. Notre choix s'est porté sur ces deux conceptions

²⁶ BERTHOZ, Alain et PETIT, Jean-Luc. *Phénoménologie de l'action*. Paris, Odile Jacob, 2006, p. 104.

mathématiques, parce que ce sont elles que Poincaré a explicitement ou implicitement désavouées et rejetées avant de présenter sa propre conception des mathématiques. Dans cette optique, nous examinerons la controverse entre Poincaré et les partisans du logicisme et du formalisme afin de mettre en évidence les idées poincaréiennes qui convergent avec les thèses des neuroscientifiques cognitivistes.

Après avoir présenté, dans le premier chapitre, l'axiomatique et le logicisme ainsi que les objections poincaréiennes formulées à leur encontre, nous aborderons, dans le second chapitre, la question de la construction des nombres et de la géométrie/espace selon Poincaré. Nous explorerons la genèse des nombres et de la géométrie, en nous intéressant à la manière dont Poincaré explique ces deux processus. Étant donné que ce second chapitre prépare le terrain à l'exploration des idées fondamentales de Poincaré à travers le prisme des neurosciences cognitives, qui constituera la troisième partie de notre réflexion, la lecture de la philosophie des mathématiques de Poincaré que nous ferons au sein de ce chapitre sera dirigée vers la combinaison des facultés innées et de l'expérience extérieure. Si Poincaré s'est opposé aux conceptions « logiques » des mathématiques, c'est parce qu'elles ont négligé le rôle crucial de l'intuition et de l'expérience dans le processus de construction et de démonstration mathématique. Étant donné que ces deux éléments occupent selon Poincaré une place prépondérante en arithmétique et en géométrie, nous tenterons de mettre en évidence les points communs entre ces deux approches qui se situent dans la ligne droite des résultats des neurosciences cognitives. À cet égard, nous débiterons en présentant l'approche intuitionniste et en mettant l'accent sur la méthode itérative, qui permet de caractériser les processus mentaux sous-jacents à ce procédé. Nous examinerons comment l'itération, en tant que processus mental combinant l'« intuition pure » et l'« intuition sensible », favorise la construction des nombres.

Dans la sous-section consacrée à l'invention mathématique, nous défendrons une thèse similaire, soutenant que Poincaré situe le processus d'invention mathématique dans le même cadre cognitif. Notre objectif est de clarifier le rôle joué par l'intuition et les émotions dans le processus d'invention. Une fois cette clarification effectuée, nous illustrerons comment l'invention reste tributaire de l'interaction intuition / émotion.

Le deuxième chapitre se clôturera en mettant en avant l'approche psycho-physiologiste de la géométrie, tout en soulignant les aspects cognitifs qui lui sont inhérents. Afin d'illustrer ces aspects cognitifs, nous examinerons la théorie spatiale de Poincaré dans ses deux versions : tout d'abord celle qui fut développée en 1898, puis celle élaborée à partir de 1903. La plupart

des experts en cognition spatiale, dont Berthoz, s'accordent à dire que la première version de la théorie spatiale de Poincaré offre une perspective précieuse pour appréhender les fondements cognitifs de la géométrie et de l'espace. En accord avec cette opinion, nous présenterons la première version de la théorie spatiale de Poincaré, en mettant en évidence le rôle de l'expérience sensori-motrice et de l'esprit dans la construction de la géométrie et de l'espace. C'est ainsi que nous mettrons en lumière l'influence des sensations visuelles, tactiles, musculaires kinesthésiques et proprioceptives dans la genèse de la géométrie. Nous aurons également l'occasion d'examiner les raisons qui ont poussé Poincaré à différencier l'espace géométrique de l'espace sensible ou représentatif. Par la suite, nous aborderons la deuxième version de la théorie spatiale, qui servira de tremplin pour évoquer les changements significatifs apportés par Poincaré, notamment l'introduction de la notion de coupure dans le continuum physique et la prise en compte des prédispositions phylogénétiques et ontogénétiques dans la détermination du nombre de dimensions de l'espace. C'est à ce stade que nous examinerons comment les sensations musculo-tactiles peuvent contribuer à la construction de l'espace de dimension 3.

Dans la deuxième partie, nous aurons l'opportunité de découvrir quelques théories neurocognitives récemment proposées par des neuroscientifiques cognitivistes pour expliquer nos capacités cognitives à représenter les nombres et l'espace. Dans le premier chapitre, nous examinerons les avancées récentes en neurosciences cognitives concernant la compréhension des mécanismes cérébraux impliqués dans la formation des concepts mathématiques. Au cours de ce chapitre, nous tenterons d'identifier les corrélats neuronaux du nombre et de la prise de décision intuitive. En nous appuyant sur les travaux de Changeux et Dehaene, nous présenterons les résultats de leurs recherches sur la cognition arithmétique. Dans la même lignée, nous chercherons à déterminer les structures cérébrales responsables de la construction des objets mathématiques, ainsi que les systèmes neuronaux impliqués dans l'acquisition et la compréhension des nombres. Nous accorderons également une attention particulière aux travaux de Damasio sur les liens entre la cognition et l'émotion, notamment en ce qui concerne la prise de décision intuitive.

Dans le deuxième chapitre de cette partie, nous aborderons les récents progrès en neurosciences cognitives dans la compréhension des mécanismes cérébraux sous-tendant la construction de la géométrie et de l'espace. Nous nous pencherons sur les recherches physiologiques menées par Berthoz sur la représentation spatiale. En nous basant sur une série

d'expériences physiologiques, neurophysiologiques et neuroanatomiques, nous soutiendrons son idée centrale selon laquelle la saisie de l'espace se produit à travers les mouvements oculaires, les déplacements et les interactions du cerveau avec différentes parties de notre corps. De plus, nous explorerons les étapes du processus de formation de la représentation spatiale chez un individu, en nous appuyant sur les récentes études en neurosciences cognitives. Cela nous permettra de confirmer deux hypothèses de Poincaré, exposées dans la première partie, à savoir l'hypothèse centrale selon laquelle le concept de groupes de déplacements est inné et l'intégration des influences phylogénétiques et ontogénétiques dans la construction de la géométrie et de l'espace.

Dans la troisième partie de ce travail de recherche, nous aborderons la question centrale de savoir si les idées de Poincaré sont compatibles avec les résultats des neurosciences cognitives, en nous basant sur ces différentes théories neurocognitives. Plus précisément, nous analyserons si la position de Poincaré, qui considère les nombres, la géométrie et l'espace comme des constructions de l'esprit humain guidé par l'expérience, peut être conciliée avec les théories neurocognitives des neuroscientifiques cognitivistes. Dans le premier chapitre, nous confronterons la démarche constructiviste de Poincaré, qui admet que l'expérience guide l'activité intuitive de création des nombres, à l'approche neurocognitive de Changeux et à l'intuition du nombre de Dehaene. Nous examinerons également la thèse poincaréenne selon laquelle l'intuition et l'émotion interagissent dans la sélection des idées prometteuses, en la comparant à la théorie des marqueurs somatiques de Damasio. Dans le deuxième chapitre, nous confronterons la théorie spatiale de Poincaré, qui intègre les aspects cognitifs de la géométrie, à l'approche neurophysiologiste et cognitive de la géométrie proposée par Berthoz.

Ces comparaisons nous permettront d'examiner les points de convergence et de divergence entre les idées de Poincaré et ces différentes théories cognitives. L'objectif principal de cette partie est de revoir les idées centrales de Poincaré sur les mathématiques, en relativisant les divergences significatives qui seront identifiées. Dans cette perspective, nous chercherons à rapprocher les apparentes divergences en trouvant des analogies pour les rendre compatibles. Ainsi, nous argumenterons que les résultats des neurosciences cognitives renforcent la cohérence et la pertinence de la philosophie des mathématiques de Poincaré.

PREMIÈRE PARTIE :
LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE POINCARÉ

Dans cette première partie, notre objectif est de présenter les idées philosophiques de Poincaré concernant la construction des mathématiques. Cette présentation se fera selon la classification des idées philosophiques de Poincaré : celles développées en arithmétique et celles développées en géométrie. Ces idées philosophiques ont émergé suite au projet de logicisation de l'arithmétique initié par Frege, ainsi qu'à l'avènement des géométries non-euclidiennes en géométrie²⁷. Ce qui va conduire Poincaré à développer une théorie intuitionniste en arithmétique et une théorie conventionnaliste en géométrie dont le modèle le plus abouti est la théorie psycho-physiologique. Pour bien comprendre le fond de la pensée de Poincaré et l'originalité de ses idées philosophiques, il est nécessaire de revisiter les grandes conceptions mathématiques de son époque qu'il a critiquées, réexaminées ou rejetées avant de formuler sa propre conception des mathématiques. C'est pourquoi le premier chapitre de cette partie se concentrera sur les conceptions « logiques » des mathématiques qui ont été au cœur des débats philosophiques du XIX^e au XX^e siècle. Il serait prétentieux de prétendre les présenter de manière exhaustive, nous nous concentrerons donc principalement sur les deux programmes qui étaient étroitement liés à la logique mathématique : le programme d'axiomatisation et celui de logicisation de l'arithmétique.

Cette première partie sera divisée en deux chapitres. Le premier chapitre abordera les programmes d'axiomatisation et de logicisation de l'arithmétique. Étant donné que la conception des mathématiques de Poincaré diffère de ces deux conceptions mathématiques, nous confronterons ces deux programmes mathématiques à l'examen critique de notre auteur. À cette occasion, nous critiquerons plusieurs présupposés implicites de ces approches qui ont été considérés comme les fondements mathématiques par les logicistes et les formalistes.

Le deuxième chapitre se penchera sur la philosophie des mathématiques de Poincaré. Tout d'abord, nous aborderons l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré, qui soutient que les nombres sont construits par une opération mentale combinant l'« intuition pure » et l'« intuition sensible ». Nous expliquerons davantage cette conception, en mettant en lumière les rôles respectifs de l'esprit humain et de l'expérience dans la construction arithmétique, ainsi que ses implications cognitives.

Ensuite, nous étudierons le conventionnalisme de Poincaré, plus précisément sa théorie psycho-physiologique de la géométrie, qui a été perçue à l'époque comme une théorie

²⁷ Le lecteur soucieux de retracer le cadre historique dans lequel la pensée philosophique de Poincaré a émergé est prié de se référer à VOLTERRA, Vito, HADAMARD, Jacques, LANGEVIN, Paul et BOUTROUX, Pierre. Henri Poincaré : l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique. Librairie Félix Alcan. 1914.

s'opposant à la conception axiomatique de la géométrie défendue par certains logicistes et formalistes. Nous reviendrons sur cette théorie afin de mieux comprendre l'origine cognitive de la géométrie et de l'espace. Nous présenterons en détail les deux versions de la théorie psychophysique, en mettant en évidence les aspects cognitifs qui y sont présumés.

CHAPITRE I : LES CONCEPTIONS « LOGIQUES » DES MATHÉMATIQUES AU TRIBUNAL DE POINCARÉ

Le développement de la pensée philosophique de Poincaré s'est nourri des débats passionnés qu'il a menés avec ses opposants, notamment les logiciens en général et les logicistes tels que Russell et Couturat en particulier. Poincaré ne se lassait pas de critiquer et de rejeter leurs conceptions mathématiques. Ce premier chapitre a pour objectif de revenir sur les critiques formulées par Poincaré à l'encontre du logicisme et de l'axiomatique logique, qui ont longtemps considérés la logique comme le fondement ultime des mathématiques. Avant d'exposer les critiques poincaréiennes à l'égard de ces deux approches mathématiques, il est important de comprendre leurs principales thèses philosophiques. C'est pourquoi nous commencerons ce chapitre par une présentation du projet philosophique qui sous-tendaient les programmes d'axiomatisation et de logicisation de l'arithmétique.

I-Les prémisses de la critique poincaréienne des conceptions « logiques » des mathématiques

Cette première section nous permettra d'exposer les conceptions « logiques » des mathématiques et de mettre en évidence l'impact profond des théories axiomatiques et logistiques développées par les mathématiciens-logiciens du XIX^e siècle tels que Pasch, Grassmann, Pieri, Dedekind, Peano, Padoa, Véronèse, ainsi que celles développées plus tard au début du XX^e siècle par les Modernes tels que Russell et Hilbert²⁸. Notre objectif ne sera pas une présentation exhaustive de ces conceptions "logiques", mais plutôt de comprendre les enjeux philosophiques et épistémologiques qui ont motivé les programmes d'axiomatisation et de logisation de l'arithmétique.

Nous commencerons par examiner les enjeux philosophiques et épistémologiques du programme d'axiomatisation des mathématiques, en mettant en lumière les caractéristiques propres à l'axiomatique logique, qui fut le modèle paradigmatique privilégié par les Modernes.

²⁸ Nous distinguons les mathématiciens qui ont proposé un modèle hypothético-déductif des mathématiques (sans formalisation) de ceux qui ont proposé, un peu plus tard, la formalisation des mathématiques dans les systèmes logiques. Dans la suite de notre analyse, nous utiliserons le terme " les Modernes " pour faire allusion aux mathématiciens logiciens ou logicistes qui ont milité en faveur de l'axiomatique logique, caractérisé par la formalisation et la symbolisation. Ainsi, nous entendons par axiomatique logique, l'axiomatique qui envisageait la retranscription des mathématiques dans les systèmes logico-formels.

En ce qui concerne le programme de logicisation de l'arithmétique, nous aborderons également plus tard les enjeux philosophiques et épistémologiques qui lui sont associés.

I-1-L'axiomatique logique

Parler d'axiomatisation des mathématiques implique, avant tout, de cerner le sens que revêt le terme "axiomatisation". Le *Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie* définit l'axiomatique comme une méthode qui consiste à « dériver, grâce aux moyens de la logique formelle, des vérités (les théorèmes) relatives à l'objet sous investigation à partir de termes primitifs et d'une liste d'axiomes »²⁹. Partant de cette définition, l'on peut distinguer deux étapes dans le processus d'axiomatisation. La première est l'élaboration des propositions premières (appelées aussi axiomes) que l'on doit admettre sans démonstration, et la seconde est l'élaboration des théorèmes qu'on doit dériver, c'est-à-dire, déduire logiquement en proscrivant tout recours aux affirmations non issues des axiomes posés au préalable. Plus concrètement, on dit qu'une théorie est axiomatisée si elle est fondée sur des axiomes et si, à partir des axiomes préétablis, l'on peut déduire rigoureusement des théorèmes dans un cadre purement logique sans faire appel à l'intuition.

Dans le domaine des mathématiques, le développement de la méthode axiomatique peut être divisé en deux grandes périodes. On peut localiser la première période de la méthode axiomatique dans l'Antiquité, en l'occurrence dans l'œuvre d'Euclide. Quant à la seconde période, elle débute au début du XIX^e siècle (1800) et s'étend, à peu près, à la fin de la première moitié du XX^e siècle (1930). Cette seconde période fut marquée par un essor remarquable de la méthode axiomatique avec des modifications significatives, à savoir l'entrée en scène de la logique formelle et des systèmes formels, bref, de la logique mathématique. Ferdinand Gonseth qui a étudié de près l'aventure intellectuelle de la méthode axiomatique en mathématiques a relevé deux différentes sortes d'axiomatique correspondant à ces deux périodes : la première est l'axiomatisation schématisante aussi appelée l'axiomatique des Anciens, dont l'axiomatique d'Euclide en constitue le modèle. La seconde est l'axiomatique structurante ou l'axiomatique des Modernes, dont le formalisme développé par Hilbert en constitue le modèle paradigmatique. Philippe Mongin souligne également la distinction entre la méthode

²⁹ NADEAU, Robert. *Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie*. Paris, Presse Universitaire de France, 1999, p. 405.

axiomatique développée par les Anciens et celle développée par Hilbert, étant donné que la conception hilbertienne de l'axiomatique se distingue du modèle hypothético-déductif où les théories axiomatiques n'avaient pas besoin d'être formalisées³⁰.

En effet, la différence entre ces deux formes d'axiomatique est significative. Chez les Anciens, l'axiomatisation des mathématiques consistait à représenter les axiomes mathématiques par des schémas de pensée³¹, tandis que chez les Modernes, l'axiomatisation des mathématiques revient à transposer les mathématiques dans des systèmes formels. Cette conception moderne de l'axiomatique, qui s'inscrit dans une approche en totale rupture avec celle d'Euclide, a été portée sur les fonts-baptismaux par des auteurs comme Frege, Peano, Russell, Hilbert, etc. Cette conception de l'axiomatique est connue sous le nom de l'axiomatique logique ou formelle. Pour ce qui est de l'axiomatisation de la géométrie, nous allons nous intéresser principalement à la conception hilbertienne de l'axiomatique géométrique, en raison de la controverse que Hilbert a menée avec Poincaré au sujet des fondements de la géométrie. En ce qui concerne l'axiomatisation de l'arithmétique, nous prendrons en considération l'axiomatique développée par Peano, du fait qu'il a introduit dans ce domaine des mathématiques un symbolisme qui sera remis en cause par Poincaré.

La définition donnée par Nadeau présente la méthode axiomatique comme une approche consistant à définir un ensemble d'axiomes à partir desquels tous les autres énoncés de la théorie peuvent être dérivés. Dans cette démarche d'axiomatisation, les axiomes servent de fondation solide pour construire un système logique cohérent. Les théorèmes et les résultats sont ensuite déduits à partir de ces axiomes en utilisant des règles de déduction et de logique. Cependant, Hilbert était opposé à cette démarche d'axiomatisation des mathématiques car il ne considérait pas qu'elle renforçait le raisonnement géométrique. La méthode axiomatique qu'il a développée à la fin du XIX^e siècle (en géométrie) et au début du XX^e siècle (en arithmétique) se distingue nettement de celle des Anciens.

Dans son ouvrage *Die Grundlagen der Geometrie* publié en 1899, où il parvient à l'axiomatisation complète de la géométrie, son objectif était d'établir un système formel complet et cohérent en définissant un ensemble restreint d'axiomes et en introduisant des règles précises pour les manipuler. Il espérait ainsi établir une théorie mathématique qui éliminerait le rôle de

³⁰ MONGIN, Philippe. L'axiomatisation et les théories économiques. *Revue économique*, 2003, Vol. 54 n° 1, p. 107. Voir aussi BLANCHÉ, Robert. *Introduction à la logique contemporaine*. Paris, A. Colin, 1996.

³¹ GONSETH, Ferdinand. *Les fondements des mathématiques. De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionnisme*. Paris, Blanchard, 1974, p. 239.

l'intuition dans le raisonnement mathématique. Hilbert était convaincu que la seule façon de garantir la sûreté et la cohérence du raisonnement géométrique était de démontrer la non-contradiction des axiomes de la géométrie. Par conséquent, il s'est efforcé de prouver, dans le chapitre II de cet ouvrage, que la non-contradiction des axiomes de la géométrie est démontrable.

Selon Hilbert, prouver la non-contradiction des axiomes dans le contexte de la géométrie revient à démontrer que les axiomes géométriques choisis pour définir un système formel géométrique ne conduisent pas à des contradictions. Ainsi, dans la conception hilbertienne de l'axiomatique, chercher à prouver la non-contradiction des axiomes revient à montrer qu'il est impossible de dériver à la fois un énoncé et son contraire à partir de ces axiomes. Hilbert établit un lien entre la non-contradiction des axiomes et leur validité, considérant que des axiomes non contradictoires permettent de fonder une théorie mathématiquement cohérente. Selon lui, la non-contradiction des axiomes était une condition essentielle pour établir la validité et la cohérence d'une théorie mathématique. Ainsi, prouver la non-contradiction des axiomes était un moyen pour Hilbert de garantir l'existence d'une théorie mathématique cohérente. Si les axiomes sont non contradictoires, cela suggère que la théorie mathématique basée sur ces axiomes est logiquement solide et peut être considérée comme une structure mathématique valide. C'est en ce sens que Sinaceur affirme que *Die Grundlagen der Geometrie* était une prémisse de la « théorie de la démonstration » que Hilbert développa en détail à partir de 1917³². Si donc Hilbert remettait en cause l'axiomatique euclidienne de la géométrie, au point qu'il la substitua par une axiomatique logico-formelle, c'est parce que chez Euclide, la véracité des axiomes géométriques tient à leur évidence immédiate³³. En revanche, Hilbert analyse la véracité des axiomes par rapport à sa « théorie de la démonstration » qui était en développement dans son esprit. C'est dans cette optique que Frédéric Patras signale une mutation de la notion de vérité dans la conception hilbertienne de l'axiomatique³⁴ dans le sens où Hilbert prévoyait de faire de la non-contradiction le critère incontestable de la vérité en général et de la vérité mathématique en particulier. Cette conception de la vérité promulguée par Hilbert remplace celle d'Euclide

³² À la publication de *Die Grundlagen der Geometrie* de 1899, la théorie de la démonstration de Hilbert, caractérisée par la recherche de la preuve finitiste, n'était pas encore bien constituée. Sinaceur a cependant montré que la démarche consistant à prouver logiquement l'existence de chaque axiome géométrique est en parfaite congruence avec la « théorie de la démonstration » que Hilbert déroulera en arithmétique et en algèbre.

³³ BLANCHÉ, Robert. *L'axiomatique*. Paris, Presse Universitaire de France, 1990, p. 10.

³⁴ PATRAS, Frédéric. L'horizon sémantique et catégoriel de la méthode axiomatique. *Noesis*. 2003. Disponible sur le web : URL : <http://journals.openedition.org/noesis/1504>.

qui concevait la vérité comme évidence intuitive. Dans l'entendement de Hilbert, la non-contradiction incarnée par l'axiomatique devrait permettre de prouver la fiabilité des axiomes mathématiques. Cependant, chercher à prouver la fiabilité des axiomes mathématiques, cela revient à les formuler dans un système logico-formel qui nécessite des règles purement logiques, excluant ainsi l'intuition du processus de démonstration mathématique. Ainsi, en mathématiques, des signes, des formules et des expressions provenant d'une langue artificielle sont admis. Il est important de souligner que l'objectif de l'axiomatisation de la géométrie par Hilbert était de montrer que les axiomes de la géométrie peuvent être traduits dans un système logico-formel.

Abordons maintenant l'axiomatisation de l'arithmétique. Le premier mathématicien à innover dans ce domaine fut Hermann Grassmann³⁵. Son objectif principal était de formuler une axiomatique des nombres entiers en introduisant des définitions récursives de l'addition et de la multiplication. En 1861, il proposa la toute première axiomatique des nombres entiers, marquant ainsi une avancée vers l'ambition des logiciens d'axiomatiser cette branche des mathématiques. Le projet d'axiomatisation de l'arithmétique fit un bond significatif à la fin de la deuxième moitié du XIX^e siècle (1879) lorsque Frege fournit à la communauté mathématique un outil permettant de représenter, dans un langage nouveau, le raisonnement mathématique, indépendamment du langage ordinaire considéré comme limité et insatisfaisant pour traduire la pensée mathématique. Cet outil, appelé "l'Idéographie", était présenté par son créateur comme un langage formel de la pensée pure conçu pour la réécriture de l'arithmétique. Frege chercha à fonder l'arithmétique sur des principes logiques et linguistiques, en utilisant un langage formel précis pour exprimer les concepts mathématiques. Sa méthode axiomatique se caractérise par un raisonnement formel et symbolique, reposant sur des règles de déduction formelles pour établir des preuves mathématiques. Les travaux de ce logicien ouvrirent la voie à d'autres approches axiomatiques, notamment celle de Peano, qui s'efforça de fournir un ensemble minimal et cohérent d'axiomes définissant les nombres naturels.

À l'instar de Frege, Giuseppe Peano estimait qu'il était nécessaire de réécrire l'arithmétique dans un langage symbolique et formel, en accord avec ses convictions logicistes. La contribution de Peano au projet d'axiomatisation de l'arithmétique fut la création, après

³⁵ Cf. DIEUDONNÉ, Jean. *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*. Paris, Hachette, 1987.

Frege, d'une pasigraphie qui permettait de ramener le raisonnement mathématique à une manipulation de signes ou de formules. L'axiomatique qu'il présenta en 1889 utilisait un ensemble de symboles pour représenter les nombres et les opérations mathématiques, évitant ainsi de recourir à l'intuition. À partir de cinq axiomes, Peano définit les opérations arithmétiques (l'addition, la soustraction, la multiplication et la division) dans un système logico-formel. C'est ainsi qu'il ramena les constructions et raisonnements arithmétiques à des manipulations de signes.

La conception de l'axiomatique logique que nous venons de présenter, par le biais de certaines théories axiomatiques modernes, a deux caractéristiques fondamentales qui sont : la formalisation et la symbolisation. Il importe d'établir la différence entre ces deux procédés. Dans son texte *L'axiomatisation et les théories axiomatiques*, Mongin définit la formalisation comme un procédé technique consistant « à traiter les signes en faisant abstraction des significations qu'on leur attribue »³⁶, et il ajoute que traiter les signes signifie « les transformer les uns dans les autres, les regrouper, les dissocier, en un mot, effectuer sur eux des opérations »³⁷. La définition de la formalisation proposée par Salanskis, dans *La littérature entre axiomatique et formalisme*, est encore plus claire.

*La formalisation est l'acte d'instauration d'un langage non naturel, par des décrets qui fixent une fois pour toutes le matériel symbolique auquel on a droit et qui déterminent de façon conventionnelle les assemblages de tels symboles que l'on considérera comme bien formés : les formules*³⁸.

Ainsi, formaliser quelque chose signifie transposer cette chose dans un langage formel, c'est, en d'autres termes, réécrire cette chose selon les règles ou les normes d'un langage formel. En revanche, la symbolisation consiste « à remplacer des mots de la langue naturelle par les signes d'une langue artificielle, qui est soit empruntée, soit créée pour la circonstance »³⁹. On constate qu'il existe une nuance entre la formalisation et la symbolisation : la symbolisation est le processus de traduction des éléments de la langue naturelle vers des symboles formels. Les symboles utilisés peuvent être des mots, des images, des gestes ou tout autre élément qui possède une signification conventionnelle. La symbolisation permet de donner un sens aux choses et de les représenter de manière abstraite. La formalisation, quant à elle, est le processus

³⁶ MONGIN, Philippe. *L'axiomatique et les théories économiques*. 2003, *op. cit.*, p. 106.

³⁷ *Ibidem*

³⁸ SALANSKIS, Jean-Michel. *La littérature entre axiomatique et formalisme*. *Les Temps Modernes*, 2013, n° 5, vol. 676 p. 180-181.

³⁹ MONGIN, Philippe. *L'axiomatique et les théories économiques*. 2003, *op. cit.*, p. 106.

d'établissement d'un langage formel avec ses règles et conventions. Bien que distinctes, la formalisation et la symbolisation sont deux procédés étroitement liés dans la représentation abstraite des mathématiques, car la formalisation facilite la symbolisation en fournissant une structure logique, tandis que la symbolisation permet d'exprimer et de manipuler les idées formalisées de manière plus intuitive et communicative.

En résumé, le projet philosophique de l'axiomatique, porté par les penseurs modernes, consistait à transposer les mathématiques dans des systèmes formels afin de justifier que l'intuition n'est pas nécessaire au processus de démonstration et de construction mathématique. La formalisation et la symbolisation sont ainsi des procédés essentiels qui ont servi à la réalisation du projet d'axiomatisation des mathématiques. De plus, ces deux procédés ont joué un rôle fondamental dans l'émergence du projet philosophique du logicisme, qui sera abordé dans la prochaine sous-section.

I-2-Le logicisme

La compréhension du logicisme est facilitée lorsqu'il est replacé dans son contexte historique, à savoir la crise logico-mathématique. Ainsi, il est primordial de rappeler le contexte historique dans lequel le logicisme a émergé. L'histoire des mathématiques situe l'apparition du logicisme dans le sillage de la crise qui a ébranlé et divisé la communauté mathématique entre la fin du XIX^e et le début du XX^e siècle, suite à la découverte des antinomies dans la théorie ensembliste de Georg Cantor. Ce mathématicien avait développé une théorie dite "ensembliste" dans le but de ramener l'ensemble des mathématiques à des constructions ensemblistes. Pour mener à bien ce projet ambitieux, il « prit résolument le concept d'ensemble infini, de nombre infini pour point de départ de ses recherches et, par-là, fonda une arithmétique de l'infini. En appliquant à l'infini le concept d'ordre, il créa celui du nombre transfini ordinal »⁴⁰. Cantor concevait l'infini comme étant au-dessus de toutes les grandeurs finies, postulant ainsi l'existence d'un nombre cardinal supérieur à tous les nombres cardinaux ordinaires. Cependant, plusieurs présuppositions de l'approche cantorienne de l'infini ont été mises en évidence et critiquées par les mathématiciens antiréalistes. Ces critiques, ayant fait l'objet de nombreux

⁴⁰ KOYRÉ, Alexandre. *Étude d'histoire de la pensée philosophique*. Paris, Gallimard, 1971, p. 27.

travaux, ne seront pas exposées à nouveau ici⁴¹. Concentrons-nous plutôt sur les paradoxes engendrés par cette théorie.

Ces paradoxes découlent de l'affirmation de Cantor selon laquelle l'ensemble de tous les ensembles se contient lui-même. Comme l'a démontré Michel Combès dans son ouvrage *Fondements des mathématiques*, l'analyse logique de cette affirmation conduit inévitablement à deux hypothèses paradoxales. Premièrement, si cet ensemble se contient lui-même, il ne peut pas faire partie des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes, ce qui signifie qu'il n'appartient pas à l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Or, cet ensemble n'est autre que lui-même, donc il n'appartient pas à lui-même, c'est-à-dire qu'il ne se contient pas. Deuxièmement, s'il ne se contient pas, alors il fait partie des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes, ce qui signifie qu'il appartient à l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Or, cet ensemble n'est autre que lui-même, donc il appartient à lui-même, c'est-à-dire qu'il se contient⁴². Cette variante du paradoxe de Russell, ainsi que d'autres paradoxes logiques relevés par Buraly-Forti, Berry, Richard⁴³ plongèrent les mathématiques dans une crise profonde. Le logicisme est l'une des voies envisagées pour éliminer ces paradoxes logiques.

Associé au programme d'axiomatisation et s'établissant au commencement du XX^e siècle (1903), le logicisme avait pour projet de réduire l'arithmétique à la logique, démontrant ainsi que les mathématiques en constituent une branche. Dans la mesure où le rejet de la philosophie kantienne des mathématiques constitue le point de départ d'une telle entreprise, il est indispensable d'examiner comment les partisans du logicisme (Frege, Russell, Couturat) se sont vigoureusement attaqués aux fondements de la philosophie des mathématiques de Kant, en particulier à la distinction qu'il établit entre la logique et les mathématiques.

Dans sa philosophie des mathématiques, notamment dans son ouvrage *Critique de la raison pure*, Kant établit une distinction entre un jugement analytique et un jugement synthétique. Il définit le jugement analytique comme un jugement dans lequel la notion de

⁴¹ Le lecteur est prié de se reporter au mémoire de Clément VIDAL « *Georg Cantor et la découverte des infinis* » disponible sur <http://homepage.vub.ac.be/clival/writing>, où sont exposées de façon précise les critiques des antiréalistes contre Cantor.

⁴² COMBÈS, Michel. *Fondements mathématiques*. Paris, Presse Universitaire de France. 1971, p. 11.

⁴³ Pour connaître les autres paradoxes logiques sus-mentionnés, voir *La logique mathématique fondée sur la théorie des types* (1908) in *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)* sous la direction de RIVENC, François et DE ROUILHAN, Philippe. Paris, Payot, 1992, p. 309-334. Voir également HEINZMANN, Gerhard. *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédictivité*. Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1985, p. 38-44.

concept est contenue dans celle du sujet, et le jugement synthétique comme un jugement dans lequel le prédicat n'est aucunement lié au sujet. Ainsi, selon Kant, les jugements de la logique correspondent à des jugements analytiques, tandis que les jugements mathématiques correspondent à des jugements synthétiques. Selon Kant, tous les énoncés logiques sont des énoncés analytiques purs, car ils semblent dépourvus de tout contenu. Ce sont des énoncés dans lesquels l'entendement n'a absolument affaire qu'à lui-même et à sa forme. En revanche, les propositions mathématiques sont toujours des jugements synthétiques *a priori* et non empiriques, car elles impliquent une nécessité qui ne peut être déduite de l'expérience. À l'issue de son analyse, Kant établit une distinction de nature entre la logique et les mathématiques en vertu de la distinction entre l'analytique *a priori* et le synthétique *a priori*.

Frege, qui reste incontestablement celui qui a ouvert la voie au programme logiciste, s'est montré réfractaire à cette distinction kantienne en proposant sa théorie de la signification et de la référence. Selon lui, la signification d'une expression linguistique ne dépend pas seulement de son contenu conceptuel, mais aussi de sa référence à des objets dans le monde réel. Frege soutient que les jugements analytiques et synthétiques ne peuvent pas être distingués uniquement sur la base de leur contenu conceptuel, car ils peuvent tous deux contenir des informations synthétiques sur la référence des termes impliqués. À l'encontre de Kant, il démontre que notre capacité d'accéder aux nombres n'est liée ni à l'intuition ni à la perception. Le programme logiciste qu'il présente pour remettre en question Kant comportait deux volets : le premier consistait à traduire les énoncés de l'arithmétique dans le système de la logique pure, tandis que le second visait à déduire les axiomes arithmétiques à partir des énoncés logiques. Après avoir accompli le premier volet de son programme logiciste consistant à traduire les énoncés de l'arithmétique dans le système de la logique pure⁴⁴, Frege s'attela au second volet lorsque, le 16 juin 1902, il reçoit une lettre de Bertrand Russell l'informant de la découverte d'un paradoxe dans son système logique. Ce paradoxe était lié à la loi V⁴⁵ et à sa théorie réaliste des concepts. Dans cette lettre, Russell exposa le paradoxe auquel la loi V conduisait et suggéra à Frege de reconstruire son système logique en renonçant à ce principe logique. Étant donné que le système de Frege présentait un paradoxe, plusieurs théories logico-mathématiques furent

⁴⁴ *Begriffsschrift* publié par Frege en 1879 comportait les premiers matériaux du programme logiciste, étant donné qu'elle était présentée par son auteur comme la langue de la pensée pure conçue pour rendre effective la traduction de l'arithmétique dans le langage purement formel.

⁴⁵ La loi V du système logique de Frege est un principe qui porte sur les rapports entre concepts et extensions de concepts, c'est-à-dire que les extensions de deux concepts F et G sont identiques si et seulement si tout objet qui tombe sous le concept F tombe sous le concept G et vice-versa.

élaborées dans le but de l'éliminer et de permettre la réalisation du programme logiciste. Parmi ces théories axiomatico-logistiques, nous mentionnerons spécifiquement la théorie des types développée par Russell et son collègue Whitehead dans les *Principia Mathematica* (1910) ainsi que les travaux de Louis Couturat sur les fondements des mathématiques (1905). Notre choix de mettre en avant ces deux logicistes (Russell et Couturat) s'explique par le fait qu'ils se sont publiquement engagés dans une vive controverse avec Poincaré sur les fondements des mathématiques.

Tout comme Frege, Russell a remis en question la distinction kantienne. Selon Michel Combès, Russell éprouvait une aversion particulière envers la distinction kantienne entre l'analytique *a priori* et le synthétique *a priori*, à tel point qu'il qualifiait Kant de sophiste : « *Kant, ce philistin de sophiste qui connaissait si peu les mathématiques, opposait logique et mathématique sur la base de la distinction entre analytique a priori et synthétique a priori. Le logicisme s'inscrit en faux contre une distinction de ce genre* »⁴⁶. Si Russell nourrissait une répugnance envers la distinction kantienne entre l'analytique *a priori* et le synthétique *a priori*, c'est parce qu'il partageait le point de vue de Frege selon lequel le nombre ne nous est pas donné par l'intuition ni par la perception.

En arithmétique, Russell a avancé une doctrine logiciste qui repose sur deux postulats fondamentaux. Le premier postulat stipule que « *la preuve de toutes les mathématiques pures traite exclusivement avec des concepts définissables en termes d'un très petit nombre de concepts logiques fondamentaux* »⁴⁷. Le second postulat énonce que « *toutes ses propositions sont déductibles d'un très petit nombre de principes logiques fondamentaux* »⁴⁸. Conscient des paradoxes logiques qui entachaient le programme logiciste, Russell s'est efforcé de trouver des solutions à ces paradoxes, c'est le sens de son article de 1906 intitulé « *Les paradoxes de la logique* »⁴⁹. Russell admettait volontiers que l'élimination des paradoxes logiques de la théorie des ensembles était une tâche ardue. Malgré cela, il s'est engagé dans cette entreprise en utilisant les outils de la logique. Pour résoudre les paradoxes logiques, il a envisagé trois théories différentes : la "zigzag theory", la "theory of the limitation of size" et enfin la "no class theory". Après avoir constaté que les deux premières théories, la « zigzag theory » et la "theory of the

⁴⁶ COMBES, Michel. *Fondements des mathématiques*. 1971, *op.cit.*, p. 22.

⁴⁷ RUSSELL, Bertrand. *The Principles of mathematics*. London, George Allen Unwin Limited, 1964, XV.

⁴⁸ *Ibidem*

⁴⁹ RUSSELL, Bertrand. Les paradoxes de la logique. *Revue de Métaphysique et de Morale*. 1906, t. XIV, p. 627-650.

limitation of size", n'étaient pas satisfaisantes pour résoudre les paradoxes logiques et réaliser son projet de logicisation de l'arithmétique, Russell s'est tourné vers la "no class theory".

L'objectif de la "no class theory" était de résoudre les paradoxes logiques qui surgissent lorsqu'on essaie de définir une classe qui ne se classe pas elle-même, et fonder les mathématiques sur la théorie des ensembles. Russell a proposé de résoudre les paradoxes inhérents à la théorie des classes en niant l'existence des classes en tant qu'entités distinctes et en introduisant les définitions non prédicatives. Selon la "no class theory", les classes ne sont que des abstractions ou des concepts mentaux qui ne correspondent pas à des objets réels. Quant aux définitions non prédicatives, elles permettent de définir des termes sans recourir à des prédicats ou à des concepts plus fondamentaux. Ainsi, la "no class theory" propose de partir d'une proposition et de son composant plutôt que de parler de la fonction ϕx , qui semble indiquer quelque chose dénoté par ϕ . Cette théorie semblait garantir l'évitement des paradoxes liés à la théorie des classes, ce qui a permis à Russell de se réjouir d'avoir accompli une étape importante vers la réalisation de son projet de logicisation de l'arithmétique. Cependant, cette joie fut de courte durée, car Poincaré a démontré que les définitions non prédicatives présentées par Russell dans la "no class theory" étaient entachées de circularité, c'est-à-dire qu'elles étaient non prédicatives selon le sens que Russell avait lui-même introduit⁵⁰. Face à cela, Russell a tenté d'éliminer cette circularité en se tournant vers la théorie des types, qui a servi de fondement aux *Principia Mathematica*. L'idée centrale de la théorie des types est que les objets mathématiques et les propositions peuvent être classés en différents niveaux ou types, et qu'il existe des restrictions sur la manière dont les objets d'un certain type peuvent être utilisés pour former des objets d'un type supérieur. En développant la théorie des types, Russell et Whitehead tentaient de dériver les principes fondamentaux de l'arithmétique à partir des principes logiques. Cependant, en raison de sa complexité et de son formalisme, la théorie des types n'a

⁵⁰ Poincaré a critiqué l'approche de Russell dans son article de 1906, intitulé *Les mathématiques et la logique*, en faisant valoir que les définitions non prédicatives introduites par Russell sont intrinsèquement circulaires. Pour définir un terme par référence ostensive selon Poincaré, on doit se référer à des objets particuliers ou des exemples concrets. Mais pour désigner ces objets particuliers, on a besoin de termes déjà définis. Ainsi, il y a une dépendance circulaire entre les termes définis et les termes utilisés pour effectuer la définition : « *ce qui caractérise précisément une définition, c'est qu'elle permet de distinguer l'objet défini de tous les autres objets, si elle s'applique à une infinité d'objets, elle ne permet pas de les discerner les uns des autres ; elle n'en définit aucun ; elle n'est plus une définition* ». Cf. POINCARÉ, Henri. *Réflexions sur les deux notes précédentes* [de Schonflies et de Zermelo]. *Acta mathematica*, 1909, n° 32, p. 224. Pour aller plus loin, voir également HEINZMANN, Gerhard. *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédictivité*. 1985, p. 32-37.

pas été approuvé par plusieurs mathématiciens anti-réalistes, notamment Poincaré, qui a critiqué l'axiome de réductibilité qui y était associé.

En parallèle des travaux axiomatico-logiques de Russell, Louis Couturat, également défenseur du logicisme, publiait ses propres résultats. Le logicisme de Couturat était similaire à celui de Russell dans l'idée de réduire les mathématiques à la logique. Cependant, contrairement à Russell qui cherchait à simplifier le système de Frege, Couturat exprimait une répugnance envers son symbolisme qu'il trouvait trop obscur et complexe. Dans une correspondance avec Russell, il critiquait le formalisme de Frege en ces termes :

vraiment, il est impossible de choisir des signes plus incommodes, plus artificiels, et moins appropriés aux idées représentées. On constate aussi l'importance, proclamée par Leibniz, du choix de symboles commodes et expressifs. Et on apprécie encore plus, à cet égard, votre notation si claire des relations, qui s'apprend et se lit si facilement, et qui parle aux yeux⁵¹.

Bien qu'il éprouvât une répugnance envers le symbolisme de Frege, il partageait néanmoins avec lui l'idée de réaliser le projet logiciste. Par son rejet du symbolisme de Frege et du kantisme, Couturat s'est engagé dans la redéfinition du concept de nombre en se basant sur le concept de classe et en l'explicitant à travers la logique. Remettant en question le rôle de l'intuition dans le processus de construction des nombres, il défend la thèse selon laquelle les nombres peuvent être entièrement construits et compris par la logique et la formalisation. Il soutient ainsi que la logique peut fournir une base solide pour la compréhension et la conception des nombres. Dans son ouvrage *De l'infini mathématique*⁵², il cherchait à contester les jugements synthétiques *a priori* kantien en recherchant des symboles pratiques et expressifs dans la logique de Leibniz, capables de justifier la reconstruction logique du nombre. Dans la première partie de cet ouvrage, où la question de la reconstruction logique du nombre est abordée, Couturat démontre que les nombres entiers peuvent être construits logiquement en suivant quatre étapes, résumées comme suit par Oliver Schlaudt :

(1) La construction commence avec les nombres entiers et leurs opérations (addition, soustraction, multiplication et division) : le mathématicien pose des symboles et des règles selon lesquelles ces symboles doivent être combinés, mais au fond le chiffre reste à ce stade « une expression qui n'a pas de sens en elle-même, un signe qui ne signifie rien ».

⁵¹ RUSSELL, Bertrand. *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913)*, édition et commentaire par Anne-Françoise SCHMID, Éditions Kimé, Paris, 2001, tome2, p. 351.

⁵² COUTURAT, Louis. *De l'infini mathématique*. Paris. Ancienne librairie Germer Baillière et cie, 1896.

(2) Ensuite commence la « généralisation arithmétique » du nombre : dans un premier temps, on introduit les nombres fractionnaires comme couples de nombres entiers, et ainsi de suite jusqu'aux nombres imaginaires. Pour chaque nouvel ensemble, des opérations arithmétiques sont définies à la base des opérations portant sur les nombres de l'étape précédente et de sorte qu'elles aient toujours les mêmes propriétés formelles (commutativité de l'addition, etc.). Dans un deuxième temps, les nombres entiers qui ont servi de base pour toute la construction sont identifiés avec un sous-ensemble des nombres fractionnaires (à savoir avec les fractions de dénominateur 1), et ainsi de suite jusqu'à ce que « l'ensemble des nombres complexes finissent par englober tous les autres à titre d'ensembles particuliers ». (...).

(3) La généralisation arithmétique, qui réside dans une opération purement logique, est ensuite critiquée du point de vue algébrique : les nombres nouvellement introduits assurent les racines de toutes les équations du premier et du second degré – « la généralisation du nombre se justifierait ainsi par l'intérêt de la généralité du calcul », et, point important, cette généralisation algébrique serait « plus concrète et moins arbitraire ».

(4) Finalement, la généralisation algébrique est critiquée à son tour du point de vue géométrique : les nombres ne deviennent « valables » que dans la mesure où ils servent à représenter des grandeurs. Les nombres entiers sont appliqués aux grandeurs à deux sens, l'ensemble des nombres réels aux points de la droite indéfinie, l'ensemble des nombres complexes aux points du plan indéfini. « C'est donc dans la considération des grandeurs concrètes que la généralisation de l'idée de nombre trouve en définitive sa seule raison d'être ». C'est en particulier de là que découlerait le sens qu'ont les opérations arithmétiques, posées au début comme opérations portant sur des symboles dénués de sens. On finirait par « avoir montré que toutes les conventions en apparence arbitraires ont pour but de traduire en nombres des constructions géométriques "réelles" ». ⁵³

Il est ici observé que les trois premières étapes de la construction des nombres entiers proposées par Couturat reposent sur la logique, tandis que dans la dernière étape, on sort du cadre purement logique et formel pour démontrer "la raison d'être des nombres" dans la représentation des grandeurs⁵⁴. Cette démarche logico-formelle vise à montrer que les nombres entiers peuvent être dérivés des structures logiques, la logique elle-même étant considérée comme une opération mécanique consistant à manipuler les signes et les symboles selon des règles logiques.

Déterminé à réduire le nombre à la logique, Couturat publia en 1905 deux articles dans la revue *L'Enseignement Mathématique*⁵⁵. Dans ces deux articles, qui sont en quelque sorte une réponse au principe d'induction complète de Poincaré⁵⁶, il aborde la construction du nombre en

⁵³ SCHLAUDT, Oliver. Louis Couturat, ou une approche perdue pour une approche sémiotique dans l'épistémologie française. *Revue de Métaphysique et morale*, 2016, n° 90, p. 232-233.

⁵⁴ *Idem*, p. 233.

⁵⁵ Ces articles sont : « Les définitions mathématiques » et « Définition et démonstrations mathématiques »

⁵⁶ Dans la lettre adressée à Russell en date du 2 avril 1905, Couturat y mentionnait que son article intitulé *Définitions et démonstrations mathématiques* avait pour objectif principal de réfuter la théorie bizarre du raisonnement par induction de Poincaré. Cf. RUSSELL, Bertrand. *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis COUTURAT (1897-1913)*, 2001.

relation avec les définitions et les démonstrations mathématiques, en cherchant à montrer comment les nombres pouvaient être construits à partir de définitions précises et de démonstrations rigoureuses. Il explore comment les définitions claires et précises des termes et des concepts mathématiques peuvent contribuer à la rigueur et à la conception des nombres⁵⁷. Enfin de compte, Couturat souligne dans ces deux articles la nécessité d'une logique claire, formelle et rigoureuse pour la compréhension et la construction des nombres.

En résumé, le projet philosophique du logicisme, initié par Russell et Couturat, partageait une vision commune, à savoir réduire les mathématiques en général, et l'arithmétique en particulier, à la logique formelle. Ces deux logicistes cherchaient à montrer que les vérités de l'arithmétique pouvaient être dérivées à partir de principes logiques fondamentaux. Cependant, ils ont abordé ce projet avec certaines différences dans leurs perspectives et leurs approches. Pour Russell, le logicisme était une tentative de fonder l'arithmétique sur une base purement logique en réduisant tous les concepts et raisonnements de cette branche des mathématiques à des éléments logiques fondamentaux. Son objectif était essentiellement de montrer que l'arithmétique pouvait être entièrement dérivée des principes logiques, notamment de la théorie des types qu'il a développée en collaboration avec Whitehead. Couturat, quant à lui, partageait l'objectif général du logicisme de réduire les mathématiques à la logique, mais il différait de Russell sur certains aspects. Dans son approche, il cherchait à donner une redéfinition du nombre en se basant sur le concept de classe, afin de prouver que la construction des nombres relève de la logique pure. C'est ainsi qu'il mettait l'accent sur l'importance des définitions mathématiques axées sur les principes logiques et des démonstrations rigoureuses pour établir une base logique solide à la conception des nombres.

Faisons le point sur cette première section. Notre objectif était de présenter les conceptions « logiques » des mathématiques qui émergeaient à l'époque de Poincaré, afin de comprendre leurs objectifs et portées philosophiques. Tout d'abord, nous avons constaté que le

⁵⁷ Pour ce qui est de la définition par postulats, Couturat écrit : « *la définition par postulats s'applique, non seulement à une seule notion, mais à un système de notions ; elle consiste à énumérer les relations fondamentales qui les unissent et qui permettent de montrer toutes leurs autres propriétés : ces relations sont des postulats, c'est-à-dire les propositions premières d'une théorie* ». En revanche, la définition par abstraction est un procédé qui consiste « *à considérer le nombre entier comme une propriété des classes (ce qu'on appelle leur nombre cardinal) et à définir par abstraction les nombres cardinaux comme des fonctions logiques (Num x) en définissant seulement leur égalité* ». Cf. COUTURAT, Louis. Définitions et démonstrations mathématiques : L'Enseignement mathématique, VII, 1905, p. 104–121 in : *Logique, mathématiques*, langue universelle : Anthologie 1893-1917. Lyon : ENS Éditions, 2018. Disponible sur le web : <http://books.openedition.org/bases-doc.univlorraine.fr/enseditions/8021>. ISBN : 9782847889956.

projet philosophique d'axiomatiser les mathématiques consistait à traduire les axiomes géométriques et arithmétiques en systèmes logico-formels composés de structures et de symboles abstraits. Cette approche impliquait, comme nous l'avons vu, l'élimination des fondements empirico-intuitifs sur lesquels reposaient les mathématiques chez Euclide. Ensuite, nous nous sommes intéressés au projet philosophique du logicisme et avons réalisé que cette conception logique des mathématiques allait au-delà de l'axiomatique, en cherchant à réduire l'arithmétique à la logique formelle afin d'éliminer toute implication éventuelle de l'intuition dans le processus de construction arithmétique.

En examinant les théories axiomatiques élaborées par des penseurs tels que Frege, Peano, Hilbert, etc., nous avons constaté que le formalisme et le symbolisme, qui sont sous-jacents à l'axiomatique hilbertienne et à la logistique, visaient finalement un objectif commun : transposer les mathématiques dans des systèmes formels afin d'éviter toute intervention de l'intuition dans le processus de démonstration mathématique⁵⁸, condition nécessaire pour garantir la rigueur du raisonnement mathématique. Ainsi, nous pouvons conclure que le logicisme, dans son projet philosophique de réduire les mathématiques à la logique, s'appuie simultanément sur l'axiomatique, le formalisme et le symbolisme pour atteindre les objectifs poursuivis. Jusqu'à présent, nous avons esquissé les conceptions « logiques » des mathématiques. Dans la deuxième section de ce premier chapitre, nous aborderons les objections formulées par Poincaré à l'égard de ces deux conceptions « logiques ».

⁵⁸ Précisons que l'intuition n'est pas complètement absente chez les logicistes et formalistes : par exemple, Hilbert place l'intuition dans la métamathématique et Frege la cache dans sa théorie platoniste des concepts. Cependant, ces deux conceptions ne seront pas examinées ici.

II- Les recensions poincaréennes des conceptions « logiques » des mathématiques

Dans cette section, nous exposerons les objections formulées par Poincaré à l'encontre des deux conceptions « logiques » des mathématiques précédemment présentées. La première sous-section sera consacrée aux objections poincaréennes à la méthode axiomatique, largement promue par les logiciens et les logicistes du XX^e siècle. Les critiques spécifiques visant le logicisme seront ensuite présentées dans la deuxième sous-section.

II-1- Critique poincaréenne de l'axiomatique logique

Pour aborder cette dimension critique, nous nous appuierons principalement sur les ouvrages *Science et méthode* et *Rapport sur les travaux de M. Hilbert* où Poincaré émet des critiques à l'encontre de l'axiomatique logique, présentée sous les termes de formalisme et de symbolisme. Ces critiques étant parfois directement liées au logicisme (de Russell et Couturat) et au formalisme (de Hilbert), nous chercherons à mettre en évidence celles qui sont implicitement dirigées vers l'axiomatique logique. Afin de comprendre pleinement la portée philosophique et épistémologique des critiques poincaréennes envers l'axiomatique logique, il est important de rappeler que cette dernière, en utilisant la formalisation et la symbolisation, a servi de moyen pour transposer les mathématiques dans des systèmes logico-formels. Poincaré s'est opposé spécifiquement à cette conception de l'axiomatique. La question qui se pose est donc de comprendre les motifs qui ont poussé Poincaré à s'opposer à l'axiomatique logique. En d'autres termes, quelles sont les raisons philosophiques et épistémologiques qui ont motivé l'opposition de Poincaré aux théories axiomatico-logiques ? Notre analyse critique de l'axiomatique logique débutera par l'axiomatique géométrique de Hilbert, dont certaines idées révolutionnaires ont été exposées plus haut.

Malgré l'appréciation explicite de Poincaré du caractère formel de la géométrie de Hilbert et l'originalité de ses idées philosophiques en matière de développement géométrique, il n'a pas hésité à émettre de sérieuses réserves à son égard. Dans son *Rapport sur les travaux de M. Hilbert*, Poincaré a exprimé des regrets quant à la négligence par Hilbert du problème de la genèse psychologique de la géométrie, dont les fondements avaient pourtant été établis par Helmholtz, Lie et lui-même bien avant l'apparition de *Die Grundlagen der Geometrie*. Alors que ces mathématiciens voyaient les mouvements des corps solides comme le germe d'une théorie psycho-physiologique de la géométrie, Hilbert a balayé cette indication psychologique et a proposé une genèse axiomatique de la géométrie, ramenant les énoncés géométriques à des

règles purement mécaniques. Cette approche négligeait complètement le rôle joué par l'intuition dans la construction des axiomes géométriques. Le regret de Poincaré envers l'axiomatique logique hilbertienne est illustré à travers ce passage :

je regretterai ainsi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier compris l'importance : je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On pourrait conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes. On pourrait éviter ainsi l'introduction artificielle de cet axiome III, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur véritable origine psychologique⁵⁹.

Poincaré exprime explicitement dans ce passage sa désapprobation envers la séparation de la géométrie de ses bases empirico-intuitives. Hilbert a introduit cette séparation en estimant que la construction géométrique n'est pas principalement liée à une opération de l'intuition. Lorsqu'il publiait *Die Grundlagen der Geometrie*, son objectif était d'exclure l'opération de l'intuition du processus de construction géométrique afin de garantir, grâce à l'axiomatique, la sûreté et la pureté de la géométrie. Ce n'est qu'avec sa « théorie de la démonstration », développée ultérieurement en arithmétique (1920), que Hilbert a été contraint de prendre en compte le rôle de l'intuition dans le processus d'axiomatisation, suite à une objection formulée par Poincaré en 1904 concernant le principe d'induction complète. Ainsi, la façon dont Hilbert expose les axiomes géométriques dans *Die Grundlagen der Geometrie* marque l'admiration de Poincaré en raison de la rigueur qu'elle incarne. Néanmoins, il souligne que cette rigueur est au prix d'un manque de compréhension. Pour bien comprendre l'importance de cette observation critique de Poincaré, reformulons sa préoccupation de la manière suivante : quel avantage un élève peut-il tirer de l'axiomatique géométrique hilbertienne ?

Dans son ouvrage *Des fondements de la géométrie (1898)*, publié un an avant *Die Grundlagen der Geometrie*, Poincaré remettait en question la nature *a priori* de la géométrie en explorant ses origines psycho-physiologiques. Il démontrait que la géométrie n'est pas *a priori*, mais plutôt se forme grâce aux déplacements et mouvements constants du corps. Poincaré soulignait ainsi l'importance de l'expérience sensori-motrice dans le processus d'apprentissage et de développement de la géométrie. Cet aspect sera étudié en détail dans le prochain chapitre. Conscient de l'importance de l'expérience dans la construction de la pensée géométrique, Poincaré plaidait, dans *Les définitions mathématiques et l'enseignement*, en faveur de l'utilisation de définitions mathématiques basées sur l'expérience, car cela garantit l'accessibilité

⁵⁹ POINCARÉ, Henri. Rapport sur les travaux de M. Hilbert. 1904, *op. cit.*, p. 19.

et la pertinence des mathématiques pour les élèves⁶⁰. De plus, commencer les définitions mathématiques par des faits empiriques permet de simplifier l'enseignement des mathématiques, répondant ainsi à un souci de simplification de l'enseignement mathématique.

Hilbert s'est efforcé de présenter les axiomes géométriques de manière formelle et symbolique afin d'éviter toute référence à l'expérience et à l'intuition dans la démonstration géométrique. Cependant, l'une des critiques de Poincaré consiste à affirmer que présenter les définitions mathématiques sous forme symbolique et formelle n'est pas approprié pour l'enseignement des mathématiques. Observant que la géométrie hilbertienne est composée d'une multitude de symboles et d'expressions formelles, déconnectées de la réalité sensible, Poincaré dénonce cette situation en soulignant que l'approche adoptée par Hilbert ne permet pas aux élèves de vivre l'expérience de l'intuition. Au lieu de susciter un intérêt, l'abstraction avec laquelle les définitions géométriques commencent dans *Die Grundlagen der Geometrie* peut, au contraire, engendrer chez les jeunes apprenants une frénésie et une aversion pour les mathématiques. C'est pourquoi Poincaré considérait la géométrie hilbertienne comme étant "funeste" pour l'enseignement scolaire, car elle ne contribue pas au développement de l'esprit des élèves. Il l'a exprimé explicitement de la manière suivante :

il est inutile de faire observer combien elle [la géométrie hilbertienne] serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits ; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité⁶¹.

Ainsi, Poincaré déplore le fait que la géométrie hilbertienne ne tienne pas compte des aspects didactiques des mathématiques. Bien que cette critique de Poincaré soit correcte et intéressante du point de vue didactique, elle perd de sa pertinence si l'on considère que l'objectif de Hilbert était de formuler les axiomes d'une manière qui permette à quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens. Il était donc normal que ce logicien persiste à penser que le raisonnement géométrique consiste simplement à appliquer des règles logiques aux axiomes géométriques, sans se soucier de la signification des mots utilisés pendant la démonstration. En effet, Hilbert a conçu les axiomes géométriques pour un esprit logique et estimait qu'il n'était pas nécessaire de comprendre ce que les termes tels que "points", "plans" ou "droites" signifient pour effectuer une démonstration géométrique. Cela renforce sa position selon laquelle toute la géométrie peut être construite à partir de chaînes logiques de propositions, sans avoir besoin de recourir à intuition ou d'avoir une compréhension préalable de la géométrie.

⁶⁰ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 113.

⁶¹ *Idem*, p. 16.

Considérant pour sa part que le raisonnement géométrique va au-delà d'une simple application de règles logiques ou d'une exposition mécanique d'axiomes, Poincaré déplore la conception géométrique de Hilbert, qu'il juge répugnante pour l'enseignement mathématique. Dans son article intitulé *Les mathématiques et la logique*, il rejette l'approche axiomatique de Hilbert en argumentant que si le raisonnement géométrique se limitait à une exposition mécanique des axiomes géométriques, cela conduirait nécessairement à

remplacer le géomètre par le piano à raisonner imaginé par Stanley Jevons; ou, si l'on aime mieux, on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils ressortent transformés en jambons et en saucisses⁶².

Poincaré répondait ainsi à Hilbert par le biais d'une métaphore, soulignant que sa tentative d'exclure l'intuition du raisonnement géométrique a abouti à une géométrie fonctionnant comme une « machine » qui transforme mécaniquement les axiomes en théorèmes, tout comme une machine industrielle transforme mécaniquement les porcs en jambons et en saucisses. Cette remarque de Poincaré montre son intérêt pour la didactique des mathématiques, tandis que Hilbert est déterminé à justifier les fondements de la géométrie par le biais de l'axiomatique. On observe donc que les deux protagonistes poursuivent des objectifs différents. Cela soulève la question de savoir si Poincaré était victime d'un malentendu et, si ce n'est pas le cas, de quoi exactement reprochait-il à l'axiomatique géométrique de Hilbert ?

Dans son *Rapport sur les travaux de M. Hilbert*, Poincaré continue d'analyser les idées géométriques de Hilbert et en arrive à l'examen de ses derniers travaux présentés dans *Grundlagen der Geometrie*⁶³. À ce stade, il remarque que les idées développées par Hilbert dans ce document sont contradictoires avec celles adoptées dans *Die Grundlagen der Geometrie (1899)* concernant les groupes. Selon Poincaré, ce changement d'opinion compromet l'originalité et la compréhension des idées géométriques de Hilbert. Comme il l'a clairement exprimé à la fin de son rapport,

il est impossible de n'être pas frappé du contraste entre le point de vue où se place ici [faisant allusion à Grundlagen der géométrie] M. Hilbert et celui qu'il avait adopté dans sa Festschrift [faisant allusion à Die Grundlagen der Geometrie]. Dans sa Festschrift les axiomes de continuité occupaient le dernier rang et la grande affaire était de savoir ce que devenait la géométrie quand on les mettait de côté. Ici au contraire c'est la continuité qui est le point de départ et M. Hilbert s'est surtout préoccupé de voir ce qu'on tire de la continuité seule, jointe à la notion du groupe⁶⁴.

⁶² POINCARÉ, Henri. *Les mathématiques et la logique*. 1905, *op.cit.*, p. 816.

⁶³ HILBERT, David. *Grundlagen der geometrie*, Leipzig, B.G Teubner. 1903, p. 175.

⁶⁴ POINCARÉ, Henri. *Rapport sur les travaux de M. Hilbert*. 1904, *op. cit.*, p. 46.

Puisque dans ces deux mémoires, Hilbert a développé des perspectives contradictoires concernant les propriétés générales des groupes, Poincaré soulève, en conséquence, une objection quant à l'incompréhensibilité de sa géométrie en raison des contradictions qu'elle implique. Cette objection de Poincaré est directement liée à la question de la justification des fondements de la géométrie. Mais quel est le lien entre la justification des fondements de la géométrie et les contradictions relevées dans l'axiomatique géométrique hilbertienne ? En cherchant à justifier les fondements de la géométrie sans faire appel à l'intuition, Hilbert s'est égaré au point de développer des points de vue contradictoires. Tout comme les logiciens qui ont été confrontés à des antinomies insurmontables en tentant d'exclure l'intuition du raisonnement arithmétique à tout prix, Hilbert se trouve dans une contradiction lorsqu'il s'agit de justifier l'origine de la géométrie. C'est ce qui rend sa géométrie incompréhensible selon Poincaré.

Il convient de ne pas interpréter la récusation de la géométrie hilbertienne par Poincaré comme une opposition fondamentale à la méthode axiomatique. En effet, Poincaré n'est pas du tout opposé à l'axiomatique en termes de méthode. Il reconnaît parfaitement que c'est grâce à l'application de l'abstraction axiomatique que les mathématiciens parviennent à construire et à créer de nouvelles théories. Il est conscient que la méthode axiomatique est nécessaire pour effectuer des généralisations lors du raisonnement mathématique et qu'elle est utile pour étudier les relations entre les objets sans tenir compte de leur nature réelle. En fait, la déclaration suivante de Poincaré illustre le fait qu'il n'exclut pas la méthode axiomatique : « *les mathématiciens n'étudient pas les objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse* »⁶⁵. Sans la nommer explicitement, Poincaré présente subtilement la méthode axiomatique comme l'approche utilisée par les mathématiciens pour établir les relations entre les objets.

Malgré l'approbation de Poincaré envers l'abstraction incarnée par la méthode axiomatique, il a toutefois développé une aversion envers l'axiomatique logique, qu'il considère comme un moule artificiel visant à faciliter la transposition des mathématiques dans un système logico-formel. En effet, l'axiomatique logique donne l'impression d'être affranchie de l'intuition et prétend que les processus de déduction et de généralisation qui se produisent au cours du

⁶⁵ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op.cit.*, p. 49.

raisonnement mathématique reposent essentiellement sur la logique. Poincaré, quant à lui, perçoit l'axiomatique comme un cadre architectural dans lequel les opérations de généralisation et de synthèse s'appuient sur l'intuition plutôt que sur la logique. Il considère que l'intuition est indispensable pour la compréhension et la justification des axiomes de la géométrie. Il est donc clair que la critique principale de Poincaré envers la géométrie de Hilbert ne réside pas tant dans l'enseignement des mathématiques, mais plutôt dans le fait que la transposition de la géométrie dans un système axiomatique logico-formel exclut le rôle de l'intuition dans la justification, la compréhension et la construction de la pensée géométrique.

Abordons maintenant l'axiomatisation de l'arithmétique afin de connaître la critique formulée par Poincaré à l'égard des théories axiomatiques développées dans ce domaine. Nous nous focaliserons spécifiquement sur la critique poincaréenne de la pasigraphie de Peano pour deux raisons primordiales. La première concerne la révolution qu'a engendrée la pasigraphie dans l'axiomatisation de l'arithmétique, tandis que la seconde concerne le rôle qu'elle a joué dans les théories axiomatico-logistiques de Couturat et Bertrand Russell⁶⁶. Les critiques formulées à l'encontre de la pasigraphie de Peano dans ce contexte seront donc applicables aux autres systèmes axiomatiques symboliques.

Dans son article de 1905, Poincaré a examiné la question centrale de la possibilité d'exprimer l'arithmétique entière dans un langage symbolique, sans faire appel à l'intuition. À cette question, Peano avait répondu affirmativement lorsqu'il a développé, en collaboration avec Padoa, un langage symbolique connu sous le nom de pasigraphie. En analysant ce langage symbolique dans son article, Poincaré a avancé l'argument selon lequel il ne permet pas d'éliminer les jugements synthétiques *a priori* au profit des enchaînements déductifs sur lesquels il repose. Le premier aspect de la critique de Poincaré concerne l'abus des notations algébriques ou symboliques dans la pasigraphie peanienne. Poincaré constate que le langage symbolique inventé par Peano a engendré une sorte d'instrumentalisation de la pensée arithmétique, au sens où les énoncés intuitifs présents dans le raisonnement arithmétique ont tous été remplacés par des signes algébriques jugés commodes à cette fin. Dans un ton ironique, il dénonce cette instrumentalisation de l'arithmétique en affirmant que la logistique, terme honorifique donné à la pasigraphie de Peano, est l'art de combiner les signes algébriques, de la

⁶⁶ Poincaré estimait que la pasigraphie mise au point par Peano a été le ferment des théories axiomatico-logistiques de Russell et Couturat. Cf. Les mathématiques et la logique. 1905, *op. cit.*, p. 822-823.

même manière que le maréchal des logis savait faire marcher ses troupes dans les écoles militaires⁶⁷.

Poincaré a naturellement désapprouvé un autre aspect de la pasigraphie : la trop grande importance que Couturat lui accordait. Selon ce logiciste, la pasigraphie était une méthode parfaite et irréprochable, car elle permettait de démontrer des énoncés mathématiques sans recourir à l'intuition. Couturat argumentait sa position en affirmant que la pasigraphie supprime le caractère synthétique et intuitif du raisonnement mathématique, tel que Kant le mettait en avant dans sa philosophie des mathématiques. Poincaré, qui défendait le synthétisme kantien, était en total désaccord avec cette surévaluation de Couturat. Il avançait un argument intéressant pour montrer à Couturat que la question n'était pas tant de savoir si la pasigraphie était capable de démontrer des énoncés mathématiques sans l'intuition, mais plutôt si elle était compétente pour résoudre les antinomies qui étaient associées au projet du logicisme. En substance, la critique de Poincaré revenait à dire que la logistique, comme celle de Peano qui repose sur le raisonnement analytique, échouait à éliminer les antinomies logiques liées à la théorie des ensembles. Puisque la pasigraphie n'avait pas réussi à résoudre les antinomies logiques, Poincaré utilisait cet argument pour rejeter sa prétention à éliminer le caractère synthétique et intuitif des propositions arithmétiques. À travers cette critique, Poincaré remettait en cause essentiellement la fécondité de la pasigraphie.

Dans son article de 1906, Poincaré aborda plus en détail l'aspect précis qu'il réfutait à nouveau à Couturat concernant la fécondité de la pasigraphie. Couturat, dans une position anti-kantienne, soutenait que la logistique favorisait l'invention, affirmant ainsi que la logique était féconde et indépendante de l'intuition. Dans le contexte du logicisme, la logistique était considérée comme l'art de combiner les signes algébriques dans un langage formel pour exprimer et manipuler les propositions et les relations mathématiques. L'objectif était de montrer que les axiomes de l'arithmétique pouvaient être dérivés à partir des principes logiques fondamentaux et des règles de déduction. Poincaré critiqua les logicistes pour leur attitude consistant à faire des démonstrations mathématiques sans tenir compte du rôle de l'intuition. Il remit en question l'idée de Couturat en démontrant que la logistique souffrait d'un manque cruel de fécondité, étant incapable de résoudre les difficultés épistémologiques associées à la théorie des ensembles. Certes, la logistique permet d'avancer dans la démonstration mathématique avec certitude et rigueur, mais pour Poincaré, elle ne conduit ni à une précision ni à une concision

⁶⁷ POINCARÉ, Henri. Les mathématiques et la logique. 1905, *op. cit.*, p. 823.

accrue. Au contraire, elle nous oblige à emprunter des détours fastidieux lors des démonstrations mathématiques. Comment pouvons-nous espérer être concis lorsque la logistique nous pousse à marcher avec des lisières ?

Étant donné que le langage symbolique utilisé dans la pasigraphie peanienne limite l'expression de l'intuition, Poincaré la compare à des lisières qui entravent la libre activité créatrice de l'esprit. On peut accorder aux lisières leur capacité à nous empêcher de tomber, mais elles incarnent la captivité de l'esprit humain. C'est ce qui pousse Poincaré à affirmer que la logistique est « *une entrave pour l'inventeur* »⁶⁸. Alors que Couturat défendait une conception féconde de la pasigraphie, capable de mettre fin à la nature synthétique du raisonnement mathématique, Poincaré, au contraire, voit une conception dépourvue de fécondité. En abandonnant l'intuition au profit de la logique, comment pourrions-nous espérer la fécondité de la logistique ? Pour Poincaré, la fécondité est l'une des caractéristiques de l'intuition. Dès lors que la logistique prétend ne pas faire appel à des formes d'intuition dans la démonstration arithmétique, elle scelle ainsi sa propre stérilité. C'est pourquoi, dans les conclusions de son article de 1906, il affirme que « *la logistique reste stérile, à moins d'être fécondée par l'intuition* »⁶⁹.

En ce qui concerne la surévaluation de Peano (mentionnée brièvement dans l'article de 1905), Poincaré se demande si la logistique est réellement infaillible. Sa réponse est clairement négative. Son argument pour justifier cette réponse peut être résumé comme suit : pour accepter l'infailibilité réelle de la logistique, défendue par ses partisans, il faudrait que les paradoxes logiques (tels que le paradoxe de Burali-Forti, le paradoxe de Zermelo-König, le paradoxe de Richard, etc.) soient définitivement éliminés grâce aux moyens logiques disponibles. Si tel n'est pas le cas, on en déduit que la logistique n'est pas infaillible, parce qu'elle a échoué à éliminer ces paradoxes logiques. En se basant sur ce raisonnement, Poincaré rejette l'argument en faveur de l'infailibilité de la logistique et oblige ses opposants à admettre que la notation symbolique de Peano n'a pas mis fin à la nature synthétique des propositions mathématiques. En effet, si la logistique était réellement infaillible, ses règles ne subiraient pas de multiples changements et il n'y aurait pas autant de théories axiomatiques-logistiques poursuivant le même objectif, à savoir l'élimination des paradoxes logiques.

⁶⁸ POINCARÉ, Henri. Les mathématiques et la logique. *Revue de Métaphysique et de Morale*. 1906, 14, p. 295.

⁶⁹ *Idem*, p. 316.

En ce qui concerne la logistique russellienne, Poincaré exprime fermement sa conviction que son destin est voué à l'échec tant qu'elle ne s'associe pas à l'intuition. Ce qui renforce cette position de Poincaré, c'est que les logicistes ont maintes fois tenté de résoudre les paradoxes sans recourir à l'intuition, mais à chaque tentative, ils se sont retrouvés face à de nouveaux paradoxes. Ce fait démontre l'incapacité épistémologique de la logistique à résoudre les paradoxes logiques. La logistique, présentée par Couturat comme une méthode infaillible pour mettre fin aux jugements synthétiques *a priori*, se révèle finalement être la source même des paradoxes. En tout cas, c'est ainsi que Poincaré la perçoit en 1906 lorsqu'il déclare : « *la logistique n'est plus stérile, elle engendre des antinomies* »⁷⁰.

De nombreuses études récentes ont tenté de fournir plus de détails sur les objections persistantes de Poincaré à l'axiomatique logique. Heinzmann, qui aborde une préoccupation similaire à celle de Poincaré, se pose la question suivante : « *le langage formel des mathématiques n'exige-t-il pas, à son tour, le recours à l'intuition s'il exige comme critère de rigueur la seule évidence logique ?* »⁷¹. Ainsi formulée, la question porte sur la capacité des théories axiomatiques et formelles à se passer réellement de l'intuition. En soutenant Poincaré, Heinzmann affirme que face à l'échec des théories axiomatico-logiques à résoudre définitivement les paradoxes logiques, celles-ci devraient être associées à l'intuition. En maintenant l'intuition dans la construction et la justification des mathématiques, Heinzmann critique, comme Poincaré, l'approche des logicistes qui excluent l'intuition du processus de démonstration mathématique, soutenant que le raisonnement mathématique ne doit pas être exclusivement logique. Detlefsen donne également une interprétation allant dans le même sens. Selon lui, la démonstration mathématique ne doit pas être principalement logique, car il faut faire appel à l'intuition pour surmonter les éventuelles lacunes qui pourraient survenir dans le processus de démonstration. Dans ces conditions, on peut affirmer avec justesse que sans un minimum d'intuition, la logistique est condamnée à l'infécondité sur le plan épistémologique.

Pour clore cette analyse critique, on peut dire que Poincaré examine l'axiomatique logique d'une manière qui aboutit généralement à une conclusion négative. En tant qu'instrument de transposition des mathématiques dans un système formel et symbolique, Poincaré ne voit dans l'axiomatique des logicistes (Peano, Russell) et celle des formalistes (Hilbert) que des entraves

⁷⁰ POINCARÉ, Henri. Les mathématiques et la logique. 1906, *op. cit.*, p. 316.

⁷¹ HEINZMANN, Gerhard. *L'intuition épistémique : une approche pragmatique du contexte de compréhension et de justification en mathématiques et en philosophie*. Paris, Vrin, 2013, p. 27.

à l'invention et à la compréhension des mathématiques. Maintenant, il nous faut convoquer le logicisme devant le tribunal de Poincaré.

II-2- Critique poincaréenne du logicisme : le raisonnement logique en mathématiques est insuffisant

Dans [la sous-section I-2](#), nous avons abordé le logicisme, qui postule que l'arithmétique peut être réduite à la logique pure. Cette perspective permet aux logicistes de soutenir que l'intuition ne joue pas un rôle essentiel dans la construction et le raisonnement mathématique. Il est couramment admis que Poincaré s'est opposé aux différentes formes de logicisme présentées par Frege, Couturat et Russell. Dans son ouvrage intitulé *La science et l'hypothèse*, il formule sa critique du logicisme en se posant la question philosophique suivante concernant l'arithmétique : «*si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ?*»⁷². Poincaré fait ici référence au raisonnement arithmétique et reconnaît explicitement que celui-ci est parfaitement rigoureux dans son processus de raisonnement. Cependant, il se demande si cette rigueur est attribuable ou non à la logique, qui préconise la déduction logique comme mode de raisonnement mathématique. Il existait un conflit philosophique entre Poincaré et les logicistes de son époque, en particulier Russell, concernant le mode de raisonnement le plus approprié en mathématiques. Ce conflit philosophique, tel que rapporté par Detlefsen, portait principalement sur deux points : la nature de la preuve mathématique et la nature de la rigueur mathématique.

En ce qui concerne le premier point, les travaux de Russell et des logicistes en général visaient à réduire la preuve mathématique à des inférences logiques. Poincaré, qui propose un modèle de raisonnement arithmétique ancré dans l'intuition, considérait inacceptable de logiciser la preuve mathématique. Par preuve mathématique, on entend les inférences authentiquement mathématiques qui sont à la base de la productivité épistémique du raisonnement mathématique. Fondamentalement, la logicisation de la preuve mathématique, si désirée par les logicistes, suppose la réduction des inférences créatives mathématiques à des inférences purement logiques. Poincaré s'est fermement opposé à l'attitude des logicistes qui croyaient pouvoir rendre la preuve mathématique purement logique et ainsi éliminer l'intuition du raisonnement mathématique.

⁷² POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op.cit.*, p. 31.

Comme nous l'avons vu, les logicistes pensaient que l'atteinte de la rigueur mathématique passait nécessairement par l'élimination de l'intuition et l'insertion subséquente des lois logiques dans le raisonnement mathématique. Cela impliquait que le raisonnement mathématique ne devienne rigoureux que s'il est purement logique. Dans son ouvrage *La science et l'hypothèse*, Poincaré remet en question le raisonnement déductif en soulignant son incapacité à produire de nouvelles connaissances mathématiques. Adoptant une approche kantienne, il soutient que le raisonnement déductif, en écartant l'intuition, ne peut plus être considéré comme un raisonnement productif, fécond ou extensif. En réalité, il argumente que la vertu créative et caractéristique du raisonnement mathématique, qui repose sur l'induction, se distingue du raisonnement mathématique déductif sur lequel repose le logicisme⁷³. C'est dans cette perspective qu'il établit une distinction stricte entre l'inférence mathématique d'une part, et l'inférence logique d'autre part. Detlefsen nous fournit la définition de ces deux modes d'inférence :

une inférence mathématique est celle qui réunit les prémisses et la conclusion en tant que "développement" sous une architecture ou un thème mathématique, et une inférence logique est celle qui réunit les prémisses et la conclusion en tant que "développement" sous une architecture logique (si elle existe)⁷⁴.

Poincaré se servait de cet exemple pour montrer la différence entre ces deux modes d'inférence. Soit la démonstration de $2+2=4$:

$$1 + 1 = 2 \text{ (1)}$$

$$2 + 1 = 3 \text{ (2)}$$

$$3 + 1 = 4 \text{ (3)}$$

Je définis de même l'opération $x + 2$ par la relation : $x + 2 = (x + 1) + 1$ (4)

Cela posé nous avons :

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 \text{ (définition 4)}$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 \text{ (définition 2)}$$

$$3 + 1 = 4 \text{ (définition 3)}$$

D'où : $(2 + 2 = 4)$.⁷⁵

Un tel mode de raisonnement mathématique est une inférence logique qui consiste en une vérification. Selon Poincaré, cette vérification ne fait pas intervenir de nouveaux éléments lors du raisonnement mathématique, ce qui signifie que la conclusion est contenue dans les prémisses. Par conséquent, le raisonnement syllogistique est considéré comme stérile car sa

⁷³ « Il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme » Cf. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op.cit.*, p. 32.

⁷⁴ DETLEFSEN, Michael. Poincaré against the logicians. 1992, *op. cit.*, p. 16.

⁷⁵ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 33.

conclusion « *n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage* »⁷⁶. Cette critique souligne le manque de créativité de l'inférence logique lorsqu'il s'agit d'aller au-delà des éléments contenus dans les prémisses. Fondamentalement, Poincaré pensait que l'inférence logique entravait la production de nouvelles connaissances mathématiques. En revanche, l'inférence mathématique possède une vertu intrinsèque et créatrice qui permet aux mathématiciens d'aller toujours plus loin que ce qui leur est présenté.

L'interprétation de Schmid de la nature du raisonnement mathématique rejoint la critique observée par Poincaré. Selon elle, l'inférence logique et l'inférence mathématique s'opposent comme deux pôles diamétralement opposés. D'un côté, l'inférence logique est associée à la déduction, à la rigueur et à la stérilité, tandis que de l'autre côté, l'inférence mathématique est associée à l'induction, à la révisibilité et à la productivité⁷⁷. Schmid partage donc le point de vue de Poincaré en admettant que le progrès spectaculaire des mathématiques ne peut pas être attribué au raisonnement déductif, sinon les mathématiques seraient figées dans leur développement. Cependant, Russell a réfuté l'argument de Poincaré en avançant que l'inférence logique ne se limite pas au syllogisme et est capable de générer de nouvelles vérités. Par conséquent, le raisonnement déductif est aussi extensif que l'induction mathématique défendue par Poincaré comme étant « *le raisonnement mathématique par excellence* »⁷⁸. Si le raisonnement déductif est aussi extensif que l'induction mathématique, pourquoi Poincaré s'est-il opposé au logicisme et à l'inférence logique qu'il prône ?

Selon Detlefsen, Poincaré remet en question l'insuffisance de l'inférence logique, car elle ne nous permet pas de comprendre le processus qui mène des prémisses à la conclusion. Ainsi, la critique principale de Poincaré envers le logicisme est que la « *logicisation* » échoue à *préserv*er les traits épistémologiquement importants de la preuve mathématique. En d'autres termes, Poincaré estimait qu'« *aucune preuve authentiquement mathématique ne peut être logicisée (puisque, étant logicisée, elle perd ses caractéristiques épistémologiques les plus propres et distinctives)* »⁷⁹. Se réclamant de Kant plutôt que de Leibniz, il s'opposa à l'idée logiciste selon laquelle le raisonnement mathématique, qui consiste à passer des prémisses à la conclusion, est toujours compréhensible par la logique, bien qu'elle l'assure évidemment. Selon

⁷⁶ *Idem*, p. 33.

⁷⁷ SCHMID, Anne-Françoise. *Une philosophie de savant. Henri Poincaré et la logique mathématique*. Paris, François Maspero, 1978, p. 22.

⁷⁸ *Idem*, p. 38.

⁷⁹ DETLEFSEN, Michael. Poincaré versus Russell sur le rôle de la logique dans les mathématiques. 2011, *op.cit.*, p. 157.

lui, le processus de démonstration mathématique exige une construction architecturale qui nécessite inévitablement l'intervention de l'intuition, une forme d'inférence locale et non logique. À cet égard, Detlefsen montre que, selon Poincaré, le raisonnement arithmétique repose sur des « condensateurs épistémiques » qui font référence à des concepts, des théories ou des méthodes permettant de condenser ou de synthétiser des connaissances, des hypothèses et des évidences, afin d'établir une base solide pour la compréhension des mathématiques.

En ce qui concerne la réplique russellienne selon laquelle l'inférence logique peut générer de nouvelles connaissances mathématiques de la même manière que l'induction mathématique, la réponse de Poincaré révèle son ignorance quant à l'étendue de la nouvelle logique : selon lui, l'inférence logique ne permet que de générer une connaissance mathématique générique, qui doit être clairement distinguée de la connaissance authentiquement mathématique. Cela signifie que les inférences authentiquement mathématiques, qui sont à la base de la productivité des mathématiques, sont indépendantes des inférences logiques, dans la mesure où elles reflètent une opération de l'intuition. Selon Poincaré, pour produire une démonstration mathématique qui se veut extensive⁸⁰, il faut abandonner le raisonnement déductif au profit du raisonnement par récurrence, dans lequel l'induction complète reste étroitement liée à l'intuition. Si la logique veut mettre fin à son impuissance épistémologique, elle doit s'appuyer sur l'intuition.

Se pose alors la question de la rigueur mathématique. Les logicistes prétendaient que la rigueur mathématique est due à l'inférence logique, excluant ainsi l'intuition du processus de construction et de raisonnement mathématique. Poincaré, insatisfait de cette forme d'inférence, soutient qu'il faut adopter une autre forme de rigueur, distincte de celle de la logique. Il démontre ainsi que la rigueur logique obtenue par les règles de la logique diffère de la rigueur mathématique obtenue par le principe d'induction complète. Contrairement au raisonnement déductif utilisé dans l'inférence logique, le raisonnement par récurrence ou l'induction complète est un processus qui, selon Poincaré, permet d'atteindre le général et l'infini. La formule de la procédure récurrentielle est la suivante : « *si une proposition est vraie du nombre 1 et si on l'établit pour $n+1$, pourvu qu'elle soit vraie de n , elle le sera de tous les entiers* »⁸¹. Donnons un exemple de ce mode de raisonnement.

- 1/ Soit une infinité potentielle de cas $A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_n \dots$
- 2/ On établit qu'une propriété quelconque est vraie pour A_1

⁸⁰ Une démonstration est mathématiquement extensive si la conclusion contient un résultat nouveau, non contenu dans les prémisses.

⁸¹ MEYNARD, Louis. *La connaissance. Terminale A*. Paris, Librairie classique Eugène Belin, 1963, p. 204-205.

- 3/ On établit qu'une certaine propriété est vraie d'un cas quelconque de la série, par exemple A_k
 4/ On établit que si cette propriété est vraie du cas A_k , alors elle est vraie aussi du cas A_{k+1} ;
 5/ On en conclut qu'elle est vraie pour tous les cas $A_1 A_2 A_3 \dots$

Observons ici l'existence de deux démonstrations distinctes, à savoir (3) et (4). De plus, notons que la conclusion (5) découle de la construction des démonstrations (3) et (4). En effet, il est nécessaire d'établir $A_k = A_1$ pour pouvoir établir ensuite $A_k = A_2$, ce qui permet à (4) de prouver la véracité de la proposition pour A_3 . Contrairement au raisonnement déductif, qui manque de créativité, le raisonnement par récurrence offre de nombreuses combinaisons, car il permet d'inférer à partir d'un nombre fini de cas vers une infinité de cas similaires. Mais quelle distinction Poincaré fait-il concrètement entre la rigueur de l'inférence logique (obtenue par le raisonnement logique) et la rigueur mathématique (obtenue par l'induction complète) ?

Selon Poincaré, la rigueur logique prônée par le logicisme est héritée de la conception moderne de l'axiomatique, et est censée mettre fin à l'utilisation de l'intuition en exprimant les mathématiques à travers un modèle hypothético-déductif et un système symbolique et formel. Cependant, il estime que la méthode déductive, sur laquelle repose la rigueur logique, permet seulement des vérifications en mathématiques et non de véritables démonstrations. Considérant que le raisonnement mathématique doit aller au-delà de la simple vérification, Poincaré s'oppose à la rigueur logique qui rejette l'intuition de la construction et du raisonnement mathématique. La rigueur mathématique qu'il défend diffère de manière significative de la rigueur logique adoptée par les logicistes. Il s'agit d'une rigueur caractérisée par un mode architectural, où les étapes du raisonnement sont déterminées par l'intuition et portées vers la créativité. La question qui se pose alors est de savoir en quoi consiste exactement la rigueur de l'intuition. Malheureusement, Poincaré n'apporte pas de réponse claire à cette question. Il souligne cependant que l'intuition remplit quatre fonctions essentielles : elle facilite la compréhension des mathématiques, permet la démonstration des théorèmes, favorise l'invention de nouvelles connaissances et est également utile sur le plan pédagogique.

En devenant rigoureuse, la science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde, elle oublie ses origines historiques ; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent. Cela montre que la logique ne suffit pas ; que la Science de la démonstration n'est pas la Science toute entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique. (...). Sans elle, les jeunes

*esprits ne sauraient s'initier à l'intelligence des Mathématiques, ils n'apprendraient pas à les aimer et n'y verraient qu'une vaine logomachie ; sans elle surtout, ils ne deviendraient jamais capables de les appliquer*⁸².

Bien vrai que Poincaré accorde une priorité à l'intuition dans les processus de raisonnement, de construction et d'invention mathématique, il ne nie pas l'utilité de la logique dans ces différents processus.

Tournons maintenant notre attention vers les ouvrages intitulés *Science et méthode* et *Dernières pensées*⁸³ où les derniers articles de Poincaré, parus dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, ont été rassemblés afin de découvrir ses dernières critiques à l'encontre du logicisme. Commençons par la critique de Poincaré envers le logicisme de Russell. Quels étaient précisément les reproches de Poincaré envers Russell ?

Poincaré n'a pas manqué de saluer les contributions remarquables de Russell, notamment sa transformation du syllogisme classique en syllogisme hypothétique et l'introduction de nouvelles notions en logique, telles que la logique des relations. Cependant, il souligne à Russell que les « principes indéfinissables » sur lesquels sa théorie logistiqua repose sont en réalité des jugements synthétiques *a priori*, c'est-à-dire des jugements qui font appel à l'intuition⁸⁴. Poincaré estime clairement que l'« acquaintance » (la connaissance) que Russell exige pour ces principes n'est autre que l'intuition.

Poincaré a également soulevé une autre objection qui concerne principalement le principe d'induction. Il avance l'argument selon lequel la définition explicite de l'induction complète dans la "nouvelle logique" est non seulement "non-prédicative", mais suppose également une approche platonicienne. Russell donne dans ses *Principles of mathematics* (1903) la définition suivante : « 1° "la classe des nombres finis est la classe des nombres qui est contenue dans chaque classe s à laquelle appartient 0 et le successeur de chaque nombre appartenant à s , où le successeur d'un nombre est le nombre obtenu en ajoutant 1 au nombre donné ». ⁸⁵ La définition (1°) est ensuite appelée par Russell "définition du nombre inductif". Dans une formulation "populaire", elle signifie, selon Russell, que : 2° « tout nombre fini peut être atteint

⁸² *Idem*, p. 35.

⁸³ Il s'agit des articles suivants : Les mathématiques et la logiques in *Revue de la Métaphysique et de Morale*, 1905, n° 13, p. 815- 835 ; le n° 14 publié en 1906, p. 294-317 et *La logique de l'infini*, n°77 publié en 1909, p. 461-482.

⁸⁴ POINCARÉ, Henri. *Les mathématiques et la logique*. 1905, *op. cit.*, p. 829. Voir aussi *Science et méthode*. 1999, *op. cit.*, p. 142.

⁸⁵ RUSSELL, Bertrand. *Principles of mathematics*. vol. 1. Cambridge: at the University press, 1903, p. 123.

à partir de 0 par étapes successives, ou par additions successives de 1 »⁸⁶. Russell note que les nombres finis obéissent au principe de l'induction mathématique. À condition d'élargir le concept de logique de manière à ce que 1° puisse y être subsumé, Russell semble avoir réussi à réduire l'induction analytiquement complète à des principes et définitions logiques.

Si la logique du second ordre est considéré comme une véritable logique, l'induction est elle-même analytique et trouve son origine dans la définition du nombre naturel. Malheureusement, Poincaré n'est pas platonicien et ne peut accepter la logique du second ordre comme une logique. De plus, pour sa théorie des types, Russell a besoin de l'axiome de réductibilité qui stipule que pour tout prédicat de tout ordre, il existe un prédicat du premier ordre qui lui est équivalent. Russell en donnait la description suivante :

on suppose donc que chaque fonction est équivalente, pour toutes ses valeurs, à une fonction prédicative du même argument. Cette hypothèse semble être l'essence de l'hypothèse habituelle des classes ; en tout cas, elle conserve autant de classes que nous en avons l'utilité, et un peu assez pour éviter les contradictions qu'une admission moins rancunière des classes est susceptible d'entraîner. Nous appellerons cette hypothèse l'axiome des classes, ou l'axiome de réductibilité⁸⁷.

Ainsi, selon Russell, l'axiome de réductibilité revêt la forme d'un axiome de complétude, permettant ainsi un nombre infini de raisonnements similaires au principe d'induction qui favorise les généralisations illimitées. Tel que le soulignait Russell, l'axiome de réductibilité présente des similitudes frappantes avec l'identité des indiscernables de Leibniz, son objectif étant de généraliser ou d'étendre les prédicats⁸⁸.

En critiquant cet axiome, Poincaré fait remarquer que Russell utilise un axiome qui est une variante du principe d'induction complète. Malgré les remarques de Russell à Poincaré, soulignant que considérer l'axiome de réductibilité comme un principe synthétique *a priori* est une erreur, ce dernier resta persuadé que cet axiome ne permet pas de dériver le principe d'induction complète et même que son auteur ne fournit pas de distinction claire pour le différencier du principe d'induction complète⁸⁹. Poincaré en conclut que, puisque l'axiome de réductibilité présuppose un appel à l'intuition, il n'est pas suffisant pour dériver le principe d'induction complète des principes logiques. Cela suggère que le principe d'induction complète est un principe indépendant de la logique, impossible à réduire. Ainsi, le projet de Russell visant

⁸⁶ RUSSELL, Bertrand. One some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. *Proc. Of the London math. Soc.* 2nd ser., 4, 1906a, p. 49.

⁸⁷ RUSSELL, Bertrand. *Mathematical logic as based on the theory of types.* 1908, *op. cit.*, p. 243.

⁸⁸ RUSSELL, Bertrand. *La théorie des types logiques.* 1905, *op. cit.*, p. 291.

⁸⁹ POINCARÉ, Henri. *Dernières pensées.* 1917, *op. cit.*, p. 117.

à réduire le principe d'induction complète à la logique semble comporter une circularité, car à certaines occasions, il utilise l'intuition sans la nommer pour tenter de résoudre les difficultés auxquelles son logicisme était confronté.

Après avoir soulevé ses objections contre le logicisme de Russell, Poincaré poursuit son argumentation contre le logicisme en critiquant le logicisme de Couturat. Comme indiqué plus haut, Couturat a proposé une définition du nombre à l'aide de la définition par postulat afin de justifier l'absence d'intuition dans le processus de création des nombres et de démontrer que les axiomes de l'arithmétique peuvent être réduites à la logique. Cependant, Poincaré conteste sa théorie des nombres en soulignant son manque d'objectivité mathématique. Selon Poincaré, pour qu'une définition par postulat soit acceptée en mathématiques, elle doit satisfaire au critère de non-contradiction. En d'autres termes, il faut démontrer que le postulat que l'on souhaite définir est exempt de toute contradiction. Un postulat qui n'a pas été prouvé comme étant dépourvu de contradiction ne peut en aucun cas être considéré comme un postulat mathématique acceptable. Poincaré critique ouvertement la théorie du nombre de Couturat en ce qui concerne l'importance de l'intuition en ces termes :

si je prends la série 0, 1, 2, je vois bien qu'elle satisfait aux axiomes 1, 2, 4 et 5 ; mais pour qu'elle satisfasse à l'axiome 3, il faut encore que 3 soit un entier, et, par conséquent, que la série 0, 1, 2, 3, satisfasse aux axiomes ; on vérifierait qu'elle satisfait aux axiomes 1, 2, 4, 5, mais l'axiome 3 exige en outre que, 4 soit un entier et que la série 0, 1, 2, 3, 4 satisfasse aux axiomes et ainsi de suite. Il est donc impossible de démontrer les axiomes pour quelques nombres entiers sans les démontrer pour tous⁹⁰.

Dans ce passage, Poincaré reproche à Couturat de ne pas fournir une justification suffisante pour les axiomes de la logistique. Il soulève l'exemple de la série de nombres 0, 1, 2 pour illustrer son point de vue. Poincaré constate que cette série de nombres satisfait aux axiomes 1, 2, 4 et 5 de Couturat. Cependant, pour que cette série satisfasse également à l'axiome 3, il est nécessaire que 3 soit un entier, ce qui implique que la série 0, 1, 2, 3 satisfasse à tous les axiomes. Poincaré souligne alors que cette exigence se répète pour chaque nouvel entier dans la série. Par exemple, pour que la série 0, 1, 2, 3, 4 satisfasse aux axiomes, il faut que 4 soit un entier. Ainsi, Poincaré conclut qu'il est impossible de démontrer les axiomes pour certains nombres entiers sans les démontrer pour tous les entiers. En critiquant cet aspect, Poincaré remet en question la validité de la méthode de Couturat et souligne le besoin d'associer l'intuition à la définition du nombre ainsi qu'à la démonstration mathématique. Étant donné que

⁹⁰ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 143-144.

la théorie du nombre de Couturat ne satisfait pas aux exigences de la définition mathématique qui exige la démonstration par non-contradiction, et que Couturat n'est pas parvenu à prouver la non-contradiction de sa définition par postulat, Poincaré en vient à la conclusion que sa théorie des nombres est incomplète et insatisfaisante.

En résumé, la critique de Poincaré à l'égard des programmes d'axiomatisation et de logicisation des mathématiques peut être résumée en trois points essentiels : (1) la nature de la connaissance mathématique, (2) les limites du logicisme et de la formalisation mathématique et (3) le lien entre l'esprit et l'expérience.

Concernant le premier point, la critique poincaréenne souligne que la connaissance mathématique ne peut être réduite à une simple manipulation formelle de symboles ou à une pure abstraction logique. Au contraire, Poincaré met en avant l'importance de l'intuition, de l'imagination et de la créativité dans le processus de construction mathématique⁹¹.

Concernant le second point, Poincaré s'oppose à l'idée selon laquelle toute la connaissance mathématique peut être entièrement formalisée et réduite à des règles purement logiques, en montrant que les programmes de formalisation, de symbolisation et de logicisation exigeaient soit des démonstrations de non-contradiction qui utilisaient l'intuition de l'induction complète au niveau méta-niveau (ce qui semblait circulaire⁹²), soit l'acceptation de principes

⁹¹ Dans la deuxième partie de cette recherche, nous verrons que cette perspective de Poincaré s'aligne avec les recherches en neurosciences cognitives qui mettent en évidence le rôle crucial des processus cognitifs, tels que la perception, l'émotion et l'intuition, dans la créativité et dans la compréhension des mathématiques.

⁹² Ce qui rend difficile de fonder les mathématiques sur la logique de manière rigoureuse. L'intérêt de la critique de Poincaré réside dans le fait qu'elle met en évidence les limites et problèmes du programme de logicisation de l'arithmétique. Cette critique du logicisme par Poincaré est renforcée par les récents travaux critiques du néologicisme. Le néo-logicisme est une approche développée par des logicistes tels que Charles Parsons, Crispin Wright et Bob Hale, qui propose une nouvelle vision du logicisme. Le néologicisme s'inscrit dans la continuité du programme logiciste de Frege par le fait qu'il envisage montrer l'analyticité de l'arithmétique au moyen d'une association du « principe de Hume » à la logique du second ordre. Bien que Wright ait réussi à dériver les axiomes de l'arithmétique à partir du « principe de Hume » dans le cadre de la logique du second ordre, la version du logicisme qu'il a proposée a suscité de nombreux débats philosophiques ces dernières décennies. Le problème qui est essentiellement débattu porte sur la nature du « principe de Hume » : le « principe de Hume » est-il lui-même un principe logique ou plutôt un principe non-logique ? Cette question revient à questionner l'analyticité ou la non-analyticité du « principe de Hume ». Si l'on parvient à prouver que le « principe de Hume » est un principe logique, on en déduit qu'il est analytique. Si au contraire, l'on prouve que le « principe de Hume » est non-logique, on en déduit qu'il n'est pas analytique.

Les travaux réalisés par Heck entre 1997 et 2011 ont principalement exploré cette question. Dans ses travaux scientifiques, Heck a formulé une objection contre la démarche adoptée par Wright et contre le prétendu statut logique (ou analytique) du « principe de Hume ». Sur le point touchant au statut logique du « principe de Hume », Heck a montré qu'il n'existe aucune raison de considérer ce principe comme étant un principe logique⁹², car pour qu'un principe soit considéré comme étant logique, il faudrait que l'énoncé du principe en question soit vrai dans toutes les interprétations possibles. Suivant ce critère, Heck a montré que le « principe de Hume » est

non-logiques. De plus, il souligne que l'élimination de l'intuition au profit de la logique dans la construction mathématique ne favorise pas une compréhension approfondie des mathématiques, car certaines connaissances mathématiques émergent de manière intuitive, et ne peuvent être entièrement capturées par des systèmes logico-formels.

Enfin, en ce qui concerne le dernier point, la critique poincaréenne des conceptions «logiques» des mathématiques met en évidence le fait que la construction des nombres et de la géométrie requiert l'interaction de l'esprit avec l'expérience⁹³. Poincaré souligne ainsi que la construction des nombres et celle de la géométrie sont influencées par notre interaction avec le monde sensible.

Comme on peut le constater la critique poincaréenne des conceptions «logiques» des mathématiques est principalement liée au rôle de l'intuition et de l'expérience dans le processus de construction et de démonstration mathématique. En effet, Poincaré s'est fermement opposé à ces conceptions mathématiques car elles ont négligé le rôle de l'intuition et de l'expérience dans la pensée mathématique, méprisant ainsi les contributions cognitives essentielles à la construction des nombres et de la géométrie. Par conséquent, il est crucial d'examiner

*« faux dans le cadre de toute interprétation dont le domaine est fini »*⁹². De là, il a systématiquement remis en cause la démarche logiciste adoptée par Wright en faisant remarquer qu'il existe, sur le plan logique, une asymétrie entre la notion de vérité logique et la démarche de Wright. Puisque ce néo-logiciste n'a pas préalablement prouvé, conformément à la notion de vérité logique, que le « principe de Hume » est vrai dans toutes les interprétations possibles. Ce qui aurait permis de prouver l'analyticité de ce principe. Cf. HECK, Richard. *Frege's Theorem*. Oxford, Clarendon Press, 2011, 307 p.

À cette objection de Heck, Mancosu a développé récemment (en 2015) une autre objection contre le néo-logicisme : c'est l'objection de la « bonne compagnie ». Mancosu a ainsi nommé son objection contre l'analyticité du « principe de Hume », parce qu'il a démontré, qu'en dehors du « principe de Hume », il existe d'innombrables principes d'abstraction qui sont « bons », et à partir desquels l'on pourrait démontrer les axiomes de l'arithmétique dans le cadre de la logique de second degré. Par ailleurs, il a montré que tous ces principes « bons » à la démonstration des axiomes de l'arithmétique de second ordre se contredisent mutuellement. Aucun des principes d'abstraction, conclut Mancosu, ne peut être regardé comme étant analytique, car « *si l'un seulement (...) est analytique, alors celui qui ne l'est pas peut toujours être vrai dans un monde possible, puisque la cohérence des (...) principes est montrée en appliquant les mêmes considérations. Mais alors celui qu'on considère analytique serait contredit dans un monde possible, ce qui va à l'encontre de la notion classique d'analyticité* ». Cf. MANCOSU, Paolo. *Infini, logique, géométrie*. Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2015, p. 144. En fin de compte, l'objection de la « bonne compagnie » montre que la logique ne peut fournir une fondation complète et rigoureuse aux mathématiques. En démontrant la non-analyticité du « principe de Hume », Heck et Mancosu montrent l'impossibilité de fonder l'arithmétique sur la logique qui est nécessairement analytique. Par contra-position : si le principe de Hume n'est pas analytique, il ne peut être logique. En ce sens, ils confirment, plus d'un siècle plus tard, le point de vue de Poincaré qui tient la logicisation de l'arithmétique comme impossible.

⁹³ Les neurosciences cognitives étudient précisément ces liens en explorant comment notre cerveau traite les informations sensorielles et construit des représentations mentales du nombre et de l'espace. Dans [la sous-section 2](#) de la deuxième partie, nous examinerons l'importance des processus perceptuels et sensori-moteurs dans la construction et l'acquisition des connaissances numériques.

concrètement les rôles joués par l'intuition et l'expérience dans le processus de construction mathématique. Le prochain chapitre s'efforcera d'élucider ces différents rôles.

CHAPITRE II : L'ARITHMÉTIQUE ET LA GÉOMÉTRIE COMME ARTEFACT DE L'ESPRIT GUIDÉ PAR L'EXPÉRIENCE

Dans ce chapitre, nous exposerons les « aspects cognitifs » présupposés dans la philosophie des mathématiques de Poincaré. Detlefsen soutient que Poincaré s'est opposé aux logicistes car le raisonnement logique ne rend pas compte du caractère extensif d'une conclusion mathématique. Fondamentalement, son interprétation vise à clarifier les différences épistémologiques qui distinguent les connaissances des mathématiciens de celles des logicistes. Notre point de vue, similaire à celui de Detlefsen, soutient que ce qui caractérise la conception poincaréenne des mathématiques et la distingue de celle des logicistes est une préoccupation de rendre compte des « aspects cognitifs » inhérents à la construction et à la compréhension des mathématiques. Cette perspective est également liée à l'idée émise par Brenner dans l'article mentionné précédemment.

Le terme « cognitif », tel que nous l'utilisons ici, fait référence aux processus mentaux impliqués dans le processus de construction mathématique. Les neuroscientifiques cognitivistes l'utilisent souvent pour décrire l'étude de la manière dont le cerveau produit ou construit les mathématiques à partir des stimuli externes. En ce sens, Poincaré a indéniablement défendu une conception des mathématiques qui repose sur une présupposition cognitive, car il a défendu l'hypothèse selon laquelle l'interaction entre l'esprit humain et l'expérience est un facteur essentiel dans la construction des nombres et de la géométrie. À plusieurs reprises, Poincaré a défendu une conception mathématique que l'on peut qualifier de cognitive, notamment lors de la controverse avec les logicistes et les formalistes sur les fondements des nombres et de la géométrie. Son point de vue, contraire à celui des logicistes et des formalistes, et en accord avec le neurocognitivism promu par les neurosciences cognitives, est que les nombres et la géométrie résultent d'une construction basée sur une opération mentale combinant l'esprit humain et l'expérience.

Il convient de préciser que le terme « cognitif » n'est pas mentionné dans les écrits philosophiques et scientifiques de Poincaré. Cependant, en démontrant comment l'intuition construit les nombres par itération, d'une part, et comment l'esprit humain engendre la géométrie à partir de l'expérience sensori-motrice, d'autre part, ce mathématicien a sans aucun doute présenté une conception cognitive des mathématiques. Cette conception poincaréenne des mathématiques semble être en accord avec les récents développements des neurosciences cognitives et il nous semble nécessaire de montrer comment l'interaction esprit/expérience

correspond à ce que les neuroscientifiques cognitivistes appellent aujourd'hui les « aspects cognitifs ».

En neurosciences cognitives, les « aspects cognitifs » se réfèrent aux différentes fonctions mentales qui permettent à une personne de percevoir, comprendre, stocker et utiliser l'information. Bien que la cognition reste étroitement liée à l'activité neuronale ou cérébrale dans le domaine des neurosciences cognitives, ce terme est régulièrement utilisé pour nommer l'activité de l'esprit humain couplée au monde extérieur (l'esprit étant considéré, bien entendu, comme un processus neurobiologique du cerveau). Lorsque les neuroscientifiques cognitivistes font référence aux aspects cognitifs, ce qu'ils mettent en avant, c'est la façon dont le cerveau et ses neurones interagissent avec l'environnement social ou le monde sensible pour permettre aux individus de percevoir l'espace, produire les objets mathématiques, comprendre un langage, produire un raisonnement, etc. Mais ce terme se réfère aussi à la capacité d'appréhension ou d'apprentissage intellectuel et physique d'un individu. Dans ce chapitre, nous emploierons le terme « aspects cognitifs » pour faire référence aux processus mentaux impliqués dans le processus de construction des nombres et de la géométrie. Ainsi, nous montrerons que la conception poincaréienne des mathématiques peut être assimilée à une conception cognitive pour la simple raison qu'elle insiste de façon récurrente sur l'idée que l'interaction de l'esprit humain /l'expérience est un facteur essentiel à la construction de la pensée mathématique.

Ce chapitre sera divisé en deux sections. La première abordera la théorie intuitionniste de Poincaré appliquée à l'arithmétique, tandis que la seconde se concentrera sur la théorie psychophysique appliquée à la géométrie. Dans la première section, nous montrerons que la construction des nombres naturels et celle du continu mathématique découlent d'une activité mentale appelée itération, où l'« intuition pure » et l'« intuition sensible » interagissent. Concernant le continu mathématique, il est essentiel de souligner que notre attention sera portée aux nombres rationnels, car dans le langage mathématique actuel, les continus du premier ordre (correspondant aux nombres rationnels) sont considérés comme étant caractérisés par la densité, tandis que les continus du second ordre (correspondant aux nombres réels) le sont par leur continuité⁹⁴. En ce qui concerne donc la construction du continu mathématique, nous nous

⁹⁴ La conception visant à exclure les nombres rationnels de la question du continu est basée sur la distinction entre la *densité* et la *continuité*. Pour connaître les détails de cette distinction, voir LY, Igor. *Mathématique et physique dans l'œuvre philosophique de Poincaré*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2008, p. 218-220.

concentrerons sur la construction des nombres de premier ordre et soutiendrons, dans la première section, que les nombres naturels et les nombres rationnels résultent de l'itération incluant l'interaction entre l' « intuition pure » d'ordre intellectuel et l' « intuition sensible ».

Dans la seconde section, nous montrerons que la construction de la géométrie (et de l'espace qu'elle implique) suit un processus presque identique : l'esprit humain interagit avec l'expérience sensori-motrice pour engendrer la géométrie ainsi que l'espace géométrique.

I- S'écarter des conceptions « logiques » des mathématiques

Cette première sous-section examinera comment la théorie intuitionniste de Poincaré aborde la construction des nombres en tant qu'objets de l'arithmétique. L'objectif est de montrer que Poincaré situe la construction des nombres naturels et rationnels⁹⁵ dans un cadre cognitif où l'« intuition pure » interagit avec l'« intuition sensible ». Dans la deuxième sous-section, nous nous pencherons sur l'acte d'invention mathématique afin de mettre en évidence les aspects cognitifs qui sous-tendent cette démarche. Une fois encore, nous constaterons que l'intuition « spéciale » ou l'intuition inconsciente, caractérisée par les états émotionnels et somatiques, n'est pas suffisante par elle-même pour l'invention, car elle nécessite une combinaison avec l'intuition rationnelle (qui relève de l'intellect). Ainsi, la relation entre l'intuition inconsciente et l'intuition intellectuelle sera considérée comme l'aspect cognitif impliqué dans le processus d'invention mathématique, dans la mesure où il s'agit d'une interaction entre les données psychiques et empiriques.

I-1- Le fondement des nombres selon Poincaré

Dans leur quête pour établir un fondement purement logique pour l'arithmétique, les logicistes tels que Frege, Russell et Couturat se trouvaient face à une opposition ferme de la part de Poincaré. Celui-ci démontrait que les nombres résultent d'une opération mentale où l'« intuition pure » interagit avec l'« intuition sensible ». Or, selon Poincaré, l'« intuition pure » se distingue de l'intuition kantienne par le fait qu'elle est une faculté intellectuelle et non sensible au sens de Kant. S'il est vrai que l'intuition pure (intellectuelle) constitue le fondement des nombres selon Poincaré, il n'en demeure pas moins que l'intuition empirique en constitue une composante structurelle, semblable à la construction kantienne⁹⁶. Poincaré considère les propositions arithmétiques comme des propositions synthétiques *a priori*. Une telle conception mathématique a plusieurs implications philosophiques, dont la plus essentielle est que les nombres ne préexistent pas à l'activité mentale, mais qu'ils en sont le résultat. Poincaré s'est opposé aux conceptions « cantorienne » des mathématiques, qui présupposent que les nombres

⁹⁵ Nous avons déjà signalé nous limiter aux nombres rationnels, en tant que nombres dépourvus de la propriété de continuité. Il va de soi que cette section s'intéresse à la construction des nombres rationnels et des nombres naturels selon Poincaré.

⁹⁶ Cf. *Critique de la raison pure*, § 4, où Kant a recours à l'intuition empirique « des cinq doigts ou cinq points » pour expliquer le caractère synthétique *a priori* de la proposition $7+5=12$.

existent indépendamment de l'esprit⁹⁷, car il estime que les nombres sont des artefacts de l'intuition pure et empirique. Avant d'entrer dans les détails explicatifs de cette thèse, nous allons brièvement définir la notion d'intuition chez Poincaré et en comprendre la nature.

Le terme « intuition » est polysémique, car sa nature et sa signification diffèrent d'un penseur à un autre, ainsi que d'un domaine de savoir à un autre. Afin d'éviter toute confusion entre les nombreuses acceptions et fonctions du terme « intuition », il est nécessaire de clarifier le sens et la nature de l'intuition qui constitue le fondement de la construction des nombres chez Poincaré, tout en la distinguant des autres formes d'intuition présentes dans d'autres sciences. Pour ce faire, nous allons commencer par identifier les différentes formes d'intuition présentes dans l'œuvre de Poincaré. Cette distinction vise à différencier les diverses formes d'intuition en fonction de leur nature et de leur fonction, mais surtout à mettre en évidence la nature de l'intuition qui, selon Poincaré, est à l'œuvre dans la construction des nombres.

Il convient de noter que Poincaré ne présente nulle part l'intuition de manière systématique⁹⁸. Par conséquent, il est difficile de déterminer exactement ce qu'il entend par le terme « intuition ». Cependant, en étudiant ses écrits, on peut observer qu'il considère l'intuition comme la capacité de compréhension instantanée qui se produit dans l'esprit humain sans recourir à un raisonnement logique. En d'autres termes, Poincaré perçoit l'intuition comme un processus mental permettant de résoudre des problèmes complexes sans avoir recours à un raisonnement logique. Dans un passage de son ouvrage *La valeur de la science*, il établit une distinction entre plusieurs types d'intuition. Ce passage nous servira de guide pour identifier les différents types d'intuition. Voici un extrait de ce passage :

nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition ; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies ; elle ne pourrait créer du nouveau ; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir.

Ces philosophes ont raison dans un sens ; pour faire l'arithmétique, comme pour faire la géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'intuition. Mais combien d'idées différentes se cachent sous ces mêmes mots ?

Comparons ces quatre axiomes :

1° Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ;

2° Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l'on démontre qu'il est vrai de

⁹⁷ POINCARÉ, Henri. La logique de l'infini. 1912, *Scientia* 12, p. 11. Repris dans Henri POINCARÉ, Dernières pensées. 1917, *op. cit.*, p. 159-160.

⁹⁸ Étant un autodidacte en philosophie, Poincaré n'a pas fondé un système philosophique à proprement parlé. Ces ouvrages sont des compilations d'articles publiés dans la *Revue de Métaphysique et Morale*, et abordent plusieurs thématiques à la fois. Nous tenterons de nous appuyer sur ces articles pour mettre en évidence la nature de l'intuition qu'il présente comme l'élément substantiel de la construction des nombres.

$n + 1$, pourvu qu'il le soit de n , il sera vrai de tous les nombres entiers ;
 3° Si sur une droite le point C est entre A et B et le point D entre A et C , le point D sera entre A et B ;
 4° Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.
 Tous quatre doivent être attribués à l'intuition, et cependant le premier est l'énoncé d'une des règles de la logique formelle ; le second est un véritable jugement synthétique à priori, c'est le fondement de l'induction mathématique rigoureuse ; le troisième est un appel à l'imagination ; le quatrième est une définition déguisée⁹⁹.

Considérons le contexte spécifique dans lequel ce passage s'inscrit : la question du rôle de l'intuition dans les mathématiques. Alors que les logiciens et les formalistes remettaient en question le rôle de l'intuition dans la justification des mathématiques, Poincaré cherchait à les convaincre en démontrant que l'intuition est indispensable à la fois pour la science arithmétique et les autres domaines scientifiques. Dans le passage ci-dessus, il illustre de manière pertinente l'utilisation de l'intuition dans quatre sciences différentes, en se basant sur quatre axiomes.

Examinons le premier axiome. Nous pouvons constater que Poincaré présente un raisonnement relatif à une règle logique, affirmant essentiellement que si $A = B$ et $C = B$, alors $A = C$. Quelle est donc la nature de l'intuition associée à un tel raisonnement ? Ce type de raisonnement est sans doute un raisonnement logique appelé la règle de transitivité. En réfléchissant attentivement à ce premier axiome, nous comprenons que Poincaré cherchait à montrer à ses détracteurs que même le raisonnement logique, supposé reposer sur la pure logique, mobilise un type d'intuition (ici, l'intuition de la transitivité). Afin de voir la validité de l'axiome 1, il a fallu faire appel à l'intuition logique, qui nous permet de comprendre les principes logiques sans avoir besoin de les démontrer au prix d'un cercle vicieux bien vu par Aristote. Sans ce type d'intuition, il serait impossible de prouver et de comprendre le premier axiome. Ainsi, Poincaré semble reprendre l'argumentation d'Aristote que la première figure de la syllogistique est la plus intuitive.

Le deuxième axiome présenté par Poincaré diffère du premier axiome, qui est une affirmation logique, car il s'agit d'un axiome mathématique basé sur le principe d'induction complète. Ce type de raisonnement est caractéristique de l'intuition mathématique, qui nous permet de comprendre les principes mathématiques sans nécessiter de démonstration, et qui offre la possibilité de poursuivre indéfiniment le raisonnement mathématique. Poincaré considère cet axiome mathématique comme distinct de l'énoncé logique (représenté par le premier axiome) car il porte la marque d'un jugement synthétique *a priori* fondé sur l'itération.

⁹⁹ POINCARÉ, Henri. *La valeur de la science*. Paris, Flammarion, 1990, p. 32-33.

Cet axiome ne découle ni des inférences logiques ni des données sensorielles, mais plutôt de l'intuition du nombre pur, que Poincaré considère comme le fondement incontestable de l'arithmétique¹⁰⁰. Puisque le principe d'induction complète qui le caractérise repose sur l'itération, il permet la construction des nombres. Nous expliquerons plus en détail ce point de vue en temps opportun.

Voyons maintenant le troisième axiome. À première vue, il semble facile de le considérer comme un axiome mathématique, puisque Poincaré affirme que « *si le point C est entre A et B sur une ligne droite, et que le point D est entre A et C, alors le point D sera entre A et B* ». Cependant, à mesure que nous avançons dans la lecture de ce passage, nous remarquons que Poincaré souligne plus tard que cet axiome fait appel à l'imagination et à la généralisation par induction, une méthode utilisée dans les sciences expérimentales, en particulier dans les sciences physiques. Ainsi, Poincaré présente cet axiome pour montrer le rôle important de l'intuition dans la science physique. En physique, l'intuition nous permet de comprendre les phénomènes naturels sans avoir besoin de les expliquer. Par conséquent, l'axiome qu'il présente dans le contexte de la science physique possède un caractère hybride, car il peut être assimilé à l'imagination et à la généralisation. Notre attention se tournera donc vers l'imagination. Alors, pourquoi cet énoncé est-il considéré comme un appel à l'imagination selon Poincaré ?

Poincaré énonce ce troisième axiome pour illustrer la capacité de l'intuition à transcender le tangible et à engendrer des raisonnements intuitifs portant sur des concepts abstraits qui échappent à toute représentation physique. En effet, l'intuition est souvent sollicitée pour élaborer des raisonnements abstraits, comme lorsque nous utilisons notre intuition pour raisonner sur un polygone en général, un objet impossible à représenter en réalité¹⁰¹. Dans ce troisième axiome, l'intuition se détache des données empiriques (le point C se trouve entre A et B, et le point D entre A et C) pour formuler un axiome qui est intuitivement vrai, bien qu'invisible aux organes sensoriels. Ainsi, cet axiome constitue véritablement un appel à l'imagination. Il est clair que l'intuition ne repose pas uniquement sur les sens.

Continuons notre analyse de ce passage en explorant le type d'intuition qui se cache derrière le quatrième axiome. D'après Poincaré, l'axiome stipulant que « *par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite* » est en réalité une définition déguisée. Bien que

¹⁰⁰ Plus clairement, Poincaré affirme : « *le second est un véritable jugement synthétique a priori, c'est le fondement de l'induction mathématique* ». Cf. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 33.

¹⁰¹ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p.33.

Poincaré n'approfondisse pas davantage les raisons pour lesquelles cet axiome relève d'une définition déguisée dans ce passage de *La valeur de la science*, il est néanmoins connu qu'il avait précédemment démontré, dans un chapitre de *La science et l'hypothèse*, que les axiomes de la géométrie sont des conventions choisies en fonction de leur commodité. De plus, il avait souligné le rôle de l'intuition dans la construction des axiomes géométriques et dans le choix des conventions. Ainsi, lorsque Poincaré présente le quatrième axiome comme une définition déguisée (ou une convention), son objectif est de mettre en évidence à la fois le caractère conventionnel de cet axiome et l'importance de l'intuition (en particulier, l'intuition sensible) dans la construction des axiomes géométriques.

Au total, l'analyse de ce passage de *La valeur de la science* de Poincaré met en évidence quatre types distincts d'intuition. Le premier axiome correspond à l'intuition logique, qui englobe des présuppositions non déductibles logiquement, telles que la symétrie de l'égalité. Le deuxième axiome représente l'intuition du nombre pur, le troisième concerne l'intuition de l'imagination, c'est-à-dire l'intuition sensible présente dans la pensée, et enfin le quatrième correspond également à l'intuition sensible utilisée en géométrie. Après avoir analysé ce passage, deux remarques importantes se dégagent. La première remarque concerne le rôle crucial de l'intuition dans les sciences, qu'il s'agisse de l'arithmétique, de la logique, de la géométrie ou de la physique. La deuxième remarque, qui est essentielle pour la suite de notre analyse, porte sur le fondement et le raisonnement arithmétique dans la philosophie des mathématiques de Poincaré. Elle souligne que l'intuition du nombre pur constitue le fondement de la construction et du raisonnement arithmétique.

Dans la suite de notre analyse, nous examinerons la description qu'en fait Poincaré de la combinaison de l'« intuition sensible » et de l'« intuition du nombre pur » en tant qu'origine et fondement des nombres. Poincaré considère l'intuition du nombre pur (que nous appellerons dans la suite l'« intuition pure ») comme étant la forme d'intuition sous-jacente à la construction des nombres et des démonstrations arithmétiques, car le principe d'induction qui est caractérisé par l'« intuition pure » repose sur l'itération. Cette thèse a pour conséquence majeure de rejeter la position kantienne sur la construction des objets mathématiques. Bien que Poincaré ait été en quelque sorte en accord avec le kantisme¹⁰², en raison de sa sympathie pour la distinction de

¹⁰² Dans le débat qui opposait les défenseurs de Leibniz (les logicistes) aux défenseurs de Kant (les intuitionnistes), Poincaré lui-même prenait explicitement la défense de Kant en affirmant : « *dire qu'ils [les logicistes] ont définitivement tranché le débat entre Leibniz et Kant et ruiné la théorie kantienne, c'est*

Kant entre les jugements synthétiques *a priori* (attribués aux mathématiques) et les jugements analytiques (attribués à la logique), il s'oppose néanmoins à Kant quant à la nature de l'intuition et de la preuve mathématique. Poincaré reconnaît certes avec Kant que les propositions de l'arithmétique sont de nature synthétique *a priori*. Cependant, chez Kant, ce sont les formes de la sensibilité qui déterminent le caractère synthétique *a priori* des mathématiques, ce qui n'est pas du tout le cas pour Poincaré. Ce dernier attribue le caractère synthétique *a priori* de l'arithmétique à l'« intuition pure », qui n'est pas réceptive mais qui, en tant qu'activité de l'esprit actif, appartient donc à l'entendement au sens kantien¹⁰³. Nous remarquons là une divergence majeure entre Kant et Poincaré.

À propos de l'intuition, Kant soutenait que l'origine de toute forme d'intuition réside dans les représentations (la réceptivité des impressions). Cette considération l'a conduit à établir une distinction entre l'« intuition sensible et pure » et l'« intuition intellectuelle » afin de délimiter le domaine d'action de ces deux formes d'intuition. Après cette distinction, Kant retient l'« intuition sensible et pure » et rejette catégoriquement l'« intuition intellectuelle » qu'il considère ne pas être la nôtre¹⁰⁴. Ce rejet de l'« intuition intellectuelle » est en parfaite harmonie avec sa conviction que l'intuition concerne exclusivement la faculté des sens. Par conséquent, toute construction mathématique débute inévitablement par les formes de la sensibilité, « *sans elle* [la sensibilité], *nul objet ne nous serait donné (...). Des pensées sans matières sont vides* »¹⁰⁵. Il ne peut donc pas avoir d'« intuition intellectuelle », puisque l'esprit humain ne peut transcender le phénoménal pour accéder au nouménal. En revanche, ce que l'esprit est capable de saisir, ce sont les choses et les formes sensibles des choses. Par principe de déduction, l'esprit humain est, selon Kant, incapable de saisir les choses intelligibles. Une telle interprétation des

évidemment inexact ». Cf. La Science et l'hypothèse. 2000, *op.cit.*, p. 152. Dans l'optique actuelle de notre analyse, nous déplorons une telle déclaration de Poincaré, car une telle défense de Kant est inconcevable si on tient compte de son refus de l'intuition intellectuelle. Contre Kant, Poincaré réhabilite l'intuition intellectuelle en mettant en évidence la puissance et la capacité itérative de l'esprit humain dans la construction mathématique. Selon l'analyse de Mooij (qui est conforme au point de vue que nous défendons ici), l'intuition chez Poincaré est de nature intellectuelle. Ce qui l'oppose à Kant qui rejette systématiquement cette forme d'intuition. Cf. MOOIJ, Jan Johann. *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*. Paris, Gauthier-Villars, 1966, p. 124.

¹⁰³ Cf. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 33. Voir aussi La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 41.

¹⁰⁴ « *Si par noumène nous entendons une chose en tant qu'il n'est pas un objet de notre intuition sensible, en faisant abstraction de notre manière de la percevoir, cette chose est alors un noumène dans le sens négatif. Mais si nous entendons par là un objet d'une intuition non sensible, nous admettons un mode particulier d'intuition, à savoir intellectuelle, mais qui n'est point le nôtre et dont nous ne pouvons pas même apercevoir la possibilité ; ce serait alors le noumène dans le sens positif* ». Cf. KANT, Emmanuel. Critique de la raison pure. 1943, *op.cit.*, p. 255.

¹⁰⁵ *Idem*, p. 92.

idées philosophiques de Kant est tout à fait conforme à ce que dit Georges Pascal dans ce passage.

Il n'y a que les intuitions sensibles et point d'intuitions intellectuelles, du moins pour l'homme. Dans une intuition intellectuelle, en effet, l'esprit se donnerait à lui-même l'objet qu'il voit. Mais un tel mode de connaissance n'appartient qu'à l'Être suprême : l'intuition humaine suppose qu'un objet est donné qui affecte notre esprit¹⁰⁶.

Comme on peut le constater, Kant nie explicitement la capacité de l'esprit à construire mentalement sans être influencé par un objet sensible. En opposition à la conception de Kant, la conception de Poincaré part de l'idée que l'« intuition pure », également appelée l'« intuition intellectuelle », a la faculté de créer indéfiniment les nombres naturels pourvu qu'elle interagisse avec l'« intuition sensible » (l'expérience). L'interaction entre l'intuition et l'expérience ne doit pas être interprétée comme une entière dépendance de la première instance à la seconde. Chez Poincaré, l'esprit humain est doté d'un pouvoir de création (sans limite), il est donc capable de créer de manière formelle et *a priori* les symboles sans recourir à l'expérience, son interaction avec l'expérience intervient cependant pour éviter d'éventuelles contradictions lors de la création des nombres. On voit que l'intuition poincaréenne est indépendante de la sensibilité, mais elle se révèle seulement que par son intermédiaire.

La question de la nature de la preuve mathématique représente le deuxième point de divergence entre Poincaré et Kant. On peut critiquer Kant pour sa démarche de construction mathématique qui est largement influencée par les formes de la sensibilité. C'est pourquoi Cecchini a qualifié l'approche kantienne de démarche normative¹⁰⁷, car elle soumet la capacité créative de l'esprit humain à des normes sensorielles. En revanche, Poincaré emprunte un autre chemin en mettant en avant la puissance de l'« intuition pure » dans la construction des inférences mathématiques et des nombres. Comme nous l'avons souligné précédemment, Poincaré considère que c'est grâce à l'« intuition pure » que les nombres sont construits ou créés, car le principe d'induction associé à cette forme d'intuition repose sur l'itération. En adoptant cette perspective, Poincaré souhaite mettre en évidence la capacité de l'esprit humain à créer les nombres à partir de l'itération. Mais que signifie réellement cette expression ?

L'itération, également appelée « répétition indéfinie » par Poincaré, est un processus consistant à effectuer des opérations ou une séquence d'opérations de manière continue ou

¹⁰⁶ PASCAL, Georges. *Pour connaître la pensée de Kant*. Paris, Bordas, 1966, p. 45-46.

¹⁰⁷ Dans son étude comparative du caractère synthétique *a priori* de Kant et Poincaré. Cecchini conclut que ces deux caractères sont différents : le caractère synthétique de Kant est normatif tandis que chez Poincaré, il est constructif. Cf. MOOIJ, La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré. 1966, *op. cit.*, p. 126.

indéfinie. Itérer, c'est donc recommencer, reprendre la même chose ou répéter continuellement la même chose. Dans le cas de la construction des nombres naturels, l'acte auquel fait référence l'itération consiste à ajouter sans fin un nouvel élément à ce qui a été obtenu précédemment :

*Le théorème est vrai du nombre 1.
Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.
Donc il est vrai de 2.
Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.
Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite¹⁰⁸.*

Une autre formulation du même principe d'itération est la suivante :

RN : a) $N(I)$ [I est un « nombre »]
b) $N(n) \square N(nI)$ [si n est un « nombre »,
son successeur est également un « nombre »]¹⁰⁹.

Dans ces deux exemples, nous pouvons observer l'application du principe d'itération à deux niveaux distincts. Au premier niveau, il permet d'ajouter continuellement un nombre à ce qui a déjà été obtenu, à condition que ce nombre soit donné. Au second niveau, il permet de générer un nombre indéfini de syllogismes. Cependant, cette loi de l'itération ne suffit pas encore d'affirmer le principe d'induction. Pour que cela soit possible, une généralisation est nécessaire, celle-ci consiste à passer du fini à l'infini¹¹⁰, ou dans la formulation RN, à la clause finale : c) *on peut obtenir tous les « nombres » par l'application de a) et b)*¹¹¹.

Mais quelle est cette faculté qui nous fait passer du domaine fini à l'infini ou qui nous fait savoir que tous les nombres naturels peuvent être construits selon RN ? L'opération itérative consistant à ajouter continuellement un nombre à un autre est possible grâce à la puissance de l'« intuition pure », tandis que le passage à l'infini représente une autre application de l'« intuition pure » au méta-niveau. Cependant, pour mieux comprendre cette perspective de Poincaré, il est nécessaire d'expliquer en détail les raisons qui l'ont amené à considérer le principe d'itération (ou le principe d'induction complète) comme étant la manifestation de la puissance de l'« intuition pure ».

Il faut souligner que chez Poincaré, l'« intuition pure » est une faculté qui comporte une force, voire une puissance innée. Cette puissance innée rend l'intuition poincaréenne active,

¹⁰⁸ *Ibidem*

¹⁰⁹ HEINZMANN, Gerhard. L'intuition épistémique. 2013, *op.cit.*, p. 123.

¹¹⁰ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 40.

¹¹¹ HEINZMANN, Gerhard. L'intuition épistémique. 2013, *op.cit.*, p. 123.

contrairement à l'intuition kantienne qui est passive¹¹². En considérant l'intuition comme une faculté activement portée vers la création indéfinie des nombres naturels, sans une structuration préalable des représentations sensorielles, Poincaré opère un renversement de la théorie kantienne par la défense d'une « intuition pure et intellectuelle ». Dans cette optique, on serait tenté de rapprocher le point de vue de Poincaré à celui de Brouwer développé au compte de la construction des nombres.

En effet, Brouwer fait référence à l'« intuition primordiale»¹¹³ pour expliquer comment les nombres naturels, entiers, ordinaux et cardinaux sont construits par l'intermédiaire d'une itération de séquences d'intuitions emboîtées les unes dans les autres¹¹⁴. De manière similaire à Poincaré, Brouwer démontre qu'il est toujours possible pour le sujet pensant de construire un nombre plus élevé que le précédent, étant donné que le nombre d'itérations possibles de l'« intuition primordiale» est illimité, sa seule limite étant la liberté du sujet créateur¹¹⁵. On voit ici un indice d'analogie remarquable entre l'intuition au sens poincaréen et l'intuition au sens brouwérien : Poincaré et Brouwer fondent la construction des nombres sur l'itération indéfinie de l'intuition. Le rapprochement des vues respectives de Poincaré et Brouwer, effectué par Paulette Février concernant la construction des nombres, est en accord avec notre analyse :

Pour Brouwer, la mathématique proprement dite est l'activité intellectuelle, qui basée sur l'intuition primitive, s'effectue dans l'esprit humain indépendamment de toute formulation. Poincaré écrit en 1908 (...) "l'invention mathématique... est l'acte dans lequel l'esprit humain agit ou ne paraît agir que par lui-même, et sur lui-même (...), c'est ce qu'il y a de plus essentiel dans l'esprit que nous pouvons espérer atteindre". On est tenté alors de rapprocher les vues respectives de Poincaré et de Brouwer soucieux chacun à sa manière de faire ressortir l'unité du sujet connaissant et de son objet dans l'intuition de sorte qu'en étudiant le processus de la pensée¹¹⁶.

¹¹² Nous avons vu plus haut que chez Kant, l'intuition est rattachée à la sensibilité. Cela implique que l'intuition est passive, puisqu'elle n'a pas la possibilité d'intuitionner directement les choses. Or, chez Poincaré, l'intuition est active, elle est capable d'intuitionner directement les choses sans recourir à l'expérience, elle anticipe, elle guide et elle permet de voir loin, c'est-à-dire faire des prévisions.

¹¹³ Dans sa thèse de doctorat de 1907 intitulé *Foundations of Mathematics*, Brouwer donne pour la première fois une description détaillée de ce qu'il nomme l'Intuition Primordiale. « L'homme possède une faculté qui accompagne toutes ses interactions avec la nature, une faculté de voir sa vie mathématiquement, de voir dans le monde des répétitions de séquences, des systèmes causaux dans le temps. Le phénomène fondamental n'est ici plus que l'intuition du temps, qui rend possible la répétition de la "chose-en-temps et encore une chose" et sur la base de laquelle les moments de la vie se décomposent comme des séquences de choses qualitativement différentes, qui sont ensuite concentrées dans l'intellect comme des séquences mathématiques, non pas senties mais », p. 81.

¹¹⁴ PELLAN, Jean Charles. *De Brouwer à Barsalou : l'intuitionnisme à l'ère des sciences cognitives*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec, 2008, p. 3.

¹¹⁵ *Idem*, p. 18.

¹¹⁶ FEVRIER, Paulette. La philosophie mathématique de Poincaré in *Epistemologia IV*, 1981, p. 167.

La position de Poincaré vis-à-vis de l'intuition diffère cependant de celle de Brouwer, pour qui la construction des nombres est une activité intellectuelle non linguistique¹¹⁷. Chez Brouwer, l'intuition jouit d'une indépendance extrême, c'est-à-dire que l'« intuition primordiale » n'entretient aucun rapport avec l'expérience, ce qui n'est pas le cas chez Poincaré.

La question se pose maintenant de savoir comment Poincaré peut accorder à l'arithmétique une certitude par le biais de l'« intuition pure » ?

Dans un passage de *La science et l'hypothèse*, Poincaré affirme explicitement ceci concernant la certitude apportée par l'« intuition pure » par rapport au principe d'induction complète :

pourquoi donc ce jugement s'impose à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se fait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience¹¹⁸.

Dans ce passage, nous observons que le processus de la répétition indéfinie, que nous appelons ici l'itération, n'est pas réalisé de manière isolée de l'expérience¹¹⁹. Peu importe la puissance de l'« intuition pure », elle doit néanmoins être reliée à l'expérience afin de déterminer la véracité des nombres créés. Heinzmann s'est penché sur la question de la relation entre l'intuition de Poincaré et l'expérience. Selon lui, l'intuition telle que conçue par Poincaré, n'est pas indépendante de l'expérience. Écoutons son point de vue à ce sujet :

l'intuition de Poincaré n'est pas complètement indépendante de toute expérience du monde extérieur. En effet, l'expérience est pour lui la ratio cognoscendi de notre capacité d'une répétition indéfinie qui est donc « provoquée » par l'expérience sans être empirique. En tant que telle, elle constitue même une composante structurelle de constructions empiriques¹²⁰.

¹¹⁷ Selon Brouwer, la « méthode intuitionniste n'a ni dans son origine, ni dans son essence (...) quelque chose à faire avec le langage ou le monde extérieur ». BROUWER, Luitzen. The effect of intuitionism on classical Algebra of logic. North-Holland. In HEYTING, Arend. *Philosophy and Foundations of Mathematics*, 1975, p. 551-554. Nous allons montrer plus loin que c'est le rapport de l'intuition à l'expérience qui est la différence substantielle entre Poincaré et Brouwer. C'est aussi l'une des raisons pour lesquelles les cognitivistes se réfèrent plus à Poincaré qu'aux intuitionnistes de renom comme Brouwer ou Weyl, qui sont restés dans une posture trop métaphysique en défendant une intuition déconnectée de l'expérience.

¹¹⁸ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 41.

¹¹⁹ Cela ne signifie pas que Poincaré rejoint Kant. Nous avons vu que Kant refuse complètement à l'intuition intellectuelle un rôle quelconque dans la construction des mathématiques. C'est le lieu de rappeler que son caractère a priori de l'arithmétique est directement dû aux données empiriques. Ce qui est l'opposé de Poincaré qui reconnaît à la fois le rôle joué par l'intuition pure et l'intuition sensible dans la construction mathématique.

¹²⁰ HEINZMANN, Gerhard. *L'intuition épistémique*. 2013, *op.cit.*, p. 133.

En utilisant l'expression "ratio cognoscendi", on met explicitement en évidence que l'expérience joue un rôle essentiel en tant qu'élément médiateur dans le processus itératif de construction. Selon Poincaré, la construction itérative implique que l'« intuition pure » a la capacité de générer indéfiniment des nombres naturels à partir des opportunités fournies par l'expérience. Cependant, cela ne signifie pas que la capacité de construction de l'« intuition pure » dépend de l'expérience. Au contraire, son rôle sert principalement

*à faire prendre conscience de l'existence de certaines structures de l'esprit auxquelles il faut « accommoder » en retour l'expérience, soit directement comme dans le cas de la répétition indéfinie, soit par l'introduction des conventions comme en géométrie*¹²¹.

C'est à ce niveau que les points de vue de Poincaré et Brouwer divergent de manière irréconciliable, puisque dans le processus itératif de construction des nombres de Brouwer, l'« intuition primordiale » jouit d'une autonomie, étant déconnectée du monde extérieur. En revanche, le pragmatiste Poincaré rattache l'« intuition pure » à l'« intuition sensible ». Comme l'a souligné Heinzmann, Brouwer a défendu un intuitionnisme expansif et radical¹²² qui a finalement débouché sur un système ontologique dans lequel l'« intuition primordiale » est séparée de l'expérience. Étant donné que nous souhaitons mettre l'accent sur les aspects cognitifs impliqués dans le processus de construction des nombres, l'intuitionnisme de Brouwer nous est moins utile par rapport à celui de Poincaré. En effet, il n'y a pas de raison de considérer l'« intuition pure » comme étant une faculté qui possède une indépendance absolue, dans la mesure où elle ne saurait produire les nombres sans le concours de l'expérience. C'est pourquoi nous sommes obligés de considérer que les nombres naturels sont construits par l'intermédiaire d'une interaction entre l'« intuition pure et intellectuelle » et l'« intuition sensible ».

Cela s'applique également à la construction des nombres rationnels, qui font partie des continus du premier ordre. Dans son ouvrage *La science et l'hypothèse*, Poincaré visait à montrer que, contrairement à la façon dont l'« École de Berlin » introduit les « incommensurables » en tant que création pure de l'esprit, sans aucune implication de l'expérience, l'itération de l'intuition, qui implique l'activité conjointe de l'esprit et de l'expérience, peut expliquer simultanément l'origine cognitive des nombres rationnels (les

¹²¹ *Ibidem*.

¹²² Brouwer a reproché à Poincaré le rapprochement de l'intuition pure à l'intuition sensible (l'expérience). Jugeant l'intuitionnisme de Poincaré trop empiriste, il développa un intuitionnisme au sens strict du terme en bannissant tout recours à l'expérience et en accordant une liberté absolue à l'intuition primordiale. Selon plusieurs commentateurs, notamment Heinzmann, l'intuitionnisme de Brouwer axée sur une activité purement mentale a une forte similarité avec le platonisme.

nombre de premier ordre) et des nombres réels (les nombres de second ordre). Puisque notre attention se porte ici sur les nombres rationnels, nous devons comprendre comment l'itération permet de les concevoir. Selon Poincaré, la construction des nombres rationnels se fait par le biais de l'itération, de la même manière que la construction des nombres naturels. Le passage suivant peut être interprété comme une explication de la manière dont les nombres rationnels sont engendrés grâce à l'itération.

Tout se passe comme pour la suite des nombres entiers¹²³. Nous avons la faculté de concevoir qu'une unité peut être ajoutée à une collection d'unités ; c'est grâce à l'expérience que nous avons l'occasion d'exercer cette faculté et que nous prenons conscience, mais dès ce moment, nous sentons que notre pouvoir n'a pas de limite et que nous pourrions compter indéfiniment, quoique nous n'ayons jamais eu à compter qu'un nombre fini d'objets. De même, dès que nous avons été amenés à intercaler des moyens entre deux termes consécutifs d'une série, nous sentons que cette opération peut être poursuivie au-delà de toute limite et qu'il n'y a pour ainsi dire aucune raison intrinsèque de s'arrêter¹²⁴.

Ici encore, nous remarquons que le processus de construction des nombres rationnels se fait selon le même processus relatif à la construction des nombres naturels. Il est essentiel de concevoir l'esprit comme étant doté de ressources internes qui lui permettent de créer un nombre infini de symboles, se manifestant sous la forme de nombres rationnels. Bien que la capacité de l'esprit à construire les nombres rationnels puisse être attribuée à sa puissance créative, il est pertinent de souligner que cette construction est rendue possible grâce à l'expérience. Ceci est valable pour la construction des nombres réels dont Poincaré résume la construction en ces termes :

en résumé, l'esprit à la faculté de créer les symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison¹²⁵.

Schmid, dans sa volonté d'explorer les liens entre l'esprit et l'expérience dans la construction des nombres, aborde le problème d'une manière similaire à celle des neurosciences cognitives. Elle remplace le rapport traditionnel entre la théorie mathématique et l'expérience par celui entre l'esprit et l'expérience. Ainsi, le problème philosophique qu'elle soulève consiste à comprendre le mécanisme par lequel ces deux entités interagissent lorsqu'il s'agit de construire des nombres. En d'autres termes, quel est le lien entre l'esprit humain et l'expérience dans la

¹²³ Ce que Poincaré désigne par "les nombres entiers" correspond aux nombres naturels dans le langage actuel.

¹²⁴ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 53.

¹²⁵ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 55.

construction des nombres ? Dans le domaine des neurosciences cognitives, ce problème métaphysique classique trouve son équivalent dans la relation entre le psychisme et le somatique. Nous aborderons plus en détail cette question dans le chapitre dédié aux neurosciences cognitives. Toutefois, pour l'instant, essayons de trouver une réponse succincte à cette question en étudiant l'œuvre de Poincaré.

Comme nous le savons désormais, Poincaré montre que la construction des nombres ne peut se réduire à la simple application des théories logico-formelles qui négligent les données intuitives et empiriques. C'est pour cette raison qu'il insistait sur le fait que l'esprit engendre les symboles tels que les nombres naturels et rationnels, en utilisant ses propres ressources et des matériaux fournis par l'expérience, montrant ainsi que leur création ne peut pas être exclusivement due à l'esprit (ou l'« intuition pure »), même si celui-ci en constitue le fondement. L'expérience qui est à l'origine du processus de création doit être prise en compte également. On peut constater que la préoccupation de Poincaré est de résoudre à la fois la question de l'origine et celle des fondements des nombres. Pour construire les nombres, il ne suffit pas d'avoir les facultés intellectuelles créatrices de symboles, les données sensibles de l'expérience externe sont, de fait, nécessaires. Il convient de noter que bien que Poincaré semble accorder de l'importance aux données sensibles, cela ne fait pas de lui un empiriste. Il peut sembler difficile de comprendre comment, selon Poincaré, les données sensibles sont impliquées dans la construction des nombres, tout en s'opposant à l'idée que les mathématiques soient une science expérimentale.

Afin d'élucider la position de Poincaré sur cette apparente incompréhension, Schmid explique que l'expérience « *n'intervient pas à l'intérieur de la théorie mathématique (...) son rapport avec les mathématiques se pose sous le couvert d'une autre question, celle de l'origine des notions* »¹²⁶. Pour dire cela autrement, l'expérience n'intervient pas directement dans l'acte de création des nombres ou des théories mathématiques, bien qu'elle soit considérée par Poincaré comme un élément important. En effet, Poincaré considère que l'expérience, étant toujours définie par son rapport aux sens, est à l'origine du processus de construction des nombres, mais elle ne joue pas un rôle décisif dans l'acte de création. L'acte décisif consistant à créer les nombres est en effet une œuvre de l'esprit ou l'« intuition pure ». C'est la raison pour laquelle il était hostile à l'idée qui tient les mathématiques pour une science expérimentale, bien qu'elles aient quelque chose à voir avec la réalité. On comprend ainsi que Poincaré adopte une

¹²⁶ *Idem*, p. 14.

position intermédiaire entre les rationalistes et les empiristes en associant l'expérience et l'esprit au sein de la construction des nombres : l'expérience fournit à l'esprit des données sensorielles nécessaires à la construction des nombres, mais la capacité de création de l'esprit n'est aucunement déterminée par elle. Il serait plus précis de dire que c'est l'« intuition sensible » qui offre l'opportunité à l'« intuition intellectuelle » de créer les nombres en fonction de ses structures préexistantes. Ainsi, la construction des nombre naturels et rationnels relève d'une interaction entre l'« intuition pure » et l'« intuition sensible ».

De cette analyse, nous pouvons conclure que selon Poincaré, les nombres naturels et les nombres rationnels sont construits par le biais de l'itération, une opération mentale combinant l'« intuition pure », appelé également l'« intuition intellectuelle », et l'« intuition sensible».

I-2- L'interaction intuition / émotion dans l'invention

Dans cette section, nous souhaitons maintenant nous concentrer spécifiquement sur le récit de Poincaré concernant l'invention mathématique, afin d'identifier les aspects cognitifs qui y sont sous-jacents.

La description que Poincaré a faite de l'invention lors de sa conférence animée à Paris en 1908 devant la société de psychologie revêt une importance certaine pour comprendre, d'un point de vue psychologique, le contexte et le processus d'invention mathématique. Cependant, il semble également qu'elle puisse nous aider à appréhender les processus cognitifs impliqués dans l'invention. Afin d'étudier les processus cognitifs tels qu'ils se manifestent dans le récit de Poincaré, nous allons d'abord présenter brièvement les éléments saillants du récit, puis nous examinerons le travail d'exégèse réalisé par Hadamard en mettant l'accent, premièrement, sur le rôle de l'intuition dans le processus d'invention mathématique, et deuxièmement, sur l'influence des émotions, car l'attention que Poincaré a accordée aux émotions dans son récit suggère que les dispositions émotionnelles doivent également être prises en compte dans le processus d'invention mathématique. Dans cette perspective, nous mettrons en évidence l'importance fondamentale des émotions dans la sélection des combinaisons pertinentes qui conduisent à l'acte inventif. À cet égard, nous constaterons que Poincaré envisage l'invention comme le fruit d'une interaction entre l'intuition et les émotions.

Poincaré proposait dans la conférence mentionnée une définition de l'invention qui diffère considérablement de celle du sens commun. Selon lui, « *inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une infime minorité. Inventer, c'est discerner, c'est choisir* »¹²⁷. Cette conception soulève alors une question subsidiaire : quelle faculté permet de faire ce choix ? Pour réaliser un choix créatif, l'intuition est indispensable, car elle « *l'instrument de l'invention* »¹²⁸. Si Poincaré accordait une attention particulière à l'intuition, comme en témoigne la majeure partie de ses écrits philosophiques, c'est parce qu'il considérait que le problème le plus crucial de l'invention mathématique réside dans la compréhension précise de la manière dont l'inventeur parvient à choisir parmi les multiples combinaisons qui se présentent à son esprit. Il semble que la perspicacité et l'érudition de l'inventeur se situent à ce niveau. Poincaré va même jusqu'à affirmer que les esprits dont cette faculté est moins développée ne seront pas en mesure de créer

¹²⁷ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 2000, *op. cit.*, p. 47.

¹²⁸ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 37.

ou d'inventer, car ils ne parviendront pas à « *deviner des harmonies et des relations cachées* »¹²⁹. Quelle est donc le rôle joué par l'intuition dans l'invention mathématique ?

Pour commencer, il convient de préciser que Poincaré n'aborde pas directement et précisément cette question. Reconnaisant que les circonstances entourant son invention devraient être étudiées de près par les psychologues, il se contentait de partager ses propres expériences. Ainsi, il exposait les différentes circonstances dans lesquelles il avait réussi à inventer les fonctions fuchsiennes. Selon ses dires, son intérêt pour les fonctions fuchsiennes avait commencé lorsqu'il avait tenté de démontrer leur impossibilité, mais il n'obtenait aucun résultat positif. Malgré ses multiples essais pour aborder cette difficulté avec les ressources de sa conscience, toutes ses tentatives s'étaient avérées infructueuses, comme le montre ce passage :

*depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes. J'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat*¹³⁰.

Par la suite, Poincaré relate qu'une nuit, alors qu'il souffrait d'insomnie à la suite de la consommation d'un pot de café, une multitude d'idées jaillirent dans son esprit :

*un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m'endormir : les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire pour former une combinaison stable.*¹³¹

Après avoir trouvé la solution, il entreprit de réécrire les résultats issus de ses recherches initiales. Malheureusement, il fut de nouveau confronté à des difficultés dans son travail. Frustré, il décida d'abandonner ses travaux mathématiques et de partir en voyage. Étrangement similaire à la première situation, Poincaré relate que c'est lors de son voyage à Coutances, alors qu'il prenait place dans l'omnibus, qu'une idée inattendue lui apparut.

*À ce moment, je quittais Caen, où j'habitais alors pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.*¹³²

¹²⁹ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 2000, *op. cit.*, p. 46.

¹³⁰ *Idem*, p. 48.

¹³¹ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 48.

¹³² *Idem*, pp. 48-49.

Poincaré expliqua qu'étant donné qu'il se trouvait dans l'omnibus, il ne prit pas la peine de faire une vérification immédiate et prévoyait de le faire à son retour de voyage. Après être rentré de son voyage, il entreprit de vérifier ses nouvelles idées en étudiant les questions d'arithmétique en lien avec ses recherches précédentes. Cependant, le même scénario se répéta : des essais et des combinaisons sans résultats probants. Désabusé par ces échecs répétés, il décida cette fois-ci de se retirer quelques jours au bord de la mer. C'est lors de sa promenade au bord de l'océan qu'une autre idée sur la géométrie non-euclidienne lui apparut avec une certitude immédiate, bien plus marquée que dans les deux premiers cas.

Dégouté par mon insuccès, j'allais passer quelques jours auprès de la mer et je passais à autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vient toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie euclidienne¹³³.

Poursuivant le récit des circonstances entourant son invention, Poincaré relate qu'après son retour à Caen, il en tira les conclusions en appliquant la théorie des séries thétafuchsiennes aux groupes fuchsiens. Cependant, il se heurta à une autre difficulté mathématique. Malgré tous ses efforts "conscients" pour résoudre cette difficulté, il n'obtint aucun succès. Frustré, il abandonna ses travaux mathématiques et décida de participer à un exercice militaire au Mont-Valérien. C'est lors de cet exercice militaire qu'une solution à la difficulté mathématique qui faisait défaut à la rédaction finale de son mémoire lui apparut subitement et de façon éclatante.

Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchais pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement qu'après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner.¹³⁴

Sans rencontrer la moindre difficulté, il composa son mémoire définitif. En se basant sur la description de Poincaré, qui continue de susciter des débats dans la littérature¹³⁵, Jacques Hadamard entreprit de décrire les étapes du processus d'invention mathématique. Dans son ouvrage intitulé *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, il identifia quatre étapes : (1) l'étape de préparation, (2) l'étape d'incubation, (3) l'étape

¹³³ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 49.

¹³⁴ *Idem*, p. 50.

¹³⁵ Cf. par exemple PATY, Michel. La création scientifique selon Poincaré et Einstein. Serfati, Michel (ed), *La recherche de la vérité*, coll. L'écriture des Mathématiques, ACL-Editions du Kangourou, Paris, 1999, p. 241-280 et HOUZEL, Didier. Note sur la création mathématique, in *Journal de la psychanalyse de l'enfant*, Presses universitaires de France, vol. 3, 2013, pp. 155-174. 2013.

d'illumination, et enfin (4) l'étape de vérification et de formalisation. Les deux premières étapes (1) et (2) se déroulent de manière inconsciente, tandis que les deux dernières étapes (3) et (4) sont conscientes. Nous allons à présent tenter d'expliquer chacune de ces étapes en suivant les recherches et les interprétations de Jacques Hadamard.

D'après Hadamard, l'acte d'invention mathématique commence par une phase initiale qu'il nomme « stade préparatoire » ou « étape de préparation » (1). Cette étape de préparation est essentielle car elle constitue le point de départ de toute invention. À la question de savoir si l'invention est suscitée par le hasard, Hadamard révoque la thèse soutenue par le psychologue Souriau admettant que le hasard est le fondement de toute activité créatrice¹³⁶, préférant la vision de Poincaré. Les travaux du biologiste Nicolle, qui prolongent le point de vue de Souriau, défendent également l'idée que « *l'acte de découverte est, lui aussi, un accident* »¹³⁷. Cependant, Hadamard considère ces perspectives inacceptables et remplace le hasard par la logique dans le processus d'invention mathématique. Selon lui, l'invention est provoquée par un travail préalable conscient, où le mathématicien aborde un problème avec ses outils standard. Selon cette vision, l'expérience vécue ou le passé jouent un rôle important dans le processus d'invention. Ce vécu se résume souvent à un ensemble de difficultés ou de problèmes auxquels l'inventeur a vainement tenté de trouver des solutions avec les ressources de sa conscience. Il en découle donc que tout acte d'invention commence par une phase préliminaire. Hadamard insiste sur ce point en affirmant que « *la découverte dépend nécessairement de l'action préliminaire plus ou moins intense du conscient* »¹³⁸.

Pour évaluer la légitimité du point de vue défendu par Hadamard, examinons la description de Poincaré : chaque nouvelle idée qui émergeait dans son esprit était précédée systématiquement d'un travail préparatoire conscient. Ce processus était souvent marqué par des échecs et des efforts conscients, sans aucun résultat tangible. À ce stade préliminaire de travail conscient, le mathématicien se confrontait aux problèmes avec pleine conscience, mais généralement sans obtenir de résultats significatifs. Il pouvait même arriver qu'il se sente parfois découragé face à ses échecs. Après avoir buté à plusieurs reprises sur une difficulté ou un problème, il était nécessaire de s'en éloigner, de le mettre de côté et de prendre du temps de

¹³⁶ Pour aller plus loin, voir SOURIAU, Paul. *Théorie de l'invention*. Paris, Hachette BNF, 1881, 164 p.

¹³⁷ NICOLLE, Charles. *Biologie de l'invention*. Paris, Librairie Felix Alcan, 1932, p. 6-7.

¹³⁸ HADAMARD, Jacques. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Paris, traduction de Jacqueline Hadamard, Gauthiers- Villars, 1975, p. 50.

repos, voire de passer à autre chose. Selon Hadamard, ce moment de repos prépare le terrain pour la phase d'incubation (2).

Les psychologues ont défini l'étape d'incubation comme « *une période au cours de laquelle le problème est mis de côté du fait d'une incapacité à le résoudre* »¹³⁹ pour se concentrer sur d'autres activités. Cette définition implique l'idée qu'il faut prendre un moment de repos après avoir buté sur un problème ou une difficulté. C'est ce que Hadamard appelle « l'hypothèse du repos »¹⁴⁰. Cette hypothèse suggère de laisser le cerveau se reposer pendant une ou plusieurs heures après une longue période de travail conscient sans succès. C'est pourquoi, dans le cas de Poincaré qui nous sert ici de référence, nous avons vu qu'à plusieurs reprises, il laissait de côté ses travaux mathématiques et s'adonnait à d'autres activités telles que « aller au bord de la mer » ou « aller à un service militaire », etc. Une autre idée sous-jacente à cette hypothèse est la mise au repos du cerveau. Cela permet le plus souvent à l'inventeur d'oublier ses expériences d'échecs antérieures, ce qui rafraîchit son esprit. Dans cette perspective, on pourrait concevoir la phase d'incubation (2) comme une phase au cours de laquelle le mathématicien essaie de « *se débarrasser de ces fausses voies et de ces hypothèses gênantes, de manière à envisager le problème avec un esprit ouvert* »¹⁴¹. De nombreux psychologues s'accordent avec Jacques Hadamard pour soutenir que plusieurs difficultés ou problèmes trouvent leur solution, lorsque le cerveau est au repos, dans un état d'éveil ou dans un état de sommeil. Parmi ces psychologues, nous pensons à Murphy qui, s'intéressant à l'état du sommeil, affirmait que « *le sommeil est une loi divine et beaucoup de réponses à nos problèmes nous viennent lorsque nous sommes profondément endormis* »¹⁴². Helmholtz était également d'avis que les belles idées arrivent le plus souvent après un moment de repos : « *alors après que la fatigue résultant de ce travail soit passée, il faut avoir une heure de complet repos physique avant que les bonnes idées arrivent* »¹⁴³.

Ces deux déclarations prouvent l'importance du repos dans le processus d'invention. Pendant cette période de repos, plusieurs opérations mentales se déploient dans le cerveau pour trouver une solution au problème, à travers une illumination (3). Le terme "illumination" fait

¹³⁹ LUBART, Todd et al. *Psychologie de la créativité*, 2^e édition. Paris, Armand Colin, 2015, p. 54.

¹⁴⁰ HADAMARD, Jacques. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine des mathématiques*, 1975, *op. cit.*, p. 40.

¹⁴¹ *Ibidem*

¹⁴² MURPHY, Joseph. *La puissance de votre subconscient*. Genève, Ramon Keller, 1969, p. 40.

¹⁴³ Helmholtz cité par Hadamard. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine des mathématiques*, 1975, *op. cit.*, p. 40-41.

référence à une idée claire et soudaine, une lumière qui apporte une réponse automatique à un moment presque inattendu. Concernant la certitude engendrée par l'illumination, Poincaré affirmait : « *quand une illumination subite envahit l'esprit du mathématicien, il arrive le plus souvent qu'elle ne le trompe pas* »¹⁴⁴. L'illumination survient comme un éclair de génie, sans effort perceptible. Ce moment d'inspiration réel est décrit par Hamilton comme un instant électrique. Témoignant de son expérience, il déclare : « *ce fut comme si un circuit électrique se fermait ; et une étincelle jaillit* »¹⁴⁵. De son côté, Murphy considère que l'illumination, en tant que travail subconscient, constitue la véritable étape de l'invention, car c'est dans le subconscient que se trouve mystérieusement la réponse aux problèmes que nous ne parvenons pas à résoudre consciemment. « *Lorsque vous cherchez une réponse à un problème, votre subconscient vous répondra* »¹⁴⁶. Ces paroles du psychologue témoignent du fait que l'inconscient est le lieu où de multiples combinaisons surgissent dans une illumination aussi soudaine qu'un éclair. Cependant, après cette étape électrique qu'est l'illumination, vient finalement le travail conscient

Après la période d'incubation (2) et celle d'illumination (3), qui se déroulent toutes les deux dans l'inconscient, survient la dernière étape, celle de vérification et de formalisation (4), qui se produit à nouveau dans le domaine conscient. Selon Hadamard, ce processus se divise en deux phases distinctes : tout d'abord, la conscience doit vérifier les résultats obtenus grâce à l'illumination. Il est crucial de s'assurer que l'illumination ne nous a pas trompés et que les résultats sont corrects. Ensuite, il est nécessaire de les organiser de manière cohérente en les structurant de façon adéquate. Dans des domaines tels que les mathématiques, cela implique de formaliser les résultats par le biais d'une axiomatisation. Le schéma ci-dessous illustre les différentes étapes du processus d'invention mathématique.

¹⁴⁴ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 59.

¹⁴⁵ Hamilton cité par LEFEBVRE, Jacques. Invention, découverte et créativité en mathématiques : aspects psychologiques et historiques. *Bulletin AMQ*, 1999, vol. 39, n°3, p. 12.

¹⁴⁶ MURPHY, Joseph. La puissance de votre subconscient. 1969, *op. cit.*, p. 40.

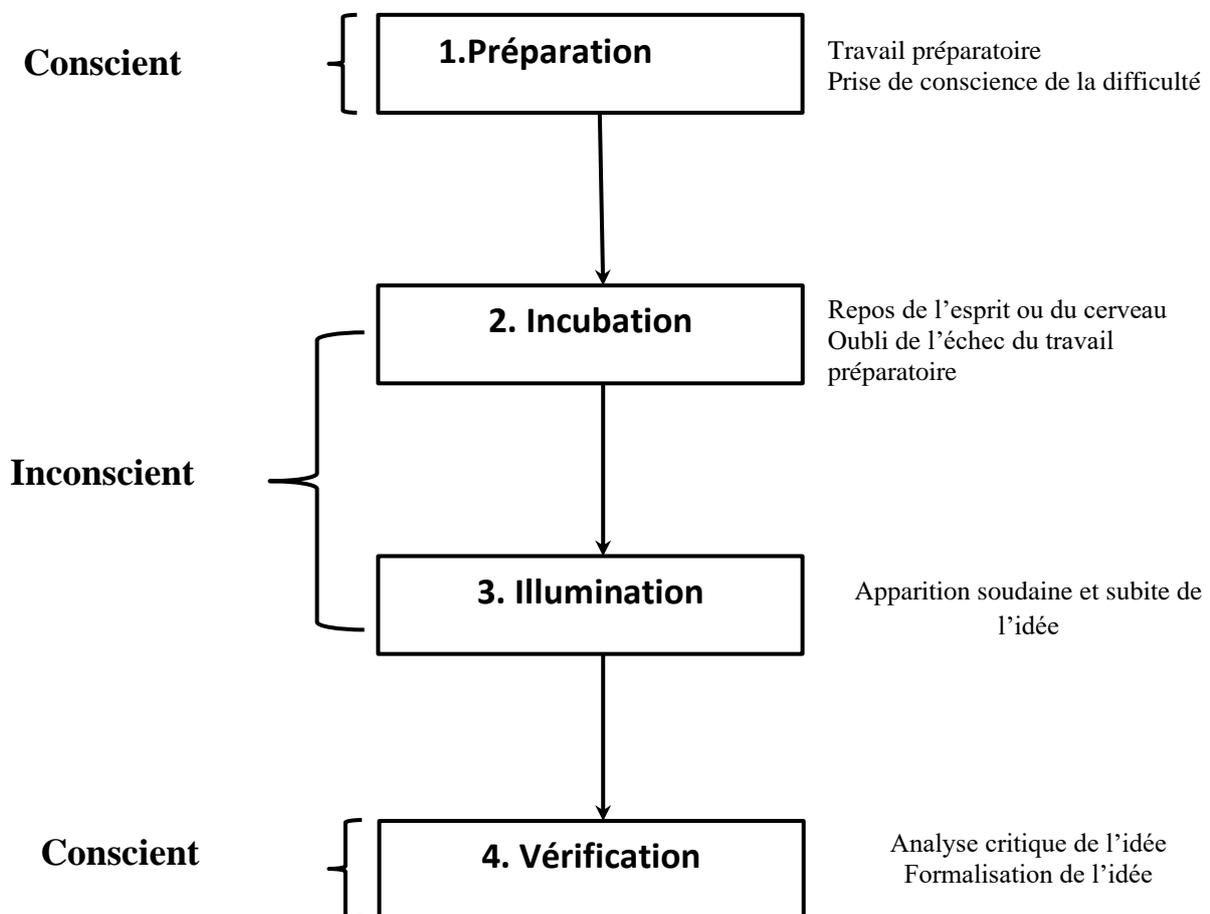


Figure 1 : Récapitulatif des étapes du processus d'invention mathématique selon Poincaré et Hadamard

Nous constatons que l'acte d'invention est un processus long qui commence par une étape rationnelle préliminaire, suivie de l'incubation et de l'illumination, qui se produisent au niveau de l'inconscient. Enfin, vient l'étape de vérification et de formalisation, qui se déroule au niveau de la conscience.

Revenons maintenant au récit de Poincaré et essayons de comprendre le rôle de l'intuition en examinant la relation qu'elle entretient avec l'inconscient. Comme nous l'avons mentionné précédemment, Poincaré présente l'intuition comme l'outil de l'invention au début de son récit. Cependant, vers la fin de celui-ci, il suggère que l'inconscient joue un rôle essentiel dans le processus de création. Cela soulève plusieurs questions : d'où provient l'intuition ? Est-ce qu'elle émane de l'inconscient ou du conscient ? Quels rôles jouent concrètement l'intuition dans le processus d'invention ?

Le récit descriptif de Poincaré ainsi que d'autres études scientifiques sur l'invention mathématique mettent en évidence le lien étroit entre l'intuition et l'inconscient. Poincaré lui-même établit une distinction entre le moi subliminal (l'inconscient) et le moi conscient, suggérant ainsi une potentielle supériorité du premier sur le second. La distinction entre ces deux facultés n'a pas besoin d'être débattue davantage ici, car les recherches menées par les psychologues, les psychiatres, les neurologues et plus récemment les neuroscientifiques, ne laissent guère de doutes quant à leur existence et aux rôles distincts qu'ils jouent dans le psychisme humain. Cependant, des doutes persistent malheureusement concernant l'idée selon laquelle l'intuition est une manifestation de l'inconscient. En effet, l'intuition, qui continue de se manifester de manière féconde dans les domaines de la géométrie, de la physique, de l'astronomie, de l'histoire, de la chimie, du commerce, de la politique, de l'art, et bien d'autres, est encore perçue comme une faculté mystérieuse et divine. De nombreuses personnes continuent de croire, à l'instar de Fichte, que l'intuition est issue d'un monde céleste, un monde mystérieux de l'intelligible et du divin.¹⁴⁷

Bien qu'il puisse sembler attrayant d'attribuer le pouvoir de l'intuition à une entité divine, Poincaré s'oppose à cette perspective en soulignant, dans son exposé, que l'intuition (ici sensible) est une forme de savoir qui découle d'un processus inconscient.

Il est certain que les combinaisons qui se présentent à l'esprit dans une sorte d'illumination subite, après un travail inconscient un peu prolongé, sont généralement des combinaisons utiles et fécondes, qui semblent le résultat d'un premier triage. S'ensuit-il que le moi subliminal, ayant deviné par une intuition délicate que ces combinaisons pouvant être

¹⁴⁷ Voir TILLIETTE, Xavier. *L'intuition intellectuelle de Kant à Hegel*. Paris, Vrin, 1995.

*utiles, n'a formé que celles-là, ou bien en a-t-il formé beaucoup d'autres qui étaient dépourvues d'intérêt et qui sont demeurées inconscientes*¹⁴⁸.

Dans ce passage, Poincaré attribue à l'intuition le rôle d'une manifestation de l'inconscient. Selon lui, l'intuition est essentiellement le moyen par lequel les connaissances et les idées utiles à l'invention peuvent émerger de manière non planifiée. En d'autres termes, Poincaré considère l'intuition comme un processus inconscient dans lequel des idées et des associations se forment et se combinent pour créer des concepts et des idées. Ainsi, si l'intuition est capable de deviner, d'imaginer et de générer des idées pour résoudre des problèmes, là où la conscience échoue souvent, c'est parce qu'elle puise ses ressources dans la sphère de l'inconscient. Observant ce fait, Poincaré se questionnait sur la supériorité potentielle de l'inconscient par rapport à la conscience en ces termes :

*le subconscient n'est nullement inférieur au moi conscient ; il n'est pas purement automatique, il est capable de discernement, il a du tact, de la délicatesse ; il sait choisir, il sait deviner. Que dis-je, il sait mieux deviner que le moi conscient, puisqu'il réussit là où elle avait échoué. En un mot, le moi subliminal n'est-il pas supérieur au moi conscient ?*¹⁴⁹

Dans ce passage, Poincaré suggère l'idée que le subconscient détient une forme d'intelligence intuitive qui surpasse celle du moi conscient. Cette supériorité découle de sa capacité de discernement, de choix et de résolution de problèmes. Ainsi, Poincaré avance l'hypothèse selon laquelle l'inconscient possède des qualités distinctes qui lui permettent d'atteindre des résultats supérieurs à ceux de la conscience dans certains domaines. Si Poincaré rejette l'idée d'une supériorité de l'inconscient sur le conscient, il semble admettre l'existence de deux types d'intuitions qui se manifestent à des niveaux différents : une intuition inconsciente agissant à un niveau supérieur et une intuition intellectuelle ou rationnelle agissant au niveau de la conscience. L'intuition inconsciente est une forme d'intuition qui émerge sans que nous en soyons pleinement conscients. Elle opère indépendamment de notre contrôle et se manifeste par des idées, des connaissances ou des solutions qui semblent surgir de nulle part, sans que nous puissions les expliquer rationnellement. C'est donc un savoir tacite ou implicite qui échappe à notre conscience. En revanche, l'intuition intellectuelle est une forme d'intuition qui est davantage influencée par notre intellect et notre pensée rationnelle. Elle découle d'un processus intellectuel actif et conscient, basé sur notre expérience, notre raisonnement et notre capacité à analyser les informations. Cette forme d'intuition se produit lorsque nous sommes capables de tirer rapidement et intuitivement des conclusions à partir des informations

¹⁴⁸ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 52.

¹⁴⁹ *Ibidem*

disponibles et des schémas de pensée établis. Ainsi, Poincaré établit une distinction entre l'inconscient et le conscient à partir de leurs capacités intuitives.

En agissant au niveau inconscient, l'intuition (inconsciente) génère automatiquement des idées ou connaissances pour favoriser l'invention. Mais cela ne signifie pas que l'intuition intellectuelle est inactive ou qu'elle ne joue aucun rôle dans le processus d'invention. Poincaré reconnaît le rôle significatif de la conscience dans le processus d'invention mathématique. Comme nous l'avons vu, sa contribution se situe à la fois au début de l'invention, avec le travail préliminaire, et à la fin, avec le travail de formalisation. Sans l'effort conscient, aucune invention ne peut prendre forme, rien ne peut être exprimé ou formalisé. L'idée inconsciente qui surgit lors de l'illumination doit être soumise au jugement de la conscience pour acquérir une réalité objective. Afin de souligner le rôle de l'intuition intellectuelle dans le processus d'invention, Poincaré écrit :

la nécessité de la seconde période du travail conscient, après l'inspiration, se comprend mieux encore. Il faut mettre en œuvre les résultats de cette inspiration, en déduire les conséquences immédiates, les ordonner, rédiger les démonstrations, mais surtout il faut les vérifier. J'ai parlé du sentiment de certitude absolue qui accompagne l'inspiration ; dans les cas cités, ce sentiment n'était pas trompeur, et le plus souvent, il en est ainsi ; mais il faut se garder de croire que ce soit une règle sans exception ; souvent ce sentiment nous trompe sans pour cela être moins vif et on ne s'en aperçoit pas que quand on cherche à mettre la démonstration sur pied¹⁵⁰.

L'illumination s'avère souvent trompeuse, il est donc essentiel de la vérifier par le biais de la conscience. Ainsi, Poincaré suggère une interaction entre l'intuition inconsciente et l'intuition intellectuelle.

Jusqu'ici nous avons seulement souligné les différents rôles joués par l'intuition inconsciente et l'intuition intellectuelle dans l'invention. Il nous faut à présent souligner la contribution des émotions dans le processus d'invention. Que signifie avant tout le terme « émotion » ? Ce terme fait référence aux expériences personnelles, « *c'est une réaction courte et intense, en réponse à un stimulus externe. Il est constitué de composantes physiologiques, comportementales et cognitives* »¹⁵¹. Dans un passage de son récit, Poincaré évoque les relations entre l'intuition (qu'il assimile à cet endroit à une activité inconsciente) et l'émotion de la façon suivante :

dans cette seconde manière de voir, toutes les combinaisons se formeraient par suite de l'automatisme du moi subliminal, mais seules celles qui seraient intéressantes pénétreraient dans le champ de la conscience. Et cela est encore mystérieux. Quelle est la

¹⁵⁰ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, op. cit., p. 51.

¹⁵¹ LUBART, Todd et al. Psychologie de la créativité. 2015, op. cit., p. 32.

cause qui fait que, parmi les mille produits de notre activité inconsciente, il y en a qui sont appelés à franchir le seuil, tandis que d'autres restent en deçà ? Est-ce un simple hasard qui leur confère ce privilège ? Évidemment non ; parmi toutes les excitations de nos sens, par exemple, les plus intenses seules retiendront notre attention, à moins que cette attention n'ait été attirée sur elles par d'autres causes. Plus généralement, les phénomènes inconscients privilégiés, ceux qui sont susceptibles de devenir conscients, ce sont ceux qui, directement ou indirectement, affectent le plus profondément notre sensibilité¹⁵².

Le sens de la sensibilité évoqué dans ce passage diffère de celui de Kant, où il fait référence à la capacité passive de recevoir des sensations empiriques ou pures. Dans le contexte de Poincaré, la sensibilité se réfère plutôt aux états émotionnels. En effet, Poincaré soutient que les idées inconscientes qui captent l'attention de l'inventeur sont celles qui affectent directement ou indirectement sa sensibilité émotionnelle. Ainsi, il exprime l'idée selon laquelle les émotions jouent un rôle crucial dans le processus d'invention, notamment en ce qui concerne la sélection des idées prometteuses. Cela soulève donc la question de la contribution concrète des émotions dans le processus d'invention.

Dans ce passage que nous avons cité, Poincaré avance l'hypothèse que l'émotion joue un rôle essentiel en stimulant la créativité et en permettant à l'inventeur de sélectionner les meilleures idées. En considérant que l'émotion facilite le tri et suggère à l'inventeur les idées les plus remarquables, Poincaré écarte l'idée du hasard et celle d'une potentielle supériorité de l'inconscient sur le conscient. C'est pourquoi Hadamard s'opposait à Souriau et Nicolle, qui soutenaient que l'invention relevait du hasard. La position de Hadamard est renforcée par le fait que Poincaré soulignait le rôle des aspects émotionnels liés aux expériences vécues ou passées, qui contribuent à stimuler l'invention en permettant à l'inventeur de reconnaître aisément les idées les plus remarquables. En un mot, l'inventeur est capable de discerner facilement les idées les plus « belles » parmi les milliers d'idées qui lui viennent à l'esprit, grâce à la grande influence des émotions. Lorsqu'une idée parvient à captiver la sensibilité de l'inventeur au point qu'il ne consacre pas suffisamment d'efforts pour la sélectionner, on parle alors d'« élégance mathématique », d'« esthétique » ou de « beauté mathématique ». Poincaré propose la description suivante de la beauté mathématique :

quels sont les êtres mathématiques auxquels nous attribuons ce caractère de beauté et d'élégance, et qui sont susceptibles de développer en nous une sorte d'émotion esthétique ? Ce sont ceux dont les éléments sont harmonieusement disposés, de façon que l'esprit puisse sans effort en embrasser l'ensemble tout en pénétrant les détails. Cette harmonie est à la fois une satisfaction pour nos besoins esthétiques et une aide pour l'esprit qu'elle soutient et guide.¹⁵³

¹⁵² POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 53.

¹⁵³ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 53.

Poincaré met ici en évidence l'importance des émotions, ce qui nous amène à affirmer qu'il situe clairement l'acte d'invention dans un cadre cognitif en soutenant que les émotions sont à la fois une aide et un guide pour l'esprit

Terminons l'analyse de cette section par l'examen de l'intuition de caractère décisionnel qui se dégage de ce récit de Poincaré. Il aborde cette forme d'intuition de la façon suivante :

une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllogismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'œil l'ensemble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire. Il me semble alors, en répétant un raisonnement appris, que j'aurais pu l'inventer ; ce n'est souvent qu'une illusion ; mais, même alors, même si je ne suis pas assez fort pour créer par moi-même, je le réinvente moi-même, à mesure que je le répète. On conçoit que ce sentiment, cette intuition de l'ordre mathématique, qui nous fait deviner des harmonies et des relations cachées, ne puisse appartenir à tout le monde. Les uns ne posséderont ni ce sentiment délicat, et difficile à définir, ni une force de mémoire et d'attention au-dessus de l'ordinaire, et alors ils seront absolument incapables de comprendre les mathématiques un peu élevées ; c'est le plus grand nombre. D'autres n'auront ce sentiment qu'à un faible degré, mais ils seront doués d'une mémoire peu commune et d'une grande capacité d'attention. Ils apprendront par cœur les détails les uns après les autres, ils pourront comprendre les mathématiques et quelquefois les appliquer, mais ils seront hors d'état de créer. Les autres enfin posséderont à un plus ou moins haut degré l'intuition spéciale dont je viens de parler et alors non seulement ils pourront comprendre les mathématiques, quand même leur mémoire n'aurait rien d'extraordinaire, mais ils pourront devenir créateurs et chercher à inventer avec plus ou moins de succès, suivant que cette intuition est chez eux plus ou moins développée.¹⁵⁴

Dans ce passage, Poincaré aborde une intuition distincte de celles décrites précédemment, qu'il qualifie de "spéciale", car elle provient du génie propre d'un individu. Cette intuition "spéciale" est étroitement liée aux émotions et se présente comme une forme de pensée intuitive permettant de percevoir des relations, des structures et des modèles dissimulés au-delà des apparences superficielles. Elle se manifeste comme une sorte de "sixième sens" qui guide l'inventeur dans le choix des idées conduisant à l'invention. Bien que Poincaré n'aborde pas directement le rôle de cette intuition « spéciale » dans le processus de sélection des idées, son raisonnement hypothétique dans ce passage suggère son impact potentiel.

Qu'arrive-t-il alors ? Parmi les combinaisons en très grand nombre que le moi subliminal a aveuglément formées, presque toutes sont sans intérêt et sans utilité ; mais, par cela même, elles sont sans action sur la sensibilité esthétique ; la conscience ne les connaîtra jamais ; quelques-unes seulement sont harmonieuses, et, par suite, à la fois utiles et belles, elles seront capables d'éveiller cette sensibilité spéciale du géomètre dont je viens de parler, et qui, une fois excitée, appellera sur elles notre attention et leur donnera ainsi

¹⁵⁴ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, op.cit. p. 46.

l'occasion de devenir conscientes. Ce n'est là qu'une hypothèse, et cependant voici une observation qui pourrait la confirmer : quand une illumination subite envahit l'esprit du mathématicien, il arrive la plus souvent qu'elle ne le trompe pas ; mais il arrive aussi quelquefois, je l'ai dit, qu'elle ne supporte pas l'épreuve d'une vérification ; eh bien ! on remarque presque toujours que cette idée fausse, si elle avait été juste, aurait flatté notre instinct naturel de l'élégance mathématique. Ainsi c'est cette sensibilité esthétique spéciale, qui joue le rôle du crible délicat dont je parlais plus haut, et cela fait comprendre assez pourquoi celui qui en est dépourvu ne sera jamais un véritable inventeur¹⁵⁵.

Dans ce passage, Poincaré présente l'intuition « spéciale » comme une forme de pensée créative et imaginative qui engendre de nouvelles idées, explore des domaines inconnus et conduit à des choix appropriés, donnant ainsi naissance à des inventions. Cela suggère que l'intuition "spéciale" joue un rôle important dans la prise de décision ou la sélection d'idées. Dans le contexte de la prise de décision, le rôle de l'intuition « spéciale » serait plus précisément de trier une multitude de combinaisons existantes afin d'éliminer celles qui sont fausses ou inutiles. Implicitement, l'idée exprimée ici est que l'intuition « spéciale » aiderait à simplifier les choix complexes, à trouver des solutions élégantes et à l'invention de nouvelles lois. C'est dans la mesure où cette intuition possède un caractère décisionnel que Poincaré affirme : « *inventer, c'est discerner, c'est choisir* »¹⁵⁶.

En plus de cette hypothèse, Poincaré utilise le terme de « sensibilité esthétique spéciale » pour décrire l'intuition « spéciale ». Cela suggère que la capacité de l'intuition « spéciale » à jouer un rôle dans la sélection d'idées ou de solutions élégantes est liée à la sensibilité de l'inventeur. Ce qui caractérise donc l'intuition « spéciale » et qui la distingue de celles décrites précédemment, c'est son rapport à la sensibilité (aux états émotionnels). C'est pourquoi Poincaré affirme que ceux qui en sont dépourvus ne pourront jamais être de véritables créateurs. Cela suggère clairement que la sélection d'idées et d'options alternatives ne repose pas uniquement sur la réflexion rationnelle et logique, mais également sur des mécanismes émotionnels et somatiques liés à l'inconscient. Ainsi, Poincaré ne considère pas l'émotion comme un obstacle à la créativité, mais plutôt comme une ressource qui peut stimuler l'imagination et faciliter la prise de décision complexe.

En nous intéressant au processus d'invention décrit par Poincaré, notre objectif était de souligner l'importance des mécanismes intuitifs, émotionnels et somatiques dans l'invention. Comme nous l'avons vu, l'intuition inconsciente et l'intuition intellectuelle jouent de part et d'autre des rôles significatifs et différents : l'intuition inconsciente a pour rôle de former des

¹⁵⁵ *Idem*, p. 54.

¹⁵⁶ *Idem*, p. 47.

idées visant à résoudre des problèmes complexes. Les émotions, qui sont associées à cette forme d'intuition, ont pour rôle de guider l'esprit dans le choix judicieux de l'idée conduisant à l'invention. Quant à l'intuition intellectuelle, elle permet la vérification et la formalisation des résultats de l'invention. On retiendra que l'émotion est une ressource visant à stimuler le choix ou la sélection des idées¹⁵⁷.

L'objectif de cette section était de mettre en évidence les processus mentaux impliqués dans l'approche intuitionniste que Poincaré a développée en arithmétique et justifier que cette approche comporte des aspects cognitifs. Tout d'abord, nous avons vu que Poincaré rejette la prétention qu'à l'aide de l'« intuition pure » seule, il serait possible de produire les nombres. C'est pourquoi nous avons souligné l'importance qu'il accorde à l'« intuition sensible », c'est-à-dire aux facteurs empiriques externes impliqués dans la construction des nombres naturels et rationnels. Nous retiendrons principalement que la construction des nombres naturels et rationnels se fait par le biais de l'itération, qui est une opération mentale dans laquelle l'« intuition pure » et l'« intuition sensible » collaborent étroitement.

Ensuite, nous avons constaté que l'intuition "spéciale", qui relève d'une forme de pensée irrationnelle, n'est pas suffisante pour être considérée comme une base adéquate pour l'invention. L'examen du récit de Poincaré a révélé que l'intuition "spéciale" ou inconsciente, caractérisée par des facteurs émotionnels et somatiques, ainsi que l'intuition "intellectuelle" ou consciente, sont toutes deux importantes pour l'invention. Les facteurs intuitifs, émotionnels et somatiques jouent un rôle encore plus crucial dans le choix et la sélection des bonnes idées.

Dans la section qui suit, nous tenterons de voir si les aspects cognitifs sont également impliqués dans la théorie psycho-physiologique de l'espace que Poincaré a développée en géométrie. L'objectif sera de comprendre la façon dont s'articulent les facteurs psychiques (l'esprit) et les facteurs empiriques (l'expérience) dans la construction de la géométrie et de l'espace.

¹⁵⁷ Nous reviendrons amplement sur cette thèse dans la 2^e partie où nous tenterons de voir avec [la théorie des marqueurs somatiques de Damasio](#) si cette hypothèse de Poincaré est justifiée.

II- La théorie psycho-physiologique de la géométrie de Poincaré

Nous allons maintenant nous intéresser à l'analyse des aspects cognitifs de la géométrie, tels qu'ils sont présumés dans la théorie psycho-physiologique développée par Poincaré. Il convient de souligner que cette théorie spatiale présente deux genèses apparemment distinctes mais complémentaires : la première genèse a été exposée par Poincaré en 1898 dans son ouvrage intitulé *Fondements de la géométrie*. Dans cette première version de la théorie psycho-physiologique (que nous désignerons comme la genèse logique), la géométrie est considérée comme émergeant de l'expérience sensori-motrice, c'est-à-dire des mouvements, des actions et des parades que nous effectuons lors de l'expérience sensorielle. De plus, le caractère métrique de l'espace reposait sur le concept de groupe de déplacements, que Poincaré considérait comme un élément intuitif *a priori*, préexistant donc dans l'esprit humain. La démarche entreprise par Poincaré dans cette première genèse consistait à reconstruire l'espace géométrique à partir des sensations, qu'il considérait comme une catégorie de la pensée. Sa thèse était que la géométrie est engendrée par une opération mentale au cours de laquelle l'esprit humain associe les sensations sensori-motrices et où on ne présume en apparence aucun espace, aucun continu et aucune variété amorphe, c'est-à-dire la forme est avant la matière.

À partir de 1903, Poincaré apporta une modification substantielle à sa théorie spatiale, plus précisément au niveau de sa théorie de la dimension. L'argument principal de la genèse logique selon lequel le groupe de déplacement est préexistant à notre esprit, et l'espace géométrique se construit à partir des sensations non spatiales provenant de l'espace représentatif, n'est plus suffisant pour justifier la commodité de la tridimensionnalité de l'espace sans circularité. Poincaré développa alors une seconde genèse (que nous désignerons comme la genèse évolutionniste), dans laquelle la tridimensionnalité de l'espace est obtenue grâce à l'introduction de la notion de continu et des coupures par considération topologique. Dans cette seconde genèse, Poincaré va mettre entre parenthèse que la forme de l'espace est antérieure à sa matière.

La genèse logique de 1898 sera esquissée en détail dans la première sous-section. Nous chercherons ensuite à expliquer, dans la deuxième sous-section, les raisons qui justifient la séparation stricte de l'espace géométrique de l'espace sensible dans l'épistémologie géométrique de Poincaré. Enfin, dans la troisième sous-section, nous présenterons la version modifiée de la genèse logique que Poincaré a développée à partir de 1903 en lien avec le problème de la dimension de l'espace.

II-1- De l'expérience sensori-motrice à la géométrie : la genèse logique de la géométrie selon Poincaré (1898)

Il est connu que les premières vulgarisations scientifiques de Poincaré traitant de la géométrie, tels que *Les géométries non euclidiennes*¹⁵⁸ et *L'espace et la géométrie*¹⁵⁹, marquaient le début de sa théorie psycho-physiologique qu'il développera plus en détail en 1898. Dans le premier ouvrage mentionné, Poincaré contestait l'apriorisme kantien et l'empirisme géométrique, et défendait plutôt un conventionnalisme quant au statut des axiomes de la géométrie. La thèse principale qu'il soutenait dans cet article était que les axiomes de la géométrie sont des conventions et non des jugements *a priori* ou des faits expérimentaux¹⁶⁰. Dans le second article mentionné, Poincaré s'interrogeait sur les aspects cognitifs (c'est-à-dire la manière dont l'esprit humain appréhende la géométrie et l'espace par le biais d'une interaction entre la pensée et le domaine de l'expérience) de la géométrie de la manière suivante : «*si l'idée de l'espace ne s'impose pas à notre esprit, si d'autre part aucune de nos sensations ne peut nous la fournir, comment a-t-elle pu prendre naissance ?*»¹⁶¹.

Cependant, c'est dans son ouvrage *Les Fondements de la géométrie* (1898) que Poincaré a développé de manière plus aboutie sa première théorie psycho-physiologique. Cette première version visait à mettre en évidence le rôle joué par l'esprit humain et l'expérience sensori-motrice dans la genèse de la géométrie et de l'espace. Par le fait que Poincaré reprenne en partie l'hypothèse des inférences inconscientes d'Helmholtz pour expliquer l'origine de la géométrie, cette première genèse est souvent interprétée à tort ou à raison comme une genèse psychologique, ce qui est inexact, comme l'a démontré Heinzmann. En effet, Heinzmann a exclu l'idée d'une genèse psychologique au sens moderne du terme et a soutenu que la première genèse de la géométrie décrite par Poincaré correspondait à une genèse logique¹⁶², qui doit être interprétée comme une tentative de reconstruction de l'espace géométrique, dont la structure intuitive est donnée par le groupe de déplacements, à partir de l'espace représentatif ou sensible.

¹⁵⁸ POINCARÉ, Henri. Les géométries non euclidiennes. Revue générale des sciences pures et appliquées, Volume 2, Armand Colin. Paris, 1891, p. 769-774. Les géométries non euclidiennes est le chapitre III de la Science et l'hypothèse.

¹⁵⁹ POINCARÉ, Henri. L'espace et la géométrie. Revue de Métaphysique et Morale, 1895, Volume 3, Armand Colin. Paris, p. 631-646. L'espace et la géométrie est le chapitre IV de *La Science et l'hypothèse*.

¹⁶⁰ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 75.

¹⁶¹ *Idem*, p. 82-83.

¹⁶² HEINZMANN, Gerhard. Poincaré : philosophe et géomètre. *Image des Mathématiques*. CNRS, 2010. Disponible sur le web : <http://images.math.cnrs.fr/Poincare-philosophe-et-geometre.html>. fahal-00527106f.

Cependant, ce qui nous intéresse vraiment, ce sont les aspects cognitifs de la géométrie qui sont présumés dans cette genèse logique de 1898. Ces aspects cognitifs concernent les processus mentaux par lesquels l'esprit humain combine les informations sensorielles et motrices du monde sensible pour générer l'espace et la géométrie. Par conséquent, l'objectif de cette sous-section est de comprendre comment se réalise la coordination entre l'esprit humain et les sensations sensori-motrices dans la construction de la géométrie et de l'espace.

Selon les propres paroles de Poincaré dans *Analyse de mes travaux scientifiques*, sa théorie psycho-physiologique de l'espace trouve ses fondements dans les travaux scientifiques de Helmholtz et de Lie¹⁶³. Cependant, il serait incorrect de penser que la théorie géométrique de Poincaré se limite aux seules contributions de ces deux savants. Nabonnand a montré que la théorie psycho-physiologique de Poincaré en matière de géométrie a également été influencée par d'autres concepts psychologiques dominants de l'époque, notamment ceux de Delboeuf et de De la Rive, qui accordaient une place centrale aux sensations dans la géométrie¹⁶⁴. À cette époque, la question philosophique débattue était la suivante : peut-on construire la géométrie indépendamment d'une présupposition spatiale ?

¹⁶³ C'est chez Helmholtz qu'on trouve pour la première fois conceptualisés les éléments d'une théorie géométrique du mouvement des corps dans l'espace. Ayant travaillé sur la physiologie et l'anatomie de l'œil, Helmholtz a conçu la géométrie comme les groupes de mouvements rigides. Selon lui, les corps rigides peuvent être déplacés ou transférés continûment vers tout autre point de l'espace au moyen d'un mouvement continu qui déplace le corps dans son intégralité tout en respectant sa rigidité interne. Cf. MERKER, Joël. *Le problème de l'espace. Sophis Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*. Paris, Hermann, 2010, p. 60.

Cette thèse de la mobilité des corps rigides fut controversée par Sophus Lie, car les groupes continus de transformations permettant le mouvement des corps rigides n'y sont pas suffisamment expliqués. Telle sera la tâche de son ouvrage *théorie der Transformationsgruppen*, dans lequel il présente sa théorie des groupes de transformations ponctuelles comme suit : « si un groupe réel continu de l'espace à trois dimensions est transitif à six paramètres et si le groupe d'isotropie linéarisée de tout point est formé des rotations euclidiennes, alors ce groupe est équivalent, via une transformation ponctuelle réelle, soit au groupe des déplacements euclidiens de l'espace (x, y, z) ... ». Cf. MERKER, Joël. *Le problème de l'espace. Sophis Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*. 2010, *op.cit.*, p. 78.

La théorie psycho-psychologique de Poincaré prend ses racines à la fois dans les travaux de Helmholtz et de Lie. Cependant, comme il l'a lui-même signifié, il diffère de ces auteurs sur un point essentiel : « comme Lie, je crois que la notion plus ou moins inconsciente du groupe continu est la seule base logique de notre géométrie. Comme Helmholtz, je crois que l'observation des mouvements des corps solides en est l'origine psychologique. Mais je ne fais pas pour cela dériver la géométrie de l'expérience ; loin de là. Les expériences sur les solides n'ont été que l'occasion qui, parmi tous les groupes continus dont nous aurions pu faire une géométrie, nous a fait choisir le groupe euclidien, non comme le seul vrai, mais comme le plus commode ». Cf. POINCARÉ, Henri. *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même*. *Acta mathematica*, vol. 38, 1921, p. 127.

¹⁶⁴ NABONNAND, Philippe. Le conventionnalisme géométrique, une alternative radicale au réalisme spatial. Le contexte français du conventionnalisme géométrique de Poincaré. *Cahiers de philosophie de l'université de Caen*, 2008, n° 45. Disponible sur le web : <http://journals.openedition.org/cpuc/1293>; DOI : <https://doi.org/10.4000/cpuc.1293>.

Poursuivant les travaux de Helmholtz qui avaient mis en évidence la possibilité d'une représentation de la position des objets du monde sensible à partir des sensations, Poincaré répondait à cette question de manière positive dans sa genèse logique de 1898. Sa méthode consiste à partir du principe que même les sensations dépourvues de caractère spatial peuvent néanmoins nous conduire à la géométrie et à la notion d'espace grâce à une association des sensations motrices. Son argumentation se déploie à deux niveaux distincts : tout d'abord, Poincaré se situe à un niveau psychologique¹⁶⁵ afin de montrer comment l'esprit réalise des compensations en associant les diverses sensations motrices. Ensuite, il se situe à un niveau mathématique dès que les sensations motrices suggèrent le groupe mathématique des déplacements.

Examinons tout d'abord le premier niveau de la genèse logique de 1898. Poincaré commence par rejeter de manière systématique l'empirisme géométrique, qui attribuait un caractère spatial aux sensations. Bien qu'il soit convaincu (sans preuves scientifiques) que les sensations ne possèdent aucun caractère spatial¹⁶⁶, Poincaré leur accorde néanmoins un rôle significatif dans l'émergence de la géométrie. Cela soulève alors la question philosophique suivante : si les sensations ne possèdent aucun caractère spatial, comment ont-elles pu donner naissance aux concepts spatiaux et à la géométrie ? En d'autres termes, comment pouvons-nous construire l'espace géométrique à partir d'impressions non spatiales ? Poincaré aborde cette question en mettant en avant l'expérience sensori-motrice et la capacité de l'esprit à associer un ensemble de sensations de natures différentes. Il part du principe que les changements de position (également appelés déplacements) se distinguent des changements d'état. Cette distinction revêt une importance cruciale dans la genèse logique de 1898, car elle est essentielle

¹⁶⁵ Comme précisé plus haut en référence à l'interprétation de Heinzmann, le terme « psychologie » ne doit pas s'entendre au sens moderne du terme. Poincaré emploie ce terme pour insister sur les processus mentaux qui sont impliqués dans la constitution de la géométrie. À chaque fois que nous utiliserons le terme "psychologie" dans cette sous-section, c'est pour mettre en évidence la contribution de l'esprit humain dans la construction de la géométrie.

¹⁶⁶ C'est parce que les sensations n'ont aucun caractère spatial que selon Poincaré elles jouent un rôle prépondérant dans la genèse de la géométrie. Il n'en serait pas ainsi si les sensations comportaient des caractères spatiaux. En fait, les mouvements des sensations, constituant la phase pré-géométrique, sont en quelque sorte, une phase propédeutique vers l'espace géométrique. Ce qui veut dire que les sensations ne comportent pas en soi les caractères propres à l'espace géométrique. Il s'agit là d'une différence importante par rapport à l'approche de Mach, mais surtout par rapport à l'approche physiologique de Berthoz. Selon Mach, les propriétés de l'espace physiologique sont adaptées aux conditions biologiques et ce point de vue naturel se rapproche directement à la théorie physiologique de l'espace proposée par Alain Berthoz, selon laquelle l'espace représentatif est essentiellement biologique. Cette différence importante entre Poincaré et les cognitivistes sera discutée dans la troisième partie de notre travail.

pour passer des impressions sensorielles aux déplacements. Étant donné l'importance de cette distinction, il est crucial de comprendre précisément comment il est possible de distinguer un déplacement d'un changement d'état.

Pour illustrer clairement et simplement la différence entre ces deux types de changement, examinons brièvement deux exemples familiers de Poincaré. Dans le premier exemple, imaginons une sphère composée de deux hémisphères de couleurs différentes (bleu et rouge) qui tourne sur elle-même, exposant successivement l'hémisphère bleu et l'hémisphère rouge¹⁶⁷. Si nous souhaitons voir l'hémisphère bleu alors qu'il présente actuellement le rouge, nous pouvons volontairement nous déplacer pour nous positionner en face de l'hémisphère bleu. En d'autres termes, nous avons la possibilité de faire une rotation autour de la sphère et nous mettre à nouveau vis-à-vis de la sphère bleue qui nous intéresse. Dans ce cas, nous pourrions dire que nous avons rétabli nos sensations concernant l'hémisphère grâce à un changement interne qui implique des mouvements kinesthésiques, proprioceptifs et oculaires. Il est important de noter que ce type de changement est naturel et non conventionnel, car il se produit fréquemment dans la vie quotidienne¹⁶⁸.

Passons maintenant au deuxième exemple : au lieu d'une sphère qui tourne sur elle-même, nous supposons cette fois-ci un récipient contenant du liquide bleu et nous le soumettons à une réaction chimique pour le transformer en rouge¹⁶⁹. La réalité est toute autre : dans ce cas, nous sommes incapables de restaurer la couleur initiale du liquide par une rotation. Cela conduit aux définitions suivantes : les changements de position sont les changements externes qui peuvent être corrigés par un changement interne. Ces derniers sont volontaires et accompagnés de sensations musculaires. En revanche, les changements d'état sont des changements qui ne peuvent pas être corrigés par un changement interne. Selon Poincaré, la classe des changements de position est plus importante que celle des changements d'état, car les changements kinesthésiques, proprioceptifs et oculaires suggèrent le concept de groupe. C'est donc à la classe des changements de position que Poincaré consacre le reste de son exposé. Ils sont d'une telle importance qu'un être qui en serait dépourvu serait incapable de créer la

¹⁶⁷ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportuniste scientifique*. Berlin, publications des Archives Henri-Poincaré-Poincaré, 2002, p. 8.

¹⁶⁸ VUILLEMIN, Jules. Poincaré's Philosophy of space. In *Space, Time and Geometry*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1973, p. 163.

¹⁶⁹ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportuniste scientifique*. 2002, *op.cit.*, p. 9.

géométrie, même si ses sensations étaient variables et que les objets étaient mobiles autour de lui.

Poincaré propose une explication de la manière dont l'esprit effectue les compensations entre les changements internes et externes en se basant sur la distinction entre un déplacement et un changement d'état. Lorsqu'un changement externe est corrigé par un changement interne, on parle de compensation. Plus précisément, la compensation est un processus psychologique qui consiste à associer des séries de sensations identiques et à considérer qu'elles peuvent être corrigées par le même changement interne. Il convient de préciser que Chez Poincaré, l'opération psychologique consistant à associer les séries de sensations pour les altérer se déroule au niveau de l'inconscient. Selon Poincaré, cette opération d'association, ayant un caractère compensatoire, peut être répétée indéfiniment grâce à la loi d'induction itérative que nous avons étudiée dans le contexte de la construction des nombres. Cependant, une question se pose : quelles sont les conditions nécessaires pour que la compensation se produise ?

Poincaré avait répondu à cette question, en amont, dans son article *L'espace et la géométrie* en détaillant deux conditions essentielles. La première condition concerne la présence d'objets extérieurs ou de corps solides, tandis que la seconde condition fait référence aux organes sensoriels¹⁷⁰. Poincaré démontre dans cet article que la présence de corps solides est la première exigence pour effectuer une opération de compensation. Nous pouvons illustrer cela en examinant comment les mouvements des corps solides peuvent être compensés par les sensations du toucher et de la vue. Bien que les objets solides puissent changer de position ici et là, nous ne sommes pas encore capables de corriger les changements externes qu'ils induisent¹⁷¹, car cela requiert un contact physique avec ces objets solides. Ainsi, si la compensation des déplacements causés par les objets solides exige avant tout un contact physique ou haptique, la deuxième condition à remplir est l'existence d'un organe sensoriel qui correspond au sens du toucher.

Le sens du toucher joue un rôle essentiel dans l'exploration tactile, car il permet d'interagir avec des objets solides et de ressentir des sensations à travers nos gestes. Des études physiologiques ont démontré que le toucher englobe divers types de sensations liées à cette perception sensorielle. Ainsi, les sensations tactiles peuvent être cutanées (pression, vibration,

¹⁷⁰ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 84.

¹⁷¹ Poincaré fait une distinction entre le contact physique qui se fait par le toucher et le contact à distance qui se fait par l'œil. C'est par le toucher qu'il est possible de créer une relation avec l'objet. Une telle idée suppose que la compensation des déplacements des corps solides par les sensations tactiles n'est pas possible à distance.

température), proprioceptives (concernant la position du corps) ou kinesthésiques (relatives aux mouvements des membres)¹⁷². Lorsque notre corps entre en contact avec des objets solides par le biais du toucher, nous sommes en mesure d'effectuer différents types de mouvements pour corriger les changements de position subis par ces objets. Selon le principe de compensation, qui stipule qu'un changement externe peut être corrigé par un changement interne, notre corps peut réagir en modifiant sa position pour rétablir l'état initial des objets solides¹⁷³. Ce mouvement, qui représente une séquence kinesthésique, est effectué volontairement afin de rectifier les déplacements des objets solides, et il est considéré par Poincaré comme la phase pré-géométrique.

Pour comprendre comment les sensations rétiniennes liées à l'œil peuvent compenser les changements de position des objets solides, il suffit de généraliser le principe énoncé précédemment. En tant qu'organe responsable de la vision, l'œil joue également un rôle crucial dans la perception de la géométrie, en tant qu'il permet une évaluation rapide de la couleur, de la forme, des propriétés et des dimensions d'un objet. Contrairement à l'exploration tactile, qui se fait par le toucher, l'exploration visuelle se fait à distance. Lors de l'exploration visuelle, les sensations rétiniennes se produisent dès que les yeux perçoivent un objet en mouvement à distance. Par conséquent, les mouvements rapides des yeux, appelés saccades oculaires, lors de l'exploration visuelle des objets solides de l'environnement, jouent un rôle essentiel dans la compensation des changements de position de ces objets. Pour Poincaré donc, l'expérience nous apprend que les conditions de compensation peuvent se produire et c'est sur ce fait expérimental qu'il fonde la différence entre changement de position et changement d'état. Mais l'expérience présuppose déjà la géométrie¹⁷⁴. En effet, sans circularité, Poincaré peut dire que notre expérience suggère cette différence à partir de laquelle, transposée aux sensations non spatiales, il va construire les groupes correspondants aux géométries à courbure constante.

Après avoir expliqué le fonctionnement des changements de position dont la classe d'équivalence est appelée « déplacement », Poincaré se penche ensuite sur la question de savoir comment les déplacements forment un groupe. La compensation d'un déplacement est l'élément inverse et si deux changements A et B sont des déplacements, les changements A+B et B+A sont également des déplacements. C'est ce qui amène Poincaré à soutenir que «

¹⁷² LOWE, Jessica Mengaptche. *Sensations et perceptions visuelles et tactiles de matériaux texturés*. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2017, p. 11.

¹⁷³ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 85.

¹⁷⁴ *Idem*, p. 84.

l'ensemble des déplacements forme un groupe »¹⁷⁵. Selon Vuillemin, c'est à ce niveau que la conventionnalité de l'espace de Poincaré acquiert son premier sens, car le déplacement, tel que décrit par Poincaré, « *suppose la commutativité des compensations, et dit que si un membre d'un déplacement externe est compensé par un changement interne quelconque d'impressions, la compensation sera conservée par chaque membre du déplacement interne correspondant* »¹⁷⁶. Or, les propriétés des déplacements interprétées comme changements de position n'étant jamais exactes, Poincaré doit présupposer que le concept de groupe préexiste dans l'esprit¹⁷⁷.

Ensuite, Poincaré se penche sur la structure du groupe de déplacements. Cela marque le deuxième niveau de la genèse logique de 1898. À ce stade, Poincaré cherche à déduire mathématiquement les propriétés de l'espace géométrique, notamment la métrique qu'il obtient par l'étude des sous-groupes de Lie. Or les groupes de Lie sont des groupes continus. Comment obtenir cette continuité ? Poincaré considère la division indéfinie d'un déplacement mais reconnaît que les très petits déplacements sont inappréciables pour nous¹⁷⁸. Il est donc conduit à la formule suivante du continu physique : $9D = 10D$, $10D = 11D$, $9D < 11D$ [D : déplacement]. Selon Poincaré, une telle formulation suscite une répulsion du point de vue mathématique, et nous remplaçons le continu physique par le continu mathématique de premier ordre, qui correspond à l'idée d'une divisibilité indéfinie des transformations calquées sur l'ensemble des nombres rationnels et qui est plus conforme à notre esprit, et enfin par le continuum [réel] de second ordre donné "par d'autres expériences". Difficile à dire ce qu'il entend par « d'autres expériences ».

Selon Poincaré, notre expérience nous guide pour distinguer parmi les déplacements ceux qui conservent des sensations. Ces déplacements forment un sous-groupe et le nombre des sous-groupes est infini ; mais on peut les diviser en un nombre assez restreint de classes et ils ne sont pas tous perçus avec la même facilité¹⁷⁹. Ceux qui sont apparus le plus immédiatement sont les sous-groupes de rotations. Selon un résultat de Lie, les seuls groupes comportant certains sous-

¹⁷⁵ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in L'opportunisme scientifique. 2002, *op.cit.*, p. 10.

¹⁷⁶ VUILLEMIN, Jules. Poincaré's philosophy of space. 1973, *op. cit.*, p. 164.

¹⁷⁷ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 93.

¹⁷⁸ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in L'opportunisme scientifique. 2002, *op.cit.*, p. 13.

¹⁷⁹ *Idem*, p. 16.

groupes de rotation correspondent aux géométries euclidiennes, hyperbolique et elliptique.

Poincaré poursuit :

pour aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prenne la place du postulat des parallèles. La proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont interchangeables et qui est formé de toutes les translations¹⁸⁰.

Des trois sous-groupes de Lie retenus, le seul qui possède un sous-groupe commutatif de translations est le groupe qui s'accorde également suffisamment avec les propriétés des solides naturels et avec la géométrie euclidienne. On voit donc que le choix de la géométrie euclidienne est conditionné par l'imagination intuitive plus facile des translations.

Dans sa recherche sur la structure du groupe de déplacements, Poincaré poursuit son étude des sous-groupes qui le composent. À ce niveau, il distingue l'ordre d'un groupe (le nombre de paramètres dont dépend ce groupe) qui est une propriété formelle, et son degré (la dimension de l'espace sur lequel le groupe agit) qui est une propriété matérielle. Les groupes isomorphes ont toujours le même ordre. Selon les lois établies par Lie, notre groupe de déplacement est du sixième ordre. En effet, tout déplacement suffisamment petit peut être généré par six rotations infinitésimales. Néanmoins, le degré du groupe est encore inconnu. Poincaré propose par convention le groupe euclidien des mouvements rigides comme meilleure représentation du groupe des déplacements. Ce choix est motivé par le fait que le groupe euclidien possède un sous-groupe invariant (ou normal), le sous-groupe de toutes les translations. On rappelle que Poincaré considère le concept de groupe abstrait comme un élément *a priori* de notre entendement. Les déplacements, nous l'avons vu, correspondent à des changements dans nos impressions. Et si l'on distingue dans le groupe des déplacements la forme et la matière, la matière est ce qui a été la cause du déplacement et qui a modifié nos impressions. La matière serait alors représentée par autant de variables continues qu'il y a de fibres nerveuses, c'est-à-dire que son degré serait extrêmement grand. L'espace aurait un nombre indéterminé de dimensions.

Poincaré échappe à cette difficulté en remplaçant le groupe \mathfrak{D} des déplacements agissant sur l'ensemble des impressions qui nous est donné, par un groupe isomorphe dont la matière est plus simple. Il reste à savoir quel groupe choisir parmi tous les groupes isomorphes à \mathfrak{D} . De la capacité de notre entendement à former des groupes, nous connaissons les propriétés formelles du groupe \mathfrak{D} . La plus importante des propriétés formelles d'un groupe est l'existence de sous-

¹⁸⁰ *Idem*, p. 18.

groupes. Poincaré affirme que nous identifions alors certains sous-groupes du groupe principal de déplacements et reconnaissons que le sous-groupe conserve les points de l'espace. Il distingue trois catégories de sous-groupes : les sous-groupes de rotations (d'ordre 3), les sous-groupes hélicoïdaux (d'ordre 2) et les faisceaux rotatifs (d'ordre 1). Il considère l'action de transformations de \mathfrak{D} sur ces trois ensembles. Il conclut sans démonstration que dans le premier cas, la dimension de l'espace obtenu est 3, dans le second 4 et dans le dernier 5¹⁸¹.

Parmi ces trois espaces, le choix se porte naturellement sur l'espace tridimensionnel euclidien en raison de la simplicité des sous-groupes rotatifs qui le caractérisent. Il s'agit de l'espace le plus pratique à utiliser. Le passage suivant met en évidence les raisons supplémentaires pour lesquelles Poincaré préférerait l'espace tridimensionnel euclidien :

nous préférons la première parce qu'elle est la plus simple et elle est la plus simple parce qu'elle est celle qui donne à l'espace le nombre le plus petit de dimensions. Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix. Le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et indirectement. Le faisceau rotatif d'autre part n'est lui-même qu'un sous-groupe du sous-groupe rotatif¹⁸².

Dans cette explication, Poincaré souligne que la préférence accordée à l'espace tridimensionnel euclidien par rapport aux autres espaces est entièrement basée sur une convention, car cette préférence est motivée par la recherche de la commodité. La figure ci-dessous illustre les différentes étapes de la construction de l'espace géométrique dans la genèse logique.

¹⁸¹ Cependant, on trouve dans *The Problem of the Invariance of Dimension* de Dale Johnson une explication simplifiée de la façon dont Poincaré détermine le nombre de dimensions de l'espace géométrique. Chez Poincaré en fait, les déplacements se comportent comme un groupe d'ordre 6. Selon que nous prenons les différents transformés de ces sous-groupes, nous pouvons calculer mathématiquement le nombre de dimensions de l'espace de chaque sous-groupe, en effectuant une soustraction arithmétique consistant à chercher la différence entre le nombre de paramètres du groupe des déplacements et le nombre d'ordres du sous-groupe¹⁸¹. Pour les sous-groupes de rotations (d'ordre 3), on obtient un espace à 3 dimensions en faisant : $6 - 3 = 3$. Pour les sous-groupes hélicoïdaux (d'ordre 2), on obtient un espace de dimension 4 en faisant : $6 - 2 = 4$. Enfin, pour les faisceaux rotatifs (d'ordre 1), on obtient un espace de dimension 5 en faisant : $6 - 1 = 5$. Cf. JOHNSON, Dale M. *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology*, Part II in *Springer, Archive for History of Exact Sciences*, 1981, Vol. 25, No. 2/3 (1981), p. 98.

¹⁸² POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportunisme scientifique*. 2002, p. 20.

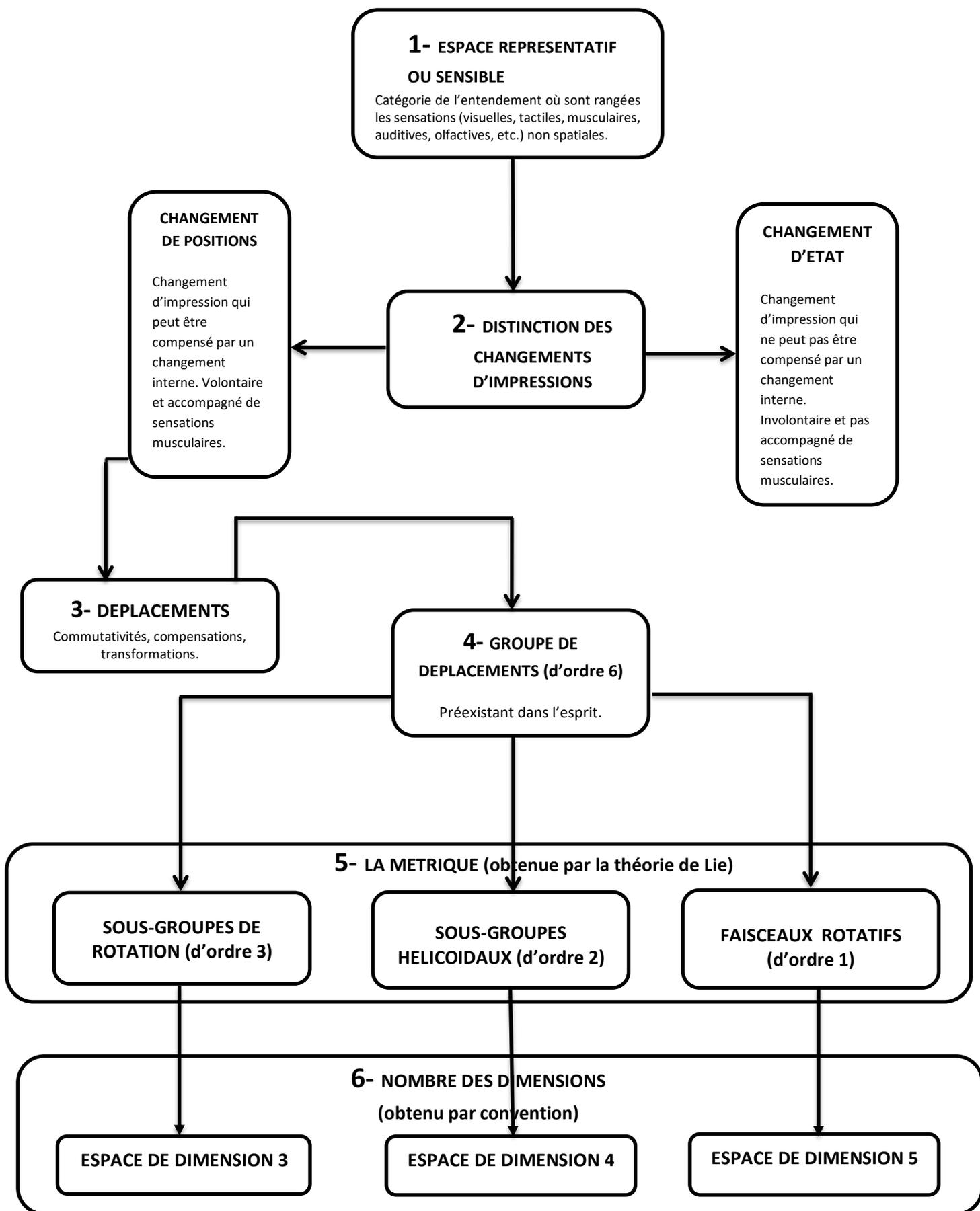


Figure 2 : les différentes étapes de la construction de l'espace d'après la genèse logique (1898)

Après avoir examiné le nombre de dimensions de l'espace et justifié la conventionnalité de la tridimensionnalité de l'espace euclidien, Poincaré se lance dans la définition du concept de point en se posant la question suivante : qu'est-ce qu'un point en mathématique. Pour cela, il faut, dit-il, partir de la comparaison des positions de deux objets par rapport à des axes indissociablement liés à notre corps. Ainsi, Poincaré part de la préoccupation de savoir comment nous déterminons si le point occupé par l'objet A à l'instant α est le même que le point occupé par l'objet B à l'instant β . Pour affirmer que l'objet B occupe la place que l'objet A occupait précédemment, deux conditions doivent être satisfaites :

1. Nous ne devons pas avoir bougé notre corps, notre tête ou nos yeux, et si l'image de l'objet B affecte les mêmes fibres rétiniennes que celles affectées précédemment par l'image de l'objet A.
2. Nous ne devons pas avoir bougé notre bras, notre main, ni les fibres sensorielles qui atteignent l'extrémité de notre doigt et qui nous ont d'abord transmis l'impression que nous associons à l'objet A. Ces mêmes fibres doivent maintenant nous transmettre l'impression que nous associons à l'objet B¹⁸³.

L'objet B occupe la place précédemment occupée par l'objet A, sous deux conditions essentielles. Ces conditions impliquent la vision d'un côté et le toucher de l'autre¹⁸⁴. En d'autres termes, la construction d'un point mathématique nécessite une connexion entre l'objet A et l'objet B. Selon Poincaré, cette connexion s'établit par le biais des mouvements des yeux et du toucher, c'est-à-dire par une association psychologique entre les sensations musculaires, tactiles et visuelles, plutôt qu'une connexion physique. Afin que l'objet B prenne la place de l'objet A, il est nécessaire d'associer les sensations rétiniennes liées à la vision avec les sensations tactiles liées au toucher. Ces deux types de sensations, bien qu'étant de nature différente, s'associent et se combinent pour donner naissance à la notion de point.

En résumé à la définition du point mathématique, Poincaré soutient que les sensations visuelles, olfactives, gustatives, auditives et tactiles jouent toutes un rôle dans la notion du point mathématique. Selon lui, sans l'association de ces différentes sensations, la notion de point ne pourrait exister. Ainsi, il suggère que le point mathématique émerge d'une expérience

¹⁸³ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportunisme scientifique*. 2002, *op. cit.*, p. 21.

¹⁸⁴ On se borne à présenter la condition qui fait intervenir à la fois le toucher et l'œil conformément à notre objectif qui est de montrer l'association sensori-motrice entre les sensations rétiniennes et les sensations visuelles.

multisensorielle. Par conséquent, la géométrie se construit à partir de cette expérience multisensorielle et d'un processus mental où l'esprit doit faire des compensations entre les différents types de sensations. On peut donc conclure que, selon Poincaré, l'esprit humain interagit avec les données sensorielles et motrices du monde réel pour donner naissance à la géométrie et à la notion d'espace. Cependant, la question qui se pose est de savoir si l'espace géométrique ainsi reconstruit est-il identique à l'espace géométrique ? Nous examinerons cette question dans la prochaine sous-section.

II-2- L'espace géométrique et l'espace sensible

L'analyse qui précède pourrait nous faire penser que l'espace sensible est identique à l'espace des géomètres. Dans la genèse logique de 1898 (qui reprend la plupart des idées développées dans les articles de 1891 et 1895), Poincaré était catégoriquement opposé à une telle opinion. Bien que l'espace géométrique soit construit à partir de l'espace représentatif (non-spatial), Poincaré établit une stricte démarcation entre ces deux types d'espace. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est d'examiner les raisons qui motive une telle distinction. La question que nous allons donc examiner est la suivante : pourquoi, selon Poincaré, l'espace géométrique diffère-t-il et est-il distinct de l'espace sensible ou représentatif ?

Dans ses écrits, Poincaré présente l'espace géométrique comme le cadre spatial dans lequel se déroulent tous les phénomènes de la géométrie mathématique. Autrement dit, c'est l'espace dans lequel les opérations géométriques ont lieu, celui sur lequel travaillent les mathématiciens ou les géomètres. À maintes reprises, Poincaré a affirmé que cet espace, bien que construit à partir de l'expérience et des sensations, est différente de l'espace sensible, car c'est l'esprit humain qui le construit avec ses capacités préexistantes. Cet espace a les propriétés suivantes :

1° il est continu

2° il est infini

3° il a trois dimensions ;

4° Il est homogène, c'est-à-dire que tous ces points sont identiques entre eux

5° il est isotrope, c'est-à-dire que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles¹⁸⁵.

Il est important de ne pas confondre l'espace géométrique, caractérisé par sa continuité, son infinité, sa tridimensionnalité, son isotropie et son homogénéité, avec l'espace représentatif

¹⁸⁵ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 78.

qui correspond à la catégorie ou au cadre spatial dans lequel nous classons nos sensations. Cette définition de l'espace sensible correspond parfaitement à la description donnée par Poincaré dans ce passage :

voilà la (...) catégorie à laquelle nos sensations sont rapportées. On peut se la représenter comme composée d'un grand nombre de systèmes absolument indépendants les uns des autres. De plus, elle nous permet seulement de comparer entre elles des sensations de même espèce et non de les mesurer, de percevoir qu'une sensation est plus grande qu'une autre sensation, mais non qu'elle est deux fois plus grande ou trois fois plus grande. Combien une telle catégorie diffère de l'espace du géomètre ! Dirons-nous que le géomètre introduit une catégorie tout à fait de la même espèce lorsqu'il emploie trois systèmes tels que les trois axes de coordonnées ?¹⁸⁶

Dans ce passage, Poincaré souligne la grande différence qui existe entre l'espace sensible et l'espace géométrique. L'espace géométrique est défini à partir de l'espace sensible, alors que l'espace sensible est le cadre de la représentation des sensations musculaires, visuelles, tactiles, etc. Poincaré établit une autre différence plus importante entre l'espace représentatif et l'espace géométrique. Selon lui, ces deux espaces n'ont pas la même dimension : l'espace représentatif ou sensible possède autant de dimensions que nous avons des fibres de nerfs. En revanche, l'espace géométrique possède trois dimensions (par convention). En plus de leurs dimensions différentes, l'espace sensible présente d'autres figures spatiales à savoir l'espace visuel, l'espace tactile et l'espace moteur, eux-mêmes générés par l'œil, le toucher et les muscles. Dans *La science et l'hypothèse*, Poincaré s'intéresse à l'examen de la différence entre les propriétés de ces espaces et celles de l'espace géométrique. Ce sont ces différences que nous présenterons, dans un premier temps, avant de répondre à la question posée ci-dessus. Dès lors, la description et l'étude des propriétés de ces trois figures spatiales s'avèrent nécessaires pour bien comprendre la façon dont ils diffèrent de l'espace géométrique.

La première figure de l'espace représentatif ou sensible examinée par Poincaré est l'espace visuel, qu'il présente comme étant l'espace perçu par l'œil, lorsqu'il fixe un objet dont l'image se forme sur le fond de la rétine¹⁸⁷. Peut-on dire que l'espace visuel a les mêmes propriétés que l'espace géométrique ? Poincaré évoque deux raisons principales pour montrer que les propriétés de l'espace visuel diffèrent de celles de l'espace géométrique. La première raison qu'il évoque concerne la propriété de continuité et le problème sous-tendant est le suivant : l'espace visuel peut-il être considéré comme étant continu au même titre que l'espace géométrique ? À première vue, l'espace visuel semble continu, car notre perception de l'espace

¹⁸⁶ POINCARÉ, Henri. *Des fondements de la géométrie (1898)* in *L'opportunisme scientifique*. 2002, *op.cit.*, p. 6.

¹⁸⁷ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op.cit.*, p. 78.

visuel est généralement perçue comme fluide et continue. Cependant, en y regardant de plus près, il apparaît discontinu. En effet, il suffit de porter une attention plus soutenue pour se rendre compte qu'un objet est perçu par l'œil, grâce à la lumière, dans une zone limitée et close. Cela explique pourquoi le champ visuel devient de plus en plus restreint à mesure que l'on s'éloigne des rayons lumineux ou solaires, ou même simplement de l'objet observé. Ce constat démontre que l'appareil visuel est incapable de percevoir correctement un objet à une certaine distance, mais également en l'absence de la lumière solaire. De telles limitations du système visuel font de l'espace visuel un espace clos, limité et donc fini.

Passons maintenant à la notion de continuité elle-même. Affirmer que l'espace visuel est continu signifie que l'on peut déplacer un point de manière continue et le rapprocher avec une précision infinie d'un autre point sans altérer sa structure. Cependant, pour réaliser ce type de déplacement continu, il est nécessaire que l'espace visuel comprenne, dans son système spatial, des éléments spatiaux tels que des points, des lignes, des plans, des cercles, des longueurs, des mesures, et ainsi de suite. Est-ce bien le cas dans l'espace visuel ? Est-il possible de déplacer continûment un point dans l'espace visuel sans qu'il puisse être distingué des autres points ? D'ailleurs, quels sont exactement les éléments spatiaux qui composent l'espace visuel ?

Si nous examinons ces questions du point de vue mathématique en considérant que l'espace visuel est constitué de pixels, il devient évident que nous parviendrons rapidement à la conclusion que l'espace visuel est discontinu, étant donné qu'il ne possède pas véritablement les éléments spatiaux tels que le plan, le point, la droite, la distance, l'égalité, la mesure, etc., nécessaires pour être considéré comme continu. La position défendue par Poincaré selon laquelle l'espace visuel est dépourvu de la propriété de continuité était fondée sur la notion de mesure, qu'il considérait comme la caractéristique fondamentale de l'espace géométrique. Ainsi, il n'était pas d'accord avec l'idée selon laquelle l'espace visuel est continu car il lui manque cet élément précieux qu'est la mesure¹⁸⁸. Cependant, des chercheurs ont récemment entrepris de montrer, à travers leurs travaux, que l'espace visuel peut être considéré comme un continuum. Parmi eux, Ludovic Soutif a repris la question du caractère continu et des éléments spatiaux de l'espace visuel. Ses recherches se basent sur les travaux linguistiques de Ludwig Wittgenstein, qui, pourtant, avait systématiquement opposé, tout comme Poincaré, la géométrie

¹⁸⁸ Nous préférons aborder la loi de Fechner concernant la mesure des sensations un peu plus loin.

visuelle qui s'intéresse aux données visuelles à la géométrie physique qui se concentre sur les corps rigides de l'espace physique, en se basant sur une analyse grammaticale claire¹⁸⁹.

L'analyse menée par Soutif¹⁹⁰ comporte deux volets. Dans le premier, il cherche à décrire les bases de la grammaire de la géométrie visuelle, en tentant de créer un champ lexical spécifique à ce domaine, indépendamment du champ lexical habituel de la géométrie euclidienne¹⁹¹. Et dans le second volet, il montre comment les concepts de point, de distance, d'égalité, de cercle peuvent être appliqués à la géométrie visuelle, une fois que le lexique grammatical de celle-ci est établi. L'une des thèses soutenues par Soutif qui retient particulièrement notre attention dans cette analyse est celle stipulant que les sensations visuelles forment plusieurs espaces entre elles. Selon lui, cela explique pourquoi l'espace visuel peut être considéré comme un « *continuum à plusieurs dimensions* »¹⁹². Il convient de rappeler que la continuité exprime la propriété de succession de points dans l'espace sans interruption. Afin qu'un système soit considéré comme continu, il doit être possible de passer d'un point quelconque du système à un autre point tout aussi quelconque, par une série d'éléments consécutifs, de sorte que chaque point ne puisse être distingué du point précédent¹⁹³. L'affirmation de Soutif selon laquelle l'espace visuel est un continuum à plusieurs dimensions revient à dire que les sensations visuelles forment un continuum semblable au continuum physique évoqué par Wittgenstein et probablement au continuum mathématique évoqué par Poincaré¹⁹⁴.

Il est tentant d'explorer l'idée selon laquelle l'espace visuel forme un continuum, car cela pourrait laisser penser que l'espace visuel est physiquement continu. En effet, la vision

¹⁸⁹ Voir *Tractatus logico-philosophicus* et *Carnets bleus* de Ludwig Wittgenstein.

¹⁹⁰ SOUTIF, Ludovic. *Wittgenstein et le problème de l'espace visuel : phénoménologie, géométrie, grammaire*, Paris, J. Vrin, 2011.

¹⁹¹ Dans ce nouveau lexique de la géométrie visuelle proposé par Soutif, les éléments spatiaux sont décrits comme les points, distance, cercle, égalité, etc. mais prennent des significations différentes. Par exemple, au lieu de dire des points, on dira des étoiles ; au lieu de dire le cercle, on dira le cercle visualisé (ou cercle rapproché) ou encore, au lieu de dire deux segments sont égaux dans l'espace visuel, on dira que deux segments semblent ou paraissent égaux sans l'être réellement. Cf. SOUTIF, Ludovic. *Wittgenstein et le problème de l'espace visuel : phénoménologie, géométrie, grammaire*. 2011, op. cit., p. 240.

¹⁹² *Idem*, p. 15.

¹⁹³ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, op. cit., p. 59.

¹⁹⁴ Wittgenstein oppose l'espace visuel à l'espace physique à partir de leur objet d'étude. Comme nous l'avons mentionné, l'espace visuel s'occupe des données visuelles, alors que l'espace physique s'occupe des données rigides du monde physique. Visiblement, l'espace physique renvoie à l'espace géométrique dans l'analyse de Wittgenstein. Or dans la classification de Poincaré, l'espace visuel est rangé dans la même catégorie que l'espace physique, les deux étant tous formés par la catégorie brute des sensations. Ce qui conduit Poincaré à séparer le continu physique et le continu mathématique. (Nous détaillerons ce point de vue plus loin).

binoculaire semble suggérer que l'espace visuel est continu. Cependant, il est important de noter qu'il existe une grande différence entre les objets présents dans cet espace et ceux de l'espace géométrique. Les objets de la géométrie visuelle sont des objets perçus empiriquement par le champ visuel, tandis que les objets de la géométrie mathématique sont des objets idéaux et non empiriques. De plus, si nous nous penchons sur la considération de Soutif selon laquelle les sensations visuelles forment un continuum multidimensionnel, cela soulève la question du nombre de dimensions de cet espace visuel. En d'autres termes, combien de dimensions possède l'espace visuel ? Bien que Soutif n'aborde pas directement cette question, on peut supposer que l'espace issu du continuum multidimensionnel est clairement un espace à dimensions multiples, ce qui le distingue totalement de l'espace euclidien tridimensionnel.

Compte tenu du lien entre la continuité et l'homogénéité, poursuivons notre examen du point de vue de Soutif pour déterminer si ces deux propriétés sont compatibles dans l'espace visuel. En d'autres termes, les points du continuum visuel sont-ils homogènes ? Pour un instant, adoptons le point de vue de Soutif selon lequel l'espace visuel forme un continuum et voyons si ce continuum visuel est homogène comme le continuum mathématique, c'est-à-dire si les points de la géométrie visuelle sont tous identiques entre eux, comme en géométrie mathématique. L'homogénéité en géométrie mathématique fait référence à la possibilité de déplacer n'importe quel point vers n'importe quel autre point en raison de leur identité. Si nous tentons de réaliser de tels déplacements de points dans l'espace visuel, nous constatons que celui-ci n'est pas homogène, car il est constitué de petits points discrets. Cela signifie que les points qui se forment sur la rétine ne sont pas tous identiques d'un point de la rétine à un autre.

La tache jaune ne peut à aucun titre être regardée comme identique à un point du bord de la rétine. Non seulement en effet le même objet y produit des impressions beaucoup plus vives, mais dans tout cadre limité le point qui occupe le centre du cadre n'apparaîtra pas comme identique à un point voisin de l'un des bords¹⁹⁵.

Nous observons que les points dans notre champ visuel sont hétérogènes, ce qui confirme que l'espace visuel diffère complètement de l'espace géométrique. Dans l'espace géométrique, la continuité et l'homogénéité vont généralement de pair, au point qu'on ne peut en avoir un sans l'autre. Un espace homogène est donc nécessairement continu, car une catégorie homogène ne peut pas être discontinue. Cependant, dans l'espace visuel, nous constatons une sorte de perte d'homogénéité, ce qui signifie que le caractère continu de l'espace visuel est privé de son complément, à savoir l'homogénéité présente dans l'espace géométrique. Ainsi, étant donné que

¹⁹⁵ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 78.

les points dans l'espace visuel ne sont pas homogènes, nous pouvons conclure que la continuité de l'espace visuel est simplement une illusion¹⁹⁶.

La deuxième raison avancée par Poincaré pour montrer la différence entre l'espace visuel et l'espace géométrique concerne la propriété d'isotropie. Un espace isotrope est un espace qui possède les mêmes propriétés dans toutes les directions. Autrement dit, ses propriétés demeurent identiques quelle que soit la transformation subie. En ce qui concerne l'espace visuel, la question se pose de savoir si sa tridimensionnalité peut être considérée comme étant isotrope. En d'autres termes, l'espace visuel possède-t-il toujours trois dimensions ? Poincaré répond négativement à cette question en affirmant que la tridimensionnalité de l'espace visuel est obtenue de manière artificielle, grâce à la loi de compensation qui est essentiellement un phénomène expérimental¹⁹⁷. Pour justifier son point de vue, il explique que l'espace visuel est originellement bidimensionnel et que la troisième dimension qui s'ajoute aux deux premières n'est en aucun cas naturelle, car elle est le résultat de l'accommodation et de la convergence des yeux¹⁹⁸. En constatant que la tridimensionnalité de l'espace visuel n'est pas naturelle, parce que la troisième dimension ne semble pas jouer « *le même rôle que les deux autres* »¹⁹⁹, Poincaré refuse à l'espace visuel la propriété d'isotropie.

La deuxième forme d'espace représentatif examinée par Poincaré est l'espace tactile, qui est perçu par le toucher ou les doigts de la main. Comme nous l'avons vu précédemment, le toucher est principalement un sens sensoriel qui fonctionne par le biais d'actions digitales ou gestuelles. Tout comme l'œil, le toucher est un organe perceptif grâce auquel nous explorons l'espace par le biais de perceptions tactilo-kinesthésiques, de mouvements, d'orientations, etc. Si le système tactile est capable de générer l'espace, il convient d'examiner si l'espace tactile possède les mêmes propriétés que l'espace géométrique. Tout d'abord, nous devons déterminer si l'espace tactile est naturellement tridimensionnel.

¹⁹⁶ *Idem*, p. 79.

¹⁹⁷ « *Va-t-on dire que c'est l'expérience qui nous apprend que l'espace a trois dimensions, puisque c'est en partant d'une loi expérimentale que nous sommes arrivés à lui en attribuer trois ? Mais nous n'avons fait là pour ainsi dire qu'une expérience physiologique ; et même comme il suffirait d'adapter sur les yeux des verres de construction convenable pour faire cesser l'accord entre les sentiments de convergence et d'accommodation, allons-nous dire qu'il suffit de mettre des besicles pour que l'espace ait quatre dimensions et que l'opticien qui les a construites a donné une dimension de plus à l'espace ? Évidemment non, tout ce que nous pouvons dire c'est que l'expérience nous a appris qu'il est commode d'attribuer trois dimensions à l'espace. Mais l'espace visuel n'est qu'une partie de l'espace, et dans la notion même de cet espace, il y a quelque chose d'artificiel...* ». Cf. POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 76.

¹⁹⁸ *Idem*, p. 79.

¹⁹⁹ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 79.

Dans l'analyse de la sous-section précédente, nous avons vu que chez Poincaré, la tridimensionnalité de l'espace euclidien s'obtient à partir de la théorie des groupes de déplacements et des hypothèses conventionnelles. Dans ses écrits ultérieurs à la genèse logique (1898), Poincaré entreprend une extension de son conventionnalisme géométrique en montrant que la tridimensionnalité de l'espace tactile, tout comme celle de l'espace visuel, résulte d'un ensemble de faits expérimentaux. (Nous reviendrons en détail sur cet aspect dans la sous-section consacrée à la genèse évolutionniste).

Continuons notre étude des propriétés de l'espace tactile en nous demandant si le continuum physique issu des sensations musculo-tactiles est identique au continuum mathématique. Les travaux de Gustav Fechner (1860) sont souvent mentionnés dans ce contexte, car il a établi une nouvelle science appelée la psychophysique, dans laquelle il a cherché à « *mesurer uniquement les phénomènes psychophysiques qui résultent des impressions exercées par le monde physique sur les organes sensoriels et qu'il appelle les sensations* »²⁰⁰. En s'appuyant principalement sur les travaux physiologiques d'Ernst Weber sur la sensibilité tactile, la psychophysique de Fechner tente de formuler une loi mathématique capable de décrire les sensations tactiles. Conscient que la sensation ne peut être directement mesurée, Fechner contourne cet obstacle en décrivant la mesure des sensations musculaires à travers les relations qui relient l'excitation aux sensations, car c'est par le biais de l'excitation qu'il est possible de mesurer la sensation. Ainsi, la loi psychophysique (ou loi de Fechner) qu'il a formulée décrit la sensation (S) comme le logarithme de l'excitation (I) ($S = K \log I$, où I est l'intensité de la sensation, S est la grandeur du stimulus, K est une constante et log est la fonction logarithme en mathématiques)²⁰¹. Étant donné que la loi de Fechner décrit la mesure des sensations musculaires en relation avec l'excitation, le continuum physique qui en découle a été rapidement considéré comme équivalent au continuum mathématique. Cependant, une telle considération hâtive nous amène à nous poser la question suivante : le continuum mathématique est-il dérivé de la catégorie brute des sensations ?

Dans un chapitre dédié à la création du continu mathématique dans son ouvrage intitulé *La science et l'hypothèse*, Poincaré a formulé des observations critiques en réponse à la loi logarithmique de Fechner. Il a même identifié une contradiction mathématique jusqu'alors

²⁰⁰ NICOLAS, Serge et FERRRAND, Ludovic. Introduction historique : psychophysique sensorielle in Ludovic Ferrand et al. *La psychologie Moderne*. Bruxelles, De Boeck supérieur, 2003, p. 168.

²⁰¹ NICOLAS, Serge et FERRRAND, Ludovic. Introduction historique : psychophysique sensorielle in Ludovic Ferrand et al. *La psychologie Moderne*. 2003, *op.cit.*, p. 164.

inaperçue. Explorons son raisonnement pour comprendre en quoi la loi logarithmique de Fechner est contradictoire d'un point de vue mathématique.

Si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait pas non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A = B, B = C, A < C$$

Qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique. Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique²⁰².

En raison de cette contradiction mathématique, Poincaré établit une distinction entre, d'un côté, le continuum mathématique où les transformations de la géométrie mathématique s'opèrent, et de l'autre côté, le continuum physique (représenté par la loi de Fechner) où les transformations de la géométrie physique ont lieu. L'inadéquation qui semble induire la contradiction frappante est liée, dit Poincaré, à l'imperfection de nos organes sensoriels. En établissant une séparation entre ces deux continus, le continuum mathématique échappe à la catégorie brute des sens par le fait qu'il est une création de l'esprit humain, préservant ainsi son authenticité en tant que modèle standard du système géométrique. « *Séparant nos sensations de ce quelque chose que nous appelons leur cause, nous admettons que le quelque chose en question se conforme au modèle que nous portons en nous et que nos sensations s'en écartent seulement à cause de leur grossièreté* »²⁰³.

Les critiques virulentes formulées par Joseph Delboeuf et Ewald Hering à l'égard de la formule logarithmique de Fechner rejoignent les arguments avancés par Poincaré. Dans leurs travaux psycho-physiques directement liés à la loi de Fechner, ces deux psycho-physiciens ont démontré que la loi de Fechner est insoutenable du point de vue mathématique lorsqu'il s'agit de déterminer la position exacte du point zéro sur une échelle de mesure incluant les sensations négatives et positives. Dans son article intitulé *La loi psycho-physique : Hering contre Fechner*, où il souscrit aux critiques soulevées par Hering, Delboeuf exprime ce qui suit :

*la loi de Fechner est insoutenable au point de vue mathématique. Elle entraîne des conséquences absurdes, et la manière dont elle est établie ne procure pas à l'esprit une idée bien nette de ce que peut être la quantité d'une sensation, ni par conséquent, elle peut être représentée par un nombre, etc.*²⁰⁴.

²⁰² POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op.cit.*, p. 51.

²⁰³ Henri POINCARÉ, *Des fondements de la géométrie (1898)* in L'opportunisme scientifique. 2002, *op.cit.*, p. 14.

²⁰⁴ DELBOEUF, Joseph. La loi psycho-physique : Hering contre Fechner. *Revue philosophique de la France et de l'étranger*. Paris, Presse Universitaire de France, 1877, p. 241.

Les critiques émanant de ce psycho-physicien soutiennent largement les observations critiques de Poincaré, renforçant ainsi sa position qui distingue le continuum mathématique du continuum physique.

Cependant, Torretti a (en 1978) remis en question l'interprétation de Poincaré concernant les relations entre les sensations tactiles. Dans son ouvrage intitulé *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare*, il reproche à Poincaré d'avoir mal interprété la loi logarithmique de Fechner en traduisant maladroitement l'indiscernabilité perceptive des sensations tactiles par le symbole mathématique d'équivalence " $=$ "²⁰⁵. Selon Torretti, cette interprétation erronée de l'indiscernabilité perceptive est la raison pour laquelle Poincaré a idéalisé le continuum mathématique pour le distinguer du continuum physique. En effet, soit les déplacements, en tant que classes d'équivalence des changements de position, sont considérés comme un continuum physique et " $=$ " comme une égalité approximative, soit comme des éléments mathématiques et " $<$ " n'est pas justifié. Ainsi, les déplacements semblent n'être en réalité ni un continuum physique ni un continuum mathématique au sens standard. Et de fait, en 1912, la continuité n'est pas considérée comme le résultat, mais comme une règle d'organisation des sensations. Contrairement à la vague de transitivité de la compensation de la locomotion, la "continuité mathématique" n'est plus une convention que la sous-détermination empirique rend possible. Reste à nous demander si le continuum physique, dérivé des sensations musculo-tactiles, possède des caractéristiques d'homogénéité.

Pour répondre à cette question, nous examinerons l'étude physiologique des caractéristiques générales du système somesthésique²⁰⁶. Cette étude a révélé que les sensations haptiques ne sont pas homogènes en raison du fait que les informations sensorielles se trouvent dans différentes couches de la peau. Il est évident que les sensations tactiles ne constituent pas une entité homogène²⁰⁷. Par conséquent, on peut en déduire que l'espace tactile n'est pas homogène et que le continuum physique sur lequel cet espace opère est très différent du

²⁰⁵ TORRETTI, Roberto. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht, Reidel Publishing Company, Holland, 1984, p. 345.

²⁰⁶ Le système somesthésique désigne un des systèmes sensoriels de l'organisme. La somesthésie est l'ensemble constitué de différentes sensations (pression, chaleur, douleur...) qui proviennent de plusieurs régions du corps (peau, tendons, articulations, viscères...). Ces sensations sont élaborées à partir des informations fournies par de nombreux récepteurs sensitifs du système somatosensoriel, situés dans les tissus de l'organisme (mécanorécepteurs du derme et des viscères, fuseaux neuromusculaires des muscles, fuseaux neurotendineux des tendons, plexus de la racine des poils...). Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Somesth%C3%A9sie>.

²⁰⁷ GENTAZ, Édouard. Caractéristiques générales de l'organisation anatomo-fonctionnelle de la perception cutanée et haptique. *Psychologie et sciences de la pensée*, Presse Universitaire de France, 2000, p. 19.

continuum mathématique. Il est préférable d'examiner le caractère isotrope de l'espace tactile en relation avec l'espace moteur. Mais qu'entend-on par espace moteur ?

L'espace moteur se réfère à un espace de motricité plus précis, engendré par une combinaison de sensations musculaires, telles que les articulations, les tendons, les membranes musculaires, les biceps du bras, la peau et les muscles. Pour analyser les propriétés de l'espace moteur par rapport à l'espace géométrique, nous pouvons suivre une approche similaire à celle des deux figures spatiales précédentes. Tout d'abord, nous devons nous demander si l'espace moteur, dérivé des sensations musculaires, est tridimensionnel. Lorsque nous avons examiné l'espace tactile, nous avons souligné que sa tridimensionnalité ne pouvait être obtenue sans l'utilisation de la loi de compensation et d'hypothèses conventionnelles. En appliquant un raisonnement similaire ici, nous pouvons conclure que, sans la loi de compensation et des hypothèses conventionnelles, l'espace moteur aurait autant de dimensions que le nombre de muscles que nous possédons²⁰⁸. Cela indique déjà que l'espace moteur diffère de l'espace géométrique, car sa tridimensionnalité ne se produit pas naturellement, mais plutôt par convention.

Étant donné que l'espace moteur est intrinsèquement lié à l'espace tactile par le biais des muscles, nous pouvons appliquer l'analyse menée précédemment concernant la propriété d'homogénéité de l'espace tactile à l'espace moteur, afin de déterminer si ce type d'espace est homogène. Par conséquent, on en déduit que l'espace moteur n'est pas homogène. De même, on en déduit que le continuum physique qui découle des sensations musculaires diffère du continuum mathématique. Reste maintenant à déterminer si l'espace moteur est isotrope. Pour ce faire, nous devons examiner si le sentiment de direction qui accompagne les sensations musculaires implique que l'espace moteur est isotrope. En d'autres termes, est-ce que le sens de direction qui accompagne les mouvements musculaires conserve les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace moteur ?

Pour répondre à cette question, examinons l'analyse du sentiment de direction réalisée par Poincaré dans son essai *Des fondements de la géométrie* (1898). Dans certains passages de cet essai, Poincaré remet en question la théorie naïve du sentiment de direction, selon laquelle certaines de nos sensations sont toujours accompagnées d'un sentiment de direction, et que «*la notion de direction serait préexistante à toute sensation visuelle ou musculaire et en serait*

²⁰⁸ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 81.

même la condition »²⁰⁹. Ce point de vue a été utilisé pour soutenir l'idée selon laquelle l'espace moteur est isotrope, car il suppose que le sens de la direction qui accompagne les sensations musculaires est constant. Examinons ce point de vue en nous basant sur plusieurs expériences physiologiques. Des expériences physiologiques ont montré que nos organes moteurs, tels que les muscles, les tendons, les biceps du bras, les articulations, etc., fournissent des informations sur des états qui varient²¹⁰. L'idée sous-jacente à cette observation physiologique est que la direction des mouvements musculaires n'est pas constante, car nos organes moteurs produisent des sensations de directions diverses. Cette première observation nous permet déjà d'affirmer que l'espace moteur issu des sensations musculaires n'est pas isotrope.

Bien que cette observation physiologique fournisse déjà une réponse à notre question concernant l'isotropie de l'espace moteur, elle reste insuffisante. Examinons brièvement, à l'aide d'autres expériences physiologiques, comment les sensations musculaires peuvent varier dans différentes directions, même lorsque l'organe moteur est immobile. Plusieurs physiologistes²¹¹ ont étudié les sensations produites par les organes moteurs. Leurs études ont révélé que lorsque nous sommes immobiles, différentes sensations se manifestent dans certaines parties de notre corps, notamment les tendons, les biceps du bras et les articulations. Ces sensations sont principalement causées par des chocs mécaniques ou des excitations électriques provenant de l'extérieur. Cependant, il arrive parfois qu'elles soient provoquées de l'intérieur par les organes moteurs eux-mêmes²¹², ce qui indique que ces organes génèrent régulièrement des sensations même en état d'immobilité.

Dans son article intitulé *Le sens musculaire*, Victor Henri relate une expérience menée sur un bras maintenu immobile pendant une longue période, dans le cadre de l'étude des sensations ressenties pendant l'immobilité des organes moteurs. Cette expérience physiologique révèle qu'en cas d'immobilité d'un organe moteur dans n'importe quelle position, deux types de sensations variables émergent en fonction de la position du sujet : (1) des séries de sensations visuelles motrices et tactiles, et (2) des idées qui se forment dans l'esprit du sujet et qui se connectent aux sensations qu'il éprouve. Cette expérience démontre qu'en maintenant un bras

²⁰⁹ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in L'opportunisme scientifique. 2002, *op.cit.*, p. 6.

²¹⁰ HENRI, Victor. Revue générale sur le sens musculaire. *L'année psychologique*, 1898, vol. 5. Disponible sur le web : www.persee.fr/doc/psy_0003_5033_1898_num_5_1_3059.

²¹¹ STEINBUCH, Johann Georg. *Beitrag zur Physiologie der Sinne, Nuremberg*: J. L. Schrag, 1811 et Thomas BROWN, *Lectures on the philosophy of the human mind*, vol. I, 1820.

²¹² HENRI, Victor. Revue générale sur le sens musculaire. *L'année psychologique*. 1898, vol. 5. Disponible sur le web : www.persee.fr/doc/psy_0003_5033_1898_num_5_1_3059.

immobile pendant quelques minutes, des sensations visuelles et musculaires provenant de l'œil et du bras peuvent varier. De même, les idées présentes dans l'esprit du sujet, associées à ses sensations, peuvent également varier. Il est donc important de prendre en compte deux types de sensations différents qui peuvent varier à tout moment lorsque nos organes sont immobiles : (1) les sensations provenant des organes moteurs et (2) les idées présentes dans l'esprit du sujet qui se mêlent aux sensations. C'est à cette fusion d'idées et de sensations, qui se produit souvent lorsque nous sommes dans une position immobile, que Poincaré assimilait au « sentiment de direction »²¹³. Cette observation minutieuse de la physiologie remet en question l'hypothèse selon laquelle le sentiment de direction est toujours constant. En se rendant compte que les sensations musculaires prennent des directions différentes en fonction de la position de notre corps, Poincaré s'opposait à l'idée que le sentiment de direction confère à l'espace moteur un caractère isotrope. Il serait erroné de penser que le sens de direction, associé aux sensations musculaires, est immuable ou homogène. Par conséquent, l'espace moteur et l'espace tactile, tous deux liés par les muscles, ne sont pas isotropes.

Après avoir examiné attentivement ces trois figures spatiales, il apparaît clairement qu'aucune d'entre elles ne possède simultanément toutes les propriétés de l'espace géométrique. Nous avons observé que la tridimensionnalité de l'espace tactile et visuel est obtenue grâce à des hypothèses conventionnelles. Étant donné que l'espace moteur, l'espace visuel et l'espace tactile sont tous des espaces issus des sensations sensorielles et ne possèdent donc pas naturellement de propriétés spatiales, nous pouvons affirmer avec Poincaré que ces trois espaces sont dépourvus des propriétés d'homogénéité, de continuité, d'isotropie et de tridimensionnalité.

À partir de notre analyse des propriétés des trois figures de l'espace représentatif, nous pouvons désormais répondre à la question initiale de cette sous-section en expliquant les raisons pour lesquelles Poincaré faisait une distinction stricte entre l'espace géométrique et l'espace représentatif ou sensible. Il est important de rappeler que Poincaré avait pour objectif, dans sa genèse logique de 1898, d'esquisser un procédé de reconstruction de la géométrie basée sur la théorie des groupes de transformations, qui est perçue comme un concept préexistant à notre

²¹³ Dans *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 81, Poincaré disait la chose suivante : « *ce que je vois, c'est que les sensations qui correspondent à des mouvements de même direction sont liées dans mon esprit par une simple association d'idées. C'est à cette association que se ramène ce que nous appelons « le sentiment de direction ».* ».

esprit. La stricte séparation introduite par Poincaré entre l'espace géométrique et l'espace sensible est donc étroitement liée à la nécessité de distinguer la forme de la matière. La forme, qui correspond au concept général de groupe de déplacements, est créée de toutes pièces par l'esprit, tandis que la matière est le domaine sur lequel les opérations tournent. Paola Cantù a tout à fait raison lorsqu'il affirme que « *Poincaré nie la condition que la possibilité abstraite d'une géométrie soit soumise à l'accord complet avec l'espace représentatif, qui sert de cadre à nos sensations et à nos représentations* »²¹⁴. En effet, Poincaré construit l'espace géométrique à partir de la catégorie des sensations brutes, qu'il corrige au fur à mesure par les lois de groupes, parce qu'il accordait à la forme une primauté épistémologique au détriment de la matière. Ainsi, il a été conduit à écrire : « *pour moi (...) la forme existe avant la matière* »²¹⁵. Il était donc clair que pour Poincaré, le concept de groupe de déplacements, détaché de toute référence à l'expérience, préexiste à la matière. La distinction poincaréenne entre l'espace géométrique et l'espace sensible s'explique également par le fait que les propriétés de l'espace géométrique, bien qu'elles soient suggérées par l'espace sensible à l'esprit, fonctionnent de manière autonome par rapport à l'expérience sensorielle et peuvent être étudiées de manière purement logique et mathématique. L'espace géométrique se distingue par son invariance sous certaines transformations. En d'autres termes, ses propriétés restent inchangées, peu importe les déplacements, rotations ou réflexions dans l'espace. En revanche, notre perception sensible de l'espace peut être influencée par des facteurs tels que l'échelle, l'angle de vue et les caractéristiques individuelles de chaque observateur.

Il est nécessaire d'explorer d'autres explications afin de mieux comprendre la distinction poincaréenne entre ces deux types d'espaces. Le concept de continu mathématique, qui est une création de l'esprit, s'oppose systématiquement au continu physique, qui est dérivé des organes sensoriels. Cette distinction a été établie par Poincaré pour deux raisons principales. D'une part, il y a des considérations visant à rapprocher du continu mathématique le modèle empirique à la base du continu physique. D'autre part, il y a une préoccupation pour préserver le continuum mathématique des contradictions présentes dans les données empiriques. Telle est la seconde raison qui a conduit à la distinction établie par Poincaré entre l'espace physique et l'espace géométrique. Cette distinction est nécessaire car le continuum mathématique qui sous-tend

²¹⁴ CANTU, Paola. Le concept d'espace chez Véronèse. *Philosophia Scientiæ*. 2009, n° 13-2. Disponible sur le web : URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/299>.

²¹⁵ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportunisme scientifique*. 2002, *op. cit.*, p. 30.

l'espace géométrique obéit à des lois mathématiques, tandis que le continuum physique qui sous-tend l'espace physique obéit à la loi logarithmique de Fechner. Il existe donc une ligne de démarcation importante entre ces deux continus. Par exemple, dans le continuum physique, chaque élément consiste en un « ensemble d'impressions sensorielles »²¹⁶, tandis que dans le continuum mathématique, les éléments sont des « corps idéaux abstraits » issus de l'esprit²¹⁷.

À la source de la distinction entre l'espace géométrique et l'espace représentatif, il y a l'idée que le groupe opère sur deux sortes d'éléments : une fois sur nos sensations, une fois sur des éléments abstraits. C'est pourquoi l'espace engendré par nos organes sensoriels ne possédera pas les mêmes propriétés que l'espace géométrique²¹⁸. En substance, ce que Poincaré entend exprimer, c'est que l'espace sensible suggère davantage les propriétés de l'espace géométrique plutôt qu'il ne les réalise. Cela se produit lorsque le groupe opère à la fois sur nos organes sensoriels (tels que les yeux, le toucher, le nez, les oreilles, les muscles, etc.) et sur les éléments empruntés à l'esprit. Comme on peut le constater, la distinction poincaréenne entre l'espace géométrique et l'espace sensible se justifie par le fait que le cadre spatial du premier est issu de l'esprit, tandis que le cadre spatial du second provient de l'expérience.

Dans cette optique, il est possible d'établir un lien entre la distinction poincaréenne des espaces géométrique et sensible et la distinction platonicienne des mondes intelligible et sensible²¹⁹. L'examen mené jusqu'ici montre que, chez Poincaré, l'espace sensible correspond

²¹⁶ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 62.

²¹⁷ POINCARÉ, Henri. La science et l'hypothèse. 2000, *op. cit.*, p. 93.

²¹⁸ Cet « *espace (...) ne sera jamais ni infini, ni homogène, ni isotrope* ». Cf. POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportunisme scientifique*. 2002, *op.cit.*, p. 7.

²¹⁹ Le rapprochement de Poincaré à Platon s'explique par le fait que les notions géométriques sont des réalités immuables, invariables et éternelles chez Platon. Ces caractéristiques géométriques présentent une similarité avec les caractéristiques d'homogénéité et d'isotropie (invariabilité) de l'espace géométrique de Poincaré. Aussi, Platon soutenait que la géométrie n'étudie ni ce qui naît, ni ce qui périt, car elle n'étudie pas les figures en tant que telles, mais les réalités auxquelles elles se rapportent et dont elles ne sont que des copies. Ce qui veut dire que les réalités géométriques ne sont pas perçues par les sens, mais par l'intellect. C'est à cet effet qu'il écrit : « *ceux qui s'appliquent à la géométrie [...] se servent de figures visibles et raisonnent sur elles en pensant non pas à ces figures mêmes, mais aux originaux qu'elles reproduisent ; leurs raisonnements portent sur le carré en soi, non sur la diagonale qu'ils tracent, ainsi du reste* ». PIETTRE, Bernard. PLATON. *République*. Livre VII. Préface de Pierre Aubenque, Paris, Les intégrales de la philo/ Nathan, 2009.

De manière analogue, Poincaré soutient qu'il est impossible de se représenter les objets dans l'espace géométrique. À preuve, lorsque l'on essaie de représenter le soleil et les planètes qui gravitent autour de lui dans l'espace, nous nous contentons malheureusement de représenter les sensations visuelles que nous éprouvons, c'est-à-dire qu'on se contente de reproduire les sensations que nous éprouvons, parce que nous sommes dans l'incapacité de représenter les objets de l'univers géométrique. Cf. *Des fondements de la géométrie (1898)* in *L'opportunisme scientifique*. 2002, *op. cit.*, p. 8. Ainsi pour Poincaré, les objets géométriques sont des objets idéaux et non des figures que nous dessinons sur le tableau ou sur le papier. De ce point de vue, Poincaré se

à notre expérience sensorielle de l'espace, c'est est en quelque sorte une image défigurée de l'espace géométrique²²⁰, tandis que l'espace géométrique fait référence à une notion abstraite de l'espace, indépendante de notre perception sensorielle. Chez Platon, le monde sensible correspond au monde que nous percevons par nos sens. C'est un monde d'apparences changeantes. En revanche, le monde intelligible fait référence au monde des essences ou des Idées, accessible uniquement par la raison et la contemplation intellectuelle. Le monde intelligible étant séparé du monde sensible, qui est une reproduction dénaturée du monde intelligible, Platon présente la dialectique comme méthode permettant essentiellement à l'âme de quitter le monde des apparences sensibles pour s'élever à l'idée du Bien. Ce processus de conversion consiste à débarrasser l'âme des erreurs issues des sensations pour l'élever à des Idées²²¹. Tel chez Platon, l'homme doit quitter, par la dialectique, le monde sensible pour s'élever au monde des Idées, tel chez Poincaré, l'homme doit quitter, par l'intermédiaire du groupe des déplacements, l'espace sensible pour s'élever à l'espace géométrique²²². Si le passage du monde sensible au monde intelligible est bien connu de tous, en raison de la célébrité de la théorie des Idées de Platon, le passage de l'espace sensible à l'espace géométrique l'est encore beaucoup moins. C'est pourquoi il est nécessaire de donner plus de détails sur ce passage, en présentant ce qu'on pourrait appeler les différentes étapes de la formation de l'esprit géométrique. Alors, comment passe-t-on de l'espace représentatif ou sensible à l'espace géométrique dans la théorie psycho-physiologique de l'espace de Poincaré ?

En se référant aux *Fondements de la géométrie* (1898), on peut observer que le passage de l'espace sensible à l'espace géométrique présuppose plusieurs étapes. Tout d'abord, (1)

range du côté des idéalistes, mais cela ne veut pas dire qu'il est réaliste. D'ailleurs dans son article portant sur les cantoriciens et les pragmatistes, il prend parti pour l'idéalisme et rejette le réalisme soutenu par les logicistes : « ceux que j'ai appelé les pragmatistes sont des idéalistes, les cantoriciens sont des réalistes » Cf. POINCARÉ, Henri. *Dernières pensées*. 1917, *op.cit.*, p. 157-158.

²²⁰ Cette interprétation s'appuie sur cette affirmation de Poincaré : « L'espace représentatif n'est qu'une image de l'espace géométrique, image déformée par une sorte de perspective, et nous pouvons nous représenter les objets qu'en les pliant aux lois de cette perspective ». Cf. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 82.

²²¹ Chez Platon, les Idées ou les formes intelligibles sont les réalités immuables et universelles, indépendantes des intellects qui les perçoivent. Cf. BRISSON, Luc et PRADEAU, Jean-François. *Le vocabulaire de Platon*, Paris, Ellipses, 1998, p. 26.

²²² « Comment nous pourrions nous élever de cette catégorie, que nous pouvons appeler l'espace sensible, à l'espace géométrique ». POINCARÉ, Henri. *Des fondements de la géométrie* (1898) in *L'opportuniste scientifique*. 2002, *op. cit.*, p. 6. C'est au fond la question que tente de résoudre Poincaré. Ce passage est à la fois technique et conventionnel. Il exige, selon lui, de concevoir l'espace représentatif comme une occasion nécessaire à l'esprit humain pour comparer les changements d'impressions (internes / externes). Il exige également de concevoir, par convention, que les changements internes forment un groupe de déplacements, qui est une forme d'espace intermédiaire entre l'espace sensible et l'espace géométrique.

Poincaré suppose que nous faisons l'expérience de deux changements distincts : les changements d'état qui sont les changements externes, non corrigeables par des changements internes et les changements de position qui sont les changements externes corrigeables par des changements internes. Selon Poincaré, les changements de position offrent l'opportunité de passer conventionnellement aux classes d'équivalence des déplacements, qui forment un groupe du point de vue mathématique. Le passage des sensations aux déplacements n'est pas strictement une abstraction, mais il se réalise par une décision conventionnelle. Dans la perspective de Poincaré, ces groupes de déplacements jouent le rôle d'un espace intermédiaire entre l'espace sensible et l'espace géométrique. Poincaré explique ce phénomène abstrait par le biais de la convention.

Ensuite, (2) il suppose que les multiples déplacements effectués par un individu lors de l'exploration spatiale constituent des groupes de déplacements. Même si à ce stade l'individu est capable de former plusieurs groupes de déplacements, il ne possède pas encore la capacité de comprendre pleinement ce qu'est la géométrie mathématique, car il ne sait « *pas encore ce que c'est qu'une direction ni même ce que c'est un point* »²²³. (3) La connaissance de ces objets idéaux nécessite un autre niveau de convention concernant les propriétés formelles des groupes de transformations, notamment la continuité et la distinction entre les sous-groupes rotatifs, les sous-groupes hélicoïdaux et les faisceaux. Arrivé à ce stade abstrait, on suppose que l'individu a définitivement quitté l'espace sensible pour accéder à l'espace géométrique, dont la dimension est obtenue par convention. Pour le savoir, il suffit de constater que l'individu ne raisonne plus comme au stade pré-géométrique, où il se contentait de se représenter des sensations, mais son raisonnement porte dorénavant sur les objets idéaux (comme des sous-groupes). C'est là une différence entre l'individu dont le raisonnement est influencé par la catégorie de l'espace représentatif et celui qui s'est élevé à l'espace géométrique. Les différentes étapes que nous venons ainsi de présenter prouvent que l'espace géométrique est effectivement séparé de la catégorie de l'espace représentatif ou sensible, qui est considéré par Poincaré parfois comme catégorie intellectuelle (1898) parfois comme espace empirique (1903).

Le lien entre la distinction de Platon et celle de Poincaré réside dans le fait que ces deux distinctions mettent en évidence la dualité entre la réalité telle que nous la percevons à travers

²²³ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in L'opportuniste scientifique. 2002, *op. cit.*, p. 12.

nos sens et la réalité supposée existante indépendamment de notre perception. Ces deux conceptions soulignent la limite de notre perception sensorielle et la possibilité d'une réalité plus profonde ou d'une connaissance plus objective qui n'est pas directement accessible par nos organes sensoriels. Cependant, il est important de ne pas confondre la construction de Poincaré sur la relation entre espace géométrique et espace représentatif avec les idées de Platon : la théorie des Idées de Platon traite de la nature de la réalité et de la connaissance, en faisant une distinction entre le monde sensible et le monde intelligible, tandis que la distinction entre l'espace géométrique et l'espace sensible de Poincaré concerne notre compréhension de l'espace en tant que concept mathématique abstrait et en tant qu'expérience sensorielle subjective.

En résumé, dans la théorie spatiale de Poincaré, l'espace géométrique se distingue strictement de l'espace sensible, dont ses corollaires spatiaux sont l'espace tactile, l'espace visuel et l'espace moteur. Deux raisons principales expliquent cette distinction. En premier lieu, l'espace sensible se distingue de l'espace géométrique parce qu'il acquiert sa structure (continuité, métrique, dimensionnalité) par l'association sensori-motrice. Dans l'espace visuel par exemple, rien ne nous prédisposait à lui attribuer trois dimensions, c'est simplement parce que nous « *avons l'expérience de l'harmonie contingente entre nos sensations musculaires d'accommodation et de convergence que nous attribuons trois dimensions à notre espace visuel* »²²⁴. Ce procédé d'association sensori-motrice est à peu près conforme à l'espace tactile, avon-nous vu.

En second lieu, l'espace sensible (dans son interprétation empirique) se distingue de l'espace géométrique parce que le continu physique sur lequel cet espace opère repose sur la loi psycho-physique de Fechner qui est tirée des sensations musculaires, contrairement à l'espace géométrique qui opère sur un continu mathématique qui est une forme de notre entendement. Cependant, c'est l'espace sensible qui suggère les propriétés de la continuité, l'homogénéité, l'infinité, l'isotropie et la tridimensionnalité que l'esprit humain réalise dans l'espace géométrique. Bien que l'espace géométrique et l'espace représentatif soient séparés, ils possèdent néanmoins les groupes des déplacements en commun, car selon Poincaré, les

²²⁴ VUILLEMIN, Jules. L'espace représentatif selon Poincaré. In Jean-Louis GREFFE, Gerhard HEINZMANN, and Kuno LORENZ, *Henri Poincaré. Philosophie et science / Philosophy and Science / Philosophie und Wissenschaft*, Berlin / Paris / Berlin, Albert Blanchard/ Akademie Verlag, 1996, p. 283.

groupes de transformations peuvent opérer suivant les mêmes lois avec des matières différentes en vertu de leurs isomorphismes²²⁵.

II-3- La genèse psychologique de la géométrie selon Poincaré (1903) : le continu physique comme structure intuitive

Nous allons maintenant présenter la seconde version de la théorie psycho-physiologique de la géométrie, développée par Poincaré entre 1903 et 1912. Comme mentionné précédemment, la modification majeure apportée par Poincaré concernait la dimension de l'espace. Nous allons principalement nous concentrer sur la manière dont Poincaré aborde cet aspect crucial de la géométrie dans sa seconde théorie spatiale. Il est intéressant de rappeler que dans sa genèse logique en 1898, Poincaré établissait le nombre de dimensions de l'espace en se basant sur le concept de groupe de déplacements. Son argument reposait sur le fait que l'espace euclidien possède trois dimensions car les expériences indiquent que les sous-groupes de rotations (d'ordre 3) se combinent avec les déplacements (d'ordre 6) pour former un espace à trois dimensions. Cependant, Poincaré réalise quelques années plus tard que son choix conventionnel de la géométrie euclidienne reposait subrepticement sur la classification des groupes de Lie opérant sur les espaces tridimensionnels²²⁶. Il se rend compte que sa théorie spatiale de 1898 était vicieusement circulaire par rapport à la tridimensionnalité de l'espace. C'est pour trouver une explication non circulaire de la tridimensionnalité de l'espace que Poincaré modifie sa conception de la continuité à partir de 1903, en introduisant la notion de "coupure" dans l'étude du continu physique. Ainsi, l'examen de la dimension de l'espace par le biais de la considération topologique du continu physique et des coupures constitue l'un des changements significatifs apportés par Poincaré en 1903.

L'argument clé défendu par Poincaré dans cette seconde genèse est que nous attribuons à l'espace par convention trois dimensions, parce qu'il est commode d'attribuer au continu physique trois dimensions, bien que nous ayons l'intuition du continu d'un quelconque nombre de dimensions. En d'autres termes, la tridimensionnalité de l'espace est désormais considérée comme par Poincaré comme un élément intuitif lié au continu physique. L'objectif de cette

²²⁵ POINCARÉ, Henri. Des fondements de la géométrie (1898) in *L'opportunisme scientifique*. 2002, *op.cit.*, p. 18.

²²⁶ NABONNAND, Philippe. Le conventionnalisme géométrique, une alternative radicale au réalisme spatial. Le contexte français du conventionnalisme géométrique de Poincaré, *op. cit.*, p. 79.

partie est de décrire comment Poincaré entreprend, de manière expérimentale, la construction de l'espace à 3 dimensions selon la structure intuitive du continu physique.

Comme mentionné précédemment, Poincaré a dû modifier sa théorie spatiale en raison de la circularité qu'il avait découverte dans sa détermination de la dimension en 1898. Cependant, il y avait d'autres raisons qui le poussaient à revoir sa théorie. L'une de ces raisons était la publication de *Die Grundlagen der Geometrie* par Hilbert, mais c'est surtout la polémique que ce mathématicien avait engagée avec Russell et Couturat concernant les géométries qualitatives et quantitatives qui l'a contraint à reconsidérer sa théorie spatiale. En effet, l'engagement épistémologique de ces deux logiciens pour fonder la géométrie sur les axiomes logiques présageait la fin du psychologisme. Poincaré ne pouvait pas ignorer la manière dont Russell et Couturat développaient, chacun de leur côté, leurs programmes. Il a donc amélioré sa théorie axée sur la psychologie et la physiologie, afin de contester à la fois la conception « logique » de la géométrie défendue par Russell et Couturat, ainsi que l'approche formaliste de Hilbert.

Ainsi, dans son article de 1903²²⁷, il s'éloigna de la théorie des groupes héritée de Lie pour examiner le problème de la dimension de l'espace sous l'égide de *l'Analysis Situs*. Cependant, Poincaré n'a pas abandonné les autres éléments de la genèse logique de 1898. Comme nous le découvrirons prochainement, les idées fondamentales de la genèse logique, telles que les hypothèses sensationnistes et conventionnalistes, sont manifestement préservées. Dans un autre article publié en 1907, Poincaré poussa son conventionnalisme vers une perspective évolutionniste en intégrant les dimensions ontogénétique (c'est-à-dire l'évolution de l'individu) et phylogénétique (c'est-à-dire l'évolution de l'espèce humaine) dans sa théorie spatiale. Dans cet article, Poincaré s'efforça de relier l'origine psychologique et génétique dans la recherche de la genèse de la géométrie, en tentant d'expliquer comment s'opère l'adaptation d'un individu à l'espace tridimensionnel euclidien au cours de son évolution post-natale. Étant donné que cette deuxième théorie spatiale de la genèse psycho-physiologique possède une saveur de génétique empirique, Heinzmann l'a désignée sous le nom de genèse évolutionniste en référence à la théorie darwinienne de l'évolution²²⁸.

²²⁷ POINCARÉ Henri. L'espace et ses trois dimensions. *Revue de métaphysique et de morale* 11, 1903, p. 281-301.

²²⁸ HEINZMANN, Gerhard. Poincaré : philosophe et géomètre. *Image des Mathématiques*. CNRS, 2010. Disponible sur le web : <http://images.math.cnrs.fr/Poincare-philosophe-et-geometre.html>. fahal-00527106f.

Dans le but d'expliquer l'origine de la géométrie en prenant en compte à la fois l'aspect génétique et l'évolution des individus pratiquant cette discipline, Poincaré se questionnait sur l'influence du développement ontogénétique et de l'évolution phylogénétique dans la détermination du nombre de dimensions de l'espace. Bien qu'il n'ait pas approfondi cet aspect biologique faute de ressources scientifiques à son époque, il soutenait néanmoins que la phylogenèse joue un rôle plus important que l'ontogenèse dans ce domaine. Son argument reposait sur le fait que l'évolution de l'espèce humaine nous contraint à nous adapter à l'espace tridimensionnel euclidien, un héritage légué par nos ancêtres. En réalité, Poincaré ne parvenait pas à concevoir comment un individu, dès sa naissance, plongé dans un monde euclidien et habitué depuis son enfance à l'espace tridimensionnel, pourrait soudainement renoncer à cet espace ancestral pour s'adapter à un espace non-euclidien. Notre préférence pour l'espace tridimensionnel euclidien plutôt que l'espace non-euclidien est en grande partie liée à l'habitude. Poincaré supposait ainsi que la tridimensionnalité de l'espace était en partie le résultat de l'évolution de l'espèce humaine. Tel était l'idée maîtresse de l'article de son article de 1907.

Dans un autre article qu'il publia en 1912²²⁹, Poincaré revient sur l'analyse de la dimension de l'espace lié à *l'Analysis Situs* dans le but de montrer l'importance des coupures et du continu physique dans la détermination du nombre de dimensions de l'espace géométrique. Il revisite ainsi sa théorie spatiale afin de clarifier ses idées présentées dans son article de 1903. En nous appuyant sur l'analyse développée dans ces trois articles, mais surtout dans ceux de 1903 et 1912, nous allons tenter d'expliquer le processus de construction de l'espace à 3 dimensions à partir des sensations tactiles du toucher. La question qui nous intéresse est la suivante : comment les sensations musculaires liées au toucher peuvent-elles contribuer à la construction de l'espace tridimensionnel ?

Nous devons maintenant montrer comment Poincaré évite la circularité présente dans la première genèse et basée sur le fait que la théorie des groupes de transformations de Lie est fondée sur le \mathbb{R}^3 . Il fonde maintenant la dimension de l'espace sur la notion de continu physique et celle de coupure²³⁰. Mais qu'entend-t-on exactement par un continu physique à n dimension dans la seconde théorie psychologique de Poincaré ?

²²⁹ POINCARÉ, Henri. Pourquoi l'espace a trois dimensions, article publié dans la *Revue de métaphysique et de morale*, T. 20, n° 4, 4 juillet 1912, p. 483-504. Cet article est repris dans *Dernières pensées*.

²³⁰ Cette seconde théorie de Poincaré est fondée sur la topologie ou *l'Analysis situs*. Différente de la géométrie métrique et de la géométrie projective, *l'Analysis situs* est la branche des mathématiques qui traite des propriétés invariantes d'une figure déformée de façon continue. L'espace tridimensionnel qui sera construit plus loin doit être regardé comme un espace possédant des propriétés qualitatives ou topologiques.

Il est important de préciser que la conception du continu à n dimension proposée par Poincaré dans sa seconde genèse psychologique diffère à la fois de celle des cantoriciens²³¹ et de la définition analytique du continu. Selon la définition analytique, « un continu à n dimension est un ensemble de n coordonnées, c'est à dire un ensemble de n quantités susceptibles de varier indépendamment l'une de l'autre et de prendre toutes les valeurs réelles satisfaisantes à certaines inégalités »²³². Bien que cette définition soit irréprochable du point de vue mathématique, elle ne satisfait pas pourtant Poincaré, parce qu'elle se contente de faire une juxtaposition des coordonnées sans montrer « qu'elles sont liées entre elles de façon à former les divers aspects d'un tout »²³³. Ainsi, la définition du continu physique qu'il retient est déduite à partir des données immédiates de nos sens. Il s'exprime par les relations suivantes : $A = B$, $B = C$, $A < C$ ²³⁴. Dans cette formule, nous pouvons observer qu'il peut arriver souvent que deux éléments du système d'impressions soient indiscernables s'ils sont trop proches l'un de l'autre (c'est ce qui s'exprime de manière ambiguë par la formule $A = B$), et nous constatons que des fois deux éléments du système d'impressions peuvent être distingués l'un de l'autre (c'est ce qui s'exprime par $A < C$), bien qu'ils soient indiscernables d'un même troisième élément (c'est ce qui s'exprime par $B = C$)²³⁵. Lorsque ces trois cas se produisent simultanément, on dit que l'ensemble d'impressions forme un continu physique.

Pour déterminer le nombre de dimensions du continu physique, il est nécessaire d'introduire la notion de coupure. Considérons pour cela que les éléments A et B sont deux éléments discernables du continu physique que nous désignerons par C , et supposons une suite d'éléments E_1, E_2, \dots, E_n appartenant tous à ce même continu C , de telle sorte que chacun d'eux soit indiscernable du précédent, que E_1 soit indiscernable de A et E_n indiscernable de B ²³⁶, nous dirons alors que A et B sont reliés entre eux, et si nous pouvons trouver deux éléments quelconques qui satisfont à cette condition, nous dirons que le continu est d'un seul tenant. Afin de pouvoir discerner quelques éléments parmi tous les éléments du système d'impressions du continu C , on introduit maintenant les coupures. Pour obtenir des coupures, on prend de manière

²³¹ Pour construire un continu à n dimension selon les mathématiciens cantoriciens, il faut « faire correspondre un à un les points d'une droite à ceux d'un plan, ou, plus généralement, à ceux d'un continu à n dimensions à ceux d'un continu à p dimensions ». C'est ce procédé que conteste Poincaré. Cf. POINCARÉ, Henri. Dernières pensées. 1917, *op. cit.*, p. 63.

²³² POINCARÉ, Henri. Dernières pensées. 1917, *op. cit.*, p. 64.

²³³ *Idem*, p. 64.

²³⁴ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 61.

²³⁵ *Idem*, p. 62.

²³⁶ *Ibidem*

quelconque des éléments du continu C de sorte à ce qu'ils soient tous discernables les uns des autres ou formant eux-mêmes un ou plusieurs continus²³⁷. Ce qui veut dire que les éléments qui seront pris arbitrairement parmi les multiples éléments du système d'impressions C qui pourront soit, être distingués des autres éléments du système d'impressions C , soit former eux-mêmes un ou des continus seront appelés des coupures.

Pour savoir les conditions de subdivision du continu physique C , reprenons sur le continu C deux éléments A et B , de telle sorte qu'ils soient deux éléments extrêmes et que chaque terme de la suite E_1, E_2, \dots, E_n soit indiscernable du précédent²³⁸. Parmi les éléments E_1, E_2, \dots, E_n qui relient continûment les éléments A et B , s'il y a un ou plusieurs éléments qui passent par un élément de la coupure, on les considérera comme des éléments indiscernables des éléments de la coupure. Si par contre, il y a des éléments qui ne passent par aucun élément de la coupure, ils seront considérés comme des éléments discernables des éléments de la coupure²³⁹. Envisageons maintenant que toutes les suites des éléments E_1, E_2, \dots, E_n qui relient les éléments A à B passent toutes par la coupure, de sorte à séparer le point A du point B , on dira, dans ce cas, que la coupure divise le continu C . Dans le cas contraire où nous ne trouvons pas deux éléments qui soient séparés par la coupure, on dira que la coupure ne divise pas C ²⁴⁰.

Avec ces conditions relatives à la subdivision du continu, nous pouvons maintenant chercher à déterminer le nombre de dimensions d'un quelconque continu physique. Poincaré en donne la définition inductive suivante : « un continu a n dimensions quand on peut le décomposer en plusieurs parties en y pratiquant une ou plusieurs coupures qui soient elles-mêmes des continus à $n-1$ dimensions »²⁴¹. Appliquons cette définition inductive de la dimension au continu physique. Pour trouver un continu physique C à 1 dimension, il suffit de considérer comme des coupures un certain nombre d'éléments tous discernables les uns des autres, et qui ne forment pas entre eux-mêmes ni un continu ni plusieurs continus. Pour trouver un continu physique C à 2 dimensions, il suffit de considérer comme des coupures un certain nombre d'éléments qui forment un continu à 1 dimension. Et enfin, pour trouver un continu physique C à 3 dimensions, il suffit de considérer comme des coupures un certain nombre d'éléments qui forment un continu à 2 dimensions. Cette définition inductive de la dimension

²³⁷ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 62.

²³⁸ *Ibidem*

²³⁹ *Idem*, p. 78.

²⁴⁰ *Ibidem*

²⁴¹ POINCARÉ, Henri. Dernières pensées. 1917, *op.cit.*, p. 67.

va permettre à Poincaré de donner une meilleure explication de la dimension de l'espace sans tomber dans un cercle vicieux.

La figure 2 ci-dessous présente les différentes étapes de la construction du continu physique que nous venons de présenter.

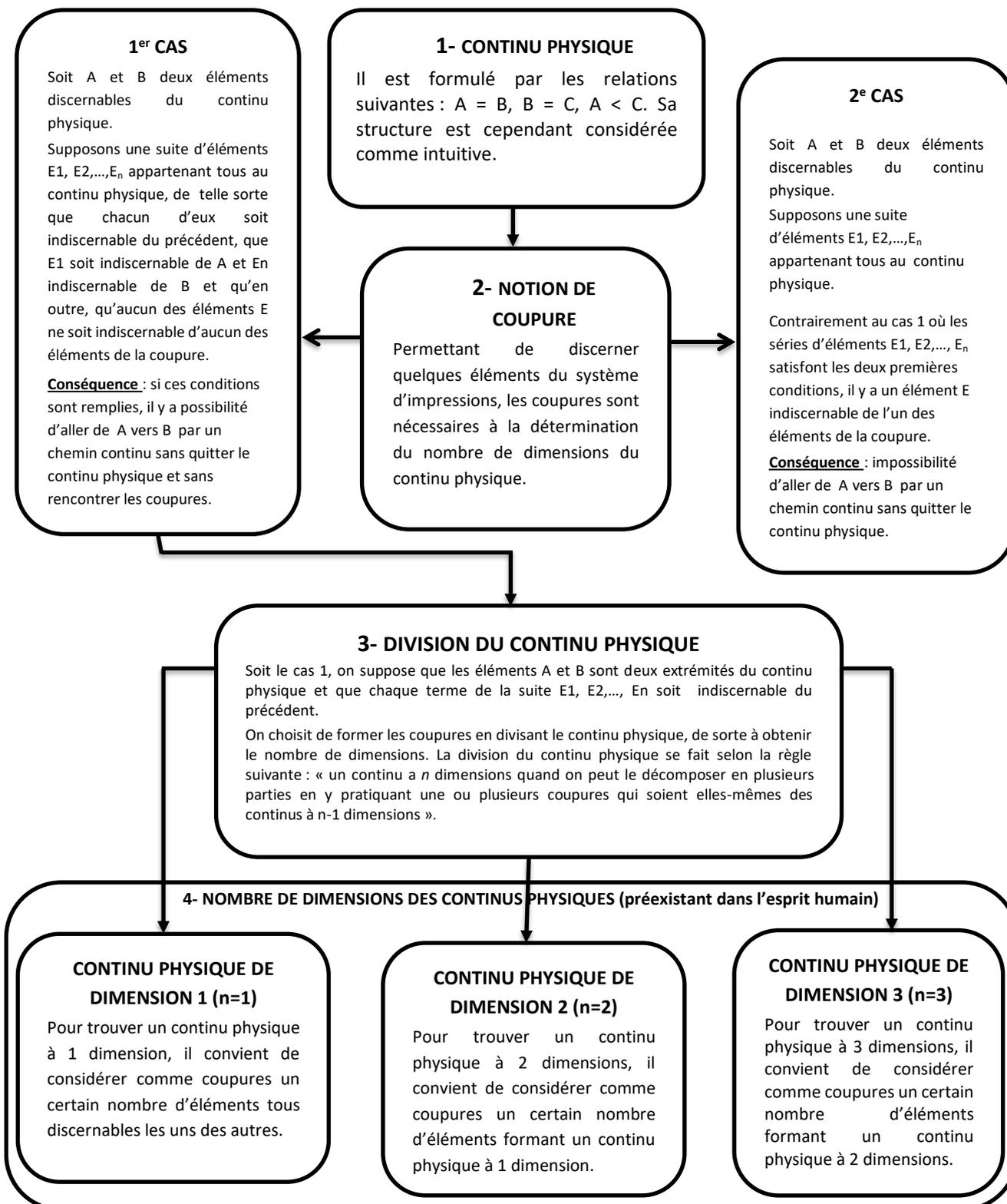
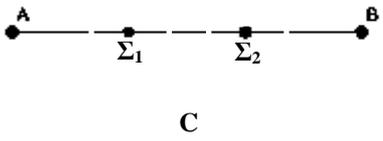
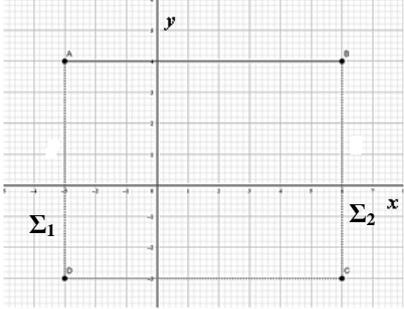
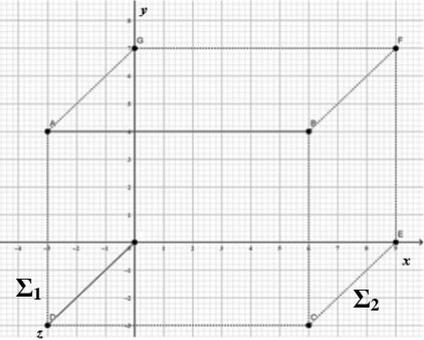


Figure 3 : les différentes étapes de la construction du continu physique d'après la genèse évolutionniste

Le tableau ci-dessous reprend la description des trois continus physiques que nous venons de présenter et propose une représentation géométrique.

<p><i>Nombre de dimensions</i></p>	<p><i>Description du continu et procédé de construction</i></p>	<p><i>Représentation géométrique</i></p>
<p><i>Continu physique unidimensionnel</i> $(n = 1)$</p>	<p>« Nous pouvons imaginer une chaîne continue d'ensemble de sensations de telle sorte que chacun d'eux ne se distingue pas du suivant, bien que les deux extrémités de la chaîne se discernent aisément ; ce sera là un continu à une dimension ».</p> <p><i>Dernières pensées</i>, 1917, p. 68.</p> <p>Pour construire la ligne droite qui représentera notre continu C à 1 dimension, nous allons prendre de manière quelconque les points A et B qui seront aux extrémités de la ligne et nous allons la diviser par des points.</p>	 <p>A horizontal line segment labeled 'C' with endpoints A and B. Two points, labeled Σ₁ and Σ₂, are marked on the segment between A and B.</p>
<p><i>Continu physique bidimensionnel</i> $(n = 2)$</p>	<p>« ...c'est ainsi qu'une surface est continue, si on peut joindre deux quelconques de ses points par une ligne continue qui ne sorte pas de la surface ».</p> <p><i>Dernières pensées</i>, 1917, p. 68</p> <p>Pour construire la surface qui représentera notre continu C à 2 dimensions, nous allons désigner par x et y les deux coordonnées du repère. Cela posé, on supposera les points A et B avec les coordonnées suivantes :</p> <p>$A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.</p> <p>À ces points A et B, on fera correspondre les points C et D avec les coordonnées suivantes : $C\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.</p>	 <p>A 2D coordinate system with x and y axes. A square labeled 'C' is drawn with vertices A(-3, 4), B(6, 4), C(6, -3), and D(-3, -3). The left and right vertical sides are labeled Σ₁ and Σ₂ respectively.</p>
<p><i>Continu physique tridimensionnel</i> $(n = 3)$</p>	<p>« Venons maintenant à l'espace ; on ne peut le décomposer en plusieurs parties, ni en interdisant de passer par certains points, ni en interdisant de franchir certaines lignes ; on pourra toujours tourner ces obstacles. Il faudra interdire de franchir certaines surfaces, c'est-à-dire certaines coupures à deux dimensions ».</p> <p><i>Dernières pensées</i>, 1917, p. 66.</p> <p>Pour construire le corps solide qui représentera notre continu C à 3 dimensions, nous allons désigner par x, y et z les trois coordonnées du repère. Cela posé, on supposera les points A, B, C, D, E, F et G avec les coordonnées suivantes :</p> <p>$A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix} 9 \\ -0 \end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$; $G\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.</p>	 <p>A 3D coordinate system with x, y, and z axes. A complex polyhedron labeled 'C' is shown. Vertices are marked with points A, B, C, D, E, F, and G. The left and right vertical faces are labeled Σ₁ and Σ₂ respectively.</p>

Maintenant que nous savons comment se construisent les continus physiques de différentes dimensions et que nous avons une idée de leur représentation géométrique, une difficulté reste cependant à surmonter : comment passer du continu physique de dimensions différentes au continu mathématique ? Poincaré donne un argument de commodité :

ajouterai-je que l'expérience ne nous ferait jamais toucher que l'espace représentatif qui est un continu physique, et non l'espace géométrique qui est un continu mathématique. Tout au plus pourrait-il nous apprendre qu'il est commode de donner à l'espace géométrique trois dimensions pour qu'il en ait autant que l'espace représentatif²⁴².

Le reste de notre analyse sera consacré aux expériences de Poincaré décrites dans l'article de 1903, concernant la construction de l'espace tridimensionnel à partir des sensations tactiles, en suivant la structure intuitive du continu physique. Comme l'a reconnu Poincaré lui-même, ces expériences sont complexes²⁴³ et certaines critiques vont même jusqu'à dire qu'elles sont indirectes²⁴⁴. Dans cette optique, nous allons simplifier ces expériences afin de les rendre accessibles à nos lecteurs. Pour ce faire, nous proposons de diviser la construction de l'espace tridimensionnel tactile en trois étapes, chacune étant illustrée par une figure géométrique. Nous allons éviter de présenter les expériences de Poincaré sur l'identité de deux points et sur la notion de point que nous avons déjà exposée dans la sous-section II-1.

Il est maintenant proposé de reconstruire l'espace tridimensionnel à partir des sensations tactiles. De manière similaire à l'exemple qui nous a permis de construire les différents continus physiques, nous envisageons ici la comparaison de deux points occupés par les objets A et B aux instants α et β . Considérons le point A comme l'index de la main gauche à l'instant α , et le point B comme l'index de la main droite à l'instant β . Nous désignerons par Σ la série des éléments du point A, et par Σ' la série des éléments du point B. Cette expérience nécessite la comparaison de la série Σ , qui est l'ensemble des séries d'éléments appartenant toutes au continuum, avec les sensations musculaires et les mouvements kinesthésiques de notre corps entre ces deux instants²⁴⁵. Pour l'instant, nous supposons ne rien savoir sur la loi de compensation ni sur les coupures, nous pouvons imaginer les sensations qui pourraient être produites par chaque fibre musculaire. Le continu aurait, selon Poincaré, autant de dimensions que le nombre de fibres nerveuses. Par conséquent, nous nous retrouverions avec un continu physique dont le nombre de dimensions serait incalculable, sans grande surprise.

²⁴² POINCARÉ, Henri, La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 94.

²⁴³ *Idem*, p. 81.

²⁴⁴ Nous faisons allusion à Johnson et à Torretti. On retrouve aussi chez Vuillemin cette observation critique.

²⁴⁵ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 86.

Nous entamons maintenant l'introduction de la loi de compensation, marquant ainsi la première étape de notre démarche. En vertu de cette loi, nous postulons l'existence de deux séquences de mouvements que nous nommerons S et S'. Nous affirmons que S et S' se compensent réciproquement lorsque la série de sensations S (provenant du point A) et la série de sensations S' (provenant du point B) évoluent en sens opposé, comme illustré dans la figure 4 ci-dessous.

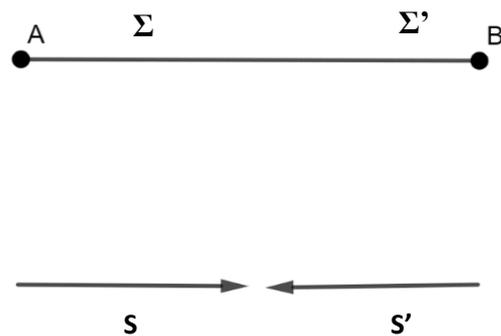


Figure 4

Quelles observations pouvons-nous faire concernant cette première étape ? Précédemment, nous avons défini et représenté les différents continus physiques en fonction de leur nombre de dimensions. Intuitivement, nous savons qu'une ligne droite, avec des points distincts A et B à ses extrémités, représente un continu physique à une dimension. Sur cette ligne droite AB, imaginons qu'à l'instant α , notre premier doigt reçoive une sensation tactile que nous attribuons à l'objet A, tandis que notre deuxième doigt produise également une sensation à l'instant α , que nous attribuons également à l'objet A. Cela signifie que nos deux doigts ont déjà produit deux sensations différentes que nous avons associées au même objet A. Supposons que le même scénario se reproduise à l'autre extrémité occupée par l'objet B. En d'autres termes, nos deux doigts produisent deux sensations différentes à l'instant β , que nous attribuons toutes les deux à l'objet B, sans que nous ayons bougé. Jusqu'à présent, aucune règle ne nous permet de considérer certaines sensations musculaires des doigts de la main comme invariantes. Par conséquent, il est très probable que les sensations musculaires des autres doigts, qui ne sont pas encore isolées, produisent des sensations à l'instant α " que nous attribuons à l'objet A, et que de l'autre côté, les doigts produisent également des sensations musculaires à l'instant β " qui sont attribuables à l'objet B. Nous observons donc un flux de sensations musculaires qui, pour l'instant, sont indiscernables en raison de l'absence de coupures. Le nombre de dimensions du

continuum physique qui résulte de ces séries de sensations est inférieur à celui du cas précédent, mais reste encore très élevé à ce stade²⁴⁶.

Dans le but de réduire le nombre de dimensions, nous entamons maintenant la deuxième étape de notre construction. Cette étape consiste à faire correspondre aux deux séries Σ et Σ' deux points M et M', de sorte que $1/\Sigma = \Sigma'$ et $2/\Sigma' = \Sigma + S + S'$ ²⁴⁷. Nous convenons toujours de considérer les séquences de mouvements S et S' comme se compensant mutuellement. Puisque le terme « correspondance » est lié à la notion de symétrie en géométrie, nous considérons que le point M est l'image du point A et que le point M' est l'image du point B. Selon le principe d'invariance régissant la théorie des groupes de transformations, tous les déplacements transformés sont équivalents et jouent le même rôle. Pour cette raison, nous disons que le point M est le transformé du point A et que le point M' est le transformé du point B. Étant donné que les différents transformés d'un sous-groupe sont tous identiques les uns aux autres, nous en déduisons que $M = M'$. Par conséquent, nous pouvons également affirmer que $A = B$ et que $\Sigma = \Sigma'$. Ainsi, nous obtenons automatiquement une surface à deux dimensions, comme illustré dans la figure 5 ci-dessous.

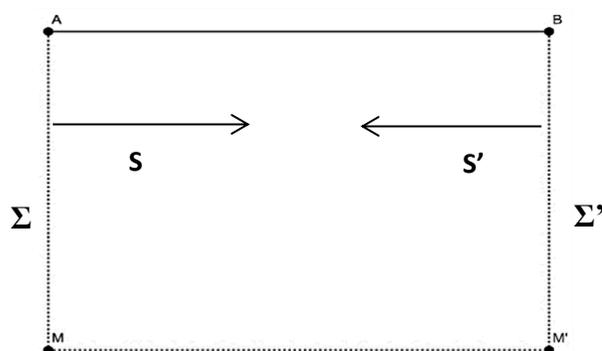


Figure 5

Quelles observations pouvons-nous faire au niveau de cette seconde étape ? Sur la surface ABM'M, nous remarquons que la série Σ est identique à la série Σ' , ce qui revient à dire qu'elles sont équivalentes ou isomorphes entre elles. En vertu de la loi mathématique relative à l'isomorphisme qui caractérise la théorie des groupes de transformations, on dira que les points A et B ont le même nombre de dimensions, parce qu'ils sont équivalents ou identiques entre eux. Les points A et B forment alors des groupes de déplacements identiques. Envisageons de

²⁴⁶ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 87.

²⁴⁷ *Ibidem*

construire le continu physique à partir du point A. Nous savons, par expérience, que cela implique de réaliser une série de mouvements kinesthésiques de sorte à relier les trois points BM'M de la surface. L'ensemble des déplacements internes à réaliser par le point A formera un groupe de déplacements G1 de dimension 3. Par la même occasion, le point B formera à son tour un groupe de déplacement G2 de dimension 3, s'il réalise des mouvements kinesthésiques pour relier les AM'M. Sans beaucoup de réflexions, on en déduit que le continu physique obtenu à ce niveau est de dimension 6. Ce qui nous éloigne encore du continu physique à 3 dimensions.

Passons maintenant à la dernière étape et voyons comment l'introduction des coupures permet d'engendrer un continu physique à 3 dimensions. Pour cette dernière étape, le point A représentera une surface, sur cette surface, nous supposons l'existence d'une ligne B et sur cette ligne B, nous placerons un point M. Si à cette étape, nous éliminons les séries de sensations S et S' qui étaient considérées comme inverses l'une de l'autre et qu'on considère que chacun des éléments C₁, C₂ et C₃ forment des coupures qui divisent tour à tour le continu, on obtient un espace de dimension 3 avec la considération que C₃ = n + 0, comme en témoigne ce passage.

Soit en effet dans l'espace une surface A, sur cette surface une ligne B, sur cette ligne un point M ; soit C₀ l'ensemble de toutes les séries Σ, soit C₁ l'ensemble de toutes les séries Σ telles qu'à la fin des mouvements correspondants le doigt se trouve sur la surface A et de même C₂ ou C₃ l'ensemble des séries Σ telles qu'à la fin le doigt se trouve sur la surface B ou en M. Il est clair d'abord que C₁ constituera une coupure qui divisera C₀, que C₂ sera une coupure qui divisera C₁ et C₃ une coupure qui divisera C₂. Il en résulte de là, d'après nos définitions que, que si C₃ est un continu à n dimensions, C₀ sera un continu à n+ 3²⁴⁸.

Le continu physique de dimension 3 obtenu à l'issue de cette dernière se présente comme suit :

²⁴⁸ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 87.

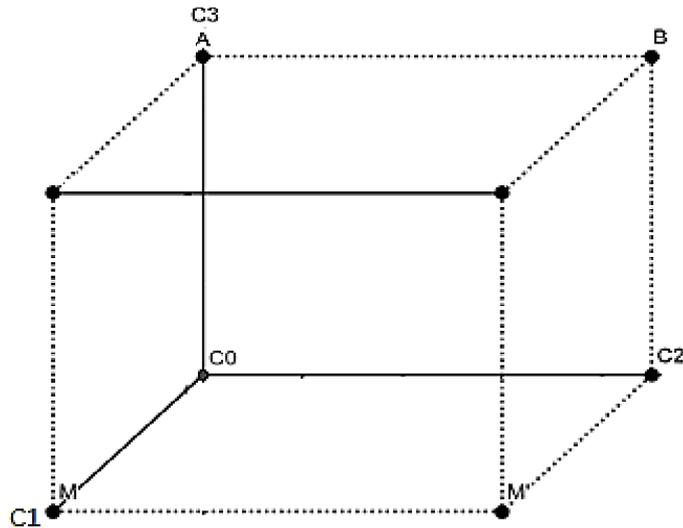


Figure 6

Il est essentiel de souligner les observations liées à cette étape finale. Pourquoi considérons-nous l'élément C_3 comme invariant ? Tout d'abord, selon les concepts de Poincaré, l'espace est une notion géométrique qui implique une structure spécifique et des relations métriques entre les différents points de cet espace. Par intuition, nous comprenons qu'un tel espace nécessite trois coordonnées, à x , y et z ou C_1 , C_2 et C_3 dans le cas qui est le nôtre. Dans ce contexte, lorsque chaque élément forme une coupure et divise adéquatement le continu, cela contribue à la préservation de la structure spatiale. La raison pour laquelle nous considérons que C_3 est invariant sur la figure 6 s'explique par le fait que nous l'avons délibérément choisi, par convention, comme un élément altéré. En effet, sur la figure 6, nous observons la présence de plusieurs points ou éléments. Si chaque point devait générer une série d'impressions tactiles, nous aboutirions à un flux d'impressions indiscernables. Cependant, grâce à l'introduction de coupures, nous parvenons à considérer certains éléments du continu comme étant altérés. Les coupures permettent ainsi de rendre les impressions tactiles des différents points du continu physique constantes. Afin d'obtenir un espace à trois dimensions, il était donc nécessaire de considérer un élément du continu physique comme invariant, ce qui est le cas de C_3 dans la dernière étape de la construction. Vuillemin mérite d'être crédité pour avoir fourni une explication précise du processus conduisant à la tridimensionnalité de l'espace tactile. Étant donné que son explication littérale simplifie le processus de construction que nous venons de décrire, il est nécessaire de rapporter l'intégralité du passage décrivant ce processus.

Partons d'un état du toucher où toutes les sensations font silence et convenons de lui attribuer la dimension -1 . Une sensation proprioceptive est ponctuelle quand, ne diffusant pas, elle est tout entière entourée de silences proprioceptifs. Une suite de points tactiles formant un continu sensible fermé, et l'entourant au plus près ne couperait pas le point. Puisque le point tactile se distingue du silence, sa dimension doit être > -1 ; puisque,

comme dit Euclide, cette monade a position sans être capable de déterminer une figure, on lui assignera la dimension $-1 + 1 = 0$. Une transformation motrice ponctuelle — qu'on se représentera par exemple par le mouvement d'un doigt sur la peau assez léger pour n'exciter qu'un contact ponctuel et assujéti à conserver ce contact — change ce point tactile de dimension 0, si elle diffère de l'élément neutre, en un autre point tactile, auquel s'applique le même argument : le groupe des transformations ponctuelles laisse invariante la dimension 0. Plusieurs sensations proprioceptives ponctuelles isolées auront toujours la dimension 0. Une suite proprioceptive formant un continu sensible simple, c'est-à-dire dont deux éléments distincts ne peuvent être reliés que par un seul chemin, aura une dimension > 0 , puisqu'elle diffère qualitativement d'une ou de plusieurs sensations proprioceptives ponctuelles isolées. D'autre part, ôter un seul point intermédiaire suffit pour couper ce continu, auquel on accordera la dimension $0 + 1 = 1$. Une transformation motrice ponctuelle plus générale que la précédente — qui déplacerait sur la peau le continu précédent, supposé d'ailleurs élastique, en le déformant de façon quelconque sous la seule réserve que l'on conserve continuité et simplicité — si cette transformation est distincte de l'élément neutre, changera le continu simple de départ en un autre continu simple, sur un élément quelconque duquel on recommencera le raisonnement qui a conduit à attribuer à ce continu la dimension 1, invariant du groupe des transformations motrices ponctuelles. Si l'on part d'une plage tactile qualitativement différente d'un continu simple, il faudra lui attribuer une dimension > 1 . Pour la couper, il ne suffira plus d'ôter un point unique : un continu simple de dimension 1 sera nécessaire. On attribuera à la plage la dimension $1 + 1 = 2$. Un groupe de transformations motrices ponctuelles plus étendu que le précédent et qui contiendra tous les mouvements d'un doigt en contact superficiel avec la peau et conservant ce contact déplacera sur la peau cette plage en la déformant mais en conservant sa dimension. La troisième dimension demandera qu'on considère l'ensemble des sensations proprioceptives comme partie propre de l'ensemble des sensations tactiles, soit coenesthésiques, soit externes. Par exemple, notre corps plongé dans l'eau est affecté de tout côté par des qualités tactiles superficielles qui l'entourent formant une plage tactile fermée. La dimension de ce que cette coupure bi-dimensionnelle entoure est > 2 et égale à $2 + 1 = 3$ ²⁴⁹.

Nous observons que pour attribuer trois dimensions à l'espace tactile, il est nécessaire de faire appel à la loi de compensation ainsi qu'aux coupures, afin de considérer certaines séries de sensations comme constantes. Cette procédure, comme le souligne souvent Poincaré, repose sur un ensemble de « faits expérimentaux »²⁵⁰. On peut constater que dans la double théorie psycho-physiologique de Poincaré, le caractère tridimensionnel de l'espace euclidien est acquis d'une part par une convention impliquant la compensation des sensations sensori-motrices, et d'autre part par une catégorie considérée comme préexistante dans l'esprit humain.

Dans son examen critique de l'approche géométrique de Poincaré, Piaget a souligné que, du point de vue de l'épistémologie génétique, la théorie spatiale poincaréenne soulève un triple problème : (1) l'innéité de la notion de groupe, (2) la nature des conventions pratiques, et (3)

²⁴⁹ VUILLEMIN, Jules. L'espace représentatif selon Poincaré. 1996, *op. cit.*, p. 281.

²⁵⁰ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 93.

les relations entre l'activité héréditaire du sujet et l'expérience sensorielle²⁵¹. Nous verrons plus loin, avec l'apport des neurosciences cognitives, si ces éléments sont en soi des problèmes qui mettent à mal la théorie spatiale de Poincaré.

Ce second chapitre avait pour objectif de présenter les aspects cognitifs présumés dans la philosophie des mathématiques défendue par Poincaré contre les logicistes et les formalistes. En ce qui concerne la théorie intuitionniste développée en arithmétique, nous sommes partis de l'analyse de la construction des nombres et nous avons constaté que chez Poincaré, les nombres naturels et rationnels sont construits selon un procédé itératif qui mobilise à la fois l'« intuition pure » et l'« intuition sensible ». Ce procédé itératif a un aspect cognitif au sens où l'union entre l'« intuition intellectuelle » et l'« intuition sensible » se fait par l'intermédiaire d'une opération mentale.

Par la suite, nous nous sommes intéressés au processus d'invention mathématique pour savoir si les aspects cognitifs y sont également présents. À ce niveau, nous avons vu que l'invention mathématique se fait en quatre phases : la phase de préparation, d'incubation, d'illumination et de vérification. Tandis que les phases de préparation et de vérification se produisent dans le conscient, les phases d'incubation et d'illumination se produisent, quant à elles, dans l'inconscient. Si l'« intuition inconsciente » intervient au niveau de l'incubation pour créer un nombre incalculable d'idées, il faut l'« intuition intellectuelle » ou rationnelle pour la vérification et la formalisation de ces idées. Étant donné que l'invention mobilise conjointement les facteurs psychiques provenant de l'« intuition intellectuelle » et les facteurs empiriques/émotionnels provenant de l'« intuition inconsciente » ou « spéciale », nous sommes parvenus à la conclusion que ce processus comporte bien des aspects cognitifs.

En ce qui concerne la géométrie, il est évident que Poincaré a présenté deux variantes différentes pour expliquer la genèse de la géométrie et justifier la nature conventionnelle de l'espace euclidien tridimensionnel. Dans les deux variantes, Poincaré a ancré la genèse de la géométrie dans l'expérience sensori-motrice, mais elles présentent une différence en ce qui concerne la tridimensionnalité de l'espace euclidien qui est fondée dans la première version sur le concept des groupes de déplacements. La genèse logique a le mérite de montrer que la géométrie n'est ni une science *a priori*, ni expérimentale. Essentiellement, elle révèle que ce sont les déplacements volontaires que nous effectuons pour compenser les changements

²⁵¹ PIAGET, Jean. *Introduction à l'épistémologie génétique. 1/ la pensée mathématique*. Paris, Presse Universitaire de France, 1973, p. 190.

d'impression qui constituent la genèse de la géométrie et de l'espace. Le processus de compensation mis en avant par Poincaré dans la genèse logique (1898), qui implique une interaction entre l'esprit humain et les données sensorielles et motrices du monde sensible, peut être considéré comme un processus cognitif. Bien que la première version de la théorie spéciale de Poincaré ait été pertinente pour mettre en évidence les aspects cognitifs de la géométrie et de l'espace, en utilisant le processus d'association psychologique des sensations, elle n'était cependant pas pertinente pour justifier la nature conventionnelle de la tridimensionnalité de l'espace euclidien.

Dans la genèse évolutionniste, Poincaré avait pour objectif de briser le cercle vicieux présent dans la genèse logique (1898). C'est dans cette optique qu'il faisait dépendre la tridimensionnalité de l'espace du continu physique, considéré comme un élément qui sert de l'occasion et qui serait évidemment inutile « *s'il existait une forme a priori s'imposant à notre sensibilité et qui serait l'espace à trois dimensions* »²⁵². Pour construire expérimentalement l'espace tridimensionnel au moyen des sensations tactiles et de la structure intuitive du continu physique, Poincaré utilisa la notion de coupures et fit appel à des hypothèses conventionnelles. En somme, l'intuitionnisme arithmétique et la théorie psycho-physiologique soutenus par Poincaré revêtent des aspects cognitifs du fait qu'ils mettent en évidence l'interaction entre l'esprit humain et l'expérience.

Dans notre exploration des théories neurocognitives, nous chercherons à déterminer si la perspective de Poincaré, qui considère les nombres comme le fruit de la construction mentale en lien avec l'expérience, et la géométrie comme une science résultant de l'interaction entre l'esprit humain et les sensations motrices issues des organes sensoriels tels que l'œil, le toucher, la langue, les oreilles et le nez, peut être compatible avec les neurosciences. C'est dans cette optique que nous allons nous tourner vers les théories neurocognitives récemment développées dans le domaine des neurosciences cognitives afin de mieux comprendre nos capacités cognitives en ce qui concerne la représentation des nombres et de l'espace.

²⁵² POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 95.

DEUXIÈME PARTIE :
L'APPROCHE NEUROCONSTRUCTIVISTE DE L'ARITHMÉTIQUE
ET DE LA GÉOMÉTRIE

Depuis quelques décennies maintenant, les capacités de l'homme à se représenter le nombre et l'espace font l'objet d'une impressionnante étude expérimentale chez les experts des neurosciences cognitives. Ces études expérimentales, dont l'objectif principal est de décrypter les structures utilisées par le cerveau pour construire le nombre et la géométrie, paraissent décrire un constructivisme débarrassé des formes du platonisme mathématique, en raison de ce qu'elles envisagent décrire objectivement les fondements cognitifs de l'arithmétique et de la géométrie, à partir du fonctionnement de l'appareil cérébral. Selon les objectifs que les spécialistes des neurosciences cognitives ont assignés aux études expérimentales, l'on distingue les études biologiques, neurobiologiques, psychologiques et neuropsychologiques visant à cerner les corrélats neuronaux des nombres et les études physiologiques, neurophysiologiques, neuropsychologiques et neuroanatomiques visant à cerner les corrélats neuronaux de l'espace et de la géométrie.

Le premier chapitre sera consacré à la présentation de quelques théories cognitives visant à décrire les corrélats neuronaux des nombres. Le second chapitre, quant à lui, sera consacré à la présentation des corrélats neuronaux de la géométrie.

CHAPITRE I : LE CONSTRUCTIVISME ARITHMÉTIQUE ET LA PRISE DE DECISION DANS LA SPHÈRE DES NEUROSCIENCES COGNITIVES

Nous entamerons notre exploration des théories neurocognitives en abordant celles qui traitent de notre capacité à construire les nombres. Bien que ce domaine soit vaste et regorge de nombreuses théories, nous nous concentrerons essentiellement sur les théories neurocognitives de chercheurs éminents tels que Changeux et Dehaene, qui proposent une explication naturaliste de la manière dont nous développons les compétences numériques, en faisant valoir les bases phylogénétiques et ontogénétiques de nos potentiels numériques et intuitifs. Ensuite, nous aborderons les théories de Damasio et Kahneman, qui fournissent une compréhension de la prise de décision intuitive. Leurs travaux nous permettront de mieux saisir les mécanismes cognitifs sous-jacents à cette forme particulière de prise de décision.

I- La construction mathématique par épigénèse neuronale : l'approche neurocognitive de Changeux

Cette section a pour objectif de présenter la théorie d'épigénèse neuronale proposée par le neurobiologiste Changeux pour rendre compte de la construction des objets mathématiques dans le cerveau humain et du processus d'acquisition des connaissances de base des mathématiques²⁵³. Bien que cette théorie se heurte encore à des difficultés²⁵⁴, il nous semble qu'elle donne une description plausible de la cognition mathématique, par le fait qu'elle

²⁵³ Dans les écrits de Changeux, la théorie d'épigénèse neuronale est utilisée pour rendre compte de l'acquisition de la connaissance scientifique en général, notamment l'acquisition des mathématiques, des sciences physiques, du langage culturel, de l'écriture, etc. Dans le vocabulaire de Changeux, ce terme signifie un développement neuronal coordonné et organisé qui résulte de l'activité spontanée du cerveau et de son action sur l'environnement socio-culturel. En se référant à un tel développement neuronal, Changeux a donné une explication de la construction des objets mathématiques (dans *Matière à pensée*) et du processus d'acquisition mathématique de base chez l'enfant (dans *L'homme de vérité*).

²⁵⁴ Dans sa critique de la théorie épigénétique de Changeux, Evers a montré que les conditions socio-culturelles évoquées par Changeux pour rendre compte de l'acquisition de la connaissance ne sont pas suffisamment élaborées. Pour elle, Changeux ne tient pas compte des institutions sociales comme les crèches et les écoles qui ont pour but de prolonger et perfectionner la connaissance acquise par l'éducation. Outre cette insuffisance, Evers souligne l'un des problèmes fondamentaux de l'approche épigénétique de Changeux, par exemple la question de la durée nécessaire des influences ou des processus d'apprentissages jusqu'à ce qu'ils deviennent durablement efficaces en tant que modifications héréditaires. En effet, Evers fait remarquer qu'aucune expérience neurobiologique n'a montré le temps mis par la culture pour poser son empreinte au cerveau. Ce qui pourrait remettre en cause quelques thèses de la théorie d'hypothèse neuronale. Cf. EVERS, Kathinka. *Neuroéthique. Quand la matière s'éveille*. Paris, trad. de l'anglais par Delphine Chapuis-Schmitz, Odile Jacob, 2009, p. 88. En plus de ces difficultés à caractère sociologique, d'autres difficultés à caractère épistémologique seront présentées plus loin.

combine à la fois les éléments empiriques et les éléments psychiques. Le modèle de construction et d'acquisition mathématique développé par Changeux est un modèle mixte qui pourrait être rapproché de la conception intuitionniste et pragmatiste de Poincaré présentée plus haut. Notre analyse débutera par une brève présentation des hypothèses de base qui sous-tendent la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux. Ensuite, nous examinerons comment cette hypothèse s'applique à la création des objets mathématiques. Enfin, nous montrerons comment cette théorie explique le processus d'acquisition des mathématiques. Il est à noter que chez Changeux, la création/construction des objets mathématiques, faisant appel à l'introspection, concerne le niveau mathématique supérieur (étant caractérisé par l'abstraction), tandis que l'acquisition des connaissances de base des mathématiques concerne le niveau basique, c'est-à-dire les opérations élémentaires de l'arithmétique.

La théorie de l'épigenèse neuronale de Changeux, en ce qui concerne les mathématiques, part du postulat que les objets mathématiques résultent des connexions neuronales qui ont lieu au cours de l'évolution postnatale du cerveau humain. Il ne faut cependant pas négliger les prédispositions phylogénétiques essentielles qui ont des influences spécifiques sur les possibilités et les tendances du développement postnatal du réseau neuronal ou qui en constituent la condition préalable. En tenant compte de ces aspects phylogénétiques, Changeux soutient que la construction des objets mathématiques est ancrée dans les connexions neuronales qui se forment pendant le développement post-natal, ainsi que dans les tendances phylogénétiques qui sont innées à la naissance. Pour justifier ce point de vue matérialiste, Changeux adopte une approche qui consiste tout d'abord à dépeindre le cerveau humain comme une machine dotée de plasticité. L'essor spectaculaire de la robotique et de l'intelligence artificielle au XX^e siècle, en lien direct avec le progrès technoscientifique, a conduit des scientifiques à comparer l'intelligence humaine à celle des machines. Certains scientifiques prétentieux²⁵⁵ vont jusqu'à prétendre que l'intelligence artificielle pourrait bientôt surpasser l'intelligence humaine. Tout l'enjeu des recherches neurobiologiques de Changeux est de fustiger cette conception technophile visant à surévaluer l'intelligence artificielle. Son objectif est de montrer que la machine cérébrale est supérieure à la machine ordinaire²⁵⁶. En effet, une machine est un objet fabriqué avec des fonctions particulières pour réaliser une tâche bien précise. Peu importe ses capacités d'adaptation, qui peuvent être parfois supérieures à celles de

²⁵⁵ Cf. par exemple, WARWICK, Kevin. *I, Cyborg*. University of Illinois Press, 2014, 312 p.

²⁵⁶ CHANGEUX, Jean-Pierre et CONNES, Alain. *Matière à pensée*. Paris, Odile Jacob, 1989, p. 204.

l'homme, la machine ne peut se comporter comme le cerveau qui évolue « *selon un programme darwinien simultanément à plusieurs niveaux et suivant plusieurs échelles de temps* »²⁵⁷. Ce qui fait la particularité du cerveau, selon Changeux, c'est sa plasticité, entendue comme sa capacité à évoluer et à varier à différents niveaux.

La plasticité cérébrale ou neuronale, telle que décrite par Changeux dans ses écrits, fait référence à la capacité des neurones et des synapses à modifier leurs propriétés en fonction de leur état d'activité. Cette caractéristique fondamentale du cerveau lui confère une flexibilité fonctionnelle et une capacité d'auto-organisation. Les expériences neurobiologiques menées pour étudier le fonctionnement du cerveau ont conduit Changeux à s'attaquer au psychologisme computationnel, qui réduisait le cerveau à une machine close, auto-réglée et rigide à la manière de l'ordinateur²⁵⁸. Les neuroscientifiques cognitivistes sont fortement opposés à cette conception du psychologisme computationnel, qui est en déphasage avec les recherches récentes sur le fonctionnement du cerveau et du système nerveux. En effet, les recherches neurobiologiques et anatomiques réalisées récemment sur l'encéphale ont relevé qu'il ne s'agit pas d'une machine passive ou apathique, mais plutôt d'une machine évolutive et constamment active grâce aux mécanismes de transmission d'informations (ou de signaux) qui ont lieu dans le système nerveux. En rejetant l'hypothèse du psychologisme computationnel, Changeux démontre que le cerveau est capable de se projeter dans le monde physique à tout moment et faire des sélections selon ses propres attentes²⁵⁹. Cette capacité à effectuer des projections dans le monde physique, à faire des sélections évaluatives émotionnellement motivées, est reconnue par plusieurs neuroscientifiques comme l'élément fondamental qui distingue la machine cérébrale des autres machines, comme l'ordinateur²⁶⁰. Pour prouver la plasticité cérébrale, Changeux consacre quelques passages de *L'homme de vérité* à la présentation des différents niveaux de variation de l'encéphale. Ces variations se produisent à trois niveaux différents : génétique, épigénétique et anatomique.

En général, il y a une variation génétique à l'intérieur du cerveau, tant chez l'homme que chez l'animal. Des études anatomiques ont révélé que chaque neurone du système nerveux

²⁵⁷ *Idem*, p. 221.

²⁵⁸ BLAYO, François et VERLYSEN, Michel. *Les réseaux de neurones artificiels*. Paris, Presse Universitaire de France, 1996, p. 20.

²⁵⁹ Voir CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme neuronal*, Paris, Fayard, 1983.

²⁶⁰ Pour aller plus loin, voir par exemple, DEHAENE, Stanislas et al. Conscious, preconscious, and subliminal processing: a testable taxonomy. *Trends in Cognitive Neuroscience*, 2006, 5, p. 204-211. Voir également Gérard EDELMAN. *Wider than the Sky, the Phenomenal Gift of Consciousness*. Yale University Press, 2005, 224 p.

diffère des neurones voisins en fonction de sa spécificité et de sa fonction dans le système nerveux, ce qui engendre une variation génétique extraordinaire. Cette hypothèse de variation génétique a été confirmée par des expériences qui ont montré des différences significatives entre les cellules cérébrales des jumeaux monozygotes élevés par les mêmes parents²⁶¹. Cette variabilité génétique a une conséquence directe sur l'anatomique, la morphologie, la forme, le poids et la structure du cerveau, qui diffère d'un individu à un autre et d'un animal à un autre, étant donné qu'il existe une divergence génétique, même entre les jumeaux monozygotes.

La variation épigénétique constitue le troisième aspect à considérer. Cette caractéristique suggère que le développement du cerveau suit une évolution depuis la naissance jusqu'à l'âge adulte²⁶², mais il reste à déterminer précisément cet âge. Une découverte importante qui a été faite par les cognitivistes lors de ces décennies est que le cerveau humain n'est pas totalement vierge à la naissance, car « *les grandes lignes de l'architecture neuronale et connexionnelle du cortex cérébral se mettent en place avant la naissance* »²⁶³. Cette constatation a été confirmée par les expériences neuropsychologiques qui ont révélé la présence d'un noyau cognitif dans l'encéphale du nouveau-né²⁶⁴. Ces observations neurobiologiques et neuropsychologiques contrastent la théorie empiriste de la connaissance qui soutenait que l'esprit humain est comme un tonneau vide à la naissance. Les implications épistémologiques de ces observations sont nombreuses et seront présentées au fur et à mesure de l'exposition des théories neurocognitives.

En résumé à la variation épigénétique, selon le point de vue de Changeux, le développement postnatal du cerveau englobe diverses transformations morphologiques, fonctionnelles, structurelles et la formation des cellules synaptiques jusqu'à la maturation²⁶⁵. Outre ces trois niveaux de variation, Changeux considère le cerveau comme un organe « ouvert » et « motivé »²⁶⁶ en raison de son activité spontanée, qui lui permet de s'engager avec le monde extérieur ou sensible. Contrairement à une machine inamovible, le cerveau est « *continuellement en train d'échanger de l'énergie et de l'information avec le monde*

²⁶¹ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*. Paris, Odile Jacob, 2002, p. 286.

²⁶² *Idem*, p. 289. Voir également CHANGEUX, Jean-Pierre. Conférence introductive de Jean Pierre Changeux », *La lettre du Collège de France*, 27 décembre 2009. Disponible sur le web <http://journals.openedition.org/lettrecdf/101> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/lettrecdf.101>.

²⁶³ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*. 2002, *op. cit.*, p. 290.

²⁶⁴ Cf. CAREY, Susan. *The origin of concepts*. New York, Oxford University Press, 2009.

²⁶⁵ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*. 2002, *op.cit.*, 289.

²⁶⁶ *Idem*, p. 51.

extérieur »²⁶⁷. Cette capacité du cerveau à s'ouvrir au monde sensible est, selon Changeux, un aspect crucial de son développement et de sa maturation, car c'est dans le monde que le cerveau puise les éléments nécessaires à son modelage.

In fine, la variabilité sous sa triple forme (génétique, épigénétique et anatomique), ainsi que la spontanéité, la motivation et l'ouverture, sont les propriétés fondamentales du cerveau, à l'opposé de l'ordinateur qui se caractérise par la rigidité et la passivité. Cette précision est importante par rapport à la position de Poincaré contre Kant. Chez Poincaré, avons-nous vu, l'intuition ne se contente pas de recevoir passivement les données sensorielles issues du monde sensible, mais en tant qu'activité de l'esprit, elle est en capacité de créer indéfiniment les nombres, pourvu qu'elle interagisse de façon spontanée avec le monde externe ou sensible. L'hypothèse de la plasticité cérébrale, qui précise que le cerveau est doté d'une spontanéité lui permettant de se projeter à tout moment dans le monde sensible, renforce ainsi la nature de l'intuition de Poincaré. Il faut cependant des études plus poussées pour savoir si l'ordinateur se caractérise essentiellement par la rigidité ou la passivité.

La seconde phase de l'approche de Changeux consiste à rechercher les bases neurales ou cognitives des mathématiques²⁶⁸. Mettre en lumière les fondements cognitifs des mathématiques est l'un des objectifs de la théorie d'épigenèse neuronale. Cependant, afin de déterminer les bases neurales des mathématiques, il est nécessaire d'expliquer d'abord, d'un point de vue neurobiologique, le fonctionnement de la conscience et de la pensée, puisque chez Changeux les objets mathématiques sont considérés comme des objets mentaux. Cela soulève alors la question suivante : comment les processus neurobiologiques engendrent la conscience ?

La recherche visant à comprendre le fonctionnement de la conscience nécessite tout d'abord de décrire l'architecture du cerveau et le mécanisme par lequel les multiples neurones du cerveau communiquent et propagent l'information entre eux. Les expériences neurobiologiques révèlent qu'il y a environ 100 milliards de neurones et 10^{15} synapses. Bien que chaque neurone du système nerveux possède une singularité²⁶⁹, les multiples neurones que possède la machine cérébrale sont capables d'établir une connexion entre eux, communiquer et échanger des données par le biais des synapses. Selon Changeux, la communication de la cellule nerveuse implique l'interconnexion des multiples constituants de l'activité cérébrale, de telle

²⁶⁷ *Idem*, p. 52.

²⁶⁸ Cf. par exemple CHANGEUX, Jean-Pierre et CONNES, Alain. Matière à pensée. 1989, *op.cit.*, p. 118.

²⁶⁹ Cela signifie que chaque neurone possède une spécificité différente du neurone voisin.

sorte que l'information²⁷⁰ puisse se propager dans toutes les régions neuronales²⁷¹. Lors de la communication entre les composantes du système nerveux, il se produit un transfert de signaux électriques d'un neurone à un autre par le biais des synapses. Les synapses jouent ainsi un rôle de générateur d'impulsions, permettant aux neurones de se connecter en réseau et de communiquer entre eux en transférant des signaux électriques.

Les observations faites à l'aide du microscope biologique ont révélé des faits intéressants concernant les connexions neuronales du système nerveux. Ces connexions peuvent être activées de l'intérieur par des impulsions provenant du système nerveux lui-même, ou de l'extérieur par des interactions avec l'environnement. Cette découverte a inspiré la conception évolutionniste de la conscience et de la pensée adoptée par de nombreux cognitivistes, dont Changeux. Selon cette vision, la conscience et la pensée sont considérées comme des fonctions biologiques liées à l'activité des réseaux neuronaux, des synapses et à l'influence de l'environnement socioculturel.²⁷² Cette approche matérialiste de la conscience, défendue par Changeux et ses collègues, a eu pour conséquence directe de remettre en question les définitions classiques de la conscience avancées par de nombreux philosophes rationalistes tels que Descartes et Kant, ainsi que par les empiristes comme Locke et Hume.²⁷³

L'hypothèse propre à Changeux est que la conscience et même les processus psychologiques tels que l'introspection, l'invention et l'imagination, résultent de l'activité des neurones, des synapses et de leur régulation par les signaux chimiques²⁷⁴. Étant donné que la construction des objets mathématiques implique une activité mentale, il convient de se

²⁷⁰ L'utilisation du terme "information" par Changeux est très problématique, car elle pose la question de savoir d'où vient l'information avec un certain degré de signification ou d'importance présumée ou quand, où et comment elle est générée par le système neuronal. De ce point de vue, l'on pourrait se demander si l'on peut déjà parler de transmission d'"informations" lors de l'interaction/de la "conduction" de neurones.

²⁷¹ Voir CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme neuronal*. Paris, Fayard, 1983.

²⁷² Pour ce qui concerne la neurobiologie de la conscience, voir CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*, Paris, Odile Jacob, 2002, p. 110-170. ; CHANGEUX, Jean-Pierre. *Du vrai, du bien, du beau*. Paris, Odile Jacob, 2008, p. 219. Et Rodolfo Llinas et al. The neuronal basis of consciousness. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. B. 353, 1998, p. 1841-1849.

²⁷³ Les neurobiologistes et les neuropsychologues s'accordent à considérer la conscience non pas comme une activité réflexive, mais comme un processus cognitif résultant de l'interconnexion des câbles neuronaux présents dans l'appareil cérébral à la naissance et leur interaction avec l'environnement. Cf. *L'homme de vérité*. 2002, *op.cit.*, p. 123. Cela signifie que ce sont les réseaux de neurones qui donnent accès à la conscience. De cette manière, les cognitivistes promeuvent une définition matérialiste de la conscience opposée à la définition proposée par les empiristes (Locke, Hume, Condillac, etc.) et à celle proposée par les rationalistes (Descartes, Kant, Spinoza, Hegel, etc.).

²⁷⁴ Pour ce qui concerne la neurobiologie de l'introspection, de l'invention et de l'imagination, voir, Jean-Pierre, CHANGEUX et CONNES, Alain. *Matière à pensée*. 1989, *op.cit.*, p. 107-200.

demander comment Changeux conçoit l'objet mental. Il est connu que Changeux esquisse un modèle de connaissance basé sur les expériences neurobiologiques, dont les prémices se trouvent consignées dans *L'homme neuronal*. Dans le chapitre V de ce livre, Changeux décrit une approche neurobiologique des objets mentaux. Les débuts de ce chapitre sont consacrés à une charge contre les psychologues classiques qui ont suivi la conception behavioriste de la représentation mentale héritée de l'empirisme. Pour donner une assise psychologique à leur conception comportementaliste, les behavioristes considéraient le stimulus provenant de l'environnement comme l'antécédent de l'objet mental. Selon eux, l'objet mental est un comportement suscité par le stimulus (ou le percept) qui le précède automatiquement.

Contre la conception behavioriste de l'objet mental, Changeux met en évidence les propriétés endogènes du cerveau humain qui lui permettent de générer spontanément des objets mentaux indépendamment des stimuli externes. Tout en reconnaissant le lien étroit entre l'objet mental et le percept ou le stimulus, Changeux avance que l'objet mental préexiste au percept. Pour soutenir son point de vue, il démontre que les objets mentaux résultent de la commutation et de l'interaction des connexions neuronales prédisposées dans le cerveau. Dans *L'homme neuronal*, il écrit ceci : « ces objets mentaux particuliers, ces ébauches ou pré-représentations, existent avant l'interaction avec le monde extérieur. Elles résultent de la recombinaison de groupes pré-câblés de neurones ou d'assemblées de neurones... »²⁷⁵. Compte tenu de ce point de vue, et en considérant que l'objet mental préexiste avant le percept, Changeux soutient que le cerveau peut créer des objets mentaux sans stimulus externe. L'objet mental est semblable à un concept et n'a pas besoin d'être directement lié au percept, car la représentation iconique ou graphique qui est souvent associé à l'objet mental intervient après sa création. Ainsi pour Changeux, les objets mentaux, également appelés les objets conceptuels²⁷⁶, sont construits à l'intérieur du cerveau au moyen d'une activité spontanée de caractère privé²⁷⁷.

Changeux a appliqué cette conception biologique et matérialiste de l'objet mental aux objets mathématiques. Dans *Matière à pensée*, où il discute de la nature des objets mathématiques avec le mathématicien Alain Connes, Changeux défend la thèse selon laquelle les objets mathématiques sont des « objets mentaux »²⁷⁸. Cette affirmation de Changeux reflète

²⁷⁵ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme neuronal*. 1983, *op.cit.*, p. 188.

²⁷⁶ *Idem*, p. 187.

²⁷⁷ L'activité cérébrale est dite privée lorsqu'elle est provoquée par une cause interne. Dans ce cas, l'activité du cerveau a lieu sans l'aide du monde extérieur. L'activité cérébrale privée diffère de l'activité cérébrale évoquée qui est une activité provoquée par une cause externe.

²⁷⁸ CHANGEUX, Jean-Pierre et CONNES, Alain. *Matière à pensée*. 1989, *op.cit.*, p. 155.

une certaine conception intuitionniste des objets mathématiques, mais avec quelques nuances. Selon l'approche neuroconstructiviste de Changeux, les objets mathématiques résultent de l'interconnexion des neurones incarnés dans le cerveau. Dans son dialogue avec Connes, qui défend une perspective réaliste en mathématiques, Changeux souligne constamment que les objets mathématiques ne se trouvent pas à l'extérieur de l'homme, mais qu'ils sont des objets de pensée qui s'identifient à des objets mentaux ou à des représentations mentales. Tentant de convaincre Connes d'abandonner sa croyance envers le réalisme mathématique de Platon, Changeux propose d'explorer la source des objets mathématiques dans le cerveau humain plutôt que dans un autre monde. « *Notre cerveau est un objet physique complexe. Comme tel, il construit les représentations identifiables à des états physiques. Les objets mathématiques seraient dans la tête du mathématicien, des objets matériels, des objets mentaux* »²⁷⁹. Se pose cependant une question : comment la création des objets mathématiques se déroule-t-elle dans le cerveau ?

La théorie d'épigenèse neuronale vise également à expliquer la façon dont les objets mathématiques sont créés. Selon Changeux, ces objets sont créés par le biais d'une activité introspective se situant à un niveau supérieur de la cognition. Ce niveau supérieur, tel que décrit par Changeux, fait référence à un niveau d'abstraction de degré supérieur, dans lequel sont créées des combinaisons mathématiques les plus complexes. À ce niveau de la cognition, il semble que les neurones interagissent spontanément entre eux sans coopérer avec le monde extérieur. Puisque les objets mentaux sont considérés comme des créations lorsqu'ils n'ont pas encore de représentations iconiques dans le monde sensible ou extérieur, Changeux affirme que le processus de création des objets mathématiques se déroule indépendamment de l'environnement²⁸⁰. Selon lui, il s'agit d'un processus au cours duquel l'activation des neurones et le traitement des représentations mentales se produisent indépendamment de l'environnement. De manière métaphorique, Changeux explique que le processus de création mathématique se déroule dans l'espace de travail neuronal à travers ce qu'il appelle le

²⁷⁹ *Idem*, p. 30.

²⁸⁰ Ce mécanisme de construction selon lequel la dynamique neuronale rend possible la création des concepts indépendamment des stimuli externes est confirmé par le constructivisme basé sur l'autopoïèse promu par Maturana et Varela. Lors de l'expérience sur la rétine d'un pigeon, le fait qu'aucune stimulation externe ne corresponde aux activités dans les nerfs optiques éclaire la situation... Maturana en a déduit qu'il n'y avait pas de correspondance entre les stimulations et les activités mesurées des nerfs optiques. Ce fait a été introduit dans la formulation du mécanisme de l'autopoïèse comme compétence centrale, de sorte que le système autopoïétique n'a ni entrées ni sorties. Cf. KAWAMOTO, Hideo. *Shisutemu Genshōgaku: Ōtopoiēshisu no Daiyon Ryōiki (System-Phenomenology: The Fourth Stage of Autopoiesis)*. Tokyo : *yosya*, 2006, p. 193.

« darwinisme mental ». Cela signifie que le mathématicien crée de nouveaux objets mathématiques en tant qu'objets mentaux grâce au codage, à la représentation mentale, à l'enchaînement, au raisonnement, à l'émotion et à la sélection naturelle²⁸¹. L'hypothèse du « darwinisme mental » proposée par Changeux, sur la base de la théorie d'épigenèse neuronale, suggère que lors de l'activation des neurones, une mise en activité intense se produit, de telle sorte que le cerveau parvient à sélectionner des objets mathématiques présents dans le cerveau sous forme de représentations mentales²⁸². L'encéphale humain semble comporter déjà les objets mathématiques non dérivés du monde extérieur. Le mathématicien y accède par le biais de l'introspection. Cela est accord avec le point de vue exprimé par Changeux dans ce passage :

*les objets mathématiques sont les êtres de raison qui n'existent que dans la pensée du mathématicien. Et non dans un monde platonicien indépendamment de la matière. Ils n'existent que dans les neurones et les synapses des mathématiciens...*²⁸³.

Après l'activité de création mathématique qui se déroule au niveau supérieur de la cognition, le mathématicien met en place des « stratégies émotionnelles » consistant à faire coopérer ses émotions et sa raison. Cette étape est essentielle car elle permet au mathématicien d'atteindre le résultat escompté.

Malgré sa cohérence apparente, il est indéniable que la description de la création mathématique proposée par Changeux demeure mystérieuse et formelle. Ce qui laisse pendantes plusieurs questions philosophiques sur la nature des objets mathématiques. En effet, si l'on part du postulat selon lequel les objets mathématiques sont exclusivement des objets mentaux résultant de l'activité neuronale, on pourrait légitimement supposer que ces objets ne sont pas toujours situés à l'intérieur du cerveau, mais pourraient avoir une existence en dehors de l'encéphale en l'absence d'activité neuronale. Par exemple, si aucune activité neuronale ne se produit pendant le sommeil, où se trouvent alors les objets mathématiques ? De même, où se situent les objets mathématiques lorsque les fonctions cérébrales sont interrompues ? Il semble que les objets mathématiques résident temporairement dans le cerveau pendant la durée du processus d'activité neuronale. Cette perspective soulève des interrogations fascinantes sur la nature de l'existence et de la permanence des objets mathématiques. Ces questions restent

²⁸¹ La sélection naturelle évoquée ici est un processus de compétition neuronale qui se déroule lors de la génération des objets mathématiques. Lors de ce processus, les éléments ou objets non utiles sont éliminés au profit des objets utiles CHANGEUX, Jean-Pierre et CONNES, Alain. *Matière à pensée*. 1989, *op. cit.*, p. 194.

²⁸² En donnant une interprétation neurobiologique du processus de création des objets mathématiques, le but de Changeux est de donner une base scientifique au processus d'invention mathématique de Poincaré (exposée dans la 1^{ère} partie). Ce qui pourrait constituer un pont légitime vers l'aspect créatif de l'intuition.

²⁸³ *Idem*, p. 28.

ouvertes et incitent à une réflexion approfondie sur le lien entre les processus mentaux, l'activité neuronale et la réalité des objets mathématiques.

Indubitablement, l'hypothèse d'épigenèse neuronale avancée par Changeux pour décrire la création des objets mathématiques soulève des difficultés et ne fait qu'alimenter le débat entre les réalistes et les anti-réalistes concernant la nature des objets mathématiques. Toutefois, sa plausibilité réside dans sa distinction entre l'objet mental conçu comme concept et le percept. En établissant cette distinction, Changeux se démarque de certains neuroscientifiques cognitivistes comme Carey, qui a souvent revendiqué le maintien du lien entre concept et percept, et se rapproche plutôt de Poincaré, qui intégrait de manière fondamentale la perception, reconnaissant non seulement son rôle évolutif dans l'émergence de concepts ou de potentiels neurocognitifs pour la génération et la manipulation mentale des objets mentaux, mais aussi sa nécessité à travers la phylogenèse de la perception et du traitement complexe des données sensorielles. À un niveau d'abstraction mathématique, il existe bien sûr des concepts qui ne peuvent pas avoir de représentation iconographique comme le souligne Sinaceur en citant l'exemple de l'axiomatique de Dedekind²⁸⁴. Cette théorie mathématique ne peut pas être associée à un graphe ou à une représentation graphique.

Passons maintenant du niveau supérieur de la cognition mathématique à un niveau inférieur afin d'examiner comment la théorie d'épigenèse neuronale explique l'acquisition des mathématiques élémentaires. Selon Changeux, l'encéphale humain en tant qu'organe plastique génère spontanément des états oscillatoires pour traiter les opérations mathématiques basiques. La preuve en est que lorsque le cerveau humain est atteint des lésions ou des troubles à un niveau quelconque, notre capacité à effectuer des opérations mathématiques s'affecte considérablement. Hécaen²⁸⁵ a d'ailleurs réalisé une série d'expériences neuropsychologiques dans ce sens. Les expériences neuropsychologiques qu'il a réalisées sur des sujets atteints des troubles cérébraux ont révélé que ceux-ci étaient incapables de réaliser certains exercices élémentaires de l'arithmétique. La première expérience a révélé que les sujets atteints de l'alexie étaient incapables de lire ou d'écrire les nombres, bien qu'ils conservent l'usage des lettres. La seconde expérience a révélé que les sujets atteints de l'acalculie (qui est un trouble cognitif lié à la vision) étaient incapables de bien ordonner les nombres mathématiques. Enfin,

²⁸⁴ Hourya BENIS-SINACEUR, Philosophie de la neuropsychologie du nombre. *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, n°62, 2014/2. p. 103-144. Disponible sur https://www.persee.fr/doc/intel_0769-4113_2014_num_62_2_1035.

²⁸⁵ HECAN, Henri et ALBERT, Martin. *Human neuropsychology*, Wiley, New York, 1978, 509 p.

la dernière expérience réalisée sur les sujets atteints de l'anarithmie a révélé que ces sujets perdaient les valeurs numériques et n'étaient plus capables d'effectuer des calculs. Cependant, ils étaient capables de lire et d'ordonner correctement les nombres.

Dans la mesure où les personnes atteintes de troubles cérébraux sont incapables d'effectuer correctement certaines opérations arithmétiques de base, on peut affirmer que la réalisation de certaines tâches mathématiques nécessite un bon fonctionnement du cerveau²⁸⁶. Se basant sur ces expériences neuropsychologiques, Changeux soutient que la capacité humaine à effectuer les calculs mathématiques basiques repose sur « un "détecteur de numérosité" et sur des unités de traitement qui sont des dispositifs neuronaux innés »²⁸⁷. Ce détecteur de numérosité est partagé avec les animaux²⁸⁸. Cela signifie-t-il alors que l'acquisition des mathématiques basiques (l'arithmétique élémentaire) se fait indépendamment de l'expérience ?

Changeux offre une réponse qui semble étayer l'argument de Poincaré. Selon lui, la pensée mathématique ne se forme pas exclusivement à partir des dispositifs de numérosités innés. Le modèle cognitiviste de la connaissance se situe dans l'équilibre de l'empirisme et du rationalisme. Ce qui conduit Changeux à rejeter à nouveau le modèle empiriste de la connaissance, qui suppose que l'esprit humain reçoit de manière passive les données empiriques venant du monde extérieur. Ce modèle empiriste ne s'accorde pas avec celui du cognitivisme contemporain, car il suppose que le cerveau est vierge à la naissance. Or, du point de vue des neuroscientifiques cognitivistes, le cerveau possède dès la naissance des systèmes de détection de numérosités sous forme de schèmes neuronaux. Outre l'empirisme, Changeux rejette également le modèle rationaliste de la connaissance, qui accorde une priorité excessive à la raison sans tenir compte des facteurs empiriques. Le modèle cognitiviste de la connaissance, basé sur la théorie d'épigenèse neuronale, accorde une importance significative aux conditions empiriques, sociales, matérielles et culturelles, car ces facteurs contribuent énormément au développement des capacités mathématiques préexistantes. En considérant que les capacités numériques précoces ont une origine phylogénétique et se développent grâce aux facteurs

²⁸⁶ Afin d'étayer cette hypothèse de Hécaen, Dehaene et son équipe de recherche ont réalisé une neuropsychologie de l'acalculie. Les résultats de cette expérience ont confirmé que les lésions cérébrales perturbent considérablement les tâches mathématiques les plus simples telles que l'addition, la multiplication, la soustraction, la division, la comparaison et même la numérosité. Cf. DEHAENE, Stanislas et al. Approximate quantities and exact number words : dissociable systems. *Neuropsychologia*. 2003, 41, p. 1942–1958.

²⁸⁷ CHANGEUX, Jean-Pierre. L'homme de vérité. 2002, *op. cit.*, p. 226.

²⁸⁸ Notons que Changeux fait ici allusion à la subitisation, l'un des systèmes de représentation numérique que nous partageons avec les animaux. Nous reviendrons en détail sur ce système de numérosité dans la prochaine sous-section.

épigénétiques, Changeux soutient que la pensée mathématique se forme chez l'enfant à partir de règles épigénétiques, y compris la transmission des empreintes culturelles lors de l'évolution post-natale.²⁸⁹

Les capacités numériques précoces, présentes dès la naissance sous forme de schèmes neuronaux ou de pré-représentations, ne sont donc pas suffisantes pour qu'un enfant acquière ou comprenne les mathématiques. C'est lors de l'interaction de l'enfant avec son environnement socio-culturel que son système de représentation exacte des nombres mathématiques se perfectionne. En adoptant ce point de vue, Changeux affirme que l'acquisition des mathématiques élémentaires se situe dans le contexte de l'influence des capacités socio-culturelles sur les potentiels phylogénétiques préexistants chez l'enfant. Pour étayer son argument, il souligne que les compétences telles que l'écriture des chiffres, la réalisation d'opérations de soustraction, d'addition, de multiplication et de division se développent naturellement chez l'enfant lors de l'apprentissage de la langue culturelle à travers des jeux cognitifs²⁹⁰.

Le concept de « jeux cognitifs » repose sur l'idée que l'enfant développe les compétences mathématiques grâce à son interaction avec son environnement socio-culturel. Selon le vocabulaire de Changeux, les « jeux cognitifs » désignent l'ensemble des différents apprentissages ou essais empiriques auxquels se livre l'enfant dans son milieu environnemental. Il s'agit notamment des sessions d'apprentissage, de l'imitation des babillages et des séances de jeu qui se font par l'entremise des membres de la société. Grâce à ces jeux cognitifs, l'enfant construit son intellect et développe ses capacités de mémorisation, de comptage et d'utilisation des chiffres arabes. Cette approche soutient l'empirisme, puisque c'est par le biais des jeux cognitifs, relevant de l'apprentissage de la langue culturelle, que l'enfant apprend les mathématiques. « *L'enfant apprend le concept et la notation des nombres en même temps que le langage* »²⁹¹. Étant donné que le langage est acquis grâce à l'apprentissage culturel,

²⁸⁹ Il faudrait cependant examiner de plus près dans quelle mesure les capacités mathématiques de l'individu, développées sous l'influence socioculturelle, peuvent être transmises non seulement par tradition culturelle, mais aussi par héritage épigénétique.

²⁹⁰ *Idem*, p. 90.

²⁹¹ *Idem*, p. 227.

Changeux soutient tacitement que l'acquisition des mathématiques implique les facteurs phylogénétiques et épigénétiques²⁹².

En somme, la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux que nous venons d'esquisser vise à expliquer le processus d'acquisition des mathématiques élémentaires et de la façon dont le cerveau humain, grâce à sa plasticité, produit les objets mathématiques. Cette théorie cherche à montrer que les mathématiques n'existent pas indépendamment de l'homme qui les crée, que ce soit dans le processus d'apprentissage des mathématiques ou dans la création des objets mathématiques. Son apport réside dans la mise en évidence des dispositifs neuronaux de numérosités avec lesquels nous naissons, et qui se développent grâce à l'influence de notre environnement socio-culturel après la naissance. En dévoilant l'implication des facteurs phylogénétiques et épigénétiques dans la construction et l'acquisition des connaissances mathématiques de base, la théorie d'épigenèse neuronale démontre que la construction et la compréhension mathématique ne repose pas uniquement sur les règles de la logique, mais qu'elle se réalise par des apprentissages progressifs. Par conséquent, cette théorie offre une base solide à l'idée selon laquelle les mathématiques sont une construction purement humaine.

Cependant, pour adhérer pleinement à cette théorie de Changeux, il est nécessaire de recueillir des détails suffisants sur les circuits neuronaux de numérosité mentionnés par ce neurobiologiste comme étant essentiels à l'acquisition mathématique. Afin de déterminer si l'être humain possède effectivement des systèmes neuronaux de numérosités qui lui permettent d'acquérir des connaissances mathématiques de base, il est essentiel de réunir davantage d'informations sur ces systèmes neuronaux de numérosités et sur leur implication réelle dans le processus d'acquisition mathématique. La théorie qui semble le mieux expliquer ces systèmes neuronaux de numérosité est probablement le sens du nombre développé par Dehaene et certains spécialistes de la psychologie cognitive.

²⁹² Changeux ne précise pas cependant lesquels de ces facteurs sont prédominants dans le contexte des connaissances de base mathématiques. Toutefois, il existe, ces derniers temps, des arguments plausibles en faveur d'influence épigénétiques sur l'évolution phylogénétique. Cf. WEIGEL, Sigrid. Epigenetik und evolutionstheorie, in *Evolution in Natur und kultur*. 2010. Disponible sur le web : https://www.zfl-berlin.org/files/zfl/downloads/personen/weigel/2010_epigenetik_und_evolutionstheorie.pdf.

II-L'intuition numérique ou le sens du nombre selon Dehaene

Cela fait plus de deux décennies maintenant que la théorie de l'épigenèse neuronale, dont nous venons d'esquisser quelques hypothèses générales dans la sous-section précédente, est utilisée par certains spécialistes de psychologie cognitive, en l'occurrence par Dehaene pour donner une explication de nos capacités de compréhension et d'aptitudes numériques. Cela n'est guère surprenant quand on sait que Dehaene a collaboré pendant plus d'une vingtaine d'années avec Changeux sur les questions qui touchent au fonctionnement du cerveau²⁹³. En s'appuyant sur la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux ainsi que sur les travaux d'autres neurobiologistes, Dehaene cherche à déterminer les bases biologiques de l'arithmétique élémentaire²⁹⁴. Dehaene part de l'idée que les fondements cognitifs des mathématiques doivent être recherchés dans les structures neuronales du cerveau. À partir des expériences réalisées en neurobiologie, en neuropsychologie et en psychophysique, tant sur les humains que sur les animaux, il a développé un modèle ontogénétique et phylogénétique pour l'acquisition et la construction des nombres.

Du point de vue phylogénétique, Dehaene soutient, à la manière de Changeux, que les mathématiques sont le résultat d'une longue évolution génétique. Selon lui, les mathématiques trouvent leurs « *racines ultimes dans les représentations mentales structurées que nous héritons de notre évolution* »²⁹⁵. Parallèlement à cette thèse, Dehaene soutient sur le plan ontogénétique qu'il existe une connexion précoce entre l'intuition du nombre, qui est un système de numérosité inné, et les symboles numériques. Cette connexion expliquerait la capacité des enfants et des adultes à acquérir le système de comptage et à comprendre la signification des nombres. De là, Dehaene suggère la possibilité d'une continuité phylogénétique et ontogénétique dans le processus d'appréhension et de construction des nombres naturels.

²⁹³ Dehaene et Changeux ont publié plusieurs fois ensemble et il existe même un modèle Dehaene-Changeux portant leur nom pour l'interprétation des réseaux neuronaux (cf. https://en.wikipedia.org/wiki/Dehaene%E2%80%93Changeux_model).

²⁹⁴ L'arithmétique élémentaire est le tout premier niveau des mathématiques. C'est la base de la connaissance des nombres telle qu'elle apparaît dans l'enseignement préscolaire et scolaire des mathématiques. Elle implique donc le comptage des nombres à partir de 1 jusqu'à l'infini, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

²⁹⁵ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006. Nouvelle édition [en ligne]. Paris : Collège de France, 2006. Disponible sur <http://books.openedition.org/cdf/2850>. ISBN : 9782722601932. DOI : 10.4000/books.cdf.2850.

Plusieurs investigations neuropsychologiques et neurobiologiques²⁹⁶, parfois appuyées par l'imagerie cérébrale, ont confirmé l'existence des circuits neuronaux servant de substrat cognitif à l'acquisition de la connaissance arithmétique. Dans cette sous-section, nous mettrons en évidence ces systèmes neuronaux de numérosités. Nous commencerons par décrire les recherches expérimentales récentes sur la cognition arithmétique, qui identifient différents systèmes neuronaux considérés comme les fondements cognitifs des mathématiques chez les humains. Ensuite, nous chercherons à comprendre comment ces systèmes neuronaux interagissent pour permettre l'acquisition et la compréhension des nombres symboliques. Enfin, nous présenterons un modèle cognitif décrivant le processus de construction et d'acquisition de ces nombres.

Les récentes recherches sur les fondements cognitifs des nombres ont donné lieu à une étude critique du constructivisme de Piaget et de l'innéisme des nativistes. De manière similaire au constructivisme poincaréien des nombres, le modèle piagétien du développement des potentiels numériques chez l'enfant peut être considéré comme un modèle précurseur de la naturalisation de la pensée mathématique, étant donné que ce psychologue a construit une épistémologie naturalisée intégrant le rôle crucial du développement génétique et de la psychologie. Cependant, en ce qui concerne la genèse du nombre chez l'enfant, Piaget, qui suivait une conception empiriste de la connaissance, soutenait que les enfants sont dépourvus du concept de nombre à la naissance. Pour étayer sa thèse empiriste, il mettait en évidence le fait que les premiers indices du concept de nombre émergent tardivement chez l'enfant (vers 6 ou 7 ans) lorsqu'il parvient au stade de la « conservation acquise »²⁹⁷. C'est surtout cette considération qui entre en conflit avec les résultats des neurosciences cognitives, car en soutenant un tel point de vue, Piaget niait explicitement la capacité de l'enfant à subitiser, c'est-à-dire à appréhender la numérosité avant l'âge de 6 ans.

²⁹⁶ Cf. par exemple, DEHAENE, Stanislas et al. Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 2003, Vol. 20, p. 487–506 ; DEHAENE, Stanislas et CHANGEUX, Jean-Pierre. Development of Elementary Numerical Abilities: A Neuronal Model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 1993, 5, p. 390-407.

²⁹⁷ Selon Piaget, l'enfant acquiert le nombre lorsqu'il devient conservant. La conservation est la capacité de l'enfant à comprendre que deux quantités égales demeurent égales malgré une transformation apparente, pourvu que rien ne soit enlevé ni ajouté aux deux quantités. Voir PIAGET, Jean et SZEMINSKA, Alina, *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1941.

En remettant en question la conception piagétienne de la genèse du nombre, les nativistes²⁹⁸ contestent l'idée selon laquelle les nourrissons naissent sans capacités numériques. Ils soutiennent plutôt l'existence d'un « noyau de capacités numériques »²⁹⁹ qui leur permet de représenter approximativement les numérosités. Cependant, les nativistes adoptent une conception strictement innée du nombre, ce qui les a conduit à soutenir que le développement des capacités numériques se produit indépendamment des conditions socio-culturelles ou socio-environnementales. Comme nous le verrons dans les lignes qui suivent, certaines thèses piagésiennes et nativistes sont aujourd'hui contredites et dépassées par les résultats des neurosciences cognitives, mais cela ne devrait pas conduire à un rejet systématique de l'ensemble de ces théories. Étant donné que ces théories continuent de jouer un rôle central dans la formation du neuro-cognitivism, il est essentiel de les examiner attentivement à la lumière des modèles proposés par les neuroscientifiques cognitivistes afin de déterminer les éléments qui demeurent essentiels et valides.

Dans le cadre d'une critique des travaux de Piaget et des nativistes, il convient de noter que les récentes investigations neuropsychologiques menées par Dehaene et ses collaborateurs ont remis en question ces conceptions piagésiennes et nativistes par le fait qu'elles mettent en évidence le fait que l'appréhension du concept de nombre par l'enfant fait intervenir conjointement les capacités proto-arithmétiques innées et les interactions avec le monde extérieur. Comme le souligne Dehaene, « *le cerveau s'attend à trouver dans le monde extérieur, des objets mobiles dont les combinaisons obéissent aux règles de l'arithmétique* »³⁰⁰. Il est donc nécessaire de différencier la théorie de la genèse du nombre de Dehaene de celles développées par Piaget et les nativistes.

²⁹⁸ Le nativisme admet que dès la naissance, l'homme possède un « noyau cognitif », qui aurait pour rôle de favoriser la représentation des symboles numériques. Cette vision du nativisme est, par conséquent, opposée au constructivisme de Piaget qui conçoit le nombre comme résultant d'une construction logico-mathématique. Concevant le nombre comme une structure innée, le nativisme admet que son acquisition ne nécessite pas les facteurs extérieurs ou socio-environnementaux.

²⁹⁹ Chez les nativistes, le noyau de capacités numériques est en quelque sorte le substrat de la cognition mathématique. C'est une structure innée à la naissance qui permettrait aux enfants de comparer, d'additionner et de soustraire les petites numérosités. Pour les nativistes, cette capacité mathématique, inhérente à la naissance, se développe indépendamment de l'expérience, c'est-à-dire des facteurs socio-culturels. Afin de justifier cette thèse, Gelman et Gallistel ont proposé cinq (5) principes qui sous-tendent l'acquisition du dénombrement chez l'enfant sans l'aide de l'influence environnementale. Ce sont : 1- le principe d'ordre stable, 2- le principe de stricte correspondance terme à terme, 3- le principe de cardinalité, 4- le principe d'abstraction et 5- le principe de non-pertinence de l'ordre. Pour connaître les détails de ces principes, voir FAYOL, Michel. *L'acquisition du nombre*, Paris, Presses universitaires de France, 2018.

³⁰⁰ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, *op. cit.*, p. 10.

La thèse principale avancée par Dehaene est que les êtres humains, y compris les nouveau-nés et les êtres non-humains, naissent avec une intuition du nombre appelée également « le sens du nombre ». Selon Dehaene, cette intuition du nombre se développe progressivement chez l'enfant grâce à l'influence de l'environnement socio-culturel sur le cerveau. Avant de passer à la présentation des expériences qui étayent cette hypothèse de Dehaene, il est important de dissiper toute confusion pouvant exister quant à l'usage du terme de « nombre » dans cette sous-section.

En mathématiques pures et plus précisément en arithmétique, un nombre est d'ordinaire un symbole numérique utilisé pour désigner des quantités. Les nombres couramment utilisés en arithmétique sont, en général, les nombres entiers naturels (0, 1, 2, 3, 4, etc.). On trouve également d'autres types de nombres tels que les nombres relatifs (-1, -2, -3, etc.), les nombres décimaux (0,01, 0,02, -0,05, etc.) et les nombres rationnels ($\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, etc.). Toutefois, il convient de préciser que dans la théorie de Dehaene présentée ici, le terme « nombre » ne renvoie pas nécessairement à une symbolisation numérique. Contrairement à la conception habituelle, le nombre est considéré par les neuroscientifiques cognitivistes, et notamment par Dehaene, comme une perception non-symbolique ou une représentation mentale du cerveau. Pour être plus précis, Dehaene conçoit le nombre comme « *une construction du cerveau liée à la perception de la "numérosité", c'est à la fois un produit de l'évolution biologique et de l'évolution culturelle de l'homme* »³⁰¹.

Selon la perspective de Dehaene sur la conception du nombre, le nombre chez les nourrissons ou les animaux ne doit pas être comprise comme un symbole numérique, mais plutôt comme une perception non-symbolique où la numérosité est présentée sous la forme d'un ensemble de points, d'objets, de séquences ou de sons³⁰². Il est donc important de faire une distinction entre la numérosité, qui désigne la quantité d'un ensemble d'objets, et le nombre symbolique, qui résulte d'un dénombrement réel. Cette distinction revêt une grande importance, car nous découvrirons que les nombres symboliques et les calculs arithmétiques qu'ils impliquent sont le produit de l'éducation culturelle et de l'apprentissage, propres aux êtres humains, contrairement à la numérosité ou à l'intuition du nombre, qui sont innées et présentes

³⁰¹ DEHAENE, Stanislas. Qu'est-ce qu'un nombre ? *Recherche-Paris*, 2001, p. 46.

³⁰² Par exemple, si un enfant voit un tableau comportant 13 points, la numérosité du tableau est de 13. De même, si un enfant entend une séquence comportant 3 sons, la numérosité de la séquence est de 3. Cf. DEHAENE, Stanislas. Psychologie cognitive expérimentale. *L'annuaire du Collège de France*, 108, 2008, p. 279. Disponible sur le web : <http://journals.openedition.org/annuaire-cdf/114> ; DOI : 10.4000/annuaire-cdf.114.

chez certains animaux. Maintenant que nous avons clarifié cette apparente confusion liée à la notion de nombre, il est nécessaire d'explorer les systèmes de base ou les systèmes neuronaux qui sont associés à l'intuition du nombre ou à la numérosité selon les neuroscientifiques cognitivistes.

Globalement, les expériences neurobiologiques et neuropsychologiques menées pour étudier les capacités cognitives liées à la numérosité attestent l'existence de circuits neuronaux chez les enfants, les adultes et chez certains animaux. Le premier est appelé « le système de petits ensembles » et est considéré comme étant le circuit neuronal responsable de la représentation des petites numérosités (\geq à 3 *objets*). Ce système de petites numérosités est aussi appelé la subitisation. Le second système est appelé « le système approximatif du nombre » ou l'estimation et est considéré comme le circuit neuronal sous-jacent à la représentation des grandes numérosités ($<$ à 3 *objets*). Ainsi, les neuroscientifiques cognitivistes distinguent ces deux systèmes en fonction de leur niveau d'implication dans le traitement des numérosités, soulignant ainsi l'existence de circuits neuronaux spécifiques pour la perception et la représentation des petites et des grandes quantités.

Les études expérimentales menées jusqu'à présent sur le système de représentation des petites numérosités ont donné des résultats imprécis et parfois contradictoires. Cette situation continue de susciter des controverses quant à son réel rôle dans la représentation des numérosités. En effet, au sein du domaine des neurosciences cognitives, le débat persiste pour savoir si la subitisation est un système spécifique de représentation des numérosités ou s'il est impliqué dans la construction des nombres symboliques. Des expériences réalisées séparément en 2004 par Landerl, Bevan et Butterworth³⁰³ ainsi que par Feigenson et Dehaene³⁰⁴ ont montré similairement que les nourrissons étaient capables d'appréhender subitement et directement les petites numérosités (1, 2 ou 3) à travers la subitisation, sans nécessiter de réflexion consciente. Ces expériences ont conduit à l'hypothèse selon laquelle les nouveau-nés posséderaient dès la naissance le concept de nombre ou une intuition numérique. Bien sûr, les nouveau-nés ne sont pas capables d'effectuer un comptage numérique précis dès la naissance, mais ils seraient en mesure d'effectuer des additions et des soustractions avec 1 à 2 ou 3 objets par le biais de la subitisation, sans commettre la moindre erreur. Ainsi, l'argument piagétien selon lequel les

³⁰³ LANDERL, Karine, BEVAN, Anna et BUTTERWORTH, Brian. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. *Cognition*. 2004, 93 (2), p. 99-125.

³⁰⁴ FEIGENSON, Lisa, DEHAENE, Stanislas et SPELKE, Elisabeth. Core systems of number *Trends. Cognitive Sciences*. 2004, 8 (7), p. 307- 314.

enfants acquièrent le concept de nombre tardivement est remis en question. Sur la base de ces observations, Dehaene et certains neuroscientifiques cognitivistes ont avancé l'idée que la subitisation serait l'élément primitif de la représentation des petites numérosités.

Cependant, les expériences réalisées récemment en 2015 par Soto-Calvo³⁰⁵ ont apporté des résultats contrastant avec les expériences réalisées par l'équipe de recherche de Dehaene. Ces nouvelles expériences ont révélé une forte implication de la subitisation dans l'acquisition des nombres symboliques, c'est-à-dire dans le comptage des nombres précis. L'étude expérimentale en question, réalisée par Soto-Calvo et ses collaborateurs, a été menée sur les enfants de 4 à 5 ans et avait précisément pour but d'approfondir les liens que la subitisation entretient avec les petites numérosités. En sous-estimant les connaissances symboliques des enfants testés, l'étude devrait permettre de mesurer la précision et le temps requis par chaque enfant pour discriminer un ensemble de 1 à 3 points. Les résultats de cette étude ont révélé que les temps de réponse dans cette tâche de discrimination étaient fondamentaux pour l'acquisition des nombres symboliques chez les enfants³⁰⁶. Cela laisse penser que non seulement la subitisation constitue la base des compétences numériques non-symboliques, mais qu'elle joue également un rôle fondamental dans l'acquisition des nombres précis ou symboliques. Cependant, cette conclusion reste sujette à débat et nécessite des recherches supplémentaires pour parvenir à une compréhension plus approfondie de la contribution de la subitisation dans l'acquisition des nombres précis. Dans la mesure où les résultats de Soto-Calvo remettent en question l'implication réelle de la subitisation, il est nécessaire de se tourner vers le système approximatif du nombre pour mieux expliquer nos capacités cognitives à construire les nombres symboliques.

Si l'implication réelle de la subitisation est encore débattue par les cognitivistes contemporains, nous disposons en revanche de plusieurs études expérimentales qui semblent avoir mis en évidence le rôle précis du système approximatif du nombre dans l'acquisition des nombres symboliques. Dehaene et un groupe de chercheurs, comprenant des linguistes et des

³⁰⁵ SOTO-CALVO, Elena, SIMMONS, Fiona, WILLIS, Catherine et ADAMS, Anne-Marie. Identifying the cognitive predictors of early counting and calculation skills: Evidence from a longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2015, 140, p. 16-37.

³⁰⁶ GIMBERT, Fanny, *L'appréhension des quantités par la vision ou le toucher : son développement et son rôle dans les apprentissages numériques chez l'enfant*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2016, p. 45.

neuropsychologues³⁰⁷ ont mené une expérimentation auprès d'enfants et d'adultes vivant dans la forêt amazonienne. La particularité de ces personnes est qu'ils n'ont jamais reçu d'éducation mathématique depuis leur naissance. Pourtant, l'expérimentation a révélé qu'ils possèdent une aptitude numérique spontanée grâce à laquelle ils pouvaient présenter « *des grands nombres sous forme d'ensembles animés d'objets* »³⁰⁸. Ce constat justifie le fait que l'absence d'éducation mathématique n'affecte pas réellement notre capacité cognitive de représenter approximativement les nombres.

Les résultats de cette expérimentation confirment les expériences antérieures de Karen Wynn³⁰⁹ qui indiquaient que les compétences arithmétiques telles que l'addition et la soustraction sont déjà intégrées dans l'appareil cérébral des bébés à la naissance. Feigenson, Mazocco et d'autres psychologues ont également montré, à l'aide de différentes méthodes, que les nourrissons sont capables d'effectuer des comparaisons approximatives en visualisant des ensembles d'objets de 8 à 16 points³¹⁰. Les expériences réalisées par Elisabeth Spelke et Xu en 2000³¹¹ ont, en plus, montré que le système approximatif du nombre permet aux nouveau-nés de présenter visuellement et auditivement les grandes numérosités. Toutes ces expériences confirment que le système approximatif du nombre, présent autant chez les adultes que chez les nourrissons dès la naissance, serait à l'origine de la représentation des grandes numérosités. Cela suggère que l'intuition du nombre, qui permet de représenter les quantités numériques, de les comparer, d'effectuer des opérations d'addition et de soustraction avec des nombres non-symboliques, est innée chez les êtres humains. Dehaene et ses collaborateurs ont également cherché à identifier les zones spécifiques du cerveau qui s'activent lors du traitement numérique. Les données neurophysiologiques indiquent que le sillon intrapariétal est la région la plus importante pour la représentation approximative des nombres³¹².

³⁰⁷ PICA, Pierre, LEMER, Cathy, IZARD, Véronique et DEHAENE, Stanislas. Quais são os vínculos entre aritmética e linguagem ? Um estudo na Amazônia. *Revista de Estudos e Pesquisas*, 2005, 2 (1), p.199-236. Et PICA, Pierre, LEMER, Cathy, IZARD, Veronique et DEHAENE, Stanislas. Exact and approximate arithmetic in an amazonian indigene group. *Science*. 2004, 306 (5695), p. 499-503.

³⁰⁸ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, *op. cit.*, p. 10.

³⁰⁹ WYNN, Karen. Addition and subtraction by human infants. *Nature*. 1991, 358, p. 748-750.

³¹⁰ HALBERDA, Justin, MAZZOCCO, Michele et FEIGENSON, Lisa. Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*. 2008, 455 (7213), p. 665-668.

³¹¹ XU, Fei et SPELKE, Elisabeth. Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 2000, 74 (1), B1-B11.

³¹² La déclaration de Stanislas Dehaene sur les zones cérébrales activées lors des manipulations numériques est remarquable « *toutes les tâches qui évoquent un sens de la quantité- addition, soustraction, comparaison, mais*

Se fiant aux résultats de ces nombreuses expériences, Dehaene a formulé son hypothèse phylogénétique postulant que les humains auraient hérité de l'intuition du nombre, en tant que capacités mathématiques précoces innées dès la naissance. C'est bien cette idée qu'il traduit à travers cette phrase : « *homo sapiens a hérité de ces capacités proto-mathématiques* »³¹³. La présence du système approximatif du nombre autant chez les nourrissons que chez les adultes amazoniens a conduit Dehaene à postuler l'existence d'une continuité phylogénétique de cette capacité numérique. Dehaene soutient, en clair, que le système approximatif du nombre se développe génétiquement en parallèle avec le développement post-natal, au cours duquel les humains acquièrent la signification des nombres symboliques ainsi que la capacité à dénombrer ou de compter.

L'observation du système approximatif du nombre chez les bébés et les adultes a éveillé l'intérêt de nombreux neuropsychologues. Certains chercheurs ont donc entrepris des études expérimentales sur les animaux, notamment sur les singes pour déterminer si les humains partageaient cette capacité de représentation numérique avec les êtres non-humains. C'est dans cette optique que Nieder³¹⁴ et son équipe ont réalisé des expérimentations sur des singes en 2004. Leur objectif était d'étudier l'activité neuronale des singes préalablement entraînés à effectuer une tâche de comparaison de numérosités. Dans cette étude, les singes entraînés devaient comparer deux ensembles comportant 1 à 5 objets chacun. Cette étude a permis aux chercheurs de découvrir que les neurones présents dans le cortex préfrontal et intra pariétal des singes réagissaient à la comparaison numérique. Cette découverte semble donc indiquer que les singes disposent, de manière similaire à l'homme, un système approximatif du nombre.

À la suite de l'étude expérimentale de Nieder, des chercheurs en cognition numérique comme Elisabeth Brannon³¹⁵ et d'autres ont cherché à étendre cette découverte à d'autres

aussi simple vision d'un chiffre ou dénombrement d'un nuage de point- activent un réseau reproductible de région, au premier rang desquelles figure le fond du sillon interpariétal ». Cf. DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, *op. cit.*, p. 13. Pour aller plus loin, voir aussi IZARD, Veronique et DAHEANE, Stanislas. Calibrating the mental number line. *Cognition*. 2008, 106, p. 1221-1247; Dehaene, STANISLAS. et al. Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*. 2004, vol. 14, p. 218-224.

³¹³ Stanislas DEHAENE. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, *op. cit.*, p. 9.

³¹⁴ NIEDER, Andreas et MILLER, Earl. A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2004, 101, p. 7457-7462. Voir aussi NIEDER, Andreas et al. Representation of the Quantity of Visual Items in the Primate Prefrontal Cortex. *Science*. 2002, 297, p. 1708-1711.

³¹⁵ BRANNON, Elisabeth. The representation of numerical magnitude. *Current Opinion in Neurobiology*. 2006, 16 (2), p. 222-229.

espèces animales, notamment les poissons, les pigeons, les perroquets, les oiseaux, les lions, les salamandres, etc. Dans l'ensemble, les expérimentations ont révélé la présence du système approximatif du nombre chez ces espèces animales³¹⁶. Tout comme les humains, ces animaux semblent donc posséder une intuition numérique grâce à laquelle ils peuvent comparer des ensembles d'objets, effectuer des additions et des soustractions non-symboliques. Des expériences psychophysiques visant à mesurer la moyenne du temps mis pour effectuer une tâche de numérosité ont montré que la représentation approximative de la numérosité chez les humains et les non-humains obéit à la loi de Weber. En effet, plus les grandeurs augmentent, plus l'imprécision croît proportionnellement aux nombres présentés³¹⁷.

Les études expérimentales et les expériences psychophysiques présentées jusqu'à présent mettent évidence l'existence de deux structures préexistantes chez les nouveau-nés, les enfants, les adultes et même chez certains animaux : la subitisation, bien que moins étudiée, et l'estimation. Le fait de saisir directement et spontanément les quantités numériques sans raisonner semble donc être lié à ces systèmes de représentation numérique. Ce qui consolide l'hypothèse phylogénétique de Dehaene selon laquelle les humains et les non humains possèdent une intuition numérique héritée de l'évolution³¹⁸. Maintenant, intéressons-nous à la façon ces deux systèmes de représentation numérique coopèrent dans le cerveau pour construire les nombres symboliques. Comment les circuits neuronaux d'intuition numérique que nous avons présentés expliquent-ils l'appréhension et l'acquisition des nombres symboliques ? Comment passe-t-on de la représentation de la numérosité à la construction des nombres qui servent de base à l'arithmétique ?

³¹⁶ Nous renvoyons aux études expérimentales réalisées sur certains animaux, notamment aux expériences réalisées sur les pigeons par HONIG, Werner et STEWART, Kathryn. Discrimination of relative numerosity by pigeons. *Animal Learning & Behavior*. 1989, volume 17, p. 134-146; sur les perroquets par PEPPERBERG, Irène A Tool for Assessing Conceptual Abilities in the African Grey Parrot. *Ethology*. 1987, 137; sur les dauphins par MITCHELL, Robert et al. Discriminative responding of a dolphin (*Tursiops truncatus*) to differentially rewarded stimuli. *Journal of Comparative Psychology*. 1985, 99 (2), p. 218-225. ; sur les lions publiés par MCCOMB, Karen, PACKER, Craig et PUSEY, Anne. Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, Panther Leo. *Animal Behaviour*. 1994, 47(2), p. 379-387, et sur les salamandres par ULLER, Claudia, JAEGER, Robert, GUIDRY, Gena, MARTIN, Carolyn. Salamanders (*Plethodon cinereus*) go for more: rudiments of number in an amphibian. *Animal Cognition*. 2003, 6, p. 105 -112.

³¹⁷ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, *op. cit.*, p. 11.

³¹⁸ GIMBERT, Fanny. *L'appréhension des quantités par la vision ou le toucher : son développement et son rôle dans les apprentissages numériques chez l'enfant*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2016, p. 72.

La représentation de la numérosité étant une question différente de l'acquisition et de la construction des nombres symboliques³¹⁹, les spécialistes en cognition numérique ont élaboré plusieurs hypothèses visant à donner une explication de notre capacité cognitive à appréhender et à construire les nombres symboliques au moyen du système de comptage. La première hypothèse, issue des travaux de Dehaene en collaboration avec des spécialistes de psychologie cognitive, suggérait initialement que le système de petites numérosités (la subitisation) et le système de grandes numérosités (l'estimation), tous deux présents dès la naissance, reposeraient sur un même mécanisme neuronal, auquel se superpose ultérieurement le système de comptage numérique, marquant ainsi le début de l'acquisition et de l'appréhension des nombres³²⁰. Les investigations réalisées en 2003³²¹ et en 2008³²² par Manuela Piazza et Susannah Revkin vont cependant infirmer cette première hypothèse défendue par Dehaene, ce qui l'a conduit à développer, en collaboration avec Cohen, une seconde hypothèse connue sous le nom de l'hypothèse du "recyclage neuronal"³²³.

Les principales thèses de cette seconde hypothèse sont largement inspirées de l'hypothèse d'épigenèse neuronale de Changeux. Selon Dehaene, le cerveau humain, en tant que machine cérébrale plastique, est capable d'une transformation épigénétique sous l'influence de l'éducation. Ce processus éducatif, qui implique systématiquement l'acquisition de la langue culturelle, des nombres symboliques et de la lecture, entraîne une profonde transformation du cerveau sans modifier son patrimoine génétique. L'hypothèse centrale du "recyclage neuronal"

³¹⁹ En neurosciences cognitives, les « nombres symboliques » font référence à la représentation mentale des nombres abstraits à travers les symboles (1, 2, 3, 4, 5, etc.) ou les mots. Par exemple, dans la langue française, les symboles "1", "2", "3", etc. sont utilisés pour représenter les nombres symboliques correspondants à un, deux, trois, etc. Ces nombres symboliques sont appris et utilisés par les individus pour effectuer des opérations mathématiques, comprendre les quantités et communiquer des valeurs numériques. Il est important de noter que les nombres symboliques ne se limitent pas aux nombres entiers, mais peuvent également inclure des nombres décimaux, des fractions, etc., en fonction du système numérique utilisé dans une culture donnée. Ils peuvent varier en fonction du contexte culturel, linguistique et mathématique dans lequel ils sont utilisés.

³²⁰ Pour revue, voir Hourya BENIS-SINACEUR. Philosophie de la neuropsychologie du nombre. *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, n°62, 2014/2, p. 103-144. Disponible sur https://www.persee.fr/doc/intel_0769-4113_2014_num_62_2_1035.

³²¹ PIAZZA, Manuel, IZARD, Veronique, PINEL, Phillipe, LE BIHAN, Denis et DEHAENE, Stanislas. Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*. 2004, 44 (3), p. 547-555.

³²² REVKIN, Susannah, PIAZZA, Manuel, IZARD, Véronique, COHEN, Laurent et DEHAENE, Stanislas. Does subitizing reflect numerical estimation ? *Psychological Science*. 2008, 19 (6), p. 607-614.

³²³ Cette hypothèse est développée en détail dans les articles suivants : DEHAENE, Stanislas. Fondements cognitifs de l'apprentissage scolaire. Cours n°1 : « Éducation, plasticité cérébrale et recyclage neuronal » Collège de France. Disponible sur <https://www.college-de-france.fr/site/stanislas-dehaene/course-2015-01-06-09h30.htm> ; DEHAENE, Stanislas. Evolution of cortical circuits for reading and arithmetic: the neuronal recycling hypothesis. In DEHAENE, Stanislas, DUHAMEL, Jean René, HAUSER, Marc et RIZZOLATTI, Giacomo. *From monkey brain to human brain*. 2005, MIT Press, Cambridge, Mass, 408 p.

est que l'acquisition des traits socio-culturels tels que le langage, les nombres symboliques (qui varient d'une culture à une autre) et celle de la lecture sont dus à un recyclage de l'architecture neuronale du cerveau par le biais de l'éducation. Puisque le cerveau est doté d'une plasticité et d'une flexibilité, il est prêt en à se reconfigurer et à être utilisé de manière différente en fonction des exigences l'éducation ou de l'environnement socio-culturel.

Dehaene utilise cette hypothèse apparemment correcte pour fournir une seconde explication de la compréhension et de l'appréhension des nombres symboliques. Tout d'abord, il suggère que le circuit neuronal de subitisation et celui de l'estimation, hérités de notre évolution, constituent incontestablement le fondement du développement des nombres symboliques³²⁴. La croyance de Dehaene était que la capacité de dénombrement à l'âge adulte découle de la mise en correspondance de l'intuition numérique, héritée de notre évolution phylogénétique, et de la signification des symboles numériques ou chiffrés (1, 2, 3, 4, etc.), produit de l'éducation culturelle et de l'apprentissage. Ainsi selon Dehaene, un adulte éduqué acquiert le système de comptage numérique en établissant une association entre la signification symbolique acquise par l'éducation culturelle et l'intuition du nombre préexistante dans son cerveau. Tentant d'expliquer la transition de la numérosité (à l'âge de l'enfance) à l'acquisition des nombres symboliques (à l'âge adulte), Dehaene déclare ce qui suit :

*dès qu'un adulte éduqué perçoit un nom de nombre ou un nombre en notation arabe, cette entrée symbolique est rapidement et automatiquement traduite mentalement en une quantité approximative dont la manipulation interne obéit aux mêmes lois que celles de la manipulation des numérosités perçues sous forme d'ensembles d'objets*³²⁵.

Dans ce passage, Dehaene suppose que le processus d'acquisition des nombres symboliques à l'âge adulte suit un processus similaire à la représentation approximative de la numérosité qui a lieu chez les nourrissons. Cela le conduit à établir une homologie entre la capacité des adultes à représenter les nombres symboliques et la capacité des nourrissons à représenter les numérosités. En fin de compte, Dehaene considère que la capacité des adultes à construire les nombres symboliques suit les mécanismes similaires à ceux observés lorsque les quantités numériques sont présentées chez l'enfant sous forme de numérosités à l'aide de stimuli, tels des ensembles de points ou des séquences de sons³²⁶. Cette perspective ontogénétique de Dehaene selon laquelle la construction des nombres symboliques se fait dans

³²⁴ *Idem*

³²⁵ DEHAENE, Stanislas. Psychologie cognitive expérimentale. 2008, *op. cit.*, p. 281.

³²⁶ PELLAND, Jean-Charles. *De Brouwer à Barsalou : l'intuitionnisme à l'ère des sciences cognitives*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec, 2008, p. 49.

la correspondance entre la signification culturelle du nombre symbolique et le système approximatif du nombre inné paraît logique et évidente. Cependant, la question demeure : comment cette correspondance est-elle établie et dans quelle zone précise du cerveau se produit-elle ?

Tel que souligné par Sinaceur dans ses observations critiques, le simple fait de mettre l'acquisition et l'appréhension des nombres symboliques en corrélation avec le système approximatif de numérosité et les symboles numériques ne constitue en aucun cas une véritable explication au niveau épistémologique. En effet, une corrélation ne peut en aucun cas se substituer à une explication approfondie³²⁷. Cette observation critique de Sinaceur est pertinente car Dehaene n'explique pas précisément comment s'établit la correspondance entre l'estimation et les nombres symboliques. Sa description de cette correspondance repose sur des observations psychophysiques qui sont spéculatives et difficiles à saisir. En effet, lorsqu'il s'agit d'expliquer le lien entre l'intuition numérique et les nombres symboliques, Dehaene avance l'explication suivante : « *l'appréhension de la numérosité approximative et les relations de distance entre les nombres, fondés sur la loi de Weber, jouent un rôle déterminant pour la bonne compréhension ultérieure de l'arithmétique symbolique* »³²⁸. Cependant, la loi de Weber n'étant pas accessible à l'œil nu, il est difficile de cerner le rôle joué par le système approximatif du nombre dans le processus de compréhension des nombres symbolique ? De plus, dans cette explication avancée par Dehaene, il semble que notre capacité à appréhender les nombres symboliques et à résoudre les calculs arithmétiques provienne exclusivement du système approximatif du nombre. Dehaene rejette ainsi l'implication du système de subitisation dans l'acquisition des nombres symboliques, comme en témoigne sa déclaration.

*Ce mécanisme [le système approximatif du nombre] sert de noyau fondamental des connaissances numériques, fournissant à l'homme un outil de départ qui permet l'acquisition de symboles numériques. La représentation analogue des quantités numériques sert de base pour notre intuition de ce qu'une grandeur numérique donnée signifie*³²⁹.

En considérant le système approximatif du nombre comme le système neuronal prédominant dans le processus mental d'appréhension et de construction des nombres symboliques, Dehaene exclut clairement la subitisation comme étant sans importance pour

³²⁷ BENIS-SINACEUR, Hourya. Philosophie de la neuropsychologie du nombre. 2014, *op. cit.*, p. 114.

³²⁸ DEHAENE, Stanislas. Psychologie cognitive expérimentale. 2008, *op. cit.*, p. 282.

³²⁹ PIAZZA, Manuel, IZARD, Veronique, PINEL, Phillipe, LE BIHAN, Denis et DEHAENE, Stanislas. Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*. 2004, 44 (3), p. 547-555.

l'acquisition des nombres. Sinaceur a raison de souligner que Dehaene fait partie du groupe des psychologues cognitivistes qui accordent une importance prédominante à l'estimation lorsqu'il s'agit de décrire le processus cognitif d'appréhension et de construction des nombres. Cependant, il convient de noter que tous les neuroscientifiques cognitivistes ne partagent pas le point de vue adopté par Dehaene et sa tendance³³⁰.

Une autre explication avancée par Dehaene concernant l'acquisition des nombres symboliques est que la mise en relation entre le système approximatif du nombre et la signification culturelle des nombres symboliques nécessite un processus d'éducation et plusieurs séances d'apprentissage. Étant donné que l'acquisition du nombre est étroitement liée à l'éducation culturelle, ce qui est largement admis par tous les neuroscientifiques cognitivistes, Dehaene croyait que les propriétés initiales de représentation approximative de numérosités, incarnées dès la naissance, permettent aux humains d'acquérir de façon automatique la signification des nombres, et que le rôle de l'éducation culturelle est d'améliorer les compétences numériques préexistantes, en favorisant le comptage et les calculs arithmétiques. Telle est l'idée fondamentale soutenue en toile de fond de ce passage.

Tous les enfants naissent avec une représentation de la quantité qui leur donne la signification de base de la quantité numérique. L'exposition au langage, à la culture, et à l'éducation mathématique, mène à l'acquisition de domaines de compétence additionnels comme un lexique de mots pour les nombres, un ensemble de numéraux pour la notation écrite, des procédures de calculs, et ainsi de suite³³¹.

Selon Dehaene, le système d'estimation, qui permet de représenter les numérosités, est un puissant prédicteur des nombres symboliques. En effet, ce mécanisme de représentation des numérosités, basé sur des neurones plastiques, peut être reconfiguré grâce à l'apprentissage culturel et mathématique, permettant ainsi aux individus d'acquérir la signification des nombres symboliques. Cela leur offre la capacité de compter et d'effectuer des calculs arithmétiques. Il

³³⁰ Dans son étude critique des recherches neuropsychologiques portant sur le sens du nombre, Sinaceur souligne que si les neuroscientifiques cognitivistes s'accordent sur l'existence de deux circuits neuronaux, à savoir la subitisation et l'estimation, la question de savoir si ces deux systèmes sont impliqués au même degré dans l'appréhension des nombres symboliques les divise en trois tendances opposées. La première tendance, celle de Dehaene, Gallistel et Wynn, estime que l'estimation est le mécanisme prédominant, parce que sa tâche déclenche une grande charge de la mémoire. La seconde tendance, celle menée par Carey et Pylyshyn, estime, au contraire, que la subitisation est le mécanisme permettant la construction des nombres non symboliques. La dernière tendance conduite par Xu, Hyde et Spelke, spécifie les tâches en accordant à l'estimation les tâches de représentation de grandes numérosités et à la subitisation les tâches de représentation de petites numérosités. Ce débat entre les spécialistes des sciences cognitives est loin d'être tranché. Cf. BENIS-SINACEUR, Hourya. Philosophie de la neuropsychologie du nombre. 2014, *op.cit.*, p. 118.

³³¹ DEHAENE, Stanislas et NACCACHE, Lionel. Towards a cognitive neuroscience of consciousness: Basic evidence and a workspace framework. *Cognition*. 2001, vol. 79, p. 12.

est important de noter que l'utilisation de l'hypothèse du "recyclage neuronal" par Dehaene pour expliquer l'appréhension et l'acquisition des nombres symboliques était une façon de souligner la continuité entre la phylogenèse et l'ontogenèse. Dehaene croyait fermement que notre capacité d'acquisition des nombres symboliques est biologiquement déterminée. Selon lui, grâce à l'évolution darwinienne qu'implique l'évolution biologique, la capacité biologique d'acquies les nombres symboliques se met en place de manière systématique au cours de l'évolution post-natale grâce à l'éducation. Ainsi, si les individus sont capables de comprendre la signification des nombres symboliques, d'effectuer des dénombrements, de faire les calculs arithmétiques, c'est parce que l'éducation reçue pendant le développement post-natal recycle drastiquement le système approximatif du nombre préexistant, permettant ainsi l'émergence de nouvelles capacités mathématiques. Dehaene suppose, en fin de compte, que les activités mentales liées à l'apprentissage arithmétique, telles que le comptage numérique, l'utilisation des notations symboliques ou arabes, la lecture, etc. s'expliquent d'une part par la préexistence de l'intuition du nombre et d'autre part par le recyclage neuronal.

Bien que Dehaene ait raison de souligner l'aspect phylogénétique selon lequel l'intuition du nombre, en tant que prédicteur des nombres symboliques, est un indice primitif hérité de l'évolution de l'espèce humaine, sa thèse ontogénétique suggérant une homologie entre la représentation de la numérosité chez les jeunes enfants et l'acquisition des symboles numériques chez les adultes semble peu plausible. En fait, certaines expériences, telles que les études comportementales menées par Susan Carey et Le Core en 2007³³², ainsi que celles menées récemment en 2016 par Leibovich et Ansari³³³, ont infirmé cette interprétation ontogénétique d'acquisition des nombres symboliques. Ces études comportementales ont montré de manière convergente que les enfants acquies la signification des nombres symboliques un peu plus tard, après avoir acquis la notion de cardinalité. Cela suggère que l'intuition du nombre et l'acquisition des nombres symboliques ne sont pas précocement reliés chez les jeunes enfants, contrairement à ce que Dehaene avançait. Les résultats de ces études comportementales ont permis à Suzanne Carey de proposer une nouvelle interprétation de l'appréhension et de l'acquisition des nombres dans le domaine l'arithmétique.

³³² Mathieu LE CORRE & Susan CAREY. One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*. 2007, 105 (2), p. 395-438.

³³³ LEIBOVICH, Tali et ANSARI, Daniel. The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*. 2016, 70 (1), p. 12-23.

L'argument principal de l'ontogenèse selon Carey est que l'acquisition / l'appréhension des nombres symboliques se fait de façon discontinue. Bien qu'elle reconnaisse que les mécanismes de numérosités incarnés sont des prédicateurs de nombres symboliques, Carey rejette le déterminisme biologique défendu par Dehaene, qui soutient que notre capacité d'acquisition des nombres symboliques est biologiquement déterminée. Au contraire, Carey affirme que les enfants acquièrent réellement la signification des nombres symboliques après l'acquisition de la cardinalité, c'est-à-dire après avoir maîtrisé le système de comptage³³⁴. La question demeure de savoir comment s'établit la corrélation entre les circuits de représentation de numérosités et les nombres symboliques. Afin de rendre compte de cette corrélation, Carey développe le processus de « *bootstrapping* »³³⁵. Selon ce processus, l'enfant apprend à construire la série des nombres à partir d'un certain échantillon initial incorporé dans les systèmes de numérosités. De façon similaire à Dehaene, Carey fait reposer la construction des nombres symboliques sur les facteurs internes incluant les mécanismes innés du noyau cognitif et les facteurs extérieurs incluant l'apprentissage³³⁶. Mais, contrairement à Dehaene, qui fait reposer le processus d'acquisition des nombres symboliques sur l'estimation, Carey estime que ce processus repose sur le système de subitisation. Cette attitude de Carey consistant à minimiser le système approximatif de numérosité dans son ontogenèse soulève des questions philosophiques qui ne nécessitent pas d'être analysées ici³³⁷.

Les recherches de Carey sur les comportements des enfants révèlent que les nourrissons possèdent un mécanisme primaire de quantification qui leur permet de comparer les numérosités indépendamment du langage. Par exemple, dès l'âge de 2 à 6 mois, les nouveau-nés auraient la capacité de subitiser, c'est-à-dire de faire une distinction approximative entre « un », « deux » et « plusieurs » bien avant l'acquisition du langage. Selon Carey, cette capacité précoce de représenter les petites numérosités se perfectionne au fil de l'évolution grâce à ce

³³⁴ LE CORRE, Mathieu et CAREY, Susan. One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles, *op. cit.*, p. 395-438.

³³⁵ CAREY, Susan. Bootstrapping & the origin of concepts. *Daedalus: Journal of the American Academy of Arts & Sciences*. 2004, 133 (1), p. 59-68.

³³⁶ CAREY, Susan. *The origin of concepts*, New York, Oxford University Press, 2009, 608 p.

³³⁷ Carey explique le processus d'acquisition des nombres symboliques exclusivement à partir du mécanisme de subitisation, ce qui laisse penser que l'estimation ou le système approximatif de numérosité n'y joue aucun rôle. Carey a-t-elle raison de prendre seulement en compte les capacités de petites numérosités ? Pouvons-nous ainsi dire que l'estimation ne joue aucun rôle dans l'acquisition des nombres symboliques ? Lorsque le système de comptage de l'enfant va au-delà de 4, le système de grandes numérosités ne serait-il pas impliqué ? Comment tenir-compte de l'ontogenèse de Dehaene basée sur les mécanismes de grandes numérosités ? Ce sont là quelques questions philosophiques que suscite la position de Carey.

qu'elle appelle le mécanisme d'individuation parallèle³³⁸. En tant que processus de création et de construction personnelle dû à l'influence de l'environnement, l'individuation parallèle enrichit la capacité préverbale et la capacité de représentation numérique de l'enfant. Lorsque la capacité de représentation numérique de l'enfant commence à se perfectionner, il est capable, très tôt, d'effectuer des appariements entre deux ensembles d'objets, bien avant l'acquisition du système de comptage. À partir des dispositions internes de son noyau cognitif et de l'individuation parallèle, l'enfant, selon Carey, se construit un répertoire conceptuel et linguistique, qui lui permettra d'apprendre la signification des mots-nombres. Vers l'âge de 2 ans, l'enfant développe une comptine numérique qui lui permet d'appréhender le principe de cardinalité et le principe d'ordre. À ce stade de développement comportemental, l'enfant commence à énoncer les premiers nombres entiers dans l'ordre croissant. Il utilise ses capacités de subitisation innées pour réciter les nombres de 1 à 3 sans toutefois procéder à un véritable dénombrement ni comprendre leur signification, car il ne parvient pas encore à associer chaque mot-nombre au symbole numérique qui lui correspondrait.

L'explication que donne Carey relativement à la compréhension effective de la signification des nombres symboliques est due à Wynn, qui avait montré que la compréhension des nombres symboliques implique l'association d'un mot-nombre à son symbole numérique et que cette association³³⁹ nécessite un apprentissage prolongé³³⁹. Grâce aux capacités numériques innées de l'enfant combinées à l'apprentissage, celui-ci commence donc à établir des correspondances entre les mots-nombres et les collections, en utilisant une représentation analogique. Cela lui permettra ultérieurement de comprendre les mots-nombres correspondant à chaque symbole numérique. S'ensuit la mise en place d'une chaîne numérique dont le principe de succession de nombre s'énonce comme suit : « *si le mot numérique X fait référence à un ensemble de valeur cardinale n, le mot numérique suivant dans la liste fait référence à un ensemble de valeur cardinale n+1* »³⁴⁰.

À suivre l'interprétation ontogénétique de Carey, l'étape du principe de succession est une étape cruciale pour l'acquisition du dénombrement réel, car à ce stade, l'enfant doit faire preuve d'induction pour construire la série des nombres entiers, en ajoutant successivement 1

³³⁸ LE CORRE, Mathieu et CAREY, Susan. One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles, *op. cit.*, p. 397. Voir aussi CAREY, Susan. Cognitive foundations of arithmetic, Evolution and ontogenesis. *Mind & Language*. 2001, 16 (1), p. 37-55.

³³⁹ WYNN, Karen. Children's understanding of counting. *Cognition*. 1990, 36 (2), p. 155-193.

³⁴⁰ CAREY, Susan. Bootstrapping & the origin of concepts. 2004, *op. cit.*, p. 67.

au nombre symbolique précédant. On observe ici un lien de parenté avec la méthode itérative de Poincaré esquissée plus haut. C'est finalement entre l'âge de 3 et 4 ans que l'enfant parvient à acquérir simultanément le système de comptage exact et la signification des nombres symboliques, marquant ainsi le début de l'arithmétique. On retiendra que selon Carey, l'enfant acquiert les nombres symboliques grâce au processus de « *bootstrapping* », qui combine les capacités de subitisation incarnées dans le noyau cognitif et la chaîne numérique verbale qui se développe progressivement grâce à l'apprentissage. Cette approche d'acquisition des nombres symboliques proposé par Carey semble plus correcte que celle de Dehaene du point de vue cognitif, car elle nous éclaire sur certains détails précis qui font défaut chez Dehaene, notamment le passage logique de l'appréhension des numérosités à l'acquisition des nombres symboliques.

Il convient de souligner que le processus neurocognitif proposé par Carey n'a pas en vue d'exclure les prédispositions phylogénétiques préexistantes chez l'enfant et à faire reposer la construction des nombres symboliques uniquement sur un processus d'apprentissage ontogénétique. Comme nous l'avons vu, Carey admet l'existence des systèmes neurocognitifs de numérosités, ce qui suppose qu'elle fait ancrer la construction des nombres dans la phylogénie (la subitisation en particulier). Cependant, contrairement à Dehaene, qui explique le processus d'apprentissage ontogénétique en se référant à l'homologie comportementale, Carey estime, au contraire, qu'un tel processus ne se déroule pas automatiquement au cours de l'évolution phylogénétique. Le mérite de Carey réside dans sa démonstration précise que les processus d'acquisition et d'appréhension des nombres se déroulent de manière discontinue chez l'enfant.

Nous nous sommes intéressés à l'intuition du nombre et aux théories d'ontogenèse de ces deux spécialistes de psychologie cognitive dans le but de comprendre le rôle de l'intuition dans l'appréhension de la numérosité et dans le processus d'acquisition des nombres symboliques. Bien vrai que ces deux conceptions ontogénétiques rencontrent certaines divergences, elles montrent de façon raisonnable et similaire qu'il est impossible de saisir et de comprendre les nombres symboliques sans prendre en compte l'intuition du nombre, qui relève de la phylogénie et du développement ontogénétique qui intervient ultérieurement. En réalité, l'intuition du nombre, présente chez l'enfant dès la naissance, se développe dans un processus d'individuation grâce à l'apprentissage culturel, ce qui lui permet d'acquérir ultérieurement les nombres symboliques.

Si ce fait est avéré par plusieurs recherches expérimentales, dont nous avons présenté les plus récentes, il faut cependant admettre que ce fait ne constitue que le premier niveau de la construction des nombres. La preuve en est que les recherches de Dehaene et de Carey ne se penchent pas sur les concepts mathématiques de haut niveau, mais se limitent à l'explication des nombres symboliques. Or, il est largement admis que l'acquisition des nombres symboliques n'est pas suffisante pour comprendre les concepts abstraits des mathématiques pures. La connaissance mathématique débute certainement par un niveau de base qui est l'acquisition des nombres symboliques, mais si l'on souhaite comprendre l'abstraction qui caractérise les mathématiques pures, il est évident que ce niveau de base ne serait pas suffisant, d'où la nécessité de s'élever à un niveau supérieur correspondant aux mathématiques avancées dignes d'un niveau secondaire ou universitaire. Une question se pose alors : comment se fait l'acquisition des concepts mathématiques purement abstraits, c'est-à-dire des concepts mathématiques qui ne peuvent pas être associés à des collections ou à des objets empiriques ? En d'autres termes, comment se fait l'organisation de la représentation des concepts mathématiques abstraits dans le cerveau ?

Pour répondre à cette question extrêmement complexe, il est nécessaire de présenter brièvement la théorie d'abstraction de Barsalou, qui repose sur le modèle des systèmes symboliques perceptifs³⁴¹. Ce modèle propose une explication de la cognition à un niveau supérieur, incluant l'abstraction. Selon l'hypothèse de Barsalou, la représentation des concepts abstraits est étroitement liée aux systèmes symboliques perceptifs (PSS), qui agissent comme des simulateurs. Ces symboles perceptifs auraient pour rôle d'activer les groupes de neurones une fois qu'un objet est visualisé. Cela signifie que les expériences perceptivo-motrices constituent la base de la représentation des concepts abstraits. Bien que la théorie de Barsalou ne traite pas directement de l'acquisition des concepts mathématiques abstraits, Pelland a montré comment elle pouvait être étendue à la question des composantes cognitives de l'abstraction mathématique³⁴².

³⁴¹ Pour revue, voir BARSALOU, Lawrence. Perceptual symbol systems. *Behavioral and Brain Sciences*. 1999, vol. 22, p. 557-660 ; Lawrence BARSALOU, L'abstraction comme interprétation dynamique dans les systèmes de symboles perceptifs. *Création de catégories d'objets au cours du développement*. 2005, p. 389-431.

³⁴² Nous renvoyons le lecteur au mémoire de maîtrise de PELLAND, Jean Charles. *De Brouwer à Barsalou : l'intuitionnisme à l'ère des sciences cognitives*, disponible sur le web : Disponible sur https://www.academia.edu/2590483/De_Brouwer_%C3%A0_Barsalou_lintuitionnisme_%C3%A0_l%C3%A8re_des_sciences_cognitives_Masters_.

Lors de la présentation du récit de Poincaré sur l'invention mathématique, nous avons constaté que l'intuition et l'émotion jouent un rôle essentiel dans le choix ou la sélection des idées heureuses conduisant à l'invention. Comment les neurosciences cognitives interprètent-elles ce phénomène ? Est-il vrai que l'émotion guide le choix ou la prise de décision ? La sous-section suivante abordera cette question pour tenter d'y apporter une réponse.

III-L'interaction intuition / émotion dans la prise de décision

Afin d'évaluer la validité de la thèse poincaréenne qui soutient que l'intuition et l'émotion interagissent dans la sélection des idées, il est essentiel de comprendre le processus décisionnel et de caractériser objectivement le rôle crucial que ces deux éléments jouent dans la prise de décision. Dans cette optique, nous poursuivons notre exploration des théories cognitives dans cette sous-section, en examinant plus particulièrement les théories de prise de décision intuitive telles que la théorie des marqueurs somatiques de Damasio et les deux systèmes de pensée décrits par Kahneman. Ces deux théories revêtent une importance particulière, car elles permettent d'approfondir notre compréhension de la contribution de l'intuition et des émotions dans le processus de prise de décision, tout en offrant la possibilité d'appréhender plus clairement le rôle de l'intuition mathématique évoqué par Poincaré.

Depuis la conférence de Poincaré devant la société de psychologie en 1908, son récit a suscité l'intérêt de plusieurs études psychologiques. Ces recherches se sont intensifiées avec l'engouement croissant des neurobiologistes et des neurophysiologistes pour l'impact des facteurs somatiques sur le processus décisionnel. C'est dans cette optique que le neurobiologiste Antonio Damasio a développé la théorie des marqueurs somatiques afin d'expliquer le processus de prise de décision intuitive. Contrairement aux idées des philosophes classiques sur la prise de décision, les études menées en neurobiologie et en neurophysiologie par Damasio et ses collègues suggèrent que les émotions, en tant que réactions physiologiques, jouent un rôle crucial dans ce processus. Ces études, qui cherchent à comprendre la contribution des facteurs somatiques dans le processus cognitif de prise de décision, mettent en évidence une étroite interconnexion entre les états émotionnels et l'intuition, comme nous le découvrirons.

La théorie des marqueurs somatiques, développée par Damasio afin d'expliquer la faculté de prise de décision et de raisonnement, prend racine dans des études menées en collaboration avec ses collègues (Bechara, Anderson) sur des patients souffrant de lésions dans la partie ventro-médiane du cortex préfrontal. Ces neurobiologistes ont constaté en laboratoire que les

sujets atteints de lésions dans cette région, bien qu'étant conscients, éprouvaient de nombreuses difficultés à prendre des décisions simples. Étant donné que ces sujets ne présentaient aucune anomalie visible au niveau conscient, Damasio et son équipe ont décidé d'effectuer des tests neuropsychologiques pour mieux comprendre leur comportement. Ils ont ainsi soumis les patients à un test diagnostique de prise de décision appelé "Iowa Gambling Task" (IGT), qui met en lumière l'influence des émotions dans le processus décisionnel. La réussite de ce test dépend du bon fonctionnement du système émotionnel.

Dans le cadre de ce test, les chercheurs mettent en place quatre tas de cartes (A, B, C, D), dont deux sont désavantageux et les deux autres sont avantageux. Les participants, qu'ils soient en bonne santé ou atteints de troubles, doivent sélectionner les cartes avantageuses afin de maximiser leurs gains et améliorer leur situation financière. En revanche, choisir les cartes désavantageuses entraîne des pertes considérables. Les expérimentateurs constatent que les individus en bonne santé, c'est-à-dire ceux qui ne souffrent d'aucune lésion neurologique, optent pour les cartes avantageuses et augmentent leurs gains. En revanche, les sujets atteints de lésions dans le cortex préfrontal ventro-médian persistent à choisir les cartes désavantageuses, sans percevoir les conséquences financières de leurs mauvais choix. Ce qui surprend les expérimentateurs, c'est que ces participants atteints ne manifestent aucun signe de regret, ne montrent aucune émotion face à leurs mauvaises décisions et semblent indifférents aux conséquences que celles-ci ont sur leur situation financière. En observant que les sujets atteints de lésions dans le cortex préfrontal ventro-médian réagissent de manière physiologique très différente des sujets en bonne santé, Damasio et ses collègues concluent que les mauvais choix effectués par les personnes atteintes de lésions neurologiques sont liés à un dysfonctionnement du système émotionnel. C'est à partir des résultats de ce test que Damasio a développé sa théorie des marqueurs somatiques.

Le postulat fondamental de cette théorie affirme que les émotions jouent un rôle primordial dans le processus cognitif de prise de décision rapide. Sur le plan scientifique, la théorie des marqueurs somatiques remet en cause la conception classique de la prise de décision, qui considérait celle-ci comme étant purement rationnelle et dépourvue d'influences émotionnelles. En accordant une place prépondérante aux facteurs somatiques (émotions) dans le processus décisionnel, la théorie des marqueurs somatiques dépasse donc les limites de l'ancienne conception. Dans *L'erreur de Descartes*, Damasio examine le processus de raisonnement et de prise de décision, en identifiant deux possibilités distinctes. La première

repose sur le raisonnement pur, tel que promu par les philosophes classiques tels que Platon, Descartes et Kant, qui considéraient la prise de décision comme étant entièrement rationnelle, dépourvue d'influences émotionnelles. La seconde possibilité, mise en évidence par Damasio et ses collègues, met en avant les marqueurs somatiques. Selon cette approche, la prise de décision implique des états émotionnels³⁴³.

Selon le modèle du raisonnement pur prôné par les philosophes classiques, la prise d'une décision adéquate suit un processus purement rationnel. Dans cette approche, il est nécessaire de mettre de côté les émotions (les réactions affectives) et de s'appuyer sur ses connaissances conceptuelles. Grâce aux connaissances conceptuelles, on procède ensuite à une analyse logique des tenants et des aboutissants de chaque possibilité de choix, c'est-à-dire en éliminant progressivement des choix désavantageux, jusqu'à parvenir à une décision appropriée. Dans cette perspective, les émotions sont perçues comme un élément dangereux pouvant fausser un choix judicieux. Descartes, qui défendait cette vision, considérait les émotions comme étant à l'opposé de la raison, estimant qu'une personne laissant ses émotions prendre le dessus ne peut effectuer un choix raisonnable et avisé.

Cependant, dans notre vie quotidienne, nous prenons des décisions (parfois inconsciemment) sans suivre ce processus long, qui peut même conduire à des décisions erronées en raison de calculs inutiles et parfois préjudiciables à l'esprit. Damasio remet en question l'approche traditionnelle de la prise de décision, fondée sur le raisonnement pur, car les stratégies utilisées sont souvent longues et lacunaires, ce qui rend difficile la prise de décisions judicieuses. C'est pourquoi il propose de dépasser cette conception classique en accordant une place prépondérante aux marqueurs somatiques dans le processus de prise de décision. Selon Damasio, les marqueurs somatiques jouent un rôle crucial dans la cognition et la prise de décision. Ils présentent plusieurs avantages qui justifient leur importance. En raison des nombreux avantages que Damasio attribue aux marqueurs somatiques dans la prise de décision, nous rapportons ici un passage décrivant leur utilité.

Il oblige à faire attention au résultat néfaste que peut entraîner une action donnée, et fonctionne comme un signal d'alarme automatique qui dit : attention, il y a danger à choisir l'option qui conduit à ce résultat. Ce signal peut vous permettre de rejeter, immédiatement, une action donnée et vous incite à envisager d'autres alternatives. Il vous prémunit contre des pertes futures, sans plus de délibération, et vous conduit ainsi à choisir parmi un plus petit nombre d'alternatives. Il est encore possible de pratiquer des analyses de coût/

³⁴³ DAMASIO, Antonio. *L'erreur de Descartes. La raison des émotions*, Paris, traduction de Marcel Blanc, Editions Odile Jacob, 1995, p. 222.

bénéfice et d'appliquer une démarche déductive appropriée, mais seulement après que l'étape du signal automatique a réduit considérablement le nombre des options envisageables. Les marqueurs somatiques ne permettent sans doute pas, à eux seuls, d'effectuer la totalité du processus de prise de décision, chez l'homme normal, puisque des étapes de raisonnement et de sélection finale doivent encore prendre place dans la plupart des cas (mais non dans tous). Les marqueurs somatiques accroissent probablement la précision et l'efficacité du processus de prise de décision. Leur absence produit les effets inverses. Cette caractéristique est importante et on peut facilement passer à côté. Cette hypothèse ne fait pas l'économie des étapes de raisonnement qui suivent la phase de mise en jeu des marqueurs somatiques. En bref, les marqueurs somatiques représentent un cas particulier de la perception des émotions secondaires, dans le cadre duquel ces dernières ont été reliées, par apprentissage, aux conséquences prévisibles de certains scénarios. Lorsqu'un marqueur somatique négatif est juxtaposé à un résultat prédictible particulier, il joue le rôle d'un signal d'alarme. Lorsque cette juxtaposition concerne un marqueur somatique positif, celui-ci devient au contraire un signal d'encouragement.

C'est donc là en quoi consiste fondamentalement l'hypothèse des marqueurs somatiques. Mais ceux-ci peuvent être appliqués de bien des façons différentes, et vous allez voir que dans certaines occasions ils peuvent fonctionner de façon cachée (sans se manifester dans le champ de la conscience) et qu'ils peuvent, par ailleurs, être pris en compte au niveau d'une « boucle de simulation ».

Les marqueurs somatiques n'accomplissent pas le processus de délibération à notre place. Ils aident celui-ci à se réaliser, en mettant en lumière certaines options (soit dangereuses, soit favorables), et en permettant rapidement de ne plus avoir à les compter parmi celles à envisager. Vous pouvez vous les représenter comme un système d'appréciation automatique des conséquences prévisibles, qui fonctionne, que vous le vouliez ou non, de façon à évaluer les scénarios extrêmement divers du futur envisageable. C'est un système qui vous donne, en quelque sorte, des indications d'orientation³⁴⁴.

Il y a cependant une certaine étrangeté dans la théorie des marqueurs somatiques de Damasio. Cette étrangeté réside dans le fait que ce neurobiologiste ne mentionne que les avantages des marqueurs somatiques dans le processus décisionnel, tout en passant sous silence leurs aspects négatifs. On peut comprendre que l'objectif principal de Damasio, c'est de montrer que les états émotionnels sont des outils précieux dans la prise de décision.

Pour donner une base solide à sa théorie, ce neurobiologiste entreprend tout d'abord de déterminer l'origine des marqueurs somatiques. Pour ce faire, il décrit deux types d'émotions : les émotions primaires, qu'il considère comme innées dès la naissance, et les émotions secondaires, qu'il voit comme étant acquises grâce au processus d'éducation et de socialisation³⁴⁵. Selon Damasio, le cerveau d'un nouveau-né est déjà pourvu des mécanismes neuraux lui permettant de réagir à certaines catégories de stimuli par le biais des états somatiques³⁴⁶. Ainsi, il affirme que l'acquisition des émotions secondaires se produit par

³⁴⁴ *Idem*, p. 225-226.

³⁴⁵ *Idem*, p. 230.

³⁴⁶ *Idem*, p. 229.

l'influence de l'environnement social sur le cerveau. En adoptant cette position, Damasio rejoint les cognitivistes tels que Changeux, Dehaene, Berthoz, etc. qui admettent que le cerveau n'est pas une table rase à la naissance. Notre cerveau comporte donc des émotions primaires à la naissance, ce qui nous prédispose à nous adapter aux réactions somatiques et aux situations affectives de notre milieu social. L'acquisition des marqueurs somatiques, impliquant les émotions secondaires, se fait un peu plus tard, lorsque le cerveau interagit avec le milieu culturel, social ou environnemental. C'est précisément cette idée que souligne Damasio lorsqu'il affirme que la plupart des marqueurs somatiques utilisés pour prendre des décisions sont acquis grâce à notre expérience individuelle, l'interaction du cerveau avec l'environnement social, ainsi qu'aux conventions sociales et aux règles d'éthique³⁴⁷.

Toutefois, l'argument avancé par Damasio selon lequel les émotions primaires seraient innées et les émotions secondaires acquises laisse pendant la question philosophique de savoir comment distinguer ces deux types d'émotions dans la vie quotidienne. Cette difficulté, apparemment négligée par Damasio, a été relevée par Ania Aïte, soulignant qu'il peut y avoir un conflit entre les émotions primaires et les émotions secondaires, de sorte que l'émotion la plus intense pourrait l'emporter sur la plus faible³⁴⁸. De plus, Damasio ne spécifie pas clairement d'autres aspects biologiques, tels que le mécanisme biologique par lequel les émotions primaires et secondaires émergent sur le plan ontogénétique et phylogénétique³⁴⁹.

Damasio a sans doute considéré que ces questions sont extrêmement complexes et difficiles à aborder. Ce qui le préoccupe avant tout, c'est d'étudier le rôle positif des émotions dans la prise de décision. Du point de vue neurobiologique, les réactions physiologiques, souvent liées à notre expérience individuelle et sociale, déclenchent les marqueurs somatiques qui facilitent la prise de décision. Damasio affirme que l'extraordinaire spontanéité avec laquelle notre cerveau réagit face à certaines situations, prenant des décisions rapides en quelques secondes ou minutes, est le résultat des marqueurs somatiques. En réalité, lorsque nous sommes confrontés à plusieurs options, les marqueurs somatiques trient systématiquement et subtilement les multiples possibilités en éliminant les choix défavorables, tout en détectant automatiquement les choix judicieux. La rapidité avec laquelle le cerveau effectue cette

³⁴⁷ *Idem*, p. 231.

³⁴⁸ AÏTE, Ania. *Processus émotionnels et cognitifs dans le développement des capacités de prise de décision sous ambiguïté*. Thèse de doctorat, Université Paris 5, 2013, p. 60.

³⁴⁹ Cette seconde critique a été relevée par CONTY. Voir CONTY, Laurence et DUBAL, Stéphane. Chapitre XIII. *Emotions. La cognition*, Gallimard, p. 518-562.

sélection ne serait pas possible sans une interaction avec les émotions. Ainsi, les choix ou décisions rapides de notre cerveau sont liés aux marqueurs somatiques.

Cette thèse de Damasio est entièrement partagée par d'autres physiologistes comme Berthoz, qui estime que l'aspect émotionnel permet au cerveau d'évaluer les situations et de prédire les actions, les choix, quelles que soient les circonstances³⁵⁰. Cela implique que les choix et les décisions du cerveau sont influencés par les représentations élaborées dans le système cérébral en tenant compte des facteurs somatiques liés à notre corps. Puisque les choix et les décisions du cerveau dépendent majoritairement des émotions, Damasio est parvenu à conclure que « *les processus dits cognitifs ont véritablement partie liée avec ce que l'on appelle généralement émotionnels* »³⁵¹. Toutefois, une question se pose : quels sont les mécanismes neuronaux de l'émotion ?

Après avoir déterminé l'origine des marqueurs somatiques, Damasio se penche sur leur base neurobiologique. Les études neurobiologiques menées par Damasio et son équipe en 1994 et les études suivantes menées par Berthoz en 2003, ont révélé de façon similaire que le cortex préfrontal est la structure neurale cruciale dans le traitement des émotions. En effet, Damasio et ses collègues ont montré que le cortex préfrontal est le système neural le plus important dans le processus d'acquisition des émotions secondaires, étant prédisposé à recevoir « *les signaux en provenance de toutes régions sensorielles où se forment les images qui sont à l'origine de nos processus de pensée, y compris des cortex somatosensoriels où les états du corps passés et présents sont représentés de façon continue* »³⁵².

De plus, le cortex préfrontal serait intrinsèquement prédestiné pour recevoir les signaux de différentes régions biorégulatrices du cerveau humain, notamment les ensembles de neurones modulateurs du tronc cérébral et la base du télencéphale, qui comprend les neurones distribuant de l'acétylcholine³⁵³. Par ailleurs, le cortex préfrontal possède un système de stockage lui permettant de stocker et de classer les faits marquants de notre expérience vécue. Toutefois, Damasio précise que le cortex préfrontal n'est pas la seule structure neurale impliquée dans cette fonction de classification. La classification des faits du passé implique également des structures comme le cortex frontal situé au niveau du pôle antérieur et la région

³⁵⁰ BERTHOZ, Alain. *La décision*. Edition Odile Jacob. Paris, 2003, p. 391. Voir aussi cours sur les bases neurales de la décision dans la perception et le contrôle de l'action. Cours 1999-2000, p. 388-448. Disponible sur le web : <https://www.college-de-france.fr/site/alain-berthoz/course-1999-2000.htm>.

³⁵¹ DAMASIO, Antonio. *L'erreur de Descartes. La raison des émotions*. 1995, *op. cit.*, p. 227.

³⁵² *Idem*, p. 233.

³⁵³ *Idem*, p. 234.

ventro-médiane³⁵⁴. En décrivant le mécanisme neurobiologique de prise de décision, l'objectif de Damasio est non seulement d'identifier la structure neurale du traitement des émotions, mais surtout de montrer l'efficacité de l'implication des émotions dans le processus cognitif de prise de décision est effective. C'est ainsi qu'il explique de manière cohérente pourquoi ces patients, dont le cortex préfrontal était atteint de lésions, étaient dépourvus d'émotions. En tant que structure principale du système émotionnel, le cortex préfrontal serait donc largement impliqué dans le processus cognitif de prise de décision.

Comprendre la façon dont les marqueurs somatiques se manifestent a été également étudiée par Damasio et ses collègues. Leurs études révèlent que les marqueurs somatiques se manifestent à travers deux voies distinctes : la voie rationnelle et la voie non rationnelle ou inconsciente. S'il est admis que les marqueurs somatiques peuvent se manifester au niveau de la conscience, ils se manifestent le plus souvent de manière inconsciente, étant donné qu'un « grand nombre de nos décisions quotidiennes procèdent apparemment sans que l'on ressente quelque émotion que ce soit »³⁵⁵. Cela veut dire que les marqueurs somatiques agissent de manière subtile et sans que nous en soyons conscients. Ce phénomène est considéré par Damasio comme étant à l'origine de l'intuition, qu'il perçoit comme un « processus cognitif rapide grâce auquel nous parvenons à une conclusion sans avoir conscience de toutes les étapes logiques »³⁵⁶.

Du point de vue de Damasio, l'intuition qui est envisagée comme un phénomène psychocorporel est étroitement liée aux émotions dans le processus décisionnel. Il soutient que l'intuition est inséparable des états émotionnels, car c'est grâce aux marqueurs somatiques que l'intuition est capable de déclencher une « cognition rapide » quasi inconsciente. Dans ce contexte, on peut affirmer que sans les émotions, l'intuition, qui est si importante dans les décisions intuitives des managers de l'action publique³⁵⁷ et des scientifiques, ne serait pas aussi efficace. Damasio a donc raison de dire que les individus dotés d'une intuition de qualité sont ceux qui parviennent à associer leurs expériences passées à leurs émotions³⁵⁸. L'efficacité de notre intuition dépend donc de nos sentiments liés aux circonstances sociales, culturelles ou

³⁵⁴ *Idem*, p. 236.

³⁵⁵ *Idem*, p. 239.

³⁵⁶ *Idem*, p. IV.

³⁵⁷ BEROLUCCI, Marius et PINZON, Juan David. De l'intuition dans la décision des managers de l'action publique. Le cas du pilotage des réseaux territorialisés d'organisations. *Revue française de gestion*. 2015, n° 251, p. 115-130.

³⁵⁸ DAMASIO, Antonio. L'erreur de Descartes. La raison des émotions. 1995, *op. cit.*, p. IV.

environnementales. Mais que signifie cette pertinente précision concernant le rôle de l'intuition mathématique dans la perspective de Poincaré ?

Dans le contexte de l'invention mathématique, nous avons vu que Poincaré ne dissocie pas l'intuition des émotions. L'une de ses hypothèses, directement liée à la relation cognition / émotion, était que la capacité de l'intuition à discriminer les combinaisons utiles et fécondes de celles inutiles, à prendre des décisions rapides sans réflexion, est liée au potentiel du moi subliminal. En précisant, via des études physiologiques, que les décisions intuitives (sans réflexion), sont l'effet des marqueurs somatiques agissant au niveau inconscient, Damasio entérine l'hypothèse de Poincaré selon laquelle le potentiel de discrimination inconsciente du moi subliminal est une composante de l'intuition.

Sur la base des études menées sur les marqueurs somatiques, Damasio a élaboré un modèle de prise de décision reposant sur deux voies, comme présenté ci-dessous.

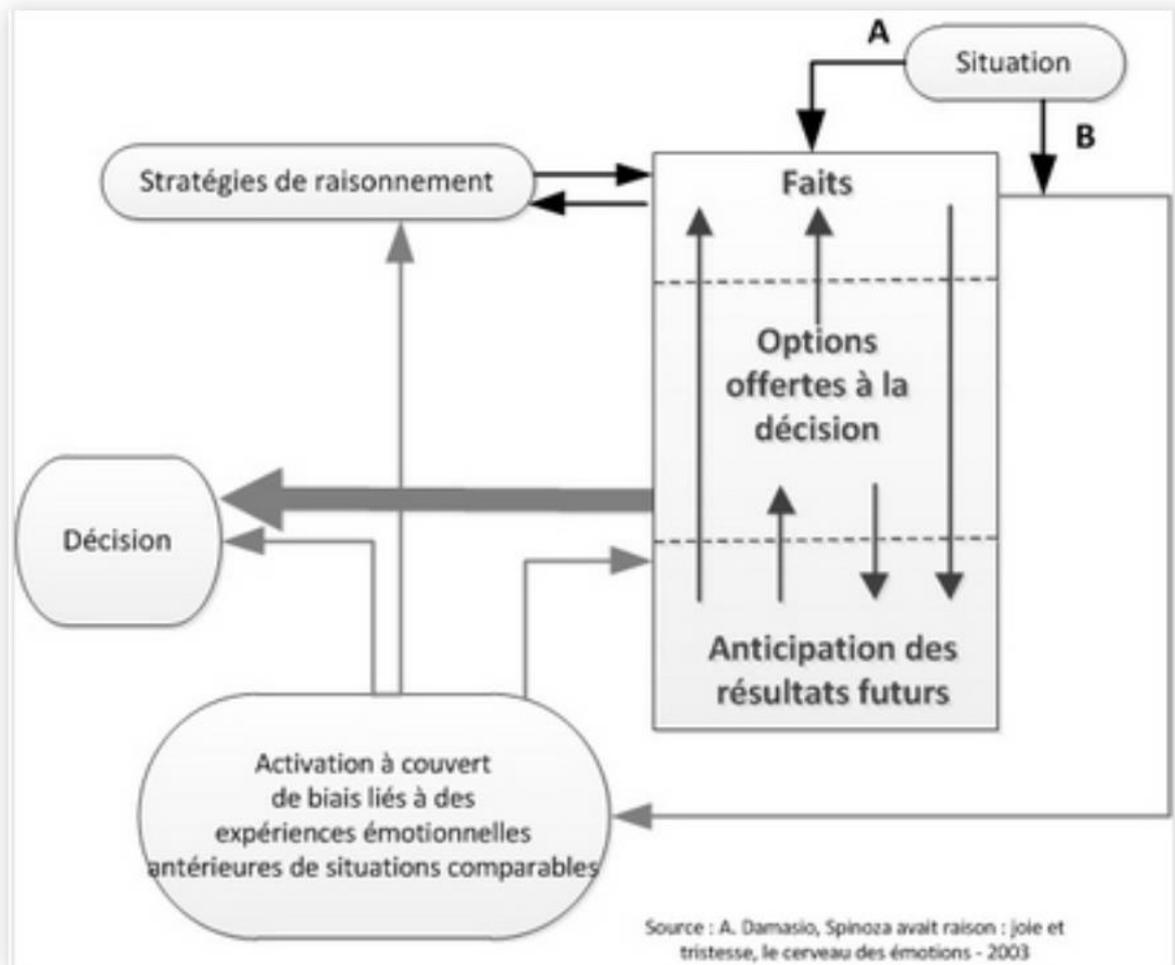


Figure 7 : modèle de prise de décision selon la théorie des marqueurs somatiques

La représentation graphique présente deux voies de prise de décision : la voie (A) indique la voie rationnelle. Cette première voie décrit les différentes étapes du processus de prise de décision consciente, qui est alignée avec la conception traditionnelle soutenue par les philosophes classiques. Comme indiqué sur la figure, ce processus de prise de décisions consciente comprend plusieurs étapes : (1) examiner les faits qui se présentent à la raison, (2) évaluer chaque option offerte à la décision, (3) anticiper les résultats potentiels avant de prendre la décision finale (4). Un tel processus est extrêmement long et est susceptible de conduire à des mauvais choix.

En revanche, la voie (B) indique les étapes de prise de décision au niveau inconscient qui font appel aux marqueurs somatiques. Contrairement à la voie (A), on s'aperçoit que cette voie est plus rapide et moins fastidieuse, car elle se compose de deux étapes : (1) l'activation des

expériences émotionnelles antérieures qui éliminent automatiquement et secrètement les mauvais choix encombrants et offre des options de choix pertinents, ce qui permet (2) de guider la prise de décision. Ce schéma indique que lorsque les marqueurs somatiques s'activent, ils permettent à l'individu de prendre les décisions automatiques sans nécessiter un raisonnement rationnel préalable. C'est en cela que les marqueurs somatiques offrent un avantage par rapport au raisonnement pur.

Une étude plus récente, menée par Kahneman, a mis en évidence un modèle de prise de décision qui présente de fortes similitudes avec celui de Damasio. Kahneman adopte une approche cognitive pour étudier les différentes stratégies relatives à la prise de décision intuitive. Selon ce spécialiste des neurosciences cognitives, nos capacités cognitives de prise de décision reposent sur deux systèmes qui utilisent des stratégies différentes : le système 1, caractérisé par le fonctionnement rapide et automatique et le système 2, « associé à l'expérience subjective de l'action, du choix, et de la concentration »³⁵⁹. Dans ses travaux, Kahneman décrit le système 1 comme une machine dotée d'une automaticité impressionnante, fonctionnant presque inconsciemment. Ce système fait appel l'intuition et aux émotions pour accomplir automatiquement les tâches familières telles que

*détecter qu'un objet est plus éloigné qu'un autre ;
s'orienter vers la source d'un bruit soudain ;
compléter la phrase « du pain et... » ;
faire une grimace de dégoût face à une image horrible ;
détecter de l'hostilité dans une voix ;
résoudre $2 + 2 = ?$;
lire des mots sur un grand panneau d'affichage ;
conduire une voiture sur une route déserte ;
trouver un coup fort aux échecs (si vous êtes un maître) ;
comprendre des phrases simples ;
reconnaître qu'une « personnalité docile et méticuleuse qui se passionne pour les détails »
ressemble à tel stéréotype professionnel³⁶⁰.*

Contrairement au système 1, le système 2 opère lentement, car il nécessite un raisonnement analytique et des efforts supplémentaires pour les tâches complexes. Ce système est caractérisé par la paresse, la fatigue et la résistance, et n'intervient que dans les opérations qui exigent une attention accrue. Voici quelques exemples de ces opérations :

*se préparer au top-départ d'une course ;
concentrer son attention sur les clowns d'un cirque ;
se concentrer sur la voix d'une personne particulière dans une salle comble et bruyante ;*

³⁵⁹ KAHNEMAN, Daniel. *Système 1 / système 2. Les deux vitesses de la pensée*. Traduction de Raymond CLARINARD, Paris, Flammarion, 2011, p. 12.

³⁶⁰ *Ibidem*

*rechercher une femme aux cheveux blancs ;
fouiller dans sa mémoire pour identifier un son surprenant ;
marcher plus vite qu'il ne vous est naturel ;
veiller à ce que votre comportement soit adapté à la situation sociale dans laquelle vous
vous trouvez ;
compter le nombre de fois où la lettre A apparaît dans un texte ;
donner votre numéro de téléphone à quelqu'un ;
se garer sur une place exiguë (pour presque tout le monde sauf les garagistes);
remplir sa déclaration d'impôts ;
vérifier la validité d'un argument logique complexe³⁶¹.*

La figure ci-dessous décrit les performances et caractéristiques de ces deux systèmes.

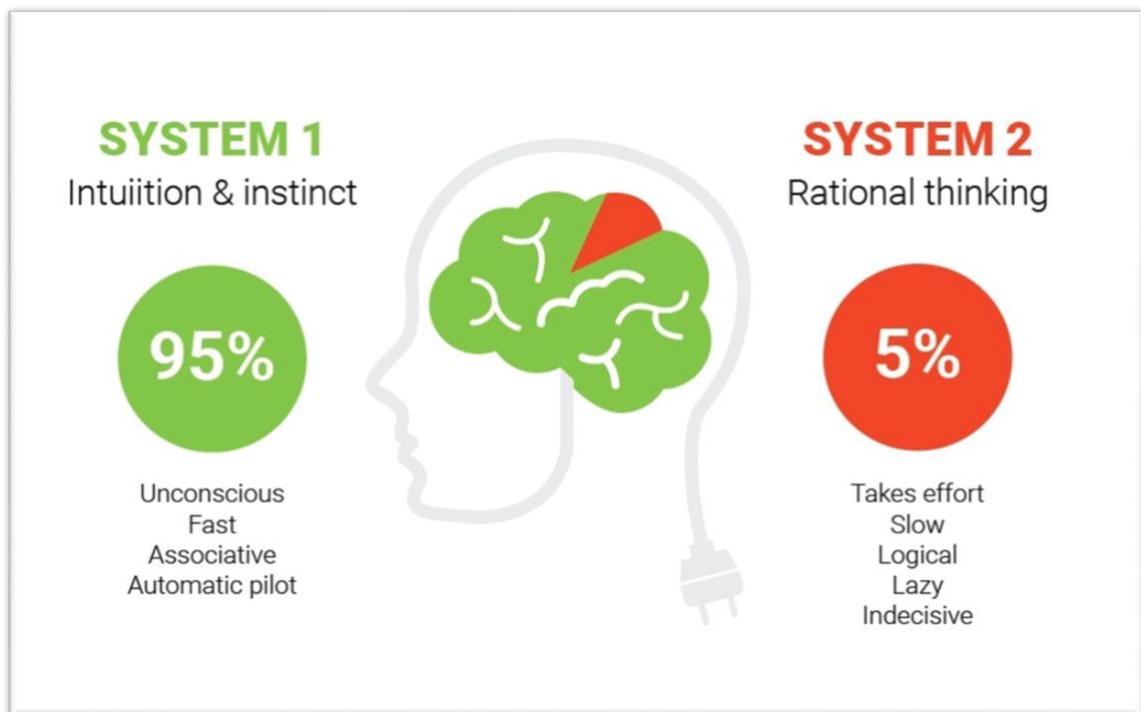


Figure 8 : Système 1/ système 2 : les deux vitesses de la pensée

³⁶¹ *Idem*, p. 13.

Selon les études réalisées par Kahneman, le système 1, qui mobilise l'intuition et l'émotion, fonctionne de façon inconsciente. Ce système est plus privilégié par les individus dans le processus décisionnel, parce qu'il évite un traitement conscient, long et fastidieux. C'est donc un système qui demande peu d'efforts tout en permettant de gagner du temps. Tout comme pour les marqueurs somatiques décrits par Damasio, le système 1 est décrit par Kahneman comme un système très rapide pour la prise de décision, mais contrairement au neurobiologiste qui concentre toutes ses études sur l'utilité des marqueurs somatiques, Kahneman souligne que le principal inconvénient du système 1 est qu'il conduit souvent à des décisions erronées. Il serait donc irréaliste d'utiliser le système 1 en permanence. Pour Kahneman en fait, le processus décisionnel fait intervenir en premier lieu le système 1 lorsque la tâche est moins compliquée. Dans ce cas de figure, la prise de décision s'effectue de manière automatique et inconsciente. En revanche, lorsque la tâche s'avère plus compliquée, le système 2 entre en jeu pour réaliser une analyse approfondie de la tâche à accomplir. Cela suggère qu'il existe une complémentarité entre le système 1 et le système 2 dans le processus cognitif de prise de décision. Les études de Kahneman et de Damasio montrent ainsi que les décisions prises de façon rapide et automatique, dans certaines occasions, se basent principalement sur nos intuitions, émotions et sentiments. En revanche, les décisions nécessitant une réflexion approfondie se fondent sur la logique et l'analyse.

En résumé, les travaux de Damasio et de Kahneman apportent des preuves scientifiques confirmant l'importance primordiale de l'intuition et de l'émotion dans le processus cognitif de prise de décisions, tout en soulignant que l'inconscient est une composante essentielle de l'intuition. Ces auteurs renforcent ainsi les idées avancées par Poincaré lors de sa conférence devant la société de psychologie (1908), notamment en ce qui concerne l'intégration de l'intuition et de l'émotion dans la sélection des idées prometteuses.

Nous avons ainsi présenté quelques théories cognitives mettant en évidence les aspects cognitifs des nombres et de la prise de décision intuitive. Il est maintenant nécessaire d'explorer comment les neurosciences cognitives expliquent nos capacités cognitives de représentation de l'espace et de la géométrie. Pour cela, nous allons découvrir la théorie spatiale proposée par le physiologiste Alain Berthoz.

CHAPITRE II : LE CONSTRUCTIVISME GÉOMÉTRIQUE SELON LES NEUROSCIENCES COGNITIVES

Dans la deuxième section du chapitre II de la première partie, nous avons eu l'occasion de présenter la théorie psycho-physiologique de Poincaré concernant les fondements de la géométrie et de l'espace. Au cours de cette partie, nous avons constaté que Poincaré refusait l'idée que la géométrie soit une science *a priori* fondée sur l'axiomatique, et soutenait plutôt que la géométrie se forme à partir d'une expérience sensible qui intègre les sensations musculaires, visuelles, vestibulaires, tactiles, etc., ainsi que les compensations qui ont lieu grâce à l'action de l'esprit. Pour savoir si la géométrie trouve réellement sa genèse dans l'expérience sensorielle, il est nécessaire de comprendre davantage la contribution des organes sensoriels à la représentation mentale de l'espace et à la construction de la géométrie. C'est pour cette raison que nous présenterons l'approche neurophysiologique de l'espace de Berthoz, qui offre une nouvelle perspective sur la notion d'espace et de la géométrie, en décrivant les mécanismes neuronaux sous-jacents à la perception et la mémorisation de l'espace, ainsi qu'aux processus de navigation.

Nous commencerons par aborder le rôle joué par le corps et ses composantes dans la représentation spatiale et la construction de la géométrie. Par la suite, nous tenterons de comprendre les processus phylogénétiques et ontogénétiques sous-jacents à la formation de la représentation mentale de l'espace.

I-Du corps à l'espace : l'approche neurophysiologique de l'espace de Berthoz

L'idée principalement innovante introduite par Berthoz dans *Le sens du mouvement* est que l'espace n'est pas antérieur au corps mais qu'il est intrinsèquement lié à la motricité de l'ensemble des parties corporelles. Selon lui, ce sont les flux de sensations qui accompagnent les mouvements du corps qui constituent les fondements cognitifs de l'espace et de la géométrie³⁶², dans la mesure où le cerveau construit l'espace et la géométrie à partir des données sensorielles issues du corps. Si donc nous voulons comprendre la construction de la géométrie dans l'approche spatiale de Berthoz, il est essentiel de se référer au corps et à ses composantes, tels que les mains, les pieds, les bras, les yeux, la tête, le cou, les jambes, les doigts, les oreilles, les orteils, etc. Cependant, notre objectif n'est pas d'étudier la physiologie de toutes les parties du corps, mais plutôt d'examiner plus spécifiquement les principaux capteurs sensoriels qui permettent à l'individu de percevoir l'espace et de concevoir la géométrie. Dans cette optique, nous nous limiterons à présenter les analyses physiologiques et neurophysiologiques relatives au rôle de la vision, de la proprioception musculaire et du système vestibulaire dans la perception spatiale et dans la construction de la géométrie, car ce sont là les composantes pertinentes prioritaires auxquelles Berthoz et Poincaré se réfèrent tous les deux. Il s'agira plus de présenter quelques faits physiologiques et neurophysiologiques qui attestent de l'intégration de ces capteurs sensoriels dans la construction de l'espace et de la géométrie. Étant donné que chez Berthoz la construction de l'espace et de la géométrie implique les structures cérébrales³⁶³, nous présenterons également quelques travaux expérimentaux qui ont permis d'élucider le réseau cérébral impliqué dans la perception de l'espace.

Dans son ouvrage *Le sens du mouvement* ainsi que lors de cours et de conférences³⁶⁴, Berthoz s'est consacré à montrer l'importance des mouvements du corps et des sensations visuelles, tactiles, proprioceptives (kinesthésiques) et vestibulaires dans la perception spatiale (c'est-à-dire dans la représentation mentale de l'environnement) et dans la construction de la géométrie. L'ensemble des travaux expérimentaux compilés dans ce livre a pour objectif de montrer très clairement le fait que le cerveau ne considère pas les données sensorielles de

³⁶² BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : II- Fondements cognitifs de la géométrie et de l'espace*. Cours de 1997-1998.

³⁶³ BERTHOZ, Alain. *Fondements cognitifs de la perception de l'espace*. Augoyard Jean-François 1st International Congress on Ambiances, Grenoble 2008, Grenoble France. A la croisée, 2011, p. 121-132.

³⁶⁴ L'ensemble des cours et conférences donnés par Berthoz sont répertoriés sur son site internet : https://www.college-de-france.fr/site/alain-berthoz/_course.htm.

manière isolée, mais établir, qu'il établit le sens du mouvement ou la "kinesthésie" par le biais de l'intégration multimodale. Par ailleurs, Berthoz s'intéresse au potentiel et à la préférence du cerveau pour la formation d'hypothèses : à chaque fois qu'il entreprend une action, il formule des hypothèses sur l'état que les capteurs devraient prendre au cours de son déroulement³⁶⁵. Ces aspects sont des ponts importants vers les réflexions de Poincaré sur le rôle des sens dans la construction de la géométrie. Il est nécessaire de préciser que ce livre regroupe essentiellement des observations, des expériences physiologiques et neurophysiologiques décrivant la perception spatiale.

En raison de la multitude d'objets qu'il est susceptible de percevoir, l'œil est présenté comme l'organe sensoriel principal à partir duquel commence la perception spatiale. Selon Berthoz, les sensations visuelles engendrées par l'œil lors des déplacements et des mouvements, revêtent une importance particulière pour la perception du mouvement, appelée aussi perception spatiale³⁶⁶, car les mouvements oculaires générés par l'œil sont des potentiels d'interaction avec le monde sensible qui sont en affinité avec la géométrie. Ce point de vue est l'une des thèses chères à ce physiologiste, pour qui la perception visuelle intègre en permanence l'action. Comme il ne se lasse de le souligner, la vision « *est contrainte par l'action, elle est simulation interne de l'action* »³⁶⁷, étant donné que les saccades oculaires qui précèdent l'acte réflexif déterminent notre capacité cognitive de prédiction, d'anticipation de l'action et de prise de décision.

Il est essentiel de préciser que l'idée de Berthoz selon laquelle la perception visuelle implique une action représente une idée récente sur le plan physiologique. En effet, la théorie motrice de la perception développée par les physiologistes classiques établissait une distinction entre la perception et l'action. Selon cette théorie, l'acte perceptif était distingué de l'action, associée à une conduite morale, tandis que l'acte perceptif était plutôt considéré comme un acte suspensif, c'est-à-dire une action arrêtée³⁶⁸. Cependant, de nombreuses recherches menées récemment de concert par Berthoz et ses collaborateurs ont montré que la perception est elle-même est une « *action simulée* ». Si la simulation de l'action est le produit interne d'une perception visuelle, cela suggère que les sensations visuelles issues de l'œil sont utilisées par le

³⁶⁵ BERTHOZ, Alain. *Le sens du mouvement*. Paris, Odile Jacob, 2013, p. 11.

³⁶⁶ Dans son approche physiologique de l'espace, Berthoz ne fait pas de distinction entre l'espace et le mouvement. Leur interdépendance tient au fait que les mouvements ou les déplacements que nous effectuons ont toujours lieu dans un certain espace.

³⁶⁷ *Idem*, p. 15.

³⁶⁸ *Idem*, p. 16.

cerveau pour la perception spatiale. Par conséquent, la question qui se pose est de savoir quelles sont les zones cérébrales sollicitées lors de la perception visuelle de l'espace ou du mouvement ?

Les avancées des neurosciences ont donné lieu à de nombreuses études sur les phénomènes physiologiques et cognitifs de la vision spatiale. Les recherches les plus récentes ont révélé que le traitement de l'espace par le système visuel met principalement en jeu les neurones présents au niveau sous-cortical et cortical du cerveau. Au niveau sous-cortical, il a été montré que les photorécepteurs de la rétine assurent la première étape du traitement du mouvement. Ces photorécepteurs transforment les informations visuelles en influx nerveux, afin de permettre aux neurones rétiniens de traiter, par étapes successives, le mouvement dans le cerveau. Par la suite, une seconde étape se produit, au cours de laquelle les cellules ganglionnaires, qui sont les dernières cellules des neurones rétiniens, envoient leurs projections vers leur principale cible, le Corps Genouillé Latéral (CGT). Situé au niveau du thalamus, ce noyau a pour fonction principale de transmettre l'information au cortex visuel.

Au niveau cortical, les travaux de Hubel et Wiesel (1998)³⁶⁹ ont apporté des résultats significatifs en ce qui concerne le traitement du mouvement dans les différentes aires du cortex visuel. Ces chercheurs ont démontré l'existence de divers types de cellules corticales avec des structures diversifiées³⁷⁰. Des recherches récentes ont confirmé ces résultats et ont mis en évidence que la voie corticale ventrale (aire V₁), appelée aussi l'aire 17 de Brodmann, est le centre de la réception visuelle primaire. L'aire V₂ ou l'aire 18 de Brodmann, qui est une région du cortex cérébral située à l'arrière du cerveau, est considéré comme l'aire de la perception. Enfin, l'aire V₃ ou l'aire 19 est spécifiquement l'aire impliquée dans la sélectivité à l'orientation et au mouvement. Pour une illustration plus détaillée, voir la figure 9 sur les aires visuelles humaines.

³⁶⁹ HUBEL, David et WIESEL, Torsten. Early exploration of the visual cortex. *Neuron*. 1998, 20(3), p. 401–412.

³⁷⁰ Il s'agit des cellules simples, des cellules complexes et des cellules hypercomplexes. Pour aller plus loin, voir MORVAN, Camille. *Perception visuelle du mouvement pendant la poursuite oculaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2007, p. 21.

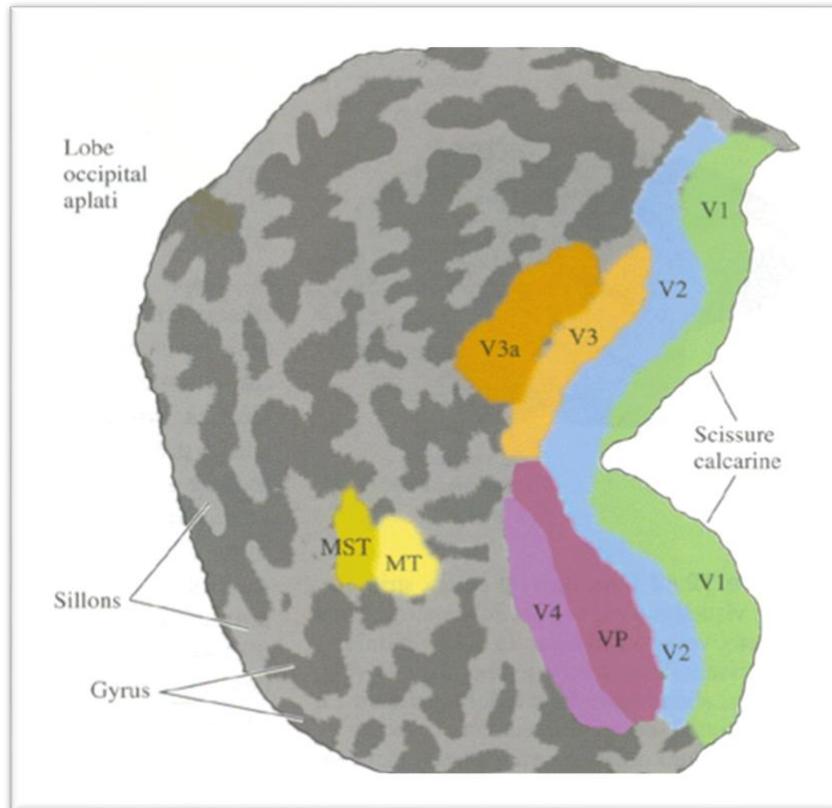


Figure 9 : carte des aires visuelles

Récemment, l'équipe de recherche dirigée par Berthoz a fourni des preuves montrant que les neurones de la voie magnocellulaire ont tendance à projeter vers les neurones de l'aire temporale médiane (MT) afin de coder le mouvement. Les découvertes antérieures de Dubner et Zeki³⁷¹ avaient déjà mis en évidence l'importance de l'aire MT en tant que petite zone rétinotopique clé dans le traitement du mouvement. Ils avaient observé que les neurones MT établissent des connexions avec d'autres régions corticales et sous-corticales. Leurs conclusions indiquaient que ces connexions sont à la base de la projection des neurones MT vers les neurones de l'aire temporale médiane supérieure (MST), ce qui suggère l'intégration des neurones MT et MST dans la perception du mouvement et de l'espace.

Dans le but de confirmer cette hypothèse, Berthoz et son équipe de recherche ont utilisé des techniques nouvelles telles que l'imagerie cérébrale et les données neurophysiologiques pour élucider le rôle des neurones MT et MST dans la perception spatiale. L'aire MT a été

³⁷¹ DUBNER, Ronald et ZEKI, Semi. Response properties and receptive fields of cells in an anatomically defined region of the superior temporal sulcus in the monkey. *Brain Research*. 1971, 35(2), p. 528–532.

confirmée pour être une zone principale où les traitements les « *plus élaborés pour la reconstruction de la géométrie des objets et de l'espace en mouvement sont exécutés* »³⁷². Ce qui confirme l'hypothèse du physiologiste Zeki concernant le rôle des neurones MT dans la perception de l'espace. Au-delà de l'aire MT, d'autres couches neuronales sont impliquées dans le traitement de l'espace, il s'agit des neurones de l'aire temporale médiane supérieure (MST). Tout comme les neurones des aires MT, les neurones MST jouent un rôle dans l'exécution de mouvements visuels complexes grâce à leur capacité de sélectivité directionnelle. La contribution des neurones MST à la construction de l'espace ne fait plus l'objet de doute aujourd'hui, car les études expérimentales menées par Berthoz et son équipe ont démontré que « *les neurones MST ont une capacité remarquable à continuer à signaler les composantes du mouvement visuel quelle que soit la localisation du stimulus dans le champ récepteur* »³⁷³. Il se confirme donc la thèse selon laquelle le traitement de l'espace par le cerveau nécessite des informations visuelles provenant de l'œil.

Si l'œil est le principal opérateur de la perception spatiale, comme le montrent les différentes études évoquées ci-dessus, force est de remarquer qu'il ne suffit pas à la construction de la géométrie. En effet, lorsqu'un individu se déplace dans un espace, la vision n'est pas le seul sens impliqué, car les systèmes proprioceptif et vestibulaire jouent également des rôles significatifs. Dans la physiologie classique, on reconnaissait déjà l'importance de l'intégration de l'activité musculaire, proprioceptive et vestibulaire, mais le rôle précis de ces capteurs sensoriels dans la perception de l'espace n'était pas clairement défini, ce qui a conduit à des théories contradictoires³⁷⁴. Cependant, grâce à de nombreuses études contemporaines, on a pu mieux comprendre le lien entre les capteurs proprioceptifs, vestibulaires et la perception spatiale. Par exemple, les études menées par l'équipe de recherche de Berthoz ont mis en évidence comment la proprioception musculaire et le système vestibulaire conditionnent la perception spatiale de l'individu.

Les études physiologiques récentes sur la proprioception ont clairement démontré que les récepteurs musculo-articulaires jouent un rôle primordial dans la perception spatiale. La proprioception, également connue sous le nom de kinesthésie, peut être définie comme la

³⁷² BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : II- Fondements cognitifs de la géométrie et de l'espace*. Cours de 1997-1998, p. 433.

³⁷³ *Idem*, p. 434.

³⁷⁴ Par exemple, dans *La Valeur de la science*, dans un chapitre appelé "Le rôle des canaux semi-circulaires", Poincaré présente les théories de Mach-Delage et du physiologiste de Cyon et constate que les deux théories se contredisent. Cf. *La valeur de la science*. 1990, *op. cit.*, p. 98-99.

capacité, consciente ou inconsciente, d'un individu à connaître la position précise de son corps et de chacun de ses membres sans recourir aux organes sensoriels ordinaires tels que la vision, l'odorat, l'ouïe, le toucher ou le goût. C'est grâce à Husserl que la découverte et l'élaboration de la théorie kinesthésique ont été possibles. Selon la théorie kinesthésique husserlienne, les sensations kinesthésiques de la proprioception musculaire jouent un rôle capital dans la formation de la connaissance et dans la perception du monde³⁷⁵. En se basant sur les travaux de Husserl, Berthoz affirme quant à lui que les sensibilités kinesthésiques sont fondamentalement essentielles pour la navigation spatiale, la perception de l'espace et donc la construction de la géométrie. Toutefois, Berthoz va plus loin que Husserl en démontrant, à travers des expériences neurophysiologiques, que la construction de la géométrie par le cerveau intègre également la vision, le système proprioceptif et vestibulaire. Berthoz souligne lui-même, lorsqu'il compare sa théorie à celle de Husserl, que l'idée selon laquelle la construction de l'espace et de la géométrie par le cerveau se fait à partir des données sensorielles issues des capteurs proprioceptifs est ce qui est absent dans la théorie kinesthésique de son prédécesseur³⁷⁶. Cependant, l'hypothèse husserlienne selon laquelle les sensations proprioceptives transmettent à l'individu des informations relatives à la position était, quant à elle, correcte.

Dans *Le sens du mouvement*, Berthoz montre de manière concrète le rôle des kinesthèses dans la transmission constante d'informations au cerveau. Lorsque nous nous déplaçons dans un espace environnant, nous sommes continuellement conscients de la position de notre corps par rapport à cet espace et de la distance parcourue. Cette conscience permanente des mouvements et de la position de notre corps est rendue possible grâce au flux d'informations proprioceptives transmises en continu au cerveau. Les informations proprioceptives permettent à l'individu de mettre à jour en permanence sa position géographique lors de ses déplacements et de connaître la distance parcourue. Ainsi, les muscles des mains, du toucher, des bras, des pieds, des articulations, des jambes, et bien d'autres, transmettent en permanence des informations précieuses au cerveau pour le traitement de l'espace. Il est donc évident que la perception de la position de notre propre corps et de son mouvement relatif par rapport à

³⁷⁵ HUSSERL, Edmund. *Chose et espace. Leçon de 1907*. Paris, Presse Universitaire de France, 1989.

³⁷⁶ Dans sa théorie kinesthésique, Husserl a présenté la main comme l'organe le plus important du système proprioceptif, car selon lui, c'est l'organe principal dont nous nous servons pour agir dans le monde. Berthoz montre contre Husserl que le sens haptique qu'il décrit est multimodal, c'est-à-dire qu'il résulte de l'interaction des informations visuelles, vestibulaires, acoustiques, etc. Cela implique l'idée que la perception spatiale n'est pas seulement liée au sens haptique (main), mais elle est aussi bien visuelle que proprioceptive et vestibulaire.

l'environnement joue un rôle essentiel dans la formation et le développement de notre capacité de perception spatiale.

Le système vestibulaire, situé dans l'oreille interne, joue également un rôle non négligeable dans la perception spatiale. Il s'agit d'un organe sensoriel barosensible³⁷⁷ composé du labyrinthe postérieur, comprenant les canaux semi-circulaires, ainsi que de deux cavités, l'utricle et le saccule. Le nerf vestibulocochléaire et ses noyaux encéphaliques font également partie de ce système³⁷⁸. L'importance des canaux semi-circulaires dans la formation de la géométrie avait été évoquée de manière vague et peu convaincante par Poincaré dans *La valeur de la science*, en raison du manque d'informations suffisantes sur ces organes sensoriels. Cependant, les recherches anatomiques et physiologiques actuelles ont clairement précisé l'implication des canaux semi-circulaires dans la perception du mouvement et de l'espace. Comme l'explique Berthoz dans ce passage, ces canaux mesurent la fréquence des mouvements physiologiques.

Ils [les canaux semi-circulaires] mesurent les accélérations de quelques dixièmes de degrés par seconde ! leur sensibilité dépend de la fréquence du mouvement. (...). Lorsque nous marchons, notre tête oscille à une fréquence (nombre d'oscillations par seconde) d'environ une fois par seconde, on dit « une fréquence de 1 Hz ». Si nous courons, la fréquence augmente. Lorsque nous sommes debout immobiles en attendant l'autobus, la tête oscille très lentement à environ une oscillation toutes les 10 secondes « on dit une oscillation de 0.1 Hz. Chaque mouvement contiendra un certain nombre de fréquences qui déterminent ce qu'on appelle la « bande de fréquence » (...). La géométrie des canaux semi-circulaires est adaptée à la rapidité des mouvements de l'espèce, c'est-à-dire à la fréquence des mouvements physiologiques (entre 0.1 et 1 Hz). (...) Une des fonctions du système vestibulaire est ainsi de mesurer les mouvements de la tête dans un système de référence euclidien³⁷⁹.

Au-delà de leurs fonctions de calibrage, le système vestibulaire joue également un rôle essentiel dans la stabilisation de la posture du corps, selon Berthoz. Lorsqu'un individu se déplace dans un espace environnant, les mouvements de sa tête et les mouvements proprioceptifs qu'il effectue ont tendance à se compenser pour lui assurer une posture stable. L'interaction entre le système vestibulaire et la proprioception musculaire est telle que lorsque cet individu trébuche, sa tête et l'ensemble de son corps se redressent aussitôt grâce aux réactions de réajustement déclenchées par les canaux vestibulaires. Les capteurs vestibulaires dont les humains sont dotés ont pour rôle spécifique dans les mouvements complexes (courses,

³⁷⁷ La barosensibilité est la sensibilité à la variation de pression atmosphérique chez certains individus observable aussi chez certains animaux. Cf. RISTORI, Marie-Thérèse. *Étude de la barosensibilité chez la carpe*. 1971, p. 52.

³⁷⁸ Source Wikipédia.

³⁷⁹ BERTHOZ, Alain. *Le sens du mouvement*. 2013, *op. cit.*, p. 41-42.

saut), visant à maintenir l'équilibre du corps. Ils transmettent en permanence des informations au cerveau pour l'informer des éventuels changements d'état qui pourraient avoir lieu lors des déplacements ou de la navigation spatiale. À partir de ces observations spécifiques, nous pouvons affirmer, en accord avec Roll, que la posture du corps ne dépend pas uniquement de la proprioception, mais résulte de l'ensemble des données sensorielles provenant de l'ensemble du corps³⁸⁰.

D'autres données physiologiques recueillies récemment révèlent que le système vestibulaire joue également un rôle dans la stabilisation du regard. Selon ces données, les capteurs vestibulaires et les récepteurs visuels se compensent pour donner à l'individu une image stable sur la rétine. Cette interaction entre le système vestibulaire et le système visuel dans la stabilisation du regard est décrite par Berthoz de la manière suivante :

si le monde nous paraît stable lorsque nous nous déplaçons, c'est d'abord grâce à des réflexes d'origine vestibulaire qui stabilisent son image sur la rétine. Ils relient les capteurs vestibulaires aux muscles de l'œil. L'anatomie des connexions neuronales est telle qu'un mouvement de la tête dans une direction entraîne un déplacement de l'œil dans l'autre, ce qui a pour effet de supprimer, ou de diminuer, le glissement des images sur la rétine (glissement rétinien).

Vous pouvez les mettre en évidence vous-même de façon très simple : il vous suffit de regarder un point sur le mur devant vous. Fermez les yeux, tournez la tête en imaginant le point sur le mur et ouvrez les yeux. Vous constaterez que votre regard est resté sur le point que vous avez mémorisé. Votre œil a fait un mouvement en sens contraire du mouvement de la tête, et de même amplitude. Il est d'origine vestibulaire : il est produit dans le plan horizontal, par les canaux semi-circulaires³⁸¹.

Si la physiologie nous apporte des informations précises sur la contribution de la proprioception musculaire et du système vestibulaire dans la perception de l'espace, il est également important de tenir compte des apports convergents de la neurophysiologie et de la neurobiologie dans ce domaine. En complément aux études physiologiques, certains spécialistes des neurosciences cognitives ont cherché à déterminer les zones cérébrales sollicitées lors de la transmission des sensations proprioceptives et vestibulaires au cerveau. Chez l'homme, le cortex vestibulaire pariéto- insulaire ainsi que le cortex pariéto- frontal ont été confirmés par les travaux de Grüsser comme étant des structures cérébrales principales parmi celles impliquées dans le codage des rotations de la tête grâce aux données vestibulaires et visuelles qui remontent au cerveau³⁸². Une autre cellule cérébrale impliquée dans le codage

³⁸⁰ ROLL, Jean-Pierre. Physiologie de la kinesthèse. La proprioception musculaire : sixième sens ou sens premier ? *Intellectica*. 2003, n° 36-37, p. 51.

³⁸¹ *Idem*, p. 51.

³⁸² BERTHOZ, Alain, *Le cerveau et l'espace : I- La mémoire des déplacements*. Cours de 1996-1997, p. 430.

de la direction chez les humains et présente également chez le rat est le noyau thalamique latéral dorsal. Découverte pour la première fois par Ranck et Taube (1984)³⁸³, l'implication de cette cellule cérébrale dans le codage de la direction de l'espace a été confirmée par les travaux de Morgan (1993)³⁸⁴. Ce dernier a montré que le noyau thalamique latéral dorsal détecte les rotations de la tête dans un plan horizontal à partir des sensations issues du système vestibulaire.

Afin d'avoir une preuve de l'intégration du système vestibulaire et proprioceptif dans la perception de l'espace, Berthoz et ses collaborateurs ont réalisé une expérience sur des sujets, dont certains présentaient des lésions vestibulaires. Au cours de cette expérience, les sujets étaient invités à atteindre, les yeux fermés, une cible préalablement vue et située à une distance d'environ vingt mètres, en suivant une direction donnée. Les mouvements de la tête et les paramètres cinématographiques effectués par les sujets lors de leur déplacement étaient enregistrés à l'aide d'une caméra numérique. Les résultats de cette expérience indiquent que les sujets atteints de lésions vestibulaires commettaient des erreurs de direction (sans pour autant faire d'erreur de distance), alors que les sujets ne présentant aucune lésion vestibulaire accomplissaient leur tâche sans la moindre erreur de direction ou de distance. De tels résultats prouvent que le système vestibulaire est intégré dans le codage et la direction de l'espace. Cela a conduit Berthoz à formuler l'hypothèse que le cerveau utilise les sensations vestibulaires et proprioceptives pour guider la locomotion en l'absence de la vision³⁸⁵. Notre capacité d'orientation spatiale n'est donc pas déterminée seulement par la vision, mais aussi par les systèmes proprioceptif et vestibulaire.

Cette même expérience suggère également l'intégration de l'hippocampe dans la perception de l'espace, dans la mesure où cette zone cérébrale est majoritairement impliquée dans la mémorisation des déplacements³⁸⁶. En effet, Berthoz et ses collaborateurs ont montré que les neurones hippocampiques s'activent corrélativement aux tâches de mémorisation spatiale. Cette activation des neurones hippocampiques intervient lorsqu'il s'agit de construire des « cartes cognitives » qui sont en quelque sorte des cartes géographiques que l'individu utilise pour la réactualisation de la position de son corps par rapport à un espace donné. Pour

³⁸³ TAUBE, Jeffrey et al, Head-Direction Cells Recorded from the Postsubiculum in Freely Moving Rats. I. Description and Quantitative Analysis. *The Journal of Neuroscience*. 1990, 10 (2), p. 420-435.

³⁸⁴ MORGAN, William Samuel. Synthesis, space et shadows. *Choice limitless*. 1993.

³⁸⁵ BERTHOZ, Alain. Fondements cognitifs de la géométrie et l'expérience de l'espace. In *Geometries of nature, living system and human cognition. New interaction of mathematics with Natural sciences and Humanities*, British Library, 2005, p. 329.

³⁸⁶ BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : I- La mémoire des déplacements*. Cours de 1996-1997.

Berthoz et plusieurs spécialistes des neurosciences cognitives, cette « carte cognitive » est ce que nous utilisons au quotidien pour nous souvenir des trajets ou des distances parcourus³⁸⁷.

Des études réalisées à partir de l'électroencéphalogramme (ECH) ont permis d'enregistrer la fréquence avec laquelle les neurones hippocampiques s'activent pour mémoriser les déplacements lors de la navigation spatiale. Contrairement aux études anciennes qui indiquaient que le rythme de l'activité hippocampique oscillait entre 6 et 12 Hz, les enregistrements à partir de l'ECG indiquent plutôt que la fréquence oscille entre 0 et 8 Hz³⁸⁸. En outre, des études convergentes ont montré l'implication du gyrus parahippocampique dans la mémorisation des déplacements. Les expériences utilisant l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf) ont révélé l'activation du parahippocampique lors de la reconnaissance des repères. De même, l'activation du parahippocampe a été confirmée par les travaux de Wegman et Janzen (2011), suggérant ainsi que la mémorisation des déplacements résulte de l'interaction entre les neurones de l'hippocampe et ceux du parahippocampe³⁸⁹.

Comme nous pouvons observer, la construction de l'espace par le cerveau fait intervenir non seulement des composantes neurophysiologiques, ainsi que les sensations visuelles, proprioceptives et vestibulaires issues du corps. Ces éléments incluent également les sensations olfactives, auditives, tactiles, gustatives qui sous-tendent les mouvements proprioceptifs ou kinesthésiques. Ainsi chez Berthoz la géométrie trouve son origine dans l'effort de perception de l'espace. Cette perception spatiale, essentielle pour appréhender la géométrie, mobilise, principalement les sensations visuelles, proprioceptives et vestibulaires. Cela suggère de concevoir la géométrie non pas comme une science a priori, mais plutôt comme une science qui se construit dans notre rapport étroit avec le monde sensible.

Bien que la perception spatiale dépende de l'ensemble du corps, la question qui se pose maintenant est de comprendre le mécanisme par lequel la représentation spatiale, incluant la phylogénie, évolue chez les individus au cours de leur développement ontogénétique. En d'autres termes, comment la représentation de l'espace, à la base de la géométrie, émerge-t-elle sur le plan ontogénétique ? Le chapitre qui suit tentera de répondre à cette importante question.

³⁸⁷ BERTHOZ, Alain. *Espace des sens et sens de l'espace*. Cours de 2002-2003, p. 337.

³⁸⁸ BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : I- La mémoire des déplacements*. Cours de 1996-1997, p. 434.

³⁸⁹ MICHEL, Denis. Chapitre 3. La cognition spatiale. *La psychologie cognitive* [en ligne], Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 2012 [consulté le 04 octobre 2021]. Disponible sur le web : <<http://books.openedition.org/editionsmsmh/14787>>. ISBN : 9782735119295. DOI : <https://doi.org/10.4000/books.editionsmsmh.14787>.

II-Phylo-ontogenèse de la représentation spatiale à la base de la géométrie

Dans la seconde théorie psycho-physiologique (ou genèse évolutionniste) de Poincaré que nous avons précédemment exposée, nous avons constaté que ce mathématicien s'est brièvement intéressé au développement de la géométrie sur le plan ontogénétique et phylogénétique, en évoquant l'hypothèse d'une contribution du développement de l'individu (ontogenèse) et celui de la race humaine (phylogenèse) dans la détermination du nombre de dimensions de l'espace. En effet, l'hypothèse avancée par Poincaré était que l'intuition de l'espace (tridimensionnel) est inscrite dans un héritage phylogénétique et qu'elle se perfectionne au cours du développement ontogénétique. Cependant, Poincaré restait très prudent sur l'analyse de ce rapport génétique, car il n'était pas en mesure de trancher définitivement si les potentiels de l'intuition spatiale qui ont une origine phylogénétique sont plus importants que les aspects ontogénétiques, il se contentait de supposer que la phylogenèse prédomine sur l'ontogenèse dans le processus de l'orientation spatiale. Il serait donc intéressant de chercher à comprendre, grâce aux progrès des neurosciences cognitives, comment l'orientation spatiale, qui implique la représentation de l'espace sensible et la construction de la géométrie, intègre le développement phylogénétique et ontogénétique. À cette fin, nous allons étudier les processus de formation de la représentation mentale de l'espace chez l'enfant.

Selon des études neurophysiologiques et neuroanatomiques, la représentation mentale de l'espace chez l'enfant se produit parallèlement à son développement individuel, qui est étroitement lié au développement de ses mécanismes oculaires, proprioceptifs et vestibulaires. Il convient de souligner que les études portant sur le processus de formation de la représentation spatiale se sont principalement concentrées sur l'évolution et le développement des mécanismes de production de la vision par l'appareil visuel³⁹⁰. Cela peut s'expliquer par le fait que l'œil est considéré comme l'organe principal de la représentation spatiale et du traitement des propriétés géométriques. Dans cette sous-section, nous nous concentrerons donc sur le développement des mécanismes visuels (phylogenèse) qui permettent à l'enfant d'acquérir une représentation de l'espace sensible et une appréhension de la géométrie au cours de son développement post-natal (ontogenèse). Dès lors, nous nous demandons comment un individu doté d'un système oculaire

³⁹⁰ Pour cette analyse concernant la phylo-ontogenèse de la représentation spatiale, nous nous référons au cours de BERTHOZ, Alain. *Le regard (I) : évolution, développement et mécanismes de l'orientation du regard*. Cours de 1993-1994, p. 454-511.

parvient-il à se constituer une représentation de l'espace sensible et de la géométrie tout au long de son évolution ?

L'étude des mécanismes de la perception oculaire, réalisée tant chez l'humain que chez certains animaux, à travers la neuroanatomie et de la neurophysiologie, révèle l'existence d'un certain degré de potentiels géométriques chez les bébés et les fœtus humains et non-humains. En effet, selon les spécialistes de la représentation spatiale, des mouvements oculaires seraient déjà présents chez l'embryon de 13 semaines sous forme de perception inconsciente³⁹¹. Face à ce résultat, comment peut-on interpréter cela en relation avec le concept de groupe de déplacements critiqué par Piaget ?

Comme mentionné dans la section II de la première partie, Piaget trouvait comme un défaut le fait que Poincaré considère le concept de groupe de déplacements comme un élément intuitif *a priori* se situant au début de la construction géométrique³⁹². Croyant que la construction génétique de l'espace se fait de façon similaire à la construction génétique du nombre pur, Piaget se mit à critiquer l'innéité du concept de groupe de Poincaré. Selon lui, Poincaré faisait erreur en supposant que le concept de groupe de déplacements était déjà formé par héritage génétique ou qu'il existait avant l'acquisition de la géométrie. Piaget soutenait que le concept de groupe de déplacements émergeait à un stade ultérieur chez l'enfant, résultant des activités locomotrices qui se produisent après la naissance. Tout comme la notion de nombre, ce concept se forme tardivement chez l'enfant. Ainsi, Piaget affirmait que la construction de l'espace, impliquant l'existence d'un sujet qui cherche à comprendre l'espace sensible, ne commençait pas par une opération mentale liée à une conscience primitive, mais par l'expérience de l'espace. Pour réfuter l'idée que le concept de groupe de déplacements relevait d'une construction mentale *a priori*, Piaget démontrait que l'élaboration des groupes de déplacements se réalisait de manière expérimentale à travers six stades différents³⁹³. Par

³⁹¹ *Idem*, p. 460.

³⁹² Piaget formule la critique suivante contre Poincaré : « *du point de vue génétique réel que du point de vue mathématique abstrait, il nous semble s'être mépris en situant cette structure de groupe au point de départ des comportements sensori-moteurs, alors qu'elle en constitue seulement le point d'arrivée et la forme d'équilibre finale* ». Cf. PIAGET, Jean. Introduction à l'épistémologie génétique. 1/ La pensée mathématique. 1973, *op. cit.*, p. 189.

³⁹³ Dans un chapitre de *La construction du réel chez l'enfant*, plus précisément au chapitre II intitulé "Le champ spatial et la construction du réel chez l'enfant", Piaget donne une description des principaux stades de l'élaboration des groupes de déplacements chez l'enfant. D'après lui, les deux premiers stades correspondent aux groupes pratiques et hétérogènes, le troisième stade correspond à la coordination des groupes pratiques et à la constitution des groupes subjectifs, le quatrième stade correspond au passage des groupes subjectifs aux

conséquent, Piaget critiquait un certain innéisme chez Poincaré, tout en étant conscient que son approche empirique se distinguait de la genèse logique proposée par ce dernier.

Aussi Poincaré s'est-il borné à reconstituer logiquement, si l'on peut dire [...] un développement conjectural, au lieu de décrire le développement réel : il a donc supposé, comme allant de soi, l'existence d'une distinction élémentaire entre les changements de position et les changements d'état, puis a construit sa théorie sur cette donnée hypothétique³⁹⁴.

Certes, Piaget a raison de soutenir, du point de vue génétique et cognitif, que le développement des potentiels géométriques se déroule de manière complexe et s'étend sur plusieurs années. Toutefois, les résultats des recherches neurophysiologistes attestant la présence des potentiels géométriques précoces chez le fœtus remettent en cause son épistémologie génétique. En effet, la détection d'un certain degré de potentiels géométriques chez le fœtus suggère l'existence d'une forme de concept géométrique dès cette période. Cette observation laisse penser que les groupes de déplacements existent sous forme de concept avant même l'acquisition de la géométrie. Ainsi, les résultats des recherches neurophysiologistes indiquant la présence des potentiels géométriques précoces chez le fœtus semblent être en accord avec l'approche de Poincaré, qui considérait que l'activité mentale constitue le point de départ du processus de construction géométrique. En d'autres termes, le concept de groupe de déplacements pourrait être présent à un stade précoce du développement, contribuant ainsi à la formation ultérieure de la géométrie chez l'enfant.

Ces résultats suggèrent que les prédispositions phylogénétiques jouent un rôle spécifique dans la construction de la géométrie dès les premiers stades de la vie. Cependant, Piaget semble exclure ou négliger ces prédispositions phylogénétiques lorsqu'il critique la théorie spatiale de Poincaré. S'il est admis qu'au stade embryonnaire l'enfant n'a pas encore une vision claire des choses permettant des déplacements et des constructions géométriques formelles, les spécialistes de la représentation spatiale nous apprennent qu'il est capable d'effectuer des saccades oculaires, dont la vitesse reste tributaire des performances de son système visuel³⁹⁵.

groupes objectifs et à la découverte des groupes réversibles, le cinquième stade correspond aux groupes objectifs et le sixième stade correspond aux groupes représentatifs. Pour connaître les détails de ces différents stades, voir PIAGET, Jean. *La construction du réel chez l'enfant*. Paris, Actualités pédagogiques et psychologiques, 1967, p. 86-180.

³⁹⁴ PIAGET, Jean. Introduction à l'épistémologie génétique. 1/ La pensée mathématique. 1973, *op. cit.*, p. 189.

³⁹⁵ Dans les premières semaines, les mouvements oculaires effectués par le fœtus sont des mouvements lents, cependant ces mouvements deviennent de plus en plus rapides à partir du 6^e mois, car à partir de cette période les fonctions du système visuel du fœtus commencent à se développer de telle sorte qu'il réalise rapidement plus de mouvements oculaires.

Ces mouvements oculaires, dans la mesure où ils ne correspondent pas encore à des poursuites oculaires³⁹⁶ complètes, ont été désignés par André Thomas des « yeux de poupée », car ils disparaissent à la naissance pour laisser place à une réelle vision. Ainsi, bien que les capacités de perception spatiale de l'embryon soient limitées, il présente néanmoins des mouvements oculaires qui reflètent une certaine activité visuelle et une prédisposition précoce à interagir avec son environnement. Cette observation soutient l'idée que les prédispositions phylogénétiques sont une condition préalable importante dans le processus de construction de l'espace et de l'acquisition de la géométrie chez les jeunes enfants.

Après la naissance, on observe une évolution remarquable du potentiel de représentation spatiale chez le nouveau-né. Dès les dix premiers jours qui suivent la naissance, le nouveau-né commence à développer un répertoire de mouvements d'orientation. Quelques mois plus tard (entre 6 et 8 mois), les premiers indices de la poursuite oculaire et de la convergence accommodative apparaissent, témoignant de la capacité du système visuel à effectuer son auto focus et à voir nettement en vision rapprochée. À ce stade, il a été démontré que les mouvements oculaires se développent progressivement chez le nouveau-né, lui permettant de fixer une cible avec une précision moyenne de 0.8 degré, contre 0.4 chez l'adulte³⁹⁷. Lorsque la poursuite oculaire est pleinement développée chez le nouveau-né, devenu enfant, il commence à naviguer dans l'espace sensible en réalisant diverses activités locomotrices qui impliquent la coordination des saccades oculaires, des mouvements musculaires, kinesthésiques, tactiles, vestibulaires, etc. Progressivement, l'enfant développe des stratégies cognitives qui combinent les mouvements d'orientation du regard. À ce stade de son développement, l'enfant ne cesse d'orienter et de réorienter son regard vers les objets du monde sensible dans le but de les appréhender. C'est en combinant les mouvements d'orientation du regard que l'enfant se construit une représentation de l'espace sensible qui lui permet ensuite de comprendre la géométrie grâce à l'apprentissage³⁹⁸. Ainsi, la question qui se pose est de comprendre quelles

³⁹⁶ La poursuite visuelle est la capacité de suivre des yeux une cible en mouvement sans que l'image de l'objet s'écarte de la fovéa. Lorsqu'elle est totalement développée, la poursuite visuelle s'effectue de façon continue, fluide et régulière, sans saccades (changement rapide d'un point de fixation à un autre). La poursuite visuelle se fait par le mouvement des yeux seuls ou par le mouvement combiné des yeux et de la tête. Cf. Wikipédia https://fr.wikipedia.org/wiki/Poursuite_visuelle.

³⁹⁷ BERTHOZ, Alain. *Le regard (I) : évolution, développement et mécanismes de l'orientation du regard*. Cours de 1993-1994, p. 460.

³⁹⁸ Il serait intéressant de disposer d'informations plus détaillées sur d'éventuelles études portant sur les potentiels d'affinité géométrique. Par exemple : reconnaissance générale des formes, distinction des triangles, des octogones, des cercles, identification du parallélisme ou des angles. Le fait que ces faits ne soient pas suffisamment élucidés dans les recherches de Berthoz constitue un point faible de sa théorie spatiale.

sont les stratégies cognitives précises utilisées par l'enfant pour la représentation de l'espace sensible, c'est-à-dire pour la localisation des positions des objets de l'espace sensible ?

La manière dont l'enfant se constitue une représentation de l'espace en tirant parti des séances d'apprentissage, des expériences sensorielles, des activités visuo-locomotrices ou et des stratégies d'orientation du regard, a fait l'objet d'études approfondies menées par plusieurs spécialistes de la cognition spatiale³⁹⁹ dont Berthoz. Les études sur ce sujet ont révélé que la représentation de l'espace sensible par l'enfant repose sur des compétences cognitives qui s'inscrivent dans deux cadres référentiels distincts : le cadre référentiel égocentrique et le cadre référentiel allocentrique. Selon les chercheurs, notamment Berthoz, l'enfant utilise d'abord un cadre de référence égocentrique pour représenter l'espace sensible⁴⁰⁰. Ce fait se produit lorsque la poursuite oculaire atteint sa maturation, généralement entre 10 et 12 mois. Cette représentation égocentrique résulte d'une longue période d'apprentissage, car elle nécessite que l'enfant se familiarise, s'imprègne ou s'adapte à son environnement social. C'est pourquoi, au début de ses explorations, l'enfant réalise une multitude d'actions qui intègrent les mouvements oculaires, musculaires, vestibulaires et proprioceptifs afin de s'adapter à son environnement social.

L'objectif de l'enfant en réalisant ces multiples activités locomotrices est d'acquérir une connaissance précise de son environnement social. Sur le plan des stratégies cognitives, cette connaissance précise de l'environnement fait référence à la capacité de localiser les objets qui l'entourent, de déterminer leur position exacte et leur direction. Pour ce faire, lors de ses activités locomotrices, l'enfant utilise un cadre référentiel égocentrique dans lequel il mémorise la position des objets rencontrés sur son chemin et les repères spatiaux par rapport à son propre corps. Dans une représentation spatiale égocentrique, l'enfant utilise son propre corps comme point central de référence pour représenter l'espace sensible. C'est ainsi que l'enfant a tendance à tout ramener à son propre corps, y compris la mémorisation du trajet parcouru et la localisation des objets dans l'espace. En d'autres termes, dans une représentation égocentrique, les capacités

³⁹⁹ Voir par exemple PAILLARD, Jacques. Motor and representational framing of space. *Brain and space*. J. Paillard (Ed.), Oxford University Press, 1991, chap. 10, p. 163-182. KLATZKY, Roberta. *Spatial Cognition: An Interdisciplinary Approach to Representing and Processing Spatial Knowledge*. 1998, Springer. Allocentric and Egocentric Spatial Representations: Definitions, Distinctions, and interconnections, p. 1-17. MCNAMARA, Timothy, How Are the Locations of Objects in the Environment Represented in Memory? In *Spatial cognition III*, 2003, p. 174-191. Pour ce qui concerne les recherches de Berthoz sur la distinction entre le référentiel égocentrique et le référentiel allocentrique, voir *Le sens du mouvement*, chapitre 4 « Référentiels », p. 107-124 ; et « le problème des référentiels » dans Alain BERTHOZ, *Le cerveau et l'espace : I- La mémoire des déplacements*. Cours de 1996-1997, p. 422-424.

⁴⁰⁰ Alain Berthoz. *Le sens du mouvement*. 2013, *op. cit.*, p. 109.

cognitives de l'enfant pour estimer la distance jusqu'à un objet, déterminer sa position et sa direction sont évaluées par rapport à son propre corps. Par exemple, lorsque l'enfant essaie de se souvenir du chemin pour revenir à son point de départ, il utilise une stratégie d'orientation basée sur la mémorisation des mouvements proprioceptifs de son corps et leur association avec les repères spatiaux rencontrés lors de l'activité locomotrice. Il est important de noter que cette capacité de représenter l'espace selon un référentiel égocentrique n'est pas spécifique à l'espèce humaine. Tout comme les enfants humains, plusieurs animaux sont capables de développer une représentation spatiale basée sur un référentiel égocentrique. Cette exploration égocentrique précoce de l'espace externe est en accord avec la conception de Poincaré, notamment lorsqu'il décrit le corps comme un instrument de mesure et la localisation d'un point dans l'espace comme la représentation des mouvements nécessaires pour atteindre ce point⁴⁰¹.

Dans son étude sur l'exploration précoce d'affinité géométrique, Lepecq a identifié chez l'enfant deux modes distincts de représentation égocentrique. Selon lui, l'enfant est capable d'avoir une représentation égocentrée absolue et une représentation égocentrée coordonnée de l'espace sensible⁴⁰². La représentation égocentrique absolue, selon Lepecq, désigne la capacité de l'enfant à localiser les objets de l'espace sensible même lorsqu'il est immobile ou statique. Dans ce cas, l'enfant utilise ses références corporelles fixes comme point central de localisation. En revanche, la représentation égocentrique coordonnée, selon Lepecq, désigne la capacité de l'enfant à localiser les objets spatiaux en étant en mouvement, c'est-à-dire en effectuant des déplacements ou des mouvements corporels. La distinction entre ces deux types de représentation est intéressante car la représentation égocentrique coordonnée offre davantage d'enrichissement à l'enfant, en raison des différents types de mouvements ou déplacements qu'elle implique, tels que les rotations et les translations que l'enfant peut éventuellement effectuer pour atteindre sa cible (l'objet). Comme le souligne Poincaré, de tels mouvements sont essentiels dans la genèse de la géométrie, car ils impliquent des corrections et des compensations. En revanche, la représentation égocentrique absolue, du fait que le référent central ne se déplace pas, ne nécessite pas de compensations.

De son côté, Berthoz a démontré que la représentation de l'espace sensible selon un référentiel égocentrique fait appel à des données sensorielles provenant de différents organes

⁴⁰¹ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 67.

⁴⁰² LEPECQ, Jean-Claude. Étude génétique des référentiels spatiaux : localisation et déplacement chez le jeune enfant. *Cahiers de Psychologie Cognitive / Current Psychology of Cognition*, 1983, 3(3), p. 229–253.

sensoriels, tels que l'œil, le système vestibulaire, le toucher et la proprioception. En effet, la capacité de l'enfant à se déplacer dans l'espace implique la coordination des yeux, de la tête, des oreilles, des bras, bref, la coordination de tous les membres du corps qui accompagnent ses activités locomotrices⁴⁰³. Ainsi, selon Berthoz, ce sont les sensations provenant des organes sensoriels du corps qui permettent à l'individu d'avoir une représentation des objets de l'espace sensible, d'associer un repère spatial à une direction, et de reconnaître sa trajectoire et sa position dans un espace donné.

Cependant, la représentation spatiale chez l'enfant ne se limite pas à la représentation égocentrique, elle se fait également selon une représentation allocentrée. Dans le cadre d'un référentiel allocentrique, la représentation spatiale se fait par rapport à un objet extérieur au corps de l'enfant plutôt qu'à son propre corps. Les représentations construites dans ce référentiel sont indépendantes du corps de l'enfant et se centrent sur les objets invariables de l'environnement. Par exemple, l'enfant peut utiliser un immeuble comme point de repère pour se rappeler de son itinéraire, développant ainsi une stratégie cognitive visant à retrouver son chemin par rapport à cet objet invariable. Dans cette situation, l'enfant cherche à retrouver son itinéraire sans se rappeler des mouvements kinesthésiques effectués pendant le trajet. Cette conception d'exploration allocentrique de l'espace externe est également en accord avec la conception de Poincaré sur la relativité de l'espace. Il soulignait, par exemple, que dans l'espace étendu, les axes de coordonnées auxquels nous référons nos mouvements sont des objets éloignés de notre corps⁴⁰⁴. Pour représenter des objets éloignés à une certaine distance de notre corps, nous devons effectuer une série de mouvements ou de parades causés par le déplacement de notre corps.

Ainsi, la représentation égocentrique et la représentation allocentrée sont les stratégies cognitives à partir desquelles l'enfant se fait une représentation complète de l'espace sensible et appréhende la géométrie. Il est important de noter que la représentation égocentrique se développe très tôt chez l'enfant, tandis que la représentation allocentrée apparaît un peu plus tardivement⁴⁰⁵. Cette précision soulève la question de savoir si la représentation de l'espace

⁴⁰³ BERTHOZ, Alain. *Le regard (I) : évolution, développement et mécanismes de l'orientation du regard*. Cours de 1993-1994, p. 461.

⁴⁰⁴ POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*. 1999, *op. cit.*, p. 93.

⁴⁰⁵ BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : II- Fondements cognitifs de la géométrie et de l'espace*. Cours de 1997-1998, p. 428. Et *Le sens du mouvement*. 2013, *op. cit.*, p. 110.

dans les référentiels égocentrés et allocentrés implique que ces deux cadres référentiels sont opposés ou s'ils interagissent au cours du développement de l'individu.

Les spécialistes de la cognition spatiale ont étudié la distinction entre les représentations égocentree et allocentree. Malgré de nombreuses études sur le sujet, les chercheurs ont du mal à délimiter clairement les frontières entre ces deux systèmes référentiels. Cependant, ils s'accordent sur le fait que ces deux systèmes de représentation spatiale mobilisent des ressources cognitives différentes. Il a été démontré que lors des premières expériences locomotrices, l'enfant utilise une représentation égocentree pour acquérir rapidement une connaissance superficielle de l'espace. Dans cette perspective égocentree, l'enfant construit sa connaissance spatiale en se basant sur les mouvements kinesthésiques, proprioceptifs, visuels et vestibulaires de son corps, ce qui lui permet de découvrir progressivement son environnement⁴⁰⁶. Selon les spécialistes de la cognition spatiale, cette stratégie de connaissance spatiale, où l'enfant mémorise la position des objets par rapport à son corps, est moins coûteuse car elle n'implique pas une manipulation de la carte mentale. En revanche, l'utilisation de la représentation allocentree, qui se développe ultérieurement chez l'enfant, permet une connaissance plus approfondie de l'espace sensible. Étant donné que cette tâche est plus complexe, elle nécessite l'utilisation d'une "carte cognitive". Bien que le concept de "carte cognitive" ait été mentionné précédemment, il est important d'insister sur son importance dans l'apprentissage de la représentation spatiale, ainsi que sur l'importance accordée par Poincaré à l'intervention de la mémoire dans la représentation de l'espace étendu.

Edward Tolman définit la « carte cognitive » comme étant « *la forme particulière de représentation mentale qui contient l'information sur les relations spatiales entre les objets présents dans un environnement et qui fournit à l'individu la possibilité de s'orienter dans cet environnement* »⁴⁰⁷. Michel Denis rapporte que cette notion a été introduite en cognition spatiale par Tolman pour souligner que la connaissance spatiale selon une représentation allocentree nécessite une carte mentale. Selon Tolman en effet, l'enfant construit sa connaissance de l'espace en utilisant des informations contenues dans la carte mentale ou cognitive. Il fait constamment référence à sa « carte cognitive », intégrée dans sa mémoire à long terme, pour reconnaître son trajet, sa direction et déterminer sa distance indépendamment de son corps.

⁴⁰⁶ TOLMAN, Edward cité par Denis MICHEL, Référentiels in *Petit traité de l'espace : Un parcours pluridisciplinaire*, Wavre, Belgique : Mardaga. 2016, p. 96.

⁴⁰⁷ MICHEL, Denis. Référentiels. 2016, *op.cit.*, p. 99.

Cette « carte cognitive » offre plusieurs avantages à l'enfant dans sa représentation spatiale. Elle lui permet notamment de choisir le chemin le plus court pour atteindre sa destination, de trouver des raccourcis ou même de créer de nouveaux itinéraires si le trajet initial est jugé dangereux ou moins favorable⁴⁰⁸. Lorsque l'enfant commence à évaluer les distances, c'est-à-dire à privilégier une distance par rapport à une autre indépendamment de son corps, il commence à faire la géométrie, car comme le souligne Longo, l'invariance des objets de l'espace sensible est ce qui constitue le fondement même de la géométrie⁴⁰⁹. Pour dire les choses autrement, la géométrie physique commence lorsque l'enfant passe de la représentation égocentrique, qui est une orientation subjective de l'espace sensible, à la représentation allocentrée, où les représentations d'affinité géométrique deviennent plus complexes et sont accompagnées d'une analyse structurelle de l'environnement.

Dans la continuité de cette hypothèse, Acredolo⁴¹⁰, en accord avec Poincaré, a montré que le référentiel allocentré est le cadre référentiel le plus essentiel pour une représentation complète de l'espace sensible et une appréhension de la géométrie, car il exige un repérage par rapport à un objet invariant ou immobile, ainsi que l'utilisation d'une carte mentale pour les mouvements complexes qui s'y déroulent. Cela confirme l'hypothèse de Poincaré selon laquelle la représentation des objets indépendamment de notre corps implique des mouvements complexes qui nécessitent l'intervention de la mémoire.

Accordée une priorité au référentiel allocentré, en raison de la « carte cognitive » qu'il requiert ne signifie pas que les activités locomotrices qui ont lieu en amont dans le référentiel égocentré ne participent pas à la représentation spatiale ou ne contribuent pas à la construction géométrique. En effet, les premières explorations de l'enfant, qui incluent des activités locomotrices, oculaires, kinesthésiques et vestibulaires, seraient impliqués dans la formation de la « carte cognitive » qu'il utilise ensuite dans le référentiel allocentré. Cela suggère que la plupart des informations stockées dans la « carte cognitive », en tant que mémoire individuelle⁴¹¹, proviennent des activités ou expériences locomotrices réalisées dans le

⁴⁰⁸ LITHFOUS, Ségolène. *Études des processus précoces impliqués dans la mémoire spatiale au cours du vieillissement : investigations électrophysiologiques*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2014, p. 45.

⁴⁰⁹ LONGO, Giuseppe. Géométrie, mouvement, espace : cognition et mathématiques, *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche de la Cognition*. 1997, n° 25, p. 211.

⁴¹⁰ ACREDOLO, Linda. Small and larger-scale spatial concepts in infancy and childhood, édité par L. S. Liben, A. H. Patterson et N. Newcombe (Edit.), *Spatial representation and behavior across the life span*, New York, Academic Press, 1981, p. 63-81.

⁴¹¹ LONGO, Giuseppe. De la cognition à la géométrie, Introduction : est-ce que les calamars font de la géométrie ? *Les anatomies de la pensée*. 1997, p. 6.

référentiel égocentré. C'est la raison pour laquelle Berthoz et d'autres spécialistes de la cognition spatiale estiment que la représentation de l'espace et l'acquisition de la géométrie résultent de l'interaction entre le référentiel égocentrique et le référentiel allocentrique.

Dans *Le sens du mouvement*, Berthoz met fortement l'accent sur cette interaction. Selon lui, la représentation spatiale à la base de la construction et de l'appréhension de la géométrie n'est pas seulement centrifuge (allocentrée), mais elle est aussi centripète (égocentrée). Dans cette perspective, l'enfant a la possibilité d'utiliser délibérément le référentiel qui lui convient le mieux pour localiser un objet dans l'espace, en fonction de sa situation environnementale. Berthoz s'accorde ainsi avec Poincaré qui soutenait qu'à chaque instant, nous faisons des changements inconscients de coordonnées⁴¹². Les études menées par Hartley⁴¹³ sur ce sujet indiquent que le référentiel de représentation égocentrée est plus adapté pour les itinéraires régulièrement fréquentés ou empruntés. En revanche, le référentiel allocentré se révèle plus efficace dans les environnements vastes comportant un grand nombre d'itinéraires.

Plusieurs études convergentes à cette hypothèse ont été réalisées dans le but de mettre en évidence les structures cérébrales impliquées dans chacun de ces modes de représentation spatiale. Par exemple, les études en neuroanatomie réalisées par Wolters (en 2004)⁴¹⁴ et ses collaborateurs ont montré que les lobes pariétaux sont majoritairement impliqués dans la représentation égocentrée. D'autres études, notamment celles menées par l'équipe de recherche de Iaria (en 2003)⁴¹⁵ et les études suivantes menées par Bohbot (en 2007)⁴¹⁶, ont montré par contre que la représentation allocentrée fait intervenir principalement le lobe temporal médian droit.

En retraçant le développement des structures d'affinité géométrique jusqu'aux saccades du stade fœtal, notre objectif était d'illustrer l'intégration des dispositions phylogénétiques et du développement ontogénétique dans le processus de construction géométrique. L'interprétation des saccades embryonnaires comme composantes de la genèse des potentiels

⁴¹² POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op. cit.*, p. 94.

⁴¹³ HARTLEY, Tom, MAGUIRE, Eleanor, SPIERS, Hugo, BURGESS, Neil. The well-worn route and the path less traveled: distinct neural bases of route following and wayfinding in humans. *Neuron*. 2003, 37 (5), p. 877-888.

⁴¹⁴ WOLBERS, Thomas, WEILLER, Cornelius, BÛCHE, Christian. Neural foundations of emerging route knowledge in complex spatial environments. *Cognitive brain research*. 2004, 21 (3), p. 401-411.

⁴¹⁵ IARIA, Giuseppe, PETRIDES, Michael, DAGHER, Alain, PIKE, Bruce, BOHBOT, Veronique. Cognitive Strategies Dependent on the Hippocampus and Caudate Nucleus in Human Navigation: Variability and Change with Practice. *Journal of Neuroscience*. 2003, 23 (13), p. 5945-5952.

⁴¹⁶ BOHBOT, Veronique, LERCH, Jason, THORNDYCRAFT, Brook, IARIA, Giuseppe, ZIJDENBOS, Alex. Gray matter differences correlate with spontaneous strategies in a human virtual navigation task. *Journal of Neuroscience*. 2007, 27 (38), p. 10078-10083.

d'affinité géométrique offre ainsi un soutien à l'accent mis par Poincaré sur l'intégration de la phylogenèse et de l'ontogenèse dans la construction de la géométrie.

TROISIÈME PARTIE :
LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES DE POINCARÉ À
L'ÉPREUVE DES NEUROSCIENCES COGNITIVES

Maintenant que nous avons acquis une connaissance générale des théories neurocognitives élaborées par les neuroscientifiques cognitivistes concernant les bases cognitives des mathématiques, il est temps d'aborder la question centrale de cette recherche, celle de savoir si la considération de Poincaré selon laquelle les nombres de l'arithmétique sont construits à partir d'une action conjointe de l'esprit humain et de l'expérience et celle selon laquelle la géométrie résulte de l'action de l'esprit humain et des flux sensoriels liés aux mouvements corporels, aux changements de position et d'état sont compatibles avec les modèles des neurosciences cognitives. En clair, nous voulons déterminer si les idées philosophiques de Poincaré sur la construction des nombres de l'arithmétique et sur la genèse psycho-physiologique de la géométrie sont aisément superposables aux théories de construction cognitive proposées récemment par certains neuroscientifiques cognitivistes. Cette partie de notre étude vise à confronter les idées philosophiques de Poincaré à celles des neuroscientifiques cognitivistes. Dans cette optique, nous examinerons successivement la théorie intuitionniste développée par Poincaré en arithmétique et la théorie psycho-physiologique développée en géométrie, en les comparant aux théories neurocognitives présentées précédemment. Notre objectif sera d'identifier les points de convergence et de divergence entre ces différentes approches.

CHAPITRE I : LA THÉORIE INTUITIONNISTE DE POINCARÉ ET LE NEUROCOGNITIVISME ARITHMÉTIQUE

Cette section se concentre sur l'examen de la théorie intuitionniste de Poincaré sous le prisme des théories neurocognitives concernant la construction/acquisition des nombres et la prise de décision intuitive (présentées précédemment). En d'autres termes, notre objectif est d'évaluer la compatibilité entre les idées philosophiques formulées par Poincaré pour soutenir sa théorie intuitionniste et celles développées par les neuroscientifiques cognitivistes pour justifier les corrélats neuronaux des nombres. Pour cela, nous commencerons par identifier les points apparents de convergence entre la théorie intuitionniste de Poincaré et les théories neurocognitives élaborées par des neuroscientifiques cognitivistes pour expliquer la construction ou l'acquisition des nombres (par exemple, Changeux et Dehaene) et la prise de décision intuitive (par exemple, Damasio). Cela nous permettra de mettre en évidence les idées de Poincaré qui restent pertinentes à l'ère des neurosciences cognitives. Une fois que nous aurons établi les points apparents de convergence entre les idées de Poincaré et celles de ces neuroscientifiques cognitivistes, nous aborderons les divergences concernant les oppositions contextuelles, conceptuelles et méthodologiques.

Il est essentiel de rappeler que dans la théorie intuitionniste, en particulier dans l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré, l'intuition joue un double rôle. Comme cela a été vu précédemment, l'« intuition pure et intellectuelle » sert à obtenir l'itération et le principe d'induction et l'« intuition sensible », quant à elle, sert d'occasion à être conscient de la puissance créatrice réalisée par l'intuition intellectuelle. L'intuition sous sa double forme est donc indispensable au processus de construction des nombres. Il existe quelques points de convergence entre les théories neurocognitives de Changeux et Dehaene et l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré.

Dans la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux précédemment esquissée, la nature des objets mathématiques peut être perçue comme un élément qui le rapproche de la théorie intuitionniste de Poincaré. En abordant la question des fondements des mathématiques sous un angle neurobiologique, Changeux semble être d'accord avec Poincaré sur la nature des objets mathématiques lorsqu'il affirme : « *on retrouve chez quelques mathématiciens du passé, comme Poincaré et Hadamard, des préoccupations proches des nôtres* »⁴¹⁷. Il convient de rappeler que

⁴¹⁷ CHANGEUX, Jean-Pierre et CONNES, Alain. *Matière à pensée*. 1989, *op.cit.*, p. 110.

Changeux cherche à réfuter le réalisme mathématique de Platon en proposant une interprétation naturaliste du processus de construction des objets mathématiques. La référence à Poincaré dans ce passage est une manière de reconnaître le mérite de ce savant qui, en rejetant le logicisme et le formalisme, considérait que les nombres sont construits au moyen d'une interactivité entre l'esprit et l'expérience. De manière similaire à Poincaré, Changeux considère que la construction des objets mathématiques ne se réduit pas à l'activité neuronale. Bien que le cerveau soit doté d'une plasticité, il interagit régulièrement avec les données du monde sensible. De ce fait, sa considération est que les objets mathématiques résultent de l'interaction entre le cerveau et le monde sensible. L'idée implicite qui rapproche ces deux conceptions est que les objets mathématiques n'existent pas à l'extérieur de l'esprit humain.

Bien que le naturalisme de Changeux ait puisé ses sources dans diverses influences philosophiques, notamment l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré, sa démarche en tant que neurobiologiste présente néanmoins un certain matérialisme déterministe qui se révèle incompatible avec celle de Poincaré. Comme nous l'avons précédemment constaté, le projet matérialiste de Changeux vise à expliquer l'esprit et la pensée en tant que fonctions biologiques liées à l'activité neuronale et à l'influence socio-culturelle qui se produit après la naissance. Cette conception neurobiologique de l'esprit et de la pensée a des répercussions négatives sur l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré, car elle implique que la capacité de l'esprit à créer est principalement déterminée par l'évolution biologique qui dépend en partie des facteurs empiriques. On peut considérer le matérialisme de Changeux comme une nouvelle forme d'empirisme, dans la mesure où il soutient que les performances de l'esprit sont liées au développement des capacités innées par le biais d'expériences et d'apprentissages socio-culturels. Cette perspective suppose que l'esprit, bien qu'ayant des potentialités innées, construit les objets mathématiques et les nombres principalement à partir de l'expérience, ce qui va inévitablement à l'encontre des idées de Poincaré.

Nous avons également constaté que la méthode itérative ou inductive suggérée par Poincaré comme procédé de construction des nombres est une méthode dans laquelle l'esprit humain, malgré sa puissance, est limité par la contradiction et reste occasionné par l'expérience sensible. On pourrait croire que cette démarche poincaréenne se trouve en filigrane de la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux élaborée au sujet de l'acquisition de la connaissance mathématique. Cette théorie suggère que l'enfant apprend les symboles numériques grâce à un long processus d'apprentissage au cours duquel les aspects socio-

culturels imprègnent le cerveau de l'enfant de règles culturelles pour faciliter l'apprentissage des nombres et du langage. Son hypothèse fondamentale est que la capacité de l'être humain à compter et à comprendre la signification des nombres est d'ordre mixte, impliquant à la fois des potentiels numériques innés présents dès la naissance et des facteurs empiriques acquis au cours du processus de socialisation.

Il est possible de supposer que ce modèle d'acquisition des nombres est également présent chez Poincaré, puisque dans *Les définitions mathématiques et l'enseignement*, on voit que Poincaré, en pédagogie, récuse l'enseignement des mathématiques basé sur les démonstrations purement logiques et suggère un enseignement mathématique axé sur l'apprentissage : plutôt que de partir des démonstrations logiques qui suscitent une frénésie chez les jeunes apprenants, il faut leur faire vivre l'expérience de l'intuition. Pour cela, il est nécessaire de partir d'une série d'exemples ou d'expériences pour en déduire les définitions mathématiques⁴¹⁸. Cette méthode empirico-inductive présente l'avantage de placer les apprenants au centre de l'apprentissage mathématique. En devenant les principaux acteurs de leur apprentissage, les apprenants découvrent les mathématiques à travers des exemples et des cas pratiques présentés par l'enseignant, avant de formuler des hypothèses et d'élaborer des définitions mathématiques. In fine, la pédagogie inductive proposée par Poincaré suggère de débiter l'enseignement mathématique par le concret et non par l'abstrait. C'est à cette condition que les apprenants parviendront à aimer les mathématiques.

Changeux semble suivre les traces de Poincaré lorsqu'il soutient l'hypothèse selon laquelle l'acquisition des nombres se fait par l'éducation et la confrontation de l'individu à son environnement social. En effet, il exprime cette proximité avec Poincaré en déclarant : « *curieusement, les pionniers de l'investigation scientifique des processus cognitifs à l'origine de la pensée scientifique elle-même furent les mathématiciens : Henri Poincaré et son élève Hadamard...* »⁴¹⁹. En fait, Changeux essaie de s'appuyer sur les remarques de Poincaré pour donner une interprétation cognitive du processus par lequel un enfant acquiert les nombres. Cependant, il commet une erreur en utilisant les observations de Poincaré pour donner une interprétation cognitive du processus par lequel un enfant acquiert les nombres, car Poincaré s'intéresse en réalité à la construction logique des nombres. Ce qui le préoccupe, c'est de

⁴¹⁸ POINCARÉ, Henri. *Les définitions mathématiques et l'enseignement*. Georg Geneva. Enseignement mathématique, 1904, 6, p. 257-283. Repris dans POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*. 1999, *op. cit.*, p. 111.

⁴¹⁹ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*. 2002, *op. cit.*, p. 351.

comprendre comment les nombres sont construits mathématiquement. D'un autre côté, Changeux s'intéresse aux protocoles d'expérimentation liés à l'acquisition des nombres chez les enfants. On peut clairement constater que les approches et les objectifs poursuivis par ces deux auteurs sont très différents.

Si nous cherchons à comprendre le fonctionnement de l'esprit humain dans la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux, nous verrons rapidement se dissiper ces quelques points de convergence établis dans les passages précédents, à cause des différences conceptuelles et contextuelles qui creusent un écart entre Poincaré ce neuroscientifique cognitiviste. Comme cela a été indiqué dans la théorie d'épigenèse neuronale de Changeux, les neurosciences cognitives expliquent la conscience et ses processus psychiques corollaires, à savoir la pensée, l'imagination, l'introspection, etc. en référence aux boucles neuronales que comporte la matière cérébrale. Cette conception biologique de la conscience implique que l'esprit, qui d'ordinaire désigne la faculté propre de l'homme à réfléchir et à penser (par lui-même), résulte des propriétés physico-chimiques du cerveau. Changeux qui adopte une position matérialiste considère que les activités psychiques, mentales ou introspectives sont des états cérébraux. Cette conception biologique de la conscience et de l'esprit peut avoir ici deux interprétations possibles.

Si l'on interprète la démarche scientifique de Changeux comme une tentative de réduction de la pensée à une activité intrinsèque et spontanée, engendrée par les oscillateurs neuronaux⁴²⁰, on y verrait rapidement une incompatibilité significative avec l'approche intuitionniste de Poincaré. Puisque le fait d'assimiler la pensée à des états oscillatoires suppose de ne plus considérer les objets mentaux comme résultant d'une activité réflexive, propriété de l'esprit selon Poincaré, mais plutôt comme des états mentaux identifiés aux signaux électriques engendrés inconsciemment par les neurones. En revanche, cette incompatibilité peut être dissipée si l'on considère que l'un des objectifs essentiels de la recherche en neurosciences cognitives est de trouver des corrélats neurophysiologiques (les neurones, leurs circuits et les processus bio-électriques, chimiques, etc. qui s'y déroulent) et d'essayer d'interpréter la conscience dans cette perspective. Cela conduit finalement à inclure l'activité réflexive dans le cadre de telles analyses. Dans cette perspective, les potentiels, tels que Poincaré les atteste à notre esprit (réflexion, création, invention, etc.), doivent être décrits au niveau de ces corrélats

⁴²⁰ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*. 2002, *op. cit.*, p. 126.

neuronaux. Mais ces potentiels, comme nous l'avons vu au sujet de la création mathématique, ne sont pas encore suffisamment expliqués.

La théorie développée par Dehaene concernant l'intuition des nombres présente de frappantes similitudes avec l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré. La première ressemblance évidente réside dans les fondements des nombres. Il est bien connu que les recherches expérimentales menées par Dehaene tentent de résoudre le problème des fondements des mathématiques en se basant sur la psychologie cognitive. Comme nous l'avons vu précédemment, de nombreuses observations et expériences réalisées sur des humains et certains animaux ont démontré l'existence de systèmes de numérosité, plus spécifiquement, l'existence du système approximatif des nombres qui leur confère l'intuition du nombre. Cela conduit Dehaene à suggérer que le système approximatif du nombre précéderait la compréhension et l'acquisition des nombres symboliques. Plus fort encore, il dit que ce système de numérosités est « *au fondement de la construction ultérieure des concepts arithmétiques de plus haut niveau* »⁴²¹. On peut donc légitimement supposer que Dehaene adopte une perspective intuitionniste en soutenant que le système approximatif des nombres est responsable de la perception directe de la numérosité et (probablement) de la construction de concepts arithmétiques plus avancés. Alors que les neuroscientifiques cognitivistes peinent encore à expliquer la transition de l'intuition des nombres vers la construction des nombres symboliques et des concepts mathématiques abstraits, Dehaene postule que l'intuition du nombre que nous possédons dès les premiers stades de notre existence joue un rôle essentiel dans le processus de construction et d'acquisition des nombres naturels. Étant donné que Dehaene accorde à l'intuition un rôle essentiel dans le processus de construction des nombres, on peut le qualifier d'intuitionniste. C'est d'ailleurs ce qu'il exprime dans ce passage :

*la position que j'ai défendue (...), et que l'on pourrait qualifier d'intuitionniste (...) postule que les fondements cognitifs des mathématiques doivent être recherchés dans une série d'intuitions fondamentales de l'espace, du temps, et du nombre, partagées par de nombreuses espèces animales, et que nous héritons d'un lointain passé où ces intuitions jouaient un rôle essentiel à la survie. Les mathématiques se constituent par la formalisation et la mise en liaison consciente de ces différentes intuitions. Ainsi cette position se rattache-t-elle, (...), à l'intuitionnisme mathématique de (...) Poincaré*⁴²².

Une interprétation superficielle de ce passage pourrait suggérer que Dehaene entérine la thèse centrale de l'intuitionnisme arithmétique, selon laquelle l'intuition est le fondement des nombres. Cependant, la perspective intuitionniste de ce psychologue cognitiviste diffère

⁴²¹ DEHAENE, Stanislas. "Le cerveau calculateur." Dossier Math et Psycho, revue APMEP (2010), p. 314.

⁴²² DEHAENE, Stanislas. Psychologie cognitive expérimentale. 2008, *op. cit.*, p. 277-278.

considérablement de celle de Poincaré sur certains points. Tout d'abord, l'intuition évoquée par Dehaene, en tant que structure incarnée dans le cerveau dès la naissance, permet la représentation *a priori* des numérosités (c'est-à-dire la représentation directe et automatique des numérosités). Cette forme d'intuition se distingue de celle de Poincaré par le fait que sa capacité de représentation *a priori* se fonde sur l'évolution biologique. En réalité, chez Dehaene, l'intuition sur laquelle repose le mécanisme de représentation *a priori* des numérosités est déterminée par l'évolution génétique. En revanche, chez Poincaré, l'« intuition pure » ou « intellectuelle », qui constitue le fondement des nombres (naturels et rationnels), n'est pas déterminée par quoi que ce soit, elle se caractérise par sa capacité à transcender l'expérience sensible et à faire des constructions *a priori* non pas au sens de Kant, mais en utilisant une « intuition intellectuelle ».

Lorsque Dehaene poursuit en affirmant que les mathématiques se constituent par la formalisation et la mise en liaison consciente des différentes formes d'intuition (l'intuition du temps, l'intuition de l'espace et l'intuition du nombre), il semble toujours s'inscrire dans une perspective intuitionniste. Voyons si cette dernière hypothèse est compatible avec l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré. Il est important de préciser dès le départ que la position intuitionniste adoptée par Dehaene est basée sur les recherches psychologiques et neurobiologiques menées auprès d'enfants et certains animaux. Ces études auraient démontré que les manipulations numériques mobilisent une interaction entre le nombre, l'espace et le temps. Cette interaction nombre-espace-temps a lieu dans le cerveau. En se fiant à ces expériences, Dehaene a été amené à soutenir que la coordination entre l'intuition du nombre, l'intuition de l'espace et l'intuition du temps, qui a lieu dans le cerveau, serait un facteur déterminant, voire fondamental dans l'appréhension de la numérosité, ainsi que dans la construction des nombres symboliques et des concepts mathématiques supérieurs qui s'y rattachent. Ce faisant, Dehaene considère que le nombre, l'espace et le temps sont des données intuitives ou des représentations mentales. En est-il de même pour Poincaré ?

Rappelons que c'est dans le domaine de l'arithmétique que Poincaré a revendiqué une théorie intuitionniste pour la construction des nombres. Son objectif était de rejeter la construction logico-formelle proposée par les logicistes et de proposer un modèle de construction qui met en avant le rôle de l'intuition. Ainsi, il a démontré que les nombres ne sont pas des constructions logiques, mais plutôt des constructions intuitives conduisant à des

propositions synthétiques *a priori*. L'idée qui lie Poincaré et Dehaene ici est que le nombre est une représentation intuitive.

En ce qui concerne l'espace, la conception intuitionniste de Dehaene selon laquelle l'espace est une donnée intuitive est en désaccord avec la théorie spatiale de Poincaré. Comme nous le savons déjà, Poincaré, en tant que conventionnaliste en géométrie, a vivement critiqué l'approche kantienne de l'espace et de la géométrie qui consistait à définir l'espace comme une forme *a priori* de notre intuition. Rejetant cette approche kantienne, la théorie psychophysique de la géométrie proposée par Poincaré pour expliquer la genèse logique de l'espace et de la géométrie part du principe que l'espace n'est pas une donnée intuitive. En effet, nous ne pouvons pas appréhender directement (ou *a priori*) l'espace dont nous n'avons aucune connaissance préalable. Pour rejeter la conception aprioriste de l'espace, Poincaré décrit un processus d'acquisition de la spatialité basé sur l'association des sensations sensori-motrices et démontre que toutes les propriétés de l'espace géométrique sont suggérées par l'expérience. Ainsi, l'espace ne peut pas être une forme *a priori* de l'intuition. On constate donc que la vision poincaréenne de la notion d'espace diffère de celle de Dehaene. Maintenant, qu'en est-il du temps ?

Poincaré adopte également une approche conventionnaliste lorsqu'il analyse la notion de temps. Dans *La valeur de la science*, il examine la mesure du temps et identifie deux formes distinctes : le temps psychologique, qui correspond à la perception subjective du temps dans la conscience, et le temps scientifique, qui est quantifiable et mesurable. La première forme de temps est qualitative, tandis que la seconde est quantitative. Après avoir établi cette distinction entre ces deux formes temporelles, Poincaré s'interroge sur les conditions permettant de mesurer de manière similaire les événements qui se déroulent dans les domaines psychologique et scientifique. L'objectif de mesurer le temps psychologique et le temps scientifique de manière analogue implique la résolution de deux problématiques : « 1° Est-il possible de transformer un temps psychologique en un temps quantitatif ? 2° Sommes-nous capables de réduire à une même mesure des faits qui se passent dans des horizons différents ? »⁴²³.

Afin de surmonter la première difficulté, Poincaré démontre que le temps n'est pas une intuition. Il affirme : « nous n'avons pas l'intuition directe de la simultanéité, pas plus que l'égalité de deux durées. Si nous croyons avoir cette intuition, c'est une illusion »⁴²⁴. Pour

⁴²³ POINCARÉ, Henri. *La valeur de la science*. 1990, *op.cit.*, p. 42.

⁴²⁴ *Idem*, p. 54.

aborder la seconde difficulté, Poincaré tente de montrer, à l'aide de plusieurs exemples, la difficulté de séparer le problème qualitatif de la simultanéité du problème quantitatif de la mesure. En raison de cette difficulté, des règles sont choisies en vertu de leur commodité. Poincaré en vient à la conclusion que le temps n'est pas une intuition, mais plutôt une convention. La mesure du temps est choisie pour répondre aux exigences de commodité. On constate que la conception temporelle de Dehaene diffère de celle de Poincaré.

Sur la base des informations précédentes, il est clair que Dehaene et Poincaré s'accordent sur le fait que les nombres sont des données intuitives. Cependant, leurs conceptions de l'espace et du temps diffèrent. Par conséquent, la position intuitionniste de Dehaene selon laquelle les mathématiques se construisent par la formalisation et la coordination de l'intuition du nombre, de l'intuition de l'espace et de l'intuition du temps est presque erronée du point de vue de l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré.

Examinons maintenant si le passage de Dehaene cité précédemment est compatible avec les considérations de Poincaré concernant l'espace de l'Analysis Situs ou espace topologique. Nous nous intéressons ici à savoir comment Poincaré conçoit la dimension de l'espace de l'Analysis Situs. Poincaré a consacré de longs développements à l'analyse de cette question. Sa démarche pour aborder cette question est tout à fait similaire à celle adoptée en géométrie métrique pour décrire le processus de construction de l'espace géométrique. Poincaré fait dériver cette dimension de l'espace topologique du concept de coupure qui, dans *La valeur de la science*, était seulement applicable au continu physique tandis qu'en 1912, dans *Dernières pensées*, il l'applique au continu mathématique en se demandant pourquoi l'espace a trois dimensions. Sa réponse conclusive est la suivante :

nous avons tous en nous l'intuition du continu d'un nombre quelconque de dimensions, parce que nous avons la faculté de construire un continu physique et mathématique ; que la faculté préexiste en nous à toute expérience parce que sans elle l'expérience proprement dite serait impossible et se réduirait à des sensations brutes, impropres à toute organisation, que cette intuition n'est que la conscience que nous avons de cette faculté⁴²⁵.

Lorsque Poincaré affirme que nous avons en nous l'intuition du continu dans un nombre quelconque de dimensions, il le déduit du fait que les axiomes de l'ordre sont des véritables axiomes intuitifs se rattachant à l'Analysis Situs⁴²⁶. Selon Poincaré, il existe en réalité un type d'intuition dans la pratique topologique qui transcende les déformations continues des figures,

⁴²⁵ POINCARÉ, Henri. *Dernières pensées*. 1917, *op. cit.*, p. 96.

⁴²⁶ *Idem*, p. 95.

qui appréhende les relations possibles entre les entités de l'hyperespace⁴²⁷ et qui développe les propriétés propres à la topologie. Poincaré ne précise pas la nature et les capacités de ce type d'intuition, mais selon l'interprétation de Ramzi Kebaïli, il s'agirait de l'« intuition géométrique pure ». Cette interprétation conduit à la conclusion que, chez Poincaré, l'« intuition géométrique pure », analogue à l'intuition du nombre pur, constitue le véritable fondement de la géométrie et ce qui rend le raisonnement géométrique rigoureux⁴²⁸. Ainsi, c'est cette forme d'intuition qui nous révèle le nombre de dimensions des continus physiques sans nécessiter de démonstration.

Toutefois, le fait d'avoir une intuition du continu d'un nombre quelconque de dimensions ne signifie pas que nous avons une intuition *a priori* de l'espace topologique en tant que tel. Le continu topologique ne devient un espace véritable que sous conditions : « *dans ce continuum primitivement amorphe, on peut imaginer un réseau de lignes et de surfaces, on peut convenir ensuite de regarder les mailles de ce réseau comme égales entre elles, et c'est seulement après cette convention que ce continuum, devenu mesurable, devient l'espace euclidien ou l'espace non-euclidien* »⁴²⁹.

L'objectif de notre analyse jusqu'à présent était de déterminer si l'affirmation de Dehaene selon laquelle les mathématiques se construisent par la formalisation et la mise en relation consciente des différentes formes d'intuition (intuition du temps, intuition de l'espace et intuition du nombre) est compatible avec la théorie intuitionniste de Poincaré. Pour ce faire, nous avons examiné si, selon Poincaré, le nombre, l'espace et le temps sont des données intuitives. Il en ressort tout d'abord que Dehaene et Poincaré sont d'accord sur le fait que le nombre est une donnée intuitive. Toutefois, l'intuition chez Poincaré est très différente de chez Dehaene. Ensuite, nous avons constaté que, selon Poincaré, l'espace métrique et l'espace topologique ne sont pas des formes *a priori* de l'intuition, bien qu'ils comportent des éléments intuitifs. Par conséquent, les perspectives de Poincaré et de Dehaene sur la notion d'espace sont incompatibles. Il est important de préciser que Poincaré aborde la notion d'espace par le biais d'une théorie psycho-physiologique qui rejette l'apriorisme géométrique (Kant, Russell,

⁴²⁷ Poincaré appelle les êtres de l'hyperespace en topologie les "variétés", c'est-à-dire des objets mathématiques qui généralisent les concepts familiers d'espace courbe et de surface, et qui permettent d'étudier des espaces de dimension supérieure à trois.

⁴²⁸ KEBAILI, Ramzi « La rigueur mathématique chez Henri Poincaré », *Philosophia Scientiæ*, 18-1 | 2014, mis en ligne le 15 mars 2017. Disponible sur <http://philosophiascientiae.revues.org/910> ; DOI : 10.4000/philosophiascientiae.910.

⁴²⁹ POINCARÉ, Henri. *La valeur de la science*. 1990, *op. cit.*, p. 55.

Hilbert). Dans cette optique, rappelons que Poincaré définit l'espace comme le cadre spatial dans lequel se tiennent les opérations de la géométrie mathématique. Dans cet espace mathématique, on retrouve des éléments tels que les points, les droites, les plans, les triangles, etc. C'est un espace où l'on peut tracer des réseaux de lignes, mesurer les distances entre les points, etc. De plus, cet espace possède les propriétés d'infinité, de continuité, d'homogénéité et de tridimensionnalité. Contrairement à l'espace de Poincaré, l'espace considéré par Dehaene comme une forme *a priori* de l'intuition ne possède pas ces propriétés et éléments, et il pourrait correspondre, dans une certaine mesure, à un espace amorphe, c'est-à-dire un espace primitif dépourvu de mesure et de dimensionnalité. Enfin, l'analyse que Poincaré fait de la notion du temps est incompatible avec celle de Dehaene. En prenant en compte ces incompatibilités, on en conclut que la position intuitionniste de Dehaene selon laquelle les mathématiques se construisent par la formalisation et la coordination de l'intuition du nombre, de l'intuition de l'espace et de l'intuition du temps contredit, en partie, la théorie intuitionniste de Poincaré.

Continuons notre analyse en mettant en évidence d'autres différences entre l'approche de Poincaré et l'approche onto-phylogénétique de Dehaene. Ces différences concernent principalement la définition et la nature de l'intuition. Dans la sous-section consacrée à la théorie neurocognitive de Dehaene et dans d'autres passages, nous avons utilisé plusieurs fois le terme intuition sans donner sa définition. Il est maintenant temps de comprendre ce que ce psychologue cognitiviste entend par ce terme. Alors, quelle est la conception de Dehaene en ce qui concerne l'intuition ? En utilisant un sens nouveau, Dehaene considère l'intuition comme une représentation inconsciente de la numérosité. Plus précisément, il emploie le terme « intuition » pour désigner la capacité des sujets humains ou non humains à reconnaître la quantité d'un ensemble d'objets sans recourir à une introspection (c'est-à-dire à la conscience). En d'autres termes, lorsque Dehaene parle d'« intuition », il met en avant l'idée d'une évaluation automatique ou spontanée du nombre d'objets présents dans un ensemble, indépendamment de toute activité consciente. Dans sa leçon inaugurale prononcée le 6 avril 2006, Dehaene apporte des éclaircissements sur sa conception de ce terme, en précisant que l'intuition est une « *forme proto-mathématique* »⁴³⁰ qui serait présente dans les circuits neuronaux à la naissance. En faisant cette précision importante, Dehaene se distingue clairement de la conception intuitionniste de l'intuition. La forte proximité apparente entre Dehaene et Poincaré s'effondre

⁴³⁰ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, op.cit., p. 10.

donc sous cet angle, car l'intuition du nombre n'est pas l'« intuition pure » qui crée ou produit les nombres, mais plutôt une représentation approximative de la quantité numérique.

Outre cette distinction conceptuelle, l'intuition de Dehaene diffère de celle de Poincaré en ce sens que le rôle que chaque auteur lui attribue est très différent. Dans la théorie phylogénétique de Dehaene, l'intuition est à la base de la reconnaissance spontanée ou automatique de la numérosité, et non de la construction des nombres comme c'est le cas dans la théorie intuitionniste de Poincaré. Comme nous l'avons vu chez Poincaré, l'intuition est associée à des jugements synthétiques *a priori*. Cette forme d'intuition, qui détermine notre capacité à créer indéfiniment des nombres et à réaliser des démonstrations mathématiques par le principe d'induction complète, ne correspond pas à l'intuition de Dehaene qui se limite à une simple représentation approximative de la quantité numérique.

De plus, la conception de l'intuition mathématique de Dehaene diffère de celle de Poincaré. Afin de rendre compte de nos capacités cognitives à effectuer les opérations arithmétiques élémentaires, Dehaene s'intéresse à la construction formelle des mathématiques à partir de nos capacités « proto-arithmétiques ». Son objectif est d'élaborer, à partir des observations et expériences neuropsychologiques, un modèle architectural du traitement des nombres. C'est dans cette perspective qu'il a élaboré, en collaboration avec Cohen, le modèle du *Triple code* qui est un modèle basé sur le modèle computationnel. Ces faits témoignent que Dehaene utilise le terme « mathématique » dans un sens différent de celui de Poincaré. En effet, dans la théorie phylogénétique de Dehaene, le terme « mathématique » conserve un sens approximatif, il est utilisé pour mettre en évidence l'exécution des tâches élémentaires telles que l'addition, la soustraction, la division et la multiplication. À l'inverse, Poincaré considère l'arithmétique comme une construction *a priori* suggérée par l'expérience. Dans la perspective de Poincaré, la distinction entre les mathématiques pures et appliqués n'est pas nécessaire. En effet, le point remarquable ici est de constater que les mathématiques soi-disant « pures » chez Poincaré ne se limitent pas à l'arithmétique, mais elles englobent aussi la géométrie dans la mesure où d'une part le concept de groupe a la même fonction que l'intuition pure de l'itération et que d'autre part ces deux catégories de l'esprit sont suggérées par l'expérience.

L'autre aspect qui marque une opposition significative entre ces deux conceptions concerne la nature de l'intuition. Les expériences que nous avons présentées plus haut nous ont permis de savoir que l'intuition du nombre dont disposent les êtres humains et certains êtres non-humains reposent sur deux circuits neuronaux à savoir le système de subitisation et le

système approximatif du nombre. Ces expériences indiquent que l'intuition associée aux circuits neuronaux n'est pas de la même nature que l'intuition de Poincaré qui est associée à une activité intellectuelle. Dans le cadre de Dehaene, l'intuition a donc une nature biologique, ce qui va à l'encontre de l'intuition de Poincaré, dont la nature est intellectuelle. Nous constatons ainsi qu'au sein même du neuro-cognitivism, l'intuition, qui constitue la pierre angulaire de la théorie intuitionniste de Poincaré, diffère de celui de Dehaene tant par sa définition que par sa nature et son rôle.

Malgré ces distinctions notables, il est possible de déceler, dans la déclaration de Dehaene, une possibilité d'établir un lien entre ces deux approches intuitionnistes. Dehaene souligne : « *l'intuition arithmétique que nous héritons de l'évolution est continue et approximative, l'apprentissage des mots et des chiffres la rend digitale et précise. Les symboles nous donnent accès à des algorithmes séquentiels de calcul exact* »⁴³¹. Dans cette déclaration, Dehaene souligne l'importance de l'éducation et de l'apprentissage formel dans le développement de compétences mathématiques avancées. Il suggère que les symboles mathématiques et le langage associé nous permettent de représenter les quantités de manière précise et de manipuler des concepts mathématiques de manière séquentielle, facilitant ainsi des calculs plus précis et rigoureux. On peut donc supposer que les mathématiques pures (mentionnées par Poincaré) et les opérations complexes/abstraites qu'elles englobent sont acquises grâce à l'influence des facteurs épigénétiques sur l'intuition numérique, d'origine phylogénétique et approximative. En supposant que les mathématiques fondamentales sont acquises par le biais de l'apprentissage culturel, Dehaene ouvre ainsi la voie à une compatibilité potentielle avec l'approche de Poincaré.

Jusqu'à présent, notre analyse s'est concentrée sur la théorie intuitionniste de Poincaré concernant la nature et l'origine des objets mathématiques. Passons maintenant à l'examen de la question de savoir si Poincaré avait raison de soutenir que l'intuition provient de l'inconscient et que les émotions et l'intuition prennent une part active dans le processus de sélection des idées ou de prise de décision ? Avant d'aborder cette question, il convient de préciser qu'à ce stade de notre étude, nous focaliserons notre attention sur la théorie des marqueurs somatiques de Damasio, car nous avons de bonnes raisons de penser que la théorie cognitive de ce neurobiologiste est plus proche de Poincaré que celle de Kahneman. La

⁴³¹ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, op.cit., p. 21.

contribution des émotions et de l'intuition dans la prise de décision est sans aucun doute le premier élément de convergence entre Poincaré et Damasio. Avant d'explorer en détail ce point de convergence, il est nécessaire de souligner que les neurosciences cognitives confirment l'existence de deux modes de cognition qui diffèrent à la fois dans leur fonctionnement et leur rôle. Le premier est le mode conscient, tandis que le second est le mode non-conscient. Cette distinction permet aux neurosciences cognitives de préciser comment les processus cognitifs se déroulent dans l'esprit humain : certains processus se produisent dans la sphère de la conscience, tandis que d'autres se déroulent dans la sphère de l'inconscient sans que l'individu en soit conscient. Plus les processus déclenchés par l'inconscient sont puissants et intenses, plus la conscience perd en efficacité⁴³². Cette précision met en évidence la prédominance de l'inconscient sur le conscient. L'hypothèse selon laquelle le moi subliminal (l'inconscient) est supérieur au moi conscient se trouve ainsi confirmée par les neurosciences cognitives, mais n'est pas acceptée par Poincaré sans répugnance⁴³³.

La supériorité de l'inconscient sur le conscient est sans doute un point de désaccord entre Poincaré et les neuroscientifiques cognitivistes. En effet, la manière dont les neuroscientifiques cognitivistes décrivent la nature et les caractéristiques des processus conscients et inconscients crée un écart considérable par rapport à Poincaré. Il convient de souligner que, selon Poincaré, l'inconscient désigne une sphère de la pensée où des idées et des connaissances inaccessibles à la conscience immédiate sont stockées. En revanche, dans le contexte des neurosciences cognitives, l'inconscient fait référence à un ensemble de processus mentaux tels que la perception, la pensée, l'imagination, la prise de décisions, etc., qui sont actifs en dehors de la conscience. Ces processus mentaux sont médiés par des réseaux de neurones dans le cerveau, opérant en dehors de notre conscience et interagissant avec différentes régions cérébrales. Ainsi, la divergence entre les conceptions de Poincaré et des neuroscientifiques cognitivistes est profonde.

Pour revenir au rôle des émotions dans la cognition, nous avons constaté que Poincaré a souligné l'importance des états émotionnels dans le choix des idées heureuses. Les expériences physiologiques et neurobiologiques menées par Damasio sur des individus présentant des lésions neurologiques ont apporté des éclaircissements remarquables sur le rôle des composantes émotionnelles inconscientes dans le processus cognitif de prise de décision. C'est

⁴³² GOLEMAN, Daniel. *L'intelligence émotionnelle*. Paris, J'ai lu, 2014, p. 18.

⁴³³ POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*. 1999, *op. cit.*, p. 52.

dans cette optique que Damasio affirme que sa théorie des marqueurs somatiques est en accord avec la conception de Poincaré :

la conception de Poincaré est très semblable à la mienne. Il n'est pas nécessaire que vous appliquiez le processus du raisonnement à la gamme totale des options possibles. Une présélection est réalisée pour vous, quelquefois secrètement, (...). Un mécanisme biologique la met en œuvre, examine les candidats, et ne permet qu'à un petit nombre de ceux-ci de se présenter pour un examen final⁴³⁴.

La prise en compte des facteurs somatiques dans le processus de prise de décision, tel qu'établie par Damasio, semble confirmer la validité de l'hypothèse de Poincaré concernant le rôle des émotions dans le choix des idées positives. Là où certains philosophes et scientifiques voyaient l'émotion comme un élément passif dans la prise de décision, nous voyons, aujourd'hui, grâce aux neurosciences cognitives, que son rôle est déterminant. En ce qui concerne le rôle de l'intuition, Poincaré a également souligné qu'elle joue un rôle particulier, agissant à un niveau sous-jacent (inconscient), pour faciliter la prise de décision créative. Les études expérimentales de Damasio ont démontré que les décisions basées sur des facteurs somatiques se produisent de manière inconsciente et s'appuient principalement sur l'intuition. Les résultats de ces études confirment les liens postulés par Poincaré entre l'intuition et l'émotion dans le processus de prise de décision.

Il convient toutefois de noter que la description des marqueurs somatiques en tant qu'éléments neurobiologiques remet en question ces apparents points de convergence. En effet, lorsque Damasio considère les émotions comme des éléments neurobiologiques nécessaires au fonctionnement de la faculté de raisonnement⁴³⁵, il s'éloigne clairement de la conception de Poincaré. Dans sa conférence devant la société de psychologie en 1908, Poincaré n'a pas abordé les mécanismes neurobiologiques de la prise de décision. Se basant sur sa propre expérience, il s'interrogeait sur les circonstances de l'invention dans le domaine des mathématiques. Il est vrai qu'à cette époque, Helmholtz avait déjà exploré les aspects neurophysiologiques et les conclusions inconscientes, mais les bases neurobiologiques des processus cognitifs de prise de décision étaient encore largement méconnues. Ce rappel du contexte historique de la conférence de Poincaré montre que sa conception diffère, sur le plan méthodologique, de celle de Damasio. Alors que ce dernier, en tant que neurobiologiste, se concentre sur les corrélats neuronaux de la prise de décision intuitive, Poincaré, en tant que mathématicien, amorçait la psychologie de l'invention mathématique.

⁴³⁴ DAMASIO, Antonio. L'erreur de Descartes. La raison des émotions. 1995, *op. cit.*, p. 243.

⁴³⁵ *Idem*, p. 251.

En plus de cette différence méthodologique, il est possible de relever une distinction conceptuelle et de nature entre l'intuition de Poincaré et celle évoquée par Damasio. Les deux savants ont une conception différente de l'intuition : Damasio considère l'intuition comme un phénomène psychocorporel, alors que Poincaré distingue différentes sortes d'intuition : l'intuition sensible et l'intuition intelligible. Si l'on utilise le terme « intellectuel » dans son sens ancien, qui signifie intelligible ou nouménal, et si l'on se réfère à la définition de « l'intuition intellectuelle » donnée par Thoraval comme étant « *la possibilité d'un accès immédiat au supra-sensible* »⁴³⁶, il devient évident que l'intuition intellectuelle de Poincaré s'oppose fondamentalement à celle de Damasio.

Cependant, si l'on considère que l'invention mathématique requièrent l'interaction de « l'intuition intellectuelle » ou consciente et de « l'intuition inconsciente » ou sensible, et si l'on tient compte des liens étroits que les mécanismes émotionnels et somatiques entretiennent avec l'intuition « spéciale » dans les récits de Poincaré, on peut établir un lien entre l'intuition évoquée par Damasio et l'intuition « spéciale » de Poincaré, étant donné qu'elles sont toutes deux caractérisées par les facteurs émotionnels agissant de façon inconsciente. De plus, on sait bien que la préoccupation de Poincaré était axée sur les circonstances psychologiques de l'invention mathématique, mais il a néanmoins établi de manière claire les relations entre l'intellect et la sensibilité (au sens esthétique émotionnelle) de la manière suivante :

*on peut s'étonner de voir invoquer la sensibilité à propos de démonstrations mathématiques, qui, semble-t-il, ne peuvent intéresser que l'intelligence. Ce serait oublier le sentiment de la beauté mathématique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique. C'est un vrai sentiment esthétique que tous les vrais mathématiciens connaissent. Et c'est là de la sensibilité*⁴³⁷.

La manière dont Poincaré établit, dans ce passage, les liens entre la sensibilité et l'intellect est très similaire à la théorie des marqueurs somatiques de Damasio, qui met en évidence les relations entre les facteurs somatiques et la cognition. Lorsque nous avons esquissé la théorie des marqueurs somatiques de Damasio, nous avons pu constater que les facteurs empiriques provenant des émotions ou de la sensibilité jouent un rôle particulier dans la cognition. Ce neurobiologiste soutient que les émotions sont une composante nécessaire de l'activité mentale et que la capacité des êtres humains à prendre des décisions intuitives, sans réflexion consciente, est directement liée à l'efficacité des marqueurs somatiques. Cette thèse de Damasio rejoint

436 THORAVAL, Joël. La question de l'intuition intellectuelle et la philosophie confucéenne contemporaine. *Revue Internationale de Philosophie*, 2005. Disponible sur le web : <https://www.cairn.info/revue-internationale-de-philosophie-2005-2-page-231.htm>.

⁴³⁷ POINCARÉ, Henri. Science et méthode. 1999, *op.cit.*, p. 53.

celle de Poincaré qui affirme que la sélection des "plus belles idées" est liée à la sensibilité de l'inventeur. Le lien entre ces deux auteurs réside dans le fait que la sélection des idées ou la prise de décision ne repose pas uniquement sur une réflexion rationnelle et logique, mais également sur des aspects intuitifs, émotionnels et somatiques.

L'analyse de la théorie intuitionniste de Poincaré à travers le prisme des neurosciences cognitives révèle à la fois des convergences et des différences conceptuelles. Trois éléments de la théorie intuitionniste de Poincaré semblent converger avec les théories élaborées par les cognitivistes tels que Changeux, Dehaene et Damasio. Tout d'abord, la nature des objets mathématiques et les fondements des nombres ont été identifiés comme des points de convergence entre Poincaré, Changeux et Dehaene. De plus, nous avons constaté que le rôle de l'intuition et de l'émotion dans le processus de prise de décision constitue sans aucun doute un élément de convergence entre Poincaré et Damasio. Cependant, en approfondissant l'étude de ces points de convergence, nous avons également relevé des divergences notables entre l'approche de Poincaré et celle des cognitivistes, tant sur le plan conceptuel que méthodologique. Passons maintenant à l'examen de la théorie psycho-physiologique de l'espace développée par Poincaré en géométrie.

CHAPITRE II : BERTHOZ ET LA THÉORIE SPATIALE DE POINCARÉ

Cette section vise à examiner la théorie psycho-physiologiste de l'espace de Poincaré à travers le prisme de la théorie neurophysiologiste de l'espace de Berthoz. L'objectif est d'évaluer la compatibilité de ces deux théories spatiales. Nous commencerons par mettre en évidence les points de convergence dans un premier temps, tandis que les divergences seront présentées dans un second temps. Lorsque nous examinons l'approche neurophysiologiste de l'espace de Berthoz, esquissée dans le chapitre II de la deuxième partie, on ne peut qu'être frappé par la clairvoyance et la finesse de Poincaré, car ses thèses présentent indéniablement des convergences avec la théorie spatiale de Berthoz. Tout d'abord, rappelons que l'approche neurophysiologique de l'espace de Berthoz vise à décrire les corrélats neuronaux (ou les bases cognitives) de la géométrie. Selon cette perspective, ce neurophysiologiste montre comment le cerveau humain construit l'espace et la géométrie à partir des flux d'informations sensorielles provenant du corps. L'une de ses sous-thèses est qu'il n'y a ni espace ni géométrie sans les mouvements du corps. L'idée que les mouvements, les déplacements et les parades jouent un rôle primordial dans la perception de l'espace et de la géométrie est certainement le premier point de l'« isomorphisme »⁴³⁸ Poincaré – Berthoz. Évidemment, le groupe de déplacement chez Poincaré ne concerne pas directement des corps solides mais est suggéré par des compensations *imaginées*, c'est-à-dire des efforts musculaires imaginés, par rapport aux impressions (sensations) non spatiales. Si on ne pouvait pas s'imaginer des corps solides, il n'y aurait pas de géométrie. Ceci est la position de Poincaré en 1898. Par contre, dans *La science et l'hypothèse*, Poincaré obtient l'espace géométrique sans la métrique par une identité structurelle entre différents espaces sensibles présupposant les corps solides.

Dans le cadre de ses multiples articles consacrés à l'analyse des fondements de la géométrie, Poincaré insistait sur l'importance des mouvements de notre corps et des corps solides dans l'appréhension de la géométrie et de la notion de l'espace. Il affirmait, par exemple, que

pour un être complètement immobile, il n'y aurait ni espace ni géométrie ; c'est en vain qu'autour de lui les objets extérieurs se déplaceraient, les variations que ces déplacements feraient subir à ses impressions ne seraient pas attribuées par cet être à des changements de position, mais à de simples changements d'état, cet être n'aurait aucun moyen de

⁴³⁸ Nous empruntons cette expression à Berthoz qui l'emploie pour mettre en évidence les similitudes entre sa théorie spatiale et celle de Poincaré au sujet des fondements de la géométrie.

*distinguer ces deux sortes de changement, et cette distinction, capitale pour nous, n'aurait aucun sens pour lui*⁴³⁹.

Dans ce passage, Poincaré exprime l'idée selon laquelle l'appréhension de la géométrie et de la notion de l'espace serait impossible sans les mouvements visuels, kinesthésiques (proprioceptifs), vestibulaires. Cette thèse de Poincaré semble à première vue en parfait accord avec celle exprimée par Berthoz dans son ouvrage *Le sens du mouvement* ainsi que dans de nombreux séminaires. Lors d'une conférence portant sur les fondements cognitifs de la perception de l'espace, Berthoz approuve Poincaré en déclarant : « voilà l'un des grands géomètres de tous les temps affirmant que les fondements cognitifs de la géométrie sont les mouvements ». En réalité, les mouvements sont pour Berthoz explicitement ceux de notre corps, tandis que Poincaré semble être parfois conscient de devoir éviter la présupposition des corps solides au prix d'un cercle vicieux pour son entreprise de construction logique de l'espace. Berthoz, par contre, décrit simplement la genèse empirique de la géométrie qui n'est pas exposé à un tel cercle.

Le deuxième point de convergence entre Berthoz et Poincaré est la distinction entre le référentiel égocentrique et le référentiel allocentrique. En exposant les expériences de Berthoz sur l'apprentissage ontogénétique de la représentation spatiale, nous avons constaté que l'enfant se construit tout d'abord une représentation de l'espace selon un référentiel égocentré, avant de passer ultérieurement à un référentiel allocentrique. Ainsi, la distinction poincaréenne entre l'espace restreint (égocentré) et l'espace étendu (allocentré) est confirmée. La convergence entre Poincaré et Berthoz se manifeste également par la reconnaissance de la multiplicité des espaces perçus par nos organes sensoriels. Poincaré considérait l'espace représentatif comme étant l'espace dans lequel se déroulent nos sensations et nos représentations. Dans son ouvrage *La science et l'hypothèse*, il identifie trois espaces distincts correspondant à nos sensations visuelles, tactiles et musculaires. Il démontre que l'espace visuel, formé à partir des images projetées sur la rétine, diffère de l'espace tactile, construit à partir du toucher. Ces deux espaces diffèrent également de l'espace moteur, qui émerge des sensations musculaires. De son côté, Berthoz, en collaboration avec des chercheurs tels que Daniel Bennequin, Tamas Flash et d'autres, montre également que nos organes sensoriels perçoivent l'espace de manière différente. L'espace rétinien, perçu par la rétine, est bidimensionnel, tandis que l'espace perçu par le système vestibulaire est tridimensionnel. Enfin, l'espace perçu par les muscles est

⁴³⁹ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op.cit.*, p. 68.

multidimensionnel⁴⁴⁰. Ainsi, Poincaré et Berthoz s'accordent pour distinguer l'espace visuel, l'espace tactile et l'espace moteur, reconnaissant ainsi la diversité des espaces perçus par nos organes sensoriels.

Approfondissons notre analyse de ce point de convergence en nous demandant comment le cerveau parvient à sélectionner parmi les multiples espaces celui qui convient le mieux au traitement des propriétés géométriques. Berthoz répond à cette question en affirmant que « *le cerveau peut choisir un référentiel suivant la tâche, et pendant le mouvement il peut changer de référentiel d'une phase à l'autre du mouvement. La multiplicité permet de choisir le référentiel le plus adapté* »⁴⁴¹. Cette réponse de Berthoz est très similaire à la thèse conventionnaliste de Poincaré exprimée dans cet extrait de *La science et l'hypothèse* : « *par sélection naturelle, notre esprit s'est adapté aux conditions du monde extérieur, qu'il a adopté la géométrie la plus avantageuse à l'espèce ; ou en d'autres termes, la plus commode* »⁴⁴². Ces deux passages convergent dans l'idée de commodité. En effet, lorsque Berthoz affirme que le cerveau choisit le référentiel approprié pour accomplir une tâche donnée, il suggère essentiellement que le cerveau opte pour l'espace qui lui semble le plus commode pour réaliser cette tâche spécifique. Nous constatons ainsi que la théorie cognitive de l'espace de Berthoz rejoint le conventionnalisme géométrique de Poincaré, en admettant qu'une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre, mais seulement plus commode⁴⁴³.

Il existe un autre point de convergence notable entre la vision de l'espace selon Poincaré et celle de Berthoz, et il concerne l'argument génétique de l'espace. L'analyse précédente du processus ontogénétique de la représentation de l'espace souligne que le développement d'une représentation perceptive et cognitive de la spatialité, et a fortiori les fondements phylogénétiques de la construction de concepts géométriques, concernent non seulement la phylogénèse des organes sensoriels et du système neuronal, mais également et surtout l'ontogénèse. L'intuition de Poincaré sur ce point rencontre l'argument de Berthoz, car il avait compris que l'évolution de l'espèce humaine, qui englobe à la fois le développement ontogénétique et le développement phylogénétique des organes sensoriels, conduit à la construction de l'espace⁴⁴⁴. En réalité, Poincaré avait clairement saisi que la construction de

⁴⁴⁰ BERTHOZ, Alain. *La mémoire des déplacements*. Cours de 1996-1997, p. 422.

⁴⁴¹ BERTHOZ, Alain. Le cerveau et les espaces. Résumé du cours 2007, p. 324.

⁴⁴² POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 108.

⁴⁴³ *Idem*, p. 76.

⁴⁴⁴ POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*. 1999, *op. cit.*, p. 101.

l'espace et de la géométrie ne peut se faire indépendamment du développement de l'individu et des processus sensori-moteurs qui apparaissent à différentes étapes de l'évolution post-natale. Pourtant, les considérations philosophiques des formalistes tels que Hilbert et des logicistes tels que Russell et Couturat allaient à l'encontre de cette conception poincaréenne de la géométrie. En effet, en négligeant les aspects cognitifs de la géométrie dans leurs approches, Hilbert et les logicistes ne s'intéressaient qu'à l'axiomatique comme fondement de la géométrie.

Si on ne s'intéresse pas seulement au fondement logique mais également à la genèse empirique de la géométrie, des études basées sur des expériences physiologiques et neurophysiologiques démontrent clairement qu'il est possible de faire en jeu les potentiels neurocognitifs innés (phylogénèse) et les activités locomotrices qui se déroulent tout au long du développement ontogénétique. Ces deux aspects sont alors indispensables à la représentation spatiale et à la compréhension de la géométrie. Nous sommes maintenant convaincus que la représentation de l'espace, qui précède la compréhension de la géométrie, requiert à la fois des prédispositions phylogénétiques et des activités locomotrices qui se déroulent au cours de l'évolution post-natale. C'est probablement cette idée que Poincaré exprimait en mettant l'accent sur la "psychologie" lors de sa dispute avec Russell.

Avant de conclure cette série de convergences, il est nécessaire d'examiner l'une des thèses fondamentales de Poincaré concernant la tridimensionnalité de l'espace euclidien. L'analyse de cet argument se concentre sur la question suivante : est-il concevable que l'espace tridimensionnel euclidien est principalement hérité sur le plan phylogénétique, comme le supposait Poincaré ? Les expériences neurophysiologiques et neuropsychologiques actuelles ne fournissent pas suffisamment de preuves concluantes pour répondre de manière définitive à cette préoccupation de Poincaré, car la relation entre la géométrie euclidienne et l'espace perceptif n'est pas encore suffisamment élucidée par Berthoz. Il justifie néanmoins la tridimensionnalité de l'espace euclidien en se basant sur les fondements phylogénétiques et ontogénétiques de la perception spatiale, comme en témoigne cette citation : « *la géométrie des canaux dicte l'organisation de l'analyse cérébrale du mouvement visuel et peut-être aussi nos mouvements. Elle pourrait être encore à l'origine de notre géométrie euclidienne* »⁴⁴⁵. Étant donné que les canaux semi-circulaires, qui font partie des capteurs sensoriels présents dès la naissance de l'individu, jouent un rôle significatif dans la représentation spatiale, Berthoz suppose, tout comme Poincaré, que la tridimensionnalité de l'espace euclidien est ancrée dans

⁴⁴⁵ BERTHOZ, Alain. Le sens du mouvement. 2013, *op. cit.*, p. 43.

les aspects onto-phylogénétiques. Nous avons donc examiné les points forts de l'isomorphisme entre Poincaré et Berthoz. Maintenant, il est nécessaire de dépasser ces points d'accord et d'identifier les éléments qui divergent dans ces deux théories spatiales.

Lorsque Poincaré formulait sa première théorie psycho-physiologique de la géométrie en 1898, il partait du principe que les sensations n'ont aucun caractère spatial. Ainsi qu'il l'exprimait au début *Des fondements de la géométrie (1898)*, « *nos sensations ne peuvent pas nous donner la notion d'espace* »⁴⁴⁶. Les expériences neurophysiologiques réalisées par Berthoz et ses collègues indiquent, par contre, que des processus de traitement affinés à la géométrie sont déjà en place dans la rétine du fœtus. Cette observation neurophysiologique indiquant l'existence d'un embryon spatial dans les mouvements oculaires est novatrice et peut être interprétée comme un élément renforçant les objections de Mach et de Torretti contre Poincaré. Mais cette observation est-elle pertinente pour rendre obsolète la position de Poincaré ? Les impressions sensorielles qui se déroulent au niveau de la rétine sont-elles spatiales en soi ?

La position de Poincaré à ce sujet était que les impressions sensorielles au niveau de la rétine ne sont pas spatiales en soi⁴⁴⁷. À la lumière de ce que les neurosciences cognitives nous enseignent, l'image de la rétine qui est bidimensionnelle par nature, est par la suite traitée séparément selon les critères les plus divers et avec de fortes influences *topdown*, dans lesquelles les sensations musculaires, proprioceptives/ kinesthésiques, vestibulaires etc. sont également prises en compte. Les impressions sensorielles de la rétine jouent sans doute un rôle important, mais ce sont les processus de liaison neuronaux relativement tardifs qui permettent de construire un concept qui apparaît alors également spatial. Il est important de préciser que les neurones sensibles à la disparité binoculaire ne se trouvent pas dans la rétine, mais dans l'aire V1 ainsi que dans d'autres zones cérébrales. Cette interprétation de la perception visuelle évoquée par Poincaré est également compatible avec le neuroconstructivisme de Roth indiqué dans ce passage sur le système visuel et le traitement tardif des contenus perceptifs.

Le système visuel des vertébrés montre plus clairement que les autres systèmes sensoriels le principe du traitement parallèle. Cela signifie que les photorécepteurs et les cellules situées immédiatement en aval réagissent de préférence à certaines caractéristiques individuelles des stimuli normalement complexes, comme la taille, le contraste, la couleur,

⁴⁴⁶ POINCARÉ, Henri. *Des fondements de la géométrie (1898)* in *L'opportunité scientifique*. 2002, *op. cit.*, p. 5.

⁴⁴⁷ « *Nous comprenons ainsi comment la notion d'un espace à trois dimensions a pu naître du spectacle de ces perspectives, bien que chacune d'elles n'ait que deux dimensions ; car elles se succèdent selon certaines lois* » Cf. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 92.

*la position dans l'espace tridimensionnel, la direction du mouvement, la vitesse et le modèle de mouvement, et que ces caractéristiques sont traitées plus ou moins séparément les unes des autres dans la rétine et à d'autres niveaux du système visuel dans le cerveau. Ce n'est qu'à des stades relativement tardifs que ces caractéristiques sont assemblées pour former des contenus perceptifs plus complexes*⁴⁴⁸.

Ainsi, il est incorrect d'affirmer que la présence d'un embryon spatial dans les mouvements oculaires rend obsolète la position de Poincaré sur la perception visuelle, car la représentation spatiale qui se fait tardivement chez l'individu intègre les neurones du système nerveux, certaines zones cérébrales et pas la rétine de façon isolée.

La divergence la plus notable entre la théorie spatiale de Poincaré et celle de Berthoz réside dans la nature de la géométrie. Il est important de rappeler que Poincaré s'opposait fermement à l'idée selon laquelle la géométrie est une science expérimentale. Ce point de vue poincaréen diffère considérablement de celui de Berthoz, pour qui la géométrie est une « science physique, dont l'utilité doit être jugée par sa relation avec l'expérience »⁴⁴⁹. Bien que Poincaré reconnaisse que la géométrie émerge de l'expérience sensori-motrice, il souligne que cette idée contredit la thèse empiriste qui réduit la géométrie à un ensemble de faits expérimentaux. En s'opposant à la thèse empiriste et celle des kantien, qui considèrent les axiomes de la géométrie comme des jugements synthétiques *a priori*, Poincaré cherchait à montrer que ce sont les faits expérimentaux tels que les mouvements des corps solides, les changements de position, les parades, etc., qui donnent naissance à la géométrie. Cependant, conclure que la géométrie est une science empirique serait une grave erreur selon lui. La théorie spatiale de Poincaré, sous la bannière du conventionnalisme, rejette à la fois l'empirisme et le rationalisme. En se déclarant conventionnaliste, le point de vue de Poincaré sur la nature de la géométrie s'oppose logiquement à celui de Berthoz, qui semble adopter la position des empiristes. Cependant, cela ne signifie pas nécessairement que Berthoz cherche à fonder la géométrie sur l'expérience. En réalité, il cherche avant tout à décrire le développement empirique de la géométrie afin de justifier sa thèse selon laquelle la géométrie est une science expérimentale. D'un autre côté, Poincaré souhaite fonder la géométrie, mais non pas sur l'expérience, mais à partir de celle-ci.

Le point de désaccord le plus significatif entre Berthoz et Poincaré concerne le concept d'*a priori*. Comme nous l'avons vu lors de l'exposition de la théorie psycho-physiologique,

⁴⁴⁸ BARBU-ROTH, Marianne. 2010, p. 283. Voir aussi BARBU-ROTH, Marianne et al. Neonatal Stepping in Relation to Terrestrial Optic Flow. *Child Development*, Wiley, 2009, 80 (1), p. 8-14.

⁴⁴⁹ BERTHOZ, Alain. *Fondements cognitifs de la perception de l'espace*. 2008, *op.cit.*, p. 122.

Poincaré postule, dans ses deux versions de la théorie spatiale, l'existence d'un élément intuitif *a priori*. Dans sa genèse logique (1898), cet élément intuitif *a priori* est représenté par le groupe des déplacements, qu'il considère comme une structure préexistante dans l'esprit. Dans sa genèse évolutionnaire (1903), c'est le continu d'un quelconque nombre de dimensions qui est considérée comme l'élément intuitif *a priori*. Mais qu'entend Poincaré par "*a priori*" ? Chez Poincaré, un élément ou une structure est qualifié d'*a priori* lorsqu'il est indépendant de l'expérience. Or la conception naturaliste de l'*a priori* défendue par Berthoz (et certains neurocognitivistes comme Dehaene) s'inscrit dans une vision totalement différente de celle de Poincaré. Ce neurophysiologiste considère que la connaissance *a priori* résulte d'une évolution biologique caractérisée par l'apprentissage ontogénétique et l'influence du monde sensible sur le cerveau. Dans *Phénoménologie de l'action*, il affirme ce qui suit à propos de l'*a priori* :

aujourd'hui, on dirait de ces principes [a priori] qu'ils sont ou génétiquement programmés, ou extraits de l'expérience par la reconnaissance d'« invariants » dans le monde, et ce dès les premières années de la vie. (...). Pour le scientifique adoptant une perspective évolutionniste, ces a priori sont le résultat d'interactions réussies avec le monde. L'illusion formaliste consiste à imaginer que ce sont les règles formelles, déconnectées de l'expérience, qui nous apparaissent a priori aujourd'hui, alors qu'elles sont le résultat de trois millions d'années d'interactions avec le monde⁴⁵⁰.

Ainsi pour Berthoz, une connaissance *a priori* n'est pas une connaissance qui préexiste dans l'esprit humain indépendamment de l'expérience, mais plutôt une connaissance qui, étant acquise lors du développement ontogénétique ou de l'interaction avec le monde sensible, sert plus tard de substrat à la formulation des idées formelles ou des concepts abstraits. Berthoz suppose de facto que l'*a priori* repose principalement sur un fait empirique, et ce serait la généralisation des faits empiriques qui conduirait à l'élaboration des connaissances *a priori*. Il en vient à la considération qu'il n'y a pas d'*a priori* au sens où Kant ou Poincaré l'entendent (c'est-à-dire *a priori* comme connaissance indépendante de l'expérience), car ce sont les prédispositions déposées phylogénétiquement en nous et surtout l'interaction avec le monde sensible qui intervient au cours du développement ontogénétique qui seraient les aspects déterminants de la formulation des connaissances *a priori*. En conséquence, il n'y a aucune connaissance qui préexiste dans l'esprit indépendamment de l'expérience sensible. Dans un autre passage de *Phénoménologie de l'action*, Berthoz récuse l'*apriori* kantien ou poincaréen en ces termes :

l'a priori en question ne se présente pas sous la forme d'une règle logique, d'un principe épistémologique ou d'une connaissance innée, qui seraient inscrits dans l'esprit

⁴⁵⁰ BERTHOZ, Alain et PETIT, Jean-Luc. *Phénoménologie de l'action*. 2006, *op. cit.*, p. 104.

*indépendamment de l'action. C'est un a priori de l'expérience non de la logique, dont toutes les lois sont indiscutablement a priori. Ce n'est pas un a priori formel au sens strict, mais plutôt au sens où l'on peut dire métaphoriquement du temps et de l'espace qu'ils sont la forme de notre expérience*⁴⁵¹.

S'il faut adhérer à la thèse de Berthoz selon laquelle il n'y a pas d'élément qui existe dans l'esprit qui ne soit extrait de l'expérience ou acquis ontogénétiquement, l'argument poincaréen suivant que le concept de groupe de déplacements et le continu d'un quelconque nombre de dimensions préexistent dans l'esprit humain, perd sa validité. Puisque l'idée selon laquelle les connaissances *a priori* sont des hypothèses formulées à partir de l'expérience revient à dire que le nombre quelconque de dimensions de l'espace géométrique n'est pas inné, mais formulé à partir des faits empiriques. Berthoz explique, par exemple, que c'est à partir des images bidimensionnelles que le cerveau parvient à formuler des hypothèses formelles de tridimensionnalité⁴⁵². Du point de vue de Berthoz, le cerveau peut évidemment formuler des hypothèses *a priori*, mais il a tendance à le faire à partir des supports physiques rencontrés lors de sa déambulation dans le monde sensible. De la sorte, on ne peut entrevoir la possibilité de formuler les hypothèses ou connaissances *a priori* sans un support empirique. C'est précisément pour cette raison que Berthoz considère la géométrie comme une science empirique. Si la théorie spatiale de Berthoz confirme que la tridimensionnalité de l'espace a sa source dans la phylogenèse et l'ontogenèse, l'idée que la connaissance *a priori* n'est pas sans rapport avec les faits empiriques est en contradiction avec Poincaré.

Berthoz et Poincaré divergent considérablement sur un troisième élément, à savoir la structure des espaces. Selon Poincaré, l'espace visuel, l'espace tactile et l'espace moteur ont naturellement des dimensions différentes bien que les continus sous-jacents sont structurellement identiques⁴⁵³. Puisque la tridimensionnalité de l'espace du continu topologique devient une structure intuitive dans la seconde théorie spatiale de Poincaré, il a montré comment l'espace tactile, l'espace visuel et l'espace moteur acquièrent la tridimensionnalité, quand on introduit la notion de coupures au continu physique, qui est un ensemble de faits expérimentaux qui suggère, en fin de compte, que le nombre de dimensions de l'espace est un choix conventionnel. Cette précision de Poincaré en ce qui concerne la diversité des espaces contraste Berthoz pour qui les divers espaces sont fondamentalement de dimensions différentes.

⁴⁵¹ *Idem*, p. 108.

⁴⁵² *Idem*, p. 106.

⁴⁵³ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1990, *op. cit.*, p. 93.

Enfin, il existe une différence importante dans les approches adoptées par ces deux savants et dans la nature de l'espace évoquée par chacun d'eux. Contre les logiciens qui cherchaient à justifier le fondement de la géométrie par la seule axiomatique, Poincaré s'efforçait de montrer que la géométrie n'est pas une science *a priori*, mais qu'elle doit tenir compte du développement phylogénétique et ontogénétique des individus qui la pratiquent. Ainsi, la construction logique qu'il proposait dans sa genèse logique (1898), bien que reposant en grande partie sur des hypothèses sensationnistes, non réelles, avait pour objectif de reconstruire l'espace géométrique à partir de l'espace sensible différent de l'espace géométrique. On ne peut pas dire que Berthoz suit exactement la démarche de Poincaré, puisqu'il adopte une démarche phénoménaliste qui le conduit à rechercher la genèse de l'espace et de la géométrie dans les neurones du système nerveux, démarche critiquée par Poincaré lui-même⁴⁵⁴. L'espace phénoménal qui découle ainsi de la structure neuronale doit être distingué de l'espace sensible et de l'espace géométrique évoqués par Poincaré dans sa théorie psychophysiological. En effet, l'espace phénoménal, construit par les neurones disponibles dans différentes régions de l'appareil cérébral à partir des sensations sensorielles provenant des différents espaces sensoriels, n'a pas les mêmes propriétés que l'espace géométrique. Il n'est ni continu ni homogène encore moins isotrope et tridimensionnel.

Bien que l'espace phénoménal et l'espace géométrique présentent une différence notable, et malgré la critique implicite de Poincaré à l'égard des corrélats neuronaux de l'espace, il est possible de soutenir une compatibilité entre ces deux conceptions spatiales, grâce à ce que Poincaré appelait "l'illusion d'homogénéité" dans ce passage.

Cet espace visuel pur n'est pas homogène. Tous les points de la rétine, abstraction faite des images qui s'y peuvent former, ne jouent pas le même rôle. La tache jaune ne peut à aucun titre être regardée comme identique à un point du bord de la rétine. Non seulement en effet le même objet y produit des impressions beaucoup plus vives, mais dans tout cadre limité le point qui occupe le centre du cadre n'apparaîtra pas comme identique à un point voisin de l'un des bords. Une analyse plus approfondie nous montrerait sans doute que cette continuité de l'espace visuel et ses deux dimensions ne sont non plus qu'une illusion ; elle l'éloignerait donc encore davantage de l'espace géométrique⁴⁵⁵.

⁴⁵⁴ La déclaration suivante de Poincaré peut être considérée comme une critique dirigée contre le neuroconstructivisme de Berthoz : « je ne me permettrai pas d'énoncer une opinion sur la structure du système nerveux que je connais pas, tandis que ceux qui l'ont étudié ne le font qu'avec circonspection, ensuite parce que malgré mon incompetence, je sens bien que ce schéma serait pas trop simpliste ; et enfin, parce que, sur ma liste de parades, il en figure de très complexes, qui peuvent même, (...) être formées de plusieurs pas suivis d'un mouvement du bras. Il ne s'agit donc pas de connexion physique entre les conducteurs réels, mais d'associations psychologiques entre deux séries de sensations » Cf. POINCARÉ, Henri. Science et méthode, 1999, *op. cit.*, p. 96.

⁴⁵⁵ POINCARÉ, Henri. La valeur de la science. 1992, *op. cit.*, p. 78.

Dans cette déclaration de Poincaré sur la continuité, l'illusion d'homogénéité peut être considérée, dans le contexte des neurosciences cognitives, comme étant un indice de potentiels cognitifs afférents à la géométrie préexistante et déjà active au niveau inconscient. Puisque Poincaré défend l'hétérogénéité de l'espace dans ses réflexions sur la géométrie, l'on peut, par conséquent, interpréter l'espace phénoménal (Berthoz) qui semble trompeusement homogène comme une construction ou un modèle spatial, de sorte que celui-ci peut être considéré comme véritablement compatible avec l'espace géométrique malgré des différences relevées ci-dessus. À partir de cette interprétation, l'illusion d'homogénéité évoquée par Poincaré peut être rapprochée à ce que Berthoz nomme les "déformations" du cerveau dans ce passage :

notre cerveau émule donc des hypothèses. Mais il ne fait pas que simuler la réalité, il émule un monde possible. Par exemple, il suppose que les objets sont rigides ou il transforme le monde perçu pour le rendre aussi symétrique que possible, et cela au prix de déformations (perceptives) de la réalité physique⁴⁵⁶.

Les notions de "déformation" et d'"illusion d'homogénéité", dans la mesure où elles présentent de fortes affinités selon le contexte, et surtout le recours à la notion d'émulation par Berthoz, signifiant que le cerveau est capable d'imiter plusieurs modèles, sont des éléments pertinents qui nous permettent d'établir une compatibilité entre l'espace phénoménal et l'espace géométrique et, par conséquent, entre les conceptions spatiales de Berthoz et de Poincaré.

⁴⁵⁶ BERTHOZ, Alain. *La simplicité*. Paris, Odile Jacob, 2009, p. 77.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Résumé des principaux résultats

L'objectif principal de cette recherche était d'étudier les principales idées de la philosophie mathématique de Poincaré en les examinant à travers les découvertes des neurosciences cognitives concernant les fondements cognitifs ou les corrélats neuronaux de l'arithmétique et de la géométrie. Notre analyse s'est orientée dans cette direction pour examiner la compatibilité de l'approche arithmétique et géométrique de Poincaré avec les modèles neurocognitifs visant à expliquer l'acquisition des nombres et la perception de l'espace. Nous avons également cherché à comprendre comment les modèles neurocognitifs proposés par Changeux, Dehaene, Berthoz et Damasio peuvent enrichir notre compréhension des idées de Poincaré sur la construction de la pensée mathématique. Pour ce faire, il était essentiel de revenir sur la critique poincaréenne des conceptions « logiques » des mathématiques, car cette critique trouve un écho intéressant dans les travaux en neurosciences cognitives, qui mettent en lumière des aspects de la cognition mathématique qui sont cruciaux pour une compréhension approfondie de la façon dont nous acquérons, utilisons et comprenons les connaissances mathématiques. En effet, le lien entre l'esprit et l'expérience, mis en avant par Poincaré dans sa critique des conceptions « logiques » des mathématiques, est étudié précisément par les neuroscientifiques cognitivistes qui fournissent des preuves empiriques quant à l'importance des facteurs psychiques et empiriques dans la construction et l'acquisition des connaissances mathématiques.

Ainsi, nous avons débuté notre analyse en nous appuyant sur les conceptions « logiques » des mathématiques, telles que l'axiomatique et le logicisme, qui ont été critiquées par Poincaré. En ce qui concerne l'axiomatisation des mathématiques, nous avons examiné les modèles axiomatiques de Hilbert (en géométrie), de Frege et de Peano (en arithmétique), qui cherchaient à fonder les mathématiques exclusivement sur les bases de l'axiomatique logique, caractérisée par la symbolisation et la formalisation. Ces conceptions axiomatiques ont été développées pour renforcer la rigueur du raisonnement mathématique. L'idée initiale d'accroître la rigueur du raisonnement mathématique impliquait naturellement d'exclure l'intuition dans le raisonnement mathématique, car les partisans de cette conception mathématique considéraient que la rigueur mathématique allait de pair avec la rigueur formelle. Le projet de supprimer l'intuition dans le raisonnement mathématique et de fonder les mathématiques sur des structures logico-formelles devait conduire à la logicisation des mathématiques en général et de l'arithmétique en particulier. C'est pourquoi nous avons ensuite abordé le projet philosophique du logicisme.

Intimement lié à l'axiomatisation, le logicisme visait à réduire tous les énoncés de l'arithmétique à la logique, dans le but de prouver, contrairement à Kant, que les propositions arithmétiques ne sont pas des jugements synthétiques *a priori* faisant appel à l'intuition. Cependant, les nombreux problèmes philosophiques suscités par la réduction de l'arithmétique à la logique ont révélé la nécessité de fonder les mathématiques sur des bases différentes de celles de la logique.

Après avoir exposé les considérations philosophiques de l'axiomatique logique et du logicisme, nous avons examiné les raisons philosophiques et épistémologiques qui ont conduit Poincaré à critiquer et rejeter ces deux conceptions mathématiques. Trois principales raisons ont motivé sa position à l'égard de ces conceptions mathématiques. La première raison concerne la nature de la connaissance mathématique et dénonce la transposition des mathématiques dans des systèmes logico-formels ainsi que l'abus des symboles ou des signes dans le raisonnement mathématique. Selon Poincaré, la construction arithmético-géométrique ne peut être réduite à une simple manipulation formelle de symboles ou à une pure abstraction logique. Ainsi pour lui, l'axiomatique hilbertienne ainsi que les théories axiomatico-logistiques, développées par les logicistes dans le cadre de la logicisation de l'arithmétique, ne constituent pas le fondement des mathématiques, même si elles sont rigoureuses et cohérentes.

La deuxième raison concerne l'insuffisance du logicisme et de l'axiomatique logique. Poincaré rejette le logicisme et l'axiomatique logique qui lui est associée, parce que le raisonnement logique n'explique pas l'extension de la connaissance mathématique. Pour lui, le projet du logicisme visant à réduire l'arithmétique à la logique échoue en raison d'un manque de compréhension et d'extension épistémique. Enfin, la dernière raison concerne le rôle de l'intuition et de l'expérience dans le processus de raisonnement et de construction mathématique. Poincaré, qui attribue un rôle essentiel à l'intuition et à l'expérience dans l'opération de démonstration et de construction mathématique, rejette l'axiomatique de Hilbert ainsi que la logistique en démontrant qu'elles constituent un triple obstacle : elles entravent l'intuition, la compréhension des mathématiques et l'invention mathématique. Au total, l'étude menée dans le premier chapitre de cette recherche a confirmé que les conceptions « logiques » des mathématiques, qui fondent les mathématiques sur l'axiomatique et accordent une priorité à la logique dans le raisonnement mathématique, sont, selon Poincaré, lacunaires et insuffisantes. Elles présentent des lacunes car elles n'ont pas réussi à éliminer toutes les contradictions logiques et elles ne parviennent pas à expliquer la productivité épistémique du raisonnement mathématique.

Dans le chapitre 2, nous avons présenté la philosophie des mathématiques de Poincaré dans le but de mettre en lumière la manière dont l'approche poincaréenne des mathématiques se rapporte aux études sur les fondements cognitifs des mathématiques menées dans le domaine des neurosciences cognitives. Notre démarche, dans la section 1, a consisté à examiner le cadre cognitif de la construction des nombres en nous basant sur une analyse de l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré. Celui-ci repose sur l'idée que les nombres naturels et rationnels sont construits grâce à une opération mentale où l'« intuition pure » interagit avec l'« intuition sensible ». Pour vérifier si Poincaré place véritablement la construction mathématique dans un cadre cognitif, nous nous sommes penchés sur le processus d'invention. L'idée centrale était que l'invention nécessite à la fois des facteurs psychiques (innés) et des facteurs empiriques ou somatiques. C'est précisément cette idée qui nous a permis de comprendre les aspects cognitifs impliqués dans le récit de Poincaré concernant l'invention mathématique.

Dans la section 2, nous avons exposé la genèse psycho-physiologique de l'espace de Poincaré dans l'optique de mettre en évidence les éléments se rapportant aux aspects cognitifs de la géométrie. Dans sa première version, cette théorie présentait la genèse logique de la géométrie et de l'espace. En rejetant à la fois les fondements de l'axiomatique formelle et l'idée d'une géométrie comme science *a priori* basée sur l'expérience empirique, la genèse logique (1898) soutenait que la géométrie trouve ses fondements dans l'expérience sensori-motrice, incluant les déplacements, les mouvements, les parades, etc., sans pour autant être *fondée sur l'expérience*. Poincaré établissait comme condition préalable à cette genèse logique l'existence de structures préexistantes dans l'esprit humain, telles que les groupes de déplacements. Nous avons entrepris l'étude de la genèse logique (1898) dans la perspective de l'épistémologie naturalisée, une approche privilégiée par les neuroscientifiques cognitivistes et avons examiné le rôle joué par l'esprit humain ainsi que les sensations musculaires, kinesthésiques et proprioceptives dans la construction de la géométrie et de la notion d'espace. Dans ce contexte, nous avons expliqué comment Poincaré établit un lien entre la créativité humaine et les sensations motrices issues du corps humain pour fonder la géométrie et la notion d'espace. En présentant la géométrie comme une science reposant sur les mouvements du corps, dont les sensations sont modifiées par l'esprit, Poincaré a introduit un changement de perspective majeur

dans le débat sur les fondements de la géométrie, comme le souligne Longo⁴⁵⁷. En effet, la genèse logique (1898), bien que comportant des hypothèses informelles non vérifiables, représente une avancée significative dans la recherche des fondements cognitifs de la géométrie.

Dans sa version évolutionniste, la théorie psycho-physiologique de Poincaré établit une relation entre la tridimensionnalité de l'espace euclidien et la génétique, en postulant que l'espace tridimensionnel euclidien est hérité phylogénétiquement et se développe chez l'être humain en parallèle à son développement ontogénétique. Cela permet à Poincaré d'expliquer, de manière non circulaire, pourquoi les humains ont une préférence pour l'espace euclidien à trois dimensions. L'originalité de la théorie psycho-physiologique de Poincaré, jusqu'à présent peu soulignée dans la littérature, réside dans sa capacité à fournir, ne serait-ce qu'en partie, une explication de la genèse de la géométrie et de l'espace qui intègre à la fois l'évolution des espèces (phylogenèse) et l'évolution de l'individu (ontogenèse), bien avant Piaget et les neurosciences cognitives. Étant donné que Poincaré explique de manière similaire le processus de construction des nombres et de l'espace à travers des processus mentaux qui incluent des états psychiques ainsi que des facteurs somatiques ou empiriques, nous en avons conclu que sa philosophie des mathématiques comporte, de manière implicite, des aspects cognitifs.

Dans la seconde partie de notre recherche, notre principal objectif était de nous familiariser avec certaines théories récemment avancées par des spécialistes en neurosciences cognitives. Dans le chapitre 1, nous avons présenté les théories neurocognitives concernant la cognition numérique et la prise de décision. Nous avons commencé par examiner l'approche neurocognitive de Changeux ([section 1](#)), afin de montrer à quel point cette théorie renforce les idées de Poincaré en rejetant le platonisme mathématique qui soutient l'existence des nombres en dehors de l'esprit humain, ainsi que la thèse logiciste selon laquelle les nombres sont réductibles à des constructions purement logiques. La théorie de Changeux nous a permis de comprendre que, d'un point de vue empirique, les objets mathématiques trouvent leur origine à la fois dans la phylogenèse et dans l'épigénèse liée à l'ontogenèse. Pour renforcer cette idée, nous avons présenté des études expérimentales qui soutiennent le point de vue de Changeux selon lequel les objets mathématiques se construisent à partir de prédispositions

⁴⁵⁷ LONGO, Giuseppe. Géométrie, mouvement, espace : cognition et mathématiques, *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche de la Cognition*. 1997, n° 25, p. 21.

phylogénétiques innées à la naissance, ainsi que de l'influence épigénétique qui intervient pendant le développement postnatal (ontogenèse). Au demeurant, nous avons constaté que la construction et l'acquisition des nombres reposent, selon Changeux, sur des systèmes neuronaux de numérosité. Cependant, nous avons remarqué que ces systèmes de numérosité ne sont pas suffisamment détaillés dans son approche cognitive axée sur l'épigénèse neuronale.

La deuxième théorie cognitive que nous avons abordée dans la section 2, et qui fournit des informations approfondies sur l'existence des systèmes neuronaux de numérosité et leur rôle respectif dans le processus de construction et d'acquisition des nombres, est la théorie de l'intuition numérique développée par Dehaene. La présentation de cette théorie avait pour but de mettre en évidence le rôle crucial joué par l'intuition et les données empiriques dans la représentation et dans le processus d'acquisition des nombres. Dans cette perspective, nous avons présenté des études neuropsychologiques qui confirment que nos intuitions numériques, c'est-à-dire nos capacités numériques, reposent sur la subitisation (le circuit neuronal des petites numérosités) et sur le système approximatif du nombre (le circuit neuronal des grandes numérosités), tous deux présents dès la naissance. Quant à l'acquisition des nombres symboliques, nous avons vu que cela est lié à l'apprentissage culturel. D'autres études neurophysiologiques ont également identifié les zones cérébrales impliquées dans le traitement numérique. Cependant, nous devons nous interroger sur la question de savoir si l'intuition de Dehaene peut être assimilée à la thèse de Poincaré selon laquelle l'« intuition pure » constitue le fondement des nombres. Malgré l'absence de détails sur la manière dont la subitisation et le système approximatif du nombre interagissent dans le cerveau pour générer les nombres symboliques, nous avons observé comment la théorie de l'intuition numérique de Dehaene permet d'une part de préciser la nature des nombres et d'autre part de montrer que l'intuition est un puissant prédicteur de nombres. Tout comme l'épigénèse neuronale de Changeux, la théorie de l'intuition numérique de Dehaene confirme l'intégration de la phylogenèse, de l'ontogenèse et de l'épigénèse dans le processus d'acquisition et de développement des nombres symboliques.

Dans la section 3, nous avons présenté la théorie des marqueurs somatiques de Damasio afin de déterminer si l'hypothèse poincaréenne admettant l'implication de l'intuition rationnelle et de l'intuition « spéciale » (c'est-à-dire l'intuition sensible nécessaire pour « discerner » et « choisir ») dans l'invention ou la décision des idées est justifiée. En expliquant à l'aide des études neurophysiologiques comment nos choix décisionnels sont dus, en grande

partie, aux marqueurs somatiques et à l'intuition, la théorie des marqueurs somatiques de Damasio apporte, à vue d'œil, un soutien remarquable à Poincaré.

Au sein du chapitre 2, nous avons présenté la théorie spatiale de Berthoz dans le but de comprendre les processus physiologiques et neurocognitifs à la base de la construction spatiale et de l'acquisition de la géométrie. À partir d'une série d'études physiologiques, nous avons vu la façon dont Berthoz montre, de façon empirique, le rôle joué par les sensations visuelles, kinesthésiques, proprioceptives et vestibulaires dans le processus de construction de l'espace (section 1). Ce qui nous a permis de comprendre davantage l'importance des mouvements du corps dans la construction de l'espace et l'acquisition de la géométrie. Afin de justifier l'interactivité entre le cerveau et les sensations sensori-motrices dans la construction de l'espace et l'acquisition de la géométrie, nous avons élucidé les zones cérébrales sollicitées lors du traitement des sensations visuelles, kinesthésiques, proprioceptives et vestibulaires. En nous intéressant à la phylo-ontogenèse de la représentation spatiale (section 2), notre objectif était de mieux comprendre le processus d'acquisition et de développement de la géométrie chez les humains. Nous avons expliqué, à l'aide des études neurophysiologiques et neuroanatomiques, comment les organes héréditaires permettent la construction de l'espace et l'acquisition de la géométrie lors du développement ontogénétique. Nous avons vu que ces expériences s'accordent avec l'hypothèse poincaréenne selon laquelle la géométrie trouve sa genèse dans les organes phylogénétiques hérités de l'évolution des espèces humaines, mais aussi dans la formation et l'évolution individuelle (ontogenèse).

Dans la troisième partie, notre principal objectif était de déterminer la compatibilité entre les idées centrales de la construction mathématique de Poincaré (exposées dans le chapitre 2 de la première partie) et les découvertes des neurosciences cognitives. En disposant des résultats des études expérimentales de Changeux et Dehaene concernant la construction des objets mathématiques et l'acquisition des nombres, des travaux de Damasio sur la prise de décision intuitive, ainsi que des recherches de Berthoz sur la construction de l'espace et l'acquisition de la géométrie, nous avons analysé les idées principales de Poincaré à la lumière de ces résultats. L'objectif de cette analyse était de confronter le constructivisme mathématique proposé par Poincaré aux approches neuroconstructivistes avancées par ces trois neuroscientifiques cognitivistes, afin de mettre en évidence les convergences et les divergences entre eux.

À l'issue de cette confrontation, le constat est que certaines idées périphériques de Poincaré convergent avec les neurosciences cognitives, tandis que ses idées fondamentales

entrent en contradiction avec les thèses majeures de ce domaine. Comme nous l'avons observé, la nature des objets mathématiques, l'intuition comme fondement des nombres et l'interaction entre l'intuition et l'émotion dans la prise de décision sont des points apparents de convergence entre la théorie intuitionniste de Poincaré et les théories neurocognitives de Changeux, Dehaene et Damasio. Ainsi, la position anti-réaliste adoptée par Poincaré en mathématiques trouve un soutien plus marqué dans les neurosciences cognitives. Cette position constitue d'ailleurs une condition nécessaire pour comparer son approche constructiviste à celle des neuroscientifiques cognitivistes. En ce qui concerne la théorie psycho-physiologique de l'espace, les mouvements en tant que fondements de la géométrie, la diversité des espaces perçus par les organes sensoriels, la distinction entre les références égocentriques et allocentriques, ainsi que le conventionnalisme géométrique, sont autant de points d'accord entre Poincaré et Berthoz. Une fois de plus, la théorie neurophysiologiste de Berthoz renforce la thèse défendue par Poincaré concernant les fondements de la géométrie.

Bien que plusieurs idées de Poincaré semblent communes aux trois théories neurocognitives retenues pour ce texte, l'analyse approfondie des démarches, des contextes, des contenus et concepts, a cependant mis en lumière des grandes divergences. Parmi les divergences relevées ci-dessus, il en a deux qui nous semblent en contradiction totale avec Poincaré. En raison des grandes divergences que nous voulons faire voir, il est important de revenir sur ces deux principaux points de désaccord entre Poincaré et les neurosciences cognitivistes, en commençant par Dehaene. Bien que Poincaré et Dehaene partagent des points de convergence concernant l'intuition comme fondement des nombres, la position explicative adoptée par ce psychologue cognitiviste en ce qui concerne les bases neuronales ou cognitives de l'arithmétique va à l'encontre de l'intuitionnisme arithmétique de Poincaré. Comme nous l'avons vu, Dehaene considère que le nombre est un produit neuronal, dérivant du système approximatif du nombre disponible dès les premiers jours de la naissance. Tenir le nombre pour un produit neuronal revient à dire que sa construction ne se fait pas par l'intuition qui, selon Poincaré, nous autorise à effectuer sans cesse des constructions synthétiques *a priori*, mais plutôt au sein des neurones sans recourir à une construction intellectuelle, c'est-à-dire sans recourir à l'intuition. Il est bien essentiel de comprendre que l'intuition que Dehaene considère comme le premier outil de la compréhension et de la construction des nombres est fondamentalement incompatible avec celle de Poincaré, et ce pour deux raisons principales. Premièrement, Dehaene considère que l'intuition est une prédisposition phylogénétique (c'est-

à-dire innée). Selon cette perspective, son rôle est de permettre une saisie directe ou intuitive de la numérosité d'un groupe d'objets. Cependant, la saisie immédiate ou intuitive de la numérosité d'un groupe d'objets est incompatible, dans la vision de Poincaré, avec l'intuition du nombre qui repose sur la répétition indéfinie. Néanmoins, ces deux auteurs se rejoignent sur le point que l'intuition joue un rôle crucial dans la construction et la compréhension des mathématiques.

La seconde raison de l'incompatibilité entre l'intuitionnisme de Dehaene et celui de Poincaré réside dans le rejet par Dehaene de l'innéité des concepts mathématiques. En effet, l'approche de Dehaene présente un paradoxe apparent, car il considère l'intuition du nombre comme une prédisposition innée tout en rejetant l'innéité du concept de nombre lui-même. Dans sa leçon inaugurale prononcée le 6 avril 2006, Dehaene exprime sa position concernant l'innéité du concept de nombre de la manière suivante :

le concept de nombre est-il « inné » ? je récus ce terme dont la psychologie cognitive me semble souvent faire un usage imprudent et presque incantatoire. Dire qu'un comportement est inné ne fait que cacher notre ignorance des mécanismes de son développement. Un vaste fossé explicatif sépare la génétique moléculaire-seul niveau où l'on peut légitimement parler de code inné- des compétences précoces de l'enfant. Les gènes ne spécifient pas des comportements, encore moins des concepts⁴⁵⁸.

Une telle déclaration constitue une manière explicite de rejeter les conceptions mathématiques qui considèrent le concept de nombre comme inné ou comme une connaissance préexistante dans l'esprit humain. Si le concept de nombre n'est pas inné, quelle est alors son origine ? En se référant au passage précédemment cité, on peut considérer que Dehaene adopte une position empiriste, selon laquelle le concept de nombre est acquis au cours du développement ontogénétique par le biais du recyclage neuronal et de l'éducation sur une longue période. Selon Dehaene, il n'y a pas de concept mathématique préexistant dans l'esprit humain ou le cerveau. En d'autres termes, aucun concept mathématique ne nous est donné *a priori*. L'intuition du nombre est certes une prédisposition innée, mais il est exclu de considérer le concept de nombre comme inné. Tous les concepts mathématiques, y compris le concept de nombre, sont acquis tardivement par le biais d'un processus d'apprentissage ontogénétique (éducation). En rejetant l'innéité du concept de nombre, Dehaene vise manifestement à légitimer la prédominance des influences ontogénétiques (facteurs empiriques) sur les prédispositions phylogénétiques (facteurs innés). C'est pourquoi il soutient que l'acquisition des nombres repose

⁴⁵⁸ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, op.cit., p. 10.

uniquement sur un processus d'apprentissage ontogénétique. Cette thèse de Dehaene est discutable dans la perspective de Carey, qui fait référence à l'individuation parallèle. Selon Carey, l'individuation parallèle ne repose pas uniquement sur le processus d'apprentissage ontogénétique, mais également sur l'individuation affinitaire ancrée dans la phylogénèse. Critiquant Dehaene, Carey soutient que le concept de nombre, présent (inné) chez l'enfant dès la naissance, joue un rôle déterminant dans l'acquisition ultérieure des nombres. L'accent mis par Carey sur les facteurs innés soutient la position de Poincaré, selon laquelle les facteurs innés sont primordiaux dans la construction des nombres, tandis que l'expérience apparaît seulement comme une opportunité pour l'esprit de manifester sa liberté et sa capacité créative. C'est ici que le neuroconstructivisme de Dehaene et le constructivisme de Poincaré divergent considérablement.

La seconde thèse des neurosciences cognitives qui nous semble en totale contradiction avec Poincaré est présentée par Berthoz. Selon ce neurophysiologiste, notre capacité cognitive à comprendre l'espace est liée aux mécanismes cérébraux qui se déroulent de manière inconsciente. À partir de là, il décrit une série de sensations basées sur des expériences physiologiques et neurophysiologiques pour soutenir l'idée que la géométrie est une science empirique. Cette thèse de Berthoz entre en contradiction totale avec Poincaré, mais pourquoi ? De son vivant, Poincaré prenait ses distances vis-à-vis de l'approche déterministe consistant à faire reposer la genèse de la géométrie au niveau du système nerveux. Dans un passage de *Science et méthode*, il exprimait son opposition en ces termes :

je ne me permettrais pas d'énoncer une opinion sur la structure du système nerveux que je ne connais pas, tandis que ceux qui l'ont étudié ne le font qu'avec circonspection, ensuite parce que malgré mon incompetence, je sens bien que ce schéma serait pas trop simpliste ; et enfin, parce que, sur ma liste de parades, il en figure de très complexes, qui peuvent même, (...) être formées de plusieurs pas suivis d'un mouvement du bras. Il ne s'agit donc pas de connexion physique entre les conducteurs réels, mais d'associations psychologiques entre deux séries de sensations⁴⁵⁹.

En examinant ce passage, il est légitime de se demander si Berthoz ne se trompe pas en se référant à Poincaré. Si nous nous référons à ce passage de Poincaré, la réponse est clairement affirmative. En effet, Poincaré s'opposait à l'idée de fonder la géométrie au niveau du système nerveux, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il est important de rappeler que ce mathématicien a vécu à une époque où les corrélats neuronaux et neurophysiologiques de la perception spatiale étaient moins étudiés. Il lui était donc difficile d'avoir une opinion tranchée

⁴⁵⁹ POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*. 1999, *op. cit.*, p. 96.

sur ce que l'on appelle aujourd'hui le neuroconstructivisme. Néanmoins, cette approche lui semblait problématique. Mais Poincaré avançait une raison encore plus pertinente : selon lui, une démarche déterministe visant à ancrer la genèse de la géométrie au niveau du système nerveux entraînerait l'exclusion des processus psychologiques qu'il défendait dans sa théorie spatiale. C'est évidemment sur ce point que la théorie spatiale de Poincaré entre en conflit avec celle de Berthoz.

Alors qu'il semble s'accorder avec Poincaré sur le fait que les sensations sensori-motrices constituent la genèse de l'espace et de la géométrie, Berthoz va curieusement porter un coup dur à la théorie spatiale de Poincaré, en faisant du système nerveux le point d'ancrage de la géométrie. Cela prouve indiscutablement que Berthoz dénie toute considération d'ordre psychologique telles que Poincaré les atteste dans sa théorie spatiale. Car dans sa théorie neurophysiologique de l'espace, les connexions neuronales qui ont lieu entre le cerveau et les sensations issues des mouvements du corps se font par l'intermédiaire d'un transfert de signaux électriques ou chimiques. S'il faut considérer que les connexions entre le cerveau et les sensations issues des mouvements du corps se font par l'intermédiaire des transferts de signaux électriques ou chimiques qui se font d'un neurone à un autre, l'idée que l'association psychologique entre les sensations est assurée par l'esprit humain devient caduque ou invalide.

De plus, Berthoz commet une erreur dans son approche consistant à donner une description empirique de la théorie spatiale de Poincaré afin d'en conclure que la géométrie est une science empirique. Il est important de noter que Poincaré, dans ses écrits sur la recherche des fondements de la géométrie, ne fournit pas une description des sensations ou du système nerveux, mais plutôt il imagine les sensations afin de fournir une explication logique de la genèse de la géométrie. Cette approche est raisonnable car Poincaré ne s'intéresse pas véritablement au développement empirique de la géométrie. Ce qui l'intéressait réellement était de comprendre comment on passe de l'espace sensible à l'espace géométrique et pourquoi il est commode d'attribuer 3 dimensions à l'espace géométrique. Il convient de noter que Poincaré utilise une expérience de pensée pour soutenir sa thèse selon laquelle la géométrie provient des sensations sensori-motrices, mais il est erroné d'en déduire qu'elle est une science empirique.

Berthoz qui donne l'impression de poursuivre les réflexions de Poincaré sur le terrain de la neurophysiologie, s'intéresse plutôt au développement des potentiels géométriques chez les humains. Plus précisément, il cherche à rendre compte des composantes neurophysiologiques de la genèse de la spatialité à la géométrie. Dans cette optique, il donne une description des

sensations sensori-motrices et des zones spécifiques du cerveau qui contribuent à la représentation mentale de l'espace, afin de donner une base solide à sa thèse selon laquelle la géométrie est une science empirique. Une pareille approche diffère de celle de Poincaré. Il convient de souligner que lorsque Berthoz parle de la géométrie, il fait principalement référence à la géométrie en tant que processus perceptif et cognitif dans le cerveau humain (géométrie perçue), sans faire de distinction suffisante entre la géométrie perçue et la géométrie mathématique explorée par Poincaré. Ainsi, Berthoz aborde la géométrie perçue, celle qui est représentée mentalement par le cerveau, tandis que Poincaré se focalise sur la géométrie mathématique qui explore la relation entre l'espace physique et l'espace géométrique. Par conséquent, Berthoz s'intéresse à l'espace tel qu'il est perçu et représenté mentalement, tandis que Poincaré se concentre sur l'espace mathématique défini par ses propriétés géométriques spécifiques (infinité, isotropie, tridimensionnalité, homogénéité, etc.). Bien que ces deux approches contribuent toutes deux à la compréhension de l'espace et de ses propriétés, qu'elles soient mathématiques ou perceptuelles, elles diffèrent par leurs objectifs respectifs. C'est pourquoi la référence constante de Berthoz à Poincaré peut être considérée comme une méprise.

L'erreur commise par Berthoz et d'autres neuroscientifiques, tels que Dehaene, en se référant à Poincaré, peut être expliquée, d'un autre point de vue, par l'ambiguïté inhérente à la philosophie des mathématiques de ce dernier. Au départ, Poincaré a tenté d'expliquer la genèse de la géométrie et en particulier la tridimensionnalité de l'espace à travers le concept des groupes de déplacements. Cependant, constatant que sa genèse logique (1898) était circulaire, il a fait appel à la théorie de l'évolution darwinienne pour justifier la tridimensionnalité de l'espace (1903) et défendre sa théorie psycho-physiologique contre les critiques des logicistes et des formalistes. Néanmoins, l'argumentation avancée par Poincaré pour relier sa théorie spatiale à la théorie darwinienne de l'évolution était ambiguë et moins convaincante, ouvrant ainsi la voie à diverses interprétations de la part des neuroscientifiques cognitivistes désireux de clarifier ses idées. On peut aussi reprocher à Poincaré ses références (imprécises) au système nerveux, à certaines occasions, pour justifier les associations psychologiques entre les sensations. Les différentes interprétations que nous concédons aux neuroscientifiques cognitivistes (Changeux, Dehaene et Berthoz) tiennent donc d'une part, à l'ambiguïté de l'épistémologie mathématique poincaréenne et d'autre part, à la volonté de ces neuroscientifiques cognitivistes de clarifier les hypothèses de Poincaré relatives à l'évolution biologique. Sans aucun doute, l'évolution biologique, caractérisée par les prédispositions

phylogénétiques et le processus d'apprentissage ontogénétique, est indiscutablement un facteur essentiel pour la construction et l'acquisition des mathématiques. Cependant, les neurosciences cognitives vont trop loin en considérant que tous les potentiels de l'esprit (réflexion, création, invention, imagination, intuition, etc.) peuvent être expliqués par les corrélats neuronaux.



Limites des neurosciences cognitives dans la construction et la compréhension des constructions arithmético-géométriques et actualité de la pensée de Poincaré

L'analyse approfondie des idées de Poincaré et des neuroscientifiques cognitivistes montre, en effet, que les idées fondamentales de la philosophie des mathématiques de Poincaré sont incompatibles avec les neurosciences cognitives. Par conséquent, quelle relecture peut-on faire de la philosophie des mathématiques de Poincaré à la lumière des résultats des neurosciences cognitives ? Doit-on affirmer que les neurosciences cognitives jettent la philosophie des mathématiques de Poincaré en désuétude ?

L'utilisation des méthodes modernes par les neuroscientifiques cognitivistes, telles que l'imagerie cérébrale, l'imagerie fonctionnelle (Tomographie par émission de positrons (TEP), l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), etc.), pour élucider empiriquement les fondements de l'arithmétique élémentaire et de la géométrie constitue indéniablement une avancée majeure dans le débat philosophique sur les fondements des mathématiques. Cependant, cela ne suffit pas à rendre Poincaré obsolète. En effet, nous avons constaté que plusieurs idées périphériques de Poincaré sont confirmées par les neurosciences cognitives. Ce que les neurosciences confirment avant tout, c'est la position anti-réaliste et anti-logiciste de Poincaré. Le point de vue des neurosciences cognitives qui donne raison à Poincaré contre les logicistes et les formalistes est que les mathématiques ne dérivent pas exclusivement des lois de la logique pure. En soutenant que la construction des mathématiques ne se fonde pas entièrement sur les règles logiques, mais qu'elle fait entrer en jeu les facteurs phylogénétiques (innés) et ontogénétiques (externes), Poincaré peut être considéré comme un précurseur des neurosciences cognitives. Alors comment interpréter l'incompatibilité frappante entre Poincaré et les neuroscientifiques cognitivistes ?

Comme souligné précédemment, les principales divergences entre Poincaré et les neuroscientifiques cognitivistes résident dans leurs approches et leurs objectifs respectifs. Poincaré, dans sa perspective constructiviste, cherchait à mettre en évidence les fondements philosophiques des mathématiques. Son objectif était d'expliquer la construction logique des concepts de nombre et de géométrie, en mettant en avant les aspects épistémologiques. En revanche, les neuroscientifiques cognitivistes adoptent une approche scientiste et s'attachent à décrire les bases cognitives sous-jacentes au processus d'acquisition des connaissances mathématiques, incluant le nombre et la géométrie. Leur tâche consiste à élaborer des modèles de développement des capacités numériques et géométriques chez les enfants. Il est important de comprendre que l'incompatibilité entre la théorie constructiviste de Poincaré et les théories neurocognitives des neuroscientifiques cognitivistes s'explique par la velléité de ces derniers à lier exclusivement les fondements de l'arithmétique et de la géométrie à l'activité neuronale (scientisme), tandis que Poincaré cherchait à expliquer épistémologiquement leurs fondements. Cependant, ces divergences méthodologiques ne doivent pas être interprétées comme si les idées de Poincaré étaient obsolètes. En réalité, les neuroscientifiques cognitivistes, dont les modèles neurocognitifs ont été présentés précédemment (Changeux, Dehaene, Damasio et Berthoz), ne cherchent pas à contredire les idées philosophiques de Poincaré, mais plutôt à fournir une description des corrélats cognitifs et neurophysiologiques de sa théorie constructiviste, à laquelle ils semblent adhérer. Loin de vouloir contredire Poincaré, leurs contributions visent à donner une meilleure compréhension de ses idées développées en arithmétique et en géométrie.

Se pose alors la question de savoir si les théories neurocognitives élaborées par ces neuroscientifiques cognitivistes offrent une meilleure compréhension du constructivisme mathématique de Poincaré. Ces théories neurocognitives offrent des perspectives intéressantes pour la compréhension de l'approche arithmético-géométrique de Poincaré, mais elles restent encore limitées, en raison des difficultés rencontrées dans la description des corrélats neuronaux impliquées dans la construction et l'acquisition des concepts mathématiques abstraits. Bien qu'il ne soit pas possible de les énumérer toutes ici, voici quelques-unes des limites à prendre en compte.

Le réductionnisme promu par les neurosciences cognitives pose des problèmes sur les plans philosophique et épistémologique. En adoptant une approche réductionniste, les neuroscientifiques cognitifs cherchent à expliquer les processus mathématiques en les réduisant

à des activités neuronales et à des mécanismes cognitifs. Cela signifie qu'ils tentent de comprendre les fondements des mathématiques en les ramenant à des processus physiques et biologiques spécifiques qui se produisent dans le cerveau. Cependant, cette approche réductionniste néglige ou ignore les aspects épistémologiques, conceptuels et philosophiques des mathématiques. L'approche réductionniste utilisée par les neurosciences cognitives n'est pas censée prendre en considération ces aspects.

Ensuite, il existe un problème lié au niveau d'abstraction quant à l'interprétation des fondements mathématiques en termes d'activités neuronales. En se concentrant principalement sur les corrélats neurophysiologiques et cognitifs des activités mathématiques, les neuroscientifiques sous-estiment les questions abstraites et philosophiques liées à la construction arithmético-géométrique, telles que les raisonnements symboliques ou les preuves mathématiques formelles.

En outre, on constate un manque de contexte précis dans l'approche des neurosciences cognitives. En effet, celles-ci se concentrent principalement sur des expériences neurobiologiques et neuropsychologiques spécifiques réalisées sur le cerveau en laboratoire. Il est peu probable que ces expériences reflètent fidèlement les situations réelles dans lesquelles les constructions arithmético-géométriques se produisent. Nous ne disposons d'aucune garantie que les nombreuses expériences menées en laboratoire décrivent réellement la façon dont les mathématiques sont construites dans le cerveau.

Enfin, les techniques actuelles d'imagerie cérébrale, telles que l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), la tomographie par émission de positrons (TEP), etc. présentent des résolutions spatiales et temporelles limitées⁴⁶⁰, ce qui rend difficile l'étude précise des processus cérébraux sous-jacents aux constructions arithmético-géométriques. De plus, ces techniques mesurent principalement l'activité cérébrale globale plutôt que les activités spécifiques des régions cérébrales impliquées dans les constructions mathématiques.

⁴⁶⁰ REVONSUO, Antti. Sur la nature des explications dans les neurosciences. In *Des neurosciences à la philosophie : neurophilosophie et philosophie des neurosciences*. Paris, Éditions Syllepse, 2008, p. 58.



Les défis actuels et implications futures des neurosciences cognitives dans la recherche des fondements des mathématiques

À la lumière des limites que nous venons de mentionner, il est évident que les neurosciences cognitives font face à plusieurs défis et doivent s'engager davantage pour offrir une meilleure compréhension des constructions arithmético-géométriques. Dans cette optique, nous soulignons ici trois de ces défis et les implications futures qui en découlent.

Le premier défi se situe au niveau d'analyse. Les neurosciences cognitives se situent généralement au niveau neuronal et cognitif, mais les constructions mathématiques portent sur des structures abstraites qui transcendent ces niveaux. Le défi à ce niveau consiste à établir des liens entre les processus neurocognitifs et les structures mathématiques, en reconnaissant les différents niveaux d'analyse impliqués. En identifiant les liens entre les processus neurocognitifs et les structures mathématiques, nous pourrions obtenir une meilleure compréhension du processus de construction de la pensée mathématique.

Le second défi concerne la complexité des processus mathématiques. Les constructions arithmético-géométriques de Poincaré présentent une complexité inhérente due aux processus mathématiques qu'elles impliquent, tels que la manipulation symbolique, la représentation abstraite et le raisonnement mathématique. Comprendre comment le cerveau traite les représentations symboliques et quelles régions cérébrales sont impliquées dans le raisonnement mathématique, c'est-à-dire l'aptitude à tirer des conclusions à partir de prémisses, reste un défi majeur pour les chercheurs en neurosciences cognitives. De plus, décrire les mécanismes neurocognitifs et neurophysiologiques sous-jacents à la construction des concepts mathématiques abstraits pose actuellement des difficultés aux neurosciences cognitives. Expliquer les corrélats neuronaux par lesquels les concepts mathématiques abstraits se construisent constitue donc un domaine de recherche important à explorer.

Le troisième défi concerne l'intégration interdisciplinaire. Il est probable que les neurosciences cognitives apportent des éclairages sur la manière dont le cerveau construit les concepts mathématiques abstraits, le raisonnement mathématique, et d'autres aspects à l'avenir.

Cependant, la compréhension précise de ces aspects nécessite une approche interdisciplinaire qui intègre les aspects conceptuels, philosophiques et sociaux des mathématiques. Par conséquent, le défi des neurosciences cognitives réside dans la mise en coopération des différentes approches mathématiques telles que celle de Poincaré, des logicistes et des formalistes, et dans l'intégration des connaissances et des méthodes provenant de domaines variés tels que la psychologie, la philosophie, etc. Cette approche interdisciplinaire permettrait d'obtenir une vision complète et approfondie des processus mathématiques. Afin d'offrir une meilleure construction et compréhension des constructions arithmético-géométriques, il est donc indispensable d'adopter une approche interdisciplinaire, en favorisant la collaboration entre les neuroscientifiques cognitifs, les mathématiciens, les psychologues et les philosophes. Ensemble, ils pourront contribuer à une meilleure explication de la manière dont le cerveau traite les mathématiques.

En définitive, les recherches actuelles en neurosciences cognitives offrent une compréhension limitée de la construction de la pensée mathématique dans le cerveau et particulièrement de l'approche poincaréenne des mathématiques, car les liens précis entre le cerveau et les mathématiques ne sont pas encore entièrement connus. Cependant, de nouvelles découvertes et avancées technologiques pourraient ouvrir des perspectives passionnantes dans un avenir proche, offrant une meilleure compréhension du traitement et de la construction des mathématiques par le cerveau.

BIBLIOGRAPHIE

Œuvres de Poincaré

1893. “Le continu mathématique”. *Revue de métaphysique et de morale* 1(1) : 26-34. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1893&submit_search=Recherche.
1897. “Réponse à quelques critiques”. *Revue de Métaphysique et de Morale* 5(1) : 59-70. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1897&submit_search=Recherche.
1899. “Des fondements de la géométrie : à propos d’un livre de M. Russell”. *Revue de métaphysique et de morale* 7(3) : 251-279. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1899&submit_search=Recherche.
- 1903a. “L’espace et ses trois dimensions”. *Revue de métaphysique et de morale* 11 : 281-301. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1903&submit_search=Recherche.
- 1903b. “Poincaré’s review of Hilbert’s “foundations of geometry”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 10(1) : 1-23.
- 1904a. “Les définitions générales en mathématiques”. *Georg, Geneva*. Enseignement mathématique 6 : 257- 283. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1904&submit_search=Recherche.
- 1904b. “Rapport sur les Travaux de M. Hilbert... Présentés au Troisième Concours du Prix Lobatchefsky”. *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan* 14 : 10-48. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1904&submit_search=Recherche.
- 1906a. “La relativité de l’espace”. *L’année psychologique* 13(1) : 1-17. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1906&submit_search=Recherche.
- 1906b. “Les mathématiques et la logique”. *Revue de métaphysique et de morale* 14(3) : 294-317. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1906&submit_search=Recherche.
- 1906c. “Les mathématiques et la logique (suite et fin) ”. *Revue de Métaphysique et de Morale* 14(1) : 17-34. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1906&submit_search=Recherche.

1908. “L’invention mathématique”. *Gauthier-Villars, Paris*. Enseignement mathématique 10 : 357- 371. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1908&submit_search=Recherche.
- 1909a. “La logique de l’infini”. *Revue de Métaphysique et de Morale* 17(4) : 461-482. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1909&submit_search=Recherche.
- 1909b. “Réflexions sur les deux notes précédentes”. *Acta mathematica* 32(1) : 195-200. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1909&submit_search=Recherche.
- 1912a. “La logique de l’infini”. *Scientia* 12 : 1-11. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1912&submit_search=Recherche.
- 1912b. “Pourquoi l’espace a trois dimensions”. *Revue de Métaphysique et de Morale* 20(4) : 483-504. Disponible sur : http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/index.php?s=1912&submit_search=Recherche.
1917. *Dernières pensées*. Ernest Flammarion.
1921. “Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même”. *Acta mathematica* : 1-135.
1946. *La valeur de la science. Avec une introduction de Louis Rougier et un portrait au pinceau de Paul Monnier*. [s.l.]: Genève, Le Cheval Ailé.
1990. *La valeur de la science*. Paris : Flammarion.
1999. *Science et méthode*. Paris : Kimé.
2000. *La science et l’hypothèse*. Paris : Flammarion.
2002. “Des fondements de la géométrie (1898)”. In *Scientific Opportunism L’Opportunisme scientifique*, Springer, 5-31.
- Scientific Opportunism : An Anthology = L’opportunisme Scientifique*. 2002. Boston : Birkhäuser.

Ouvrages et articles consacrés à Poincaré

BRENNER, Anastasios. “La réception du logicisme en France en réaction à la controverse Poincaré-Russell”. *Revue d’histoire des sciences*, v. 67, n. 2 (2014), p. 231-255. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3917/rhs.672.0231>>.

CANTÙ, Paola. “Le concept d’espace chez Véronèse”. *Philosophia Scientiæ. Travaux d’histoire et de philosophie des sciences*, n. 13-2 (2009), p. 129-149. Disponible sur : <<https://doi.org/10.4000/philosophiascientiæ.299>>.

CROCCO, Gabriella. “Intuition, construction et convention dans la théorie de la connaissance de Poincaré”. *Philosophiques*, v. 31, n. 1 (2004), p. 151-177. Disponible sur : <<https://doi.org/10.7202/008938ar>>.

DETLEFSEN, Michael. “Poincaré against the logicians”. *Synthese*, v. 90, n. 3 (1992), p. 349-378. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1007/BF00500033>>.

DETLEFSEN, Michael. “Poincaré versus Russell sur le rôle de la logique dans les mathématiques” : *Les Études philosophiques*, v. n° 97, n. 2 (2011), p. 153-178. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3917/leph.112.0153>>.

FÉVRIER, Paulette. “La Philosophie Mathématique de Poincaré”. *Epistemologia*, v. 4, n. 1 (1981), p. 151-172.

GREFFE, Jean-Louis. *Henri Poincaré : science et philosophie congrès international science and philosophy international congress Wissenschaft und Philosophie Internationaler Kongress*. Berlin Paris : Akademie Verlag Albert Blanchard, 1996 (Publications des archives Henri-Poincaré).

HADAMARD, Jacques. *Essai sur la psychologie de l’invention dans le domaine mathématique*. Paris : Gauthier-Villars, 1975 (Collection Discours de la méthode).

HEINZMANN, Gerhard. *Entre intuition et analyse : Poincaré et le concept de prédictivité*. Paris : A. Blanchard, 1985 (Bibliothèque scientifique Albert Blanchard, 3).

HEINZMANN, Gerhard. “Helmholtz and Poincaré’s considerations on the genesis of geometry” in BOI, Luciano, FLAMENT, Dominique et SALANSKIS, Jean-Michel (Orgs.). *1830–1930: A Century of Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992 (Lecture Notes in Physics). Disponible sur : <https://doi.org/10.1007/3-540-55408-4_68>.

HEINZMANN, Gerhard. “Poincaré : philosophe et géomètre. *Image des Mathématiques*” [en ligne], CNRS, 2010. Disponible sur le web : <http://images.math.cnrs.fr/Poincare-philosophe-et-geometre.html>. fihal-00527106f.

- HEINZMANN, Gerhard. *L'intuition épistémique : une approche pragmatique du contexte de compréhension et de justification en mathématiques et en philosophie*. Paris : J. Vrin, 2013 (Mathesis).
- HEINZMANN, Gerhard. "Poincaré et la philosophie des mathématiques". *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, v. 9 (1988), p. 99-121.
- HEINZMANN, Gerhard. *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano : textes de la discussion, 1906-1912, sur les fondements des mathématiques des antinomies à la prédicativité*. Paris: A. Blanchard, 1986 (Bibliothèque scientifique Albert Blanchard, 6).
- JOHNSON, Dale M. "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II". *Archive for History of Exact Sciences*, v. 25, n. 2/3 (1981), p. 85-266.
- KEBAÏLI, Ramzi "La rigueur mathématique chez Henri Poincaré". *Philosophia Scientiæ*, 18-1, 2014, p. 27-44. Disponible sur <http://philosophiascientiae.revues.org/910> ; DOI : 10.4000/philosophiascientiae.910.
- LADYMAN, James. "Structural Realism" in ZALTA, Edward N. (Org.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [s.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2014.
- MOOIJ, Jan Johann Albinn. *La Philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*. [s.l.]: Gauthier-Villars, 1966.
- NABONNAND, Philippe. "La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré", 2006. Disponible sur : <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01086147>>.
- NABONNAND, Philippe. "La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie". *Revue d'histoire des mathématiques*, v. 6, n. 2 (2000), p. 219-269. Disponible sur : http://www.numdam.org/item/RHM_2000__6_2_219_0/.
- NABONNAND, Philippe. "Le conventionnalisme géométrique, une alternative radicale au réalisme spatial". *Cahiers de philosophie de l'université de Caen*, n. 45 (2008), p. 63-86. Disponible sur : <<https://doi.org/10.4000/cpuc.1293>>.
- SCHMID, Anne-Françoise. *Une Philosophie de savant. Henri Poincaré et la logique mathématique*. Paris : F. Maspero, 1978 (Algorithme).
- TORRETTI, Roberto. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: Reidel [u.a.], 1984 (Episteme, 7).
- VOLTERRA, Vito, HADAMARD, Jacques, LANGEVIN, Paul et BOUTROUX, Pierre. *Henri Poincaré : l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique*. Paris : Librairie Félix Alcan, 1914 (Nouvelle collection scientifique).

VUILLEMIN, Jules. "Poincaré's Philosophy of Space" in SUPPES, Patrick (Org.). *Space, Time and Geometry*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1973 (Synthese Library). Disponible sur : <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2686-4_8>.

ZAHAR, Elie. "Les fondements des mathématiques d'après Poincaré et Russell". *Fundamenta scientiae*, v. 8, n. 1 (1987), p. 31-56.

Ouvrages et articles sur les neurosciences cognitives

ACREDOLO, Linda. "Small- and large-scale spatial concepts in infancy and childhood". *Spatial representation and behavior across the life span: theory and application / edited by L.S. Liben, A.H. Patterson, N. Newcombe*, (1981). Disponible sur : <https://scholar.google.com/scholar_lookup?title=Small++and+large-scale+spatial+concepts+in+infancy+and+childhood&author=Acredolo%2C+L.P.&publication_year=1981>.

AÏTE, Ania Alexandra. *Processus émotionnels et cognitifs dans le développement des capacités de prise de décision sous ambiguïté*. Thèse de doctorat, Université Paris 5, 2013. Disponible sur : <<https://www.theses.fr/2013PA05H121>>.

BARBU-ROTH, Marianne, ANDERSON, David I., DESPRÈS, Adeline, *et al.* "Neonatal Stepping in Relation to Terrestrial Optic Flow". *Child Development*, v. 80, n. 1 (2009), p. 8-14. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2008.01241.x>>.

BARSALOU, Lawrence. "L'abstraction comme interprétation dynamique dans les systèmes de symboles perceptifs | 2". Disponible sur : <<https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781410612908-21/abstraction-dynamic-interpretation-perceptual-symbol-systems-lawrence-barsalou>>.

BARSALOU, Lawrence W. "Perceptual symbol systems". *Behavioral and Brain Sciences*, v. 22, n. 4 (1999), p. 577-660. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1017/S0140525X99002149>>.

BERTHOZ, Alain. *La décision*. Paris : Odile Jacob, 2003.

BERTHOZ, Alain et PETIT, Jean-Luc. *Physiologie de l'action et phénoménologie*. Paris : Odile Jacob, 2006.

BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et les espaces*. Résumé du cours 2007, p. 324-351. Disponible sur : <https://www.college-de-france.fr/agenda/cours/le-cerveau-et-les-espaces>.

BERTHOZ, Alain. *Espace des sens et sens des espaces*. Cours de 2002-2003, p. 338-396. Disponible sur : <<https://www.college-de-france.fr/site/alain-berthoz/course-2002-2003.htm>>.

BERTHOZ, Alain. “Fondements cognitifs de la géométrie et expérience de l’espace” in *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition*. [s.l.]: World Scientific, 2005. Disponible sur : <https://doi.org/10.1142/9789812700889_0006>.

BERTHOZ, Alain. “Fondements cognitifs de la perception de l’espace” in *1st International Congress on Ambiances, Grenoble 2008*. [s.l.]: À La Croisée, 2008, p. 121-132.

BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l’espace : II-Fondements cognitifs de la géométrie et de l’espace*. Cours de 1997-1998, p. 422-487. Disponible sur : <<https://www.college-de-france.fr/site/alain-berthoz/course-2007-01-24.htm>>.

BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l’espace : I-La mémoire des déplacements*. Cours de 1996-1997, p. 422-490. Disponible sur : <https://www.college-de-france.fr/media/alain-berthoz/UPL2108044363441641848_AN_97_berthoz_2.pdf>.

BERTHOZ, Alain. *Le regard (I) : évolution, développement et mécanismes de l’orientation du regard*. Cours de 1993-1994, p. 454-511. Disponible sur : <https://www.college-de-france.fr/media/alain-berthoz/UPL2101285399948174996_AN_94_berthoz.pdf>.

BERTHOZ, Alain. *Le sens du mouvement*. Paris : Odile Jacob, 2013.

BERTHOZ, Alain. “Physiologie de la perception et de l’action”. *L’annuaire du Collège de France. Cours et travaux*, n. 108 (2008), p. 303-327.

BERTHOZ, Alain. “Physiologie de la perception et de l’action”. *L’annuaire du Collège de France. Cours et travaux*, n. 109 (2010), p. 371-403.

BERTHOZ, Alain. “Physiologie de la perception et de l’action (1993-2010)”. *L’annuaire du Collège de France. Cours et travaux*, n. 119 (2022), p. 698-700.

BERTHOZ, Alain. *La Simplexité*. Paris : Odile Jacob, 2009.

BERTHOZ, Alain et RECHT, Roland. *Les espaces de l’homme : Symposium annuel*. Paris : Odile Jacob, 2005.

BLAYO, François et VERLEYSEN, Michel. *Les réseaux de neurones artificiels*. Paris : Presses universitaires de France, 1996 (Que sais-je ? 3042).

BOHBOT, Véronique, LERCH, Jason, THORNDYCRAFT, Brook, et al. “Gray Matter Differences Correlate with Spontaneous Strategies in a Human Virtual Navigation Task”. *Journal of Neuroscience*, v. 27, n. 38 (2007), p. 10078-10083. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.1763-07.2007>>.

BRANNON, Elizabeth. “The representation of numerical magnitude”. *Current Opinion in Neurobiology*, v. 16, n. 2 (2006), p. 222-229. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1016/j.conb.2006.03.002>>.

CAREY, Susan. “Bootstrapping & the Origin of Concepts”. *Daedalus*, v. 133, n. 1 (2004), p. 59-68.

CAREY, Susan. “Cognitive Foundations of Arithmetic: Evolution and Ontogenesis”. *Mind & Language*, v. 16, n. 1 (2001), p. 37-55. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1111/1468-0017.00155>>.

CHANGEUX, Jean-Pierre. “Conférence introductive de J.-P. Changeux”. *La lettre du Collège de France*, n. 27 (2009), p. 24-25. Disponible sur : <<https://doi.org/10.4000/lettre-cdf.101>>.

CHANGEUX, Jean-Pierre. *Du vrai, du beau, du bien*. Paris : Odile Jacob, 2008.

CHANGEUX, Jean-Pierre. *L’homme de vérité*. Paris : Odile Jacob, 2002.

CHANGEUX, Jean-Pierre. *L’homme neuronal*. Paris : Fayard, 1983.

CHANGEUX, Jean-Pierre et CONNES, Alain. *Matière à pensée*. Paris : Odile Jacob, 1989.

COLLINS, Thérèse, ANDLER, Daniel et TALLON-BAUDRY, Catherine. *La cognition : du neurone à la société*. Paris : Gallimard, 2018 (Folio, 636).

CONTY, Laurence et DUBAL, Stéphanie. “Chapitre XIII. Emotions” in DENIS, Michel (Org.). *La psychologie cognitive*. [s.l.] : Éditions de la Maison des sciences de l’homme, 2012. Disponible sur : <<https://doi.org/10.4000/books.editionsmslh.14787>>.

DAMASIO, Antonio. *L’erreur de Descartes : la raison des émotions*. Paris : Odile Jacob, 2006.

DAMASIO, Antonio. *Spinoza avait raison*. Paris : Odile Jacob, 2003.

DEHAENE, Stanislas et al. “Arithmetic and the brain”. *Curr Opin Neurobiol*, 14(2), 2004, p.218-224. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1016/j.conb.2004.03.008>>.

DEHAENE, Stanislas. *Fondements cognitifs des apprentissages scolaires. Cours 1 : Éducation, plasticité cérébrale et recyclage neuronal*. Cours 2014. Disponible sur : <https://docplayer.fr/7602118-Cours-2014-fondements-cognitifs-des-apprentissages-scolaires.html>.

DEHAENE, Stanislas. “Evolution of cortical circuits for reading and arithmetic: the neuronal recycling hypothesis”. Disponible sur : <https://web.archive.org/web/20180503060402id_/http://www.unicog.org/publications/DehaeneFyssenChapterPreemption2004b.pdf>.

STANISLAS, Dehaene, DUHAMEL, Jean-René, HAUSER, Marc et RIZZOLATTI, Giacomo. "From monkey brain to human brain: a fyssen Foundation Symposium". *The Mith Press*, 2005. Disponible sur <https://doi.org/10.7551/mitpress/3136.001.0001>.

DEHAENE, Stanislas. *La Bosse des maths : Quinze ans après*. [s.l.]: Odile Jacob, 2010.

DEHAENE, Stanislas. "Psychologie cognitive expérimentale". *L'annuaire du Collège de France*, n. 108 (2008), p. 277-301. Disponible sur : <https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.114>.

DEHAENE, Stanislas. "Le cerveau calculateur". Dossier Math et Psycho, revue APMEP (2010), p. 312-326.

DEHAENE, Stanislas. *Le Code de la conscience*. [s.l.]: Odile Jacob, 2014.

DEHAENE, Stanislas. "Qu'est-ce qu'un nombre ?" *Recherche-Paris-*, (2001), p. 46-49.

DEHAENE, Stanislas. "Apprentissage et sciences cognitives". *Cités*, v. 63, n. 3 (2015), p. 81-98. Disponible sur : <https://doi.org/10.3917/cite.063.0081>.

DEHAENE, Stanislas et CHANGEUX, Jean-Pierre. "Development of elementary numerical abilities: A neuronal model". *Journal of cognitive neuroscience*, v. 5, n. 4 (1993), p. 390-407.

DEHAENE, Stanislas, CHANGEUX, Jean-Pierre, NACCACHE, Lionel, *et al.* "Conscious, preconscious, and subliminal processing: a testable taxonomy". *Trends in cognitive sciences*, v. 10, n. 5 (2006), p. 204-211.

DEHAENE, Stanislas. *Vers une science de la vie mentale. Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006*. Paris : Collège de France, 2013. Disponible sur : <http://books.openedition.org/cdf/2850>.

DEHAENE, Stanislas et NACCACHE, Lionel. "Towards a cognitive neuroscience of consciousness: basic evidence and a workspace framework". *Cognition*, v. 79, n. 1 (2001), p. 1-37 (The Cognitive Neuroscience of Consciousness). Disponible sur: [https://doi.org/10.1016/S0010-0277\(00\)00123-2](https://doi.org/10.1016/S0010-0277(00)00123-2).

DEHAENE, Stanislas, PIAZZA, Manuela, PINEL, Philippe, *et al.* "Three parietal circuits for number processing". *Cognitive neuropsychology*, v. 20, n. 3-6 (2003), p. 487-506.

DUBNER, Ronald et ZEKI, Semir. "Response properties and receptive fields of cells in an anatomically defined region of the superior temporal sulcus in the monkey". *Brain Research*, v. 35, n. 2 (1971), p. 528-532. Disponible sur: [https://doi.org/10.1016/0006-8993\(71\)90494-X](https://doi.org/10.1016/0006-8993(71)90494-X).

EDELMAN, Gerald. *Wider Than the Sky: The Phenomenal Gift of Consciousness*. [s.l.]: Yale University Press, 2004.

EVERS, Kathinka. *Neuroéthique : quand la matière s'éveille*. Paris : Odile Jacob, 2009.

FAYOL, Michel. *L'acquisition du nombre : « Que sais-je ? » n° 3941*. [s.l.]: Que sais-je, 2018.

FEIGENSON, Lisa, DEHAENE, Stanislas et SPELKE, Elizabeth. “Core systems of number”. *Trends in cognitive sciences*, v. 8, n. 7 (2004), p. 307-314.

FREKSA, Christopher et WENDER, Karl. *Spatial cognition: an interdisciplinary approach to representing and processing spatial knowledge*. Berlin; New York: Springer, 1998 (Lecture notes in computer science; Lecture notes in artificial intelligence, 1404).

GALLISTEL, Charles. “The Origin of Concepts, S. Carey (Ed.), Oxford University Press, New York (2009). 608 pp., Price : \$ 49.95, ISBN : 978-0-19-536763-8”. *Lingua*, v. 121, n. 2 (2011), p. 308-312. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1016/j.lingua.2010.08.004>>.

GENTAZ, Edouard. “Caractéristiques générales de l’organisation anatomo-fonctionnelle de la perception cutanée et haptique”. *Toucher pour connaître. Psychologie cognitive de la perception tactile manuelle*, (2000), p. 19-34.

GERHARDT, Volker et NIDA-RÜMELIN, Julian (Orgs.). *Evolution in Natur und Kultur*. Berlin ; New York : De Gruyter, 2010 (Humanprojekt).

GIMBERT, Fanny. *L’appréhension des quantités par la vision ou le toucher : son développement et son rôle dans les apprentissages numériques chez l’enfant*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble Alpes, 2016. Disponible sur https://www.researchgate.net/publication/312277665_L%27_apprehension_des_quantites_par_la_vision_ou_le_toucher_son_developpement_et_son_role_dans_les_apprentissages_numeriques_chez_l%27enfant.

GREENBERG, Gary et TOBACH, Ethel. *Cognition, Language, and Consciousness: Integrative Levels*. [s.l.]: Psychology Press, 1987.

HALBERDA, Justin, MAZZOCCO, Michèle et FEIGENSON, Lisa. “Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement”. *Nature*, v. 455, n. 7213 (2008), p. 665-668.

HARTLEY, Tom, MAGUIRE, Eleanor A., SPIERS, Hugo J., *et al.* “The Well-Worn Route and the Path Less Traveled: Distinct Neural Bases of Route Following and Wayfinding in Humans”. *Neuron*, v. 37, n. 5 (2003), p. 877-888. Disponible sur : <[https://doi.org/10.1016/S0896-6273\(03\)00095-3](https://doi.org/10.1016/S0896-6273(03)00095-3)>.

HECAN, Henri et ALBERT, Martin. *Human neuropsychology*. [s.l.]: Wiley, 1978.

HENRI, Victor. “Revue générale sur le sens musculaire”. *L'Année psychologique*, v. 5, n. 1 (1898), p. 399-557. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3406/psy.1898.3059>>.

HONIG, Werner. et STEWART, Karen. “Discrimination of relative numerosity by pigeons”. *Animal Learning & Behavior*, v. 17, n. 2 (1989), p. 134-146.

HUBEL, David et WIESEL, Torsten. “Early Exploration of the Visual Cortex”. *Neuron*, v. 20, n. 3 (1998), p. 401-412. Disponible sur : <[https://doi.org/10.1016/S0896-6273\(00\)80984-8](https://doi.org/10.1016/S0896-6273(00)80984-8)>.

IARIA, Giuseppe, PETRIDES, Michael, DAGHER, Alain, et al. “Cognitive Strategies Dependent on the Hippocampus and Caudate Nucleus in Human Navigation: Variability and Change with Practice”. *Journal of Neuroscience*, v. 23, n. 13 (2003), p. 5945-5952. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.23-13-05945.2003>>.

IZARD, Véronique et DEHAENE, Stanislas. “Calibrating the mental number line”. *Cognition*, v. 106, n. 3 (2008), p. 1221-1247.

KAHNEMAN. Raymond. *Système 1, système 2 : les deux vitesses de la pensée*. Paris: Flammarion, 2012.

KAWAMOTO, H. “Estimation of testosterone binding capacity in the serum with hydrophobic resin”. *Endocrinologia Japonica*, v. 23, n. 2 (1976), p. 173-178. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1507/endocrj1954.23.173>>.

KAWAMOTO, Hideo. “Shisutemu Genshōgaku: Ōtopoiēshisu no Daiyon Ryōiki (System-Phenomenology: The Fourth Stage of Autopoiesis)”. *Tokyo: Sin-yosya*, (2006).

KLATZKY, Roberta. “Allocentric and Egocentric Spatial Representations: Definitions, Distinctions, and Interconnections” in FREKSA, Christian, HABEL, Christopher et WENDER, Karl Friedrich. (Orgs.). *Spatial Cognition: An Interdisciplinary Approach to Representing and Processing Spatial Knowledge*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998 (Lecture Notes in Computer Science). Disponible sur: <https://doi.org/10.1007/3-540-69342-4_1>.

LANDERL, Karin, BEVAN, Anna et BUTTERWORTH, Brian. “Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students”. *Cognition*, v. 93, n. 2 (2004), p. 99-125.

LE CORRE, Mathieu et CAREY, Susan. “One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles”. *Cognition*, v. 105, n. 2 (2007), p. 395-438. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005>>.

LEIBOVICH, Tali et ANSARI Daniel. “The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions”. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, v. 70, n. 1 (2016), p. 12-23. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1037/cep0000070>>.

LEMER, Cathy, DEHAENE, Stanislas, SPELKE, Elizabeth et al. “Approximate quantities and exact number words: dissociable systems”. *Neuropsychologia*, v. 41, n. 14 (2003), p. 1942-1958. Disponible sur : <[https://doi.org/10.1016/S0028-3932\(03\)00123-4](https://doi.org/10.1016/S0028-3932(03)00123-4)>.

LEPECQ, Jean-Claude. “Étude génétique des référentiels spatiaux : localisation et déplacement chez le jeune enfant. [Developmental study of spatial reference systems: Localization and change in position in the young child.]”. *Cahiers de Psychologie Cognitive/Current Psychology of Cognition*, v. 3, n. 3 (1983), p. 229-253.

LITHFOUS, Ségolène. *Etude des processus précoces impliqués dans la mémoire spatiale au cours du vieillissement : investigations électrophysiologiques*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2014. Disponible sur : <<https://www.theses.fr/2014STRAJ081>>. Disponible sur <https://theses.hal.science/tel-01255432/document>.

LONGO, Giuseppe. “Géométrie et cognition : Entre fondements des mathématiques, théorie de la connaissance et cognition”. *Revue de Synthèse*, v. 124, n. 1 (2003), p. 1-10. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1007/BF02963398>>.

LONGO, Giuseppe. “Géométrie, mouvement, espace : cognition et mathématiques”. *Intellectica*, v. 25, n. 2 (1997), p. 195-218.

LONGO, Giuseppe. “Introduction : est-ce que les calamars font de la Géométrie ?” Disponible sur : <<https://hal-ens.archives-ouvertes.fr/hal-03318274>>.

LOWE, Jessica Mengapche. *Sensations et perceptions visuelles et tactiles de matériaux texturés*. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2017. Disponible sur : <<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01848729>>.

MCCOMB, Karen, PACKER, Craig et PUSEY, Anne. “Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, *Panthera leo*”. *Animal Behaviour*, v. 47, n. 2 (1994), p. 379-387. Disponible sur: <<https://doi.org/10.1006/anbe.1994.1052>>.

MCNAMARA, Timothy. “How Are the Locations of Objects in the Environment Represented in Memory?” in FREKSA, Christian, BRAUER, Wilfried, HABEL, Christopher et al. *Spatial Cognition 2002: Spatial Cognition III*. Lecture Notes in Computer Science, vol 2685. Springer, Berlin, Heidelberg, p.174-191. Disponible sur https://doi.org/10.1007/3-540-45004-1_11.

MITCHELL, Robert, YAO, Pearl, SHERMAN, Peter et al. “Discriminative responding of a dolphin (*Tursiops truncatus*) to differentially rewarded stimuli”. *Journal of Comparative Psychology*, v. 99, n. 2 (1985), p. 218-225. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1037/0735-7036.99.2.218>>.

MORGAN, William Samuel. *Synthesis: space & shadows*. Stoney Creek, Ont.: Choice Limitless, 1993.

MORVAN, Camille. *Perception visuelle du mouvement pendant la poursuite oculaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2007. Disponible sur : <<https://www.theses.fr/2007PA066044>>.

NERVOUS, American Association for Research into, DISEASES, Mental, LLINÁS, Rodolfo et al. “The neuronal basis for consciousness”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, v. 353, n. 1377 (1998), p. 1841-1849. Disponible sur <https://doi.org/10.1098/rstb.1998.0336>.

NIEDER, Andreas, FREEDMAN, David et MILLER, Earl. “Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex”. *Science*, v. 297, n. 5587 (2002), p. 1708-1711.

NIEDER, Andreas et MILLER, Earl. “A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 101, n. 19 (2004), p. 7457-7462.

PAILLARD, Jacques. “Motor and representational framing of space”. In: *J.Paillard (Ed). Brain and Space*, (1991), p. 163-182.

PAVARD, Bernard et BERTHOZ, Alain. “Perception du mouvement et orientation spatiale:(revue bibliographique)”. *Le travail humain*, (1976), p. 207-225.

PELLAND, Jean-Charles. *De Brouwer à Barsalou : l'intuitionnisme à l'ère des sciences cognitives*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, 2008. Disponible sur https://www.academia.edu/2590483/De_Brouwer_%C3%A0_Barsalou_lintuitionnisme_%C3%A0_l%27%C3%A8re_des_sciences_cognitives_Masters_.

PEPPERBERG, Irène. “Interspecies communication: A tool for assessing conceptual abilities in the African grey parrot”. In G. Greenberg & E. Tobach (Eds.), *Cognition, language and consciousness: Integrative levels*. Lawrence Erlbaum Associates, p. 31-56. Disponible sur <https://scholar.google.com/scholar?hl=en&as_sdt=0%2C5&q=Ir%C3%A8ne+PEPPERBERG%2C+Ethology+75%2C+137%2C+1987++&btnG=>>.

- PIAZZA, Manuela, IZARD, Véronique, PINEL, Philippe et al. “Tuning Curves for Approximate Numerosity in the Human Intraparietal Sulcus”. *Neuron*, v. 44, n. 3 (2004), p. 547-555. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1016/j.neuron.2004.10.014>>.
- PICA, Pierre, LEMER, Cathy, IZARD, Véronique et al. “Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group”. *Science*, v. 306, n. 5695 (2004), p. 499-503.
- PICA, Pierre, LEMER, Cathy, IZARD, Véronique et al. “Quais são os vínculos entre aritmética e linguagem ? Um estudo na Amazônia”. *Revista de Estudos e Pesquisas*, v. 2, n. 1 (2005), p. 199-236.
- POIRIER, Pierre et FAUCHER, Luc. *Des neurosciences à la philosophie : neurophilosophie et philosophie des neurosciences*. Paris : Éd. Syllepse, 2008 (Matériologiques).
- REVKIN, Susannah, PIAZZA, Manuela, IZARD, Véronique et al. “Does Subitizing Reflect Numerical Estimation?” *Psychological Science*, v. 19, n. 6 (2008), p. 607-614. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2008.02130.x>>.
- RISTORI, Marie-Thérèse. “Barosensibilité”. *Wikipédia*. [s.l.: s.n.], 2017. Disponible sur : <<https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Barosensibilit%C3%A9&oldid=141993078>>.
- ROLL, Jean-Pierre. “Physiologie de la kinesthèse. La proprioception musculaire : sixième sens, ou sens premier ?” *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, v. 36, n. 1 (2003), p. 49-66. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3406/intel.2003.1676>>.
- SINACEUR, Hourya Benis. “Philosophie de la neuropsychologie du nombre”. *Intellectica-La revue de l'Association pour la Recherche sur les sciences de la Cognition (ARCo)*, n. 62 (2014), p. 103-144.
- SOTO-CALVO, Elena, SIMMONS, Fiona R., WILLIS, Catherine et al. “Identifying the cognitive predictors of early counting and calculation skills: Evidence from a longitudinal study”. *Journal of Experimental Child Psychology*, v. 140 (2015), p. 16-37.
- TAUBE, Jeffrey, MULLER, Robert et RANCK, James. “Head-direction cells recorded from the postsubiculum in freely moving rats. I. Description and quantitative analysis”. *Journal of Neuroscience*, v. 10, n. 2 (1990), p. 420-435. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.10-02-00420.1990>>.
- ULLER, Claudia, JAEGER, Robert, GUIDRY, Gena et al. “Salamanders (*Plethodon cinereus*) go for more: rudiments of number in an amphibian”. *Animal Cognition*, v. 6, n. 2 (2003), p. 105-112. Disponible sur : <<https://doi.org/10.1007/s10071-003-0167-x>>.
- WARWICK, Kevin. *I, Cyborg*. Édition illustrée. [s.l.]: University of Illinois Press, 2004.

WOLBERS, Thomas, WEILLER, Cornelius et BÜCHEL, Christian. “Neural foundations of emerging route knowledge in complex spatial environments”. *Cognitive Brain Research*, v. 21, n. 3 (2004), p. 401-411. Disponible sur: <<https://doi.org/10.1016/j.cogbrainres.2004.06.013>>.

WYNN, Karen. “Addition and subtraction by human infants”. *Nature*, v. 358, n. 6389 (1992), p. 749-750.

WYNN, Karen. “Children’s understanding of counting”. *Cognition*, v. 36, n. 2 (1990), p. 155-193. Disponible sur: <[https://doi.org/10.1016/0010-0277\(90\)90003-3](https://doi.org/10.1016/0010-0277(90)90003-3)>.

XU, Fei et SPELKE, Elizabeth. “Large number discrimination in 6-month-old infants”. *Cognition*, v. 74, n. 1 (2000), p. B1-B11.

Autres ouvrages et articles cités

BLANCHÉ, Robert. *Introduction à la logique contemporaine*. Paris : A. Colin, 1996 (Cursus Série Philosophie).

BLANCHÉ, Robert. *L’Axiomatique*. Paris : Presses universitaires de France, 1990 (Quadrige).

BRISSON, Luc et PRADEAU, Jean-François. *Le vocabulaire de Platon*. Paris : Ellipses, 1998 (Vocabulaire de).

BOURIAU, Christophe. *Helmholtz, la théorie des inférences inconscientes*. Colloque "La métaphysique de l’induction", Paris, Sorbonne-Université et Collège de France, 8 juin 2022.

BROUWER, Luitzen. “The effect of intuitionism on classical algebra of logic” in HEYTING, A. (Org.). *Philosophy and Foundations of Mathematics*. [s.l.]: North-Holland, 1975. Disponible sur: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-7204-2076-0.50071-4>>.

CAVAILLÈS, Jean. *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Paris : Librairie scientifique Hermann C^{ie}, 1938.

COMBÈS, Michel. *Fondements des mathématiques*. Paris : Presses universitaires de France, 1971 (Collection sup Initiation philosophique).

COUTURAT, Louis. *De l’infini mathématique*. Paris : Ancienne librairie Germer Baillièrre et cie, 1896.

COUTURAT, Louis. “Les Définitions mathématiques : L’Enseignement mathématique, 1905, t. VII, p. 27-40” in FICHANT, Michel (Org.). *Logique, mathématiques, langue universelle : Anthologie 1893-1917*. Lyon : ENS Éditions, 2018 (Bibliothèque idéale des sciences sociales). Disponible sur : <<http://books.openedition.org/enseditions/8020>>.

DELBŒUF, J. “La loi psycho-physique : Hering contre Fechner”. *Revue Philosophique de la France et de l’Étranger*, v. 3 (1877), p. 225-263.

DENIS, Anne. "De la sensation à l'intuition". *Revue française de psychanalyse*, v. 73, n. 2 (2009), p. 441-472. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3917/rfp.732.0441>>.

DIEUDONNÉ, Jean. *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*. Paris : Hachette, 1987 (Collection Pluriel, 8515).

EUCLIDE. Euclide Les quinze livres des éléments géométriques Au volume / fascicule Liste de résultats Tout : 2 résultats - Gallica. Disponible sur : <<https://gallica.bnf.fr/services/engine/search/sru?operation=searchRetrieve&version=1.2&collapsing=disabled&rk=21459;2&query=%28gallica%20all%20%22euclide%2C%20Les%20quinze%20livres%20des%20%C3%A9l%C3%A9ments%20g%C3%A9om%C3%A9triques%20%29%20and%20dc.relation%20all%20%22cb30409444z%22>>.

FECHNER, Gustav Theodor. *Elemente Der Psychophysik*. [s.l.]: Kessinger Publishing, LLC, 2010.

FREGE, Gottlob. *Les fondements de l'arithmétique*. Trad. Claude Imbert. Paris : Seuil, 1969.

FREGE Gottlob. *Wissenschaftlicher Briefwechsel. [Texte imprimé] / Gottlob Frege ; herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart*. Hamburg: F. Meiner, 1976 (Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwe).

FREGE, Gottlob, BESSON, Corine et BARNES, Jonathan. *L'Idéographie : un langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique*. Paris : J. Vrin, 1999 (Bibliothèque des textes philosophiques).

GANDON, Sébastien. *Philosophie des mathématiques : ontologie, vérité, fondements / textes réunis et présentés par S. Gandon et I. Smadja ; traductions par Anne-Marie Boivert, Sébastien Gandon, Bruce Halimi... [et al.]*. Paris : Librairie philosophique J. Vrin, 2013 (Textes clés).

GANDON, Sébastien. "Russell et la question des fondements. Etudes d'histoire et de philosophie des mathématiques au tournant du xxe siècle". thesis, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. Disponible sur : <<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00782161>>.

GODEL, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System, I. [Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés] Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (received 17 novembre 1930, published 1931), p. 173-198. Traduit en anglais par van Heijenoort in From Frege to Gödel. Harvard University Press, 1971. p. 596-616.

GONSETH, Ferdinand. *Les Fondements des mathématiques : de la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionnisme*. Librairie Scientifique Et Technique A. Blanchard. [s.l.: s.n.], 1974. Disponible sur : <<https://www.mollat.com/livres/1417538/ferdinand-gonseth-les-fondements-des-mathematiques-de-la-geometrie-d-euclide-a-la-relativite-generale-et-a-l-intuitionnisme>>.

GOUTSMEDT, Aurélien. L'axiomatique dans les preuves d'existence d'un équilibre général, chez Arrow et Debreu. Mémoire de master, Université Paris 1, 2013. Disponible sur <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00909894/document>.

HECK, Richard G. *Frege's theorem*. Oxford; New York: Clarendon Press, 2011.

HECK, Richard G. "Introduction au théorème de Frege". M. Marion et A. Voizard. *Frege : Logique et philosophie*, Paris, L'Harmattan, 1998, p. 33-61.

HELMHOLTZ, Hermann von. *Optique physiologique. Tome 1 / Trad. par Emile Javal et N. Th. Klein*. [s.l.]: Paris, 1867.

HELMHOLTZ, Hermann. *Optique physiologique. Tome 2 / Trad. par Emile Javal et N. Th. Klein*. [s.l.]: Paris, 1867.

HENRI, Victor. "Revue générale sur le sens musculaire". *L'Année psychologique*, v. 5, n. 1 (1898), p. 399-557. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3406/psy.1898.3059>>.

HILBERT, David. *Les Principes fondamentaux de la géométrie*. Traduit par L. Laugel. Paris : Gauthier-Villars, 1900.

HOUZEL, Didier. "Note sur la créativité mathématique". *Journal de la psychanalyse de l'enfant*, v. 3, n. 1 (2013), p. 155-174. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3917/jpe.005.0155>>.

HUSSERL, Edmund. *Chose et espace : leçons de 1907*. Paris : Presses universitaires de France, 1989.

ISAAC, Manuel Gustavo. "L'idéographie : une écriture de la pensée entre syntaxe et sémantique". *Dossiers d'HEL*, v. 9 (2016), p. 212-236.

JUNG, Carl Gustav et CAHEN, Roland. *Dialectique du Moi et de l'inconscient*. Paris : Folio Essais, 1986.

JUNG, Carl Gustav, FRANZ, Marie-Louise von et HENDERSON, Joseph Lewis. *L'homme et ses symboles*. Paris : R. Laffont, 1987.

KANT, Emmanuel. *Critique de la raison*. Seconde édition. Paris : Librairie Joseph Gibert, 1943 (Chefs-d'oeuvre philosophiques).

KELLER, Olivier. *L'invention du nombre*. Paris : Classiques Garnier, 2016.

- KOYRÉ, Alexandre. *Études d'histoire de la pensée*. Paris : Gallimard, 1971 (Bibliothèque des idées).
- LEFEBVRE, Jacques. "Invention, découverte et créativité en mathématiques : aspects psychologiques et historiques". *Bulletin AMQ*, v. 39, n. 3 (1999).
- LEROUX, Jean. *Une histoire comparée de la philosophie des sciences. Volume II. L'empirisme logique*, Paris, Presse de l'Université Lawal, 2010.
- LUBART, Todd, MOUCHIROUD, Christophe, TORDJMAN, Sylvie et al. *Psychologie de la créativité* - 2e édition. Paris : Armand Colin, 2015.
- LY, Igor. *Mathématique et physique dans l'œuvre philosophique de Poincaré*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2008.
- MANCOSU, Paolo. *Infini, logique, géométrie*. Paris : Librairie philosophique J. Vrin, 2015 (Mathesis).
- MANCOSU, Paolo. "Présentation des activités de la chaire internationale d'excellence Blaise Pascal en 2021-2022". *Calenda*, (2021). Disponible sur : <<https://calenda.org/890930>>.
- MERKER, Joël. *Le problème de l'espace : Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*. Paris : Hermann, 2010.
- MONGIN, Philippe. "L'axiomatisation et les théories économiques". *Revue économique*, v. 54, n. 1 (2003), p. 99-138. Disponible sur : <<https://doi.org/10.2307/3503180>>.
- NICOLAS, Serge et FERRAND, Ludovic. *La psychologie moderne : textes fondateurs du XIXe s. avec commentaires*. 1re éd. Bruxelles : De Boeck, 2003 (Portefeuille).
- NICOLLE, Charles. *Biologie de l'invention*. Librairie Félix Alcan. Paris : [s.n.], 1932. Disponible sur : <<https://www.leslibraires.fr/livre/11027426-biologie-de-linvention--nicolle-charles--alcan-felix--paris>>.
- ROBERT, Nadeau. "Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie". *Revue Philosophique de Louvain*, v. 99, n. 4 (2001), p. 741-742.
- MURPHY, Joseph. *La puissance de votre subconscient*. Genève : Ramon f. Keller paperback, 1967.
- PASCAL, Georges. *Pour connaître la pensée de Kant*. Nouvelle éd. Paris : Bordas, 1979 (Collection Pour connaître).
- PASCH, Moritz. *Vorlesungen uber neuere Geometrie*. Leipzig : B. G. Teubner, 1882.
- PATRAS, Frédéric. "L'horizon sémantique et catégoriel de la méthode axiomatique". *Noesis*, n. 5 (2003), p. 9-29.

PATY, Michel. “La création scientifique selon Poincaré et Einstein”, (1999), p. 241.

PIAGET, Jean. *Introduction à l'épistémologie génétique. 1, La pensée mathématique* [2e édition]. Paris : Presses universitaires de France, 1973 (Bibliothèque de philosophie contemporaine).

PIAGET, Jean. *La construction du réel chez l'enfant*. 2. éd. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 1950 (Actualités pédagogiques et psychologiques).

PIAGET, Jean et SZEMINSKA, Alina. *La genèse du nombre chez l'enfant*. 7^e édition : Delachaux et Niestlé (1997).

PIETTRE, Bernard et AUBENQUE, Pierre. *Platon. République. Livre VII*. Paris : Nathan, 2009.

RIVENC, François. *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*. Édité par l'institut d'histoire et philosophie des sciences et des techniques ; sous la direction de François Rivenc et Philippe de Rouilhan. Paris : Payot, 1992 (Bibliothèque scientifique Payot).

RUSSELL, Bertrand. “La théorie des types logiques”. *Revue de Métaphysique et de Morale*, v. 18, n. 3 (1910), p. 263-301.

RUSSELL, Bertrand. "Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques ?" *Revue de la Métaphysique et de la Morale*, tome 6, n. 6 (1898), p. 759-776.

RUSSELL, Bertrand. “Les paradoxes de la logique”. *Revue de métaphysique et de morale*, v. 14, n. 5 (1906), p. 627-650.

RUSSELL, Bertrand. “Mathematical logic as based on the theory of types”. *American journal of mathematics*, v. 30, n. 3 (1908), p. 222-262.

RUSSELL, Bertrand. *The Principles of mathematics*. [2nd edition, 8th impression]. London : G. Allen & Unwin, 1964.

RUSSELL, Bertrand. “On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types”. *Proc. Of the London math. Soc.* 2nd ser., 4, 1906a, p. 29-53.

RUSSELL, Bertrand. *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis COUTURAT (1897-1913)*. Edition et commentaire par Anne-Françoise SCHMID. Paris : Édition Kimé, 2001.

SALANSKIS, Jean-Michel. “La littérature entre axiomatique et formalisme”. *Les Temps Modernes*, v. 676, n. 5 (2013), p. 178-197. Disponible sur : <https://doi.org/10.3917/lm.676.0178>.

SCHLAUDT, Oliver. “Louis Couturat, ou une occasion perdue pour une approche sémiotique dans l’épistémologie française”. *Revue de métaphysique et de morale*, v. 90, n. 2 (2016), p. 225-238. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3917/rmm.162.0225>>.

SINACEUR, Hourya. “Du formalisme à la constructivité : le finitisme”. *Revue Internationale de Philosophie*, v. 47, n. 186 (4) (1993), p. 251-283.

SOURIAU, Paul. *Théorie de l’invention*. Paris : Hachette BNF, 1881.

SOUTIF, Ludovic. *Wittgenstein et le problème de l’espace visuel : phénoménologie, géométrie, grammaire*. Paris : J. Vrin, 2011 (Analyse et philosophie).

THORAVAL, Joël. “La question de l’intuition intellectuelle et la philosophie confucéenne contemporaine”, (2005), p. 231-245. Disponible sur : <<https://doi.org/10.3917/rip.232.0231>>.

TILLIETTE, Xavier. *L’intuition intellectuelle de Kant à Hegel*. Paris : J. Vrin, 1995 (Bibliothèque d’histoire de la philosophie).

VIDAL, Clément. *Georg Cantor et la découverte des infinis*. Mémoire de maîtrise, Université Paris 1 (Panthéon-Sorbone), 2003. Disponible sur in [http : // homepage. Vub. ac.be/ clival / writing](http://homepage.vub.ac.be/clival/writing).

WRIGHT, Crispin. *Frege’s conception of numbers as objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983 (Scots philosophical monographs, no. 2).

INDEX DES NOMS

A

Acredolo, 203, 256

Aïte, 176, 256

Ansari, 167, 262

B

Barbu-Roth, 256

Barsalou, 171, 256

Berthoz, 2, 15, 20, 95, 176, 177, 183, 184,
185, 186, 188, 189, 190, 191, 192, 193,
194, 199, 204, 224, 228, 230, 231, 232,
233, 240, 244, 256, 257

Bevan, 158, 261

Blanché, 29, 265

Blayo, 143, 257

Bohbot, 205, 257

Brannon, 162, 258

Brenner, 9, 254

Brisson, 119, 265

Brouwer, 72, 73, 74, 75, 165, 172, 263

Büchel, 265

Butterworth, 158, 261

C

Cantor, 34, 270

Cantù, 117, 254

Carey, 150, 166, 167, 168, 169, 170, 171,
260

Cecchini, 71

Changeux, 2, 15, 20, 20, 141, 142, 143,
144, 145, 146, 147, 148, 150, 151, 152,
153, 154, 163, 176, 208, 209, 210, 211,
238, 258

Combès, 34, 265

Connes, 142, 145, 147, 148, 149, 208, 258

Conty, 176, 258

Couturat, 10, 12, 18, 38, 39, 40, 47, 59,
270

Couturat, 40, 265, 269

Crocco, 18, 254

D

Dagher, 205, 261

Damasio, 15, 20, 175, 176, 177, 178, 179,
181, 182, 183, 219, 220, 239

Dedekind, 150

Dehaene, 2, 15, 20, 151, 154, 156, 157,
158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165,
166, 168, 170, 171, 176, 212, 214, 216,
217, 218, 241, 242, 258, 259

Delbœuf, 114, 265

Denis, 258, 265

Descartes, 146, 174, 177, 179, 220, 258

Detlefsen, 18, 51, 52, 53, 54, 63, 254

Dieudonné, 31, 266

Dubal, 176, 258

Dubner, 188, 259

E

Edelman, 143, 260

Euclide, 28, 29, 30, 136, 266

Evers, 141, 260

F

Fayol, 156, 260

Fechner, 107, 113, 121, 265

Feigenson, 158, 160, 260

Ferrand, 111, 268

Février, 73

Frege, 36, 60, 266, 267, 270

Freksa, 260, 261, 262

G

Gallistel, 156, 166, 260

Gentaz, 114, 260

Gimbert, 159, 162, 260

Goleman, 219

Gonseth, 29, 30, 266

Greffe, 121, 254

Grüsser, 192

Guidry, 162, 264

H

Habel, 261, 262

Hadamard, 81, 82, 84, 208, 210, 254

Halberda, 160, 260

Hartley, 204, 260

Hécaen, 150, 151

Hecan, 150, 261

Heck, 61, 267

Heinzmann, 5, 18, 35, 38, 50, 51, 71, 72,
75, 76, 94, 121, 124, 254, 255

Helmholtz, 43, 82, 94, 254, 268

Hering, 113, 265

Hilbert, 12, 28, 29, 30, 31, 32, 42, 43, 44,
45, 46, 47, 48, 51, 123, 216, 235, 236,
252

Honig, 162, 261

Houzel, 80, 267

Hubel, 187, 261

Hume, 60, 146

Husserl, 190, 267

I

Iaria, 205, 261

Isaac, 267

Izard, 160, 161, 163, 165, 261, 264

J

Jaeger, 162, 264

Janzen, 194

Johnson, 101, 131, 255

Jung, 86, 267

K

Kahneman, 181, 182, 183, 219, 261

Kant, 11, 17, 18, 19, 69, 70, 71, 72, 74, 85,
145, 146, 268, 270

Kawamoto, 149, 261

Keller, 16, 82, 268

Klatzky, 199, 261

Koyré, 34, 267

L

Ladyman, 17, 255
Landerl, 158
Landerl, 158, 261
Le Corre, 167, 168, 169, 261
Lefebvre, 83, 268
Leibniz, 38, 69
Leibovich, 167, 262
Lemer, 160, 262, 264
Lepecq, 200, 262
Lie, 94, 268
Lithfous, 203, 262
Llinás, 263
Locke, 17, 18, 146
Longo, 9, 16, 203, 204, 238, 262
Lowe, 262
Lubart, 82, 87, 268
Ly, 64, 268

M

Mach, 95, 189, 228
Maguire, 204, 260
Mancosu, 60, 268
Mazzocco, 160, 260
Mccomb, 162, 262
Mcnamara, 199, 262
Merker, 94, 268
Miller, 161, 263
Mitchell, 162, 263
Mongin, 29, 32, 33, 268
Mooij, 69, 71, 255

Morgan, 193, 263
Morvan, 187, 263
Murphy, 82, 83, 268

N

Nabonnand, 94, 122, 255
Naccache, 166, 259
Nervous, 263
Nicolas, 111, 268
Nicolle, 81, 268
Nida-rümelin, 260
Nieder, 161, 263

P

Packer, 162, 262
Paillard, 199, 263
Pascal, 70, 268
Patras, 30, 268
Paty, 80, 268
Peano, 29, 32, 47, 255
Pelland, 165, 172, 263
Pepperberg, 162, 263
Petrides, 205, 261
Piaget, 137, 155, 196, 197, 269
Piazza, 163, 165, 259, 264
Pica, 160, 264
Piettre, 119, 269
Platon, 10, 13, 118, 119, 208, 265, 269
Poincaré, 1, 2, 3, 5, 9, 10, 12, 16, 17, 18,
19, 20, 21, 25, 35, 37, 40, 42, 47, 49, 52,
53, 54, 56, 59, 65, 66, 67, 69, 71, 72, 73,
74, 75, 76, 80, 82, 84, 87, 91, 92, 93, 94,

95, 96, 97, 99, 104, 105, 106, 108, 111,
116, 118, 119, 120, 121, 122, 124, 125,
126, 129, 136, 137, 142, 145, 149, 150,
170, 172, 179, 184, 185, 186, 189, 195,
196, 197, 203, 204, 205, 208, 209, 211,
212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219,
220, 224, 228, 229, 230, 231, 232, 233,
237, 240, 241, 242, 243, 244, 247, 252,
253, 254, 255, 256, 268

Pradeau, 119, 265

Pusey, 162, 262

R

Ranck, 193

Ranck, 264

Revkin, 163, 264

Richard, 60, 267

Ristori, 191, 264

Rivenc, 35, 269

Roll, 192, 264

Russell, 9, 10, 12, 18, 34, 37, 38, 40, 47,
54, 216, 252, 254, 255, 256, 266, 269

S

Salanskis, 32, 254, 269

Schlaudt, 39, 270

Schmid, 53, 255

Sinaceur, 150, 163, 165, 166, 264, 270

Soto-Calvo, 159, 264

Soutif, 108, 270

Spelke, 158, 160, 260, 262, 265

Stewart, 162, 261

T

Taube, 193, 264

Thoraval, 18, 221, 270

Tilliette, 85, 270

Torretti, 113, 131, 228, 255

U

Uller, 162, 264

V

verleysen, 257

veronese, 254

vuillemin, 96, 99, 121, 136, 256

W

warwick, 142, 264

weber, 162, 165

wegman, 194

weiller, 204, 265

wender, 260, 261

wiesel, 187, 261

wittgenstein, 108, 270

wolbers, 204, 265

wright, 60, 270

Wynn, 160, 166, 169, 265

X

Xu, 160, 265

Y

Yao, 263

Z

Zahar, 256

Zeki, 188, 189, 259