



**HAL**  
open science

# Turbulence d'ondes de surface, transition vers un régime d'ondes de choc, intermittence et localisation d'Anderson

Guillaume Ricard

► **To cite this version:**

Guillaume Ricard. Turbulence d'ondes de surface, transition vers un régime d'ondes de choc, intermittence et localisation d'Anderson. Physique [physics]. Université Paris Cité, 2023. Français. NNT : 2023UNIP7087 . tel-04548896

**HAL Id: tel-04548896**

**<https://theses.hal.science/tel-04548896v1>**

Submitted on 16 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat  
d'Université Paris Cité

Spécialité : Physique

École doctorale n° 564 : Physique en Île de France

réalisée au

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes

par

**Guillaume RICARD**

sous la direction d'Eric FALCON

pour obtenir le grade de :

Docteur d'Université Paris Cité

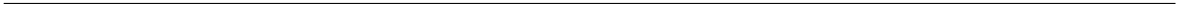
Sujet de thèse :

**TURBULENCE D'ONDES DE SURFACE,  
TRANSITION VERS UN RÉGIME D'ONDES DE CHOC,  
INTERMITTENCE ET LOCALISATION D'ANDERSON**

soutenue le 14 Septembre 2023

Devant le jury composé de

M. Pierre-Philippe CORTET	Chargé de Recherche CNRS	Univ. Paris Saclay	Rapporteur
M. Christophe JOSSERAND	Directeur de Recherche CNRS	École Polytechnique	Rapporteur
Mme Bérengère DUBRULLE	Directrice de Recherche CNRS	CEA Paris-Saclay	Présidente
Mme Agnès MAUREL	Directrice de Recherche CNRS	ESPCI Paris	Examinatrice
M. Nicolas MORDANT	Professeur	Univ. Grenoble Alpes	Examineur
M. Eric FALCON	Directeur de Recherche CNRS	Univ. Paris Cité	Directeur de thèse



## Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier Éric qui m'a encadré pendant ces trois années. Sa disponibilité, sa gentillesse et sa patience m'ont permis d'avoir un encadrement de très grande qualité. Ses conseils scientifiques m'ont guidé tout au long de la thèse et m'ont permis d'énormément progresser. La liberté ainsi que la confiance qu'il m'a accordé ont ainsi contribué à créer un cadre de travail idéal.

Je remercie également les différents membres du jury et notamment les rapporteurs pour le temps qu'ils ont passé à la lecture du manuscrit ainsi que pour les conseils qu'ils m'ont donnés dans leur rapport ou le jour de la soutenance.

Je souhaite aussi remercier Filip et Jules que j'ai côtoyés au quotidien et qui sont devenus des amis. Nos discussions m'ont beaucoup aidé et ont rendu le quotidien très agréable en 767. Je remercie les techniciens Alexandre et Yann qui ont grandement participé à la construction des systèmes expérimentaux, toujours avec gentillesse et professionnalisme. Je remercie Evgeny avec qui j'ai collaboré sur une étude numérique, pour la qualité et la quantité de son travail. Je remercie Julien qui m'a notamment appris à me servir du logiciel pour contrôler le batteur du grand canal et Benjamin avec qui j'ai travaillé sur la conception de nouvelles sondes capacitives. Je remercie l'ensemble des doctorants et post-doctorants de MSC pour leur bonne humeur, leurs conseils et pour les différentes activités scientifiques ou non (verre du jeudi, petit dej, Aussois...) : merci à Alices, Anthony, Camilles, Emillien, Grégoire, Irène, Jean-Baptiste, Johann, Lorjin, Martin, Pierre-Brice, Sélène, Tanu et tous les autres.

Je remercie également les équipes de l'ESA qui m'ont accueilli dans le cadre de vols paraboliques ainsi que celles du PhLAM, de l'École centrale Nantes et du LEGI avec qui j'ai eu la chance de collaborer sur des expériences de grands bassins.

Pour finir, je tiens à remercier ma famille et mes amis qui partagent ma vie depuis des années et qui font de mon quotidien un réel bonheur.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Outils théoriques de la turbulence d'ondes</b>	<b>13</b>
1.1 Ondes de surface	14
1.1.1 Équations générales	14
1.1.2 Relation de dispersion linéaire des ondes de surface	15
1.1.3 Énergie des ondes	18
1.1.4 Mécanismes de dissipation linéaire des ondes	19
1.1.5 Modes propres d'un bassin rectangulaire et discrétisation	20
1.2 Théorie de la turbulence d'ondes faiblement non linéaires	22
1.2.1 Contexte	22
1.2.2 Hypothèses de la turbulence d'ondes	23
1.2.3 Interaction à N-ondes	23
1.2.4 Équation cinétique	27
1.2.5 Solutions de Zakharov	29
1.2.6 Analyse dimensionnelle	30
1.2.7 Brisure de la théorie de la turbulence faible	31
<b>2 Turbulence d'ondes capillaires unidimensionnelles</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction et état de l'art	34
2.1.1 Ondes de gravité	34
2.1.2 Ondes de capillarité	34
2.2 Résumé des résultats obtenus	35
2.3 Article publié dans <i>Europhysics Letters</i> en 2021	37
<b>3 Transition d'un régime de turbulence d'ondes à un régime d'ondes de choc</b>	<b>49</b>
3.1 Turbulence d'ondes acoustiques	50
3.2 Ondes de choc et équation de Burgers	51
3.3 Ferrofluide	52
3.3.1 Caractéristiques	52
3.3.2 Équations générales	53
3.3.3 Fluctuations du champ magnétique	54
3.3.4 Loi de dispersion linéaire des ondes gravito-magnético-capillaires	56
3.4 Résumé des résultats obtenus	57
3.5 Article publié dans <i>Physical Review Fluids</i> en 2023	57
<b>4 Turbulence d'ondes magnétohydrodynamiques anisotropes</b>	<b>81</b>
4.1 Turbulence d'ondes d'Alfvén dans les plasmas	82
4.2 Résumé des résultats obtenus	83
4.3 Article publié dans <i>Physical Review E (Letters)</i> en 2022	83
<b>5 Intermittence en turbulence d'ondes ou en présence d'ondes de choc</b>	<b>97</b>
5.1 Notions théoriques de l'intermittence à petite échelle	98
5.1.1 Outils mathématiques	98
5.2 Intermittence en turbulence hydrodynamique 3D	99
5.2.1 Modèle de Kolmogorov 41	99
5.2.2 Modèle fractal ou modèle- $\beta$	100

5.2.3	Autres modèles et comparaison avec les expériences . . . . .	101
5.3	Intermittence et turbulence d'ondes . . . . .	102
5.3.1	Prédictions théoriques : absence d'intermittence en turbulence faible . . . . .	102
5.3.2	Résultats d'intermittence en turbulence d'ondes expérimentale ou numérique . . . . .	102
5.3.3	Cas de la turbulence faible d'ondes capillaires quasi-1D . . . . .	103
5.4	Intermittence en présence d'ondes de choc . . . . .	105
5.4.1	Modèle en présence de chocs de Burgers . . . . .	105
5.4.2	Résumé des résultats obtenus . . . . .	106
5.5	Article accepté à <i>Physical Review E</i> en 2023 . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Localisation d'Anderson d'ondes de surface hydrodynamiques</b>	<b>117</b>
6.1	Principe et état de l'art . . . . .	118
6.2	Dispositif expérimental . . . . .	119
6.3	Théorie de la localisation d'ondes de surface . . . . .	121
6.3.1	Équations d'hydrodynamiques . . . . .	121
6.3.2	Système avec une unique marche . . . . .	122
6.3.3	Système à N marches . . . . .	123
6.3.4	Loi de dispersion en réseau périodique . . . . .	125
6.4	Résultats expérimentaux . . . . .	126
6.4.1	Signaux expérimentaux . . . . .	126
6.4.2	Spectres spatio-temporels . . . . .	128
6.4.3	Longueur de localisation . . . . .	129
6.4.4	Cas particulier du forçage impulsionnel . . . . .	132
6.5	Conclusion . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Prédictions dimensionnelles de la turbulence faible</b>	<b>145</b>
<b>B</b>	<b>Participation à des expériences sur des grands instruments</b>	<b>151</b>
B.1	Expériences en grands bassins . . . . .	151
B.1.1	Propagation de soliton hydrodynamique bidimensionnel (2D) . . . . .	151
B.1.2	Interaction de gaz de solitons et turbulence intégrable . . . . .	153
B.2	Étude du comportement de milieux granulaires en impesanteur . . . . .	154
	<b>Bibliographie</b>	<b>156</b>

## Liste des publications

1. E. Kochurin, **G. Ricard**, N. Zubarev, E. Falcon, Numerical Simulation of Collinear Capillary-Wave Turbulence, *JETP Letters*, **112**, 757 (2020)
2. **G. Ricard** and E. Falcon, Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence, *Europhysics Letters*, **135**, 64001 (2021)
3. E. Kochurin, **G. Ricard**, N. Zubarev, E. Falcon, Three-dimensional direct numerical simulation of free-surface magnetohydrodynamic wave turbulence, *Physical Review E (Letters)* **105**, L063101 (2022)
4. **G. Ricard** and E. Falcon, Transition from wave turbulence to acousticlike shock wave regime, *Physical Review Fluids*, **8**, 014804 (2023)
5. **G. Ricard** and E. Falcon, Experimental evidence of random shock-wave intermittency, *In press in Physical Review E (Letters)*, (2023)

# Introduction



## Compréhension des ondes

Une onde est définie comme la propagation d'une perturbation qui transporte de l'énergie dans un milieu. Cette perturbation se déplace à une vitesse déterminée par les caractéristiques du milieu considéré. Ce mécanisme est omniprésent dans l'univers et se produit dans des milieux de nature très variée et à des échelles de temps et d'espace considérablement différentes [1, 2]. Nous pouvons par exemple citer les ondes acoustiques (fluctuations de pression sur quelques centimètres) qui permettent aux sons de se déplacer dans l'air, les ondes électromagnétiques (fluctuations du champ électromagnétique sur quelques nanomètres) qui permettent à la lumière de traverser le vide ou même les ondes gravitationnelles (fluctuation de l'espace-temps de l'ordre de  $10^{-13}$  mètre). Un autre type d'ondes bien connu est les ondes à la surface des liquides (e.g., les vagues océaniques), ces dernières ont pour grand avantage d'être facilement observables à l'œil nu en évoluant à des échelles et à des vitesses raisonnables dans la nature ou en laboratoire (typiquement du millimètre à la centaine de mètres).

La description mathématique la plus simple des ondes est une théorie linéaire. Par l'utilisation de plusieurs approximations, cette théorie permet d'aboutir à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires qui régissent le système. Les célèbres équations d'Alembert ou de Laplace en sont des exemples. Ce régime permet d'aboutir facilement à des solutions analytiques mais est valide seulement dans le cas d'un très faible nombre d'ondes et de faibles amplitudes. Dans la nature, les ondes n'ont que très rarement un tel comportement. A la surface des océans par exemple, les ondes formées par le vent sont présentes en très grand nombre et avec des amplitudes très variées pouvant être importantes. La théorie linéaire n'est alors pas suffisante pour décrire un tel système. Au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle, Stokes développa de nouvelles théories afin de prendre en compte les non-linéarités [3], ces travaux ont été complétés tout au long du XX<sup>ème</sup> siècle [4-6]. Ces théories sont basées sur des approches perturbatrices et sur la modulation des ondes, elles prévoient l'émergence de solitons, de déferlements ou d'instabilités modulationnelles. Elles permettent également de prévoir des interactions entre ondes faiblement non linéaires, par exemple deux ondes de longueur d'ondes différentes peuvent interagir non linéairement pour donner naissance à une onde de longueur d'onde différente ou inversement une seule onde peut se déstabiliser en deux autres ondes de longueurs d'onde différentes. Néanmoins, ces théories des interactions non linéaires déterministes sont envisageables lorsqu'un faible nombre d'ondes est mis en jeu. Pour un système analogue à la surface de l'océan, où un très grand nombre d'ondes non linéaires interagissent, l'utilisation d'une théorie déterministe n'est pas possible.



FIGURE 1 : Photographie de l'océan à Hendaye, réalisée en août 2021, où un grand nombre d'ondes non linéaires apparaissent.

Dans les années 1960, Hasselmann propose une nouvelle théorie statistique en s'intéressant aux spectres d'énergie des ondes à la surface des océans [7]. Quelques années plus tard, le problème est résolu, le spectre de ce régime stationnaire hors équilibre est analytiquement prédit et généralisé à tous types d'ondes par Zakharov : la turbulence d'ondes est née [8-13]. Ce phénomène, capable de décrire les systèmes comprenant un grand nombre d'ondes faiblement non linéaires, est décrit par la théorie de la turbulence faible et est qualitativement similaire à la turbulence hydrodynamique. Afin de comprendre sa phénoménologie, il est d'abord important de comprendre le fonctionnement de la turbulence hydrodynamique.

## Turbulence hydrodynamique

La description de l'écoulement d'un fluide est basée sur la valeur du nombre de Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu}$ , avec  $U$  la vitesse typique de l'écoulement,  $L$  sa taille typique et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide [14]. A faible  $Re$  l'écoulement est dit laminaire et les lignes de champ sont lisses tandis qu'à fort  $Re$  une transition apparaît et l'écoulement devient turbulent, il est alors composé de nombreux tourbillons de tailles différentes (voir figure 2). Le phénomène de turbulence est très compliqué à décrire notamment car il est basé sur les équations de Navier-Stokes qui ne possèdent à ce jour aucune solution analytique.

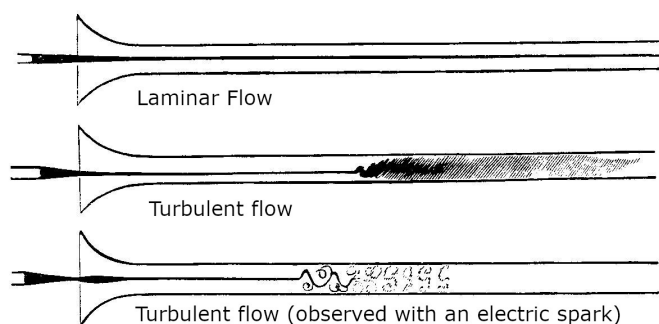


FIGURE 2 : Image de l'expérience d'Osborne Reynolds sur la transition entre des régimes laminaires et turbulents [14].

Néanmoins en 1922, Richardson propose une description simple de la turbulence. L'énergie injectée à grande échelle ne peut se dissiper car la viscosité n'a pas d'impact suffisant à ces grandes échelles. Elle est alors contrainte de cascader vers les petites échelles sous la forme de tourbillons de plus en plus petits jusqu'à ce que leur taille soit suffisante (taille de Kolmogorov correspondant à  $Re \sim 1$ ) pour que la viscosité puisse dissiper l'énergie sous forme de chaleur. Cette phénoménologie est accompagnée dans les années 1940 par les travaux de Kolmogorov qui montrent, par une analyse dimensionnelle, que l'énergie suit la célèbre cascade de Kolmogorov  $E(k) \sim k^{-5/3}$  [15]. Cette prédiction a par la suite été validée par un très grand nombre d'expériences et de simulations numériques.

## Turbulence d'ondes

La turbulence d'ondes est, quant à elle, un phénomène comparable à la turbulence hydrodynamique. La différence principale réside dans le fait que la cascade entre l'échelle de forçage et celle de dissipation se fait sous la forme d'ondes d'échelles de plus en plus petites [voir figure 3(a)]. L'autre différence majeure est l'existence de la théorie de la turbulence faible qui, mal-

gré de nombreuses approximations, offre des résultats purement analytiques et pas seulement basés sur des prédictions dimensionnelles. La théorie de la turbulence faible permet ainsi de quantifier le spectre d'énergie tel que  $E(k) \sim k^{-\mu}$  avec  $\mu$  un nombre positif dépendant du système d'ondes considéré [voir figure 3(b)]. L'une des grandes réussites de la turbulence faible, en plus d'avoir des solutions analytiques, est que son application ne se restreint pas aux ondes de surface mais fonctionne pour n'importe quel système d'ondes faiblement non linéaires (ondes d'Alfvén dans les plasmas, ondes élastiques dans les plaques, ondes internes dans l'océan ou l'atmosphère, ondes gravitationnelles dans l'univers primordial, ondes de Kelvin le long d'un tourbillon, ondes électromagnétiques dans les lasers...) [11-13].

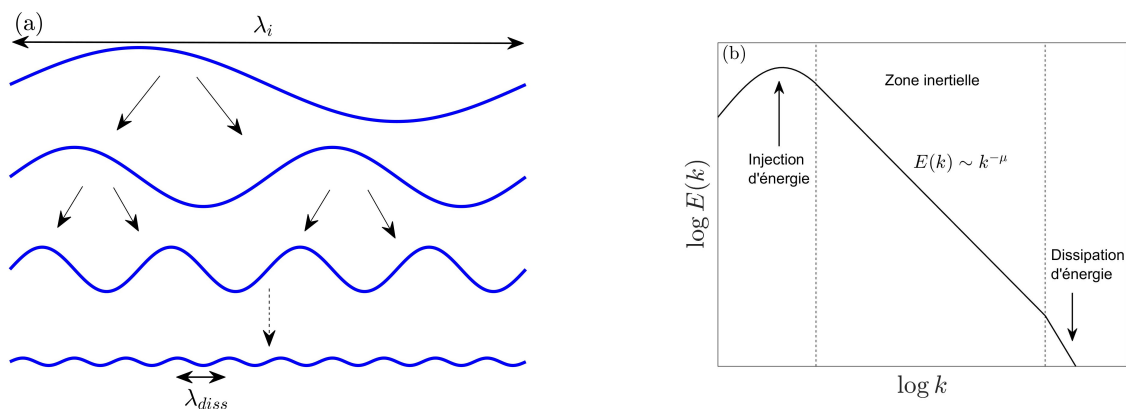


FIGURE 3 : (a) Schéma de la cascade d'ondes de l'échelle d'injection  $\lambda_i$  jusqu'à l'échelle dissipative  $\lambda_{diss}$ . (b) Schéma du spectre d'énergie des ondes en loi de puissance du nombre d'onde  $k$  dans la zone inertielle (entre le forçage à grande échelle et dissipation à petite échelle).

Contrairement à la turbulence hydrodynamique, dont la cascade d'énergie a été largement validée par l'expérience au cours des dernières décennies, les premières expériences de turbulence d'ondes ne sont apparues qu'au début des années 2000. Des mesures expérimentales ont notamment été effectuées dans le cas des ondes gravito-capillaires à la surface de liquides [16-21], des ondes élastiques dans des plaques [22-25], des ondes hydro-élastiques [26], des ondes internes dans un liquide [27-29], des ondes inertielles dans des fluides en rotation [30]. Les expériences en turbulences d'ondes sont d'une grande importance car elles permettent de montrer dans quelle gamme de paramètres la théorie de la turbulence faible est valide ou non. Cette théorie faisant appel à de nombreuses approximations (système de taille infini, faible non-linéarité, ondes dispersives, propagation homogène et anisotrope...), il est également crucial de les tester afin d'en voir leurs limites et de découvrir d'éventuelles transitions vers de nouveaux régimes brisant la turbulence faible. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser, à la turbulence d'ondes de surface ainsi qu'à ses limites d'application engendrées par des effets non dispersifs. Tout d'abord, nous mettons en place un système de turbulence d'ondes capillaires unidimensionnel. Cette dimension de propagation des ondes est inédite expérimentalement en turbulence d'ondes et facilite grandement les mesures et les prédictions numériques. Ce système d'ondes de surface sera ensuite utilisé pour tester le rôle de la dispersion sur la turbulence d'ondes. La turbulence faible n'étant a priori valide que pour des ondes dispersives, il est intéressant de se demander comment évolue le système s'il devient non dispersif. La turbulence d'ondes peut-elle trouver un autre moyen de distribuer son énergie vers les petites échelles? Ou au contraire l'énergie se retrouve-t-elle localisée dans des structures cohérentes (solitons, ondes de choc)? Ces questions sont de manière générale très ouvertes et peuvent s'appliquer à n'importe quels systèmes non dispersifs (acoustique, ondes d'Alfvén dans les plasmas, ondes électromagnétiques...). Nous y répondrons ici dans le cas d'un système d'ondes de surface expérimental unidimensionnel et dans un autre numérique et

bidimensionnel. Nous étudierons ensuite les effets de l'intermittence [31] en testant, d'une part, le régime de turbulence faible capillaire et, d'autre part, en montrant sa forte présence dans le régime d'ondes de choc. Enfin, dans une dernière partie, nous nous concentrerons sur un autre phénomène d'interactions entre ondes : la localisation d'Anderson [32, 33]. Ce phénomène, très peu étudié pour des ondes de surface, sera mis en évidence dans le cas d'ondes linéaires et ses limites pour des ondes non linéaires seront exposées.

## Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en 7 chapitres permettant notamment de mettre en place un système de turbulence d'ondes expérimental et d'observer la transition vers de nouveaux régimes. Le **chapitre 1** décrit les principaux outils théoriques utilisés dans cette thèse pour les ondes de surface [1, 2] et de la turbulence d'ondes ainsi que ses limites d'application [11, 13].

Le **chapitre 2** est consacré à un système expérimental de turbulence d'ondes capillaires quasi-1D [34]. Cette géométrie de propagation est, pour la première fois, testée expérimentalement en turbulence d'ondes et montre un bon accord avec la théorie de la turbulence faible unidimensionnel.

Le **chapitre 3** présente une transition expérimentale entre le régime de turbulence d'ondes quasi-1D du chapitre 2 et un régime non dispersif [35]. Un tel régime est obtenu à la surface d'un fluide magnétique (ferrofluide) soumis à un fort champ magnétique extérieur. La non-dispersivité du système conduit à l'apparition d'ondes de choc non dispersives. Ces structures cohérentes deviennent le principal acteur du système en contrôlant notamment le spectre d'énergie.

Le **chapitre 4** présente des simulations numériques réalisées en collaboration avec Evgeny Kochurin [36]. Cette étude montre une transition entre un régime de turbulence d'ondes capillaires 2D et un régime non dispersif anisotrope d'ondes magneto-capillaires [36]. Ce dernier régime présente une forte analogie qualitative et quantitative avec la turbulence d'ondes d'Alfvén anisotrope dans les plasmas [37].

Le **chapitre 5** est consacré à la première observation et la caractérisation de l'intermittence dans le régime dominé par des ondes de choc à la surface d'un fluide décrit dans le chapitre 3 [38]. Nous discutons aussi de l'intermittence dans le système de turbulence d'ondes capillaires de faibles amplitudes du chapitre 2, qui est comparée à la prédiction théorique de la turbulence faible [39].

Le **chapitre 6** est différent des précédents, car il ne porte pas sur la turbulence d'ondes. Ce chapitre est consacré à un autre dispositif expérimental développé pour mettre en évidence la localisation d'Anderson d'ondes de surface en régime linéaire et non linéaire. Les travaux, bien que préliminaires, montrent des résultats satisfaisants en accord avec les prédictions théoriques.

Le **chapitre 7** sert de conclusion à cette thèse et présente les différentes perspectives envisageables dans le futur.

L'**annexe A** permet de résumer les résultats d'analyse dimensionnelle de la turbulence d'ondes dans le cas général et dans les exemples d'ondes de gravité et d'ondes capillaires. Les spectres d'énergie ainsi que plusieurs transitions brisant la théorie de la turbulence faible sont notamment développés.

L'**annexe B** présente plusieurs expériences sur des grands instruments auxquelles j'ai collaboré. Une expérience dans un grand bassin en eau peu profonde à Grenoble montre des résultats sur la formation de solitons bidimensionnels. Une deuxième porte sur l'étude de gaz de solitons dans un canal unidimensionnel à Nantes. Enfin, une troisième porte sur l'étude de milieux granulaires en micro-gravité.



## **Chapitre 1**

# **Outils théoriques de la turbulence d'ondes**

Ce chapitre consiste en une brève introduction à la théorie des ondes de surface et de la turbulence d'ondes. Il est inspiré des travaux de thèse de Luc Deike [40], de Quentin Aubourg [41], de Roumaïssa Hassaini [42] et d'Annette Cazaubiel [43]. Une première partie est consacrée aux ondes de surface tandis qu'une seconde se focalise sur la turbulence d'ondes et notamment sur la théorie de la turbulence faible.

## 1.1 Ondes de surface

Dans cette partie, nous rappelons la théorie linéaire des ondes à la surface d'un fluide. Cette théorie, basée sur l'équation fondamentale de Navier-Stokes, permet d'obtenir notamment la relation de dispersion des ondes de surface gravito-capillaires et de définir la variable d'énergie des ondes [1, 2]. La dissipation des ondes ainsi que les modes propres de bassin seront également discutés afin d'être utilisés dans les différentes parties de la thèse.

### 1.1.1 Équations générales

Afin de comprendre la physique des ondes à la surface d'un liquide, il faut partir des équations fondamentales de l'hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes. Malgré l'absence de solutions analytiques, ces équations restent le meilleur outil pour décrire le mouvement d'un ou de plusieurs fluides. Nous considérons ici deux fluides séparés par une interface libre, le premier (typiquement de l'eau) est de densité  $\rho$  nettement supérieure à celle du second (typiquement de l'air). Le liquide de profondeur  $h$  est caractérisé par sa tension de surface  $\gamma$  et sa viscosité cinématique  $\nu$ , il est considéré comme étant un fluide idéal et incompressible. Ce fluide évolue dans un espace  $(x, y, z)$  soumis à l'accélération de la pesanteur  $g$  (voir figure 1.1) et respecte les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \delta_S \mathbf{n} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

avec  $p(x, y, z, t)$  la pression et  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  le vecteur vitesse d'une particule de fluide. Les termes de la partie droite de l'équation (1.1) sont respectivement dus aux variations de pression, à la force de pesanteur, à la tension de surface et à la viscosité. Le terme de tension de surface s'applique uniquement au niveau de l'interface eau-air,  $\delta_S$  est en effet une distribution de Dirac sur la surface et  $\mathbf{n}$  est son vecteur normal. Ce terme correspond à un saut de pression à l'interface entre les deux fluides et peut s'écrire avec la loi de Laplace :  $p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{n}) = \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbures.

Étudier les ondes à la surface d'un liquide revient à étudier l'évolution de l'interface  $\eta(x, y, t)$ . Nous considérons dans ce qui suit, que l'écoulement est irrotationnel ainsi qu'un liquide de viscosité nulle  $\nu = 0$  et à surface libre au repos en  $z = 0$  (i.e.,  $p = 0$  dans l'air). Nous définissons le potentiel vitesse  $\phi$  tel que  $\nabla \phi = \mathbf{u}$ , les équations de la surface s'écrivent alors [5] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 &= -\frac{p}{\rho} - gz + \frac{\gamma}{\rho} \kappa, \\ \nabla^2 \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

avec  $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$  la courbure de l'interface telle que :

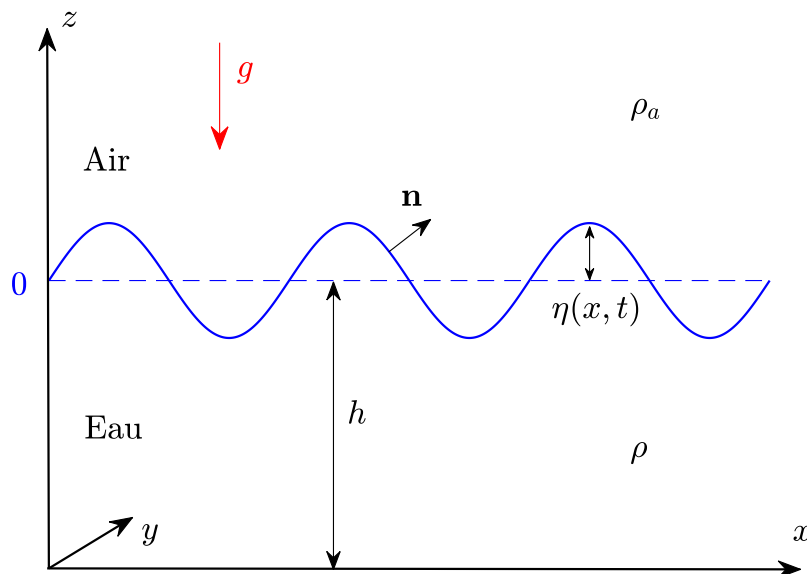


FIGURE 1.1 : Schéma représentant le système considéré.

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}}, 1 \right). \quad (1.3)$$

Pour obtenir l'équation de l'interface  $\eta(x, y, t)$  nous utilisons l'équation (1.2) et les conditions aux limites : (i) la surface étant libre  $p = 0$  dans l'air donc aussi à l'interface  $z = \eta$ , (ii) par conservation de la masse nous avons donc  $\frac{D\eta}{Dt} = u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{\eta}$  à l'interface  $z = \eta$ , enfin (iii) la vitesse s'annule au fond donc  $u_{z=-h} = \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=-h} = 0$ . Ce qui donne les équations pour l'interface :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + gz - \frac{\gamma}{\rho} \kappa &= 0, & \text{en } z = \eta, \\ \nabla^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = \eta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = -h. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Le système d'équations (1.4) contrôle ainsi les ondes à la surface d'un fluide. Les ondes de Stokes (ondes de gravité), les ondes capillaires ou les solitons sont des exemples de solutions de ce système d'équations.

### 1.1.2 Relation de dispersion linéaire des ondes de surface

Maintenant que les équations fondamentales des ondes à la surface d'un fluide sont établies, nous allons les utiliser afin de trouver la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires, c'est-à-dire



le lien entre la fréquence et la longueur d'ondes des ondes de surface. Pour cela, nous nous intéressons simplement aux solutions linéaires du problème. La courbure  $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$  a pour expression  $\kappa = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$  en utilisant l'équation (1.3) linéarisée. Le système (1.2) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{p}{\rho} - gz + \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \\ \nabla^2 \phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les solutions linéaires correspondant à des faibles courbures des ondes, les solutions en  $z = \eta$  sont équivalentes à celles en  $z = 0$ , les équations (1.4) linéarisées correspondent alors à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) &= 0, \quad \text{en } z = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \quad \text{en } z = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \quad \text{en } z = -h. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nous pouvons ainsi résoudre simplement le système d'équations (1.6) en supposant des ondes harmoniques :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \varphi(z) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \\ \eta(x, y, t) &= \eta_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{x} = (x, y)$  le vecteur position,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  le vecteur d'onde lié à la longueur d'onde  $\lambda$  par  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\omega$  la pulsation de l'onde liée à sa fréquence  $f$  par  $\omega = 2\pi f$ . Nous injectons la solution harmonique d'équation (1.7) dans l'équation de Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$ , ce qui donne l'équation de Helmholtz pour  $\varphi(z)$  :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - k^2 \varphi = 0, \quad (1.8)$$

où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  est le module du vecteur d'onde. Cette équation admet pour solution :

$$\varphi(z) = \varphi_0 \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}. \quad (1.9)$$

Les ondes harmoniques de l'équation (1.7) en prenant en compte (1.9) sont injectées dans le système linéaire (1.6), ce qui donne :

$$\begin{aligned} -i\omega\varphi_0 + \eta_0 \left( g + \frac{\gamma}{\rho} \right) k^2 &= 0, \\ -i\omega\eta_0 - \varphi_0 k \tanh(kh) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

En utilisant ces deux nouvelles équations, nous obtenons la loi de dispersion gravito-capillaire :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh). \quad (1.11)$$

Cette relation relie ainsi directement la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  à la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Tout au long de cette thèse, nous nous placerons, sauf mention contraire, dans l'approximation d'eau profonde

où  $kh \gg 1$ , ce qui implique  $\tanh(kh) \approx 1$ . La relation de dispersion peut alors se réécrire plus simplement sous la forme :

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (1.12)$$

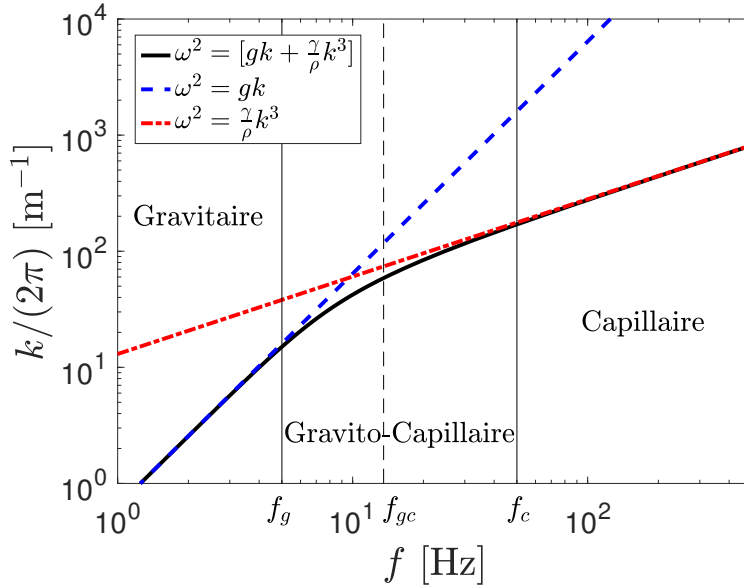


FIGURE 1.2 : Traits pleins noirs : relation de dispersion gravito-capillaire dans le cas de l'eau. Tirets bleus : relation de dispersion gravitaire pure. Tirets-points rouges : relation de dispersion capillaire pure. Échelles log-log.

La relation (1.12) comporte donc deux termes : un de gravité et un de capillarité. Une transition entre les deux régimes apparaît autour de la fréquence  $f_{gc}$  et du nombre d'onde  $k_{gc}$  :

$$f_{gc} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^{1/4} g^{3/4}, \quad (1.13)$$

$$k_{gc} = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}.$$

Notons que  $l_{gc} = \frac{1}{k_{gc}}$  est la longueur capillaire du liquide. Nous définissons  $f_c$ , la fréquence telle que pour  $f > f_c$  le terme capillaire  $\frac{\gamma}{\rho} k^3$  contribue pour plus 95% de la relation de dispersion (1.2). De la même manière, nous définissons  $f_g$ , la fréquence telle que pour  $f < f_g$  le terme de gravité contribue pour plus 95% de (1.2). En considérant des ondes de très basses fréquences  $f < f_g \ll f_{gc}$  nous obtenons un système d'ondes de gravité pur avec  $\omega^2 = gk$  en revanche avec des hautes fréquences  $f > f_c \gg f_{gc}$  nous obtenons un système d'ondes capillaires pur avec  $\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3$ . Dans le cas où les fréquences considérées sont du même ordre de grandeur que  $f_{gc}$  les deux termes de la relation de dispersion (1.12) doivent être pris en compte. La relation de dispersion complète ainsi que les régimes purs sont tracés sur la figure 1.2 dans le cas de l'eau ( $\gamma = 72$  mN/m),  $f_{gc} \approx 13$  Hz (i.e.,  $\lambda_{gc} \approx 1.7$  cm),  $f_c \approx 50$  Hz (i.e.,  $\lambda_c \approx 0.6$  cm) et  $f_g \approx 5$  Hz (i.e.,  $\lambda_g \approx 6.5$  cm). Nous observons que les échelles accessibles classiquement en laboratoire (entre 1 et 100 Hz) impliquent de souvent travailler à l'interface gravito-capillaire. Cette dualité pose problème car elle complexifie significativement les équations théoriques en empêchant même dans certains cas l'existence de solutions analytiques (comme nous le verrons dans le cas de la turbulence d'ondes faiblement non linéaires).

Privilégier un des deux régimes peut être néanmoins envisageable, mais le rapport  $\frac{\gamma}{\rho}$  étant à peu près constant pour tous les liquides, il n'est pas possible de déplacer aisément (en gardant  $g$  constant) la valeur de la transition gravito-capillaire. Plusieurs méthodes expérimentales parfois contraignantes existent afin de contourner ce problème. Pour avoir un régime gravitaire, il est possible de travailler avec des tailles de bassin importantes [44-46] ou en hyper-gravité [19]. Pour obtenir un régime purement capillaire, il est possible de travailler en micro-gravité [47] ou d'utiliser un liquide très peu visqueux afin d'explorer les petites échelles [34].

### 1.1.3 Énergie des ondes

Nous nous intéressons maintenant à l'énergie transportée par les ondes de surface. Celle-ci s'exprime sous la forme de trois termes : l'énergie cinétique  $E_c$ , l'énergie potentielle de gravité  $E_g$  et l'énergie de surface  $E_s$  (donnée dans l'approximation d'une onde harmonique) :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int \rho |\nabla \phi|^2 dx dy dz, \\ E_g &= \frac{1}{2} \int \rho g \eta^2 dx dy, \\ E_s &= \frac{1}{2} \int \gamma |\mathbf{k}|^2 \eta^2 dx dy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dans l'espace de Fourier, nous définissons  $\eta_{\mathbf{k}}$  la transformée de Fourier de l'interface  $\eta(x, y)$  telle que :

$$\eta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \eta(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (1.15)$$

Les termes des énergies potentielles s'écrivent dans cet espace :

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{1}{2} \int \rho g |\eta_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}, \\ E_s &= \frac{1}{2} \int \gamma k^2 |\eta_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ces quantités souvent utilisées dans les calculs théoriques sont peu adaptées pour des expériences. Pour cela, il est judicieux de se ramener à une dimension en utilisant le lien entre les spectres à une et deux dimensions  $\int |\eta_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k} = \int |\eta_k|^2 dk$  car  $d\mathbf{k} = 2\pi k dk$  et  $|\eta_k|^2 = 2\pi k |\eta_{\mathbf{k}}|^2$ . Les énergies potentielles peuvent donc s'écrire plus simplement :

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{1}{2} \int \rho g |\eta_k|^2 dk, \\ E_s &= \frac{1}{2} \int \gamma k^2 |\eta_k|^2 dk. \end{aligned} \quad (1.17)$$

On définit ensuite la densité spectrale d'énergie, par unité de masse, qui peut être facilement obtenue par une mesure du spectre des variations de l'interface  $\eta_k$ , comme :

$$\begin{aligned} E_k^g &= \frac{1}{2L_x L_y} g |\eta_k|^2, \\ E_k^c &= \frac{1}{2L_x L_y} \frac{\gamma}{\rho} k^2 |\eta_k|^2, \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions où la mesure a lieu au sein du bassin. Expérimentalement, nous mesurerons directement la densité spectrale des variations de la hauteur des ondes :

$$S_\eta(k) = \frac{1}{L_x L_y} |\eta_k|^2, \quad (1.19)$$

Il est possible de revenir aux densités spectrales d'énergie  $E_k$  avec les relations :

$$\begin{aligned} E_k^g &= \frac{1}{2} g S_\eta^g(k), \\ E_k^c &= \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\rho} k^2 S_\eta^c(k). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Il nous arrivera d'utiliser de mesures temporelles (souvent mieux résolues) de l'élévation de la surface, pour cela nous utiliserons une densité spectrale temporelle :

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{\mathcal{T}} |\eta_\omega|^2, \quad (1.21)$$

où  $\mathcal{T}$  est la durée de la mesure. Les domaines fréquentiel et spatial sont liés par la relation de dispersion telle que  $S_\eta(k) dk = S_\eta(\omega) d\omega$  et  $E_k dk = E_\omega d\omega$ . Le lien avec les spectres d'énergie temporels est donc :

$$\begin{aligned} E_\omega^g &= \frac{1}{2} g S_\eta^g(\omega), \\ E_\omega^c &= \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\rho} k^2 S_\eta^c(\omega). \end{aligned} \quad (1.22)$$

#### 1.1.4 Mécanismes de dissipation linéaire des ondes

Nous présenterons ici rapidement les différentes sources de dissipation linéaire des ondes de surface. Plus de détails notamment sur les calculs des taux de dissipation sont disponibles dans [40, 48, 49] basés sur les travaux de Lamb et Miles [1, 50]. La dissipation des ondes de surface a lieu à cause de la viscosité non nulle du liquide qui dissipe de l'énergie dans les couches limites (limites à la surface, au fond ou sur les parois du bassin). La dissipation étant supposée linéaire, la hauteur des ondes décroît de manière exponentielle au cours du temps telle que :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_0 e^{i(\mathbf{kx} - \omega t)} e^{-t/\tau_{diss}}, \quad (1.23)$$

avec  $\tau_{diss}$  le temps caractéristique de la dissipation et  $\eta_0$  l'amplitude initiale de l'onde. Ce temps peut être calculé en utilisant les équations fondamentales de l'hydrodynamique et dépend du type de dissipation :  $\tau^a$  pour une surface libre,  $\tau^S$  pour une surface avec un film inextensible d'épaisseur infinitésimale (surface contaminée) et  $\tau^L$  pour une dissipation par les bords. Ces deux derniers dépendent de la géométrie du bassin utilisé, dans le cas d'un bassin rectangulaire de tailles  $L_x$ , et  $L_y$  avec une hauteur de liquide  $h$  profonde ( $kh \gg 1$ ), nous avons :

$$\begin{aligned} \tau^a &= \frac{1}{2\nu k^2}, \\ \tau^S &= \frac{2\sqrt{2}}{k\sqrt{\nu\omega}}, \\ \tau^L &= \frac{2\sqrt{2}L_x L_y}{3\sqrt{\nu\omega}(L_x + L_y)}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

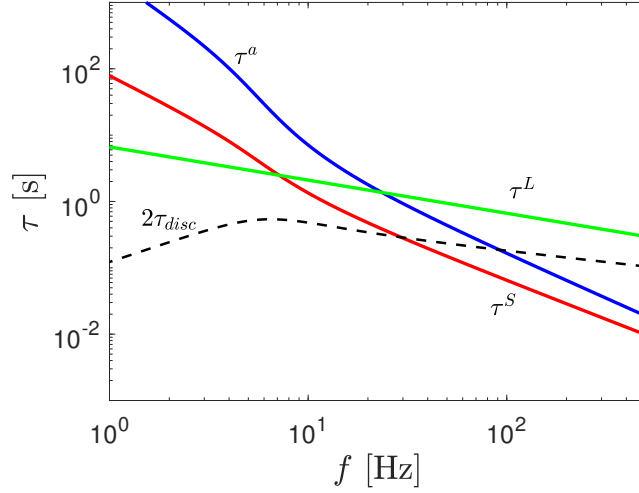


FIGURE 1.3 : Temps de dissipation des équations (1.24) et du temps de discrétisation  $2\tau_{disc}$  de l'équation (1.30) en fonction de la fréquence dans le cas de l'eau.  $L_x = 15$  cm,  $L_y = 2$  cm et  $h = 2$  cm.

Les différents temps de dissipation des équations (1.24) sont représentés sur la figure 1.3 dans le cas d'un bassin rectangulaire  $L_x = 15$  cm,  $L_y = 2$  cm rempli d'eau sur  $h = 2$  cm (dimensions typiques utilisées par la suite). Cette figure montre qu'à l'exception des basses fréquences ( $f < 7$  Hz) le temps de dissipation pour une surface avec un film inextensible  $\tau^S$  est le seul à prendre en compte, les autres effets dissipatifs sont négligeables. Des résultats similaires sont obtenus dans le cas des autres fluides utilisés dans cette thèse. Afin de pouvoir observer la dynamique des ondes, il faut que les effets à observer (de temps caractéristique  $\tau^*$ ) aient lieu avant ces effets dissipatifs soit :

$$\tau^* \ll \tau_{diss}. \quad (1.25)$$

### 1.1.5 Modes propres d'un bassin rectangulaire et discrétisation

Comme dans de nombreux systèmes physiques confinés dans une boîte, les modes propres d'un bassin sont présents sous la forme d'ondes de surface de fréquences spécifiques. Dans le cas d'un bassin rectangulaire de taille  $L_x$  et  $L_y$ , ces modes peuvent être calculés en imposant une vitesse tangentielle nulle aux parois :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0. \quad (1.26)$$

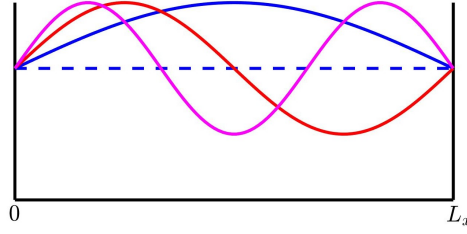
Cette contrainte dans l'espace de Fourier conduit à une discrétisation des modes dont les vecteurs d'ondes s'écrivent [1] :

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) = \left( \frac{n\pi}{L_x}, \frac{m\pi}{L_y} \right), \quad (1.27)$$

avec  $n$  et  $m$  des entiers naturels. Les modes propres du bassin rectangle s'écrivent donc :

$$k = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L_y} \right)^2}. \quad (1.28)$$

Ils peuvent être facilement schématisés dans le cas d'un système quasi unidimensionnel (i.e.,  $L_x \gg L_y$ , voir figure 1.4).


 FIGURE 1.4 : Schémas des trois premiers modes propres d'un bassin unidimensionnel,  $n = 1, 2, 3$ .

Certaines fréquences spécifiques sont ainsi présentes à cause des effets de taille finie, ces effets peuvent masquer une partie des effets à observer. Afin de les quantifier nous pouvons utiliser le temps de discrétisation  $\tau_{disc}$ . Il est défini comme le nombre de modes propres présents dans une bande de fréquence divisé par la largeur de cette bande, ce qui correspond à [21, 46] :

$$\tau_{disc} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \Delta k \right)^{-1} \approx \frac{1}{\Delta \omega}, \quad (1.29)$$

avec  $\Delta k = \frac{\pi}{L_x}$  et  $\Delta \omega$  les séparations entre deux modes propres adjacents. Ce qui donne dans le cas gravito-capillaire unidimensionnel :

$$\tau_{disc} = \frac{L_x}{\pi} \frac{2\omega}{g + 3\frac{\gamma}{\rho} k^2}, \quad (1.30)$$

tracé en pointillés sur la figure 1.3 pour  $L_x = 15$  cm. Les effets de discrétisation peuvent être négligeables si le temps caractéristique des effets à observer  $\tau^*$  est inférieur à deux fois celui de la discrétisation  $2\tau_{disc}$ . Le facteur 2 s'explique en comparant la largeur fréquentielle  $\delta\omega^* = 1/\tau^*$  d'un mode propre par rapport à la séparation fréquentielle  $\Delta\omega$  entre deux modes propres adjacents, comme illustré sur la figure 1.5. Trois modes propres espacés de  $\Delta\omega$  de largeur  $\delta\omega^*$  sont représentés avec leur somme. Si  $\Delta\omega/2 > \delta\omega^*$  [figure 1.5(a)] alors le recouvrement des modes propres n'est pas suffisant et la discrétisation est visible dans la somme des spectres. En revanche, dans le cas contraire [figure 1.5(b)] le recouvrement empêche à la discrétisation d'apparaître dans le spectre, rendant les effets de taille finie négligeables. Pour s'affranchir des effets de taille finie, il faut donc respecter :

$$\tau^* < 2\tau_{disc}. \quad (1.31)$$

Dans le cas de l'eau avec  $L_x = 15$  cm, cette condition est, pour  $f < 28$  Hz, plus difficile à respecter que la condition sur les effets dissipatifs de l'équation 1.25 (voir figure 1.3). Dans les faits nous chercherons à respecter  $\tau^* \ll \tau_{disc}$

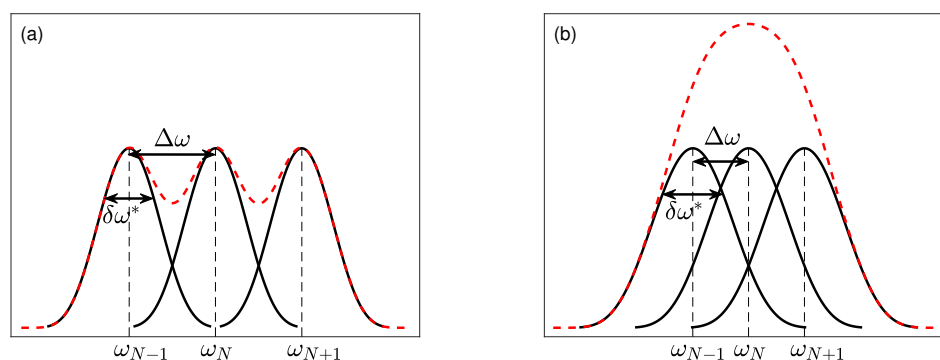


FIGURE 1.5 : Représentation schématique d'un spectre de puissance avec trois modes propres successifs (traits pleins noirs) de largeur  $\delta\omega^*$  et espacés de  $\Delta\omega$  et de leur somme (pointillés rouges). (a) :  $\delta\omega^* < \Delta\omega/2$  le recouvrement n'est pas suffisant, la discrétisation est visible. (b)  $\delta\omega^* > \Delta\omega/2$  le recouvrement est suffisant, la discrétisation n'apparaît pas dans la somme du spectre.

## 1.2 Théorie de la turbulence d'ondes faiblement non linéaires

Dans cette partie, nous allons présenter les principaux outils mathématiques développés par la théorie de la turbulence faible (TTF) afin de décrire les phénomènes de turbulence d'ondes faiblement non linéaires [11, 13].

### 1.2.1 Contexte

En 1941, Kolmogorov propose, grâce à une analyse dimensionnelle et des hypothèses de similarité, la célèbre loi d'échelle de la cascade d'énergie en turbulence hydrodynamique [15]. Malgré l'absence de solutions analytiques, ce résultat connaît un grand succès en étant vérifié dans de nombreux systèmes expérimentaux et numériques. Il prévoit que l'énergie injectée à grande échelle dans un système turbulent cascade de proche en proche dans la zone inertielle sous la forme de tourbillons de plus en plus petits. Une fois la taille suffisamment faible (échelle de Kolmogorov) la dissipation visqueuse peut avoir lieu. Cette cascade est quantifiée par le spectre de Kolmogorov  $E \sim k^{-5/3}$ . Dans les années 60, une théorie nommée théorie de la turbulence faible, inspirée par les résultats de Kolmogorov, est proposée par Zakharov [8, 10, 12]. Contrairement à la théorie de turbulence hydrodynamique, elle possède des solutions analytiques provenant de la dérivation d'une équation cinétique qui décrit le phénomène de turbulence d'ondes faiblement non linéaires.

Les différents résultats présentés jusqu'à présent ont admis la linéarité et un faible nombre d'ondes de surface. Dans la nature, de nombreux systèmes présentent un grand nombre d'ondes aléatoires non linéaires (ondes à la surface des océans, par exemple). Afin de décrire de tels systèmes, la turbulence d'ondes propose une théorie statistique prévoyant une cascade d'énergie auto-similaire similaire à celle de la turbulence hydrodynamique. Le mécanisme contrôlant cette cascade est l'interaction résonnante entre ondes : des ondes à grandes échelles (grandes longueurs d'onde) interagissent entre elles pour donner naissance à des ondes d'échelles plus petites, et ce, jusqu'à une échelle suffisamment petite pour que la dissipation visqueuse ait lieu. Cette cascade d'énergie peut être quantifiée par le spectre de Kolmogorov-Zakharov  $E \sim k^{-\mu}$  où  $\mu$  est un nombre positif lié au type d'ondes considéré. Notons que les solutions de la turbulence faible peuvent, dans les cas simples, être en grande partie retrouvées par analyse dimensionnelle, ce qui facilite considérablement leur obtention.

### 1.2.2 Hypothèses de la turbulence d'ondes

L'obtention de solutions analytiques de la théorie de la turbulence faible se fait au prix de plusieurs hypothèses qui peuvent être très contraignantes, notamment d'un point de vue expérimental. Nous listerons ici les principales hypothèses de la théorie.

La non-linéarité doit être présente, mais doit rester faible pour permettre le développement perturbatif de l'équation cinétique. Dans notre cas, la non-linéarité est quantifiée par la cambrure des ondes  $\epsilon \equiv \sigma k_m$  avec  $\sigma = \sqrt{\langle \eta(t)^2 \rangle}$  ou  $\sigma = \sqrt{\langle \int_S \eta(x, t)^2 d\mathbf{x}/S \rangle}$  l'écart type d'un signal d'ondes  $\eta(t)$  ou  $\eta(x, t)$  donné et  $k_m$  le nombre d'onde où le spectre d'énergie est maximal (typiquement à l'échelle du forçage). Dans les expériences présentées par la suite, nous garderons  $\epsilon < 0.1$  afin de valider cette hypothèse de faible non-linéarité.

Le régime d'ondes considéré doit être pur, c'est-à-dire que la loi de dispersion ne doit être composée que d'un seul terme en loi de puissance de  $k$ . La turbulence d'ondes gravito-capillaires n'a ainsi pas de solution connue. Cette contrainte est un problème important puisque, comme discuté dans la partie 1.1.2, l'échelle du laboratoire se trouve souvent autour de la frontière entre les deux régimes.

La turbulence d'ondes suppose également une séparation importante entre les échelles de forçage où l'énergie est injectée et les échelles de dissipation. Ceci permet d'avoir une zone inertielle où la turbulence d'ondes a lieu au-delà des effets linéaires de la période des ondes et sans ressentir ceux de la dissipation. La turbulence d'ondes étant un mécanisme non linéaire, elle est quantifiée par un temps caractéristique non linéaire  $\tau_{nl}$  (qui jouera le rôle de  $\tau^*$  présenté dans la partie 1.1.4). Respecter la séparation d'échelle revient donc à respecter dans toute la zone inertielle :

$$\tau_l(k) \ll \tau_{nl}(k) \ll \tau_{diss}(k), \quad (1.32)$$

où  $\tau_l = 1/\omega(k)$  est le temps linéaire correspondant à la période des ondes. Notons que le cas  $\tau_l > \tau_{nl}$  implique un équilibre critique menant à de nouveaux régimes encore débattus aujourd'hui (régime de Phillips, solitons, onde de chocs...) [11].

Il faut également supposer un système homogène, isotrope et infini, ce qui n'est pas toujours vérifié expérimentalement à l'échelle d'un laboratoire. L'hypothèse  $\tau_{nl}(k) < 2\tau_{diss}(k)$  vu dans la partie 1.1.5 permet néanmoins de s'affranchir des effets de tailles finies, tandis qu'un forçage adapté permet de s'approcher d'un champ d'ondes isotropes et homogènes. Le rôle des effets de taille finie est une question encore ouverte en turbulence d'ondes [20, 29, 44, 51-53].

La cascade à travers les échelles doit avoir lieu avec un flux d'énergie  $P$  constant au cours du temps et dans la zone inertielle, supposé sans fluctuation, et ne pas être contrôlé par des structures cohérentes. Afin de vérifier expérimentalement cette hypothèse, il est possible de tracer le spectrogramme d'un signal donné afin de vérifier que l'énergie cascade continûment au cours du temps. Le flux  $P$  peut également être estimé par [49] :

$$P(\omega^*) = \int_{\omega^*}^{\omega_{diss}} E(\omega) \frac{1}{\tau_{diss}} d\omega. \quad (1.33)$$

Les interactions entre ondes doivent être résonantes (terme défini par la suite), ce qui implique, sauf cas exceptionnels, que les ondes soient dispersives, c'est-à-dire que leur relation de dispersion soit de la forme  $\omega \sim k^\alpha$  avec  $\alpha \neq 1$ .

### 1.2.3 Interaction à N-ondes

Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 1.2.2, la cascade d'énergie en turbulence d'ondes a lieu grâce à un mécanisme de transfert d'énergie par des interactions entre ondes dites réso-



nantes, qui doivent satisfaire les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N &= 0, \\ \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \dots \pm \omega_N &= 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

avec  $\omega_i = \omega(k_i)$  et  $k_i = |\mathbf{k}_i|$ . Le nombre  $N$  d'ondes qui interagissent dépend, comme nous le verrons par la suite, du plus petit ordre non linéaire non nul du développement perturbatif des équations du système. Par exemple, dans le cas de turbulence d'ondes capillaires à deux dimensions, le développement à l'ordre quadratique est suffisant donc  $N = 3$ . En revanche, pour les ondes de gravité à deux dimensions, les non-linéarités sont cubiques, ce qui implique que  $N = 4$ . Cet ordre peut être trouvé par un calcul analytique ou par représentation graphique (moins rigoureuse mais plus simple) [11, 18, 54]. Notons qu'il existe également des interactions dites quasi résonantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N &= 0, \\ \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \dots \pm \omega_N &< \delta_\omega, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $\delta_\omega$  est la largeur de l'étalement de la loi de dispersion  $\omega(k)$  due aux non-linéarités. Ces interactions, bien que nombreuses dans un système réel, ne sont pas pertinentes pour la turbulence faible, elles peuvent néanmoins être utilisées dans le cas de la turbulence d'ondes discrète [11] (non développé ici). Nous allons maintenant détailler la résolution graphique dans les cas capillaire et gravitaire à une et deux dimensions de propagation.

### Ondes de surface à deux dimensions propagation

La représentation graphique de l'interaction à 3-ondes à deux dimensions est réalisée sur la figure 1.6. La loi de dispersion [gravitaire  $\omega = \sqrt{g}k^{1/2}$  en (a) et capillaire  $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}k^{3/2}$  en (b)] est tracée en partant du point d'origine  $(k_x, k_y, \omega) = (0, 0, 0)$  (surface bleue). Un premier vecteur  $k_1$  est choisi de manière arbitraire, au bout de ce vecteur la loi de dispersion est de nouveau tracée à partir de l'ordonnée  $\omega_1$  (surface verte). Dans le cas gravitaire (a), aucune intersection entre les deux surfaces n'existe, ce qui signifie qu'il n'existe pas de vecteur d'ondes pouvant satisfaire l'interaction résonante à 3-ondes pour les ondes de gravité. En revanche, pour le cas capillaire (b), l'intersection des deux surfaces existe (trait plein noir), nous pouvons donc trouver un vecteur d'onde  $k_2$  qui coupe l'intersection projetée sur le plan  $(k_x, k_y, 0)$  (pointillés noirs) et en déduire un vecteur  $k_3 = k_1 + k_2$  avec  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Cette résolution graphique montre que l'interaction à 3-ondes est possible pour le cas capillaire et impossible pour le cas gravitaire où les interactions à l'ordre suivant, i.e., à 4-ondes sont possibles (non démontré ici). Plus généralement, si l'on considère la loi de dispersion  $\omega \sim k^\alpha$  avec  $\alpha < 1$ , il n'y a pas de solution résonante à 3-ondes (relation concave) et si  $\alpha > 1$  il y a des solutions résonantes à 3-ondes (relation convexe). Notons que dans le cas d'une relation gravito-capillaire, des interactions résonantes à 3-ondes existent.

### Ondes de surface à une dimension de propagation

Dans le cas unidimensionnel, i.e, quand les ondes ne peuvent se déplacer que dans une seule direction d'espace, la représentation graphique est plus simple et est réalisée sur la figure 1.7. Dans le cas capillaire (a), l'interaction à 3-ondes n'est pas possible à 1D car les lois de dispersion n'ont pas de point d'intersection (il en va de même pour le cas gravitaire pure). Dans le cas gravito-capillaire (b), en revanche, la présence d'un point d'inflexion dans la relation de dispersion permet l'existence d'un point d'intersection et donc de solutions à l'interaction résonante à 3-ondes [18]. Dans le cas capillaire, nous pouvons voir sur la figure (c) qu'il existe des solutions au problème à 4-ondes, ces solutions sont cependant triviales car  $k_1 = k_3$  et  $k_2 = k_4$ , cette interaction ne créant

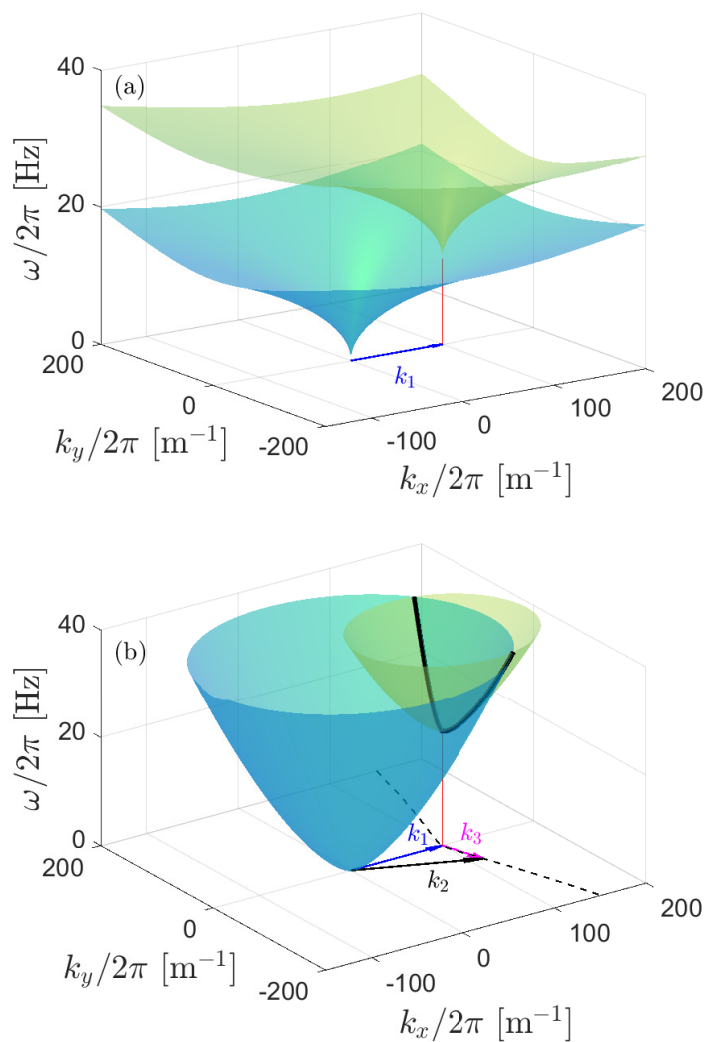


FIGURE 1.6 : Représentation graphique de l'interaction à 3-ondes dans les cas (a) gravitaire ( $\alpha < 1$ ) et (b) capillaire ( $\alpha > 1$ ) à deux dimensions d'espace.

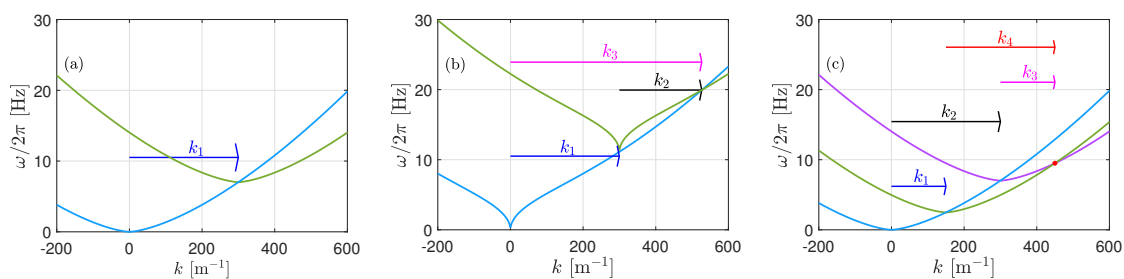


FIGURE 1.7 : Représentation graphique de l'interaction à une dimension de propagation (a) à 3-ondes dans le cas capillaire, (b) à 3-ondes dans le cas gravito-capillaire et (c) à 4-ondes dans le cas capillaire.

pas de nouvelles échelles, elle ne peut pas conduire à la réalisation de turbulence d'ondes (il en va de même pour le cas gravitaire pure). Un régime capillaire 1D admet néanmoins des solutions au problème à 5-ondes (une résolution graphique trop chargée n'est pas montrée ici). La présence de ces solutions sera explicitée numériquement par la suite [34]. Nous pouvons également noter que le cas gravitaire pur 1D admet lui aussi des solutions résonantes à 5-ondes, ce résultat a,

contrairement à la capillarité, été démontré analytiquement [55].

### Quantification des interactions

Afin de quantifier expérimentalement la présence ou non d'interactions à N-ondes, il est possible d'utiliser des corrélations statistiques d'ordre élevé [18, 56].

Pour quantifier des interactions à 3-ondes avec une mesure spatiale  $\eta(\mathbf{x})$ , il est possible d'écrire les corrélations d'ordre 3 en espace  $c^3(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \langle \eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_2)\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_3) \rangle$  où  $\langle \cdot \rangle$  est une moyenne sur l'espace. Nous nous plaçons dans le cas où les corrélations ne dépendent que des valeurs de  $\mathbf{r}_i$ . Dans l'espace de Fourier en prenant  $\eta(\mathbf{k}) \sim \int \eta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$  et  $c^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \langle \eta(\mathbf{k}_1)\eta(\mathbf{k}_2)\eta(\mathbf{k}_3) \rangle$  nous obtenons :

$$c^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \int \int \int d\mathbf{x} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 c^3(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}_2 + \mathbf{k}_3\cdot\mathbf{r}_3]}. \quad (1.36)$$

Pour un signal stationnaire, homogène, isotrope, moyenné sur l'espace et indépendant de  $x$  il vient :

$$c^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \int \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 c^3(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) e^{i[\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}_2 + \mathbf{k}_3\cdot\mathbf{r}_3]} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \quad (1.37)$$

Ainsi la fonction  $\delta$ -Dirac prend en compte la condition  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$  pour laquelle les corrélations sont non nulles. Pour des interactions  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$  il suffit de prendre le complexe conjugué sur  $\mathbf{k}_3$  ou sur  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  soit :

$$c^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \langle \eta^*(\mathbf{k}_1)\eta^*(\mathbf{k}_2)\eta(\mathbf{k}_3) \rangle. \quad (1.38)$$

Il reste à vérifier parmi les solutions de  $c^3$  celles qui vérifient également  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ , ainsi la condition d'interaction résonante à 3-ondes sera vérifiée. Nous noterons  $\eta_{\mathbf{k}_i} = \eta(\mathbf{k}_i)$ . Pour accélérer la vitesse de calcul, nous nous intéressons seulement à  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  et nous utiliserons une mesure spatio-temporelle  $\eta(x, t)$  en moyennant les corrélations au cours du temps :

$$c^3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{\mathcal{T}} \int \langle \eta^*(\mathbf{k}_1, t)\eta^*(\mathbf{k}_2, t)\eta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, t) \rangle dt, \quad (1.39)$$

avec  $\mathcal{T}$  la durée de la mesure. Dans la suite, la moyenne temporelle sera omise par soucis de clarté. Pour des interactions à 3-ondes ( $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ ), l'estimateur appelé bicohérence s'écrit :

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{|\langle \eta_{\mathbf{k}_1}^* \eta_{\mathbf{k}_2}^* \eta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{\mathbf{k}_1} \eta_{\mathbf{k}_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}|^2 \rangle}}, \quad (1.40)$$

le dénominateur est simplement présent pour normaliser la quantité. Si  $B = 1$  la corrélation est parfaite tandis que si  $B = 0$  il n'y a pas de corrélation. Un travail similaire peut être fait pour des interactions à 4-ondes ( $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ ), menant aux tricohérences de la forme :

$$T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{|\langle \eta_{\mathbf{k}_1}^* \eta_{\mathbf{k}_2}^* \eta_{\mathbf{k}_3} \eta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{\mathbf{k}_1} \eta_{\mathbf{k}_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{\mathbf{k}_3} \eta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}|^2 \rangle}}, \quad (1.41)$$

ou aux interactions à 5-ondes ( $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5$ ) menant aux quadricohérences de la forme :

$$Q(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{|\langle \eta_{\mathbf{k}_1}^* \eta_{\mathbf{k}_2}^* \eta_{\mathbf{k}_3}^* \eta_{\mathbf{k}_4} \eta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{\mathbf{k}_1} \eta_{\mathbf{k}_2} \eta_{\mathbf{k}_3}|^2 \rangle \langle |\eta_{\mathbf{k}_4} \eta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4}|^2 \rangle}}. \quad (1.42)$$

Notons que T d'équation (1.41) et Q d'équation (1.42) sont définies respectivement pour des interactions de la forme  $2 \leftrightarrow 2$  et  $3 \leftrightarrow 2$  mais il est possible de définir de façon similaire les estimateurs pour les interactions  $3 \leftrightarrow 1$  et  $4 \leftrightarrow 2$ . Notons également que seule la bicohérence B peut être facilement tracée à deux dimensions dans un repère  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , les tri- et quadricohérences seront représentées en fixant respectivement un et deux vecteurs d'ondes [34].

### 1.2.4 Équation cinétique

Nous considérons un système d'ondes respectant les hypothèses de la partie 1.2.2 et présentons les étapes principales de la théorie de turbulence faible en s'appuyant sur les livres [11, 12] et les revues [13, 21]. Nous adopterons le système de notation suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{123} &= \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}, \\ V_{12}^{\mathbf{k}} &= V(\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \quad \text{le coefficient d'interaction à 3-ondes } k_1 + k_2 = k, \\ \delta_{12}^{\mathbf{k}} &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad \text{le symbole de Kronecker sur les vecteurs d'ondes,} \\ \delta(\omega_{12}^{\mathbf{k}}) &= \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_1 + \omega_2) \quad \text{le symbole de Kronecker sur les pulsations,} \\ a_i &= a(\mathbf{k}_i). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Notons que les symboles de Kronecker deviennent des  $\delta$ -Dirac en passant à la limite continue.

L'équation de Hamilton pour ce système s'écrit :

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*}, \tag{1.44}$$

avec H l'hamiltonien du système et  $a_{\mathbf{k}}$  les variables canoniques associées aux amplitudes complexes des ondes dans l'espace de Fourier. Sous l'hypothèse de séparation d'échelle  $\tau_l \ll \tau_{nl}$  et de faible non-linéarité  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous effectuons un développement perturbatif de l'hamiltonien tel que :

$$\begin{aligned} H &= H_2 + \epsilon H_3 + \epsilon^2 H_4 + \epsilon^3 H_5 + \dots \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \\ &\quad + \epsilon \sum_{123} V_{12}^3 a_1 a_2 a_3^* \delta_{12}^3 \\ &\quad + \epsilon^2 \sum_{1234} W_{12}^{34} a_1 a_2 a_3^* a_4^* \delta_{12}^{34} \\ &\quad + \epsilon^3 \sum_{12345} X_{12}^{345} a_1 a_2 a_3^* a_4^* a_5^* \delta_{12}^{345} \\ &\quad + c.c + \dots, \end{aligned} \tag{1.45}$$

où  $V_{12}^3, W_{12}^{34}$  et  $X_{12}^{345}$  sont respectivement les coefficients d'interactions à 3- et 4- et 5-ondes, et c.c. est le complexe conjugué. Chaque terme correspondant à une interaction à  $n$ -onde, le terme d'ordre le plus faible non-nul détermine le nombre N d'ondes qui interagissent entre elles. En mettant cette nouvelle expression dans l'équation hamiltonienne (1.44) il vient :

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \epsilon \sum_{12} V_{12}^{\mathbf{k}} a_1 a_2 \delta_{12}^{\mathbf{k}} + \epsilon^2 \sum_{123} W_{12}^{3\mathbf{k}} a_1 a_2 a_3^* \delta_{12}^{3\mathbf{k}} + \epsilon^3 \sum_{1234} X_{12}^{34\mathbf{k}} a_1 a_2 a_3^* a_4^* \delta_{12}^{34\mathbf{k}} + c.c + \dots \tag{1.46}$$

Cette équation ne peut conduire directement à des solutions analytiques, néanmoins des solutions statistiques existent et peuvent être calculées. Pour cela nous cherchons des solutions aux

moments d'ordre deux de la variable canonique  $\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \rangle$  avec  $\langle \cdot \rangle$  une moyenne statistique sur les réalisations. L'homogénéité du système suppose que les corrélations paires  $\langle \eta(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$  ne dépendent que de la distance  $\mathbf{r}$ , la moyenne statistique étant alors équivalente à une moyenne spatiale. Nous définissons dans l'espace de Fourier les cumulants  $Q^{(m)}$  d'ordre  $m$  :

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{k}}^{(1)} &= \langle a_{\mathbf{k}} \rangle = 0, \\ Q_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} &= \langle a_1 a_2 \rangle, \\ Q_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(3)} &= \langle a_1 a_2 a_3 \rangle, \\ &\dots, \\ Q_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m}^{(m)} &= \langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle. \end{aligned} \quad (1.47)$$

En utilisant l'équation (1.46) nous obtenons une équation sur les cumulants  $Q^{(m)}$  qui fait intervenir ceux d'ordre  $n$  tel que  $n > m$  :

$$\frac{\partial Q_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m}^{(m)}}{\partial t} = f(Q^{(n>m)}, t). \quad (1.48)$$

La dynamique est à calculer aux temps longs en supposant une séparation d'échelle entre effets linéaires (rapides) et non linéaires (lents). Nous pouvons donc développer les cumulants sous la forme :

$$Q_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m}^{(m)} = q_0^{(m)} + \epsilon q_1^{(m)} + \epsilon^2 q_2^{(m)} + \dots \quad (1.49)$$

Nous admettons ensuite une statistique des amplitudes quasi gaussienne, ce qui impose que les moments d'ordre impair soient nuls et que ceux d'ordre pair puissent s'écrire comme une fonction du moment d'ordre deux  $Q^{(2)}$ . Les limites de faible non-linéarité  $\epsilon \rightarrow 0$  et de système infini (rendant tous les modes de Fourier accessibles pour satisfaire les conditions de résonance) permettent, au prix de laborieux calculs, la fermeture des équations du système. Nous obtenons alors une équation cinétique sur l'action d'onde  $n_{\mathbf{k}}$  définie comme le cumulant d'ordre 2,  $n_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \rangle = Q^{(2)}$  de la forme :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = S_t(n_{\mathbf{k}}), \quad (1.50)$$

où  $S_t$  est une intégrale de collision dépendante de l'ordre dominant de l'interaction à considérer.

Dans le cas d'un système d'interactions à 3-ondes (e.g., ondes capillaires à 2D), l'équation cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= 4\pi\epsilon^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 |V_{12}^{\mathbf{k}}|^2 \delta_{12}^{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} n_1 n_2 \\ &\left[ \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \delta(\omega_{12}^{\mathbf{k}}) + \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \delta(\omega_{\mathbf{k}_2}^1) + \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \delta(\omega_{\mathbf{k}_1}^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Notons que les produits  $\delta_{12}^{\mathbf{k}} \delta(\omega_{12}^{\mathbf{k}})$  imposent les conditions de résonance pour les interactions entre ondes, les interactions quasi résonantes bien que présentes ne permettent pas de générer de la turbulence faible. Dans le cas d'un système d'interactions à 4-ondes (e.g., ondes de gravité à 2D), l'équation cinétique s'écrit :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi\epsilon^4 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 |W_{12}^{\mathbf{k}_3}|^2 \delta_{12}^{\mathbf{k}_3} \delta(\omega_{12}^{\mathbf{k}_3}) n_{\mathbf{k}} n_1 n_2 n_3 \left[ \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_3} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right]. \quad (1.52)$$

Dans le cas d'interactions à 5-ondes (e.g., ondes capillaires ou gravitaires à 1D), l'équation cinétique devient :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi\epsilon^6 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 n_{\mathbf{k}} n_1 n_2 n_3 n_4 \left[ |X_{\mathbf{k}4}^{123}|^2 \delta_{\mathbf{k}4}^{123} \delta(\omega_{\mathbf{k}4}^{123}) \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_4} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} \right) - |X_{34}^{\mathbf{k}12}|^2 \delta_{34}^{\mathbf{k}12} \delta(\omega_{34}^{\mathbf{k}12}) \left( \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \right]. \quad (1.53)$$

Nous pouvons remarquer que de manière générale pour un système d'interaction à N-ondes, l'équation cinétique est de la forme :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} \sim \int d\mathbf{k}^{N-1} L_N^2 n_{\mathbf{k}}^{N-1} \delta(k) \delta(\omega), \quad (1.54)$$

où  $L_N$  est le terme d'interaction à N-ondes.

### 1.2.5 Solutions de Zakharov

Une fois l'équation cinétique obtenue, il ne reste plus qu'à rechercher des solutions stationnaires à flux constant, cela revient à trouver les spectres de Kolmogorov-Zakharov. Notons qu'il existe également des solutions indépendantes du flux menant à un équilibre statistique (équipartition) ou au spectre de Rayleigh-Jeans [11] (non développées ici). L'équation cinétique a été obtenue sans puits ni source d'énergie, cela induit qu'elle est valide dans la zone inertielle (zone entre forçage et dissipation) en supposant une séparation d'échelle importante. Dans cette zone, l'énergie totale est donc conservée, ce qui peut s'écrire :

$$E = \int E_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \int E_k dk, \quad (1.55)$$

avec  $E_{\mathbf{k}}$  le spectre d'énergie des ondes et  $E_k$  son spectre intégré sur les angles, i.e., le spectre d'énergie 1D. Il est lié à l'action d'ondes  $n_k$  par définition des variables canoniques :

$$E_k = \omega(k) n_k. \quad (1.56)$$

La conservation de l'énergie implique que pour une cascade à flux d'énergie constant P :

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial k} = 0 \quad (1.57)$$

En utilisant la forme générale de l'équation cinétique (1.54) nous estimons le flux d'énergie P

$$P \sim \frac{\partial E_k}{\partial t} dk \sim \frac{\partial n_k}{\partial t} dk \sim n_k^{N-1}. \quad (1.58)$$

Nous en déduisons alors dimensionnellement que le spectre d'énergie est de la forme  $E_k \sim P^{\frac{1}{N-1}}$  pour un processus d'interaction à N-ondes. Nous obtenons alors la forme des solutions stationnaires, à flux d'énergie constant, de l'équation cinétique :

$$n_k = CP^{\frac{1}{N-1}} k^{-\mu}, \quad (1.59)$$

où C et  $\mu$  sont des constantes. Ce spectre d'énergie peut être également déduit analytiquement en utilisant une transformation de Zakharov sur l'équation cinétique [8, 11]. Nous pouvons citer le cas particulier de la capillarité à deux dimensions (N = 3) où les calculs analytiques dérivent le spectre  $E_k \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4}$  dit de Zakharov-Filonenko [10]. Pour des ondes de gravité à deux

dimensions ( $N = 4$ ), il vient  $E_k \sim P^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2}$  [9]. Notons que dans le cas d'un nombre  $N$  pair d'ondes qui interagissent entre elles, l'action d'ondes  $\mathcal{N} = \int n_k dk$  est également conservée, ce qui peut conduire à une cascade d'énergie inverse (non discutée ici). Il est important de souligner que contrairement à la turbulence hydrodynamique où le spectre d'énergie est obtenu uniquement par analyse dimensionnelle, la théorie de la turbulence faible mène à des résultats analytiques.

### 1.2.6 Analyse dimensionnelle

Maintenant que nous avons vu les différentes grandes étapes permettant d'obtenir théoriquement les spectres de la turbulence d'ondes, nous allons présenter les résultats d'analyses dimensionnelles [11, 12, 57]. Cette méthode permet d'obtenir facilement la forme des spectres d'énergie en ne connaissant que la relation de dispersion et le nombre  $N$ -d'ondes des interactions à considérer. La constante théorique du spectre n'est évidemment pas atteignable par cette méthode. Notons que cette méthode ne s'applique qu'aux cas simples où la loi de dispersion ne contient qu'un terme en loi de puissance (e.g., gravité pure ou capillarité pure). Nous considérons donc une loi de dispersion de la forme :

$$\omega = \sigma k^\alpha, \quad (1.60)$$

avec  $\alpha$  et  $[\sigma] = L^{-\alpha} T^{-1}$  des constantes. Soit  $N$  le nombre d'ondes de l'interaction dominante,  $d$  la dimension énergétique des ondes (e.g., pour des ondes le long d'une corde  $d = 1$ , pour des ondes de surface  $d = 2$ , pour des ondes acoustiques  $d = 3$ ) et  $D$  la dimension de propagation des ondes (e.g., dans un bassin  $D = 2$ , dans un canal unidimensionnel  $D = 1$ ). Les densités de puissance  $S_\eta$  définies dans la partie 1.1.3 ont pour dimension :

$$\begin{aligned} [S_\eta(k)] &= L^{5-d}, \\ [S_\eta(\mathbf{k})] &= L^{4-d+D}, \\ [S_\eta(\omega)] &= L^{4-d} T, \end{aligned} \quad (1.61)$$

avec  $S_\eta(k) = 2\pi k^{D-1} S_\eta(\mathbf{k})$  et  $S_\eta(k) dk = S_\eta(\omega) d\omega$  les liens entre les spectres. Ces spectres sont directement liés à la densité spectrale d'énergie  $E_k$  par l'équation  $E_k = \sigma^2 k^{2\alpha-1} S_\eta(k)$ . Le flux d'énergie a pour dimension  $[P] = L^{5-d} T^{-3}$  déduite de l'équation (1.57) ce qui correspond à  $[P] = L^3 T^{-3}$  pour des ondes de surface. Ainsi le lien entre le flux d'énergie et le spectre  $S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{N-1}}$  impose les autres dépendances du spectre en loi de puissance telles que :

$$\begin{aligned} S_\eta(k) &\sim P^{\frac{1}{N-1}} \sigma^X k^Y, \\ S_\eta(\mathbf{k}) &\sim P^{\frac{1}{N-1}} \sigma^X k^{Y-D+1}, \\ S_\eta(\omega) &\sim P^{\frac{1}{N-1}} \sigma^{X-1-\frac{Y-\alpha+1}{\alpha}} \omega^{\frac{Y+1}{\alpha}-1}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

avec  $X = \frac{N-4}{N-1} - 1$  et  $Y = d - 5 + \frac{5-3\alpha-d}{N-1}$ . Dans le cas d'ondes capillaires à deux dimensions  $N = 3$ ,  $d = D = 2$ ,  $\sigma = \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/2}$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$  et  $[S_\eta(k)] = L^3$ , nous obtenons  $S_\eta(k) \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4}$ . Ce qui correspond bien au spectre de Zakharov-Filonenko  $E_k \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4}$ . L'analyse dimensionnelle est récapitulée dans l'annexe A dans le cas général et dans les cas d'ondes de gravité et de capillarité à une et deux dimensions de propagation.

## 1.2.7 Brisure de la théorie de la turbulence faible

### Équilibre critique

La théorie de la turbulence faible suppose de nombreuses hypothèses (voir paragraphe 1.2.2). Le non-respect de certaines d'entre elles mène alors à une brisure de la théorie et peut conduire à l'apparition d'autres régimes, ces résultats sont récapitulés dans l'annexe A. A partir de l'équation (1.50)  $\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = S_t(n_{\mathbf{k}})$ , nous estimons le temps non linéaire tel que [13] :

$$\frac{1}{\tau_{nl}} \sim \frac{S_t(n_{\mathbf{k}})}{n_{\mathbf{k}}}. \quad (1.63)$$

Une analyse dimensionnelle des intégrales de collision  $S_t$  permet ainsi d'obtenir la forme générale de temps non linéaire  $\tau_{nl}$  (voir annexe A) :

$$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{N-2}{N-1}} \sigma^3 \frac{N-2}{N-1} k^{-\alpha - (5-d-3\alpha)\frac{N-2}{N-1}}. \quad (1.64)$$

A partir de cette formule, nous pouvons trouver les conditions afin de respecter la séparation d'échelle  $\tau_l \ll \tau_{nl}$  nécessaire à la turbulence d'ondes. Cela impose que :

$$\frac{\tau_l}{\tau_{nl}} \sim P^{\frac{N-2}{N-1}} \sigma^{-3\frac{N-2}{N-1}} k^{\frac{N-2}{N-1}(5-d-3\alpha)} \ll 1. \quad (1.65)$$

Nous en déduisons une valeur  $k_C$  critique atteinte lorsque  $\frac{\tau_l}{\tau_{nl}} \sim 1$  et de la forme :

$$k_C = \left( \frac{P}{\sigma^3} \right)^{-\frac{1}{5-d-3\alpha}}, \quad (1.66)$$

Dans le cas d'un système capillaire à deux dimensions ( $d = D = 2$ ,  $\alpha = 3/2$ ,  $N = 3$ ), nous avons donc  $\tau_{nl} \sim P^{-1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/4} k^{-3/4}$ ,  $\frac{\tau_l}{\tau_{nl}} \sim k^{-3/4} \ll 1$  et  $k_C \sim P^{\frac{2}{3}} \frac{\rho}{\gamma}$ , la théorie de la turbulence faible d'ondes capillaires est donc valide aux grandes valeurs de  $k \gg k_C$ . Notons que pour des ondes de gravité ( $d = D = 2$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $N = 4$ )  $\tau_{nl} \sim P^{-2/3} g^{1/2} k^{-3/2}$ ,  $\frac{\tau_l}{\tau_{nl}} \sim k^1 \ll 1$  et  $k_C \sim P^{-\frac{2}{3}} g$  ce qui implique que la théorie de la turbulence faible d'onde de gravité est valide plutôt aux faibles nombres d'ondes  $k \ll k_C$ . Dans le cas où cette condition n'est pas respectée, un équilibre critique ("critical balance") est atteint et un nouveau régime apparaît. Pour des ondes de gravité, la brisure à grande échelle devrait conduire à des non-linéarités très importantes menant au spectre de Phillips [11]. Un tel spectre peut être interprété comme un cas limite de la turbulence faible où les ondes de surface sont à la limite du déferlement, le spectre d'énergie ne dépend alors pas du flux et s'écrit, pour les ondes de gravité,  $S_{\eta}^{Ph}(k) \sim P^0 k^{-3}$  ou  $S_{\eta}^{Ph}(\omega) \sim P^0 g^2 \omega^{-5}$ . Il est difficile d'atteindre expérimentalement une telle limite, dans les faits des structures cohérentes (cusps, solitons, ondes de choc...) ont tendance à apparaître et à contrôler les spectres d'énergie [35, 58]. La discussion sur l'existence d'un tel spectre est encore largement ouverte.

### Turbulence d'ondes faible "gelée"

La turbulence faible impose de travailler dans un système infini, i.e., sans effets de bords, ce qui revient à respecter  $\tau_{nl} \ll \tau_{disc} = (\sigma \alpha k^{\alpha-1} \Delta k)^{-1}$  avec  $\Delta k$  l'écart entre deux modes propres successifs. Ce qui peut s'écrire (voir annexe A) :

$$\frac{\tau_{nl}}{\tau_{disc}} \sim P^{-\frac{N-2}{N-1}} \sigma^3 \frac{N-2}{N-1} \alpha^{-1} \Delta k \alpha k^{-\frac{N-2}{N-1}(5-d-3\alpha)-1} \ll 1. \quad (1.67)$$

Dans le cas où cette condition n'est pas respectée, les effets de taille finie deviennent suffisamment importants pour empêcher la turbulence d'ondes d'être observée. Pour  $\tau_{nl} > 2\tau_{disc}$  on parle de turbulence d'ondes discrètes [20, 53], tandis que pour  $\tau_{nl} \sim 2\tau_{disc}$  on parle de turbulence d'ondes "gelée" ou mesoscopique rendue possible par des interactions quasi résonnantes [11, 59].



### Dissipation

La turbulence faible est supposée avoir lieu loin des échelles de dissipation. Dans les faits, la dissipation n'est pas expérimentalement négligeable et peut avoir lieu proche de la zone inertielle. Il est donc important de vérifier que  $\tau_{nl} \ll \tau_{diss}$ . Dans le cas de dissipation visqueuse en surface par un film inextensible  $\tau_{diss} \sim \nu^{-1/2} \sigma^{-1/2} k^{-\frac{2+\alpha}{2}}$ , cela revient à :

$$\frac{\tau_{nl}}{\tau_{diss}} \sim \mathbf{P}^{-\frac{N-2}{N-1}} \sigma^{3\frac{N-2}{N-1}-1/2} \sqrt{\nu} k^{-\frac{N-2}{N-1}(5-d-3\alpha)+\frac{2-\alpha}{2}} \ll 1. \quad (1.68)$$

Nous en déduisons un vecteur d'onde  $k_d$  critique lorsque  $\frac{\tau_{nl}}{\tau_{diss}} \sim 1$ . Dans le cas d'ondes capillaires dans un système à deux dimensions, il vient :

$$k_d \sim \mathbf{P}^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{-1/2} \nu^{-1/2}. \quad (1.69)$$

Lorsque  $k > k_d$  l'énergie des ondes est dissipée par la viscosité du liquide, affaiblissant fortement la cascade de turbulence d'ondes.

## **Chapitre 2**

# **Turbulence d'ondes capillaires unidimensionnelles**

## 2.1 Introduction et état de l'art

Ce chapitre est consacré principalement à la turbulence d'ondes capillaires expérimentale dans une géométrie quasi-1D. Cette étude a fait l'objet d'une publication dans *Europhysics Letters* en 2021 [34] présentée à la fin du chapitre.

Contrairement à la turbulence hydrodynamique qui a été largement validée par l'expérience, la turbulence d'ondes expérimentale s'est développée principalement à partir des années 2000, et ce, malgré la théorie de la turbulence faible très aboutie et développée dès les années 60. Des mesures expérimentales ont notamment été effectuées dans le cas des ondes de gravito-capillaires à la surface de liquides [16-20] (voir revue [21] pour plus de détails), des ondes élastiques dans des plaques [22-25], des ondes hydro-élastiques [26], des ondes internes dans un liquide [27-29], des ondes inertielles dans des fluides en rotation [30] et ont permis dans certaines limites de valider les principaux résultats de la théorie de la turbulence faible. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux ondes de surface.

### 2.1.1 Ondes de gravité

Les ondes de gravité représentent une partie significative des études en turbulence d'ondes. La turbulence d'ondes de gravité a, en effet, été une des premières à être développée, afin de mieux comprendre les échanges océan-atmosphère et d'améliorer les prédictions météorologiques [8, 60]. Plusieurs mesures ont vu le jour afin de tenter de valider les différentes prédictions théoriques. Des mesures *in situ* ont été réalisées dans les années 70 et 80 à la surface de lacs ou de l'océan [61-65]. Ces mesures ont donné des résultats avec des spectres proches de  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-4}$  et  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-5}$ . Le spectre en  $\omega^{-4}$  peut être interprété comme être celui de turbulence faible gravitaire. Néanmoins, l'impossibilité de contrôler l'ensemble des paramètres de terrain (vent, courant, fetch...) rend difficile de conclure sur la physique observée. Le forçage, provenant du vent, agit sur une large gamme d'échelles, violant ainsi l'hypothèse primordiale de séparation des échelles de la turbulence faible. Une autre théorie mène à un spectre en  $\omega^{-4}$ , le spectre de singularité du second ordre de Kuznetsov [66]. Dans ce modèle, le spectre d'énergie est principalement contrôlé par des structures cohérentes de forte non-linéarité, dans ce cas seules la géométrie de ces structures et leur nombre influent sur la forme du spectre. Bien que la loi de puissance des spectres de turbulence faible de gravité et de Kuznetsov soient identiques, la physique y est complètement différente. Le spectre en  $\omega^{-5}$  peut, quant à lui, être expliqué par le spectre de Phillips [67]. Ce spectre a lieu à forte non-linéarité où les ondes de surface sont à la limite du déferlement. Là encore, les mesures *in situ* ne permettent pas de conclure avec certitude sur le phénomène observé.

Des mesures en laboratoire plus précises ont par la suite été réalisées avec des forçages contrôlés et à grandes échelles dans des bassins de tailles allant de 0.5 à 50 mètres [16, 21, 44, 68-70]. Ces différentes mesures montrent que l'exposant du spectre dépend du forçage, ce qui n'est pas en accord avec la turbulence faible. C'est paradoxalement pour des valeurs de non-linéarité importantes  $\epsilon \sim 0.1$  que l'accord avec un spectre de turbulence faible  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-4}$  semble le meilleur. Cette dépendance au forçage semble être expliquée par la présence d'ondes liées qui en tant que structures cohérentes modifient la distribution d'énergie [71, 72] ou à la forme du bassin et à l'anisotropie du forçage [52]. L'écart à faible non-linéarité semble quant à lui lié à la présence de dissipation qui agit à toutes les échelles. Les discussions sur la turbulence d'ondes de gravité restent ainsi largement ouvertes.

### 2.1.2 Ondes de capillarité

Le cas de la turbulence d'ondes capillaires présente quant à lui des résultats bien plus satisfaisants et en meilleur accord avec la théorie de la turbulence faible. L'utilisation d'un forçage aléatoire

dans une bande de fréquence a notamment permis l'obtention du spectre de turbulence faible  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-17/6}$  prédit théoriquement pour une non-linéarité faible ( $\epsilon < 0.15$ ) [16, 17, 49, 52, 69]. La dépendance du spectre avec le flux d'énergie  $S_\eta(\omega) \sim P^{1/2}$  a aussi pu être vérifiée [49]. Ce bon accord permet de pousser plus loin les études de la turbulence d'ondes capillaires afin d'en vérifier les limites. Il a par exemple été montré que la cascade de turbulence d'ondes, supposée continue et à flux constant, possède d'intense fluctuations temporelles [73] et dans le cas fortement non linéaire, des bouffées d'énergie [74].

Il est néanmoins difficile d'observer un régime capillaire pur, l'échelle du laboratoire étant en effet proche de la transition gravito-capillaire. Atténuer la gravité peut cependant être réalisé via des mesures en zéro gravité (utilisation de vols paraboliques [47] ou de la station spatiale internationale [75]). Il est également possible de travailler à l'interface entre deux fluides non miscibles de densité proches [76]. Bien que très efficaces, ces mesures restent très contraignantes et difficiles à mettre en place. Une autre possibilité est l'utilisation d'un fluide peu visqueux. Il a, en effet, été montré que la pente du spectre de turbulence d'ondes augmente avec la viscosité [48] si celle-ci est trop forte. Les effets visqueux peuvent être ressentis par le spectre en violant la condition  $\tau_{nl} < \tau_{diss}$ . Le choix d'un fluide très peu visqueux comme le mercure permet de contourner ce problème [16], c'est cette solution qui sera utilisée dans la suite du chapitre.

Jusqu'à présent, toutes les expériences de turbulence d'ondes de surface ont eu lieu dans des régimes bidimensionnels. De manière générale, aucun système expérimental de turbulence d'ondes n'a été, à notre connaissance, réalisé dans une géométrie 1D. Seule la cascade inverse en optique non linéaire a été explorée en 1D [77]. La turbulence d'ondes de surface unidimensionnelle facilite grandement les mesures, notamment les mesures spatiales (une seule direction de propagation), ainsi que les analyses. Néanmoins, la perte d'une dimension d'espace complexifie les calculs théoriques. Comme il a été montré dans la partie 1.2.3, dans un système 1D les interactions résonantes non triviales à 3 et 4-ondes sont inexistantes pour les ondes purement capillaires (et purement gravitaires [55]). Ceci implique l'utilisation d'interactions à 5-ondes rendant les calculs analytiques plus fastidieux. Numériquement, la turbulence d'ondes capillaires unidimensionnelles a été testée, mais en ne considérant que des interactions à 3- ou 4-ondes (développement numérique cubique), donc sans interactions purement résonnantes [78]. Cette limite est probablement une des causes de l'absence de travaux en turbulence d'ondes expérimentale dans cette géométrie. Néanmoins, malgré ces difficultés, nous proposons ici un système expérimental mettant en jeu de la turbulence d'ondes capillaire quasi-1D. Grâce à la simplicité de sa géométrie, ce système 1D sera utilisé afin de vérifier la plupart des hypothèses de la turbulence faible. Il sera également par la suite utilisé pour observer une transition vers un nouveau régime.

## 2.2 Résumé des résultats obtenus

Dans cette section, nous résumons les résultats obtenus pour la turbulence d'ondes capillaires quasi-1D que nous avons publiés dans *Europhysics Letters* en 2021 [34]. Le dispositif expérimental est composé d'un canal, de longueur  $L = 15$  cm et de largeur  $L_y = 2$  cm, rempli de liquide sur une hauteur  $h = 2$  cm respectant l'approximation d'eau profonde. Un batteur est positionné à une extrémité et injecte de l'énergie avec un forçage aléatoire dans une bande de fréquences entre 2 et 5 Hz. Les mesures sont effectuées avec une sonde capacitive qui mesure les variations d'élévation de la surface du liquide en un point au cours du temps  $\eta(t)$ . Le signal spatio-temporel,  $\eta(x, t)$ , est obtenu en utilisant une caméra positionnée latéralement au canal.

Le liquide utilisé est du mercure, choisi pour sa très faible viscosité  $\nu \approx 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s, soit 10 fois moins que pour de l'eau. Cet aspect permet de repousser l'échelle de dissipation à des fréquences supérieures à 350 Hz, contre environ 80 Hz pour de l'eau, à forçage équivalent. Cette différence est représentée sur la figure 2.1 où les spectres  $S_\eta(\omega)$  sont représentés dans le cas de l'eau (traits pleins

bleus) et du mercure (traits pleins rouges). Le mercure permet, contrairement à l'eau, l'apparition d'une zone inertielle dans le régime capillaire sans que les effets dissipatifs ne soient ressentis. De plus, le mercure est non mouillant, facilitant la visualisation directe par la caméra latérale. Néanmoins, la toxicité de ce liquide implique des précautions de manipulation (étanchéité de la cuve, hotte). En premier lieu, il a toujours été manipulé dans une pièce aérée et à une température inférieure 12°C évitant la possibilité d'apparition de vapeurs toxiques. Le canal était fermé par un couvercle étanche avec une seule ouverture pour la sonde capacitive.

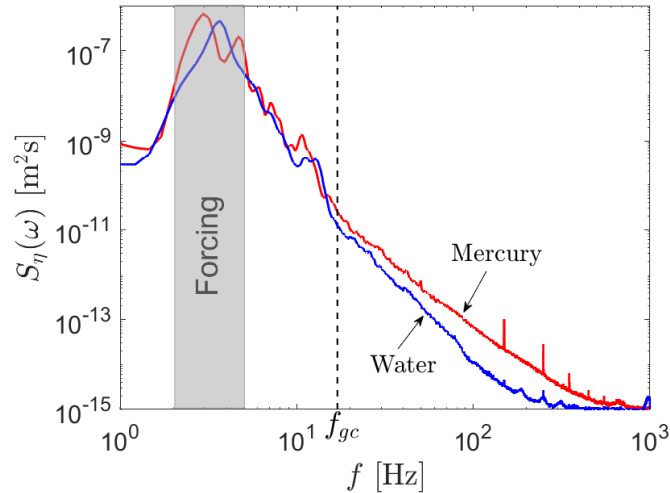


FIGURE 2.1 : Spectres temporels  $S_\eta(\omega)$  dans le cas de l'eau (traits pleins bleus) et du mercure (traits pleins rouges).

Dans la suite de l'article, les résultats expérimentaux sont présentés. Le signal spatio-temporel  $\eta(x, t)$  est utilisé pour tracer le spectre spatio-temporel  $S_\eta(k, \omega)$  vérifiant bien la loi de dispersion gravito-capillaire. Cette première observation montre l'existence d'un transfert d'énergie entre l'échelle d'injection et celle de dissipation. Le spectre temporel  $S_\eta(\omega)$  est ensuite tracé, une cascade en  $\omega^{-2.7}$  apparaît dans le régime purement capillaire ( $f > f_c = 50$  Hz). Les ondes se propagent dans une seule dimension, ce qui implique  $D = 1$ . Dans ce cas, les interactions résonantes à 3- et 4-ondes non triviales sont interdites dans le régime purement capillaire (voir partie 1.2.3). Néanmoins, des interactions à 3- et 4-ondes peuvent exister dans la zone gravito-capillaire [41], mais elles ne peuvent pas générer de la turbulence faible aux échelles capillaires ( $f > f_c = 50$  Hz). Il en va de même pour les interactions quasi résonantes qui apparaissent. La turbulence d'ondes capillaires observée est donc générée par des interactions résonantes à 5-ondes. Son spectre d'énergie aux échelles capillaires  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-2.7}$  est en bon accord avec la prédiction dimensionnelle de la théorie de la turbulence faible d'ondes capillaires à 5-ondes  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-31/12} \approx \omega^{-2.58}$ . Pour prouver expérimentalement la présence de ces interactions résonantes aux échelles capillaires, les quadricohérences d'équation 1.42, sont utilisées. Enfin, nous montrons que les principales approximations de la turbulence faible sont vérifiées pour le régime capillaire. Le flux d'énergie  $P$  est bien mesuré constant dans la zone inertielle, l'énergie cascade continûment à travers les échelles et au cours du temps sans structures cohérentes apparentes, la séparation d'échelle  $\tau_l \ll \tau_{nl} \ll [\tau_{diss}; \tau_{disc}]$  est bien respectée expérimentalement.

Cette étude consiste ainsi en la première observation de turbulence d'ondes aux petites échelles, dans une géométrie quasi 1D. Cette géométrie facilite grandement les mesures expérimentales et les calculs numériques, elle pourrait être utilisée dans d'autres systèmes de turbulence d'ondes, comme en turbulence d'ondes élastiques [79] ou hydro-élastiques [26]. Cependant, les prédictions utilisées s'appuient simplement sur des analyses dimensionnelles et des calculs numériques, le

calcul analytique du spectre de la turbulence faible capillaire 1D (par analogie à celui réalisé en turbulence faible d'ondes de gravité quasi 1D [55]) pourrait être réalisé afin de confirmer nos résultats.

### **2.3 Article publié dans *Europhysics Letters* en 2021**

Guillaume Ricard et Eric Falcon, “Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence” [34].

---

# Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence

GUILLAUME RICARD and ERIC FALCON<sup>(a)</sup>

*Université de Paris, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France*

**Abstract** – Wave turbulence in quasi-1D geometry is usually not investigated experimentally since low-order resonant wave interactions are theoretically prohibited. Here, we report on the first observation of unidirectional capillary-wave turbulence on the surface of a fluid in a canal. We also show that five-wave interactions are the lowest-order resonant process subsisting at small scales, and are thus probably the one generating such quasi-1D capillary wave turbulence. We show that the wave spectrum is compatible with the corresponding dimensional analysis prediction. The main assumptions of weak turbulence theory are also verified experimentally. Quasi-1D wave turbulence could be thus highlighted in other fields of wave turbulence.

---

**Introduction.** – Wave turbulence is a phenomenon occurring within a large number of random nonlinear interacting waves [1–3]. These nonlinear interactions lead to an energy cascade from a large (forcing) scale down to a small (dissipative) scale, predicted by weak turbulence theory (WTT). These predictions have been applied in many different domains such as ocean surface waves, plasma waves, hydroelastic or elastic waves, internal waves, and optical waves [1–3]. This theory has then been assessed experimentally in various wave systems propagating in 2D or 3D [4–9], but rarely in 1D since generally no low-order resonant wave interactions are expected theoretically in this geometry [2]. To our knowledge, the unique experimental study concerns 1D nonlinear optics focusing only on inverse cascade towards large scales [10]. For capillary waves on the surface of a fluid, the WTT [11, 12] is rather well confirmed experimentally in 2D (see review [13]), whereas for a unidirectional propagation, the theory forbids low-order wave resonant interactions [2, 14], and thus a wave turbulence regime. Nevertheless, a quasi-1D capillary wave turbulence regime has been recently reported numerically [15]. An experimental observation of such a regime would pave the way to other fields of wave turbulence due to easier calculations, and measurements in 1D geometry.

In this letter we report the first observation of quasi-1D capillary-wave turbulence on the surface of a low-viscous fluid (mercury). With this specific fluid, a weak nonlinearity is sufficient to reach a wave turbulence regime without coherent structures. Using high-order correlations of wave elevations, we quantify the occurrence of three-, four-

, and five-wave interactions. Although *quasi-resonant* interactions are observed at low orders, five-wave *resonant* interactions are found to be the lowest-resonant order subsisting in the capillary range, and are thus probably the mechanism generating the observed 1D capillary-wave turbulence. This differs from the usual 2D capillary-wave turbulence involving three-wave resonant interactions [2, 11]. We also show that the wave spectra in frequency and in wavenumber are compatible with the corresponding dimensional analysis predictions. Moreover, the energy flux cascading towards small scales is roughly found to be constant as expected, and the main WTT assumptions are verified experimentally. Note that this 1D wave turbulence differs basically from 1D integrable turbulence (involving coherent structures such as solitons within stochastic waves) [16], recently observed [17]. Note also that an idealized 1D model of wave turbulence showed strong deviations from the WTT due to these coherent structures [14, 18]. Moreover, our results should not be confused with the existence of unidirectional resonant interaction highlighted in 2D gravity-capillary wave turbulence, near the gravity-capillary crossover [19].

**Theoretical backgrounds.** – The dispersion relation of linear deep-water gravity-capillary surface waves reads  $\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3$ , with  $\omega = 2\pi f$  the angular frequency,  $k$  the wave number,  $g$  the acceleration of gravity,  $\gamma$  the surface tension, and  $\rho$  the liquid density [20]. The theoretical crossover between the gravity and capillary regimes occurs for  $k_{gc} = \sqrt{\rho g/\gamma}$  and  $f_{gc} = (g^3 \rho/\gamma)^{1/4}/(\sqrt{2}\pi)$  [21]. Both contributions coexist near  $f_{gc}$  [13], and we denote  $f_c$  the frequency from which gravity becomes negligible (see below). In the two limits

---

<sup>(a)</sup>E-mail: eric.falcon@u-paris.fr (corresponding author)

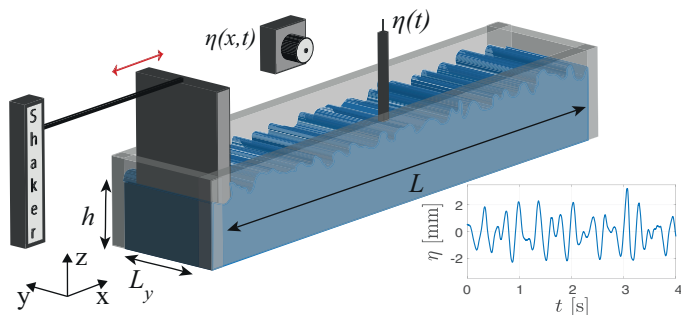


Fig. 1: Experimental setup. The wave elevation,  $\eta(t)$ , is measured at a single point using a capacitive wire gauge, and resolved in space and time,  $\eta(x, t)$ , with a lateral camera. Inset: typical wave elevation signal  $\eta(t)$  for  $\epsilon = 0.06$ .

of weak nonlinearity and infinite system, WTT predicts a wave spectrum cascading from large to small scales. The energy transfers between waves occur due to a  $N$ -wave resonant interaction process,  $N$  being fixed by the geometry and the wave system considered [2]. For 1D gravity waves, WTT predicts that  $N = 5$  [22]. For 1D capillary waves, no prediction exists up to now. In 1D, a  $N$ -wave resonant interaction process requires to satisfy

$$k_1 \pm k_2 \pm \dots \pm k_N = 0, \text{ and } \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_N = 0, \quad (1)$$

where  $k_i$  and  $\omega_i$  take positive values,  $N \geq 3$ , and  $\omega_i \equiv \omega(k_i)$ . No nontrivial solution of Eq. (1) exists with  $N = 3$  or 4 for 1D capillary waves, i.e., for  $\omega(k_i) = \sqrt{\gamma/\rho}k_i^{3/2}$ . Nonlinearity can broaden the dispersion relation authorizing other possible interactions (called *quasi-resonant* interactions) as

$$k_1 \pm k_2 \pm \dots \pm k_N = 0, \text{ and } \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_N < \delta_\omega, \quad (2)$$

where  $\delta_\omega$  is a constant corresponding to the nonlinear wave frequency broadening. It is important to emphasize that WTT needs resonant interactions to build wave turbulence: even if quasi-resonant interactions occur at some specific order, the nonlinear process generating wave turbulence corresponds to the lowest nonlinear order for which resonant interactions exist, as a consequence of the change of canonical variables [1, 2]. In the particular case where resonant interactions are absent (e.g., by numerically truncating to a specific nonlinear order), quasi-resonances can generate an energy cascade [15].

Using dimensional analysis [15, 23], one can predict the power spectra of the wave elevation for capillary waves for a  $N$ -wave process as

$$\begin{aligned} S_\eta(\omega) &= C_{KZ}^\omega \langle P \rangle^{\frac{1}{N-1}} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{\frac{2N-5}{3(N-1)}} \omega^{-\frac{7}{3} \left[ 1 + \frac{3}{7(N-1)} \right]}, \\ S_\eta(k) &= C_{KZ}^k \langle P \rangle^{\frac{1}{N-1}} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{-\frac{3}{2(N-1)}} k^{-3 \left[ 1 + \frac{1}{2(N-1)} \right]}, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\langle P \rangle$  is the mean cascading energy flux supposed constant. The nondimensional (Kolmogorov-Zakharov) constant of Eq. (3) is denoted  $C_{KZ}^\omega$  and  $C_{KZ}^k$  with  $C_{KZ}^k = \frac{3}{2}C_{KZ}^\omega$ . Note that the capillary wave spectrum was derived exactly in 2D with  $N = 3$  [11] but not in 1D to our knowledge. To obtain analytically such spectrum, the kinetic equation could be derived following the weak turbulence assumptions and methods described in [1–3]. To do so, since the first nonlinear orders ( $N = 3$  and  $N = 4$ ) vanish in 1D for  $\omega \sim k^{3/2}$ , the leading nonlinear order is then  $N = 5$ . The constant energy flux, out-of-equilibrium, stationary solution of this kinetic equation should provide the Kolmogorov-Zakharov wave spectrum corresponding to the energy cascade through scales. Note that the locality hypothesis (i.e., the convergence of the collision integral in the kinetic equation on the solution found) should be also fulfilled, otherwise corrections could arise [2]. Such theoretical work is beyond the scope of our experimental study, and thus only dimensional predictions and numerical analysis are used here. Our predictions of Eq. (3) for  $N = 5$  yield to  $S_\eta(k) \sim k^\alpha$  and  $S_\eta(\omega) \sim \omega^\beta$  with  $\alpha = -27/8$  and  $\beta = -31/12$ .

**Experimental setup.** – Experiments were performed in a rectangular transparent plexiglass canal of length  $L = 15$  cm and width  $L_y = 2$  cm (see Fig. 1). This canal is filled up to a depth  $h = 2$  cm. A shaker located at an extremity generates waves in a narrow random frequency bandwidth  $f_0 \pm \Delta f$  with  $f_0 = 3.5$  Hz and  $\Delta f = 1.5$  Hz. This randomness triggers wave interactions needed for building wave turbulence, contrary to a monochromatic forcing,  $\Delta f = 0$  (see Supp. Mat. [24]). The wave propagation is unidirectional along  $x$  due to the geometry of the system ( $L \gg L_y$ ) but since the wave energy is distributed in the 2D space ( $x$  and  $y$ ), we talk about quasi-1D waves. Wave elevation  $\eta(t)$  is measured at a single point over time using a home-made capacitive wire gauge (10  $\mu\text{m}$  vertical resolution and 2 kHz sampling frequency leading thus to a maximum observable frequency  $f_m = 1$  kHz) [21]. A typical example of  $\eta(t)$  is plotted in the inset of Fig. 1, the forcing scales are clearly visible whereas higher scales are embedded within the observed nonlinearities. A space-and-time resolved wave-field measurement,  $\eta(x, t)$ , is reached using a lateral camera (Basler - 200 fps) filming a 9 cm side view with horizontal and vertical resolutions of 38  $\mu\text{m}$ . The wave elevation is monitored for both measurements during  $\mathcal{T} = 15$  min.

We perform experiments with mercury (density  $\rho = 13500$  kg/m<sup>3</sup>, surface tension  $\gamma = 400$  mN/m and kinematic viscosity  $\nu = 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s). Its low viscosity is needed to minimize capillary wave dissipation to observe wave turbulence (using water instead leads to a cascade on a smaller inertial range). Its un wetting property also avoids the upward meniscus on the lateral wall that would hide the wave profile visualized by the camera.

To quantify the nonlinearity, we measure the wave steepness as  $\epsilon = \left\langle \sqrt{\frac{1}{L} \int |\partial\eta/\partial x|^2 dx} \right\rangle$  [25]. Very weak



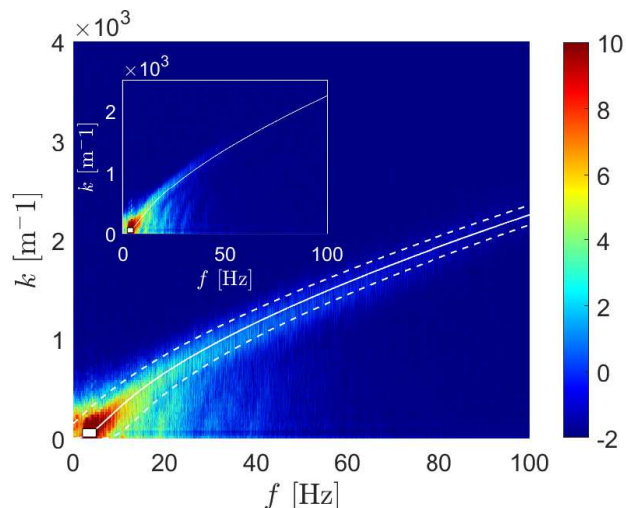


Fig. 2: Full spatio-temporal spectrum  $S_\eta(k, \omega)$ . Wave steepness  $\epsilon = 0.06$ . Solid line: theoretical gravity-capillary dispersion relation  $\omega(k)$ . Dashed line: spread dispersion relation  $\omega(k) \pm \delta_\omega$  with  $\delta_\omega = 40$  Hz. White rectangle: forcing range between 2 and 5 Hz. Inset: same for  $\epsilon = 0.03$ . Log colorbar.

steepnesses are used here,  $\epsilon \leq 0.06$ , to validate the WTT assumption of weak nonlinearity.

**Energy cascade.** – From spatio-temporal measurements we perform space-time Fourier transforms to reach the full power spectrum  $S_\eta(k, \omega)$  of wave elevations (see Fig. 2). We observe that the energy injected at large scales (see white rectangle in Fig. 2) is transferred to small scales following well the dispersion relation. In addition, the energy is found to be redistributed around the dispersion relation due to nonlinearities with a nonlinear spectral broadening  $\delta_\omega$ . This broadening is estimated for each  $k$ , by fitting the corresponding spectrum  $S_\eta(k, \omega)$  by a Gaussian function of  $\omega$ . The standard deviation of this fit gives an estimate of  $\delta_\omega$  whose average over the  $k$  values is  $\delta_\omega = 40$  Hz (see dashed lines on Fig. 2). Note that no coherent structures appear on the dispersion relation such as bound waves [26] or solitons [27].

Figure 3 shows the frequency power spectrum  $S_\eta(\omega)$  computed from the single-point measurement. The injected energy at large scales cascades first for  $f < f_{gc} \simeq 17$  Hz with visible forcing harmonics. For  $f \gtrsim f_c$ , we observe a frequency power-law cascade on a decade in the capillary range. We measure that the cascade fits in  $f^{-2.7 \pm 0.2}$  which is found to be in good agreement with predictions in  $f^{-31/12}$  of Eq. (3) with  $N = 5$  (see solid line in Fig. 3). The exponent uncertainty is estimated by slightly changing the fitting frequency range. Note that predictions of Eq. (3) with  $N = 3$  (respectively,  $N = 4$ ) leads to spectrum exponents in  $f^{-17/6}$  and  $k^{-15/4}$  (respectively, in  $f^{-8/3}$  and  $k^{-7/2}$ ) which could be also compatible with the experimental ones. However, no resonant wave interaction is involved theoretically in the capillary regime at these orders ( $N = 3$  and  $N = 4$ ). Note also that the ex-

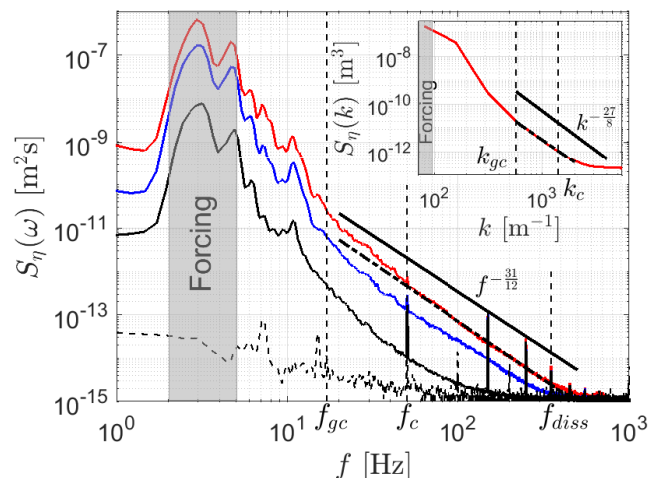


Fig. 3: Frequency spectra  $S_\eta(f)$  for  $\epsilon = 0, 0.006, 0.03$ , and  $0.06$  (from bottom to top). Bottom curve: experimental noise (no forcing). Grey area: forcing bandwidth. Dash-dotted line:  $f^{-2.7}$  best fit. Solid line: predictions in  $f^{-31/12}$  of Eq. (3) with  $N = 5$ . Inset: Wavenumber spectrum  $S_\eta(k)$  for  $\epsilon = 0.06$ . Dash-dotted line:  $k^{-3.2}$  best fit. Solid line: predictions in  $k^{-27/8}$  of Eq. (3) with  $N = 5$ .

perimental power law is slightly steeper ( $f^{-3.3 \pm 0.2}$ ) within  $f \in [f_{gc}, f_c]$  Hz. Indeed, in this intermediate range, both capillarity and gravity contributions are important and deeply entangled so that no prediction exists either dimensionally or by WTT [13], contrary to pure capillary regime ( $f \gtrsim f_c$ ) where the gravity contribution to the dispersion relation is negligible ( $< 5\%$ ). Using the spatio-temporal measurement averaged on time, we plot the wavenumber spectrum  $S_\eta(k)$  in the inset of Fig. 3. The capillary cascade fits in  $k^{-3.2 \pm 0.2}$  also close to the predictions in  $k^{-27/8}$  of Eq. (3) with  $N = 5$ . Using  $S_\eta(k)dk = S_\eta(\omega)d\omega$ ,  $\omega(k) \sim k^{3/2}$ , and assuming  $S_\eta(k) \sim k^\alpha$ , and  $S_\eta(\omega) \sim \omega^\beta$ , one has  $2\alpha/[3\beta + 1] = 1$ . The experimental ratio leads to  $0.90 \pm 0.13$ , showing thus consistency between the frequency and wavenumber spectra. The smaller inertial range for  $S_\eta(k)$  compared to  $S_\eta(\omega)$  is usual in wave turbulence [25, 26]. It is linked, using the dispersion relation, to the lower frequency resolution of the camera than the wire gauge one.

We focus now on the energy flux cascading through the scales. It is estimated by  $P(\omega^*) = \int_{f^*}^{f_m} E(\omega)\Gamma(\omega)d\omega$ , using the total wave energy  $E = gS_\eta(\omega) + (\gamma/\rho)k^2S_\eta(\omega)$  and the viscous dissipation rate of energy  $\Gamma = k\sqrt{\nu\omega}/2$  for a contaminated interface [28]. Figure 4 shows that the flux  $P$  is almost constant in the inertial range  $[f_{gc}, f_{diss}]$  as expected theoretically. The temporal evolution of the Fourier modes  $S_\eta(\omega, t)$  is plotted in the inset of Fig. 4. The energy cascade is found to be stationary and continuous over the frequency scales (as also observed in Fig. 3). No strong fluctuation occurs confirming the absence of coherent structures. The energy injected at the forcing scales

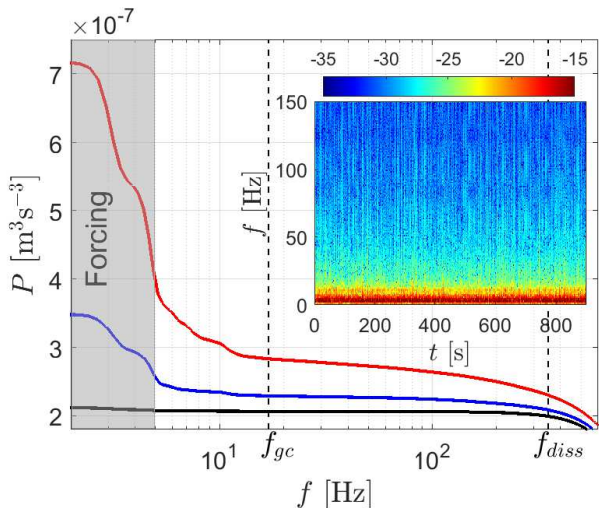


Fig. 4: Evolution of the energy flux  $P$  with the frequency  $f$  for  $\epsilon = 0.006, 0.03$ , and  $0.06$  (from bottom to top). Grey area: forcing bandwidth. Averaged  $P$  values (between  $f_{gc}$  and  $f_{diss}$ ):  $\langle P \rangle = 2.04, 2.19$  and  $2.53 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3\text{s}^{-3}$ . Inset: Time-frequency plot of  $S_\eta(\omega, t)$  using a temporal step  $\delta_t = 0.50$  s and  $\epsilon = 0.06$ . Log colorbar.

thus cascades continuously over scales as expected by wave turbulence. Knowing the value of  $\langle P \rangle = \int_{f_c}^{f_{diss}} P(\omega) d\omega$ , we can thus infer experimentally the Kolmogorov-Zakharov constant  $C_{KZ}^\omega$  using the spectrum fit in Fig. 3 and Eq. (3) with  $N = 5$ . One finds  $C_{KZ}^k = 3C_{KZ}^\omega/2 = (5.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}$ . Note that this constant is smaller than the ones measured and predicted for 2D capillary wave turbulence [28]. For instance, using Eq. (3) with  $N = 3$  (2D) and  $N = 5$  (1D), one expects  $C_{KZ}^{1D} \simeq C_{KZ}^{2D}/23$  for the same magnitude of the spectra, and typical values of  $k = 3 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$  and  $\langle P \rangle = 10^{-7} \text{ m}^3\text{s}^{-3}$ .

**Wave interactions.** – We discuss now the role of nonlinear wave interactions. In a 1D pure capillary regime, no nontrivial *resonant* interaction exists for  $N = 3$  or 4 (i.e., Eq. (1) has no nontrivial solutions with  $N = 3$  or 4 with  $\omega(k) = (\gamma/\rho)^{1/2}k^{3/2}$ ) [2, 14, 15]. However, *quasi-resonances* can exist at these low orders (i.e., Eq. (2) with  $N = 3$  or 4 has solutions) in a 1D pure capillary regime due to the nonlinear spreading of the dispersion relation (see Fig. 2) [15].

First, we experimentally quantify three-wave interactions (i.e.,  $k_1 + k_2 = k_3$ ) by computing the normalized third-order correlation in  $k$  of the wave elevations, called bicoherence [19, 29]

$$B(k_1, k_2) = \frac{|\langle \eta_{k_1}^* \eta_{k_2}^* \eta_{k_1+k_2} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_1+k_2}|^2 \rangle}}, \quad (4)$$

where  $*$  denotes the complex conjugate, the normalization being chosen to bound  $B$  between 0 (no correlation) and 1 (perfect correlation). Figure 5 shows  $B(k_1, k_2)$  for fixed  $\epsilon = 0.06$  (see Supp. Mat. [24] for other values). The results are in agreement with the predictions for the resonance lo-

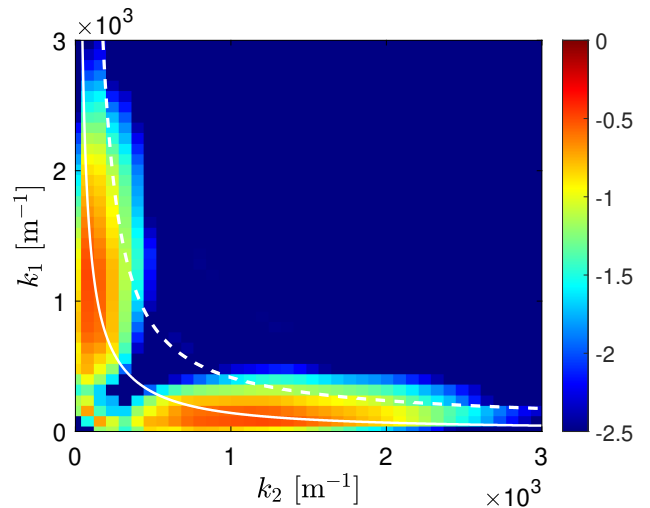


Fig. 5: Bicoherence  $B(k_1, k_2)$  for  $\epsilon = 0.06$ . Solid line: *resonant* interaction solutions of Eq. (1) with  $N = 3$  and  $\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3$ . Dashed line: borders of the *quasi-resonant* interaction area, solutions of Eq. (2),  $N = 3$  with  $\delta_\omega = 40$  Hz. Log colorbar.

cation [see solid line, solution of Eq. (1) with  $N = 3$ ] and the quasi-resonance boundaries [see dashed lines, solutions of Eq. (2) with  $N = 3$ ]. These 1D solutions exist because of the coexistence of the gravity and capillary regimes in the dispersion relation. This probably explains why the frequency spectrum in Fig. 3 is steeper in the range  $f \in [f_{gc}, f_c]$  than in the pure capillary range ( $f > f_c$ ). Indeed, in this pure capillary regime, no resonant solution of Eq. (1) exists with  $N = 3$  and  $\omega(k) = (\gamma/\rho)^{1/2}k^{3/2}$ . This is experimentally confirmed since the bicoherence is observed to vanish at large  $k$ . Thus, the three-wave resonant process occurring in 1D near the gravity-capillary crossover cannot generate wave turbulence in the pure 1D capillary regime ( $f > f_c$ ).

To highlight four-wave interactions (i.e.,  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ ), we compute the fourth-order correlation of the wave elevations (or tricoherence) [30]

$$T(k_1, k_2, k_3) = \frac{|\langle \eta_{k_1}^* \eta_{k_2}^* \eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2-k_3} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2-k_3}|^2 \rangle}}. \quad (5)$$

Figure 6 shows  $T(k_1, k_2, k_3)$  for fixed  $k_3$  and  $\epsilon = 0.06$  (see Supp. Mat. [24] for other values). It shows the occurrence of a large number of four-wave quasi-resonances within the area bounded by Eq. (2) with  $N = 4$  and  $\delta_\omega = 40$  Hz (dashed lines). Note that four-wave pure resonances of Eq. (1) with  $N = 4$ , are also observed (see solid lines forming a cross centered on  $k_1 = k_2 = k_3$ ). However, they do not lead to energy transfers between waves since  $k_1 = k_3$  and  $k_2 = k_4$ , and are thus called degenerated or trivial resonances. Note also that other resonant solutions due to the gravity-capillary contribution appear close to  $k_1 = k_3, k_2 = 0$  and to  $k_2 = k_3, k_1 = 0$  (see small oblique solid lines). These nontrivial solutions can theoretically

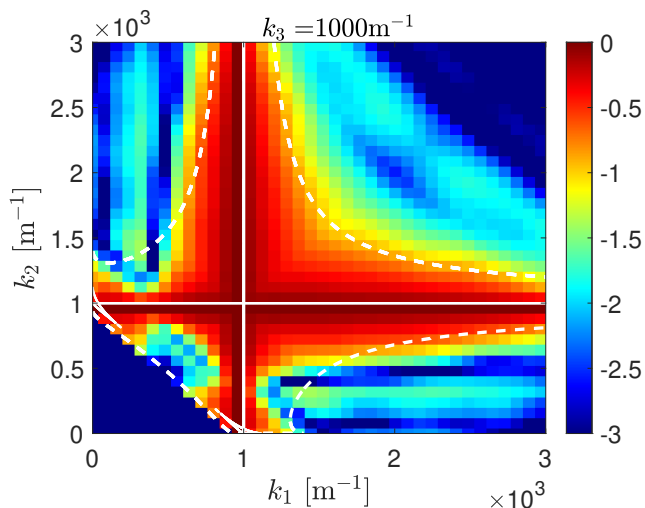


Fig. 6: Tricoherence  $T(k_1, k_2, k_3)$  for fixed  $k_3 = 1000 \text{ m}^{-1}$  and  $\epsilon = 0.06$  ( $2 \leftrightarrow 2$ ). Solid lines: *resonant* interaction solutions of Eq. (1) with  $N = 4$  and  $\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3$ . Dashed lines: borders of *quasi-resonant* interaction area, solutions of Eq. (2),  $N = 4$  with  $\delta_\omega = 40 \text{ Hz}$ . Log colorbar.

lead to a cascade but they vanish in the pure capillary regime ( $f > f_c$  - see Supp. Mat. [24]).

To sum up, we observe low-order resonant interactions ( $N = 3$  and  $4$ ) near the gravity-capillary crossover but they vanish in a pure capillary regime. Quasi-resonances are also present at these orders but, according to WTT, they are dynamically irrelevant to generate wave turbulence and are dominated by resonant interactions existing at the lowest order [2]. It is thus necessary to consider higher-order exact resonances to understand the capillary cascade observed for  $f > f_c$  in Fig. 3. Equation (1) has indeed nontrivial solutions for  $N = 5$  in a 1D pure capillary regime. This five-wave process is hence expected to be the dominant one generating wave turbulence for  $f > f_c$ .

To verify the existence of five-wave interactions, we compute the normalized fifth-order correlation in  $k$  of the wave elevations, called quadricoherence. To our knowledge, this correlation has never been used before to analyze wave turbulence. Analogous to the above bi- and tricoherence used to explore lower-order correlations, we define quadricoherence as

$$Q = \frac{|\langle \eta_{k_1}^* \eta_{k_2}^* \eta_{k_3}^* \eta_{k_4} \eta_{k_1+k_2+k_3-k_4} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_3}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_4} \eta_{k_1+k_2+k_3-k_4}|^2 \rangle}}, \quad (6)$$

Figure 7 shows  $Q(k_1, k_2, k_3, k_4)$  for fixed  $k_3, k_4$  and  $\epsilon = 0.06$  (see Supp. Mat. [24] for other values). Quadricoherence shows the occurrence of a large number of five-wave resonances (solutions of Eq. (1) with  $N = 5$  and  $\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3$ , see white solid lines) and of quasi-resonances within the area bounded by Eq. (2) with  $\delta_\omega = 40 \text{ Hz}$  (see dashed lines). Resonant solutions for  $N = 5$  in a pure capillary regime are also shown in Fig. 7 (magenta solid lines), by solving numerically Eq. (1) with

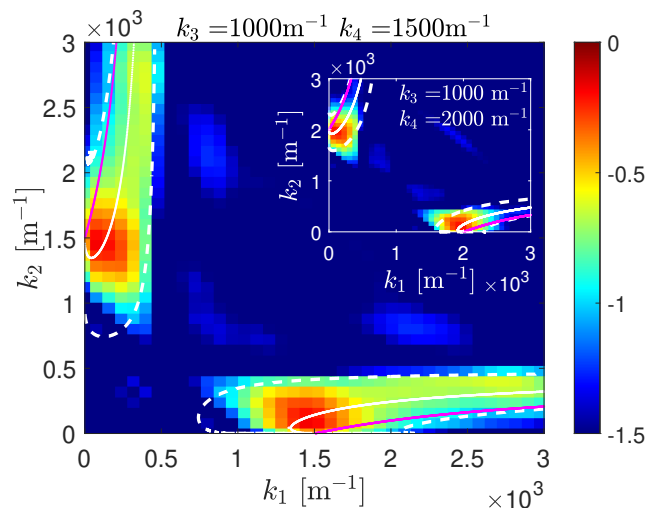


Fig. 7: Quadricoherence  $Q(k_1, k_2, k_3, k_4)$  for fixed  $k_3 = 1000 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_4 = 1500 \text{ m}^{-1}$  and  $\epsilon = 0.06$  ( $3 \leftrightarrow 2$ ). Solid white lines: *resonant* interaction solutions of Eq. (1) with  $N = 5$  and  $\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3$ . Dashed lines: borders of *quasi-resonant* interaction area, solutions of Eq. (2),  $N = 5$  with  $\delta_\omega = 40 \text{ Hz}$ . Magenta solid lines: *resonant* interaction solutions of Eq. (1) with  $N = 5$  and  $\omega^2 = (\gamma/\rho)k^3$ . Inset: same for  $k_3 = 1000 \text{ m}^{-1}$  and  $k_4 = 2000 \text{ m}^{-1}$ . Log colorbar.

$N = 5$  and  $\omega^2 = (\gamma/\rho)k^3$ , i.e., solving

$$k_1^{3/2} + k_2^{3/2} + k_3^{3/2} - k_4^{3/2} = (k_1 + k_2 + k_3 - k_4)^{3/2}. \quad (7)$$

The lower agreement of the magenta curve with data is due to the influence of the gravity regime on the smallest wavenumber of the pentad. The presence of five-wave resonances (see white solid line and green data) which subsists theoretically and experimentally in the pure capillary range (in contrast to  $N = 3$  or  $4$ ) indicates that the five-wave process is probably responsible for the capillary wave turbulence observed in 1D. Such 1D system thus strongly simplifies the problem since we only solved Eq. (1) with  $N = 5$ , i.e., Eq. (7), to determine the location of the exact resonances in the spectral space. Note that the quadricoherence presented here refers to a  $3 \leftrightarrow 2$  process (i.e.,  $k_1 + k_2 + k_3 = k_4 + k_5$ ), the  $4 \leftrightarrow 1$  process (i.e.,  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k_5$ ) is not relevant here since present only in the gravity range.

We now check that the main assumptions of WTT are well validated experimentally.

**Timescales.** – Weak turbulence theory assumes a timescale separation

$$\tau_l(f) \ll \tau_{nl}(f) \ll [\tau_{diss}(f) \text{ and } \tau_{disc}(f)], \quad (8)$$

between the linear propagation time  $\tau_l = 1/\omega$ , the nonlinear interaction time  $\tau_{nl}$ , the dissipation time  $\tau_{diss}$ , and the discreteness time  $\tau_{disc}$ . Satisfying Eq. (8) within the whole inertial range of scales  $f$ , requires that the nonlinear effects are slower than the linear ones and faster than dissipation and discreteness ones, hence a nonlinear cascade

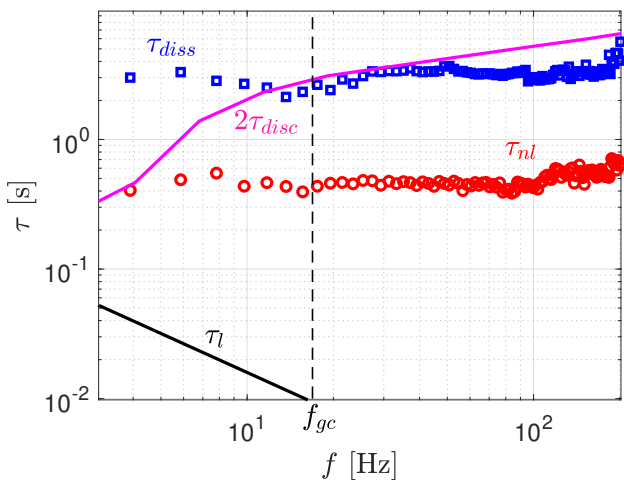


Fig. 8: Wave turbulence timescales versus the frequency scale. Solid line: linear timescale  $1/\omega$ . Nonlinear timescale  $\tau_{nl}$  (circles) and dissipation time  $\tau_{diss}$  (squares) estimated from wave turbulence decaying experiments. Magenta solid line: discreteness time  $\tau_{disc}$ .

of energy over scales is possible without finite size effect and dissipation.

We use decay measurements to reach an estimation of these timescales.  $\tau_{nl}$  (resp.  $\tau_{diss}$ ) is inferred from the fast (resp. slow) decay of Fourier modes [31] (see Supp. Mat. [24]).  $\tau_{disc}$  is computed as the number of eigenmodes found in a frequency band divided by this bandwidth, taking into account both transverse and lateral eigenmodes [32]. No discreteness effect appears when  $\tau_{nl} < 2\tau_{disc}$  (i.e., nonlinear spectral widening  $>$  half frequency separation between adjacent eigenmodes).

Figure 8 shows clearly that the timescale separation of Eq. (8) is fulfilled regardless of  $f$ . Moreover,  $\tau_{diss}$  and  $\tau_{nl}$  are found to be roughly independent of the scale  $f$ , due to finite size effects of the system. Indeed,  $\tau_{diss}$  is the same order of magnitude as the linear viscous dissipation by surface boundary layer of the main lateral eigenmode  $\tau_{diss} = 2\sqrt{2}/[k_{Ly/2}\sqrt{\nu\omega(k_{Ly/2})}] \approx 3$  s [20, 33]. The constant nonlinear time  $\tau_{nl} \approx 0.4$  s is probably due to cumulative energy transfer from this eigenmode in addition to the usual contribution by nonlinear wave interactions [31]. To sum up, the timescale separation assumed by WTT is verified although finite size effects are present (leading to constant values for  $\tau_{nl}$  and  $\tau_{diss}$ ) but not enough ( $\tau_{nl} \ll \tau_{disc}$ ) to prevent the occurrence of wave turbulence.

**Conclusion.** – Small-scale wave turbulence had never been demonstrated experimentally in a quasi-1D system until now. Here, we evidenced the first experimental observation of quasi-1D capillary-wave turbulence. We show that five-wave resonant interactions are the lowest-order resonant process involved in the pure capillary regime, and is probably the one leading to the observed 1D capillary-wave turbulence. Experimental wave spectra are found

compatible with the corresponding dimensional analysis prediction. The main WTT assumptions are also verified (weak nonlinearity, timescale separation, and constant energy flux). As done in 1D gravity waves [22], a theoretical confirmation by WTT of this five-wave process in 1D capillary wave turbulence would be of primary interest. Beyond fluid mechanics, our work could pave the way to other studies in different wave turbulence fields (such as ferrohydrodynamics [34], quantum fluids [35], elasticity [36] or hydro-elasticity [37]), due to easier calculations, simulations and measurements in such 1D geometry.

\*\*\*

We thank E. Kochurin and S. Nazarenko for fruitful discussions. This work was supported by the French National Research Agency (ANR DYSTURB project No. ANR-17-CE30-0004), and by the Simons Foundation MPS N°651463-Wave Turbulence.

## REFERENCES

- [1] ZAKHAROV V. E., L'VOV V. S. and FALKOVICH G., *Kolmogorov spectra of turbulence* (Springer-Verlag, Berlin) 1992.
- [2] NAZARENKO S., *Wave turbulence* (Springer Science & Business Media) 2011.
- [3] NEWELL A. C. and RUMPF B., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43** (2011) 59.
- [4] FALCON E., *Discrete Contin. Dyn. Syst. B*, **13** (2010) 819.
- [5] SHRIRA V. and NAZARENKO S., *Advances in Wave Turbulence* (World Scientific, Singapore) 2013.
- [6] FALCON E., *Wave turbulence: A Set of stochastic nonlinear waves in interaction*, in *Proceedings of the 5th ICAND 2018*, edited by IN V., LONGHINI P. and PALACIOS A. (Springer, New York) 2019, p. 259–266.
- [7] YAROM E. and SHARON E., *Nat. Phys.*, **10** (2014) 510.
- [8] MONSALVE E., BRUNET M., GALLET B. and CORTET P.-P., *Phys. Rev. Lett.*, **125** (2020) 254502.
- [9] SAVARO C., CAMPAGNE A., LINARES M. C., AUGIER P., SOMMERIA J., VALRAN T., VIBOUD S. and MORDANT N., *Phys. Rev. Fluids*, **5** (2020) 073801; DAVIS G., JAMIN T., DELEUZE J., JOUBAUD S. and DAUXOIS T., *Phys. Rev. Lett.*, **124** (2020) 204502.
- [10] BORTOLOZZO U., LAURIE J., NAZARENKO S. and RESIDORI S., *J. Opt. Soc. Am. B*, **26** (2009) 2280; LAURIE J., BORTOLOZZO U., NAZARENKO S. and RESIDORI S., *Physics Reports*, **514** (2012) 121.
- [11] ZAKHAROV V. E. AND FILONENKO N. N., *J. Appl. Mech. Tech. Phys*, **8** (1967) 37.
- [12] GALTIER S., *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **0** (2020) 1.
- [13] FALCON E. AND MORDANT N., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **54** (2022) (in press).
- [14] ZAKHAROV V., DIAS F. and PUSHKAREV A., *Physics Reports*, **398** (2004) 1.
- [15] KOCHURIN E., RICARD G., ZUBAREV N. and FALCON E., *JETP Letters*, **112** (2020) 757.
- [16] ZAKHAROV V. E., *JETP*, **33** (1971) 538.
- [17] CAZAUBIEL A., MICHEL G., LEPOT S., SEMIN B., AUMAÎTRE S., BERHANU M., BONNEFOY F. and FAL-

- CON E., *Phys. Rev. Fluids*, **3** (2018) 114802; REDOR I., BARTHÉLEMY E., MICHALLET H., ONORATO M. and MORDANT N., *Phys. Rev. Lett.*, **122** (2019) 214502; SURET P., TIKAN A., BONNEFOY F., COPIE F., DUCROZET G., GELASH A., PRABHUDESAI G., MICHEL G., CAZAUBIEL A., FALCON E., MICHEL G. and RANDOUX S., *Phys. Rev. Lett.*, **125** (2020) 264101.
- [18] MAJDA A. J., MCLAUGHLIN D. W. and TABAK E. G., *J. Nonlinear Sci.*, **7** (1997) 9; RUMPF B., NEWELL A. C. and ZAKHAROV V. E., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 074502; CHIBBARO S., DE LILLO F. and ONORATO M., *Phys. Rev. Fluids*, **2** (2017) 052603(R).
- [19] AUBOURG Q. and MORDANT N., *Phys. Rev. Fluids*, **1** (2016) 023701.
- [20] LAMB H., *Hydrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin) 1932.
- [21] FALCON E., LAROCHE C. and FAUVE S., *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007) 094503.
- [22] DYACHENKO A., LVOV Y. and ZAKHAROV V. E., *Physica D*, **87** (1995) 233; LVOV Y., *Phys. Lett. A*, **230** (1997) 38; LUCAS D., PERLIN M., LIU D.-Y., WALSH S., IVANOV R. and BUSTAMANTE M. D., *Fluids*, **6** (2021) 205.
- [23] CONNAUGHTON C., NAZARENKO S. and NEWELL A. C., *Physica D*, **184** (2003) 86.
- [24] See Supplemental Material at <http://...> for movies and further data analyses.
- [25] BERHANU M., FALCON E. and DEIKE L., *J. Fluid Mech.*, **850** (2018) 803.
- [26] HERBERT E., MORDANT N. and FALCON E., *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010) 144502; MICHEL G., SEMIN B., CAZAUBIEL A., HAUDIN F., HUMBERT T., LEPOT S., BONNEFOY F., BERHANU M. and FALCON E., *Phys. Rev. Fluids*, **3** (2018) 054801; CAMPAGNE A., HASSAINI R., REDOR I., SOMMERIA J., VALRAN T., VIBOUD S. and MORDANT N., *Phys. Rev. Fluids*, **3** (2018) 044801.
- [27] HASSAINI R. and MORDANT N., *Phys. Rev. Fluids*, **2** (2017) 094803.
- [28] DEIKE L., BERHANU M. and FALCON E., *Phys. Rev. E*, **89** (2014) 023003.
- [29] PUNZMANN H., SHATS M. G. and XIA H., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 064502.
- [30] CAMPAGNE A., HASSAINI R., REDOR I., VALRAN T., VIBOUD S., SOMMERIA J. and MORDANT N., *Phys. Rev. Fluids*, **4** (2019) 074801.
- [31] CAZAUBIEL A., MAWET S., DARRAS A., GROSJEAN G., VAN LOON J. J. W. A., DORBOLO S. and FALCON E., *Phys. Rev. Lett.*, **123** (2019) 244501.
- [32] FALCON E., MICHEL G., PRABHUDESAI G., CAZAUBIEL A., BERHANU M., MORDANT N., AUMAÎTRE S. and BONNEFOY F., *Phys. Rev. Lett.*, **125** (2020) 134501.
- [33] DEIKE L., BERHANU M. and FALCON E., *Phys. Rev. E*, **85** (2012) 066311.
- [34] BOYER F. and FALCON E., *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 244502; DORBOLO S. and FALCON E., *Phys. Rev. E*, **83** (2011) 046303; KOCHURIN E. A., *J. Magn. Magn. Mater.*, **503** (2020) 166607.
- [35] L'VOV V. S. and NAZARENKO S., *JETP Letters*, **91** (2010) 428; MÜLLER N. P. and KRSTULOVIC G., *Phys. Rev. B*, **102** (2020) 134513.
- [36] DÜRING G., JOSSE RAND C. and RICA S., *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006) 025503; BOUDAUD A., CADOT O., ODILLE B. and TOUZÉ C., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 234504; MORDANT N., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 234505.
- [37] DEIKE L., BACRI J.-C. and FALCON E., *J. Fluid Mech.*, **733** (2013) 394; DEIKE L., BERHANU M. and FALCON E., *Phys. Rev. Fluids*, **2** (2017) 064803.

# Supplemental Material

## "Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence"

Guillaume Ricard and Eric Falcon  
*Université de Paris, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France*

In this Supplemental Material, we present additional data analyses related to the observation of quasi-1D capillary-wave turbulence: a movie (Sec. I), the wave elevation distribution probability (Sec. II), the power spectrum of the wave elevation for a monochromatic forcing (Sec. III), low- and high-order correlations of the wave elevation (Sec. IV-V), and decaying experiments to infer the nonlinear and dissipative timescales (Sec. VI). Notations as in the aforementioned manuscript.

### I. MOVIE

*Filename:* WT1DMercuryView1.mp4

*Duration:* 21s

*Filesize:* 5.6 Mo

*Description:* Running experiment for 1D capillary-wave turbulence. Mainly gravity-capillary waves are visible by eyes. Random forcing frequency of the paddle:  $2 \leq f \leq 5$  Hz. Wave steepness  $\epsilon = 0.06$ . The wave elevation,  $\eta(t)$ , is measured with a wire gauge (located at the center of the tank). The spatio-temporal measurement,  $\eta(x, t)$ , with the lateral camera is not visible. The sealed cover used for security purposes has been removed to take videos.

### II. WAVE ELEVATION PROBABILITY DISTRIBUTION

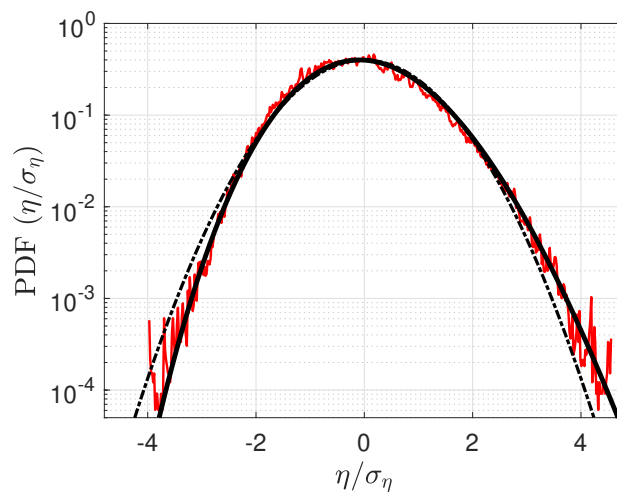


Figure S1: Probability distribution function (PDF) of normalized wave elevation  $\eta(t)/\sigma_\eta$  recorded during 15 min.  $\sigma_\eta = 0.85$  mm. Wave steepness  $\epsilon = 0.06$ . Dash-dotted line displays a Gaussian distribution of zero mean and unit standard deviation. Solid line shows a Tayfun distribution for  $\epsilon = 0.06$ . A weak flatness (kurtosis  $K = \langle \eta^4 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^2 = 3.08$ ) and a weak asymmetry (skewness  $Sn = \langle \eta^3 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^{3/2} = 0.26$ ) is observed as expected for a weakly nonlinear gravity-capillary wave field.

### III. POWER SPECTRUM OF WAVE ELEVATIONS FOR A MONOCHROMATIC FORCING

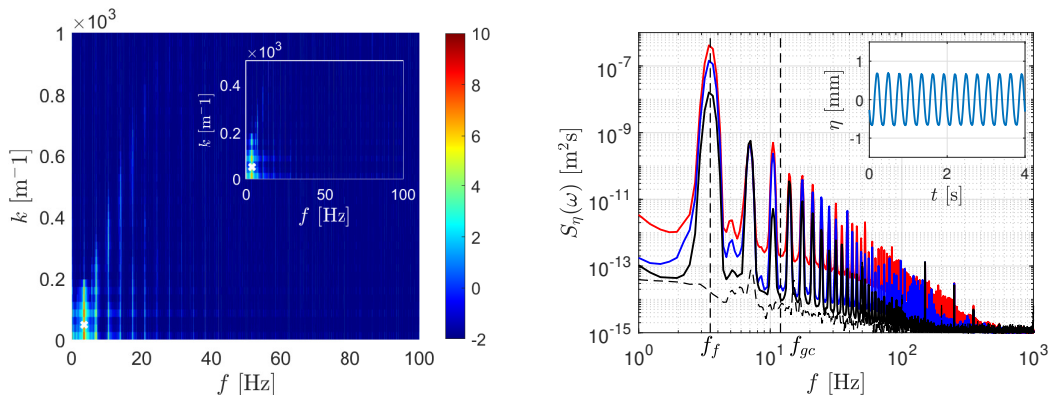


Figure S2: Sinusoidal forcing at  $f_f = 3.5$  Hz (white rectangle). **Left:** Spatio-temporal power spectrum  $S_\eta(k, \omega)$  of wave elevation. No wave turbulence regime is observed, only a set of discrete peaks corresponding to the forcing harmonics. Wave steepness  $\epsilon = 0.06$ . Inset: same for  $\epsilon = 0.03$ . Log colorbar. **Right:** Temporal power spectra  $S_\eta(k, \omega)$  computed from the single-point measurement (capacitive gauge) for different  $\epsilon = 0.006, 0.03,$  and  $0.06$  (from bottom to top curves). Only harmonics of the forcing appear in the spectra, and no continuous cascade is observed. Bottom curve corresponds to the experimental noise (no forcing). Inset: typical temporal evolution of the wave elevation obtained from the capacitive gauge for  $\epsilon = 0.06$ .

### IV. LOW-ORDER CORRELATIONS OF THE WAVE ELEVATION

In this section, we briefly present additional results of low-order correlations ( $N = 3$  and  $N = 4$ ).

#### A. Bicoherence

Three-wave *resonant* interactions and three-wave *quasi-resonant* interactions read, respectively

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) - \omega_3(k_1 + k_2) = 0, \quad (\text{s1})$$

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) - \omega_3(k_1 + k_2) < \delta_\omega. \quad (\text{s2})$$

They are quantified by bicoherence, computed using Eq. (4), and are shown in Fig. S3.

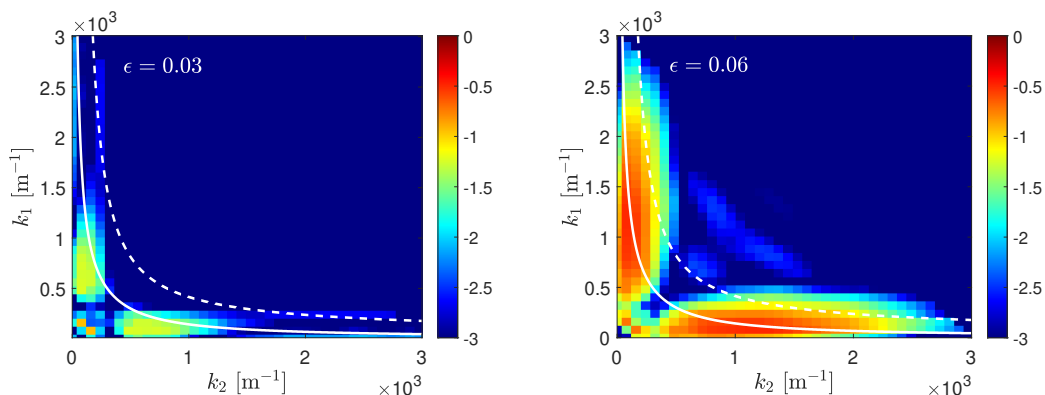


Figure S3: Bicoherence  $B(k_1, k_2)$  for different values of  $\epsilon$ . Solid lines: three-wave *resonant* interactions, solutions of Eq. (s1) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Dashed lines: border of the three-wave *quasi-resonant* interaction area, solutions of Eq. (s2) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Nonlinearity increases the number of quasi-resonances. Log colorbar.

## B. Tricoherence

Four-wave *resonant* interactions and four-wave *quasi-resonant* interactions for a  $2 \leftrightarrow 2$  process (i.e.  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ ) read, respectively

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) - \omega_3(k_3) - \omega_4(k_1 + k_2 - k_3) = 0 , \quad (\text{s3})$$

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) - \omega_3(k_3) - \omega_4(k_1 + k_2 - k_3) < \delta_\omega . \quad (\text{s4})$$

They are quantified by tricoherence, computed using Eq. (5), and are shown in Fig. S4.

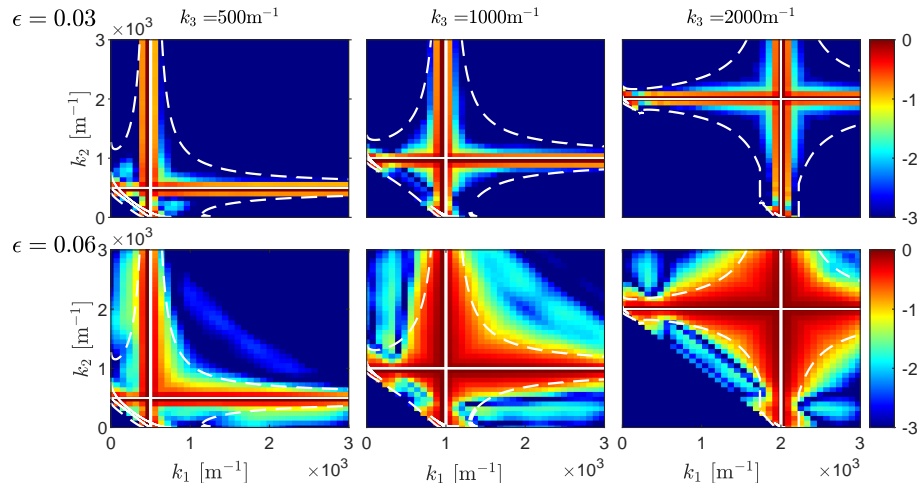


Figure S4: Tricoherence  $T_{2 \leftrightarrow 2}(k_1, k_2, k_3)$  for different values of  $k_3$  and  $\epsilon$ .  $2 \leftrightarrow 2$  process. Solid lines: four-wave *resonant* interactions, solution of Eq. (s3) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Dashed lines: borders of four-wave *quasi-resonant* interaction area, solutions of Eq. (s4) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Nonlinearity clearly increases the number of quasi-resonances. Log colorbar.

We discuss now the possible occurrence of four-wave interactions involving a  $3 \leftrightarrow 1$  process (i.e.  $k_1 + k_2 + k_3 = k_4$ ). The corresponding four-wave *resonant* interactions and 4-wave *quasi-resonant* interactions then read, respectively

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) + \omega_3(k_3) - \omega_4(k_1 + k_2 + k_3) = 0 , \quad (\text{s5})$$

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) + \omega_3(k_3) - \omega_4(k_1 + k_2 + k_3) < \delta_\omega . \quad (\text{s6})$$

The corresponding tricoherence is computed as

$$T_{3 \leftrightarrow 1}(k_1, k_2, k_3) = \frac{|\langle \eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2+k_3}^* \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2+k_3}|^2 \rangle}} , \quad (\text{s7})$$

and are shown in Fig. S5.

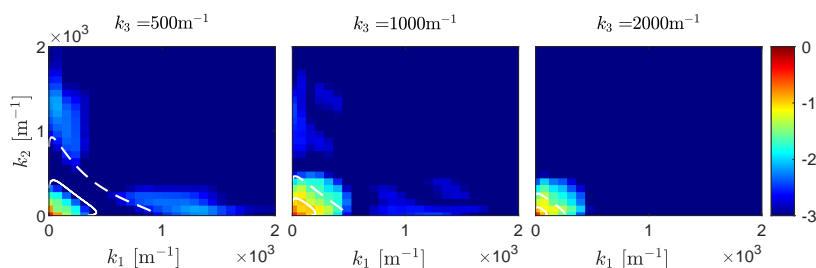


Figure S5: Tricoherence  $T_{3 \leftrightarrow 1}(k_1, k_2, k_3)$  for different value of  $k_3$  at fixed  $\epsilon = 0.06$ .  $3 \leftrightarrow 1$  process. The values obtained are much smaller than for the  $2 \leftrightarrow 2$  process of Fig. S4. Solid line: four-wave *resonant* interactions, solutions of Eq. (s5) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Dashed lines: borders of four-wave *quasi-resonant* interaction area, solutions of Eq. (s6) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Almost no  $3 \leftrightarrow 1$  process occurs in the capillary regime ( $k > k_{gc} \simeq 575 \text{ m}^{-1}$ ). Log colorbar.



## V. HIGH-ORDER CORRELATIONS OF THE WAVE ELEVATION

We present additional results on quadricherence that highlights five-wave interactions. Five-wave *resonant* interactions and five-wave *quasi-resonant* interactions, for a  $3 \leftrightarrow 2$  process (i.e.  $k_1 + k_2 + k_3 = k_4 + k_5$ ), read respectively

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) + \omega_3(k_3) - \omega_4(k_4) - \omega_5(k_1 + k_2 + k_3 - k_4) = 0, \quad (\text{s8})$$

$$\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) + \omega_3(k_3) - \omega_4(k_4) - \omega_5(k_1 + k_2 + k_3 - k_4) < \delta_\omega. \quad (\text{s9})$$

Quadricherence is computed for fixed  $k_3$  and  $k_4$ . For  $k_4 \ll k_3$ , Fig. S6a shows results close to the ones of Fig. S5 for a  $N = 4$  ( $3 \leftrightarrow 1$ ) process. For  $k_4 \gg k_3$ , Fig. S6b shows results close to the ones of Fig. S4 for a  $N = 4$  ( $2 \leftrightarrow 2$ ) process.

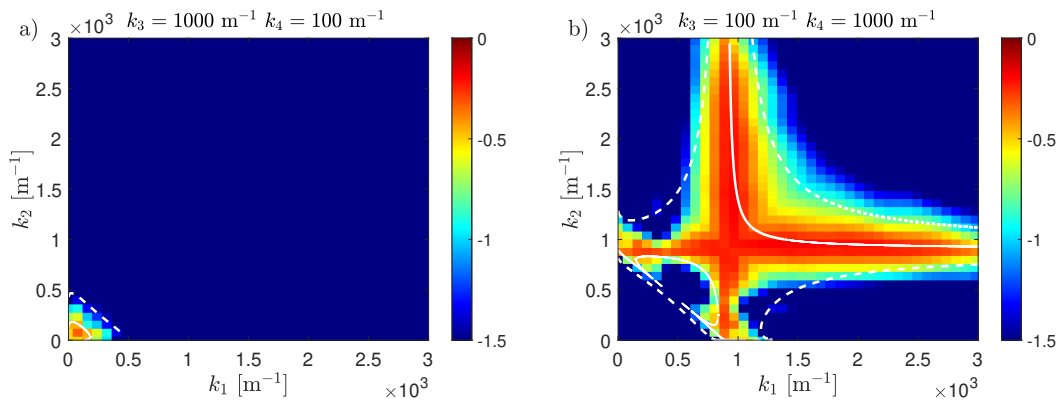


Figure S6: Quadricherence  $Q_{3\leftrightarrow 2}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  for different values of  $k_3$  and  $k_4$  at fixed  $\epsilon = 0.06$ .  $3 \leftrightarrow 2$  process. Solid line: five-wave resonant interactions, solutions of Eq. (s8) with  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Dashed lines: borders of the five-wave quasi-resonant interaction area, solutions of Eq. (s9) with  $\delta_\omega = 40$  Hz and  $\omega_i^2 = gk_i + (\gamma/\rho)k_i^3$ . Log colorbar.

Finally, quadricherence computed for a  $4 \leftrightarrow 1$  process for  $N = 5$  leads to a similar conclusion than for the  $3 \leftrightarrow 1$  process for  $N = 4$ , and is even more negligible (not shown).

## VI. DECAYING EXPERIMENTS

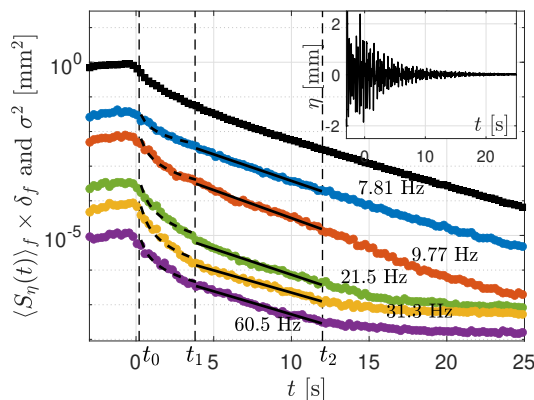


Figure S7: Wave turbulence decaying experiments. Decay of the total wave energy  $\sigma_\eta^2(t)$  (top curve) and of the Fourier modes  $S_\eta(f^*, t)\delta_f$  for increasing frequencies  $f^*$  (from top to bottom curves).  $\delta f \equiv 1/\delta t$  with  $\delta t = 0.25$  s the temporal step. The results are averaged over 250 decay experiments. Dashed vertical lines delimit the fast power-law decay [dashed-line fits between  $t_0$  and  $t_1$  to infer  $\tau_{nl}(f^*)$ ], and the slow exponential decay [solid-line fits between  $t_1$  and  $t_2$  to infer  $\tau_{diss}(f^*)$ ]. Timescales  $\tau_{nl}(f^*)$  and  $\tau_{diss}(f^*)$  are found to be roughly independent of the  $f^*$  scale (see article). Inset: Typical temporal decay of wave elevation signal measured with the wire gauge. Random forcing is stopped at  $t = 0$  s.

## **Chapitre 3**

# **Transition d'un régime de turbulence d'ondes à un régime d'ondes de choc**

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus sur la transition entre un régime de turbulence d'ondes dispersives (celui présenté dans le chapitre 2) et un régime non dispersif mettant en jeu des ondes de choc analogue à de la turbulence acoustique. Ces résultats expérimentaux sont basés sur une expérience d'ondes à la surface d'un ferrofluide soumis à un fort champ magnétique extérieur. Ils ont fait l'objet d'une publication dans *Physical Review Fluids* en 2023 [35] (reporté à la fin du chapitre). Avant ces résultats, nous présentons le contexte autour de la turbulence d'ondes acoustiques et des ondes de choc, puis nous expliquons ce qu'est un ferrofluide et dérivons la nouvelle loi de dispersion issue des fluctuations du champ magnétique.

### 3.1 Turbulence d'ondes acoustiques

Un système d'ondes est dit non dispersif si sa loi de dispersion est de la forme  $\omega = ck$ , dans ce cas toutes les ondes ont la même vitesse  $c$ . C'est le cas des ondes électromagnétiques, des ondes acoustiques, des ondes d'Alfvén dans les plasmas, des ondes élastiques dans les membranes étirées, des ondes de gravité en eau peu profonde, des ondes gravitationnelles... Notons que dans ces systèmes, bien que majoritairement non dispersifs, une faible composante dispersive peut être présente. A première vue, dans un système non dispersif, la turbulence d'ondes telle que décrite par la turbulence faible n'est pas envisageable. En effet, toutes les ondes allant à la même vitesse dans un espace infini, aucune interaction ne peut avoir lieu et l'énergie tend à se concentrer dans des structures cohérentes [11]. Néanmoins, sous certaines conditions (notamment de très faible dispersivité ou d'anisotropie de dispersion), la turbulence devient possible [37, 80]. La question, encore ouverte, est alors de savoir si un système non dispersif peut trouver, expérimentalement, un moyen pour redistribuer son énergie de manière anisotrope et homogène ou si celle-ci se concentre dans des structures cohérentes comme des solitons ou des ondes de choc.

Théoriquement, des travaux sur la turbulence d'ondes faiblement dispersives ont été réalisés. Par exemple, dans le cas d'ondes acoustiques à trois dimensions, le grand nombre de directions de propagation joue le rôle de dispersion, autorisant les interactions entre ondes et menant au spectre de Zakharov-Sagdeev,  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-5/2}$  [81-83]. A deux dimensions, des travaux récents ont montré que l'ajout de faible dispersivité permet à la turbulence d'ondes acoustiques d'être prédite [84]. Dans les plasmas, le cisaillement entre des ondes d'un même plan leur permet d'interagir [37]. Pour les ondes élastiques dans les membranes [25], comme pour les ondes gravitationnelles dans l'univers primordial [85], le couplage non linéaire des ondes colinéaires s'effondre et l'énergie est redistribuée dans toutes les directions. Ces différents aspects prédisent l'existence d'une turbulence d'ondes très faiblement dispersives en empêchant à l'énergie de se concentrer dans des structures cohérentes. Néanmoins, d'autres études, notamment pour les ondes acoustiques, montrent que l'apparition de chocs est inévitable et qu'elle mène au spectre de Kadomtsev-Petviashvili  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-2}$ , et ce quelle que soit la dimension du système [86].

Du point de vue expérimental, peu de travaux se sont intéressés à la transition vers un système non dispersif ou quasi non dispersif. Dans le cas d'ondes de gravité en eau peu profonde, le système devient faiblement dispersif et la formation de soliton a été mise en évidence au détriment d'un régime de turbulence d'ondes [87]. Pour des ondes gravito-capillaires, en eau peu profonde, les régimes de turbulence d'ondes sont fortement inadaptés et présentent la formation d'une bosse (bottleneck dépendant de la profondeur d'eau) sur le spectre [88]. Pour obtenir un système non dispersif, il est également possible d'utiliser un ferrofluide dans un bassin soumis à un champ magnétique fort. Dans ce cas, un terme non dispersif s'ajoute à la loi de dispersion gravito-capillaire dans la direction du champ [89, 90]. Ce système gravito-capillaire en eau profonde va être mis en jeu ici mais au sein d'un canal 1D. Un champ magnétique extérieur homogène dans toutes les directions de l'espace étant difficilement atteignable expérimentalement (voir chapitre 4), l'utilisation d'un canal 1D permet d'obtenir une loi de dispersion où la dispersivité peut

être pilotable par le champ magnétique. Notons que contrôler la dispersivité via le champ magnétique extérieur, est expérimentalement plus simple que faire varier la hauteur d'eau d'un canal pour passer de l'approximation d'eau profonde en celle d'eau peu profonde.

### 3.2 Ondes de choc et équation de Burgers

Dans cette section, nous présentons brièvement des résultats théoriques sur l'obtention d'ondes de choc à partir de l'équation de Burgers [91]. L'équation de Burgers sur la variable  $\eta(x, t)$  s'écrit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + A\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

où  $A$  est une constante dimensionnelle et  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide considéré. Cette équation est un outil très précieux et largement utilisé par les théoriciens, car il s'agit d'une version simplifiée de l'équation de Navier-Stokes. Ces deux équations sont proches et partagent le même type d'advection non linéaire et de diffusion, plusieurs invariants et plusieurs lois de conservation. Cette proximité permet à l'équation de Burgers d'être un bon outil pour mieux comprendre les équations de Navier-Stokes. Néanmoins, cette comparaison a des limites puisque l'équation de Burgers ne tient pas compte d'un des éléments clés de la turbulence : l'apparition spontanée d'une dynamique chaotique aléatoire [92]. A une dimension, l'équation de Burgers décrit les écoulements compressibles, ce qui en fait un très bon candidat pour décrire les ondes acoustiques non linéaires, ou plus généralement les ondes non dispersives et non linéaires.

L'équation de Burgers, d'équation (3.1), peut être facilement résolue numériquement avec un schéma implicite sur une grille de 1024 points en utilisant la formulation de Crank-Nicolson [93] et un algorithme de Thomas [94]. Nos simulations sont représentées sur la figure 3.1 pour différentes valeurs de temps en partant d'une condition initiale  $\eta(x, 0) = \sin(x)$  (courbe bleue). Nous observons la formation d'une onde de choc caractérisée par un front vertical dont l'amplitude décroît au cours du temps sous l'effet de la viscosité. La formation d'un choc provient du fait que la vitesse est plus importante au sommet de l'onde qu'à sa base, la viscosité quant à elle régule l'amplitude du choc.

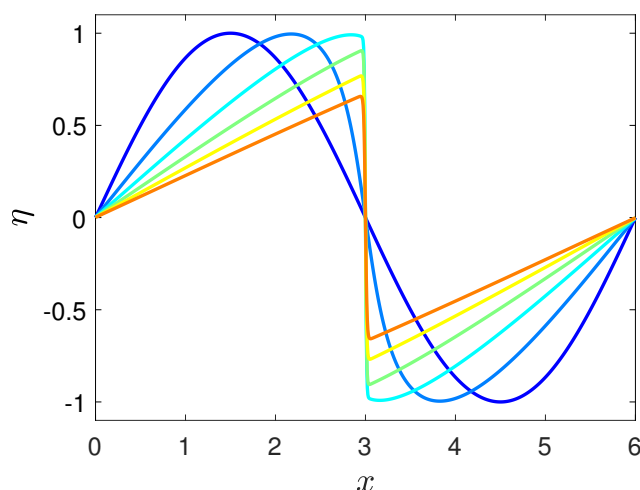


FIGURE 3.1 : Évolution temporelle de  $\eta(x)$ , solution de l'équation de Burgers (3.1) à différents temps en partant d'une condition initiale  $\eta(x, 0) = \sin(x)$  (courbe bleue).

Dans un système où de nombreux chocs, de tailles différentes, se forment de manière aléatoire, on parle de "turbulence" de chocs [92]. Ces structures cohérentes se déplacent en conser-

vant leur forme et en rayonnant de l'énergie à toutes les fréquences du fait de la discontinuité qui accompagne le front vertical. Elles contrôlent alors totalement le spectre d'énergie qui est un spectre de type Kadomtsev-Petviashvili en  $S_\eta(k) \sim k^{-2}$ . Les fortes discontinuités imposent en effet que la dérivée du signal soit une distribution aléatoire de  $\delta$ -Dirac ce qui implique un spectre plat  $S_{\partial\eta}(k) \sim k^0$  pour la dérivée en  $x$  du signal  $\eta$ , et donc par intégration le spectre  $S_\eta(k) \sim k^{-2}$ . Dans l'expérience proposée ci-après, des structures similaires vont être mises en évidence.

### 3.3 Ferrofluide

Nous présentons, ici, ce qu'est un ferrofluide et montrons comment son utilisation permet d'obtenir une loi de dispersion dont la dispersion peut être pilotée par un paramètre contrôlable par un opérateur.

#### 3.3.1 Caractéristiques

Un ferrofluide est une suspension colloïdale de nanoparticules ferromagnétiques (ici de l'oxyde de fer  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  à 7.9% dans une base de polyéthylène glycol). Ces particules confèrent des propriétés magnétiques au liquide tout en le laissant conserver sa cohésion et sa stabilité. La cohésion d'un tel fluide est possible du fait de la très faible taille des particules (10 nm de diamètre dans notre cas) qui permet à l'énergie thermique d'être supérieure aux énergies de pesanteur, magnétique et d'interaction entre particules. Ainsi, même lorsque le système est soumis à un champ magnétique extérieur, l'agrégation entre particules n'est pas observée, l'agitation thermique reste suffisamment importante pour laisser le fluide homogène. Chaque particule magnétique du fluide possède sa propre aimantation  $\vec{m}$ , sans champ extérieur ces aimantations sont orientées aléatoirement donnant une aimantation totale  $\vec{M}$  nulle. En revanche, en présence d'un champ extérieur, les particules ont tendance à s'aligner rendant l'aimantation totale non nulle.

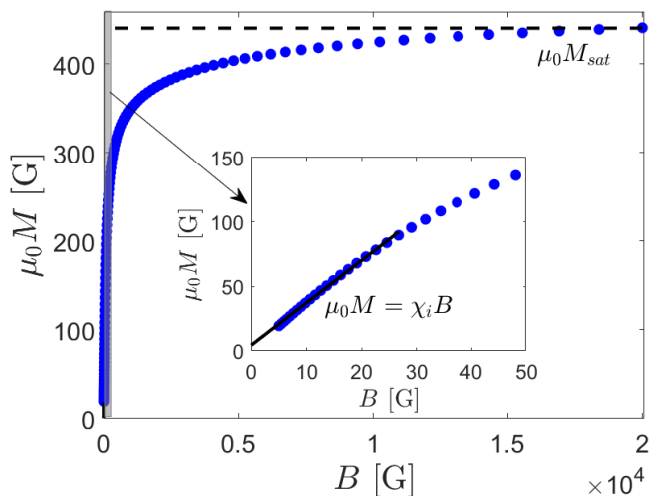


FIGURE 3.2 : Courbe d'aimantation  $M(B)$ . La limite en  $B \rightarrow +\infty$  donne la valeur  $M_{sat}$  et la pente à l'origine (tracée en encart) la valeur de la susceptibilité magnétique initiale  $\chi_i$ .

Nous utilisons ici le ferrofluide PBG400 produit par l'entreprise Ferrotec. La capacité d'un ferrofluide à ressentir les effets d'un champ magnétique extérieur est quantifiée grâce à sa courbe d'aimantation  $M(B)$ , où  $B$  est le champ magnétique induit extérieur. Cette courbe dont les données ont été fournies par le fournisseur est tracée en figure 3.2, l'utilisation de la perméabilité

du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Tm/A permet de travailler en Gauss. Nous en déduisons ainsi l'aimantation de saturation  $\mu_0 M_{sat} = \mu_0 \lim_{B \rightarrow +\infty} M = 440$  G ainsi que la susceptibilité magnétique initiale  $\chi_i = \mu_0 \frac{dM}{dB} |_{B \rightarrow 0} = 3.28$ , qui permettent de quantifier les effets du champ sur le fluide.

Le but étant d'observer des ondes de surfaces, le principal problème rencontré avec l'utilisation d'un ferrofluide est la forte viscosité. En effet, plus la densité de particules magnétiques est importante (afin d'avoir un fort  $\chi_i$ ), plus le liquide est visqueux. Le but est donc de travailler avec un ferrofluide qui soit un bon compromis entre effets magnétiques forts et viscosité faible. C'est pourquoi nous utilisons un ferrofluide à base d'eau et qui possède une viscosité relativement faible,  $\nu = 2.86 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s (soit presque 3 fois celle de l'eau) pour une fraction volumique de particule de 7.9% : PBG400 de Ferrotec. La viscosité étant toutefois supérieure à celle de l'eau, le régime de turbulence d'ondes capillaires sera dissipé à plus grande échelle que pour celui observé dans le mercure au chapitre 2.

### 3.3.2 Équations générales

Contrairement aux parties précédentes où seules les effets de gravité et de capillarité étaient pris en compte, cette fois des effets magnétiques doivent être ajoutés. Les calculs présentés ici sont analogues à ceux effectués par Zelaco et Melcher [95] et ceux de Rosensweig dans le cas d'un champ magnétique extérieur vertical [89]. Nous considérons un fluide magnétique dans deux dimensions d'espace ( $x, z$ ), sujet à un champ magnétique extérieur horizontal  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_x$  homogène et constant à la surface au repos du liquide. Nous négligeons les effets de viscosité, de gravité et de tension de surface pour simplifier les calculs. Nous définissons l'aimantation  $\mathbf{M}$  qui est non nulle dans le liquide magnétique, et qui est liée au champ magnétique  $\mathbf{H}$  et au champ magnétique induit  $\mathbf{B}$  par  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ . Les vecteurs normal et tangentiel à l'interface sont définis tels que  $\mathbf{n} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right)$  et  $\mathbf{t} = \left( 1, -\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$ , avec  $\frac{\partial \eta}{\partial x} \ll 1$ . Le système est représenté sur la figure 3.3. Notons que la profondeur du liquide est ici notée  $d$  pour éviter des confusions avec le champ magnétique.

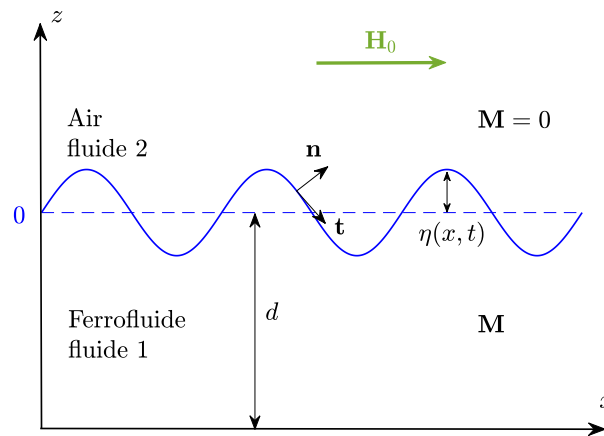


FIGURE 3.3 : Schéma du système considéré.

Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu_0}{\rho} M \nabla H, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Comme dans le chapitre 1, l'écoulement étant supposé irrotationnel, nous définissons le potentiel vitesse par  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ . De plus, les équations de la thermodynamique impose que :

$$\mu_0 M \nabla H = \nabla \left[ \int_0^H \mu_0 M dH \right] - \int_0^H \frac{\partial M}{\partial T} \nabla T dH, \quad (3.3)$$

avec T la température du système supposée constante, ce qui annule le dernier terme. L'aimantation moyenne  $\overline{M} = \frac{1}{H} \int_0^H M dH$  permet d'écrire :

$$\frac{\mu_0}{\rho} M \nabla H = \nabla \left[ \frac{\mu_0}{\rho} \overline{MH} \right], \quad (3.4)$$

où  $H = |\mathbf{H}|$ . Nous appliquons comme dans la partie 1.1.2 les conditions aux limites. Par conservation de la masse  $\frac{D\eta}{Dt} = u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}|_{\eta}$ , la vitesse s'annule au fond donc  $u_{z=-d} = \frac{\partial\phi}{\partial z}|_{z=-d} = 0$  et la continuité des tenseurs de pression impose à l'interface que  $p = \frac{\mu_0}{2} M_n^2$  où  $M_n$  est la composante normale de l'aimantation. Ce terme de pression agit sur l'interface et est appelé pression de Maxwell [89, 95]. Ce qui donne, après linéarisation, les équations pour l'interface :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\mu_0}{\rho} \overline{MH} + \frac{\mu_0}{2\rho} M_n^2 &= 0, & \text{en } z = \eta, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = \eta, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = -d. \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.3.3 Fluctuations du champ magnétique

Nous nous intéressons maintenant au champ magnétique. Les champs subissent des fluctuations à l'interface telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (H_0 + h_x, h_z), \\ \mathbf{B} &= (B_0 + b_x, b_z), \\ \mathbf{M} &= (M_0 + m_x, m_z), \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec  $H_0 \gg (h_x, h_z)$ ,  $B_0 \gg (b_x, b_z)$  et  $M_0 \gg (m_x, m_z)$ . Ce qui donne  $M_n^2 = (M_0 \frac{\partial\eta}{\partial x})^2 + m_z^2 + 2M_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} m_z$  qui est nulle au premier ordre, ce qui annule le terme de pression de Maxwell en première approximation. D'autre part,  $H \approx H_0 + h_x$  au premier ordre, ainsi le produit  $\overline{MH}$  peut s'écrire :

$$\overline{MH} = \int_0^{H_0} M' dH' + \int_{H_0}^{H_0+h_x} M' dH' \approx (\overline{MH})_0 + M_0 h_x. \quad (3.7)$$

Le terme  $(\overline{MH})_0$  est valide pour une surface au repos, il ne sera donc pas pris en compte dans la dynamique du système. Les équations (3.5) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\mu_0}{\rho} M_0 h_x &= 0, & \text{en } z = \eta, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = \eta, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = -d. \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'objectif est maintenant de trouver une expression de  $h_x$ . La loi d'Ampère impose en l'absence de courant que  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  donc que  $\nabla \times \mathbf{h} = 0$ . Nous définissons alors le potentiel des fluctuations du champ magnétique  $\psi$  tel que  $\mathbf{h} = \nabla \psi$ . Les lois de Maxwell imposent que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  donc que  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , ce qui donne  $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ , nous retrouvons alors la loi Laplace pour le potentiel magnétique :

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (3.9)$$

Nous chercherons comme dans la partie 1.1.2 des solutions harmoniques de la forme :

$$\begin{aligned} \phi &= \varphi(z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi &= \Psi(z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \eta &= \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le potentiel magnétique  $\psi$  suivant la loi de Laplace, la fonction  $\Psi$  est donc solution de l'équation de Helmholtz et doit être bornée en  $z \rightarrow +\infty$  et en  $z \rightarrow -\infty$ , elle prendra dans les régions 1 (liquide) et 2 (air) la forme :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \hat{\psi}_1 \eta_0 e^{kz}, \\ \Psi_2 &= \hat{\psi}_2 \eta_0 e^{-kz}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec 1 et 2 les indices indiquant les côtés air et liquide de l'interface. Le choix de la constante  $\eta_0$  facilite les calculs. Dans les deux régions 1 et 2 proches de l'interface, les potentiels magnétiques s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \hat{\psi}_1 \eta e^{kz}, \\ \psi_2 &= \hat{\psi}_2 \eta e^{-kz}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous adopterons la notation  $[X] = X_2 - X_1$ . A l'interface, la composante tangentielle du champ  $\mathbf{H}$  et la composante normale du champ induit  $\mathbf{B}$  sont conservées. Nous avons donc à l'interface :

$$\begin{aligned} [H_t] &= [\mathbf{H} \cdot \mathbf{t}] = 0, \\ [B_n] &= [\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} [H_0] &= [h_x] = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} [B_0] + [b_z] &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nous nous plaçons dans l'approximation linéaire pour les fluctuations du champ, donc  $b = \mu h$  où  $\mu$  est la perméabilité du fluide dans 1 et du vide dans 2. De plus  $B_{10} = \mu_0 H_0$  et  $B_{20} = \mu_0 (H_0 + M_0)$  d'où  $[B_0] = \mu_0 M_0$ . En utilisant le potentiel magnétique, les équations (3.14) deviennent :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_2 e^{-kz} - \hat{\psi}_1 e^{kz} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \mu_0 M_0 - \mu_0 \eta k e^{kz} \hat{\psi}_1 - \mu \eta k e^{-kz} \hat{\psi}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ce qui donne à l'interface  $z = 0$  en supposant une interface harmonique  $\eta = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}$  :



$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_2 &= \hat{\Psi}_1 = \hat{\Psi}, \\ \hat{\Psi} &= \frac{iM_0}{1 + \frac{\mu}{\mu_0}}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Nous déduisons ainsi la valeur de la fluctuation du champ à l'interface  $h_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$  :

$$h_x = -\frac{M_0 k}{1 + \frac{\mu}{\mu_0}} \eta. \quad (3.17)$$

### 3.3.4 Loi de dispersion linéaire des ondes gravito-magnético-capillaires

En reprenant les résultats de la partie 1.1.2 sur le potentiel vitesse supposé harmonique :

$\phi = \phi_0 \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} e^{i(kx-\omega t)}$ . Le système d'équation (3.8) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}-i\omega\phi_0 + \frac{\mu_0}{\rho} M_0 \frac{M_0 k}{1 + \frac{\mu}{\mu_0}} \eta_0 &= 0, \\ -i\omega\eta_0 - k\phi_0 \tanh(kd) &= 0.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Ce qui donne la loi de dispersion [89] :

$$\omega^2 = \frac{\mu_0 M_0^2}{\rho \left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\right)} k^2 \tanh(kd). \quad (3.19)$$

En prenant en compte l'approximation d'eau profonde et en ajoutant les termes de gravité et de capillarité, la loi de dispersion complète est donnée par :

$$\omega^2 = gk + \frac{Y}{\rho} k^3 + \nu_A^2 k^2, \quad (3.20)$$

avec  $\nu_A^2 = \frac{\mu_0 M_0^2}{\rho \left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\right)}$  une vitesse non dispersive analogue à la vitesse d'Alfvén dans les plasmas. Cette vitesse pilote ainsi le terme non dispersif de la loi de dispersion, elle est directement liée au champ magnétique extérieur  $H_0$  (donc au champ induit  $B_0$ ) par l'intermédiaire de l'aimantation  $M_0$ . Le lien entre  $\nu_A$  et  $B_0$  est obtenu expérimentalement par la courbe d'aimantation de la figure 3.2. Le champ magnétique extérieur permet ainsi de piloter la dispersion du système. Obtenir un régime non dispersif, ou quasi non dispersif, revient à appliquer un champ magnétique tel que  $\nu_A^2 k^2 \gg \left[ gk; \frac{Y}{\rho} k^3 \right]$  [35].

En revenant aux équations de Navier-Stokes, la force magnétique  $F_m = \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \nabla H$  projetée selon l'axe des  $x$  s'écrit :

$$F_{mx} \approx \mu_0 M_0 \frac{\partial h_x}{\partial x} = \rho \nu_A^2 k^2 \eta, \quad (3.21)$$

cette force est proportionnelle à  $\eta$  ce qui signifie que plus les ondes sont hautes, plus la force est importante. La vitesse du fluide dans l'axe des  $x$  est donc plus importante aux sommets des ondes qu'à leur base. Ce mécanisme, analogue à ce qu'il se passe pour l'équation de Burgers, entraîne un raidissement des ondes qui pourrait aller jusqu'à la formation d'ondes de choc. Notons également que dans le cas d'un fort champ couplé à un ferrofluide de grande susceptibilité, la pression de Maxwell qui a été négligée ici peut devenir importante. C'est notamment au sommet des ondes qu'elle sera la plus forte entraînant leur disparition, le champ magnétique longitudinal agit alors comme un stabilisateur [89]. Cet effet n'est pas observé expérimentalement, mais sera discuté numériquement dans le chapitre 4.

### 3.4 Résumé des résultats obtenus

Les résultats présentés dans l'article ci-dessous sont basés sur une expérience à la surface du ferrofluide PBG400 (Ferrotec) au sein d'un canal 1D soumis à un champ magnétique extérieur horizontal. A  $v_A = 0$  m/s, nous retrouvons les résultats de turbulence d'ondes dispersives gravito-capillaires observés précédemment sur de l'eau ou du mercure [34]. Tandis que pour des grandes valeurs de  $v_A$  nous observons une transition vers un régime non dispersif  $\omega \sim v_A k$ . Des raidissements des ondes, dus aux fluctuations du champ à l'interface, apparaissent jusqu'à former des ondes de choc non dispersives qui se déplacent à vitesse constante en conservant leur forme. Ces chocs, proches de ceux de l'équation de Burgers, sont caractérisés par une discontinuité d'ordre 2 (leur dérivée seconde correspond à un  $\delta$ -Dirac et non la dérivée première comme les chocs de Burgers). La discontinuité n'est pas du premier ordre, car le front d'onde n'est pas complètement vertical à cause de faibles effets dispersifs encore présents. Néanmoins, à cause de cette discontinuité, les chocs sont des structures cohérentes qui rayonnent à toutes les fréquences. En transportant de l'énergie, ces structures fortement non linéaires engendrent un spectre d'énergie en  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-4}$  empêchant ainsi la turbulence d'ondes d'avoir lieu. Le nouveau régime d'ondes de choc aléatoires est décrit avec succès en utilisant le modèle de Kuznetsov de singularités [66].

### 3.5 Article publié dans *Physical Review Fluids* en 2023

Guillaume Ricard et Eric Falcon, "Transition from wave turbulence to acousticlike shock-wave regime", [35].

**Transition from wave turbulence to acousticlike shock-wave regime**Guillaume Ricard \* and Eric Falcon †*Université Paris Cité, CNRS, MSC, UMR 7057, F-75013 Paris, France*

(Received 11 October 2022; accepted 10 January 2023; published 31 January 2023)

We report on the experimental observation of a transition from a dispersive wave turbulence regime to a nondispersive regime involving shock waves on the surface of a fluid. We use a magnetic fluid in a canal subjected to an external horizontal magnetic field to tune the dispersivity of the system. For a low magnetic field, gravity-capillary wave turbulence is observed, whereas for a high enough field, random steep coherent structures arise which are found to be shock waves. These shock waves create singularities in the second-order difference of the surface elevation, leading to an  $\omega^{-4}$  frequency power spectrum. This spectrum is also found to be controlled by the number and amplitude of the shocks and is well captured by a model based on a random Dirac- $\delta$  distribution (Kuznetsov-like spectrum). Finally, the shock-amplitude statistics exhibits a power-law distribution with an exponent close to the predictions of the one-dimensional random-forced Burgers equation. To our knowledge this shock-wave regime has not previously been examined for surface waves and this work paves the way to better explore their properties.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.8.014804](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.8.014804)**I. INTRODUCTION**

Wave turbulence is a statistical state in which numerous random weakly nonlinear waves interact with each other. This phenomenon is described by the weak wave turbulence theory (WTT) which predicts a power-law cascade of the wave energy spectrum from large to small scales [1–3]. This out-of-equilibrium stationary state occurs in various domains with different scales such as ocean surface waves, plasma waves, hydroelastic waves, elastic waves on a plate, internal or inertial waves on rotating stratified fluids, and optical waves [2]. Despite its success in predicting analytically the wave spectrum, WTT requires many assumptions (e.g., infinite system, weak nonlinearity, constant energy flux, timescale separation, and dispersive waves), which can be difficult to satisfy experimentally. Although wave turbulence has been assessed in different experimental systems [4–9], it is of paramount interest to know the validity domain of the theory in experiments regarding its assumptions. For example, finite-size effects are beginning to be considered theoretically [10,11] and experimentally [12–15] for hydrodynamics surface waves. Finite-amplitude effects have also been tackled to address the existence of a transition from weak to strong wave turbulence [2].

In comparison, few studies have investigated whether or not wave turbulence exists in a nondispersive wave system. In this case, waves of different frequencies travel with the same phase velocity and thus cannot transfer energy between each other by resonant interactions [2]. This leads to the breaking of a main assumption of WTT, and coherent structures such as solitons or shocks are thus expected due to cumulative effects of the nonlinearity [16,17]. This has been the source of a long-standing debate about whether acoustics waves should be considered as a random set of shocks (leading to the Kadomtsev-Petviashvili spectrum) [18] or if WTT is applicable for their description [19]. Indeed, three-dimensional acoustic WTT could be theoretically possible because

\* [guillaume.ricard@u-paris.fr](mailto:guillaume.ricard@u-paris.fr)† [eric.falcon@u-paris.fr](mailto:eric.falcon@u-paris.fr)

the large range of possible wave directions in three dimensions acts as an effective dispersion [2,16,17,19], although yet unsupported by a rigorous proof [20]. Conversely, WTT is not applicable for two-dimensional (2D) nondispersive acoustic waves, but can be regularized by weakly dispersive effects leading to predictions for 2D weakly dispersive acoustic wave turbulence [20]. Weakly dispersive wave turbulence also occurs theoretically or numerically for Alfvén waves in plasma [21], gravitational waves in the early universe [22] and elastic waves on a stretched membrane [7]. Experimentally, a weakly dispersive wave regime can be obtained on the surface of a magnetic fluid subjected to an external horizontal magnetic field. The latter modifies the dispersion relationship of surface waves adding a nondispersive term that is tunable experimentally [23]. In this case, dispersive wave turbulence is evidenced experimentally in two dimensions because of the anisotropic dispersion relation, nondispersivity occurring only in the magnetic field direction [24,25]. Another method to experimentally control the wave dispersion is to decrease the fluid depth of gravity-capillary wave turbulence from a deep regime to a shallow one [26,27]. This deep-to-shallow transition leads to a less steep gravity wave spectrum, the formation of a depth-dependent hump in the capillary spectrum (as an analog of a bottleneck effect) for a weak forcing [26], and the formation of coherent structures as solitons when the forcing is strong enough [27,28].

Here we use a one-dimensional (1D) canal filled with a magnetic fluid subjected to an external horizontal magnetic field to tune the dispersivity of the wave system within a deep-water regime. At a low magnetic field, the classical quasi-1D dispersive gravity-capillary wave turbulence is observed [29], whereas at a high enough field a nondispersive regime is reached. In the latter, we observe the emergence of random shock waves, keeping their shape over time, with a very steep profile close to the one derived from the 1D Burgers equation [30], although not reaching a fully vertical front. They are characterized by a discontinuity that leads to a Dirac- $\delta$  singularity in the second-order difference of their amplitude. We show that these shock waves are coherent structures rich in the frequency domain, which carry energy over the canal. They thus become the main mechanism building the wave energy spectrum. Indeed, we found that the energy spectrum of these shocks agrees with a model of a Kuznetsov-like spectrum of second-order singularities [31]. The shock-wave statistics are also reported and show that their probability distribution is close to the one of a diluted gas of shocks driven by the 1D random-forced Burgers equation [32–36]. A phase diagram of the wave turbulence and shock-wave regimes is also reported as a function of the control parameters. The energy transfer driven by the shock waves is thus fundamentally different from the local one occurring in wave turbulence by nonlinear wave resonant interactions.

The article is organized as follows. We present in Sec. II some theoretical background (dispersion relationship, magnetic steepening, and energy spectrum predictions). Section III presents the experimental setup. Section IV shows the experimental results on the wave energy spectrum (using spatiotemporal, time-frequency, and frequency analyses), the energy flux, and timescales. Section V focuses on the nondispersive regime emphasizing the presence of dissipative coherent structures as shock waves, and their statistics. Section VI presents the model used to predict the shock-wave spectrum and the conditions for an experimental agreement. We summarize in Sec. VII.

## II. THEORETICAL BACKGROUND

### A. Dispersion relation

The dispersion relation of one-dimensional linear deep-water inviscid gravity-capillary waves reads  $\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3$ , with  $\omega = 2\pi f$  the angular frequency,  $k$  the wave number,  $g$  the acceleration of gravity,  $\gamma$  the surface tension, and  $\rho$  the density of the liquid [37]. For a magnetic liquid subjected to a horizontal magnetic induction  $B$  (collinear to the wave propagation), an additional nondispersive term, i.e., acousticlike term in  $\omega \sim k$ , has to be taken into account for which its strength is controlled by  $B$ . The corresponding dispersion relation then reads [23,38]

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3 + v_A^2(B)k^2, \quad (1)$$

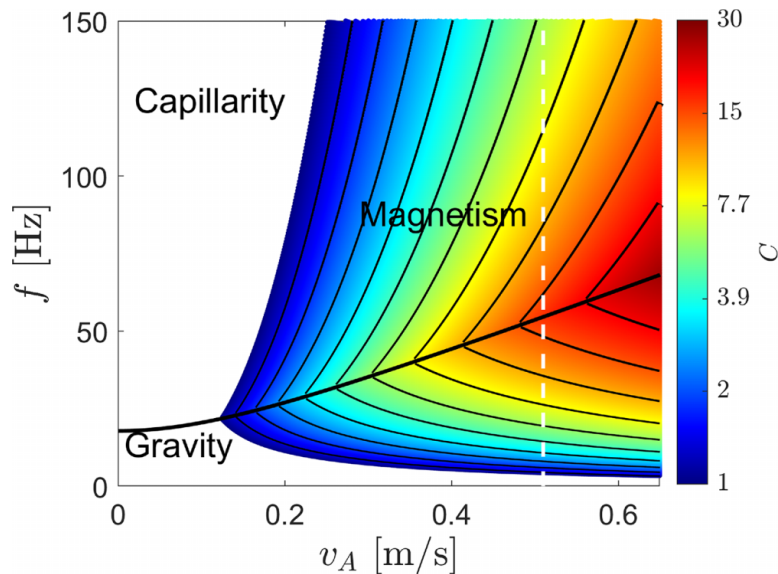


FIG. 1. Theoretical diagram of the predominance of the gravity, capillary, and magnetic regimes. Here  $C$  is defined as how much the magnetic term is bigger than the two others. The experimental ranges are  $f < 100$  Hz and  $v_A < 0.55$  m/s (i.e.,  $B < 760$  G). The white vertical dashed line corresponds to the run at  $v_A = 0.51$  m/s.

where  $v_A^2 = \frac{\mu_0 M^2}{1 + \mu/\mu_0}$  is the characteristic nondispersive velocity analogous of the Alfvén wave velocity in plasma [39],  $M(B)$  is the magnetization within the liquid depending on the applied magnetic field induction  $B$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Tm/A is the magnetic permeability of a vacuum, and  $\mu = \mu_0(1 + \frac{\partial M}{\partial B})$  is the liquid permeability [23]. Note that  $B$  should not be confused with the external magnetic field  $H = B/\mu - M$ , even if  $B$  will be hereafter referred to as the magnetic field. The dispersion relation can be rewritten as

$$\omega = v_A(B)k\sqrt{1 + \alpha k^{-1} + \beta k}, \quad (2)$$

with  $\alpha = g/v_A^2$  and  $\beta = \gamma/(\rho v_A^2)$ . A nondispersive regime  $\omega \sim k$  could be obtained if the gravity and the capillary terms are much smaller than the magnetic one, i.e., if

$$\alpha k^{-1} < C \quad \text{and} \quad \beta k < C, \quad (3)$$

where  $C$  is a chosen constant quantifying the ratio between the magnetic term and the gravity or capillary one. Using the dispersion law of Eq. (1), we plot in Fig. 1 the theoretical diagram of the predominance of the gravity, capillary, and magnetic regimes [24] as a function of the parameter  $C$ . From our ranges of experimental parameters used afterward, we can reach  $C \sim 20$ , i.e., a magnetic term larger than 20 times each of the other two. This will be possible because of the use of a ferrofluid with a high magnetic susceptibility and a relatively low viscosity (see below).

### B. Magnetic wave steepening

It is worth noting that in the dispersion law of Eq. (1) the magnetic term comes from the spatiotemporal fluctuations of the magnetic field generated at the liquid-gas wavy interface to satisfy the magnetic boundary conditions at the interface [23]. The magnetic fluctuations  $h$  at the interface in the direction  $Ox$  of the constant horizontal field  $H$  are obtained due to a calculation similar to the one performed in [23] for a vertical magnetic field and read  $h_1 = h_2 = M\eta k(1 + \mu/\mu_0)$ , where indices 1 and 2 refer to the magnetic liquid and the gas, respectively. The more important the surface perturbation is, the more the fluctuation in the magnetic field appears. With typical values used here ( $B \approx 760$  G,  $\mu_0 M \approx 340$  G,  $\mu/\mu_0 \sim 1.05$ ,  $k \approx 500$  m $^{-1}$ , and  $\eta \approx \pm 1$  mm), the magnetic induction fluctuations  $b_1 = \mu h_1$  and  $b_2 = \mu_0 h_2$  are about  $\pm 80$  G, that is to say, about  $\pm 10\%$  of the applied value. We can thus infer the magnetic force  $F_m$  acting on the fluid in the  $x$

direction as  $F_m = \frac{\mu_0 M}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} = \rho v_A^2 k^2 \eta$ .  $F_m$  acts more at the extrema of a wave than at its base ( $\eta = 0$ ) and thus leads to a steepening of the wave and a difference of the fluid velocity along the wave height. This mechanism is the source of the appearance of shock waves as it is for the Burgers shock waves [30] (see Sec. IV B). Note that no experimental comparison is performed here to check the above theoretical predictions on the field fluctuations  $h$ , but such a comparison is done to explain qualitatively the physical process of the shock-wave formation observed below. Note also that magnetic stress, called Maxwell stress, occurs at the interface of a magnetic fluid [23]. For a horizontal magnetic field, this stress  $s_n = -\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ , normal to the surface, tends to flatten the surface wave acting as a stabilizer. This higher-order effect will be not visible here but might appear at higher  $v_A$ , although not achievable experimentally.

### C. Energy spectra

Wave turbulence arises from the interaction of weakly nonlinear waves and is described by the weak turbulence theory [1,2]. The latter predicts that the wave energy spectrum follows a power-law cascade of the scale (frequency or wave number) only for a system involving a single term in its dispersion relation  $\omega(k)$ . For example, in one dimension, pure gravity waves dominated by five-wave resonant interactions are predicted to have a power spectrum of the surface elevation  $\eta$  as  $S_\eta \sim \omega^{-17/4}$  [40]. It has been also observed experimentally that 1D capillary waves are dominated by five-wave resonant interactions and follow a power spectrum in  $S_\eta \sim \omega^{-31/12}$  [29]. Thus, for a 1D gravity-capillary system (with no magnetic field), these two asymptotic spectra are thus expected, the pure gravity spectrum for large enough scales ( $f \lesssim 5$  Hz) and the pure capillarity one for small enough scales ( $f \gtrsim 50$  Hz) [9]. However, the finite size of our experimental system and the nonvanishing viscosity of the fluid used here will lead to work in the intermediate-frequency scales and thus to an entanglement of the gravity and capillary effects [9]. Indeed, for a 1D gravity-capillary system, we previously reported experimentally a power-law spectrum in  $S_\eta \sim \omega^{-3.3 \pm 0.2}$  in the intermediate-scale range as a result of the occurrence of three-wave interactions [29] [see also the purple curve in Fig. 7(a)].

Coherent structures are more likely to appear in one dimension than in higher dimensions [28]. For instance, transitions from wave turbulence to solitonic regimes have been predicted theoretically [28] and observed experimentally [27] for 1D gravity waves in shallow water, coherent structures such as Korteweg–de Vries solitons occurring as a result of the weak dispersion. For 1D deep-water gravity waves, other types of solitons, e.g., Peregrine solitons or envelope solitons, were observed experimentally [41,42], but are not expected in our study. Nevertheless, since our system is nondispersive at high  $v_A$ , other coherent structures could arise such as singularities [28]. Singularities can be defined by local discontinuities of order  $n$  in the wave field, i.e., leading to a Dirac- $\delta$  distribution on the  $n$ th-order derivative of the wave field  $\partial^n \eta$ . As discontinuities contain energy at all frequency scales [31,43], these coherent structures would lead to a spectrum only driven by their geometry, i.e., the order of the discontinuity. Since the power spectrum of a Dirac- $\delta$  distribution occurring on  $\partial^n \eta$  is a white noise, i.e.,  $S_{\partial^n \eta} \sim \text{const}$ , one has thus, by integration, the spectrum of  $\eta$  in  $S_\eta \sim \omega^{-2n}$ . For discontinuities of the first order  $n = 1$ , e.g., shock waves in the Burgers equation, an acoustic spectrum in  $S_\eta \sim \omega^{-2}$  is thus expected, i.e., the Kadomtsev-Petviashvili spectrum [18,44,45]. If discontinuities are of second order  $n = 2$ , e.g., sharp-crested waves or shock waves not reaching a fully vertical front, one thus expects to obtain a spectrum in  $S_\eta \sim \omega^{-4}$  (or Kuznetsov-like spectrum) [31].

## III. EXPERIMENTAL SETUP

Experiments were performed in a canal made of polytetrafluoroethylene, i.e., Teflon, to decrease the wetting, with a length  $L = 15$  cm and a width  $L_y = 2$  cm (see Fig. 2). This hydrophobic canal is filled up to a depth  $d = 2$  cm with a ferrofluid (see below). A shaker linked to a wave maker is located at one end to inject energy in a narrow random frequency bandwidth  $f_0 \pm \Delta F$ , with  $f_0 = 8.5$  Hz and  $\Delta F = 2.5$  Hz. Since  $L \gg L_y$ , waves propagate only in the longitudinal ( $Ox$ ) direction

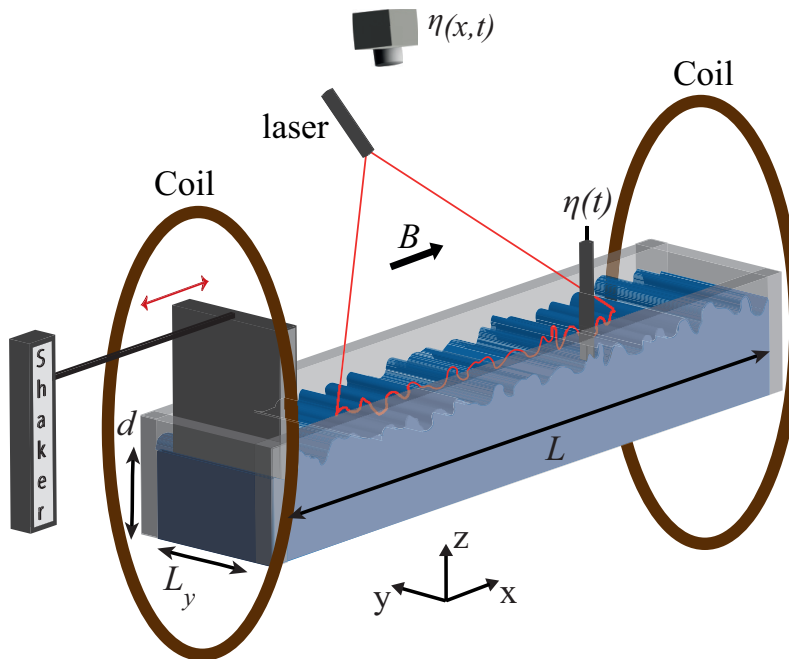


FIG. 2. Experimental setup. A pair of Helmholtz coils generates a horizontal homogeneous magnetic field  $B$  on the ferrofluid surface. Random waves are driven by a wave maker linked to a shaker at one end of the canal. The wave elevation  $\eta(t)$  is measured at a single point using a capacitive wire gauge and resolved in space and time  $\eta(x, t)$  with a laser sheet profilometry using a camera and a laser sheet illuminating a horizontal line of the free surface.

and are thus considered to be quasi-1D [29]. The whole setup is located between two vertical coils in Helmholtz configuration, 25 cm in internal diameter, generating a horizontal magnetic field ( $B \in [0, 800]$  G) homogeneous on the liquid surface. Two measurement methods of surface elevation are used: a single point measurement and a laser sheet profilometry (LSP). The temporal variations of the surface elevation  $\eta(t)$  are measured at a single point using a homemade capacitive wire gauge (0.22 mm in diameter and 10  $\mu\text{m}$  vertical resolution) [4] with a 2 kHz sampling frequency leading thus to a resolved frequency up to 1 kHz and thus to a discretization time  $dt = 0.5$  ms. A space- and time-resolved wave-field measurement  $\eta(x, t)$  is reached by the LSP method. A camera (Basler, 200 frames/s) is located above the canal and the wave field is illuminated over 8 cm with a laser sheet at an angle of  $\alpha = 45^\circ$  with respect to the horizontal (see Fig. 2). The horizontal shift  $\Delta y(x, t)$  of the laser sheet along  $Oy$  detected by the camera is hence directly linked to the surface elevation by  $\eta(x, t) = \Delta y(x, t)/\tan(\alpha) = \Delta y(x, t)$  [46]. The horizontal and vertical resolutions of LSP are 43  $\mu\text{m}$ . The wave elevation is monitored for both measurements for  $\mathcal{T} = 15$  min.

We use a Ferrotec PBG400 ferrofluid. This black-brown opaque ferrofluid offers high magnetization, high colloidal stability, and superparamagnetic properties. It is a water-based (with polyethylene glycol) suspension synthesized with 7.9% by volume of ferromagnetic particles ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$  iron oxide, 10 nm in diameter). The properties of the liquid are density  $\rho = 1400$  kg/m<sup>3</sup>, surface tension  $\gamma = 34$  mN/m, kinematic viscosity  $\nu = 2.86 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, magnetic saturation  $M_{\text{sat}} = 440$  G, and initial susceptibility  $\chi_i = 3.28$ . Note that  $M_{\text{sat}} = \lim_{B \rightarrow \infty} M$  and  $\chi_i = \frac{\partial M}{\partial B}|_{B=0}$  are obtained due to the magnetization curve  $M(B)$  provided by Ferrotec. Here  $M(B)$  is also used to compute the characteristic velocity  $v_A(B)$  used in Eq. (1) (see Appendix A). The ferrofluid high sensibility to magnetic effects with a relatively low viscosity is crucial to reach experimentally a significant inertial range (see Fig. 1). To quantify nonlinearities, we measure the wave steepness as  $\epsilon \equiv \sigma k_m$ , where  $\sigma$  is the standard deviation of the surface elevation signal, computed as  $\sqrt{\overline{\eta(t)^2}}$  or  $\sqrt{\overline{\int_L \eta(x, t)^2 dx/L}}$  (the overline is time average), and  $k_m$  is the wave number for which the wave

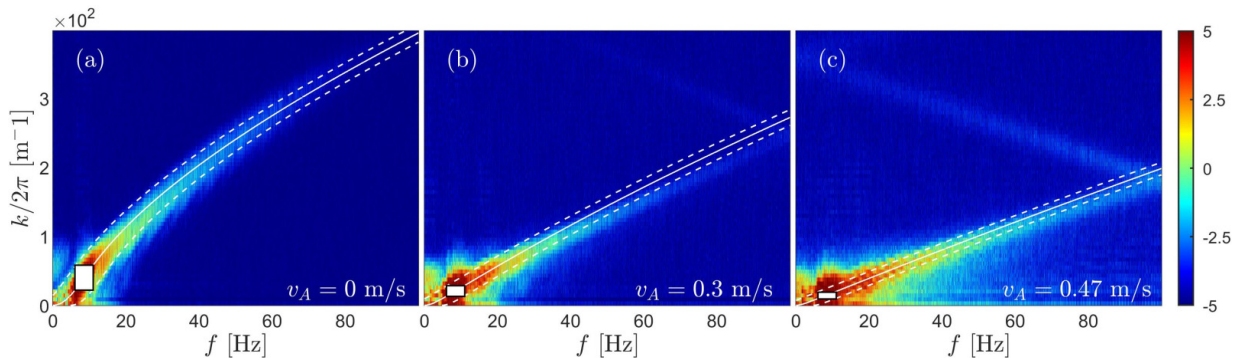


FIG. 3. Power spectrum  $S_\eta(k, \omega)$  of the wave elevation for (a)  $v_A = 0$ , (b)  $v_A = 0.3$ , and (c)  $v_A = 0.47$  m/s. The constant wave steepness  $\epsilon \simeq 0.07$ . The solid line shows the theoretical dispersion relation  $\omega(k)$  of Eq. (1) in the (a) dispersive, (b) intermediate, and (c) nondispersive cases. In the latter case, the slope of the straight line is  $1/v_A$ . The dashed line shows the spread dispersion relation  $\omega(k) \pm \delta_\omega$  with  $\delta_\omega = 30$  Hz. The white rectangle shows the fixed frequency forcing range between 6 and 11 Hz. The color bar is on a logarithmic scale.

spectrum is maximum (typically at the forcing scale) [13,47]. We keep  $\epsilon \simeq 0.07$  to validate the weak nonlinearity assumption from WTT.

## IV. EXPERIMENTAL RESULTS

### A. Spatiotemporal spectral analysis

From LSP measurements, applying to the surface elevation  $\eta(x, t)$  a double space and time Fourier transform  $\hat{\eta}(k, \omega)$ , we compute the spatiotemporal power spectrum  $S_\eta(k, \omega) = |\hat{\eta}(k, \omega)|^2 / (TL)$ . Note that the signal  $\eta(x, t)$  has been increased in length using its spatial symmetry to reach symmetric boundary conditions to compute  $S_\eta(k, \omega)$ . A Hanning windowing (hanning MATLAB function) has also been performed to improve the quality of the spectrum. The space-time power spectra  $S_\eta(k, \omega)$  are shown in Fig. 3 for different applied magnetic field  $B$ , that is, for different  $v_A$ . In Fig. 3(a),  $v_A = 0$  m/s, meaning that the wave field is only driven by gravity and capillary effects. In this case, the wave energy is found to cascade over small scales and is concentrated around the gravity-capillary dispersion relation (white solid line). This is a clear indication of the presence of wave turbulence as previously reported in Ref. [29]. A spectral broadening  $\delta_\omega$  of the wave energy around this dispersion relation is also observed due to nonlinearities [29] and is estimated.<sup>1</sup> When the magnetic field is increased [Figs. 3(b) and 3(c)], the energy still cascades following the dispersion relation, but is now influenced by the magnetic effects lowering significantly the spectrum [see solid lines in Figs. 3(b) and 3(c)]. For  $v_A = 0.47$  m/s, the nondispersive term in Eq. (1) is at least ten times larger than the dispersive ones in the range of interest ( $20 < f < 100$  Hz) as quantified in Fig. 1. As a consequence of this quas nondispersive dispersion relation, the wave energy is then found to be concentrated around a straight line of slope close to  $1/v_A$  as shown in Fig. 3(c). We thus evidence a transition from a dispersive gravity-capillary wave field to a nondispersive magnetic wave field where all waves travel at a constant velocity  $v_A$ . The operator thus controls the dispersivity of the system via the parameter  $v_A(B)$ . Note that a slight mismatch between the theoretical dispersion relation and the experimental data occurs at large  $v_A$ . This might be due to the inhomogeneous magnetic fluctuations appearing along the wave height as explained in Sec. II B. The fluctuations of the field, involving fluctuations of  $v_A$ , explain the mismatch but are not quantified in the present study. Note also that for  $v_A = 0.47$  m/s a weaker branch of the energy appears at the top of Fig. 3(c).

<sup>1</sup>For each  $k$ ,  $\delta_\omega$  is estimated by fitting the spectrum  $S_\eta(k, \omega)$  by a Gaussian function of  $\omega$ . The standard deviation of this fit gives an estimate of  $\delta_\omega$  whose average over the  $k$  values is  $\delta_\omega = 30$  Hz, which is almost constant for all values of  $v_A$ .



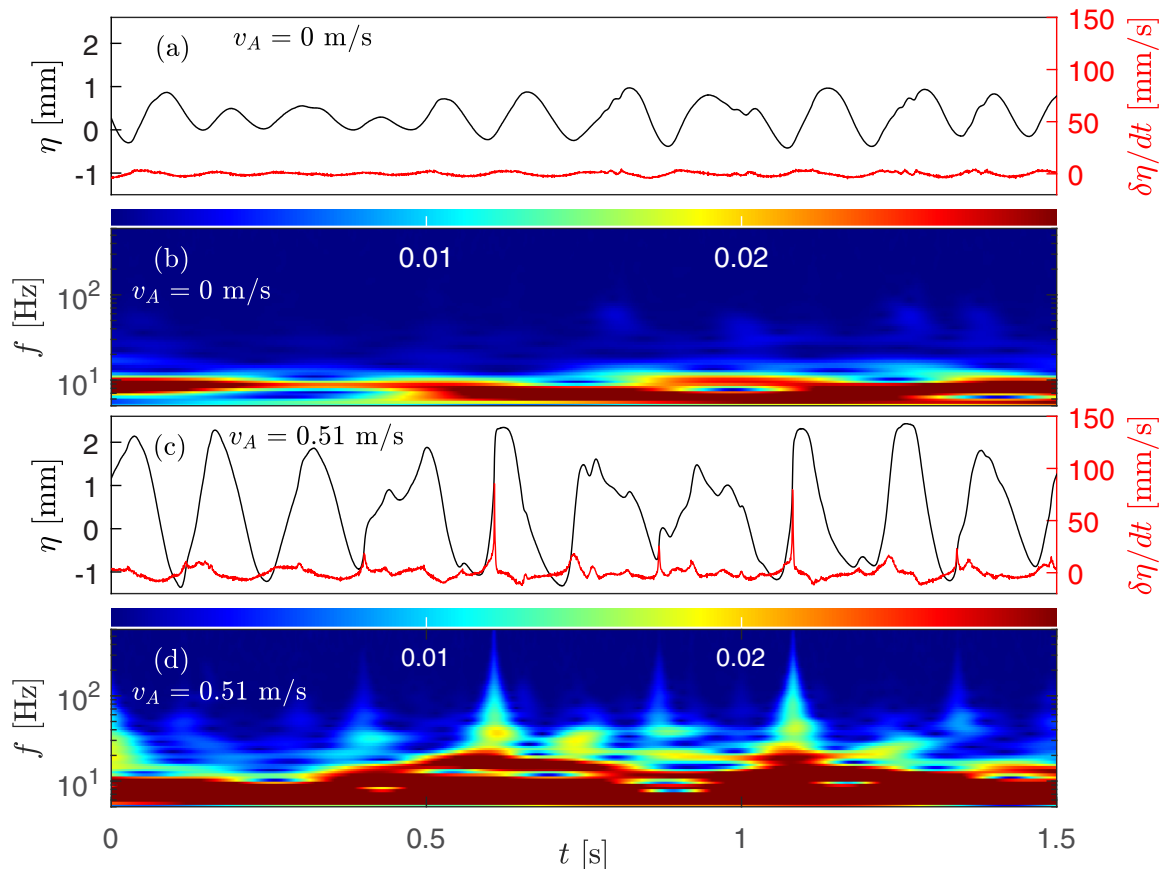


FIG. 4. (a) Typical temporal evolution of the surface elevation  $\eta(t)$  (black line) and its first-order difference  $\delta\eta(t)/dt$  (red line) and (b) corresponding time-frequency spectrum of  $\eta(t)$  obtained by a wavelet transform, for the dispersive case ( $v_A = 0$  m/s). (c) and (d) Same as in (a) and (b) but for the nondispersive case ( $v_A = 0.51$  m/s). Here  $\epsilon \simeq 0.07$  in the two cases.

Although the maximum visible frequency in the spectrum is  $f_e/2 = 100$  Hz, i.e., half the sampling frequency, energy at higher frequencies  $f > f_e$ , i.e.,  $k/(2\pi) > 198$  m $^{-1}$  for  $v_A = 0.47$  m/s, can be seen, however, due to the spectrum aliasing effect. Despite viscous effects acting from about 100 Hz, energy occurring at higher frequencies is a consequence of singularities that give energy to all frequencies (see below). Note also that no other coherent structure such as bound waves appears in Fig. 3.

### B. Surface elevation signals and time-frequency analysis

Typical temporal signals of the surface elevation  $\eta(t)$  (black line) and of its first-order difference  $\delta\eta(t) = \eta(t + dt) - \eta(t)$  (red lines) are shown in Fig. 4(a) for the dispersive case ( $v_A = 0$  m/s) and in Fig. 4(c) for the nondispersive case ( $v_A = 0.51$  m/s). We also compute the corresponding wavelet transforms (using the continuous 1D wavelet transform MATLAB function) [48] to obtain a time-frequency analysis of the energy spectra as plotted in Figs. 4(b)–4(d) (see Appendix B for longer signals). The wavelet transform is preferred to a short-time Fourier transform, e.g., spectrogram, that has issues with the frequency-time resolution trade-off. For the dispersive case ( $v_A = 0$  m/s), no coherent structure appears for the temporal evolution of the surface elevation, its first-order difference  $\delta\eta$  remaining close to 0. For the nondispersive case ( $v_A = 0.51$  m/s) the typical wave height is found to increase, whereas some peaks occur in its first-order difference corresponding to discontinuities in  $\eta(t)$ . As discussed in Sec. II B, a concentration of the magnetic field lines occurs at the crests and troughs of the wavy interface to satisfy the magnetic boundary conditions at the interface [23], leading to a stronger magnetic field and so to a stronger value of  $v_A$  at the wave crest than at its base. Thus, for a given wave,  $v_A$  depends on the vertical coordinate  $z$  with  $\partial v_A/\partial z > 0$ .

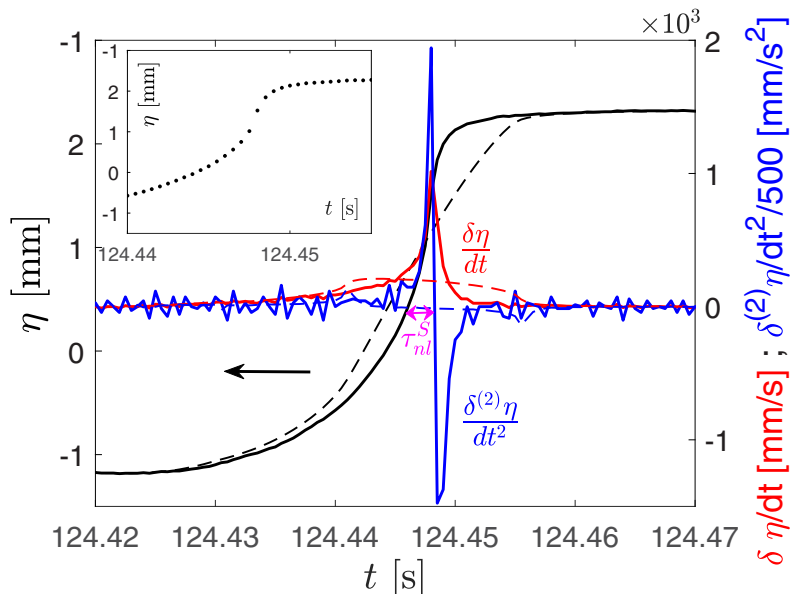


FIG. 5. Enlargement of a typical shock wave  $\eta(t)$  (black solid line), its first-order difference  $\delta\eta(t)/dt$  (red solid line), and its second-order one  $\delta^2\eta(t)/dt^2$  (blue solid line) in the nondispersive case ( $v_A = 0.51$  m/s). The value of  $\delta^2\eta/dt^2$  is divided by 500 to observe it on the same vertical scale as  $\delta\eta/dt$ . Dashed lines show the same but when the singularity is removed by numerical postprocessing, thus smoothing the signals. The black arrow shows the direction of wave-front propagation. The purple arrow shows the nonlinear timescale of a shock wave  $\tau_{nl}^s$  (see Sec. IV E). The inset shows the enlargement of the shock wave with only experimental discrete data to evidence the jump at the second-order discontinuity.

Since the wave crest is faster than its base, it ends up creating a discontinuity, i.e., a singularity, called afterward shock wave. Shock waves are also visible in the wavelet spectrum [Fig. 4(d)], where energy is present at all frequencies even beyond the viscous scale of the order of 100 Hz. Although subjected to dissipation during their propagation, shock waves are thus coherent structures rich in the frequency domain. Note that the Maxwell stress which should decrease the wave height in the magnetic field direction [23,25] is not reported here. This higher-order effect could occur at higher  $v_A$  not experimentally achievable in our parameter range (see Appendix C). A typical shock wave signal  $\eta(t)$  and its first- and second-order differences  $\delta\eta(t) = \eta(t + dt) - \eta(t)$  and  $\delta^2\eta(t) = \eta(t + 2dt) - 2\eta(t + dt) + \eta(t)$ , respectively, are plotted in Fig. 5 for the nondispersive case ( $v_A = 0.51$  m/s). We checked that this localized singularity keeps its shape and travels along the canal at constant velocity with no breaking (see Appendix D for the displacement of a single shock along the canal). The discontinuity in  $\eta(t)$  displayed in Fig. 5 corresponds to a rather long peak in its first-order difference  $\delta\eta$  and to a very thin peak in its second-order difference  $\delta^2\eta$ . This short peak is assumed to be close to a Dirac peak, to claim that the singularity observed here is of second order. It is worth noting that the nondispersive shock waves observed here do not exhibit a fully vertical front. This observation is emphasized in the inset of Fig. 5, where only the experimental discrete data of the shock wave are plotted. A jump in the signal is visible corresponding to a second-order discontinuity of  $\eta(t)$ . Although a fully vertical shock cannot be measured with a single-point gauge, the spatiotemporal measurement of the shock-wave shape confirms that the latter does not reach a fully vertical front (see Appendix D). The shocks observed therefore differ from classical shock waves driven by the 1D Burgers equation displaying singularities of the first order (Dirac- $\delta$  distribution in their first-order difference) [30]. Even if its amount is small, dispersive effects might prevent the formation of a vertical-front shock wave, and it is difficult to say if higher  $v_A$  values would lead to a vertical front since the Maxwell stress would occur, flattening the waves. Note that each singularity in the system can be removed by numerical postprocessing, leading, as expected, to smoothing the signal around the discontinuity (see dashed lines in Fig. 5).

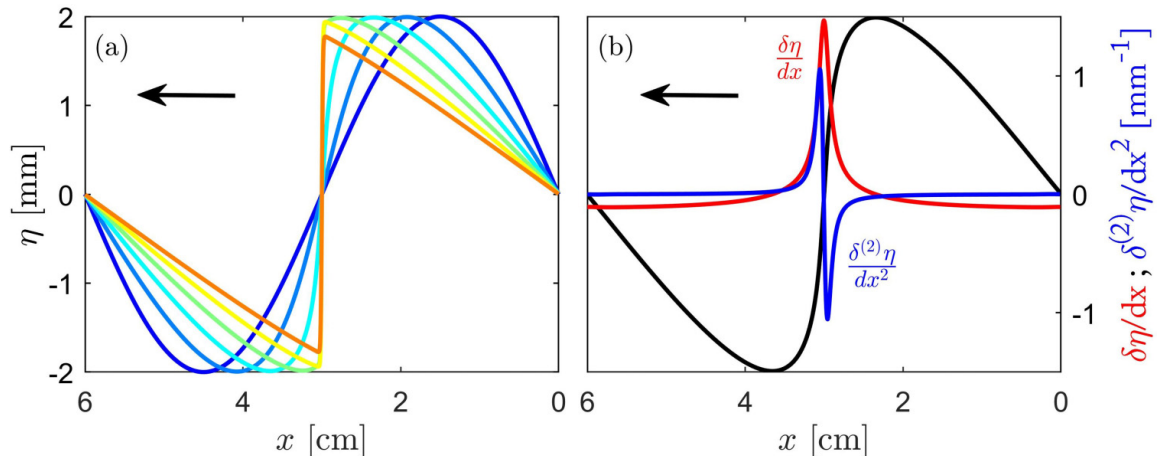


FIG. 6. Numerical solution of the 1D Burgers equation,  $\eta(x, t)$ , following an implicit scheme from a sinusoidal initial condition at  $t = 0$  (blue). (a) Solutions for increasing values of  $t$  (from blue to orange). (b) Solution at a fixed time  $t$  (just before reaching the vertical front) along with the corresponding first- ( $\delta\eta/dx$ , red solid line) and second-order differences ( $\delta^{(2)}\eta/dx^2$ , blue solid line). The abscissa is from right to left to be consistent with the experimental temporal measurements in Fig. 5. The arrows show the direction of the wave-front propagation.

To compare the typical shape of our coherent structures (Fig. 5), we solve numerically the 1D Burgers equation [30]

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + A\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \quad (4)$$

with  $A = v_A/d$  ( $v_A = 0.5$  m/s and  $d = 2$  cm) a constant chosen for dimensional homogeneity and  $\nu = 2.86 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s the kinematic viscosity of the liquid. We use an implicit scheme using the Crank-Nicolson formulation [49] and a Thomas algorithm [50] with the initial condition  $\eta(x, t = 0) = \sin(x)$ . The numerical grid is resolved with 1024 points. The results are plotted for different times in Fig. 6(a). As expected, a steepening of the wavefront appears before dissipation decreases slightly the amplitude of the shock. This kind of vertical shock would lead to breaking experimentally. No fully vertical front appears experimentally, but rather a shape close to the one obtained just before the Burgers shock, and that is conserved over time [see Figs. 5 and 6(b)]. Moreover, this shock-wave shape exhibits both for the numerical and experimental results a long peak on the first-order difference  $\delta\eta$  and a short peak (similar to a Dirac one) on the second-order difference  $\delta^{(2)}\eta$ . To sum up, as a consequence of the magnetic effects, this nondispersive system generates coherent structures that are close to the Burgers shock waves with a slightly less steep front (less than 0.1%) and a self-similar shape that is conserved over time. It is worth noting that even if strong similarities occur between the numerical results of the Burgers equation and the experimental results found here, e.g., the presence of shock waves and nondispersive system, no rigorous analytical link is established in the present study. The link is only qualitative (see Sec. IV C for power spectra and Sec. V for probability density functions of the surface elevation) but provides some interesting insights that deserve further theoretical work.

### C. Experimental wave energy spectra

The frequency power spectrum  $S_\eta(\omega) \equiv |\hat{\eta}(\omega)|^2/\mathcal{T}$  is now computed from the single-point measurement of the surface elevation  $\eta(t)$  using its temporal Fourier transform  $\hat{\eta}(\omega)$ .  $S_\eta(\omega)$  is shown in Fig. 7(a) for different dispersion strengths, i.e., different  $v_A$ . For the dispersive case ( $v_A = 0$  m/s), the wave spectrum follows a power-law cascade characteristic of wave turbulence although occurring over a rather small inertial range (bottom blue curve). This frequency range (between 20 and 70 Hz) corresponds to the entanglement of gravity and capillary effects, whereas

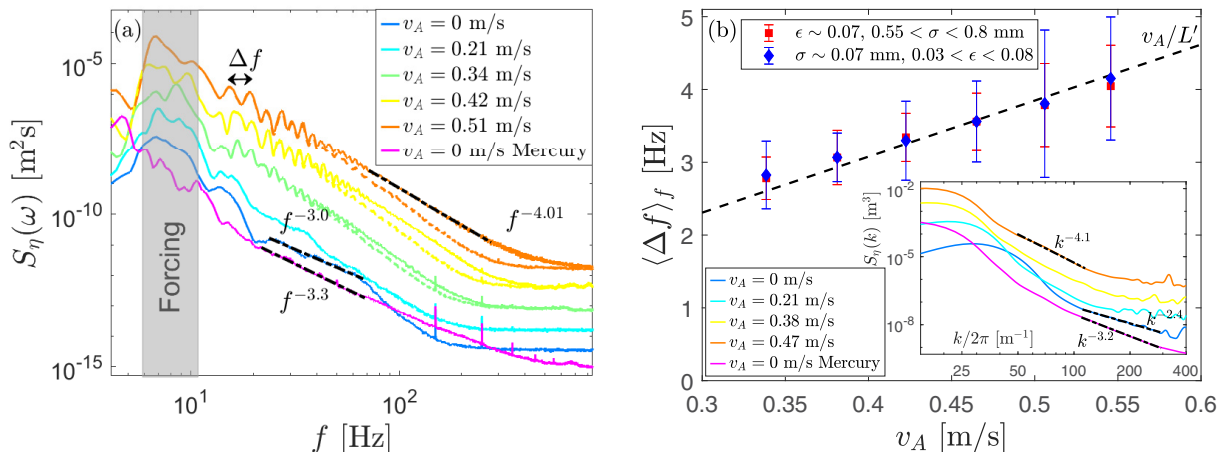


FIG. 7. (a) Frequency spectra  $S_\eta(f)$  for different  $v_A$  (solid lines) and  $\epsilon \simeq 0.07$  on a log-log plot. Spectra have been shifted vertically for clarity. The dashed lines show the same but with the singularities removed from the signal. The gray area is the frequency bandwidth of the random forcing. The black dash-dotted line shows  $f^{-4.01}$  best fit for  $v_A = 0.51$  m/s,  $f^{-3.0}$  best fit for  $v_A = 0$  m/s, and  $f^{-3.3}$  best fit for  $v_A = 0$  m/s using mercury [29]. Here  $\Delta f$  is the frequency difference occurring between two successive spectrum peaks. (b) Evolution of the mean frequency gap  $\langle \Delta f \rangle_f$  between local spectral peaks as a function of  $v_A$  for two sets of forcing, either at constant  $\epsilon$  or at constant standard deviation  $\sigma$  of the surface elevation. The dashed line shows the best linear fit in  $v_A/L'$  with  $L' = 13$  cm, the available canal length. Error bars come from the standard deviation of the measurement of  $\Delta f$ . The inset shows the wave-number power spectra  $S_\eta(k)$  for different  $v_A$  and  $\epsilon \simeq 0.07$  on a log-log plot. Spectra have been shifted vertically for clarity. Black dash-dotted lines show the best fits in  $k^{-4.1}$  for  $v_A = 0.47$  m/s,  $k^{-2.4}$  for  $v_A = 0$  m/s using ferrofluid, and  $k^{-3.2}$  for  $v_A = 0$  m/s using mercury [29].

no pure capillary wave turbulence is observed here due to viscous effects ( $f \gtrsim 70$  Hz). Note that the exponent of this frequency power law  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-3.0 \pm 0.3}$  is close to what was obtained with a low-viscosity fluid, e.g., mercury, with  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-3.3 \pm 0.3}$ , within a similar gravity-capillary frequency range [see purple curve in Fig. 7(a)] [29].

For quasinondispersive cases (high enough  $v_A$ ), two phenomena are visible on the power spectra. The first one is the emergence of well-defined series of local peaks. These peaks are found to be separated by a frequency gap  $\Delta f$  which is nearly constant for a single value of  $v_A$ . The frequency gap is averaged for each spectrum and plotted against  $v_A$  in Fig. 7(b). Two sets of measurements corresponding to two different forcing are plotted and are well fitted linearly by  $\langle \Delta f \rangle_f = v_A/L'$ , i.e.,  $\langle \Delta \omega \rangle_f = v_A(2\pi/L')$ , with  $L' = 13$  cm the length of the canal  $L$  minus the gap filled by the wave maker ( $\sim 2$  cm). As all waves travel with the same nondispersive velocity, they are then detected by the single-point gauge every same time  $1/\Delta f$ . This implies the emergence of peaks of frequencies that are directly linked to the main eigenmode of the canal  $2\pi/L'$ . Finite-size effects thus emerge experimentally because of the nondispersivity.

The second effect of the nondispersivity is visible at high frequencies of the power spectra. A very-well-defined power law appears on one decade in the range  $f \in [30, 300]$  Hz, thus well beyond the beginning of viscous effects around 100 Hz. This cascade scales in  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-4.01 \pm 0.05}$  and is found to agree with the Kuznetsov spectrum of singularities of second order  $n = 2$ , i.e., Dirac- $\delta$  distribution on the second-order difference  $\delta^{(2)}\eta$ , conserving their shape, i.e.,  $\omega \sim k$  [31]. The shock waves present in the signal thus spread energy at all frequency scales. When removing the singularities from the signal (as in Fig. 5), the previous well-defined power law in  $\omega^{-4}$  in the power spectrum disappears and dissipative effects seem to drive the cascade after 90 Hz [see dashed lines in Fig. 7(a)]. These results evidence a transition from gravity-capillary wave turbulence, in the dispersive case ( $v_A = 0$  m/s), for which the cascade mechanism is due to resonant interactions between weakly nonlinear waves, to a nondispersive regime ( $v_A = 0.51$  m/s) where the energy is mainly concentrated in second-order singularities ( $n = 2$ ) and dissipated by viscous effects.

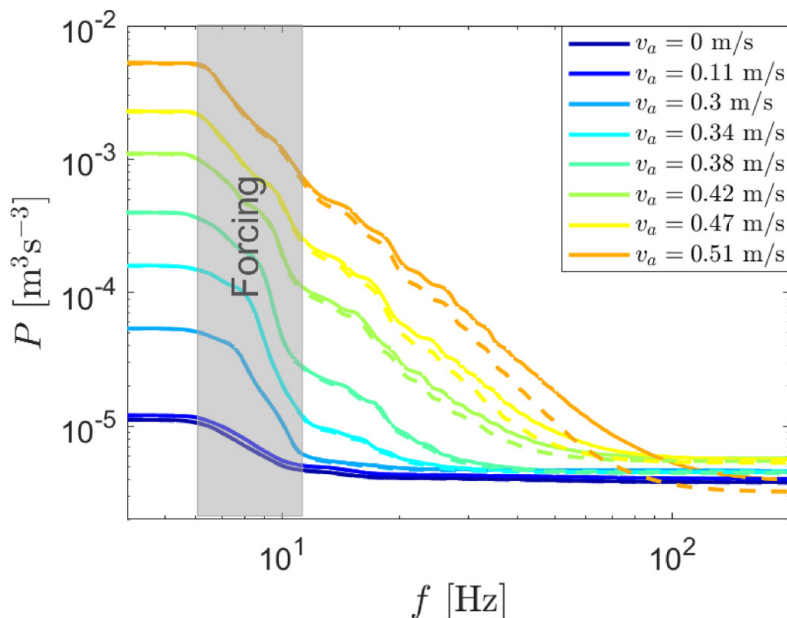


FIG. 8. Evolution of the indirectly measured energy flux  $P$  with the frequency  $f$ , for  $\epsilon \simeq 0.07$ . Solid lines correspond to different  $v_A$ . Dashed lines show the same but with singularities removed by signal postprocessing. The gray area indicates the forcing frequency bandwidth.

Using the spatiotemporal measurements averaged over time, the wave-number power spectrum  $S_\eta(k)$  is plotted in the inset of Fig. 7(b) for different values of  $v_A$ . At  $v_A = 0$  m/s, a power law in  $k^{-2.4 \pm 0.1}$  is observed due to gravity-capillary wave turbulence. This power-law exponent differs from the one found for a much less viscous fluid, i.e., mercury [29], plotted also in the inset of Fig. 7(b). At large  $v_A$ , a steeper power law in  $k^{-4.1 \pm 0.1}$  is found, and the exponent is close to the one found for the frequency power spectrum  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-4.01}$ . This similarity thus confirms that a nondispersive regime is achieved since the two spectra are linked by  $S_\eta(k)dk = S_\eta(\omega)d\omega$  using  $\omega \sim k$ . The spectrum close to  $k^{-4}$  is hence a spectrum of second-order discontinuities due to shock waves, which supports the conclusion made with the temporal spectrum on the second-order singularities. Note that, in the inset of Fig. 7(b), the forcing scale moves to smaller  $k$  with increasing  $v_A$  as a result of Eq. (1) with a constant forcing frequency. Note also that because of the lowering of the dispersion relation with increasing  $v_A$  as observed in Fig. 3, the measurement noise level appears at  $k/(2\pi) > 400$  m $^{-1}$  for  $v_A = 0$  m/s and at  $k/(2\pi) > 200$  m $^{-1}$  for  $v_A = 0.47$  m/s. The statistics of the shock waves will be thus performed in Sec. V using the single-point measurements due to their better resolution and signal-to-noise ratio than the spatiotemporal ones.

#### D. Energy flux

Weak turbulence theory aims to describe wave turbulence but requires strong hypotheses [1–3]. In particular, WTT assumes a constant energy flux during the energy cascade through the scales. In this section we test this hypothesis when the wave turbulence regime occurs ( $v_A = 0$  m/s) and how the energy flux departs from a constant when reaching the shock-wave regime (at high  $v_A$ ).

The energy flux  $P$  is computed as  $P(\omega^*) = \int_{\omega^*}^{\omega_m} E(\omega)D(\omega)d\omega$ , with  $E(\omega) = gS_\eta(\omega) + v_A^2 k S_\eta(\omega) + (\gamma/\rho)k^2 S_\eta(\omega)$  the total wave-energy density,  $D = k(\omega)\sqrt{v\omega}/2$  the main contribution of the viscous energy dissipation rate for a contaminated interface [29,37,47,51],  $\omega_m/(2\pi) = 1000$  Hz, and  $k(\omega)$  as in Eq. (1). The variation of  $P$  over frequency scales is plotted in Fig. 8 for different  $v_A$  with (solid lines) and without (dashed lines) shock waves. For low values of  $v_A$ , the energy flux is, as expected, constant in the inertial range (as in [29]), showing that no dissipation occurs in this range and that the energy cascades over scales continuously because of wave interactions following WTT predictions.  $P$  is found to increase with  $v_A$  as a consequence of the increase of the energy

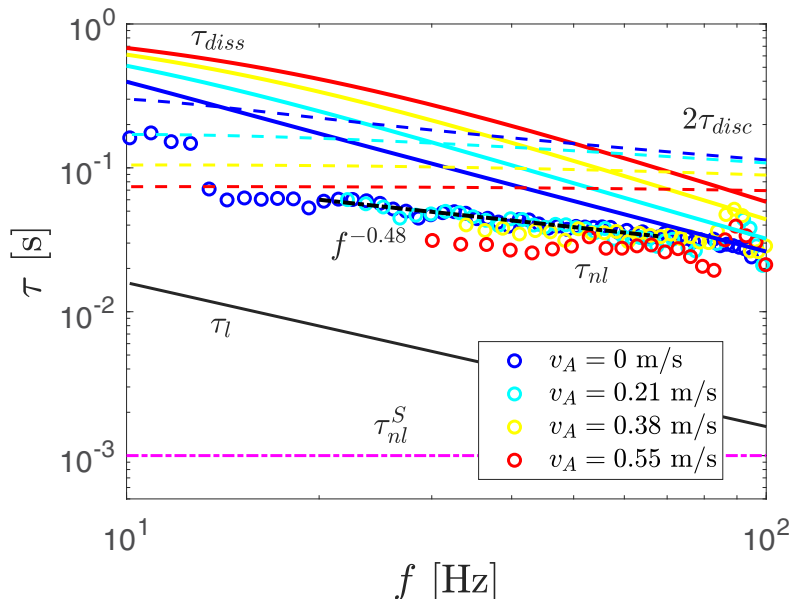


FIG. 9. Wave turbulence timescales as a function of the frequency scale  $f$  for different  $v_A$ . The solid black line shows the linear timescale  $\tau_l = 1/\omega$ . Circles show the nonlinear timescale  $\tau_{nl}$  estimated from Fig. 3. Colored solid lines show the linear viscous dissipation timescale  $\tau_{diss}$  (see the text). Colored dashed lines show the discreteness time  $\tau_{disc}$  (see the text). The purple dash-dotted line shows the nonlinear shock-wave timescale  $\tau_{nl}^S$  estimated from Fig. 5.

at the forcing scales that is required to keep a constant wave steepness [because  $v_A$  increases the wavelength as shown by Eq. (1)]. Furthermore, for large values of  $v_A$ ,  $P$  is no longer constant and is found to decrease with  $f$ . This can be explained by dissipation that occurs at all scales [51]. As shock waves travel by conserving their shape, they transport energy over space without any interactions. While they transport this energy, viscous dissipation occurs, reducing their amplitude until they disappear (see Appendix D). Note that the presence of the discontinuity in the shock wave does not have any significant impact on the energy flux (solid and dashed lines are almost superimposed in Fig. 8); even when the discontinuity is removed, the energy is still in the shock wave and continues to travel and be dissipated.

### E. Timescales

We now test another WTT assumption, namely, the timescale separation between the linear time  $\tau_l$ , the nonlinear time  $\tau_{nl}$ , the dissipation time  $\tau_{diss}$  (quantifying dissipative effects), and the discreteness time  $\tau_{disc}$  (quantifying finite-size effects of the canal) [9,15,29]. Indeed, WTT assumes [2]

$$\tau_l(\omega) \ll \tau_{nl}(\omega) \ll [\tau_{diss}(\omega); \tau_{disc}(\omega)], \quad (5)$$

regardless of  $\omega = 2\pi f$  in the inertial range. The nonlinear evolution is thus assumed to be slow compared to the fast linear oscillations (wave period) but short compared to the typical wave dissipation time and the time linked to finite-size effects, enabling then an energy cascade to occur in the inertial range. The evolutions of these timescales with  $f$  are plotted in Fig. 9. The linear timescale is defined as  $\tau_l = 1/\omega$  (black solid line). The nonlinear timescale  $\tau_{nl}$  (colored circles) is estimated by the broadening of the energy around the dispersion relation as  $1/\delta_\omega$  (see Fig. 3).  $\tau_{nl}$  follows a frequency power law close to  $f^{-1/2}$  and decreases slightly with  $v_A$ . The dissipation timescale  $\tau_{diss}$  (colored solid lines) is computed as  $\tau_{diss} = 2\sqrt{2}/[k(\omega)\sqrt{\nu\omega}]$ , the main viscous contribution from the surface boundary layer with an inextensible film [37,51]. This time increases with  $v_A$ , meaning that dissipative effects are less significant at high  $v_A$ . This effect can be observed in the

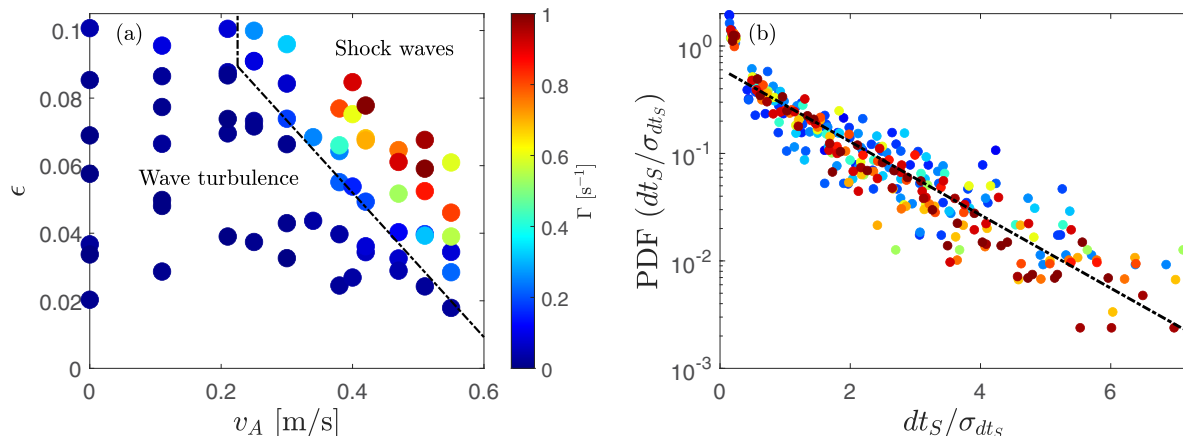


FIG. 10. (a) Phase diagram between the dispersive wave turbulence regime and the shock-wave regime as a function of the magnetic parameter  $v_A$  and the wave steepness  $\epsilon$ . The dash-dotted line distinguishes the predominance of each regime (random waves or localized shock-wave structures) and corresponds to a fixed shock rate  $\Gamma \approx 0.1 \text{ s}^{-1}$ . (b) PDF of the time  $dt_S$  between two successive shocks for all  $v_A$  values and  $\Gamma > 0.1 \text{ s}^{-1}$ . The color bar is the same as in (a). The black dashed line is the best fit in  $e^{-0.78 dt_S}$ .

spectra in Fig. 7(a), even when the discontinuities are removed (energy is present until 250 Hz for  $v_A = 0.51 \text{ m/s}$  and less than 150 Hz for  $v_A = 0 \text{ m/s}$ ). The discreteness time  $\tau_{\text{disc}}$  (colored dashed lines) is computed as  $\tau_{\text{disc}} = 1/\Delta\omega_{\text{disc}}$ , with  $\Delta\omega_{\text{disc}} = (\partial\omega/\partial k)\Delta k$  and  $\Delta k = 2\pi/L'$  the first eigenmode of the canal [9]. No discreteness effect is expected for  $\tau_{\text{nl}}(\omega) < 2\tau_{\text{disc}}(\omega)$ , i.e., when the nonlinear spectral widening is larger than the half-frequency separation between adjacent eigenmodes. This discreteness time decreases with increasing  $v_A$ , meaning that finite-size effects are more significant at large  $v_A$ . These effects are highlighted in the spectra of Fig. 7(a) by the emergence of well-defined series of local peaks separated by a constant frequency gap  $\Delta\omega = v_A(2\pi/L')$  [see Fig. 7(b) and Sec. IV C]. Note that, neglecting gravity and capillary effects,  $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{disc}} = 1/\tau_{\text{disc}}$ . Figure 9 then evidences that the timescale separation of Eq. (5) is well validated experimentally in the inertial range, for all values of  $v_A$ . However, it is worth noting that the estimation of  $\tau_{\text{nl}}$  from the spatiotemporal spectrum of Fig. 3 does not include shock waves (as they do not explicitly appear in such a plot). To solve this issue, we define another nonlinear timescale  $\tau_{\text{nl}}^S$  that only takes into account the shock waves (purple dash-dotted line). Here  $\tau_{\text{nl}}^S$  is defined as the width of the corresponding peak of the second-order difference  $\delta^{(2)}\eta/dt^2$  (see Fig. 5). We find  $\tau_{\text{nl}}^S \sim 10^{-3} \text{ s}$  which is of the same order of magnitude for every shock wave regardless of the value of  $v_A$ . Figure 9 then shows that  $\tau_l(\omega) > \tau_{\text{nl}}^S(\omega)$ , which means that when shock waves are prevalent the timescale separation hypothesis is no longer verified and a critical balance is achieved [2]. This supports the fact that the energy is stored in coherent structures at large enough  $v_A$ , whereas at low  $v_A$  an energy transfer through the scales occurs due to wave turbulence.

## V. SHOCK-WAVE STATISTICS

We focus now on the statistics of shock waves as a function of the magnetic parameter  $v_A$ . To count the number of shock waves, an arbitrary thresholding criterion on the first-order difference signal  $\delta\eta$  is fixed to  $\delta\eta > 5\sigma_{\delta\eta}$ , with  $\sigma_{\delta\eta} = \sqrt{\delta\eta^2}$  its standard deviation. This criterion thus selects if and when a peak within the signal corresponds to a shock wave. The shock rate  $\Gamma$  is defined as the average number of shocks found per second and  $dt_S$  the time between two successive shocks. The number of shocks depends on  $v_A$  as well as on the forcing strength quantified by the measured steepness  $\epsilon$ . Note that if the forcing is too weak, no shock can emerge because of viscous effects, even at high  $v_A$ .

Figure 10(a) displays the phase diagram in the  $(\epsilon, v_A)$  parameter space of the gravity-capillary wave turbulence regime and the shock-wave regime. The transition between the two regimes is

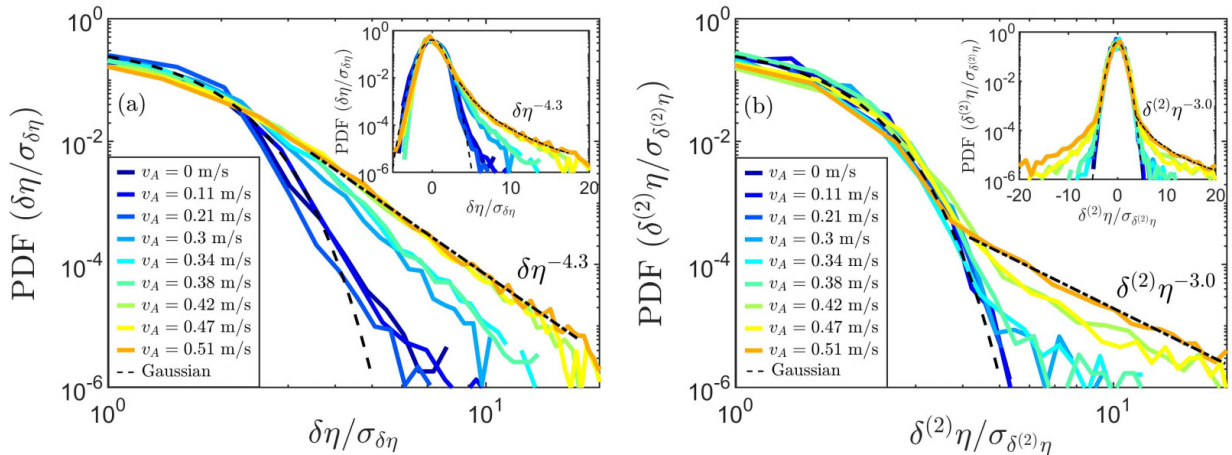


FIG. 11. (a) Probability distribution functions of the first-order difference  $\delta\eta$  normalized by its standard deviation  $\sigma_{\delta\eta}$  for increasing  $v_A$  (from blue to orange), for  $\epsilon \simeq 0.07$ , on log-log scales. The dashed line shows the Gaussian distribution. The dash-dotted line shows the best power-law fit in  $\delta\eta^{-4.3}$  for  $v_A = 0.51$  m/s. The inset shows the same on a semilogarithmic scale. (b) Same as in (a) but for the second-order difference  $\delta^{(2)}\eta$  with the best power-law fit in  $\delta^{(2)}\eta^{-3.0}$  for  $v_A = 0.51$  m/s.

shown at a chosen shock rate of  $\Gamma \approx 0.1 \text{ s}^{-1}$  (see the dashed line). Moreover, we observe that  $\Gamma$  increases with  $\epsilon$  and  $v_A$ , as expected, and that no shock appears, even for strong forcing, when  $v_A$  is small enough ( $v_A < 0.25$  m/s). For these low  $v_A$ , stronger forcing (not achievable in our setup) would probably end up in wave breaking instead of shocks. Figure 10(b) shows the probability distribution function (PDF) of the time lag  $dt_S$  for all  $v_A$  values and  $\Gamma > 0.1 \text{ s}^{-1}$ , i.e., the shock-wave regime. The PDF is independent of  $v_A$  and  $\Gamma$  and decreases exponentially, meaning that the shock waves are, as expected, independent and random events.

Let us now look at the probability distribution of the amplitude of the shock wave, e.g., those occurring in Figs. 4(a) and 4(c). To do so, we compute the probability density functions of the first  $\delta\eta$  and second-order difference  $\delta^{(2)}\eta$  of the shock-wave amplitude for different  $v_A$  as shown in Fig. 11. For low enough  $v_A$ , the distributions remain roughly Gaussian, whereas for high enough  $v_A$  they follow well-defined power-law tails. It is worth noting that the power-law tail appears only for  $v_A \geq 0.3$  m/s, as for the occurrence of shock waves (see Fig. 10). The power-law tail clearly converges to  $\delta\eta^{-4.3}$  for the first-order difference and to  $\delta^{(2)}\eta^{-3.0}$  for the second-order difference at high  $v_A$ .

A power-law tail distribution of the first-order difference is predicted in the case of diluted shocks driven by the 1D random-forced-driven Burgers equation [32–36]. The prediction of the power-law exponent is more controversial and depends in particular on the forcing correlation degree [35]. The PDF tail is predicted either in  $\delta\eta^{-4}$  [32] for finite viscosity or in  $\delta\eta^{-7/2}$  [33,34] in the limit of vanishing viscosity. The observation in Fig. 11 of a power-law PDF for the first- and second-order difference thus confirms that the shock waves drive the wave spectrum scaling. The above prediction of the power-law exponents is close to the experimental one (−4.3). The deviation is probably due to viscous dissipation and the fact that the experimental shocks do not generate a vertical front with a discontinuity of order one. To our knowledge, the statistics of random shock waves involving second-order discontinuities, i.e.,  $\delta^{(2)}\eta$  is a Dirac- $\delta$  distribution, has not been addressed theoretically but would be of primary interest to compare with our experimental results.

## VI. SHOCK-WAVE SPECTRUM

We have experimentally observed in Sec. IV C that the power spectrum  $S_\eta(\omega)$  scales as  $\omega^{-4}$  when it is dominated by second-order singularities. Let us now investigate the dependence of the spectrum  $S_\eta(\omega)$  with the other parameters. To derive analytically the spectrum, we follow the model



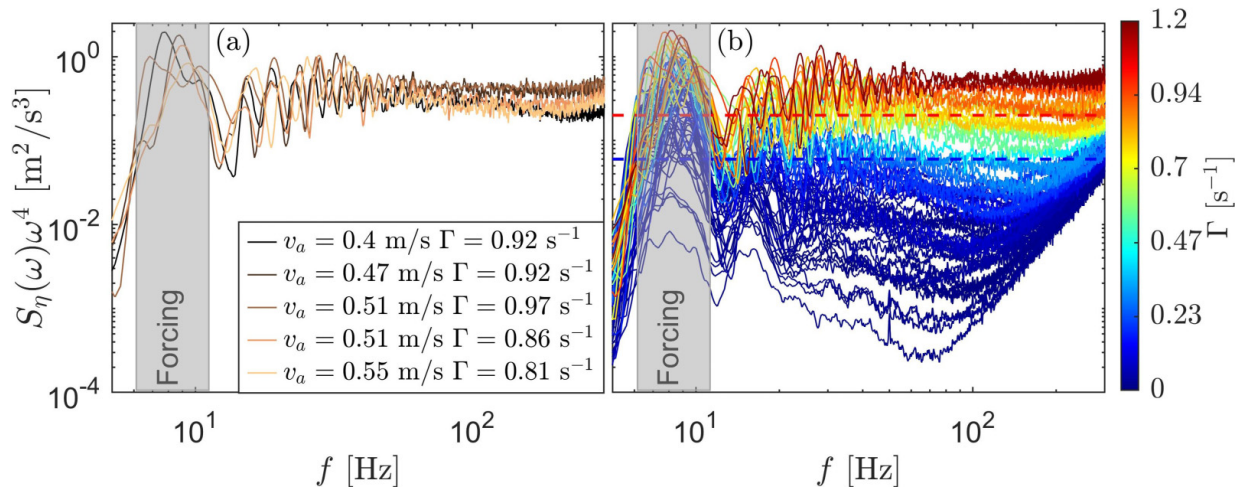


FIG. 12. Frequency compensated spectra  $S_\eta(\omega)\omega^4$  for (a) different  $v_A$  and almost constant shock rate  $0.8 < \Gamma < 1 \text{ s}^{-1}$  and (b) different values of  $\Gamma \in [0, 1.2] \text{ s}^{-1}$  (i.e.,  $v_A \in [0, 0.55] \text{ m/s}$ ) on a log-log plot. The horizontal blue (red) dashed lines separate the wave turbulence from the intermediate (full shock-wave) regimes. The gray area is the frequency bandwidth of the random forcing.

of acoustic turbulence [44] but for second-order singularities, as Kuznetsov did for pointlike surface singularities [31]. If we assume that the second-order difference of the signal  $\delta^{(2)}\eta$  is only made of a set of  $N$  Dirac singularities, of amplitudes  $\Delta_2(\eta)$ , located at the random times  $t = t_S$  ( $N$  is the total number of shocks and  $t_S$  are the moments they appear), one has

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sum_{t=0}^{\mathcal{T}} \Delta_2(\eta) \delta(t - t_S) / dt^2, \quad (6)$$

where  $\Delta_2[\eta(t)] \equiv \eta(t + 2dt) - 2\eta(t + dt) + \eta(t)$  is the second-order difference amplitude,  $dt = 1/f_e$ , and  $\delta$  is the Dirac operator. Using the Fourier transform of the surface elevation  $\eta(t)$  as  $\hat{\eta}_\omega = \int_0^{\mathcal{T}} \eta(t) e^{i2\pi ft} dt$ , performing two integrations by parts to include  $\partial^2 \eta / \partial t^2$  in the Fourier transform, and then using Eq. (6) and the definition of the spectrum  $S_\eta(\omega) \equiv |\hat{\eta}(\omega)|^2 / \mathcal{T}$ , we thus obtain

$$S_\eta(\omega) = C_S \overline{\Delta_2^2} \Gamma \omega^{-4} / dt^2, \quad (7)$$

with  $C_S = 1$  and the shock rate  $\Gamma = N/\mathcal{T} = 1/\overline{dt_S}$ , with  $dt_S$  the time between two successive shocks. The shock-wave spectrum of Eq. (7) thus predicts a  $\omega^{-4}$  scaling (as experimentally found above), is proportional to the number of shocks  $N$  and to the variance of their amplitude  $\overline{\Delta_2^2}$ , and is independent of  $v_A$ . Note that the acoustic spectrum of shock waves of first-order singularities scales as  $\Gamma \overline{\Delta_1^2} \omega^{-2}$ , with  $\Delta_1 \equiv \eta(t + dt) - \eta(t)$  [31,44,45]. More generally, for singularities of order  $n$ , their power spectrum reads  $S_\eta(\omega) = C_S \overline{\Delta_n^2} \Gamma \omega^{-2n} / dt^{2(n-1)}$ , showing that the higher  $n$  is, the denser the shocks have to be to dominate in the spectrum.

To test the prediction of Eq. (7), we compute experimentally the second-order difference of  $\eta(t)$  taking only the shock waves into account, i.e., we keep the maxima of the detected shock-wave events and remove the residual noise coming from the regular waves (see the red crosses in the inset of Fig. 13), the notation for  $\Delta_2$  is not changed in the following, for the sake of clarity. Figure 12(a) then shows the experimental compensated spectrum  $S_\eta(\omega)\omega^4$ , which is found to be constant over almost one decade in frequency and independent of  $v_A$ , as expected from Eq. (7), for a roughly constant shock rate  $\Gamma$ . This independence is of paramount interest and contrasts with the weak wave turbulence case in which the energy cascade is strongly dependent on the dispersion relationship. In the shock-wave regime, only the singularities and their statistics drive the spectrum once  $v_A$  is high

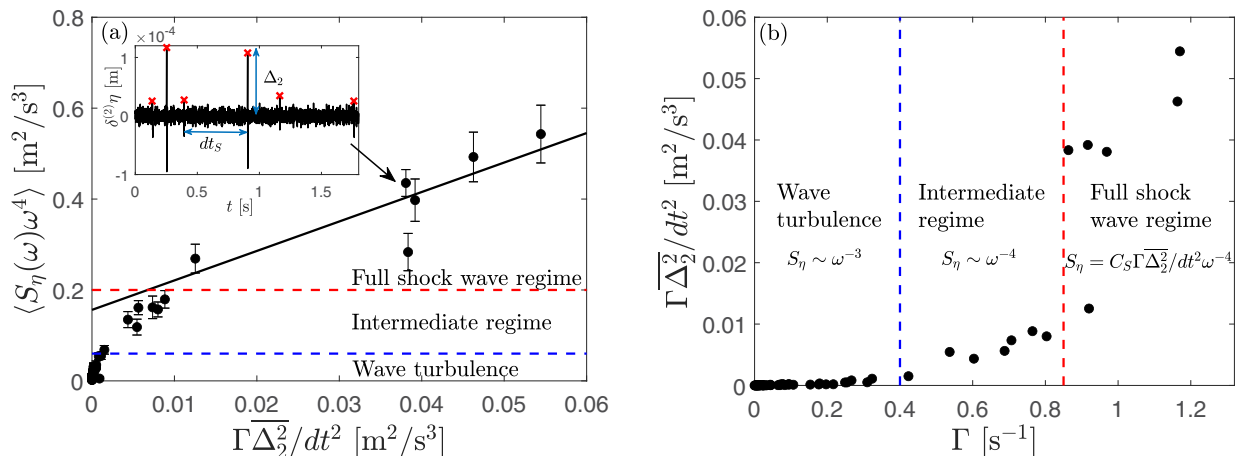


FIG. 13. (a) Compensated spectrum  $\langle S_\eta(\omega)\omega^4 \rangle_f$  (averaged within  $80 < f < 170$  Hz) as a function of  $\Gamma\overline{\Delta_2^2}/dt^2$ . The error bars are for the standard deviation of  $S_\eta(\omega)\omega^4$ . The black line shows the best linear fit for  $\langle S_\eta(\omega)\omega^4 \rangle_f > 0.2$   $\text{m}^2/\text{s}^3$ . The inset shows the temporal evolution of the second-order difference  $\delta^{(2)}\eta(t)$  (black line) and the corresponding Dirac-peak maxima (red crosses) for  $v_A = 0.51$   $\text{m/s}$  and  $\Gamma = 0.97$   $\text{s}^{-1}$ . The resulting point of the main figure is marked with an arrow. (b) Evolution of  $\Gamma\overline{\Delta_2^2}/dt^2$  with the shock rate  $\Gamma$ . The transitions between wave turbulence, intermediate, and full shock-wave regimes are shown (see the blue and red dashed lines).

enough ( $v_A > 0.4$   $\text{m/s}$ ). The increase of the experimental compensated spectrum with  $\Gamma$  is displayed in Fig. 12(b). It clearly shows that the shock rate  $\Gamma$  drives the value of the spectrum amplitude. When  $\Gamma > 0.4$   $\text{s}^{-1}$ , the scaling in  $\omega^{-4}$  is achieved [see the flat compensated spectra above the horizontal blue dashed line in Fig. 12(b)].

Looking experimentally at the scaling of the spectrum with the shock rate  $\Gamma$  and the variance of their amplitude  $\overline{\Delta_2^2}$  is more challenging since fixing their values independently is not possible. However, Fig. 13(a) shows that the value of the compensated spectrum  $\langle S_\eta(\omega)\omega^4 \rangle_f$ , averaged within  $80 < f < 170$  Hz, increases linearly with  $\Gamma\overline{\Delta_2^2}$ , as expected from Eq. (7), when the shock-wave regime is reached, i.e., for  $\Gamma > 0.85$   $\text{s}^{-1}$ . The theoretical spectrum of Eq. (7) is thus fully verified experimentally since the experimental constant  $C_S = 6.5$  is found to be of the same order of magnitude as the expected unit value. For lower shock rates ( $0.4 < \Gamma < 0.85$   $\text{s}^{-1}$ ), the spectrum still scales in  $\omega^{-4}$  [see Fig. 12(b)] but its amplitude does not follow Eq. (7), since it corresponds to an intermediate state between the shock-wave and wave turbulence regimes [see Fig. 13(a)]. Finally, Fig. 13(b) displays the evolution of  $\Gamma\overline{\Delta_2^2}/dt^2$  as a function of the shock rate  $\Gamma$ . At low  $\Gamma$ , almost no shock wave is detected and a wave turbulence regime is present. For moderate  $\Gamma$ , the quantity increases slightly with  $\Gamma$ , whereas for high  $\Gamma$ , it increases greatly, leading to a full shock-wave regime well described by Eq. (7).

To sum up, we used a simple model showing very good agreement with the experiments. In particular, it explains that the random shocks drive the frequency spectrum scaling in  $\omega^{-4}$ , whereas the number and amplitude of shocks control the spectrum amplitude independently of the value of  $v_A$ . We found three different regimes depending on the shock rate value: When  $\Gamma < 0.4$   $\text{s}^{-1}$ , the shock waves are not significant enough and gravity-capillary wave turbulence occurs [below the blue dashed lines in Figs. 12(b), 13(a), and 13(b)]; when  $0.4 < \Gamma < 0.85$   $\text{s}^{-1}$ , shock waves are significant enough to develop a spectrum of second-order singularities in  $\omega^{-4}$  but not enough to get the full spectrum of Eq. (7) [between the blue and red dashed lines in Figs. 12(b), 13(a), and 13(b)]; and when  $\Gamma > 0.85$   $\text{s}^{-1}$ , the full spectrum of discontinuities from Eq. (7) is achieved [beyond the red dashed lines in Figs. 12(b), 13(a), and 13(b)]. In the latter regime, note that despite nondispersivity, the Zakharov-Sagdeev spectrum of acoustic weak wave turbulence [19], recently observed numerically [52], is not achieved. Shock waves indeed prevent weak turbulence. Note

also that in this regime, the spectrum depends on the shock rate  $\Gamma$  and so is linked to the input power. Even if a critical balance ( $\tau_l > \tau_{nl}^S$ ) is achieved (see Fig. 9) [2], the spectrum obtained here does not follow the Phillips spectrum that is predicted to saturate and to be independent of the input power [53]. Instead of the Phillips spectrum we find experimental evidence for a spectrum of singularities, i.e., a Kuznetsov-like spectrum. This has also been found numerically for elastic plates [54,55].

## VII. CONCLUSION

We have studied the transition from quasi-1D dispersive wave turbulence to an acousticlike nondispersive regime. To do so, we used a magnetic fluid within a canal, subjected to an external horizontal magnetic field, to tune the dispersivity of waves on the surface of the fluid. For a low magnetic field, we recovered the classical wave turbulence regime driven by nonlinear resonant interactions [29]. For a high enough field, shock waves occur randomly involving second-order discontinuities, i.e., the second-order difference of the wave amplitude is a Dirac  $\delta$ . The frequency power spectrum of this shock-wave regime, discovered here, is found to scale as  $\omega^{-4}$  and to be proportional to the shock rate and to the variance of the shock amplitudes, provided the shock rate is high enough. These experimental findings are well captured by a Kuznetsov-like spectrum of a random Dirac- $\delta$  distribution involving second-order singularities. The transition from wave turbulence to the shock-wave regime is also evidenced by measuring the energy flux. As expected, the latter is found to be constant in the wave turbulence regime and to decrease over scales in the shock-wave regime due to the damping of shock waves storing energy at all scales. When shock waves are prevalent the timescale separation hypothesis of weak turbulence theory is no longer validated experimentally and a critical balance occurs instead. The shock-wave statistics is then studied and a phase diagram between wave turbulence and the shock-wave regime is shown as a function of the control parameters. The probability density functions of the first- and second-order differences of the surface elevation are computed and found to exhibit a power-law tail with an exponent close to the predictions of the 1D random-forced Burgers equation [32–36].

The observation of this shock-wave regime, not previously examined experimentally for hydrodynamic surface waves, is significant for two reasons. First, the assumption of weak turbulence theory of dispersive waves has been tested experimentally with this setup and shows that the presence of shock waves prevents the possibility to reach a wave turbulence regime. Second, the energy cascades in wave turbulence due to local resonant interactions, whereas in the shock-wave regime, the energy is mainly stored in shock waves that are coherent structures rich in the frequency domain. These singularities travel over the canal length, keeping their shapes, but are damped by viscous dissipation. Theoretical and numerical works would be of paramount interest to understand in more detail the transition reported here. It would also be significant to extend the bridge between the shock-wave regime reported here, as second-order singularities, and the 1D random-forced Burgers equation. Finally, high-order statistics could be investigated experimentally in such shock-dominated acoustic regime, in particular, to test intermittency and anomalous scalings of structure functions predicted by 1D random-forced Burgers turbulence [56–58].

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the French National Research Agency (ANR DYSTURB Project No. ANR-17-CE30-004 and ANR SOGOOD Project No. ANR-21-CE30-0061-04) and the Simons Foundation MPS No. 651463–Wave Turbulence (USA).

## APPENDIX A: FERROFLUID CHARACTERISTICS

The magnetization curve  $M(B)$  of the PBG400 ferrofluid is plotted in Fig. 14 and is provided by the Ferrotec manufacturer. It enables us to compute the variation of  $v_A$  with the magnetic induction  $B$  (see the inset of Fig. 14).

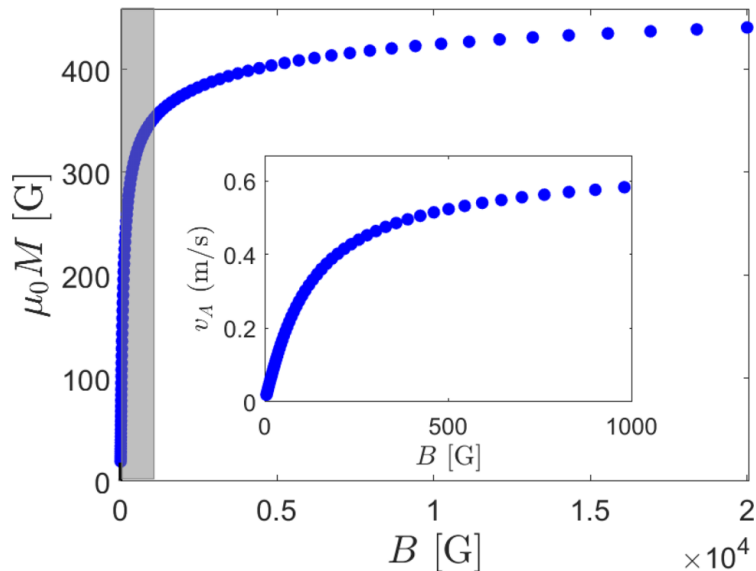


FIG. 14. Magnetization curve  $M(B)$  of the PBG400 ferrofluid provided by the Ferrotec manufacturer. The gray part represents the fields achievable experimentally. The inset shows the theoretical velocity  $v_A$  as a function of the applied magnetic induction  $B$  corresponding to the gray part of the main figure.

### APPENDIX B: TIME-FREQUENCY SPECTRUM

The time-frequency spectrum of the surface elevation obtained by a wavelet transform is plotted in Fig. 15. In the dispersive case [Fig. 15(a)], the energy cascades continuously over frequency scales and time until viscous dissipation occurs around 100 Hz. In the nondispersive case [Fig. 15(b)], localized coherent structures occur randomly and contain energy to all frequency scales.

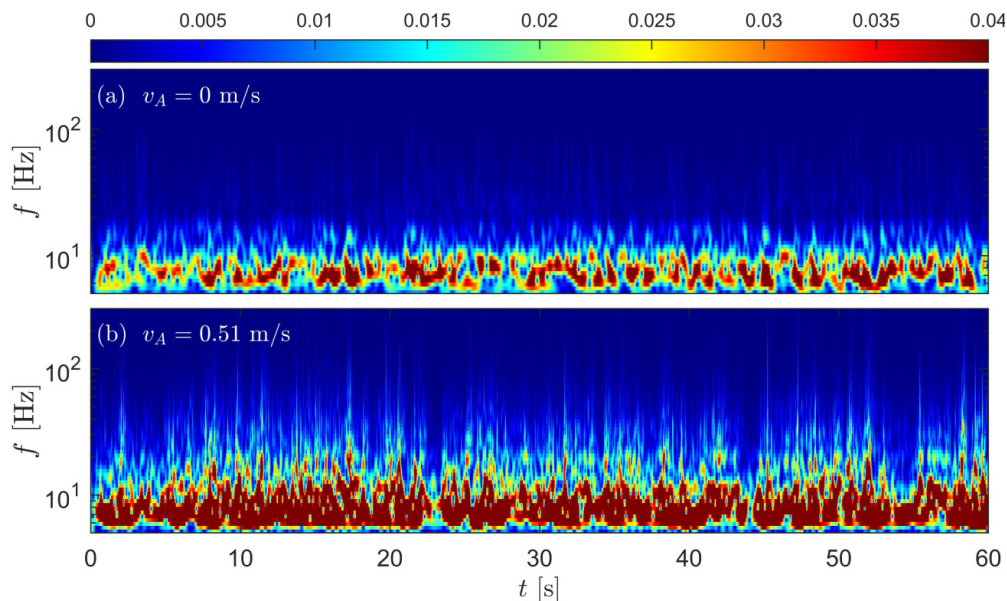


FIG. 15. Time-frequency spectrum of the surface elevation signals obtained by a wavelet transform for (a) the dispersive case ( $v_A = 0$  m/s) and (b) the nondispersive case ( $v_A = 0.51$  m/s).

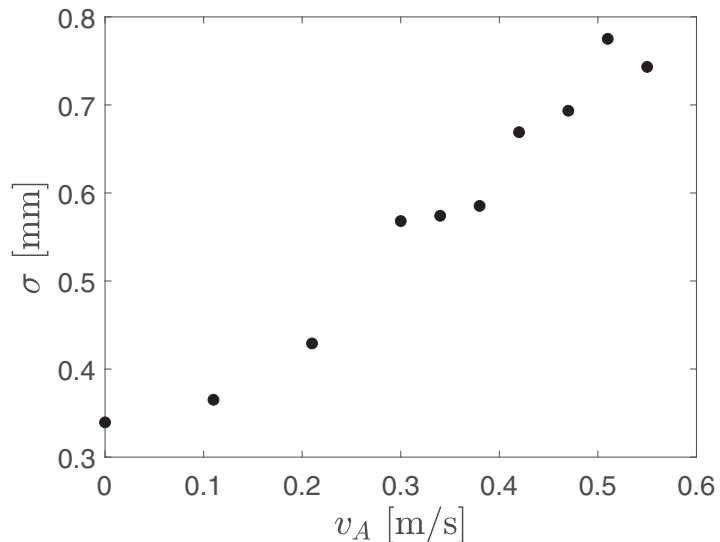


FIG. 16. Evolution of the standard deviation  $\sigma = \sqrt{\eta^2}$  of the surface elevation  $\eta(t)$  as a function of the magnetic parameter  $v_A$  for a constant steepness  $\epsilon \simeq 0.07$ .

### APPENDIX C: TYPICAL WAVE AMPLITUDE

The evolution of the typical wave amplitude  $\sigma$  with  $v_A$  is plotted in Fig. 16. It increases with  $v_A$ , except for the maximum value of  $v_A$  where Maxwell stress due to the external magnetic field probably flattens the wave amplitude.

### APPENDIX D: SHOCK-WAVE FORMATION

The response of the surface to a single pulse forcing is shown in Fig. 17 for different values of  $v_A$ . No shock wave occurs at small  $v_A$  [Figs. 17(a) and 17(b)] due to the dispersion. In the nondispersive case [Fig. 17(c)], a shock wave is formed and travels along the canal, keeping a constant shape with a discontinuity.

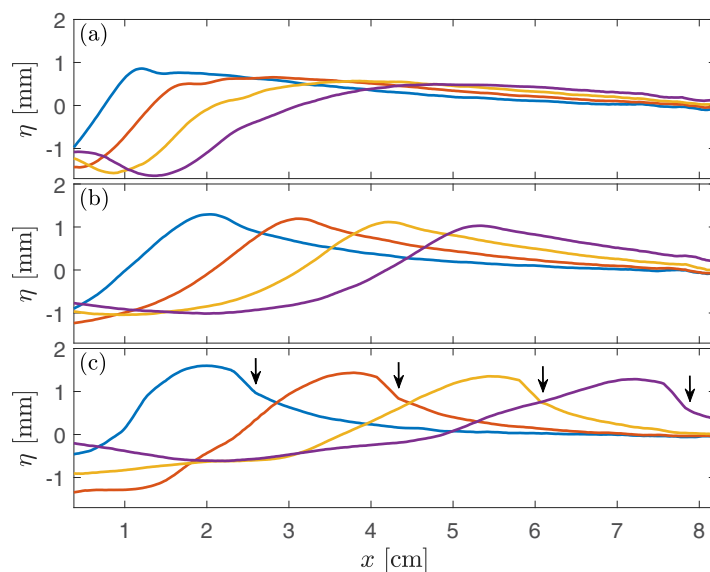


FIG. 17. Spatial evolution of a surface wave in response to a single pulse forcing for increasing times (spaced from 25 ms, from blue to purple) for the (a) dispersive ( $v_A = 0$  m/s), (b) intermediate ( $v_A = 0.3$  m/s), and (c) nondispersive ( $v_A = 0.51$  m/s) cases. The arrows indicate the discontinuity location over time.

- [1] V. E. Zakharov, G. Falkovitch, and V. S. L'vov, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
- [2] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 2011).
- [3] A. C. Newell and B. Rumpf, Wave turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59 (2011).
- [4] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, Observation of Gravity-Capillary Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
- [5] J. Laurie, U. Bortolozzo, S. Nazarenko, and S. Residori, One-dimensional optical wave turbulence: Experiment and theory, *Phys. Rep.* **514**, 121 (2012).
- [6] L. Deike, J.-C. Bacri, and E. Falcon, Nonlinear waves on the surface of a fluid covered by an elastic sheet, *J. Fluid Mech.* **733**, 394 (2013).
- [7] R. Hassaini, N. Mordant, B. Miquel, G. Krstulovic, and G. Düring, Elastic weak turbulence: From the vibrating plate to the drum, *Phys. Rev. E* **99**, 033002 (2019).
- [8] E. Monsalve, M. Brunet, B. Gallet, and P.-P. Cortet, Quantitative Experimental Observation of Weak Inertial-Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 254502 (2020).
- [9] E. Falcon and N. Mordant, Experiments in surface gravity-capillary wave turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **54**, 1 (2022).
- [10] Y. V. Lvov, S. Nazarenko, and B. Pokorni, Discreteness and its effect on water-wave turbulence, *Physica D* **218**, 24 (2006).
- [11] J. W. Banks, T. Buckmaster, A. O. Korotkevich, G. Kovačič, and J. Shatah, Direct Verification of the Kinetic Description of Wave Turbulence for Finite-Size Systems Dominated by Interactions among Groups of Six Waves, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 034101 (2022).
- [12] B. Issenmann and E. Falcon, Gravity wave turbulence revealed by horizontal vibrations of the container, *Phys. Rev. E* **87**, 011001(R) (2013).
- [13] L. Deike, B. Miquel, P. Gutiérrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy, Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence, *J. Fluid Mech.* **781**, 196 (2015).
- [14] R. Hassaini and N. Mordant, Confinement effects on gravity-capillary wave turbulence, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 094805 (2018).
- [15] A. Cazaubiel, S. Mawet, A. Darras, G. Grosjean, J. J. W. A van Loon, S. Dorbolo, and E. Falcon, Wave Turbulence on the Surface of a Fluid in a High-Gravity Environment, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 244501 (2019).
- [16] A. C. Newell and P. J. Aucoin, Semidispersive wave systems, *J. Fluid Mech.* **49**, 593 (1971).
- [17] V. S. L'vov, Y. L'vov, A. C. Newell, and V. Zakharov, Statistical description of acoustic turbulence, *Phys. Rev. E* **56**, 390 (1997).
- [18] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, On acoustic turbulence, *Sov. Phys. Dokl.* **18**, 115 (1973) [English translation of *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **208**, 794 (1973)].
- [19] V. E. Zakharov and R. Z. Sagdeev, Spectrum of acoustic turbulence, *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 439 (1970) [English translation of *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **192**, 297 (1970)].
- [20] A. Griffin, G. Krstulovic, V. S. L'vov, and S. Nazarenko, Energy Spectrum of Two-Dimensional Acoustic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 224501 (2022).
- [21] S. Galtier, S. Nazarenko, A. Newell, and A. Pouquet, A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics, *J. Plasma Phys.* **63**, 447 (2000); S. Galtier, *Physics of Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 2022).
- [22] S. Galtier and S. V. Nazarenko, Turbulence of Weak Gravitational Waves in the Early Universe, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 221101 (2017).
- [23] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Dover, New York, 1997).
- [24] S. Dorbolo and E. Falcon, Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field, *Phys. Rev. E* **83**, 046303 (2011).
- [25] E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, and E. Falcon, Three-dimensional direct numerical simulation of free-surface magnetohydrodynamic wave turbulence, *Phys. Rev. E* **105**, L063101 (2022).
- [26] E. Falcon and C. Laroche, Observation of depth-induced properties in wave turbulence on the surface of a fluid, *Europhys. Lett.* **95**, 34003 (2011).
- [27] R. Hassaini and N. Mordant, Transition from weak wave turbulence to soliton gas, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 094803 (2017).

- [28] V. E. Zakharov, F. Dias, and A. Pushkarev, One-dimensional wave turbulence, *Phys. Rep.* **398**, 1 (2004).
- [29] G. Ricard and E. Falcon, Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence, *Europhys. Lett.* **135**, 64001 (2021).
- [30] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1**, 171 (1948).
- [31] E. A. Kuznetsov, Turbulence spectra generated by singularities, *JETP Lett.* **80**, 83 (2004).
- [32] A. Chekhlov and V. Yakhot, Kolmogorov turbulence in a random-force-driven Burgers equation: Anomalous scaling and probability density functions, *Phys. Rev. E* **52**, 5681 (1995); V. Yakhot and A. Chekhlov, Algebraic Tails of Probability Density Functions in the Random-Force-Driven Burgers Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3118 (1996).
- [33] W. E, K. Khanin, A. Mazel, and Y. Sinai, Probability Distribution Functions for the Random Forced Burgers Equation, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1904 (1997).
- [34] W. E and E. Vanden Eijnden, Asymptotic Theory for the Probability Density Functions in Burgers Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2572 (1999); Statistical theory for the stochastic Burgers equation in the inviscid limit, *Commun. Pure Appl. Math.* **53**, 852 (2000).
- [35] U. Frisch and J. Bec, Burgulence, in *New Trends in Turbulence*, edited by M. Lesieur, A. Yaglom, and F. David (Springer, Berlin, 2001), Vol. 74, pp. 340–383; U. Frisch, J. Bec, and B. Villone, Singularities and the distribution of density in the Burgers/adhesion model, *Physica D* **152**, 620 (2001).
- [36] J. Bec and K. Khanin, Burgers turbulence, *Phys. Rep.* **447**, 1 (2007).
- [37] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Springer, Berlin, 1932).
- [38] R. E. Zelaco and J. R. Melcher, Dynamics and stability of ferrofluids: Surface interactions, *J. Fluid Mech.* **39**, 1 (1969).
- [39] H. Alfvén, Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves, *Nature (London)* **150**, 405 (1942).
- [40] A. Dyachenko, Y. Lvov, and V. E. Zakharov, Five-wave interaction on the surface of deep fluid, *Physica D* **87**, 233 (1995).
- [41] A. Cazaubiel, G. Michel, S. Lepot, B. Semin, S. Aumaître, M. Berhanu, F. Bonnefoy, and E. Falcon, Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 114802 (2018).
- [42] G. Michel, F. Bonnefoy, G. Ducrozet, G. Prabhudesai, A. Cazaubiel, F. Copie, A. Tikan, P. Suret, S. Randoux, and E. Falcon, Emergence of Peregrine solitons in integrable turbulence for deep water gravity waves, *Phys. Rev. Fluids* **5**, 082801(R) (2020).
- [43] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denissenko, Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains, *J. Fluid Mech.* **642**, 395 (2010).
- [44] P. G. Saffman, On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number, *Stud. Appl. Math.* **50**, 377 (1971).
- [45] E. Kuznetsov and V. Krasnoselskikh, Anisotropic spectra of acoustic type turbulence, *Phys. Plasmas* **15**, 062305 (2008).
- [46] M. Aulnette, M. Rabaud, and F. Moisy, Wind-sustained viscous solitons, *Phys. Rev. Fluids* **4**, 084003 (2019).
- [47] M. Berhanu, E. Falcon, and L. Deike, Turbulence of capillary waves forced by steep gravity waves, *J. Fluid Mech.* **850**, 803 (2018).
- [48] A. Grossmann and J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15**, 723 (1984).
- [49] J. Crank and P. Nicolson, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type, *Math. Proc. Cambridge* **43**, 50 (1947).
- [50] L. H. Thomas, Elliptic problems in linear difference equations over a network, Watson Scientific Computing Laboratory, Columbia University report, 1949 (unpublished), <https://www.lib.ncsu.edu/findingsaids/mc00210/contents> (box 18, 13.8).
- [51] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, Energy flux measurement from the dissipated energy in capillary wave turbulence, *Phys. Rev. E* **89**, 023003 (2014).
- [52] E. A. Kochurin and E. A. Kuznetsov, Direct numerical simulation of acoustic turbulence: Zakharov-Sagdeev spectrum, *JETP Lett.* **116**, 830 (2022).

- [53] O. M. Phillips, The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves, [J. Fluid Mech. \*\*4\*\*, 426 \(1958\)](#).
- [54] B. Miquel, A. Alexakis, C. Josserand, and N. Mordant, Transition from Wave Turbulence to Dynamical Crumpling in Vibrated Elastic Plates, [Phys. Rev. Lett. \*\*111\*\*, 054302 \(2013\)](#).
- [55] N. Mordant and B. Miquel, Intermittency and emergence of coherent structures in wave turbulence of a vibrating plate, [Phys. Rev. E \*\*96\*\*, 042204 \(2017\)](#).
- [56] J.-P. Bouchaud, M. Mézard, and G. Parisi, Scaling and intermittency in Burgers turbulence, [Phys. Rev. E \*\*52\*\*, 3656 \(1995\)](#).
- [57] E. Balkovsky, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Intermittency of Burgers' Turbulence, [Phys. Rev. Lett. \*\*78\*\*, 1452 \(1997\)](#).
- [58] E. Lindborg, A note on acoustic turbulence, [J. Fluid Mech. \*\*874\*\*, R2 \(2019\)](#).





## **Chapitre 4**

# **Turbulence d'ondes magnétohydrodynamiques anisotropes**

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de simulation numérique directe 3D d'un système d'ondes à la surface d'un fluide magnétique soumis à un champ magnétique horizontal. La principale différence avec le chapitre 3 (de géométrie en canal 1D et expérimental) est la géométrie de propagation du système qui est ici à 2D et la puissance du champ magnétique qui est bien plus forte. Ces travaux ont été effectués en collaboration avec Evgeny Kochurin (RAS, Iekaterinbourg, Russie), qui a réalisé les simulations numériques. Ils ont fait l'objet d'une publication dans *Physical Review E (Letters)* en 2022 [36] (reporté ci-après) et ont été relayés dans *Scientific Russia* le 29 juin 2022 ("Scientists have simulated the movement of fluids similar to space plasma"). Le résultat majeur est la mise en évidence d'une transition d'un régime de turbulence d'ondes capillaires vers un régime de turbulence d'ondes magnético-capillaires anisotrope. Ce régime se comporte de manière analogue à la turbulence d'ondes d'Alfvén anisotrope dans les plasmas [37].

## 4.1 Turbulence d'ondes d'Alfvén dans les plasmas

Un plasma est une phase de la matière composée d'un mélange d'ions et d'électrons, ce qui correspond à un fluide chargé et conducteur de l'électricité [96]. Les plasmas représentent la grande majorité de la matière visible de l'univers, c'est pourquoi leur étude est si importante en astrophysique (magnétosphère, vents solaires, disque d'accrétion de galaxies...). La magnétohydrodynamique (MHD) qui couple les équations de l'hydrodynamique (Navier-Stokes) avec celles de l'électromagnétisme (Maxwell) permet de décrire de tels systèmes. En MHD incompressible, des ondes, portées par les lignes de champ magnétique, émergent et sont appelées ondes d'Alfvén [97]. Ces ondes de loi de dispersion  $\omega = v_A k$ , où  $v_A$  est la vitesse des ondes d'Alfvén, jouent un rôle crucial dans les transferts d'énergie. Malgré leur aspect non dispersif, une turbulence d'ondes d'Alfvén peut, sous certaines conditions (notamment d'anisotropie), être envisageable [37, 96].

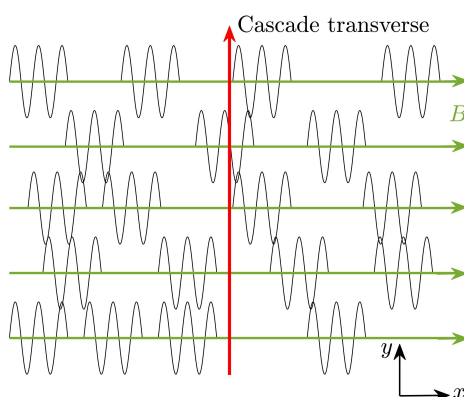


FIGURE 4.1 : Schéma de la cascade d'ondes d'Alfvén de cisaillement. Les lignes de champ  $B$  et la propagation des ondes sont suivant  $\mathbf{e}_x$ , le transfert d'énergie est suivant  $\mathbf{e}_y$ .

En supposant un plasma soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$  avec des ondes d'Alfvén qui se déplacent dans toutes les directions d'espace, Iroshnikov [98] et Kraichnan [99] prédisent qu'un grand nombre de collisions entre des paquets d'ondes mène à un spectre de turbulence d'ondes  $S_\eta(k) \sim k^{-5/2}$  (spectre dit d'Iroshnikov-Kraichnan). Ce spectre est identique à celui de Zakharov-Sagdeev pour la turbulence acoustique faible à trois dimensions [81]. Cependant il a, par la suite, été montré que l'isotropie supposée par ce modèle n'est pas valable en présence d'un intense champ magnétique unidirectionnel, car la loi de dispersion s'écrit alors  $\omega = v_A k_x$ . Les ondes ne peuvent alors se déplacer que selon la direction  $x$ . Néanmoins, bien que le déplacement des ondes n'ait lieu uniquement dans les plans parallèles à l'axe des  $x$ , des cisaillements entre paquets d'ondes ont lieu, permettant alors un transfert d'énergie dans un plan transverse

au champ [11, 96, 100]. Ces cisaillements sont la source d'interactions entre ondes non linéaires permettant l'établissement d'une cascade d'énergie transverse à 3-ondes le long de l'axe  $y$  dont le spectre est prédit théoriquement comme  $S_\eta(k) \sim P^{1/2} \nu_A^{-3/2} k_y^{-3}$  [37, 101]. La turbulence le long de l'axe  $x$  est quant à elle gelée. Un tel spectre de turbulence faible anisotrope a été observé dans la magnétosphère de Jupiter [102] et a été numériquement reproduit récemment [103, 104]. Le schéma de cette turbulence d'ondes est représenté sur la figure 4.1.

## 4.2 Résumé des résultats obtenus

Nous proposons, ici, la simulation numérique directe 3D d'ondes MHD à la surface d'un fluide magnétique soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$ . En négligeant les effets de gravité, la loi de dispersion peut être obtenue par un calcul analogue à ceux effectués dans les parties 1.1.2 et 3.3.4 et s'écrit :

$$\omega^2 = \nu_A [B]^2 k_x^2 + \frac{\Upsilon}{\rho} k^3, \quad (4.1)$$

avec  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

Contrairement aux travaux du chapitre 3 qui impliquait de négliger la pression de Maxwell, on observe ici qu'utiliser un très fort champ magnétique couplé à un liquide magnétique de très forte susceptibilité magnétique (non atteignable expérimentalement), rend cette pression dominante [89]. Ceci conduit à la suppression quasi totale de la propagation d'ondes dans la direction  $x$  du champ menant, dans la zone inertielle, à  $k_y \gg k_x$  donc à  $k \sim k_y$ . La loi de dispersion peut alors se réécrire :

$$\omega^2 = \nu_A [B]^2 k_x^2 + \frac{\Upsilon}{\rho} k_y^3, \quad (4.2)$$

avec  $\nu_A^2 k_x^2 \gg \frac{\Upsilon}{\rho} k_y^3$  pour un fort champ magnétique.

Nous obtenons alors un champ d'ondes anisotrope où l'énergie magnétique est transférée dans la direction transverse par des ondes capillaires. Cette interaction mène à un spectre d'ondes magneto-capillaires (où des interactions à 3-ondes sont montrées dominantes) qui se trouve être identique à celui de la turbulence d'ondes d'Alfvén anisotropes (dite de cisaillement) en  $S_\eta(k) \sim P^{1/2} \nu_A^{-3/2} k_y^{-3}$ . Cette observation montre l'universalité de la turbulence d'ondes. Notons néanmoins, que dans les plasmas aucune onde ne se propage perpendiculairement au champ (selon  $y$ ), seule l'énergie magnétique est transférée dans cette direction (voir figure 4.1), tandis que dans notre cas, des ondes capillaires se propagent perpendiculairement au champ en transportant l'énergie magnétique. Bien que la turbulence d'ondes d'Alfvén de cisaillement dans les plasmas et la turbulence d'ondes de surface magneto-capillaires soient deux phénomènes physiques très différents, l'unicité des lois de dispersion  $\omega = \nu_A k_x$ , de l'ordre non-linéaire dominant (interaction à 3-ondes) et des effets anisotropes mènent à des cascades d'énergie qualitativement et quantitativement identiques.

## 4.3 Article publié dans *Physical Review E (Letters)* en 2022

Evgeny Kochurin, Guillaume Ricard, Nikolay Zubarev et Eric Falcon, "Three-dimensional direct numerical simulation of free-surface magnetohydrodynamic wave turbulence" [36].

Article de presse : "Scientists have simulated the movement of fluids similar to space plasma", Scientific Russia, June 29, 2022 (in Russian).

## Three-dimensional direct numerical simulation of free-surface magnetohydrodynamic wave turbulence

Evgeny Kochurin <sup>1,2,\*</sup>, Guillaume Ricard <sup>3</sup>, Nikolay Zubarev <sup>2,4</sup> and Eric Falcon <sup>3,†</sup>

<sup>1</sup>Skolkovo Institute of Science and Technology, 121205 Moscow, Russia

<sup>2</sup>Institute of Electrophysics, Ural Division, Russian Academy of Sciences, 620016 Yekaterinburg, Russia

<sup>3</sup>Université Paris Cité, CNRS, MSC, UMR 7057, F-75013 Paris, France

<sup>4</sup>Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, 119991 Moscow, Russia



(Received 10 January 2022; accepted 18 May 2022; published 8 June 2022)

We report on three-dimensional direct numerical simulation of wave turbulence on the free surface of a magnetic fluid subjected to an external horizontal magnetic field. A transition from capillary-wave turbulence to anisotropic magneto-capillary wave turbulence is observed for an increasing field. At high enough field, wave turbulence becomes highly anisotropic, cascading mainly perpendicularly to the field direction, in good agreement with the prediction of a phenomenological model, and with anisotropic Alfvén wave turbulence. Although surface waves on a magnetic fluid are different from Alfvén waves in plasma, a strong analogy is found with similar wave spectrum scalings and similar magnetic-field dependent dispersionless wave velocities.

DOI: [10.1103/PhysRevE.105.L063101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.L063101)

*Introduction.* Most nonlinear wave systems reach a wave turbulence regime as a result of wave interactions [1,2]. This phenomenon occurs in various domains at different scales such as ocean surface waves, plasma waves, hydroelastic or elastic waves, internal or inertial waves, and optical waves [2]. The weakly nonlinear theory (called weak turbulence theory) derives analytically the solutions of the corresponding kinetic equations [1–5]. These solutions, known as the Kolmogorov-Zakharov (KZ) spectra, describe the energy transfers toward small scales (direct cascade) or large ones (inverse cascade). Although these solutions have been tested in different systems, numerical and experimental works are currently a paramount of interest to understand in what extent this theory can describe real physical systems.

One of the most important systems is Alfvén waves in magnetohydrodynamics (MHD) [6], initially observed in laboratory plasma [7–10], and recently in astrophysical plasma such as the Sun’s outer [11] or inner [12] atmosphere. Three-dimensional (3D) Alfvén waves in a turbulent regime were initially predicted to follow the isotropic Iroshnikov-Kraichnan spectrum [13,14]. However, they become strongly anisotropic in the presence of an intense magnetic field and transfer energy mainly in the plane transverse to the field, thus becoming nearly two-dimensional [2,15,16]. The spectrum of this anisotropic weak turbulence regime has been derived [17,18], then observed in Jupiter’s magnetosphere [19], and was recently confirmed numerically [20,21]. An analogous anisotropic behavior is predicted for hydrodynamic waves on the surface of a magnetic fluid subjected to a horizontal magnetic field [22]. Although wave turbulence regimes have been observed on the surface of a ferrofluid in an external magnetic field both experimentally [23,24] and

numerically [25], the anisotropic regime has never been reported so far in such a system, to our knowledge.

In this Letter, we show the existence of an analogy between Alfvén wave turbulence and wave turbulence on the surface of a magnetic fluid. The analogy is not only qualitative but also quantitative in terms of cascade of energy. In particular, we show that an anisotropic MHD wave turbulence emerges at a high enough magnetic field with a wave spectrum showing similar scalings than the ones of anisotropic Alfvén wave turbulence predictions.

*Theoretical backgrounds.* We consider an ideal incompressible magnetic liquid of infinite depth subjected to an external horizontal magnetic field  $B$  directed along the  $x$ -axis. The dispersion relation of linear waves on the surface of such a ferrofluid reads, neglecting gravity, [26]

$$\omega^2(\mathbf{k}) = [B^2/(\tilde{\mu}\rho)]k_x^2 + (\gamma/\rho)k^3, \quad (1)$$

where  $k \equiv |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  is the wave number,  $\omega$  is the angular frequency,  $\gamma$  and  $\rho$  are the surface tension and mass density of the liquid,  $\tilde{\mu} = \mu_0(\mu + 1)/(\mu - 1)^2$ ,  $\mu_0$  is the magnetic permeability of a vacuum, and  $\mu$  is the relative permeability of the liquid. Equation (1) describes the anisotropic propagation of surface waves. We define  $v_A^2 = B^2/(\tilde{\mu}\rho)$ , the group velocity of dispersionless magnetic surface wave propagating along  $B$  (analogous to Alfvén velocity [6]). Note that  $\mu$  here is constant, whereas  $\mu$  experimentally depends on  $B$  [24]. This change has no impact here since  $v_A$  is the parameter used to quantify magnetic effects.

The power spectrum of the surface elevation  $S(k)$  is defined as the square modulus of the Fourier transform of the surface elevation  $\eta(x, y)$ . Without magnetic field, the KZ spectrum for isotropic capillary wave turbulence reads [4]

$$S^c(k) = C_{\text{KZ}} P^{1/2} (\gamma/\rho)^{-3/4} k^{-15/4}, \quad (2)$$

\*kochurin@iep.uran.ru

†Corresponding author: eric.falcon@u-paris.fr

where  $C_{KZ}$  is the nondimensional KZ constant and  $P$  is the energy flux per unit area and density. The energy spectrum is  $E^c(k) = (\gamma/\rho)k^2 S^c(k)$ . To date, the KZ spectrum has been very well confirmed for capillary waves both experimentally (e.g., see [27–30]) and numerically [31–35] for weak nonlinear capillary waves. For  $B \neq 0$ , so far, no weak turbulence prediction for magneto-capillary waves exists. Only dimensional analysis has been done [23,24]. For Alfvén waves in a plasma within a strong magnetic field (e.g., along  $x$ ), the energy transfer by three-wave interactions has been shown to be frozen in the field direction and to occur only in the transverse direction to  $B$  [15]. The weak turbulence predictions for the power spectrum of such anisotropic Alfvén wave turbulence ( $k_y \gg k_x$ , i.e.,  $|\mathbf{k}| \sim k_y$ ) reads [16–18]

$$S^m(k) = C_m P^{1/2} v_A^{-3/2} k_y^{-3}, \quad (3)$$

where  $C_m = 1.467$  [36] (a  $\sqrt{2\pi}$  factor was missing in [18]). The energy spectrum is  $E^m(k) = v_A^2 k S^m(k)$ .

*Model equations.* The numerical model used here is based on the Hamiltonian equations describing the MHD motion of an ideal irrotational and incompressible ferrofluid subjected to an external horizontal magnetic field. We assume the absence of free electric charge and current in the fluid, which means that the magnetic field in the liquid is also potential. In the quadratic nonlinear approximation, the equations of boundary motion are written as

$$\eta_t = \hat{k}\psi - \hat{k}(\eta\hat{k}\psi) - \nabla_{\perp}(\eta\nabla_{\perp}\psi) + \hat{D}_k\eta, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \psi_t = & \nabla_{\perp}^2\eta + \frac{1}{2}[(\hat{k}\psi)^2 - (\nabla_{\perp}\psi)^2] + V_A^2\hat{k}^{-1}\eta_{xx} \\ & - \frac{A_{\mu}V_A^2}{2}[2\hat{k}^{-1}\partial_x(\eta\hat{k}\eta_x - \nabla_{\perp}\eta \cdot \nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x) - \eta_x^2 \\ & - 2\eta\eta_{xx} - (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x)^2] + \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) + \hat{D}_k\psi, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\nabla_{\perp} = \{\partial_x, \partial_y\}$  is the nabla operator,  $\psi$  is the velocity potential,  $\hat{k}$  is the integral operator having the form  $\hat{k}f_k = kf_k$ ,  $\hat{k}^{-1}$  is the inverse  $\hat{k}$ -operator,  $V_A^2 = v_A^2[\rho/(g\gamma)]^{1/2}$  is the nondimensional MHD wave speed,  $g$  is the gravity acceleration, and  $A_{\mu} = (\mu - 1)/(\mu + 1)$  is the magnetic Atwood number.  $\hat{D}_k$  is the viscosity operator acting as  $\hat{D}_k f_k = -\nu(k - k_d)^2 f_k$ , for  $k \geq k_d$ , and  $\hat{D}_k = 0$ , for  $k < k_d$ , the coefficient  $\nu$  determines the intensity of energy dissipation (see [37–39]). More details on the derivation of Eqs. (4) and (5) from potential equations are given in the Supplemental Material [40]. The pumping term  $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t)$  in Eq. (5) is defined in Fourier space as  $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = F(k) \exp[i\omega(\mathbf{k})t]$ , where  $F(k) = F_0 \exp[-(k - k_0)^4/k_f]$ , where  $F_0$  is the forcing amplitude reached at  $k = k_0$ . The wave vectors are pumped in the Fourier space in the range  $k \in [1, k_f]$  (see below), and in all directions. In the absence of dissipation and pumping, exact analytical solutions of Eqs. (4)–(5) has been found in the strong-field limit and  $\mu \gg 1$  [37,38].

For finite  $\mu$ , the surface waves collapse under the action of infinitely strong horizontal field [41]. Thus, for a correct simulation of the free surface MHD wave turbulence, it is necessary to take into account the regularizing effects of viscosity and surface tension. Equations (4) and (5) are solved numerically using the pseudospectral methods with the total

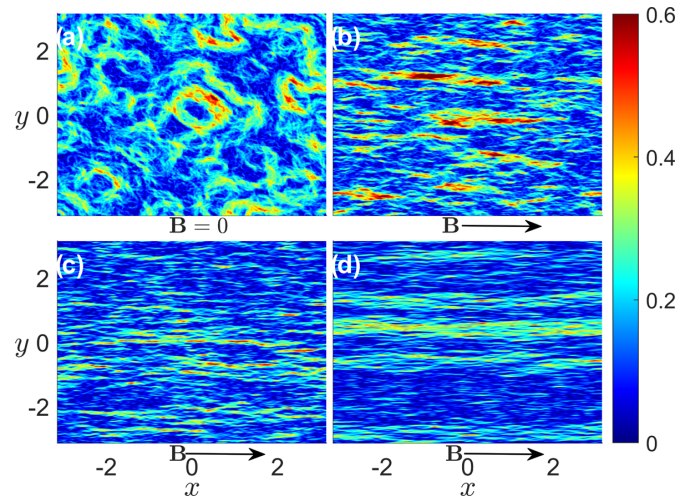


FIG. 1. Free surface gradient at a fixed time in the steady state ( $t = 250$ ) for different values of  $B$ , i.e., different  $V_A$ :  $V_A^2 =$  (a) 0, (b) 25, (c) 100, and (d) 300.  $B$  is along the  $x$ -axis. Lin-scale color bar.

number of Fourier harmonics  $N \times N$ . The time integration scheme is based on the explicit fourth-order Runge-Kutta method with a step  $dt$ . To stabilize the numerical scheme, a low-pass anti-aliasing filter is used [31]. At each integration time step, harmonics with wavenumbers greater than  $k_a$  are equated to zero. The effect of this low-pass filtering can be thus interpreted as “superviscosity” acting at small scales. Simulations are performed in a periodic box of size  $2\pi \times 2\pi$  with  $N = 1024$ ,  $dt = 5 \times 10^{-5}$ ,  $F_0 = 2000$ ,  $k_0 = 3$ ,  $k_f = 6$ ,  $k_d = 150$ ,  $k_a = 212$ , and  $\nu = 10$ . All numerical simulations are carried out for a magnetic fluid with  $A_{\mu} = 0.5$ , which corresponds to  $\mu = 3$ . We present below four series of simulations with different values of the magnetic parameter  $V_A^2 = 0, 25, 100$ , and  $300$ . The typical wave steepness  $\epsilon \equiv \langle \sqrt{\int_{\mathcal{S}} |\nabla\eta(x, y, t)|^2 dx dy} / \mathcal{S} \rangle_t$  used is 0.16 and is found to be almost constant when  $B$  is increased. The stationary state is reached after a time  $t \approx 50$ , and each simulation lasts up to  $t = 500$ .

*Phenomenological analysis.* The theoretical spectrum expected from our model equations [Eqs. (4) and (5)] is obtained following a phenomenological method described in Ref. [16,36] and detailed in the Supplemental Material [40]. We assume a strong magnetic field ( $V_A k_x \gg k_y^{3/2}$ ) and an anisotropy of the wave field ( $k_y \gg k_x$ ). The fourth member of the rhs of Eq. (5) provides an estimation of the nonlinear magnetic timescale as  $T_{nl}^m \sim \psi / (V_A^2 k_x^2 \eta^2)$ . Assuming that all the magnetic potential energy is transferred to capillary kinetic energy, one has  $V_A^2 k_x \eta^2 \sim \psi^2 k_y$ , and thus  $T_{nl}^m \sim 1 / (\psi k_y k_x)$  with  $\psi^2 \sim k_y E / k_x$ . Using the power budget, the energy flux then reads  $P \sim k_y E / (\omega T_{nl}^m)$ , with  $E$  being the energy spectrum. The power spectrum of surface elevations,  $S^m(k) = E(k) / (V_A^2 k)$ , finally reads  $S^m(k) \sim P^{1/2} V_A^{-3/2} k_y^{-3}$ , which is found to be the same as the shear-Alfvén wave turbulence prediction of Eq. (3).

*Anisotropic regime.* Fig. 1 shows the gradient of the free surface at a fixed time in the steady state for different  $B$ . We observe a transition from an isotropic regime [Fig. 1(a)] to

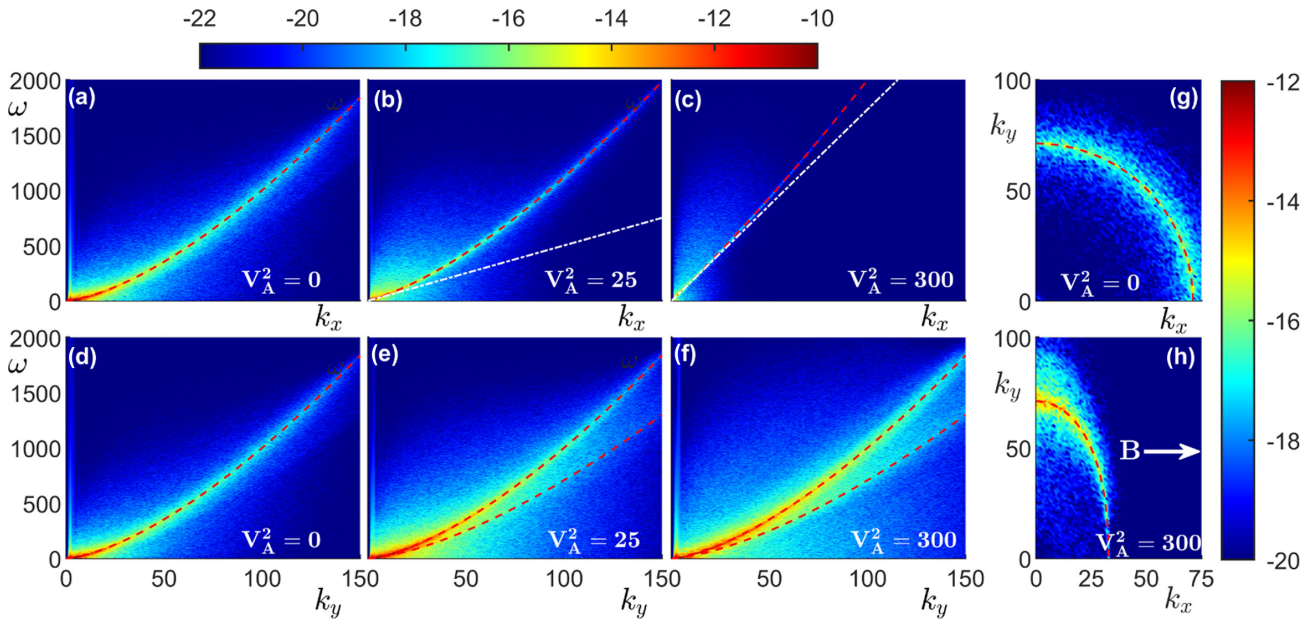


FIG. 2. (a)–(c) Power spectra  $S(k_x, \omega)$  of surface elevations in the field direction ( $x$ -axis) for different  $B$ , i.e., different  $V_A$ . Log-color bar. The red-dashed lines correspond to Eq. (1) (dispersion relation) and white dash-dotted lines to nondispersive wave propagation,  $\omega = V_A k_x$ . (d)–(f) Power spectra  $S(k_y, \omega)$  of waves traveling along  $y$ -axis. The red dashed lines correspond to  $\omega = k_y^{3/2}$  and  $\omega = k_y^{3/2}/2^{1/2}$ . (g) and (h): Cross sections  $S(k_x, k_y, \omega^*)$  of the power spectrum at a fixed angular frequency  $\omega^* = 600$  for different fields  $V_A^2 = 0$  and  $V_A^2 = 300$ , respectively. Red-dashed lines correspond to  $|\mathbf{k}(\omega^*)|$  using Eq. (1).

a highly anisotropic regime [Fig. 1(d)]. Indeed, the surface relief in Fig. 1(d) becomes almost unidirectional, corresponding to surface waves propagating mainly in the direction perpendicular to  $B$  (see below). This anisotropy is due to the stabilizing effect of a horizontal magnetic field on a magnetic liquid. Indeed, for waves propagating in the field direction, the field lines pierce the wavy liquid-gas interface, and flatten it in the field direction as a consequence of the field boundary conditions at the interface [22,42]. This behavior is close to the anisotropy observed when Alfvén waves propagate in the direction of a magnetic field [2], although of a different origin.

*Nonlinear dispersion relation.* The anisotropy is also evidenced by the full power spectrum  $S(k, \omega)$  of surface elevations. Figs. 2(a)–2(c) show the spectrum  $S(k_x, \omega)$  for waves traveling along the field direction for different  $B$ , i.e., different  $V_A$ . For  $B = 0$ , the energy injected at low  $k$  is redistributed within a large range of wave numbers around the dispersion relation of Eq. (1), as expected. When  $B$  is increased, the dispersion relation is deformed [see Fig. 2(b)], then becomes quasidispersionless in the field direction [see Fig. 2(c)]. The spectra  $S(k_y, \omega)$  of waves traveling normally to the field are shown in Figs. 2(d)–2(f) for different  $B$ . Figure 2(d) corresponds to pure capillary waves ( $B = 0$ ). When  $B$  is increased, waves of higher and higher wavenumbers are generated. Such enhanced energy transfers perpendicular to the field direction when the latter is increased are a consequence of the anisotropic effect described above. Figs. 2(e) and 2(f) display the emergence of a second branch in the dispersion relation. This branch corresponds to bound waves (harmonics due to nonresonant interactions) [43]. Figs. 2(g) and 2(h) show the cross sections  $S(k_x, k_y, \omega^*)$  of the power spectrum for a fixed angular frequency value,  $\omega^*$ . For  $B = 0$  [see Fig. 2(g)], the energy is distributed isotropically in all directions along a

circle of radius  $|\mathbf{k}(\omega^*)|$  (only the first quadrant is shown). When  $B$  is increased, the energy is redistributed anisotropically and is much stronger in the perpendicular direction than in the field direction [see Fig. 2(h)]. This effect is reported for all frequencies (see Supplemental Material [40]). A stronger nonlinear broadening also appears since bound waves occur normal to the field direction. To sum up, at high magnetic field, anisotropic wave propagation is observed ( $k_y \gg k_x$ ) as expected by weak MHD (or shear-Alfvén) wave turbulence as well as appearance of nonlinear coherent structures in the  $y$  direction.

*Wave interactions.* The MHD surface wave turbulence observed here involves nonlinear waves cascading towards small scales as a result of anisotropic three-wave resonant interactions occurring mainly in the perpendicular direction of the magnetic field (see inset of Fig. 3). These three-wave resonant interactions are well evidenced by computing the third-order correlation (or bicoherence) of surface elevations (see Supplemental Material [40]).

*Wave-number spectrum.* To quantify the transition from isotropic capillary wave turbulence to anisotropic MHD wave turbulence, we compute the power spectra of surface elevations in frequency,  $S(\omega)$ , and in wave number  $S(k)$ .  $S(k)$  is shown in Fig. 3 for different  $V_A$ . At zero field, the spectrum is in good agreement with the KZ spectrum in  $k^{-15/4}$  of Eq. (2). At intermediate field, the spectrum exponent decreases slightly, but is still close to the one predicted by weak turbulence theory. At a high enough field, we observe a transition from the KZ spectrum to a spectrum in  $k^{-3}$  in rough agreement with the scaling of the phenomenological model and of anisotropic Alfvén wave turbulence of Eq. (3) (see main Fig. 3). Specifically, the inset of Fig. 3 shows the spectra  $S(k_x)$  along the field direction ( $x$ -axis) and  $S(k_y)$  perpendicular

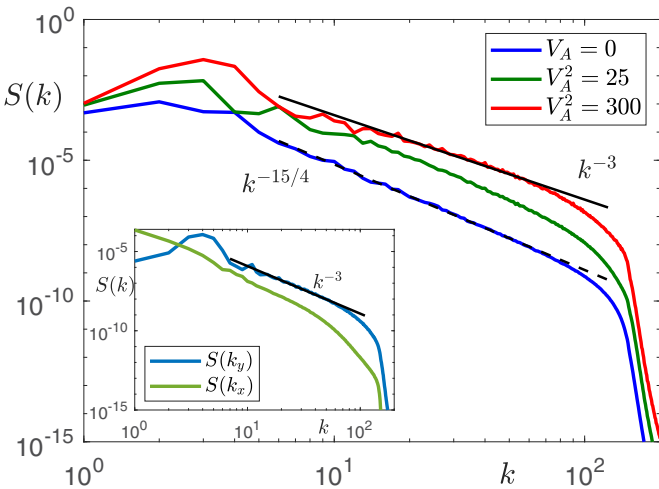


FIG. 3. Power spectra  $S(k)$  of surface elevations for different  $V_A$ . Curves have been shifted for clarity. Dashed line: capillary-wave turbulence theory of Eq. (2) [4]. Solid line: anisotropic MHD wave turbulence theory of Eq. (3). Inset: Spectra in the field direction  $S(k_x)$  (green line) and normal to the field  $S(k_y)$  (blue line).  $V_A^2 = 300$ .

to it (y-axis) for  $V_A^2 = 300$ .  $S(k_y)$  is found to scale as  $k_y^{-3}$  as expected by Eq. (3) whereas  $S(k_x)$  is more than one order of magnitude smaller than  $S(k_y)$  in the inertial range. Thus, the spectrum,  $S(k) = C_k(P, V_A)k^{-3}$ , observed in the main Fig. 3, is mainly due to the energy transferred perpendicularly to the external field. We now determine the scaling of the coefficient  $C_k$  with the energy flux  $P$  and with the magnetic parameter  $V_A$  by performing two series of simulations: (i) at a fixed magnetic field ( $V_A^2 = 300$ ) for different amplitudes of the energy pumping (i.e., different  $P$ ); (ii) at a fixed rate of energy dissipation  $P$  for different fields. The spectrum is then found to increase with the pumping as  $C_k(P) \sim P^{1/2}$  [see inset (a) of Fig. 4] and to decrease with the magnetic field as  $C_k \sim V_A^{-3/2}$  [see inset (b)] for high enough  $V_A$ . Note that  $C_{k_y}$ , the coefficient of the spectrum  $S(k_y)$ , is observed to follow the same scaling. When returning to the dimensional variables, we find thus

$$S(k) \approx S(k_y) = CP^{1/2}v_A^{-3/2}k_y^{-3}, \quad (6)$$

where  $C$  is a constant, independent of  $P$  and  $V_A$ , to be found numerically (see below). Eq. (6) is similar to the spectrum scalings found above by the phenomenological model and to Eq. (3) describing anisotropic Alfvén waves in plasma subjected to a strong magnetic field. Although MHD surface waves on a magnetic fluid is physically different from MHD Alfvén waves in plasma, the anisotropic effect on the energy transfer due to the magnetic field is common and leads to the same scaling for the wave spectrum. Note that in plasma, no wave propagates normal to the field (only magnetic energy is transferred to the normal direction by shearing) whereas, in our case, capillary waves propagate normal to the field, the magnetic energy being transferred to capillary energy.

**Frequency spectrum.** We now compute the frequency spectrum  $S(\omega)$  for different  $V_A$  as shown in Fig. 4. At zero field, the simulations again show a good agreement with the predicted KZ spectrum in  $S(\omega) \sim \omega^{-17/6}$  [4]. At large enough  $V_A$ , the spectrum is less steep and scales as  $S(\omega) = C_\omega \omega^{-7/3}$ . The

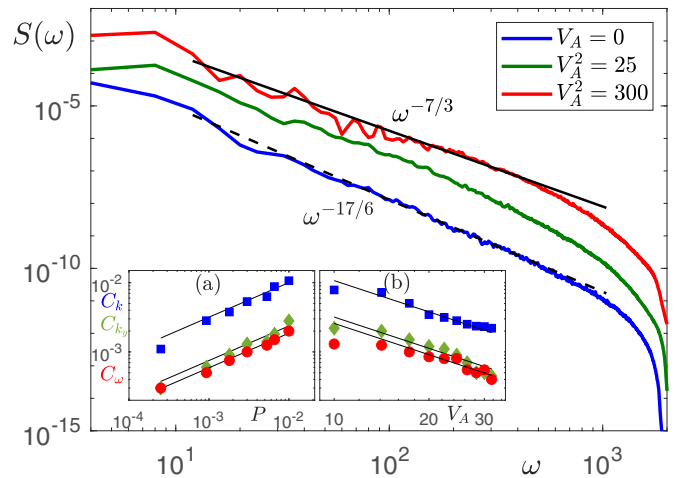


FIG. 4. Power spectra  $S(\omega)$  of surface elevations for different  $V_A$ . Curves have been shifted for clarity. Dashed line: capillary-wave turbulence theory in  $\omega^{-17/6}$  from Eq. (2) using  $\omega \sim k^{-3/2}$  [4]. Solid line: predictions for anisotropic MHD surface wave turbulence from Eq. (3) using  $\omega \sim k^{-3/2}$ . Inset: spectrum coefficients  $C_k$  (square),  $C_{k_y}$  (diamond) and  $C_\omega$  (circle) versus (a)  $P$  for fixed  $V_A^2 = 300$ , and (b)  $V_A$  for fixed  $P \approx 2.7 \times 10^{-3}$ . Solid lines: best fits in  $P^{1/2}V_A^{-3/2}$ .

coefficient  $C_\omega$  is found to scale as  $P^{1/2}$  and  $V_A^{-3/2}$  (see insets of Fig. 4) as for  $C_k$ . Returning to the dimensional variables thus leads to

$$S(\omega) = C'(\gamma/\rho)^{2/3}P^{1/2}v_A^{-3/2}\omega^{-7/3}, \quad (7)$$

where  $C'$  is a constant. Note that the empirical spectra of Eqs. (6)–(7) are found to be consistent with each other since they verify  $S(\omega)d\omega = S(k)dk \approx S(k_y)dk_y$ , using  $k_y \gg k_x$  and  $\omega(k)$  from Eq. (1). This also gives  $C' = 2C/3$ . We find the values of the constants  $C = 1.7$  and  $C' = 1.34$  (using the best fits of  $C_{k_y}$  and  $C_\omega$  in Fig. 4(a)).  $C$  is close to the theoretical value  $C_m = 1.467$  found for shear-Alfvén wave turbulence in plasma [36] and the ratio  $2C/3C' = 0.85$  is, as expected, close to 1. Moreover, the spectrum scaling with the energy flux in  $P^{1/2}$  is consistent with the fact that three-wave resonant interactions are involved here [2]. Finally, the timescale separation hypothesis of wave turbulence is verified here since the nonlinear time is found much longer than the linear time regardless of  $k$  (see Supplemental Material [40]). A typical resonant triad is also shown in [40] to highlight that resonant wave vectors are of the same order of magnitude suggesting that wave interactions are local. Our results thus differ from two-dimensional MHD weak-turbulence predictions leading to nonlocal interactions and a flat steady-state spectrum [44].

**Conclusion.** We have numerically reported a transition from isotropic capillary-wave turbulence to a strongly anisotropic MHD wave turbulence on a surface of a magnetic fluid, for a high enough magnetic field. In this anisotropic regime, the wave spectrum is found to be in good agreement with the prediction of three-dimensional weak MHD (shear-Alfvén) wave turbulence. This highlights the broad application of weak wave turbulence where different physical systems can lead to similar phenomena, only because they share similar dispersion relations and the same nonlinear



interaction process (three-wave resonant interactions). Such quantitative analogy between Alfvén waves in plasma and surface waves on magnetic fluids deserve further studies, in particular theoretically, that could lead to a better understanding of plasma by studying them more easily. The analogy discovered here could be pushed forward to explore open questions in wave turbulence such as the properties of large scales [30], or the critical balance separating weak turbulence from strong turbulence [21]. The phenomenon reported here could also be observed experimentally using a ferrofluid with a high magnetic susceptibility and a high saturation magnetization. However, such ferrofluids are currently still too

viscous (at least ten times the water value) which would prevent wave interactions to occur. Finally, similar effects should be expected in electrohydrodynamics of nonconducting liquids in a strong electric field due to the equivalence between the underlying equations [45].

*Acknowledgments.* E. Kochurin's work on developing the numerical tools is supported by Russian Science Foundation, project No. 21-71-00006. E. Falcon thanks partial support of the French National Research Agency (ANR DYSTURB Project No. ANR-17-CE30-004 and ANR SOGOOD Project No. ANR-21-CE30-0061-04), and of the Simons Foundation MPS N°651463-Wave Turbulence.

- 
- [1] V. E. Zakharov, G. Falkovitch, and V. S. L'vov, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [2] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 2011).
- [3] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid, *Sov. Phys. Dokl.* **11**, 881 (1967) [*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **170**, 1292 (1966)].
- [4] V. E. Zakharov, and N. N. Filonenko, Weak turbulence of capillary waves, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **8**, 37 (1967).
- [5] V. E. Zakharov, and R. Z. Sagdeev, Spectrum of acoustic turbulence, *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 439 (1970) [*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **192**, 297 (1970)].
- [6] H. Alfvén, Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves, *Nature (London)* **150**, 405 (1942)
- [7] S. Lundquist, Experimental Investigations of Magneto-Hydrodynamic Waves, *Phys. Rev.* **76**, 1805 (1949).
- [8] W. H. Bostick and M. A. Levine, Experimental demonstration in the laboratory of the existence of magneto-hydrodynamic waves in ionized helium, *Phys. Rev.* **87**, 671 (1952).
- [9] B. Lehnert, Magneto-Hydrodynamic Waves in Liquid Sodium, *Phys. Rev.* **94**, 815 (1954).
- [10] T. K. Allen, W. R. Baker, R. V. Pyle, and J. M. Wilcox, Experimental Generation of Plasma Alfvén Waves, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 383 (1959).
- [11] B. De Pontieu, S. W. McIntosh, M. Carlsson, V. H. Hansteen, T. D. Tarbell, C. J. Schrijver, A. M. Title, R. A. Shine, S. Tsuneta, Y. Katsukawa, K. Ichimoto, Y. Suematsu, T. Shimizu, and S. Nagata, Chromospheric alfvénic waves strong enough to power the solar wind, *Science* **318**, 1574 (2007).
- [12] J. C. Kasper, K. G. Klein, E. Lichko, J. Huang, C. H. K. Chen, S. T. Badman, J. Bonnell, P. L. Whittlesey, R. Livi, D. Larson, M. Pulupa, A. Rahmati, D. Stansby, K. E. Korreck, M. Stevens, A. W. Case, S. D. Bale, M. Maksimovic, M. Moncuquet, K. Goetz, J. S. Halekas, D. Malaspina, N. E. Raouafi, A. Szabo, R. MacDowall, M. Velli, T. Dudok de Wit, G. P. Zank, *Parker Solar Probe Enters the Magnetically Dominated Solar Corona*, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 255101 (2021).
- [13] P. S. Iroshnikov, Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field, *Soviet Astron.* **7**, 566 (1964).
- [14] R. H. Kraichnan, Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence, *Phys. Fluids* **8**, 1385 (1965).
- [15] J. V. Shebalin, W. H. Matthaeus, and D. Montgomery, Anisotropy in MHD turbulence due to a mean magnetic field, *J. Plasma Phys.* **29**, 525 (1983).
- [16] S. Galtier, *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016); Turbulence in space plasmas and beyond, *J. Phys. A: Math. Theor.* **51**, 293001 (2018).
- [17] C. S. Ng, and A. Bhattacharjee, Scaling of anisotropic spectra due to the weak interaction of shear-Alfvén wave packets, *Phys. Plasmas* **4**, 605 (1997).
- [18] S. Galtier, S. Nazarenko, A. Newell, and A. Pouquet, A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics, *J. Plasma Phys.* **63**, 447 (2000).
- [19] J. Saur, H. Politano, A. Pouquet, and W. H. Matthaeus, Evidence for weak MHD turbulence in the middle magnetosphere of Jupiter, *Astron. Astrophys.* **386**, 699 (2002).
- [20] R. Meyrand, K. Kiyani, and S. Galtier, Weak magnetohydrodynamic turbulence and intermittency, *J. Fluid Mech.* **770**, R1 (2015).
- [21] R. Meyrand, S. Galtier, and K. H. Kiyani, Direct Evidence of the Transition from Weak to Strong Magnetohydrodynamic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 105002 (2016).
- [22] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, (Dover Publications, New York, 1997).
- [23] F. Boyer and E. Falcon, Wave Turbulence on the Surface of a Ferrofluid in a Magnetic Field, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 244502 (2008).
- [24] S. Dorbolo and E. Falcon, Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field, *Phys. Rev. E* **83**, 046303 (2011).
- [25] E. A. Kochurin, Numerical simulation of the wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field, *J. Magn. Magn. Mater.* **503**, 166607 (2020).
- [26] J. R. Melcher, Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities, *Phys. Fluids* **4**, 1348 (1961).
- [27] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, Observation of Gravity-Capillary Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
- [28] C. Falcón, E. Falcon, U. Bortolozzo, and S. Fauve, Capillary wave turbulence on a spherical fluid surface in low gravity, *Europhys. Lett.* **86**, 14002 (2009).

- [29] G. V. Kolmakov, M. Y. Brazhnikov, A. A. Levchenko, L. V. Abdurakhimov, P. V. E. McClintock, and L. P. Mezhov-Deglin, Capillary Turbulence on the Surfaces of Quantum Fluids, *Prog. Low Temp. Phys.* **16**, 305 (2009).
- [30] E. Falcon and N. Mordant, Experiments in Surface Gravity-Capillary Wave Turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **54**, 1 (2022).
- [31] A. N. Pushkarev and V. E. Zakharov, Turbulence of Capillary Waves, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3320 (1996).
- [32] A. N. Pushkarev and V. E. Zakharov, Turbulence of capillary waves: Theory and numerical simulation, *Physica (Amsterdam)* **135D**, 98 (2000).
- [33] L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu, and E. Falcon, Direct Numerical Simulations of Capillary Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 234501 (2014).
- [34] Y. Pan and D. K. P. Yue, Direct Numerical Investigation of Turbulence of Capillary Waves, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 094501 (2014).
- [35] Y. Pan and D. K. P. Yue, Decaying capillary wave turbulence under broad-scale dissipation, *J. Fluid Mech.* **780**, R1 (2015).
- [36] S. Galtier, *Physique de la Turbulence* (EDP Sciences/CNRS Editions, Paris 2021), Ch. 9, pp. 223–248
- [37] N. M. Zubarev, Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a strong tangential electric field, *Phys. Lett. A* **333**, 284 (2004).
- [38] N. M. Zubarev, Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field in 3D geometry: Exact solutions, *JETP Lett.* **89**, 271 (2009).
- [39] N. M. Zubarev and E. A. Kochurin, Three-dimensional nonlinear waves at the interface between dielectric fluid in an external horizontal electric field, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **54**, 212 (2013).
- [40] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.105.L063101>. for additional information on (i) details of the numerical model, (ii) stationarity of the total energy and probability distribution of the wave field, (iii) wave field images, (iv) effects of anisotropy on the wave spectrum and on the correlations of the wave elevations, (v) verification of timescale separation, and (vi) derivation of the phenomenological model of the wave spectrum and nonlinear timescales.
- [41] E. A. Kochurin, O. V. Zubareva, and N. M. Zubarev, Wave breaking on the surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field, *IEEE Trans. Dielect. Electr. Insul.* **27**, 1222 (2020).
- [42] C. A. Walsh, Magnetized ablative Rayleigh-Taylor instability in three dimensions, *Phys. Rev. E* **105**, 025206 (2022).
- [43] E. Herbert, N. Mordant, and E. Falcon, Observation of the Nonlinear Dispersion Relation and Spatial Statistics of Wave Turbulence on the Surface of a Fluid, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 144502 (2010).
- [44] N. Tronko, S. V. Nazarenko, and S. Galtier, Weak turbulence in two-dimensional magnetohydrodynamics, *Phys. Rev. E* **87**, 033103 (2013).
- [45] E. A. Kochurin, Wave Turbulence of a Liquid Surface in an External Tangential Electric Field, *JETP Lett.* **109**, 303 (2019).

# Supplemental Material of "Three-dimensional direct numerical simulation of free-surface magnetohydrodynamic wave turbulence"

Evgeny Kochurin,<sup>1,2</sup> Guillaume Ricard,<sup>3</sup> Nikolay Zubarev,<sup>2,4</sup> and Eric Falcon<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Skolkovo Institute of Science and Technology, 121205, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Institute of Electrophysics, Ural Division, Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620016 Russia*

<sup>3</sup>*Université Paris Cité, CNRS, MSC Laboratory, UMR 7057, F-75 013 Paris, France*

<sup>4</sup>*Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia*

In this Supplemental Material, we present additional data analyses related to wave turbulence on the surface of a magnetic fluid subjected to a horizontal magnetic field: details of the numerical model (Sec. I), stationarity of the total energy and probability distribution of the wave field (Sec. II), wave field images (Sec. III), effects of anisotropy on the wave spectrum and on the correlations of the wave elevations (Sec. IV), verification of the timescale separation (Sec. V), and derivation of the phenomenological model of the wave spectrum and nonlinear timescales (Sec. VI). Notations as in the aforementioned text.

## I. NUMERICAL MODEL

We consider a potential flow of an ideal incompressible ferrofluid. The velocity potential  $\Phi(\mathbf{r})$  satisfies the Laplace equation  $\Delta\Phi = 0$ , at  $z < \eta$ . Maxwell's equations are reduced to a static boundary value problem at each moment in time: magnetic field lines instantly adjust to the curved fluid boundary. This approximation is valid if the typical velocity of the liquid surface is much less than the speed of light. Such a condition is thus fully fulfilled. We suppose that the magnetic fluid is dielectric (there are no free electric current), i.e., the magnetic field strength  $H_{1,2}(\mathbf{r})$  is characterized by magnetic scalar potentials  $H_{1,2} = -\nabla\varphi_{1,2}$ , where the indices "1" and "2" correspond to the regions inside the liquid and above its free boundary, respectively. The magnetic potentials obey the Laplace equation  $\Delta\varphi_{1,2} = 0$ , at  $z \neq \eta$ . The boundary conditions for Maxwell's equations in terms of the magnetic potential are written as  $\varphi_1 = \varphi_2$  and  $\mu\partial_n\varphi_1 = \partial_n\varphi_2$  at  $z = \eta(x, y, t)$ , and  $\varphi_{1,2} = -(B/\mu_0)x$  at  $z = \mp\infty$ , where  $\partial_n$  is normal derivative to the free surface, and  $B$  is the external magnetic field induction. The evolution of the system is described by kinematic and dynamic boundary conditions at  $z = \eta(x, y, t)$  as

$$\eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta \cdot \nabla_\perp\Phi, \quad \Phi_t + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} - \sigma\nabla_\perp \cdot \frac{\nabla_\perp\eta}{\sqrt{1+(\nabla_\perp\eta)^2}} = \frac{\mu_0(\mu-1)}{2\rho} \left( \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 - \frac{B^2}{\mu_0^2} \right). \quad (\text{s1})$$

The above equations are a closed system describing the fully nonlinear evolution of a magnetic fluid with free surface taking into accounts the effects of capillary and magnetic forces. The total energy of the system (Hamiltonian) has the following form

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{z \leq \eta} (\nabla\Phi)^2 d\mathbf{r} - \frac{\mu_0\mu}{2} \int_{z \leq \eta} (\nabla\varphi_1)^2 - (B/\mu_0)^2 d\mathbf{r} - \frac{\mu_0}{2} \int_{z \geq \eta} (\nabla\varphi_2)^2 - (B/\mu_0)^2 d\mathbf{r} + \int \frac{\sigma}{\rho} \left( \sqrt{1 + \nabla_\perp\eta} - 1 \right) dx dy.$$

The equations of boundary motion (s1) can be obtained using the variational derivatives

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta}, \quad (\text{s2})$$

the quantities  $\eta(x, y, t)$  and  $\psi(x, y, t) = \Phi(x, y, z = \eta, t)$  play the role of canonical variables. The procedure for obtaining weakly nonlinear equations is well described in the works [1-4, 37-39]. The model used is based on the quadratically nonlinear equation system initially formulated in the framework of Hamiltonian formalism for the description of electrohydrodynamic motion of dielectric liquids in [37-39] (the problem is mathematically completely equivalent to the current study).

We use nondimensional units, i.e.,  $\tilde{t} = t/t_0$  and  $\tilde{r} = r/\lambda_0$ , with  $t_0 = 2\pi[\gamma/(\rho g^3)]^{1/4}$  and  $\lambda_0 = 2\pi[\gamma/(\rho g)]^{1/2}$  (the

tilde notation is omitted hereafter for the sake of clarity). The Hamiltonian is expressed in the following form [37]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \iint \left[ (\nabla_{\perp} \eta)^2 + \psi \hat{k} \psi - \eta \left( (\hat{k} \psi)^2 - (\nabla_{\perp} \psi)^2 \right) + V_A^2 \left( \eta_x \hat{k}^{-1} \eta_x + A_{\mu} \left[ \eta \eta_x^2 - \eta_x \hat{k}^{-1} \eta \hat{k} \eta_x + \eta_x \hat{k}^{-1} (\nabla_{\perp} \eta \cdot \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right] \right) \right] dx dy. \quad (\text{s3})$$

Taking the variational derivatives from Eq. (s3) and adding to the Eq. (s2) terms responsible for the effects of pumping and dissipation of energy, we get the governing Eqs. (4)-(5) of the main text.

## II. TOTAL ENERGY AND WAVE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

The total energy of the system is shown in Fig. S1 as a function of time for different magnetic fields. It shows that the system reaches a quasi-stationary state from  $t \approx 50$ . The probability density functions (PDF) of the rescaled wave elevations in this stationary regime are shown in the inset for different magnetic fields. The PDF asymmetry is weak (skewness  $S = \langle \eta^3 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^{3/2} < 0.02$ ) regardless of the field value. Its flatness (kurtosis  $K = \langle \eta^4 \rangle / \langle \eta^2 \rangle^2$ ) is found to decrease with an increasing magnetic field: close to 3 (Gaussian) for weak  $B$  down to 2.45 at the maximum field. The PDF departs from Gaussian and becomes narrower with increasing magnetic field.

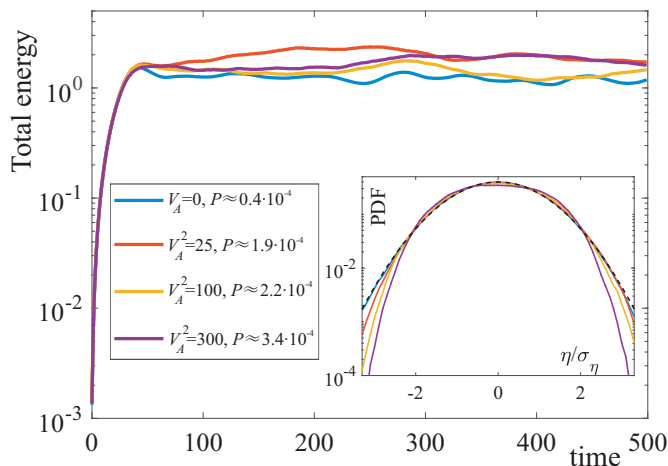


Figure S1: Total energy of the system versus time for the different values of the magnetic parameter  $V_A$  and of the resulting energy dissipation fluxes,  $P$ , for each series of simulations. Inset: PDF of the wave elevations rescaled by the standard deviation  $\eta/\sigma_{\eta}$  (colored dots). Black-dashed line corresponds to a Gaussian fit.

## III. FREE SURFACE ELEVATION

The free-surface elevation in the stationary regime is shown in Fig. S2 for different magnetic fields and evidence similar results on the anisotropy effects discussed in the main text.

## IV. ANISOTROPY

The anisotropy is observed in the cross sections of the spectrum of wave elevations,  $S(k_x, k_y, \omega^*)$ , for fixed  $\omega^*$  [see Fig. 2 (g)-(h) of the main text for  $\omega^* = 600$ ]. This anisotropy is valid regardless of  $\omega^*$  as shown in Fig. S3(a)-(d).

Anisotropy is also observable looking at the three-wave resonant interactions which read

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) - \omega(k_1 + k_2) = 0. \quad (\text{s4})$$

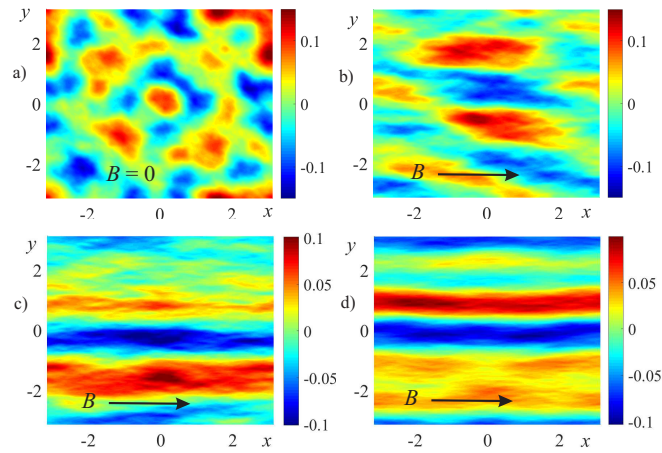


Figure S2: The free-surface elevations at  $t = 250$  in the stationary regime for different values of the magnetic parameter: (a)-(d) correspond to  $V_A^2 = 0, 25, 100,$  and  $300$ , respectively.

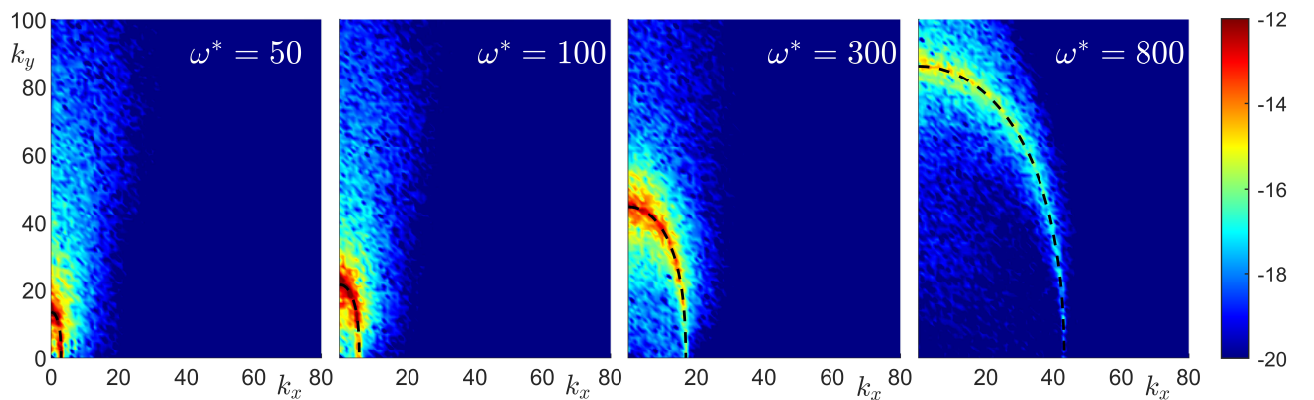


Figure S3: Cross sections  $S(k_x, k_y, \omega^*)$  of the power spectrum for a fixed frequency  $\omega^* =$  (a) 50, (b) 100, (c) 300, and (d) 800, for  $V_A^2 = 300$ . Black-dashed lines correspond to  $|k(\omega^*)|$ . Only the first quadrant is plotted. Log colorbar.

with  $\omega(k)$  the dispersion relation of Eq. (1). Such three-wave resonant interactions are quantified by computing the normalized third-order correlations in  $k$  of wave elevations (called bicoherence) as

$$B(k_1, k_2) = \frac{|\langle \eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_1+k_2}^* \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_1+k_2}|^2 \rangle}}. \quad (\text{s5})$$

where  $*$  denotes the complex conjugate, the normalization being chosen to bound  $B$  between 0 (no correlation) and 1 (perfect correlation).  $B[k_1, k_2(k_x, k_y)]$  is plotted in Fig. S4 for a fixed  $k_1$ , at different magnetic fields. The triad of interactions are closer to  $k_x = 0$  at high magnetic field, which evidences again the anisotropic effects.

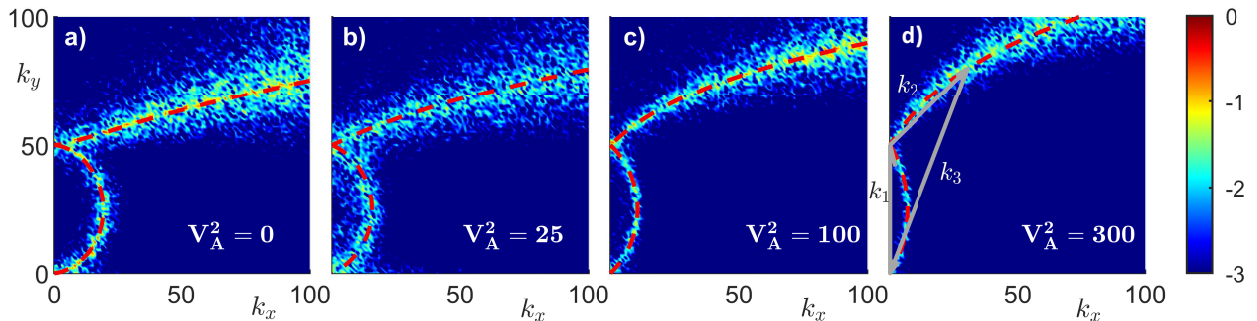


Figure S4: Bicoherences  $B[k_1, k_2(k_x, k_y)]$  for a given wave vector  $k_1 = (k_x = 0, k_y = 50)$ , and different  $V_A^2 =$  (a) 0, (b) 25, (c) 100, and (d) 300. Dashed lines: theoretical solutions obtained solving Eq. (s4) for fixed  $k_1 = (0, 50)$  using Eq. (1). A resonant triad  $[k_1(0, 50), k_2(30.68, 30), k_3(-30.68, -80)]$  is displayed in (d) with wave vectors of same order of magnitude ( $|k_1| = 50$ ,  $|k_2| = 43$ ,  $|k_3| = 86$ ) as expected for local interactions. Log colorbar.

## V. TIMESCALES OF WAVE TURBULENCE

Weak turbulence theory assumes a scale separation which can be evaluated using timescales [30] as

$$\tau_l(k) \ll \tau_{nl}(k), \quad (\text{s6})$$

where  $\tau_l$  is the linear timescale and  $\tau_{nl}$  the nonlinear timescale. Equation (s6) requires that nonlinear interactions are much slower than fast linear oscillations of the waves, to let the energy cascade of wave turbulence to occur.  $\tau_l(k)$  is directly linked to the dispersion relation as  $\tau_l(k) = 1/\omega(k)$  whereas  $\tau_{nl}(k)$  is estimated using the spectrum broadening of Fig. (2). This broadening  $\delta_\omega(k)$  is estimated, for each  $k$ , by fitting the corresponding spectrum  $S_\eta(k, \omega)$  by a Gaussian function of  $\omega$ , the standard deviation of this fit gives  $\delta_\omega$ . This broadening being due to nonlinear effects,  $\tau_{nl}$  is usually estimated as  $\tau_{nl} = 1/\delta_\omega$  [30]. The timescales found are then plotted in Fig. S5 as a function of  $k_y$ , i.e., in the direction perpendicular to the field. Figure S5 hence shows that Eq. (s6) is well verified over the inertial range where wave turbulence is observed (see Fig. 3), and regardless of the magnetic field value. The critical balance (i.e.,  $\tau_l \sim \tau_{nl}$ ) is not achieved here [2,16,21,36].

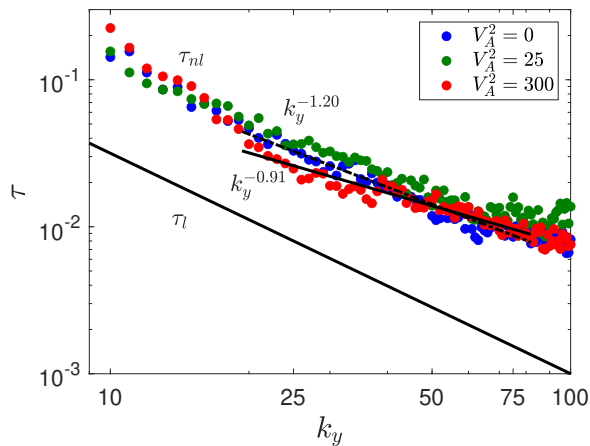


Figure S5: Linear and nonlinear timescales, (—)  $\tau_l$  and (•)  $\tau_{nl}$ , versus  $k_y$  for three values of the magnetic field. Solid line: best fit in  $k_y^{-0.91 \pm 0.1}$  for  $V_A^2 = 300$  and high  $k_y$ . Dashed line: best fit in  $k_y^{-1.20 \pm 0.2}$  for  $V_A^2 = 0$  and high  $k_y$ .

## VI. PHENOMENOLOGICAL DERIVATIONS OF THE SPECTRUM AND NONLINEAR TIMESCALE

Using the phenomenology method described in Refs. [16,36], we obtain below the theoretical expressions of the energy spectrum and magnetic nonlinear timescale.

### A. Energy spectrum

Let us assumed a strong magnetic field ( $V_A k_x \gg k_y^{3/2}$ ) and anisotropy ( $k_y \gg k_x$ ). From Eq. (5), we get

$$T_{nl}^c \sim \frac{1}{\psi k_y^2} \quad \text{and} \quad T_{nl}^m \sim \frac{\psi}{V_A^2 k_x^2 \eta^2} \quad (\text{s7})$$

where  $T_{nl}^c$  and  $T_{nl}^m$  are the capillary and magnetic nonlinear times obtained from the equation of motion of Eq. (5), and  $\psi$  the velocity potential. We assume now that the magnetic nonlinear effects dominate and that an energy equipartition exists between the magnetic potential energy and the capillary kinetic energy. Magnetic kinetic energy is negligible since no wave travels in the  $x$  direction and the potential surface energy is supposed to be dominated by magnetic effects. This leads to

$$V_A^2 k_x \eta^2 \sim \psi^2 k_y, \quad (\text{s8})$$

and thus inserting Eq. (s8) into Eq. (s7) gives

$$T_{nl}^m \sim \frac{1}{\psi k_y k_x}. \quad (\text{s9})$$

Using the power budget, the energy flux  $P$  reads

$$P \sim \frac{k_x k_y E^{(2D)}}{\tau_{nl}}, \quad (\text{s10})$$

with  $\tau_{nl}$  the nonlinear time involved in the kinetic equation (also called the transfer time of the energy flux in Refs. [16,36]).  $T_{nl}$  and  $\tau_{nl}$  are linked by  $\tau_{nl} \sim \omega T_{nl}^2$  since for three-wave interactions [2]. Using  $\psi^2 \sim k E^{(2D)}$  leads to the two-dimensional (2D) energy spectrum:

$$E^{(2D)} \sim P^{1/2} V_A^{1/2} k_y^{-2} k_x^{-1}. \quad (\text{s11})$$

The scaling in  $k_x$  being irrelevant in anisotropic system and after an integration over  $k_x$ , i.e.,  $E^{(1D)} \sim k_x E^{(2D)}$ , we get the unidimensional (1D) energy spectrum

$$E^{(1D)} \sim P^{1/2} V_A^{1/2} k_y^{-2}, \quad (\text{s12})$$

Finally, using the relationship  $E^{(1D)}(k) = V_A^2 k S^m(k)$  between the magnetic energy spectrum,  $E^{(1D)}(k)$ , and the power spectrum of wave elevation,  $S^m(k)$ , and  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \simeq k_y$  (since  $k_y \gg k_x$ ), we obtain phenomenologically,

$$S^m(k) \sim P^{1/2} V_A^{-3/2} k_y^{-3}, \quad (\text{s13})$$

in agreement with the spectra observed numerically [see Eq. (6)] and derived theoretically [see Eq. (3)] for anisotropic Alfvén wave turbulence [16-18]. The strong hypotheses used above are not fully true numerically for every  $k$ , and could explain the reduced inertial range where this spectrum is numerically observed.

### B. Magnetic nonlinear timescale

From Eq. (s9),  $\psi^2 \sim k_y E^{(2D)}$ , and Eq. (s11), we get the full scaling of the magnetic nonlinear time of the equations of motion as

$$T_{nl}^m \sim P^{-1/4} V_A^{-1/4} k_x^{-1/2} k_y^{-1/2}, \quad (\text{s14})$$

and of the magnetic nonlinear time of the kinetic wave equation as

$$\tau_{nl}^m \sim P^{-1/2} V_A^{1/2} k_y^{-1}. \quad (\text{s15})$$

Figure S5 shows that the magnetic nonlinear timescale found numerically for strong magnetic field ( $V_A^2 = 300$ ) scales as  $\tau_{nl} \sim k_y^{-0.93 \pm 0.1}$  for high  $k_y$ , and is thus very close to the expected scaling in  $k_y^{-1}$  of Eq. (s15).

For pure capillary waves ( $V_A^2 = 0$ ), a similar phenomenology leads to  $\tau_{nl}^c \sim P^{-1/2} (\gamma/\rho)^{1/4} k^{-3/4}$  [36]. Note that  $\tau_{nl}^c$  could be obtained using dimensional analysis [30]. Figure S5 shows that the capillary nonlinear time found numerically for zero magnetic field ( $V_A^2 = 0$ ) scales as  $\tau_{nl} \sim k_y^{-1.25 \pm 0.2}$  for high  $k_y$ , which departs from the  $k^{-3/4}$  prediction.

### C. Timescale separation

Wave turbulence is expected to occur if the timescale separation hypothesis,  $\tau_l(k) \ll \tau_{nl}(k)$ , is verified. Using Eq. (s15) and the numerical values obtained for  $V_A^2 = 300$  [i.e.,  $P = 2.7 \times 10^{-3}$  and the most probable values of  $(k_x, k_y) = (14, 65)$  inferred from Fig. 2(h)], we indeed obtain a very weak timescale ratio

$$\frac{\tau_l}{\tau_{nl}^m} \sim P^{1/2} V_A^{-3/2} k_x^{-1} k_y \sim 3.3 \cdot 10^{-3} \ll 1. \quad (\text{s16})$$





## **Chapitre 5**

# **Intermittence en turbulence d'ondes ou en présence d'ondes de choc**

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus sur l'intermittence de la turbulence d'ondes capillaires unidimensionnelles (chapitre 2) et dans le régime d'ondes de choc à la surface d'un ferrofluide (chapitre 3). Ces derniers résultats ont fait l'objet d'un article soumis à *Physical Review E (Letters)* en juin 2023 et reporté à la fin du chapitre [38]. Nous présentons d'abord les outils théoriques utilisés introduisant l'intermittence et nous concentrons ensuite successivement sur son application à la turbulence hydrodynamique 3D, à la turbulence faible et au régime d'ondes de choc.

## 5.1 Notions théoriques de l'intermittence à petite échelle

### 5.1.1 Outils mathématiques

L'intermittence permet de décrire de manière quantitative la statistique aux petites échelles des fluctuations d'une grandeur. Elle apparaît lorsque des événements intenses se produisent dans un intervalle de temps très court, ces fluctuations rapides impliquent la perte d'auto-similarité aux petites échelles [31]. Pour quantifier de tels phénomènes, nous utilisons l'incrément temporel d'un signal  $\eta(t)$  défini par :

$$\delta\eta = \eta(t + \tau) - \eta(t), \quad (5.1)$$

où  $\tau$  est un temps d'attente qui permet de sonder les différentes échelles. Il est lié à la fréquence par  $\tau = 1/(2f)$ . L'intermittence peut être observée sur les fonctions de densité de probabilité des incréments qui sont quasi gaussiennes à grand  $\tau$  et qui deviennent non gaussiennes avec de larges ailes à faible  $\tau$ . Afin de quantifier ce phénomène, nous utilisons les statistiques d'ordre élevé, i.e., les fonctions de structure d'ordre  $p$  définies par [31] :

$$\mathcal{S}_p(\tau) = \langle |\delta\eta|^p \rangle \sim \tau^{\zeta_p} \quad (5.2)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est une moyenne temporelle et  $\zeta_p$  est une fonction de  $p$ . Lorsque cet exposant évolue de manière non linéaire avec  $p$ , on parle alors d'intermittence. Néanmoins, cette définition de  $\zeta_p$  n'est valide que si  $\mathcal{S}_p(\tau)$  croît "parfaitement" en loi de puissance de  $\tau$ . En réalité (notamment dans les expériences), des fluctuations de  $\zeta_p$  avec  $\tau$  peuvent apparaître [105-108], il est alors plus judicieux de définir  $\zeta_p$  en utilisant la pente logarithmique locale des fonctions de structure  $\mathcal{S}_p(\tau)$  [109] :

$$\zeta_p = \frac{d \log(\mathcal{S}_p)}{d \log(\tau)}. \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) permet ainsi de tracer  $\zeta_p(\tau)$  et d'en extraire sa valeur moyenne dans la zone inertielle (si  $\mathcal{S}_p(\tau) \sim \tau^{\zeta_p}$  alors  $\zeta_p$  est constant avec  $\tau$ ).

Notons le lien particulier entre la fonction de structure d'ordre 2 et le spectre :  $\zeta_2 = n - 1$ , avec  $n$  l'exposant du spectre  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-n}$  [110]. Notons également que si la valeur de  $n$  est trop importante (typiquement  $n > 3$ ) l'incrément d'ordre 1, d'équation (5.1), ne permet pas la convergence des fonctions de structure et fournit des résultats non utilisables pour quantifier l'intermittence [111, 112]. Cette conclusion peut être démontrée en considérant la définition de la fonction de structure pour  $p = 2$  qui peut s'écrire en développant l'incrément :

$$\mathcal{S}_2(\tau) = \langle |\eta(t + \tau) - \eta(t)|^2 \rangle = \langle |\eta(t + \tau)|^2 \rangle + \langle |\eta(t)|^2 \rangle + 2\langle |\eta(t + \tau)\eta(t)| \rangle. \quad (5.4)$$

Nous utilisons la définition du spectre  $\langle \eta(t)^2 \rangle = \int S_\eta(\omega) d\omega$  pour réécrire la fonction de structure sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_2(\tau) &= 2\langle |\eta(t)|^2 \rangle - 2\langle |\eta(t+\tau)\eta(t)| \rangle \\
 &= 2 \int_0^\infty S_\eta(\omega) d\omega - 2 \int_0^\infty S_\eta(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \\
 &= 2 \int_0^\infty S_\eta(\omega) [1 - \cos(\omega\tau)] d\omega
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

En effectuant un changement de variable  $u = \omega\tau$  et en utilisant le fait que  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-n}$ , nous obtenons :

$$\mathcal{S}_2(\tau) \sim \tau^{n-1} \int u^{-n} \sin\left(\frac{u}{2}\right) du. \tag{5.6}$$

L'intégrale peut être développée asymptotiquement entre les limites  $u_1 = \omega_1\tau$  et  $u_2 = \omega_2\tau$  ce qui mène à [111] :

$$\mathcal{S}_2(\tau) \sim \tau^{n-1} \left[ \frac{1}{3-n} [2^{(3-n)/2} - (\omega_1\tau)^{3-n}] + \frac{2}{1-n} [(\omega_2\tau)^{1-n} - 2^{(1-n)/2}] \right]. \tag{5.7}$$

Si  $n < 1$ , alors le terme qui domine la partie entre crochets est  $\tau^{1-n}$  et  $\mathcal{S}_2 \sim cst$ , la fonction de structure n'est pas adaptée pour observer de l'intermittence. Si  $1 < n < 3$ , les termes constants dominent les crochets, donc  $\mathcal{S}_2 \sim \tau^{n-1}$  comme attendu, la fonction de structure est alors adaptée pour sonder les petites échelles. En revanche, si  $n > 3$  c'est le terme en  $\tau^{3-n}$  qui domine les crochets et  $\mathcal{S}_2 \sim \tau^2$ , la fonction de structure sature sans permettre d'observer une éventuelle intermittence. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser des incréments d'ordre supérieur afin d'obtenir  $\mathcal{S}_2 \sim \tau^{n-1}$ .

Cette conclusion mathématique peut également être comprise par des considérations sur la différentiabilité du signal  $\eta(t)$  [112]. En effet, si un signal  $\eta(t)$  mène à un spectre  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-n}$ , avec  $n \geq 3$ , alors il est au moins une fois différentiable continûment. L'incrément d'ordre 1 est alors dominé par la composante différentiable du signal et ne contient pas l'information sur les fluctuations des petites échelles. Il faut utiliser un incrément d'ordre supérieur afin de quantifier ces fluctuations. Plus le spectre est pentu (i.e., plus  $n$  est grand), plus l'ordre de l'incrément à utiliser doit l'être [111, 112].

Ainsi, nous utiliserons dans nos expériences les incréments d'ordre 4 :

$$\delta^{(4)}\eta = \eta(t+2\tau) - 4\eta(t+\tau) + 6\eta(t) - 4\eta(t-\tau) + \eta(t-2\tau), \tag{5.8}$$

notés  $\delta\eta$  dans la suite par soucis de clarté. Notons que l'ordre de l'incrément utilisé (s'il est suffisamment grand pour assurer la convergence des résultats, i.e.,  $\mathcal{S}_2 \sim \tau^{n-1}$ ) ne joue pas sur les valeurs des fonctions de structure  $\mathcal{S}_p$  et de  $\zeta_p$  [112]. Notons également, que toutes les équations présentées ici peuvent être données en dimension spatiale, ce qui revient à remplacer  $t$  par  $\mathbf{x}$ ,  $\tau$  par  $\mathbf{r}$  et  $\omega$  par  $\mathbf{k}$ .

## 5.2 Intermittence en turbulence hydrodynamique 3D

### 5.2.1 Modèle de Kolmogorov 41

En hydrodynamique, la prédiction de Kolmogorov, basée sur l'hypothèse d'auto-similarité qui conduit à un spectre  $S_\eta(k) \sim k^{-5/3}$ , ne mène pas à de l'intermittence. En effet, la turbulence hydrodynamique correspond à une cascade autosimilaire à flux d'énergie constant avec des tourbillons de plus en plus petits qui se forment, de manière homogène dans tous l'espace, jusqu'à l'échelle de dissipation. Dans la zone inertielle, en considérant un tourbillon de taille  $l$  et de vitesse  $u_l$ , le

flux d'énergie  $\epsilon_l \sim \frac{dE_l}{dt} \sim \frac{u_l^2}{\tau}$  avec,  $E_l$  l'énergie du système et  $\tau \sim l/u_l$  un temps non linéaire caractéristique du tourbillon, s'écrit dimensionnellement [15] :

$$\epsilon_l l \sim u_l^3 \quad (5.9)$$

Par analyse dimensionnelle, nous pouvons alors obtenir la fonction de structure  $\mathcal{S}_p = \langle |\delta u_l|^p \rangle$ , avec  $\delta u_l = u_l(x+r) - u_l(x)$  l'incrément de  $u_l$ , dans le domaine inertielle [15] :

$$\mathcal{S}_p(r) \sim (\epsilon_l l)^{p/3}, \quad (5.10)$$

c'est-à-dire  $\zeta_p = \frac{p}{3}$ . Notons que cette expression est bien en accord avec l'expression  $\zeta_2 = \frac{n-1}{2}p$  pour  $n = 5/3$ . Cette prédiction linéaire de l'exposant  $\zeta_p$  ne prévoit ainsi pas l'existence d'intermittence.

Toutefois, de nombreux travaux expérimentaux ont montré que ce modèle n'est pas satisfaisant pour les ordres élevés (typiquement  $p > 3$ ) [113, 114]. Tout écart non linéaire avec la prédiction linéaire de Kolmogorov  $\zeta_p \sim p$  est appelé l'intermittence. Physiquement, cela correspond à des fluctuations de plus en plus importantes et rapides du flux d'énergie, quand on regarde sur des temps de plus en plus courts. Ces fluctuations sont nommées bouffées intermittentes, la discussion quant à leurs origines est encore ouverte.

Notons que dans le cas d'un système avec une cascade d'énergie de type  $S_\eta(k) \sim k^{-n'}$  et  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-n}$ , la prédiction dimensionnelle non intermittente de Kolmogorov correspond à :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p(r) &\sim r^{\frac{n'-1}{2}p}, \\ \mathcal{S}_p(\omega) &\sim \omega^{\frac{n-1}{2}p}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donc à  $\zeta_p = \frac{n-1}{2}p$  et  $\zeta'_p = \frac{n'-1}{2}p$ .

### 5.2.2 Modèle fractal ou modèle- $\beta$

Afin de décrire quantitativement cette intermittence, i.e., la non-linéarité de l'exposant  $\zeta_p$  avec  $p$ , plusieurs modèles ont été proposés au cours des dernières décennies [115]. Nous pouvons notamment citer le modèle fractal appelé aussi modèle- $\beta$  [116]. Ce modèle, bien qu'également autosimilaire, apporte une correction au modèle de Kolmogorov et permet de comprendre simplement que l'intermittence a pour origine une répartition non uniforme des structures turbulentes dans l'espace [115]. Ce modèle suppose qu'à chaque étape de la cascade le nombre de tourbillons formés est choisi afin que le volume occupé par les tourbillons décroisse d'un facteur  $\beta$  (avec  $0 < \beta < 1$ ) par rapport à l'étape précédente [115]. Nous définissons  $l_i$  la taille typique des échelles à la  $i^{\text{ème}}$  étape de la cascade et  $p_i$  la probabilité de se trouver dans une zone active après la  $i^{\text{ème}}$  étape de la cascade telle que :

$$p_i = \beta^i. \quad (5.12)$$

Dans le cas d'un système de dimension  $d$  et de dimension fractale  $D$ , nous cherchons à avoir :

$$p_i = \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{d-D}. \quad (5.13)$$

La dimension fractale peut être définie en utilisant le nombre  $N$  de tourbillons formés par chaque tourbillon d'une étape de la cascade à la suivante :

$$N = 2^d \beta \equiv 2^D. \quad (5.14)$$

Nous obtenons alors une expression de D :

$$D = d + \frac{\ln \beta}{\ln 2}. \quad (5.15)$$

En se plaçant dans un système à trois dimensions ( $d = 3$ ) et en suivant la phénoménologie de Kolmogorov il vient :

$$\epsilon \sim \frac{u_{l_i}^3}{l_i} p_i, \quad (5.16)$$

avec la valeur initiale  $\epsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$ , nous avons :

$$u_{l_i} \sim u_0 \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{(D-2)/3}. \quad (5.17)$$

Nous pouvons alors obtenir une expression pour le spectre d'énergie défini par  $E_i = u_{l_i}^2 p_i \sim E(k)k$  tel que :

$$E(k) \sim k^{-5/3-(3-D)/3}. \quad (5.18)$$

Nous pouvons également obtenir les fonctions de structure :

$$\mathcal{S}_p = \langle |\delta u_{l_i}|^p \rangle \sim p_i u_{l_i}^p \sim u_0^p \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{\zeta_p}, \quad (5.19)$$

avec :

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + (3-D) \left( 1 - \frac{p}{3} \right). \quad (5.20)$$

Nous retrouvons le spectre en  $E(k) \sim k^{-5/3}$  et la fonction de structure  $\mathcal{S}_p \sim l_i^{p/3}$  lorsque  $D = d = 3$  ( $\beta = 1$ ) c'est-à-dire lorsque l'ensemble de l'espace est occupé par des tourbillons de manière homogène. Les équations (5.18) et (5.20) apportent une correction au modèle de Kolmogorov en prenant en compte une répartition dans l'espace des tourbillons qui dépend du facteur d'ajustement  $\beta$ . Ce modèle reste néanmoins autosimilaire et donne une forme linéaire pour l'exposant  $\zeta_p$ . Ce modèle est tracé sur la Figure 5.1 pour  $D = 2.8$  et donne des résultats plus proches des valeurs expérimentales que le modèle de Kolmogorov. Notons qu'il est également possible d'étendre ce modèle vers un modèle bi-fractal (modèle de Kolmogorov pour  $p \leq 3$  et modèle- $\beta$  pour  $p > 3$ ) ou vers un modèle multifractal [avec  $D = D(p)$ ].

### 5.2.3 Autres modèles et comparaison avec les expériences

D'autres modèles existent comme le modèle log-normal qui fait l'hypothèse d'une densité de probabilité de flux qui suit une loi log-normale [117, 118] ou le modèle log-Poisson qui est à ce jour le modèle le plus satisfaisant [119, 120] pour décrire les données expérimentales [113, 114, 121, 122] (voir figure 5.1). Cependant, les ordres très élevés de  $p$  doivent être pris avec précaution expérimentalement [123], ces modèles ne prennent pas en compte les oscillations sur  $\zeta_p$  dans la gamme inertielle [105-108].

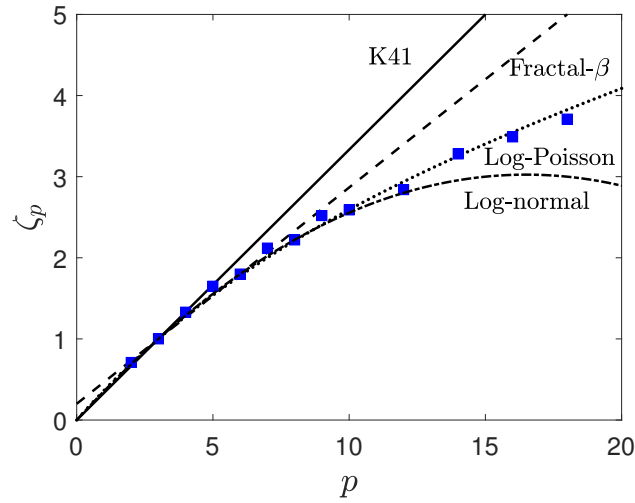


FIGURE 5.1 : Évolution de l'exposant  $\zeta_p$  en fonction de l'ordre  $p$ . Les carrés proviennent des expériences de Anselmet et. al. [114]. Traits pleins (—) modèle de Kolmogorov 41, pointillés (- -) modèle fractal pour  $D = 2.8$ , points (...) modèle Log-Poisson avec  $\beta = 2/3$ , traits-tirets (-.) modèle Log-normal. Cette figure est inspirée de [31, 110, 115].

## 5.3 Intermittence et turbulence d'ondes

### 5.3.1 Prédictions théoriques : absence d'intermittence en turbulence faible

En turbulence faible, la faible non-linéarité, l'homogénéité et l'absence supposée de structures cohérentes interdisent l'apparition d'intermittence [124]. Les fonctions de structure d'ordre pair et impair suivent alors une loi similaire à celle de Kolmogorov pour  $p \geq 2$  à l'ordre dominant [39, 124] :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{2p} &\sim \mathcal{S}_2^p & \text{avec} & \quad \mathcal{S}_2 = \tau^{n-1}, \\ \mathcal{S}_{2p+1} &\sim \mathcal{S}_3 \mathcal{S}_2^{p-1} & \text{avec} & \quad \mathcal{S}_3 = \tau^3, \end{aligned} \quad (5.21)$$

à l'ordre dominant cela revient à  $\zeta_2 = n - 1$ ,  $\zeta_3 = 3$ ,  $\zeta_{2p} = (n - 1)p$  et  $\zeta_{2p+1} = 3 + (n - 1)(p - 1)$  avec  $n$  l'exposant du spectre  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-n}$ . Notons que contrairement à la prédiction de Kolmogorov 41 en hydrodynamique [15], l'exposant linéaire  $\zeta_p$  suit deux lois différentes en fonction de la parité de  $p$ . La fermeture des équations de la turbulence faible permet d'obtenir ces résultats de manière analytique et d'obtenir des corrections aux ordres supérieurs valides en cas de brisure de la turbulence faible ( $\tau_{nl} < \tau_l$ ) [124, 125]. Dans le cas où les approximations de la turbulence faible sont respectées, seul le terme du premier ordre (i.e., les équations (5.21)) sera à prendre en compte.

### 5.3.2 Résultats d'intermittence en turbulence d'ondes expérimentale ou numérique

En comparaison du spectre d'énergie qui a été observé dans de nombreux systèmes de turbulence d'ondes, l'intermittence en turbulence d'ondes n'a été que très peu étudiée. Expérimentalement, elle a été observée dans le régime gravito-capillaire [126]. L'intermittence a également été utilisée pour observer la transition de la turbulence faible vers un régime composé de structures cohérentes dans les ondes à la surface d'un fluide (cusps, micro-déferlements, génération d'ondes capillaires sur des ondes de gravité) [44, 127-130] ou dans les plaques élastiques (singularités "D-cone") [58, 131]. En MHD, il a été montré numériquement que même si la turbulence

faible est valide, de l'intermittence apparaît par la présence de modes 2D qui jouent le rôle de structures cohérentes sans intervenir directement dans le spectre d'énergie [103]. Cette dernière observation semble néanmoins spécifique à la MHD. Dans ces différents cas, l'intermittence peut être quantifiée en utilisant les outils mathématiques développés pour l'intermittence hydrodynamique vue dans la partie 5.1.1. En revanche, ni le modèle des équations 5.21, ni ses corrections aux ordres supérieurs n'ont été testés pour quantifier la présence ou l'absence d'intermittence dans des systèmes expérimentaux ou numériques. Les équations 5.21 n'ont été utilisées que dans le cas d'ondes gravito-capillaires, mais la présence de deux régimes ne permet pas d'obtenir un bon accord avec les prédictions théoriques (comme pour les spectres d'énergie) [126].

### 5.3.3 Cas de la turbulence faible d'ondes capillaires quasi-1D

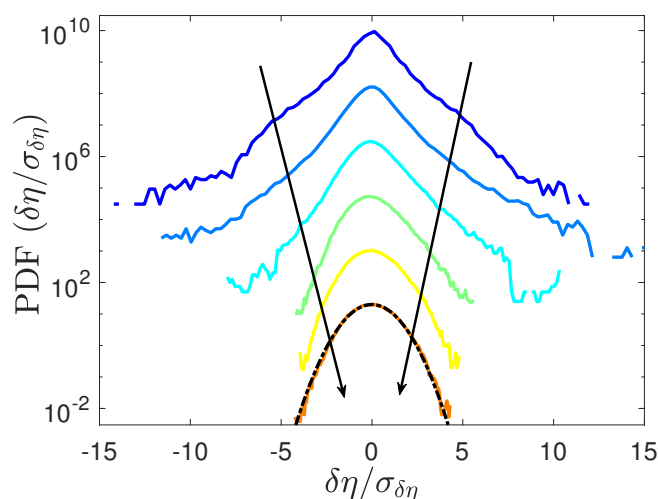


FIGURE 5.2 : Évolution des PDFs des incréments du signal  $\eta(t)$  pour différentes valeurs de  $5 < \tau < 100$  ms, i.e.,  $5 < f < 100$  Hz (la flèche pointe dans le sens croissant de  $\tau$ ). Les courbes ont été déplacées verticalement par souci de visibilité. Le tracé en pointillé correspond à une distribution gaussienne.

Nous proposons ici d'étudier une éventuelle intermittence dans le régime quasi-1D de turbulence d'ondes capillaires présenté au chapitre 2. Dans un premier temps, nous représentons les fonctions de densité de probabilité (PDFs) des incréments d'ordre 4,  $\delta\eta$ , pour différentes valeurs du temps d'attente  $\tau$  (voir figure 5.2). Sur ces PDFs, des ailes apparaissent aux faibles valeurs de  $\tau < 30$  ms (i.e.,  $f > 20$  Hz), la présence de ces ailes est habituellement caractéristique de la présence d'intermittence dans le système. Néanmoins, la présence d'intermittence n'est pas prévue par la théorie de la turbulence faible (voir paragraphe 5.3.1) qui devrait normalement s'appliquer ici puisque ses hypothèses de validité sont respectées dans l'expérience [34].

Afin de comprendre d'où viennent les ailes des PDFs et si elles sont liées à la présence de structures cohérentes, nous observons directement le signal  $\eta(t)$  et son incrément d'ordre 4,  $\delta\eta$ . Il apparaît que l'incrément contient localement de manière aléatoire des séries de pics de hauteur environ quatre fois plus importantes que sa valeur typique. Ces pics correspondent à la présence d'ondes capillaires qui surfent sur des ondes gravito-capillaires d'amplitude plus importante. Un exemple typique est représenté sur la figure 5.3. Leur nombre reste très peu élevé (environ 0.15 par seconde), mais il est suffisant pour faire apparaître des grandes ailes sur les PDFs à faible  $\tau$  (voir figure 5.2). Ces structures n'ont en revanche pas d'impact sur les spectres d'énergie vues au chapitre 2 [34] et ne sont, comme nous allons le voir, pas suffisamment nombreuses pour créer de l'intermittence sur les exposants des fonctions de structure.



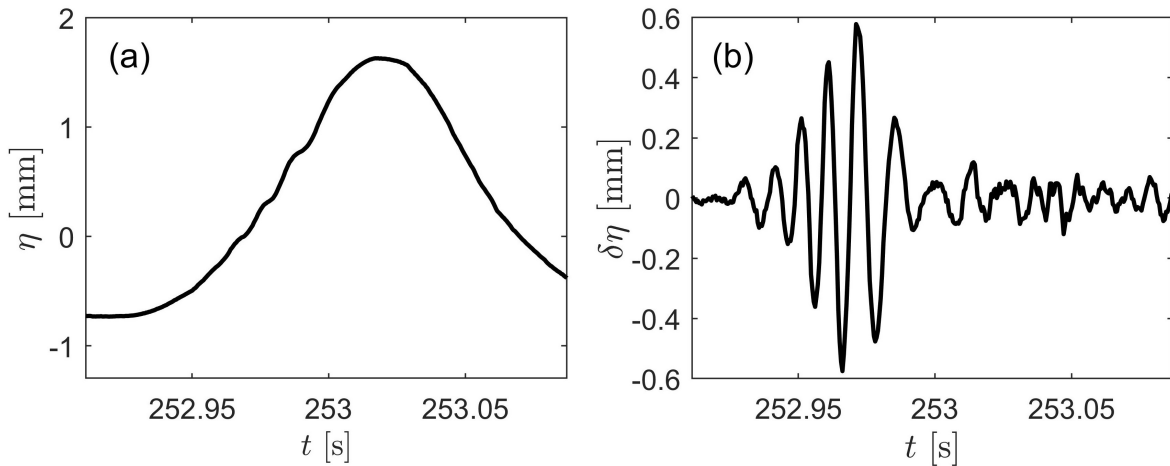


FIGURE 5.3 : (a) Exemple du signal  $\eta(t)$  où des ondes capillaires surfent sur une onde gravito-capillaire de plus grande amplitude. (b) Incréments d'ordre 4 correspondants  $\delta\eta$ .

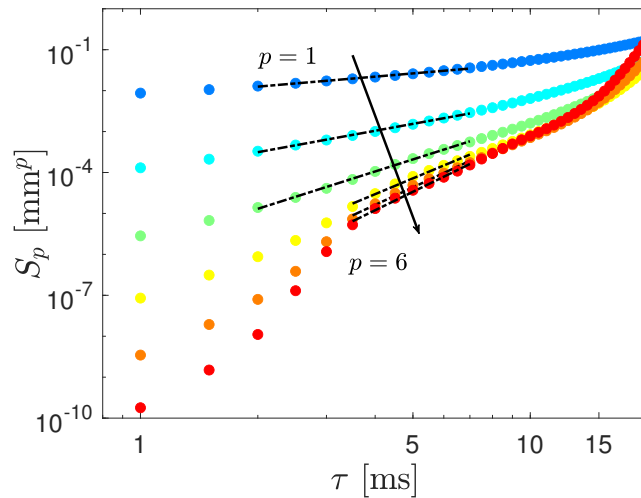


FIGURE 5.4 : Fonctions de structure  $\mathcal{S}_p$  expérimentales en fonction de  $\tau$  pour différentes valeurs de  $1 \leq p \leq 6$ . Les meilleurs ajustements en loi de puissance sont tracés en pointillé dans la gamme inertielle. La flèche indique le sens croissant des valeurs de  $p$ .

Nous traçons, sur la figure 5.4, les fonctions de structure  $\mathcal{S}_p(\tau)$  que nous ajustons par une loi de puissance  $\mathcal{S}_p(\tau) \sim \tau^{\zeta_p}$  dans la gamme inertielle. Les exposants  $\zeta_p$  sont reportés sur la figure 5.5. Notons que lorsque que  $p \geq 4$  l'ajustement des fonctions de structure ne peut se faire que dans une gamme assez réduite. Ceci peut s'expliquer par la présence des structures de surf d'ondes capillaires qui deviennent non négligeables pour de telles valeurs de  $p$ . Sur la figure 5.5, nous observons l'absence d'intermittence et un bon accord des valeurs expérimentales de  $\zeta_p$  avec la théorie de la turbulence faible de l'équation (5.21). Néanmoins, les fluctuations de  $\mathcal{S}_p$  pour  $p \geq 4$  et le faible intervalle d'ajustement en loi de puissance  $\mathcal{S}_p(\tau) \sim \tau^{\zeta_p}$  rendent difficiles de conclure avec certitude sur l'absence d'intermittence en turbulence d'ondes expérimentale.

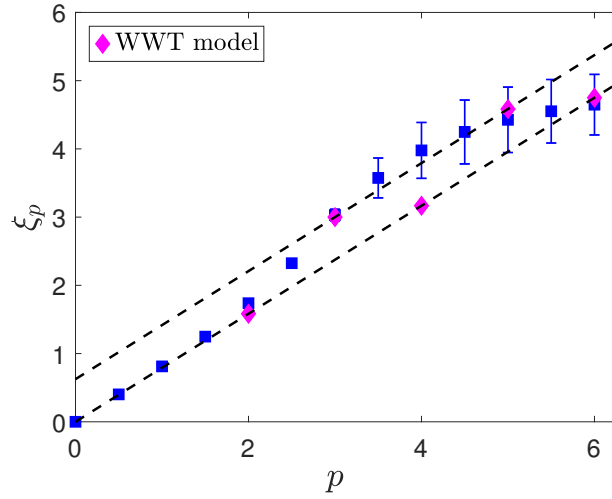


FIGURE 5.5 : Exposant des fonctions de structure  $\zeta_p$  en fonction de  $p$ . Les carrés bleus sont les résultats expérimentaux, les diamants roses sont les prédictions de l'équation (5.21) [39, 124], les lignes pointillées correspondent à l'équivalent du modèle de Kolmogorov pour les valeurs de  $p$  paires  $\zeta_{2p} = (n-1)p$  et impaires  $\zeta_{2p+1} = 3 + (n-1)(p-1)$  avec  $n = 31/12$  l'exposant théorique du spectre de turbulence faible capillaire 1D en  $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-31/12}$ . Les barres d'erreur correspondent à l'incertitude sur l'ajustement de  $\mathcal{S}_p$  sur la figure 5.4.

## 5.4 Intermittence en présence d'ondes de choc

### 5.4.1 Modèle en présence de chocs de Burgers

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 la turbulence de Burgers est régie par l'apparition aléatoire d'ondes de choc. Ces chocs sont des structures cohérentes de très forte non-linéarité qui rayonnent de l'énergie à toutes les fréquences. Cette forte concentration d'énergie, en plus de contrôler le spectre d'énergie, est source d'une très forte intermittence. Elle peut être décrite par un modèle bifractal (puisque des ondes aléatoires régulières et des ondes de choc coexistent) qui prédit pour des faibles valeurs de  $\tau$  [132-134] :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p(\tau) &\sim \tau^{\frac{n-1}{2}p} & \text{si } p < \frac{2}{n-1}, \\ \mathcal{S}_p(\tau) &\sim \tau^1 & \text{sinon.} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Le premier terme correspond à la prédiction linéaire et domine à faible  $p$ , tandis que le second correspond aux ondes de choc et domine à plus grandes valeurs  $p$ . Notons que les effets de la largeur de la bande de spectrale du forçage aléatoire et de la dissipation sur l'exposant du premier terme  $\frac{n-1}{2}$  ont été étudiés numériquement par [135-137]. Pour le régime dominé par les ondes de choc de Burgers, i.e.,  $\mathcal{S}_p \sim \tau^1$ , Gotoh [134] propose un modèle complet pour la fonction de structure tel que :

$$\mathcal{S}_p^B = \Gamma \langle |\Delta\eta|^p \rangle \tau^1, \quad (5.23)$$

où  $\Gamma$  est le taux de choc (i.e., le nombre moyen de choc par seconde) et  $\langle |\Delta\eta|^p \rangle$  est l'amplitude maximale moyenne de l'incrément des chocs. Cette quantité ne dépend pas de  $\tau$  pour des chocs de Burgers (singularité d'ordre 1). La dépendance en  $\tau^1$  est également due au front vertical des ondes de choc de Burgers. En plus, du spectre d'énergie les ondes de choc contrôlent ainsi l'ensemble de l'intermittence en impliquant la saturation des fonctions de structure.

### 5.4.2 Résumé des résultats obtenus

Dans l'article reporté ci-dessous, nous présentons la première observation expérimentale de l'intermittence dans un régime d'ondes de choc (régime décrit au chapitre 3 [35]) [38]. Pour cela, nous utilisons les incréments d'ordre 4 afin d'éviter tout problème de convergence (voir partie 5.1.1) [111, 112], les PDFs d'incrément de la fluctuation de l'amplitude des ondes et des statistiques d'ordres élevés à la surface d'un fluide. Les propriétés statistiques de l'intermittence sont quantifiées par les fonctions de structure  $\mathcal{S}_p$ .

L'intermittence observée en présence d'ondes de choc est trouvée être en bon accord avec les prédictions d'un modèle modifié de Burgers. Pour cela, l'exposant  $\zeta_p$ , des fonctions de structure  $\mathcal{S}_p$ , est obtenu en utilisant l'équation (5.3) dans la zone inertielle. Un modèle bifractal analogue à la turbulence d'ondes de choc de Burgers de l'équation (5.22) est alors proposé pour tenir compte de la cambrure finie des ondes de choc expérimentales. La différence vient, en effet, du fait que les chocs expérimentaux ne possèdent pas un front complètement vertical comme pour les chocs de Burgers. Les ondes de choc expérimentales peuvent être cependant ajustées par une solution de l'équation de Burgers en  $\eta \sim a \tanh(t/t^*)$  avec  $a$  l'amplitude du choc et  $t^*$  sa cambrure ( $t^*$  tend vers 0 dans le cas d'un front vertical). Le modèle de Gotoh de l'équation (5.23) est alors adapté aux cambrures finies des chocs expérimentaux. En effet, l'amplitude maximale de l'incrément des chocs  $|\Delta\eta|^p$  n'est plus constante avec  $\tau$ , comme dans Burgers, mais en dépend. Le modèle de Burgers modifié proposé s'écrit alors :

$$\mathcal{S}_p^{mB} = \Gamma \langle |\Delta\eta(\tau)|^p \rangle \tau^1. \quad (5.24)$$

Ce modèle est alors trouvé en très bon accord avec les résultats expérimentaux. A notre connaissance, aucune preuve expérimentale d'une telle intermittence d'ondes de choc n'avait été établie jusqu'alors. Notons enfin qu'en enlevant les chocs (obtenu en lissant localement le signal) le champ d'ondes montre une intermittence beaucoup plus faible et d'une nature différente (voir article ci-après) [38, 126].

## 5.5 Article accepté à *Physical Review E* en 2023

Guillaume Ricard et Eric Falcon, "Experimental evidence of random shock-wave intermittency" [38].

# Experimental evidence of random shock-wave intermittency

Guillaume Ricard\* and Eric Falcon†

Université Paris Cité, CNRS, MSC, UMR 7057, F-75013 Paris, France

We report the experimental observation of intermittency in a regime dominated by random shock waves on the surface of a fluid. We achieved such a nondispersive surface-wave field using a magnetic fluid subjected to a high external magnetic field. We found that the small-scale intermittency of the wave-amplitude fluctuations is due to shock waves, leading to much more intense intermittency than previously reported in three-dimensional hydrodynamics turbulence or in wave turbulence. The statistical properties of intermittency are found to be in good agreement with the predictions of a Burgerslike intermittency model. Such experimental evidence of random shock-wave intermittency could lead to applications in various fields.

*Introduction.*— Intermittency is characterized by localized bursts of intense activity that even occur in relatively quiescent flows [1, 2]. It has been extensively investigated in the past decades, especially in three-dimensional (3D) hydrodynamics turbulence [2] and has been ascribed to coherent structures such as vortex filaments [1]. Although describing successfully the energy cascade, the Kolmogorov dimensional analysis [3] fails to explain the small-scale intermittency observed experimentally [4, 5] and numerically [6, 7]. While several models have attempted to describe it [8–10], the lack of closure of the Navier-Stokes equations lets the discussion widely open [5, 6, 11]. Intermittency is a ubiquitous phenomenon that occurs in a wide range of experimental fields, e.g., wave turbulence [12, 13], integrable turbulence [14], solar winds [15], Earth’s magnetic field [16] or atmospheric winds [17], turbulent flames in combustion [18], quantum turbulence [19], rotating turbulence [20] or granular systems [21].

Intermittency also occurs for Burgers turbulence, a simplified one-dimensional (1D) model of Navier-Stokes turbulence [22]. Although less complex, Burgers turbulence is more predictable. It predicts the emergence of highly coherent structures, as random shocks governing its statistical properties, the energy spectrum, the probability distribution functions (PDFs) of velocity increments and gradients, as well as intermittency [23]. In the inertial range, Burgers intermittency is predicted by a bifractal model and its origin is due to shock waves [24–26]. Numerical simulations of intermittency in the 1D stochastically forced Burgers equation have then been performed [27–29], but experimental evidence of intermittency in Burgers turbulence remains elusive so far, as a regime of random shock waves is hardly reachable experimentally.

Recently, we have experimentally shown that an ensemble of stochastic shock waves can emerge from random gravity-capillary waves on the surface of a fluid, made nondispersive using a magnetic fluid [30]. Their fronts are not fully vertical, conversely to theoretical

Burgers shock waves, and they drive the dynamics [30]. Here, we explore the possible intermittent nature of such a random shock-wave-dominated field. We show that shock waves lead to intense small-scale intermittency that is quantified by the PDFs of the increment of the wave-amplitude fluctuations and by high-order statistics. In particular, the experimental structure-function exponents are found in quantitative agreement with a Burgerslike intermittency model, modified to take account of the finite steepness of the experimental shock-wave fronts. When the shock waves are removed by numerical post-processing, the nonlinear wave field is smoother and exhibits much weaker intermittency of a different nature. The latter is close to wave turbulence intermittency, reported experimentally [12, 13] and numerically [31], involving other coherent structures (e.g., sharp-crested waves), and for which its origin is still a highly debated topic that may be related to the fractal dimension of these coherent structures [32, 33]. Our experimental results appear thus of primary interest regarding the wide range of fields in which Burgers turbulence [23] and wave turbulence [34] occur.

*Theoretical background.*— Intermittency corresponds to a continuous deformation over the scales of the PDFs of increments of a given field (e.g., fluid-velocity or wave-amplitude fluctuations) [2]. Phenomenological models have been developed since the 60s to quantify such small-scale intermittency [2, 8]. To do so, first-order increments of a temporal signal  $\eta(t)$  are defined as  $\delta\eta(t, \tau) = \eta(t + \tau) - \eta(t)$ , where  $\tau$  is the time lag. The scaling properties of the corresponding structure functions of order  $p$  as  $\mathcal{S}_p(\tau) \equiv \langle |\delta\eta|^p \rangle_t \sim \tau^{\zeta_p}$  (with  $p$  a positive integer) are the keys quantities to characterize intermittency. A nonlinear dependence on the exponents  $\zeta_p$  with  $p$  is indeed a signature of intermittency. In 3D hydrodynamics, experiments showed a nonlinear scaling of  $\zeta_p$  with  $p$  [1, 4] that is not described by the Kolmogorov nonintermittent prediction in  $\zeta_p = \frac{n-1}{2}p$  [3]. Phenomenological models have been proposed to tackle this discrepancy and predict the nonlinear shape of  $\zeta_p$  [2, 8–10]. Some agree with experiments [4], but do not account for the observed oscillating  $\zeta_p$  [5, 6]. For Burgers turbulence, the presence of shock waves leads to strong intermittency. In the limit of vanishing viscosity of the Burgers equation, the structure

\* guillaume.ricard@u-paris.fr

† eric.falcon@u-paris.fr

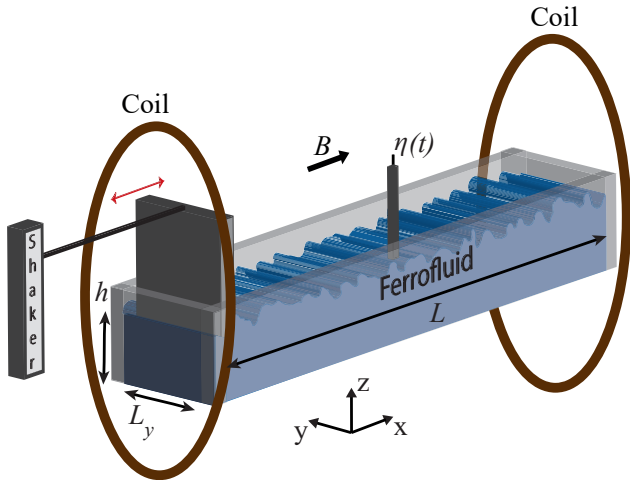


FIG. 1. Experimental setup. A pair of Helmholtz coils generates a horizontal homogeneous magnetic field  $B$  on the ferrofluid surface. Random waves are driven by a wave maker linked to a shaker at one end of the canal. The wave elevation  $\eta(t)$  is measured at a single point using a capacitive wire gauge.  $L = 15$  cm,  $L_y = 2$  cm, and  $h = 2$  cm.

functions are then predicted by a bifractal model, since regular random waves and shock waves coexist, as [24–26]

$$\begin{aligned} S_p^{\text{mi}}(\tau) &\sim \tau^{(n-1)p/2} \quad \text{for } p < 2/(n-1), \\ S_p^{\text{B}}(\tau) &\sim \tau^1 \quad \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (1)$$

The scaling in  $\zeta_p = (n-1)p/2$  in Eq. (1) comes from the smooth random component of the solutions [2, 27]. It is also predictable by dimensional analysis and is related to the exponent  $n$  of the energy spectrum. The second scaling in  $\zeta_p = 1$ , regardless of  $p > 2/(n-1)$ , occurs when the shocks dominate, and the unit value is related to the vertical feature of the shock fronts leading to  $\delta$ -Dirac singularities for its increments (see Appendix A). Note that the effects of the spectral bandwidth of the random forcing to Burgers equation and of dissipation on the scaling of Eq. (2) have been numerically investigated [27, 36]. Nevertheless, to our knowledge, no experimental evidence for such intermittency in Burgers turbulence has been established so far.

*Experimental setup.*— The experimental setup is represented in Fig. 1 and has been described in detail in Ref. [30]. A canal of length  $L = 15$  cm is filled with a liquid up to a depth of  $h = 2$  cm. An electromagnetic shaker with a paddle is located at one end to inject energy in a narrow random frequency bandwidth  $f_0 \pm \Delta F$ , with  $f_0 = 8.5$  Hz and  $\Delta F = 2.5$  Hz. The typical rms wave maker amplitude is few mm. We use a magnetic fluid (Ferrotec PBG400 ferrofluid) subjected to an external horizontal magnetic field  $B$  collinear to the wave propagation. We have previously shown that increasing the strength of the magnetic field enables us to tune the surface-wave dispersion relation  $\omega(k)$ , and to achieve, at large  $B$ , a nondispersive acousticlike regime in  $\omega(k) \sim k$ ,

where random shock waves dominate [30]. This regime occurs when the dispersive gravity and capillary terms in the theoretical dispersion relation of surface waves are much smaller than the nondispersive magnetic term. For our range of experimental parameters and  $B = 650$  G, we showed that the magnetic term is about 20 times larger than the gravity and capillary terms, but weak dispersive effects are still present due to some residual gravity-capillary waves [30]. Such a nondispersive wave-field regime has been also experimentally evidenced by computing the spatiotemporal spectrum of the wave elevation leading to a spectrum in agreement with  $\omega(k) \sim k$  for  $B = 650$  G whereas the gravity-capillary dispersive relation is observed for  $B = 0$  G [30].

Here, we keep constant the horizontal magnetic field strength to  $B = 650$  G to observe and characterize intermittency of the nondispersive regime involving mainly random shock waves. We measure the surface elevation,  $\eta(t)$ , at a single point using a homemade capacitive wire gauge (0.2 mm in diameter, 10  $\mu\text{m}$  in vertical resolution at 2 kHz), located in the middle of the canal, during  $\mathcal{T} = 15$  min. We checked that the location of the probe in the canal does not change the results reported here in particular for shock waves that conserve their shape (i.e., their discontinuity) along the canal (see Appendix B). To quantify the wave nonlinearity, we measure the mean wave steepness as  $\epsilon \equiv \eta_{\text{rms}} k_m$ , with  $\eta_{\text{rms}} = \sqrt{\langle \eta(t)^2 \rangle_t}$  the standard deviation of the surface elevation, and  $k_m$  the wave number at the wave spectrum maximum (typically at the forcing scale) [13].  $\epsilon$  is chosen constant to a low value of 0.07 to be in a weakly nonlinear regime.

*Wave energy spectra.*— A typical example of the fluctuations of the surface elevation,  $\eta(t)$ , over time, is plotted in Fig. 2(a). Very steep wave fronts emerge as random shock waves (see arrows) corresponding to peaks in the signal difference. A typical shock wave is enlarged in Fig. 2(b) well fitted by a solution of the Burgers equation [22] in  $a \tanh(t/t^*)$  with  $a$  its amplitude and  $t^*$  quantifying its steepness. These shock-wave parameters are inferred from a 15-min signal in which 863 shock waves are detected. We find  $a = 1.3 \pm 0.4$  mm and  $t^* = 5.7 \pm 2.1$  ms and Gaussian distributions for  $a$  and  $t^*$ . This very steep profile does not reach a fully vertical front (i.e.,  $t^* \rightarrow 0$ ) that occurs only for vanishing viscosity in the Burgers equation. We have shown previously that shock waves are characterized by a discontinuity leading to a  $\delta$ -Dirac singularity in the second-order difference of their amplitude [30]. Using the Fourier transform  $\hat{\eta}(\omega)$  of  $\eta(t)$ , the frequency-power spectrum,  $E_\eta(\omega) \equiv |\hat{\eta}(\omega)|^2/\mathcal{T}$ , of the wave-amplitude fluctuations is computed and shown in Fig. 2(c). A well-defined power-law scaling in  $E(\omega) \sim \omega^{-4}$  is observed. Such a spectrum of shock waves has been shown to agree with the theoretical Kuznetsov spectrum of second-order singularities [30, 37]. It differs from the classical  $\omega^{-2}$  Burgers spectrum (see Appendix A), as the experimental shock-wave fronts are not fully vertical. When the singularities are removed from the signal by smoothing numerically

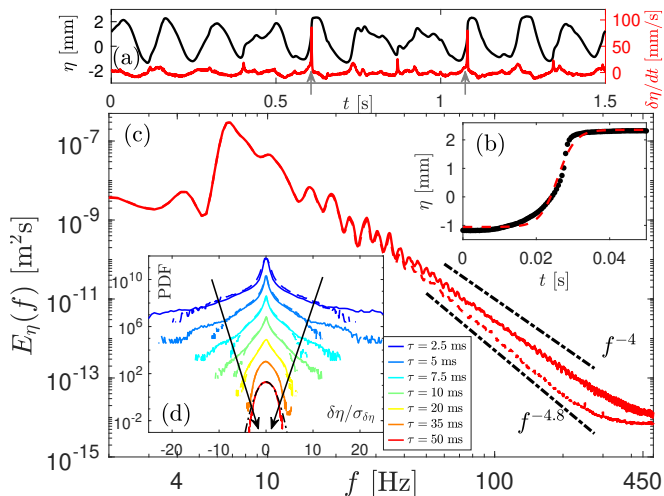


FIG. 2. (a) Typical signal  $\eta(t)$  (black) and its difference (red) highlighting shock waves (arrows). (b) Zoom on a shock wave (●) fitted by a Burgers solution in  $a \tanh(t/t^*)$  ( $a = 1.7$  mm,  $t^* = 4.7$  ms). (c) Frequency-power spectra  $E_\eta(f)$  with (solid line) and without (dashed line) shock waves. Black dash-dotted lines: Theoretical spectrum in  $f^{-4}$  for second-order singularities [30, 37] and best fit in  $f^{-4.8}$  for the spectrum without shock wave. (d): PDFs of the fourth-order increments  $\delta\eta(\tau)$  for time lags  $\tau \in [2.5, 50]$  ms (see arrows), i.e.,  $f \in [10, 200]$  Hz, with (solid lines) and without (dashed lines) shock waves. Black dash-dotted line: Gaussian with unit standard deviation. Correlation time is  $\tau_c \approx 33$  ms (see Appendix C). PDFs have been shifted vertically for clarity.

the signal around the discontinuities (using a moving-average filter) [30], the corresponding spectrum scales in  $\omega^{-4.8}$  [see red-dashed line for data, and black dash-dotted line for the best fit, in Fig. 2(c)] as it is mainly governed by residual gravity-capillary waves and dissipation. Let us now focus on the statistics of the increments of the surface elevation.

*Probability density functions.*— For such a steep  $\omega^{-4}$  spectrum, high-order difference statistics are required to test intermittency [35]. We will use afterward the fourth-order increment  $\delta^{(4)}\eta = \eta(t + 2\tau) - 4\eta(t + \tau) + 6\eta(t) - 4\eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau)$ . As we have checked, this is more than enough to achieve convergence of the structure functions, which then no longer depend on the higher order of the increment used [35].  $\delta^{(4)}\eta$  will be denoted  $\delta\eta$  afterward, for the sake of clarity. The PDFs of  $\delta\eta(\tau)$  are displayed in Fig. 2(d) for different time lags  $\tau$  corresponding to more than one decade in frequency  $f = 1/(2\tau)$ . The PDFs are found to be almost Gaussian at large  $\tau$ , as expected, and display a continuous deformation with decreasing  $\tau$  leading to heavy tails at small  $\tau$ , as a signature of intermittency [2]. Its origin is ascribed to the coherent structures, i.e., shock waves, storing energy, and traveling over the canal. Indeed, at small scales ( $\tau < 20$  ms, i.e.,  $f > 25$  Hz) the PDF tails are heavier in the presence of shock waves (solid lines) than without shock waves (dashed lines). Intermittency appears thus much more pronounced in the

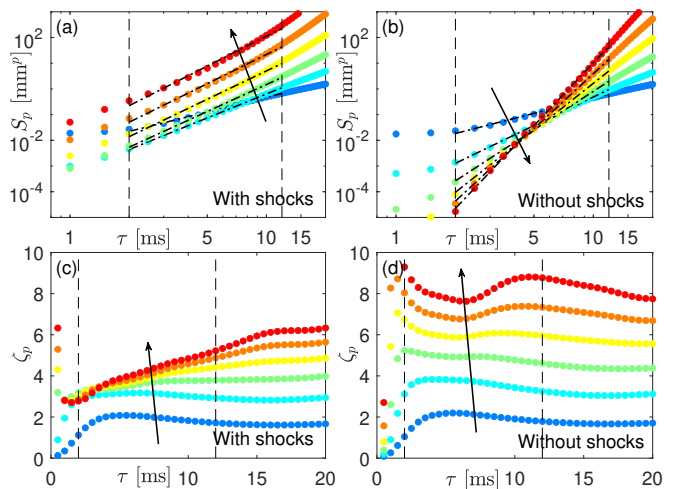


FIG. 3. Structure functions  $S_p(\tau)$  as a function of  $\tau$  with (a) and without (b) shock waves, for increasing  $p \in [1, 6]$  (see arrow). Dash-dotted lines: Power-law fits in  $\tau^{\zeta_p}$  within the inertial range (between vertical dashed lines). Exponent  $\zeta_p$  versus  $\tau$  with (c) and without (d) shock waves, for increasing  $p \in [1, 6]$  (see arrow).

presence of shock waves than without, as it will be quantified below by the structure-function analysis. Note that, although the shock waves are removed, heavy tail PDFs still remain since other (less intense) coherent structures are present (see below).

*Structure functions.*— We now compute the structure functions  $S_p(\tau)$  in order to quantify the above-reported intermittency.  $S_p(\tau)$  are shown in Fig. 3 with (a) and without (b) shock waves for  $p \in [1, 6]$ . At first glance, power laws in  $\tau^{\zeta_p}$  are observed in the inertial range. To extract more accurately these exponents, we compute logarithmic derivatives  $\zeta_p(\tau) \equiv d \log(S_p) / d \log(\tau)$ , i.e., the logarithmic local slopes, that are shown in Fig. 3 with (c) and without (d) shock waves.

With shock waves, a clear increase of  $\zeta_p$  with  $\tau$  is observed in the inertial range for  $p > 3$ , whereas  $\zeta_p$  is found to be roughly constant without shocks, as for classical intermittency [2]. The values of the exponents averaged over  $\tau$  in the inertial range,  $\langle \zeta_p \rangle$ , are reported in Fig. 4. In the presence of shock waves (full symbols), we find that  $\langle \zeta_p \rangle$  strongly increases until  $p \approx 2$  and much less for larger  $p$ . Note that this observed intermittency is much stronger than for 3D hydrodynamic intermittency [4–7] or wave turbulence intermittency [12, 13], as stronger nonlinearities are involved, as shock waves. Such an evolution of  $\langle \zeta_p \rangle$  with  $p$  could be qualitatively described by the bifractal model of Burgers turbulence of Eqs. (1)–(2). Indeed, for low  $p$ , Eq. (1) predicts  $\zeta_p = \frac{n-1}{2}p$  with  $n$  the frequency power-law exponent of the energy spectrum. This nonintermittent scaling, *à la* Kolmogorov, comes from the smooth component of  $\eta(t)$ . For large  $p$ , Eq. (2) predicts that  $\zeta_p$  is independent of  $p$ , such intermittent scaling being ascribed to the shock waves [24–26]. However, a clear departure is observed between the

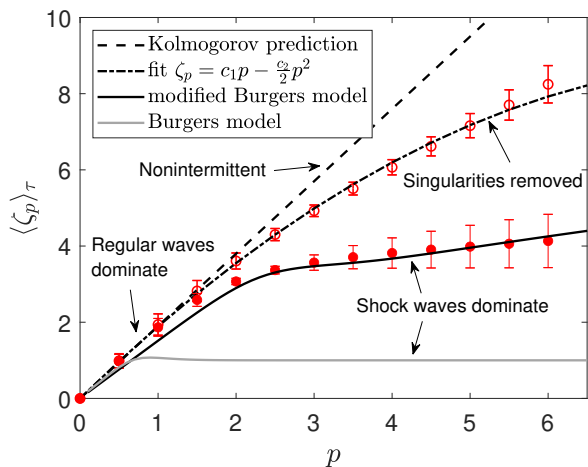


FIG. 4. Exponents  $\langle \zeta_p \rangle$  of the structure functions versus  $p$  with (●) and without (○) shock waves. Gray line: Burgers model of Eqs. (1)-(2). Solid line: modified Burgers model (see text). Dash-dotted line: nonlinear fit in  $\zeta_p = c_1 p - \frac{c_2}{2} p^2$  with  $c_1 = 2$  and  $c_2 = 0.23$ . Dashed line: Kolmogorov nonintermittent prediction of Eq. (1). The errorbars correspond to the  $\zeta_p$  standard deviation in the inertial range.

experiments and the Burgers model of Eq. (2) (see full symbols and gray line in Fig. 4). This discrepancy is due to the fact that the experimental shock-wave fronts are not fully vertical, which can be taken into account by modifying the Burgers model (see below). When the shock waves are removed, the experimental evolution of  $\langle \zeta_p \rangle$  is strongly different (see empty symbols in Fig. 4). Burgers intermittency has vanished, but intermittency is still weakly present. Indeed,  $\zeta_p$  can be fitted by the simplest nonlinear law,  $\zeta_p = c_1 p - \frac{c_2}{2} p^2$ , with  $c_1 = 2$  and  $c_2 = 0.23$  (see dashed-dotted line).  $c_1$  is related to the Kolmogorov nonintermittent prediction  $c_1 \simeq (n-1)/2$  with  $n = 4.8$  (see dashed line). The nonzero value of  $c_2$ , quantifying the deviation from linearity, shows that much weaker intermittency remains as other coherent structures (i.e., steep gravity-capillary waves) are still present, as routinely reported in wave turbulence [12]. This is also confirmed by comparing the magnitudes of the structure functions with and without shock waves that differ from a few orders of magnitude at small  $\tau$  once  $p > 3$  [compare Fig. 3(a) and 3(b)]. The reason is that shock waves through their discontinuities, generate peaks in the increment of amplitude,  $|\delta\eta|^p$ , increasing with  $p$  that thus dominate the  $\mathcal{S}_p$  values. Another way to quantify intermittency, i.e., the PDF shape deformations over the scales, is to compute the coefficients of flatness,  $\mathcal{S}_4/\mathcal{S}_2^2$ , and hyperflatness,  $\mathcal{S}_6/\mathcal{S}_3^3$ . We find that they both confirm that strong intermittency is well ascribed to shock waves (see Appendix D).

*Modified Burgers model.*— The experimental behavior of  $\zeta_p$  in Fig. 4 deviates from the Burgers intermittency model [24–26]. This model assumes shock waves with vertical fronts, and the structure functions are then pre-

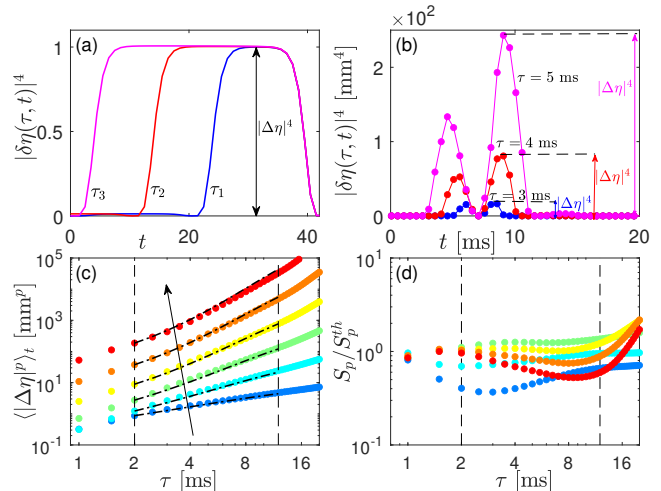


FIG. 5. Evolution of a single shock-wave increment amplitude for  $p = 4$ ,  $|\delta\eta(t, \tau)|^4$  and different  $\tau$ : (a) simulations of the Burgers equation and (b) experimental data. (c) Experimental increment maximum amplitude,  $\langle |\Delta\eta|^p \rangle_t$ , versus  $\tau$  for increasing  $p \in [1, 6]$  (arrow). Dash-dotted lines: predictions of Eq. (5) for a typical shock-wave geometry of  $a = 3.1$  mm and  $t^* = 7.7$  ms. (d) Compensated structure functions  $\mathcal{S}_p/\mathcal{S}_p^{\text{th}}$  for  $p \in [1, 6]$ . Vertical dashed lines indicate the inertial range.

dicted, in the inertial range, by [25]

$$\mathcal{S}_p^{\text{B}}(\tau) = \Gamma \tau^1 \langle |\Delta\eta|^p \rangle_t, \quad \text{for } p > 2/(n-1), \quad (3)$$

where  $\Gamma$  is the shock rate (mean number of shocks per second) and  $|\Delta\eta|^p = |\delta\eta(\tau, t_s)|^p$  is the  $p$ th moment of the increment amplitude of a shock wave occurring at  $t = t_s$ . Equation (3) is only valid in the inertial range which is verified experimentally since the shock-wave singularity duration  $\tau_s \sim 1$  ms  $\ll \tau \ll$  duration between shocks  $1/\Gamma \sim 1$  s. The shock-wave number and amplitude must be also large enough, as verified experimentally [30]. We first solve numerically the 1D viscous Burgers equation [22]. Burgers shock waves involve indeed vertical fronts (see Appendix A), its increment amplitude is well independent of  $\tau$  and its increment width scales as  $\tau^{-1}$  [see Fig. 5(a)], as predicted by Eq. (3). Note that the three nondimensional values of  $\tau_i$  used in Fig. 5(a) are chosen to correspond to frequencies within the inertial range of the theoretical  $\omega^{-2}$  Burgers power spectrum (see Appendix A).

Experimentally, the shock-wave fronts have a finite steepness. As a consequence, the increment maximum amplitude  $|\Delta\eta|^p$  will depend on  $\tau$ , conversely to Eq. (3). Indeed, Fig. 5(b) shows the experimental evolution of the increment amplitude for  $p = 4$ ,  $|\delta\eta(\tau)|^4$ , of a single shock wave, over time and for different  $\tau$ . We find that the widening of the shock width scales as  $\tau^{-1}$  as for the Burgers model, but a clear increase of its maximum amplitude occurs with  $\tau$ , contrary to the Burgers case [Fig. 5(a)]. Assuming that shock waves are well described by a Burgers solution in  $\eta(t) = a \tanh(t/t^*)$  with  $t^*$  its typical steepness [see Fig. 2 (c)], one obtains easily that

$\Delta\eta(\tau) = 2a \tanh[\tau/(2t^*)]$ . For a fully vertical front,  $t^*$  tends towards zero leading to  $\Delta\eta$  independent of  $\tau$ . For finite steepness shock waves, Eq. (3) is thus modified as

$$\mathcal{S}_p^{\text{mB}}(\tau) = \Gamma\tau^1 \langle |\Delta\eta(\tau)|^p \rangle_t, \quad \text{with} \quad (4)$$

$$\langle |\Delta\eta(\tau)|^p \rangle_t = \left| 2a \tanh\left(\frac{\tau - \tau_0}{2t^*}\right) + \langle |\Delta\eta_0|^p \rangle_t^{1/p} \right|^p. \quad (5)$$

As this prediction is only valid when  $\tau > \tau_s$ , the shortest possible time lag  $\tau_0$  (2 ms) and the corresponding shortest increment amplitude  $\langle |\Delta\eta_0|^p \rangle_t = \langle |\Delta\eta(\tau_0)|^p \rangle_t$  are needed. The theoretical values  $\zeta_p^{\text{th}}(\tau)$  thus reads  $\zeta_p^{\text{th}}(\tau) \equiv d \log(S_p^{\text{th}}) / d \log(\tau)$  where  $S_p^{\text{th}} = S_p^{\text{ni}} + S_p^{\text{mB}}$  with  $S_p^{\text{ni}} = [\mathcal{S}_2(0)\tau^{\frac{n-1}{2}}]^p$  the nonintermittent part, and  $S_p^{\text{mB}}$  the shock-dominated part of the structure functions from Eq. (4).  $S_p^{\text{th}}$  is then reported in Fig. 4 (solid line) and is in good agreement with experimental data (bullets) with no fitting parameter once the shock typical geometry ( $t^*$ ,  $a$ , and  $n$ ) are known. The time-averaged amplitude of the shock increments,  $\langle |\Delta\eta(\tau)|^p \rangle_t$  of Eq. (5) is also successfully compared with the experiments in Fig. 5(c) for different  $p$  leading to mean values of  $a = 3.1$  mm and  $t^* = 7.7$  ms, close to the ones found directly fitting the shock-wave profile as in Fig. 2(b). Finally, the experimental and theoretical structure functions of order  $p$  are compared by plotting  $\mathcal{S}_p/S_p^{\text{th}}$  in Fig. 5(d). Curves collapse well towards a constant value of the order of unity within the inertial range, thus validating the modified Burgers model, experimentally. The influence of the distribution widths of  $a$  and  $t^*$  on the compensated structure function,  $\mathcal{S}_4/S_4^{\text{th}}$ , is shown in the Appendix E.  $\mathcal{S}_4/S_4^{\text{th}}$  shows some fluctuations, but less than one order of magnitude.

*Conclusion.* — We have reported the experimental observation of intermittency in a regime dominated by random shock waves on the surface of a fluid. Their energy spectrum is well described by the theoretical Kuznetsov spectrum involving a random set of singularities [37]. We have shown that these shock waves lead to small-scale intermittency, quantified by the PDFs of the increment of wave-amplitude fluctuations and by high-order statistics (structure functions). The reported intermittency is found to be much more intense than in 3D hydrodynamics turbulence or wave turbulence. We have developed a Burgerslike intermittency model, modified to take account of the experimental finite steepness of the shock waves, which is found to be in good agreement with data.

Our results could be applied to other turbulent systems. Indeed, better understanding the role of coherent structures in forming a turbulent spectrum and causing intermittent behavior is crucial, particularly in wave turbulence and 3D turbulence. As intermittency is associated with the singularities of the turbulent flow [38], vortex filaments, for instance, could play the role of the Burgers shocks [2] although they have much more complicated statistics (multifractal instead of bifractal scaling). Since Burgers equation has a number of further applications from condensed matter to cosmology [39], and

is formally equivalent to the Kardar-Parisi-Zhang equation describing interface growth dynamics in a random medium [40], to which extent our results can be applied to this range of fields is an open question. Finally, dissipative effects could be tested in the future (as the fluid viscosity in the Burgers equation impacts the shock-wave front  $t^*$ ) using ferrofluids of different viscosities and constant magnetic properties.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Simons Foundation MPS No. 651463–Wave Turbulence (USA) and the French National Research Agency (ANR Sogood Project No. ANR-21-CE30-0061-04).

### Appendix A: Numerical simulations of the 1D viscous Burgers equation

The 1D viscous Burgers equation reads [22]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + A\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (A1)$$

with  $A$  an arbitrary constant that ensures dimensional homogeneity and  $\nu$  the kinematic viscosity. To numerically solve Eq. (A1), we use an implicit scheme with the Crank-Nicolson formulation and a Thomas algorithm with the initial condition  $\eta(x, t = 0) = \sin(x)$  [30]. The numerical grid is resolved with 1024 points. Five successive shocks (black) and their first-order difference  $\delta\eta(x) = \eta(x+dx) - \eta(x)$  (red) are displayed in Fig. 6(a) at large  $t$ . Shock waves with a vertical front are visible, and their difference is a  $\delta$ -Dirac distribution. The corresponding power spectrum  $E_\eta(k)$ , displayed in Fig. 6(b), scales as  $k^{-2}$  as expected. In the inertial range, the amplitude of the corresponding increments  $\delta\eta(x, r) = \eta(x+r) - \eta(x)$  is independent of the separation  $r$ , conversely to its width [see Fig. 5(a) – the time lag  $\tau$  playing the role of  $r$  since temporal signals are involved experimentally]. The shocks observed experimentally differ from the numerical ones of Fig. 6(a). The experimental fronts are not fully vertical, but have a finite steepness because of residual dispersive effects [see Fig. 2(b)]. This leads to a  $\delta$ -Dirac distribution in the second-order difference  $\delta^{(2)}\eta(t) = \eta(t+2dt) - 2\eta(t+dt) + \eta(t)$  and not in the first-order difference. They are also found to appear randomly in the experimental signal [30].

### Appendix B: Shock-wave propagation

The experimental propagation of the surface elevation in response to a single pulse forcing is shown in Fig. 7. This signal is obtained using a spatiotemporal measurement [30]. A shock wave involving a discontinuity is ob-



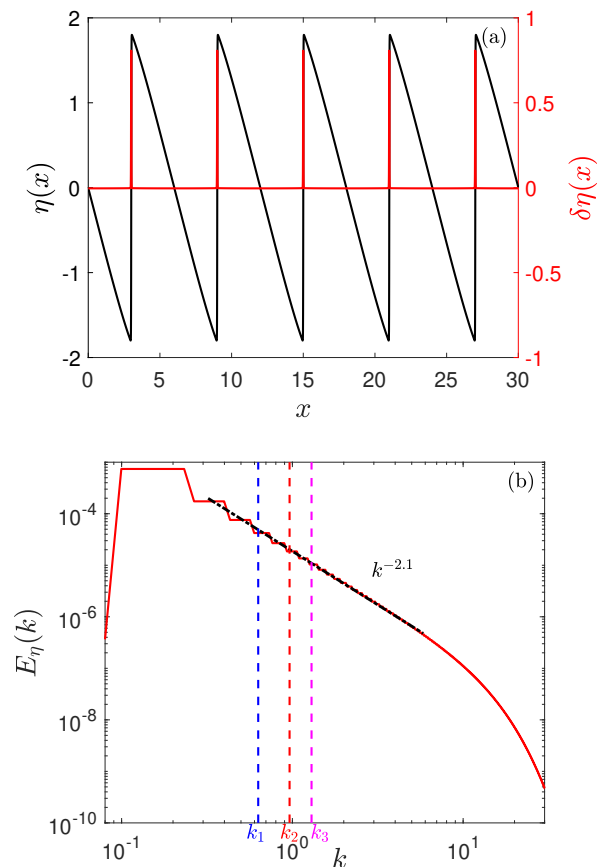


FIG. 6. (a) Numerical solution of Eq. (A1) at large  $t$ , showing  $\eta(x)$  (black line) with five successive shock waves and their first-order difference  $\delta\eta(x)$  (red line).  $A = 25$  and  $\nu = 2.86 \cdot 10^{-6}$ . (b) Corresponding power spectrum  $E_\eta(k)$ . Black dash-dotted line: best fit in  $k^{-2.1}$ . Vertical dashed lines represent the values of  $k_i = 1/(2r_i)$  with  $r_i$  chosen to be in the inertial range of the spectrum. The values of  $r_i$  are equivalent (changing  $k$  to  $\omega$ ) to the values of  $\tau_i$  used in Fig. 5(a).

served traveling along the canal, keeping a self-similar shape.

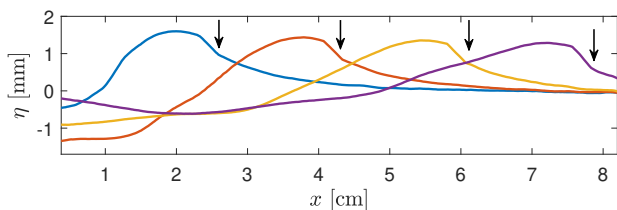


FIG. 7. Experiment: Spatial evolution of the surface elevation in response to a single pulse forcing for increasing times (spaced by 25 ms, from blue to purple, i.e., from left to right). The arrows indicate the discontinuity location over time.

### Appendix C: Correlation time estimation

The normalized autocorrelation function  $C(\tau)$  of a temporal signal  $\eta(t)$  is defined as

$$C(\tau) = \frac{\langle \eta(t+\tau)\eta(t) \rangle_t}{\langle \eta(t)^2 \rangle_t}. \quad (\text{C1})$$

The correlation time  $\tau_c$  can be inferred from  $C(\tau_c) = 0$ . For small values of  $\tau$ ,  $C$  can be approximated by a parabolic function that provides a better estimation of the correlation time,  $\tau_c$ , as

$$C(\tau) \approx 1 - \frac{\tau^2}{\tau_c^2}. \quad (\text{C2})$$

If two points of the signal  $\eta(t)$  are separated by a time lag  $\tau \gg \tau_c$  they are fully uncorrelated and are thus independent. The experimental correlation function is displayed in Fig. 8. The parabolic fit of Eq. (C2) provides an estimation of the correlation time  $\tau_c \approx 33$  ms. The range of  $\tau$  used in the main paper corresponds to  $\tau \ll \tau_c$ .

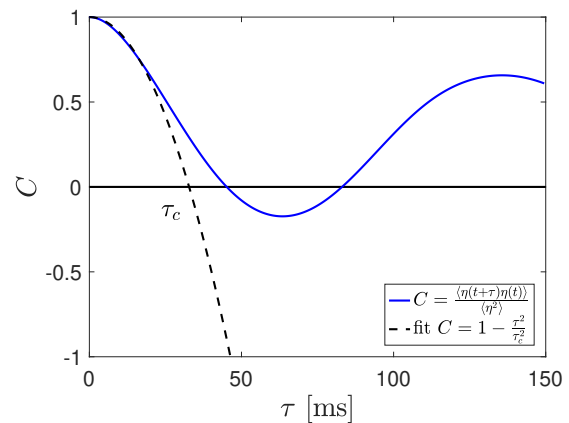


FIG. 8. Normalized autocorrelation function  $C(\tau)$  of Eq. (C1) versus the time lag  $\tau$  (solid blue line) and its parabolic fit from Eq. (C2) for small  $\tau$  (black dashed line).  $\tau_c \approx 33$  ms.

### Appendix D: Flatness and hyperflatness coefficients

The small-scale intermittency (i.e., the PDF shape deformations over the scales  $\tau$ ) can be quantified by the dependence of the flatness coefficient,  $\mathcal{S}_4/\mathcal{S}_2^2$ , with  $\tau$  as shown in Fig. 9(a). At large  $\tau$ , the flatness is close to 3 (the value for a Gaussian) and increases up to  $10^3$  at small  $\tau$ , corresponding to a much flatter PDF [see Fig. 2(d)]. Same is performed in Fig. 9(b) for the hyperflatness,  $\mathcal{S}_6/\mathcal{S}_2^3$ , ranging from 15 (the value for a Gaussian) up to  $10^6$ . These experimental dependencies of the flatness and hyperflatness coefficients are in agreement with the theoretical predictions,  $S_p^{\text{th}}/S_2^{\text{th}p/2}$ , where  $S_p^{\text{th}} = S_p^{\text{ni}} + S_p^{\text{mB}}$  with  $S_p^{\text{ni}}$  the nonintermittent part (valid

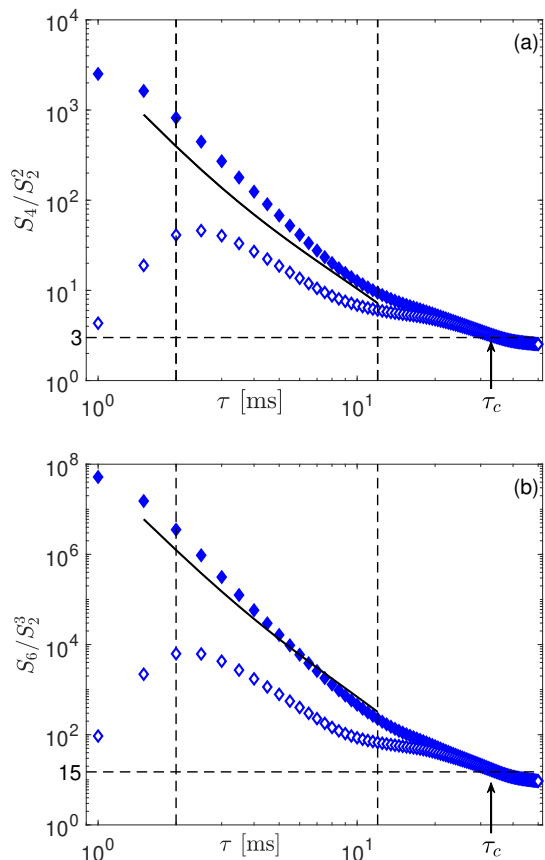


FIG. 9. Coefficients of (a) flatness,  $S_4/S_2^2$ , and (b) hyperflatness,  $S_6/S_2^3$ , as a function of the time lag  $\tau$  with ( $\blacklozenge$ ) and without ( $\diamond$ ) shock waves. Horizontal dashed lines: expected values for a Gaussian distribution (3 and 15, respectively). Solid lines: prediction of the Burgerslike intermittency model,  $S_p^{\text{th}}/S_2^{\text{th}p/2}$ , using Eq. (4). Vertical dashed lines indicate the inertial range.  $\tau_c \approx 33$  ms (see Appendix C).

for small  $p$ ) and  $S_p^{\text{mB}}$  from Eq. (4) of the Burgerslike in-

termittency model (valid for large  $p$ ) and corresponding to the shock-dominated part of the structure functions. When removing the shock waves ( $\diamond$  in Fig. 9), the flatness drops by a factor of 20 and the hyperflatness by a factor of 500, confirming the strong intermittency is well ascribed to the shock waves.

#### Appendix E: Influence of the shock-wave parameters on the modified Burgers model

The compensated structure function  $S_4/S_4^{\text{th}}$  is plotted for three different values of the shock-wave parameters,  $a$  and  $t^*$ , to evidence the limits of the modified Burgers model. When using the rms values of the distributions of  $a$  and  $t^*$ ,  $S_4/S_4^{\text{th}}$  shows some fluctuations, but less than one order of magnitude, thus validating the model.

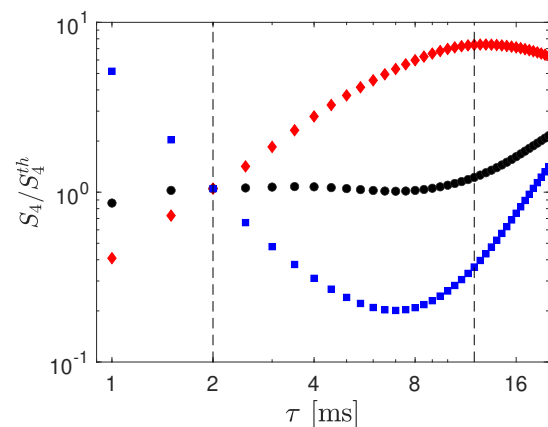


FIG. 10. Compensated structure functions  $S_4/S_4^{\text{th}}$  using best values  $a = 3.1$  mm and  $t^* = 7.7$  ms (black  $\bullet$ ) and rms values of the distributions:  $a = 1$  mm and  $t^* = 7.7$  ms (red  $\diamond$ ) and  $a = 3.1$  mm and  $t^* = 3.5$  ms (blue  $\blacksquare$ ). Vertical dashed lines indicate the inertial range.

- 
- [1] G. K. Batchelor and A. A. Townsend, The nature of turbulent motion at large wave-numbers, *Proc. R. Soc* **199**, 238 (1949).
  - [2] U. Frisch, *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, (Cambridge University, Cambridge, 1995), and references therein.
  - [3] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 301 (1941) [*Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 9 (1991)].
  - [4] C. W. Van Atta and W. Y. Chen, Structure functions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean, *J. Fluid Mech.* **44**, 145 (1970); F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and R. A. Antonia, High-order velocity structure functions in turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.* **140**, 63 (1984); F. Anselmet, R. A. Antonia, L. Danaila, Turbulent flows and intermittency in laboratory experiments, *Planetary Space Sci.* **49**, 1177 (2001) and references therein.
  - [5] M. Sinhuber, G. P. Bewley, and E. Bodenschatz, Dissipative Effects on Inertial-Range Statistics of High Reynolds Numbers, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 134502 (2017). E. Lévêque, N. Mordant, J.-F. Pinton, and A. Arnéodo, Intermittency of Velocity Time Increments in Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 064501 (2005); L. Chevillard and C. Meneveau, Lagrangian Dynamics and Statistical Geometric Structure of Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 174501 (2006).
  - [6] K. P. Iyer, G. P. Bewley, L. Biferale, K. R. Sreenivasan, and P. K. Yeung, Oscillations Modulating Power Law Exponents in Isotropic Turbulence: Comparison of Experiments with Simulations, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 254501

- (2021).
- [7] T. Ishihara, T. Gotoh, and Y. Kaneda, Study of high-Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 165 (2009) and references therein
- [8] A. N. Kolmogorov, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962); A. M. Obukov, Some specific features of atmospheric turbulence, *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962).
- [9] Z.-S. She, and E. Leveque, Universal scaling laws in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336 (1994); B. Dubrulle, Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 959 (1994).
- [10] U. Frisch, P.-L. Sulem, and M. Nelkin, A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.* **87**, 719 (1978).
- [11] Y. Li and C. Meneveau, Origin of non-Gaussian statistics in hydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 164502 (2005);
- [12] E. Falcon, S. Fauve, and C. Laroche, Observation of Intermittency in Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 154501 (2007); S. Lukaschuk, S. Nazarenko, S. McLelland, and P. Denissenko, Gravity wave turbulence in wave tanks: space and time statistics, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 044501 (2009); E. Falcon, S. G. Roux, and C. Laroche, On the origin of intermittency in wave turbulence, *Europhys. Lett.* **90**, 34005 (2010); L. Deike, B. Miquel, P. Gutiérrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy, Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence, *J. Fluid Mech.* **781**, 196 (2015); E. Fadaeiazar, A. Alberello, M. Onorato, J. Leontini, F. Frascoli, T. Waseda, and A. Toffoli, Wave turbulence and intermittency in directional wave fields, *Wave Motion* **83**, 94 (2018).
- [13] E. Falcon and N. Mordant, Experiments in Surface Gravity–Capillary Wave Turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **51**, 1 (2022).
- [14] S. Randoux, P. Walczak, M. Onorato, and P. Suret, Intermittency in Integrable Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 113902 (2014).
- [15] O. Alexandrova, V. Carbone, P. Veltri, and L. Sorriso-Valvo, Solar wind Cluster observations: Turbulent spectrum and role of Hall effect, *Planetary Space Sci.* **55**, 2224 (2007); K. H. Kiyani, S. C. Chapman, Yu. V. Khotyaintsev, M. W. Dunlop, and F. Sahraoui, Global Scale-Invariant Dissipation in Collisionless Plasma Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 075006 (2009).
- [16] P. De Michelis and G. Consolini, Time intermittency and spectral features of the geomagnetic field, *Ann. Geophys.* **47**, 1713 (2004).
- [17] R. Baïle and J.-F. Muzy, Spatial Intermittency of Surface Layer Wind Fluctuations at Mesoscale Range, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 254501 (2010).
- [18] A. Roy, J. R. Picardo, B. Emerson, T. C. Lieuwen, and R. I. Sujith, Small-scale intermittency of premixed turbulent flames, *J. Fluid Mech.* **957**, A21 (2023).
- [19] J. I. Polanco, N. P. Müller, and G. Krstulovic, Vortex clustering, polarisation and circulation intermittency in classical and quantum turbulence, *Nat Commun* **12**, 7090 (2021).
- [20] L. J. A. van Bokhoven, H. J. H. Clercx, G. J. F. van Heijst, and R. R. Trieling, Experiments on rapidly rotating turbulent flows, *Physics of Fluids* **21**, 096601 (2009).
- [21] E. Falcon, B. Castaing, and C. Laroche, “Turbulent” electrical transport in copper powders, *Europhys. Lett.* **65**, 186 (2004).
- [22] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1**, 171 (1948).
- [23] U. Frisch and J. Bec, *Burgulence*, in *New Trends in Turbulence*, edited by M. Lesieur, A. Yaglom, and F. David (Springer, Berlin, 2001), Vol. **74**, pp. 340-383
- [24] E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsko, and M. Vergassola, On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data, *J. Fluid Mech.* **238**, 467 (1992)
- [25] T. Gotoh, Inertial range statistics of Burgers turbulence *Phys. Fluids* **6**, 3985 (1994).
- [26] J. P. Bouchaud, M. Mézard, and G. Parisi, Scaling and intermittency in Burgers turbulence, *Phys. Rev. E* **52**, 3656 (1995).
- [27] D. Mitra, J. Bec, R. Pandit, and U. Frisch, Is multiscaling an artifact in the stochastically forced Burgers equation?, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 194501 (2005).
- [28] M. Buzdicotti, L. Biferale, U. Frisch, and S. S. Ray, Intermittency in fractal Fourier hydrodynamics: Lessons from the Burgers equation, *Phys. Rev. E* **93**, 033109 (2016).
- [29] B. P. Murray, and M. D. Bustamante, Energy flux enhancement, intermittency and turbulence via Fourier triad phase dynamics in the 1-D Burgers equation, *J. Fluid Mech.* **850**, 624 (2018).
- [30] G. Ricard and E. Falcon, Transition from wave turbulence to acousticlike shock wave regime, *Phys. Rev. Fluids*, **8**, 014804 (2023).
- [31] R. Meyrand, K. H. Kiyani, and S. Galtier, Weak magnetohydrodynamic turbulence and intermittency, *J. Fluid Mech.* **770**, R1 (2015); S. Chibbaro and C. Josserand, Elastic wave turbulence and intermittency, *Phys. Rev. E* **94**, 011101(R) (2016); N. Mordant and B. Miquel, Intermittency and emergence of coherent structures in wave turbulence of a vibrating plate, *Phys. Rev. E* **96**, 042204 (2017); A. T. Skvortsov, C. Kirezci, D. Sgarioto, and A. V. Babanin, Intermittency of gravity wave turbulence on the surface of an infinitely deep fluid: Numerical experiment, *Phys. Lett. A* **449**, 128337 (2022).
- [32] C. Connaughton, S. Nazarenko, and A. C. Newell, Dimensional analysis and weak turbulence, *Physica D* **184**, 86 (2003).
- [33] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denissenko, Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains, *J. Fluid Mech.* **642**, 395 (2010).
- [34] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 2011).
- [35] E. Falcon, S. G. Roux, and B. Audit, Revealing intermittency in experimental data with steep power spectra, *Europhys. Lett.* **90**, 50007 (2010).
- [36] M. K. Verma, Intermittency exponents and energy spectrum of the Burgers and KPZ equations with correlated noise, *Physica A* **277** 359 (2000); S. Alam, P. K. Sahu, and M. K. Verma, Universal functions for Burgers turbulence, *Phys. Rev. Fluids* **7**, 074605 (2022).
- [37] E. A. Kuznetsov, Turbulence spectra generated by singularities, *JETP Lett.* **80**, 83 (2004).
- [38] M. Lässig, Dynamical Anomalies and Intermittency in Burgers Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2618 (2000).
- [39] J. Bec and K. Khanin, Burgers turbulence, *Phys. Reports* **447**, 1 (2007).

[40] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986);

M. Lässig, Quantized Scaling of Growing Surfaces, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2366 (1998).



## **Chapitre 6**

# **Localisation d'Anderson d'ondes de surface hydrodynamiques**

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la localisation d'ondes de gravité à la surface d'eau dans un canal 1D. Cette étude a été récemment réalisée et est encore en cours, elle se fait en collaboration avec Filip Novkoski, étudiant en thèse également sous la direction d'Eric Falcon.

## 6.1 Principe et état de l'art

Le lien entre une onde et son milieu de propagation est indéfectible. Si le milieu de propagation change, alors la propagation d'une éventuelle onde est impactée. Nous pouvons citer l'exemple commun de la réfraction de la lumière lorsque que le milieu de propagation change (à l'interface air-eau par exemple). Dans le cas d'un milieu périodique, i.e., un milieu dont la structure change de manière régulière, chaque période implique des modifications de la propagation de l'onde. On parlera alors de réseau ou de cristal périodique spatialement. A chaque période, la modification locale du milieu implique qu'une partie de l'onde incidente est réfléchié tandis qu'une autre est transmise. C'est en physique du solide que ce phénomène a d'abord été étudié [33, 138, 139]. Il a notamment été montré que les réflexions successives peuvent empêcher une onde incidente de se propager dans un milieu périodique. Ces réflexions sont notamment efficaces lorsque que la condition de Bragg est respectée, i.e., lorsque l'onde incidente a pour nombre d'onde la moitié de celui du réseau [140]. Cette réflexion quasi totale implique l'apparition d'une bande interdite en fréquences d'ondes qui ne peuvent pas traverser le réseau. Cette bande correspond à la première bande de Brillouin de la théorie de la physique des solides [33]. Dans le cas d'un milieu désordonné, un phénomène proche appelé localisation d'ondes apparaît. Le désordre implique un plus grand nombre de réflexions successives entraînant alors une atténuation sur une bande de fréquences plus large des ondes. C'est en matière condensée que ce phénomène a été mis en évidence pour la première fois et est appelé localisation d'Anderson [32, 141, 142]. Dans ce régime, les ondes subissent une décroissance exponentielle dont la longueur caractéristique  $\xi$  varie en fonction de la fréquence imposée et du désordre du milieu. Notons que la localisation d'ondes et la dissipation sont des phénomènes très différents mais ayant la même signature (décroissance exponentielle de l'amplitude des ondes). La localisation peut être alors observée seulement si sa longueur caractéristique  $\xi$  est très inférieure à celle de la dissipation  $l_d$ .

Ces phénomènes ne se restreignent pas à la mécanique du solide, on peut trouver des équivalences avec des ondes acoustiques dans des chaînes désordonnées de pendules couplés [143], le long d'une corde avec des masses [144], dans des tuyaux sonores percés de trous [145], ou dans un milieu granulaire [146]. Des applications existent aussi avec des ondes électromagnétiques dans des plasmas [147], en optique [148, 149], avec des ondes électriques dans des circuits de chaîne d'impédances aléatoires [150], dans des condensats de Bose-Einstein [151, 152] et également avec ondes de Faraday [153]. En océanographie, la réflexion de Bragg est étudiée dans le contexte des bancs de sable qui se forment près des côtes et les protègent de l'impact "complet" des vagues [154]. La variation du milieu se fait alors par des changements dans la topographie du fond. Les changements de profondeurs successifs  $h$  impliquent, en effet, des variations de la loi de dispersion des ondes de gravité  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ , ces changements sont à la source de réflexions de l'onde incidente. Plusieurs travaux expérimentaux ont été réalisés dans ce contexte à une et deux dimensions de propagation. A une dimension dans un canal 1D à fond sinusoïdal, la validité de la réflexion de Bragg et l'existence d'une bande interdite de fréquences a été mise en évidence dans les années 80 [155, 156]. D'autres travaux théoriques afin de mieux décrire ces phénomènes ont également été réalisés [157, 158]. La localisation d'Anderson des ondes linéaires a également pu être observée en réalisant un fond aléatoire [159]. Ces résultats expérimentaux ont pu être comparés, plus récemment, à des résultats théoriques sur la propagation d'ondes de surface dans un canal à fond périodique [160, 161] analogues aux prédictions réalisées en mécanique du solide [33]. Néanmoins, bien que la théorie du problème pour les ondes linéaires ait

été largement étudiée, la faible quantité d'expérience, sur des ondes de surface, ne permet pas une compréhension complète du problème. Les mesures ayant été faites il y a environ 40 ans, les visualisations spatio-temporelles n'ont pas pu être réalisées avec la résolution accessible aujourd'hui. C'est pourquoi nous proposons ici de réaliser une étude expérimentale plus complète de la propagation d'ondes linéaires sur un fond périodique afin de mettre en évidence la réflexion de Bragg, puis de la localisation d'Anderson sur un fond aléatoire, avec une meilleure précision expérimentale.

Un autre aspect qu'il est intéressant d'étudier est le rôle de la non-linéarité sur la localisation d'ondes. Plusieurs travaux théoriques, numériques et expérimentaux (principalement en acoustique) ont été effectués à ce sujet dans le but de savoir si la non-linéarité des ondes incidentes amplifie, atténue ou laisse inchangée la localisation d'Anderson [162, 163]. Il se trouve que la réponse n'est pas si simple et qu'elle varie suivant le type de non-linéarités imposé. Dans le cas d'un forçage sinusoïdal continu des ondes incidentes, il a été montré théoriquement, que pour de faibles non-linéarités, la localisation d'Anderson n'est pas impactée et qu'elle a tendance à être plus efficace lorsque la non-linéarité augmente [164, 165]. Cette conclusion a été validée expérimentalement en acoustique [144, 163, 166] et numériquement en optique [167].

En revanche, il a été montré théoriquement que si le forçage est une impulsion générant un soliton, la localisation d'Anderson (de longueur  $\xi$ ) dépend de la non-linéarité du soliton (i.e., de sa longueur non linéaire, typiquement sa largeur  $l'$ ) [165, 168-170]. Dans le cas d'un soliton de faible amplitude,  $l' \gg \xi$ , le soliton est fortement atténué par le réseau, tandis que pour une forte non-linéarité,  $l' \ll \xi$ , le soliton ne voit plus le réseau et est transmis sans encombre. Cette conclusion théorique a été retrouvée expérimentalement dans le cas d'ondes à la surface d'un superfluide [171] et d'ondes acoustiques [144].

Dans le cas spécifique des ondes à la surface d'un fluide classique, l'étude du rôle de la non-linéarité sur la localisation d'Anderson n'a été, à notre connaissance, que très peu étudié, mais semble différer des autres cas du paragraphe précédent. Il est évoqué de manière qualitative dans [159] que, pour un forçage continu des ondes incidentes, la non-linéarité tant à augmenter la longueur de localisation  $\xi$  aux basses fréquences et à la diminuer aux hautes fréquences. Des travaux théoriques pour un forçage impulsif ont été réalisés et prédisent notamment qu'un soliton envoyé dans un réseau périodique décroît rapidement en subissant, en plus de la dispersion, des fissions (i.e., il se sépare en plusieurs solitons plus petits) [172]. Un soliton ne peut a priori pas se propager à travers un réseau dans le cas des ondes de surfaces hydrodynamiques contrairement au cas acoustique.

Dans ce chapitre, nous étudions expérimentalement la localisation d'Anderson d'ondes à la surface d'un fluide. Nous nous intéresserons, tout d'abord, aux ondes linéaires dans un réseau périodique puis dans un réseau aléatoire. Nous aborderons ensuite les effets non linéaires en comparant un forçage sinusoïdal continu et un forçage impulsif.

## 6.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental de ce chapitre a été mis en place tout au long de cette thèse en parallèle des expériences présentées précédemment. Le système est représenté sur les figures 6.1 et 6.2, il est composé d'un canal aux parois en verre, de longueur  $L_x = 4$  m et de largeur  $L_y = 18$  cm. D'un côté du canal, un batteur à pale, piloté par un moteur LinMot PS01-37x120F, est utilisé pour injecter de l'énergie sous la forme d'ondes de surface (voir figure 6.2). Ce batteur est complètement contrôlé sous réserve de garder une amplitude de mouvement inférieure à 17 cm et de rester sur des fréquences inférieures à environ 2.5 Hz. Le canal peut être rempli avec de l'eau sur une profondeur  $1 < h < 8$  cm. À l'opposé du batteur, une plage composée de cailloux, de diamètre typique de 2 cm, peut être mise en place afin de dissiper les ondes qui y parviennent, notons que cette



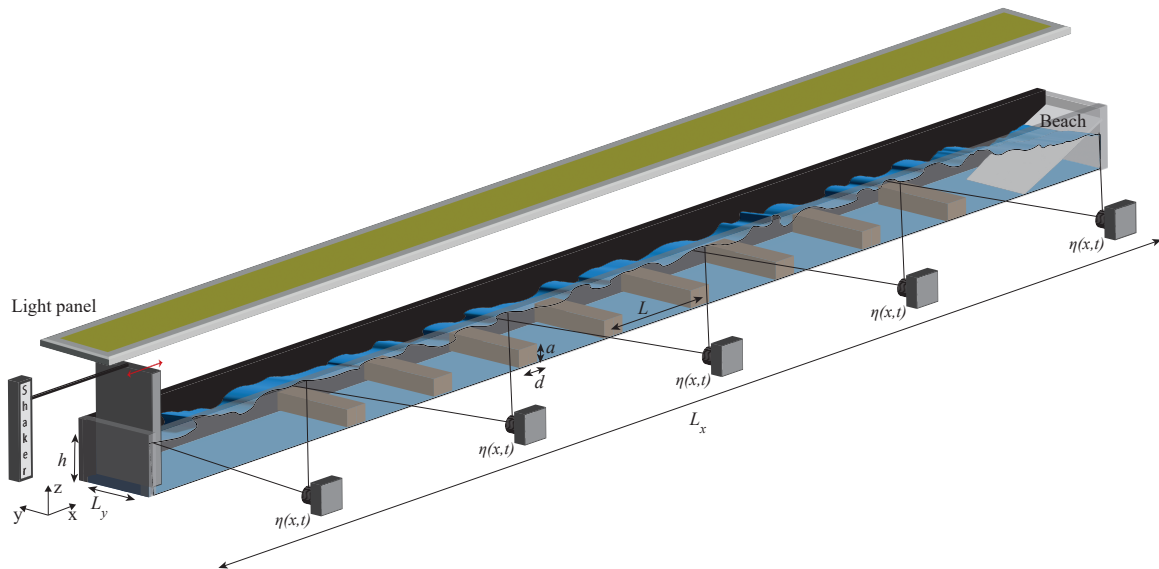


FIGURE 6.1 : Schéma du dispositif expérimental,  $L_x = 4$  m,  $L_y = 18$  cm,  $h = 5.5$  cm,  $d = 8$  cm,  $L = 25$  cm.

plage peut être, si besoin, remplacée par un mur réfléchissant.

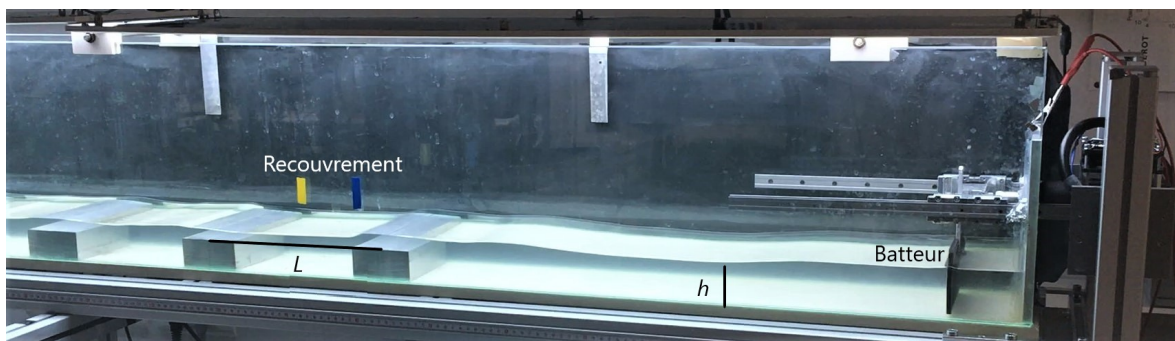


FIGURE 6.2 : Photo d'une partie du dispositif expérimental,  $h = 5.5$  cm,  $L = 25$  cm.

La technique de mesure spatio-temporelle des variations d'élévation de la surface  $\eta(x, t)$  est analogue à celle proposée par Redor et. al. [173]. La surface de l'eau est éclairée à l'aplomb du canal, à l'aide de panneaux lumineux, tandis qu'un fond noir est placé à l'arrière du canal. Les mesures de variations de la hauteur de la surface se font à l'aide de cinq caméras Basler (Ac3088-57um,  $3088 \times 2064$  pixels<sup>2</sup>) équipées d'objectif de 8 mm, placées à 90 cm du canal, donnant une résolution de 0.28 mm par pixel et allant jusqu'à 80 images par seconde (20 images par secondes seront utilisées ici). Ces caméras sont positionnées régulièrement le long du canal et avec un angle d'environ  $4^\circ$  par rapport à la surface au repos. Chaque caméra possède une résolution horizontale de 86 cm et verticale de 9 cm, tandis qu'un recouvrement d'environ 7 cm entre chaque caméra successive est mis en place. La surface éclairée (blanche) est ainsi filmée et contraste fortement avec le fond noir du canal, le minimum du gradient vertical de l'image ainsi repéré permet d'obtenir les variations de l'interface au cours du temps (voir exemple sur la figure 6.3). Les caméras sont synchronisées entre elles en étant reliées par des câbles GP-I/O, ce qui leur permet de filmer la surface simultanément. Le film complet de la propagation des ondes le long du canal est ensuite reconstruit (les recouvrements sont utilisés pour s'assurer que la reconstruction fonctionne). Des sondes capacitatives mesurant les variations de hauteur de liquide en un point au cours du temps (non représentées sur la figure 6.1) peuvent également être utilisées (résolution horizontale de

0.22 mm, verticale de 10  $\mu\text{m}$  pour une fréquence d'acquisition de 2 kHz).

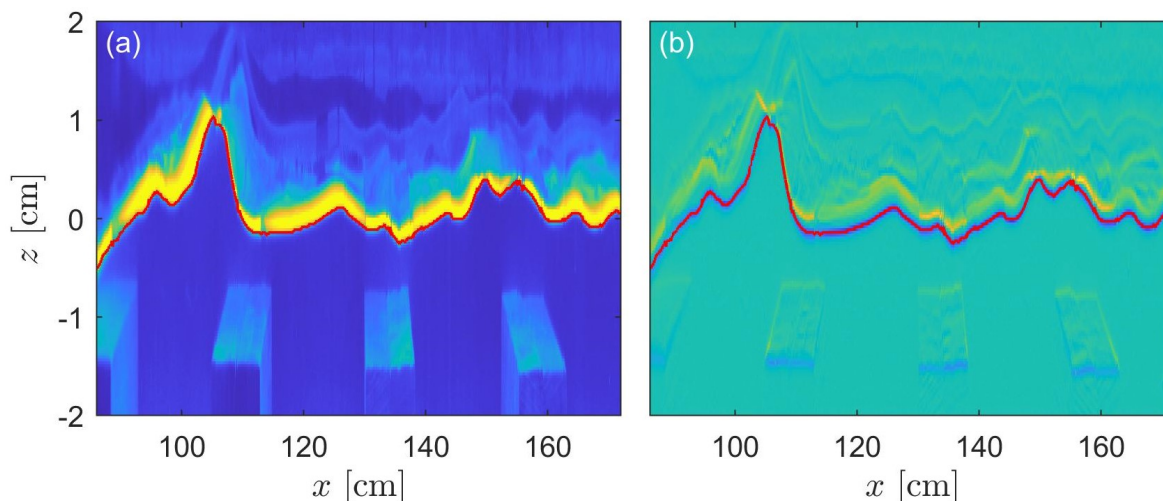


FIGURE 6.3 : Image typique obtenue par la seconde caméra du dispositif expérimental de la figure 6.1 pour une onde incidente sinusoïdale à  $f = 1.1$  Hz avec un forçage fort  $\epsilon \sim 0.04$ , un fond périodique  $L = 25$  cm et une profondeur totale d'eau  $h = 5.5$  cm. (a) Image brute, (b) gradient de l'image dans la direction  $z$ . Le signal  $\eta(x, t)$  obtenu par le minimum de l'image (b) est tracé en rouge. L'abscisse  $x = 0$  correspond ici au début du canal.

Afin de reproduire expérimentalement les effets de localisation d'ondes de surface, un fond périodique est, tout d'abord, utilisé dans le canal (voir figure 6.1). Des barres en aluminium, de section rectangulaire de largeur  $d = 8$  cm et de hauteur  $a = 4$  cm, espacées régulièrement d'une distance  $L = 25$  cm, sont placées au fond du canal. Le réseau pourra également être rendu désordonné en utilisant une distance aléatoire entre deux barres adjacentes  $L + \delta$ , avec  $\delta$  un déplacement choisi aléatoirement de manière uniforme dans  $[-L/2, L/2]$ . Notons que des désordres moins importants, avec  $\delta$  choisis dans un intervalle plus petit, pourraient être utilisés pour quantifier les effets du désordre, cette étude sur plusieurs valeurs de désordre ne sera pas réalisée ici. La profondeur de l'eau varie ainsi en fonction de la position  $x$ , sans barre  $h = 5.5$  cm tandis qu'au-dessus d'une barre la profondeur est  $h_1 = h - a = 1.5$  cm. Le forçage imposé par le batteur peut être un balayage en fréquence entre 0.42 et 1.8 Hz durant 5 min, un forçage sinusoïdal continu à une fréquence et une amplitude données, ou une impulsion. Pour les forçages en balayage, l'amplitude de mouvement du batteur  $A$  varie avec la fréquence (donc au cours du temps) de sorte que l'accélération du batteur  $Af^2$  reste constante. Un tel choix permet de conserver une cambrure  $\epsilon$  des ondes constante pour toutes les fréquences, en effet,  $Af^2 \sim Agk \sim \epsilon g$ . Notons que la cambrure est mesurée dans le cas d'un fond plat. Les valeurs de  $\epsilon$  utilisées sont donc définies pour les ondes incidentes avant le réseau périodique ou aléatoire.

## 6.3 Théorie de la localisation d'ondes de surface

### 6.3.1 Équations d'hydrodynamiques

Nous démontrons dans cette partie les principaux résultats attendus pour la localisation d'ondes de surface par le désordre dans un canal 1D. Ces résultats théoriques sont basés sur ceux présentés dans [160, 161, 174, 175]. Les fréquences utilisées ici étant faibles ( $f < 5$  Hz), l'approximation d'eau profonde n'est plus valable, la loi de dispersion (en négligeant les effets capillaires) dépend donc de la profondeur d'eau et donc de la position dans le canal. Cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= gk \tanh(kh), \\ \omega^2 &= gk_1 \tanh(k_1 h_1),\end{aligned}\tag{6.1}$$

où  $k$  et  $k_1$  sont respectivement les nombres d'ondes en l'absence des barres et au-dessus de celles-ci et  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation des ondes. Chaque barre agit comme un obstacle où une partie de l'onde incidente est réfléchiée tandis qu'une autre partie est transmise.

Nous reprenons maintenant le système d'équations linéaires théoriques de la surface, vu au chapitre 1 [équations (1.6)] avec le potentiel vitesse  $\nabla\phi(x, z, t) = \mathbf{u}$ , mais cette fois, nous prenons une profondeur qui dépend de la topographie du fond, i.e.,  $h = h(x)$ . Le système (1.6) peut également s'écrire en utilisant la vitesse  $\mathbf{u}$  au lieu de son potentiel sous la forme [176] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g\nabla\eta &= 0, & \text{en } z = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \int_{-h(x,y)}^0 \mathbf{u} dz &= 0, & \text{en } z = 0,\end{aligned}\tag{6.2}$$

En utilisant le fait que  $\phi = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} e^{-i\omega t} \varphi(x, y)$  [voir équation (1.9)] donc que  $\mathbf{u} = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} e^{-i\omega t} \nabla\varphi(x, y)$ , le système (6.2) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}-i\omega\nabla\varphi + g\nabla\eta &= 0, \\ -i\omega\eta - \nabla(\tanh(kh)\nabla\varphi) &= 0,\end{aligned}\tag{6.3}$$

ce qui donne finalement en utilisant l'équation 6.1 :

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{g}\eta + \nabla(\tanh(kh)\nabla\eta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla\left(\frac{1}{k^2}\nabla\eta\right) + \eta &= 0.\end{aligned}\tag{6.4}$$

L'équation (6.4) montre qu'à l'interface où la profondeur du liquide change (passage de  $h$  à  $h_1$ ) les grandeurs  $\eta$  et  $(\frac{1}{k^2}\nabla\eta)$  sont conservées [175, 176].

### 6.3.2 Système avec une unique marche

Nous considérons maintenant le système vu dans la partie 6.2, mais avec une seule marche (voir figure 6.4). Nous définissons  $\eta_L$ ,  $\eta_M$  et  $\eta_R$  les variations d'élévation de la surface respectivement à gauche, au-dessus et à droite de la marche, telles que :

$$\begin{aligned}\eta_L &= A_L e^{ikx} + B_L e^{-ikx}, \\ \eta_M &= A_M e^{ik_1 x} + B_M e^{-ik_1 x}, \\ \eta_R &= A_R e^{ikx} + B_R e^{-ikx},\end{aligned}\tag{6.5}$$

avec  $A_L$  et  $B_L$  les amplitudes incidente et réfléchiée de l'onde à gauche de l'obstacle,  $A_M$  et  $B_M$  au-dessus de l'obstacle et  $A_R$  et  $B_R$  à sa droite. En l'absence de dissipation visqueuse (voir paragraphe 6.4.1), les conditions aux limites en  $x_L$  et  $x_R$  des trois zones imposent la continuité de la hauteur des ondes  $\eta$ , via l'équation (6.5), et de la quantité  $\frac{1}{k^2}\nabla\eta$  [voir équation (6.4)], ce qui donne :

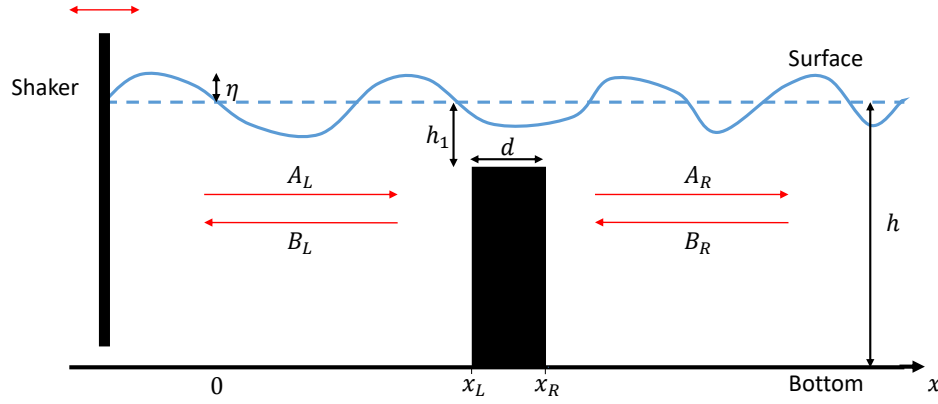


FIGURE 6.4 : Schéma du dispositif expérimental en considérant une seule marche [161].  $A_L$  et  $B_L$  sont respectivement les amplitudes incidente et réfléchie des ondes à gauche (Left) de la marche,  $A_R$  et  $B_R$  sont celles à sa droite (Right).

$$\begin{aligned}
 A_L e^{ikx_L} + B_L e^{-ikx_L} &= A_M e^{ik_1 x_L} + B_M e^{-ik_1 x_L}, \\
 \frac{1}{k} (A_L e^{ikx_L} - B_L e^{-ikx_L}) &= \frac{1}{k_1} (A_M e^{ik_1 x_L} - B_M e^{-ik_1 x_L}), \\
 A_M e^{ik_1 x_L} + B_M e^{-ik_1 x_L} &= A_R e^{ikx_R} + B_R e^{-ikx_R}, \\
 \frac{1}{k_1} (A_M e^{ik_1 x_R} - B_M e^{-ik_1 x_R}) &= \frac{1}{k} (A_R e^{ikx_R} - B_R e^{-ikx_R}).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Le système (6.6) peut être réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_L \\ B_L \end{pmatrix} &= T_{LM} \begin{pmatrix} A_M \\ B_M \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} A_M \\ B_M \end{pmatrix} &= T_{MR} \begin{pmatrix} A_R \\ B_R \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Nous déduisons la matrice transfert complète entre les amplitudes de gauche et de droite telle que :

$$\begin{pmatrix} A_L \\ B_L \end{pmatrix} = T_{LR} \begin{pmatrix} A_R \\ B_R \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

avec  $T_{LR} = T_{LM} T_{MR}$  et, en posant  $x_R - x_L = d$  et  $G = \frac{k}{k_1}$ , il vient [161] :

$$\begin{aligned}
 T_{LM} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+G)e^{i(k_1-k)x_L} & (1-G)e^{-i(k_1+k)x_L} \\ (1-G)e^{i(k_1+k)x_L} & (1+G)e^{-i(k_1-k)x_L} \end{pmatrix} \\
 T_{ML} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+1/G)e^{i(k-k_1)(x_L+d)} & (1-1/G)e^{-i(k+k_1)(x_L+d)} \\ (1-1/G)e^{i(k+k_1)(x_L+d)} & (1+1/G)e^{-i(k-k_1)(x_L+d)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

### 6.3.3 Système à N marches

Dans le cas d'une série de  $N$  marches identiques et équidistantes (voir figure 6.5 (a)), l'ensemble constitue un réseau périodique.  $A_L$  et  $B_L$  sont alors les amplitudes de l'onde incidente et réfléchie

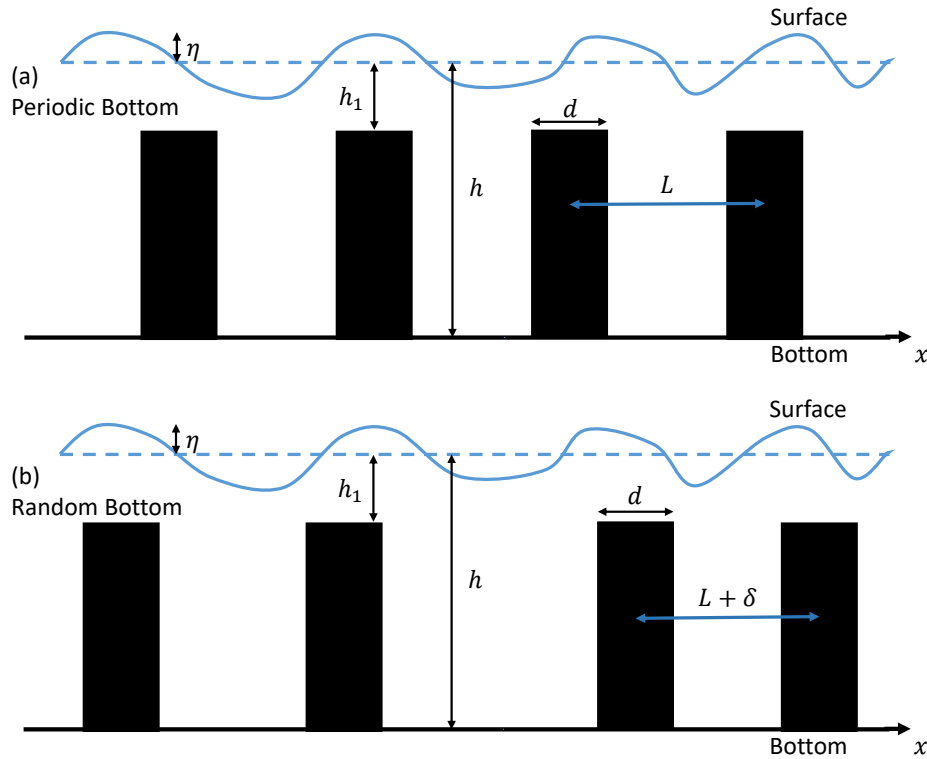


FIGURE 6.5 : Schéma du dispositif expérimental en considérant 4 marches dans le cas d'un fond périodique (a) et d'un fond aléatoire (b).

avant le réseau d'obstacles et  $A_R$  et  $B_R$  après le réseau. La matrice de transfert complète telle que  $\begin{pmatrix} A_L \\ B_L \end{pmatrix} = T(N) \begin{pmatrix} A_R \\ B_R \end{pmatrix}$  est le produit des matrices de transfert de chaque obstacle :

$$T(N) = \prod_i^N T_i, \quad (6.10)$$

où  $T_i$  est équivalent à la matrice  $T_{LR} = T_{LM}T_{MR}$  [équation (6.9)] avec  $x_L$  la position de la  $i^{\text{ème}}$  marche. Nous supposons qu'une onde incidente parte de la gauche et admettons qu'aucune réflexion n'arrive dans le réseau depuis sa droite, ce qui implique que  $A_L = 1$  et  $B_R = 0$ , i.e.,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

avec  $T_{n,m}$  le terme à la  $n^{\text{ème}}$  ligne et à la  $m^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $T(N)$ , donc :

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{1}{T_{11}}, \\ B_L &= \frac{T_{21}}{T_{11}}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Il est également intéressant de définir les coefficients de transmission  $t = \left| \frac{A_R}{A_L} \right| = |A_R| = \frac{1}{T_{11}}$  et de réflexion  $r = 1 - t$  qui permettent de quantifier respectivement l'amplitude des ondes qui parvient à traverser le réseau et celle qui y est réfléchi. Afin de savoir comment l'amplitude des ondes varie au sein du réseau, nous utilisons la longueur  $\xi$  d'atténuation des ondes par le réseau de marche, appelé longueur de localisation et définie telle que [174] :

$$\eta(x) = \eta(x=0)e^{-x/\xi} = t \times \eta(x=0), \quad (6.13)$$

Pour un réseau de période spatiale  $L$  comprenant  $N$  obstacles (i.e.,  $x = NL$ ), il vient :

$$\xi = -\frac{NL}{\ln(t)} = \frac{NL}{\ln(T_{11})}. \quad (6.14)$$

Cette longueur de localisation  $\xi$  est une longueur cruciale qui donne la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde émise.  $T_{11}$  dépendant de  $k$  et  $k_1$  donc de la fréquence  $f$  de l'onde incidente, la longueur  $\xi$  dépend aussi de la fréquence des ondes. En effet, les réflexions à chaque obstacle sont plus efficaces lorsque la longueur de l'onde émise est de l'ordre de la moitié de la période du réseau (réflexion de Bragg [140]). Ceci implique que pour certaines fréquences, l'atténuation de l'onde est totale ( $t \rightarrow 0$ ) tandis que pour d'autres, elle est presque inexistante ( $t \rightarrow 1$ ). Notons que la longueur de localisation  $\xi$  est directement liée à l'exposant de Lyapunov  $\gamma$  par la relation  $\gamma = \frac{L}{\xi}$  [174].

Dans le cas d'un réseau désordonné, où les marches sont séparées d'une distance  $L + \delta$  avec  $\delta$  un déplacement aléatoire pour chaque marche [voir partie 6.2 et figure 6.5 (b)], la longueur de localisation  $\xi$  est définie de la même manière. La seule différence avec le cas périodique vient des positions  $x_L$  des obstacles [voir équation (6.9)] qui dépendent des valeurs de  $\delta$ . Notons également que la longueur de localisation  $\xi$  est usuellement définie uniquement dans le cas d'un réseau désordonné, elle est néanmoins ici, également utilisée dans le cas périodique par soucis de clarté. Le calcul, développé, mène ainsi à l'expression de  $\xi(k, k_1)$  et constitue une version moins technique et avec des résultats très similaires à ceux issus de la théorie potentielle [177].

### 6.3.4 Loi de dispersion en réseau périodique

Afin d'obtenir la loi de dispersion complète dans un réseau périodique, qui prend en compte les changements de profondeur, on utilise le théorème de Bloch [178]. Ce théorème prévoit que pour un potentiel périodique, la fonction d'ondes du système est de la forme :

$$\Phi = \mathcal{U}(x)e^{iKx}, \quad (6.15)$$

où  $\mathcal{U}$  est une fonction périodique telle que  $\mathcal{U}(x+L) = \mathcal{U}(x)$  et  $K$  est le nombre d'onde de Bloch [160]. Cette considération appliquée aux ondes de surfaces imposent  $\eta = \mathcal{U}(x)e^{iKx}$ . En injectant ce résultat dans le système matriciel (6.10), utilisant (6.9), il vient, après quelques fastidieux calculs, la définition de  $K$  [160, 161, 174, 175] :

$$\cos(KL) = \cos(k_1 d) \cos[k(L-d)] - \cosh(2\zeta) \sin(k_1 d) \sin[k(L-d)], \quad (6.16)$$

avec  $\zeta = \ln(G^{-1/2})$  et  $G = \frac{k}{k_1}$ . Nous traçons ensuite  $\omega$  [en utilisant l'équation (6.1)] en fonction de  $K$  [en utilisant l'équation (6.16)] sur la figure 6.6 (traits pleins rouges). Le réseau étant périodique et impliquant des réflexions vers les  $k < 0$ , la loi de dispersion se reproduit tous les  $\pm K \pm p \frac{2\pi}{L}$ , avec  $p$  un entier (traits pleins noirs). A chaque obstacle du réseau périodique (tous les  $2\pi/L$ ), l'onde incidente peut donc être transmise ou réfléchi. Cette dualité implique que la loi de dispersion ressemble à un maillage de période  $2\pi/L$ . La fameuse bande interdite en fréquence apparaît notamment, pour nos valeurs de paramètres, entre 0.9 et 1.3 Hz, elle est également visible pour des plus hautes fréquences, mais avec une largeur bien moindre (entre 2 et 2.1 Hz, par exemple). Notons que l'ensemble des calculs proposés dans cette partie est réalisé sous l'approximation linéaire, la discussion quant au comportement d'un réseau périodique envers des ondes non linéaires est encore largement ouverte. Notons également que, pour le cas désordonné, le théorème de Bloch d'équation (6.15) ne peut pas s'appliquer. Il n'existe alors, à notre connaissance, aucune relation

de dispersion  $\omega(K)$  dans le cas d'un réseau de structure aléatoire. L'équation (6.6) ne peut donc s'appliquer qu'au cas du réseau périodique.

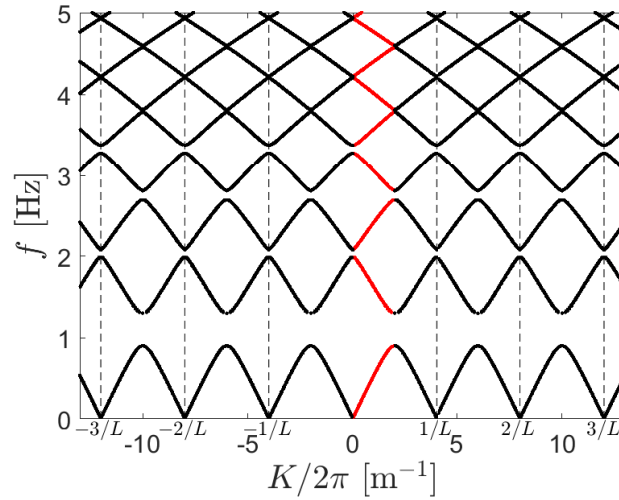


FIGURE 6.6 : Loi de dispersion dans un réseau périodique pour  $L = 25$  cm en utilisant le nombre d'ondes de Bloch  $K$  de l'équation (6.16),  $L = 25$  cm,  $h = 5.5$  cm,  $h_1 = 1.5$  cm,  $d = 8$  cm.

## 6.4 Résultats expérimentaux

Nous considérons ici un réseau périodique ou aléatoire dans un canal 1D tel que décrit dans la partie 6.2. Trois cas sont considérés : le fond plat, le fond périodique avec  $L = 25$  cm et le fond aléatoire avec  $L = 25 + \delta$  cm où  $\delta$  est un déplacement aléatoire différent pour chaque barre avec  $-L/2 < \delta < L/2$ .

### 6.4.1 Signaux expérimentaux

En utilisant le système de mesure par caméras synchronisées présenté dans la partie 6.2, nous obtenons le signal  $\eta(x, t)$  le long du canal et au cours du temps pour les différents cas considérés. Le forçage imposé est (sauf dans la partie 6.4.4), un balayage en fréquence croissant entre 0.42 et 1.8 Hz ( $0.38 < \lambda < 1.5$  m) durant 5 min. Afin de sélectionner des fréquences uniques, la mesure  $\eta(x, t)$  est coupée en morceaux de  $\Delta t = 10$  s au cours du temps. Ce forçage en balayage, plutôt que d'imposer une série de forçages monochromatiques continus, permet d'explorer un plus grand nombre de fréquences plus facilement. Les résultats sont identiques entre les deux types de forçage. Des exemples de  $\eta(x)$  sont présentés sur la figure 6.7 pour des fréquences de forçage en balayage de 0.5, 1 et 1.5 Hz, dans les cas d'un fond plat (a), (b), (c) et d'un fond périodique (d), (e), (f) pour des forçages identiques  $\epsilon \sim 0.015$ . Les croix rouges représentent les maxima des ondes.

### Dissipation visqueuse

Dans le cas du fond plat [figure 6.7 (a) (b) et (c)] les ondes restent pratiquement identiques le long du canal. Elles subissent uniquement une dissipation visqueuse, de longueur de dissipation  $l_d$  définie par analogie avec la partie (1.1.4) :

$$\eta(x) = \eta_0 e^{-x/l_d}, \quad (6.17)$$

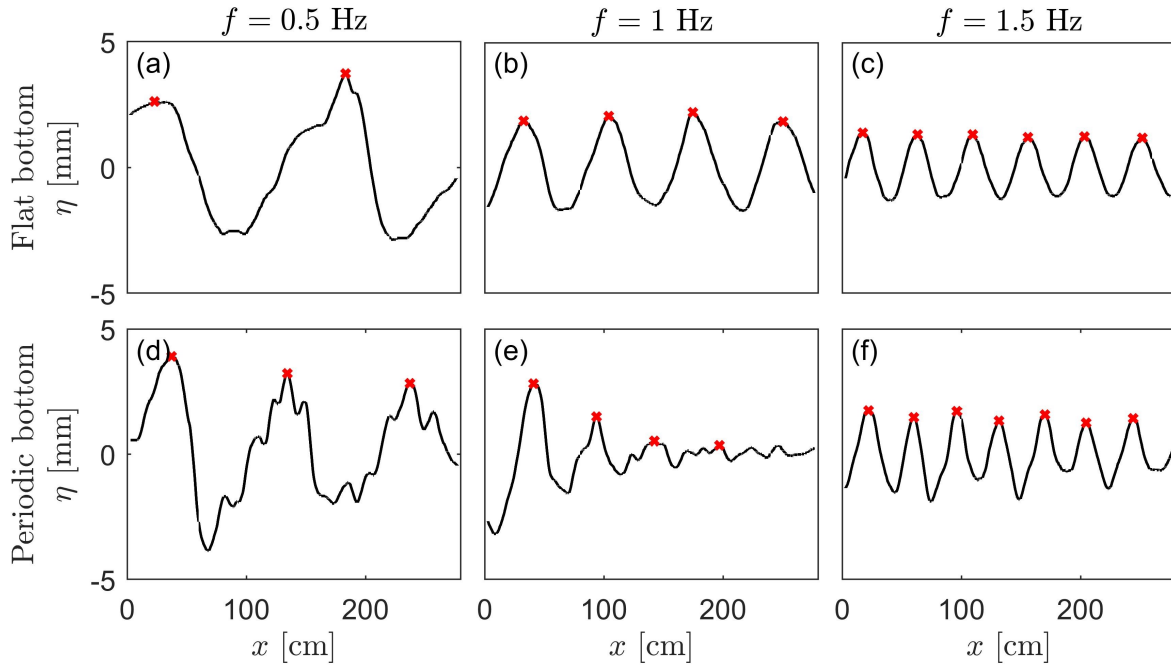


FIGURE 6.7 : Évolution de l'élévation de la surface le long du canal  $\eta(x)$  dans le cas d'un fond plat pour une fréquence de forçage en balayage (a)  $f = 0.5$ , (b) 1, (c) 1.5 Hz. (d), (e) et (f) même chose, mais avec le fond périodique  $L = 25$  cm. La cambrure vaut  $\epsilon \sim 0.015$ . Le batteur est localisé en  $x = -20$  cm et la plage commence à partir de  $x = 3$  m. Les croix rouges représentent les amplitudes maximales du signal  $\eta_{max}$ .

avec  $\eta_0 = \eta(x = 0)$ . La longueur  $l_d$  peut être estimée en considérant une dissipation par une surface avec un film inextensible d'épaisseur infinitésimale (surface contaminée, voir partie 1.1.4) ainsi qu'une dissipation par le fond et les murs latéraux [177] :

$$\begin{aligned}
 l_d &= \frac{1}{\alpha}, \\
 \alpha &= \frac{1}{U} \left[ \frac{k\sqrt{\nu\omega}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \left( \frac{k}{\sinh(2kh)} + \frac{1}{L_y} \right) \right], \\
 U &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k \tanh(kh)}} \left[ \tanh(kh) + \frac{kh}{\cosh^2(kh)} \right],
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

$\alpha$  correspond au taux de dissipation et  $U$  à la vitesse de groupe des ondes. Pour les fréquences typiquement utilisées ici  $0.48 < f < 2$  Hz, nous avons  $35 < l_d < 9.2$  m ce qui est bien plus grand que la longueur du canal  $L_x$ . La dissipation visqueuse est, a priori, négligeable pour nos gammes de  $\lambda$  utilisés. Notons qu'utiliser une dissipation par une surface libre en  $\nu k^2$  à la place d'une dissipation par une surface avec un film inextensible donne des valeurs de  $l_d$  similaires à basse fréquence et deux fois plus grandes à haute fréquence ( $f \approx 2$  Hz), la dissipation par une surface contaminée est donc plus adaptée.

Pour les basses fréquences, les non-linéarités, même faibles, impliquent la perte de la forme sinusoïdale vers le sommet [figure 6.7 (a)]. A haut forçage, nous observerons la présence de modes de ballotement transverses du bassin [voir figure 6.8 (b), signal partant de l'axe des ordonnées à  $f \neq 0$ ]. Ces effets rendent difficiles la mesure de l'atténuation visqueuse des ondes. Néanmoins, pour une faible forçage à des fréquences de l'ordre de 1 Hz, nous trouvons une longueur de dissipation autour de 20 m en moyenne en accord avec l'équation (6.18). Dans ce qui suit nous nous



concentrerons sur la propagation d'une onde le long du canal sans réflexion (sur une longueur inférieure à  $L_x = 4$  m donc très inférieure à  $l_d$ ), nous négligerons donc la dissipation visqueuse.

### Observation de la localisation

Un changement dans la propagation des ondes apparaît dans le cas du fond périodique [figure 6.7 (d), (e) et (f)]. Pour  $f = 0.5$  Hz, l'amplitude varie peu, néanmoins, une perturbation de l'onde est visible à cause des non-linéarités même faibles. La longueur d'onde typique change légèrement, par rapport au cas du fond plat [figure 6.7 (a)], à cause des changements dans la topographie du fond donc dans la loi de dispersion [équation (6.1)]. A  $f = 1$  Hz, l'effet est très marqué, la quasi-totalité de l'onde est atténuée le long du canal. Enfin, pour  $f = 1.5$  Hz, aucun effet sur l'amplitude ne semble apparaître, les ondes traversent le réseau périodique sans le sentir. Là encore, la longueur d'ondes change légèrement par rapport au cas du fond plat à cause des changements dans la loi de dispersion. Cette première observation marque la présence d'une bande interdite en fréquence autour de 1 Hz où les ondes ne peuvent pas traverser le réseau.

### 6.4.2 Spectres spatio-temporels

A partir des signaux  $\eta(x, t)$ , présentés sur la figure 6.7, nous traçons les spectres spatio-temporels de la différence spatiale  $|\delta\eta(k, \omega)|$  sur la figure 6.8 ( $|\eta(k, \omega)|$  donne des résultats similaires mais plus bruités). Le forçage utilisé est un balayage en fréquence  $0.48 < f < 1.8$  Hz dont l'amplitude choisie permet de garder une cambrure  $\epsilon$  constante (voir partie 6.2). Le cas du fond plat est représenté sur la figure 6.8 (a) pour un forçage faible  $\epsilon \sim 0.015$ , l'énergie est majoritairement présente dans la zone du forçage et suit la loi de dispersion gravitaire (pointillés blancs) sans paramètre ajustable. Notons la faible présence d'énergie le long d'une droite  $\omega \sim k$  caractéristique de la présence de structure cohérente (type solitons) due à la présence, bien que faible, de non-linéarités. Notons également que l'énergie pour des valeurs  $k < 0$  (i.e., les ondes se propageant vers la gauche) est très faible, ceci montre l'efficacité de la plage positionnée au fond du canal (voir figure 6.1). Le résultat pour un forçage fort  $\epsilon \sim 0.04$  est représenté en 6.8 (b). Dans ce cas, la majorité de l'énergie est présente le long de la droite  $\omega \sim k$ , montrant qu'elle est majoritairement concentrée dans des structures cohérentes quasi non dispersives. Notons également la présence d'autres branches (partant de l'ordonnée à  $f \neq 0$ ) dues à des effets de ballotement causés par la taille finie du système [179]. Pour un tel forçage, l'énergie est également plus présente dans les  $k < 0$  montrant que la plage dissipative est moins efficace pour les forts forçages.

Le cas du fond périodique avec  $L = 25$  cm est représenté sur les figures 6.8 (c) et (d) pour des forçages correspondants, respectivement, à  $\epsilon \sim 0.015$  et  $\epsilon \sim 0.04$ . Le nombre d'ondes de Bloch  $K$  de l'équation (6.16) correspondant aux paramètres expérimentaux, est utilisé pour tracer en traits pleins blancs, la loi de dispersion périodique (comme pour la figure 6.6). La figure 6.8 (c) montre que l'énergie ne suit plus la loi de dispersion gravitaire (pointillés blancs) et suit la nouvelle loi de dispersion périodique. L'énergie est pratiquement absente de la bande interdite, notamment dans le cas du faible forçage (un à deux ordres de grandeur plus faible dans la bande de Bragg). Pour le forçage plus fort [figure 6.8 (d)], la non-linéarité du signal autorise une énergie plus intense au sein de la bande interdite ainsi que le long de la droite solitonique  $\omega \sim k$ . Notons que la validité de la loi de Bloch pour des ondes de surface hydrodynamiques dans un réseau périodique est, ici, observé pour la première fois.

Le cas du fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm est représenté sur les figures 6.8 (e) et (f). Les résultats sont assez proches de ceux obtenus dans le cas périodique. Néanmoins, la loi de dispersion périodique de l'équation (6.16) (traits pleins blancs) est, comme attendu, moins bien respectée. Les ondes réfléchies ( $k < 0$ ) suivent notamment mieux la loi de dispersion classique  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$  de façon continue, que la loi de dispersion périodique. Du signal apparaît également entre les

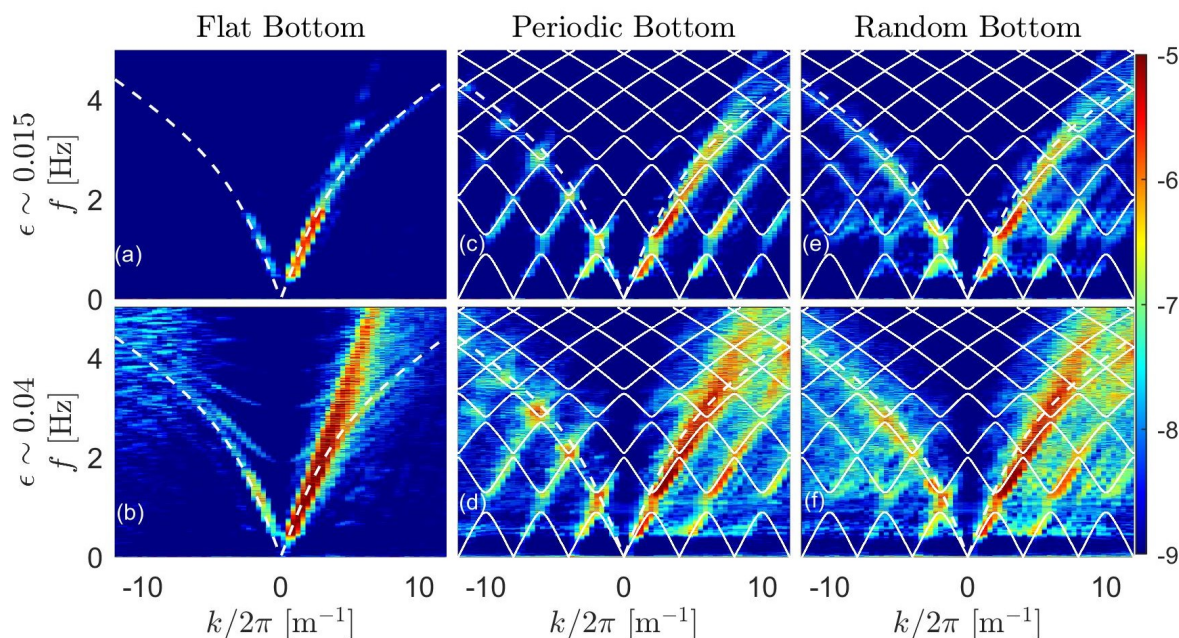


FIGURE 6.8 : Spectres spatio-temporels en utilisant un forçage en balayage de fréquence  $0.48 < f < 1.8$  Hz en gardant une accélération du batteur (donc une cambrure des ondes) constante. (a) Fond plat, (c) fond périodique  $L = 25$  cm, (e) fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm pour  $\epsilon \sim 0.015$ . (b), (d) et (f) même chose mais avec  $\epsilon \sim 0.04$ . Les pointillés blancs sont la loi de dispersion linéaire de l'équation (6.1) avec  $h = 5.5$  cm, les traits pleins blancs correspondent à la loi de dispersion périodique de l'équation (6.16). Échelle colorimétrique logarithmique.

branches de la relation de dispersion périodique de manière presque homogène. Cette observation est due aux multiples réflexions induites par l'irrégularité du fond aléatoire qui génèrent un grand nombre d'ondes de longueurs d'onde et de fréquences différentes.

### 6.4.3 Longueur de localisation

#### Mesure de la longueur de localisation $\xi$

Maintenant que nous avons montré la validité de la loi de dispersion périodique et l'existence d'une bande interdite dans le système, nous allons nous intéresser à la longueur de localisation  $\xi$  définie telle que :

$$\eta = \eta_0 e^{-x/\xi}. \quad (6.19)$$

Notons que normalement le terme longueur de localisation est défini dans le cas du réseau aléatoire, mais par souci de clarté, nous utiliserons ce même terme pour le cas périodique. Notons également que dans l'équation (6.19) la dissipation visqueuse a été négligée puisque les ondes s'atténuent seulement à cause des changements dans la topographie du canal (voir partie 6.4.1). Afin de mesurer les valeurs de  $\xi$ , nous utilisons les signaux  $\eta(x, t)$  tels que représentés sur la figure 6.7. Les maxima d'amplitudes  $\eta_{max}$ , y sont repérés, au cours de différentes distances  $x$ , avec des croix rouges et sont reportés sur la figure 6.9 pour différentes fréquences dans le cas d'un fond périodique. L'évolution de ces maxima le long de  $x$  ne décroît pas seulement exponentiellement [comme prévu par l'équation (6.19)] mais subit des oscillations périodiques. Ces oscillations sont dues aux variations de la profondeur à chaque barre (pointillés verticaux) qui impliquent la présence d'ondes stationnaires de nombre d'onde  $2\pi/L$ . Néanmoins, malgré leur présence, un ajustement par une exponentielle décroissante  $\eta_{max} \sim \eta_0 e^{-x/\xi(f)}$  reste possible et permet d'obtenir une

bonne estimation de la longueur de localisation  $\xi$ . L'utilisation d'une mesure spatio-temporelle est ici primordiale, car elle permet une mesure simple de  $\xi(f)$  et de sa dépendance en fréquence, en s'affranchissant des oscillations de  $\eta_{max}$ . Une mesure ponctuelle ne permettrait que plus difficilement d'obtenir de tels résultats.

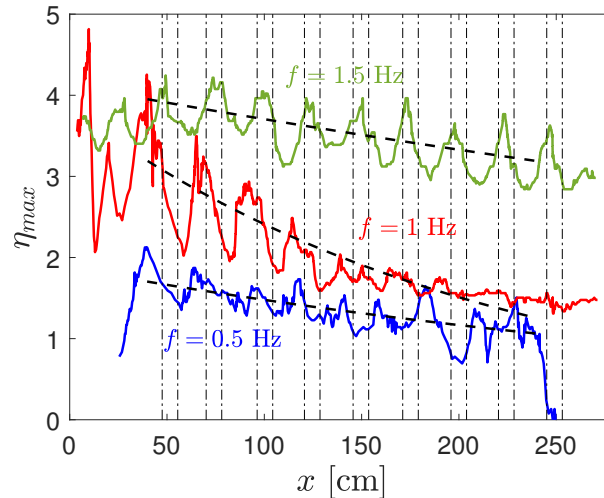


FIGURE 6.9 : Évolution de  $\eta_{max}$  le long du canal pour trois fréquences données dans le cas d'un fond périodique  $L = 25$  cm. Pointillés noirs : meilleur ajustement exponentiel  $\eta_{max} \sim \eta_0 e^{-x/\xi(f)}$  soit  $\xi \approx 7, 1.1$ , et  $4$  m pour  $f = 0.5, 1$  et  $1.5$  Hz. Tiret-points verticaux : positions des limites des barres du fond périodique. Cambrure :  $\epsilon \sim 0.015$ .

Les variations de  $\eta_{max}$  le long de  $x$  sont représentées pour les fréquences  $f = 0.5, 1$  et  $1.5$  Hz sur la figure 6.9. Les cas à  $f = 0.5$  Hz (courbe bleue) et  $f = 1.5$  Hz (courbe verte) correspondent respectivement à des fréquences situées avant et après la bande de fréquence interdite [voir figure 6.6]. A ces fréquences, seule une faible diminution de l'amplitude est visible. En revanche, pour  $f = 1$  Hz (courbe rouge) qui se situe au milieu de la bande interdite, la décroissance de l'amplitude est très importante, ce qui mène, comme attendu, à une faible valeur de  $\xi$ . Notons que les longueurs de localisation sont mesurées ici à partir de morceaux du forçage en balayage en fréquence, ce qui permet d'obtenir  $\xi(f)$  facilement pour un grand nombre de fréquences. Nous avons obtenu des résultats similaires pour des forçages sinusoïdaux continus avec  $f$  fixée. Il est également intéressant d'observer que pour des fréquences avant la bande interdite ( $f = 0.5$  Hz), les ventres des ondes stationnaires du réseau semblent se situer entre les barres tandis que pour des fréquences se situant après la bande interdite ( $f = 1.5$  Hz) les ventres semblent se positionner au-dessus des barres (entre les tiret-points verticaux). Pour des fréquences dans la bande interdite ( $f = 1$  Hz) les ventres se placent juste avant les barres. Le système étant périodique, l'apparition d'ondes stationnaires semble inévitable, mais ces ondes n'ont que peu d'impact sur l'amplitude incidente si elles sont en résonance avec le fond périodique [ventres entre ( $f \sim 0.5$  Hz) ou au milieu des barres ( $f \sim 1.5$  Hz)]. En revanche, le cas contraire [ventres ni entre ni sur les barres ( $f \sim 1$  Hz)] implique une forte atténuation provenant des interférences entre les ondes diffusées par les barres. La position relative entre les ondes stationnaires créées et le fond périodique semble ainsi expliquer physiquement l'atténuation ou non des ondes incidentes. La question reste néanmoins encore ouverte et à approfondir.

### Effets de la non-linéarité des ondes sur la localisation

Les variations de la longueur de localisation  $\xi$  sont ensuite reportées en fonction de  $f$  sur la figure 6.10 dans le cas d'un fond périodique (a) et d'un fond aléatoire (b) pour des forçages faible  $\epsilon \sim 0.015$  (ronds noirs) et fort  $\epsilon \sim 0.04$  (diamants rouges). Les traits pleins noirs correspondent à la prédiction théorique obtenue à partir de l'équation (6.14) et des paramètres expérimentaux choisis ( $L = 25$  cm,  $d = 8$  cm,  $h = 5.5$  cm,  $h_1 = 1.5$  cm,  $N = 9$ ) en suivant la méthode développée dans la partie 6.3. Notons que pour faire converger les prédictions pour le fond aléatoire, les résultats sont moyennés sur un grand nombre (environ 500) de déplacements  $\delta$  choisis aléatoirement tels que  $-L/2 < \delta < L/2$ .

Dans le cas périodique [figure 6.10 (a)] les résultats expérimentaux, à faible cambrure  $\epsilon$  (ronds noirs), suivent bien la bande de fréquence interdite prédite entre  $0.9 < f < 1.3$  Hz. A l'intérieur de la bande interdite, la valeur minimale de  $\xi$  est légèrement plus grande que la prédiction, nous n'avons, pour l'instant, pas d'explication quant à cette observation. A l'extérieur de la bande interdite,  $\xi$  est nettement plus élevée ( $\xi \geq 4$  m), montrant, comme attendu, l'invisibilité du réseau pour ces fréquences. En revanche, à fort forçage, la présence de non-linéarités importantes impliquent une forte diminution de  $\xi$  avant et après la bande interdite, de plus d'un facteur 2.

Des résultats similaires sont observés dans le cas aléatoire [figure 6.10 (b)]. En régime linéaire, il y a un bon accord avec la prédiction théorique [équations (6.14) en utilisant la partie 6.3], cette dernière devenant moins lisse et plus évasée à cause des réflexions multiples impliquées par l'irrégularité du réseau. L'abaissement de la longueur de localisation  $\xi$  avec la non-linéarité des ondes est là encore observé et est qualitativement en accord les prédictions théoriques : la localisation d'Anderson est plus efficace pour un forçage continu dans le cas non linéaire [162, 163]. Cet aspect n'avait jamais été observé avec des ondes de surface et est en accord avec les observations en acoustique [144, 163, 166] et en optique [167].

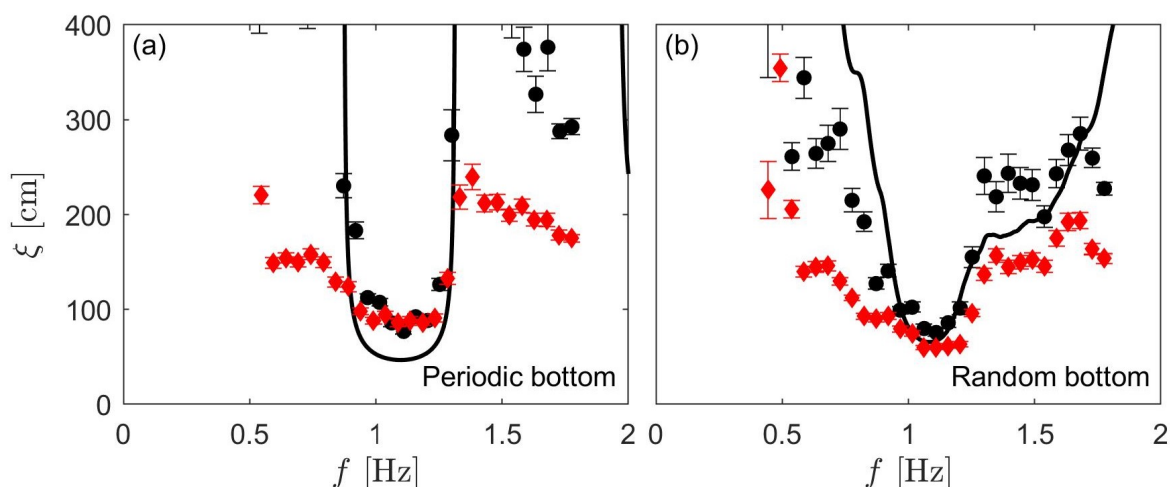


FIGURE 6.10 : Évolution de la longueur de localisation  $\xi$  obtenue par l'ajustement de la figure 6.9 en fonction de la fréquence pour deux forçages  $\epsilon \sim 0.015$  (ronds noirs) et  $\epsilon \sim 0.04$  (diamants rouges). (a) fond périodique  $L = 25$  cm, (b) fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm. Les barres d'erreur correspondent à l'incertitude de l'ajustement de  $\eta_{max} = \eta_0 e^{-x/\xi}$ . Traits pleins noirs : courbe théorique obtenue à partir de l'équation (6.14) en suivant la partie 6.3.

L'évolution de  $\xi$  est finalement représentée en fonction de la non-linéarité (i.e., la cambrure incidente  $\epsilon$ ) pour différentes fréquences sur la figure 6.11. Pour les fréquences proches de la bande interdite (bleu clair-vert), la longueur  $\xi$  n'est que très peu impactée et reste constante autour de 70 cm (voir figure 6.10). Tandis que pour les fortes (rouge) et faibles (bleu) fréquences,  $\xi$  diminue

fortement avec  $\epsilon$ . Comme attendu, l'atténuation des ondes est plus efficace dans le cas aléatoire [figure 6.11 (b)] que dans le cas périodique [figure 6.11 (a)]. En revanche, à forte non-linéarité ( $\epsilon \sim 0.04$ ), il n'y a plus de distinction entre les deux topographies. La manière avec laquelle décroît  $\xi$  avec  $\epsilon$  n'est en revanche pas déterminée ici et demanderait de pousser plus loin cette étude. Notons que la diminution de  $\xi$  avec la non-linéarité avant et après la bande interdite n'est pas en accord avec [159] qui observe qualitativement, sans le détailler, une augmentation de  $\xi$  pour les fréquences avant la bande interdite. L'étude expérimentale réalisée dans [159], avec des mesures ponctuelles, ne permet pas d'obtenir la précision de la mesure spatio-temporelle utilisée ici, et nécessaire pour quantifier les effets non linéaires.

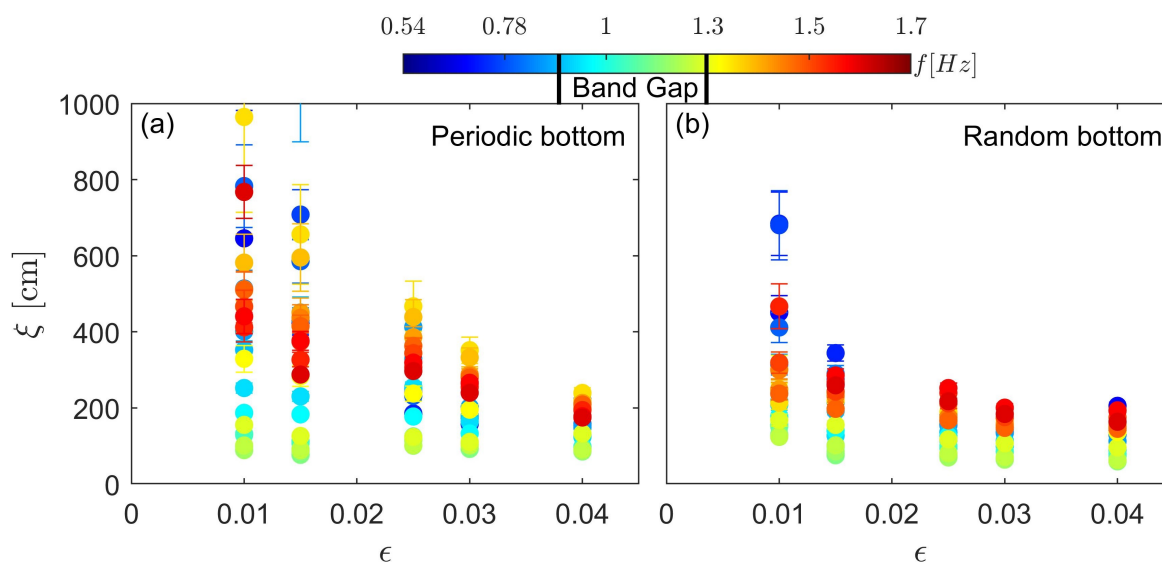


FIGURE 6.11 : Évolution de la longueur de localisation  $\xi$  en fonction de la non-linéarité (cambrure  $\epsilon$ ) pour différentes valeurs de fréquence (voir échelle colorimétrique). (a) fond périodique  $L = 25$  cm, (b) fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm. La bande interdite du cas périodique est marquée sur la barre colorimétrique par des traits noirs.

#### 6.4.4 Cas particulier du forçage impulsif

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas où le forçage du système n'est plus continu et sinusoïdal, mais est composé d'une simple impulsion. Le but est ici de générer un soliton et d'observer s'il est capable de traverser le réseau périodique (ou aléatoire) ou s'il est impacté de la même manière que les ondes sinusoïdales. Comme le forçage n'est ici pas continu, la plage en bout du canal (voir figure 6.1) a été remplacée par un mur vertical réfléchissant les ondes et permettant de les observer sur une plus grande distance après le réseau.

##### Définition et génération du soliton

Nous donnons ici une rapide définition d'un soliton. Un soliton est un objet complexe qui a été largement étudié en mathématiques et en physique [180-182]. De manière générale, il s'agit d'une onde localisée spatialement dont les effets de dispersion sont faibles et du même ordre de grandeur que les effets non linéaires. Cette compensation entre dispersion et non-linéarité permet à l'onde de voyager sur de longues distances sans se déformer.

En hydrodynamique, les solitons apparaissent notamment en eau peu profonde et sont régis par l'équation de Korteweg-de Vries (KdV). Cette équation s'obtient en effectuant un développement perturbatif des équations potentielles du système (1.4) en considérant une dispersion et une

non-linéarité faible et du même ordre. En l'absence de dissipation et en considérant un nombre de Bond  $Bo = \left(\frac{\sqrt{\gamma/(\rho g)}}{h}\right)^2 \sim 10^{-5} \ll 1$  suffisamment faible pour s'affranchir des effets de tension de surface, l'équation KdV s'écrit [183] :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{c_s}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \beta} + \frac{1}{9} c_s h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial \beta^3} = 0, \quad (6.20)$$

où  $\beta = x - ct$  est le référentiel du soliton,  $c_s = \sqrt{gh}$  la vitesse des ondes linéaires et  $c$  la vitesse du soliton donnée par :

$$c = c_s \left(1 + \frac{A_0}{2h}\right), \quad (6.21)$$

avec  $A_0$  l'amplitude du soliton. Pour des ondes de surface, l'équation (6.20) admet pour solution :

$$\eta(x, t) = A_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct}{l}\right), \quad (6.22)$$

avec  $l = \sqrt{\frac{4h^3}{3A_0}}$ , la largeur typique d'un soliton [largeur à  $\eta = A_0 \times \operatorname{sech}^2(1/2)$ ]. L'hypothèse de non-linéarités et de dispersions faibles et du même ordre impose  $\frac{A_0}{h} \sim \left(\frac{h}{l}\right)^2 \ll 1$  [181]. Une des grandes particularités de ce type d'onde est que toutes ses caractéristiques (amplitude, largeur et vitesse) sont reliées entre elles. Les solitons de faible amplitude sont ainsi larges et lents, tandis que ceux de grande amplitude sont fins et rapides. Notons que l'équation KdV (6.20) ne prend pas en compte les réflexions et suppose un sens unique de propagation, cette équation ne sera donc plus valable dans le réseau où des réflexions multiples risquent d'apparaître par la présence de la topographie périodique ou aléatoire. L'équation KdV ne pourra être valide qu'avant et après le réseau.

Afin de reproduire expérimentalement dans notre canal ce type d'onde, nous utilisons la procédure décrite dans [184]. L'équation (6.22) est utilisée pour produire numériquement le signal  $\eta_{th}$  d'un soliton d'amplitude souhaitée  $A_0$ . Le mouvement du batteur  $X$  à utiliser est alors donné par l'équation [184] :

$$\frac{dX}{d\beta} = \frac{\bar{u}(\beta)}{c_s - \bar{u}(\beta)}, \quad (6.23)$$

avec  $\bar{u}(\beta) = \frac{c_s \eta_{th}}{h + \eta_{th}}$ . En intégrant l'équation (6.23) en utilisant (6.22), nous obtenons une expression du mouvement du batteur à imposer, qui correspond à une tangente hyperbolique dont l'amplitude et la raideur sont liées à l'amplitude du soliton souhaité.

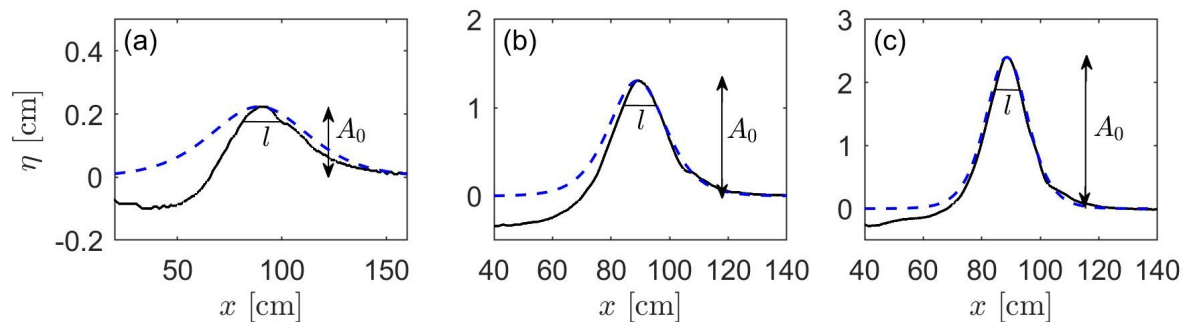


FIGURE 6.12 : Signaux obtenus environ 80 cm après le batteur pour trois forçages impulsionnels, (a) faible, (b) moyen et (c) fort dans le cas d'un fond plat. La solution de l'équation KdV (6.22) est représentée en pointillés bleus en utilisant la valeur expérimentale de l'amplitude  $A_0$ .

Les signaux obtenus pour trois forçages impulsions différents sont représentés sur la figure 6.12. Les amplitudes  $A_0$  souhaitées sont (a) 0.25 cm, (b) 1.2 cm et (c) 2 cm. Les valeurs obtenues 0.2 cm, 1.4 cm et 2.4 cm sont proches des valeurs souhaitées et valide ainsi la méthode de forçage de l'équation (6.23) [184]. Notons que ces valeurs expérimentales donnent un paramètre non linéaire  $0.04 < \frac{A_0}{h} < 0.44$  et un paramètre de dispersion  $0.08 < \left(\frac{h}{l}\right)^2 < 0.37$ , en accord avec les hypothèses de validité de l'équation KdV [181]. A ces signaux sont superposées les prédictions théoriques de la forme des solitons (pointillés bleus), données par l'équation (6.22) en utilisant les valeurs d'amplitudes  $A_0$  obtenues expérimentalement. Nous observons un bon accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques dans le cas d'une grande amplitude [figure 6.12 (c)]. Néanmoins, plus l'amplitude est faible moins bon est l'accord, ceci s'explique par la diminution du niveau d'eau après le passage du soliton. Le batteur déplace une masse d'eau importante pour créer le soliton, donc par conservation de la masse, le niveau d'eau diminue derrière lui. Cette diminution est relativement plus importante par rapport à l'amplitude  $A_0$  pour des faibles valeurs de  $A_0$ , ce qui explique le mauvais accord entre théorie et expérience pour les solitons de faible amplitude [figure 6.12 (a)]. Dans la suite, nous parlerons de solitons en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit pas tout à fait de solitons tels que décrits par l'équation KdV (6.20), notamment pour les faibles amplitudes. Nous pouvons donc générer des impulsions d'amplitude  $0.2 < A_0 < 2.4$  cm, de largeur  $9 < l < 20$  cm et de largeur à leur base (à  $z \approx 0$ )  $38 < l' < 60$  cm.

Notons que dans tous les cas  $l' < \xi$ , avec  $\xi \approx 70$  cm la longueur de localisation minimale observée pour un forçage continu (voir figure 6.10). Les valeurs  $l' > \xi$  semblent difficiles à atteindre expérimentalement du fait de la diminution du niveau d'eau derrière le soliton et de la difficulté de détecter des solitons d'amplitude  $A_0 < 0.2$  cm. En revanche, les cas  $l' < \xi$  seront largement explorés. Cette condition implique, selon la théorie et des expériences en acoustique et à la surface de superfluides, la perte de la localisation [144, 165, 168-171]. Pour des ondes de surface, il est en revanche prédit que les solitons se divisent en plusieurs en plus de se disperser [172].

### Évolution du soliton dans le réseau

Maintenant que nous avons vu qu'il est possible de générer, sous certaines approximations, des solitons, nous étudions leur évolution dans les réseaux périodique et aléatoire. Dans un premier temps, nous représentons, sur les figures 6.13 (a)-(l), l'évolution du signal d'un soliton  $\eta(x, t)$ , ainsi que son signal spatio-temporel sur les figures 6.14 (a), (b) et (c), dans le cas d'une amplitude moyenne  $A_0 = 1.4$  cm [figure 6.12 (b)].

Dans le cas d'un fond plat [figure 6.14 (a)], le signal, dans une représentation  $(x, t)$ , suit une droite caractéristique d'un déplacement à vitesse constante. La pente attendue  $x = ct$  avec  $c$  défini par l'équation (6.21) en considérant l'amplitude  $A_0$  du soliton en sortie du batteur, est tracée en pointillés blancs. Un bon accord est observé au début de la propagation, puis une légère diminution de la vitesse apparaît, car l'amplitude du soliton (donc sa vitesse) décroît légèrement à cause des effets de dissipation visqueuse. Après environ 4.5 secondes de propagation, le soliton arrive au bout du canal où il est réfléchi par le mur et continue sa propagation en sens inverse. L'interaction avec le batteur après l'aller-retour n'est pas totalement réfléchissante et a tendance à casser le soliton (voir  $t > 9$  s). Le signal  $\eta(x, t)$  du soliton sur un fond plat est représenté sur les figures 6.13 (a), (d), (g), (j) (courbes noires). Nous y observons son déplacement le long du canal en conservant, comme attendu, sa forme. Nous mettons ainsi, en évidence la robustesse du soliton qui peut se déplacer sur une dizaine de mètres (soit plus de 750 fois sa taille) sans grande déformation.

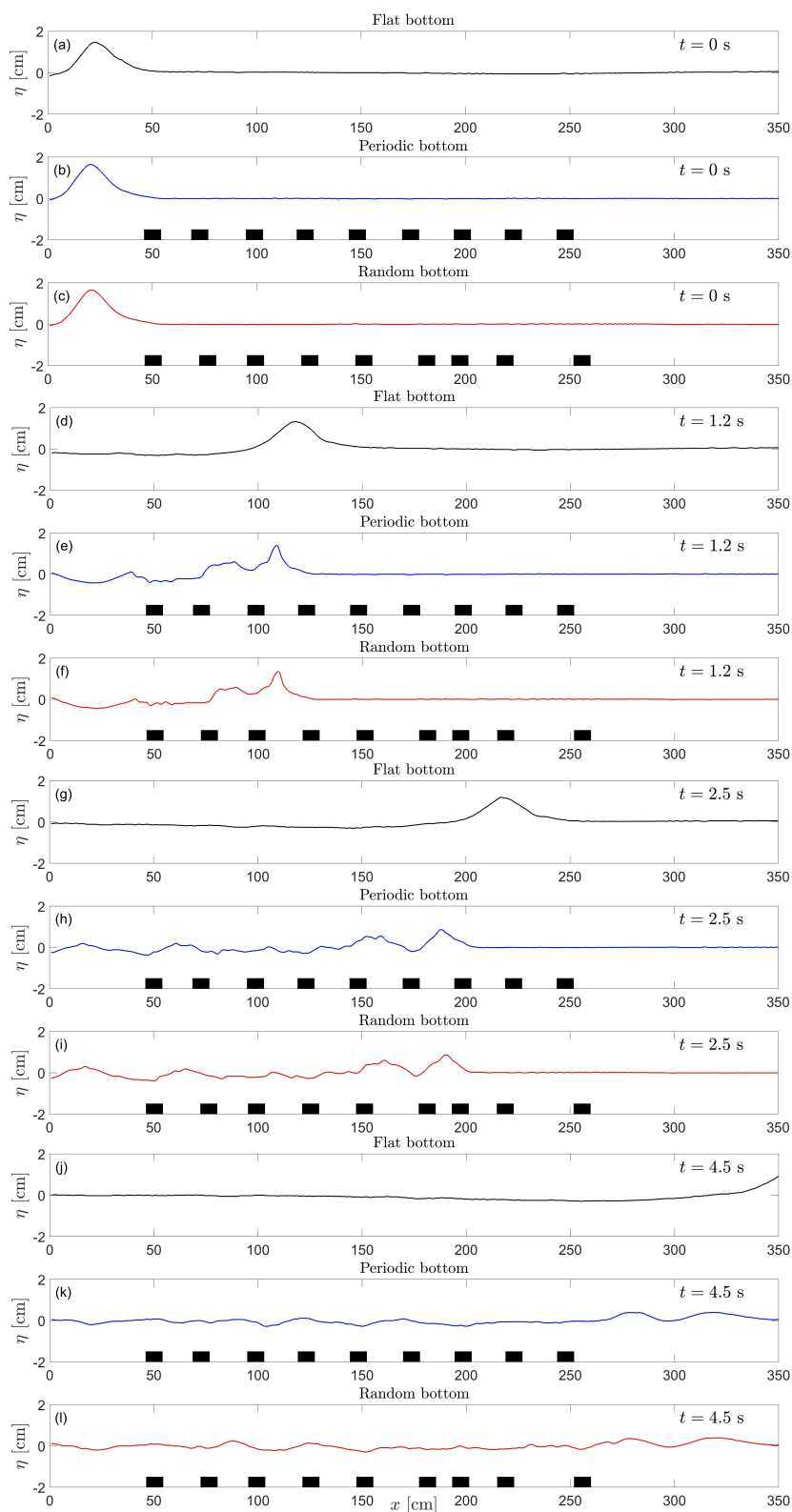


FIGURE 6.13 : Signaux  $\eta(x, t)$  d'un soliton, d'amplitude  $A_0 = 1.4$  cm, évoluant dans le canal pour quatre temps différents, pour un fond plat (noir) [(a), (d), (g), (j)], un fond périodique  $L = 25$  cm (bleu) [(b), (e), (h), (k)] et un fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm (rouge) [(c), (f), (i), (l)]. Les rectangles noirs représentent les positions réelles des barres du fond.



Les cas où le soliton fait face aux réseaux périodique et aléatoire sont représentés sur les figures 6.14 (b) et (c), respectivement. Les signaux spatio-temporels présentent des résultats similaires. En arrivant dans le réseau (matérialisé par des tiret-points blancs horizontaux), le soliton perd une grande partie de son amplitude et donc de sa vitesse, la vitesse du soliton sur fond plat est reporté en pointillés blancs, pour comparaison, et montre bien que le réseau induit un retard important de l'impulsion. A cause des multiples réflexions qui ont lieu à chaque passage d'une barre immergée, les fond périodique et aléatoire ont également pour effet de séparer le soliton en plusieurs plus petits solitons, deux de tailles similaires sont notamment visibles en sortie. Ces deux solitons ont tendance à réaccélérer en sortie du réseau (raidissement du signal après le réseau) à cause d'un retour à une profondeur  $h$  constante.

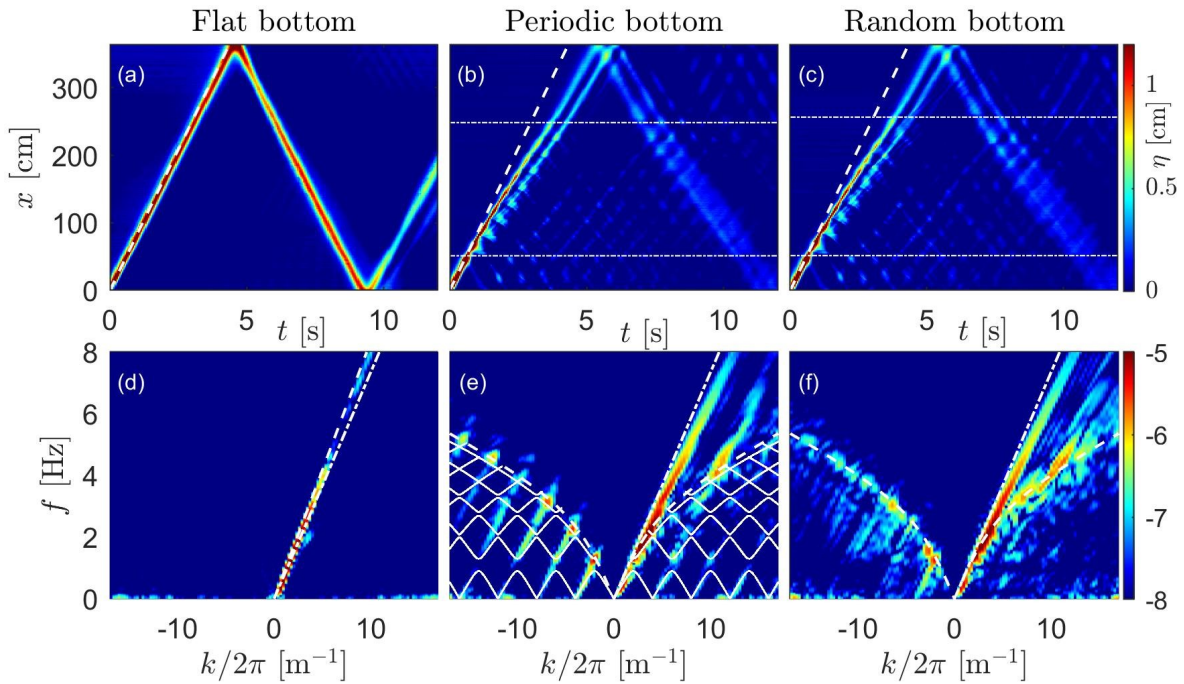


FIGURE 6.14 : Signaux spatio-temporels d'un soliton d'amplitude  $A_0 = 1.4$  cm pour (a) un fond plat, (b) un fond périodique  $L = 25$  cm et (c) un fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm. Trait-points horizontaux blancs : début et fin du réseau. Pointillés blancs : prédiction théorique  $x = ct$ , avec  $c$  donnée par l'équation (6.21). Échelle colorimétrique linéaire. (d), (e) et (f) Spectres spatio-temporels correspondants en considérant seulement l'aller du soliton. (d) Pointillés blancs : prédiction théorique  $\omega = ck$ . (e) et (f) pointillés blancs : loi de dispersion linéaire  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ . (d), (e) et (f) Tiret-points blancs : prédiction de la vitesse de phase sur fond plat  $\omega = c_s k$  avec  $c_s = \sqrt{gh}$ . (e) Traits pleins blancs : loi de dispersion périodique de l'équation (6.16), tracée seulement sous la loi de dispersion par soucis de clarté. Échelle colorimétrique logarithmique.

Les signaux  $\eta(x, t)$  sont représentés sur les figures 6.13 (b), (e), (h), (k) (courbes bleues) pour un fond périodique et (c), (f), (i), (l) (courbes rouges) pour un fond aléatoire. Les rectangles noirs représentent les positions des barres du fond. Les deux cas présentent des résultats similaires. L'onde est déformée fortement par les changements de topographie successifs et laisse derrière elle un grand nombre d'ondes de faible amplitude. A la fin du réseau, deux solitons d'amplitude similaire (environ 0.4 cm) se détache confirmant les observations faites sur les figures 6.14 (b) et (c).

Les spectres spatio-temporels sont ensuite représentés sur les figures 6.14 (d), (e) et (f) et sont réalisés en prenant en compte seulement l'aller du soliton (avant la réflexion du mur). Dans le cas du fond plat (d), l'énergie est, comme attendu, concentrée le long d'une ligne  $\omega \sim k$  de pente  $c$  suivant l'équation (6.21) (pointillés blancs). Cette vitesse est bien supersonique, c'est-à-dire su-

périeure à la vitesse de phase des ondes linéaires  $c_s = \sqrt{gh}$  (trait-points blancs). Dans le cas d'un réseau périodique [figure 6.14 (e)], l'énergie suit là aussi majoritairement une droite, mais de pente inférieure (discuté au paragraphe suivant). Ce ralentissement est dû aux réflexions multiples impliquées par les changements de topographie dans le réseau. Nous pouvons également remarquer que, contrairement au forçage continu (figure 6.8), l'énergie des ondes ne suit pas la prédiction de Bloch de l'équation (6.16) (traits pleins blancs) valable uniquement en régime linéaire et pour des ondes sinusoïdales. Ces différences seront discutées dans le paragraphe suivant. Dans le cas d'un fond aléatoire [figure 6.14 (f)], un soliton similaire au cas périodique se propage et de l'énergie peuple la loi de dispersion linéaire  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$  (pointillés blancs). Des réflexions dues au réseau impliquent aussi la présence d'énergie sous la relation de dispersion linéaire. Il est intéressant de voir que, malgré des signaux de propagation très similaires dans les cas d'un réseau périodique et d'un réseau aléatoire [voir figure 6.14 (b) et (c) et figures 6.13], l'énergie due aux réflexions n'est pas distribuée de la même façon. Le cas aléatoire, par son désordre, entraîne majoritairement l'apparition d'ondes linéaires suivant la loi de dispersion  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ .

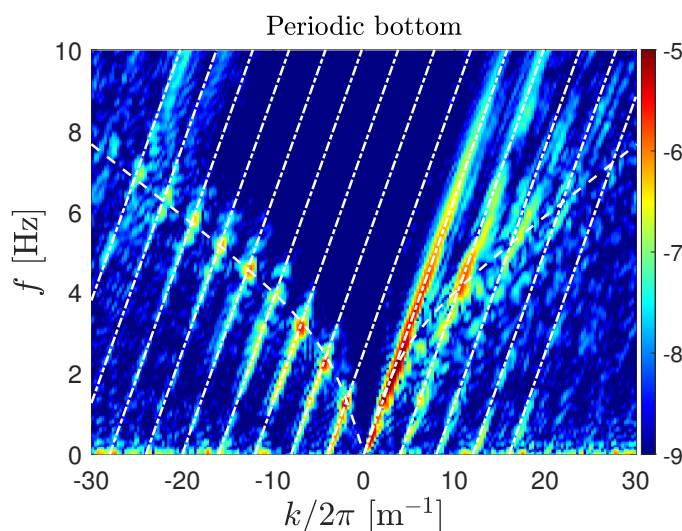


FIGURE 6.15 : Reproduction de la figure 6.14 (e) sur une plus grande fenêtre et une plus grande échelle colorimétrique. Pointillés blancs : loi de dispersion linéaire. Traits-tirets blancs : ajustement  $\omega = c^* k$  tracé à toutes les harmoniques du réseau  $\pm k \pm p(2\pi/L)$  avec  $c^* = \sqrt{gh^*}$  et  $h^* = 4.1$  cm.

Le cas périodique est maintenant discuté plus longuement. La figure 6.14 (e) est représentée de nouveau en 6.15, mais sur une plus grande gamme de  $f$  et  $k$ . Le soliton principal est donc ralenti à cause des changements successifs de la profondeur. Nous estimons alors une profondeur effective  $h^*$  définie en tenant compte des variations de la topographie du réseau, i.e., dans 65% du réseau la profondeur vaut  $h$  (entre les barres) et dans 35% elle vaut  $h_1$  (sur les barres). Il vient alors  $h^* = 0.65h + 0.35h_1 = 4.1$  cm. En moyenne le soliton ressent une profondeur  $h^*$ , le soliton principal est ainsi ajusté par une droite de pente  $\omega = c^* k$  avec  $c^* = \sqrt{gh^*}$  la vitesse effective de l'onde. A chaque période du réseau, nous observons que le soliton se scinde et laisse derrière lui un autre soliton plus petit de même vitesse  $c^*$ , tracés tous les  $k = \pm \frac{2\pi}{L} p$  avec  $p$  un entier. Ce comportement diffère fortement du forçage continu où les ondes réfléchies même, pour un forçage non linéaire, tendent à suivre la relation de dispersion périodique de nombre d'onde de Bloch (6.16) [voir figure 6.8 (c) et (d)]. Notons que toutes les réflexions directes du soliton incident sont visibles ( $k < 0$ ), pour les réflexions secondaires (réflexions vers les  $k > 0$  d'une réflexion directe) seule la première est nettement visible [voir figure 6.14 (e)] et mène à l'apparition des deux solitons observés à la sortie du réseau [voir figure 6.14 (b)]. Les autres réflexions secondaires trop faibles en amplitudes ne sont presque pas observées ici.

### Longueur de localisation

Nous nous intéressons enfin à la longueur de localisation  $\xi$  dans le cas du forçage impulsionnel en reprenant la méthode développée dans la partie 6.4.3. L'amplitude maximale du soliton  $\eta_{max}$  est ainsi reportée le long de  $x$  sur la figure 6.16 (a) dans le cas fond plat (noir), fond périodique (bleu) et fond aléatoire (rouge). Notons que contrairement au cas du forçage continu (figure 6.9) le fond plat peut être utilisé ici pour en déduire, plus rigoureusement, la mesure de la longueur de dissipation  $l_d$  à partir de  $\eta_{max} = \eta_0 e^{-x/l_d}$ , car les modes de ballonnement n'apparaissent pas pour le soliton. Cet ajustement mène à une longueur de dissipation  $l_d \approx 12$  m du même ordre de grandeur que la prédiction théorique de l'équation (6.18), et surtout, supérieure à la longueur du canal  $L_x = 4$  m et aux longueurs de localisation  $\xi$  mesurées pour le forçage continu (voir partie 6.4.1) et pour le forçage impulsionnel [voir figure 6.16 (b)]. Cette observation confirme que la dissipation visqueuse peut être négligée.

Les autres courbes sont ajustées par la fonction  $\eta_{max} = \eta_0 e^{-x/\xi}$  afin d'obtenir la longueur de localisation  $\xi$ . Nous pouvons également observer que chaque période du fond implique une oscillation importante de l'amplitude du soliton incident, jusqu'à 30%. Notons également que les prédictions théoriques sur la décroissance d'un soliton dans un réseau périodique (équation (33) de [172]) n'ajustent pas du tout nos données expérimentales de  $\eta_{max}(x)$ . Des études sont nécessaires afin de quantifier théoriquement l'évolution de l'amplitude d'un soliton dans un réseau périodique ou aléatoire.

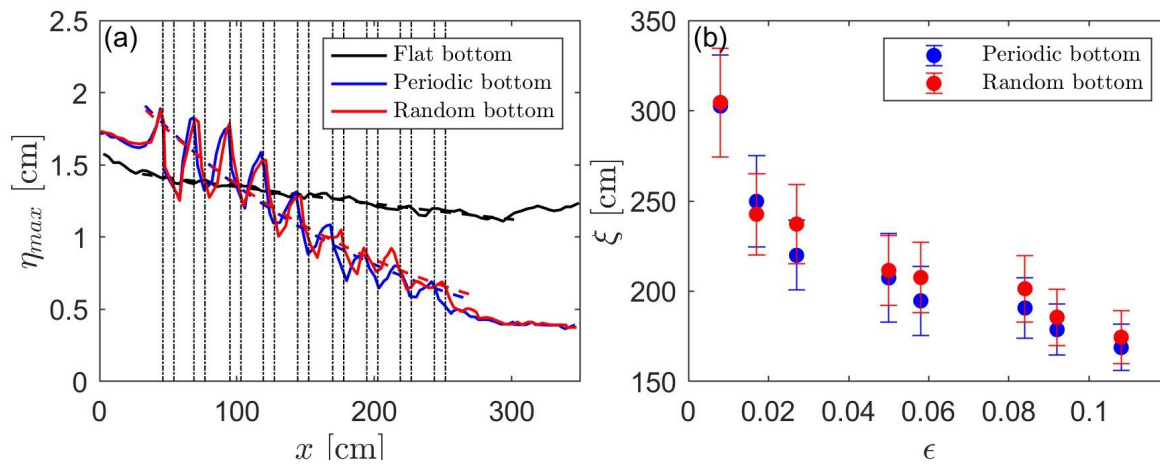


FIGURE 6.16 : (a) Évolution de l'amplitude maximale d'un soliton  $\eta_{max}$  avec  $x$  pour un soliton pour un fond plat (noir), un fond périodique  $L = 25$  cm (bleu) et un fond aléatoire  $L = 25 + \delta$  cm (rouge). Pointillés de couleur : meilleurs ajustements exponentiels  $\eta_{max} = \eta_0 e^{-x/\xi}$ . Pointillés verticaux : position des barres dans le cas périodique. (b) Évolution de la longueur de localisation  $\xi$  avec la cambrure  $\epsilon$  (le paramètre non linéaire) pour les cas périodique (bleu) et aléatoire (rouge). Les barres d'erreur correspondent à l'incertitude sur les ajustements illustrés en (a).

L'évolution de la longueur de localisation est ensuite tracée sur la figure 6.16 (b) en fonction de la cambrure du soliton qui correspond à  $\epsilon \sim \frac{2A_0}{l'}$ , où  $l'$  est la largeur du soliton à sa base. Comme pour le forçage continu, nous observons une diminution de la longueur de localisation  $\xi$  avec la non-linéarité indiquant que la localisation est amplifiée par la non-linéarité. Les valeurs de  $\xi$  sont du même ordre de grandeur que pour le forçage sinusoïdal de la figure 6.11. Néanmoins, malgré la similarité de ces deux résultats, la physique qui y mène est différente. Dans le cas du forçage sinusoïdal, la dissipation des ondes est due à la dispersion de Bloch dans le réseau, tandis que dans le cas du forçage impulsionnel, elle est due à des fissions du soliton à chaque période du réseau. Il n'existe, à notre connaissance, pas de travaux théoriques prédisant l'évolution de la longueur de localisation  $\xi$  avec la non-linéarité  $\epsilon$ , et ce dans les cas du forçage continu ou du

forçage impulsionnel.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats sur la propagation d'ondes de gravité dans un réseau périodique ou aléatoire et le régime de localisation d'ondes par le désordre. Dans un premier temps, nous avons présenté les résultats de la théorie linéaire. Nous avons, ensuite, mis en évidence expérimentalement la validité de la loi de dispersion périodique de nombre d'onde de Bloch, d'équation (6.16) pour la première fois pour des ondes hydrodynamiques. La bande de fréquence interdite ainsi que la longueur de localisation pour un réseau aléatoire ont été trouvés en bon accord avec les prédictions théoriques linéaires. Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets non linéaires sur la localisation des ondes dans le réseau périodique ou aléatoire. Deux types de forçage ont été utilisés, un forçage sinusoïdal de forte amplitude ainsi qu'un forçage impulsionnel. Dans les deux cas, nous avons trouvé que la non-linéarité augmente la localisation d'ondes en amplifiant la décroissance spatiale de leurs amplitudes. Cette augmentation de la localisation avec la non-linéarité est en accord avec les prédictions théoriques [162, 163] et n'avait pas été rapportée, à notre connaissance, expérimentalement pour des ondes de surface hydrodynamiques. Toutefois, les mécanismes menant à cette localisation diffèrent suivant le forçage considéré. Pour un forçage sinusoïdal, le mécanisme de localisation est réminiscent de celui du cas linéaire où la relation de dispersion périodique de Bloch reste valable, malgré la plus forte présence d'énergie dans la bande interdite. En revanche, pour un forçage impulsionnel, le mécanisme est différent. Pour le cas périodique, le soliton incident est fortement ralenti par les changements de topographie du système, à chaque période une partie est réfléchi sous la forme d'un plus petit soliton. Cette différence de physique suivant le type de forçage envisagé est mise en évidence pour la première fois ici dans le cas d'ondes de surface hydrodynamiques.

L'influence des non-linéarités sur les phénomènes de localisation d'ondes mériterait d'être poussée plus loin, d'un point de vue théorique où peu de travaux portent sur les ondes hydrodynamiques. Dans le cas des solitons, nous utiliserons l'IST (Inverse Scattering Transform), un outil mathématique qui permet de quantifier et de caractériser des solitons présents dans un signal donné, pour comprendre le rôle des différentes fissions observées dans le réseau [185]. Il serait également intéressant de voir si l'ensemble des solitons formés par le réseau pourrait s'approcher d'un gaz de soliton [186].



## **Chapitre 7**

# **Conclusions et perspectives**

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la **turbulence d'ondes expérimentale** dans le but de tester les hypothèses de la théorie de la turbulence faible et son domaine de validité. Un régime de turbulence faible a ainsi été mis en évidence pour des ondes capillaires se propageant à la surface d'un fluide peu dissipatif (chapitre 2) [34]. La particularité de notre système est le caractère **unidimensionnel** (1D) de la propagation des ondes qui n'avait jamais été testée auparavant expérimentalement en turbulence d'ondes. Cette unidimensionnalité interdit théoriquement les interactions aux bas ordres non linéaires, mais permet à la turbulence faible d'exister grâce à des interactions à 5-ondes pour la gravité pure [55] ou la capillarité pure. Nous avons ainsi pu observer, pour la première fois expérimentalement, l'existence d'une cascade d'énergie en accord avec les prédictions théoriques de la turbulence faible capillaire 1D. Des outils de corrélation d'ordre élevé (quadricohérences) ont été utilisés pour mettre en évidence expérimentalement la présence de ces interactions résonantes à 5-ondes et les hypothèses principales de la turbulence faible ont été vérifiées expérimentalement. Néanmoins, les prédictions pour le spectre de turbulence d'ondes correspondant s'appuient sur l'analyse dimensionnelle, il serait intéressant de réaliser le calcul analytique du spectre de la turbulence faible capillaire 1D (comme celui réalisé par la turbulence faible gravitaire 1D [55]) pour décrire nos résultats. D'un point de vue technique, avoir une unique dimension de propagation facilite grandement les mesures expérimentales et les calculs numériques. Une telle dimension pourrait être utilisée dans d'autres systèmes de turbulence d'ondes, comme en turbulence d'ondes élastiques [79] ou hydro-élastiques [26].

Dans la suite de la thèse, l'unidimensionnalité a été utilisée pour mettre en évidence une transition entre la turbulence d'ondes dispersives et un **régime non dispersif**. Cette transition constitue un enjeu majeur de la physique car la discussion autour du transfert d'énergie dans un système d'ondes non linéaires non dispersives est encore largement ouverte. La turbulence faible est, en effet, a priori impossible pour un système non dispersif [11]. Néanmoins, sous certaines conditions, le système peut trouver un moyen pour créer de la dispersivité permettant à l'énergie de cascader à travers les échelles par des interactions entre ondes. Dans le cas où la cascade d'énergie est impossible, l'énergie finit par se concentrer dans des structures cohérentes (soliton, ondes de choc...). Expérimentalement, un système non dispersif est difficile à mettre en place. Nous y parvenons ici à l'aide d'ondes à la surface d'un ferrofluide soumis à un fort champ magnétique (chapitre 3) [35]. Le caractère unidimensionnel de notre système ne lui permet pas de trouver un moyen pour redistribuer l'énergie à travers les échelles [187]. De cette impossibilité, émergent aléatoirement des **ondes de choc** qui rayonnent de l'énergie à toutes les échelles en la transportant à travers l'espace. Ces chocs sont qualitativement analogues à ceux prédits par l'équation de Burgers, la seule différence vient de leur front qui n'est pas totalement vertical (contrairement aux ondes de choc de Burgers). La présence de ces structures, fortement non linéaires, empêche la turbulence faible d'exister et implique l'apparition d'un nouveau régime. Ce régime non dispersif est complètement contrôlé par les ondes de choc ; leur géométrie et leur statistique définissent par exemple le spectre d'énergie des ondes mesuré. Un modèle simple, basé sur le spectre de Kuznetsov [66], a été utilisé pour quantifier ce spectre avec succès. La statistique des chocs est aussi bien décrite par l'équation de Burgers 1D forcée aléatoirement. Maintenant que le régime de turbulence d'ondes et celui d'ondes de choc ont été observés, il serait intéressant de regarder comment transit-on de l'un à l'autre, une coexistence de ces deux régimes pourrait apparaître. L'équation de Burgers ayant des applications dans de nombreux domaines de la physique, de la matière condensée à la cosmologie [188], il serait primordial de savoir jusqu'à quel point notre système expérimental peut être décrit par cette équation.

Dans le chapitre 4, nous étudions numériquement la **turbulence d'ondes anisotrope** dans un système analogue au système non dispersif du chapitre 3 [36]. La seule différence est la possibilité pour les ondes de se propager dans deux dimensions d'espace. Le champ magnétique étant appliqué dans une unique direction, la loi de dispersion devient **anisotrope**. Les ondes sont donc

non dispersives (magnétiques) dans la direction du champ et dispersives (capillaires) dans la direction perpendiculaire. Dans cette configuration, nous avons montré l'émergence d'un champ d'ondes anisotropes, les ondes dans le sens du champ sont détruites par la pression exercée par le très fort champ magnétique (non atteignable expérimentalement). L'énergie cascade alors entre les échelles uniquement perpendiculairement au champ. Ce système constitue une analogie qualitative et quantitative avec la turbulence d'ondes anisotropes des ondes d'Alfvén dans les plasmas [37]. Cette analogie met en évidence l'universalité de la turbulence d'ondes qui s'applique de la même manière aux ondes de surface hydrodynamiques qu'aux ondes d'Alfvén, et ce, malgré des physiques très différentes. Avec les ferrofluides actuels, l'observation expérimentale de ce phénomène semble inatteignable, mais il se pourrait que dans le futur de nouveaux ferrofluides moins visqueux et de plus grande susceptibilité magnétique voient le jour. Nous avons ainsi étudié deux systèmes d'ondes de surface non dispersives. Le premier (chapitre 3) a abouti à l'apparition d'ondes de choc qui contrôlent la dynamique, tandis que dans le second (chapitre 4) des effets d'anisotropie apparaissent permettant à une cascade de turbulence d'ondes d'avoir lieu. Cette dualité montre la complexité des systèmes d'ondes non dispersives, la prédiction théorique sur l'apparition de structures cohérentes ou d'une cascade d'énergie dans ces systèmes est encore largement ouverte.

Afin de mieux comprendre la statistique des petites échelles, l'**intermittence** de la turbulence d'ondes capillaires 1D du chapitre 2 et du régime d'ondes de choc du chapitre 3, ont été étudiées dans le chapitre 5. La turbulence faible ne prévoit pas d'intermittence. Néanmoins, dans le régime de turbulence d'ondes capillaires 1D, nous avons observé quelques rares structures cohérentes sous la forme d'ondes capillaires qui surfent sur des plus longues ondes. Leur quantité reste cependant insuffisante pour influencer les fonctions de structure caractérisant l'intermittence. Nous avons alors pu montrer, pour la première fois, un bon accord entre les expériences et les prédictions théoriques des exposants des fonctions de structure de la turbulence faible [39]. Cependant, la forte incertitude sur les statistiques d'ordre élevé rendent difficile de conclure avec précision sur l'absence d'intermittence dans notre système.

Pour le régime d'ondes de choc, les résultats sur l'intermittence sont très différents. Des études de l'équation de Burgers ont montré que les chocs sont responsables d'une très forte intermittence à petite échelle qui tend à faire saturer les exposants des fonctions de structures [132, 134]. Ce régime très **intermittent**, dit de **Burgers**, n'avait jamais été observé expérimentalement à notre connaissance. Nous avons montré qu'il décrit bien nos résultats expérimentaux sous réserve de quelques modifications dues à la cambrure finie des ondes de choc (non-verticalité du front des chocs). Les modifications que nous avons apportées au modèle d'intermittence de Burgers étant phénoménologiques, des travaux analytiques, partant des équations générales du problème, permettraient de valider ou d'améliorer le modèle d'intermittence proposé. Nos résultats pourraient être appliqués à d'autres systèmes de turbulence. En effet, mieux comprendre le rôle des structures cohérentes dans la formation du spectre d'énergie et de l'intermittence est crucial, notamment en turbulence hydrodynamique 3D [31]. Comme l'intermittence  $y$  est associée à des singularités de l'écoulement turbulent, des filaments de vortex, bien que plus complexes, pourraient jouer le rôle des ondes de choc.

La dispersivité des ondes, qui constitue une hypothèse de la turbulence faible [11] a ainsi pu être testée. La transition, que nous avons observée, vers un système non dispersif, a mis en évidence la brisure de la turbulence faible au détriment de nouveaux régimes (ondes de choc et anisotropie). Il est primordial de continuer à tester les hypothèses de la turbulence faible afin de quantifier dans quelle mesure cette théorie peut être ou non applicable et de connaître son domaine de validité. Comme il a été précisé dans la partie 1.2.2, la turbulence faible suppose un système de taille infinie. Cette hypothèse ne peut, par exemple, pas être rigoureusement reproduite en laboratoire pour des ondes de gravité. Il devient alors intéressant de regarder dans quelle



mesure les effets de bords impactent la turbulence d'ondes. Réduire une dimension d'un bassin 2D a été réalisé pour des ondes gravito-capillaires et a montré l'émergence de turbulence d'ondes discrètes [20]. Cette étude des effets de bords pourrait être reproduite à une dimension de propagation afin de voir si, pour des petites tailles de canal, l'énergie peut continuer de cascader ou si elle s'accumule dans des structures cohérentes. Le canal 1D, décrit dans le chapitre 6, sera utilisé prochainement dans ce but en changeant sa longueur à l'aide d'un mur vertical réfléchissant mobile.

Enfin, dans le chapitre 6, une étude expérimentale sur la **localisation d'Anderson d'ondes de surface hydrodynamiques** a été présentée. Ce phénomène, provenant de l'interférence entre ondes multiples diffusées, est largement étudié en mécanique du solide [33] mais n'a été que très peu abordé expérimentalement pour les ondes de surface hydrodynamiques [158, 159]. Nous avons utilisé un réseau d'obstacles périodiques ou aléatoires dans des régimes d'ondes linéaires et non linéaires. Nous avons dans un premier temps, montré l'existence d'une bande de fréquence interdite, i.e., certaines fréquences s'atténuent très fortement dans le réseau périodique. La longueur de localisation caractérise cette atténuation et a été mesurée dans le cas du réseau périodique et du réseau aléatoire en accord avec les prédictions théoriques linéaires. Ce résultat a été donné avec une bien meilleure précision que la seule étude précédente de la fin des années 80 [158, 159] du fait de l'accès, rendu possible par une amélioration de la technologie, à une mesure spatio-temporelle de grande résolution. La relation de dispersion périodique a pu, pour la première fois, être observée expérimentalement. La plupart des prédictions théoriques supposent des ondes incidentes linéaires, augmenter la non-linéarité des ondes implique donc l'apparition de nouveaux phénomènes. Nous avons observé expérimentalement, que la non-linéarité a pour effet d'augmenter la localisation d'Anderson quelle que soit la fréquence de l'onde incidente, en accord avec travaux expérimentaux en acoustique [144]. Cela lève le voile sur le désaccord entre différentes prédictions théoriques prédisant soit une amplification [165, 166] soit une atténuation [168-170] de la localisation d'Anderson avec la non-linéarité.

Dans le cas d'un forçage impulsionnel au lieu d'un forçage sinusoïdal, nous avons observé des résultats analogues sur la longueur de localisation, bien que la physique soit différente. Pour le forçage continue, même de forte amplitude (ondes non linéaires), nous avons montré que la localisation s'explique principalement par la théorie linéaire des ondes qui se diffusent sur chaque obstacle du milieu périodique. Pour le forçage impulsionnel, nous avons montré que la localisation d'ondes provient de la fission de l'impulsion solitonique, qui se divise en plusieurs solitons de plus faibles amplitudes, au sein du réseau périodique. Cette différence de physique suivant le type de forçage des ondes (sinusoïdal ou impulsionnel) est mise en évidence pour la première fois ici. L'étude de l'impact des non-linéarités sur les effets de localisation doit être poursuivie. Le cas des solitons pourrait, en effet, être approfondi afin de comprendre quantitativement le rôle des différentes fissions observées dans le réseau. Nous utiliserons pour cela l'IST (Inverse Scattering Transform), un outil mathématique qui permet de quantifier et de caractériser des solitons présents dans un signal donné [185]. Nous tenterons aussi de voir prochainement si l'ensemble des solitons formés par le réseau pourrait s'approcher d'un gaz de soliton [186].

## **Annexe A**

# **Prédictions dimensionnelles de la turbulence faible**

## Dimensional predictions from weak turbulence

Dans cette annexe, nous présentons les principaux résultats de l'analyse dimensionnelle de la théorie de la turbulence faible. Ces résultats sont donnés dans le cas général et en utilisant les exemples des ondes de gravité et de capillarité. Nous présentons notamment les spectres des ondes ainsi que différents régimes pouvant apparaître lors de la brisure de la turbulence faible, ces résultats n'avaient, à notre connaissance, jamais été explicités sous cette forme. Cette annexe s'appuie sur les prédictions de [1–3].

### I. DEFINITION

A wave is defined by its dispersion relation given by:

$$\omega = \lambda k^\alpha. \quad (1)$$

We are then interested in:

$$\langle \eta(x, y, t)^2 \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S \eta(x, y, t)^2 dx dy = \int_k S_\eta(k) dk, \quad (2)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \langle \eta(x, y, t)^2 \rangle_T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(x, y, t)^2 dt = \int_\omega S_\eta(\omega) d\omega, \quad (3)$$

where  $S$  is the surface of the system,  $T$  the duration of the measurement supposed infinite.  $S_\eta(k)$  and  $S_\eta(\omega)$  are the spatial and temporal power spectral density of the wave height.

We choose  $d$  to be the physical dimension of the energy of the wave and  $D$  the dimension of the wave-vector space.  $d$  is defined by the type of the wave studied for example: for surface waves  $d = 2$ , for acoustic waves  $d = 3$ , for waves along a string  $d = 1$ . Whereas  $D$  is defined by the number of dimensions of propagation [1–3].

### II. DIMENSIONS

We have [1]

$$[S_\eta(k)] = L^{5-d}, \quad (4)$$

Using the fact that  $S_\eta(k) = 2\pi k^{D-1} S_\eta(\mathbf{k})$  we get:

$$[S_\eta(\mathbf{k})] = L^{4-d+D}. \quad (5)$$

Knowing  $S_\eta(k) dk = S_\eta(\omega) d\omega$ , we have:

$$[S_\eta(\omega)] = T L^{4-d}. \quad (6)$$

Using these formula and the definition (3), we have:

- For  $d = 2$ ,  $D = 2$

$$\begin{aligned} [S_\eta(k)] &= L^3, \\ [S_\eta(\mathbf{k})] &= L^4, \end{aligned} \quad (7)$$

which is in agreement with:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \eta(x, y, t)^2 dx dy &= \int_k S_\eta(k_x, k_y) d\|k\|, \\ \frac{1}{S} \int_S \eta(x, y, t)^2 dx dy &= \int_k S_\eta(\mathbf{k}) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (8)$$

- For  $d = 2, D = 1$

$$\begin{aligned} [S_\eta(k)] &= L^3, \\ [S_\eta(\mathbf{k})] &= L^3, \end{aligned} \tag{9}$$

which is in agreement with:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_L \eta(x, y^*, t)^2 dx &= \int_k S_\eta(k_x, 0) dk_x, \\ \frac{1}{L} \int_L \eta(x, y^*, t)^2 dx &= \int_k S_\eta(\mathbf{k}) dk_x. \end{aligned} \tag{10}$$

- For  $d = 1, D = 1$

$$\begin{aligned} [S_\eta(k)] &= L^4, \\ [S_\eta(\mathbf{k})] &= L^4. \end{aligned} \tag{11}$$

Which is not in agreement with

$$\frac{1}{L} \int_L \eta(x, t)^2 dx = \int_k S_\eta(k) dk_x, \tag{12}$$

which would give  $[S_\eta(k)] = L^3$ . The reason of this difference is that wave turbulence supposes an isotropic wave field (which is not true when  $d = 1$ ). It implies that  $S_\eta$  was always considered to be in two dimensions. So when  $d = D = 1$  we have  $[S_\eta(k)^{1D}] = L^3$  and  $[S_\eta(k_x, 0)^{2D}] = [S_\eta(k)] = L^4$ . This difference is discussed in Nazarenko's book [2] in section 3.1.3.8.

We also need to use  $P$  the energy flux, per unit of surface, given by  $[P] = L^{5-d}T^{-3}$

### III. ENERGY SPECTRA

It is possible to get the general formula of  $S_\eta$  [1]:

$$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{N-1}} \lambda^X k^Y, \tag{13}$$

$$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{N-1}} \lambda^X k^{Y-D+1}, \tag{14}$$

$$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{N-1}} \lambda^{X-1-\frac{Y-\alpha+1}{\alpha}} \omega^{\frac{Y+1}{\alpha}-1}, \tag{15}$$

with

$$\begin{aligned} X &= \frac{N-4}{N-1} - 1, \\ Y &= d - 5 + \frac{5 - 3\alpha - d}{N-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

We have then:

- For  $d = 2, D = 2$ :

Gravity $N = 4$	$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{3}} g \omega^{-4}$	$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{3}} g^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{5}{2}}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{3}} g^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{7}{2}}$
Capillarity $N = 3$	$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{1}{6}} \omega^{-\frac{17}{6}}$	$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{3}{4}} k^{-\frac{15}{4}}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{3}{4}} k^{-\frac{19}{4}}$

- For  $d = 2, D = 1$ :

Gravity $N = 5$	$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{4}} \omega^{-\frac{17}{4}}$	$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{3}{8}} k^{-\frac{21}{8}}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{3}{8}} k^{-\frac{21}{8}}$
Capillarity $N = 3$	$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{1}{6}} \omega^{-\frac{17}{6}}$	$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{3}{4}} k^{-\frac{15}{4}}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{3}{4}} k^{-\frac{15}{4}}$
Capillarity $N = 4$	$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{8}{3}}$	$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{7}{2}}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{7}{2}}$
Capillarity $N = 5$	$S_\eta(\omega) \sim P^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{5}{12}} \omega^{-\frac{31}{12}}$	$S_\eta(k) \sim P^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{3}{8}} k^{-\frac{27}{8}}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim P^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-\frac{3}{8}} k^{-\frac{27}{8}}$

#### IV. OTHERS VARIABLES

It is also interesting to know the definition of another variable used in literature [1–4], the spectral energy density  $E_k$  linked to the spectral wavelength density  $S_\eta(k)$  as:

$$E_k = \lambda^2 k^{2\alpha-1} S_\eta(k). \quad (17)$$

This energy is linked to the wave action  $n_k$  as :

$$\begin{aligned} E_k &\sim \omega_k n_k, \\ E_{\mathbf{k}} &\sim \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} k^{1-D}. \end{aligned} \quad (18)$$

#### V. NONLINEAR TIMESCALES

We focus here on the value of the nonlinear time  $\tau_{nl}$  in order to check the assumption :

$$\tau_l(f) \ll \tau_{nl}(f) \ll \tau_{diss}(f). \quad (19)$$

This nonlinear time is given by [1] :

$$\begin{aligned} \tau_{nl} &\sim P^{-\frac{N-2}{N-1}} \lambda^{\frac{(5-d)(N-2)}{\alpha(N-1)}} \omega^{-1-\frac{N-2}{N-1}[\frac{5-d}{\alpha}-3]}, \\ \tau_{nl} &\sim P^{-\frac{N-2}{N-1}} \lambda^{-1+3\frac{N-2}{N-1}} k^{-\alpha-\frac{N-2}{N-1}(5-d-3\alpha)}. \end{aligned} \quad (20)$$

By analogy with what is done previously for  $S_\eta$ , we can get the following results for  $d = 2$  ( $\tau_{nl}$  does not depend of  $D$ ):

Gravity $N = 4$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{2}{3}} g^2 \omega^{-3}$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{3}{2}}$
Gravity $N = 5$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{3}{4}} g^{\frac{9}{4}} \omega^{-\frac{13}{4}}$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{3}{4}} g^{\frac{5}{8}} k^{-\frac{13}{8}}$
Capillarity $N = 3$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{1}{2}}$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{3}{4}}$
Capillarity $N = 4$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}}$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}}$
Capillarity $N = 5$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{3}{4}} \omega^{-\frac{1}{4}}$	$\tau_{nl} \sim P^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{5}{8}} k^{-\frac{3}{8}}$

## VI. PHILLIPS SPECTRA

Weak turbulence is not valid if equation 19 is not respected. When  $\tau_{nl} < \tau_l$ , it exists a critical interval  $[k_g^{Ph}, k_c^{Ph}]$  (respectively  $[\omega_g^{Ph}, \omega_c^{Ph}]$ ) where the Phillips spectrum appears [2]. Note that the name "Phillips spectrum" is usually only valid for gravity waves, the term is here extended to capillary waves for the sake of clarity. The critical values are obtained when  $\frac{\tau_l}{\tau_{nl}} = 1$ :

$$\begin{aligned} k^{Ph} &= P^{-\frac{1}{5-d-3\alpha}} \lambda^{\frac{3}{5-d-3\alpha}}, \\ \omega^{Ph} &= P^{-\frac{\alpha}{5-d-3\alpha}} \lambda^{\frac{5-d}{5-d-3\alpha}}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_c &\sim \lambda^{\frac{(5-d)}{\alpha}} \omega^{-[\frac{5-d}{\alpha}-3]}, \\ P_c &\sim \lambda^3 k^{-(5-d-3\alpha)}, \end{aligned} \quad (22)$$

which does not depend of  $N$ . The values for the two different regimes are:

Gravity	$P_c \sim g^3 \omega^{-3}$	$P_c \sim g^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{3}{2}}$
Capillarity	$P_c \sim \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^1 \omega^1$	$P_c \sim \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{3}{2}}$

which gives for gravity and capillarity:

$$\begin{aligned} k_g^{Ph} &= P^{-\frac{2}{3}} g, \quad k_c^{Ph} = P^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-1}, \\ \omega_g^{Ph} &= P^{-\frac{1}{3}} g, \quad \omega_c^{Ph} = P^1 \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

The Phillips spectrum appears when  $k_g^{Ph} < k_c^{Ph}$  that is to say when  $P > P_c$  with:

$$P_c = \left(g \frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{3}{4}}. \quad (24)$$

Note that these results are obtained assuming, on one hand, pure gravity and on the other, pure capillarity. Considering both regimes at the same time implies a bigger value for  $P_c$  and a slight change in  $[k_g^{Ph}, k_c^{Ph}]$  (respectively  $[\omega_g^{Ph}, \omega_c^{Ph}]$ ) not calculable analytically.

The Phillips spectrum can be obtained assuming that  $S_\eta$  does not depend on  $P$  anymore, it can also be obtained using the formula 13 with  $N \rightarrow \infty$ . This gives:

$$\begin{aligned} S_\eta^{Ph}(\omega) &\sim \lambda^{\frac{-d+4}{\alpha}} \omega^{\frac{d-4}{\alpha}-1}, \\ S_\eta^{Ph}(k) &\sim k^{d-5}, \\ S_\eta^{Ph}(\mathbf{k}) &\sim k^{d-4-D}. \end{aligned} \quad (25)$$

leading for  $d = 2$  and  $D = 1$  to:

Gravity	$S_\eta(\omega) \sim g^2 \omega^{-5}$	$S_\eta(k) \sim k^{-3}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim k^{-3}$
Capillarity	$S_\eta(\omega) \sim \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{7}{3}}$	$S_\eta(k) \sim k^{-3}$	$S_\eta(\mathbf{k}) \sim k^{-3}$

## VII. FINITE-SIZE EFFECTS

An important weak turbulence assumption is the infinite system approximation. To quantify finite-size effects, we use another timescale  $\tau_{disc}$  defined as:

$$\begin{aligned}\tau_{disc} &= \left( \frac{\partial\omega}{\partial k} \Delta k \right)^{-1} \\ &= \frac{L}{\pi} \left[ \frac{2\sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3}}{g + \frac{3\gamma}{\rho}k^2} \right] \\ &= \frac{2L}{\pi} \sqrt{\frac{k}{g}} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{k_{gc}}\right)^2}}{1 + 3\left(\frac{k}{k_{gc}}\right)^2}\end{aligned}\quad (26)$$

with  $k_{gc} = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$  the crossover gravity-capillarity wave number. Using only pure regimes allows to get even simpler formula for  $\tau_{disc}$ :

$$\begin{aligned}\text{Gravity: } \tau_{disc}^g &= \frac{2L\omega}{\pi g}, \\ \text{Capillarity: } \tau_{disc}^c &= \frac{2L}{3\pi} \left( \frac{\rho}{\omega\gamma} \right)^{\frac{1}{3}},\end{aligned}\quad (27)$$

The critical frequency  $f_{froz}$  appears when:

$$\tau_{nl}(f_{froz}) = 2\tau_{disc}(f_{froz}). \quad (28)$$

If  $f < f_{froz}$  it means that discreteness is not negligible, in that case finite-size effects impact the system and a power-law cascade of energy is not reachable, we talk about discrete turbulence. Note that a regime of frozen turbulence should also appear when  $f \sim f_{froz}$  [2]. But if  $f > f_{froz}$ , discreteness is negligible and the approximation of infinite system is respected.  $f_{froz}$  can only be calculated in pure regimes:

$$\text{Gravity: } \omega_{froz}^g = P^{-\frac{3}{17}} g^{\frac{13}{17}} \left( \frac{\pi}{4L} \right)^{\frac{4}{17}}. \quad (29)$$

Note that, for capillarity, there is no critical frequency since both the nonlinear time and the discreteness time evolves in  $\omega^{-1/3}$ . In this case, the infinite system approximation is always verified as soon as  $P > P_{froz} = \left( \frac{3\pi\gamma}{4L\rho} \right)^{3/2}$ .

## REFERENCES

1. Connaughton, C., Nazarenko, S. & Newell, A. C. Dimensional analysis and weak turbulence. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **184**, 86–97 (2003).
2. Nazarenko, S. *Wave turbulence* (Springer Science & Business Media, 2011).
3. Newell, A. C. & Rumpf, B. Wave turbulence. *Annual review of fluid mechanics* **43**, 59–78 (2011).
4. Dyachenko, A., Lvov, Y. & Zakharov, V. E. Five-wave interaction on the surface of deep fluid. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **87**, 233–261 (1995).

## Annexe B

# Participation à des expériences sur des grands instruments

### B.1 Expériences en grands bassins

Au cours de cette thèse, j'ai participé, dans le cadre du financement de l'ANR SOGOOD (2022-2026), à une collaboration impliquant des opticiens (Université de Lille) et des physiciens des fluides (École Centrale Nantes, Université Grenoble Alpes, Université Paris Cité). Cette collaboration a notamment mené à deux campagnes de mesure dans des grands bassins différents ainsi qu'à deux réunions de discussions à Lille et à Paris. Les résultats de ces campagnes sont encore en cours d'analyses par les équipes du LEGI à Grenoble et du PHLAM à Lille.

#### B.1.1 Propagation de soliton hydrodynamique bidimensionnel (2D)

En février 2022, j'ai participé à une campagne de mesure d'une semaine sur la génération de solitons bidimensionnels (2D) et la transition entre turbulence d'ondes et un possible gaz de solitons à 2D. Les mesures ont été réalisées dans le bassin LHF 2D de dimensions 27 x 30 m et de profondeur d'eau 35 cm géré par l'entreprise Artelia à Grenoble (voir figure B.1). D'un côté 60 batteurs, contrôlables indépendamment les uns des autres, sont positionnés, les trois autres côtés du bassin sont des murs réfléchissants. Les mesures de l'élévation de la surface se font à l'aide de 23 sondes capacitives et un vectrino, positionnés dans la largeur et dans la longueur du bassin. Une mesure spatio-temporelle est également possible sur une partie du bassin (environ 10x10 m) en utilisant la reconstruction stéréoscopique (stéréo-PIV), deux caméras filment la surface rendue blanche par la présence de particule à la surface (voir figure B.1).

Dans un tel bassin, il a notamment été possible de générer des solitons 2D. Le bassin étant de taille finie, de complexes réflexions ont lieu le long des murs avec l'apparition d'ondes de Mach [50, 189, 190]. Il a également été possible de montrer une transition entre un régime dispersif et un non dispersif. Pour cela, un forçage de type Jonswap (utilisé comme analogie d'un forçage aléatoire dans une bande de fréquence) a été appliqué. La loi de dispersion des ondes de gravité dépend du produit  $kh$ , donc de la fréquence imposée (voir équation (1.11)) :

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{gk} & \text{si } kh \gg 1, \\ \omega &= \sqrt{ghk} & \text{si } kh \ll 1.\end{aligned}\tag{B.1}$$



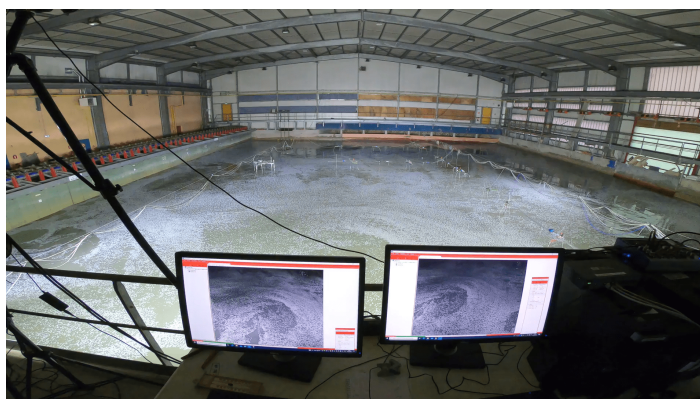


FIGURE B.1 : Photographie du bassin utilisé dans les expériences de génération de soliton 2D et de transition vers la turbulence d'ondes, les 60 batteurs se trouvent à gauche. Photographie réalisée par Thibault Lедуque et Nicolas Mordant.

Nous avons alors une transition entre un système dispersif en eau profonde ( $\tan(kh) \sim 1$ ), accessible à haute fréquence de forçage, et un système non dispersif en eau peu profonde ( $\tan(kh) \sim kh$ ), accessible à basse fréquence de forçage. Les spectres de l'élévation de surface correspondants à ces deux cas sont représentés sur la figure B.2. Dans le cas dispersif (forçage à haute fréquence  $f \sim 0.8$  Hz,  $\lambda \sim 1.9$  m, courbe bleue), une décroissance du spectre en loi de puissance de l'échelle, caractéristique de la turbulence d'ondes de gravité expérimentale, apparaît [21]. Au contraire, dans le cas non dispersif (forçage à basse fréquence  $f \sim 0.2$  Hz,  $\lambda \sim 9.2$  m, courbe rouge), le spectre décroît exponentiellement à cause de la dissipation visqueuse de solitons formés à ces échelles de forçage. Ces résultats, bien que préliminaires, montrent l'existence d'une transition entre turbulence d'ondes dispersives vers un ensemble de solitons, analogue à ce qui a été observé dans un bassin de plus petite taille [87] et dans un canal 1D [191]. Il est intéressant de souligner, que, comme l'étude présentée dans le chapitre 3, la transition vers un régime non dispersif implique l'apparition de structures cohérentes (ondes de choc pour nous et solitons ici) [35].

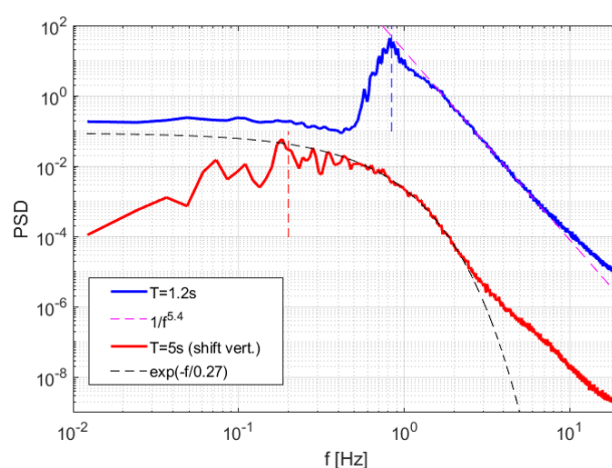


FIGURE B.2 : Densité spectrale de puissance des ondes dans le cas d'un forçage Jonswap en eau profonde (courbe bleue) et en eau peu profonde (courbe rouge). Figure réalisée par Thibault Lедуque et Nicolas Mordant.

### B.1.2 Interaction de gaz de solitons et turbulence intégrable

En février 2023, j'ai participé à une campagne de mesure sur l'interaction de gaz de solitons dans le canal de traction du LHEEA de l'Ecole Centrale de Nantes. Ce canal possède une longueur de 148 m, une largeur de 5 m et une profondeur d'eau de 3 m (voir figure B.3). D'un côté est positionné un unique batteur qui peut être entièrement contrôlé en amplitude et en fréquence et à l'autre extrémité est positionnée une plage pour amortir les ondes incidentes et empêcher une éventuelle réflexion. Les mesures se font à partir de 20 sondes résistives placées tous les 6 mètres le long du canal et qui mesurent les variations d'élévation de la surface  $\eta(t)$ . L'objectif du projet porte sur la génération de gaz de solitons ainsi que ses interactions (interactions entre un soliton et un gaz, entre plusieurs gaz...) dans le cadre de la théorie de la turbulence intégrable, c'est-à-dire les états théoriques stationnaires, hors équilibres, issus de la dynamique d'une condition initiale aléatoire au sein d'une équation intégrable (Korteweg-de Vries, Schrödinger non linéaire, Sine-Gordon...). Un gaz de solitons correspond à un ensemble de solitons de taille et de vitesse différentes qui se propagent dans un milieu supposé décrit par une équation intégrable (ici, Schrödinger non linéaire). Un tel objet a été largement étudié théoriquement et a été observé en optique non linéaire ainsi qu'à la surface du canal de Nantes [186], ce dernier ayant aussi permis l'observation de solitons Peregrine au sein d'un ensemble aléatoire [192, 193]. Le grand avantage d'un tel gaz est qu'il peut être synthétisé et étudié par l'IST (inverse scattering transform) [185]. Cet outil mathématique (non détaillé ici) permet, en effet, en choisissant à l'avance la composition du gaz (nombre, vitesse et amplitude des solitons) de synthétiser le signal à envoyer au batteur [194]. Il est alors possible de le faire interagir à un autre gaz de solitons et d'observer leur évolution au cours du temps. La campagne de février 2023 a ainsi permis de collecter un grand nombre de données quant à l'interaction entre deux gaz afin d'observer et de caractériser leurs interactions [195].

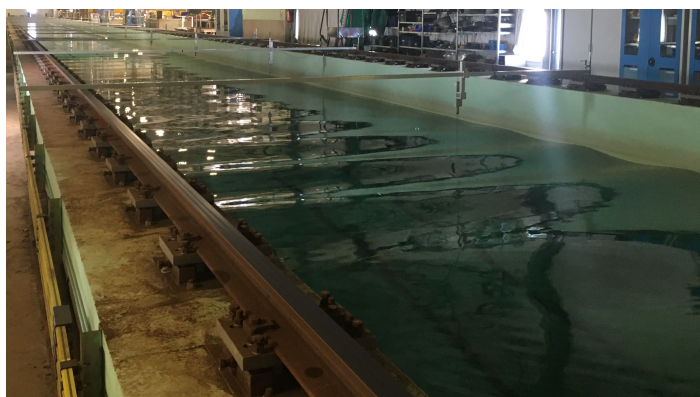


FIGURE B.3 : Photographie du canal de 148 m de long de l'Ecole Centrale de Nantes utilisé dans les expériences d'interaction de gaz de solitons.

## B.2 Étude du comportement de milieux granulaires en impesanteur

J'ai également travaillé sur le projet VIPGran (Vibration Induced Phenomena in Granular matter), une collaboration internationale impliquant 18 scientifiques et 16 laboratoires différents financée par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) qui a pour but d'étudier les milieux granulaires en micro-gravité (voir [spacegrains.org](http://spacegrains.org)) dans des vols paraboliques (2015-2022) ou au sein de la station spatiale internationale (lancement fin 2024). Le comportement de la matière granulaire a, en effet, largement été étudié sur Terre en présence de gravité, mais son comportement en l'absence de celle-ci est encore un problème largement ouvert. Ce projet s'appuie sur l'utilisation d'un instrument automatisé, versatile qui contient une cellule 2D ou 3D remplie de grains pour répondre à diverses questions ouvertes en lien avec le gaz granulaire, la convection, l'acoustique et le transport de grains en basse gravité [196]. Le milieu granulaire est excité par l'intermédiaire de parois de la cellule forcées par un signal donné et est instrumenté par différents capteurs et deux caméras pour visualiser les plans vertical et horizontal de la cellule. Il est également possible d'ajouter des grains dans la cellule au fur et à mesure à l'aide d'un carrousel afin de faire varier la fraction volumique du milieu (jusqu'à 60%). Tout cet ensemble est placé dans un milieu de micro-gravité. Un tel milieu est atteint grâce à la réalisation de vols paraboliques effectués dans l'avion Zéro g de l'entreprise Novespace (Mérignac). Ces vols correspondent à une série de 31 paraboles effectuée par l'avion. A chaque parabole, la manœuvre de l'avion donne accès à 22 secondes de micro-gravité où l'accélération de pesanteur vaut environ  $\pm 0.05g$ . La représentation d'un vol ainsi que le montage expérimental sont représentés sur la figure B.4.

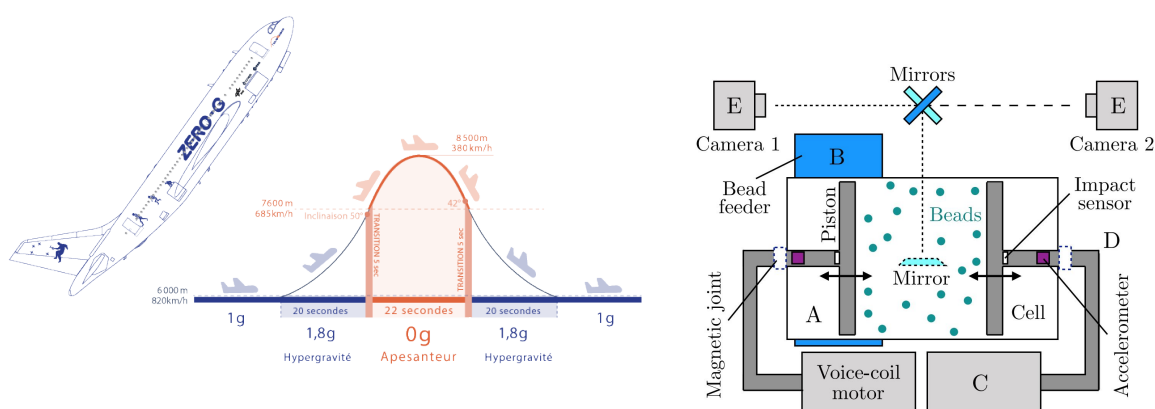


FIGURE B.4 : A gauche : représentation d'un vol parodique, image fournie par Novespace. A droite : schéma du système expérimental utilisé par VIPGran, figure tirée de [196].

J'ai participé à trois vols dans deux campagnes différentes (en novembre 2020 à Paderborn en Allemagne et en avril 2021 à Mérignac) qui ont notamment permis de confirmer les résultats sur l'origine de la transition d'un régime gazeux vers un régime d'amas de particules, lorsque leur nombre augmente [197, 198]. La phase gazeuse, généralement atteinte à des faibles densités, correspond à une répartition homogène des grains dans l'espace, au contraire, la phase solide correspond à un agrégat des grains qui peut être au centre de la cellule ou rebondir proche des murs oscillants. Le diagramme de phase résumant ces transitions est représenté sur la figure B.5. Il a également été possible d'obtenir des données complémentaires sur l'effet de la forme et de la géométrie (rapport d'aspect) des grains (sphères ou bâtonnets). Ces vols paraboliques ne sont que la partie préliminaire du projet global, l'expérience VIPGran sera envoyée dans la Station Spatiale Internationale (ISS) fin 2024 par une fusée SpaceX, afin de réaliser des expériences sur des temps

plus longs permettant ainsi de s'affranchir des régimes transitoires et avec un meilleur niveau de micro-gravité ( $10^{-5}g$ ) sans fluctuations.

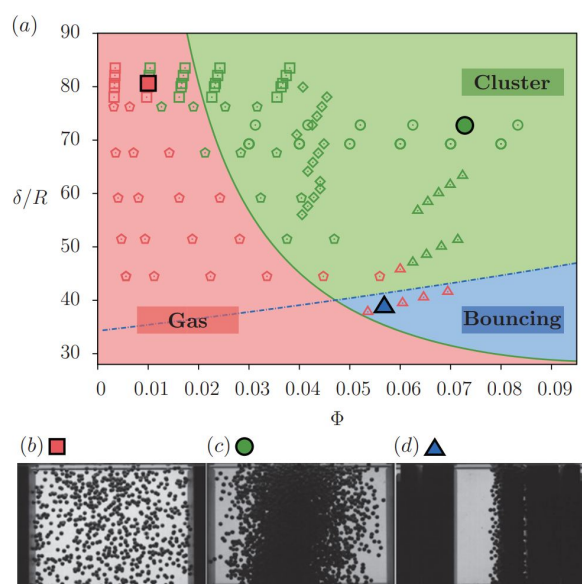


FIGURE B.5 : (a) Diagramme de phase entre les différents régimes observés (gaz, solide ou rebondissant) en fonction de l'amplitude adimensionnée de vibration par le rayon des grains,  $\delta/R$ , et la fraction volumique de grains  $\Phi$ . Les fonds colorés correspondent à des prédictions numériques et les symboles à des points expérimentaux. Les différents symboles correspondent à des campagnes différentes, les couleurs aux régimes gaz (rouge), solide (vert) et rebondissant (bleu). Les différents régimes sont représentés en (b) la phase gazeuse, en (c) le régime d'agrégat et en (d) le régime d'agrégat rebondissant. Figure tirée de [197].



# Bibliographie

- [1] H. LAMB. "Hydrodynamics". Dover, 1932 (cf. p. 8, 11, 14, 19, 20).
- [2] L. LANDAU et F. LIFCHITZ. "Mecanique des fluides". Mir, 1951 (cf. p. 8, 11, 14).
- [3] G. G. STOKES. "On the theory of oscillatory waves". *Trans. Cam. Philos. Soc.* 8 (1847) (cf. p. 8).
- [4] A. D. CRAIK. "Wave interactions and fluid flows". Cambridge University Press, 1988 (cf. p. 8).
- [5] F. DIAS et C. KHARIF. "Nonlinear gravity and capillary-gravity waves". *Annual Review of Fluid Mechanics* 31.1 (1999) (cf. p. 8, 14).
- [6] G. B. WHITHAM. "Linear and nonlinear waves". John Wiley & Sons, 1999 (cf. p. 8).
- [7] K. HASSELMANN. "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory". *Journal of Fluid Mechanics* 12.4 (1962) (cf. p. 9).
- [8] V. E. ZAKHAROV. "Weak turbulence in media with a decay spectrum". *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 6.4 (1965) (cf. p. 9, 22, 29, 34).
- [9] V. E. ZAKHAROV et N. FILONENKO. "Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid". 170.6 (1966) (cf. p. 9, 30).
- [10] V. ZAKHAROV et N. FILONENKO. "Weak turbulence of capillary waves". *Journal of applied mechanics and technical physics* 8.5 (1967) (cf. p. 9, 22, 29).
- [11] S. NAZARENKO. "Wave turbulence". T. 825. Springer Science & Business Media, 2011 (cf. p. 9-11, 22-24, 27, 29-31, 50, 83, 142, 143).
- [12] V. E. ZAKHAROV, V. S. L'VOV et G. FALKOVICH. "Kolmogorov spectra of turbulence I : Wave turbulence". Springer Science & Business Media, 1992 (cf. p. 9, 10, 22, 27, 30).
- [13] A. C. NEWELL et B. RUMPF. "Wave turbulence". *Annual Review of Fluid Mechanics* 43 (2011) (cf. p. 9-11, 22, 27, 31).
- [14] O. REYNOLDS. "III. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels". *Proceedings of the royal society of London* 35.224-226 (1883) (cf. p. 9).
- [15] A. N. KOLMOGOROV. "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers". *Doklady Akademii nauk SSSR* 30, 9, 1941, reproduit dans *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences* 434.1890 (1991) (cf. p. 9, 22, 100, 102).
- [16] E. FALCON, C. LAROCHE et S. FAUVE. "Observation of gravity-capillary wave turbulence". *Physical Review Letters* 98.9 (2007) (cf. p. 10, 34, 35).
- [17] E. HERBERT, N. MORDANT et E. FALCON. "Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid". *Physical Review Letters* 105.14 (2010) (cf. p. 10, 34, 35).
- [18] Q. AUBOURG et N. MORDANT. "Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence". *Physical Review Fluids* 1.2 (2016) (cf. p. 10, 24, 26, 34).
- [19] A. CAZAUBIEL, S. MAWET, A. DARRAS, G. GROSJEAN, J. J. van LOON, S. DORBOLO et E. FALCON. "Wave turbulence on the surface of a fluid in a high-gravity environment". *Physical Review Letters* 123.24 (2019) (cf. p. 10, 18, 34).

- [20] R. HASSAINI et N. MORDANT. “Confinement effects on gravity-capillary wave turbulence”. *Physical Review Fluids* 3.9 (2018) (cf. p. 10, 23, 31, 34, 144).
- [21] E. FALCON et N. MORDANT. “Experiments in surface gravity–capillary wave turbulence”. *Annual Review of Fluid Mechanics* 54 (2022) (cf. p. 10, 21, 27, 34, 152).
- [22] P. COBELLI, P. PETITJEANS, A. MAUREL, V. PAGNEUX et N. MORDANT. “Space-time resolved wave turbulence in a vibrating plate”. *Physical Review Letters* 103.20 (2009) (cf. p. 10, 34).
- [23] T. HUMBERT, O. CADOT, G. DÜRING, C. JOSSE RAND, S. RICA et C. TOUZÉ. “Wave turbulence in vibrating plates: the effect of damping”. *Europhysics Letters* 102.3 (2013) (cf. p. 10, 34).
- [24] B. MIQUEL, A. ALEXAKIS, C. JOSSE RAND et N. MORDANT. “Transition from wave turbulence to dynamical crumpling in vibrated elastic plates”. *Physical Review Letters* 111.5 (2013) (cf. p. 10, 34).
- [25] R. HASSAINI, N. MORDANT, B. MIQUEL, G. KRSTULOVIC et G. DÜRING. “Elastic weak turbulence: From the vibrating plate to the drum”. *Physical Review E* 99.3 (2019) (cf. p. 10, 34, 50).
- [26] L. DEIKE, J.-C. BACRI et E. FALCON. “Nonlinear waves on the surface of a fluid covered by an elastic sheet”. *Journal of Fluid Mechanics* 733 (2013) (cf. p. 10, 34, 36, 142).
- [27] G. DAVIS, T. JAMIN, J. DELEUZE, S. JOUBAUD et T. DAUXOIS. “Succession of resonances to achieve internal wave turbulence”. *Physical Review Letters* 124.20 (2020) (cf. p. 10, 34).
- [28] C. SAVARO, A. CAMPAGNE, M. C. LINARES, P. AUGIER, J. SOMMERIA, T. VALRAN, S. VIBOUD et N. MORDANT. “Generation of weakly nonlinear turbulence of internal gravity waves in the Coriolis facility”. *Physical Review Fluids* 5.7 (2020) (cf. p. 10, 34).
- [29] N. LANCHON, D. O. MORA, E. MONSALVE et P.-P. CORTET. “Internal wave turbulence in a stratified fluid with and without eigenmodes of the experimental domain”. *Physical Review Fluids* 8.5 (2023) (cf. p. 10, 23, 34).
- [30] E. MONSALVE, M. BRUNET, B. GALLET et P.-P. CORTET. “Quantitative experimental observation of weak inertial-wave turbulence”. *Physical Review Letters* 125.25 (2020) (cf. p. 10, 34).
- [31] U. FRISCH. “Turbulence : the legacy of AN Kolmogorov”. Cambridge university press, 1995 (cf. p. 11, 98, 102, 143).
- [32] P. W. ANDERSON. “Localized magnetic states in metals”. *Physical Review* 124.1 (1961) (cf. p. 11, 118).
- [33] C. KITTEL et P. MCEUEN. “Introduction to solid state physics”. John Wiley & Sons, 2004 (cf. p. 11, 118, 144).
- [34] G. RICARD et E. FALCON. “Experimental quasi-1D capillary-wave turbulence”. *Europhysics Letters* 135.6 (2021) (cf. p. 11, 18, 25, 27, 34, 35, 37, 57, 103, 142).
- [35] G. RICARD et E. FALCON. “Transition from wave turbulence to acousticlike shock-wave regime”. *Physical Review Fluids* 8.1 (2023) (cf. p. 11, 31, 50, 56, 57, 106, 142, 152).
- [36] E. KOCHURIN, G. RICARD, N. ZUBAREV et E. FALCON. “Three-dimensional direct numerical simulation of free-surface magnetohydrodynamic wave turbulence”. *Physical Review E* 105.6 (2022) (cf. p. 11, 82, 83, 142).
- [37] S. GALTIER, S. NAZARENKO, A. C. NEWELL et A. POUQUET. “A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics”. *Journal of Plasma Physics* 63.5 (2000) (cf. p. 11, 50, 82, 83, 143).
- [38] G. RICARD et E. FALCON. “Experimental evidence of random shock-wave intermittency”. *Accepté à Physical Review E* (2023) (cf. p. 11, 98, 106).
- [39] A. C. NEWELL. “Wave turbulence with a focus on capillary and gravity waves”. *Four lectures at École Normale Supérieure, Paris, non publié* (2005) (cf. p. 11, 102, 105, 143).
- [40] L. DEIKE. “Études expérimentales et numériques de la turbulence d’ondes de surface”. *Thèse de doctorat, Université Paris Diderot* (2013) (cf. p. 14, 19).
- [41] Q. AUBOURG. “Étude expérimentale de la turbulence d’ondes à la surface d’un fluide. La théorie de la turbulence faible à l’épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité”. *Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes (ComUE)* (2016) (cf. p. 14, 36).

- [42] R. HASSAINI. “Etude de la turbulence d’ondes élastiques et gravito-capillaires: de l’idéal théorique aux conditions réelles?” *Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes* (2018) (cf. p. 14).
- [43] A. CAZAUBIEL. “Dynamique non-linéaire et cascade en turbulences: turbulence hydrodynamique, turbulence d’ondes, et turbulence intégrable”. *Thèse de doctorat, Université de Paris* (2020) (cf. p. 14).
- [44] L. DEIKE, B. MIQUEL, P. GUTIÉRREZ, T. JAMIN, B. SEMIN, M. BERHANU, E. FALCON et F. BONNEFOY. “Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence”. *Journal of Fluid Mechanics* 781 (2015) (cf. p. 18, 23, 34, 102).
- [45] F. BONNEFOY, F. HAUDIN, G. MICHEL, B. SEMIN, T. HUMBERT, S. AUMAITRE, M. BERHANU et E. FALCON. “Observation of resonant interactions among surface gravity waves”. *Journal of Fluid Mechanics* 805 (2016) (cf. p. 18).
- [46] E. FALCON, G. MICHEL, G. PRABHUDESAI, A. CAZAUBIEL, M. BERHANU, N. MORDANT, S. AUMAITRE et F. BONNEFOY. “Saturation of the inverse cascade in surface gravity-wave turbulence”. *Physical Review Letters* 125.13 (2020) (cf. p. 18, 21).
- [47] C. FALCON, E. FALCON, U. BORTOLOZZO et S. FAUVE. “Capillary wave turbulence on a spherical fluid surface in low gravity”. *Europhysics Letters* 86.1 (2009) (cf. p. 18, 35).
- [48] L. DEIKE, M. BERHANU et E. FALCON. “Decay of capillary wave turbulence”. *Physical Review E* 85.6 (2012) (cf. p. 19, 35).
- [49] L. DEIKE, M. BERHANU et E. FALCON. “Energy flux measurement from the dissipated energy in capillary wave turbulence”. *Physical Review E* 89.2 (2014) (cf. p. 19, 23, 35).
- [50] J. W. MILES. “Surface-wave damping in closed basins”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 297.1451 (1967) (cf. p. 19, 151).
- [51] S. NAZARENKO. “Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence”. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2006.02 (2006) (cf. p. 23).
- [52] B. ISSENMANN et E. FALCON. “Gravity wave turbulence revealed by horizontal vibrations of the container”. *Physical Review E* 87.1 (2013) (cf. p. 23, 34, 35).
- [53] Y. PAN et D. K. YUE. “Understanding discrete capillary-wave turbulence using a quasi-resonant kinetic equation”. *Journal of Fluid Mechanics* 816 (2017) (cf. p. 23, 31).
- [54] A. VEDENOV. “Theory of a weakly turbulent plasma”. *Reviews of Plasma Physics : Volume 3* (1967) (cf. p. 24).
- [55] A. DYACHENKO, Y. LVOV et V. E. ZAKHAROV. “Five-wave interaction on the surface of deep fluid”. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 87.1-4 (1995) (cf. p. 26, 35, 37, 142).
- [56] H. PUNZMANN, M. SHATS et H. XIA. “Phase randomization of three-wave interactions in capillary waves”. *Physical Review Letters* 103.6 (2009) (cf. p. 26).
- [57] C. CONNAUGHTON, S. NAZARENKO et A. C. NEWELL. “Dimensional analysis and weak turbulence”. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 184.1-4 (2003) (cf. p. 30).
- [58] N. MORDANT et B. MIQUEL. “Intermittency and emergence of coherent structures in wave turbulence of a vibrating plate”. *Physical Review E* 96.4 (2017) (cf. p. 31, 102).
- [59] A. PUSHKAREV. “On the Kolmogorov and frozen turbulence in numerical simulation of capillary waves”. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 18.3 (1999) (cf. p. 31).
- [60] K. HASSELMANN. “Weak-interaction theory of ocean waves”. *Basic developments in fluid dynamics*. Academic Press, 1968 (cf. p. 34).
- [61] Y. TOBA. “Local balance in the air-sea boundary processes: III. On the spectrum of wind waves”. *Journal of the Oceanographical Society of Japan* 29 (1973) (cf. p. 34).
- [62] M. A. DONELAN, J. HAMILTON et W. HUI. “Directional spectra of wind-generated ocean waves”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 315.1534 (1985) (cf. p. 34).
- [63] P. A. HWANG, D. W. WANG, E. J. WALSH, W. B. KRABILL et R. N. SWIFT. “Airborne measurements of the wavenumber spectra of ocean surface waves. Part I: Spectral slope and dimensionless spectral coefficient”. *Journal of Physical Oceanography* 30.11 (2000) (cf. p. 34).



- [64] L. ROMERO et W. K. MELVILLE. “Airborne observations of fetch-limited waves in the Gulf of Tehuantepec”. *Journal of Physical Oceanography* 40.3 (2010) (cf. p. 34).
- [65] F. LECKLER, F. ARDHUIN, C. PEUREUX, A. BENETAZZO, F. BERGAMASCO et V. DULOV. “Analysis and interpretation of frequency–wavenumber spectra of young wind waves”. *Journal of Physical Oceanography* 45.10 (2015) (cf. p. 34).
- [66] E. A. KUZNETSOV. “Turbulence spectra generated by singularities”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 80 (2004) (cf. p. 34, 57, 142).
- [67] O. M. PHILLIPS. “The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves”. *Journal of Fluid Mechanics* 4.4 (1958) (cf. p. 34).
- [68] P. DENISSENKO, S. LUKASCHUK et S. NAZARENKO. “Gravity wave turbulence in a laboratory flume”. *Physical Review Letters* 99.1 (2007) (cf. p. 34).
- [69] P. COBELLI, A. PRZADKA, P. PETITJEANS, G. LAGUBEAU, V. PAGNEUX et A. MAUREL. “Different regimes for water wave turbulence”. *Physical Review Letters* 107.21 (2011) (cf. p. 34, 35).
- [70] Q. AUBOURG, A. CAMPAGNE, C. PEUREUX, F. ARDHUIN, J. SOMMERIA, S. VIBOUD et N. MORDANT. “Three-wave and four-wave interactions in gravity wave turbulence”. *Physical Review Fluids* 2.11 (2017) (cf. p. 34).
- [71] A. CAMPAGNE, R. HASSAINI, I. REDOR, J. SOMMERIA, T. VALRAN, S. VIBOUD et N. MORDANT. “Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves”. *Physical Review Fluids* 3.4 (2018) (cf. p. 34).
- [72] G. MICHEL, B. SEMIN, A. CAZAUBIEL, F. HAUDIN, T. HUMBERT, S. LEPOT, F. BONNEFOY, M. BERHANU et É. FALCON. “Self-similar gravity wave spectra resulting from the modulation of bound waves”. *Physical Review Fluids* 3.5 (2018) (cf. p. 34).
- [73] E. FALCON, S. AUMAITRE, C. FALCÓN, C. LAROCHE et S. FAUVE. “Fluctuations of energy flux in wave turbulence”. *Physical Review Letters* 100.6 (2008) (cf. p. 35).
- [74] M. BERHANU, E. FALCON et L. DEIKE. “Turbulence of capillary waves forced by steep gravity waves”. *Journal of Fluid Mechanics* 850 (2018) (cf. p. 35).
- [75] M. BERHANU, E. FALCON, G. MICHEL, C. GISSINGER et S. FAUVE. “Capillary wave turbulence experiments in microgravity”. *Europhysics Letters* 128.3 (2020) (cf. p. 35).
- [76] B. ISSENMANN, C. LAROCHE et E. FALCON. “Wave turbulence in a two-layer fluid: coupling between free surface and interface waves”. *Europhysics Letters* 116.6 (2017) (cf. p. 35).
- [77] J. LAURIE, U. BORTOLOZZO, S. NAZARENKO et S. RESIDORI. “One-dimensional optical wave turbulence: experiment and theory”. *Physics Reports* 514.4 (2012) (cf. p. 35).
- [78] E. KOCHURIN, G. RICARD, N. ZUBAREV et E. FALCON. “Numerical simulation of collinear capillary-wave turbulence”. *JETP Letters* 112 (2020) (cf. p. 35).
- [79] G. DÜRING, C. JOSSERAND et S. RICA. “Weak turbulence for a vibrating plate: can one hear a Kolmogorov spectrum?” *Physical Review Letters* 97.2 (2006) (cf. p. 36, 142).
- [80] S. NAZARENKO, S. LUKASCHUK, S. MCLELLAND et P. DENISSENKO. “Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains”. *Journal of Fluid Mechanics* 642 (2010) (cf. p. 50).
- [81] V. E. ZAKHAROV et R. Z. SAGDEEV. “Spectrum of acoustic turbulence”. 192.2 (1970) (cf. p. 50, 82).
- [82] V. S. L’VOV, Y. L’VOV, A. NEWELL et V. ZAKHAROV. “Statistical description of acoustic turbulence”. *Physical Review E* 56.1 (1997) (cf. p. 50).
- [83] A. C. NEWELL et P. AUCCOIN. “Semidispersive wave systems”. *Journal of Fluid Mechanics* 49.3 (1971) (cf. p. 50).
- [84] A. GRIFFIN, G. KRSTULOVIC, V. S. L’VOV et S. NAZARENKO. “Energy spectrum of two-dimensional acoustic turbulence”. *Physical Review Letters* 128.22 (2022) (cf. p. 50).
- [85] S. GALTIER et S. V. NAZARENKO. “Turbulence of weak gravitational waves in the early universe”. *Physical Review Letters* 119.22 (2017) (cf. p. 50).

- [86] B. B. KADOMTSEV et V. I. PETVIASHVILI. "On acoustic turbulence". *Doklady Akademii Nauk*. T. 208. 4. Russian Academy of Sciences. 1973 (cf. p. 50).
- [87] R. HASSAINI et N. MORDANT. "Transition from weak wave turbulence to soliton gas". *Physical Review Fluids* 2.9 (2017) (cf. p. 50, 152).
- [88] E. FALCON et C. LAROCHE. "Observation of depth-induced properties in wave turbulence on the surface of a fluid". *Europhysics Letters* 95.3 (2011) (cf. p. 50).
- [89] R. E. ROSENSWEIG. "Ferrohydrodynamics". Dover, New York, 1997 (cf. p. 50, 53, 54, 56, 83).
- [90] S. DORBOLO et E. FALCON. "Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a horizontal magnetic field". *Physical Review E* 83.4 (2011) (cf. p. 50).
- [91] J. M. BURGERS. "A mathematical model illustrating the theory of turbulence". *Advances in applied mechanics* 1 (1948) (cf. p. 51).
- [92] U. FRISCH et J. BEC. "Burgulence". *New trends in turbulence*. Springer, 2002 (cf. p. 51).
- [93] J. CRANK et P. NICOLSON. "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type". *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. T. 43. 1. Cambridge University Press. 1947 (cf. p. 51).
- [94] L. H. THOMAS. "Elliptic problems in linear difference equations over a network". *Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University, New York* 1 (1949) (cf. p. 51).
- [95] R. E. ZELAZO et J. R. MELCHER. "Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions". *Journal of Fluid Mechanics* 39.1 (1969) (cf. p. 53, 54).
- [96] S. GALTIER. "Introduction to modern magnetohydrodynamics". Cambridge University Press, 2016 (cf. p. 82, 83).
- [97] H. ALFVÉN. "Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves". *Nature* 150.3805 (1942) (cf. p. 82).
- [98] P. IROSHNIKOV. "Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field". *Soviet Astronomy* 7 (1964) (cf. p. 82).
- [99] R. H. KRAICHNAN. "Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence". *The Physics of Fluids* 8.7 (1965) (cf. p. 82).
- [100] J. V. SHEBALIN, W. H. MATTHAEUS et D. MONTGOMERY. "Anisotropy in MHD turbulence due to a mean magnetic field". *Journal of Plasma Physics* 29.3 (1983) (cf. p. 83).
- [101] C. NG et A. BHATTACHARJEE. "Scaling of anisotropic spectra due to the weak interaction of shear-Alfvén wave packets". *Physics of Plasmas* 4.3 (1997) (cf. p. 83).
- [102] J. SAUR, H. POLITANO, A. POUQUET et W. MATTHAEUS. "Evidence for weak MHD turbulence in the middle magnetosphere of Jupiter". *Astronomy & Astrophysics* 386.2 (2002) (cf. p. 83).
- [103] R. MEYRAND, K. KIYANI et S. GALTIER. "Weak magnetohydrodynamic turbulence and intermittency". *Journal of Fluid Mechanics* 770 (2015) (cf. p. 83, 103).
- [104] R. MEYRAND, S. GALTIER et K. H. KIYANI. "Direct evidence of the transition from weak to strong magnetohydrodynamic turbulence". *Physical Review Letters* 116.10 (2016) (cf. p. 83).
- [105] L. CHEVILLARD, S. G. ROUX, E. LÉVÊQUE, N. MORDANT, J.-F. PINTON et A. ARNÉODO. "Intermittency of velocity time increments in turbulence". *Physical Review Letters* 95.6 (2005) (cf. p. 98, 101).
- [106] L. CHEVILLARD et C. MENEVEAU. "Lagrangian dynamics and statistical geometric structure of turbulence". *Physical Review Letters* 97.17 (2006) (cf. p. 98, 101).
- [107] M. SINHUBER, G. P. BEWLEY et E. BODENSCHATZ. "Dissipative effects on inertial-range statistics at high Reynolds numbers". *Physical Review Letters* 119.13 (2017) (cf. p. 98, 101).
- [108] K. P. IYER, G. P. BEWLEY, L. BIFERALE, K. R. SREENIVASAN et P. YEUNG. "Oscillations modulating power law exponents in isotropic turbulence: Comparison of experiments with simulations". *Physical Review Letters* 126.25 (2021) (cf. p. 98, 101).
- [109] M. BUZZICOTTI, L. BIFERALE, U. FRISCH et S. S. RAY. "Intermittency in fractal Fourier hydrodynamics: Lessons from the Burgers equation". *Physical Review E* 93.3 (2016) (cf. p. 98).

- [110] S. B. POPE. "Turbulent flows". Cambridge university press, 2000 (cf. p. 98, 102).
- [111] A. BABIANO, C. BASDEVANT et R. SADOURNY. "Structure functions and dispersion laws in two dimensional turbulence". *Journal of Atmospheric Sciences* 42.9 (1985) (cf. p. 98, 99, 106).
- [112] E. FALCON, S. G. ROUX et B. AUDIT. "Revealing intermittency in experimental data with steep power spectra". *Europhysics Letters* 90.5 (2010) (cf. p. 98, 99, 106).
- [113] C. VAN ATTA et W. CHEN. "Structure functions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean". *Journal of Fluid Mechanics* 44.1 (1970) (cf. p. 100, 101).
- [114] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. HOPFINGER et R. ANTONIA. "High-order velocity structure functions in turbulent shear flows". *Journal of Fluid Mechanics* 140 (1984) (cf. p. 100-102).
- [115] S. GALTIER. "Physique de la turbulence : des tourbillons aux ondes". EDP Sciences, 2021 (cf. p. 100, 102).
- [116] U. FRISCH, P.-L. SULEM et M. NELKIN. "A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence". *Journal of Fluid Mechanics* 87.4 (1978) (cf. p. 100).
- [117] A. N. KOLMOGOROV. "A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number". *Journal of Fluid Mechanics* 13.1 (1962) (cf. p. 101).
- [118] A. M. OBOUKHOV. "Some specific features of atmospheric turbulence". *Journal of Fluid Mechanics* 13.1 (1962) (cf. p. 101).
- [119] Z.-S. SHE et E. LEVEQUE. "Universal scaling laws in fully developed turbulence". *Physical Review Letters* 72.3 (1994) (cf. p. 101).
- [120] B. DUBRULLE. "Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance". *Physical Review Letters* 73.7 (1994) (cf. p. 101).
- [121] G. K. BATCHELOR et A. A. TOWNSEND. "The nature of turbulent motion at large wave-numbers". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 199.1057 (1949) (cf. p. 101).
- [122] F. ANSELMET, R. ANTONIA et L. DANAILA. "Turbulent flows and intermittency in laboratory experiments". *Planetary and Space Science* 49.12 (2001) (cf. p. 101).
- [123] J. DELOUR, J. MUZY et A. ARNEODO. "Intermittency of 1D velocity spatial profiles in turbulence: a magnitude cumulant analysis". *The European Physical Journal B* 23 (2001) (cf. p. 101).
- [124] A. C. NEWELL, S. NAZARENKO et L. BIVEN. "Wave turbulence and intermittency". *Physica D : Nonlinear Phenomena* 152 (2001) (cf. p. 102, 105).
- [125] L. BIVEN, S. NAZARENKO et A. NEWELL. "Breakdown of wave turbulence and the onset of intermittency". *Physics Letters A* 280.1-2 (2001) (cf. p. 102).
- [126] E. FALCON, S. FAUVE et C. LAROCHE. "Observation of intermittency in wave turbulence". *Physical Review Letters* 98.15 (2007) (cf. p. 102, 103, 106).
- [127] E. FALCON, S. G. ROUX et C. LAROCHE. "On the origin of intermittency in wave turbulence". *Europhysics Letters* 90.3 (2010) (cf. p. 102).
- [128] E. FADAEIAZAR, A. ALBERELLO, M. ONORATO, J. LEONTINI, F. FRASCOLI, T. WASEDA et A. TOFFOLI. "Wave turbulence and intermittency in directional wave fields". *Wave motion* 83 (2018) (cf. p. 102).
- [129] P. A. JANSSEN. "Nonlinear four-wave interactions and freak waves". *Journal of Physical Oceanography* 33.4 (2003) (cf. p. 102).
- [130] A. C. NEWELL et V. E. ZAKHAROV. "Rough sea foam". *Physical Review Letters* 69.8 (1992) (cf. p. 102).
- [131] S. CHIBBARO et C. JOSSEMAND. "Elastic wave turbulence and intermittency". *Physical Review E* 94.1 (2016) (cf. p. 102).
- [132] E. AURELL, U. FRISCH, J. LUTSKO et M. VERGASSOLA. "On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data". *Journal of Fluid Mechanics* 238 (1992) (cf. p. 105, 143).
- [133] J.-P. BOUCHAUD, M. MÉZARD et G. PARISI. "Scaling and intermittency in Burgers turbulence". *Physical Review E* 52.4 (1995) (cf. p. 105).

- [134] T. GOTOH. “Inertial range statistics of Burgers turbulence”. *Physics of Fluids* 6.12 (1994) (cf. p. 105, 143).
- [135] D. MITRA, J. BEC, R. PANDIT et U. FRISCH. “Is multiscaling an artifact in the stochastically forced Burgers equation?” *Physical Review Letters* 94.19 (2005) (cf. p. 105).
- [136] M. K. VERMA. “Intermittency exponents and energy spectrum of the Burgers and KPZ equations with correlated noise”. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 277.3-4 (2000) (cf. p. 105).
- [137] S. ALAM, P. SAHU et M. K. VERMA. “Universal functions for Burgers turbulence”. *Physical Review Fluids* 7.7 (2022) (cf. p. 105).
- [138] R. d. L. KRONIG et W. G. PENNEY. “Quantum mechanics of electrons in crystal lattices”. *Proceedings of the royal society of London* 130.814 (1931) (cf. p. 118).
- [139] D. J. GRIFFITHS et C. A. STEINKE. “Waves in locally periodic media”. *American Journal of Physics* 69.2 (2001) (cf. p. 118).
- [140] W. H. BRAGG et W. L. BRAGG. “The reflection of X-rays by crystals”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 88.605 (1913) (cf. p. 118, 125).
- [141] P. W. ANDERSON. “Absence of diffusion in certain random lattices”. *Physical Review* 109.5 (1958) (cf. p. 118).
- [142] A. LAGENDIJK, B. v. TIGGELEN et D. S. WIERSMA. “Fifty years of Anderson localization”. *Physics today* 62.8 (2009) (cf. p. 118).
- [143] C. HODGES. “Confinement of vibration by structural irregularity”. *Journal of Sound and Vibration* 82.3 (1982) (cf. p. 118).
- [144] V. A. HOPKINS, L. KRYSAC et J. MAYNARD. “Experimental studies of nonlinear continuous waves and pulses in disordered media showing Anderson localization”. *Physical Review B* 58.17 (1998) (cf. p. 118, 119, 131, 134, 144).
- [145] C. DÉPOLLIÉ, J. KERGOMARD et F. LALOE. “Localisation d’Anderson des ondes dans les réseaux acoustiques unidimensionnels aléatoires”. *Annales de Physique*. T. 11. 5. EDP Sciences. 1986 (cf. p. 118).
- [146] H. HU, A. STRYBULEVYCH, J. PAGE, S. E. SKIPETROV et B. A. van TIGGELEN. “Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network”. *Nature Physics* 4.12 (2008) (cf. p. 118).
- [147] D. ESCANDE et B. SOUILLARD. “Localization of waves in a fluctuating plasma”. *Physical Review Letters* 52.15 (1984) (cf. p. 118).
- [148] E. BOUCHAUD et M. DAOUD. “Reflection of light by a random layered system”. *Journal de Physique* 47.9 (1986) (cf. p. 118).
- [149] Y. LAHINI, A. AVIDAN, F. POZZI, M. SOREL, R. MORANDOTTI, D. N. CHRISTODOULIDES et Y. SILBERBERG. “Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices”. *Physical Review Letters* 100.1 (2008) (cf. p. 118).
- [150] E. AKKERMANS et R. MAYNARD. “Chains of random impedances”. *Journal de Physique* 45.9 (1984) (cf. p. 118).
- [151] J. BILLY, V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER et A. ASPECT. “Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder”. *Nature* 453.7197 (2008) (cf. p. 118).
- [152] G. ROATI, C. D’ERRICO, L. FALLANI, M. FATTORI, C. FORT, M. ZACCANTI, G. MODUGNO, M. MODUGNO et M. INGUSCIO. “Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate”. *Nature* 453.7197 (2008) (cf. p. 118).
- [153] B. APFFEL, S. WILDEMAN, A. EDDI et E. FORT. “Experimental implementation of wave propagation in disordered time-varying media”. *Physical Review Letters* 128.9 (2022) (cf. p. 118).
- [154] J. A. BAILARD, J. W. DeVRIES et J. T. KIRBY. “Considerations in using Bragg reflection for storm erosion protection”. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering* 118.1 (1992) (cf. p. 118).

- [155] A. HEATHERSHAW. “Seabed-wave resonance and sand bar growth”. *Nature* 296.5855 (1982) (cf. p. 118).
- [156] A. DAVIES et A. HEATHERSHAW. “Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography”. *Journal of Fluid Mechanics* 144 (1984) (cf. p. 118).
- [157] M. BELZONS, V. REY et E. GUAZZELLI. “Subharmonic Bragg resonance for surface water waves”. *Europhysics Letters* 16.2 (1991) (cf. p. 118).
- [158] E. GUAZZELLI, V. REY et M. BELZONS. “Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds”. *Journal of Fluid Mechanics* 245 (1992) (cf. p. 118, 144).
- [159] M. BELZONS, P. DEVILLARD, F. DUNLOP, E. GUAZZELLI, O. PARODI et B. SOUILLARD. “Localization of surface waves on a rough bottom: Theories and experiments”. *Europhysics Letters* 4.8 (1987) (cf. p. 118, 119, 132, 144).
- [160] Z. AN et Z. YE. “Band gaps and localization of water waves over one-dimensional topographical bottoms”. *Applied physics letters* 84.15 (2004) (cf. p. 118, 121, 125).
- [161] M.-J. HUANG, C.-H. KUO et Z. YE. “Gravity waves over topographical bottoms: Comparison with experiment”. *Physical Review E* 71.1 (2005) (cf. p. 118, 121, 123, 125).
- [162] B. DOUCOT et R. RAMMAL. “On Anderson localization in nonlinear random media”. *Europhysics Letters* 3.9 (1987) (cf. p. 119, 131, 139).
- [163] M. MCKENNA, R. STANLEY et J. MAYNARD. “Effects of nonlinearity on Anderson localization”. *Physical Review Letters* 69.12 (1992) (cf. p. 119, 131, 139).
- [164] J. FRÖHLICH, T. SPENCER et C. E. WAYNE. “Localization in disordered, nonlinear dynamical systems”. *Journal of statistical physics* 42 (1986) (cf. p. 119).
- [165] P. DEVILLARD et B. SOUILLARD. “Polynomially decaying transmission for the nonlinear Schrödinger equation in a random medium”. *Journal of statistical physics* 43 (1986) (cf. p. 119, 134, 144).
- [166] O. RICHOUX, V. TOURNAT et T. LE VAN SUU. “Acoustic wave dispersion in a one-dimensional lattice of nonlinear resonant scatterers”. *Physical Review E* 75.2 (2007) (cf. p. 119, 131, 144).
- [167] B. P. NGUYEN et K. KIM. “Anderson localization and saturable nonlinearity in one-dimensional disordered lattices”. *Journal of Modern Optics* 64.19 (2017) (cf. p. 119, 131).
- [168] Q. LI, C. SOUKOULIS, S. PNEVMATIKOS et E. ECONOMOU. “Scattering properties of solitons in nonlinear disordered chains”. *Physical Review B* 38.16 (1988) (cf. p. 119, 134, 144).
- [169] Y. S. KIVSHAR, S. A. GREDESKUL, A. SÁNCHEZ et L. VÁZQUEZ. “Localization decay induced by strong nonlinearity in disordered systems”. *Physical Review Letters* 64.15 (1990) (cf. p. 119, 134, 144).
- [170] R. SCHARF, Y. S. KIVSHAR, A. SÁNCHEZ et A. R. BISHOP. “Sine-Gordon kink-antikink generation on spatially periodic potentials”. *Physical Review A* 45.8 (1992) (cf. p. 119, 134, 144).
- [171] V. A. HOPKINS, J. KEAT, G. D. MEEGAN, T. ZHANG et J. MAYNARD. “Observation of the predicted behavior of nonlinear pulse propagation in disordered media”. *Physical Review Letters* 76.7 (1996) (cf. p. 119, 134).
- [172] O. NAKOULIMA, N. ZAHIBO, E. PELINOVSKY, T. TALIPOVA et A. KURKIN. “Solitary wave dynamics in shallow water over periodic topography”. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 15.3 (2005) (cf. p. 119, 134, 138).
- [173] I. REDOR, E. BARTHÉLEMY, N. MORDANT et H. MICHALLET. “Analysis of soliton gas with large-scale video-based wave measurements”. *Experiments in Fluids* 61 (2020) (cf. p. 120).
- [174] P.-G. LUAN et Z. YE. “Acoustic wave propagation in a one-dimensional layered system”. *Physical Review E* 63.6 (2001) (cf. p. 121, 124, 125).
- [175] Y. ZHANG, Y. LI, H. SHAO, Y. ZHONG, S. ZHANG et Z. ZHAO. “Band gaps and localization of surface water waves over large-scale sand waves with random fluctuations”. *Physical Review E* 85.6 (2012) (cf. p. 121, 122, 125).
- [176] Z. YE. “Water wave propagation and scattering over topographical bottoms”. *Physical Review E* 67.3 (2003) (cf. p. 122).

- [177] P. DEVILLARD, F. DUNLOP et B. SOUILLARD. “Localization of gravity waves on a channel with a random bottom”. *Journal of Fluid Mechanics* 186 (1988) (cf. p. 125, 127).
- [178] F. BLOCH. “Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern”. *Zeitschrift für Physik* 52.7-8 (1929) (cf. p. 125).
- [179] R. IBRAHIM. “Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications”. *Journal of Sound Vibration* 315.1-2 (2008) (cf. p. 128).
- [180] M. REMOISSENET. “Waves called solitons : concepts and experiments”. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1994 (cf. p. 132).
- [181] E. FALCON, C. LAROCHE et S. FAUVE. “Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer”. *Physical Review Letters* 89.20 (2002) (cf. p. 132-134).
- [182] M. PEYRARD et T. DAUXOIS. “Physique des solitons”. EDP sciences Paris, 2004 (cf. p. 132).
- [183] D. J. KORTEWEG et G. DE VRIES. “XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 39.240 (1895) (cf. p. 133).
- [184] G. KATELL et B. ERIC. “Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker.” *Journal of Hydraulic Research* 40.3 (2002) (cf. p. 133, 134).
- [185] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL et R. M. MIURA. “Method for solving the Korteweg-deVries equation”. *Physical Review Letters* 19.19 (1967) (cf. p. 139, 144, 153).
- [186] P. SURET, S. RANDOUX, A. GELASH, D. AGAFONTSEV, B. DOYON et G. EL. “Soliton Gas: Theory, Numerics and Experiments”. *arXiv preprint arXiv :2304.06541* (2023) (cf. p. 139, 144, 153).
- [187] V. ZAKHAROV, F. DIAS et A. PUSHKAREV. “One-dimensional wave turbulence”. *Physics Reports* 398.1 (2004) (cf. p. 142).
- [188] J. BEC et K. KHANIN. “Burgers turbulence”. *Physics Reports* 447.1-2 (2007) (cf. p. 142).
- [189] W. LI, H. YEH et Y. KODAMA. “On the Mach reflection of a solitary wave: revisited”. *Journal of Fluid Mechanics* 672 (2011) (cf. p. 151).
- [190] S. RYSKAMP, M. D. MAIDEN, G. BIONDINI et M. A. HOEFER. “Evolution of truncated and bent gravity wave solitons: the Mach expansion problem”. *Journal of Fluid Mechanics* 909 (2021) (cf. p. 151).
- [191] I. REDOR, H. MICHALLET, N. MORDANT et E. BARTHÉLEMY. “Experimental study of integrable turbulence in shallow water”. *Physical Review Fluids* 6.12 (2021) (cf. p. 152).
- [192] A. CAZAUBIEL, G. MICHEL, S. LEPOT, B. SEMIN, S. AUMAITRE, M. BERHANU, F. BONNEFOY et E. FALCON. “Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves”. *Physical Review Fluids* 3.11 (2018) (cf. p. 153).
- [193] G. MICHEL, F. BONNEFOY, G. DUCROZET, G. PRABHUDESAI, A. CAZAUBIEL, F. COPIE, A. TIKAN, P. SURET, S. RANDOUX et E. FALCON. “Emergence of Peregrine solitons in integrable turbulence of deep water gravity waves”. *Physical Review Fluids* 5.8 (2020) (cf. p. 153).
- [194] P. SURET, A. TIKAN, F. BONNEFOY, F. COPIE, G. DUCROZET, A. GELASH et al. “Nonlinear spectral synthesis of soliton gas in deep-water surface gravity waves”. *Physical Review Letters* 125.26 (2020) (cf. p. 153).
- [195] L. FACHE, F. BONNEFOY, G. DUCROZET, F. COPIE, F. NOVKOSKI, G. RICARD et al. “Interaction of soliton gases in deep-water surface gravity waves”. *Soumis à Physical Review E* (2023) (cf. p. 153).
- [196] S. AUMAITRE, R. BEHRINGER, A. CAZAUBIEL, E. CLÉMENT, J. CRASSOUS, D. DURIAN et al. “An instrument for studying granular media in low-gravity environment”. *Review of scientific instruments* 89.7 (2018) (cf. p. 154).
- [197] M. NOIRHOMME, A. CAZAUBIEL, A. DARRAS, E. FALCON, D. FISCHER, Y. GARRABOS et al. “Threshold of gas-like to clustering transition in driven granular media in low-gravity environment”. *Europhysics Letters* 123.1 (2018) (cf. p. 154, 155).
- [198] M. NOIRHOMME, A. CAZAUBIEL, E. FALCON, D. FISCHER, Y. GARRABOS, C. LECOUTRE-CHABOT et al. “Particle dynamics at the onset of the granular gas-liquid transition”. *Physical Review Letters* 126.12 (2021) (cf. p. 154).

# **Turbulence d'ondes de surface, transition vers un régime d'ondes de choc, intermittence et localisation d'Anderson**

## **Résumé**

La turbulence d'ondes est un phénomène où un très grand nombre d'ondes faiblement non linéaires interagissent entre elles. La théorie de la turbulence faible permet de décrire ce phénomène dans de nombreux domaines de la physique. Il est, cependant, primordial de connaître les domaines de validité de cette théorie qui suppose de nombreuses hypothèses. Dans ce cadre, une expérience a été mise en place pour mettre en évidence l'existence de turbulence d'ondes unidimensionnelles à la surface d'un fluide. Cette unique dimension de propagation n'avait jamais été exploitée expérimentalement en turbulence d'ondes et offre de nouvelles perspectives du fait de sa simplicité. La dispersivité des ondes étant une hypothèse de la théorie de la turbulence faible, il est important de savoir si un système non dispersif peut redistribuer son énergie à travers les échelles, ou si celle-ci finit par se concentrer dans des structures cohérentes. Nous avons répondu à cette question dans deux systèmes. Dans l'expérience unidimensionnelle, nous avons montré que les ondes à la surface d'un liquide magnétique deviennent non dispersives en présence d'un champ magnétique et conduisent à l'émergence d'ondes de choc qui contrôlent la dynamique du système. Nous avons ensuite montré numériquement que, pour deux dimensions de propagation, une turbulence d'ondes anisotropes apparaît à la surface du liquide magnétique, analogue à la turbulence d'ondes d'Alfvén anisotropes dans les plasmas. La nature intermittente du système expérimental d'ondes de choc a ensuite été mise en évidence en bon accord avec un modèle d'intermittence de Burgers modifié pour prendre en compte la cambrure finie des ondes. Enfin, la localisation d'Anderson d'ondes de gravité a été mise en évidence expérimentalement. Cet autre phénomène d'interaction entre ondes (interférences) est trouvé être en accord avec la théorie linéaire. Le rôle de la non-linéarité des ondes sur la localisation d'Anderson est également montré expérimentalement.

**Mots clés :** Turbulence d'ondes, Unidimensionnel, Ondes de capillarité, Ondes de choc, Non dispersif, Intermittence, Localisation d'Anderson

## **Surface wave turbulence, transition to a shock wave regime, intermittency and Anderson localization**

### **Abstract**

Wave turbulence is a phenomenon in which many weakly nonlinear waves interact with each other. The theory of weak turbulence describes this phenomenon in many domains in physics. It is however essential to know the experimental range of validity of this theory which assumes many hypotheses. In this context, an experiment is set up to evidence the existence of one-dimensional wave turbulence on the surface of a fluid. This particular geometry has never been experimentally used in wave turbulence before, and offers new opportunities thanks to its simplicity. As weak turbulence assumes wave dispersivity, it is then significant to know whether nondispersive waves can redistribute its energy across scales, or whether it focuses into coherent structures. We have answered this question in two cases. In the one-dimensional experiment, we have shown that waves on the surface of a magnetic liquid become nondispersive in presence of a magnetic field, leading to the emergence of shock waves that drive the system dynamics. We then showed numerically that for two-dimensions of propagation, anisotropic wave turbulence occurs at the surface of the magnetic liquid, analogous to anisotropic Alfvén wave turbulence in plasmas. The intermittent nature of the experimental shock wave regime is then evidenced, in agreement with a Burgers model modified to take account of the finite steepness of the waves. Finally, the Anderson localization of gravity waves is evidenced experimentally. This other phenomenon of interaction between waves (interferences) is found to be in agreement with the linear theory. The role of wave nonlinearity on the Anderson localization is also shown experimentally.

**Key words:** Wave turbulence, One-dimensional, Capillary waves, Shock waves, Nondispersive, Intermittency, Anderson localization