Simulations et analyses de sensibilité du bruit produit des écoulements cisaillés

Hugo Vincent

▶ **To cite this version:**

Hugo Vincent. Simulations et analyses de sensibilité du bruit produit des écoulements cisaillés. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2024. Français. NNT : 2024ECDL0007 . tel-04549645

HAL Id: tel-04549645
https://theses.hal.science/tel-04549645

Submitted on 17 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre NNT : 2024ECDL0007

THÈSE de DOCTORAT DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
membre de l'Université de Lyon

École Doctorale N° 162
Mécanique Énergétique Génie Civil Acoustique

Spécialité de doctorat : Acoustique

Soutenue publiquement le 08/02/2024, par

Hugo Vincent

Simulations et analyses de sensibilité du bruit produit par des écoulements cisaillés

Devant le jury composé de :

Airiau, Christophe	Professeur	IMFT	Rapporteur
Marchiano, Régis	Professeur	Sorbonne Université	Rapporteur
Gloerfelt, Xavier	Professeur	ENSAM	Président du jury
Le Bras, Sophie	Ingénieure de recherche	Siemens	Examinatrice
Jaunet, Vincent	Maître de conférences	ENSMA	Examinateur
Bogey, Christophe	Directeur de recherche	École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
Gojon, Romain	Enseignant-chercheur	ISAE-SUPAERO	Invité

Remerciements

Cette thèse de doctorat a débuté en octobre 2020 et s'est déroulée au Centre Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'École Centrale de Lyon. Elle a été financée par le projet régional FUI25 CALM-AA (CiblAge des sources par voie Logicielle et Méthodes inverses pour l'AéroAcoustique). Elle a bénéficié d'un accès aux ressources numériques du Pôle de Modélisation et de Calcul en Sciences de l'Ingénieur de l'Information (PMCS2I) de l'École Centrale de Lyon.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury de thèse pour avoir accepté d'évaluer mes travaux et pour la pertinence de leurs prises de parole lors de la séance de questions-réponses de la soutenance. Je remercie en particulier les professeurs Christophe Airiau et Régis Marchiano pour leurs rapports sur le manuscrit de thèse, et Xavier Gloerfelt pour avoir présidé le jury de soutenance. J'adresse toute ma gratitude à mon directeur de thèse Christophe Bogey pour sa confiance, ses conseils, sa grande disponibilité et ses retours sur mes productions écrites.

Je remercie les enseignants en Licence et en Master de Mécanique de Lyon 1, en particulier Michel Gagnard, Joseph John Soundar Jerome, Marc Buffat et Bastien Di Pierro. Je remercie également Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez pour leur film "Chaos : une aventure mathématique". Je pense à Peter Spelt que je remercie pour ses enseignements et pour la confiance qu'il m'a accordée en stage de Master. Je garde en mémoire son sourire et sa bienveillance. J'exprime ma reconnaissance envers Christophe Bailly pour son implication dans l'organisation initiale de la thèse et dans la collaboration avec Étienne Spieser et Stefan Schoder. Je remercie les membres du Centre Acoustique pour leur accueil et je remercie Marie-Annick Galland pour l'organisation des cafés scientifiques. J'exprime ma gratitude envers les membres du SIC du LMFA et envers Mattéo Camier, Laurent Pouilloux et Anne Cadiou pour leur aide sur le calculateur Newton. Je remercie Marie-Gabrielle Perriaux et Marie-Noëlle Pailhès pour leur implication dans les démarches administratives.

Je remercie chaleureusement Mathieu Varé pour ses conseils et sa grande disponibilité pour m'expliquer l'aéroacoustique des jets. J'associe aussi à ces remerciements Étienne Spieser et Jean Al-Am pour les discussions techniques, les conseils et les bons moments au sport. Je remercie les doctorants et les post-doctorants que j'ai côtoyés à l'ECL, mes anciens collègues de bureau notamment. Je les remercie pour leur bienveillance, les bons moments passés en leur compagnie et la bonne ambiance qui règne dans les bureaux.

Je remercie ma mère, mon père et mon frère pour leurs conseils et leur soutien permanent. Je pense à mes deux grands-mères et à mon grand-père. Je leur dédie ce manuscrit.

Résumé

Dans ce travail de thèse, des études de sensibilité portant sur le développement et le bruit des écoulements cisaillés turbulents sont réalisées à l'aide de simulations aéroacoustiques directes et de la méthode de la différentiation complexe.

Dans un premier temps, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à des couches de mélange bidimensionnelles afin d'étudier sa capacité à mettre en évidence les effets d'un paramètre sur les champs aérodynamiques et acoustiques d'un écoulement. Pour cela, des simulations numériques directes de couches de mélange sont réalisées avec cette méthode pour différents nombres de Mach, nombres de Reynolds et tailles de maille. Dans chaque calcul, les dérivées des niveaux acoustiques par rapport à un des trois paramètres considérés sont estimées avec la méthode de la différentiation complexe. Les résultats obtenus sont en bon accord avec d'autres issus de la littérature et d'études paramétriques. Ils indiquent que la méthode de la différentiation complexe peut être utilisée pour, d'une part, étudier l'influence d'un paramètre physique sur le développement et le bruit d'un écoulement et, d'autre part, déterminer la sensibilité au maillage des solutions d'une simulation.

Dans un second temps, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du mécanisme de réceptivité se produisant lorsqu'une onde acoustique se réfléchit sur les lèvres de la buse d'un jet. Dans ce but, à partir des résultats d'une simulation de jet impactant une plaque pleine, un pulse acoustique d'amplitude imaginaire est introduit à un instant donné près de la buse en dehors du jet. En poursuivant la simulation après cet instant, la sensibilité des couches de mélange près de la buse à une perturbation acoustique est déterminée avec la méthode de la différentiation complexe. Cette sensibilité est utilisée pour mettre en évidence la génération d'une onde d'instabilité par la perturbation acoustique.

Enfin, l'influence des conditions de sortie de buse (profil de vitesse et taux de turbulence) sur les composantes tonales produites par les jets subsoniques impactant une plaque pleine est étudiée. Pour cela, plusieurs jets impactants sont simulés pour différents profils de vitesse en sortie de buse, plusieurs niveaux d'excitation des couches limites, des nombres de Mach de 0.6 et 0.9, et deux distances plaque-buse. Les résultats montrent que les conditions de sortie affectent considérablement l'amplitude des composantes tonales et que des jets impactants à un nombre de Mach inférieur à 0.65, généralement non résonants, peuvent être résonants pour des conditions de sortie spécifiques. Les effets des conditions de sortie sont attribués à des modifications dans le développement des couches de mélange des jets, qui conduisent à des différences dans les propriétés d'amplification des ondes d'instabilité entre la buse et la plaque, et dans l'énergie contenue dans les structures cohérentes des jets près de la zone d'impact.

Mots clés : aéroacoustique, analyse de sensibilité, méthode de la différentiation complexe, sensibilité au maillage, bruit de jet, jet impactant, couche de mélange, conditions de sortie, réceptivité, boucle de rétroaction, simulation numérique directe, simulation des grandes échelles

Abstract

In this PhD work, sensitivity studies are carried out for turbulent shear flows using direct noise computations and the complex differentiation method.

First, the complex differentiation method is applied to two-dimensional mixing layers to investigate its capacity to highlight the effects of a parameter on the aerodynamic noise. For that, direct numerical simulations of mixing layers are performed using this method for different Mach numbers, Reynolds numbers and mesh spacings. In each case, the derivatives of the noise levels with respect to one of the three parameters are obtained using the complex differentiation method. The results are in good agreement with others from the literature and parametric studies. They indicate that the complex differentiation method can be used to describe the effects of physical parameters and of the grid resolution on the sound produced by a high-speed flow.

Secondly, the complex differentiation method is applied to the study of the receptivity mechanism occurring when an acoustic wave reflects at the nozzle lip of a jet. For this purpose, using the results of a simulation of a jet impinging on a plate, an imaginary amplitude acoustic pulse is introduced at a given time in the near-nozzle region outside the jet. The sensitivity of the near-nozzle mixing layers to an acoustic disturbance is then determined using the complex differentiation method. This sensitivity is used to highlight the excitation of an instability wave by the acoustic disturbance.

Finally, the influence of nozzle-exit conditions (velocity profile and turbulence level) on the tonal noise components generated by subsonic impinging jets is investigated. For that, jets with different nozzle-exit velocity profiles, several boundary-layer excitation levels, at Mach numbers of 0.6 or 0.9, impinging on a plate located at 6 or 8 nozzle radii from the nozzle, are simulated. The results show that the nozzle-exit conditions significantly affect the amplitude of the tonal noise components and that impinging jets at Mach numbers below 0.65, which are generally non-resonant, can be resonant for specific nozzle-exit conditions. The effects of the nozzle-exit conditions are found to result from changes in the development of the jet mixing layers, which lead to differences in the amplification properties of the Kelvin-Helmholtz instability waves between the nozzle and the plate, and in the energy contained in the coherent structures of the jets near the impingement region.

Keywords : aeroacoustics, sensitivity analysis, complex differentiation method, grid sensitivity, jet noise, impinging jet, mixing layer, nozzle-exit conditions, receptivity, feedback loop, direct numerical simulation, large-eddy simulation

Table des matières

Introduction **1**

1 Sensibilité des couches de mélange et des jets **5**

1.1 Généralités sur les couches de mélange et les jets 5

1.1.1 Structure d'un jet libre 5

1.1.2 Structures cohérentes et ondes de Kelvin-Helmholtz 7

1.1.3 Bruit d'appariement de tourbillons 9

1.1.4 Bruit de mélange dans les jets libres subsoniques 12

1.1.5 Composantes de bruit additionnelles dans les jets supersoniques 14

1.1.6 Ondes guidées dans les jets libres 16

1.1.7 Composantes de bruit tonales dans les jets impactants 17

1.2 Sensibilité des couches de mélange et des jets aux paramètres physiques 21

1.2.1 Influence du rapport de vitesse 21

1.2.2 Influence de la compressibilité 22

1.2.3 Influence du nombre de Reynolds 24

1.2.4 Influence du nombre de Mach 27

1.2.5 Influence des conditions de sortie 30

1.2.6 Influence de la température 33

1.3 Méthodes d'analyse de sensibilité pour des simulations aéroacoustiques directes . 34

1.3.1 Étude paramétrique 34

1.3.2 Méthodes d'analyse de sensibilité directes 35

1.3.3 Méthodes adjointes 40

1.3.4 Limitation et méthodes pour des écoulements chaotiques 41

2 Méthodes numériques pour les simulations aéroacoustiques directes **43**

2.1 Équations de Navier-Stokes compressibles 43

2.2 Discrétisation spatiale 44

2.3 Intégration temporelle 45

2.4 Filtrage sélectif 46

2.5 Traitement des chocs 47

2.5.1 Détection des chocs 47

2.5.2 Filtrage adaptatif 48

2.6 Conditions aux limites 48

2.7 Modélisation de conditions d'entrée turbulentes 49

2.8 Méthodes spécifiques aux coordonnées cylindriques 50

2.8.1 Traitement de la singularité sur l'axe 50
2.8.2 Augmentation du pas de temps par déraffinement 51

3 Applications de la méthode de la différentiation complexe à des couches de mélange et des jets 53
3.1 Sensibilité du développement d'une couche de mélange 53
3.1.1 Définition de la couche de mélange 54
3.1.2 Paramètres numériques 55
3.1.3 Sensibilité au rapport de vitesse 56
3.1.4 Sensibilité au nombre de Reynolds 64
3.1.5 Sensibilité à la fréquence d'excitation 66
3.1.6 Conclusion 70
3.2 Sensibilité du bruit d'une couche de mélange 71
3.3 Réceptivité d'un jet à une perturbation acoustique près de la buse 88
3.3.1 Paramètres du jet 88
3.3.2 Paramètres numériques 89
3.3.3 Champs de vorticité et de pression 89
3.3.4 Sensibilité à un pulse acoustique 90
3.3.5 Sensibilité de la pression 91
3.3.6 Décomposition de Hodge-Helmholtz 92
3.3.7 Visualisations du mécanisme de réceptivité 94
3.3.8 Conclusions 96

4 Étude des effets des conditions de sortie sur les composantes tonales produites par les jets impactants subsoniques 99
4.1 Influence de l'épaisseur de couche limite en sortie de buse 99
4.2 Influence du taux de turbulence en sortie de buse 126
4.2.1 Paramètres des jets 126
4.2.2 Paramètres des simulations 126
4.2.3 Résultats 128
4.2.4 Conclusions 137

Conclusions et perspectives 139

Annexe A 143

Références 145

Introduction

Contexte

Dès les premiers développements des industries aéronautiques et aérospatiales dans les années 1950, deux problématiques liées au bruit des jets issus des moteurs à réaction ont émergé. Premièrement, dans le domaine de l'aviation civile, l'augmentation du trafic aérien combinée à la croissance des zones urbaines près des aéroports a conduit à l'exposition de nombreuses habitations à d'importantes nuisances sonores. Au décollage des avions, en particulier, ces nuisances résultent en grande partie des interactions entre les jets issus des moteurs et l'air environnant [5, 135]. Deuxièmement, lors du décollage d'un lanceur spatial, les jets expulsés à très haute vitesse par les moteurs se sont révélés être dangereux pour la structure du lanceur en raison de l'intensité extrême du rayonnement acoustique produit lors de l'impact des jets sur le pas de tir [92]. Afin de répondre à ces problématiques, de nombreuses études portant sur l'aéroacoustique des jets libres et impactants ont été menées. Elles ont notamment mis en évidence qu'un jet impactant hautement subsonique ou faiblement supersonique produit généralement de fortes composantes de bruit tonales résultant de boucles de rétroaction aéroacoustique s'établissant entre la buse du jet et la plaque impactée.

Aujourd'hui, des techniques de réduction de bruit sont mises en œuvre pour atténuer l'intensité du rayonnement acoustique des jets. À titre d'exemple, des turboréacteurs à double flux à haut taux de dilution avec des nacelles et des tuyères à chevrons sont utilisés dans l'aviation civile et, lors du décollage d'un engin spatial, d'importantes quantités d'eau sont injectées sur le pas de tir [174]. Malgré les progrès significatifs réalisés, des stratégies de réduction des niveaux sonores toujours plus efficaces sont recherchées. Leur élaboration nécessite une profonde compréhension des mécanismes de production du bruit des jets.

Pour caractériser les mécanismes de production de bruit, des études paramétriques sont souvent menées dans la littérature. Elles consistent en l'analyse de résultats de plusieurs expériences, se distinguant les unes des autres uniquement par la valeur d'un paramètre, et permettent ainsi d'isoler les effets du paramètre considéré sur le rayonnement acoustique d'un écoulement. Pour des jets impactants, par exemple, des études paramétriques ont été réalisées pour déterminer l'influence de la vitesse d'éjection et de la distance plaque-buse sur les composantes de bruit tonales [130, 143, 213, 227, 230]. Pour certaines distances plaque-buse et vitesses d'éjection, des différences ont été observées dans les fréquences des composantes tonales obtenues dans plusieurs expériences [304]. Elles peuvent résulter de différences dans les conditions de sortie des jets (profil de vitesse et niveaux de turbulence en sortie de buse), dont l'importance sur le développement et le bruit des jets libres est avérée [27, 37, 53, 54, 330, 332].

Grâce notamment à l'augmentation de la puissance de calcul et au développement de méthodes numériques spécifiques, il est maintenant possible de reproduire avec fidélité les champs aérodynamiques des jets et leur rayonnement acoustique en réalisant des simulations aéroacoustiques directes [9, 21, 177]. Ces simulations permettent l'obtention de la dynamique temporelle des grandeurs aérodynamiques et acoustiques d'un écoulement en tout point de l'espace, ce qui rend possible une analyse détaillée des mécanismes de production de bruit. En outre, les conditions de sortie d'un jet simulé peuvent être spécifiées avec précision [27, 37]. En raison notamment du caractère turbulent des écoulements cisaillés et des couplages aéroacoustiques pouvant se produire, une simulation de jet réaliste est néanmoins très coûteuse en ressources numériques, limitant la réalisation d'études paramétriques impliquant un grand nombre de jets.

Les analyses de sensibilité peuvent constituer une alternative aux études paramétriques. Elles permettent de déterminer les effets d'une modification de la valeur d'un paramètre sur les champs aérodynamiques et acoustiques d'un écoulement, ce qui peut être utile pour, par exemple, étudier les phénomènes physiques, optimiser une stratégie de réduction de bruit, et déterminer la sensibilité au maillage des résultats d'une simulation. Parmi les différentes méthodes d'analyse de sensibilité employées dans la littérature, la méthode de la différentiation complexe se distingue par sa précision, sa facilité d'implémentation et son faible coût numérique [1, 154, 188]. Cependant, bien qu'elle ait été introduite dans le domaine de l'aéroacoustique il y a environ 15 ans [173], sa validité pour des écoulements réalistes tridimensionnels et sa capacité à caractériser les effets d'un paramètre physique ou de maillage sur le rayonnement acoustique d'un écoulement restent à être démontrées.

Objectifs

Le présent travail de thèse porte sur l'utilisation de la méthode de la différentiation complexe pour des calculs aéroacoustiques directs et sur les effets des conditions de sortie sur le bruit des jets impactants subsoniques.

Un premier objectif est d'étudier la validité de la méthode de la différentiation complexe, son utilité pour mettre en évidence l'influence d'un paramètre physique sur les champs aérodynamiques et acoustiques d'un écoulement, et sa capacité à déterminer la sensibilité au maillage d'une simulation numérique.

Un deuxième objectif est de caractériser les effets des conditions de sortie sur le rayonnement acoustique des jets impactants subsoniques. Dans ce but, des jets avec différents profils de vitesse et niveaux de turbulence en sortie de buse seront simulés pour deux distances plaque-buse et des nombres de Mach de 0.6 et 0.9. À la différence des jets hautement subsoniques, il est généralement admis dans la littérature qu'un jet impactant à un nombre de Mach inférieur

à 0.65 ne produit pas de composantes de bruit tonales intenses [186, 213, 230]. Pour les jets à un nombre de Mach de 0.6, l'objectif est donc de déterminer si cela est le cas quelles que soient les conditions de sortie des jets, ou si ces jets sont susceptibles d'être résonants pour des conditions de sortie spécifiques. Pour les jets à un nombre de Mach de 0.9, qui sont résonants d'après les expériences de la littérature [143, 213, 305], l'objectif est d'étudier l'influence des conditions de sortie sur les fréquences et les amplitudes des composantes tonales produites par les jets impactants hautement subsoniques.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit de thèse est structuré en quatre chapitres. Dans un premier chapitre, une revue bibliographique est présentée. Elle porte notamment sur les phénomènes physiques se produisant dans les couches de mélange, les mécanismes de rétroaction aéroacoustique conduisant à la génération de fortes composantes de bruit tonales dans les jets impactants, et les méthodes d'analyse de sensibilité.

Dans un deuxième chapitre, les méthodes numériques utilisées dans ce travail de thèse pour les simulations aéroacoustiques directes sont présentées. Elles sont basées sur des schémas aux différences finies d'ordre élevé explicites faiblement dispersifs et dissipatifs.

Dans un troisième chapitre, la méthode de la différentiation complexe est mise en œuvre dans des simulations de couches de mélange et de jets. Afin d'étudier sa capacité à caractériser, d'une part, les effets d'un paramètre physique sur un écoulement et, d'autre part, la sensibilité au maillage des résultats d'une simulation, elle est tout d'abord appliquée à des couches de mélange subsoniques bidimensionnelles contrôlées à l'aide d'une excitation. La validité de la méthode pour des écoulements réalistes tridimensionnels est ensuite examinée en utilisant cette méthode pour décrire le mécanisme de réceptivité se produisant lorsqu'une onde acoustique se réfléchit sur les lèvres de la buse d'un jet.

Dans un quatrième chapitre, deux études portant respectivement sur les effets de l'épaisseur de couche limite et des niveaux de turbulence en sortie de buse sur le bruit des jets impactants subsoniques sont menées en simulant plusieurs jets à des nombres de Mach de 0.6 et 0.9. L'influence des conditions de sortie sur les composantes tonales produites par les jets impactants hautement subsoniques est caractérisée en décrivant notamment les variations en fréquence et en amplitude des composantes tonales générées par les jets à un nombre de Mach de 0.9. Dans le but de déterminer si un jet impactant à un nombre de Mach inférieur à 0.65 peut être résonant pour des conditions de sortie spécifiques, les champs aérodynamiques et acoustiques des jets à un nombre de Mach de 0.6 avec différentes épaisseurs de couche limite en sortie de buse sont étudiés.

Chapitre 1

Sensibilité des couches de mélange et des jets

Dans ce chapitre, des généralités sur les couches de mélange, les jets libres et les jets impactants sont données dans une première section. La sensibilité de ces écoulements et de leur rayonnement acoustique à des paramètres physiques importants (vitesse de l'écoulement, température, etc.) est détaillée dans une deuxième section. Enfin, des méthodes d'analyse de sensibilité pouvant être mises en œuvre dans des simulations aéroacoustiques directes sont présentées dans une troisième section.

1.1 Généralités sur les couches de mélange et les jets

Dans cette section, la structure d'un jet libre et plusieurs paramètres la caractérisant sont tout d'abord définis. Par la suite, le développement aérodynamique et le rayonnement acoustique des jets libres laminaires, des jets libres turbulents et des jets impactant une plaque sont décrits, tout en présentant les ondes impliquées dans les phénomènes physiques se produisant dans ces écoulements.

1.1.1 Structure d'un jet libre

Un jet libre d'air s'échappant d'une buse cylindrique de diamètre D à une vitesse u_j est considéré. Il se mélange dans un milieu ambiant composé d'air au repos. Sa structure est décrite par les coordonnées cylindriques (r, θ, z), où r et z sont les distances radiale et axiale définies par rapport à l'axe et le plan de sortie du jet en $z = 0$, et θ est l'angle azimutal. Elle est représentée en vue de coupe azimutale avec différentes régions de l'écoulement sur la figure 1.1. Dans la buse, la vitesse de l'écoulement varie significativement dans une zone située près des bords intérieurs de la buse, correspondant à une couche limite. Lorsque le gaz s'échappe de la buse, il interagit avec l'air au repos dans une région appelée couche de mélange. Au sein de cette dernière, des structures turbulentes de différentes tailles se développent et interagissent entre elles. Au cours de leur convection, elles grossissent et entraînent l'air environnant dans la direction de l'écoulement. Cela conduit à un épaississement de la couche de mélange et également à la présence d'une région conique où l'écoulement est irrotationnel, le cône potentiel. En régime incompressible, l'épaisseur des couches de mélange peut être caractérisée par l'épaisseur de

quantité de mouvement

$$\delta_\theta(z) = \int_0^\infty \frac{\langle u_z \rangle}{\langle u_z \rangle (r=0)} \left(1 - \frac{\langle u_z \rangle}{\langle u_z \rangle (r=0)}\right) \mathrm{d}r \ , \tag{1.1}$$

où $\langle u_z \rangle$ est la vitesse axiale moyenne.

L'orientation d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ indiquant la position d'un observateur par rapport au plan de sortie du jet est fixée par l'angle polaire ψ. Cet angle est nul pour un observateur placé sur l'axe du jet dans la direction de l'écoulement, comme illustré sur la figure 1.1.

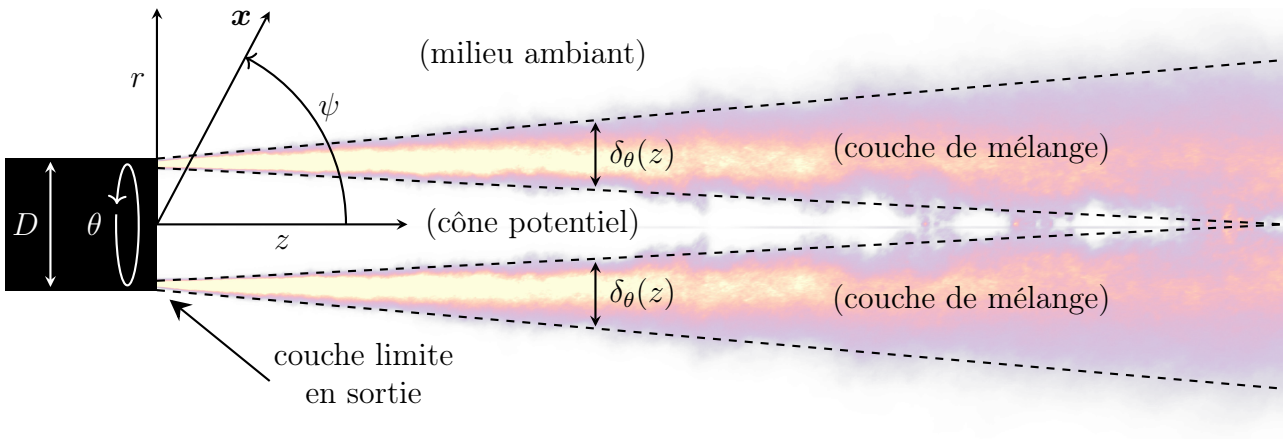

Figure 1.1 – Vue en coupe azimutale d'un jet rond et définition de différents paramètres et régions de l'écoulement ; un champ instantané de vorticité obtenu par simulation d'un jet à un nombre de Mach de 0.9 est représenté en nuances de violet et de jaune.

Un écoulement cisaillé peut être caractérisé par plusieurs nombres adimensionnels. Pour un jet libre, deux nombres de Reynolds, l'un basé sur le diamètre de la buse $\mathrm{Re}_D = u_j D/\nu$, où ν est la viscosité cinématique de l'air, et l'autre basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement en sortie de buse $\mathrm{Re}_\theta = u_j \delta_\theta(z=0)/\nu$, sont souvent utilisés dans la littérature. Ils donnent une indication de l'importance des effets visqueux sur l'écoulement et sur les couches de mélange à proximité de la buse. Un nombre de Mach peut également être défini à partir de la vitesse d'éjection u_j et de la célérité du son dans le milieu ambiant $c_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$, où $\gamma = 1.4$ est l'indice adiabatique de l'air, $R = 287.058$ J.kg^{-1}.K^{-1} est la constante spécifique de l'air et $T_0 = 273.15$ K est la température dans le milieu ambiant. Ce nombre de Mach, appelé nombre de Mach acoustique, s'écrit $\mathrm{M} = u_j/c_0$.

Les structures turbulentes évoluant dans les couches de mélange, celles de grande taille en particulier, sont fortement impliquées dans les mécanismes de production de bruit des jets libres et des jets impactants, comme expliqué par Jordan & Colonius [144] et Edgington-Mitchell [87] dans des articles de synthèse récents et comme précisé ci-après. Elles font l'objet de la suite de la présente section.

1.1.2 Structures cohérentes et ondes de Kelvin-Helmholtz

Au cours des années 1970-1980, de nombreuses études [55, 136, 139, 328], celles de Crow & Champagne [76] et de Brown & Roshko [58] notamment, ont montré que des structures cohérentes se développent dans les écoulements cisaillés, qu'ils soient laminaires ou turbulents. À titre d'illustration, une visualisation d'un écoulement de jet rond d'air laminaire en sortie de buse est montrée sur la figure 1.2. Elle a été obtenue par Schram [255] en introduisant, d'une part, de la fumée au niveau des bords intérieurs de la buse pour suivre l'évolution spatiale des couches de mélange et, d'autre part, un haut-parleur dans la buse pour forcer les couches limites à une fréquence spécifique et ainsi contrôler le développement initial de l'écoulement. La vitesse d'éjection est égale à 34 m.s^{-1}, le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la buse vaut $\mathrm{Re}_D = 93000$ et l'excitation peut être caractérisée par deux nombres de Strouhal, l'un basé sur le diamètre $\mathrm{St}_D = fD/u_j = 3$, où f est la fréquence d'excitation, et l'autre basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement en sortie $\mathrm{St}_\theta = f\delta_\theta(z=0)/u_j = 0.013$.

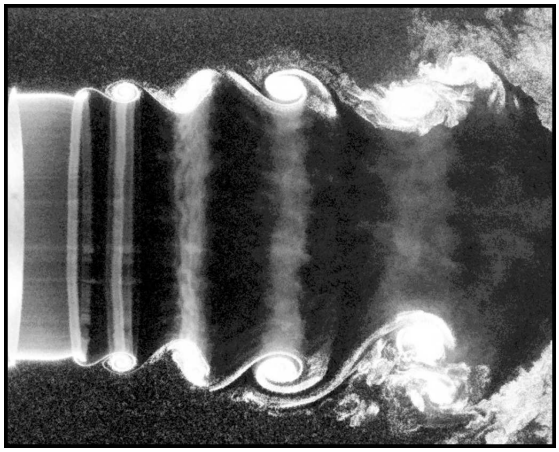

Figure 1.2 – Visualisation par fumée d'un jet rond d'air avec des couches limites laminaires excitées à une fréquence ; d'après Schram [255] ; vitesse d'éjection $u_j \simeq 34$ m.s^{-1}, nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = 93000$ et nombres de Strouhal associés à l'excitation $\mathrm{St}_\theta = 0.013$ et $\mathrm{St}_D = 3$.

Des structures tourbillonnaires toriques de différentes tailles sont observées sur la figure 1.2. Les plus petites se forment à proximité de la buse au cours d'un processus d'enroulement de la couche de cisaillement. Elles résultent de l'amplification puis de la saturation en amplitude de certaines ondes d'instabilité aérodynamiques, appelées ondes de Kelvin-Helmholtz, qui sont excitées par les perturbations acoustiques générées par le haut-parleur. Le processus d'enroulement a été visualisé et décrit en détail par Browand & Winant [57] pour une couche de mélange plane se situant entre deux écoulements d'eau à basse vitesse. Il est par ailleurs similaire à celui conduisant à la formation de tourbillons dans un écoulement stratifié incliné, visualisé par Thorpe [294] par exemple. Au cours et à la suite de leur formation, les petits tourbillons sont convectés vers l'aval par l'écoulement, interagissent les uns avec les autres et

forment des structures plus grosses en fusionnant. Le processus de fusion est appelé appariement tourbillonnaire. Il a été mis en évidence et examiné par Winant & Browand [326] et Ho & Huang [128] dans des couches de mélange planes, puis décrit en détail par Melander *et al.* [189] à l'aide de développements analytiques et de simulations numériques.

Analyse de stabilité linéaire

Le développement initial du jet visualisé par Schram [255] et, plus généralement, des couches de mélange laminaires peut être décrit par la théorie des instabilités linéaires en étudiant la réponse d'un écoulement soumis à une excitation périodique de faible amplitude. Cette approche a notamment été employée par Michalke [193-197] dans le but de caractériser le développement aérodynamique des jets. Dans le contexte de la théorie des instabilités linéaires, l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation de faible amplitude est modélisée dans l'espace de Fourier en fonction d'une fréquence et d'un nombre d'onde, comme expliqué par Michalke [196], Ho & Huerre [129] et Morris [208] dans des articles de synthèse. Pour une couche de mélange plane bidimensionnelle, les perturbations de vitesse dans la direction transverse à l'écoulement peuvent s'écrire sous la forme

$$v'(x,y,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{v}(y)e^{i(kx+\omega t)}\right] \ , \tag{1.2}$$

où $\hat{v}(y)$ est une amplitude, k est un nombre d'onde et ω est une pulsation. Le nombre d'onde k appartient à l'ensemble des nombres complexes. Il est lié à la pulsation par une relation de dispersion pouvant être obtenue à l'aide de différentes méthodes décrites en détail par Morris [208]. Cette relation permet notamment de déterminer le taux d'amplification d'une perturbation se développant à une fréquence spécifique à partir de la partie imaginaire du nombre d'onde. Les perturbations amplifiées se propagent sous la forme d'ondes de nature aérodynamique et sont appelées ondes de Kelvin-Helmholtz.

L'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz à proximité de la sortie de jets avec des couches limites laminaires a été étudiée expérimentalement par Freymuth [106] et Drubka *et al.* [84]. Pour cela, ces auteurs ont excité les couches de cisaillement des jets avec des haut-parleurs pour une large gamme de fréquences et ont déterminé les taux d'amplification associés à chaque fréquence à l'aide de mesures instationnaires effectuées avec un anémomètre à fil chaud. Avec cette approche, ils ont été en mesure d'obtenir expérimentalement la relation de dispersion et de la comparer à celle prédite par des analyses de stabilité linéaire [193, 205].

Les taux d'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz mesurés par Freymuth [106] et Drubka *et al.* [84] sont représentés en fonction du nombre de Strouhal St_θ sur la figure 1.3. La courbe de dispersion obtenue par Monkewitz & Huerre [205] à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire est aussi tracée. Elle indique une amplification pour $0 < \mathrm{St}_\theta \lesssim 0.045$ et présente un

maximum pour $\mathrm{St}_\theta \simeq 0.016$. Les valeurs de Monkewitz & Huerre [205] sont en excellent accord avec celles déterminées expérimentalement par Freymuth [106] et Drubka *et al.* [84]. Ceci montre qu'une analyse de stabilité linéaire fournit avec précision la réponse d'un écoulement cisaillé laminaire excité à une fréquence.

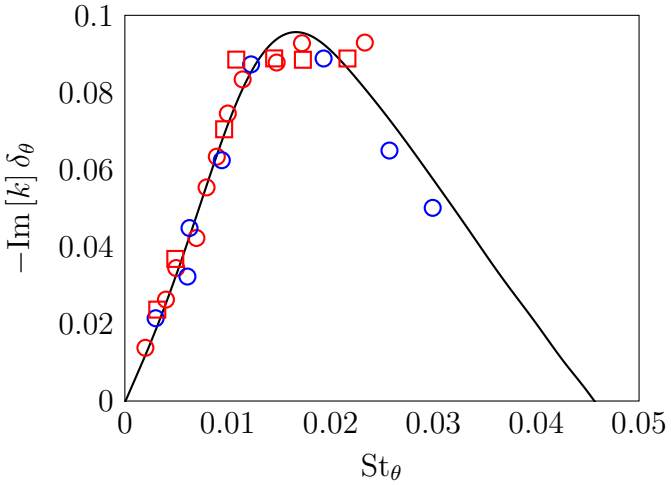

Figure 1.3 – Variations du taux d'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz avec le nombre Strouhal $\mathrm{St}_\theta = f\delta_\theta(z=0)/u_j$; données expérimentales de Freymuth [106] obtenues pour des jets avec des buses ○ coniques et □ rectangulaires et ○ de Drubka *et al.* [84] pour un jet rond ; —— courbe de dispersion obtenue par analyse de stabilité linéaire [205].

Pour un jet avec des couches limites laminaires en sortie de buse, les ondes les plus amplifiées, obtenues pour $\mathrm{St}_\theta \simeq 0.016$, sont généralement celles qui conduisent à la formation des premiers tourbillons dans les couches de mélange à proximité de la buse. Elles pilotent ainsi le développement initial des jets initialement laminaires. Cela a notamment été mis en évidence expérimentalement par Zaman [330] et numériquement par Kim & Choi [153] et Bogey & Bailly [37] en examinant des jets initialement laminaires avec différentes épaisseurs de couche limite en sortie. À titre d'indication, les couches de mélange du jet visualisé par Schram [255] sur la figure 1.2 sont excitées à une fréquence caractérisée par $\mathrm{St}_\theta = 0.013$, légèrement inférieure à celle des ondes les plus amplifiées.

1.1.3 Bruit d'appariement de tourbillons

En 1952, Lighthill [170] a montré à partir des équations de conservation de la mécanique des fluides que les interactions non linéaires sont susceptibles de générer un rayonnement acoustique. Par la suite, différentes sources de bruit ont été définies en fonction de la nature des interactions [95, 132]. Dans ce contexte, un appariement tourbillonnaire a été considéré comme une source de bruit d'origine aérodynamique fondamentale. En conséquence, les mécanismes de génération de bruit se produisant au cours de la fusion de tourbillons ont été étudiés à

de nombreuses reprises dans la littérature [38, 75, 131, 200]. Ils ont notamment été décrits en détail par Mitchell *et al.* [200] et Bogey *et al.* [38] en analysant des résultats de simulations aéroacoustiques directes.

Comme mentionné précédemment, la théorie des instabilités linéaires permet de prédire l'amplification d'une perturbation le long d'une couche de mélange laminaire. Les enroulements et appariements tourbillonnaires résultent cependant d'effets non linéaires. Ils sont donc le plus souvent étudiés avec des approches tenant compte de ces effets, comme des analyses de stabilité faiblement non linéaires [195, 204] et des simulations numériques directes [190, 210, 242].

Pour un jet rond avec des couches limites d'épaisseur significativement inférieure au diamètre de la buse, l'écoulement à proximité de la sortie de buse peut être modélisé par une couche de mélange plane en négligeant les effets liés à la courbure de la zone de cisaillement. De plus, dans le cas d'un jet isotherme subsonique, les mécanismes d'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz dominants sont généralement axisymétriques, comme montré par Michalke [191] à l'aide d'analyses de stabilité linéaire et par Gaster [107] en effectuant des développements analytiques. Ainsi, le développement initial d'un jet initialement laminaire avec des couches de mélange fines comparées au diamètre de la buse peut être étudié de manière simplifiée en considérant une couche de mélange plane bidimensionnelle. Pour cette raison, mais aussi afin d'améliorer la compréhension des mécanismes physiques responsables de la persistance des structures cohérentes dans les écoulements cisaillés et la transition de ces derniers vers un état turbulent, un grand nombre d'études expérimentales portant sur des couches de mélange planes ont été menées au cours des années 1970-1980 [17, 56, 58, 128, 216, 221, 326].

Après les premières simulations de couches de mélange incompressibles réalisées par Riley & Metcalfe [238], le rayonnement acoustique d'une couche de mélange bidimensionnelle a été simulé à la fin des années 1990 par Colonius *et al.* [75] et Bogey *et al.* [38] en résolvant numériquement les équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires. Des couches de mélange bidimensionnelles similaires à celles considérées par ces auteurs ont été simulées au cours de la présente thèse. À titre d'illustration, une visualisation de l'une d'entre elles est présentée sur la figure 1.4. Le développement aérodynamique et le rayonnement acoustique de l'écoulement sont représentés par des champs instantanés de vorticité et de fluctuations de pression, respectivement en blanc et en bleu et rouge. La couche de mélange se situe entre deux écoulements d'air isothermes de vitesses différentes caractérisées par les nombres de Mach $\mathrm{M}_1 = U_1/c_0 = 0.3$ et $\mathrm{M}_2 = U_2/c_0 = 0.7$, où U_2 et U_1 sont les vitesses des écoulements lent et rapide. Elle est excitée à deux fréquences de manière à ce que des enroulements puis des appariements tourbillonnaires se produisent périodiquement à des positions fixes dans l'écoulement. En aval de l'excitation, aux alentours de la zone de cisaillement, l'empreinte d'ondes de Kelvin-Helmholtz est visible dans le champ des fluctuations de pression. L'amplitude de ces ondes croît dans la direction de l'écoulement, puis sature à cause des effets non linéaires,

ce qui conduit à un enroulement de la couche de cisaillement et ainsi à la formation de tourbillons. Plus loin en aval, des appariements tourbillonnaires ont lieu. Ils produisent des ondes acoustiques qui se propagent des deux côtés de la zone de cisaillement.

Malgré la forte augmentation des moyens de calcul au cours des dernières décennies, le coût numérique d'une simulation d'un écoulement turbulent tridimensionnel et de son rayonnement acoustique reste élevé. Dans ce contexte, une couche de mélange bidimensionnelle apparaît comme un écoulement simple pouvant être examiné afin de caractériser le rayonnement acoustique produit par des appariements tourbillonnaires et aussi d'étudier les effets des paramètres physiques (vitesse, température, etc.) sur le bruit d'origine aérodynamique [101, 120, 209]. De plus, en raison notamment de l'existence de résultats de simulations directes [38, 75], une couche de mélange bidimensionnelle est souvent considérée comme un cas test permettant de vérifier un code de simulation [7, 161], des approches hybrides basées sur des analogies acoustiques [38, 75, 180, 211, 254], ou encore des méthodes d'analyse de sensibilité qui requièrent des moyens de calcul importants [11, 79, 83, 157, 173, 263, 322, 337], comme les méthodes adjointes par exemple.

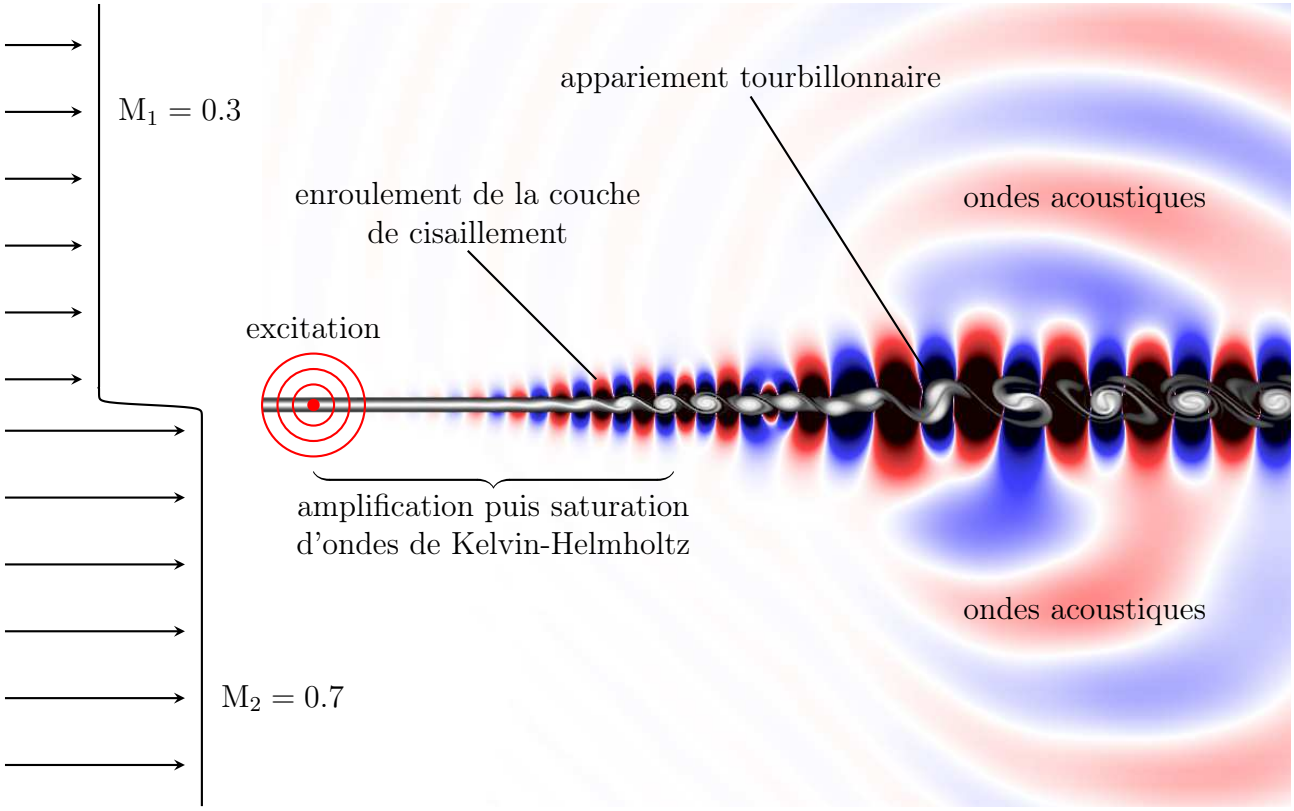

Figure 1.4 – Représentation du développement aérodynamique et du rayonnement acoustique d'une couche de mélange bidimensionnelle contrôlée par une excitation harmonique.

Remarques sur les jets turbulents en sortie de buse

En examinant expérimentalement les propriétés des champs aérodynamiques et acoustiques de jets à différents nombres de Reynolds Re_D, Zaman [331] a mis en évidence que le rayonnement acoustique d'un écoulement de jet réaliste, à l'échelle d'un moteur d'avion par exemple, n'est pas composé de bruit d'appariement. Les résultats de Zaman [331] ont conduit à distinguer l'état des jets en sortie de buse en fonction du nombre de Reynolds Re_D. Pour $\mathrm{Re}_D \lesssim 10^5$, les jets sont pleinement laminaires en sortie de buse. Leur couche limite présente un pic d'intensité des fluctuations de vitesse inférieur à 1% de la vitesse d'éjection et le profil radial de vitesse moyenne en sortie de buse est semblable à celui d'une couche limite de Blasius laminaire. Le développement initial de ces jets est caractérisé par des enroulements de tourbillons cohérents et des appariements, similaires à ceux visibles sur la figure 1.2 obtenue par Schram [255] pour un jet à $\mathrm{Re}_D = 93000$. Pour $10^5 \lesssim \mathrm{Re}_D \lesssim 5 \times 10^5$, les jets sont initialement transitionnels. L'intensité maximale des fluctuations de vitesse en sortie de buse varie entre 1% et 10% de la vitesse d'éjection et augmente avec le nombre de Reynolds. Pour $\mathrm{Re}_D \gtrsim 5 \times 10^5$, les jets sont considérés comme initialement turbulents. Ils présentent des fluctuations de vitesse en sortie de buse d'intensité maximale de l'ordre de 10% de la vitesse d'éjection et le profil de vitesse en sortie de buse est proche de celui d'une couche limite se développant et transitionnant vers un état turbulent sur une plaque plane [50]. Pour ces jets, des enroulements et des appariements tourbillonnaires ne sont pas observés. À titre d'indication, pour un moteur d'avion, le nombre de Reynolds est le plus souvent supérieur à 10^7 et les couches limites sont fortement turbulentes en sortie de buse.

Ainsi, bien que les appariements tourbillonnaires constituent une source de bruit élémentaire en aéroacoustique, le rayonnement acoustique des jets libres est rarement composé de bruit d'appariement. Il résulte plutôt du mélange turbulent se produisant dans les couches de mélange, du développement d'ondes de Kelvin-Helmholtz et des structures cohérentes qui leur sont associées [127, 146, 158, 206, 251, 290].

1.1.4 Bruit de mélange dans les jets libres subsoniques

Le bruit d'un jet subsonique libre est généralement appelé bruit de mélange. Il est large bande et résulte principalement des structures turbulentes qui se développent et interagissent dans les couches de mélange et à la fin du cône potentiel [26, 39, 52], comme expliqué par Tam *et al.* [290] et Bailly & Fujii [10] dans des articles de synthèse. À l'aide de techniques de localisation de source, Breen & Ahuja [52], Lee & Bridges [167] et Bogey *et al.* [40] ont montré que les sources acoustiques sont à haute fréquence près de la buse et à plus basse fréquence plus loin en aval.

Il est accepté que le bruit de mélange peut être décomposé en deux composantes associées

respectivement aux petites et aux grandes échelles de la turbulence [164, 282, 288, 315, 316]. Les spectres acoustiques de ces composantes ont été modélisés par Tam *et al.* [288] en analysant un très grand nombre de mesures expérimentales. Ils sont appelés spectres universels et *Large Scale Similarity (LSS)* et *Fine Scale Similarity (FSS) spectra* en anglais. Ils sont tracés en fonction du nombre de Strouhal St_D sur la figure 1.5 en utilisant une échelle logarithmique. Sur cette figure, deux spectres mesurés par Pinker [224] pour un jet rond à un nombre de Mach de 0.74 pour des angles polaires $\psi = 30°$ et $\psi = 90°$ sont également représentés. Les spectres universels des grandes et des petites échelles sont large bande et ont la forme d'une bosse. Leurs fréquences centrales et leurs amplitudes ont été ajustées pour correspondre de façon optimale aux mesures de Pinker [224]. Pour les deux angles, les spectres universels sont conformes aux spectres mesurés. Le spectre mesuré en aval pour $\psi = 30°$ présente un maximum pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.17$. En comparaison, celui pour $\psi = 90°$ est plus large et son amplitude maximale est obtenue pour un nombre de Strouhal plus élevé de $\mathrm{St}_D \simeq 0.32$.

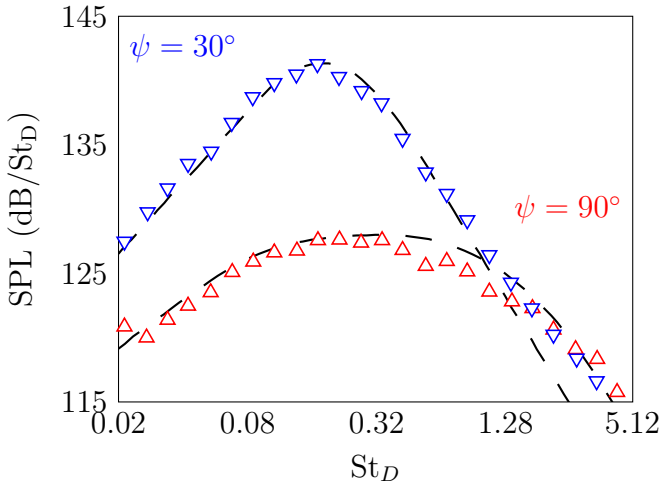

Figure 1.5 – Spectres acoustiques mesurés par Pinker [224] pour jet rond à un nombre de Mach de 0.74 pour des angles polaires de ▽ 30° et △ 90° et — — spectres universels de Tam *et al.* [288].

La première composante du bruit de mélange est associée aux petites structures turbulentes se développant dans les couches de mélange. En raison de la quasi-isotropie de ces structures, elle est caractérisée par un rayonnement presque omnidirectionnel et présente une faible corrélation azimutale [286]. Tam & Auriault [286] ont proposé un modèle semi-empirique pour prédire ce rayonnement.

La seconde composante du bruit de mélange résulte des grandes structures cohérentes qui croissent en taille dans les couches de mélange, sont accélérées à la fin du cône potentiel et finalement se désintègrent de manière intermittente [26, 39, 146]. En modélisant les grandes structures comme des ondes d'instabilité de Kelvin-Helmholtz dont l'amplitude augmente puis diminue dans la direction de l'écoulement, Tam *et al.* [290] et Suzuki [269] ont indiqué que

le rayonnement acoustique de ces structures peut être composé d'ondes de Mach résultant des variations en amplitude des ondes d'instabilité. Ils ont également montré que ces ondes de Mach rayonnent principalement vers l'aval pour un angle polaire de 30°.

Les sources acoustiques liées à la seconde composante sont fortement corrélées en azimut et celles qui contribuent le plus au bruit rayonné sont contenues dans les trois premiers modes azimutaux. Cela a tout d'abord été suggéré par des développements analytiques effectués par Michalke & Fuchs [192], puis mis en évidence expérimentalement par Juvé *et al.* [147] et Cavalieri *et al.* [65].

Effets de convection et de réfraction

Le rayonnement acoustique d'un jet subit des effets de convection et de réfraction, décrits en détail par Ribner [237]. La convection des sources de bruit conduit à une augmentation des niveaux sonores en aval et à leur diminution en amont. Lighthill [170] et Ffowcs-Williams [96] ont montré que les variations de l'intensité acoustique avec l'angle polaire dues aux effets de convection peuvent être caractérisées par le facteur d'amplification

$$C(\psi) = \frac{1}{|1 - \mathrm{M}\cos\psi|^5} \,. \tag{1.3}$$

Les effets de réfraction résultent des petites échelles de la turbulence [285]. Ils sont responsables de la présence d'une zone de silence, appelée cône de silence, se situant en aval de la fin du cône potentiel. Cette zone a été mise en évidence expérimentalement par Atvars *et al.* [6] en plaçant un haut-parleur dans le cône potentiel d'un jet à nombre de Mach de 0.3 et en mesurant les niveaux acoustiques pour différents angles polaires, et par Freund & Fleischman [102] en appliquant une méthode de tracé de rayons à des champs moyens et instationnaires issus d'une simulation directe d'un jet à un nombre de Mach de 0.9 [104].

1.1.5 Composantes de bruit additionnelles dans les jets supersoniques

Lorsque la vitesse d'éjection d'un jet est supérieure à la célérité du son en sortie de buse, le jet est supersonique et des composantes de bruit peuvent s'ajouter au bruit de mélange. Elles ont fait l'objet de nombreux articles de synthèse, comme ceux de Tam [274] et Bailly & Fujii [10] par exemple, et sont décrites brièvement dans la suite.

Tout d'abord, pour un jet supersonique, la vitesse de convection des structures tourbillonnaires se développant dans les couches de mélange, approximativement donnée par $u_c \simeq (2/3)u_j$, est susceptible d'être supersonique. Dans ce cas, les structures turbulentes génèrent des ondes de Mach par un mécanisme expliqué par Tam [284] en traitant le problème d'une paroi ondulée se déplaçant à une vitesse supersonique.

Ensuite, la présence d'un réseau en cellules de choc pouvant se trouver dans les jets en raison d'une différence de pression en sortie de buse est responsable d'un rayonnement acoustique appelé bruit de choc. Ce rayonnement est constitué de fortes composantes tonales, appelées bruit de *screech*, et d'une composante large bande, appelée bruit de choc large bande. À titre d'exemple, un spectre acoustique d'un jet supersonique contenant des cellules de choc obtenu par André [2] pour un angle polaire $\psi = 120°$ est tracé sur la figure 1.6. Le bruit de mélange et le bruit de choc sont mis en évidence en bleu et en rouge respectivement. Pour $\mathrm{St}_D \gtrsim 0.24$, le bruit de choc est dominant. Cinq pics associés au bruit de *screech* sont observés. Le plus fort est obtenu pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.3$. Il émerge du bruit large bande de plus de 25 dB. Les quatre autres pics sont visibles pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.6$, 0.9, 1.2 et 1.5, des nombres de Strouhal associés aux quatre premiers harmoniques du pic dominant. En plus de ces pics, deux bosses centrées pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.44$ et $\mathrm{St}_D \simeq 0.82$ sont visibles. Elles sont liées au bruit de choc large bande.

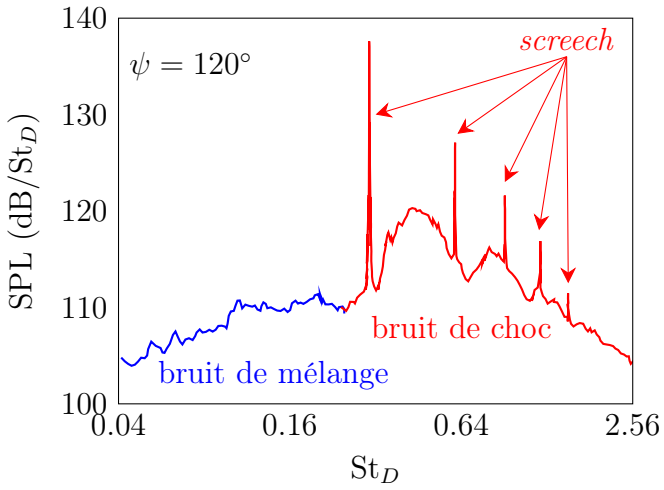

Figure 1.6 – Spectre acoustique d'un jet supersonique à nombre de Mach de 1.35 contenant un réseau de cellules de choc ; données expérimentales de André [2].

Le bruit de *screech* a été étudié théoriquement et expérimentalement par Powell [226] dès le début des années 1950. Cet auteur a mis en évidence que les composantes tonales de ce bruit résultent de boucles de rétroaction aéroacoustique impliquant des structures cohérentes convectées dans le jet et des ondes acoustiques remontant l'écoulement. Ces boucles de rétroaction ont été caractérisées par Panda [218] et leurs propriétés ont été décrites par Raman [235] et Edgington-Mitchell [87]. Elles se décomposent en quatre processus, introduits initialement par Powell [228] pour des jets interagissant avec un coin.

Le premier processus est le développement et la croissance de structures cohérentes provenant de l'amplification et de la saturation d'ondes de Kelvin-Helmholtz. Au cours de leur convection, ces structures interagissent avec le réseau en cellules de choc et génèrent des ondes acoustiques par un mécanisme de fuite de choc décrit en détail par Suzuki & Lele [271] et Edgington-Mitchell *et al.* [90]. Cela constitue le second processus. Les ondes produites se

propagent et remontent l'écoulement. Leur propagation de la position de la source acoustique à la buse correspond au troisième processus. Enfin, le quatrième processus est associé à l'excitation de nouvelles ondes de Kelvin-Helmholtz par les ondes acoustiques. Il a lieu dans les couches de mélange se situant à proximité de la buse.

Au début des années 2000, Shen & Tam [261] ont réalisé des simulations numériques de jets supersoniques générant du bruit de *screech*. En examinant leurs résultats, ils ont avancé l'idée que les ondes fermant les boucles de rétroaction ne sont pas des ondes acoustiques se propageant en champ libre mais certaines ondes supportées par les jets, appelées ondes neutres ou ondes guidées, qui remontent l'écoulement sans variations significatives de leur amplitude. Ceci a par la suite été confirmé par différents auteurs et notamment Gojon *et al.* [112] et Edgington-Mitchell *et al.* [88] en montrant que les fréquences et la structure spatiale des ondes fermant les boucles de rétroactions sont très similaires à celles des ondes guidées.

1.1.6 Ondes guidées dans les jets libres

Les ondes guidées ont tout d'abord été étudiées par Tam & Hu [278] en examinant les propriétés de stabilité de jets modélisés par des couches de mélange annulaires infiniment fines et en négligeant la contraction du cône potentiel dans la direction de l'écoulement. Ces auteurs ont montré qu'un jet supporte des ondes aux propriétés proches de celles d'ondes acoustiques piégées dans un conduit cylindrique. Ces ondes sont appelées ondes neutres ou ondes guidées car elles se propagent sans modification de leur amplitude et sont principalement confinées à l'intérieur du cône potentiel d'un jet [31, 278]. Leurs propriétés ont été décrites par Towne *et al.* [295], Jordan *et al.* [145], Bogey [31] et Edgington-Mitchell & Nogueira [91] dans des articles récents. Les ondes guidées sont organisées en modes azimutaux et radiaux. Elles vérifient des relations de dispersion spécifiques liant fréquence et nombre d'onde axial.

À titre d'illustration, les courbes de dispersion des ondes guidées de nature axisymétrique pour des jets à des nombres de Mach de 0.6 et de 0.9 sont représentées en fonction du nombre d'onde axial normalisé $k_z D$ et du nombre de Strouhal St_D sur la figure 1.7. Elles sont associées aux quatre premiers modes radiaux. Elles ont été obtenues en modélisant les jets par des couches de mélange annulaires infiniment fines. La ligne sonique $v_\phi = -c_0$, où $v_\phi = \omega/k_z$ est la vitesse de phase axiale, et la ligne $v_\phi = -c_0 + u_j$ sont également tracées. Pour chaque mode radial, la courbe de dispersion commence sur la ligne sonique, puis, à mesure que le nombre d'onde augmente en absolue, les courbes s'éloignent de cette ligne et se rapprochent de la ligne $v_\phi = -c_0 + u_j$. Ainsi, la vitesse de phase des ondes guidées est initialement proche de celle d'une onde acoustique se propageant en champ libre, puis similaire à celle d'une onde remontant l'écoulement à l'intérieur du cône potentiel des jets.

L'amplitude des ondes guidées est maximale à l'intérieur des jets. Cependant, celles se propageant avec une vitesse de phase proche de la célérité du son dans le milieu ambiant

ont une amplitude significative à l'extérieur des jets, en particulier près des couches de mélange [276, 278]. Elles sont présentes dans un jet seulement pour certaines gammes de fréquences et résultent d'un couplage entre les ondes acoustiques en champ libre et le jet qui se comporte comme un guide d'onde [145]. Plusieurs études récentes ont mis en évidence le rôle essentiel de ces ondes guidées dans les mécanismes de génération de bruit des jets libres sans cellules de choc [31, 33, 252, 295, 335, 336] et dans les phénomènes de résonance aéroacoustique pouvant se produire dans les jets supersoniques [88, 89, 112, 119, 179, 215, 261], les jets effleurant une plaque [145, 277] et les jets impactants [44, 94, 118, 143, 219, 276, 279, 305].

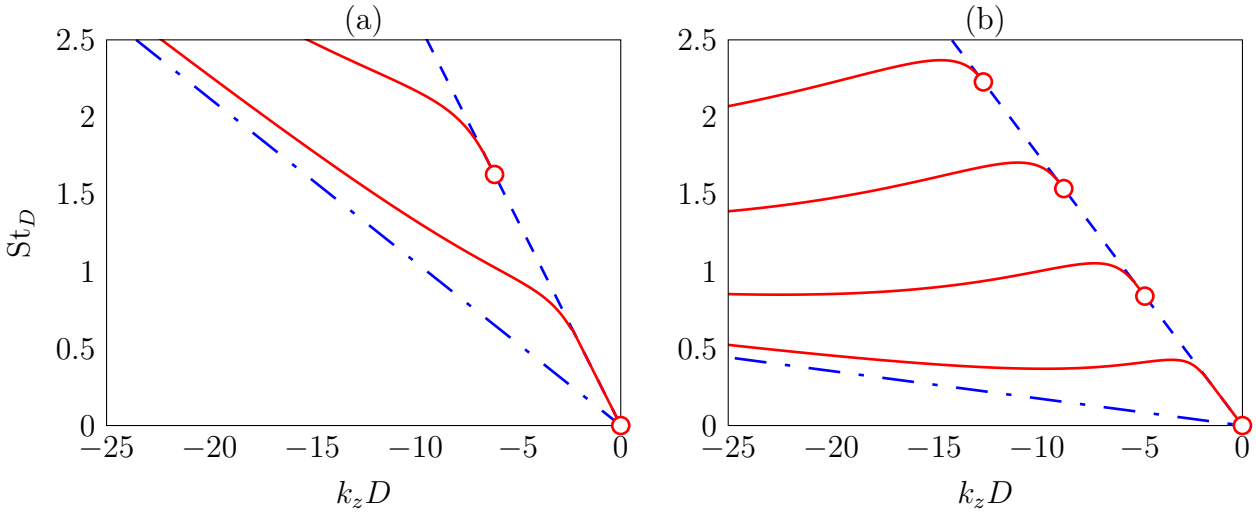

Figure 1.7 – Courbes de dispersion des ondes guidées de nature axisymétrique pour des jets à des nombres de Mach de (a) 0.6 et (b) 0.9 et pour les quatre premiers modes radiaux ; —— courbes de dispersion, ○ limite basse des ondes guidées, – – – $\omega/k_z = -c_0$ et — · — $\omega/k_z = -(c_0 - u_j)$. Les courbes de dispersion ont été obtenues en modélisant les jets par des couches de mélange annulaires infiniment fines.

1.1.7 Composantes de bruit tonales dans les jets impactants

Au cours des années 1960-1970, des études expérimentales effectuées par Marsh [186], Wagner [318] et Neuwerth [213] ont montré qu'un jet subsonique à un nombre de Mach supérieur à 0.65 impactant une plaque placée perpendiculairement à l'axe du jet produit d'intenses composantes de bruit tonales pour des distances plaque-buse relativement courtes. Par la suite, Ho & Nosseir [130] ont mis en évidence que ces composantes tonales résultent de boucles de rétroaction aéroacoustique. Ces dernières sont semblables à celles associées au bruit de *screech*. Elles ont été décrites en détail par Edgington-Mitchell [87] dans un article récent. Elles impliquent des structures tourbillonnaires cohérentes convectées par l'écoulement et, le plus souvent, des ondes guidées se propageant vers l'amont à une vitesse proche de celle du son dans le milieu ambiant.

À titre d'illustration, un jet à un nombre de Mach de 0.9 impactant une plaque située à une distance de 6 rayons de buse du plan de sortie est représenté par des isosurfaces de vorticité et des fluctuations de pression obtenues dans une coupe azimutale sur la figure 1.8. Il a été simulé au cours de la présente thèse. Une structure torique de grande taille peut être observée près de la plaque impactée pour $z = 4r_0$. Lorsqu'elle interagit avec cette dernière, des ondes acoustiques sont produites. Elles se propagent jusqu'à la buse du jet et excitent des ondes de Kelvin-Helmholtz dans la zone de cisaillement. Ceci conduit à la formation d'une nouvelle structure cohérente et ainsi à la fermeture de la boucle de rétroaction. L'établissement de cette boucle conduit à la présence d'oscillations auto-entretenues dans les couches de mélange et à la génération d'un rayonnement acoustique tonal intense. Ce rayonnement est caractérisé par des fronts d'onde circulaires et régulièrement espacés, bien visibles à proximité de la buse cylindrique sur la figure 1.8.

En général, les oscillations peuvent être de nature axisymétrique ou hélicoïdale et plusieurs types de résonances peuvent coexister [4, 44, 118, 149, 219, 279, 323]. En particulier, pour le jet représenté sur la figure 1.8, l'absence de déphasage des ondes acoustiques de part et d'autre de la buse indiquent que le mode d'oscillation dominant est de nature axisymétrique.

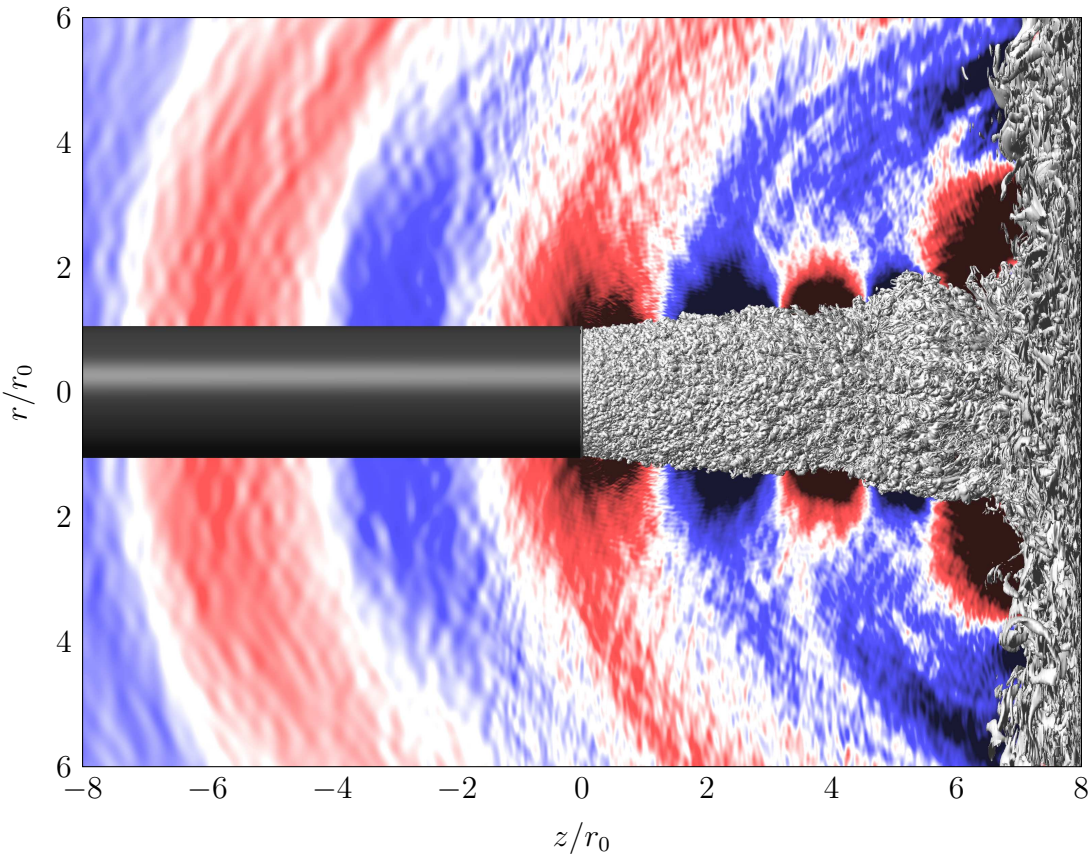

Figure 1.8 – Vue instantanée de l'écoulement et du rayonnement acoustique d'un jet impactant à nombre de Mach de 0.9 ; (gris) isosurfaces de la norme de la vorticité et (bleu/rouge) fluctuations de pression dans une coupe azimutale.

Modélisation de la boucle de rétroaction

Les mécanismes de rétroaction présents dans les jets impactants sont similaires à ceux observés dans d'autres écoulements résonants [241], comme les écoulements affleurant une cavité par exemple [109, 110, 244]. Comme pour ces derniers, les fréquences des composantes de bruit tonales des jets impactants sont organisés en étages et varient de manière discontinue avec les paramètres physiques (distance plaque-buse et vitesse d'éjection) [130, 143, 213, 219, 305]. À titre d'exemple, les nombres de Strouhal des composantes tonales dominantes et secondaires mesurés par Panickar & Raman [219] pour un jet rond à un nombre de Mach de 0.9 sont représentés en fonction de la distance plaque-buse L sur la figure 1.9. Ils sont organisés en étages. Ils diminuent globalement avec la distance plaque-buse, mais augmentent de manière discontinue en changeant d'étage pour certaines distances spécifiques, à savoir $L \simeq 2.6D$, $4.1D$ et $4.6D$.

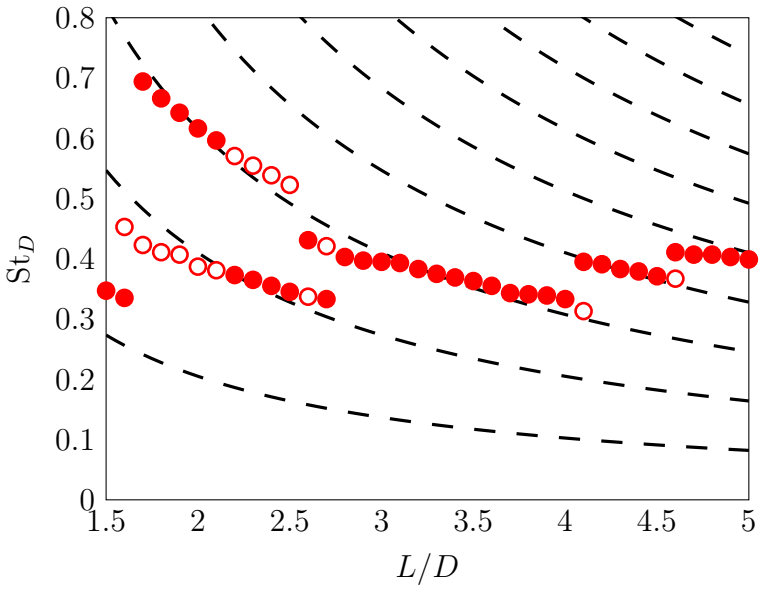

Figure 1.9 – Variations des nombres de Strouhal des composantes tonales ● dominantes et ○ secondaires avec la distance plaque-buse mesurés par Panickar & Raman [219] pour un jet rond à un nombre de Mach de 0.9 et – – nombres de Strouhal fournis par le modèle de rétroaction (1.6).

Dans la littérature sur les jets impactants, différents modèles de rétroaction ont été proposés afin de déterminer les fréquences des composantes tonales [3, 118, 130, 143, 227, 324]. Le premier a été formulé par Ho & Nosseir [130]. Il est similaire à un modèle introduit par Powell [228] dans les années 1950 pour des résonances résultant d'interactions entre un jet et un coin. Ho & Nosseir [130] ont supposé que l'instauration d'oscillations auto-entretenues nécessite un nombre entier N d'ondes acoustiques et de structures tourbillonnaires entre la buse

et la plaque, ce qui conduit à

$$N = \frac{L}{\lambda_{\text{aero}}} + \frac{L}{\lambda_{\text{acous}}} , \tag{1.4}$$

où λ_{aero} et λ_{acous} sont les longueurs d'onde des perturbations de nature aérodynamique et acoustique. L'équation (1.4) peut être reformulée pour faire apparaître la fréquence en exprimant les longueurs d'onde en fonction des vitesses axiales moyennes des perturbations acoustique et aérodynamique entre la plaque et la buse, égales à $u_{\text{aero}} \simeq 0.62u_j$ et $u_{\text{acous}} \simeq c_0$ dans les mesures de Ho & Nosseir [130] par exemple. Cela mène à la relation

$$\frac{N}{f} = \frac{L}{u_{\text{aero}}} + \frac{L}{u_{\text{acous}}} , \tag{1.5}$$

qui est proche de celle obtenue par Powell [227] qui inclut un paramètre de retard de phase [324].

La formule (1.5) peut se réécrire en fonction du nombre de Strouhal St_D de la façon suivante

$$\frac{N}{\text{St}_D} = \frac{L}{D}\left(\frac{u_j}{u_{\text{aero}}} + \frac{u_j}{u_{\text{acous}}}\right) . \tag{1.6}$$

Elle fournit un nombre de Strouhal pour chaque entier N correspondant à l'ordre du mode de rétroaction. Les nombres de Strouhal obtenus pour les neuf premières valeurs de N, pour $u_{\text{aero}} = 0.65u_j$ et $u_{\text{acous}} = c_0$ sont représentés en fonction de la distance plaque-buse sur la figure 1.9 pour un jet à un nombre de Mach de 0.9. Ils augmentent avec la valeur de N et, pour un entier N donné, diminuent avec la distance plaque-buse. Ils sont en accord avec les nombres de Strouhal mesurés par Panickar & Raman [219].

Fermeture des boucles de rétroaction par les ondes guidées

Alors que Ho & Nosseir [130] avaient fait l'hypothèse que les ondes fermant les boucles de rétroaction sont des ondes acoustiques se propageant en champ libre, Tam & Ahuja [276] et ensuite de nombreux auteurs [44, 94, 118, 143, 219, 279, 305] ont montré qu'il s'agit d'ondes guidées. Pour mettre cela en évidence, les nombres de Strouhal moyens des composantes tonales, déterminés en calculant la moyenne des fréquences tonales obtenues pour une large gamme de distances plaque-buse pour des jets impactants subsoniques [130, 213, 219, 276, 318], sont représentés en fonction du nombre de Mach sur la figure 1.10. Les nombres de Strouhal des ondes guidées les moins dispersées pour les deux premiers modes azimutaux sont aussi tracés. Ces ondes ont une vitesse de groupe $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_z$ qui ne varie pas avec le nombre d'onde axial, et vérifient ainsi la relation $\mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k_z^2 = 0$. Pour tous les nombres de Mach et les deux modes azimutaux, les fréquences moyennes des composantes tonales correspondent aux fréquences des ondes guidées les moins dispersées. Pour cette raison, Tam & Ahuja [276] ont conclu que ce sont ces ondes guidées qui ferment les boucles de rétroaction des jets impactants.

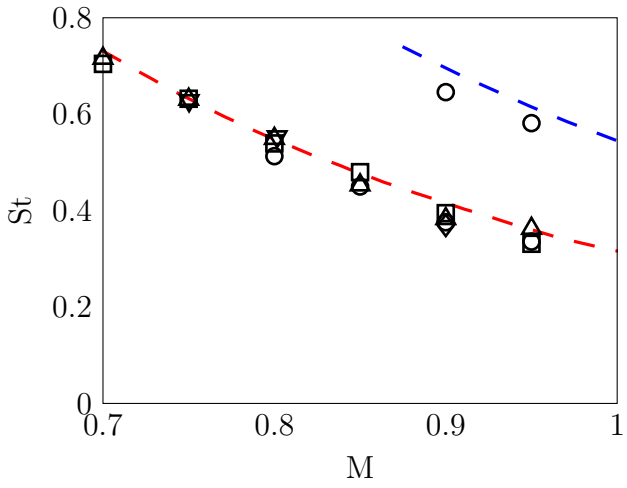

Figure 1.10 – Variations des nombres de Strouhal moyens des composantes tonales avec le nombre de Mach ; données expérimentales de □ Wagner [318], △ Neuwerth [213], ◇ Ho & Nosseir [130], ▽ Tam & Ahuja [276] et ○ Panickar & Raman [219] ; nombres de Strouhal des ondes guidées les moins dispersées pour — — le mode axisymétrique et — — le premier mode hélicoïdal.

1.2 Sensibilité des couches de mélange et des jets aux paramètres physiques

Dans cette section, la sensibilité du développement aérodynamique et du rayonnement acoustique des couches de mélange et des jets à différents paramètres physiques est présentée à partir de résultats de la littérature. Les effets du nombre de Reynolds, du nombre de Mach et des conditions de sortie sur les mécanismes de production de bruit dans les jets libres et les jets impactants sont notamment décrits.

1.2.1 Influence du rapport de vitesse

En examinant expérimentalement le développement aérodynamique de couches de mélange planes, Brown & Roshko [58] ont mis en évidence que le rapport de vitesse

$$R = \frac{U_2 - U_1}{U_1 + U_2}\,, \tag{1.7}$$

où U_2 et U_1 sont les vitesses des écoulements rapide et lent, influence fortement l'épaississement des couches de mélange dans la direction de l'écoulement. Par définition, ce rapport donne une indication de l'importance des effets de cisaillement vis-à-vis des effets de convection. Il est égal à 1 pour une couche de mélange avec $U_1 = 0$.

Les taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement $\mathrm{d}\delta_\theta/\mathrm{d}x$ obtenus dans des

études expérimentales de la littérature [58, 198, 199, 232, 264, 329] sont représentés en fonction du rapport de vitesse sur la figure 1.11(a). Ils augmentent avec le rapport de vitesse, indiquant que les couches de mélange s'élargissent plus rapidement pour des rapports de vitesse plus élevés. En particulier, le taux de croissance pour $R = 1$ est approximativement quatre fois supérieur à celui pour $R = 0.2$, qui correspond à un rapport U_2/U_1 égal à 1.5.

Les effets du rapport de vitesse sur le développement des ondes d'instabilité de Kelvin-Helmholtz ont été caractérisés à l'aide d'analyses de stabilité linéaire [197, 205]. Monkewitz & Huerre [205] ont calculé numériquement la relation de dispersion d'une couche de mélange plane non visqueuse en considérant différentes valeurs de ce rapport. Le taux d'amplification des ondes d'instabilité les plus amplifiées obtenu par ces auteurs est représenté en fonction du rapport de vitesse sur la figure 1.11(b). Il croît de manière quasi-linéaire avec le rapport de vitesse, comme le taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement sur la figure 1.11(a). L'augmentation du taux d'épaississement des couches de mélange résulte ainsi du caractère plus instable de ces dernières pour des rapports de vitesse plus élevés.

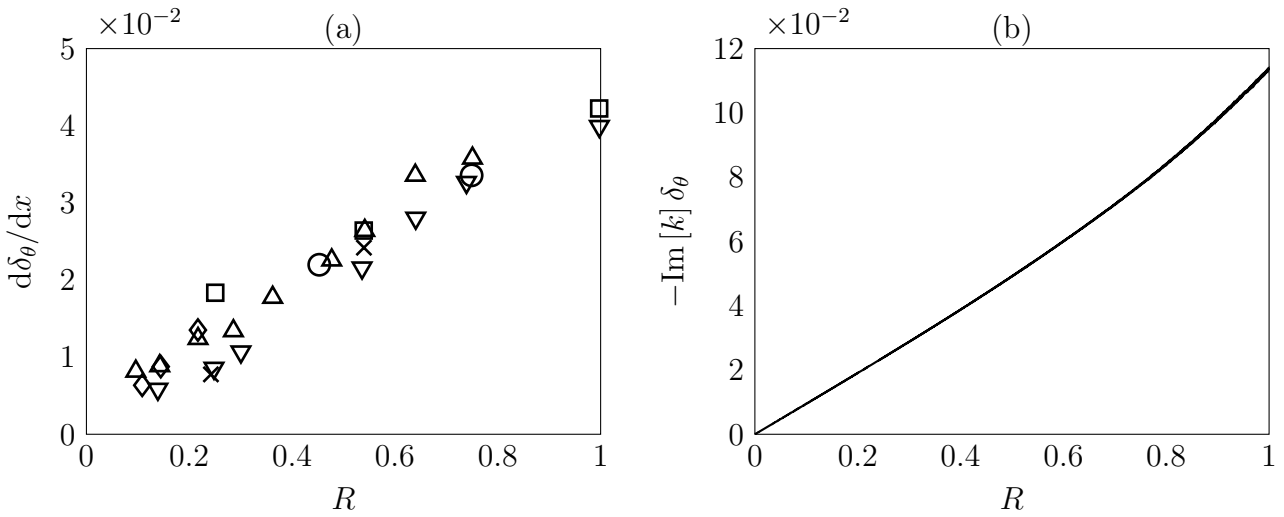

Figure 1.11 – Variations (a) du taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement en fonction du rapport de vitesse ; données expérimentales de ○ Brown & Roshko [58], △ Miles & Shih [198], □ Mills [199], ◇ Pui [232], ▽ Spencer & Jones [264] et × Yule [329] et (b) du taux d'amplification de l'onde de Kelvin-Helmholtz la plus amplifiée en fonction du rapport de vitesse d'après l'analyse de stabilité linéaire de Monkewitz & Huerre [205].

1.2.2 Influence de la compressibilité

Des études expérimentales ont mis en évidence que lorsque le nombre de Mach croît, des effets de compressibilité surviennent et modifient la dynamique des écoulements cisaillés [58, 73, 105, 169, 221, 248]. Un de ces effets est la diminution du taux de croissance des couches de mélange. Papamoschou & Roshko [221] ont caractérisé cet effet à l'aide du

nombre de Mach convectif, introduit par Bogdanoff [23] et défini par

$$\mathrm{M}_c = \frac{U_2 - U_1}{c_2 + c_1} \,, \tag{1.8}$$

où c_2 et c_1 sont les vitesses du son dans les écoulements rapide et lent.

Le taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement $\mathrm{d}\delta_\theta/\mathrm{d}x$ déterminé dans plusieurs expériences [71, 73, 111, 122, 221, 246] est représenté en fonction du nombre de Mach convectif sur la figure 1.12. Afin d'isoler les effets de compressibilité, ce taux de croissance est normalisé par sa valeur pour des écoulements incompressibles, donnée par la relation $(\mathrm{d}\delta_\theta/\mathrm{d}x)_{\text{incomp.}} = 0.181R$ [58]. Pour $\mathrm{M}_c < 1$, le taux de croissance des couches de mélange diminue significativement avec le nombre de Mach convectif. Par exemple, les effets de compressibilité conduisent à une réduction de près de 50% du taux de croissance pour $\mathrm{M}_c = 0.5$ et d'environ 80% pour $\mathrm{M}_c = 1$.

Des écarts significatifs peuvent être observés entre les études expérimentales sur la figure 1.12, indiquant que le nombre de Mach convectif n'est pas le seul paramètre caractérisant les effets de compressibilité. Ils sont dus à des effets de densité et de température, selon Slessor *et al.* [262], qui ont par ailleurs introduit un paramètre de compressibilité permettant d'agréger les différents taux de croissance représentés sur la figure 1.12 autour d'une unique courbe.

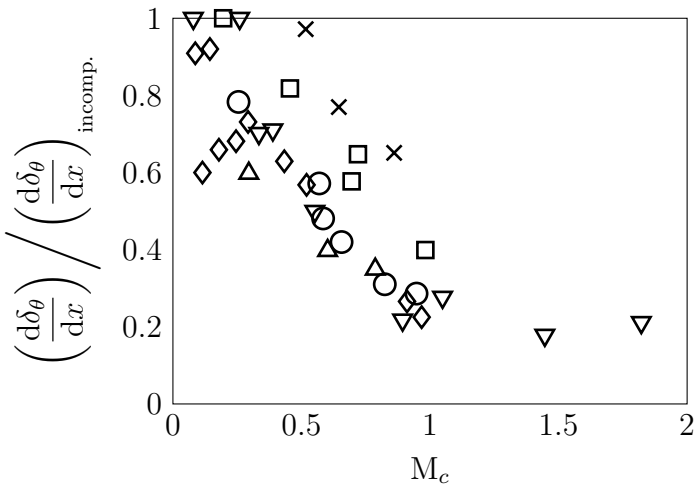

Figure 1.12 – Variations du taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement normalisé par sa valeur en régime incompressible en fonction du du nombre de Mach convectif ; données expérimentales de ○ Chinzei *et al.* [71], △ Clemens & Mungal [73], □ Goebel & Dutton [111], ◇ Hall [122], ▽ Papamoschou & Roshko [221] et × Samimy & Elliott [246].

L'influence du nombre de Mach convectif sur le développement des écoulements cisaillés a également été caractérisée à l'aide de simulations directes [105, 168, 201, 220, 247-249, 317] et d'analyses de stabilité linéaire [23, 78, 140, 141, 234, 247, 249]. Dans ces études, le taux de

croissance des couches de mélange et le taux d'amplification des ondes d'instabilité diminuent avec le nombre de Mach convectif, en accord avec les résultats expérimentaux. La compressibilité contribue donc à stabiliser les écoulements cisaillés. Son effet stabilisant est attribué à la présence d'une dissipation additionnelle de nature compressible [250, 338], comme expliqué en détail par Lele [169].

Les effets de compressibilité sur le développement des jets ont été étudiés par Lau *et al.* [163] en effectuant des mesures optiques de jets isothermes à des nombres de Mach de 0.28, 0.9 et 1.37. Ces auteurs ont montré qu'une augmentation du nombre de Mach conduit à un cône potentiel plus long. Ils ont alors déterminé la relation suivante qui prédit la longueur du cône potentiel z_c en fonction du nombre de Mach

$$z_c = D\left(4.2 + 1.1\mathrm{M}^2\right) \ . \tag{1.9}$$

La compressibilité influence l'organisation des structures tourbillonnaires dans les écoulements cisaillés. Des visualisations issues de simulations numériques réalisées par Sandham & Reynolds [248] et Freund *et al.* [105] révèlent notamment la présence de structures en forme de Λ dans les couches de mélange pour un nombre de Mach convectif supérieur à 0.6. Ces structures résultent d'ondes d'instabilité obliques, qui sont plus amplifiées que les ondes d'instabilité bidimensionnelles ou axisymétriques pour $\mathrm{M}_c > 0.6$ [247].

1.2.3 Influence du nombre de Reynolds

Les effets de la viscosité sur les écoulements cisaillés turbulents ont été exhaustivement documentés dans la littérature. Pour un jet, ils peuvent être caractérisés par le nombre de Reynolds

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_j D}{\nu} \ . \tag{1.10}$$

Ce nombre fournit une indication sur l'écart de taille entre les grosses structures tourbillonnaires et les plus petites échelles de la turbulence. Les grosses structures dépendent de l'épaisseur du gradient de vitesse et leur taille n'est pas significativement influencée par la viscosité. Les plus petites échelles quant à elles le sont fortement. Leur longueur caractéristique l_η vérifie la relation [8]

$$l_\eta \sim \frac{L_f}{\mathrm{Re}_D^{3/4}} \ , \tag{1.11}$$

où L_f est la longueur caractéristique des plus grandes structures. Cette relation indique que la taille des plus petites structures diminue avec le nombre de Reynolds. Par conséquent, un écoulement à haut nombre de Reynolds présente des plus petites structures qu'un écoulement à bas nombre de Reynolds.

À titre d'exemple, des visualisations de couches de mélange obtenues par ombroscopie par

Brown & Roshko [58] sont montrées pour deux nombres de Reynolds sur les figures 1.13(a,b). Le nombre de Reynolds de la couche de mélange de la figure 1.13(b) est quatre fois supérieur à celui de la figure 1.13(a). Pour les deux nombres de Reynolds, des grosses structures sont observées. Elles sont de tailles similaires, et trouvent leur origine dans l'amplification d'ondes de Kelvin-Helmholtz. Sur la figure 1.13(a), il est difficile d'identifier des structures de petite taille, tandis que de la turbulence fine tridimensionnelle est nettement visible pour le nombre de Reynolds plus élevé sur la figure 1.13(b).

(a)

(b)

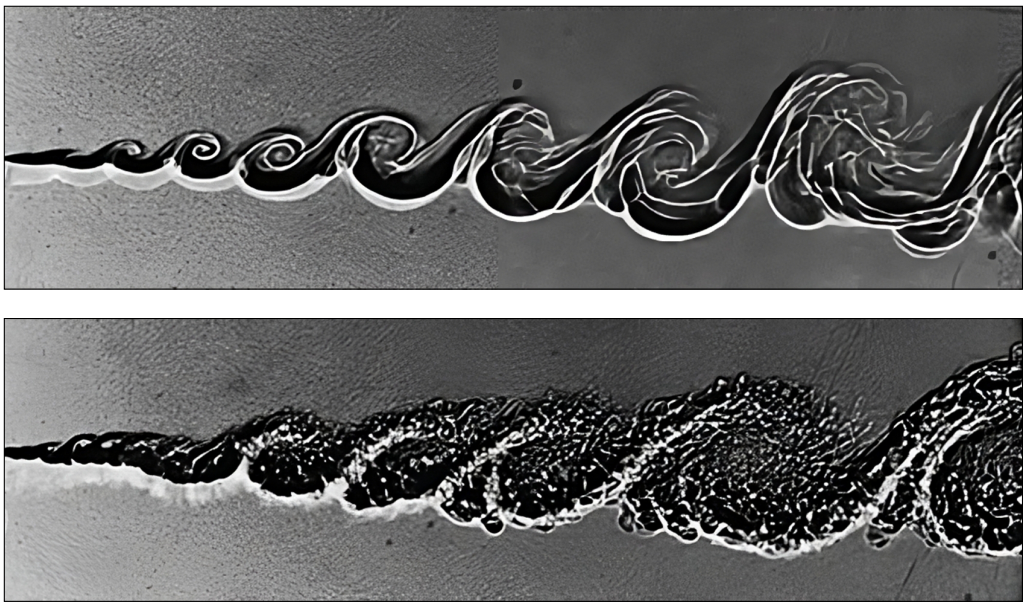

Figure 1.13 – Visualisations par ombroscopie de couches de mélange planes à deux différents nombres de Reynolds ; le nombre de Reynolds de la couche de mélange en bas est quatre fois supérieur à celui de la couche de mélange en haut. D'après Brown & Roshko [58].

Le nombre de Reynolds donne une indication de l'importance des forces d'inertie vis-à-vis des forces de viscosité. Lorsqu'il diminue, les effets visqueux sont plus forts. Cela se traduit par une diminution du taux d'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz, comme montré à l'aide d'analyses de stabilité linéaire par Morris [207] pour des jets et par Ragab & Wu [234] et Seo [259] pour des couches de mélange bidimensionnelles.

Les effets du nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_\omega = \delta_\omega \Delta U/\nu$, où δ_ω est l'épaisseur de vorticité, sur le rayonnement acoustique produit par des couches de mélange subsoniques ont été étudiés par Fortuné [100] en examinant des simulations directes de couches de mélange à des nombres de Reynolds compris entre 200 et 3200. Les niveaux acoustiques sont plus forts pour des nombres de Reynolds plus élevés. Pour $\mathrm{Re}_\omega = 3200$ en particulier, l'intensité sonore est une fois et demi supérieure à celle pour $\mathrm{Re}_\omega = 400$.

Dans les expériences sur les jets, le nombre de Reynolds influence également l'état des couches limites en sortie de buse, comme mentionné dans la section 1.1.3. Cela a notamment été

mis en évidence par Zaman [330] en mesurant les niveaux de turbulence en sortie de buse de jets à des nombres de Mach compris entre 0.1 et 0.5. L'intensité maximale des fluctuations de vitesse en sortie $u'_{\max}$ est tracée en fonction du nombre de Reynolds sur la figure 1.14. Pour $\mathrm{Re}_D \lesssim 10^5$, elle est inférieure à 0.1% de la vitesse du jet. Cela indique que les couches limites sont pleinement laminaires. Pour $10^5 \lesssim \mathrm{Re}_D \lesssim 2.5\times10^5$, les niveaux de turbulence augmentent rapidement avec le nombre de Reynolds, puis plus faiblement pour $2.5\times10^5 \lesssim \mathrm{Re}_D \lesssim 5\times10^5$. Pour $\mathrm{Re}_D \gtrsim 5\times10^5$, les jets sont considérés comme initialement pleinement turbulents. Pour ces jets, les effets visqueux sont négligeables, comme indiqué par Viswanathan [315] en mesurant les niveaux acoustiques produits par des jets à des vitesses d'éjection identiques mais avec des buses de diamètres différents.

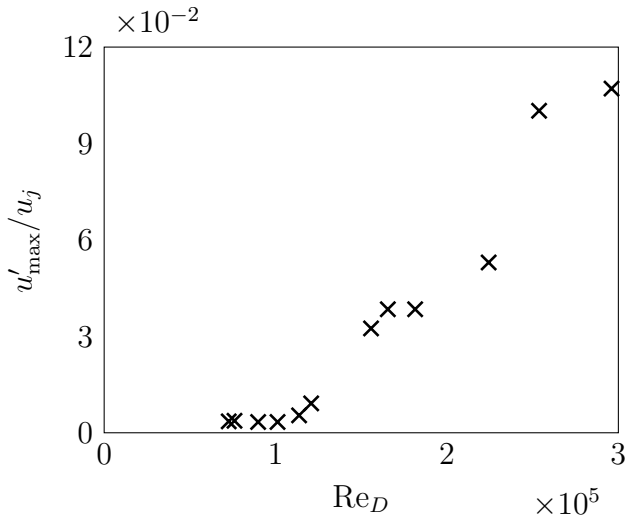

Figure 1.14 – Intensité maximale des fluctuations de vitesse en sortie de buse en fonction du nombre de Reynolds ; données expérimentales de Zaman [330] obtenues pour un jet rond.

En raison de l'influence du nombre de Reynolds sur l'état des couches limites, il est généralement difficile d'isoler les effets du nombre de Reynolds de ceux des conditions de sortie. Pour cette raison notamment, les effets du nombre de Reynolds ont été étudiés à l'aide de simulations numériques [25, 45, 49]. Dans celles-ci, les conditions de sortie sont spécifiées avec précision. Bogey *et al.* [49] ont caractérisé l'influence du nombre de Reynolds sur le développement aérodynamique et le rayonnement acoustique d'un jet à un nombre de Mach de 0.9 avec des couches limites perturbées présentant des niveaux de fluctuations de vitesse maximum égaux à 9% de la vitesse d'éjection. Pour cela, ils ont considéré des nombres de Reynolds entre 2.5×10^4 et 2×10^5 en faisant varier le diamètre du jet. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, le développement des couches de mélange est plus lent et les cônes potentiels sont légèrement plus longs. Pour un angle polaire $\psi = 30°$, les niveaux acoustiques mesurés en $r = 30D$ diminuent d'environ 2 dB entre le jet à $\mathrm{Re}_D = 2.5\times10^4$ et celui à $\mathrm{Re}_D = 2\times10^5$.

1.2.4 Influence du nombre de Mach

L'influence du nombre de Mach sur le bruit rayonné par les jets a été étudiée à partir des équations de Navier-Stokes par Lighthill [170]. Par une analyse dimensionnelle, cet auteur a montré que l'intensité acoustique rayonnée par un jet subsonique libre est proportionnelle à la puissance huit du nombre de Mach. L'intensité acoustique obtenue pour un angle polaire $\psi = 90°$ dans plusieurs expériences [40, 175, 292] est représentée en fonction du nombre de Mach $\mathrm{M} = u_j/c_0$ sur la figure 1.15(a). Elle croît comme la puissance huit du nombre de Mach, conformément au résultat de Lighthill [170].

Pour un écoulement bidimensionnel, des développements analytiques effectués par Ffowcs-Williams [95] et Guo [121] ont montré que l'intensité acoustique augmente comme la puissance sept du nombre de Mach $\mathrm{M} = (U_2 - U_1)/c_0$. Des simulations de couches de mélange bidimensionnelles à des nombres de Mach allant de 0.2 à 0.4 ont été réalisées par Moser *et al.* [209]. Les intensités acoustiques maximales obtenues par ces auteurs sont représentées en fonction du nombre de Mach sur la figure 1.15(b). Les niveaux sont proportionnels à la puissance sept du nombre de Mach, en accord avec le résultat de Ffowcs-Williams [95].

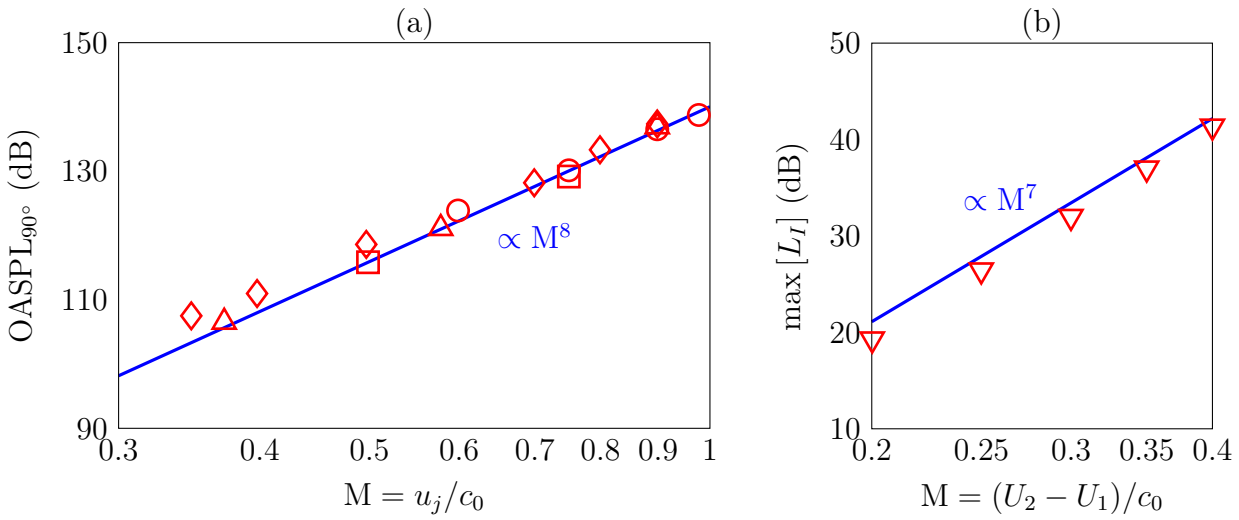

Figure 1.15 – Variations des niveaux sonores en fonction du nombre de Mach pour (a) des jets libres tridimensionnels et (b) des couches de mélange bidimensionnelles ; données de ○ Bogey *et al.* [40], △ Lush [175], ◇ Tanna [292] et ▽ Moser *et al.* [209].

En ce qui concerne les ondes guidées, leurs propriétés varient aussi significativement avec la vitesse de l'écoulement. Cela a notamment été discuté par Tam *et al.* [276, 278], Towne *et al.* [295, 296] et Bogey [31] à partir des relations de dispersion des ondes guidées pour différents nombres de Mach. À titre d'illustration, les courbes de dispersion obtenues pour des nombres de Mach entre 0.6 et 1.1 pour les premiers modes radiaux axisymétriques et hélicoïdaux sont représentées en fonction du nombre d'onde axial $k_z D$ et du nombre de Strouhal St_D sur

les figures 1.16(a,b). Trois régimes peuvent être identifiés à partir du nombre d'extrema des courbes de dispersion. Pour M $<$ 0.82 [296], les courbes ne présentent pas d'extremum. Ceci n'est pas le cas pour des nombres de Mach plus élevés. Pour 0.82 $\leq$ M $<$ 1 et pour le mode axisymétrique sur la figure 1.16(a), en particulier, un maximum aux alentours de $k_z D = -3$ et un minimum pour des nombres d'onde plus faibles, par exemple pour $k_z D \simeq -10$ pour M = 0.9, sont observés.

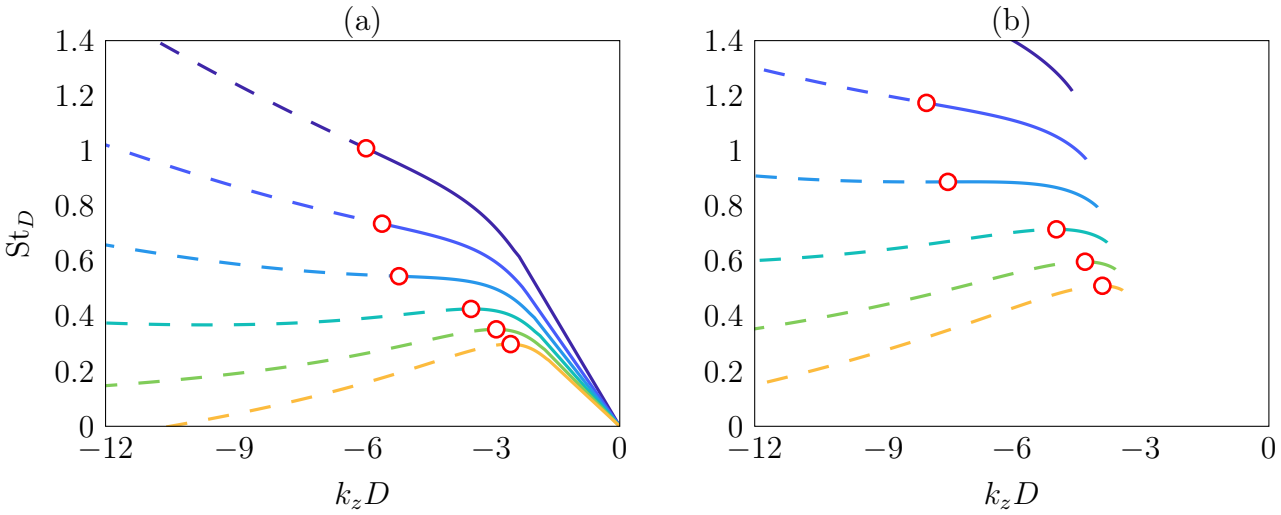

Figure 1.16 – Courbes de dispersion des ondes guidées pour des jets ronds à des nombres de Mach entre 0.6 et 1.1 avec un pas ΔM = 0.1 pour les premiers modes radiaux (a) axisymétriques et (b) hélicoïdaux ; courbes plus claires pour des nombres de Mach plus élevés ; (traits pleins) ondes avec une amplitude significative à l'extérieur des jets et (lignes pointillées) ondes guidées proches d'ondes de conduit ; ○ ondes guidées les moins dispersées pour M $<$ 0.9 et ondes guidées associées aux maxima des courbes pour M $\geq$ 0.9.

Les extrema sont liés à des ondes guidées stationnaires avec une vitesse de groupe $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_z$ nulle. Ainsi, ils séparent les courbes de dispersion en plusieurs portions, associées chacune à des ondes guidées dont les enveloppes se propagent vers l'amont ou l'aval [31, 145, 252, 295]. D'après Towne *et al.* [295] et Schmidt *et al.* [252], les ondes guidées avec des vitesses de groupe opposées interagissent dans le cône potentiel des jets et sont responsables de l'émergence de pics dans les spectres acoustiques de jets libres obtenus près de la buse à l'extérieur des jets [31, 53, 270].

Les portions de courbe associées aux ondes guidées se propageant à une vitesse proche de celle du son et ayant une amplitude significative à l'extérieur des jets sont tracées en traits pleins sur les figures 1.16(a,b). Elles sont localisées entre les positions des limites basses des ondes guidées et celles des ondes les moins dispersées pour M $<$ 0.9 et stationnaires aux maxima pour M $\geq$ 0.9. Les nombres de Strouhal de ces ondes guidées diminuent avec le nombre de

Mach, comme ceux des pics dans les spectres acoustiques obtenus près de la buse des jets libres [31, 335].

Les effets du nombre de Mach sur les composantes de bruit tonales produites par les jets impactants ont été caractérisés dans des études expérimentales et numériques [130, 143, 213, 219, 227, 230, 304, 305]. Jaunet *et al.* [143] ont notamment mesuré des spectres acoustiques pour des jets à des nombres de Mach entre 0.7 et 1.5 en considérant plusieurs distances plaque-buse. Les spectres obtenus pour des distances plaque-buse $L = 4D$ et $L = 8D$ sont représentés en fonction des nombres de Mach et de Strouhal sur les figures 1.17(a,b). De nombreuses lignes associées à des composantes tonales de forte intensité sont observées. Leurs nombres de Strouhal diminuent avec le nombre de Mach. Cela est attribué à la réduction des nombres de Strouhal des ondes se propageant vers l'amont avec une vitesse proche de celle du son dans le milieu ambiant. Les niveaux sont globalement plus forts pour des nombres de Mach plus élevés. Ceci est conforme à des développements analytiques effectués par Curle [77] qui ont montré que l'intensité acoustique produite par un écoulement interagissant avec une paroi est proportionnelle à la puissance six de la vitesse de l'écoulement.

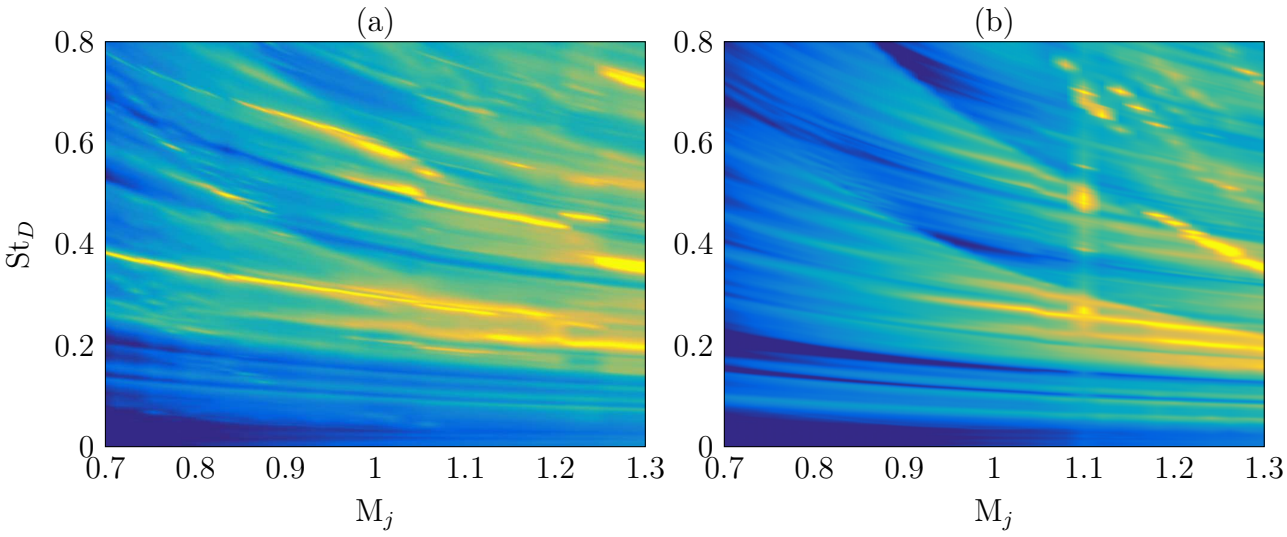

Figure 1.17 – Variations des niveaux acoustiques d'un jet impactant pour des distances plaque-buse (a) $L = 4D$ et (b) $L = 8D$ en fonction des nombres de Mach et de Strouhal ; l'échelle de couleur varie entre 120 dB et 160 dB du bleu au jaune ; d'après Jaunet *et al.* [143].

Très récemment, Varé & Bogey [304, 305] ont étudié l'influence du nombre de Mach sur le bruit produit par des jets impactants en réalisant des simulations de jets à des nombres de Mach entre 0.6 et 1.3. De fortes composantes tonales ont été observées dans les spectres de pression près des buses à l'extérieur des jets pour $\mathrm{M} \geq 0.75$ uniquement. Varé & Bogey [305] ont examiné l'amplification des ondes Kelvin-Helmholtz à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire. Ils ont montré que le mode d'oscillation dominant est le plus souvent associé, d'une part, aux ondes guidées se propageant à une vitesse proche de celle des ondes acoustiques en champ libre

et, d'autre part, aux ondes d'instabilité les plus amplifiées entre la buse et la plaque. Ils ont donc conclu que la sélection du mode dominant s'effectue par ces ondes guidées, comme dans d'autres études [44, 94, 118, 143, 219, 276, 279, 305], et par les ondes de Kelvin-Helmholtz les plus amplifiées entre la buse et la plaque.

1.2.5 Influence des conditions de sortie

Un grand nombre d'études expérimentales [13, 54, 56, 99, 137, 138, 151, 330, 332-334] et numériques [27, 37, 45, 50, 53, 137, 153, 266, 327] ont mis en évidence que les conditions de sortie influencent fortement le développement aérodynamique et le rayonnement acoustique des couches de mélange et des jets. Les conditions de sortie d'un jet sont le plus souvent définies par trois paramètres : l'intensité maximale des fluctuations de vitesse, l'épaisseur de quantité de mouvement, et le facteur de forme du profil de vitesse [50, 53, 99].

L'intensité des fluctuations de vitesse caractérise généralement l'état des couches limites en sortie. Lorsque ces dernières sont laminaires ou faiblement perturbées, des enroulements et des appariements tourbillonnaires se produisent. Ils constituent des sources acoustiques qui ne sont pas présentes pour des jets initialement fortement perturbés [27, 258, 330]. Par conséquent, les jets initialement laminaires sont plus bruyants que les jets initialement turbulents. Ceci a notamment été montré expérimentalement par Zaman [330] et par Bogey *et al.* [27] à l'aide de simulations. En examinant cinq jets à $\mathrm{Re}_D = 10^5$ et $\mathrm{M} = 0.9$ avec des fluctuations de vitesse d'intensité maximale égale à 0%, 3%, 6% et 12% de la vitesse du jet, Bogey *et al.* [27] ont mis en évidence que les enroulements et les appariements tourbillonnaires se produisent pour des niveaux de turbulence approximativement inférieurs à 6% de la vitesse du jet.

Récemment, les effets des niveaux de turbulence en sortie sur le bruit de *screech* a été étudié par Wu *et al.* [327] à l'aide de simulations directes. Les composantes tonales liées au bruit de *screech* sont plus fortes pour des couches limites plus perturbées. Ces variations de bruit ont alors été attribuées à des différences dans les propriétés de réceptivité des couches de cisaillement en sortie aux perturbations acoustiques, qui conduisent à des ondes de Kelvin-Helmholtz de plus forte amplitude pour des couches limites plus perturbées. Ces variations de bruit ont alors été attribuées à des différences dans les amplitudes des ondes de Kelvin-Helmholtz impliquées, résultant d'une modification des propriétés de réceptivité des couches de cisaillement en sortie.

Pour des écoulements initialement laminaires, l'épaisseur de quantité de mouvement en sortie donne une indication de la taille des structures cohérentes se formant à proximité de la buse. Cela a notamment été mis en évidence par Kim & Choi [153] en analysant des simulations de jets incompressibles initialement laminaires à des nombres de Reynolds $\mathrm{Re}_D = 100, 3600, 10^4$ et 10^5 avec des épaisseurs de quantité de mouvement en sortie entre $0.005D$ et $0.02D$. À titre d'illustration, les structures tourbillonnaires des deux jets à $\mathrm{Re}_D = 10^5$ avec $\delta_\theta(z=0) = 0.005D$ et $0.0125D$ sont représentées sur les figures 1.18(a,b). Des structures toriques sont visibles

à proximité de la sortie des jets. Elles interagissent entre elles et se désintègrent au cours de leur convection, ce qui conduit à la génération de petites échelles et à la transition des couches de mélange vers un état turbulent. Pour une couche limite plus épaisse, elles sont de plus grande taille et se forment plus en aval. Cela est conforme à des résultats de stabilité linéaire qui montrent que les ondes de Kelvin-Helmholtz les plus amplifiées se développent à une fréquence caractérisée par le nombre de Strouhal basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement en sortie [196, 205].

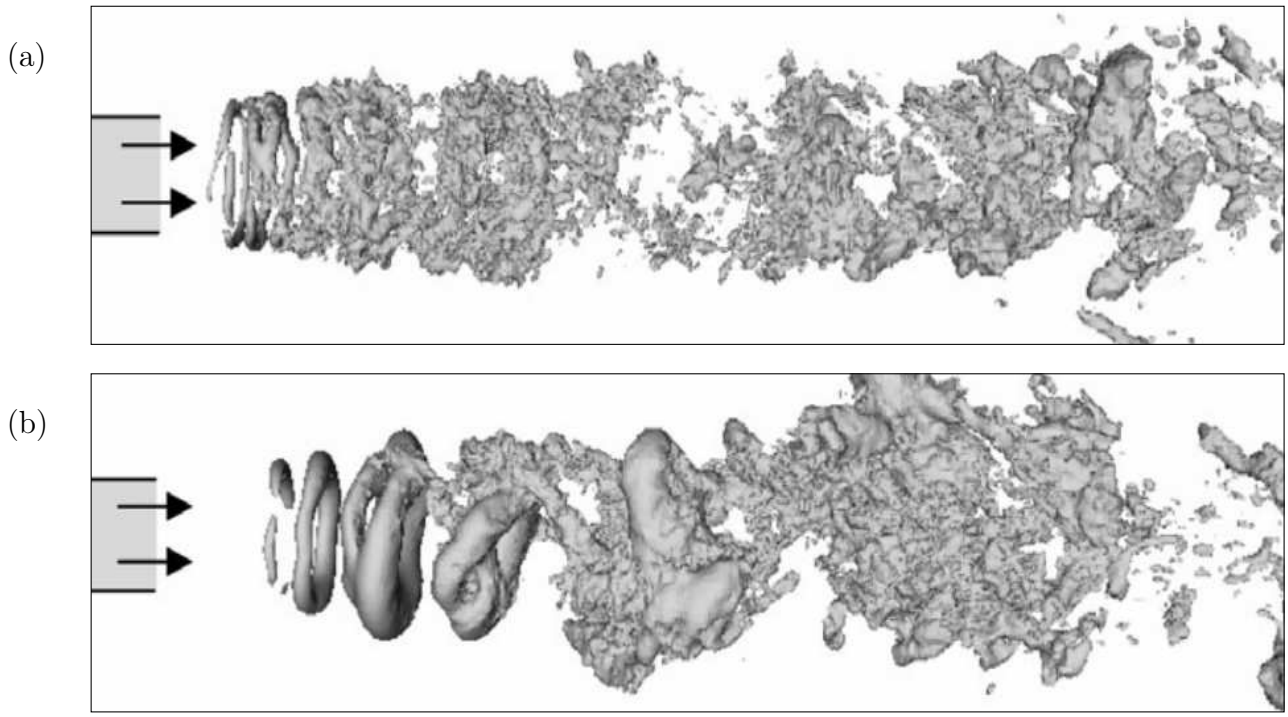

Figure 1.18 – Vue instantanée des structures tourbillonnaires dans des jets incompressibles à $\mathrm{Re}_D = 10^5$ avec des épaisseurs de quantité de mouvement en sortie de (a) $\delta_\theta = 0.005D$ et (b) $\delta_\theta = 0.0125D$; (gris) isosurfaces de pression ; d'après Kim & Choi [153].

Les effets de l'épaisseur de la couche limite en sortie sur le développement et le bruit d'un jet initialement laminaire à $\mathrm{Re}_D = 10^5$ et $\mathrm{M} = 0.9$ ont été caractérisés par Bogey & Bailly [37] à l'aide de simulations de jets avec des épaisseurs de quantité de mouvement en sortie entre $0.0015D$ et $0.0115D$. Pour des couches limites plus épaisses, les niveaux acoustiques sont plus élevés. Ils sont attribués à des appariements tourbillonnaires se produisant plus en aval qui retardent la transition des couches de mélange vers un état turbulent, conduisent ainsi à une plus forte prédominance des premiers modes azimutaux à proximité de la fin du cône potentiel et, par conséquent, à une augmentation du bruit de mélange associé aux grandes structures cohérentes.

L'influence de l'épaisseur de la couche de limite en sortie sur le développement et le bruit d'un jet initialement fortement perturbé a été étudiée par Bogey & Marsden [45]. Pour cela, des

simulations de jets à $\mathrm{Re}_D \simeq 5 \times 10^4$ et $\mathrm{M} = 0.9$ ont été réalisées pour différentes épaisseurs de couche limite en sortie et des niveaux de turbulence en sortie approximativement égaux à 9% de la vitesse du jet. Pour une couche limite plus épaisse, le développement aérodynamique est plus lent, les fluctuations de vitesse dans les couches de mélange sont plus faibles et les jets sont moins bruyants de 2 à 3 dB selon l'angle polaire.

Les effets du facteur de forme du profil de vitesse en sortie de buse sur le développement initial et le rayonnement d'un jet initialement perturbé à $\mathrm{Re}_D = 5 \times 10^4$ et $\mathrm{M} = 0.9$ ont été caractérisés à l'aide de simulations et d'analyses de stabilité linéaires par Bogey & Sabatini [50]. Trois profils de vitesse différents ont été considérés, un premier similaire à celui d'une couche limite laminaire de Blasius et deux autres proches de ceux d'une couche limite en transition sur une plaque plane. Pour ces derniers profils, les ondes de Kelvin-Helmholtz les plus amplifiées se développent à des fréquences plus élevées, les couches de mélange se développent plus lentement, et les niveaux de bruit sont réduits de 2 à 3 dB en raison de structures cohérentes moins marquées.

Très récemment, Varé & Bogey [304, 307] ont étudié l'influence de l'état de la couche limite sur les fréquences des composantes tonales produites dans des jets impactants subsoniques et supersoniques. Pour cela, des jets ont été simulés pour des nombres de Mach compris entre 0.6 et 1.3, une distance plaque-buse de 4 diamètres de buse et des couches limites perturbées ou non. Un effet significatif des conditions de sortie sur les fréquences des composantes tonales a été montré. Les nombres de Strouhal de ces composantes sont représentés en fonction du nombre de Mach pour $0.7 \leq \mathrm{M} \leq 1$ sur la figure 1.19. Les niveaux de pression obtenus par Jaunet *et al.* [143] et les nombres de Strouhal mesurés par Neuwerth [213], Ho & Nosseir [130] et Panickar & Raman [219] sont également indiqués sur la figure.

Pour des nombres de Mach supérieurs ou égaux à 0.9, les nombres de Strouhal des composantes tonales déterminés par Varé & Bogey [304, 307] pour des jets initialement laminaires et perturbés sont fortement similaires. De plus, ils sont conformes aux données expérimentales. Pour des nombres de Mach inférieurs à 0.9, les nombres de Strouhal des composantes tonales obtenus par Varé & Bogey [304, 307] pour des couches limites perturbées sont significativement supérieurs à ceux associés aux couches limites laminaires. Pour ces dernières, ils sont proches de ceux obtenus par Jaunet *et al.* [143], alors que pour des couches limites perturbées, ils sont similaires à ceux mesurés par Neuwerth [213], Ho & Nosseir [130] et Panickar & Raman [219]. Pour ce qui est des amplitudes des composantes tonales, elles sont plus élevées pour les jets perturbés en sortie. Les différences sont d'environ 10 dB pour $\mathrm{M} = 0.75$ et de 15 dB pour $\mathrm{M} = 1$. Elles sont attribuées à des changements dans les propriétés d'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz entre la buse et la plaque.

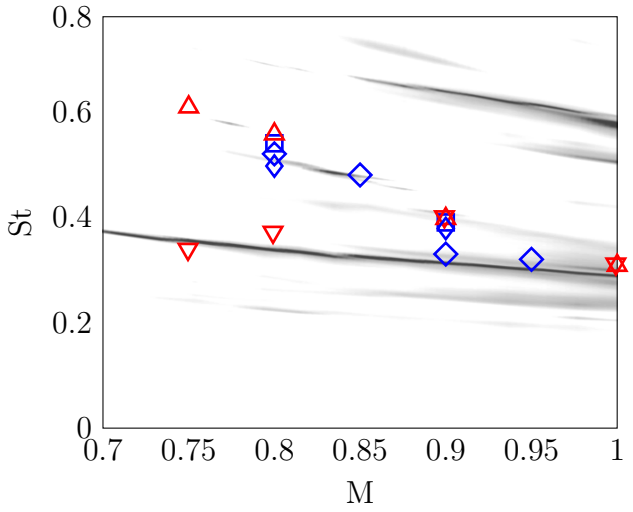

Figure 1.19 – Variations des nombres de Strouhal des composantes tonales avec le nombre de Mach pour une distance plaque-buse de 4 diamètres de buse ; données expérimentales de (blanc/noir) Jaunet *et al.* [143], □ Neuwerth [213], ◇ Ho & Nosseir [130] et ◇ Panickar & Raman [219] et numériques de Varé & Bogey [304, 307] pour des couches limites en sortie △ perturbées et ▽ laminaires.

1.2.6 Influence de la température

L'influence de la température sur les écoulements cisaillés a été maintes fois étudiée dans la littérature. Concernant les ondes de Kelvin-Helmholtz, des analyses de stabilité linéaire effectuées par Michalke [196], Morris [208] et Bodony [22] ont montré que le taux d'amplification de ces ondes augmente avec la température. En conséquence, les écoulements cisaillés chauds sont plus instables que les écoulements isothermes. Pour des écoulements initialement laminaires, cela conduit à la formation de tourbillons plus en amont, comme observé par Sharma & Lele [260] et Moser *et al.* [209] dans des couches de mélange anisothermes. Pour des jets libres, une augmentation de la température conduit à des cônes potentiels plus courts. Cela a été notamment observé par Lau [162] en effectuant des mesures aérodynamiques pour des jets à des nombres de Mach entre 0.3 et 1.7 à différentes températures et par Bogey & Marsden [46] en simulant deux jets à M = 0.9, l'un isotherme et l'autre chaud.

Les effets de la température sur le bruit d'appariement de tourbillons ont été caractérisés à l'aide de simulations de couches de mélange bidimensionnelles [22, 101, 120, 209, 260]. En particulier, Bodony [22], Sharma & Lele [260] et Moser *et al.* [209] ont montré qu'une augmentation de la température de l'écoulement rapide des couches de mélange conduit à une réduction de l'intensité du bruit d'appariement.

L'influence de la température sur les niveaux de bruit produit par les jets libres a été caractérisée par Tanna [292] et Fisher *et al.* [98] en mesurant les spectres acoustiques de jets à des nombres de Mach $M = u_j/c_0$ entre 0.4 et 2. Pour des jets plus chauds, les niveaux sonores sont

plus élevés pour $M \lesssim 0.7$ et plus faibles pour $M \gtrsim 0.7$. Les phénomènes physiques responsables des variations des niveaux acoustiques avec la température ont fait l'objet de controverses dans la littérature, mais de nombreux auteurs ont indiqué que ces variations résultent, d'une part, d'une diminution de l'intensité des sources de nature purement aérodynamique à cause de la variation de la densité avec la température, et d'autre part, de l'émergence de sources de bruit d'origine entropique dont l'intensité croît comme la puissance six de la vitesse du jet. Cela a notamment été mis en évidence par Tester & Morfey [293] et Harper-Bourne [125].

Enfin, les effets de température sur les composantes tonales associées aux ondes guidées ont été très récemment étudiés expérimentalement par Upadhyay & Zaman [300] pour des jets à des nombres de Mach $M = u_j/c_j$ entre 0.9 et 1.4. À nombre de Mach constant, une augmentation de la température conduit à une diminution du nombre de Strouhal des composantes tonales, ce qui est par ailleurs conforme à des résultats obtenus par Edgington-Mitchell & Nogueira [91] en examinant l'influence de la température sur les propriétés des courbes de dispersion des ondes guidées.

1.3 Méthodes d'analyse de sensibilité pour des simulations aéroacoustiques directes

Une analyse de sensibilité permet de caractériser les effets d'un paramètre sur les champs aérodynamiques et acoustiques d'un écoulement. Pour un écoulement simulé, ce paramètre peut être physique (vitesse de l'écoulement, température, etc.) ou numérique (espacement des mailles par exemple). Il peut aussi être associé à une stratégie de contrôle mise en œuvre pour réduire les niveaux de bruit par exemple. Pour des simulations aéroacoustiques directes, différentes méthodes d'analyse de sensibilité ont été utilisées dans la littérature. Elles sont présentées dans cette section.

1.3.1 Étude paramétrique

L'influence d'un paramètre sur un écoulement est généralement déterminée en réalisant une étude paramétrique consistant à effectuer puis examiner plusieurs simulations de l'écoulement en faisant varier uniquement la valeur du paramètre en question. Par exemple, pour des jets impactant une plaque, Gojon & Bogey [117] ont réalisé des simulations de jets pour différents angles d'inclinaison de la plaque afin de caractériser les effets de cet angle sur les mécanismes de rétroaction aéroacoustiques s'établissant entre la buse et la plaque.

Des études paramétriques sont souvent menées pour vérifier la précision d'une simulation numérique [222, 240]. Elles sont effectuées en considérant des maillages de plus en plus fins et en examinant la convergence en maillage des solutions numériques. Bogey [30] a par exemple réalisé

des simulations de jets pour différents maillages afin d'étudier la sensibilité de ses simulations à différents paramètres de maillage, comme l'espacement des mailles dans les directions radial, azimutale et axiale.

Pour des simulations aéroacoustiques directes, les études paramétriques sont très coûteuses en ressources numériques (CPU et mémoire). À titre d'exemple, 3 milliards d'heures CPU ont été utilisées pour les simulations de l'étude de sensibilité au maillage de Bogey [30]. De plus, les études paramétriques peuvent aussi nécessiter un travail d'implémentation conséquent, en particulier pour une étude de sensibilité au maillage où la paramétrisation de plusieurs maillages est requise.

1.3.2 Méthodes d'analyse de sensibilité directes

Afin de caractériser l'influence d'un paramètre sur un écoulement, il est pertinent de déterminer les dérivées des variables de l'écoulement par rapport au paramètre. Ces dérivées indiquent les effets d'une petite variation du paramètre et fournissent ainsi la sensibilité de l'écoulement au paramètre en question. Elles jouent aussi un rôle important dans de nombreux algorithmes d'optimisation et de contrôle [231]. À chaque itération de ces algorithmes, elles permettent en effet d'ajuster la valeur d'un paramètre de contrôle afin d'obtenir un effet désiré, comme par exemple une réduction des niveaux sonores [63, 152, 166, 310, 322]. Plusieurs méthodes, appelées méthodes directes, peuvent être utilisées pour calculer ces dérivées. Elles ont été présentées en détail par Martins & Hwang [187] dans un article de synthèse.

Méthode de l'équation aux sensibilités

Une première méthode pouvant être utilisée est la méthode de l'équation aux sensibilités. Elle a été expliquée en détail par Pelletier *et al.* [223]. Elle consiste à résoudre, d'une part, les équations de Navier-Stokes, et d'autre part, l'équation aux sensibilités obtenue en dérivant les équations de Navier-Stokes par rapport au paramètre considéré. Les solutions de l'équation aux sensibilités sont les dérivées des variables de l'écoulement par rapport au paramètre. Elles peuvent donc être exploitées pour mettre en évidence l'influence du paramètre sur les champs aérodynamiques et acoustiques d'un écoulement.

À titre d'exemple, un écoulement décrit par l'équation de Burgers visqueuse unidimensionnelle est considéré. Cette équation présente des propriétés similaires à celles des équations de Navier-Stokes. Elle peut s'écrire sous la forme conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, \tag{1.12}$$

où u est la vitesse et ν est la viscosité cinématique. La sensibilité de l'écoulement aux effets visqueux est fournie par l'équation aux sensibilités obtenue en dérivant l'équation de Burgers

par rapport à la viscosité. Cette équation aux sensibilités s'écrit

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u'u + uu'\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \ , \tag{1.13}$$

où

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \nu} \tag{1.14}$$

est la dérivée de la vitesse par rapport à la viscosité.

En raison de la non-linéarité de l'équation de Burgers, la vitesse u intervient dans l'équation aux sensibilités. Cela est également le cas pour les équations de Navier-Stokes. La résolution de l'équation aux sensibilités requiert ainsi les solutions de l'équation de conservation considérée. En conséquence, il est le plus souvent nécessaire de résoudre conjointement les équations de Navier-Stokes et l'équation aux sensibilités.

Sauf erreur, la méthode de l'équation aux sensibilités n'a pas été employée pour des simulations aéroacoustiques directes, effectuées en résolvant les équations de Navier-Stokes instationnaires compressibles. Elle a cependant été utilisée à de nombreuses reprises pour des écoulements incompressibles, notamment par Borggaard, Pelletier, Duvigneau *et al.* [51, 74, 85, 97, 126, 133, 178, 233] et Metzger *et al.* [154, 155, 337]. En particulier, elle a été appliquée à un écoulement de couche de mélange bidimensionnel par Zayernouri & Metzger [337] pour caractériser l'influence de la viscosité et de la température sur les structures tourbillonnaires se développant dans l'écoulement. En résolvant les équations de Navier-Stokes incompressibles et l'équation aux sensibilités associée au nombre de Reynolds, ces auteurs ont déterminé les champs aérodynamiques de l'écoulement et les dérivées de ces derniers par rapport au nombre de Reynolds. Des visualisations instantanées d'un champ de vorticité et d'un champ de la dérivée de la vorticité par rapport au nombre de Reynolds sont présentées sur la figure 1.20. Dans le champ de vorticité, sur la figure 1.20(a), quatre tourbillons ronds uniformément espacés le long de la zone de cisaillement sont visibles. Ils sont liés les uns aux autres par des filaments de vorticité. Dans le champ de la dérivée de la vorticité, sur la figure 1.20(b), des structures de forme semblable à celle des tourbillons observés dans le champ de vorticité apparaissent. Les niveaux les plus élevés en absolue se situent près des filaments de vorticité, ce qui a conduit Zayernouri & Metzger [337] à indiquer que ces filaments sont significativement affectées par la viscosité.

Dans les travaux de la littérature, l'équation aux sensibilités est résolue en utilisant les mêmes techniques numériques que celles utilisées pour résoudre les équations de conservation. Pour cette raison notamment, des outils numériques peuvent être utilisés afin de dériver les variables d'un code de calcul [212] et ainsi résoudre l'équation aux sensibilités discrétisée plutôt que de développer un nouveau code de calcul résolvant les équations de conservation et l'équation aux sensibilités. Par exemple, un outil de ce type a été employé très récemment

par Cardesa *et al.* [63] afin d'optimiser les propriétés d'absorption d'un revêtement acoustique placé à l'extrémité d'un tube de Kundt.

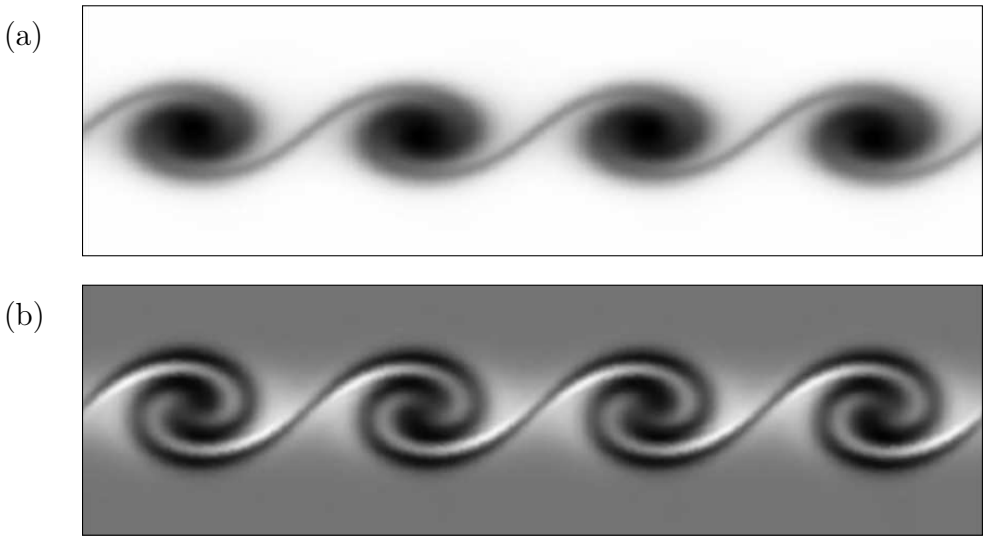

Figure 1.20 – Représentations (a) d'un champ instantané de vorticité et (b) de sa dérivée par rapport au nombre de Reynolds obtenus par Zayernouri & Metzger [337] en appliquant la méthode de l'équation aux sensibilités à un écoulement de couche de mélange bidimensionnel.

Méthode de la différentiation de solutions

La méthode de la différentiation de solutions peut être mise en œuvre pour déterminer les dérivées des variables de l'écoulement par rapport à un paramètre. Elle consiste à réaliser plusieurs simulations, le plus souvent deux, et d'approximer les dérivées par des différences finies. Par exemple, pour obtenir la sensibilité de l'écoulement décrit par l'équation de Burgers (1.12) à la viscosité, deux simulations peuvent être réalisées, une avec une viscosité $\nu = \nu_0$, et une autre avec $\nu = \nu_0 + h$, où h est un nombre réel dénotant une amplitude de perturbation, afin de déterminer une valeur approchée de la dérivée de la vitesse par

$$u' \simeq \frac{u\left(\nu_0 + h\right) - u\left(\nu_0\right)}{h} \,, \tag{1.15}$$

où $u\left(\nu_0 + h\right)$ et $u\left(\nu_0\right)$ sont les vitesses obtenues pour $\nu = \nu_0 + h$ et $\nu = \nu_0$.

L'erreur de troncature des différences finies est réduite quand l'amplitude de la perturbation h diminue. Par conséquent, il est recommandé de considérer des valeurs très petites pour h. Cependant, lorsque h est excessivement petit, les valeurs de $u\left(\nu_0 + h\right)$ et $u\left(\nu_0\right)$ sont si proches que leur différence est de l'ordre de grandeur des erreurs d'arrondi. La valeur approchée de la dérivée u' finit donc par augmenter quand h diminue. En conséquence, plusieurs essais sont généralement nécessaires pour déterminer une valeur de l'amplitude de la perturbation h permettant d'évaluer avec précision les dérivées.

Dans la littérature, la méthode de la différentiation de solutions n'est pas souvent employée pour caractériser la sensibilité d'un écoulement à un paramètre. Elle est cependant régulièrement appliquée pour effectuer des comparaisons avec d'autres méthodes d'analyse de sensibilité, comme la méthode de l'équation aux sensibilités par exemple, et ainsi vérifier leur implémentation [1, 64, 67, 68, 155, 160, 188, 308].

Méthode de la différentiation complexe

La méthode de différentiation complexe peut être également utilisée pour réaliser une analyse de sensibilité. Elle partage des similitudes avec la méthode de la différentiation des solutions. Néanmoins, à la différence de cette dernière, elle permet de déterminer les dérivées des solutions d'écoulement par rapport à un paramètre en effectuant une seule simulation, et sa précision n'est pas affectée par des erreurs d'arrondi. Elle s'applique en ajoutant une petite perturbation de nature imaginaire au paramètre en question et en résolvant les équations de conservation en utilisant les règles de l'arithmétique complexe.

Pour expliquer la méthode de différentiation complexe, on considère une fonction $F(\alpha)$ dépendant d'un nombre complexe $\alpha = \alpha_0 + ih$, où h est un nombre réel. Son développement en série de Taylor s'écrit

$$F(\alpha_0 + ih) = F(\alpha_0) + ih\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_0) - \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha_0) + O(h^3)\ . \tag{1.16}$$

Dans cette formule, il est remarqué que des valeurs approchées de la fonction et de sa dérivée pour $\alpha = \alpha_0$ peuvent être obtenues, respectivement à partir de la partie réelle de $F(\alpha_0 + ih)$ et de la partie imaginaire de $F(\alpha_0 + ih)$ de la manière suivante

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_0) = \frac{\mathrm{Im}\left[F(\alpha_0 + ih)\right]}{h} + O(h^2)\ . \tag{1.17}$$

Les solutions de l'écoulement et leurs dérivées peuvent donc être estimées en effectuant une seule simulation dans laquelle une petite partie imaginaire est introduite au paramètre d'intérêt.

Lorsque la méthode de la différentiation complexe est employée, les variables de l'écoulement sont décrites par des nombres complexes. À titre d'exemple, l'équation de Burgers (1.12) est considérée avec une perturbation imaginaire d'amplitude h dans la viscosité cinématique. La viscosité s'écrit alors $\nu\,(1 + ih)$, où i est l'unité imaginaire, et l'équation de Burgers peut être décomposée en parties réelle et imaginaire de la manière suivante

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r^2 - u_i^2\right) = \nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - h\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\ , \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r u_i + u_i u_r\right) = \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + h\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\ . \tag{1.19}$$

où u_r et u_i sont les parties réelle et imaginaire de la vitesse.

Pour une perturbation h de très faible amplitude, l'ordre de grandeur de la partie réelle de la vitesse est beaucoup plus grand que celui de la partie imaginaire. Dans ce cas, les produits des parties imaginaires et les termes faisant intervenir l'amplitude de la perturbation h peuvent être négligés. Les équations se simplifient alors en

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r^2\right) = \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \,, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r u_i + u_i u_r\right) = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \,. \tag{1.21}$$

La première équation correspond à l'équation de Burgers initiale (1.12) et la seconde est identique à l'équation aux sensibilités (1.13). Par conséquent, si l'ordre de grandeur de la partie imaginaire est beaucoup plus petit que celui de la partie réelle, la partie imaginaire de la vitesse suit la même évolution spatio-temporelle que la dérivée de la vitesse par rapport à la viscosité. Afin d'estimer les variables d'un écoulement et leurs dérivées, il suffit donc de définir comme nombres complexes les variables d'un code de calcul qui ne traite initialement que des nombres réels et d'appliquer les règles de l'arithmétique complexe. Ces règles sont le plus souvent respectées par défaut dans les langages de programmation PYTHON, MATLAB, C++ et FORTRAN. L'implémentation de la méthode de différentiation complexe dans un solveur de calcul est donc simple. Elle nécessite cependant l'accès au code source du solveur.

La méthode de différentiation complexe a été initialement introduite pour évaluer numériquement des dérivées de fonctions compliquées qu'il est difficile de déterminer analytiquement [176, 265]. Par exemple, Lyness & Moler [176] ont employé cette méthode pour estimer la dérivée cinquième de la fonction

$$F(x) = \frac{e^x}{\sin^3(x) + \cos^3(x)} \,. \tag{1.22}$$

La méthode de la différentiation complexe a ensuite été utilisée dans les années 2000 par Anderson *et al.* [1] et Vatsa [308] pour des écoulements turbulents en résolvant les équations de Reynolds (*RANS* en anglais) et par Cerviño *et al.* [67] et Lu & Sagaut [173] pour des écoulements bidimensionnels compressibles instationnaires à l'aide de simulations directes. Plus récemment, Vergnault & Sagaut [309] ont appliqué cette méthode à des simulations directes réalisées avec la méthode de Boltzmann sur réseau pour analyser la sensibilité au nombre de Reynolds d'un écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre.

Dans un contexte de contrôle, la méthode de la différentiation complexe a été employée par Leclerc *et al.* [166] afin de minimiser le coefficient de traînée d'un cylindre placé dans un écoulement. Elle a été couplée à une technique de retournement temporel pour localiser des sources de bruit dans des écoulements bidimensionnels [79, 83, 311]. Malheureusement, la

méthode de la différentiation complexe ne semble pas avoir été appliquée à des simulations aéroacoustiques directes d'écoulements turbulents tridimensionnels.

1.3.3 Méthodes adjointes

Des méthodes adjointes ou inverses peuvent enfin être employées pour analyser la sensibilité d'un écoulement à plusieurs paramètres. Au début des années 2000, Cerviño *et al.* [67] ont appliqué la méthode de la différentiation complexe et une méthode adjointe à un écoulement de jet bidimensionnel simulé en résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires. La figure 1.21, issue de leur article, illustre les différences entre les deux méthodes. Tandis que les méthodes directes donnent une indication de l'influence d'un paramètre sur différentes grandeurs, les méthodes adjointes sont utiles pour déterminer comment et de quelle manière plusieurs paramètres doivent être ajustés pour obtenir un effet désiré, une réduction des niveaux sonores sur une surface par exemple.

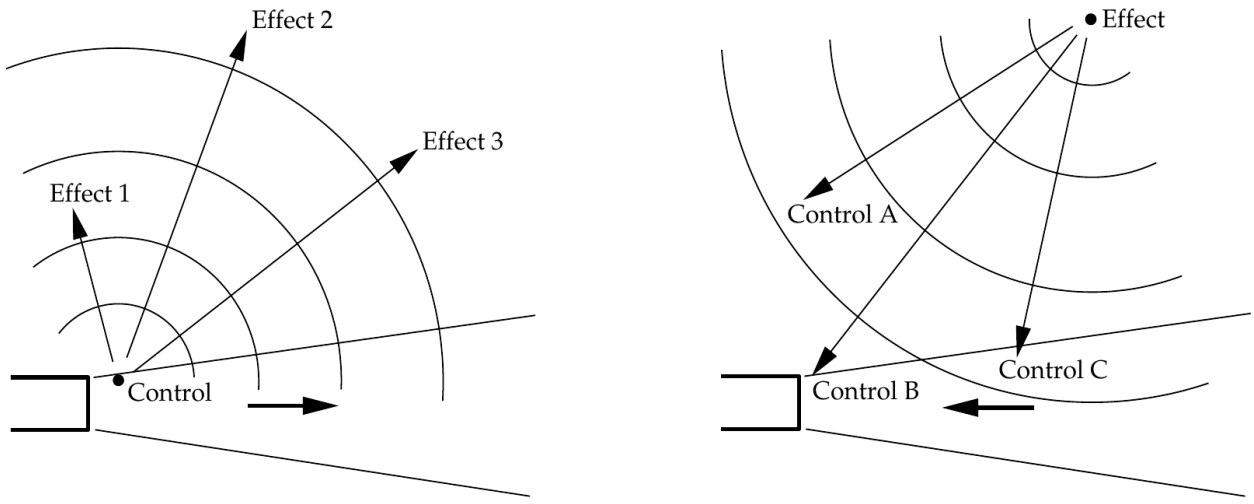

Figure 1.21 – Représentations (gauche) d'une analyse de sensibilité directe permettant de déterminer les effets d'un paramètre sur un écoulement et (droite) d'une analyse de sensibilité adjointe fournissant les zones où placer et/ou ajuster des paramètres afin d'obtenir un unique effet désiré. D'après Cerviño *et al.* [67].

En utilisant des méthodes adjointes, Cerviño *et al.* [67], Barone & Lele [11] et Spagnoli & Airiau [263] ont étudié la sensibilité d'écoulements cisaillés bidimensionnels à des perturbations. Cerviño *et al.* [67] ont ainsi caractérisé les phénomènes de diffusion se produisant lors de la propagation d'une onde acoustique à travers une couche de mélange. Barone & Lele [11] ont déterminé la réceptivité d'une couche de mélange bidimensionnelle se situant en aval d'une plaque de séparation à des perturbations extérieures. Ils ont montré que la couche limite est une zone particulièrement réceptive aux perturbations et qu'une quantité significative d'énergie

est transférée des ondes d'instabilité de couche limite vers les ondes de Kelvin-Helmholtz, ce qui a par la suite été visualisé en détail par Kaplan *et al.* [148] pour un écoulement de jet rond. Spagnoli & Airiau [263] ont caractérisé la sensibilité du rayonnement acoustique d'une couche de mélange bidimensionnelle à différents types de perturbations et ont ainsi déterminé la nature d'un contrôle pouvant être mis en œuvre afin de réduire les niveaux de bruit pour cet écoulement. Les résultats de ces auteurs ont indiqué qu'un contrôle par injection ou aspiration de masse se situant en entrée de l'écoulement est susceptible de réduire les niveaux de bruit.

Le coût en ressources numériques d'un calcul adjoint est très important pour des simulations d'écoulements instationnaires. Cela résulte du fait que, pour ces écoulements, la réalisation d'un calcul adjoint nécessite d'avoir accès aux champs instationnaires de l'écoulement au cours du calcul [18, 103, 314], ce qui est le plus souvent excessivement couteux en termes de mémoire.

Bien qu'il soit très important, le coût d'un calcul adjoint ne dépend pas du nombre de paramètres dont l'influence sur une grandeur spécifique est recherchée. En effet, comme illustré sur la figure 1.21, plusieurs paramètres ayant un effet sur une unique grandeur sont déterminés en réalisant un seul calcul adjoint. Pour cette raison notamment, des méthodes adjointes ont été mises en œuvre à de nombreuses reprises dans la littérature afin de réduire le bruit produit par un écoulement en optimisant de très nombreux paramètres de contrôle. Notamment, Wei & Freund [322] ont appliqué une méthode adjointe pour minimiser les niveaux acoustiques produits par une couche de mélange bidimensionnelle. En optimisant les valeurs d'environ 10^7 paramètres de contrôle, ils ont obtenu une réduction de bruit de 11 dB, attribuée principalement à la disparition d'un appariement tourbillonnaire très bruyant, comme montré par Cavalieri *et al.* [66] en analysant les champs instationnaires de l'écoulement contrôlé. Par la suite, de nombreuses études basées sur des approches adjointes ont été menées par Freund *et al.* [59, 103, 152, 156, 314] entre autres [181, 217, 256, 257, 310, 339] pour optimiser des stratégies de réduction de bruit.

1.3.4 Limitation et méthodes pour des écoulements chaotiques

Pour des écoulements turbulents, il est important de noter que les méthodes d'analyse de sensibilité directes et adjointes ne permettent pas de déterminer avec précision les dérivées de grandeurs moyennées temporellement, comme les niveaux d'intensité acoustique par exemple. Cela résulte du caractère chaotique des écoulements turbulents et notamment de l'effet papillon qui est responsable d'une amplification des effets d'une petite perturbation à mesure que le temps s'écoule, comme montré par Wang & Gao [320] en appliquant une analyse de sensibilité adjointe à des écoulements laminaires et turbulents. Lea *et al.* [165] ont notamment mis en évidence cette limitation dès le début des années 2000 pour un système chaotique simple modélisant l'évolution du climat : le système de Lorenz [172]. Plus récemment, des études ont été effectuées par Wang *et al.* [19, 20, 69, 214, 319, 321] afin de développer, tester et vérifier des

méthodes d'analyses de sensibilité applicables à des écoulements chaotiques. Ces méthodes sont très coûteuses numériquement. En conséquence, elles sont appliquées à des systèmes chaotiques simples, comme le système de Lorenz [172], et n'ont pas encore été mises en œuvre pour des écoulements à haut nombre de Reynolds simulés en résolvant les équations de Navier-Stokes instationnaires, sauf erreur.

Chapitre 2

Méthodes numériques pour les simulations aéroacoustiques directes

Les méthodes numériques utilisées pour réaliser les simulations directes de la présente étude sont présentées dans ce chapitre. Elles ont été développées, implémentées et vérifiées au cours de plusieurs travaux effectuées au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'École Centrale de Lyon [12, 14, 24, 29, 34, 42, 43, 47, 61, 113]. Elles sont basées sur des schémas aux différences finies d'ordre élevé explicites faiblement dispersifs et dissipatifs [34]. Ceux-ci sont similaires à des schémas introduits par Tam *et al.* [280, 287, 289, 291] dans les années 1990 pour réaliser des calculs acoustiques. Ils permettent de répondre aux besoins spécifiques de l'aéroacoustique numérique, comme expliqué par Tam [275, 283]. Au LMFA, ces schémas ont été employés à de très nombreuses reprises pour réaliser des simulations aéroacoustiques directes d'écoulements de jets [15, 32, 47, 114-116, 301, 303], entre autres [62, 81, 182-185, 245].

2.1 Équations de Navier-Stokes compressibles

Les équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires sont considérées sous forme conservative. Elles décrivent l'évolution spatio-temporelle de la masse volumique ρ, de la quantité de mouvement $\mathbf{m} = \rho\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse, et de l'énergie totale $E = p/(\gamma-1) + (\mathbf{m}\cdot\mathbf{m})/2\rho$, où p est la pression et l'opérateur $\cdot$ est utilisé pour représenter un produit scalaire. Elles peuvent s'écrire sous la forme tensorielle suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{m} = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}}{\rho}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\tau\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\frac{E\mathbf{m}}{\rho}\right) = -\nabla\cdot\left(\frac{p\mathbf{m}}{\rho}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{m}\cdot\tau}{\rho}\right) - \nabla\cdot\mathbf{q}\,, \tag{2.3}$$

où le symbole $\otimes$ représente un produit tensoriel, τ est le tenseur des contraintes visqueuses et $\mathbf{q}$ est le flux de chaleur, définis par

$$\tau = -2\mu\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right) - \frac{2}{3}\mu\,(\nabla\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{I}\,, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\mu c_p}{\mathrm{Pr}} \nabla T \ , \tag{2.5}$$

où μ est la viscosité dynamique, T est la température, c_p est la capacité thermique isobare, $\mathrm{Pr} = 0.75$ est le nombre de Prandtl, $\mathbf{I}$ est la matrice identité et l'exposant T représente la transposée d'une matrice. La viscosité dynamique de l'air est déterminée en fonction de la température avec l'équation de Sutherland [268]

$$\mu = \mu(T_0) \times \frac{(T_0 + S)}{(T + S)} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \ , \tag{2.6}$$

où $T_0 = 273$ K, $\mu(T_0) = 1.716 \times 10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1} et $S = 130$ K.

Les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v \ , \tag{2.7}$$

où $\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{m}, E)$ est le vecteur des variables conservatives et $\mathbf{K}_e$ et $\mathbf{K}_v$ sont les flux eulériens et visqueux, dont les expressions sont données dans la thèse de Berland [14].

2.2 Discrétisation spatiale

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes, il est nécessaire d'estimer les flux eulériens et visqueux et donc de calculer des dérivées spatiales. Ces dérivées sont estimées à l'aide de schémas aux différences finies d'ordre élevé conservatifs faiblement dispersifs.

À titre d'exemple, une grandeur Q fonction d'une variable d'espace x est considérée. Ses valeurs sont supposées connues sur un maillage unidimensionnel non-uniforme. La dérivée de cette grandeur peut être approchée en un point x_i par une expression de la forme

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_i) \simeq \frac{1}{\Delta x_i} \sum_{l=-m}^{m} a_l Q(x_{i+l}) \ , \tag{2.8}$$

où

$$\Delta x_i \simeq \sum_{l=-m}^{m} a_l x_{i+l} \tag{2.9}$$

est une approximation de l'espacement des mailles au point x_i et a_l sont les coefficients du schéma aux différences finies. Le schéma doit être centré pour qu'il soit conservatif. La relation $a_l = -a_{-l}$ est donc imposée pour tous les coefficients sauf pour $l = 0$.

Le nombre de coefficients et leurs valeurs fixent l'ordre de précision du schéma, ainsi que les erreurs de dispersion. Pour le calcul des flux eulériens, un schéma d'ordre 4 sur 11 points [34], appelé FDo11p, est utilisé. Il a été développé à l'aide d'une technique introduite par Tam &

Webb [291] pour limiter les erreurs de dispersion. Il permet de propager avec précision une perturbation discrétisée par plus de 4 points par longueur d'onde.

Le calcul des flux visqueux est effectué avec un schéma centré d'ordre 6 sur 7 points, appelé FDs7p. Les erreurs de dispersion de ce schéma sont supérieures à celles du schéma FDo11p. Il est cependant peu probable qu'elles s'accumulent car les flux visqueux sont associés à des mécanismes de dissipation plutôt qu'au transport des grandeurs conservatives. Les valeurs des coefficients des schémas FDs7p et FDo11p sont données dans l'annexe A.

À proximité des limites du domaine de calcul, il n'est plus possible d'utiliser des schémas centrés. Des schémas décentrés, intrinsèquement dissipatifs, sont donc utilisés [14, 16]. Ils sont d'ordre 4 sur 11 points. La dérivée spatiale d'une grandeur Q est approximée de la manière suivante

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_i\right) \simeq \frac{1}{\Delta x_i} \sum_{l=-G}^{D} a_l^d Q\left(x_{i+l}\right) \ , \tag{2.10}$$

avec

$$\Delta x_i \simeq \sum_{l=-G}^{D} a_l^d x_{i+l} \ , \tag{2.11}$$

où a_l^d sont les coefficients des schémas décentrés et G et D sont les nombres de points utilisés à gauche et à droite du point x_i. Ces coefficients ont été déterminés en minimisant les erreurs de dissipation et de dispersion. Ils sont donnés dans l'annexe A.

2.3 Intégration temporelle

Les équations de Navier-Stokes sont intégrées en utilisant un algorithme de Runge-Kutta explicite à deux registres de mémoire [34, 142, 325]. Avec cet algorithme, les variables conservatives à un instant $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$, où Δt est le pas de temps, sont déterminées à partir des variables à l'instant précédent $t_n = n\Delta t$. L'avancement temporel est réalisé en six étapes de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(0)} &= \mathbf{U}^n \\
\mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{K}_e^n \\
\mathbf{U}^{(2)} &= \mathbf{U}^n + \alpha_2 \Delta t \mathbf{K}_e^{(1)} \\
&\vdots \\
\mathbf{U}^{(j)} &= \mathbf{U}^n + \alpha_j \Delta t \mathbf{K}_e^{(j)} \\
&\vdots \\
\mathbf{U}^{(6)} &= \mathbf{U}^n + \alpha_6 \Delta t \mathbf{K}_e^{(5)} \\
\mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^{(6)} + \Delta t \mathbf{K}_v^n
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où α_j sont les coefficients de l'algorithme. L'intégration des flux eulériens est effectuée au cours des six sous-étapes tandis que celle des flux visqueux est réalisée dans la dernière étape, ce qui permet de réduire le coût numérique du calcul. Les coefficients de l'algorithme ont été déterminés en minimisant les erreurs de dispersion et de dissipation, tout en assurant une précision au second ordre [34, 134]. Ils sont donnés dans l'annexe A.

Pour des simulations d'écoulements à haut nombre de Reynolds, le pas de temps peut généralement être fixé à partir du nombre de CFL

$$\mathrm{CFL} = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta_{\min}} \ , \tag{2.13}$$

où $\Delta_{\min}$ est le plus petit espacement entre deux points du maillage. En pratique, pour les présentes simulations, la valeur du nombre de CFL est légèrement inférieure à 1 pour assurer la stabilité des simulations.

2.4 Filtrage sélectif

En raison notamment des propriétés non dissipatives des schémas centrés, des oscillations maille-à-maille sont susceptibles de se développer et de s'amplifier. Pour les supprimer, un filtre passe-bas, appelé filtre sélectif, est utilisé. Il est appliqué à chaque itération temporelle aux fluctuations des variables conservatives comme suit

$$\mathbf{U}_i^f = \mathbf{U}_i - \sigma_{\mathrm{FS}} \sum_{l=-m}^{m} d_l \mathbf{U}'_{i+l} \ , \tag{2.14}$$

où $\mathbf{U}'$ est le vecteur des fluctuations des variables, $\mathbf{U}^f$ est le vecteur des variables filtrées, $\sigma_{\mathrm{FS}} = 0.99$ est l'intensité du filtre et d_l sont les coefficients du filtre.

Le filtre est centré d'ordre 6 sur 11 points [34]. Il est appelé SFo11p. Ses coefficients ont été déterminés de manière à minimiser la dissipation sur les perturbations résolues par plus de 4 points par longueur d'onde. Ils sont fournis dans l'annexe A.

Outre son rôle stabilisant, le filtre sélectif agit comme un modèle de sous-maille en dissipant l'énergie cinétique associée aux plus petites échelles résolues par le maillage [35, 36, 93, 159]. Il permet ainsi de réaliser des simulations des grandes échelles sans affecter significativement les structures turbulentes résolues par plus de 4 points, à la différence d'autres techniques de simulations basées sur une viscosité de sous-maille [108, 171], comme montré par Bogey & Bailly [36].

Près des limites du domaine de calcul, des filtres décentrés sur 11 points sont utilisés [14, 16].

Ils s'appliquent de la manière suivante

$$\mathbf{U}_i^f = \mathbf{U}_i - \sigma_{\mathrm{FS}} \sum_{l=-G}^{D} a_l^d Q\left(x_{i+l}\right) \ , \tag{2.15}$$

où d_l^d sont les coefficients des filtres décentrés, donnés dans l'annexe A.

2.5 Traitement des chocs

Dans un écoulement de jet impactant, un choc droit peut se trouver près de la zone d'impact. Par exemple, Varé & Bogey [302] ont observé un fort choc près d'une plaque impactée par un jet à un nombre de Mach de 0.9. Les chocs ne peuvent pas être résolus avec précision par un maillage. De plus, ils génèrent des oscillations de Gibbs qui peuvent s'amplifier et rendre le calcul instable. Pour supprimer ces oscillations, une approche basée sur l'application d'un filtre adaptatif à proximité des forts gradients est utilisée. Elle a été mise en œuvre par Bogey *et al.* [42, 61] pour des simulations de jets supersoniques [60]. Elle peut être décomposée en deux étapes, une étape de détection des chocs et une étape de filtrage.

2.5.1 Détection des chocs

Dans une première étape, les chocs sont détectés. Ils sont associés à de forts gradients pouvant être identifiés à partir de la dilatation

$$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u} \ . \tag{2.16}$$

Les composantes haut nombres d'onde de la dilatation sont tout d'abord extraites à l'aide d'un filtre standard d'ordre 2 de la manière suivante

$$D\Theta_i = \frac{1}{4}\left(-\Theta_{i+1} + 2\Theta_i - \Theta_{i-1}\right) \ . \tag{2.17}$$

Ensuite, l'intensité de ces composantes est calculée par

$$D\Theta_i^{\mathrm{magn}} = \frac{1}{2}\left(\left(D\Theta_i - D\Theta_{i+1}\right)^2 + \left(D\Theta_i - D\Theta_{i-1}\right)^2\right) \ , \tag{2.18}$$

dont la valeur est élevée à proximité d'un choc. Elle est alors employée pour définir le détecteur de choc

$$r_i = \frac{D\Theta_i^{\mathrm{magn}}}{c_i^2/\Delta_i^2} \ , \tag{2.19}$$

où $c_i = \sqrt{\gamma p_i/\rho_i}$ est la célérité locale du son et Δ_i est une longueur représentative de l'espacement des mailles, définie comme la moyenne géométrique de la taille des mailles dans toutes les directions.

2.5.2 Filtrage adaptatif

L'intensité du filtre varie avec le détecteur de manière à ce que le filtre s'applique à proximité des chocs. Cette intensité est déterminée de la manière suivante

$$\sigma_i^{\mathrm{FA}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_{\mathrm{th}}}{r_i + \epsilon} + \left|1 - \frac{r_{\mathrm{th}}}{r_i + \epsilon}\right|\right) , \tag{2.20}$$

où r_{th} est un paramètre de seuil égal à 5×10^{-5} pour les simulations de la présente thèse et $\epsilon = 10^{-15}$ est une constante permettant d'éviter une possible division par zéro. Pour $r_i < r_{\mathrm{th}}$, l'intensité du filtre est nulle et le filtre ne s'applique pas.

Le filtre est appliqué aux variables conservatives comme suit

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i - \left(\sigma_{i+\frac{1}{2}}^{\mathrm{FA}} D_{i+\frac{1}{2}}^{\mathrm{FA}} - \sigma_{i-\frac{1}{2}}^{\mathrm{FA}} D_{i-\frac{1}{2}}^{\mathrm{FA}}\right) , \tag{2.21}$$

où

$$D_{i+\frac{1}{2}}^{\mathrm{FA}} = \sum_{l=1-m}^{m} c_l \mathbf{U}_{i+l} \quad \text{et} \quad D_{i-\frac{1}{2}}^{\mathrm{FA}} = \sum_{l=1-m}^{m} c_l \mathbf{U}_{i+l-1} \tag{2.22}$$

où c_l sont les coefficients du filtre.

Le filtre employé est centré d'ordre 2 sur 4 points. Ses coefficients ont été optimisés pour minimiser les erreurs de dissipation sur les perturbations résolues par plus de 5 points par longueur d'onde et les erreurs de dispersion pour tous les nombres d'onde. Ils sont donnés dans l'annexe A.

2.6 Conditions aux limites

La réalisation d'une simulation aéroacoustique directe requiert des conditions aux limites spécifiques. Tout d'abord, des conditions aux limites de rayonnement doivent être employées pour permettre aux ondes acoustiques de quitter le domaine sans générer des réflexions d'amplitude significatives. Ensuite, dans le cas où des parois solides sont présentes dans la configuration sous étude, il est nécessaire de spécifier des conditions de paroi. Les conditions de rayonnement et de paroi uilisées pour les simulations de la présente thèse ont été décrites dans les thèses de Barré [12], Gojon [113] et Varé [306].

Différentes approches peuvent être mises en œuvre pour simuler un environnement anéchoïque et permettre ainsi aux perturbations acoustiques de sortir du domaine de

calcul [24, 225, 287]. Elles ont été présentées en détail par Tam [281]. Pour les simulations de la présente thèse, l'approche employée est basée sur des conditions aux limites introduites par Tam & Dong [287] et généralisées par Bogey & Bailly [24]. Elle consiste à résoudre une formulation en champ lointain des équations d'Euler linéarisées pour une onde acoustique sortante provenant d'un point supposé connu.

En sortie d'écoulement, il est nécessaire de dissiper les fluctuations de nature aérodynamique. Ceci est effectué en utilisant une zone éponge à proximité des frontières. Dans cette zone éponge, les mailles sont étirées et un filtre standard d'ordre 2 sur 3 points est appliqué aux fluctuations de masse volumique, de vitesse et de pression. Afin d'éviter une dérive des valeurs moyennes aux frontières, un rappel des grandeurs conservatives vers leurs valeurs initiales est effectué à proximité des conditions aux limites.

Pour les simulations de jets impactants, des conditions de paroi sont spécifiées aux bords de la buse des jets et à la plaque impactée. Les parois sont supposées rigides et adiabatiques. Les conditions de paroi s'écrivent de la manière suivante

$$\mathbf{u}\big|_{\text{paroi}} = 0 \ , \tag{2.23}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_{\text{paroi}} = 0 \ , \tag{2.24}$$

où η est la direction normale à la paroi. Comme la vitesse est nulle à la paroi, les équations de Navier-Stokes sont simplifiées et ne comportent plus l'équation de quantité de mouvement.

Aux parois de la buse, les équations de conservation de la masse et de l'énergie sont résolues. Leurs expressions sur les différentes surfaces de la buse sont données dans la thèse de Barré [12]. À la plaque, l'équation de conservation de la masse est résolue, la pression est déterminée à partir de la condition d'adiabaticité et l'énergie est estimée à l'aide de la relation des gaz parfaits, comme expliqué dans la thèse de Gojon [113].

2.7 Modélisation de conditions d'entrée turbulentes

Pour réaliser des simulations de jets perturbés en sortie de buse, une méthode de génération de turbulence est utilisée [29, 39, 41]. Elle a été développée et présentée en détail par Bogey *et al.* [29, 39]. Elle consiste à introduire des perturbations de nature aérodynamique près des bords intérieurs de la buse. Les perturbations sont de très faible amplitude et ne sont pas corrélées en temps et en azimut. Leur intensité est ajustée pour obtenir des fluctuations de vitesse en sortie avec une amplitude maximale spécifique [27].

2.8 Méthodes spécifiques aux coordonnées cylindriques

2.8.1 Traitement de la singularité sur l'axe

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques présentent une singularité sur l'axe. Pour traiter cette singularité, plusieurs méthodes décrites dans les thèses de Barré [12] et de Cacqueray [61] peuvent être employées. Celle utilisée pour les simulations est la méthode de Mohseni & Colonius [203], appelée méthode de saut de l'axe. Elle consiste à placer le premier point dans la direction radiale en $r = \Delta r/2$ et non en $r = 0$, comme illustré sur la figure 2.1.

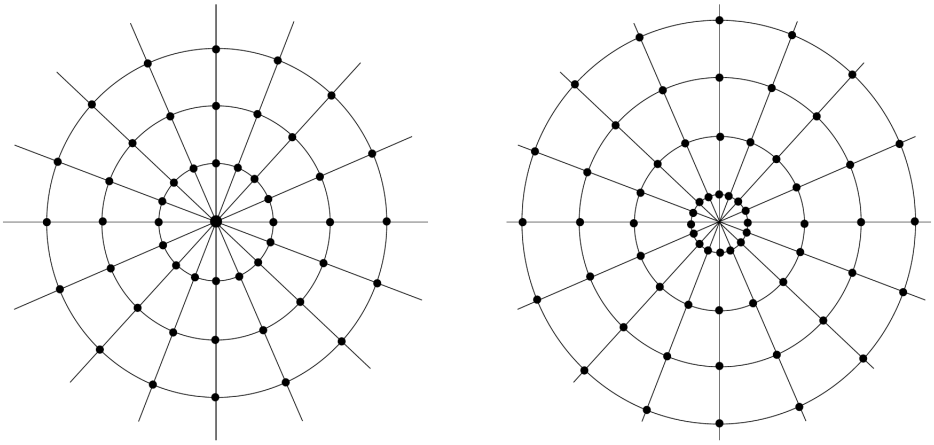

Figure 2.1 – Structures de maillages en coordonnées polaires : (gauche) maillage radial standard avec un premier point en $r = 0$ et (droite) maillage proposé par Mohseni & Colonius [203] avec un premier point en $r = \Delta r/2$; d'après Barré [12].

Les dérivées radiales au voisinage du centre sont calculées avec des différences finies centrées, car il est pénalisant de dégrader la précision des calculs en utilisant des différences finies décentrées. Pour cela, des points de discrétisation fictifs r_l sont introduits avant le premier point en $r = \Delta r/2$. Les valeurs des variables conservatives en ces points sont données par

$$\rho\left(r_{-l},\theta,z\right) = \rho\left(r_l,\theta+\pi,z\right) \tag{2.25}$$
$$\rho u_r\left(r_{-l},\theta,z\right) = -\rho u_r\left(r_l,\theta+\pi,z\right) \tag{2.26}$$
$$\rho u_\theta\left(r_{-l},\theta,z\right) = -\rho u_\theta\left(r_l,\theta+\pi,z\right) \tag{2.27}$$
$$\rho u_z\left(r_{-l},\theta,z\right) = \rho u_z\left(r_l,\theta+\pi,z\right) \tag{2.28}$$
$$E\left(r_{-l},\theta,z\right) = E\left(r_l,\theta+\pi,z\right)\ . \tag{2.29}$$

Les signes des composantes radiale et azimutale de la quantité de mouvement sont inversés car l'orientation des vecteurs unitaires $\mathbf{e_r}$ et $\mathbf{e}_\theta$ change lorsque l'on traverse l'axe et que l'on passe de la direction θ à la direction $\theta+\pi$, comme illustré sur la figure 2.2.

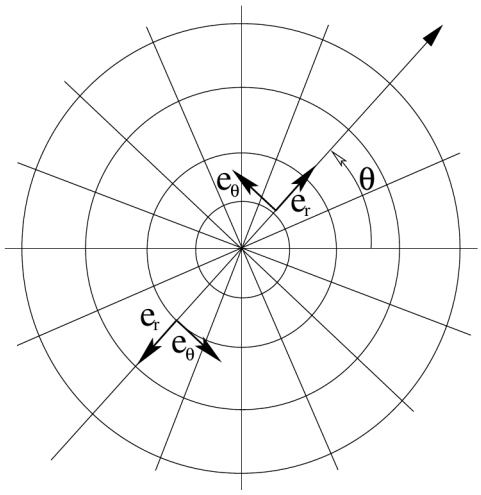

Figure 2.2 – Orientation des vecteurs unitaires polaires lors de la traversée de l'axe ; d'après Barré [12].

2.8.2 Augmentation du pas de temps par déraffinement

Pour un pas de discrétisation azimutal constant, l'espacement des mailles en azimut $r\Delta\theta$ est très faible à proximité de l'axe. Cela implique une forte contrainte de stabilité numérique sur le pas de temps. Pour s'affranchir de cette limitation, les dérivées azimutales près de l'axe sont évaluées en considérant seulement une partie des points disponibles, à l'aide d'une méthode introduite par Bogey *et al.* [43, 61]. Plus précisément, le pas de discrétisation azimutal est étendu artificiellement en multipliant le pas de discrétisation azimutal par un paramètre de déraffinement m prenant des valeurs entières. La dérivée d'une grandeur Q en un point θ_i est alors estimée avec un schéma centré de la manière suivante

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}\left(r, \theta_i, z\right) \simeq \frac{1}{m\Delta\theta} \sum_{l=-m}^{m} a_l Q\left(r, \theta_i + lm\Delta\theta, z\right) \ . \tag{2.30}$$

À titre d'illustration, le nombre de points impliqués dans un calcul de dérivée azimutale pour un schéma centré sur 3 points sans déraffinement et pour un paramètre de déraffinement égal à 2 est représenté sur la figure 2.3, issue de Cacqueray [61].

Des maillages de $n_\theta = 256$ et $n_\theta = 1024$ points ont été considérés pour les simulations. La résolution effective et les valeurs du paramètre de déraffinement pour ces maillages sont données en fonction de la distance au centre dans les tableaux 2.1 et 2.2.

L'utilisation d'un maillage plus grossier à proximité de l'axe conduit à des erreurs de discrétisation plus élevées. Pour les réduire, des schémas centrés spécialement développés pour le calcul des dérivées azimutales [43] sont employés lorsque la résolution effective n_θ^{eff} est inférieure ou égale à 64 points. Pour $n_\theta^{\text{eff}} = 16$, des schémas centrés sur 7 points sont utilisés, tandis que pour $n_\theta^{\text{eff}} = 32$ et 64, des schémas centrés sur 9 points sont employés.

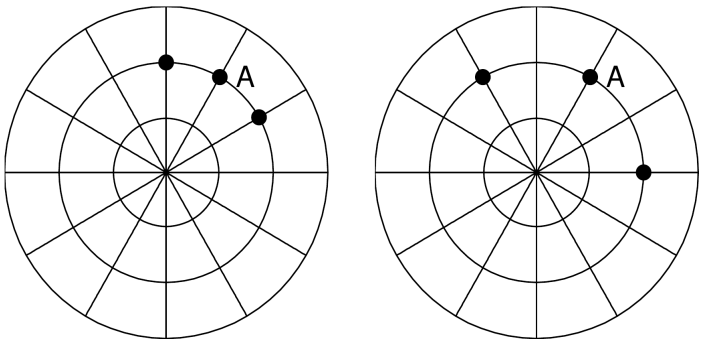

Figure 2.3 – Représentation des points impliqués dans un calcul de dérivée azimutale en un point A pour un schéma centré sur 3 points (a) sans déraffinement et (b) avec un déraffinement $m = 2$; d'après Cacqueray [61].

Tableau 2.1 – Paramètre de déraffinement m et résolution effective en fonction de la distance au centre pour un maillage avec $n_\theta = 256$.

distance au centre	m	résolution effective
$\Delta r/2$	16	16 points
$\Delta r/2 + \Delta r$	8	32 points
$\Delta r/2 + 2\Delta r \leq r \leq \Delta r/2 + 3\Delta r$	4	64 points
$\Delta r/2 + 4\Delta r \leq r \leq \Delta r/2 + 7\Delta r$	2	128 points
$r \geq \Delta r/2 + 8\Delta r$	1	256 points

Tableau 2.2 – Paramètre de déraffinement m et résolution effective en fonction de la distance au centre pour un maillage avec $n_\theta = 1024$.

distance au centre	m	résolution effective
$\Delta r/2$	64	16 points
$\Delta r/2 + \Delta r$	32	32 points
$\Delta r/2 + 2\Delta r \leq r \leq \Delta r/2 + 3\Delta r$	16	64 points
$\Delta r/2 + 4\Delta r \leq r \leq \Delta r/2 + 7\Delta r$	8	128 points
$\Delta r/2 + 8\Delta r \leq r \leq \Delta r/2 + 15\Delta r$	4	256 points
$\Delta r/2 + 16\Delta r \leq r \leq \Delta r/2 + 31\Delta r$	2	512 points
$r \geq \Delta r/2 + 32\Delta r$	1	1024 points

Chapitre 3

Applications de la méthode de la différentiation complexe à des couches de mélange et des jets

Dans ce chapitre, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à des couches de mélange et des jets. Tout d'abord, dans deux premières sections, sa capacité à caractériser les effets d'un paramètre physique sur le développement et le rayonnement acoustique d'une couche de mélange, ainsi qu'à déterminer la sensibilité au maillage d'une simulation aéroacoustique directe, est étudiée en considérant des couches de mélange bidimensionnelles. Ensuite, dans une troisième section, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du mécanisme de réceptivité se produisant lorsqu'une onde acoustique se réfléchit sur les lèvres de la buse d'un jet.

3.1 Sensibilité du développement d'une couche de mélange

Dans cette première section, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du développement d'une couche de mélange bidimensionnelle subsonique excitée à une seule fréquence. Elle est mise en œuvre en réalisant des simulations pour plusieurs rapports de vitesse $(U_2 - U_1) / (U_2 + U_1)$, où U_2 et U_1 sont les vitesses des écoulements rapide et lent de la couche de mélange, différents nombres de Reynolds $\mathrm{Re}_\omega = (U_2 - U_1)\,\delta_\omega/\nu$, où δ_ω est l'épaisseur de vorticité initiale et ν est la viscosité cinématique, et plusieurs fréquences d'excitation. Pour chaque calcul, les dérivées de grandeurs aérodynamiques, comme le taux d'amplification des ondes d'instabilité de Kelvin-Helmholtz par exemple, par rapport à un des trois paramètres considérés sont estimées en utilisant la méthode de la différentiation complexe. Elles sont exploitées pour étudier la capacité de cette méthode à caractériser l'influence d'un paramètre physique sur le développement aérodynamique d'un écoulement.

La couche de mélange, les paramètres physiques et la procédure d'excitation sont présentés dans une première section. Les paramètres numériques sont donnés dans une deuxième section. Les résultats des études de sensibilité sont fournis dans trois autres sections.

3.1.1 Définition de la couche de mélange

La configuration de couche de mélange considérée est similaire à celle étudiée par Monkewitz & Huerre [205] et Stanley & Sarkar [267] à l'aide d'analyses de stabilité linéaire et de simulations directes. Elle est représentée sur la figure 3.1.

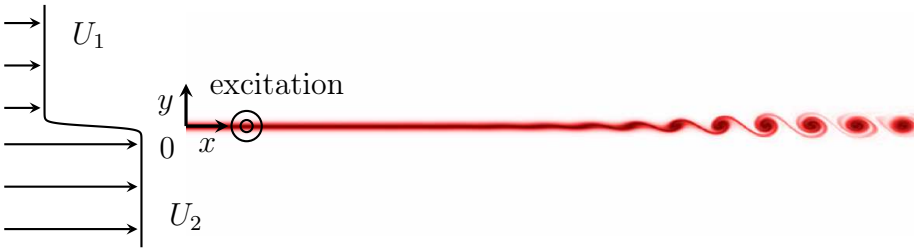

Figure 3.1 – Configuration de couche de mélange ; un champ instantané de vorticité est représenté au centre de la zone de cisaillement en rouge.

La couche de mélange est centrée en $y = 0$. Elle se situe entre un écoulement rapide de vitesse U_2 et un écoulement lent de vitesse U_1. En entrée, en $x = 0$, la vitesse dans la direction de l'écoulement est donnée par le profil en tangente hyperbolique

$$u(y) = U_c \left[1 + R \tanh\left(\frac{2y}{\delta_\omega} \right) \right] , \tag{3.1}$$

où $U_c = (U_1 + U_2)/2$ est la vitesse moyenne en entrée, $R = \Delta U/(2U_c)$ est le rapport de vitesse, $\Delta U = U_2 - U_1$ est la différence de vitesse et $\delta_\omega = \Delta U / \max(|\mathrm{d}u/\mathrm{d}y|)$ est l'épaisseur de vorticité en entrée. Les vitesses des écoulements lent et rapide sont liées à la vitesse moyenne U_c et au rapport de vitesse par les relations $U_1 = U_c(1 - R)$ et $U_2 = U_c(1 + R)$. Le nombre de Reynolds, basé sur la différence de vitesse et l'épaisseur de vorticité en entrée, est donné par $\mathrm{Re}_\omega = \delta_\omega \Delta U/\nu$. À l'instant initial, la température est fixée à $T_0 = 293\,\mathrm{K}$, la pression à $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$ et la masse volumique ρ_0 est obtenue à partir de la loi des gaz parfaits.

Près de la frontière amont du domaine, les couches de mélange sont excitées à une fréquence f_0, caractérisée par un nombre de Strouhal $\mathrm{St}_\omega = f_0 \delta_\omega / U_c$. Pour cela, une procédure d'excitation semblable à celle mise en œuvre par Bogey *et al.* [38] dans leur étude du rayonnement acoustique d'une couche de mélange est employée. Elle consiste à introduire des perturbations de vitesse périodiques de nature incompressible au centre de la zone de cisaillement de la manière suivante

$$u(x, y, t_N) = u(x, y, t_{N-1}) + A \left(\frac{y - y_{\mathrm{exc}}}{b_{\mathrm{exc}}} \right) G(x, y) \sin(2\pi f_0 t_N) , \tag{3.2}$$

$$v(x, y, t_N) = v(x, y, t_{N-1}) - A \left(\frac{x - x_{\mathrm{exc}}}{b_{\mathrm{exc}}} \right) G(x, y) \sin(2\pi f_0 t_N) , \tag{3.3}$$

où $t_N = (N-1)\Delta t$ pour $N = 1, 2, ..., N_t$, N_t est le nombre total d'itérations temporelles, $x_{\text{exc}} = 10\delta_\omega$ et $y_{\text{exc}} = 0$ sont les coordonnées de l'excitation, $A = 2.5 \times 10^{-6} c_0$ est l'amplitude de l'excitation et $b_{\text{exc}} = 0.2\delta_\omega$ est la demi-largeur de la fonction gaussienne

$$G(x, y) = \exp\left(- \ln(2) \frac{(x - x_{\text{exc}})^2 + (y - y_{\text{exc}})^2}{b_{\text{exc}}^2} \right) . \tag{3.4}$$

L'excitation périodique conduit le plus souvent à la formation d'une allée tourbillonnaire constituée de tourbillons espacés uniformément dans la zone de cisaillement, comme représenté sur la figure 3.1. Elle permet ainsi de contrôler le développement de la couche de mélange.

3.1.2 Paramètres numériques

Un domaine de calcul de dimensions $L_x = 500\delta_\omega$ et $L_y = 200\delta_\omega$ est considéré. Il est discrétisé par un maillage cartésien. En entrée et au centre de la couche de mélange, les longueurs des mailles dans les directions longitudinale et transverse sont fixées à $\Delta x_0 = 0.2\delta_\omega$ et $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$. Dans la direction transverse, les mailles sont étirées à partir de $y = 0$ des deux côtés de la couche de mélange à un taux de 4% jusqu'à atteindre une longueur de $\Delta y \simeq 4\delta_\omega$ en $y = \pm L_y/2$. Dans la direction longitudinale, le pas d'espace Δx est constant jusqu'en $x = x_{\text{ze}}$, où x_{ze} est la position du début de la zone éponge, puis augmente à un taux de 4% jusqu'en $x = L_x$. La position du début de la zone éponge varie entre $80\delta_\omega$ et $250\delta_\omega$ dans les simulations. Elle est ajustée de manière à empêcher la présence d'appariements tourbillonnaires susceptibles d'affecter le développement périodique de l'écoulement par leur rayonnement acoustique. Pour dissiper progressivement les perturbations aérodynamiques dans la zone éponge, un filtre laplacien est appliqué aux fluctuations de masse volumique, de vitesse et de pression pour $x > x_{\text{ze}}$. Son intensité croît linéairement de 0 en $x = x_{\text{ze}}$ à 0.2 en $x = x_{\text{ze}} + 50\delta_\omega$, et ne varie pas ensuite. Un terme de rappel est introduit près de la frontière aval du domaine afin de maintenir les valeurs moyennes de masse volumique et de pression proches de leurs valeurs ambiantes. Il est ajouté à chaque itération temporelle en aval de la position $x_{\text{rap}} = L_x - 10\Delta x$ de la manière suivante

$$\rho(t_N) = \rho(t_{N-1}) - \sigma_{\text{rap}} \left(\rho(t_{N-1}) - \rho_0 \right) , \tag{3.5}$$

$$p(t_N) = p(t_{N-1}) - \sigma_{\text{rap}} \left(p(t_{N-1}) - p_0 \right) , \tag{3.6}$$

où $\sigma_{\text{rap}} = 0.01$ est l'intensité du rappel.

Le pas de temps, calculé à partir de la taille minimale des mailles dans la direction transverse, est donné par $\Delta t = 0.9\Delta y_0/c_0$. Après une période transitoire de $50T$, où $T = 1/f_0$ est la période d'enroulement des tourbillons, les signaux instationnaires de vitesse transverse sont enregistrés à une fréquence égale à $20 f_0$ pour déterminer des grandeurs aérodynamiques, comme les valeurs

quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse et le taux d'amplification des ondes d'instabilité.

3.1.3 Sensibilité au rapport de vitesse

La méthode de la différentiation complexe est tout d'abord appliquée à l'étude des effets du rapport de vitesse $R = \Delta U/(2U_c)$.

Paramètres des simulations

Cinq simulations ont été réalisées pour des rapports de vitesse égaux à 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5, et pour une vitesse moyenne en entrée de $U_c = 0.5c_0$. L'épaisseur de vorticité en entrée est déterminée à partir du nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_0 = \delta_\omega U_0/\nu = 10^4$, où $U_0 = 0.1c_0$. La fréquence d'excitation est proche de celle des ondes d'instabilité les plus amplifiées. Elle est caractérisée par le nombre de Strouhal $\mathrm{St}_\omega = f_0\delta_\omega/U_c = 0.132$ [205].

À l'aide d'une analyse de stabilité linéaire, Monkewitz & Huerre [205] ont montré que le taux d'amplification des ondes de Kelvin-Helmholtz augmente avec le rapport de vitesse. On s'attend donc à ce que les tourbillons apparaissent plus en amont pour des rapports de vitesse plus élevés. Une fois les tourbillons formés, des appariements tourbillonnaires peuvent avoir lieu [128, 326]. Ils génèrent des ondes acoustiques qui sont susceptibles d'exciter de nouvelles ondes d'instabilité et donc de modifier le développement des couches de mélange. Pour éviter cela, la position du début de la zone éponge se situe plus en amont pour un rapport de vitesse plus élevé. Elle est donnée en fonction du rapport de vitesse dans le tableau 3.1. La zone éponge débute en $x = 250\delta_\omega$ pour $R = 0.1$, en $x = 120\delta_\omega$ pour $R = 0.3$ et en $x = 80\delta_\omega$ pour $R = 0.5$, par exemple.

R	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$x_{\mathrm{ze}}/\delta_\omega$	250	160	120	100	80

Tableau 3.1 – Position du début de la zone éponge en fonction du rapport de vitesse.

Méthode de la différentiation complexe

Dans chacune des simulations, la méthode de la différentiation complexe est utilisée pour déterminer les dérivées des variables de l'écoulement vis-à-vis du rapport de vitesse. Elle est mise en œuvre en définissant les variables du code de calcul comme complexes et en introduisant une petite perturbation imaginaire ih, où $h = 10^{-5}$, dans l'expression du profil de vitesse en

entrée de la manière suivante

$$u(y) = U_c \left[1 + R\,(1 + ih) \tanh\left(\frac{2y}{\delta_\omega}\right) \right] . \tag{3.7}$$

Elle permet ainsi de déterminer une valeur approchée de la dérivée d'une grandeur quelconque $\mathscr{J}$ vis-à-vis du rapport de vitesse à partir de la partie imaginaire de cette grandeur avec la formule

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{d}R} \simeq \frac{\mathrm{Im}\,[\mathscr{J}]}{hR} . \tag{3.8}$$

Champs de vorticité

Des champs instantanés de vorticité obtenus pour les cinq rapports de vitesse $R = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5 sont représentés sur la figure 3.10. Dans tous les cas, un enroulement de la couche de cisaillement et des tourbillons régulièrement espacés dans la direction de l'écoulement sont visibles. Les enroulements résultent de l'amplification et de la saturation en amplitude des ondes de Kelvin-Helmholtz excitées en $x = 10\delta_\omega$. Ils se situent plus en amont pour des rapports de vitesse plus élevés, en accord avec l'analyse de stabilité linéaire de Monkewitz & Huerre [205] qui prédit une augmentation du taux d'amplification des ondes d'instabilité avec le rapport de vitesse. Par exemple, les tourbillons se forment aux alentours de $x = 200\delta_\omega$ pour $R = 0.1$, de $x = 80\delta_\omega$ pour $R = 0.3$ et de $x = 60\delta_\omega$ pour $R = 0.5$.

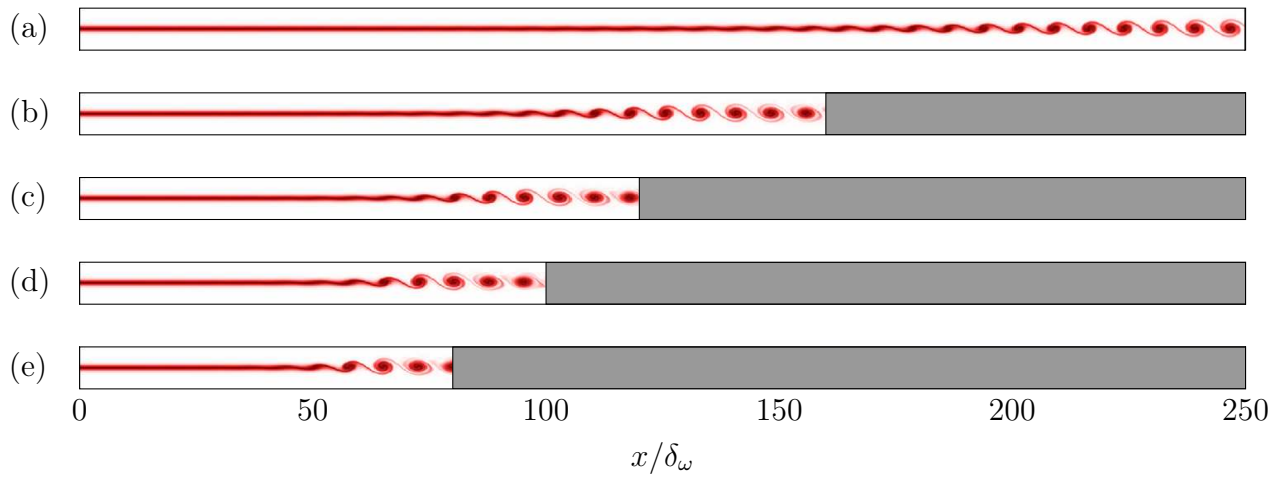

Figure 3.2 – Champs instantanés de la vorticité pour (a) $R = 0.1$, (b) $R = 0.2$, (c) $R = 0.3$, (d) $R = 0.4$ et (e) $R = 0.5$. L'échelle de couleur varie de 0 à $\Delta U/\delta_\omega$ du blanc au rouge. Les zones éponges sont en gris.

Champs moyens de vitesse transverse

La capacité de la méthode de la différentiation complexe à mettre en évidence les effets d'un paramètre sur une grandeur aérodynamique moyenne est maintenant étudiée. Pour cela,

les champs moyens de vitesse transverse et leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse, obtenus avec cette méthode dans les cinq simulations, sont représentés respectivement sur les figures 3.3(a,c,e,g,i) et 3.3(b,d,f,h,j). Pour tous les rapports de vitesse, à proximité des enroulements, la vitesse transverse moyenne est positive dans la région de l'écoulement rapide ($y < 0$) et négative dans la région de l'écoulement lent ($y > 0$), car les tourbillons entraînent l'air environnant vers le centre des couches de mélange durant leur formation [243]. En valeur absolue, la vitesse transverse moyenne augmente avec le rapport de vitesse, ce qui indique que l'entraînement est plus fort pour un cisaillement plus important.

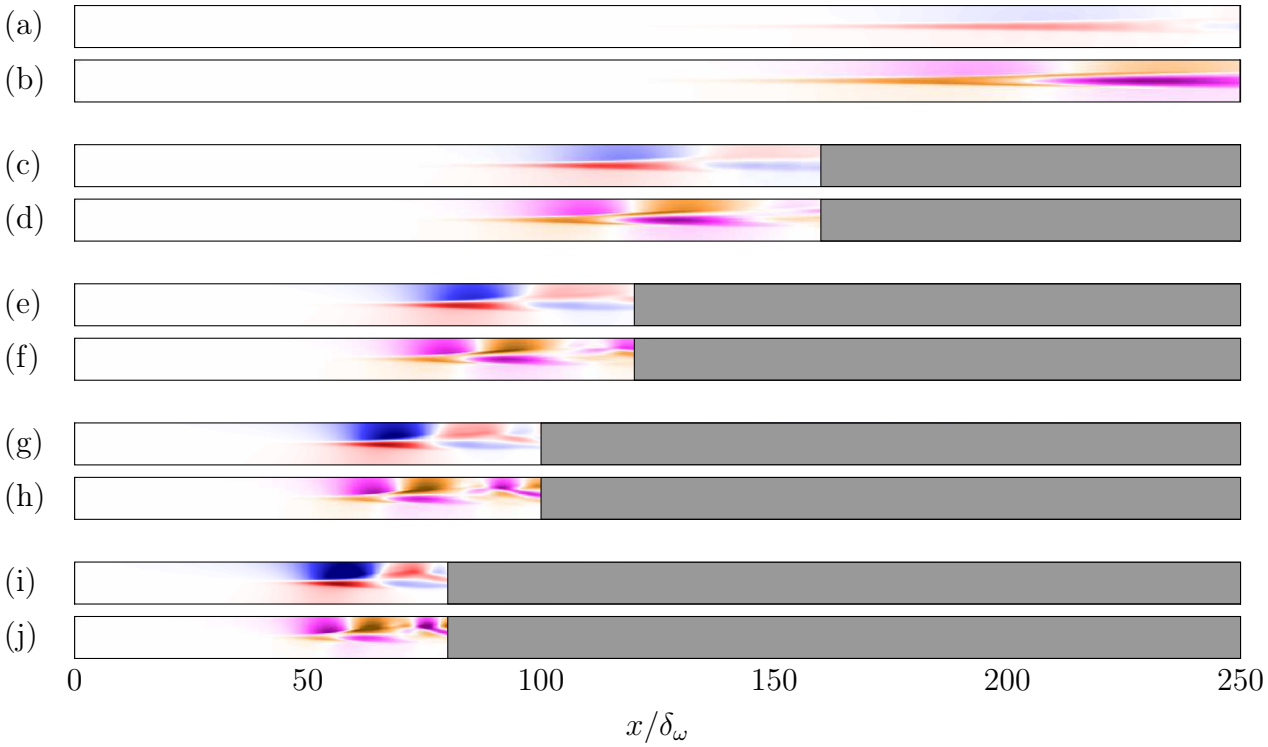

Figure 3.3 – Représentations (a,c,e,g,i) des champs moyens de vitesse transverse et (b,d,f,h,j) de leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse pour (a,b) $R = 0.1$, (c,d) $R = 0.2$, (e,f) $R = 0.3$, (g,h) $R = 0.4$ et (i,j) $R = 0.5$. Les échelles de couleur varient entre $\pm 10^{-2}\Delta U$ du bleu au rouge pour les champs moyens et entre $\pm 2 \times 10^{-1}\Delta U$ du fuchsia au jaune pour leurs dérivées. Les zones éponges sont en gris.

Les dérivées des champs moyens de vitesse transverse vis-à-vis du rapport de vitesse des figures 3.3(b,d,f,h,j) permettent de localiser les zones où les valeurs moyennes de vitesse transverse sont influencées par une modification du rapport de vitesse. Aux alentours des enroulements tourbillonnaires, ces dérivées sont positives pour $y < 0$ et négatives pour $y > 0$, puis plus en aval, elles sont négatives pour $y < 0$ et positives pour $y > 0$. Lorsque le rapport de vitesse augmente, elles indiquent ainsi que les valeurs moyennes de vitesse transverse croissent pour $y < 0$ et diminuent pour $y > 0$ près des enroulements tourbillonnaires, puis décroissent pour $y < 0$ et augmentent pour $y < 0$ plus en aval. Cela suggère que les zones où les valeurs

moyennes de vitesse transverse sont positives pour $y > 0$ et négatives pour $y < 0$ se situent plus en amont pour un rapport de vitesse plus élevé. Ce résultat est en accord avec les champs moyens de vitesse transverse des figures 3.3(a,c,e,g,i). Il indique donc que la méthode de la différentiation complexe peut être utilisée pour caractériser les effets d'un paramètre physique sur une grandeur aérodynamique moyenne.

Intensité des fluctuations de vitesse transverse

Les valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse obtenues en $y = 0$ sont tracées sur la figure 3.4(a). Elles augmentent d'abord fortement, sont maximales à proximité des enroulements tourbillonnaires, et diminuent finalement, en raison de l'amplification puis de la saturation en amplitude des ondes d'instabilité. Les valeurs maximales augmentent avec le rapport de vitesse, comme attendu compte tenu du fait que le cisaillement est plus fort pour un rapport de vitesse plus élevé. Les premiers points d'inflexion des courbes obtenues sont également représentés sur la figure 3.4(a). Les tourbillons se forment entre les positions de ces points et celles des maxima.

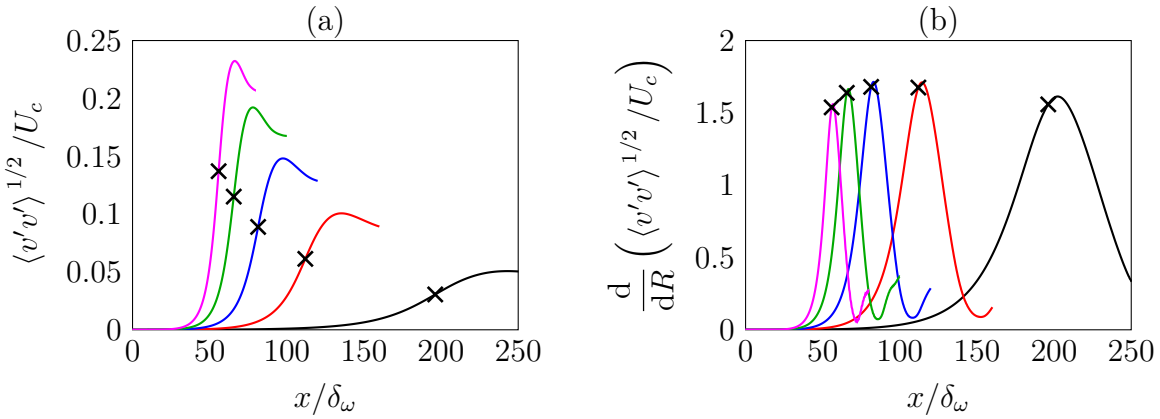

Figure 3.4 – Variations en $y = 0$ (a) des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse et (b) de leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse pour —— $R = 0.1$, —— $R = 0.2$, —— $R = 0.3$, —— $R = 0.4$ et —— $R = 0.5$; $\times$ points d'inflexion dans les profils des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse.

Les dérivées des valeurs quadratiques moyennes vis-à-vis du rapport de vitesse obtenues en $y = 0$ sont représentées sur la figure 3.4(b). Elles sont positives, conformément à l'augmentation de l'intensité des fluctuations de vitesse avec le rapport de vitesse. Elles commencent par croître fortement, puis diminuent et augmentent à nouveau faiblement. Leurs valeurs maximales se situent à proximité des positions des points d'inflexion repérés dans les profils des valeurs quadratiques moyennes, et donc près des enroulements tourbillonnaires. Ainsi, ces positions correspondent aux zones les plus influencées par une modification de la valeur du rapport de vitesse.

Approximation au premier ordre

Plusieurs méthodes peuvent être mises en œuvre pour montrer l'influence d'un paramètre sur un écoulement en utilisant les dérivées obtenues avec la méthode de la différentiation complexe. Une première méthode consiste à représenter une grandeur et sa dérivée, puis à localiser des zones dans l'écoulement afin de caractériser l'influence du paramètre sur la grandeur dans des régions spécifiques. Elle a permis précédemment de montrer que les zones les plus affectées par le rapport de vitesse se situent près des enroulements tourbillonnaires.

Une deuxième méthode consiste à utiliser les variables de l'écoulement et leurs dérivées pour déterminer des valeurs approchées de ces variables pour des valeurs de paramètre quelconques à l'aide d'une approximation au premier ordre [74, 86, 133, 155, 337]. Elle est appliquée ici pour étudier sa validité et sa précision.

Les intensités des fluctuations de vitesse transverse et leurs dérivées, obtenues pour un rapport de vitesse donné R_0, sont utilisées pour estimer des valeurs approchées de ces intensités pour $R = R_0 + \Delta R$, où ΔR est un réel, de la manière suivante

$$\langle v'v' \rangle^{1/2}(R_0 + \Delta R) \simeq \langle v'v' \rangle^{1/2}(R_0) + \Delta R \frac{\mathrm{d}\langle v'v' \rangle^{1/2}}{\mathrm{d}R}(R_0) \, . \tag{3.9}$$

Le premier terme du second membre est donné par la partie réelle des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse déterminées pour $R = R_0$ et le deuxième terme est obtenu à partir de la partie imaginaire de ces valeurs avec la méthode de la différentiation complexe. Ainsi, l'approximation (3.9) permet d'estimer les niveaux d'intensité des fluctuations de vitesse pour des valeurs du rapport de vitesse quelconques, en utilisant les solutions d'une seule simulation réalisée pour $R = R_0$. L'erreur d'approximation est cependant de l'ordre de ΔR^2.

Des valeurs approchées des niveaux d'intensité de vitesse ont été estimées à partir d'une simulation pour $R_0 = 0.3$ pour des rapports de vitesse $R = R_0 + \Delta R$ égaux à 0.3, 0.3125, 0.325, 0.35 et 0.4. Leurs profils en $y = 0$ sont tracés sur la figure 3.5. À titre de comparaison, le profil obtenu avec la simulation pour $R = 0.4$ est également représenté. Dans tous les cas, les valeurs approchées augmentent, puis diminuent dans la direction de l'écoulement. Les points d'inflexion et les maxima des courbes obtenues à partir de l'approximation au premier ordre se situent plus en amont pour des rapports de vitesse plus élevés, comme attendu compte tenu des profils d'intensité des fluctuations de vitesse de la figure 3.4(a). Pour $R = 0.4$, la valeur maximale déterminée avec l'approximation au premier ordre est supérieure d'environ 50% de celle obtenue avec la simulation directe. Cet écart peut être attribué à l'erreur de l'approximation (3.9).

Sensibilité de la position des points d'inflexion

On cherche à présent à déterminer les dérivées des positions des points d'inflexion dans les profils d'intensité de vitesse vis-à-vis du rapport de vitesse. Pour un profil d'intensité donné, la

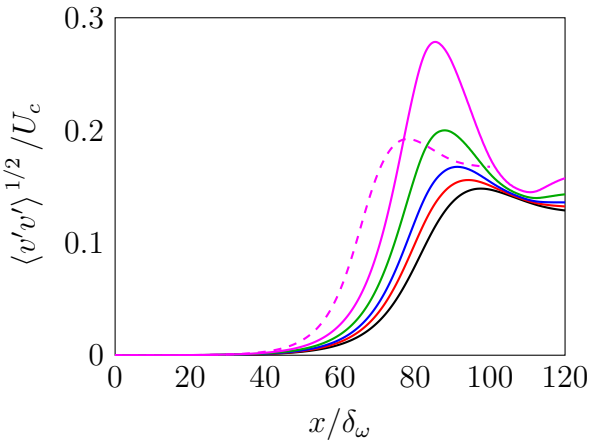

FIGURE 3.5 – Variations en $y = 0$ des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse obtenues avec l'approximation (3.9) pour $R_0 = 0.3$ et —— $R = 0.3$, —— $R = 0.3125$, —— $R = 0.325$, —— $R = 0.35$, —— $R = 0.4$ et par une simulation pour - - - - $R = 0.4$.

position x_{inflx} d'un point d'inflexion vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 \langle v'v' \rangle^{1/2}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{\text{inflx}}) = 0 \; . \tag{3.10}$$

Cette position est un nombre réel et sa dérivée vis-à-vis du rapport de vitesse ne peut donc pas être obtenue en utilisant la méthode de la différentiation complexe. Une autre méthode est donc mise en œuvre pour cela. Pour un rapport de vitesse R_0, elle consiste tout d'abord à déterminer des profils d'intensité approchés à l'aide de l'approximation au premier ordre (3.9) pour deux rapports de vitesse, $R = R_0 - \Delta R$ et $R = R_0 + \Delta R$, puis à estimer les positions des points d'inflexion des courbes obtenues en utilisant l'équation (3.10), et enfin à calculer une valeur approchée de la dérivée de la position du point d'inflexion vis-à-vis du rapport de vitesse par

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{inflx}}}{\mathrm{d}R}(R_0) \simeq \frac{x_{\text{inflx}}(R_0 + \Delta R) - x_{\text{inflx}}(R_0 - \Delta R)}{2\Delta R} \; , \tag{3.11}$$

où $\Delta R = 3 \times 10^{-3}$.

Les positions des points d'inflexion et leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse déterminées avec cette méthode sont représentées en fonction du rapport de vitesse sur la figure 3.6. Les points d'inflexion se situent plus en amont pour des rapports de vitesse plus élevés, en accord avec les profils d'intensité de vitesse de la figure 3.4(a). Les valeurs des dérivées sont associées aux pentes des segments rouges sur la figure 3.6. Elles sont négatives, comme attendu compte tenu des variations des positions des points d'inflexion avec le rapport de vitesse. En valeur absolue, elles diminuent avec le rapport de vitesse, ce qui indique que la sensibilité de la position du point d'inflexion au rapport de vitesse est réduite lorsque ce rapport augmente.

Les segments rouges obtenus à partir des dérivées suivent l'évolution des positions des points d'inflexion. Les dérivées déterminées avec la méthode de la différentiation complexe sont donc en accord avec les résultats de l'étude paramétrique.

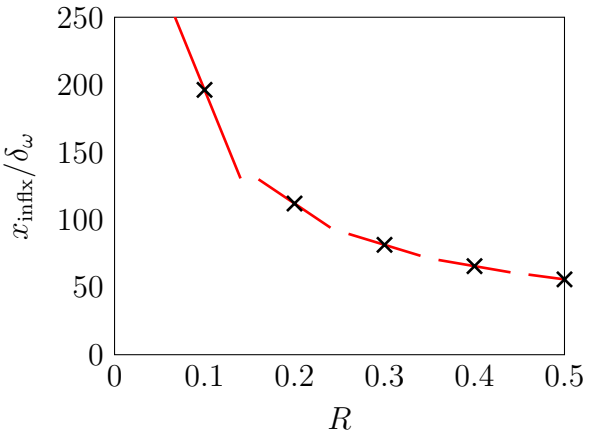

FIGURE 3.6 – Variations × des positions des points d'inflexion dans les profils des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse et — de leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse.

Taux d'amplification des ondes d'instabilité

L'amplification des ondes d'instabilité est maintenant étudiée. Pour cela, les valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse, normalisées par la différence de vitesse ΔU, sont tracées en utilisant une échelle logarithmique sur la figure 3.7(a). Des droites sont obtenues en aval de l'excitation située en $x_{\mathrm{exc}} = 10\delta_\omega$, indiquant que l'amplitude des ondes d'instabilité commencent par croître de manière exponentielle dans la direction de l'écoulement. Cette croissance exponentielle est caractérisée par un taux d'amplification $-k_i$, correspondant au taux d'amplification des ondes d'instabilité.

Pour évaluer ce taux, on suppose qu'entre $x = x_{\mathrm{exc}} + 10\delta_\omega$ et la position où l'intensité des fluctuations de vitesse est égale au tiers de sa valeur maximale, les valeurs quadratiques moyennes peuvent s'exprimer de la manière suivante

$$\langle v'v' \rangle^{1/2}(y = 0) = A \exp\left(-k_i x\right) \ , \tag{3.12}$$

où A est une amplitude dont la valeur dépend de la procédure d'excitation. En considérant le logarithme de l'équation (3.12), on obtient

$$-k_i x = \ln\left(\langle v'v' \rangle^{1/2}\right) - \ln A \ , \tag{3.13}$$

Dans l'équation (3.13), le taux d'amplification des ondes d'instabilité est proportionnel au

logarithme des valeurs quadratiques moyennes. Il a ainsi été déterminé dans chacun des calculs entre $x = x_{\text{exc}} + 10\delta_\omega$ et la position où les valeurs quadratiques moyennes sont égales au tiers de leurs valeurs maximales. Afin de déterminer une expression de la dérivée du taux d'amplification vis-à-vis du rapport de vitesse, la dérivée de l'équation (3.13) est considérée. Elle s'écrit de la manière suivante

$$\frac{\mathrm{d}\left(-k_i\right)}{\mathrm{d}R}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[\ln\left(\langle v'v'\rangle^{1/2}\right)\right] - \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}R}\,, \tag{3.14}$$

où le deuxième terme du second membre est nul car $\mathrm{d}A/\mathrm{d}R = 0$ puisque la procédure d'excitation ne dépend pas du rapport de vitesse. En utilisant la méthode de la différentiation complexe, une valeur de la dérivée du logarithme des valeurs quadratiques est obtenue à partir de la partie imaginaire de ce logarithme comme suit

$$\frac{\mathrm{d}\left(-k_i\right)}{\mathrm{d}R}x \simeq \frac{\mathrm{Im}\left[\ln\left(\langle v'v'\rangle^{1/2}\right)\right]}{hR}\,. \tag{3.15}$$

L'expression (3.15) est du même type que l'équation (3.13) utilisée pour évaluer le taux d'amplification des ondes d'instabilité. Les dérivées du taux d'amplification vis-à-vis du rapport de vitesse ont donc été obtenus comme précédemment entre $x = x_{\text{exc}} + 10\delta_\omega$ et la position où l'intensité des fluctuations de vitesse est égale au tiers de sa valeur maximale.

Pour comparer les taux d'amplification obtenus à ceux déterminés par Monkewitz & Huerre [205] à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire incompressible, les taux évalués par ces auteurs, notés $-k_i^{\text{incomp}}$, ont été modifiés pour prendre en compte les effets de compressibilité. Pour cela, une méthode des moindres carrés a été appliquée à des résultats d'analyses de stabilité linéaire compressibles obtenus par Day *et al.* [78] afin de déterminer une fonction f permettant de calculer des taux d'amplification $-k_i^{\text{comp}}$ de la manière suivante

$$-k_i^{\text{comp}} = -k_i^{\text{incomp}} f(\mathrm{M}_c)\,, \tag{3.16}$$

où $f(\mathrm{M}_c) = (1 + \alpha \mathrm{M}_c^2)^{-\beta}$, M_c est le nombre de Mach convectif [23, 221], $\alpha = 3.84 \times 10^{-4}$ et $\beta = 3.911 \times 10^3$.

Les taux d'amplification des ondes d'instabilité et leurs dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse sont représentés sur la figure 3.7(b). Les taux obtenus par Monkewitz & Huerre [205], ajustés de manière à prendre en compte les effets de compressibilité, sont aussi montrés. Ils croissent linéairement avec le rapport de vitesse. Les taux déterminés avec les simulations sont en excellent accord avec ceux-ci. Les dérivées des taux d'amplification vis-à-vis du rapport de vitesse sont représentées par des segments rouges sur la figure 3.7(b). Leurs valeurs sont positives, comme attendu. Elles sont proches les unes des autres, ce qui suggère que la sensibilité du taux d'amplification des ondes d'instabilité au rapport de vitesse varie très peu avec ce

paramètre. Les segments rouges suivent l'évolution du taux d'amplification avec le rapport de vitesse. Les dérivées obtenues avec méthode de la différentiation complexe caractérisent donc convenablement les effets du rapport de vitesse sur le taux d'amplification des ondes d'instabilité.

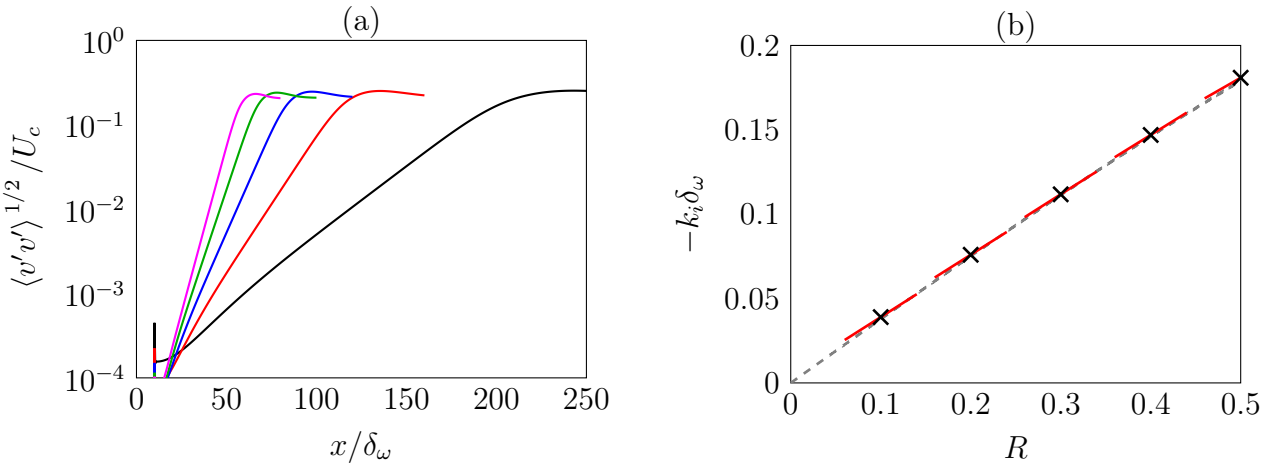

Figure 3.7 – Variations (a) des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse pour —— $R = 0.1$, —— $R = 0.2$, —— $R = 0.3$, —— $R = 0.4$ et —— $R = 0.5$, et (b) du taux d'amplification des ondes d'instabilité en fonction du rapport de vitesse et —— de leur dérivées vis-à-vis du rapport de vitesse ; - - - - - taux d'amplification obtenus à partir de l'analyse de stabilité linéaire de Monkewitz & Huerre [205].

3.1.4 Sensibilité au nombre de Reynolds

La méthode de la différentiation complexe est à présent appliquée à l'étude de l'influence du nombre de Reynolds sur le développement de la couche de mélange.

Paramètres des simulations

Des simulations visqueuses et une simulation non-visqueuse ont été réalisées pour des nombres de Reynolds $\mathrm{Re}_\omega = \delta_\omega \Delta U / \delta_\omega$ égaux à 300, 600, 1200, 2400, 4800 et ∞. Dans tous les cas, le rapport de vitesse R vaut 0.5, la vitesse moyenne en entrée U_c est égale à $0.5c_0$ et l'épaisseur de vorticité en entrée est obtenue à partir du nombre de Reynolds Re_ω. Comme dans l'étude des effets du rapport de vitesse, la fréquence d'excitation est caractérisée par le nombre de Strouhal $\mathrm{St}_\omega = f U_c / \delta_\omega = 0.132$.

Des analyses de stabilité linéaire réalisées par Ragab & Wu [234] et Seo [259] ont montré que le taux d'amplification des ondes d'instabilité décroît lorsque le nombre de Reynolds diminue. Les tourbillons sont donc susceptibles de se former plus en aval pour des nombres de Reynolds plus bas. En conséquence, pour adapter la taille de la partie physique du maillage à la position

des enroulements tourbillonnaires, la zone éponge se situe plus en amont pour des nombres de Reynolds plus élevés. La zone éponge commence en $x = 120\delta_\omega$ pour $\mathrm{Re}_\omega = 300$, en $x = 100\delta_\omega$ pour $\mathrm{Re}_\omega = 600$ et en $x = 80\delta_\omega$ pour $\mathrm{Re}_\omega \geq 1200$, comme reporté dans le tableau 3.2.

Re_ω	300	600	1200	2400	4800	∞
$x_{\mathrm{ze}}/\delta_\omega$	120	100	80	80	80	80

Tableau 3.2 – Positions des débuts des zones éponges dans l'étude de l'influence du nombre de Reynolds.

Méthode de la différentiation complexe

L'influence du nombre de Reynolds est estimée dans chacun des calculs avec la méthode de la différentiation complexe. Pour cela, une perturbation imaginaire ih, où $h = 10^{-5}$, est introduite dans la viscosité moléculaire, qui devient donc $\nu(1 + ih)$. De cette façon, une valeur approchée de la dérivée d'une grandeur $\mathscr{J}$ par rapport au nombre de Reynolds peut être obtenue à partir de la partie imaginaire de $\mathscr{J}$ de la façon suivante

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{dRe}_\omega} \simeq \frac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{d}\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{dRe}_\omega} , \tag{3.17}$$

$$\simeq \frac{\mathrm{Im}\left[\,\mathscr{J}\,\right]}{h\nu}\left(-\frac{\delta_\omega \Delta U}{\mathrm{Re}_\omega^2}\right) , \tag{3.18}$$

$$\simeq -\frac{\mathrm{Im}\left[\,\mathscr{J}\,\right]}{h\mathrm{Re}_\omega} . \tag{3.19}$$

Champs de vorticité

Des champs instantanés de vorticité déterminés pour $\mathrm{Re}_\omega = 300$, 600, 1200, 2400 et 4800, et leurs dérivées par rapport au nombre de Reynolds sont représentés sur les figures 3.8(a,c,e,g,i) et 3.8(b,d,f,h,j). Pour $\mathrm{Re}_\omega = 300$ sur la figure 3.8(a), aucun tourbillon ne se forme dans l'écoulement et seul un élargissement de la zone de cisaillement est visible. Dans le champ de la dérivée de la vorticité par rapport au nombre de Reynolds, sur la figure 3.8(b), des ovales peuvent être observés à proximité du centre de la zone de cisaillement pour $x \gtrsim 70\delta_\omega$. Ils sont espacés uniformément dans la direction de l'écoulement d'une distance égale à la longueur d'onde des ondes d'instabilité $\lambda_{\mathrm{aero}} = U_c/f_0 \simeq 7.5\delta_\omega$, ce qui indique qu'ils sont associés à ces ondes. Les dérivées sont positives dans les ovales, suggérant qu'une augmentation du nombre de Reynolds conduit à des ondes d'instabilité de plus forte amplitude et donc à l'émergence de structures tourbillonnaires.

Pour $\mathrm{Re}_\omega \geq 600$ sur les figures 3.8(c,e,g,i), des tourbillons apparaissent dans les couches de mélange. Les valeurs de la norme de la vorticité au centre des tourbillons augmentent et

ces derniers sont plus isolés les uns des autres pour des nombres de Reynolds plus élevés. Les champs de vorticité pour $\mathrm{Re}_\omega = 2400$ et $\mathrm{Re}_\omega = 4800$ sur les figures 3.8(g) et 3.8(i) se ressemblent fortement, ce qui indique que l'écoulement n'est pas significativement influencé par la viscosité pour $\mathrm{Re}_\omega \geq 2400$. Les enroulements tourbillonnaires se situent plus en amont pour des nombres de Reynolds plus élevés. Leurs positions varient cependant peu au delà de $\mathrm{Re}_\omega = 1200$, en accord avec les analyses de stabilité linéaire visqueuses de Ragab & Wu [234] et Seo [259] qui prédisent que le taux d'amplification des ondes d'instabilité est presque indépendant du nombre de Reynolds pour $\mathrm{Re}_\omega > 1000$.

Dans tous les cas, les dérivées de la vorticité sont positives au centre des structures turbulentes et négatives entre deux tourbillons. Elles indiquent donc que les valeurs de la vorticité augmentent au centre des structures turbulentes et que les tourbillons sont plus isolés les uns des autres quand le nombre de Reynolds croît. En valeur absolue, les valeurs des dérivées diminuent avec le nombre de Reynolds, car la sensibilité de l'écoulement à la viscosité est plus faible pour des nombres de Reynolds élevés.

Taux d'amplification des ondes d'instabilité

Les valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse obtenues en $y = 0$ sont tracées en utilisant une échelle logarithmique sur la figure 3.9(a). Elles augmentent puis diminuent dans la direction de l'écoulement. Leur croissance initiale est plus lente pour des nombres de Reynolds plus faibles, en raison de l'amortissement des ondes d'instabilité par la viscosité. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, les valeurs quadratiques tendent vers celles obtenues avec la simulation non visqueuse, comme attendu.

Les taux d'amplification des ondes d'instabilité et leurs dérivées par rapport au nombre de Reynolds ont été déterminés avec la méthode de la différentiation complexe comme dans l'étude des effets du rapport de vitesse de la section 3.1.3. Ils sont représentés en fonction du nombre de Reynolds sur la figure 3.9(b). Les taux d'amplification augmentent fortement avec le nombre de Reynolds pour $\mathrm{Re}_\omega \leq 600$ et de plus en plus faiblement ensuite, en se rapprochant du taux déterminé pour $\mathrm{Re}_\omega = \infty$. Les dérivées des taux d'amplification sont positives pour tous les cas et décroissent avec le nombre de Reynolds. Elles indiquent donc que la sensibilité du taux d'amplification à la viscosité est plus faible pour des nombres de Reynolds plus élevés, en accord avec les résultats d'analyse de stabilité linéaire de Ragab & Wu [234] et de Seo [259].

3.1.5 Sensibilité à la fréquence d'excitation

Dans cette section, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude des effets de la fréquence d'excitation sur le développement de la couche de mélange.

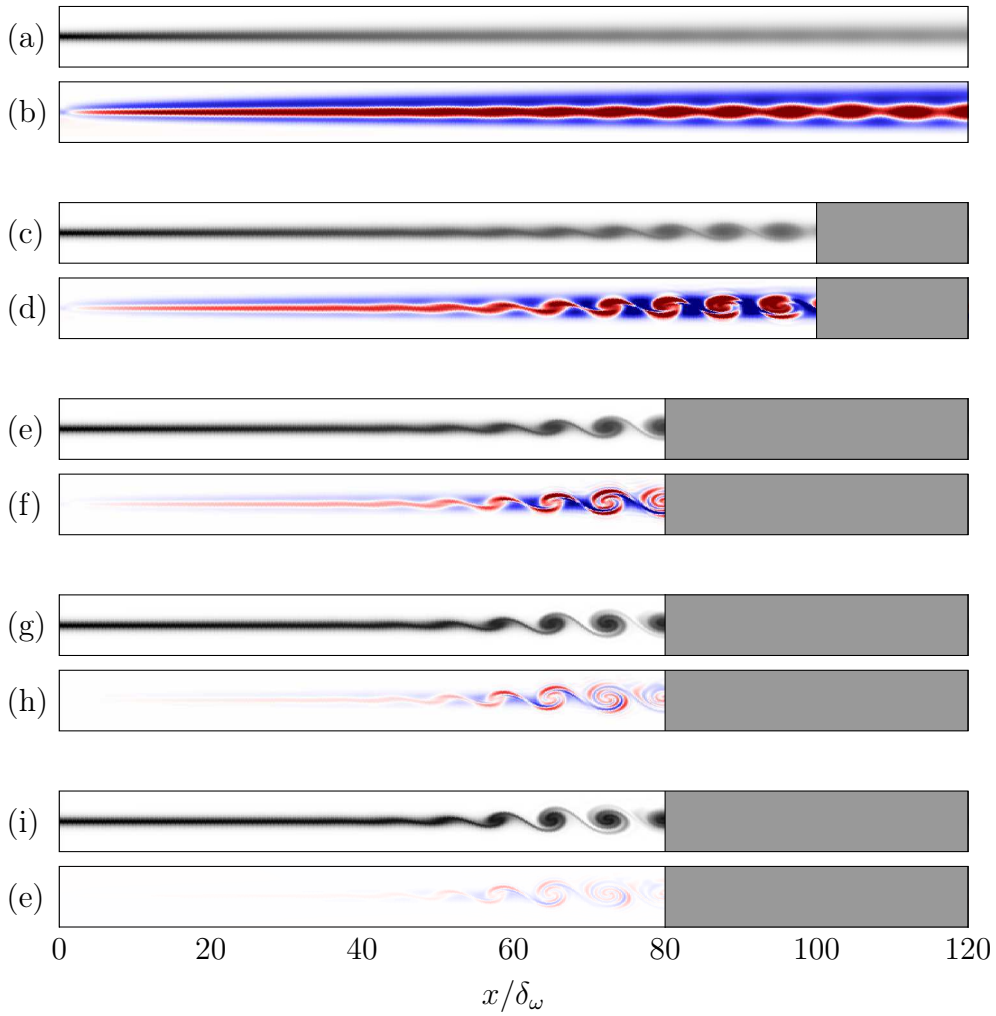

Figure 3.8 – Représentations instantanées (a,c,e,g,i) des champs de vorticité et (b,d,f,h,j) de leurs dérivées par rapport au nombre de Reynolds pour (a,b) $\mathrm{Re}_\omega = 300$, (c,d) $\mathrm{Re}_\omega = 600$, (e,f) $\mathrm{Re}_\omega = 1200$, (g,h) $\mathrm{Re}_\omega = 2400$ et (i,j) $\mathrm{Re}_\omega = 4800$. Les échelles de couleur varient de 0 à $\Delta U/\delta_\omega$ du blanc au noir pour les champs de vorticité et entre $\pm 8 \times 10^5 \Delta U/\delta_\omega$ du bleu au rouge pour leurs dérivées. Les zones éponges sont en gris.

Paramètres des simulations

Huit simulations ont été réalisées pour des excitations à des nombres de Strouhal $\mathrm{St}_\omega = 0.08$, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2 et 0.22 afin de considérer des fréquences d'excitation inférieures et supérieures à la fréquence des ondes d'instabilité les plus amplifiées, correspondant à $\mathrm{St}_\omega \simeq 0.14$ [205]. Dans tous les cas, les vitesses des écoulements lent et rapide sont $U_1 = 0.25c_0$ et $U_2 = 0.75c_0$, comme dans l'étude de sensibilité au nombre de Reynolds de la section 3.1.4. Le nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_\omega = \delta_\omega \Delta U/\nu = 10^{12}$ est très élevé afin de pouvoir effectuer des comparaisons avec les résultats obtenus par Monkewitz & Huerre [205] à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire non visqueuse.

La position du début de la zone éponge a été ajustée de manière à ce que des tourbillons

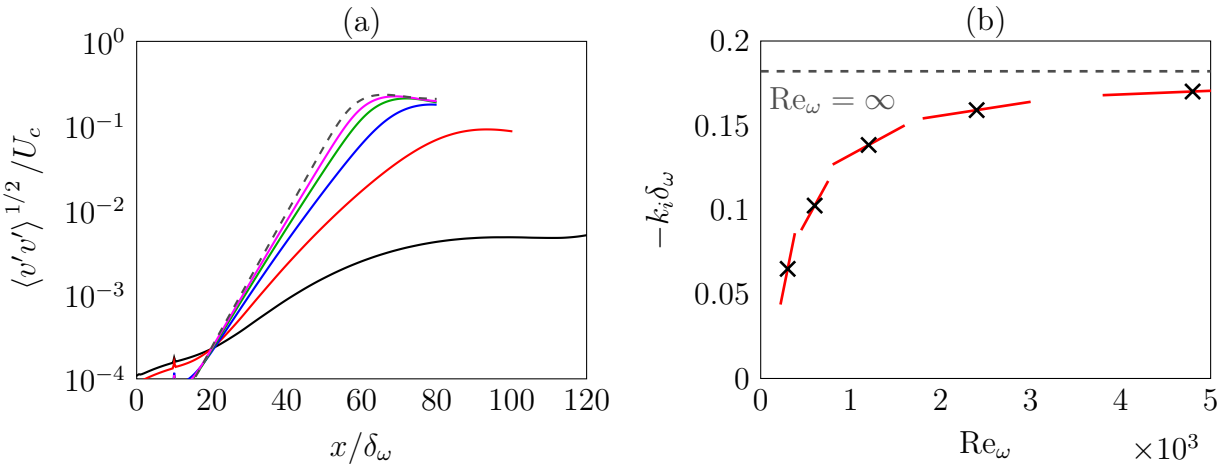

Figure 3.9 – Variations (a) des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse en $y = 0$ pour — $\mathrm{Re}_\omega = 300$, — $\mathrm{Re}_\omega = 600$, — $\mathrm{Re}_\omega = 1200$, — $\mathrm{Re}_\omega = 2400$, — $\mathrm{Re}_\omega = 4800$ et - - - - $\mathrm{Re}_\omega = \infty$ et (b) du taux d'amplification des ondes d'instabilité et — de ses dérivées en fonction du nombre de Reynolds.

se forment dans tous les cas, mais qu'il n'y ait pas d'appariements tourbillonnaires dans la partie physique du domaine de calcul. Elle est donnée en fonction du nombre de Strouhal de l'excitation dans le tableau 3.3. Elle diminue avec la fréquence d'excitation pour $\mathrm{St}_\omega \leq 0.2$ et augmente ensuite. La zone éponge commence en $x = 100\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.08$, en $x = 70\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.18$ et en $x = 75\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.22$, par exemple.

St_ω	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	0.22
$x_{\mathrm{ze}}/\delta_\omega$	100	80	80	80	80	70	70	75

Tableau 3.3 – Positions des débuts des zones éponges dans l'étude des effets de la fréquence d'excitation.

Méthode de la différentiation complexe

Pour estimer l'influence de la fréquence d'excitation sur les solutions de l'écoulement, une petite perturbation imaginaire ih, où $h = 10^{-5}$, est ajoutée au nombre de Strouhal de l'excitation, qui devient donc $\mathrm{St}_\omega(1+ih)$. La dérivée d'une grandeur $\mathscr{J}$ par rapport au nombre de Strouhal peut alors être estimée à partir de la partie imaginaire de $\mathscr{J}$ en utilisant la méthode de la différentiation complexe de la manière suivante

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{dSt}_\omega} \simeq \frac{\mathrm{Im}\left[\mathscr{J}\right]}{h\mathrm{St}_\omega} \,. \tag{3.20}$$

Champs de vorticité

Pour illustrer les effets de la fréquence d'excitation, des champs instantanés de vorticité obtenus pour les huit fréquences d'excitation sont représentés sur la figure 3.10. Des tourbillons sont visibles dans tous les cas. Leur taille et la distance qui les sépare diminuent avec la fréquence d'excitation, comme attendu. Cette distance vaut par exemple $9.6\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.1$ et $4.8\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.2$, en conformité avec la longueur d'onde $\lambda_{\mathrm{aero}} = U_c/f_0$ qui vaut $10\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.1$ et $5\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.2$.

Lorsque la fréquence d'excitation augmente, les tourbillons apparaissent plus en amont pour $\mathrm{St}_\omega \leq 0.14$ et plus en aval $\mathrm{St}_\omega > 0.14$. Les enroulements tourbillonnaires ont lieu par exemple aux alentours de $x = 75\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.08$, de $x = 55\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.14$ et de $x = 65\delta_\omega$ pour $\mathrm{St}_\omega = 0.22$. Ce résultat est en accord avec l'analyse de stabilité linéaire de Monkewitz & Huerre [205] qui prédit que le taux d'amplification des ondes d'instabilité est maximum pour $\mathrm{St}_\omega \simeq 0.14$.

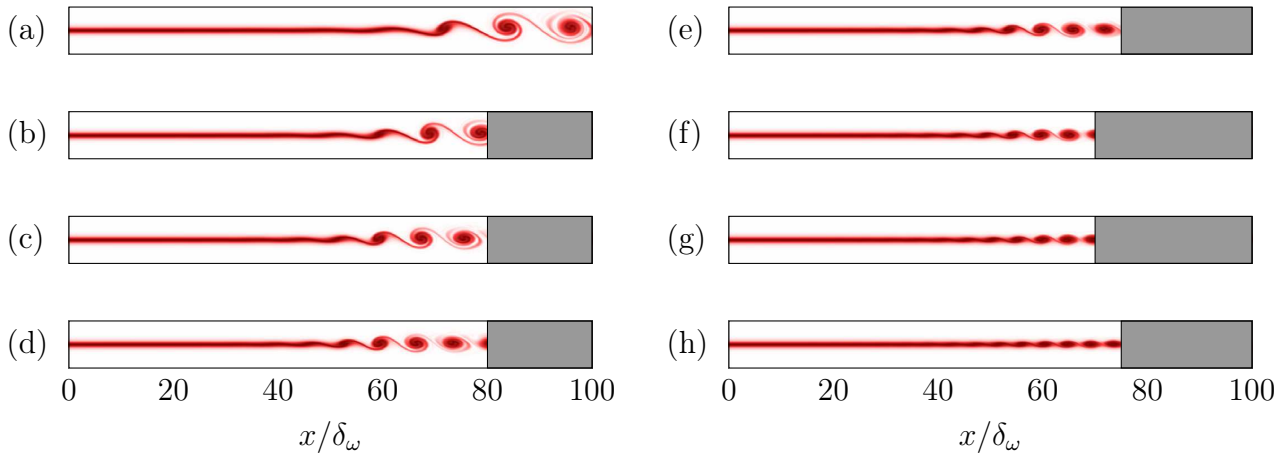

Figure 3.10 – Représentations instantanées de la vorticité pour (a) $\mathrm{St}_\omega = 0.08$, (b) $\mathrm{St}_\omega = 0.1$, (c) $\mathrm{St}_\omega = 0.12$, (d) $\mathrm{St}_\omega = 0.14$, (e) $\mathrm{St}_\omega = 0.16$, (f) $\mathrm{St}_\omega = 0.18$, (g) $\mathrm{St}_\omega = 0.2$ et (h) $\mathrm{St}_\omega = 0.22$. L'échelle de couleur varie de 0 à $\Delta U/\delta_\omega$ du blanc au rouge. Les zones éponges sont en gris.

Taux d'amplification des ondes d'instabilité

Dans tous les cas, le taux d'amplification des ondes d'instabilité a été calculé à partir des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse transverse en $y = 0$, de la même manière que dans les sections 3.1.3 et 3.1.4. Ses variations avec le nombre de Strouhal de l'excitation sont tracées sur la figure 3.11(a). À titre de comparaison, les taux obtenus par Monkewitz & Huerre [205] sont également représentés. Ils ont été ajustés pour prendre en compte les effets de compressibilité, comme dans la section 3.1.3. Le taux d'amplification croît avec la fréquence, puis diminue. Les valeurs issues des simulations sont en excellent accord avec

celles déterminées par analyse de stabilité linéaire [205]. En particulier, les ondes d'instabilité les plus amplifiées sont obtenues pour $\mathrm{St}_\omega = 0.14$.

Les taux d'amplification et leurs dérivées par rapport au nombre de Strouhal de l'excitation sont représentés en fonction de ce nombre pour $0.07 \leq \mathrm{St}_\omega \leq 0.23$ sur la figure 3.11(b). Les valeurs des dérivées, indiquées par des segments rouges, sont positives pour $\mathrm{St}_\omega \leq 0.14$ et négatives pour $\mathrm{St}_\omega > 0.14$, comme attendu compte tenu des variations du taux d'amplification avec le nombre de Strouhal. De plus, les segments rouges suivent l'évolution du taux d'amplification avec le nombre de Strouhal. Les dérivées obtenues avec la méthode de la différentiation complexe sont donc en accord avec les résultats de l'étude paramétrique.

Le segment rouge déterminé pour $\mathrm{St}_\omega = 0.14$ est très faiblement incliné par rapport à l'axe des nombres de Strouhal sur la figure 3.11(b). Pour ce cas, le taux d'amplification n'est donc pas significativement affecté par une petite modification de la fréquence d'excitation, ce qui indique qu'un maximum est obtenu pour $\mathrm{St}_\omega = 0.14$. Ce résultat suggère que la méthode de la différentiation complexe peut être utilisée pour estimer la valeur d'un paramètre associée à un extremum sur une courbe et, par conséquent, que cette méthode peut être employée dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer la valeur d'un paramètre de contrôle minimisant une grandeur, comme les niveaux de bruit d'un écoulement par exemple.

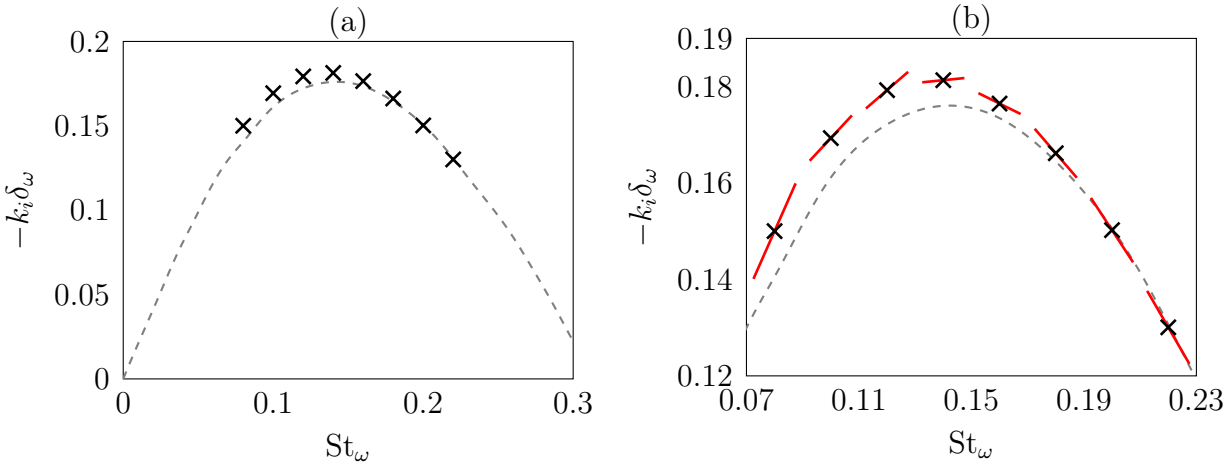

Figure 3.11 – Variations du taux d'amplification des ondes d'instabilité en fonction du nombre de Strouhal de l'excitation obtenues par × les simulations et ----- l'analyse de stabilité linéaire de Monkewitz & Huerre [205] ; —— dérivées des taux d'amplification par rapport au nombre de Strouhal de l'excitation.

3.1.6 Conclusion

La méthode de la différentiation complexe a été appliquée à l'étude du développement d'une couche de mélange bidimensionnelle excitée à une seule fréquence. Des comparaisons entre des dérivées obtenues avec cette méthode et des résultats issus d'études paramétriques,

menées en réalisant des simulations pour différentes valeurs du rapport de vitesse, du nombre de Reynolds et de la fréquence d'excitation, ont été effectuées. Elles mettent en évidence la validité de la méthode de la différentiation complexe et indiquent que cette méthode peut être utilisée pour caractériser la sensibilité du développement d'un écoulement à un paramètre physique. En outre, les résultats obtenus suggèrent que cette méthode peut être employée dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer un contrôle optimal.

3.2 Sensibilité du bruit d'une couche de mélange

Dans cette deuxième section, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du rayonnement acoustique d'une couche de mélange bidimensionnelle afin d'étudier sa capacité à caractériser les effets d'un paramètre physique ou numérique sur le bruit d'un écoulement. Pour cela, des simulations sont réalisées avec cette méthode pour plusieurs nombres de Mach, nombres de Reynolds et tailles de maille. Pour chaque calcul, les dérivées des champs acoustiques par rapport à un de ces trois paramètres sont estimées à l'aide de la méthode de la différentiation complexe. Elles sont comparées à des dérivées calculées avec la méthode de la différentiation de solutions pour étudier la précision de la méthode de la différentiation complexe.

Les résultats obtenus ont fait l'objet de l'article [312] "*Application of the complex differentiation method to the sensitivity analysis of aerodynamic noise*", *Comput. Fluids*, vol. 264, 2023. Ils indiquent que la méthode de la différentiation complexe peut être utilisée pour, d'une part, déterminer les effets d'un paramètre physique sur le rayonnement acoustique d'un écoulement et, d'autre part, caractériser la convergence en maillage d'une simulation aéroacoustique directe. Ils montrent également que cette méthode est plus précise que la méthode de la différentiation de solutions. L'article [312] est inclus dans son intégralité dans les pages suivantes.

Des données issues d'une simulation réalisée pour la présente étude ont aussi été exploitées dans le cadre d'une collaboration entre Étienne Spieser, ancien doctorant et post-doctorant au LMFA, son encadrant Christophe Bailly, professeur des universités à l'École Centrale de Lyon, et Stefan Schoder, professeur assistant à l'Université Technique de Graz. Elles ont notamment permis d'estimer la précision d'une méthode de prédiction de bruit basée sur une analogie acoustique. Les résultats de la collaboration ont été publiés dans l'article [254] "*Acoustic modeling using the aeroacoustic wave equation based on Pierce's operator*", *AIAA J.*, vol. 61, n° 9, 2023.

Computers and Fluids 264 (2023) 105965

Contents lists available at ScienceDirect

Computers and Fluids

journal homepage: www.elsevier.com/locate/compfluid

Application of the complex differentiation method to the sensitivity analysis of aerodynamic noise

Hugo Vincent *, Christophe Bogey

Univ Lyon, Ecole Centrale de Lyon, CNRS, Univ Claude Bernard Lyon 1, INSA Lyon, LMFA, UMR5509, 69130, Ecully, France

ARTICLE INFO

Keywords:
Complex differentiation method
Sensitivity analysis
Grid sensitivity
Mixing layer
Direct numerical simulation
Aeroacoustics

ABSTRACT

The complex differentiation method (CDM) is applied to the sensitivity analysis of the noise generated by two-dimensional mixing layers, simulated by Direct Numerical Simulation (DNS), in order to investigate its capabilities to highlight the effects of a key parameter on the aerodynamic noise. For this purpose, simulations are carried out using the CDM for different flow Mach numbers, Reynolds numbers and mesh spacings. In each case, the derivatives of the noise levels with respect to one of the three parameters are obtained using the CDM, implemented by adding a small imaginary perturbation to the parameter under study. In most cases, vortex pairings occur in the mixing layers and produce acoustic waves at a single frequency. The derivatives of the acoustic intensity obtained using the CDM show that the sound radiation is stronger and less directed downstream as the Mach number increases, in agreement with dimensional analyses. They also indicate that the radiation is more intense and directive as the Reynolds number increases. The magnitude of the derivatives of the acoustic intensity with respect to the mesh size decreases for finer meshes, showing that the grid sensitivity of the radiated noise is reduced for the latter meshes, as expected. In all cases, the derivatives obtained using the CDM are in good agreement with results from parametric studies. This suggests that the CDM can be used to describe the effects of physical parameters and of the grid resolution on the sound produced by a high-speed flow.

1. Introduction

Reducing the noise produced by flows is required in many industrial applications. To develop suitable strategies for that, it is often necessary to highlight the effects of flow parameters such as the Mach and Reynolds numbers on the noise generation mechanisms. Parametric studies are often conducted using high-fidelity simulations to bring these effects to light. For instance, to examine the effects of the Mach number on the noise produced by a jet, several simulations of the jet at different Mach numbers should be analyzed. For a high-Reynolds number flow, a huge number of mesh points are required to accurately resolve the aerodynamic and acoustic fields, leading to parametric studies of prohibitive cost.

A sensitivity analysis can be seen as an alternative. It enables to estimate the derivatives of the flow solutions with respect to a parameter, namely, the flow sensitivities. For example, the derivative of a function f (e.g., noise level) with respect to a parameter α, at a point $\alpha = \alpha_0$, can be written as

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\alpha_0 + \epsilon) - f(\alpha_0)}{\epsilon}, \tag{1}$$

where ϵ is a real number. A high value of the derivative indicates a strong sensitivity of the function f to a variation of the parameter α at $\alpha = \alpha_0$. Conversely, a low value of the derivative means that the function is only slightly affected by the parameter variation.

Various sensitivity analysis methods are available in the literature, as documented in the review by Martins & Hwang [1]. The most notable ones are methods based on Taylor approximations [2], the sensitivity equation method [2–6] and the complex differentiation method [2,7–9], also called the complex-step method. With a method based on Taylor approximations, values of the derivatives of the flow solutions with respect to a parameter are estimated by carrying out several simulations. For instance, a first-order approximation of the derivative of a function f can be written as

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_0) \simeq \frac{f(\alpha_0 + h) - f(\alpha_0)}{h}, \tag{2}$$

where h is a real number denoting a perturbation magnitude. To estimate the derivative using this approximation, it is necessary to carry out a simulation for $\alpha = \alpha_0 + h$ and another one for $\alpha = \alpha_0$. The truncation error of a Taylor approximation is reduced as the

* Corresponding author.
E-mail address: hugo.vincent@ec-lyon.fr (H. Vincent).

https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.105965
Received 19 October 2022; Received in revised form 16 March 2023; Accepted 7 June 2023
Available online 9 June 2023
0045-7930/© 2023 Elsevier Ltd. All rights reserved.

perturbation magnitude h decreases. Therefore, it is recommended to consider very small values for h. However, when h is excessively small, $f(\alpha_0 + h)$ and $f(\alpha_0)$ are so close that their difference is lower than the rounding errors and thus the derivative $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\alpha$ increases as h becomes smaller, as shown by Anderson et al. [8] and Martins et al. [10], among others. Finding a value of the perturbation magnitude h to accurately evaluate the derivatives of interest therefore may require several trials.

Flow sensitivities can also be estimated using the sensitivity equation method (SEM). This method consists in solving the sensitivity equations obtained by differentiating the Navier–Stokes equations with respect to a parameter. The solutions of these equations are the derivatives of the flow variables with respect to the parameter and can thus be used to determine the flow sensitivities. The flow variables are involved in the sensitivity equations due to the non-linearity of the Navier–Stokes equations. To apply the SEM, it is thus required to solve the sensitivity equations in conjunction with the Navier–Stokes equations to compute the flow variables and the flow sensitivities. SEM has been used several times to study unsteady incompressible flows. For instance, Hristova et al. [5] investigated the sensitivity of a two-dimensional pulsed flow around a square cylinder with respect to the mean flow velocity, the amplitude and the period of the pulsation using SEM. Their results showed that the asymmetrical vortex shedding downstream of the cylinder appears more clearly and earlier in the flow sensitivity fields than in the flow solution fields. The SEM was first applied to a three-dimensional turbulent flow by Kirkman & Metzger [11] to describe the effects of the Reynolds number on a channel flow. The variations of the mean flow fields with the Reynolds number, predicted by the flow sensitivities obtained by the authors, were in good agreement with the results of parametric studies. Zayernouri & Metzger [6] studied the effects of the Reynolds and Prandtl numbers on vortices in a non-isothermal two-dimensional mixing layer using the SEM. The vorticity fields and their derivatives with respect to these numbers estimated by the authors indicated that the vortices are more isolated from each other as the Reynolds number increases and that the temperature is less homogeneous within the vortices when the Prandtl number is higher.

Finally, the complex differentiation method (CDM) can be used to obtain the flow sensitivities. It is related to the Taylor approximations. However, it allows to determine the derivatives of the flow solutions with respect to a parameter by performing a single simulation, and without round-off errors [12]. It consists in adding a small imaginary perturbation to the parameter and solving the Navier–Stokes equations using complex arithmetic. It can be implemented in a simple way in a computational code dealing only with real variables [8,10,13]. The complex differentiation method was introduced by Lyness & Moler [7], and then been applied by Squire & Trapp [12] to evaluate the derivatives of analytical real functions. It was later used by Anderson et al. [8] and Vatsa [13] for turbulent flows by solving the time-dependent Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, and by Cerviño et al. [14] and Lu & Sagaut [9] for two-dimensional compressible unsteady flows using DNS. The method was then used by Vergnault & Sagaut [15] in conjunction with the Lattice Boltzmann Method to analyze the sensitivity of a flow around a cylinder with respect to the Reynolds number. Subsequently, the CDM was coupled with a time-reversal technique to localize noise sources within a two-dimensional mixing layer [16]. Finally, Kirkman & Metzger [2] studied the sensitivity of a channel flow to the channel height, the viscosity and the pressure gradient using second-order Taylor approximations, the SEM and CDM. The results obtained by these authors indicate that among these three approaches, the CDM is the most accurate and the cheapest in terms of numerical cost.

Given the preceding, CDM appears to be a straightforward and accurate method for performing sensitivity analyses. However, it is still unclear if it can be used to study the effects of physical parameters on the noise produced by a flow. Another question is whether a sensitivity analysis can help to characterize the accuracy of acoustic variables computed by direct numerical simulations. A grid sensitivity study is the standard method to assess this accuracy. It consists in carrying out simulations using finer and finer meshes. The convergence of the flow solutions with mesh refinement is then chosen as a criterion for numerical accuracy [17]. The derivatives of the flow solutions with respect to the mesh spacing may provide useful information to study this convergence, since they indicate how the flow solutions vary with a small change in the grid resolution. To the best of the authors' knowledge, the CDM has not been applied yet to conduct a grid sensitivity analysis of the aerodynamic and acoustic fields of a high-speed flow computed by direct numerical simulation.

To answer the above questions, CDM is applied in this work to study the effects of the Mach number, the Reynolds number, and the mesh spacing on the noise produced by a two-dimensional subsonic mixing layer. The mixing layer is controlled with a harmonic excitation so that vortex pairings occur and produce acoustic waves at a single frequency, as in other studies in the literature [16,18–20]. Parametric studies are conducted by carrying out direct numerical simulations of the mixing layer for different Mach and Reynolds numbers, based on the velocity difference between the fast and the slow flows of the mixing layer and on the inlet vorticity thickness δ_ω, and using several meshes. The values of the Mach number are between 0.2 and 0.4 and those of the Reynolds number are between 400 and 12,800. Four non-uniform structured grids, differing from each other by the mesh spacing at the center of the mixing layer, denoted Δy_0, which varies from $0.1\delta_\omega$ to $0.8\delta_\omega$, are considered. In each simulation, the complex differentiation method is used to estimate the derivatives of acoustic variables with respect to the Mach number, the Reynolds number or the mesh spacing parameter Δy_0. In this way, comparisons between the flow sensitivities obtained using the CDM and the results of the parametric studies can be made.

The paper is organized as follows. The compressible Navier–Stokes equations, the complex differentiation method, the complex Navier–Stokes equations and the sensitivity equations are presented in Section 2. In Section 3, the parameters of the mixing layer and the numerical parameters of the simulations are given. In Section 4, the accuracy of the complex differentiation method is compared with that of a first-order approximation by estimating the derivative of the acoustic power of mixing layers at different Reynolds numbers with respect to the latter parameter. The approach employed to estimate the flow sensitivities with respect to the Reynolds and Mach numbers, and to the mesh spacing Δy_0 using the complex differentiation method is described in Section 5. The results are given in Section 6. The effects of the Mach number on the sound radiation of the mixing layer are first described by analyzing the properties of acoustic fields, such as the root-mean-square values of pressure fluctuations. They are then compared to the derivatives of the sound intensities with respect to the Mach number estimated using the CDM. To investigate the efficiency of the CDM, the derivatives of the noise levels provided by the flow sensitivities are compared with the noise levels values. The results obtained from the simulations performed with different Reynolds number and grids are analyzed with the same approach.

2. Governing equations and complex differentiation method

2.1. Navier–Stokes equations

The compressible Navier–Stokes equations in their conservative form are considered. They describe the evolution of density ρ, momentum $\mathbf{m} = \rho\mathbf{u}$, where $\mathbf{u}$ is the velocity vector, and total energy $E = p/(\gamma - 1) + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})/2\rho$, where p is the pressure, γ is the adiabatic index, and the interpunct denotes the scalar product. They can be written as follows

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0 \,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\rho} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{E\mathbf{m}}{\rho} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{p\mathbf{m}}{\rho} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{q} \,, \tag{5}$$

where the symbol $\otimes$ denotes the outer product, $\boldsymbol{\tau}$ is the viscous stress and $\mathbf{q}$ is the heat flux, defined by

$$\boldsymbol{\tau} = -2\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}} \right) - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \,, \tag{6}$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\mu c_p}{\mathrm{Pr}} \nabla T \,, \tag{7}$$

where μ is the dynamic viscosity, T is the temperature, c_p is the heat capacity at constant pressure, Pr is the Prandtl number and $\mathbf{I}$ is the identity matrix.

2.2. Complex differentiation method

To explain the complex differentiation method, the Taylor series of a function $f(\alpha)$ depending on a complex number $\alpha = \alpha_0 + ih$, where h is a real number, is considered. It can be written as:

$$f(\alpha_0 + ih) = f(\alpha_0) + ih \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_0) - \frac{h^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha_0) + O(h^3) \,. \tag{8}$$

In this formula, it can be noticed that approximate values of the function and its derivative at $\alpha = \alpha_0$ can be obtained, respectively by the real part of $f(\alpha_0 + ih)$ and from the imaginary part of $f(\alpha_0 + ih)$ as

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha_0) = \frac{\mathrm{Im}\left[f(\alpha_0 + ih) \right]}{h} + O(h^2) \,. \tag{9}$$

The flow solutions and their derivatives with respect to a parameter can thus be estimated by carrying out a single simulation in which a small imaginary part is introduced to the parameter of interest.

2.3. Complex Navier–Stokes equations and sensitivity equations

Since the parameter under study should contain an imaginary part in the complex differentiation method, the other flow variables are also complex numbers and the Navier–Stokes equations are solved in a complex form. In the following, the flow variables are split into real and imaginary parts using the subscripts r and i. For example, the density can be written as

$$\rho = \rho_r + i\rho_i \,. \tag{10}$$

where ρ_r is the real part and ρ_i is the imaginary part of the density. By decomposing the Navier–Stokes equations into real and imaginary parts, two systems of equations are obtained. The first one describes the evolution of the real parts of flow variables and the second one their imaginary parts. These systems can be written as

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m}_r = 0 \,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_r}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_r - \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i \right) + \rho_i \left(\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_i \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] = -\nabla p_r + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_r \,, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(E_r \mathbf{m}_r - E_i \mathbf{m}_i \right) + \rho_i \left(E_r \mathbf{m}_i + E_i \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] &= -\nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(p_r \mathbf{m}_r - p_i \mathbf{m}_i \right) + \rho_i \left(p_r \mathbf{m}_i + p_i \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] \\ &+ \nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(\mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_r - \mathbf{m}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_i \right) + \rho_i \left(\mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{m}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] \\ &- \nabla \cdot \mathbf{q}_r \,, \end{aligned} \tag{13}$$

and

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m}_i = 0 \,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_r \right) + \rho_i \left(\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i - \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] = -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i \,, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(E_r \mathbf{m}_i + E_i \mathbf{m}_r \right) + \rho_i \left(E_i \mathbf{m}_i - E_r \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] &= -\nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(p_r \mathbf{m}_i + p_i \mathbf{m}_r \right) + \rho_i \left(p_i \mathbf{m}_i - p_r \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] \\ &+ \nabla \cdot \left[\frac{\rho_r \left(\mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{m}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_r \right) + \rho_i \left(\mathbf{m}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_r \right)}{\rho_r^2 + \rho_i^2} \right] \\ &- \nabla \cdot \mathbf{q}_i \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Assuming that the order of magnitude of the real parts of the variables is much larger than that of their imaginary parts, the products of imaginary variables can be neglected. The real part of the complex Navier–Stokes equations can then be rewritten as

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m}_r = 0 \,, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_r}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_r}{\rho_r} \right) = -\nabla p_r + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_r \,, \tag{18}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{E_r \mathbf{m}_r}{\rho_r} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{p_r \mathbf{m}_r}{\rho_r} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_r}{\rho_r} \right) - \nabla \cdot \mathbf{q}_r \,, \tag{19}$$

giving equations identical to the real Navier–Stokes equations. In the same way, the imaginary part of the complex Navier–Stokes equations can be rewritten as

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m}_i = 0 \,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\left(\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r} - \frac{\rho_i \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_r}{\rho_r^2} \right] = -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i \,, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\left(E_r \mathbf{m}_i + E_i \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r} - \frac{\rho_i E_r \mathbf{m}_r}{\rho_r^2} \right] &= -\nabla \cdot \left[\frac{\left(p_r \mathbf{m}_i + p_i \mathbf{m}_r \right)}{\rho_r} - \frac{\rho_i p_r \mathbf{m}_r}{\rho_r^2} \right] \\ &+ \nabla \cdot \left[\frac{\left(\mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{m}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_r \right)}{\rho_r} - \frac{\rho_i \mathbf{m}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_r}{\rho_r^2} \right] - \nabla \cdot \mathbf{q}_i \,. \end{aligned} \tag{22}$$

The sensitivity equations are obtained by replacing the imaginary variables by the derivatives of the flow variables in the imaginary part of the complex Navier–Stokes equations. They describe the evolution of the derivatives of the flow variables with respect to a parameter. They can be written as

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m}' = 0 \,, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m}' \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}'}{\rho} - \frac{\rho' \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\rho^2} \right) = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' \,, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{E'\mathbf{m} + E\mathbf{m}'}{\rho} - \frac{\rho' E \mathbf{m}}{\rho^2} \right) &= -\nabla \cdot \left(\frac{p'\mathbf{m} + p\mathbf{m}'}{\rho} - \frac{\rho' p \mathbf{m}}{\rho^2} \right) \\ &+ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}'}{\rho} - \frac{\rho' \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho^2} \right) - \nabla \cdot \mathbf{q}' \,, \end{aligned} \tag{25}$$

where the prime notation denotes derivatives. If the order of magnitude of the imaginary parts is much smaller than that of the real parts, the imaginary parts of the flow variables therefore follow the same spatio-temporal evolution as the derivatives of the flow variables. In order to estimate the flow solutions and sensitivities at the same time, it is thus only necessary to define as complex numbers the variables in a computational code dealing only with real numbers and to use complex arithmetic. Because of this, the implementation of the complex differentiation method in an in-house solver is straightforward.

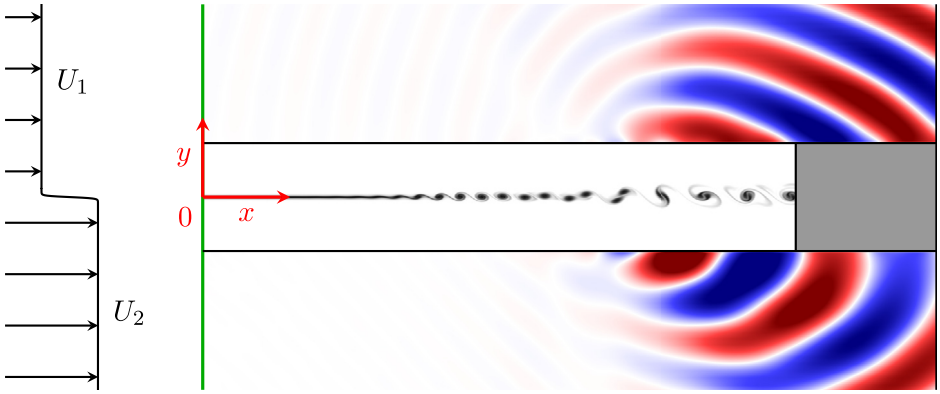

Fig. 1. Schematic view of the mixing layer. Instantaneous vorticity and fluctuating pressure fields are represented at the center and on the periphery of the shear zone. The mean velocity profile is plotted on the left not to scale. The upstream boundary is represented by a green line. The sponge zone is in gray. Only a part of the computational domain is shown.

3. Mixing layer parameters

The mixing layer configuration is similar to that considered in the simulations of Colonius et al. [18], Bogey et al. [19] and Moser et al. [21]. For illustration purpose, the mean streamwise velocity profile and snapshots of vorticity and pressure are presented in Fig. 1. The streamwise component of the velocity imposed at the inlet boundary at $x = 0$ is given by the hyperbolic tangent profile

$$u_0(y) = U_c - \frac{\Delta U}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_\omega}\right), \tag{26}$$

where $U_c = (U_1+U_2)/2$ is the velocity at the center of the mixing layer, $\Delta U = U_2 - U_1$ is the velocity difference and $\delta_\omega = \Delta U / \max\left(\left|\mathrm{d}u_0/\mathrm{d}y\right|\right)$ is the vorticity thickness, at the inlet. The velocities of the slow and fast flows are given by $U_1 = U_c - \Delta U/2$ and $U_2 = U_c + \Delta U/2$. At the inlet, temperature is fixed at $T_0 = 293$ K, pressure at $p_0 = 10^5$ Pa and density is evaluated from the ideal gas law. Molecular viscosity is expressed as a function of temperature using Sutherland's law. The thermal conductivity λ is determined from the Prandtl number $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\lambda = 0.75$, where $\mu = \nu\rho$ and ν is the kinematic viscosity. The value of 1.4 is considered for the adiabatic index γ. The Reynolds number based on the velocity difference is given by $\mathrm{Re}_\omega = \delta_\omega \Delta U/\nu$. The Mach number is defined by $\mathrm{M} = \Delta U/c_0$, where $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ is the speed of sound in the ambient medium.

The aerodynamic development of the mixing layer is controlled by an excitation to focus on the acoustic radiation produced by the first stage of vortex pairings. The mixing layer is excited at a frequency f_0 and at the first subharmonic $f_0/2$ by introducing vortical disturbances at the center of the shear zone near the upstream boundary at $x = 10\delta_\omega$. The frequency f_0, given by the Strouhal number $\mathrm{St}_\omega = f_0 U_c/\delta_\omega = 0.132$, is close to the frequency of the most amplified instability waves developing in the velocity profile (26) [22]. More information on the excitation procedure can be found in Bogey et al. [19]. The flow development and the acoustic radiation of the mixing layer obtained by the excitation procedure detailed above are illustrated in Fig. 1. Vortices form in the center of the shear zone due to the amplification and saturation of the amplitude of instability waves downstream of the upstream boundary. Subsequently, vortex pairings occur at the frequency $f_0/2$ and at a fixed location. These pairings produce acoustic waves which can be observed in Fig. 1 on each side of the shear zone.

3.1. Simulation parameters

Three sets of simulations were carried out considering different Mach and Reynolds numbers, and several meshes. They are referred to as set-Mach, set-Reynolds and set-Mesh. The values of the Mach and Reynolds numbers, of the transverse mesh spacing at the center of the mixing layer, and the numbers of points in the streamwise and transverse directions n_x and n_y are given in Table 1. In set-Mach, mixing layers at Mach numbers M = 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 and 0.4 with $U_c = 0.5c_0$ were considered. If the excitation frequency f_0 varies with the Mach number, the derivatives of the flow variables with respect to the Mach number, estimated using the complex differentiation method, are likely to increase with time because the derivative of a sine wave with respect to its frequency increases with time. This increase makes it difficult to accurately estimate the derivatives of time-averaged variables. To compute the derivatives of acoustic variables with respect to the Mach number, the excitation frequency f_0 is thus set to $f_0 = \mathrm{St}_\omega U_c/\delta_\omega$, where $\delta_\omega = \mathrm{Re}_\omega \nu/\Delta U$, assuming a Reynolds number of 2000 and a velocity difference of $0.2c_0$, in the simulations of set-Mach. Therefore, the Reynolds number increases with the Mach number in set-Mach. As a result of this, the derivatives obtained with the complex differentiation method can be compared in a relevant way with the results of the parametric study.

In the simulations of set-Reynolds, mixing layers at Reynolds numbers Re_ω = 400, 800, 1600, 3200, 6400 and 12,800, with M = 0.3 and $U_c = 0.5c_0$, were considered. A simulation of a mixing layer at a Reynolds number of 10^{12} which can be assumed as non-viscous was also performed. In these cases, the inlet vorticity thickness is provided by the Reynolds number.

In all cases mentioned above, the mesh spacing in the transverse direction at the center of the shear layer is $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$. To investigate the grid sensitivity of the flow solutions, four simulations of mixing layers at a Reynolds number of 3000, with M = 0.3 and $U_c = 0.5c_0$, were carried out on grids with mesh spacings $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, $0.2\delta_\omega$, $0.4\delta_\omega$, and $0.8\delta_\omega$. They constitute the simulations set-Mesh.

The unsteady pressure have been recorded in the entire computational domain at a sampling frequency of $20f_0$ for set-Mach, $10f_0$ for set-Reynolds, and $20f_0$ for set-Mesh, after a transient period of more than $300T_p$, where $T_p = 2/f_0$ is the vortex pairing period. In all cases, the recording time is equal to $10T_p$.

3.2. Numerical methods

The direct numerical simulations are carried out with an in-house code [19] which solves the unsteady compressible Navier–Stokes equations in Cartesian coordinates (x, y) using low-dissipation and low-dispersion explicit schemes. Fourth-order eleven-point centered finite differences are used for spatial discretization. A second-order six-stage Runge–Kutta algorithm is implemented for time integration [23]. To remove grid-to-grid oscillations without affecting the wavenumbers accurately resolved, a sixth-order eleven-point centered filter [24] is applied explicitly to the flow variables at the end of each time step. Non-centered finite differences and filters are used near the grid boundaries [25]. The radiation conditions of Tam & Dong [26] are applied at

Table 1
Mixing layer parameters for the three sets of simulations referred to as set-Mach, set-Reynolds and set-Mesh: Mach number $M = \Delta U/c_0$, Reynolds number $Re_\omega = \delta_\omega \Delta U/\nu$, transverse mesh spacing at the center of the mixing layer Δy_0, numbers of points in the streamwise and transverse directions n_x and n_y.

Set	M	Re_ω	$\Delta y_0/\delta_\omega$	n_x	n_y
set-Mach	0.2	2000	0.1	1731	235
	0.25	2500		1435	
	0.3	3000		1286	
	0.35	3500		1237	
	0.4	4000		1138	
set-Reynolds	0.3	400	0.1	1286	235
		800			
		1600			
		3200			
		6400			
		12800			
		10^{12}			
set-Mesh	0.3	3000	0.1	1286	491
			0.2		419
			0.4		349
			0.8		283

the boundaries to avoid significant spurious reflections. A sponge zone combining mesh stretching, Laplacian filtering and a procedure to keep the mean values of density and pressure around their ambient values is implemented at the downstream boundary.

3.3. Computational parameters

Domains of length $L_x = 1200\delta_\omega$ and width L_y varying from $400\delta_\omega$ to $1200\delta_\omega$ are used. In set-Mach and set-Reynolds, the mesh spacing in the transverse direction at the center of the mixing layer is equal to $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$. From $y = 0$, it is stretched on both sides of the mixing layer at a rate of 4% until it reaches a length of $\Delta y \simeq 5\delta_\omega$ at $y = \pm 124\delta_\omega$ and then is constant until $y = \pm L_y/2$, where $L_y = 400\delta_\omega$. In set-Mesh, the transverse mesh spacing at the center of the mixing layer is equal to $0.1\delta_\omega$, $0.2\delta_\omega$, $0.4\delta_\omega$ or $0.8\delta_\omega$. It is stretched on both sides of the mixing layer at a rate of 2% until $y = \pm L_y/2$, where $L_y = 1200\delta_\omega$.

At the inlet, the mesh spacing in the streamwise direction is equal to $\Delta x_0 = 0.2\delta_\omega$. It is constant down to $x = x_{sz}$, where x_{sz} is the position of the beginning of the sponge zone, then increases at a rate of 2% down to $x = L_x$. In the sponge zone, a Laplacian filter is applied to density, velocity, and pressure fluctuations. Its intensity σ_{sz} is given by

$$\sigma_{sz}(x,y) = \begin{cases} \sigma_{max}\left(\dfrac{x-x_{sz}}{x_\sigma}\right)\exp\left(-\ln(2)\dfrac{y^2}{b_{sz}^2}\right) & \text{for } x_{sz} < x \le x_{sz}+x_\sigma\ , \\ \sigma_{max}\exp\left(-\ln(2)\dfrac{y^2}{b_{sz}^2}\right) & \text{for } x > x_{sz}+x_\sigma\ , \end{cases} \tag{27}$$

where $\sigma_{max} = 0.2$ and x_σ is a length varying between $100\delta_\omega$ and $200\delta_\omega$. A Gaussian function of half thickness $b_{sz} = 3\delta_\omega$ centered at $y = 0$ is introduced to avoid that the Laplacian filter affects the acoustic waves produced by the vortex pairings outside the shear-flow.

The velocity difference $\Delta U = U_2 - U_1$ increases with the Mach number, hence the velocity ratio $R = \Delta U/(2U_c)$ also increases. Monkewitz and Huerre [22] have shown using linear stability analyses that the growth rates of the instability waves developing near the inlet are proportional to the velocity ratio. Therefore, vortex pairings are expected to be located further upstream as the Mach number increases. To isolate the acoustic radiation produced by the pairings, the position of the beginning of the sponge zone x_{sz} thus varies in the simulations. The length x_σ along which the intensity of the Laplacian filter increases is also adjusted. The values considered for x_{sz} and x_σ are given in Table 2, depending on the Mach number. The position of the beginning of the sponge zone decreases from $x_{sz} = 300\delta_\omega$ for M = 0.2 down to $x_{sz} = 180\delta_\omega$ for M = 0.4 and the length x_σ decreases from $x_\sigma = 200\delta_\omega$ for M = 0.2 down to $x_\sigma = 100\delta_\omega$ for M = 0.4. To ensure the stability of the simulations in all cases, the time step is set to $\Delta t = 0.9\Delta y_{CFL}/c_0$, where $\Delta y_{CFL} = 0.1\delta_\omega$.

Table 2
Sponge zone parameters: Mach number M, position of the beginning of the sponge zone x_{sz}, and length x_σ along which the intensity of the Laplacian filter increases.

M	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
x_{sz}/δ_ω	300	240	210	200	180
x_σ/δ_ω	200	200	150	150	100

4. Comparison between a first-order approximation and the complex differentiation method

In this section, the accuracies of a first-order approximation and the complex differentiation method are studied by estimating the derivative of the acoustic power of mixing layers at different Reynolds number with respect to the latter parameter. Mixing layers at $Re_\omega = 400$, 3000 and 12,800 that are expected to be strongly, weakly and very weakly sensitive to viscous effects have been considered to vary the value of the derivative of interest and thus to be able to investigate the influence of the magnitude of this derivative on the accuracy of each method. In each case, the Mach number is equal to 0.3, U_c is equal to $0.5c_0$, the inlet vorticity thickness is determined from the Reynolds number, and the grid is the same as in the simulations of set-Mach and set-Reynolds.

Using the first-order approximation, the derivative is computed by performing two DNS, one for a value of the viscosity $\nu_0 = \delta_\omega \Delta U/Re_\omega$ and another one for $\nu = \nu_0(1+h)$, where h is a real number denoting a perturbation magnitude, and by applying the formula

$$\frac{dW}{dRe_\omega} = \frac{dW}{d\nu}\frac{d\nu}{dRe_\omega} \simeq -\frac{W\left(\nu_0(1+h)\right) - W\left(\nu_0\right)}{hRe_\omega}\ , \tag{28}$$

where W is the acoustic power estimated by integrating the sound intensity over circles of radius $r = 200\delta_\omega$ centered on the vortex pairings. Using the complex differentiation method, the derivative is estimated by performing a DNS with a viscosity $\nu = \nu_0(1+ih)$ and from the imaginary part of the acoustic power by

$$\frac{dW}{dRe_\omega} \simeq -\frac{\mathrm{Im}\left[W\left(\nu_0(1+ih)\right)\right]}{hRe_\omega}\ . \tag{29}$$

To investigate the influence of the perturbation magnitude h on the accuracy of the first-order approximation and the complex differentiation method, simulations have been carrying out for values of h ranging

from 10^{-10} to 1. In each case, the relative error, defined as

$$\mathrm{Err}\,(h) = \frac{\left| \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{dRe}_\omega}(h) - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{dRe}_\omega}^{\mathrm{ref}} \right|}{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{dRe}_\omega}^{\mathrm{ref}}}, \tag{30}$$

where $\mathrm{d}W/\mathrm{dRe}_\omega{}^{\mathrm{ref}}$ is a reference value estimated by applying the complex differentiation method with $h = 10^{-100}$, has been evaluated. The reference values computed for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, 3000 and 12,800 are not given for brevity but their variations with the Reynolds number are described in the following. They decrease with the Reynolds number, indicating that the acoustic power of the mixing layer is less sensitive to viscous effects as the Reynolds number increases, as expected. For instance, for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, the reference value is almost 20 times higher than the one determined for $\mathrm{Re}_\omega = 12800$. For $h = 10^{-1}$ and $h = 1$, the simulations performed with the complex differentiation method have diverged due to numerical instabilities increasing with time. These instabilities develop earlier as the value of h increases, which suggests that they are related to the effects of the imaginary parts of the flow variables on their real parts. Indeed, if the order of magnitude of the imaginary part of the flow variables is close to or greater than that of the real part of the latter, the products of imaginary variables can no longer be neglected in the real parts of the complex Navier–Stokes equations and the latter equations are therefore no longer an accurate approximation of the Navier–Stokes equations.

The relative errors obtained for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, 3000 and 12,800 are plotted in Fig. 2(a), Fig. 2(b) and Fig. 2(c) as a function of the perturbation magnitude h using a logarithmic scale. The values calculated for the first-order approximation and for the complex differentiation method are displayed. Lines corresponding to the leading terms of the truncation error of the two approaches, varying according to h and h^2, are also plotted. In all cases, the error obtained using the complex differentiation method is smaller than that of the first-order approximation, showing that the first method is more accurate than the second one. For $\mathrm{Re}_\omega = 400$ in Fig. 2(a), the error determined by the two methods is reduced as the perturbation magnitude h decreases from $h = 1$ to $h = 10^{-5}$. For this range of h, the error varies as the truncation errors of the two methods. As h decreases from 10^{-5} to 10^{-10}, the error obtained using the first-order approximation increases as the inverse of h. This result indicates that the values of $W(\nu(1+h))$ with $h \leq 10^{-5}$ and $W(\nu)$ are so close that their difference is of the order of the round-off errors, in agreement with results obtained by Anderson et al. [8]. The error evaluated using the complex differentiation method does not vary significantly between $h = 10^{-5}$ and $h = 10^{-10}$. For $\mathrm{Re}_\omega = 3000$ and $\mathrm{Re}_\omega = 12800$ in Figs. 2(b, c), the variations of the errors with h estimated using the first-order approximation and the complex differentiation method are similar to those obtained for $\mathrm{Re}_\omega = 400$. This indicates that the accuracy of the complex differentiation method does not depend on the perturbation magnitude h for $h < 10^{-5}$ for the three values of the Reynolds number considered. Since the reference value of the derivative of the acoustic power decreases with the Reynolds number, the results also suggest that the accuracy of the complex differentiation method is not affected by the magnitude of the derivative of interest. Similar results, not shown her for brevity, were obtained for mixing layers at Mach numbers equal to 0.2 and 0.4, and considering grids with mesh spacings $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $0.4\delta_\omega$. Therefore, the perturbation magnitude h is set to 10^{-5} in the following sections.

To compare the numerical cost of the complex differentiation method with that of the first-order approximation, the CPU time to perform one temporal iteration and the memory required for simulations carried out with and without the complex differentiation method are reported in Table 3. The CPU time is doubled and the memory increases by 85% when the complex differentiation method is used. These results can be expected to vary with the computer and the code used. For comparison, Martins et al. [27] reported factors of 2.2 to 4.8 between the time of simulations with and without the complex differentiation method using various computing platforms, and Anderson et al. [8] indicated a doubling of the memory required when the complex differentiation method is implemented.

Table 3
CPU time to perform one temporal iteration and memory needed for a simulation with and without the complex differentiation method.

	CPU time [s]	Memory [Mb]
Without CDM	0.200	89.8
With CDM	0.406	167

5. Sensitivity analysis using the complex differentiation method

5.1. Mach number sensitivity

In each of the simulations of set-Mach, the complex differentiation method is implemented to estimate the derivatives of acoustic variables with respect to the Mach number. For this purpose, a small imaginary perturbation ih is introduced in the formula (26) of the inlet velocity profile

$$u_0(y) = U_c - \frac{\Delta U}{2}(1+ih)\tanh\left(\frac{2y}{\delta_\omega}\right). \tag{31}$$

An approximate value of the derivative of a function f with respect to the Mach number can then be determined from the imaginary part of f by

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dM}} \simeq \frac{\mathrm{Im}\,[f]}{h\mathrm{M}}. \tag{32}$$

Therefore, the imaginary part of f provides information on the sensitivity of the function f to the Mach number. A small perturbation is added to the velocity difference ΔU in Eq. (31), but since the inlet vorticity thickness δ_ω is fixed, the Reynolds number $\mathrm{Re}_\omega = \delta_\omega \Delta U/\nu$ is also influenced by the perturbation. The imaginary part of f is thus also linked to the effects of the Reynolds number on f. However, the influence of the viscosity on the flow variables is weak for a high Reynolds number flow, which is the case for the mixing layers of set-Mach with $\mathrm{Re}_\omega \geq 2000$. Therefore, the imaginary part of f is mainly associated with the Mach number sensitivity.

5.2. Reynolds number sensitivity

In the simulations of set-Reynolds, the viscosity is set to $\nu(1+ih)$. In this way, the derivative of a function f with respect to the Reynolds number is linked to the imaginary part of f by

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dRe}_\omega} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{dRe}_\omega} \simeq -\frac{\mathrm{Im}\,[f]}{h\mathrm{Re}_\omega}. \tag{33}$$

Thus, the imaginary part of f provides information on the sensitivity of f to the Reynolds number.

5.3. Grid sensitivity

To study the influence of the grid resolution on the flow solutions, the transverse mesh spacing at the center of the mixing layer is set to $\Delta y_0(1+ih)$ in each simulation of set-Mesh. An approximate value of the derivative of a function f with respect to Δy_0 can then be estimated at nodes y_i. This derivative can be written as

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Delta y_0}(y_i) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\Delta y_0+\epsilon, y_i(\Delta y_0+\epsilon)) - f(\Delta y_0, y_i(\Delta y_0))}{\epsilon}, \tag{34}$$

where ϵ is a real number. This derivative can be obtained from the imaginary part of f by

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Delta y_0}(y_i) \simeq \frac{\mathrm{Im}\,[f]}{h\Delta y_0}(y_i). \tag{35}$$

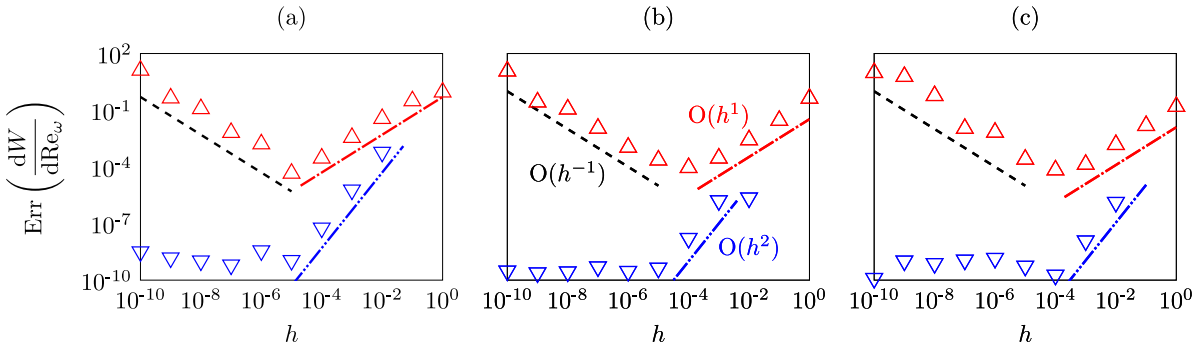

Fig. 2. Variations of the relative error on the derivative of the acoustic power with respect to the Reynolds number with the perturbation magnitude h obtained with △ a first-order approximation and ▽ the complex differentiation method for (a) $\mathrm{Re}_\omega = 400$, (b) $\mathrm{Re}_\omega = 3000$ and (c) $\mathrm{Re}_\omega = 12800$, and variations of the order of magnitude of the truncation error of —·— the first-order approximation and —··— the complex differentiation method.

In the right hand side of the definition (34), the function f evaluated at a given node y_i but at two different positions $y = y_i(\Delta y_0 + \epsilon)$ and $y = y_i(\Delta y_0)$ is involved. The derivative obtained from the difference between $f(\Delta y_0+\epsilon, y_i(\Delta y_0+\epsilon))$ and $f(\Delta y_0, y_i(\Delta y_0))$ thus does not indicate the effects of a small modification of the mesh spacing Δy_0 on the values of the function f computed at a given location y. Indeed, these effects are provided by the partial derivative

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta y_0}(y_i) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\Delta y_0+\epsilon, y_i) - f(\Delta y_0, y_i)}{\epsilon}\,, \tag{36}$$

which is defined from the difference between $f(\Delta y_0 + \epsilon)$ and $f(\Delta y_0)$ obtained at the same location $y = y_i(\Delta y_0)$. This derivative can be estimated using the chain rule as follows

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta y_0}(y_i) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Delta y_0}(y_i) - \frac{\partial f}{\partial y}(y_i)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Delta y_0}(y_i)\,, \tag{37}$$

where $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\Delta y_0$ is obtained from the imaginary part of f using the complex differentiation method and the formula (35), $\partial f/\partial y$ is evaluated by differentiating the real part of f with respect to the coordinate y, and $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\Delta y_0$ is given by

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Delta y_0}(y_i) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{i} r_y^j & \text{for } i = 0,\dots,(n_y-1)/2, \\ \displaystyle -\sum_{j=0}^{-i-1} r_y^j & \text{for } i = -(n_y-1)/2,\dots,-1\,, \end{cases} \tag{38}$$

where $r_y = 1.02$ is the stretching rate in the transverse direction.

6. Results

6.1. Mach number sensitivity

To illustrate the effects of the Mach number on the aerodynamic development and acoustic radiation of the mixing layers, snapshots of vorticity and fluctuating pressure are provided in Figs. 3(a-c) for the mixing layers at M = 0.2, 0.3 and 0.4 of set-Mach. In all cases and downstream of the inlet forcing, the amplitude of the perturbations in the shear zone increases with the streamwise direction and then saturates, leading to the formation of vortices at the frequency f_0. Subsequently, vortex pairings occur at the frequency $f_0/2$ as in the simulations carried out by Bogey et al. [19] and Moser et al. [21]. Vortex rolling-ups and pairings take place at fixed axial positions. They move upstream as the Mach number increases, because the shear layer is more unstable as the velocity ratio $R = \Delta U/(2U_c)$ increases [22]. For example, the vorticity sheet starts to roll up near $x = 100\delta_\omega$ for M = 0.2 and near $x = 60\delta_\omega$ for M = 0.4, and vortex pairings occur near $x = 225\delta_\omega$ for M = 0.2 and near $x = 125\delta_\omega$ for M = 0.4.

The pairings produce acoustic waves propagating on both sides of the mixing layers, as expected. The amplitude of the sound waves increases strongly with the Mach number. This result is consistent with dimensional analyses [28,29] which have shown that the noise produced by a two-dimensional free flow is proportional to the seventh power of the Mach number. For $\theta = 90°$, where θ is the polar angle defined with the respect to the streamwise direction and by polar coordinates (r,θ) where $r = 0$ is the location of the vortex pairing, the wavelength of the sound waves is equal to $\lambda = c_0/(f_0/2) \simeq 30\delta_\omega$ in all cases. It is smaller upstream of the vortex pairings for $\theta > 90°$ and larger downstream for $\theta < 90°$ due to the effects of the mean flow on the acoustic wave propagation [30].

Sound directivities

To quantify the effects of Mach number on the noise radiation of the mixing layers, the acoustic intensity

$$I = \frac{{p'_{\mathrm{RMS}}}^2}{\rho_0^2 c_0^4}\,, \tag{39}$$

where p'_{RMS} is the root-mean-square (RMS) value of the pressure fluctuations, has been evaluated on circles of radius $r = 200\delta_\omega$ centered on the vortex pairings. It is plotted for all Mach numbers as a function of the polar angle θ for $-120° \le \theta \le 120°$ in Fig. 4 using a logarithmic scale. For all angles, except for $\theta = 0$, the levels increase with the Mach number. In addition, the noise radiation is less oriented downstream as the Mach number increases from 0.25 to 0.4. For example, the peak intensity in the slow flow region ($y > 0$) is reached at $\theta \simeq 15°$ for M = 0.25, $\theta \simeq 30°$ for M = 0.3 and $\theta \simeq 60°$ for M = 0.4. In order to explain this result, the fluctuating part of the Lighthill stress tensor [30] is considered without the viscous and entropy terms. It can be written as

$$\mathbf{T}' = \underbrace{\rho\langle\mathbf{u}\rangle\otimes\mathbf{u}' + \rho\mathbf{u}'\otimes\langle\mathbf{u}\rangle}_{\mathbf{T}^{\text{shear-noise}}} + \underbrace{\rho\mathbf{u}'\otimes\mathbf{u}'}_{\mathbf{T}^{\text{self-noise}}}\,, \tag{40}$$

where $\mathbf{T}^{\text{shear-noise}}$ and $\mathbf{T}^{\text{self-noise}}$ are linear and non-linear with respect to the velocity fluctuations $\mathbf{u}'$. The order of magnitude of the mean velocity vector corresponds to the inlet velocity at the center of the mixing layers, which is $U_c = (U_1 + U_2)/2 = 0.5c_0$ and the order of magnitude of the vector of velocity fluctuations is the velocity difference $\Delta U = U_2 - U_1$. Therefore, the orders of magnitude of the tensors $\mathbf{T}^{\text{shear-noise}}$ and $\mathbf{T}^{\text{self-noise}}$ are given by

$$\mathbf{T}^{\text{shear-noise}} \sim \rho_0 U_c \Delta U\,, \tag{41}$$

$$\mathbf{T}^{\text{self-noise}} \sim \rho_0 \Delta U^2\,. \tag{42}$$

As the Mach number $\mathrm{M} = \Delta U/c_0$ increases, the magnitude of the non-linear tensor $\mathbf{T}^{\text{self-noise}}$ thus increases more than the magnitude of the tensor $\mathbf{T}^{\text{shear-noise}}$. Ribner [31] by analytical developments and Freund [32] by analyzing a direct numerical simulation of a jet at M = 0.9 have shown that the acoustic radiation linked to the tensor $\mathbf{T}^{\text{shear-noise}}$ is more oriented downstream than the acoustic radiation linked to the tensor $\mathbf{T}^{\text{self-noise}}$. Therefore, the noise radiation produced by the mixing layers is less oriented downstream as the Mach number increases.

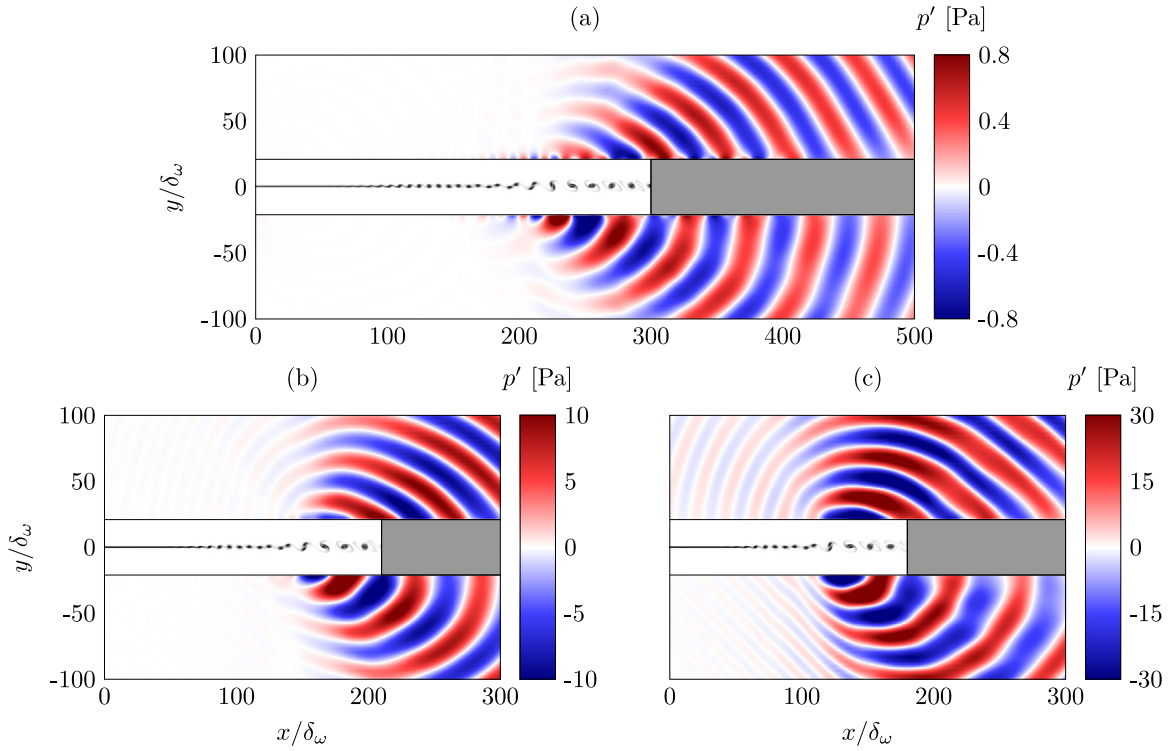

Fig. 3. Instantaneous vorticity and fluctuating pressure fields for (a) M = 0.2, (b) M = 0.3 and (c) M = 0.4. The color scale ranges from 0 to $\Delta U/\delta_\omega$ for vorticity, from white to black.

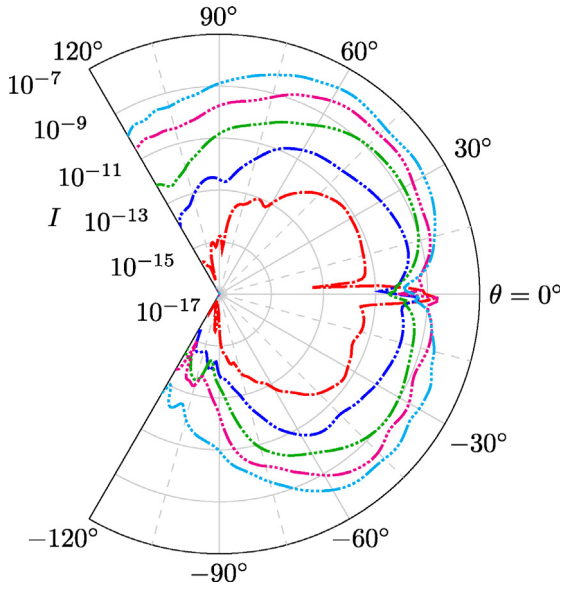

Fig. 4. Variations of acoustic intensity on circle of radius $r = 200\delta_\omega$ centered on the vortex pairings, as a function of the polar angle θ for M = 0.2, M = 0.25, M = 0.3, M = 0.35 and M = 0.4.

Sound intensities and their derivatives with respect to the mach number

The RMS values of pressure fluctuations and their derivatives with respect to the Mach number, obtained using the complex differentiation method for M = 0.2, 0.3 and 0.4, are displayed in Figs. 5(a, b, c) and Figs. 5(d, e, f). In all cases, the pressure fluctuations are strongest near the center of the mixing layers due to aerodynamic instability waves developing in the shear zone. In the acoustic fields, the sound levels are highest in two lobes pointing downstream and originating from the vortex-pairing location, as expected. In these lobes, the acoustic levels increase strongly with the Mach number. The lobes are oriented less downstream as the Mach number increases, in agreement with the dimensional analysis. Bands of low sound levels are observed downstream of the vortex pairings for M = 0.4 in Fig. 5(c). Simulations of mixing layers at M = 0.4 carried out with sponge zones starting at different streamwise positions, not shown here for brevity, revealed that these bands are not related to sponge zone effects. Therefore, the bands may be due to interactions between the acoustic radiation produced by the vortex pairings and that of weaker noise sources located between the pairings and near the beginning of the sponge zone.

The derivatives of the pressure fluctuation levels with respect to the Mach number in Figs. 5(d, e, f) are mostly positive in the acoustic field since the noise levels increase with this parameter. They are stronger as the Mach number increases. Therefore, they indicate that the noise levels increase more with the Mach number at high Mach numbers than at low Mach numbers, which is consistent with the seventh power law. In all cases, the derivatives are negative in narrow bands located downstream of the vortex pairings. Negative derivative values indicate that a small increase in the Mach number value leads to a reduction of the noise levels. The results thus suggest that the sound levels decrease with the Mach number in the narrow bands mentioned above. In these bands, the derivatives are higher, in absolute value, as the Mach number increases. This indicates that the noise levels in the bands are more sensitive to the Mach number effects as the latter parameter increases.

Dimensional law and acoustic power

The maximum values of the sound intensity at $r = 200\delta_\omega$ of the vortex-pairings location in the fast and slow flows of the mixing layers are compared with those found by Moser et al. [21] for two-dimensional mixing layers at Mach numbers between 0.2 and 0.4 computed by DNS. The mixing layers considered by Moser et al. [21] are at lower Reynolds number ($\mathrm{Re}_\omega = 400$) and are excited at lower frequencies than those in the present study. In addition, the velocity

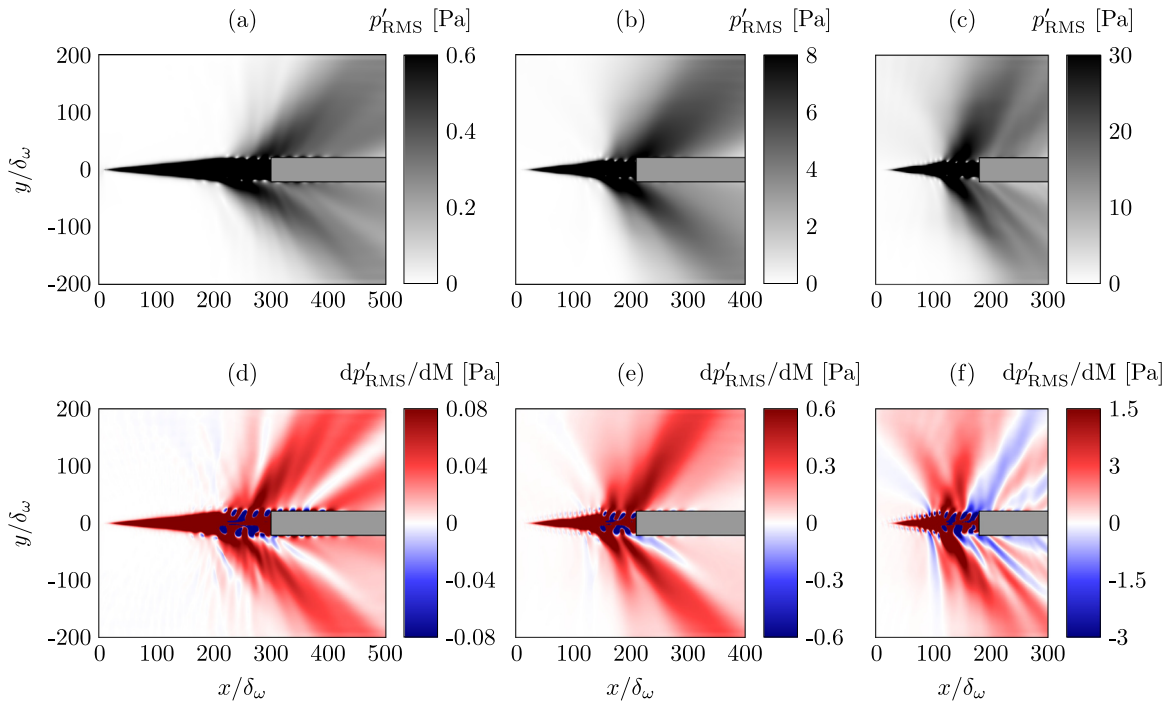

Fig. 5. Fields of (a, b, c) RMS values of pressure fluctuations and (d, e, f) their derivatives with respect to the Mach number for (a, d) M = 0.2, (b, e) M = 0.3 and (c, f) M = 0.4.

$U_c = (U_1 + U_2)/2$ is not the same in the two studies. The results from Moser et al. [21] and the present study are therefore expected to differ. In addition, in Moser et al. [21], the intensity was evaluated at $r = 300\delta_\omega$, whereas the calculation domain extends only to $y = 200\delta_\omega$ in the present study. Therefore, the intensity given by Moser et al. [21] has been approximated at $r = 200\delta_\omega$ by assuming the classical decay of the intensity in $1/r$ for a two-dimensional flow. The maximum values thus obtained are plotted as a function of the Mach number in Fig. 6(a) using a logarithmic scale. In both studies, the levels increase strongly with the Mach number. For all Mach numbers, the values obtained by Moser et al. [21] are higher than those in the present study. The agreement is better as the Mach number increases.

The effects of the Mach number on the sound power levels are now investigated. These levels are estimated from the acoustic power W evaluated over circles of radius $r = 200\delta_\omega$ centered on the vortex pairings, from $\theta = 5°$ to $\theta = 150°$ in the upper flow, and from $\theta = -150°$ to $\theta = -5°$ in the lower flow. They are defined by

$$L_W = 10 \log \left(\frac{W}{W_{\mathrm{ref}}} \right), \tag{43}$$

where $W_{\mathrm{ref}} = 10^{-12}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$. They are plotted in Fig. 6 as a function of the Mach number using a logarithmic scale. A line indicating the seventh power law is also represented for comparison. The sound power levels increase strongly with the Mach number for $\mathrm{M} < 0.3$ and more weakly thereafter. For $\mathrm{M} \geq 0.3$, the increase is consistent with the seventh power of the Mach number, in good agreement with results obtained by Ffowcs-Williams [28] and Guo [29] using analytical developments and by Moser et al. [21] using DNS of two-dimensional mixing layers at Mach numbers between 0.2 and 0.4.

The derivatives of the power levels with respect to the Mach number were obtained using the complex differentiation method. They are represented in Fig. 6 by red segments of arbitrarily chosen lengths. Their values increase with the Mach number for $\mathrm{M} \leq 0.25$, decrease from M = 0.25 to M = 0.3 and does not seem to vary thereafter. The red segments follow the variations of the power levels. The derivatives of these levels with respect to the Mach number thus provide a good estimation of the sensitivity of the noise levels to the Mach number.

6.2. Reynolds number sensitivity

Vorticity and pressure fields

Snapshots of vorticity and fluctuating pressure obtained from the simulations of set-Reynolds for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, 800, 1600, 3200, 6400 and 12,800 are provided in Figs. 7(a–f). In all cases, vortex rolling-ups and pairings occur. The pairings produce acoustic waves which propagate on both sides of the shear zone. The amplitudes of the sound waves increase with the Reynolds number. They increase strongly between $\mathrm{Re}_\omega = 400$ and $\mathrm{Re}_\omega = 800$, then more weakly between $\mathrm{Re}_\omega = 800$ and $\mathrm{Re}_\omega = 1600$, and not seem to vary significantly with the Reynolds number for $\mathrm{Re}_\omega \geq 1600$. The acoustic radiation of the mixing layers is thus weakly dependent on viscous effects for $\mathrm{Re}_\omega \geq 1600$. The wavelength of the sound waves does not vary with the Reynolds number and is equal to $\lambda = c_0/(f_0/2) \simeq 30\delta_\omega$ for a polar angle of 90°.

Sound directivities

The sound pressure levels obtained at $r = 200\delta_\omega$ from the vortex pairings for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, 800, 1600, 3200 and 10^{12} are presented in Fig. 8 for polar angles θ between −120° and 120°. For $\mathrm{Re}_\omega \leq 3200$, the levels increase with the Reynolds number downstream of the pairings, for $-90° < \theta < 90°$. The increase is less pronounced as the Reynolds number increases. It is strong between $\mathrm{Re}_\omega = 400$ and $\mathrm{Re}_\omega = 800$, moderate between $\mathrm{Re}_\omega = 800$ and $\mathrm{Re}_\omega = 1600$, and weak between $\mathrm{Re}_\omega = 1600$ and $\mathrm{Re}_\omega = 3200$. The values obtained for $\mathrm{Re}_\omega = 3200$ and $\mathrm{Re}_\omega = 10^{12}$ are very close, showing that viscosity has a weak influence on the noise intensity for $\mathrm{Re}_\omega > 3200$.

Sound intensities and their derivatives with respect to the Reynolds number

The RMS values of the pressure fluctuations and their derivatives with respect to the Reynolds number obtained using the complex differentiation method for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, 800, 1600 and 3200 are shown in Figs. 9(a, b, c, d) and Figs. 9(e, f, g, h). In all cases, the RMS levels are highest near the middle of the mixing layer, where aerodynamic fluctuations predominate. In the acoustic field for $\mathrm{Re}_\omega = 400$ in Fig. 9(a), they are very low, making difficult to visualize the radiation pattern. For $\mathrm{Re}_\omega \geq 800$ in Figs. 9(b, c, d), the acoustic intensity is significant within two lobes oriented downstream originating from the position of the

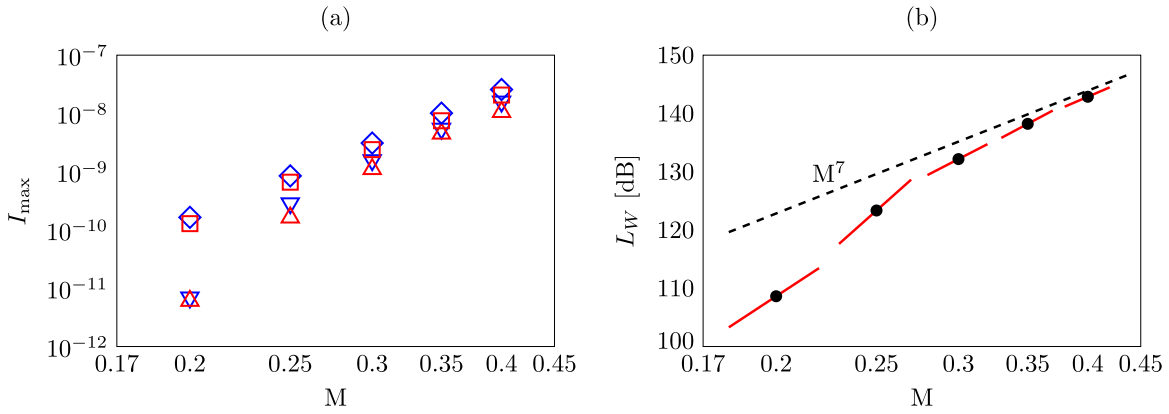

Fig. 6. Variations of (a) maximum intensity computed in the present study in the △ fast ($y < 0$) and ▽ slow ($y > 0$) flows of the mixing layers, and by Moser et al. [21] in the □ fast and ◇ slow flows, and (b) acoustic power levels and ——— their derivatives with respect to the Mach number; - - - - - M^7 law.

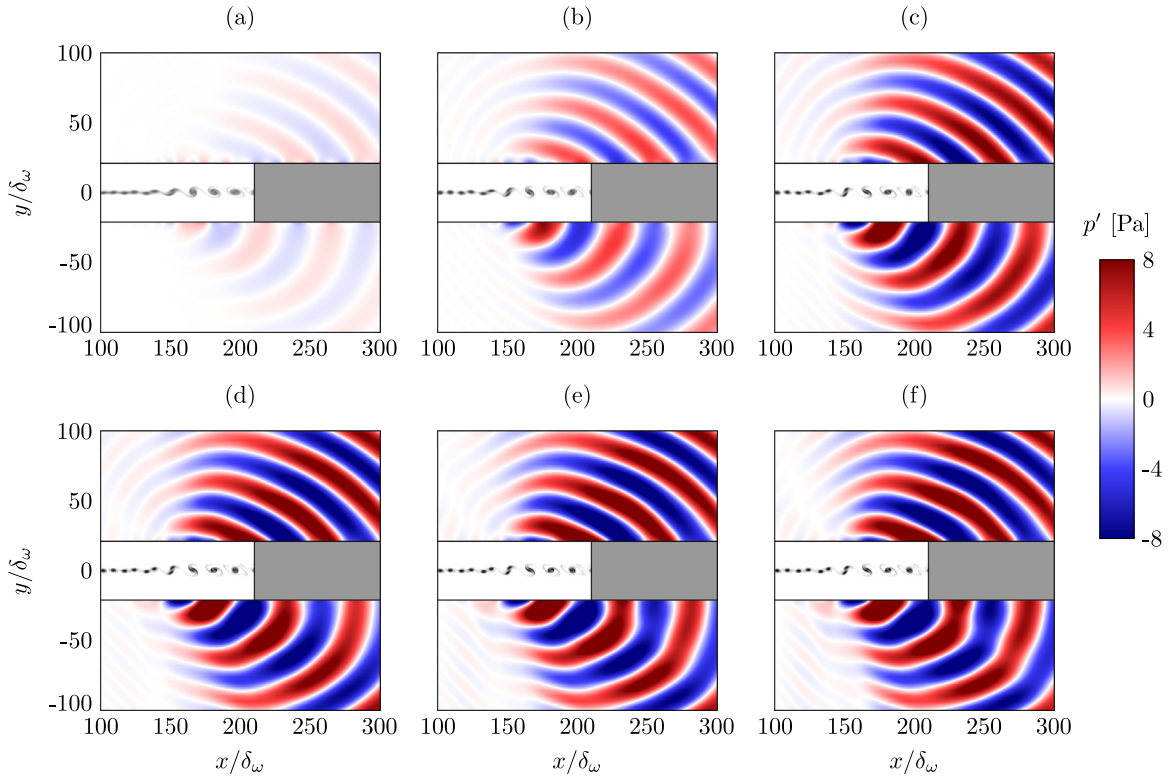

Fig. 7. Instantaneous vorticity and fluctuating pressure fields for (a) $Re_\omega = 400$, (b) $Re_\omega = 800$, (c) $Re_\omega = 1600$, (d) $Re_\omega = 3200$, (e) $Re_\omega = 6400$ and (f) $Re_\omega = 12800$. The color scale ranges from 0 to $\Delta U/\delta_\omega$ for vorticity, from white to black.

vortex pairings. The sound levels increase with the Reynolds number downstream of the pairings, especially in the direction of the lobes for polar angles of ±35°. As a result, the acoustic radiation becomes more directive as the Reynolds number increases.

For all Reynolds numbers, the derivatives of the RMS values of pressure fluctuations are mostly positive on both sides of the mixing layer, since the noise levels increase with the Reynolds number. For $Re_\omega = 400$ and $Re_\omega = 800$ in Figs. 9(e, f), the derivatives are positive downstream of the vortex pairings, showing that the sound levels increase with the Reynolds number downstream of the pairings in these cases, in agreement with the sound intensity fields provided for $Re_\omega \leq 1600$ in Figs. 9(a, b, c). For $Re_\omega = 800$, 1600 and 3200 in Figs. 9(f,g,h), the values of the derivatives are highest in two lobes originating from the vortex pairing location and oriented in the main radiation direction, for polar angles of ±35°, indicating that the acoustic radiation is more directional as the Reynolds number increases. In the shear zone and in the acoustic field, the magnitude of the derivatives decreases with the Reynolds number. This result shows that the effects of the viscosity on the sound radiation are reduced as the Reynolds number increases. For $Re_\omega = 3200$, the derivatives are negative in two narrow bands oriented downstream and originating slightly further downstream from the position of the vortex pairings, near $x = 200\delta_\omega$. This indicates that a small increase of the Reynolds number leads to a decrease of the sound levels in these two bands for this case.

Acoustic power levels

To quantify the effects of the Reynolds number on the noise levels, the acoustic power levels obtained by integrating the sound intensity determined for the cases with $Re_\omega \leq 12800$ are plotted in Fig. 10 as a function of the Reynolds number. The value estimated for the assumed inviscid case ($Re_\omega = 10^{12}$) is also provided for comparison. The levels increase strongly from $Re_\omega = 400$ to $Re_\omega = 1600$, then weakly from

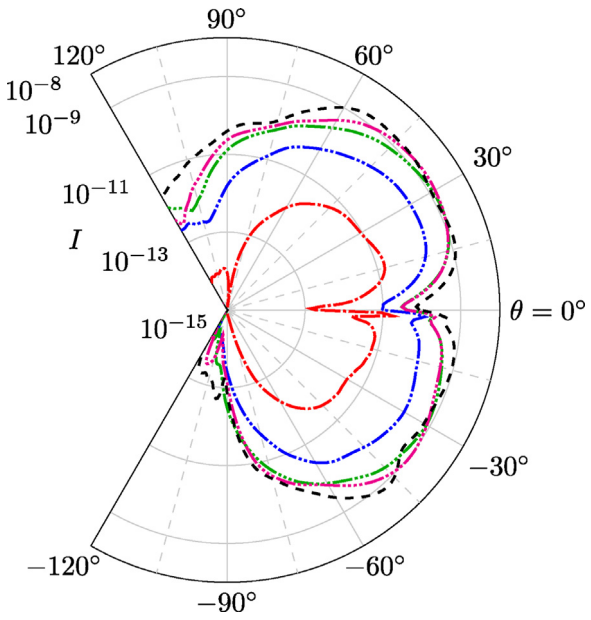

Fig. 8. Variations of acoustic intensity at $r = 200\delta_\omega$ from the vortex pairings as a function of the polar angle θ for $\mathrm{Re}_\omega = 400$, $\mathrm{Re}_\omega = 800$, $\mathrm{Re}_\omega = 1600$, $\mathrm{Re}_\omega = 3200$ and $\mathrm{Re}_\omega = 10^{12}$.

$\mathrm{Re}_\omega = 1600$ to $\mathrm{Re}_\omega = 12800$. The value obtained for $\mathrm{Re}_\omega = 12800$ is very close to the one determined with the assumed inviscid simulation, as expected.

Red segments of arbitrarily chosen lengths with slopes equal to the derivatives of the power levels with respect to the Reynolds number are also represented in Fig. 10. The slopes are positive since the sound levels increase with the Reynolds number. The values of the derivatives decrease with the Reynolds number, which shows that the sensitivity of the power levels to viscous effects decreases with that flow parameter. The red segments in Fig. 10 appear to follow the variations of the sound levels with the Reynolds number. The values of the derivatives of the power levels obtained with the complex differentiation method are thus consistent with the variations of the noise levels values.

6.3. Grid sensitivity

To highlight the effects of the grid resolution on the development of the mixing layer, snapshots of vorticity and of their derivatives with respect to Δy_0, obtained from the simulations of set-Mesh for $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, $0.2\delta_\omega$, $0.4\delta_\omega$ and $0.8\delta_\omega$, are displayed in Figs. 11(a, c, e, g) and Figs. 11(b, d, f, h). For $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$ in Fig. 11(a), the vorticity layer is uniform in the streamwise direction, and do not show any vortices. For $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ in Figure Fig. 11(c), vortices roll-up near $x = 100\delta_\omega$ and merge near $x = 160\delta_\omega$. In this case, numerical oscillations are seen around the vortices between $x \simeq 100\delta_\omega$ and $x \simeq 200\delta_\omega$. As the mesh spacing decreases from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, the vortex rolling-ups and pairings occur earlier near $x = 75\delta_\omega$ and $x = 150\delta_\omega$, respectively. For $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ in Fig. 11(e), no numerical oscillations are visible, which suggests that those observed for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ are due to discretization errors. The vorticity fields provided for $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ are similar, supporting that the aerodynamic development of the mixing layer is well resolved for $\Delta y_0 \leq 0.2\delta_\omega$.

For $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$, the derivative of the vorticity in Fig. 11(b) is negative at the center of the mixing layer and positive on both sides of the shear zone. This suggests that the vorticity sheet becomes thinner as the mesh spacing Δy_0 decreases in this case, in agreement with the vorticity in Figs. 11(a, c) obtained for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$. For $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$, the footprint of the instability waves growing in the shear zone can be seen in the field of the derivatives of the vorticity for $x \geq 175\delta_\omega$. For $\Delta y_0 \leq 0.4\delta_\omega$ in Figs. 11(d, f, h), the derivatives have significant values near the vortices. The magnitude of the derivatives become weaker as the mesh spacing Δy_0 decreases. This indicates that the sensitivity of the vortices to the mesh spacing Δy_0 is reduced when the latter decreases, as expected. For $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, numerical oscillations similar to the ones observed in the vorticity field obtained for this case are visible. They are more apparent in the derivative field than in the vorticity field. Therefore, the vortices and the numerical oscillations depend on the mesh spacing Δy_0. For $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ in Figs. 11(f, h), the highest values of the derivatives are found near the vortex rolling-ups and pairings.

Intensity of velocity fluctuations and instability growth rate

The RMS values of the transverse velocity fluctuations obtained at $y = 0$ are plotted in Fig. 12(a) using a logarithmic scale. For $\Delta y_0 \leq 0.4\delta_\omega$, the levels first increase strongly, reach a local maximum near the vortex rolling-ups, then decrease slightly, increase thereafter until a maximum is reached in the vicinity of the vortex pairings, and finally do not vary appreciably with the streamwise direction. The RMS values obtained upstream of the vortex rolling-ups decrease with the mesh spacing Δy_0. The levels for $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ are however close to those for $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$. For $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$, they increase in the streamwise direction while no vortex is observed in this case.

The curves in Fig. 12(a) correspond approximately to straight lines between $x = 20\delta_\omega$ and the position of the vortex rolling-ups, indicating that the amplitude of the velocity fluctuations grow exponentially in the streamwise direction. This exponential growth can be characterized by a growth rate $-k_i$, yielding for velocity fluctuations

$$v'(x, y, t) = \hat{v}(y)\cos(k_r x + \omega t)\exp\left(-k_i x\right), \tag{44}$$

where $\hat{v}(y)$ is the amplitude, k_r is the wavenumber and ω is the pulsation. The growth rate $-k_i$ is given by the slopes of the straight lines observed in Fig. 12(a). It is obtained using a linear fit applied between $x = 20\delta_\omega$ and the position where the RMS levels are equal to one third of their values at the first maximum. The growth rates thus estimated are plotted in Fig. 12(b) as a function of the mesh spacing Δy_0. They decrease by 3% from $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, then by 24% from $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and finally by 81% from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$.

The derivatives of the growth rates with respect to Δy_0 determined using the complex differentiation method are also represented in Fig. 12(b). In all cases, the derivatives are negative since the growth rate of the instability waves decreases with the mesh spacing Δy_0. The magnitude of the derivative increases weakly from $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, more strongly from $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, and weakly from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$. They are consistent with the computed growth rates. The value of the derivative of the growth rate for $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ is small. This suggests that the growth rate determined for this case is weakly affected by the mesh spacing Δy_0, and thus that it is accurately estimated.

Pressure fields

Fields of vorticity and fluctuating pressure obtained in the three cases with $\Delta y_0 \leq 0.4\delta_\omega$ for which vortex pairings occur are displayed in Fig. 13(a-c). The acoustic pattern is similar to that observed in the case with M = 0.3 and $\mathrm{Re}_\omega = 3200$ provided in Fig. 7(d). It does not vary significantly with the mesh spacing Δy_0. For $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ in Fig. 13(a, b), the amplitude of the pressure fluctuations increases slightly as Δy_0 decreases. The increase in levels is more pronounced in the main radiation direction, for polar angles $\theta \simeq \pm 30°$. The pressure fields for $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ are similar, which indicates that the transverse mesh spacing weakly affects the acoustic radiation of the mixing layers for $\Delta y_0 \leq 0.2\delta_\omega$.

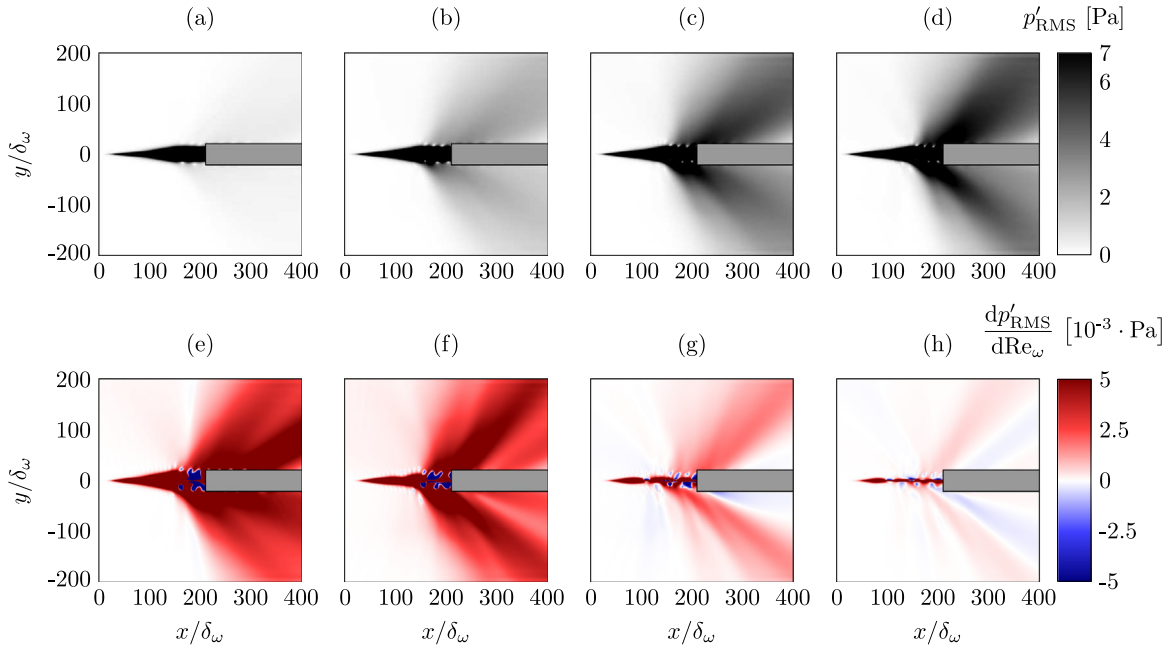

Fig. 9. Fields of (a, b, c, d) RMS values of pressure fluctuations and (d, e, f, g, h) their derivatives with respect to the Reynolds number for (a, e) $\mathrm{Re}_\omega = 400$, (b, f) $\mathrm{Re}_\omega = 800$, (c, g) $\mathrm{Re}_\omega = 1600$ and (d, h) $\mathrm{Re}_\omega = 3200$.

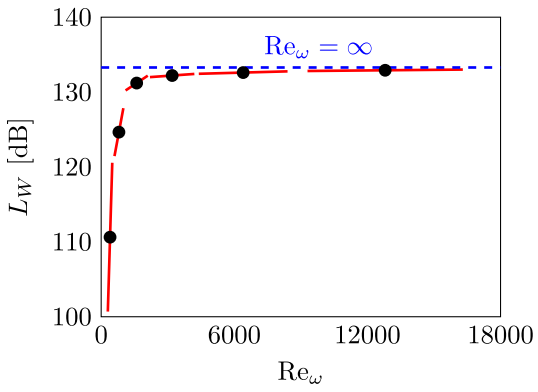

Fig. 10. Variations of acoustic power levels and ——— their derivatives with the Reynolds number; - - - - - power levels for an assumed inviscid flow ($\mathrm{Re}_\omega = 10^{12}$).

Sound directivities

The variations of the sound intensity at $r = 200\delta_\omega$ from the vortex pairings with the polar angle for $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, $0.2\delta_\omega$ and $0.4\delta_\omega$ are presented in Fig. 14. The noise levels increase as the mesh spacing decreases from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ down to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and do not vary significantly between $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$. In the slow flow for $\theta > 0°$, the intensity is maximum for $\theta \simeq 15°$ for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and for $\theta \simeq 30°$ for $\Delta y_0 \leq 0.2\delta_\omega$. In the fast flow for $\theta < 0°$, it is maximum for $\theta \simeq 30°$ for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and for $\theta \simeq 37.5°$ for $\Delta y_0 \leq 0.2\delta_\omega$. The acoustic radiation is thus more oriented upstream as the mesh spacing decreases from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$.

Sound intensities and their derivatives with respect to the mesh spacing

The RMS values of the pressure fluctuations and their derivatives with respect to Δy_0 obtained with the complex differentiation method for $\Delta y_0 \leq 0.4\delta_\omega$ are represented in Figs. 15(a, b, c) and Figs. 15(d, e, f), respectively. As the mesh spacing decreases, the sound levels increase from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and do not seem to vary from $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$.

For $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ in Fig. 15(d), the derivatives of the sound intensity are mostly negative in the acoustic field. This indicates that the noise levels decrease with the mesh spacing Δy_0 in this case, in agreement with the acoustic intensities in Figs. 15(a, b). In addition, for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, the magnitude of the derivative is higher in the slow flow region for $y > 0$ than in the fast flow region for $y < 0$, suggesting that the sound levels increase more in the first region than is the second one as the mesh spacing Δy_0 decreases in this case. As the mesh spacing decreases from $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, the magnitudes of the derivatives become lower, indicating that the sensitivity of the sound levels to Δy_0 is reduced as the grids become finer. For $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ in Figs. 15(e, f), the derivatives are significant in lobes originating from the vortices between $x \simeq 100\delta_\omega$ and $x \simeq 250\delta_\omega$. In these lobes, they are positive or negative, which suggests that the noise levels increase or decrease at specific positions in the acoustic field as the mesh spacing Δy_0 varies.

Acoustic power and its sensitivity to the mesh spacing

The acoustic power levels and their derivatives with respect to Δy_0 are represented in Fig. 16 as a function of the mesh spacing Δy_0. The sound levels increase by 0.1 dB from $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and decrease by 2.8 dB from $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$. For $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, the derivative is positive, suggesting that the noise levels increase with the mesh spacing in this case. For $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, the derivatives are negative, showing that the levels decrease as the mesh spacing increases in these cases. Moreover, the absolute values of the derivatives increase with Δy_0 for $\Delta y_0 \geq 0.2\delta_\omega$. This shows that the sound levels are more affected by the mesh spacing as Δy_0 increases from $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ to $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and, therefore, that the sensitivity of the noise levels to the grid resolution is higher when the mesh is coarser. For $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, the magnitudes of the derivative are very low compared to the case with $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$. This indicates that the noise levels are well estimated for $\Delta y_0 \leq 0.2\delta_\omega$.

Quantification of the grid sensitivity

To quantify the sensitivity of the noise levels to the mesh spacing, a grid sensitivity coefficient defined by

$$S_W(h) = L_W\left(\Delta y_0(1+h)\right) - L_W\left(\Delta y_0\right), \tag{45}$$

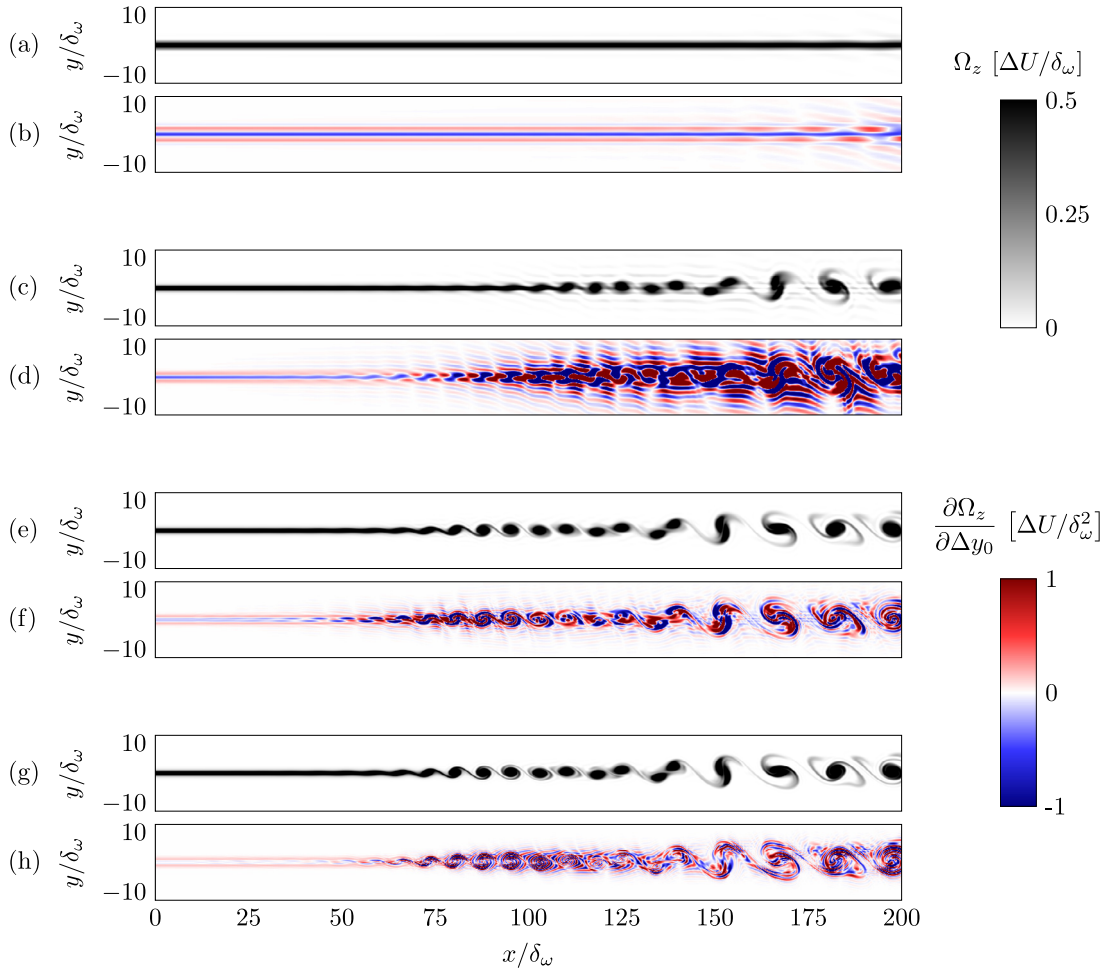

Fig. 11. Fields of (a, c, e, g) vorticity Ω_z and (b, d, f, h) their derivatives with respect to Δy_0 for (a, b) $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$, (c, d) $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, (e, f) $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and (g, h) $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$.

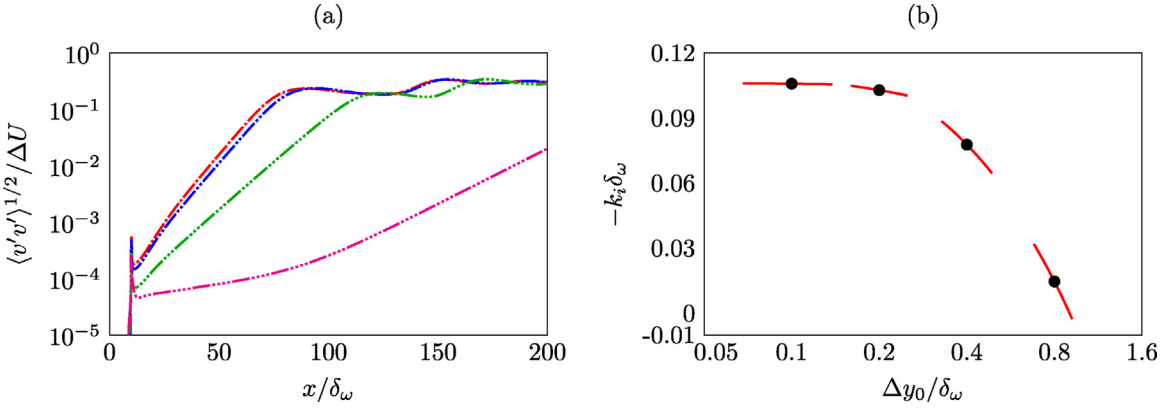

Fig. 12. Variations of (a) RMS values of the transverse velocity fluctuations at the center of the mixing layer for $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.8\delta_\omega$ and (b) growth rate of the instability waves developing initially in the mixing layer and the derivatives $\mathrm{d}(-k_i\delta_\omega)/\mathrm{d}\Delta y_0$ as a function of Δy_0. The values of the derivatives are indicated by the red curves.

where $h \ll 1$ is a small real number, is considered. In the formula (45), $L_W\left(\Delta y_0(1+h)\right)$ is the sound power level in dB estimated using a first-order approximation by

$$L_W\left(\Delta y_0(1+h)\right) \simeq 10\log\left(\frac{W_0 + h\Delta y_0 \dfrac{\partial W_0}{\partial \Delta y_0}}{W_{\text{ref}}}\right), \tag{46}$$

where W_0 is the acoustic power and $\partial W_0/\partial \Delta y_0$ is the derivative of the acoustic power with respect to Δy_0 obtained for a given mesh spacing Δy_0. For instance, for $h = 0.1$, the grid sensitivity coefficient S_W provides a first-order approximation of the gain or loss in dB of the sound power level as the mesh spacing increases by 10%. Therefore, it allows us to quantify the sensitivity of the noise levels to the grid using only the results of a simulation carried out for a given mesh spacing. For example, in the present study, values of S_W have been computed for $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, $0.2\delta_\omega$ and $0.4\delta_\omega$ for $h = 0.1$. They are reported

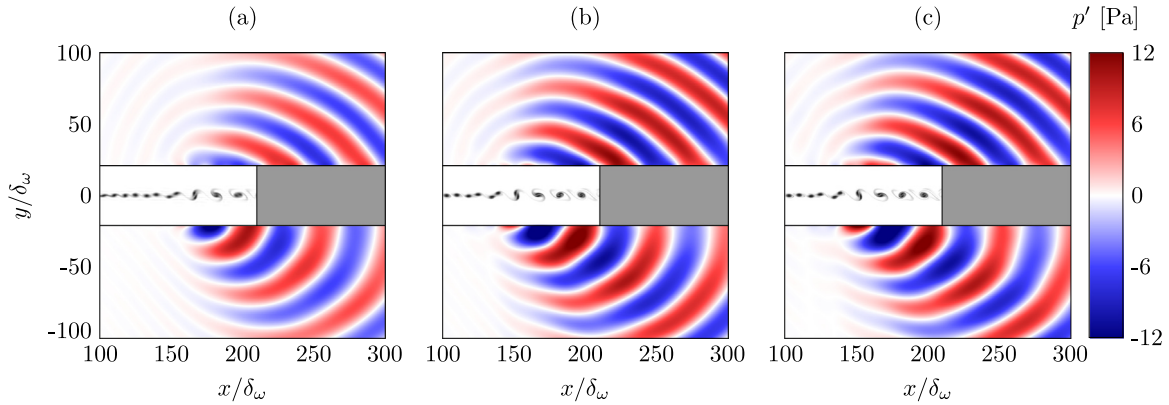

Fig. 13. Instantaneous vorticity and fluctuating pressure fields for (a) $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, (b) $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and (c) $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$. The color scales range from 0 to $\Delta U/\delta_\omega$ for vorticity, from white to black.

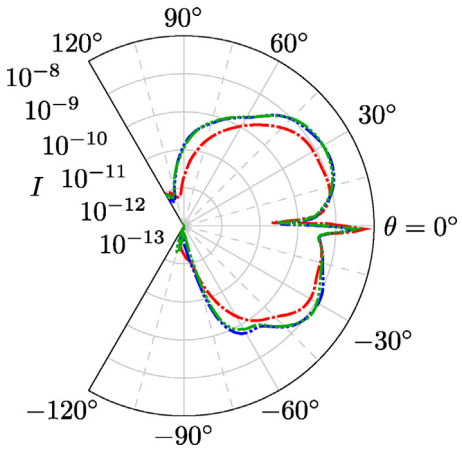

Fig. 14. Variations of acoustic intensity at $r = 200\delta_\omega$ from the vortex pairings as a function of the polar angle θ for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$.

Table 4
Grid sensitivity coefficient of the sound power levels S_W for $h = 0.1$.

$\Delta y_0/\delta_\omega$	0.1	0.2	0.4
S_W	0.012 dB	−0.012 dB	−0.73 dB

in Table 4. For $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$ and $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$, S_W is approximately only of 0.1 dB in absolute value. This indicates that the noise levels are almost insensitive to the mesh spacing for $\Delta y_0 \leq 0.2\delta_\omega$. In contrast, for $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, the sensitivity coefficient is higher and close to 1 dB in absolute value, showing that the sensitivity of the noise levels to the grid is much stronger in this case.

7. Conclusion

In this paper, the complex differentiation method has been applied to the sensitivity analysis of the noise produced by two-dimensional mixing layers to assess its capabilities to describe the effects of key parameters on the aerodynamic noise. For this purpose, simulations of mixing layers were carried out for Mach numbers between 0.2 and 0.4 and Reynolds numbers between 400 and 12,800 on different grids, and the complex differentiation method was applied in each simulation to estimate the derivatives of the sound levels with respect to the parameters under study. Comparisons between derivatives computed using the complex differentiation method and using a first-order approximation have shown that the first method is more accurate than the second one. The derivatives of the noise levels with respect to the Mach number have highlighted that the acoustic radiation produced by the mixing layer is more intense and less directed downstream as Mach number increases, in good agreement with results obtained using DNS and dimensional analysis. The derivatives of the noise levels with respect to the Reynolds number have indicated that the acoustic radiation is stronger and more pronounced in its main direction as the Reynolds number increases. The complex differentiation method has also been applied to investigate the effects of the transverse mesh spacing at the center of the mixing layer, Δy_0, on the aerodynamic and acoustic fields of a mixing layer by considering grids with $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$, $0.2\delta_\omega$, $0.4\delta_\omega$ and $0.8\delta_\omega$. The derivatives of the sound levels with respect to the mesh parameter have shown that the noise levels decrease with the mesh spacing Δy_0, in agreement with results from parametric studies. The results provided in this paper thus suggest that the complex differentiation method can be applied using DNS to investigate the sensitivity of the noise produced by a flow to physical parameters, and to perform grid sensitivity analyses of this noise. In future studies, it may be interesting to use the complex differentiation method to study the grid sensitivity of three-dimensional turbulent flows computed using large-eddy simulations.

CRediT authorship contribution statement

Hugo Vincent: Conceptualization, Software, Writing – original draft. **Christophe Bogey:** Conceptualization, Software, Writing – review & editing.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgments

The first author was supported by the FUI25 CALM-AA (CiblAge des sources par voie Logicielle et Méthodes inverses pour l'AéroAcoustique) regional project, co-financed by the European regional development fund. This work was granted access to the HPC resources of PMCS2I (Pôle de Modélisation et de Calcul en Sciences de l'Ingénieur de l'Information) of Ecole Centrale de Lyon. It was performed within the framework of the LABEX CeLyA (ANR-10-LABX-0060) of Université de Lyon, within the program Investissements d'Avenir (ANR-16-IDEX-0005) operated by the French National Research Agency (ANR). For the purpose of Open Access, a CC-BY public copyright licence has been applied by the authors to the present document and will be applied to all subsequent versions up to the Author Accepted Manuscript arising from this submission.

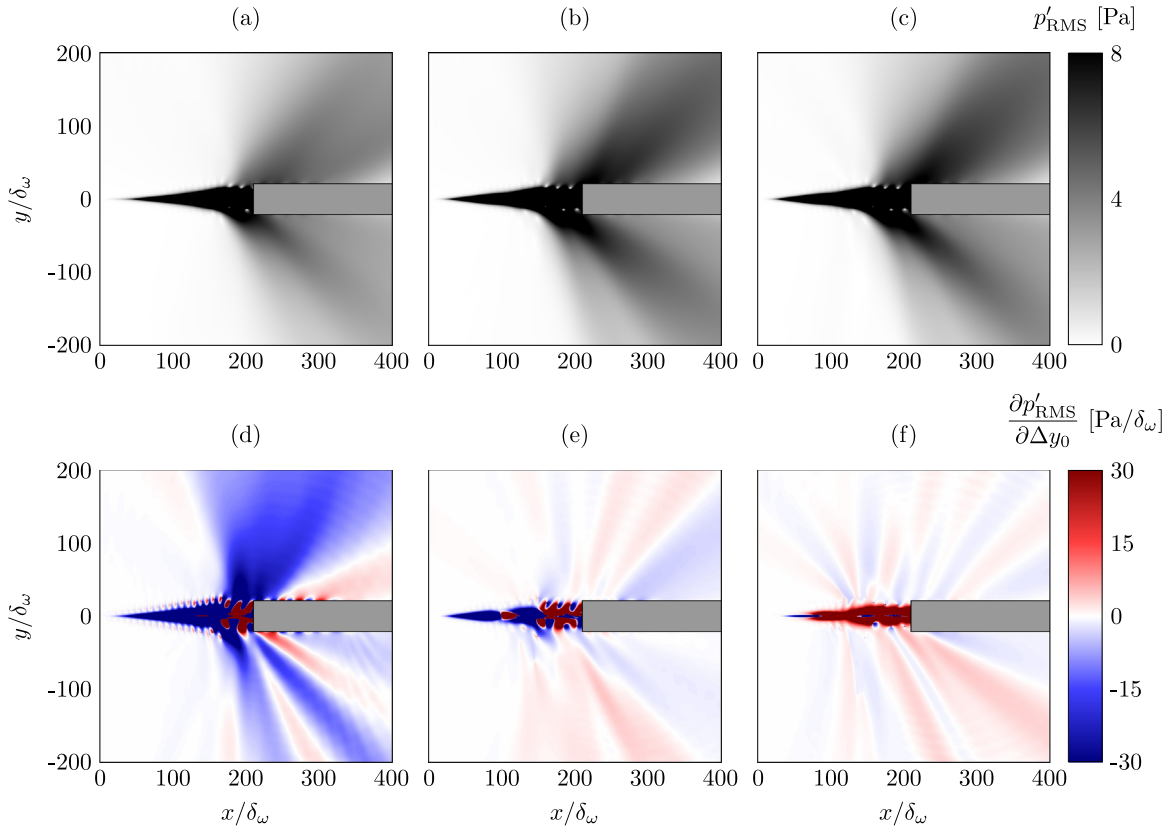

Fig. 15. Fields of (a, b, c) the RMS values of pressure fluctuations and (d, e, f) their derivatives with respect to Δy_0 for (a, d) $\Delta y_0 = 0.4\delta_\omega$, (b, e) $\Delta y_0 = 0.2\delta_\omega$ and (c, f) $\Delta y_0 = 0.1\delta_\omega$.

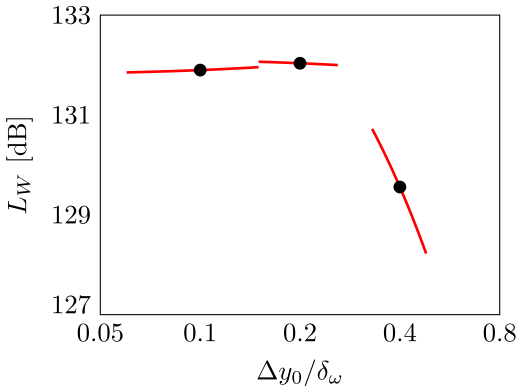

Fig. 16. Variations of sound power levels and ——— their derivatives with the mesh spacing Δy_0.

References

[1] Martins JRRA, Hwang JT. Review and unification of methods for computing derivatives of multidisciplinary computational models. AIAA J 2013;51(11):2582–99. http://dx.doi.org/10.2514/1.J052184.

[2] Kirkman RD, Metzger M. Sensitivity analysis of low Reynolds number channel flow using the finite volume method. Internat J Numer Methods Fluids 2008;57(8):1023–45. http://dx.doi.org/10.1002/fld.1669.

[3] Fiorini C, Després B, Puscas MA. Sensitivity equation method for the Navier-Stokes equations applied to uncertainty propagation. Internat J Numer Methods Fluids 2021;93(1):71–92. http://dx.doi.org/10.1002/fld.4875.

[4] Borggaard J, Burns J. A PDE sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. J Comput Phys 1997;136(2):366–84. http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1997.5743.

[5] Hristova H, Étienne S, Pelletier D, Borggaard J. A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. Internat J Numer Methods Fluids 2006;50(7):817–44. http://dx.doi.org/10.1002/fld.1079.

[6] Zayernouri M, Metzger M. Coherent features in the sensitivity field of a planar mixing layer. Phys Fluids 2011;23(2):025105. http://dx.doi.org/10.1063/1.3546174.

[7] Lyness JN, Moler CB. Numerical differentiation of analytic functions. SIAM J Numer Anal 1967;4(2):202–10. http://dx.doi.org/10.1137/0704019.

[8] Anderson WK, Newman JC, Whitfield DL, Nielsen EJ. Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables. AIAA J 2001;39(1):56–63. http://dx.doi.org/10.2514/2.1270.

[9] Lu S-Y, Sagaut P. Direct sensitivity analysis for smooth unsteady compressible flows using complex differentiation. Internat J Numer Methods Fluids 2007;53(12):1863–86. http://dx.doi.org/10.1002/fld.1386.

[10] Martins JRRA, Sturdza P, Alonso JJ. The complex-step derivative approximation. ACM Trans Math Software 2003;29(3):245–62. http://dx.doi.org/10.1145/838250.838251.

[11] Kirkman RD, Metzger M. Direct numerical simulation of sensitivity coefficients in low Reynolds number turbulent channel flow. J Turbul 2009;10:N23. http://dx.doi.org/10.1080/14685240902960173.

[12] Squire W, Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. SIAM Rev 1998;40(1):110–2. http://dx.doi.org/10.1137/S003614459631241X.

[13] Vatsa V. Computation of sensitivity derivatives of Navier–Stokes equations using complex variables. Adv Eng Softw 2000;31(8):655–9. http://dx.doi.org/10.1016/S0965-9978(00)00025-9.

[14] Cerviño L, Bewley T, Freund J, Lele S. Perturbation and adjoint analyses of flow-acoustic interactions in an unsteady 2D jet. CTR Proc Summ Prog 2002;27–39.

[15] Vergnault E, Sagaut P. Application of lattice Boltzmann method to sensitivity analysis via complex differentiation. J Comput Phys 2011;230(13):5417–29. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2011.03.044.

[16] Deneuve A, Druault P, Marchiano R, Sagaut P. A coupled time-reversal/complex differentiation method for aeroacoustic sensitivity analysis: towards a source detection procedure. J Fluid Mech 2010;642:181–212. http://dx.doi.org/10.1017/S0022112009991704.

[17] Roache PJ. Verification and Validation in Computational Science and Engineering, Vol. 895. Hermosa Albuquerque, NM; 1998.

[18] Colonius T, Lele S, Moin P. Sound generation in a mixing layer. J Fluid Mech 1997;330. http://dx.doi.org/10.1017/S0022112096003928.

[19] Bogey C, Bailly C, Juve D. Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer. AIAA J 2000;38(12):2210–8. http://dx.doi.org/10.2514/2.906.

[20] Schoder S, Spieser E, Vincent H, Bogey C, Bailly C. Acoustic modeling using the aeroacoustic wave equation based on Pierce's operator. AIAA Journal 2023. http://dx.doi.org/10.2514/1.J062558, Advance online publication.

[21] Moser C, Lamballais E, Margnat F, Fortuné V, Gervais Y. Numerical study of Mach number and thermal effects on sound radiation by a mixing layer. Int J Aeroacoust 2012;11(5–6):555–79. http://dx.doi.org/10.1260/1475-472X.11.5-6.555.

[22] Monkewitz PA, Huerre P. Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers. Phys Fluids 1982;25(7):1137–43. http://dx.doi.org/10.1063/1.863880.

[23] Bogey C, Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. J Comput Phys 2004;194(1):194–214. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.003.

[24] Bogey C, de Cacqueray N, Bailly C. A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations. J Comput Phys 2009;228(5):1447–65. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2008.10.042.

[25] Berland J, Bogey C, Marsden O, Bailly C. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. J Comput Phys 2007;224(2):637–62. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2006.10.017.

[26] Tam CKW, Dong Z. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. J Comput Acoust 1996;04(02):175–201. http://dx.doi.org/10.1142/S0218396X96000040.

[27] Martins J, Sturdza P, Alonso J. The connection between the complex-step derivative approximation and algorithmic differentiation. In: AIAA Paper. 2001, p. 921. http://dx.doi.org/10.2514/6.2001-921.

[28] Ffowcs Williams JE. Hydrodynamic noise. Annu Rev Fluid Mech 1969;1(1):197–222. http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.01.010169.001213.

[29] Guo YP. Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems. J Fluid Mech 2000;403:201–21. http://dx.doi.org/10.1017/S0022112099006989.

[30] Lighthill MJ. On sound generated aerodynamically I. General theory. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 1952;211(1107):564–87. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1952.0060.

[31] Ribner HS. Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise. J Fluid Mech 1969;38(1):1–24. http://dx.doi.org/10.1017/S0022112069000012.

[32] Freund JB. Noise-source turbulence statistics and the noise from a Mach 0.9 jet. Phys Fluids 2003;15(6):1788–99. http://dx.doi.org/10.1063/1.1569919.

3.3 Réceptivité d'un jet à une perturbation acoustique près de la buse

Dans cette troisième section, la méthode de la différentiation complexe est appliquée à l'étude du mécanisme de réceptivité se produisant lorsqu'une onde acoustique se réfléchit sur les lèvres de la buse d'un jet. Pour cela, à partir des résultats d'une simulation de jet impactant une paroi réalisée dans le chapitre suivant, un pulse acoustique d'amplitude imaginaire très faible est introduit à un instant donné près de la buse en dehors du jet. En poursuivant la simulation après cet instant, la sensibilité des couches de mélange près de la buse à une perturbation acoustique est déterminée en appliquant la méthode de la différentiation complexe. À l'aide d'une décomposition de Hodge-Helmholtz, cette sensibilité est utilisée pour mettre en évidence la génération d'une onde d'instabilité par la perturbation acoustique.

Les paramètres du jet sont présentés dans une première partie. Ceux de la simulation sont donnés dans une deuxième partie. Le développement des couches de mélange du jet et le rayonnement acoustique de ce dernier sont brièvement décrits dans une troisième partie. La technique mise en œuvre pour déterminer la sensibilité du jet à une perturbation acoustique avec la méthode de la différentiation complexe est présentée dans une quatrième partie. Cette sensibilité est représentée dans une cinquième partie. La décomposition de Hodge-Helmholtz est appliquée dans une sixième partie. Des visualisations du mécanisme de réceptivité sont finalement fournies dans une septième partie.

3.3.1 Paramètres du jet

Le jet considéré a été simulé dans le cadre d'une étude présentée dans le chapitre suivant. Il est isotherme et est caractérisé par un nombre de Mach $\mathrm{M} = u_j/c_0 = 0.9$ et un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = u_j D/\nu = 10^5$, où u_j est la vitesse d'éjection, c_0 est la vitesse du son dans le milieu ambiant et D est le diamètre du jet. Il s'échappe d'une tuyère cylindrique de rayon $r_0 = D/2$ avec des lèvres d'épaisseur $0.058r_0$. Il se mélange au milieu ambiant à une pression $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$ et à une température $T_0 = 293\,\mathrm{K}$. Il impacte une plaque située à une distance $L = 6r_0$ du plan de sortie du jet en $z = 0$. L'entrée du domaine de calcul est en $z = -10r_0$, mais dans la buse l'écoulement n'est calculé dans la buse que pour $z \geq -2r_0$. Dans la buse, en $z = -2r_0$, les vitesses radiale et azimutale sont fixées à zéro, la pression est égale à p_0, la température est obtenue avec une relation de Crocco-Busemann et un profil de couche limite laminaire de Blasius d'épaisseur $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ [37, 50] est imposé pour la vitesse axiale. L'écoulement n'est pas perturbé et les couches limites sont laminaires en sortie de tuyère.

3.3.2 Paramètres numériques

Le jet a été simulé en considérant un maillage contenant $N_r = 559$ points dans la direction radiale, $N_\theta = 256$ points dans la direction azimutale et $N_z = 1122$ points dans la direction axiale, soit un total de 160 millions de points. Le domaine de calcul s'étend radialement jusqu'en $r = 15r_0$, et axialement de $z = -10r_0$ jusqu'à la plaque, en $z = 6r_0$, sans prendre en compte les zones éponges entre $z = -20r_0$ et $z = -10r_0$, et entre $r = 15r_0$ et $r = 30r_0$. Dans la direction radiale, 96 points sont utilisés entre $r = 0$ et $r = r_0$. La taille des mailles Δr est minimale pour $r = r_0$, où elle est égale à $\Delta r_{\min} = 0.0036r_0$. Elle augmente jusqu'en $r = 6.2r_0$ où $\Delta r = 0.075r_0$, puis reste constante jusqu'en $r = 15r_0$. Cette dernière taille de maille est associée à un nombre de Strouhal $\mathrm{St}_D = fD/u_j = 5.9$ pour une onde acoustique discrétisée par cinq points par longueur d'onde. Dans la direction axiale, en sortie de buse, la taille des mailles Δz est minimale et égale à $\Delta z_{\min} = 0.0072r_0$. Elle augmente jusqu'en $z = 2r_0$, où $\Delta z = 0.12r_0$, puis est constante jusqu'en $z = 4r_0$, et enfin diminue et atteint $\Delta z_{\min}$ à nouveau au niveau de la plaque. Afin d'éviter le développement d'oscillations de Gibbs pouvant se trouver près de la plaque en raison de la présence d'un choc, une procédure de filtrage basée sur un détecteur de chocs et un filtre d'ordre 2 est appliquée aux fluctuations de masse volumique, de vitesse et de pression pour $z \geq 3r_0$ [42].

Le pas de temps a été fixé à $\Delta t = 0.7\Delta r_{\min}/c_0$ pour assurer la stabilité numérique. Au début des simulations, pour $t < 25r_0/u_j$, des fluctuations de pression d'amplitude maximale 200 Pa ont été introduites aléatoirement entre $z = 0.25r_0$ et $z = 5r_0$ pour accélérer le développement initial des couches de mélange. La période transitoire a duré un temps $t_{\text{trans}} = 500r_0/u_j$.

3.3.3 Champs de vorticité et de pression

Pour illustrer le développement des couches de mélange du jet et le rayonnement acoustique de ce dernier, des champs instantanés de vorticité et des fluctuations de pression obtenus dans une coupe azimutale sont représentés sur la figure 3.12. Dans le champ de vorticité, à proximité de la sortie de buse pour $z \lesssim 2r_0$, des enroulements et des appariements tourbillonnaires sont visibles dans les couches de mélange en raison du caractère laminaire des couches limites en sortie de buse. Plus en aval, des structures tourbillonnaires peuvent être observées dans les couches de mélange, indiquant que ces dernières transitionnent vers un état turbulent. Dans le champ de pression, des fronts d'onde circulaires uniformément espacés provenant de la région d'impact sont visibles. Ils indiquent que le jet produit un rayonnement acoustique tonal axisymétrique de forte amplitude, comme le jet à un nombre de Mach de 0.9 avec des couches limites perturbées simulé par Varé & Bogey [302].

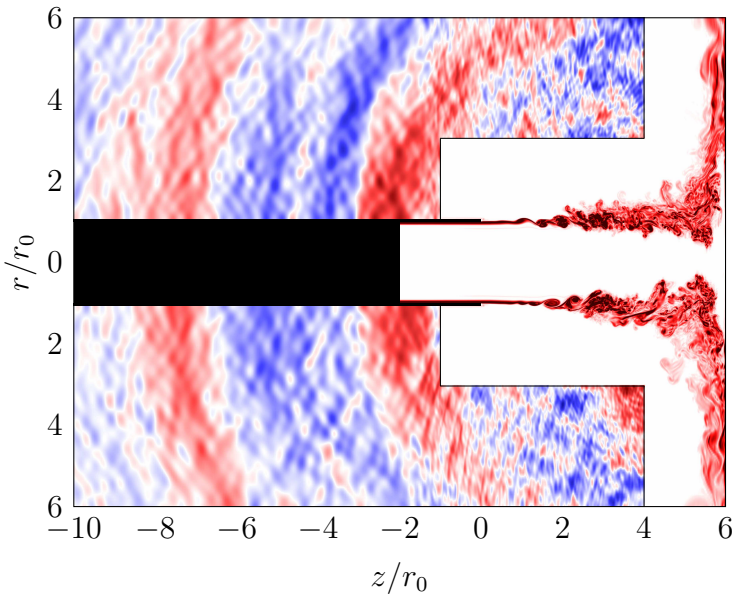

FIGURE 3.12 – Représentation dans le plan (z, r) de la norme vorticité dans l'écoulement et des fluctuations de pression ailleurs. Les échelles de couleur varient de 0 à $12u_j/r_0$ pour la vorticité, du blanc au rouge, et entre $\pm 0.015p_0$ pour les fluctuations de pression, du bleu au rouge. Les lèvres de la tuyère et les régions non calculées pour $z < 2r_0$ sont en noir.

3.3.4 Sensibilité à un pulse acoustique

Afin de déterminer la sensibilité des couches de mélange près de la buse à une perturbation acoustique extérieure, un pulse acoustique axisymétrique d'amplitude imaginaire est introduit en $r = 2r_0$ et $z = r_0$ à un instant donné $t_{\text{pulse}} > t_{\text{trans}}$. Il est défini par les perturbations de pression et de masse volumique [82]

$$\begin{cases} p_{\text{pulse}}(r,z) = A \times p_0 \exp\left(-\ln(2)\,\dfrac{(r-r_{\text{pulse}})^2 + (z-z_{\text{pulse}})^2}{b^2}\right) , \\ \rho_{\text{pulse}}(r,z) = \dfrac{p_{\text{pulse}}(r,z)}{c_0^2} , \end{cases} \tag{3.21}$$

où $r_{\text{pulse}} = 2r_0$ et $z_{\text{pulse}} = r_0$, $b = 0.1r_0$ est la demi-largeur et A est l'amplitude du pulse normalisée par la pression ambiante. Cette amplitude est imaginaire et vaut

$$A = ih , \tag{3.22}$$

où $h = 10^{-15}$.

Pour comprendre les informations fournies par les parties imaginaires des variables de l'écoulement, on considère les approximations de Taylor d'une grandeur U pour des pulses

d'amplitudes réelle et imaginaire

$$U\left(A=\varepsilon\right) \simeq U\left(A=0\right)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}A}\ , \tag{3.23}$$

$$U\left(A=i\varepsilon\right) \simeq U\left(A=0\right)+i\varepsilon\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}A}\ , \tag{3.24}$$

où $\varepsilon << 1$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}\left[U\left(A=i\varepsilon\right)\right] \simeq \varepsilon\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}A}\ . \tag{3.25}$$

En introduisant cette approximation dans l'équation (3.23) et en réarrangeant l'expression obtenue, il vient

$$\mathrm{Im}\left[U\left(A=i\varepsilon\right)\right] \simeq U\left(A=\varepsilon\right)-U\left(A=0\right)\ . \tag{3.26}$$

La partie imaginaire d'une grandeur de l'écoulement est donc associée à la différence entre les valeurs de cette grandeur pour un pulse d'amplitude réelle très faible et pour un pulse d'amplitude nulle. Elle permet ainsi de déterminer les effets d'un pulse d'amplitude réelle sur la grandeur considérée. Dans le présent cas, pour un pulse d'amplitude ih, l'importance de ces effets est quantifiée par la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}A} \simeq \frac{\mathrm{Im}\left[U\right]}{h}\ . \tag{3.27}$$

Dans la suite, pour plus de clarté, les dérivées sont appelées sensibilités et sont notées S_q, où q est une variable de l'écoulement quelconque. Par exemple, la dérivée de la pression est appelée la sensibilité de la pression S_p.

Après l'introduction du pulse, l'écoulement est simulé jusqu'à un temps $t = t_{\mathrm{pulse}} + 5r_0/u_j$. Les parties réelles et imaginaires des variables de l'écoulement dans les plans azimutaux $\theta = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ et $3\pi/4$ et les coefficients de Fourier du mode axisymétrique sont stockés à une fréquence d'enregistrement de $\mathrm{St}_D = 25.6$.

Il est important de noter que le contenu fréquentiel du pulse est large bande [82, 291]. Pour illustrer cela, les variations temporelles de la sensibilité de la pression obtenues à la position initiale du pulse ainsi que le spectre associé à ces variations sont représentés sur la figure 3.13. La sensibilité de la pression diminue fortement, atteint une valeur minimale approximativement égale à $-0.25p_0$ pour $t \simeq t_{\mathrm{pulse}} + 0.2r_0/u_j$, puis augmente faiblement de manière à être quasiment nulle pour $t = t_{\mathrm{pulse}} + 0.6r_0/u_j$. Le spectre présente un maximum pour $\mathrm{St}_D \simeq 4$. Les niveaux sont supérieurs à la moitié de ce maximum pour une large gamme de nombres de Strouhal $0.75 \lesssim \mathrm{St}_D \lesssim 10$.

3.3.5 Sensibilité de la pression

La pression et sa sensibilité obtenues aux trois instants $t_{\mathrm{pulse}} + 0.5r_0/u_j$, $t_{\mathrm{pulse}} + 1.5r_0/u_j$ et $t_{\mathrm{pulse}} + 3.5r_0/u_j$ sont représentées sur les figures 3.14(a,b,c) et 3.14(d,e,f). Dans les champs

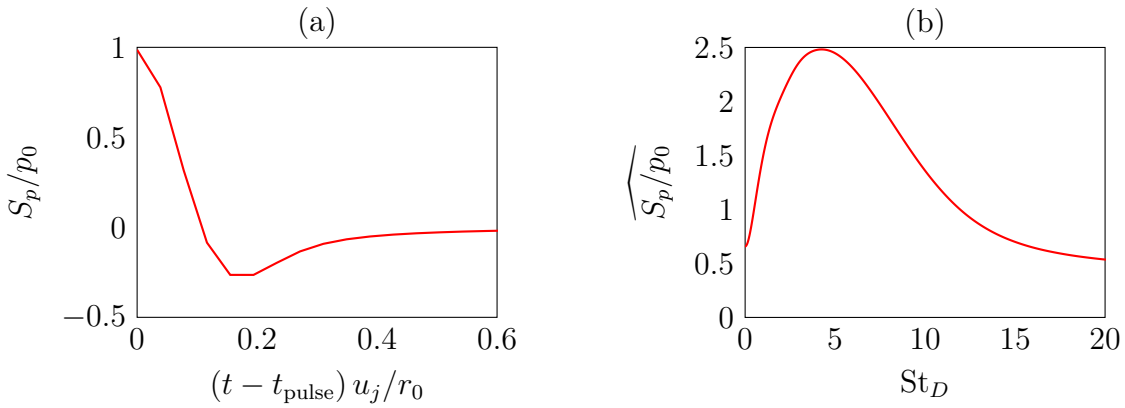

Figure 3.13 – Représentations (a) des variations temporelles de la sensibilité de la pression en $r = r_{\text{pulse}}$ et $z = z_{\text{pulse}}$ et (b) du spectre associé à ces variations.

de pression sur les figures 3.14(a,b,c), des ondes acoustiques se propageant vers l'amont sont visibles à l'intérieur et à l'extérieur du jet. Elles n'ont aucun lien avec le pulse introduit. Des ondes d'instabilité peuvent sont également observées dans les couches de mélange.

Au premier instant, dans le champ de la sensibilité de la pression sur la figure 3.14(d), des perturbations sont visibles aux alentours de la position initiale du pulse. Elles correspondent aux fluctuations de pression qui auraient été générées si un pulse d'amplitude réelle très faible avait été introduit à la place du présent pulse imaginaire, comme indiqué par l'équation (3.26). Plus tard sur la figure 3.14(e), les perturbations atteignent les lèvres de la tuyère et se réfléchissent. Au dernier instant, sur la figure 3.14(f), des fluctuations se développent et s'amplifient dans la zone de cisaillement à proximité de la buse. Elles sont liées aux ondes d'instabilité qui auraient été excitées si un pulse d'amplitude réelle avait été introduit.

3.3.6 Décomposition de Hodge-Helmholtz

Les ondes d'instabilité sont excitées au cours d'un mécanisme de réceptivité se produisant à proximité de la sortie de buse. Pour décrire ce mécanisme qui implique des perturbations acoustiques et des ondes d'instabilité de nature aérodynamique, une décomposition de Hodge-Helmholtz [124, 253, 297] est appliquée à la partie axisymétrique de la sensibilité du champ vectoriel de vitesse afin de séparer ses composantes rotationnelles (aérodynamiques) et irrotationnelles (acoustiques et thermiques) de la manière suivante

$$S_{\mathbf{u}} = S_{\mathbf{u}}^{\text{rot}} + S_{\mathbf{u}}^{\text{iro}} \,, \tag{3.28}$$

où $S_{\mathbf{u}}^{\text{rot}}$ et $S_{\mathbf{u}}^{\text{iro}}$ sont les composantes rotationnelles et irrotationnelles de la sensibilité de la vitesse. Par définition, ces composantes dérivent de potentiels vectoriel et scalaire. Elles vérifient ainsi les relations

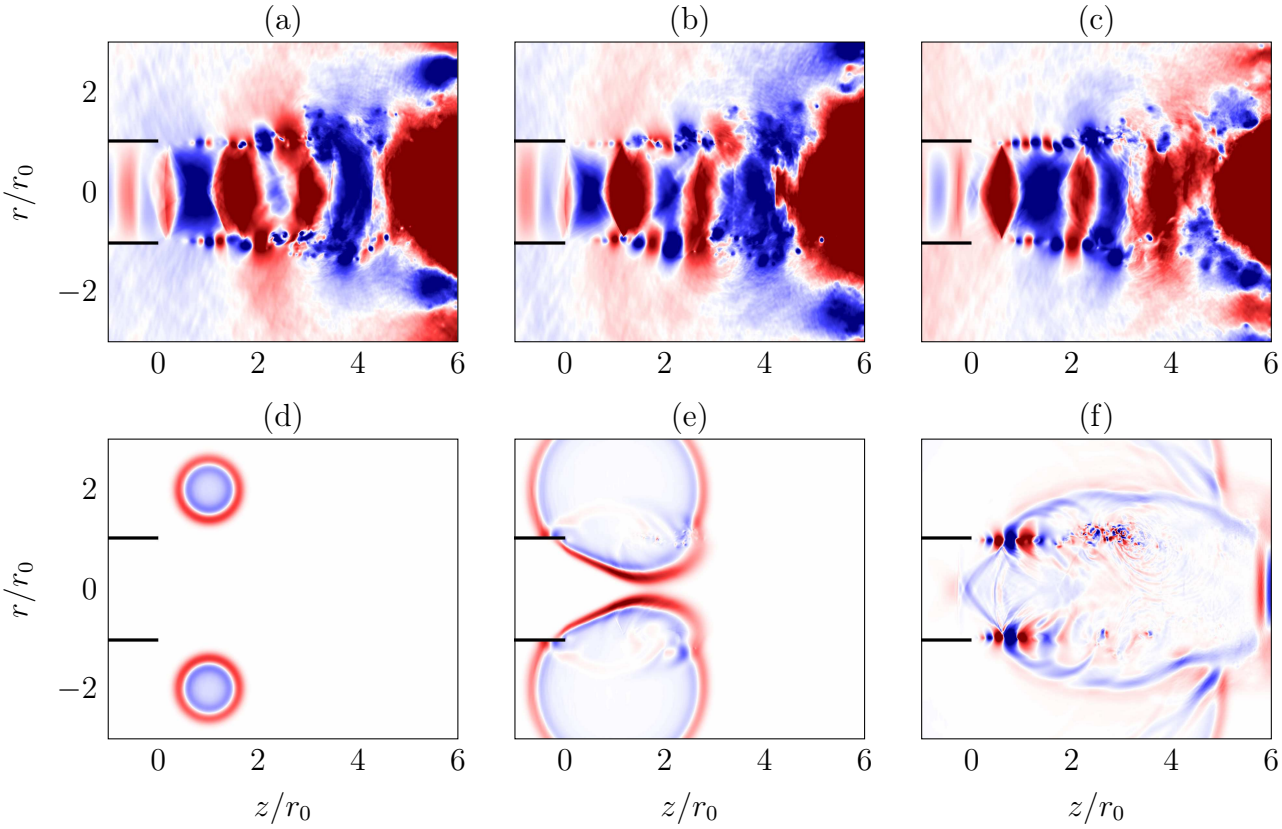

FIGURE 3.14 – Représentations dans le plan (z, r) de (a,b,c) la pression $p - p_0$ et (d,e,f) la dérivée $\mathrm{d}p/\mathrm{d}A$ pour (a,d) $t = t_{\text{pulse}} + 0.5r_0/u_j$, (b,e) $t = t_{\text{pulse}} + 1.5r_0/u_j$ et (c,f) $t = t_{\text{pulse}} + 3.5r_0/u_j$. Les échelles de couleur varient entre $\pm 0.1p_0$ pour la pression et entre $\pm 0.3p_0$ pour la dérivée, du bleu au rouge.

$$S_{\mathbf{u}}^{\text{rot}} = \nabla \wedge \mathbf{A} \qquad (3.29) \qquad\qquad S_{\mathbf{u}}^{\text{iro}} = \nabla\phi\,, \qquad (3.30)$$

où $\mathbf{A}$ et ϕ sont les potentiels vectoriel et scalaire de la partie axisymétrique de la sensibilité de la vitesse et l'opérateur $\wedge$ représente un produit vectoriel.

En considérant la divergence de l'équation (3.28), l'équation de Poisson

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot S_{\mathbf{u}} \qquad (3.31)$$

est obtenue. Elle est résolue en coordonnées cylindriques axisymétriques pour chaque instant sur un maillage uniforme s'étendant radialement jusqu'en $r = 3r_0$ et axialement de $z = -r_0$ jusqu'à la plaque en utilisant un schéma aux différences finies d'ordre 2 et une méthode itérative de Gauss-Seidel. La taille des mailles $\Delta z = \Delta r = 0.008r_0$ a été déterminée à partir d'une étude de sensibilité au maillage qui a montré que les solutions ne varient pas significativement avec la taille des mailles pour $\Delta z = \Delta r \leq 0.16r_0$. Pour s'affranchir de la singularité en $r = 0$, le

premier point dans la direction radiale est placé en $r = \Delta r/2$ et un point fantôme est introduit en $r = -\Delta r/2$. Les valeurs du potentiel scalaire au point fantôme sont données par la relation d'axisymétrie

$$\phi\left(r = -\Delta r/2\right) = \phi\left(r = \Delta r/2\right) \ . \tag{3.32}$$

Aux frontières du domaine et aux bords des lèvres de la buse, la sensibilité de la vitesse est supposée purement irrotationnelle et les valeurs du potentiel scalaire sont évaluées en utilisant l'équation

$$S_{\mathbf{u}} = \nabla\phi \ . \tag{3.33}$$

À partir des solutions de l'équation de Poisson (3.31), les composantes irrotationnelles de la sensibilité de la vitesse sont déterminées à l'aide de l'équation (3.30) en calculant le gradient du potentiel scalaire. Les composantes rotationnelles de la sensibilité de la vitesse sont ensuite estimées par la différence

$$S_{\mathbf{u}}^{\text{rot}} = S_{\mathbf{u}} - S_{\mathbf{u}}^{\text{iro}} \ . \tag{3.34}$$

La sensibilité de la vitesse radiale axisymétrique ainsi que ses composantes rotationnelles et irrotationnelles obtenues pour $t \simeq t_{\text{pulse}} + 2.5r_0/u_j$ sont représentées sur les figures 3.15(a,b,c). Pour la sensibilité de la vitesse totale, sur la figure 3.15(a), des fluctuations associées à des perturbations de nature aérodynamique et acoustique sont visibles. Cela n'est pas le cas pour les composantes rotationnelles, sur la figure 3.15(b), où les empreintes d'ondes de Kelvin-Helmholtz et de petites structures turbulentes sont observées. Ceci indique que la décomposition de Hodge-Helmholtz mise en œuvre permet d'isoler les fluctuations liées aux sensibilités d'origine aérodynamique. Pour les composantes irrotationnelles, sur la figure 3.15(c), des perturbations associées à des ondes acoustiques sont visibles à l'extérieur et à l'intérieur du jet. En outre, des fluctuations d'amplitude significative se développent dans les couches de mélange près de la buse. Leur longueur d'onde est très similaire à celle des ondes de Kelvin-Helmholtz. Ces fluctuations sont semblables à des perturbations entropiques observées par Unnikrishnan & Gaitonde [298] et Prasad *et al.* [229] dans des couches de cisaillement de jets libres et impactants à l'aide de la décomposition de Doak [80], qui permet de séparer un champ de vitesse en composantes hydrodynamiques, thermiques et acoustiques [72]. Il est donc très probable que ces fluctuations soient associées à des perturbations entropiques.

3.3.7 Visualisations du mécanisme de réceptivité

Pour visualiser le mécanisme de réceptivité à la buse, la partie axisymétrique de la sensibilité de la vitesse radiale et ses composantes rotationnelles et irrotationnelles sont représentées à quatre instants avant et après l'interaction de la perturbation acoustique avec les lèvres de la tuyère sur les figures 3.16(a-l). À $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.1r_0/u_j$, sur les figures de gauche, la perturbation

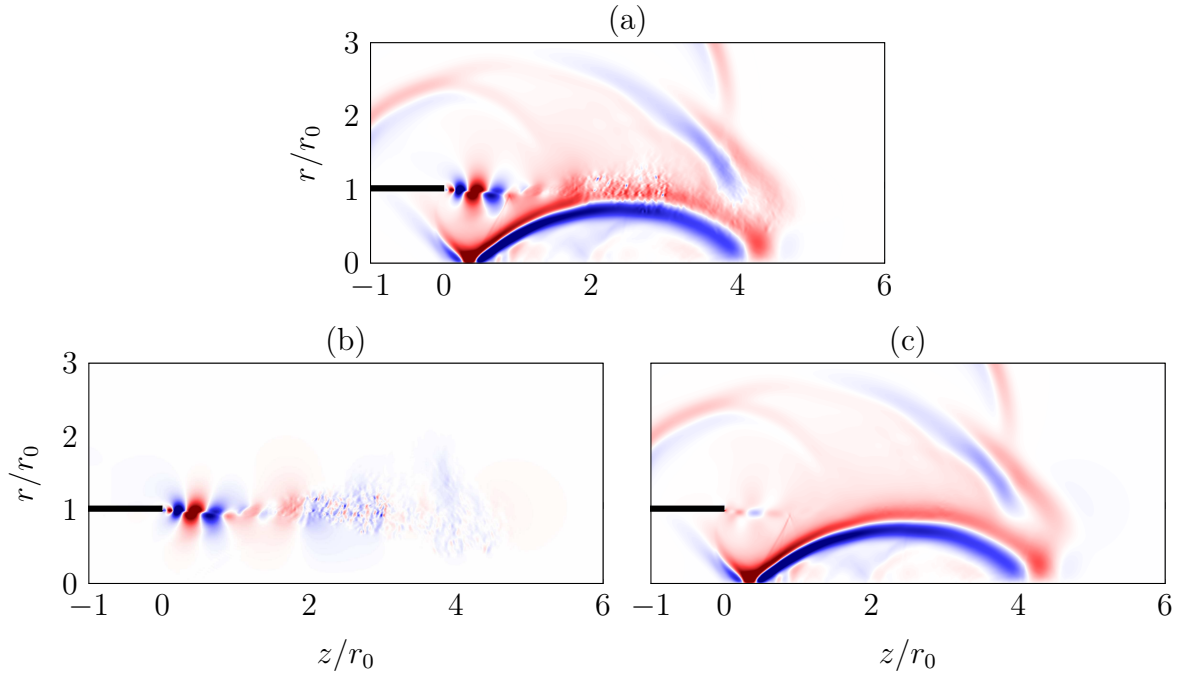

Figure 3.15 – Représentations de (a) la sensibilité de la vitesse radiale axisymétrique et de ses composantes (b) rotationnelles et (c) irrotationnelles pour $t \simeq t_{\text{pulse}} + 2.5r_0/u_j$. L'échelle de couleur varie entre $\pm 0.3u_j$, du bleu au rouge. Les lèvres de la tuyère sont en noir.

est proche des lèvres de la buse. Elle atteint ces dernières pour $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.4r_0/u_j$ sur les figures de la deuxième colonne. À cet instant, pour la composante rotationnelle de la sensibilité de la vitesse sur la figure 3.16(j), une perturbation d'amplitude significative est visible au niveau du coin inférieur des lèvres de la tuyère. Plus tard, pour $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.6r_0/u_j$ et $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.8r_0/u_j$ sur les figures 3.16(c,d) et 3.16(k,l), elle se propage dans la direction de l'écoulement. Elle présente des valeurs maximales au centre de la zone de cisaillement en $r = r_0$, en accord avec les fonctions propres des ondes de Kelvin-Helmholtz [278].

Comme mentionné, la perturbation est créée lorsque l'onde acoustique interagit avec les lèvres de la buse. Cela avait également été constaté pour des jets impactants supersoniques sous-détendus visualisés par Risborg & Soria [239] et Mitchell *et al.* [202] à l'aide de caméras haute vitesse, et étudiés par Karami & Soria [150] à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées autour des champs moyens.

Pour qu'une onde d'instabilité soit excitée par une perturbation acoustique, Tam [272, 273] a expliqué qu'il est nécessaire que la fréquence et le nombre d'onde axial de la perturbation correspondent à ceux de l'onde d'instabilité. Dans le présent cas, compte tenu du contenu fréquentiel large bande du pulse introduit, l'accord dans le domaine des fréquences est évident. Concernant les nombres d'onde axiaux, ceux de la perturbation acoustique incidente sont négatifs lorsque la perturbation se propage vers l'amont. Ils ne correspondent donc pas à ceux de l'onde d'instabilité convectée vers l'aval. Ceci permet d'expliquer l'absence d'ondes

d'instabilité avant l'arrivée de la perturbation acoustique au niveau des lèvres de la buse, pour $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.1r_0/u_j$ sur les figures 3.16(a,e,i) par exemple. Après l'interaction de la perturbation avec les lèvres de la buse, une onde réfléchie se propage vers l'aval. Ses nombres d'onde axiaux correspondent à ceux des ondes de Kelvin-Helmholtz. Il y a alors un accord entre des fréquences et des nombres d'onde axiaux, ce qui conduit au développement d'ondes d'instabilité.

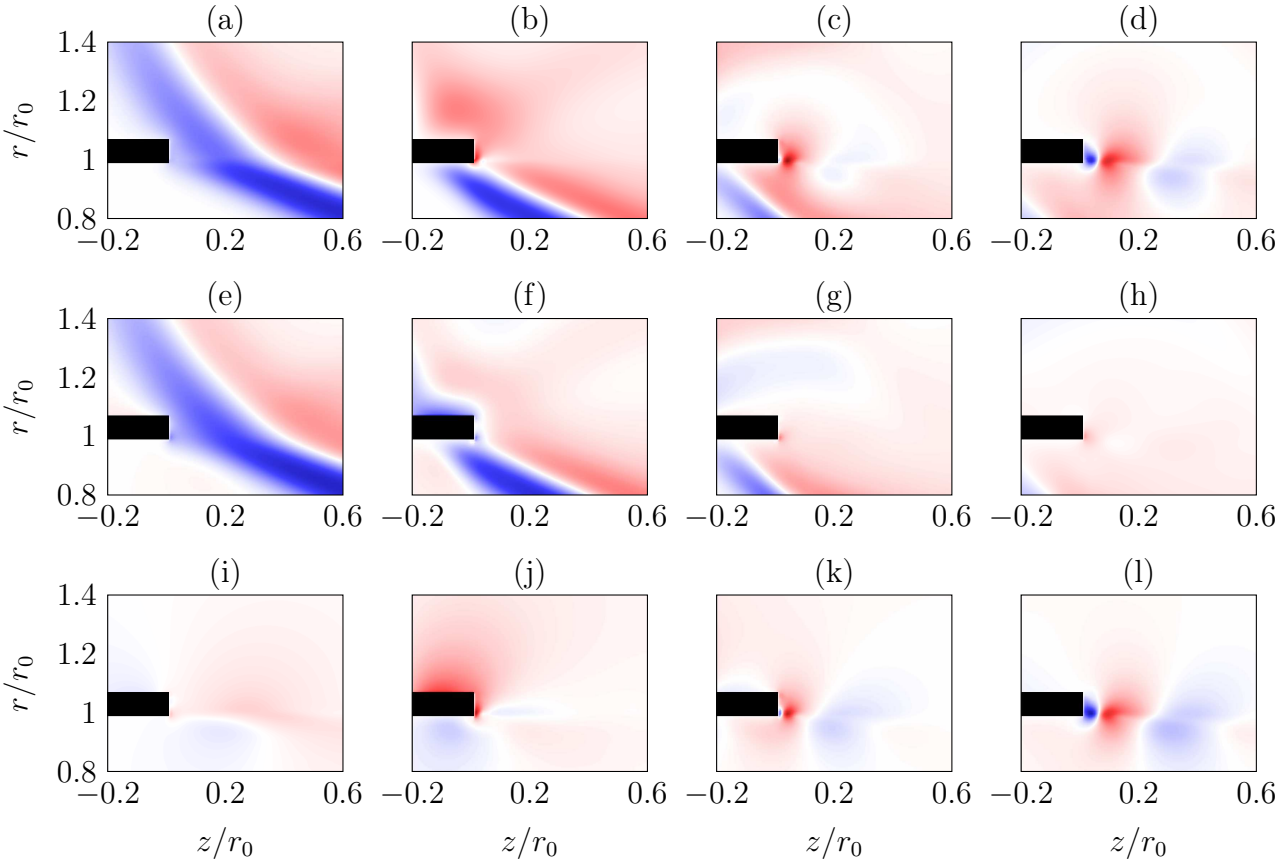

Figure 3.16 – Représentations de la sensibilité de la vitesse radiale axisymétrique (a-d) totale, (e-h) irrotationnelle et (i-l) rotationnelle pour (a,e,i) $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.1r_0/u_j$, (b,f,j) $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.4r_0/u_j$, (c,g,k) $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.6r_0/u_j$ et (d,h,l) $t \simeq t_{\text{pulse}} + 1.8r_0/u_j$. L'échelle de couleur varie entre $\pm 0.2u_j$, du bleu au rouge. Les lèvres de la tuyère sont en noir.

3.3.8 Conclusions

La méthode de la différentiation complexe a été appliquée à l'étude du mécanisme de réceptivité se produisant lorsqu'une onde acoustique se réfléchit sur les lèvres de la buse d'un jet. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de la littérature. Ils indiquent que la méthode de la différentiation complexe peut être employée pour caractériser la sensibilité d'un écoulement tridimensionnel à une perturbation.

Dans de futurs travaux, la procédure mise en œuvre pourra être utilisée pour déterminer

les effets de différents paramètres sur le mécanisme de réceptivité considéré, comme la demi-largeur du pulse, la position du pulse et également l'épaisseur des lèvres de la tuyère. De plus, il pourrait être intéressant de considérer une perturbation acoustique similaire à une onde guidée dans le jet [44, 70] afin d'étudier les mécanismes de réceptivité impliqués dans les boucles de rétroaction des jets libres et impactants produisant de fortes composantes de bruit tonales.

Chapitre 4

Étude des effets des conditions de sortie sur les composantes tonales produites par les jets impactants subsoniques

Dans ce chapitre, les effets des conditions de sortie sur les composantes de bruit tonales produites par les jets impactants subsoniques sont étudiés à l'aide de simulations des grandes échelles. L'influence de l'épaisseur de couche de limite en sortie de buse est analysée dans une première section. Celle du taux de turbulence en sortie de buse est examinée dans une deuxième section.

4.1 Influence de l'épaisseur de couche limite en sortie de buse

Dans cette première section, l'influence de l'épaisseur de couche limite en sortie de buse sur le rayonnement acoustique des jets impactants subsoniques est étudiée. Pour cela, des jets ronds initialement laminaires à des nombres de Mach de 0.6 ou 0.9 avec des épaisseurs de couche limite de Blasius de $0.05r_0$, $0.1r_0$ ou $0.2r_0$, où r_0 est le rayon des buses des jets, impactant une plaque située à une distance de $6r_0$ du plan de sortie des jets sont simulés.

Les résultats obtenus sont reportés dans l'article [313], soumis au *Journal of Fluid Mechanics*, en cours de révision. Ils indiquent que l'intensité des composantes de bruit tonales produites par les jets peut varier très fortement avec les conditions de sortie des jets. De plus, ils suggèrent que des jets subsoniques à basse vitesse ($\mathrm{M} \lesssim 0.65$) peuvent être résonants pour des conditions de sortie spécifiques. L'article [313] est inclus dans son intégralité dans les pages suivantes.

Under consideration for publication in J. Fluid Mech.

Banner appropriate to article type will appear here in typeset article

Influence of the boundary-layer thickness on the generation of tonal noise components by subsonic impinging jets

Hugo Vincent†, and Christophe Bogey

Univ Lyon, Ecole Centrale de Lyon, CNRS, Univ Claude Bernard Lyon 1, INSA Lyon, LMFA, UMR5509, 69130, Ecully, France

(Received xx; revised xx; accepted xx)

The influence of the boundary-layer (BL) thickness on the tonal noise generated by subsonic impinging jets is investigated. For that, initially laminar jets at Mach numbers of 0.6 and 0.9 with BL thicknesses of $0.05r_0$, $0.1r_0$ and $0.2r_0$, where r_0 is the pipe-nozzle radius, impinging on a plate at $6r_0$ from the nozzle, are simulated. For the Mach number of 0.9, tones due to feedback loops of axisymmetric nature between the nozzle and the plate are generated at frequencies which do not vary with the BL thickness. The two dominant tones are however 17 and 26 dB stronger for the thickest BL compared with the thinnest one. For the Mach number of 0.6, for the two thinnest BL no peaks appear, as observed in the experiments of the literature, but narrow peaks resulting from axisymmetric feedback loops emerge for the thickest BL. Therefore, low subsonic impinging jets can be resonant for specific nozzle-exit conditions. The increase in tone amplitude for the Mach number of 0.9 and the establishment of feedback loops for the Mach number of 0.6 with increasing BL thickness are found to result from two changes in the jet flow. The first change is that the shear-layer laminar-turbulent transition occurs farther downstream for a thicker BL, leading to a greater predominance of the axisymmetric aerodynamic fluctuations near the plate. The second change is that the amplification of the flow fluctuations between the nozzle and the plate at the tone frequencies is stronger for the thickest BL.

1. Introduction

Strong acoustic tones are generated when a high subsonic jet or a supersonic jet impinge on a plate (Neuwerth 1974; Ho & Nosseir 1981; Powell 1988; Jaunet *et al.* 2019). Numerous studies have shown that these tones are due to the establishment of aeroacoustic feedback loops between the jet nozzle and the plate. These feedback loops involve downstream- and upstream-propagating waves described in the recent review by Edgington-Mitchell (2019). The downstream part consists of large-scale coherent structures resulting from the amplification and saturation of Kelvin–Helmholtz instability waves in the jet mixing layers. As these large-scale structures interact with the plate or with a standoff shock that may form near the plate, they generate waves which propagate up to the jet nozzle and excite new instability waves in the near-nozzle mixing layers, thus completing the feedback loop. While the upstream part of the feedback loops was initially assumed to be free-stream sound

† Email address for correspondence: hugo.vincent@ec-lyon.fr

Abstract must not spill onto p.2

2

waves (Ho & Nosseir 1981; Powell 1988), Tam & Ahuja (1990) and, afterwards, many authors (Tam & Norum 1992; Panickar & Raman 2007; Gojon *et al.* 2016; Bogey & Gojon 2017; Jaunet *et al.* 2019; Varé & Bogey 2023*b*; Ferreira *et al.* 2023) showed that the feedback loops are closed, in most cases, by intrinsic modes of the jets, called guided jet modes in recent papers. These modes were first studied in detail by Tam & Hu (1989) using linear stability analyses and by modeling jets as vortex sheets of infinite length. As for duct modes, they are classified depending on their azimuthal and radial structures and satisfy specific dispersion relations (Towne *et al.* 2017; Bogey 2021). Some of the guided jet waves (GJW), called free-stream GJW (Towne *et al.* 2017; Bogey 2021, 2022*a*), propagate upstream at a velocity close to the speed of sound and have significant amplitudes outside the jet column. They are only allowed in narrow frequency bands, in which the tone frequencies obtained in the upstream direction of high subsonic free jets (Towne *et al.* 2017; Schmidt *et al.* 2017; Bogey 2021, 2022*b*; Zaman *et al.* 2022, 2023), in screeching jets (Shen & Tam 2002; Gojon *et al.* 2018; Edgington-Mitchell *et al.* 2018; Mancinelli *et al.* 2019; Edgington-Mitchell *et al.* 2022; Nogueira *et al.* 2022), in jets grazing a plate (Jordan *et al.* 2018; Tam & Chandramouli 2020) and in impinging jets (Tam & Norum 1992; Panickar & Raman 2007; Gojon *et al.* 2016; Bogey & Gojon 2017; Jaunet *et al.* 2019; Varé & Bogey 2023*b*; Ferreira *et al.* 2023) fall in most cases.

For impinging jets, the effects of the Mach number and of the nozzle-to-plate distance on the tone frequencies have been documented in several studies (Ho & Nosseir 1981; Powell 1988; Panickar & Raman 2007; Gojon *et al.* 2016; Jaunet *et al.* 2019; Varé & Bogey 2023*b*). For Mach numbers lower than 0.65, no tones have been measured (Marsh 1961; Preisser 1979; Neuwerth 1974), whereas tones usually emerge for higher Mach numbers (Jaunet *et al.* 2019; Varé & Bogey 2023*b*). For a given Mach number, the tone frequencies decrease as the nozzle-to-plate distance increases (Neuwerth 1974; Ho & Nosseir 1981; Powell 1988; Panickar & Raman 2007), but suddenly rises discontinuously for certain distances, exhibiting a mode staging phenomenon typical of those observed in resonant flows. For a given nozzle-to-plate distance, the tone frequencies overall decrease as the Mach number increases and mode staging phenomena also occur (Jaunet *et al.* 2019; Varé & Bogey 2023*b*). For Mach numbers between 0.7 and 0.95, Tam & Ahuja (1990) showed that the average tone frequency, determined by averaging the tone frequencies obtained for different nozzle-to-plate distances, agree with to the lowest frequency of the least-dispersed GJW. However, for Mach numbers lower than 0.65, the lowest Strouhal number of the least-dispersed GJW is higher than $\mathrm{St} = fD/u_j = 0.85$ (Bogey 2021), where f is the frequency, D is the nozzle diameter and u_j is the jet velocity. Therefore, it is unlikely to fall within the Strouhal number range of the instability waves significantly amplified between the nozzle and the plate, typically of $0.3 \lesssim \mathrm{St} \lesssim 0.7$ for jets with turbulent exit boundary layers (Tam & Ahuja 1990; Varé & Bogey 2023*b*), which may explain the absence of tones for Mach numbers lower than 0.65 (Tam & Ahuja 1990).

In the different experiments of the literature on impinging jets, the tone frequencies for a given nozzle-to-plate distance differ in some cases. For example, for jets at a Mach number of 0.8 impinging on a plate located at four nozzle diameters from the nozzle, Jaunet *et al.* (2019) reported a tone at a Strouhal number of $\mathrm{St} = 0.34$ while Panickar & Raman (2007) measured a tone at $\mathrm{St} = 0.52$. Discrepancies can also be observed between the tone frequencies obtained in high-fidelity numerical simulations and in experiments. This is the case, for instance, between the tone frequencies in the numerical study of Varé & Bogey (2023*b*) and those measured by Jaunet *et al.* (2019) for jets at Mach numbers lower than 0.9. The discrepancies are often attributed to differences in the nozzle-exit conditions, boundary-layer thickness and initial turbulence levels, which are not always known in the experiments. Indeed, the influence of the nozzle-exit conditions on the flow and noise of

free jets has been shown to be significant in numerous studies (Zaman 1985*a*; Bridges & Hussain 1987; Viswanathan & Clark 2004; Kim & Choi 2009; Bogey & Bailly 2010; Bogey *et al.* 2012; Zaman 2012; Bogey & Marsden 2013; Fontaine *et al.* 2015; Brès *et al.* 2018; Bogey & Sabatini 2019). For laminar boundary layers, the mixing layers are characterized by the formation of vortices resulting from the growth of Kelvin–Helmholtz instability waves. As they are convected in the downstream direction, the vortices interact with each other and merge, generating pairing noise. For thicker boundary layers, the growth rates of the most amplified instability waves near the nozzle are lower, leading to a shear-layer rolling-up occurring later and to a thinner mixing layer approximately between one and four nozzle radii from the nozzle exit (Kim & Choi 2009; Bogey & Bailly 2010).

The effects of the nozzle-exit conditions can also be expected to be significant in impinging jets. Since the properties of the Kelvin–Helmholtz instability waves vary with the nozzle-exit conditions in free jets (Michalke 1984; Bogey & Bailly 2010; Bogey & Sabatini 2019; Morris 2010), the gain in amplitude of the instability waves between the nozzle and the plate, and consequently, the strength of the resonance phenomena should also vary. For thicker laminar boundary layers, in particular, the nozzle-to-plate gain in amplitude of the instability waves at high Strouhal numbers may be counter-intuitively stronger because of the slower mixing-layer development mentioned above. For Mach numbers lower than 0.65, this could enable the establishment of feedback loops at the Strouhal number of the least-dispersed GJW. Very recently, Varé & Bogey (2023*a*) examined the effects of the nozzle-exit fluctuation levels on the tones generated by impinging jets for Mach numbers between 0.6 and 1.3. Overall, they reported weaker tones and tone frequencies in better agreement with the experiments of the literature for initially laminar jets than for initially disturbed ones.

Given the above, the influence of the boundary-layer thickness on the noise generated by subsonic impinging round jets is investigated in the present study using large-eddy simulations (LES) and linear stability analyses (LSA). Three jets at a Mach number of 0.9 and three jets at a Mach number of 0.6, with boundary-layer thicknesses ranging from $0.05r_0$ to $0.2r_0$, where $r_0 = D/2$, are considered. All the jets impinge on a flat plate located at 6 nozzle radii from the nozzle-exit plane and have untripped boundary layers. For the jets at a Mach number of 0.9, tones are expected to emerge in the acoustic spectra. Therefore, the objective will be to examine the dependence of the tone frequencies and amplitudes on the boundary-layer thickness. For the jets at a Mach number of 0.6, no tones should emerge according to experiments. However, the objective will be to determine whether tones can be found as the boundary-layer thickness varies. For these purposes, the jet flow and sound fields obtained by LES will be analyzed and LSA will be conducted in order to explain the trends observed.

The paper is organized as follows. The parameters of the six jets, of the LES and of the LSA are documented in section 2. Results including nozzle-exit velocity profiles, near-nozzle acoustic spectra, velocity spectra and frequency-wavenumber spectra computed in the jet shear layers are reported in section 3 for the jets at a Mach number of 0.9 and in section 4 for those at a Mach number of 0.6. Concluding remarks are provided in section 5. Results of the LSA including the growth rates of the Kelvin–Helmholtz instability waves and the nozzle-to-plate gains in amplitude of the waves are reported in appendix A. A frequency-wavenumber filtering procedure used to isolate the aerodynamic fluctuations and estimate their gains in amplitude is described in appendix B.

M	δ_{BL}	$\delta_\theta(z=0)$
0.6	$0.05r_0$	$0.006r_0$
0.6	$0.1r_0$	$0.012r_0$
0.6	$0.2r_0$	$0.024r_0$
0.9	$0.05r_0$	$0.006r_0$
0.9	$0.1r_0$	$0.012r_0$
0.9	$0.2r_0$	$0.023r_0$

Table 1: Jet parameters: Mach number $M = u_j/c_0$, boundary-layer thickness δ_{BL} and shear-layer momentum thickness at the nozzle-exit $\delta_\theta(z=0)$.

2. Parameters and methods

2.1. *Jet parameters*

Six isothermal jets, three at a Mach number of $M = u_j/c_0 = 0.6$, where c_0 is the ambient speed of sound, and three at $M = 0.9$, are considered. For all jets, the Reynolds number is equal to $Re = u_j D/\nu = 10^5$, where ν is the kinematic viscosity. At $z = 0$, the jets exhaust from a straight round pipe into the ambient medium at pressure $p_0 = 10^5$ Pa and temperature $T_0 = 293$ K. They impinge on a flat plate located at a distance $L = 6r_0$ from the nozzle-exit plane. The pipe inlet is at $z = -10r_0$, but the flow is computed in the pipe only for $z \geqslant -2r_0$. At the effective pipe inlet, at $z = -2r_0$, the radial and azimuthal velocities are set to zero, pressure is equal to p_0, temperature is obtained by a Crocco-Busemann relation and Blasius laminar boundary-layer profiles (Bogey & Bailly 2010; Bogey & Sabatini 2019) of thicknesses $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $0.1r_0$ or $0.2r_0$ are imposed for the axial velocity. No boundary-layer tripping is used in the pipe nozzle. The nozzle-exit conditions are detailed in sections 3.1 and 4.1 for the jets at $M = 0.9$ and $M = 0.6$. In all cases, at the nozzle-exit, the mean velocity profile is similar to the Blasius profile imposed at the effective pipe inlet. The shear-layer momentum thicknesses are reported in Table 1. They are approximately equal to $0.006r_0$ for $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $0.012r_0$ for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $0.024r_0$ for $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

2.2. *Large-eddy simulations*

2.2.1. *Numerical methods*

The LES are carried out using the same framework as in previous jet simulations (Bogey 2021; Varé & Bogey 2022; Bogey 2022*a*). They are performed by solving the unsteady compressible Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates (r, θ, z) using low-dispersion and low-dissipation explicit schemes. Fourth-order eleven-point centered finite differences are implemented for spatial discretization and a second-order six-stage Runge-Kutta algorithm is used for time integration (Bogey & Bailly 2004). A sixth-order eleven-point centered filter (Bogey *et al.* 2009) is applied explicitly to the flow variables at the end of each time step to remove grid-to-grid oscillations without affecting the wavenumbers accurately resolved, and also to dissipate the kinetic turbulent energy near the grid cut-off frequency (Bogey & Bailly 2006; Fauconnier *et al.* 2013; Kremer & Bogey 2015). The singularity at $r = 0$ is treated using extra mesh points by applying the method of Mohseni & Colonius (2000). To increase the time step, the derivatives in the azimuthal direction are computed at coarser resolutions than permitted by the grid (Bogey *et al.* 2011). Near the plate, for $z > 3r_0$, to avoid the presence of Gibbs oscillations near the possible shocks, a shock-capturing filtering procedure based on a shock detector and a second-order filter is applied to the flow fluctuations (Bogey *et al.* 2009). Non-centered finite differences and filters are used near the pipe walls and the grid boundaries (Berland *et al.* 2007). The radiation conditions

Focus on Fluids articles must not exceed this page length

of Tam & Dong (1996) are applied at the boundaries to avoid significant reflections. A sponge zone combining mesh stretching, Laplacian filtering and a procedure to keep the mean values of density and pressure around their ambient values is also implemented at the boundaries (Bogey & Bailly 2002). No-slip and adiabatic wall boundary conditions are imposed to the plate and to the pipe walls.

2.2.2. *Computational parameters*

The jets are simulated using the same grid, containing $N_r = 559$ points in the radial direction, $N_\theta = 256$ points in the azimuthal direction and $N_z = 1122$ points in the axial direction, yielding a total number of 160 million points. It extends radially out to $r = 15r_0$, and axially from $z = -10r_0$ down to the plate, at $z = 6r_0$, excluding the sponge-zone regions between $z = -20r_0$ and $z = -10r_0$, and between $r = 15r_0$ and $r = 30r_0$. In the radial direction, 96 points are used between $r = 0$ and $r = r_0$. The mesh spacing Δr is minimum at $r = r_0$, where it is equal to $\Delta r_{\min} = 0.0036r_0$. It increases up to $r = 6.2r_0$ where $\Delta r = 0.075r_0$, then is constant up to $r = 15r_0$. The latter mesh spacing leads to a Strouhal number of St = 8.9 for M = 0.6 and of St = 5.9 for M = 0.9 for an acoustic wave discretized by five points per wavelength. In the axial direction, the mesh spacing Δz is minimum and equal to $\Delta z_{\min} = 0.0072r_0$ at the nozzle exit. It increases down to $z = 2r_0$, where $\Delta z = 0.12r_0$, then is constant down to $z = 4r_0$, and finally decreases and reaches $\Delta z_{\min}$ again at the plate. The time step is given by $\Delta t = 0.7\Delta r_{\min}/c_0$ ensuring numerical stability in all cases. During the simulations, after a transient period of $500r_0/u_j$, the signals of density, velocity and pressure have been recorded at several locations during a period of $2\,100r_0/u_j$ for the jets at M = 0.6 and of $2\,400r_0/u_j$ for the jets at M = 0.9. In particular, the signals have been stored on the nozzle-exit plane and the cylindrical surface at $r = r_0$ at a sampling Strouhal number of 12.8, and on the azimuthal planes $\theta = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ and $3\pi/4$ at half the above Strouhal number. The Fourier coefficients of the first five azimuthal modes $n_\theta = 0-4$, where n_θ is the azimuthal wavenumber, of the flow variables have also been stored at a sampling Strouhal number of 6.4. At the beginning of the simulations, for $t < 25r_0/u_j$, pressure fluctuations of maximum amplitude 200 Pa are introduced randomly between $z = 0.25r_0$ and $z = 5r_0$ to speed up the initial development of the mixing layers.

2.3. *Linear stability analysis*

An inviscid LSA is carried out to estimate the growth rate of the Kelvin–Helmholtz instability waves in the jet shear layers. It is performed using the mean flow fields obtained from the LES (Bogey & Sabatini 2019). For this purpose, the mean flow fields are first interpolated on a uniform grid which extends radially out to $r = 3r_0$ and axially from the nozzle-exit down to the plate, with mesh spacings $\Delta r = 0.00005r_0$ and $\Delta z = 0.05r_0$. The compressible Rayleigh equation is then solved for the axisymmetric mode using a shooting technique (Morris 2010) for all axial positions. Downstream $z = 3r_0$, for a few positions, the linear stability analysis procedure does not provide converged results. Therefore, for $z > 3r_0$, the growth rates are approximated from the growth rates obtained at $z = 3r_0$ assuming that they scale with the momentum thickness. Moreover, the results obtained by Tam & Morris (1980) indicate that the growth rates decrease almost linearly with the Strouhal number above the frequency of the neutral instability waves. In the present work, the growth rates of the evanescent instability waves are thus approximated from the growth rates of the amplified instability waves using linear extrapolations.

The instability growth rates obtained very near the nozzle exit at $z = 0.1r_0$ for the six jets for the axisymmetric mode are plotted as a function of the Strouhal number in figure 1. As the boundary-layer thickness increases, the unstable frequency range, the frequency of the most amplified instability wave and the peak growth rate are reduced (Michalke 1984; Morris

6

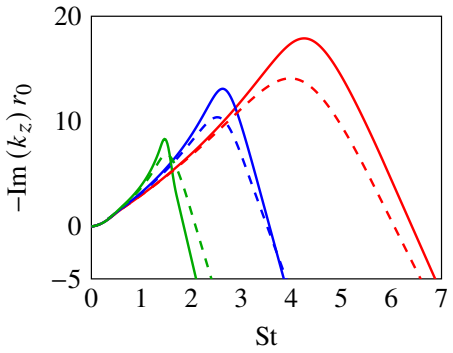

Figure 1: Instability growth rates at $z = 0.1r_0$ computed using LSA for $n_\theta = 0$ for the jets at M = 0.6 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$, and at M = 0.9 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

2010). The unstable frequency ranges and the most unstable frequencies are very similar for M = 0.6 and M = 0.9. However, the peak growth rates are about 20% lower for M = 0.9 than for M = 0.6 due to compressibility effects (Day *et al.* 1998). The growth rates obtained further downstream between $z = 0.1r_0$ and $z = 5r_0$ are reported in appendix A.

3. Results for a Mach number of 0.9

3.1. *Nozzle-exit conditions*

The nozzle-exit profiles of the mean axial velocity and of the root-mean-square (RMS) axial velocity fluctuations are plotted for the three jets at M = 0.9 in figure 2. In all cases, the mean velocity profiles are similar to those imposed at the effective pipe inlet at $z = -2r_0$. The RMS profiles exhibit two local maximum values, one on the jet axis and another near the pipe walls. The second one can be attributed to velocity fluctuations in the boundary layers. To determine the origin of the first one, GJW eigenfunctions predicted for the axisymmetric mode using a vortex-sheet model and normalized by the RMS values at $r = 0$ are plotted. More precisely, they correspond to those obtained for the duct-like GJW with zero group velocity for the first radial mode $n_r = 1$ (Tam & Hu 1989; Bogey 2021). Between $r = 0$ and $r = r_0 - \delta_{BL}$, the RMS velocity profiles are very similar to the GJW eigenfunctions, indicating that the fluctuations in the jet core are due to GJW. On the jet axis, the RMS values are equal to 1.8% of the jet velocity for $\delta_{BL} = 0.05r_0$, 4.4% for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and 10% for $\delta_{BL} = 0.2r_0$. Near the pipe walls, they are equal to 1%, 4% and 8%, respectively. Therefore, for the present jets, high-amplitude GJW propagate upstream and excite the boundary layers, leading to disturbed exit conditions.

Snapshots of vorticity norm and pressure fluctuations are presented for the three jets in figure 3. In the vorticity fields, due to the laminar nozzle-exit conditions, shear-layer rolling-ups and vortex pairings are observed in all cases. For a thicker boundary layer, as expected given the variations of the growth rates of the instability waves near the nozzle with the boundary-layer thickness in figure 1, they occur later, leading to the generation of three-dimensional fine-scale turbulence farther downstream. In particular, for $\delta_{BL} = 0.2r_0$ in figure 3(c), the mixing layers still contain large-scale axisymmetric vortical structures very near the plate.

In the pressure fields, the levels increase significantly for a thicker boundary layer. For $\delta_{BL} = 0.05r_0$ in figure 3(a), no clear organization appears and both low- and high-frequency waves are seen. By contrast, for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$ in figures 3(b,c), high-amplitude low-frequency spherical waves originating from the jet impingement region

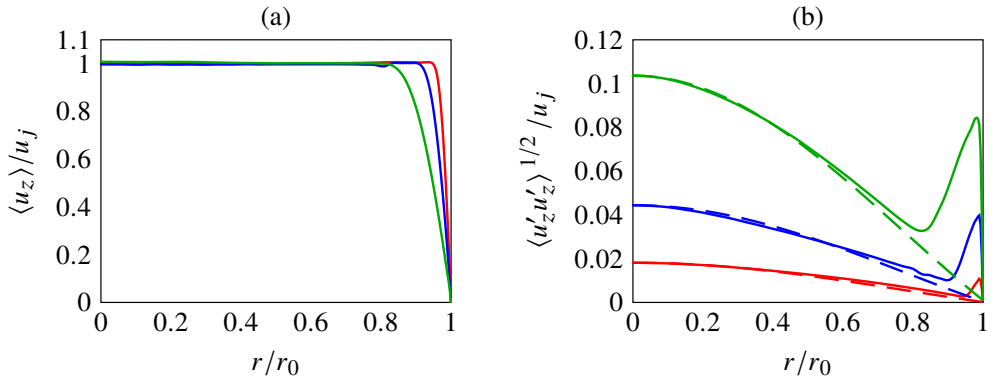

Figure 2: Nozzle-exit profiles of (a) mean axial velocity and (b) root-mean-square (RMS) axial velocity fluctuations for the jets at M = 0.9 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$; (dashed lines) normalized eigenfunctions of the duct-like GJW with zero group velocity (Tam & Hu 1989; Bogey 2021) for $n_\theta = 0$ and $n_r = 1$.

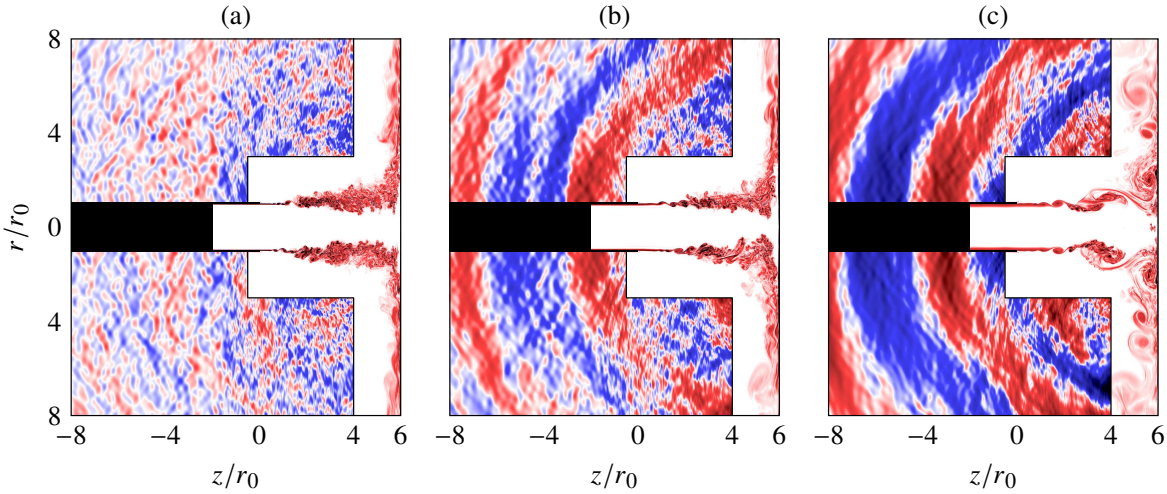

Figure 3: Snapshots in the (z, r) plane of vorticity norm in the flow and of pressure fluctuations outside for the jets at M = 0.9 with (a) $\delta_{BL} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{BL} = 0.2r_0$. The color scales range from 0 to $20u_j/r_0$ for vorticity, from white to red, and between $\pm 0.02p_0$ for pressure, from blue to red. The nozzle lips and the non-computed region in the pipe for $z < 2r_0$ are in black.

on the plate predominate. They are characterized by regularly-spaced wavefronts symmetrical with respect to the jet axis, indicating that the jets produce a tonal axisymmetric noise.

The variations of the shear-layer momentum thickness and of the RMS axial velocity fluctuations at $r = r_0$ for the three cases are plotted in figure 4. In the very near-nozzle region, between $z = 0$ and $z = r_0$, the shear layers spread more rapidly for a thinner exit boundary layer in figure 4(a). However, farther downstream, they develop at comparable rates, which results in similar shear-layer momentum thicknesses between $z = r_0$ and $z = 4r_0$ for the three jets. This was not the case in a previous study (Bogey & Bailly 2010) for free jets at M = 0.9, for which thinner mixing layers were obtained at these axial positions for a thicker boundary layer. Therefore, the development of the present jets appears to be significantly influenced by the flat plate and by the high-amplitude upstream-propagating waves. Near the plate, the momentum thicknesses are very large due to the presence of the wall jets.

In all cases, in figure 4(b), the RMS velocity fluctuations first increase strongly due to the amplification of the shear-layer instability waves, reach maximum values between 22% and

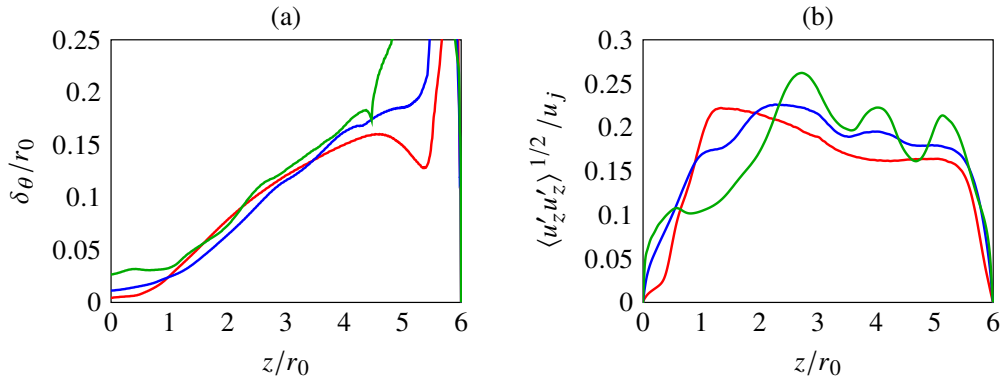

Figure 4: Variations of (a) shear-layer momentum thickness and (b) RMS axial velocity fluctuations at $r = r_0$ for the jets at M = 0.9 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

26% of the jet velocity and then decrease down to the plate. For $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$, oscillations are observed between $z = 3r_0$ and $z = 6r_0$. They may be due to constructive and destructive interferences between upstream- and downstream-propagating waves (Panda 1999; Gojon *et al.* 2016).

3.2. *Near-nozzle pressure spectra*

The pressure spectra computed at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ are plotted as a function of the Strouhal number in figure 5. The broadband noise levels are higher for a thicker boundary layer, increasing approximately by 10 dB between $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$. As expected, tones emerge, at frequencies which are very similar for the three boundary-layer thicknesses. The strongest ones appear at Strouhal numbers St $\simeq$ 0.32, 0.41, 0.68 and 0.82. In all cases, the dominant tone is found at St $\simeq$ 0.41, as in the numerical study by Varé & Bogey (2022) and the experiments by Panickar & Raman (2007) for jets at M = 0.9 impinging a plate located at the same nozzle-to-plate distance as the present jets. The tone amplitudes are stronger for a thicker boundary layer. In particular, the amplitude of the dominant tone increases by 19 dB between $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.1r_0$, and by 7 dB between $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$. The dominant tone thus emerges by more than 20 dB with respect to the broadband noise levels in the two latter cases, indicating that the jets are highly resonant. The amplitude of the tone at St $\simeq$ 0.32 increases by 4 dB between $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.1r_0$, and by 13 dB between $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$. Therefore, this tone emerges strongly for the jet with $\delta_{BL} = 0.2r_0$, but more weakly for the two other ones. Finally, the tone at St $\simeq$ 0.68 is the second strongest one for the jet with the thinnest boundary layers, but not for the two others.

The Strouhal numbers of the two dominant tones, i.e. St $\simeq$ 0.32 and 0.41, are consistent with the resonant Strouhal numbers obtained by the aeroacoustic feedback model (Ho & Nosseir 1981; Powell 1988)

$$\mathrm{St} = N \frac{D/L}{\left(u_j/u_c + u_j/c_0\right)}, \tag{3.1}$$

which are equal to St $\simeq$ 0.35 and 0.46 for feedback loops of order $N = 3$ and 4, considering vortical structures convected at a velocity $u_c = 0.5u_j$. Thus, the two strongest tones appear to be the result of feedback loops of two different orders establishing between the nozzle and the plate.

The contributions of the first four azimuthal modes $n_\theta = 0 - 3$ to the near-nozzle pressure spectra of the three jets are represented in figures 6(a-c). In all cases, these azimuthal modes significantly contribute to the full spectra. The dominant modes are the mode $n_\theta = 0$ for St $\leqslant$ 0.41 and the mode $n_\theta = 1$ for 0.41 $<$ St $\leqslant$ 0.7. Thus, the two strong tones

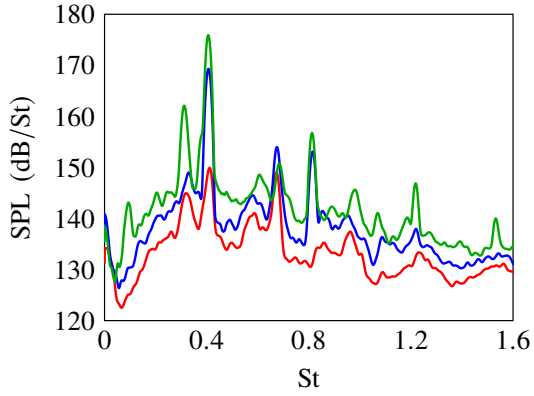

Figure 5: Sound pressure levels at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ for the jets at M = 0.9 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

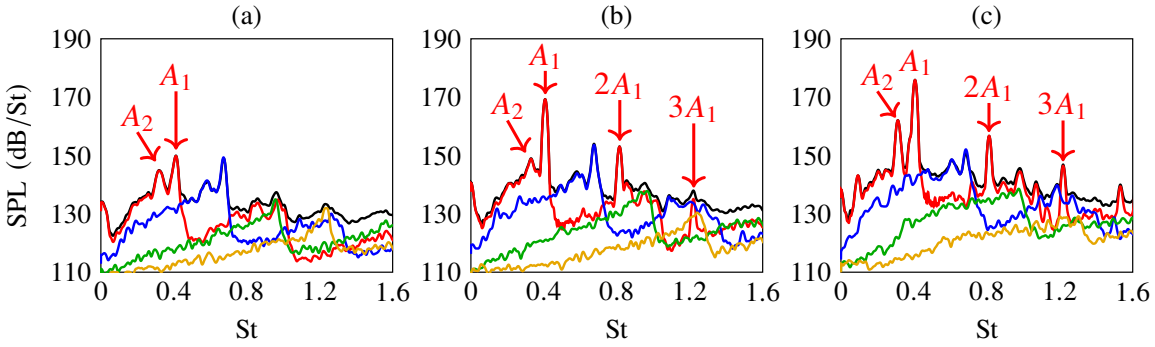

Figure 6: Sound pressure levels at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ for the jets at M = 0.9 with (a) $\delta_{BL} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{BL} = 0.2r_0$, for the full spectra, $n_\theta = 0$, $n_\theta = 1$, $n_\theta = 2$ and $n_\theta = 3$.

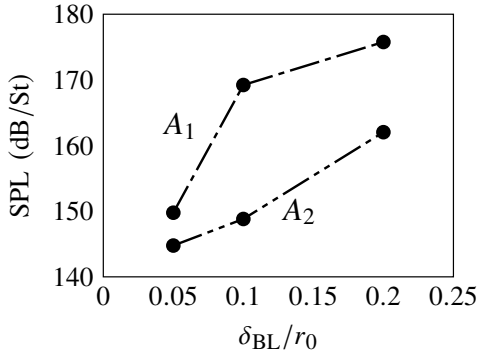

Figure 7: Sound pressure levels at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ of the tones A_1 and A_2 as a function of the boundary-layer thickness for the jets at M = 0.9.

at St $\simeq$ 0.32 and 0.41, referred to as A_2 and A_1 tones in the following, are associated with the mode $n_\theta = 0$ and the tone at St $\simeq$ 0.68 is linked to the mode $n_\theta = 1$. The first two harmonics $2A_1$ and $3A_1$ of the strongest tone are also observed for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$ in figures 6(b,c) for $n_\theta = 0$.

The sound pressure levels of the tones A_1 and A_2 are represented as a function of the boundary-layer thickness in figure 7. For the strongest tone A_1, the levels are 26 dB higher for $\delta_{BL} = 0.2r_0$ than for $\delta_{BL} = 0.05r_0$, while for the tone A_2, they increase by 17 dB between $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

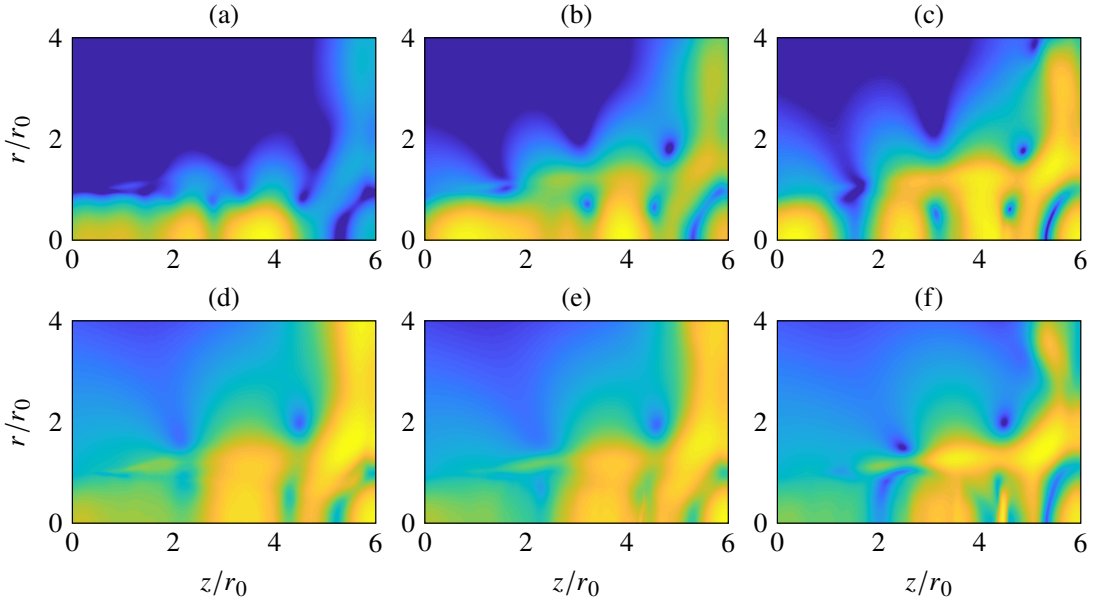

Figure 8: Sound pressure levels at the frequencies of the peaks (a-c) A_1 and (d-f) A_2 for the jets at M = 0.9 with (a,d) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b,e) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c,f) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ for $n_\theta = 0$. The color scale ranges over 20 dB from blue to yellow with maximum values in yellow.

3.3. *Feedback loop properties*

At the frequencies of the two dominant tones A_1 and A_2, the upstream- and downstream-propagating waves involved in the feedback loops are expected to lead to constructive and destructive interferences at specific locations in the flow (Gojon *et al.* 2016; Bogey & Gojon 2017; Varé & Bogey 2022). To visualize such interferences, the pressure levels obtained at the two tone frequencies for the axisymmetric mode for the three jets are shown in figure 8. In all cases, high-energy spots regularly spaced in the axial direction are observed between the nozzle and the plate. They form standing-wave patterns similar to those found previously in screeching jets (Panda 1999; Gojon & Bogey 2017) and in resonant impinging jets (Gojon *et al.* 2016; Bogey & Gojon 2017; Varé & Bogey 2022). For all boundary-layer thicknesses, four and three spots are found between the nozzle and the plate for the tones A_1 and A_2. The number of spots thus agree with the orders obtained previously with the aeroacoustic feedback model (3.1), which was also the case in the numerical study by Gojon *et al.* (2016). In addition, for both tones, strong levels are obtained near the jet axis, where the amplitude of the GJW is maximum for $n_\theta = 0$ (Tam & Hu 1989). Therefore, the feedback loops are most likely closed by GJW, which is consistent with previous studies (Tam & Ahuja 1990; Tam & Norum 1992; Bogey & Gojon 2017; Ferreira *et al.* 2023).

To further characterize the resonances and the different waves propagating at the tone frequencies, the frequency-wavenumber spectra of the pressure fluctuations computed between the nozzle and the plate for the axisymmetric mode at $r = r_0$ for the three jets are represented in figure 9 as a function of the axial wavenumber k_z and the Strouhal number. The line corresponding to $\omega/k_z = 0.5u_j$ and the sonic line $\omega/k_z = -c_0$, where $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency, the dispersion curve of the first radial mode of the GJW for a vortex-sheet model (Tam & Hu 1989; Towne *et al.* 2017; Bogey 2021) and the Strouhal numbers of the tones A_1 and A_2 are also depicted. In all cases, high levels are observed for positive wavenumbers near the line $\omega/k_z = 0.5u_j$. They are associated with shear-layer turbulent structures convected in the downstream direction at a velocity close to half of the jet velocity. At the tone Strouhal numbers, the strongest levels appear near the line $\omega/k_z = 0.5u_j$

Rapids articles must not exceed this page length

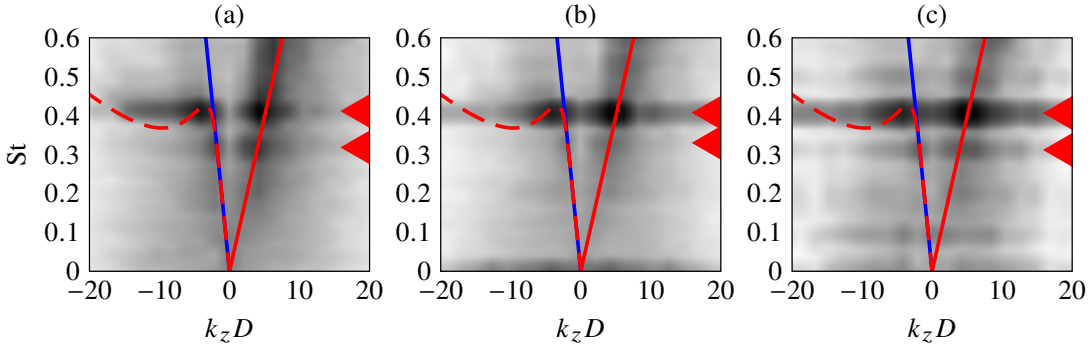

Figure 9: Frequency-wavenumber spectra of the pressure fluctuations computed at $r = r_0$ for the jets at M = 0.9 with (a) $\delta_{BL} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{BL} = 0.2r_0$, for $n_\theta = 0$; — — — dispersion curve of the first radial mode of the GJW for a vortex-sheet model; ——— $\omega/k_z = 0.5 \times u_j$ and ——— $\omega/k_z = -c_0$; ◀ tone frequencies. The color scale ranges logarithmically from the minimal to the maximal values from white to black.

mentioned above, but also close to the dispersion curve of the GJW near the sonic line for negative wavenumbers. Therefore, the two dominant tones are generated by feedback loops closed by upstream-propagating free-stream GJW (Towne *et al.* 2017; Bogey 2021).

The increase of the tone amplitudes for a thicker boundary layer is most probably related to a change in the gain parameters of the feedback loops. These parameters, introduced by Powell (1961) and described by Edgington-Mitchell (2019), are the gain in amplitude of the instability waves between the nozzle and the plate, the efficiency of the noise generation mechanisms at the plate, the efficiency of the transmission of the upstream-travelling waves from the plate to the nozzle and the efficiency of the receptivity process (Barone & Lele 2005; Karami *et al.* 2020) at the nozzle lip. Assuming that the receptivity process only depends on the nozzle geometry, that the noise generation mechanisms at the plate are the same for the three boundary-layer thicknesses and that the upstream-travelling waves are GJW propagating without significant amplitude variations (Tam & Hu 1989; Bogey 2021), the increase of the tone amplitudes for $n_\theta = 0$ as the jet boundary layer is thicker can be due to a greater gain in amplitude of the axisymmetric instability waves between the nozzle and the plate at the tone frequencies. This is discussed in what follows by examining the predominance of the axisymmetric flow fluctuations in the mixing layers and their nozzle-to-plate gains in amplitude.

3.4. *Predominance of the axisymmetric flow fluctuations in the mixing layers*

The strength and persistence of axisymmetric flow fluctuations in the jet mixing layers from the nozzle down to the plate are investigated. For that, the RMS values of the radial velocity fluctuations obtained at $r = r_0$ for the full signals, for $n_\theta = 0$, and for the axisymmetric velocity fluctuations of aerodynamic nature only are plotted for the three jets in figures 10(a-c). The fluctuations of aerodynamic nature are obtained by filtering out the upstream-propagating fluctuations and the downstream-propagating acoustic waves in the radial velocity signals using a frequency-wavenumber filtering as described in appendix B.

In all cases, in figure 10(a), the full velocity fluctuations increase rapidly, reach peak values approximately equal to 20% of the jet velocity at $z \simeq 1.5r_0$ for $\delta_{BL} = 0.05r_0$, at $z \simeq 2r_0$ for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and near the plate for $\delta_{BL} = 0.2r_0$ and then decrease down to the plate. Compared with the levels obtained from the full signals, those for the mode $n_\theta = 0$ in figure 10(b) are very similar for $\delta_{BL} = 0.2r_0$ but are lower for thinner boundary layers. This is notably true near the plate at $z = 5r_0$, where the levels are equal to 20% of the jet

12

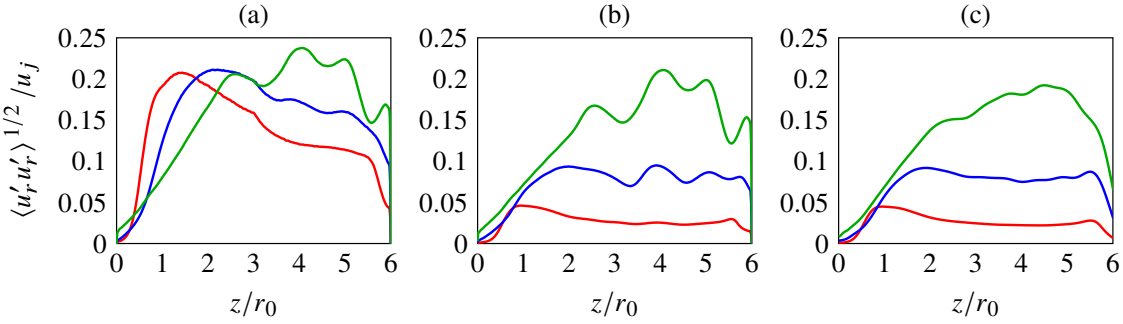

Figure 10: Variations of RMS radial velocity fluctuations obtained for (a) the full signals, (b) $n_\theta = 0$ and (c) the fluctuations of aerodynamic nature for $n_\theta = 0$, at $r = r_0$ for the jets at M = 0.9 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

velocity for $\delta_{BL} = 0.2r_0$, 9% for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and 2% only for $\delta_{BL} = 0.05r_0$. Therefore, for $\delta_{BL} = 0.2r_0$, axisymmetric structures strongly dominate in the mixing layers down to the flat plate. They still contain a significant amount of energy for $\delta_{BL} = 0.1r_0$, but are weak for $\delta_{BL} = 0.05r_0$. These results are consistent with the variations of the amplitudes of the tones for $n_\theta = 0$ in figure 7. Moreover, oscillations are observed for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$ in the RMS profiles. They can be attributed to interferences between upstream- and downstream-propagating waves. Finally, the RMS profiles of the aerodynamic velocity fluctuations for $n_\theta = 0$ in figure 10(c) are similar to those obtained without filtering in figure 10(b). Nevertheless, they do not contain oscillations since the upstream-propagating fluctuations have been filtered out. After the initial increase near the nozzle exit, the profiles exhibit a peak and then decrease. For a thicker boundary layer, the peak value is reached farther downstream and is higher, due to the slower shear-layer laminar-turbulent transition. Consequently, near the plate, the axisymmetric turbulent structures contain more energy, which most likely contributes to increase the amplitudes of the tones for $n_\theta = 0$.

3.5. *Amplification and gain in amplitude of the axisymmetric aerodynamic velocity fluctuations at the tone frequencies*

As was done by Varé & Bogey (2023*b*) for impinging jets at different Mach numbers, the gain in amplitude of the axisymmetric shear-layer instability waves between the nozzle and the plate was first estimated using LSA from the LES mean flow fields, as described in section 2.3. The gains obtained in this way for the present jets are reported in appendix A. At the tone frequencies, they are very similar for the three boundary-layer thicknesses. Given the limitations of the LSA, the gain in amplitude of the instability waves were then calculated directly from the velocity fluctuations of aerodynamic nature, and not from the LES mean fields.

The power spectral densities (PSD) of the aerodynamic velocity fluctuations obtained for $n_\theta = 0$ at $r = r_0$ are represented in the (z, St) plane in figure 11. The Strouhal numbers of the most amplified instability waves evaluated using LSA and of the dominant tones A_1 and A_2 are reported. For the jet with the thinnest boundary layers in figure 11(a), two high-energy spots are found near the nozzle, at $z \simeq r_0$ and $\mathrm{St} \simeq 4$, and at $z \simeq 1.5r_0$ and $\mathrm{St} \simeq 2$. Their frequencies are close to the near-nozzle most unstable frequency and its first subharmonic, indicating that the spots are related to the shear-layer rolling-ups and the vortex pairings. Stripes extending from the nozzle down to the plate are also seen at the tone Strouhal numbers. Their levels increase with the axial distance and are maximum near the plate. Similar results are obtained for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$. In these cases, however, the stripes at the tone Strouhal numbers emerge more strongly and additional ones appear at the harmonics of the tone frequencies. Therefore, for all boundary-layer thicknesses, axisymmetric aerodynamic

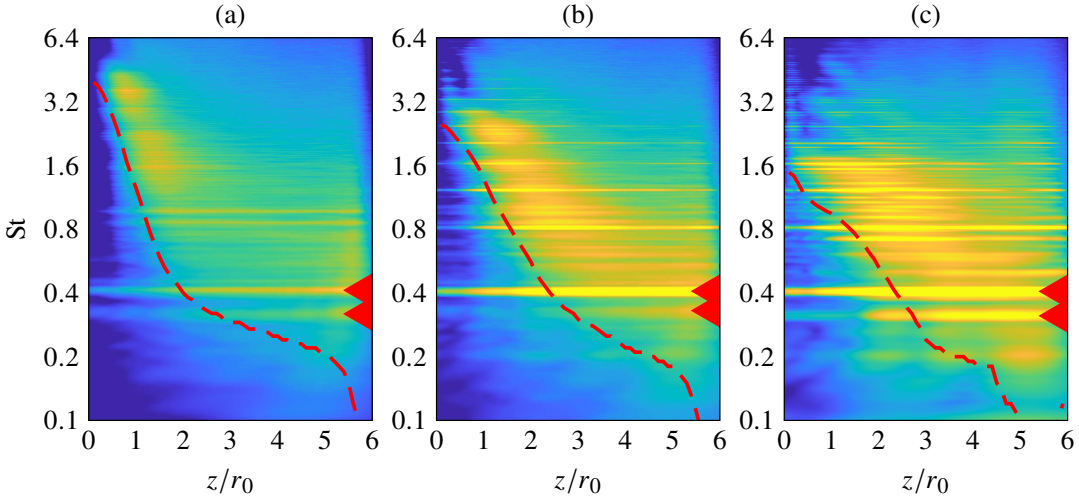

Figure 11: PSD of the radial velocity fluctuations of aerodynamic nature normalized by u_j, at $r = r_0$, for the jets at M = 0.9 with (a) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, for $n_\theta = 0$; ◀ Strouhal numbers of the tones A_1 and A_2; — — — most unstable Strouhal numbers for $n_\theta = 0$ according to LSA. The color scales range logarithmically from $(D/u_j) \times 10^{-6}$ to $(2D/u_j) \times 10^{-2}$, from blue to yellow.

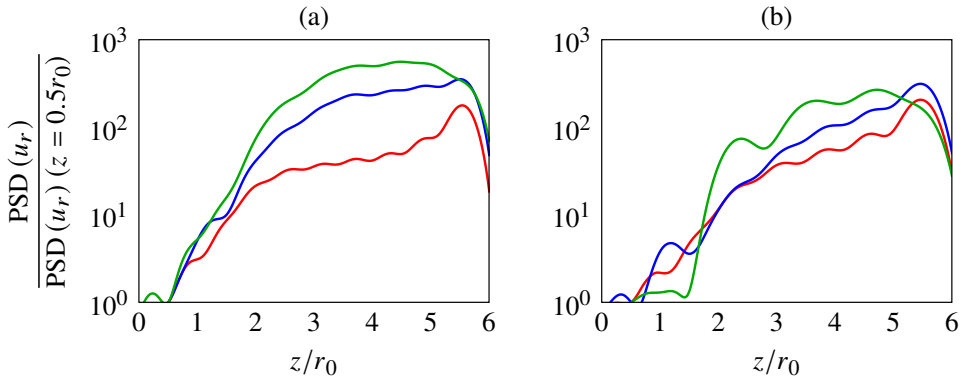

Figure 12: PSD of the axisymmetric velocity fluctuations of aerodynamic nature at $r = r_0$ normalized by the values of the PSD at $z = 0.5r_0$ at the frequencies of the tones (a) A_1 and (b) A_2 for the jets at M = 0.9 with — $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, — $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and — $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$.

fluctuations develop in the shear layers from the nozzle to the plate at the tone frequencies. Nevertheless, as previously pointed out, they contain much more energy as the nozzle-exit boundary layer is thicker.

Focusing on the amplification of the flow fluctuations at the tone frequencies, the PSD of the aerodynamic fluctuations obtained at $r = r_0$ for $n_\theta = 0$ at the frequencies of the tones A_1 and A_2 for the three jets, normalized by the values of the PSD at $z = 0.5r_0$, are plotted in figure 12 using a logarithmic scale. In all cases, the levels overall increase with the axial distance, except very near the plate. Between $z = 3r_0$ and $z = 5r_0$, they are significantly higher for a thicker boundary layer.

Finally, the nozzle-to-plate gains in amplitude of the flow velocity fluctuations at $r = r_0$ for $n_\theta = 0$ are estimated by computing the square root of the ratio between the PSD of the aerodynamic velocity fluctuations at $z = 4.5r_0$ and at $z = 0.5r_0$. The bounds are chosen arbitrarily, but similar results are obtained for other ones. The gains are provided for the three jets in appendix B in figure 26(b) for Strouhal numbers between 0.1 and 1.6. Those obtained at the Strouhal numbers of the tones A_1 and A_2 are plotted as a function of the

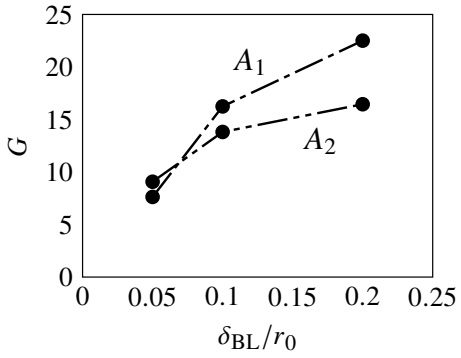

Figure 13: Gains in amplitude of the axisymmetric flow velocity fluctuations at $r = r_0$ between $z = 0.5r_0$ and $z = 4.5r_0$ at the frequencies of the tones A_1 and A_2 as a function of the boundary-layer thickness for the jets at M = 0.9.

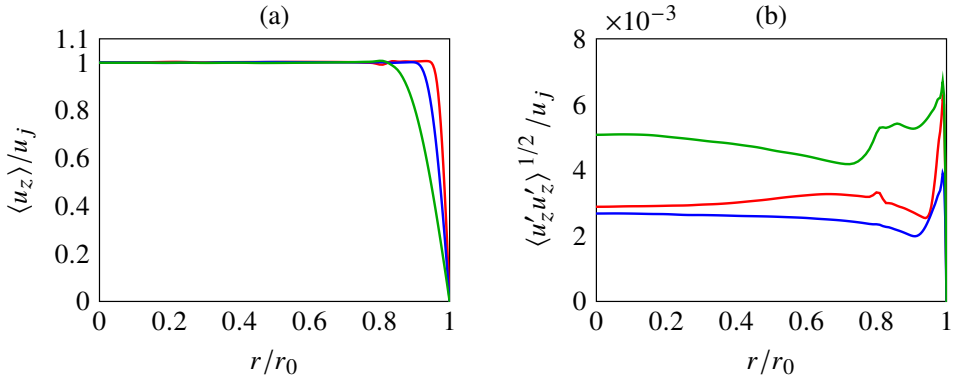

Figure 14: Nozzle-exit profiles of (a) mean and (b) RMS axial velocity for the jets at M = 0.6 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$

boundary-layer thickness in figure 13. For both tone frequencies, the gain is stronger for a thicker boundary layer. For the dominant tone A_1, the gains for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$ are approximately two and three times greater than that for $\delta_{BL} = 0.05r_0$. For the tone A_2, the gains for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$ are 1.5 and 1.8 times higher than that for $\delta_{BL} = 0.05r_0$. Thus, the aerodynamic fluctuations developing at the tone frequencies in the jet shear layers are more amplified between the nozzle and the plate for a thicker boundary layer. This can be one reason for the stronger tone amplitudes in this case.

4. Results for a Mach number of 0.6

4.1. *Nozzle-exit conditions*

The nozzle-exit profiles of the mean axial velocity and of the RMS values of the axial velocity fluctuations obtained for the three jets at M = 0.6 are plotted in figure 14. In all cases, the mean velocity profile is similar to the Blasius laminar boundary-layer profile imposed at the effective pipe inlet at $z = -2r_0$. The RMS velocity values between the jet axis and the pipe walls are low, ranging only between 0.2% and 0.7% of the jet velocity for the three boundary-layer thicknesses. This indicates that the nozzle-exit boundary layers are fully laminar (Zaman 1985*a*,*b*; Bogey & Bailly 2010). This result is different from that for the jets at M = 0.9 shown to be significantly excited by GJW in section 3.1.

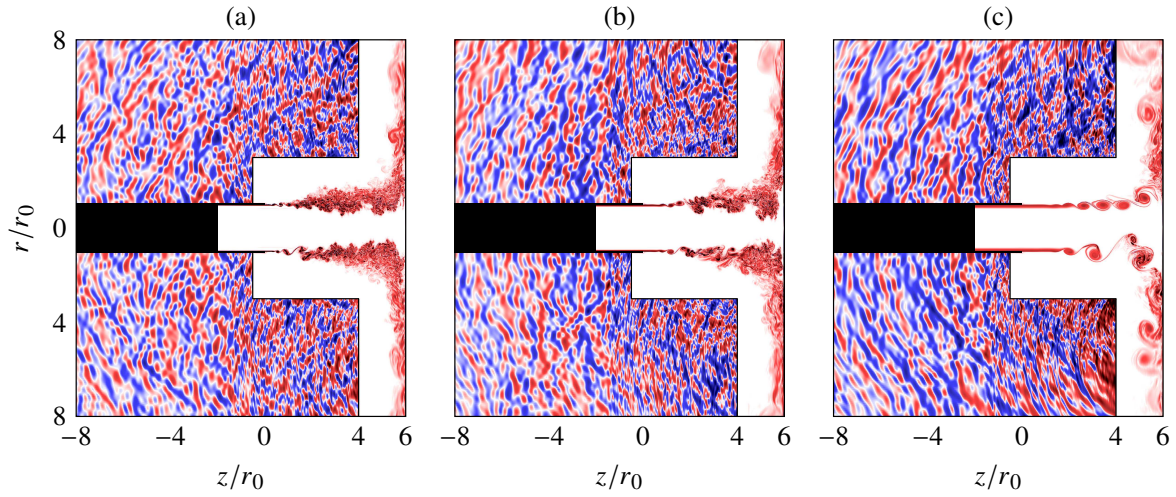

Figure 15: Snapshots in the (z, r) plane of vorticity norm in the flow and of pressure fluctuations outside for the jets at M = 0.6 with (a) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. The color scales range between $\pm 20 u_j/r_0$ for vorticity, from white to red, and $\pm 0.005 p_0$ for pressure, from blue to red. The nozzle lips and the non-computed region in the pipe for $z < 2r_0$ are in black.

4.2. *Flow field properties*

Snapshots of vorticity norm and pressure fluctuations obtained for the three jets are displayed in figure 15. In the vorticity fields, vortices appear in the jet shear layers, close to the nozzle, at $z \simeq 0.5r_0$ for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, at $z \simeq r_0$ for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$, and at $z \simeq 2r_0$ for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. Farther downstream, vortex pairings occur. For $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$ and $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$, they lead to the generation of fine-scale turbulent structures in the mixing layers. By contrast, for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, the pairings happen very near the plate, resulting in the impingement of only large-scale coherent structures. Regarding the pressure fields, they do not show a clear organization and exhibit high-frequency acoustic waves of similar amplitudes for the three jets.

The variations of the shear-layer momentum thickness and of the RMS axial velocity fluctuations at $r = r_0$ obtained for the full signals and for the axisymmetric fluctuations of aerodynamic nature are plotted in figure 16(a-c). As for the jets at M = 0.9, the aerodynamic fluctuations are estimated by filtering out the upstream-propagating disturbances and the downstream-propagating acoustic waves in the velocity signals using the frequency-wavenumber filtering described in appendix B. In figure 16(a), for a thinner boundary layer, the mixing layers develop more rapidly, leading to thicker shear layers between $z = r_0$ and $z = 4r_0$, as was observed for free jets at M = 0.9 (Bogey & Bailly 2010). In all cases, in figure 16(b), the RMS velocity values first increase sharply in the near-nozzle region, reach peak values approximately equal to 22% of the jet velocity and then decrease down to the plate. The peak values are obtained farther downstream for a thicker boundary layer, yielding higher levels near the plate. In figure 16(c), the variations of the levels of the axisymmetric aerodynamic fluctuations are similar to those of the full signals. However, the levels are lower than those of the full signals. Near the plate at $z = 5r_0$, in particular, they are equal to 12% of the jet velocity for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, 4% for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and 2% for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$. Therefore, much more energy is contained in the axisymmetric structures impinging on the plate for a thicker boundary layer.

4.3. *Near-nozzle pressure spectra*

The pressure spectra obtained at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ are represented as a function of the Strouhal number in figure 17. For all jets, a low-frequency broadband hump centered

16

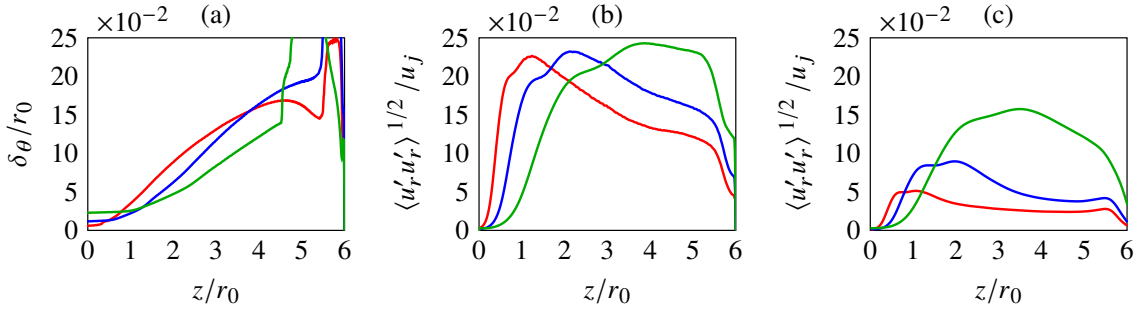

Figure 16: Variations of (a) shear-layer momentum thickness and RMS radial velocity fluctuations at $r = r_0$ obtained for (b) the full signals and (c) the fluctuations of aerodynamic nature for $n_\theta = 0$ for the jets at M = 0.6 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

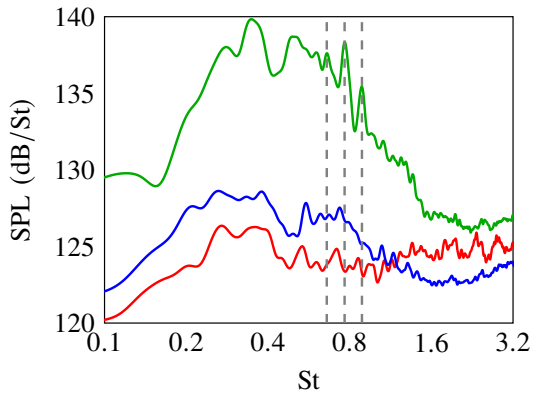

Figure 17: Sound pressure levels at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ for the jets at M = 0.6 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$; Strouhal numbers of the narrow peaks for $\delta_{BL} = 0.2r_0$.

around St ≃ 0.4 is found. Its amplitude is higher for a thicker boundary layer, and increases by approximately 2 dB between $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and by 12 dB between $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$. For $\delta_{BL} = 0.2r_0$, small narrow peaks are also visible at Strouhal numbers St ≃ 0.66, 0.77 and 0.89, depicted in figure 17. The strongest one, at St ≃ 0.77, emerges from the broadband hump levels only by 3 dB. Therefore, the jet with $\delta_{BL} = 0.2r_0$ may be weakly resonant. The Strouhal numbers of the three small peaks are consistent with the Strouhal numbers provided by the aeroacoustic feedback model (3.1), which are equal to St ≃ 0.64, 0.77 and 0.9 for $N = 6$, 7 and 8, considering vortical structures convected at a velocity $u_c = 0.5u_j$. This indicates that the three peaks are due to feedback loops of three different orders establishing between the nozzle and the plate.

The contributions of the first five azimuthal modes to the near-nozzle pressure spectra are represented in figure 18. For all boundary layer thicknesses, the low-frequency hump is associated with the axisymmetric mode. This is also the case for the narrow peaks observed for $\delta_{BL} = 0.2r_0$. For $\delta_{BL} = 0.05r_0$ in figure 18(a), the spectra also exhibit small peaks linked to the modes $n_\theta = 1$, 2, 3 and 4 for St ≃ 1.4, 2, 2.4 and 2.8, respectively. Their frequencies correspond with those of the peaks found in the near-nozzle pressure spectra of a free jet at M = 0.6 (Bogey 2021), which have been associated with the first least-dispersed GJW for $n_\theta = 1$, 2, 3 and 4. These peaks do not emerge significantly form the broadband levels.

4.4. *Velocity spectra*

The spectra of the radial velocity fluctuations of aerodynamic nature obtained for $n_\theta = 0$ in the jet mixing layers at $r = r_0$ are represented as a function of the axial position and Strouhal

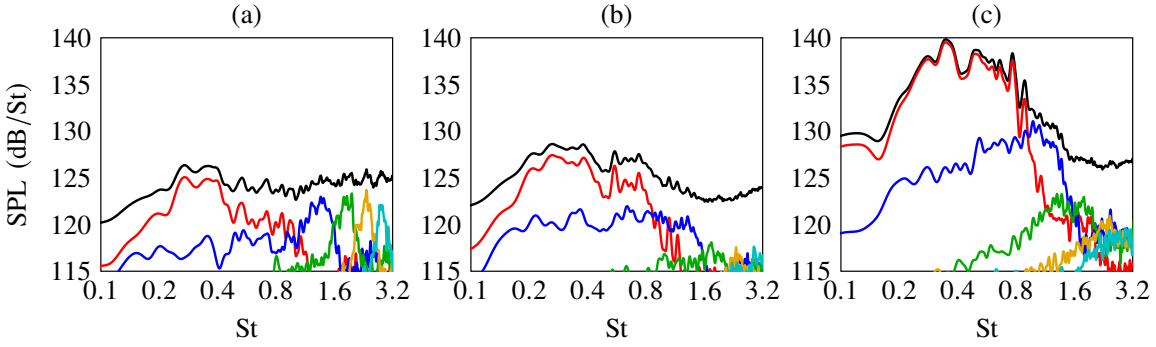

Figure 18: Sound pressure levels at $z = 0$ and $r = 1.5r_0$ for the jets at M = 0.6 with (a) $\delta_{BL} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{BL} = 0.2r_0$, for ——— the full spectra, ——— $n_\theta = 0$, ——— $n_\theta = 1$, ——— $n_\theta = 2$, ——— $n_\theta = 3$ and ——— $n_\theta = 4$.

number in figure 19. The frequencies of the most amplified instability waves obtained at $z = 0.1r_0$ for $n_\theta = 0$ using LSA, half of these frequencies, and the frequencies of the narrow peaks found in the near-nozzle spectra for $\delta_{BL} = 0.2r_0$ are also depicted. For all jets, the highest levels are found in two spots centered, for example for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ in figure 19(b), around $z \simeq 1.5r_0$ and St $\simeq 2.5$ and around $z \simeq 2.5r_0$ and St $\simeq 1.3$. The spot frequencies fairly agree with the most unstable frequencies and half these frequencies, indicating that the spots are associated with the shear-layer roll-ups and vortex pairings. As expected given the instability growth rates in figure 1, the spots are located farther downstream with increasing boundary-layer thickness. In particular, the second spot associated with the vortex pairings is observed at $z \simeq 1.5r_0$ for $\delta_{BL} = 0.05r_0$, at $z \simeq 2.5r_0$ for $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and at $z \simeq 4r_0$ for $\delta_{BL} = 0.2r_0$. For $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.1r_0$, downstream this spot, the spectra become broadband, which suggests that the axisymmetric vortices initially formed in the mixing layers break up generating small-scale turbulence downstream of the pairings. This is not the case for a thicker boundary layer for which the second spot is located near the plate at $z \simeq 4r_0$. For $\delta_{BL} = 0.2r_0$, the second spot contains stripes of significant amplitudes between $z = 1.5r_0$ and $z = 5.5r_0$. Their Strouhal numbers correspond to those of the narrow peaks observed in the near-nozzle pressure spectrum. Therefore, the stripes are most likely due to feedback loops.

4.5. *Feedback loop properties*

To provide further evidence that the jet with $\delta_{BL} = 0.2r_0$ is resonant, the sound pressure levels obtained for the three jets for $n_\theta = 0$ at St $\simeq 0.77$, i.e. the Strouhal number of the strongest narrow peak in the near-nozzle spectrum for $\delta_{BL} = 0.2r_0$, are shown in the (z, r) plane in figure 20. In all cases, the highest levels are located in the mixing layers and in the wall jets. For $\delta_{BL} = 0.05r_0$ and $\delta_{BL} = 0.1r_0$, the pressure fields do not clearly exhibit a specific organization. For $\delta_{BL} = 0.2r_0$, on the contrary, spots of high energy regularly spaced in the axial direction can be seen between the nozzle and the plate on both sides of the shear layers. They are similar to those observed for the jets at M = 0.9 in figure 8. Thus, for $\delta_{BL} = 0.2r_0$, interactions between upstream- and downstream propagating waves occur at the peak frequency, indicating that the peak results from a feedback loop establishing between the nozzle and the plate. Between $z = 0.8r_0$ and $z = 3.7r_0$, the number of spots is equal to 3 and, therefore, the wavelength of the standing wave formed by the spots is $\lambda_{sw} \simeq 0.97r_0$. It is consistent with the theoretical wavelength (Panda 1999; Bogey 2022*a*)

$$\lambda_{sw} = \frac{D}{\mathrm{St}\left(u_j/u_c + u_j/c_0\right)} = 0.9r_0 \,, \tag{4.1}$$

18

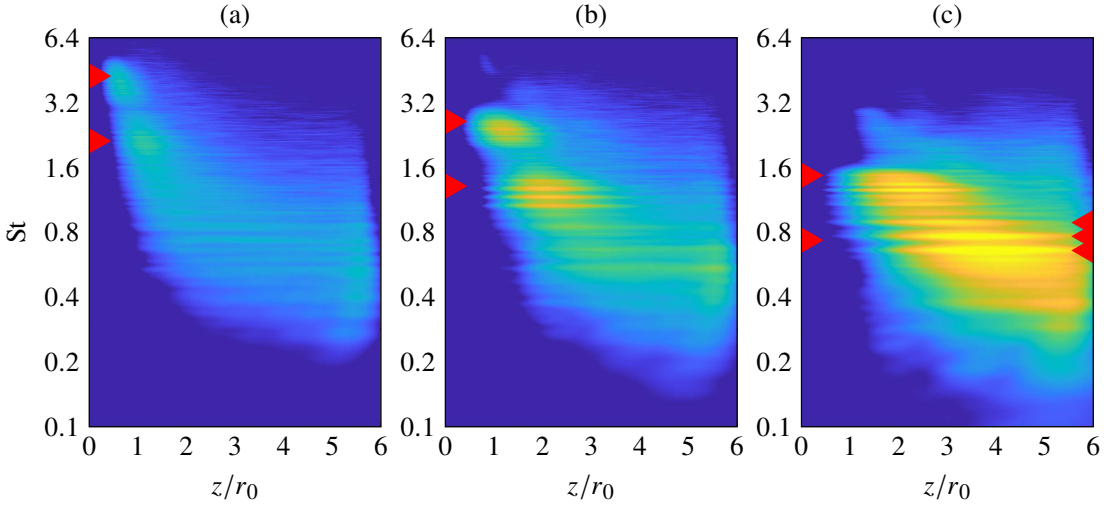

Figure 19: Power spectral densities of radial velocity fluctuations of aerodynamic nature normalized by u_j for $n_\theta = 0$, at $r = r_0$, for the jets at M = 0.6 with (a) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$; ▶ most unstable Strouhal numbers at $z = 0.1r_0$ predicted by LSA for $n_\theta = 0$ and half of these Strouhal numbers; ◀ Strouhal numbers of the peaks in the near-nozzle spectra for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. The color scales range logarithmically from $(5D/u_j) \times 10^{-5}$ to $(D/u_j) \times 10^{-1}$, from blue to yellow.

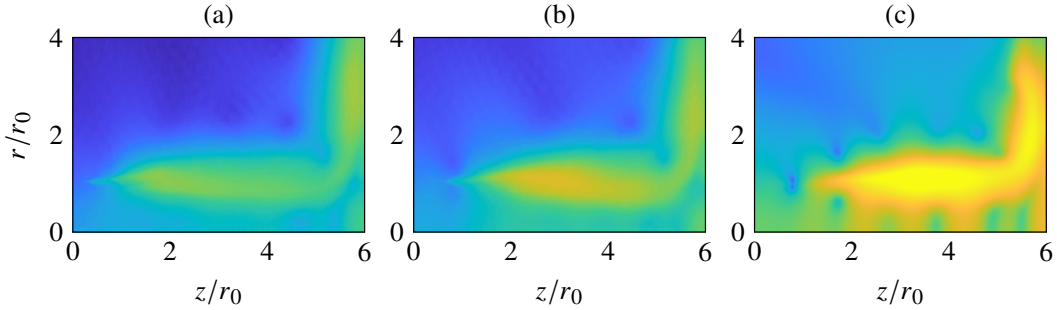

Figure 20: Sound pressure levels at St ≃ 0.77 for the jets with (a) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0, 05r_0$, (b) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ for $n_\theta = 0$. The color scale ranges from 110 dB to 170 dB, from blue to yellow.

for $u_c = 0.5u_j$.

The frequency-wavenumber spectra of the pressure fluctuations computed at $r = r_0$ for the axisymmetric mode between $z = 0$ and $z = 6r_0$ for the three jets are represented in figure 21. The lines corresponding to $\omega/k_z = 0.5u_j$ and $\omega/k_z = -c_0$, the dispersion curve of the first radial mode of the GJW, the first least-dispersed GJW and the Strouhal numbers of the peaks in the near-nozzle spectra for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ are also provided. In all cases, the highest levels are obtained near the line $\omega/k_z = 0.5u_j$ and are due to the vortical structures convected downstream. For $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, two stripes of significant amplitude are observed at the Strouhal numbers of two near-nozzle peaks, for St = 0.66 and St = 0.77, over a broad range of positive and negative wavenumbers. This provides additional evidence that waves propagate downstream and upstream at specific frequencies in the mixing layers. The two Strouhal numbers are significantly lower than the Strouhal number of the first least-dispersed GJW, which is St = 1. However, they lie in the range of the GJW propagating at a velocity very close to the ambient speed of sound, suggesting that the feedback loops are closed by free-stream GJW.

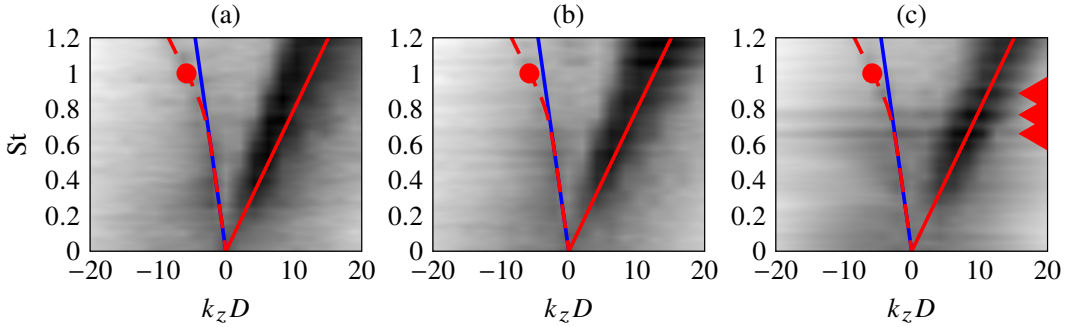

Figure 21: Frequency-wavenumber spectra of the pressure fluctuations computed for $n_\theta = 0$ at $r = r_0$ for the jets at M = 0.6 with (a) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$; ——— $\omega/k_z = 0.5 \times u_j$ and ——— $\omega/k_z = -c_0$; – – – dispersion curve of the GJW for a vortex-sheet model; ● first least-dispersed GJW; ◀ Strouhal numbers of the peaks in the near-nozzle spectra for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. The color scale ranges logarithmically from the minimal to the maximal values from white blue to black.

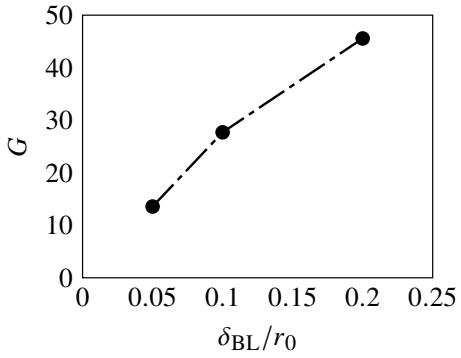

Figure 22: Gain in amplitude of the axisymmetric flow velocity fluctuations at $r = r_0$ between $z = 0.5r_0$ and $z = 4.5r_0$ at St = 0.77, i.e. the Strouhal number of the strongest narrow peak in the near-nozzle spectrum for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, as a function of the boundary-layer thickness for the jets at M = 0.6.

4.6. *Gain in amplitude of the axisymmetric aerodynamic velocity fluctuations*

The emergence of acoustic peaks for a thicker boundary layer may be due to a greater amplification of the axisymmetric instability waves between the nozzle and the plate. To discuss this, the nozzle-to-plate gain in amplitude of the axisymmetric radial velocity fluctuations of aerodynamic nature are estimated by computing the ratios between the PSD of the velocity fluctuations of aerodynamic nature at $z = 0.5r_0$ and at $z = 4.5r_0$, as for the jets at M = 0.9. The gains obtained in this way for the three boundary-layer thicknesses are reported for Strouhal numbers between 0.1 and 1.6 in appendix B in figure 26(a). They agree fairly well, in terms of levels and variations, with those estimated using LSA, provided in appendix A in figure 24(a), despite the restrictive assumptions of LSA.

The gain obtained at the frequency of the strongest narrow peak in the near-nozzle spectrum for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ is plotted as a function of the boundary-layer thickness in figure 22. For $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, it is 2 times higher than that for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and 3.3 higher than that for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, which is consistent with the LSA results reported in appendix A. Therefore, at the peak frequency, the flow fluctuations for $n_\theta = 0$ are more amplified between the nozzle and the plate for a thicker boundary layer. This result and the greater predominance of axisymmetric fluctuations near the plate for a thicker boundary layer in figure 16 most likely contribute to the establishment of feedback loops for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$.

5. Conclusions

In this paper, the influence of the boundary-layer thickness on the tonal noise components generated by subsonic impinging jets has been investigated using large-eddy simulations and linear stability analyses. Three jets at M = 0.9 and three jets at M = 0.6 with laminar nozzle-exit boundary layers of thicknesses ranging from $0.05r_0$ to $0.2r_0$ have been considered for a nozzle-to-plate distance of $6r_0$. For the jets at M = 0.9, tones emerge in the near-nozzle pressure spectra, at very similar frequencies for all thicknesses. Nevertheless, tow of them are 17 dB and 26 dB stronger for the thickest boundary layer compared with the thinnest one, indicating that the noise levels generated by resonant impinging jets can vary dramatically depending on the nozzle-exit conditions. For the jets at M = 0.6, no peaks are found for the thinnest boundary layers, whereas narrow peaks weakly emerge for the thickest ones. This suggests, for the first time to the best of the authors' knowledge, that low subsonic impinging jets can be resonant for specific nozzle-exit conditions.

In all cases, the tonal noise components appear to result from feedback loops of axisymmetric nature establishing between the nozzle and the plate. In an attempt to explain the variations of their levels, the axisymmetric aerodynamic fluctuations and their amplification between the nozzle and the plate have been examined. For a thicker boundary layer, the axisymmetric mode is more predominant in the shear layer near the plate due to a laminar-turbulent transition occurring farther downstream and the flow fluctuations at the tone frequencies are more amplified between the nozzle and the plate. These two results provide explanations for the increase in the tone amplitudes for M = 0.9 and for the presence of feedback loops for M = 0.6 for the thickest boundary layer.

In this paper, the boundary-layer thickness is shown to significantly affect the tonal noise produced by impinging jets through changes in the jet flow development. As mentioned above, the changes lead to stronger resonances and to the establishment of feedback loops for a thicker boundary layer. However, the trends observed may not be the same for other jet exit parameters, such as the boundary-layer state, and for other nozzle-to-plate distances. Therefore, in future studies, it will be interesting to investigate the effects of the boundary-layer thickness on the noise generated by impinging jets with non-laminar boundary layers and for varying nozzle-to-plate distances.

Acknowledgements.

The first author was supported by the FUI25 CALM-AA (CiblAge des sources par voie Logicielle et Méthodes inverses pour l'AéroAcoustique) regional project, co-financed by the European regional development fund. This work was granted access to the HPC resources of PMCS2I (Pôle de Modélisation et de Calcul en Sciences de l'Ingénieur de l'Information) of Ecole Centrale de Lyon. It was performed within the framework of the LABEX CeLyA (ANR-10-LABX-0060) of Université de Lyon, within the program Investissements d'Avenir (ANR-16-IDEX-0005) operated by the French National Research Agency (ANR). For the purpose of Open Access, a CC-BY public copyright licence has been applied by the authors to the present document and will be applied to all subsequent versions up to the Author Accepted Manuscript arising from this submission.

Declaration of interests.

The authors report no conflict of interest.

Appendix A. Amplification of the shear-layer instability waves according to linear stability analysis

The growth rates $-k_i r_0$, where k_i is the imaginary part of the axial wavenumber, of the axisymmetric shear-layer instability waves obtained using LSA as described in section 2.3

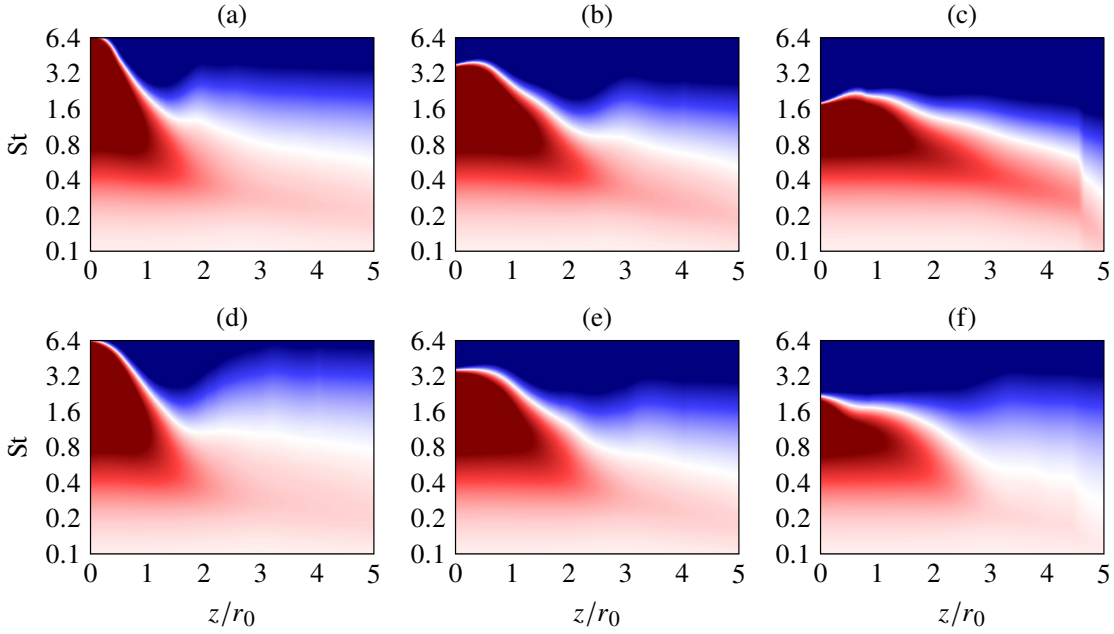

Figure 23: Instability growth rates $-k_i r_0$ obtained using LSA for $n_\theta = 0$ for the jets at (a-c) M = 0.6 and (d-f) M = 0.9 with (a,d) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b,e) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c,f) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. The color scales range between ±2, from blue to red.

for the six jets are represented as a function of the axial distance and Strouhal number in figure 23. For all jets, as the axial position increases, the unstable frequency range and the instability growth rates decrease due to the mixing-layer spreading. Near the nozzle, for $z < 2r_0$, the unstable frequency range is narrower for a thicker boundary layer. Farther downstream, for the jets at M = 0.6, the unstable frequency range does not appear to vary significantly between $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$ and $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and broadens slightly between $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. Moreover, the growth rates are higher for a thicker boundary layer for low Strouhal numbers. For the jets at M = 0.9, on the contrary, the results for $z > 2r_0$ are very similar in the three cases. This is not surprising since between $z = r_0$ and $z = 4r_0$ the shear-layer momentum thickness does not depend significantly on the boundary-layer thickness in figure 4(a).

The gain in amplitude of the instability waves between the nozzle and the plate is estimated by

$$G = \exp\left(\int_{z_1}^{z_2} -k_i \, \mathrm{d}z\right), \tag{A 1}$$

where $z_1 = 0.5r_0$ and $z_2 = 4.5r_0$ are arbitrary chosen bounds.

The variations of the gain with the Strouhal number are presented in figure 24. The Strouhal numbers of the weak tones for the jet at M = 0.6 with $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ and of the two strong tones A_1 and A_2 for the jets at M = 0.9 are also reported. For the jets at M = 0.6 in figure 24(a), the gains reach a maximum value at St ≃ 0.7 in all cases. They are stronger for a thicker boundary layer for St ≲ 1.2. In particular, over the range 0.5 ≲ St ≲ 1, the gains are at least 2 and 5 times higher for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ than for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$. Thus, over this range, the instability waves are much more amplified between the nozzle and the plate for a thicker boundary layer, which may be one reason for the emergence of the peaks at St = 0.66, 0.77 and 0.89 for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ in figure 17.

For the jets at M = 0.9 in figure 24(b), the maximum value of the gain is obtained approximately at St ≃ 1 and does not vary significantly with the boundary-layer thickness. The gain at the A_1 and A_2 tone Strouhal numbers St ≃ 0.32 and 0.41 are also very similar for

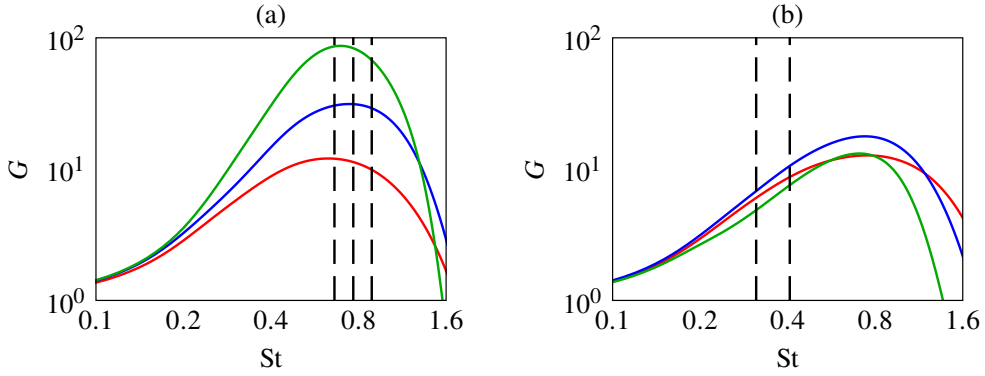

Figure 24: Gains in amplitude of the instability waves between $z = 0.5r_0$ and $z = 4.5r_0$ obtained for $n_\theta = 0$ using LSA for the jets at (a) M = 0.6 and (b) M = 0.9 with $\delta_{BL} = 0.05r_0$, $\delta_{BL} = 0.1r_0$ and $\delta_{BL} = 0.2r_0$; Strouhal numbers of the tones.

the three boundary-layer thicknesses. Therefore, the LSA results do not allow us to explain the differences in the tone amplitude for $n_\theta = 0$ in figure 7.

Appendix B. Frequency-wavenumber filtering of the axisymmetric shear-layer velocity fluctuations

A frequency-wavenumber filtering was implemented to isolate the aerodynamic fluctuations of the jets for the axisymmetric mode. It is similar to those used by Tinney & Jordan (2008), Kerhervé *et al.* (2012) and very recently by Varé & Bogey (2023*b*). In practice, the radial velocity fluctuations obtained for $n_\theta = 0$ at a given radial position are first Fourier-transformed in space and time to obtain the spectral coefficients

$$\widehat{u}_r(r, k_z, \omega) = \iint u_r(r, z, t) e^{-i(\omega t + k_z z)} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z \, , \tag{B 1}$$

where i is the imaginary unit. Then, the aerodynamic fluctuations, denoted u_{aero}, are estimated from an inverse space-time Fourier transform by

$$u_{\text{aero}}(r, z, t) = \iint \widehat{u}_r(r, k_z, \omega) H(k_z, \omega) e^{i(\omega t + k_z z)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k_z \, , \tag{B 2}$$

where

$$H(k_z, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } v^\varphi_{\text{min}} < \omega/k_z < v^\varphi_{\text{max}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{B 3}$$

is the filtering transfer function and $v^\varphi_{\text{min}} = 0.1u_j$ and $v^\varphi_{\text{max}} = u_j$ are phase velocity bounds allowing us to exclude the upstream-propagating fluctuations and the downstream-travelling acoustic waves.

Snapshots of the aerodynamic fluctuations thus obtained for $n_\theta = 0$ are provided for the six jets in figure 25. In all cases, coherent structures resulting from the presence of Kelvin-Helmholtz instability waves or of vortex pairings are observed in the mixing layers between the nozzle and the plate. Near the plate, the levels are higher for a thicker boundary layer, indicating that stronger axisymmetric turbulent structures impinge on the plate.

The gains in amplitude of the aerodynamic fluctuations for $n_\theta = 0$ are estimated by computing the square root of the ratio of the power spectral densities of the aerodynamic fluctuations at $z = 0.5r_0$ and at $z = 4.5r_0$. They are plotted as a function of the Strouhal number in figure 26 using the same axis scales as in figure 24. Overall, the variations and

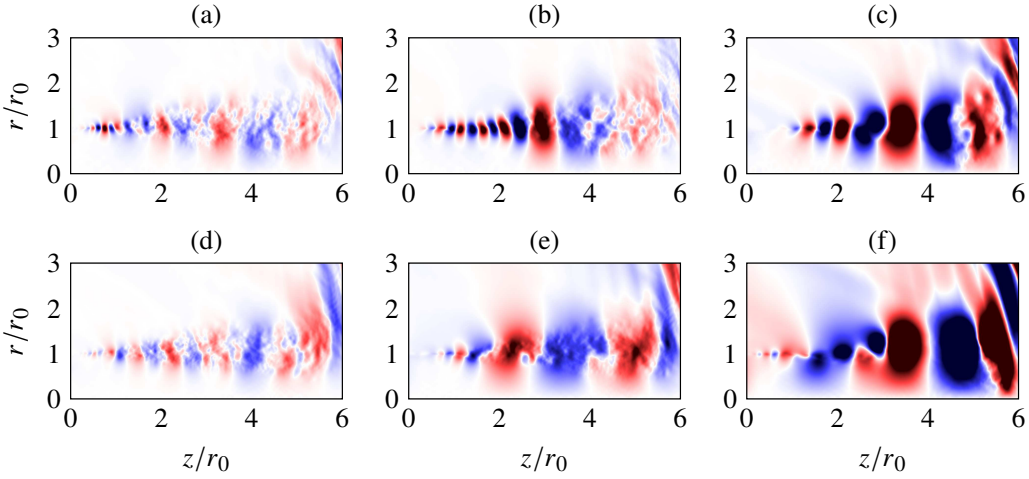

Figure 25: Snapshots of the aerodynamic radial velocity fluctuations obtained for $n_\theta = 0$ for the jets at (a-c) M = 0.6 and (d-f) M = 0.9 with (a,d) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, (b,e) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and (c,f) $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$. The color scales range between $\pm 0.1u_j$, from blue to red.

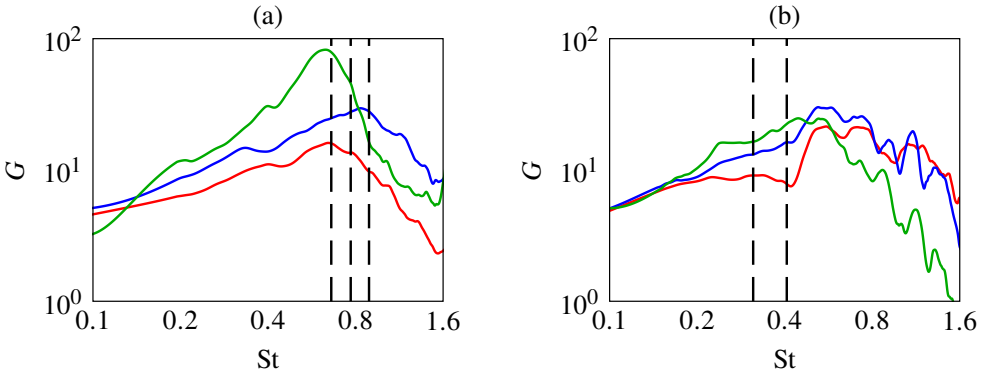

Figure 26: Gains in amplitude of the aerodynamic velocity fluctuations between $z = 0.5r_0$ and $z = 4.5r_0$ obtained for $n_\theta = 0$ for the jets at (a) M = 0.6 and (b) M = 0.9 with $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.05r_0$, $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.1r_0$ and $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$; Strouhal numbers of the tones.

the levels are consistent with the LSA results in figure 24, despite the strong assumptions of the LSA. For M = 0.6 in figure 26(a), the gains are maximum at St $\simeq$ 0.6 for $\delta_{\mathrm{BL}} \simeq 0.05$, at St $\simeq$ 0.8 for $\delta_{\mathrm{BL}} \simeq 0.1$ and at St $\simeq$ 0.6 for $\delta_{\mathrm{BL}} \simeq 0.2$. Over the range 0.2 $\lesssim$ St $\lesssim$ 0.8, they are stronger for a thicker boundary layer, in agreement with the LSA results in figure 24(a). Therefore, over this Strouhal number range, the flow fluctuations develop at a higher rate between the nozzle and the plate for a thicker boundary layer. In particular, at St = 0.77, i.e. the Strouhal number of the strongest narrow peak in the near-nozzle pressure spectrum for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$, the gain for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$ is significantly higher than that for the two thinnest boundary layer, as illustrated previously by figure 22 in section 4.6. This certainly favours the establishment of feedback loops for $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.2r_0$.

For the jets at M = 0.9 in figure 24(a), the gains reach a maximum value at St $\simeq$ 0.65 for $\delta_{\mathrm{BL}} \simeq 0.05$ and $\delta_{\mathrm{BL}} \simeq 0.1$ and at St $\simeq$ 0.45 for $\delta_{\mathrm{BL}} \simeq 0.2$. As mentioned previously in section 3.5, at the Strouhal numbers of the tones A_1 and A_2, they are stronger for a thicker boundary layer, which can contribute to the increase of the tone amplitudes in this case.

REFERENCES

Barone, M.F. & Lele, S.K. 2005 Receptivity of the compressible mixing layer. *J. Fluid Mech.* **540**, 301–335.

Berland, J., Bogey, C., Marsden, O. & Bailly, C 2007 High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. *J. Comput. Phys.* **224** (2), 637–662.

Bogey, C. 2021 Acoustic tones in the near-nozzle region of jets: characteristics and variations between Mach numbers 0.5 and 2. *J. Fluid Mech.* **921**, A3.

Bogey, C. 2022*a* Interactions between upstream-propagating guided jet waves and shear-layer instability waves near the nozzle of subsonic and nearly ideally expanded supersonic free jets with laminar boundary layers. *J. Fluid Mech.* **949**, A41.

Bogey, C. 2022*b* Tones in the acoustic far field of jets in the upstream direction. *AIAA J.* **60** (4), 2397–2406.

Bogey, C. & Bailly, C. 2002 Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far-field formulation and validation test cases. *Acta Acustica united with Acustica* **88** (4), 463–471.

Bogey, C. & Bailly, C. 2004 A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comput. Phys.* **194** (1), 194–214.

Bogey, C. & Bailly, C. 2006 Large-eddy simulations of transitional round jets: influence of the Reynolds number on flow development and energy dissipation. *Phys. Fluids* **18** (6), 065101.

Bogey, C. & Bailly, C. 2010 Influence of nozzle-exit boundary-layer conditions on the flow and acoustic fields of initially laminar jets. *J. Fluid Mech.* **663**, 507–538.

Bogey, C., de Cacqueray, N. & Bailly, C. 2009 A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations. *J. Comput. Phys.* **228** (5), 1447–1465.

Bogey, C., de Cacqueray, N. & Bailly, C. 2011 Finite differences for coarse azimuthal discretization and for reduction of effective resolution near origin of cylindrical flow equations. *J. Comput. Phys.* **230** (4), 1134–1146.

Bogey, C. & Gojon, R. 2017 Feedback loop and upwind-propagating waves in ideally expanded supersonic impinging round jets. *J. Fluid Mech.* **823**, 562–591.

Bogey, C. & Marsden, O. 2013 Identification of the effects of the nozzle-exit boundary-layer thickness and its corresponding Reynolds number in initially highly disturbed subsonic jets. *Phys. Fluids* **25** (5), 055106.

Bogey, C., Marsden, O. & Bailly, C. 2012 Influence of initial turbulence level on the flow and sound fields of a subsonic jet at a diameter-based Reynolds number of 10^5. *J. Fluid Mech.* **701**, 352–385.

Bogey, C. & Sabatini, R. 2019 Effects of nozzle-exit boundary-layer profile on the initial shear-layer instability, flow field and noise of subsonic jets. *J. Fluid Mech.* **876**, 288–325.

Bridges, J.E. & Hussain, A.K.M.F. 1987 Roles of initial condition and vortex pairing in jet noise. *J. Sound Vib.* **117** (2), 289–311.

Brès, G., Jordan, P., Jaunet, V., Le Rallic, M., Cavalieri, A.V.G., Towne, A., Lele, S.K., Colonius, T. & Schmidt, O.T. 2018 Importance of the nozzle-exit boundary-layer state in subsonic turbulent jets. *J. Fluid Mech.* **851**, 83–124.

Day, M.J., Reynolds, W.C. & Mansour, N.N. 1998 The structure of the compressible reacting mixing layer: insights from linear stability analysis. *Phys. Fluids* **10** (4), 993–1007.

Edgington-Mitchell, D. 2019 Aeroacoustic resonance and self-excitation in screeching and impinging supersonic jets – a review. *Int. J. Aeroacoust.* **18** (2-3), 118–188.

Edgington-Mitchell, D., Jaunet, V., Jordan, P., Towne, A., Soria, J. & Honnery, D. 2018 Upstream-travelling acoustic jet modes as a closure mechanism for screech. *J. Fluid Mech.* **855**, R1.

Edgington-Mitchell, D., Li, X., Liu, N., He, F., Wong, T.Y., Mackenzie, J. & Nogueira, P. 2022 A unifying theory of jet screech. *J. Fluid Mech.* **945**, A8.

Fauconnier, D., Bogey, C. & Dick, E. 2013 On the performance of relaxation filtering for large-eddy simulation. *J. Turbul.* **14** (1), 22–49.

Ferreira, F., Fiore, M., Parisot-Dupuis, H. & Gojon, R. 2023 Neutral acoustic wave modes in supersonic impinging jets. *AIAA J.* **61** (2), 955–964.

Fontaine, R.A., Elliott, G.S., Austin, J.M. & Freund, J.B. 2015 Very near-nozzle shear-layer turbulence and jet noise. *J. Fluid Mech.* **770**, 27–51.

Gojon, R & Bogey, C. 2017 Numerical study of the flow and the near acoustic fields of an underexpanded round free jet generating two screech tones. *Int. J. Aeroacoust.* **16** (7-8), 603–625.

Gojon, R., Bogey, C. & Marsden, O. 2016 Investigation of tone generation in ideally expanded supersonic planar impinging jets using large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.* **808**, 90–115.

Gojon, R., Bogey, C. & Mihaescu, M. 2018 Oscillation modes in screeching jets. *AIAA J.* **56** (7), 2918–2924.

720 Ho, C.M. & Nosseir, N.S. 1981 Dynamics of an impinging jet. Part 1. the feedback phenomenon. *J. Fluid*
721 *Mech.* **105**, 119–142.
722 Jaunet, V., Mancinelli, M., Jordan, P., Towne, A., Edgington-Mitchell, D., Lehnasch, G. & Girard,
723 S. 2019 Dynamics of round jet impingement. In *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.
724 Jordan, P., Jaunet, V., Towne, A., Cavalieri, A.V.G., Colonius, T., Schmidt, O.T. & Agarwal, A. 2018
725 Jet–flap interaction tones. *J. Fluid Mech.* **853**, 333–358.
726 Karami, S., Stegeman, P.C., Ooi, A., Theofilis, V. & Soria, J. 2020 Receptivity characteristics of under-
727 expanded supersonic impinging jets. *J. Fluid Mech.* **889**, A27.
728 Kerhervé, F., Jordan, P., Cavalieri, A.V.G., Delville, J., Bogey, C. & Juvé, D. 2012 Educing the source
729 mechanism associated with downstream radiation in subsonic jets. *J. Fluid Mech.* **710**, 606–640.
730 Kim, J. & Choi, H. 2009 Large eddy simulation of a circular jet: effect of inflow conditions on the near field.
731 *J. Fluid Mech.* **620**, 383–411.
732 Kremer, F. & Bogey, C. 2015 Large-eddy simulation of turbulent channel flow using relaxation filtering:
733 Resolution requirement and Reynolds number effects. *Computers & Fluids* **116**, 17–28.
734 Mancinelli, M., Jaunet, V., Jordan, P. & Towne, A. 2019 Screech-tone prediction using upstream-
735 travelling jet modes. *Exp. Fluids* **60**, 1–9.
736 Marsh, A.H. 1961 Noise measurements around a subsonic air jet impinging on a plane, rigid surface. *J.*
737 *Acoust. Soc. Am.* **33** (8), 1065–1066.
738 Michalke, A. 1984 Survey on jet instability theory. *Prog. Aerosp. Sci.* **21**, 159–199.
739 Mohseni, K. & Colonius, T. 2000 Numerical treatment of polar coordinate singularities. *J. Comput. Phys.*
740 **157** (2), 787–795.
741 Morris, P.J. 2010 The instability of high speed jets. *Int. J. Aeroacoust.* **9** (1-2), 1–50.
742 Neuwerth, G. 1974 Acoustic feedback of a subsonic and supersonic free jet which impinges on an obstacle.
743 *NASA Tech. Translation No. F-15719* .
744 Nogueira, P.A.S., Jaunet, V., Mancinelli, M., Jordan, P. & Edgington-Mitchell, D. 2022 Closure
745 mechanism of the A1 and A2 modes in jet screech. *J. Fluid Mech.* **936**, A10.
746 Panda, J. 1999 An experimental investigation of screech noise generation. *J. Fluid Mech.* **378**, 71–96.
747 Panickar, P. & Raman, G. 2007 Criteria for the existence of helical instabilities in subsonic impinging jets.
748 *Phys. Fluids* **19** (10), 106103.
749 Powell, A. 1961 On the edgetone. *J. Acoust. Soc. Am.* **33** (4), 395–409.
750 Powell, A. 1988 The sound-producing oscillations of round underexpanded jets impinging on normal
751 plates. *J. Acoust. Soc. Am.* **83** (2), 515–533.
752 Preisser, J.S. 1979 Fluctuating surface pressure and acoustic radiation for subsonic normal jet impingement.
753 *NASA Tech. Paper 1361* .
754 Schmidt, O.T., Towne, A., Colonius, T., Cavalieri, A.V.G., Jordan, P. & Brès, G. 2017 Wavepackets and
755 trapped acoustic modes in a turbulent jet: coherent structure eduction and global stability. *J. Fluid*
756 *Mech.* **825**, 1153–1181.
757 Shen, H. & Tam, C.K.W. 2002 Three-dimensional numerical simulation of the jet screech phenomenon.
758 *AIAA J.* **40** (1), 33–41.
759 Tam, C.K.W. & Ahuja, K.K. 1990 Theoretical model of discrete tone generation by impinging jets. *J. Fluid*
760 *Mech.* **214**, 67–87.
761 Tam, C.K.W. & Chandramouli, S. 2020 Jet-plate interaction tones relevant to over-the-wing engine mount
762 concept. *J. Sound Vib.* **486**, 115378.
763 Tam, C.K.W. & Dong, Z. 1996 Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic
764 and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *J. Comput. Acous.* **04** (02), 175–201.
765 Tam, C.K.W. & Hu, F.Q. 1989 On the three families of instability waves of high-speed jets. *J. Fluid Mech.*
766 **201**, 447–483.
767 Tam, C.K.W. & Morris, P.J. 1980 The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane
768 turbulent shear layer. *J. Fluid Mech.* **98** (2), 349–381.
769 Tam, C.K.W. & Norum, T.D. 1992 Impingement tones of large aspect ratio supersonic rectangular jets.
770 *AIAA J.* **30** (2), 304–311.
771 Tinney, C.E. & Jordan, P. 2008 The near pressure field of co-axial subsonic jets. *J. Fluid Mech.* **611**,
772 175–204.
773 Towne, A., Cavalieri, A.V.G., Jordan, P., Colonius, T., Schmidt, O.T., Jaunet, V. & Brès, G. 2017
774 Acoustic resonance in the potential core of subsonic jets. *J. Fluid Mech.* **825**, 1113–1152.

775 Varé, M. & Bogey, C. 2022 Generation of acoustic tones in round jets at a mach number of 0.9 impinging
776 on a plate with and without a hole. *J. Fluid Mech.* **936**, A16.
777 Varé, M. & Bogey, C. 2023*a* Acoustic tones generated by impinging jets: differences between laminar and
778 highly-disturbed nozzle-exit boundary layers. *Int. J. Aeroacoust.* Submitted.
779 Varé, M. & Bogey, C. 2023*b* Mach number dependence of tone generation by impinging round jets. *AIAA*
780 *J.* **61** (8), 3551–3565.
781 Viswanathan, K. & Clark, L.T. 2004 Effect of nozzle internal contour on jet aeroacoustics. *Int. J.*
782 *Aeroacoust.* **3** (2), 103–135.
783 Zaman, K.B.M.Q. 1985*a* Effect of initial condition on subsonic jet noise. *AIAA J.* **23** (9), 1370–1373.
784 Zaman, K.B.M.Q. 1985*b* Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation. *J. Fluid Mech.* **152**,
785 83–111.
786 Zaman, K.B.M.Q. 2012 Effect of initial boundary-layer state on subsonic jet noise. *AIAA J.* **50** (8), 1784–
787 1795.
788 Zaman, K.B.M.Q., Fagan, A.F. & Upadhyay, P. 2022 Pressure fluctuations due to 'trapped waves' in the
789 initial region of compressible jets. *J. Fluid Mech.* **931**, A30.
790 Zaman, K.B.M.Q., Fagan, A.F. & Upadhyay, P. 2023 Pressure fluctuation spectral peaks due to 'guided
791 waves' in the upstream direction of a jet. In *AIAA AVIATION 2023 Forum*.

4.2 Influence du taux de turbulence en sortie de buse

Dans cette deuxième section, les effets du taux de turbulence en sortie de buse sur les composantes de bruit tonales produites par les jets impactants sont étudiés. Pour cela, des simulations de jets ronds avec des couches limites perturbées ou non en sortie de buse sont réalisées pour un nombre de Mach de 0.9 et des distances plaque-buse $L = 6r_0$ et $L = 8r_0$, où r_0 est le rayon des buses des jets.

4.2.1 Paramètres des jets

Huit jets ronds isothermes à un nombre de Mach $\mathrm{M} = u_j/c_0 = 0.9$ et à un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = u_j D/\nu = 10^5$ sont considérés. Quatre d'entre eux impactent une plaque située à une distance $L = 6r_0$ du plan de sortie des jets en $z = 0$ et quatre autres à une distance $L = 8r_0$. Ils se mélangent au milieu ambiant à une pression $p_0 = 10^5$ Pa et à une température $T_0 = 293$ K. L'entrée du domaine de calcul se situe en $z = -10r_0$, mais l'écoulement n'est calculé dans la buse que pour $z \geq -2r_0$. Dans la buse, en $z = -2r_0$, les vitesses radiale et azimutale sont fixées à zéro, la pression est égale à p_0, la température est obtenue avec une relation de Crocco-Busemann et un profil de couche limite laminaire de Blasius d'épaisseur $\delta_{\mathrm{BL}} = 0.15r_0$ [37, 50] est imposé pour la vitesse axiale.

Dans la tuyère, les couches de cisaillement sont excitées ou non de manière à obtenir des couches limites pleinement laminaires, faiblement ou fortement perturbées en sortie de buse. Pour cela, la procédure mise en œuvre dans la référence [27] pour simuler des jets avec des couches limites perturbées est employée. Elle consiste à introduire des fluctuations de nature aérodynamique décorrélées en azimut et en temps dans la couche limite en amont de la sortie de buse en $z = -0.95r_0$ ou en $z = -0.225r_0$. Elle permet le développement de structures turbulentes similaires à celles observées dans les écoulements de conduit pleinement turbulents [48]. Les jets impactants dans la présente étude sont excités de la même manière que les jets libres d'une précédente étude [27], qui présentent, en sortie de buse, des pics d'intensité des fluctuations de vitesse u'_e égaux à 3%, 6% ou 12% de la vitesse d'éjection.

Les huit jets simulés sont alors appelés `0%LX`, `3%LX`, `6%LX` et `12%LX`, où `X` est la distance plaque-buse normalisée par le rayon des buses des jets. Pour les différents cas, les distances plaque-buse et les pics d'intensité des fluctuations de vitesse pour les jets libres équivalents [27] sont reportés dans le tableau 4.1.

4.2.2 Paramètres des simulations

Le jet `0%L8` avait été simulé par Varé & Bogey [304] et les sept autres ont été calculés en utilisant des maillages similaires à ceux des précédentes études [302, 304, 305]. Ces maillages

Tableau 4.1 – Distances plaque-buse L et pics d'intensité des fluctuations de vitesse en sortie de buse pour les jets libres équivalents u'_e [27].

	0%L6	3%L6	6%L6	12%L6	0%L8	3%L8	6%L8	12%L8
L/r_0	6	6	6	6	8	8	8	8
u'_e/u_j	0%	3%	6%	12%	0%	3%	6%	12%

contiennent $N_z = 1122$ et 1296 points dans la direction axiale pour les distances plaque-buse $L = 6r_0$ et $L = 8r_0$, et $N_r = 559$ points dans la direction radiale. La direction azimutale est discrétisée par $N_\theta = 256$ points pour les deux jets avec des couches limites non excitées et par $N_\theta = 1024$ points pour les six autres jets. Les maillages contiennent ainsi entre 160 millions et 740 millions de points. Sans prendre en compte les zones éponges entre $z = -20r_0$ et $z = -10r_0$ et entre $r = 15r_0$ et $r = 30r_0$, les maillages s'étendent radialement jusqu'en $r = 15r_0$, et axialement de $z = -10r_0$ jusqu'à la plaque. Entre $r = 0$ et $r = r_0$, 96 points sont utilisés dans la direction radiale. Dans les couches de cisaillement, en $r = r_0$, la taille des mailles Δr est minimale et est égale à $\Delta r_{\min} = 0.0036r_0$. Elle augmente entre $r = r_0$ et $r = 6.2r_0$ où elle vaut $\Delta r = 0.075r_0$, puis est constante pour $r < 15r_0$. Cette dernière taille de maille fournit un nombre de Strouhal $\mathrm{St}_D = fD/u_j = 5.9$ pour une onde acoustique discrétisée par cinq points par longueur d'onde. Dans la direction axiale, la taille des mailles Δz est minimale et est égale à $\Delta z_{\min} = 0.0072r_0$ en sortie de buse. Elle augmente jusqu'en $z = 2r_0$, où $\Delta z = 0.12r_0$, puis est constante jusqu'en $z = L - 2r_0$, et finalement diminue de manière à être égale à $\Delta z_{\min}$ de nouveau à la plaque. Près de cette dernière, pour $z \geq 3r_0$ pour le jet 0%L8 [304] et pour $z > L - 3r_0$ pour les autres jets, une procédure de filtrage basée sur un détecteur de chocs et un filtre d'ordre 2 est appliquée aux fluctuations de masse volumique, de vitesse et de pression pour éviter le développement d'oscillations de Gibbs pouvant apparaître près de la plaque en raison de la présence d'un choc [42].

Le pas de temps vaut $\Delta t = 0.7\Delta r_{\min}/c_0$. Au début des simulations, pour $t < 25r_0/u_j$, des fluctuations de pression d'amplitude maximale 200 Pa sont introduites aléatoirement entre $z = 0.25r_0$ et $z = 5r_0$ pour accélérer le développement initial des couches de mélange. Après une période transitoire de $500r_0/u_j$ pour les jets non excités et de $300r_0/u_j$ pour les autres jets, les signaux de masse volumique, de vitesse et de pression ont été enregistrés dans différents plans durant un temps $1500r_0/u_j$ pour les jets avec $L = 6r_0$ et un temps $625r_0/u_j$ pour les jets avec $L = 8r_0$. La fréquence d'enregistrement permet de calculer des spectres jusqu'à $\mathrm{St}_D = 6.4$. Les coefficients spectraux des quatre premiers modes azimutaux $n_\theta = 0 - 3$, où n_θ est le nombre d'onde azimutal, ont également été enregistrés.

4.2.3 Résultats

Conditions de sortie

Les profils en sortie de buse des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse axiale pour les jets avec $L = 6r_0$ et $L = 8r_0$ sont tracés sur les figures 4.1(a,b). Pour chaque jet, un maximum près des lèvres de la buse en $r \simeq 0.98r_0$ et un autre au niveau de l'axe des jets sont visibles. Pour déterminer l'origine du second maximum, des fonctions propres des ondes guidées normalisées par les valeurs en $r = 0$ sont également tracées. Elles correspondent à celles prédites par un modèle de nappe tourbillonnaire pour le premier mode radial $n_r = 1$ des ondes guidées axisymétriques similaires à des ondes de conduit avec une vitesse de groupe $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_z$ nulle [31, 278, 295]. Entre $r = 0$ et $r = r_0 - \delta_{\mathrm{BL}}$, les profils des simulations sont en accord avec les fonctions propres, ce qui indique que les niveaux d'intensité à l'intérieur des jets résultent de la propagation d'ondes guidées. Pour $L = 6r_0$, sur la figure 4.1(a), les niveaux d'intensité sur l'axe sont approximativement égaux à 10% de la vitesse d'éjection. Pour une distance plaque-buse de $8r_0$, sur la figure 4.1(b), ils sont proches de 7% de la vitesse d'éjection pour les jets excités et de 2% pour le jet non excité. Près des lèvres de la buse, les valeurs maximales sont respectivement égales à 10%, 8%, 9% et 14% de la vitesse d'éjection pour `0%L6`, `3%L6`, `6%L6` et `12%L6`, et à 1.5%, 5%, 8% et 14% pour `0%L8`, `3%L8`, `6%L8` et `12%L8`. Elles sont donc significativement plus élevées que celles obtenues pour les jets libres équivalents. Cela est dû aux ondes guidées qui excitent des ondes d'instabilité dans les couches limites des jets impactants.

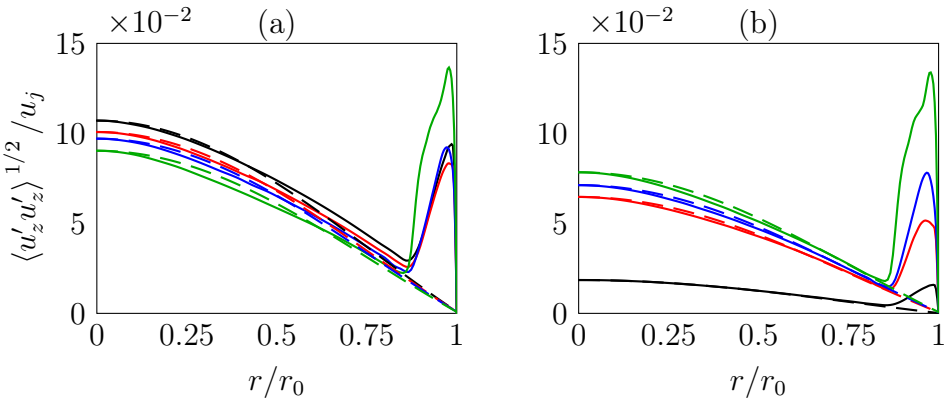

Figure 4.1 – Profils en $z = 0$ des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse axiale pour les jets (a) — `0%L6`, — `3%L6`, — `6%L6` et — `12%L6`, et (b) — `0%L8`, — `3%L8`, — `6%L8` et — `12%L8` ; (lignes pointillées) fonctions propres normalisées des ondes guidées similaires à des ondes de conduit avec une vitesse de groupe nulle pour $n_\theta = 0$ et $n_r = 1$ [31, 278, 295].

Champs de vorticité et de pression

Des champs instantanés de vorticité et des fluctuations de pression obtenus dans des coupes azimutales sont représentés sur les figures 4.2(a-d) pour les jets avec $L = 6r_0$ et les figures 4.2(e-h) pour $L = 8r_0$. Pour les deux distances plaque-buse, pour les jets non excités et faiblement excités sur les figures 4.2(a,b) et 4.2(e,f), des enroulements et des appariements tourbillonnaires sont visibles dans les couches de mélange pour $z \lesssim 3r_0$. Ils sont moins apparents pour les jets `6%L6` et `6%L8`, sur les figures 4.2(c,g). Pour des couches limites fortement excitées, sur les figures 4.2(d,h), aucun enroulement tourbillonnaire n'est visible, ce qui est également le cas pour des jets libres avec des couches limites turbulentes en sortie [50, 53]. Pour tous les jets, des structures tourbillonnaires axisymétriques de grande taille sont observées à proximité de la zone d'impact. Dans les champs de pression, des ondes acoustiques produites au niveau de cette zone sont visibles. Elles sont de forte amplitude et sont caractérisées par des fronts d'onde uniformément espacés et symétriques vis-à-vis de l'axe des jets. Ainsi, tous les jets produisent un rayonnement acoustique tonal axisymétrique, ce qui indique qu'ils sont résonants. Pour $L = 6r_0$, sur les figures 4.2(a-d), l'intensité de ce rayonnement est similaire pour les quatre jets. Cependant, pour $L = 8r_0$, sur les figures 4.2(e-h), les niveaux de pression sont plus faibles pour une couche limite non excitée.

Épaisseurs des couches de mélange des jets

Les variations de l'épaisseur de quantité de mouvement des couches de mélange sont représentées sur les figures 4.3(a,b). Pour $L = 6r_0$, sur la figure 4.3(a), près de la sortie de buse pour $z \lesssim 2r_0$, cette épaisseur ne dépend pas significativement du niveau d'excitation des couches limites. En revanche, pour $L = 8r_0$, sur la figure 4.3(b), les couches de mélange se développent initialement plus rapidement pour les jets plus excités, comme pour les jets libres équivalents [27]. Proche de la plaque, entre $z \simeq L - 4r_0$ et $z = L$, elles sont plus fines pour des couches limites plus excitées pour les deux distances plaque-buse.

Intensité des fluctuations de vitesse

Les valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse radiale en $r = r_0$ sont tracées sur la figure 4.4. Pour tous les jets, globalement, elles augmentent puis diminuent dans la direction de l'écoulement. Dans tous les cas à l'exception du jet `0%L8`, des oscillations sont visibles entre $z \simeq 2r_0$ et $z = L$. Elles sont attribuées à des interférences constructives et destructives entre des ondes se propageant vers l'aval et vers l'amont [118, 218]. L'intensité des fluctuations de vitesse croît initialement fortement et atteint un maximum local en $z \simeq 2.5r_0$, une position qui correspond à celle des appariements tourbillonnaires. Les niveaux à cette position varient entre 15% et 22% de la vitesse d'éjection pour les jets non excités ou faiblement

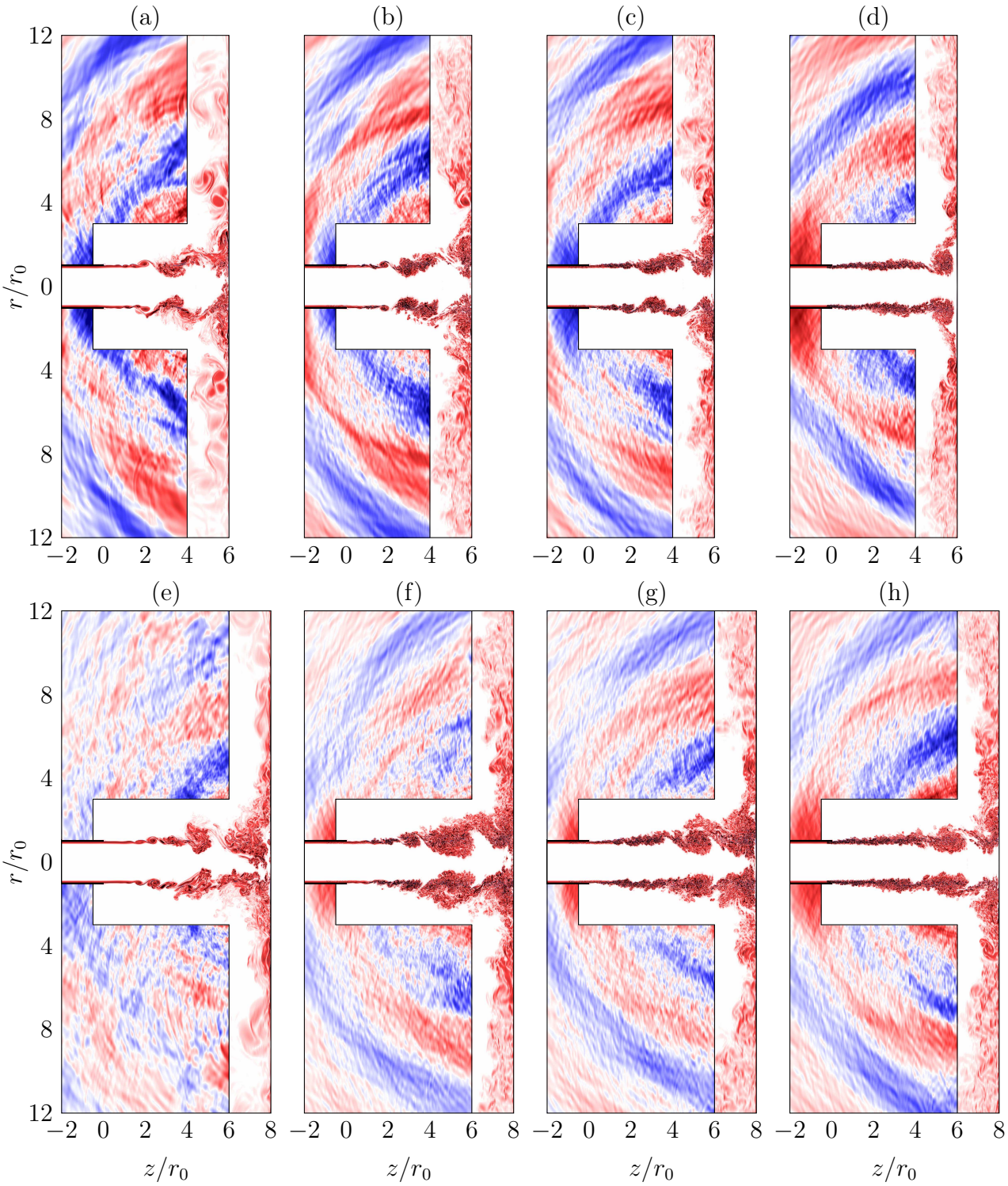

Figure 4.2 – Représentations dans le plan (z, r) de la norme de la vorticité dans l'écoulement et des fluctuations de pression en dehors pour les jets (a) `0%L6`, (b) `3%L6`, (c) `6%L6`, (d) `12%L6`, (e) `0%L8`, (f) `3%L8`, (g) `6%L8` et (h) `12%L8`. Les échelles de couleur varient de 0 à $20u_j/r_0$ pour la vorticité, du blanc au rouge, et entre $\pm 0.02p_0$ pour les fluctuations de pression, du bleu au rouge.

excités, et sont plus faibles pour des jets plus fortement excités, indiquant que les appariements tourbillonnaires sont moins forts pour ces cas. Pour $L = 6r_0$, l'intensité des fluctuations de vitesse près de la plaque, pour $z = L - r_0$, est plus élevée pour une couche limite moins excitée. Inversement, pour $L = 8r_0$, elle est plus faible pour une couche limite moins excitée.

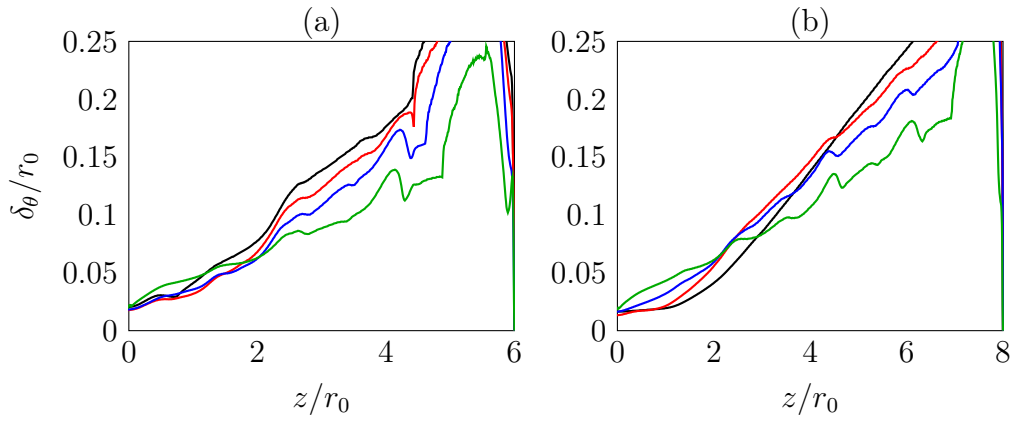

FIGURE 4.3 – Variations de l'épaisseur de quantité de mouvement pour les jets (a) —— 0%L6, —— 3%L6, —— 6%L6 et —— 12%L6, et (b) —— 0%L8, —— 3%L8, —— 6%L8 et —— 12%L8.

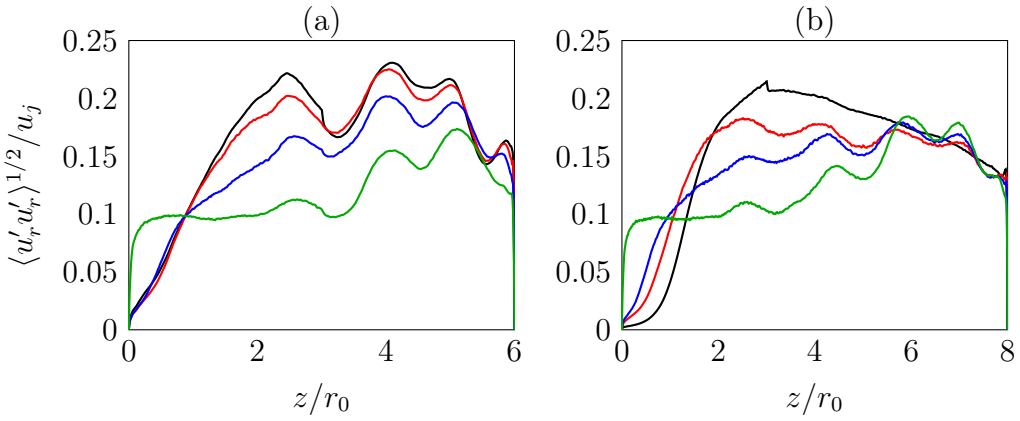

FIGURE 4.4 – Variations des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse radiale en $r = r_0$ pour les jets (a) —— 0%L6, —— 3%L6, —— 6%L6 et —— 12%L6, et (b) —— 0%L8, —— 3%L8, —— 6%L8 et —— 12%L8.

Spectres de pression près de la buse

Les spectres de pression calculés en $z = 0$ et $r = 1.5r_0$ sont représentés en fonction du nombre de Strouhal St_D sur la figure 4.5. De nombreux pics étroits sont observés à des fréquences très similaires pour tous les jets. Dans tous les cas, le pic le plus fort est obtenu pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.4$, en accord avec les simulations de Varé & Bogey [302, 304, 305] et les expériences de Neuwerth [213] pour des jets impactants à un nombre de Mach de 0.9 avec $L = 6r_0$ et $L = 8r_0$. Pour $L = 6r_0$, son amplitude est plus faible pour une couche limite plus excitée. Pour $L = 8r_0$, une tendance

inverse est observée et le pic dominant est plus fort pour une couche limite plus excitée. Pour les deux distances plaque-buse, des pics sont visibles aux harmoniques du nombre de Strouhal du pic dominant, pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.8$, 1.2, 1.6 et 2, et également pour d'autres nombres de Strouhal, $\mathrm{St}_D \simeq 0.3$, 0.6 et 0.7. Pour $\mathrm{St}_D \gtrsim 1.2$, les niveaux large bande sont plus élevés pour les jets non excités, ce qui est aussi le cas pour des jets libres à M $\simeq 0.9$ [53, 332].

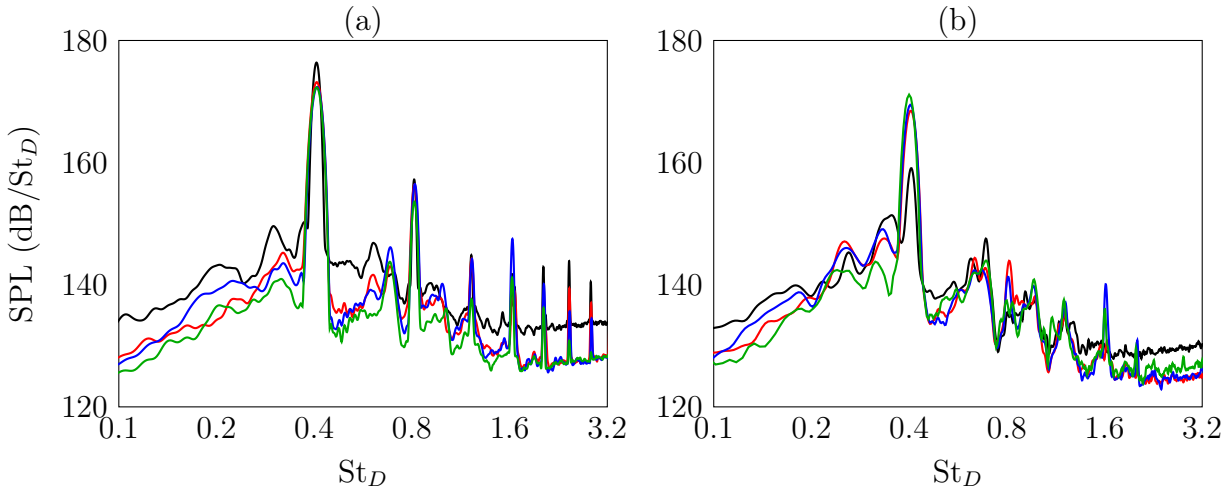

Figure 4.5 – Spectres de pression en $z = 0$ et $r = 1.5r_0$ pour les jets (a) —— 0%L6, —— 3%L6, —— 6%L6 et —— 12%L6, et (b) —— 0%L8, —— 3%L8, —— 6%L8 et —— 12%L8.

Les contributions des trois premiers modes azimutaux aux spectres de pression en $z = 0$ et $r = 1.5r_0$ sont présentées sur la figure 4.6. Dans tous les cas, les pics sont associés aux deux premiers modes azimutaux, comme dans les autres études traitant de jets impactants [44, 118, 304, 305]. Le pic dominant pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.4$ et ceux pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.8$, 1.2 et 1.6 sont liés au mode axisymétrique, comme attendu compte tenu de l'intense rayonnement axisymétrique observé sur les champs de pression des figures 4.2(a-h). Les pics pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.6$ et 0.7 sont quant à eux associés au premier mode hélicoïdal.

Fréquences et amplitudes des composantes de bruit tonales

Les nombres de Strouhal des pics dominants et secondaires pour $n_\theta = 0$ et $n_\theta = 1$ sont représentés en fonction du pic d'intensité des fluctuations de vitesse en sortie de buse pour les jets libres équivalents sur les figures 4.7(a,b). Les nombres de Strouhal obtenus à partir du modèle de rétroaction [227]

$$\frac{N}{\mathrm{St}_D} = \frac{L}{D}\left(\frac{u_j}{u_{\mathrm{aero}}} + \frac{u_j}{u_{\mathrm{acous}}}\right) , \tag{4.1}$$

où $u_{\mathrm{aero}} = (2/3) \times u_j$, $u_{\mathrm{acous}} = -c_0$ et N est l'ordre du mode de rétroaction, sont également indiqués. La fréquence du pic dominant pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.4$ correspond à celle déterminée avec le modèle pour $N = 3$ pour $L = 6r_0$ et pour $N = 4$ pour $L = 8r_0$. Pour $L = 6r_0$, sur la

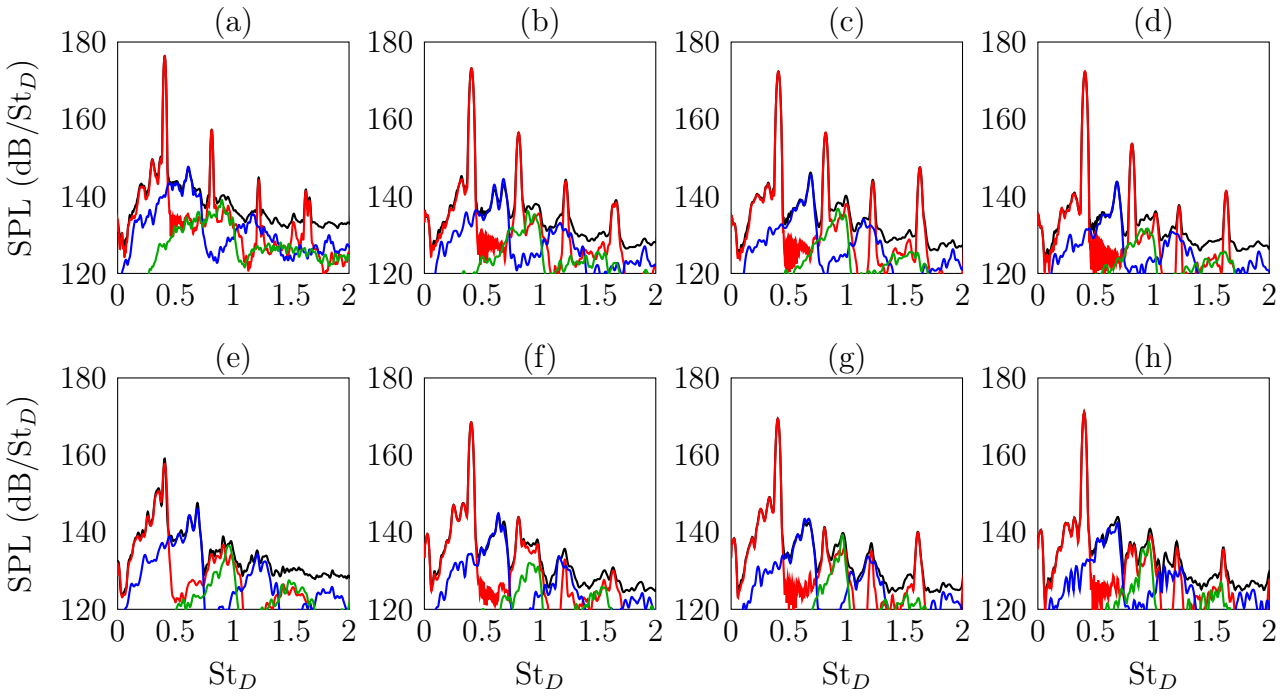

Figure 4.6 – Spectres de pression en $z = 0$ et $r = 1.5r_0$ pour les jets (a) `0%L6`, (b) `3%L6`, (c) `6%L6`, (d) `12%L6`, (e) `0%L8`, (f) `3%L8`, (g) `6%L8` et (h) `12%L8` pour —— le signal complet, —— $n_\theta = 0$, —— $n_\theta = 1$ et —— $n_\theta = 2$.

figure 4.7(a), le pic dominant du premier mode hélicoïdal est obtenu pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.6$ pour le jet non excité et pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.7$ pour les autres jets. Ces deux nombres de Strouhal sont proches de ceux fournis par le modèle de rétroaction pour $N = 4$ et $N = 5$. Pour $n_\theta = 1$, le mode de rétroaction prédominant pour le jet non excité est donc différent de celui des autres jets. Pour $L = 8r_0$, sur la figure 4.7(b), le nombre de Strouhal du pic dominant pour $n_\theta = 1$ apparaît pour un nombre de Strouhal similaire à celui fourni par le modèle pour $N = 7$ pour le jet `0%L8`, pour $N = 6$ pour les jets `3%L8` et `6%L8`, et pour $N = 7$ à nouveau pour le jet `12%L8`. Pour les deux distances plaque-buse, le mode de rétroaction dominant pour $n_\theta = 1$ dépend donc du niveau d'excitation des couches limites dans la buse.

L'amplitude du pic dominant pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.4$ est tracée pour les deux distances plaque-buse sur la figure 4.8. Elle est de 176 dB pour le jet `0%L6`, 173 dB pour le jet `3%L6` et 172 dB pour les jets `6%L6` et `12%L6`. Pour $L = 6r_0$, elle est ainsi plus faible pour des couches limites plus excitées. Ceci n'est pas le cas pour $L = 8r_0$. En effet, pour cette distance plaque-buse, l'amplitude du pic dominant est de 159 dB pour le jet `0%L8`, 168.5 dB pour le jet `3%L8`, 169.5 dB pour le jet `6%L8` et 171 dB pour le jet `12%L8`. Elle est donc plus élevée pour des couches limites plus excitées.

Pour chacune des distances plaque-buse, l'amplitude du pic dominant varie de manière monotone avec l'intensité des fluctuations de vitesse u'_e. Afin de tenter d'expliquer ses variations, seulement les jets non excités et fortement excités sont donc étudiés dans la suite.

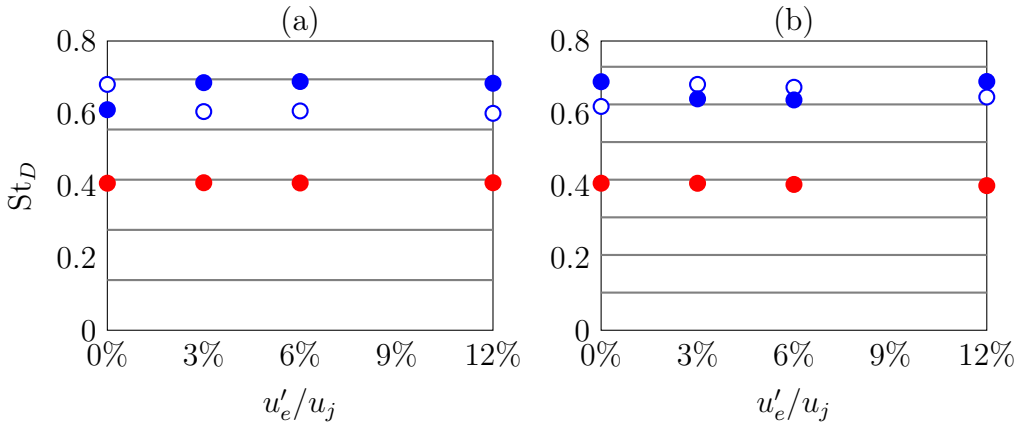

FIGURE 4.7 – Variations des nombres de Strouhal des pics ● dominants pour $n_\theta = 0$ et ○ dominants et ● secondaires pour $n_\theta = 1$ pour (a) $L = 6r_0$ et (b) $L = 8r_0$ avec le pic d'intensité des fluctuations de vitesse pour les jets libres équivalents ; —— nombres de Strouhal obtenus à partir du modèle (4.1).

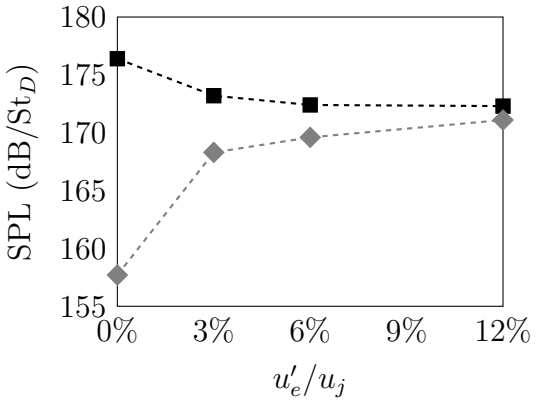

FIGURE 4.8 – Amplitudes du pic dominant pour $\mathrm{St}_D \simeq 0.4$ dans les spectres de pression en $z = 0$ et $r = 1.5r_0$ pour ■ $L = 6r_0$ et ◆ $L = 8r_0$ en fonction du pic d'intensité des fluctuations de vitesse pour les jets libres équivalents.

Analyse de stabilité linéaire

Les variations de l'amplitude du pic dominant peuvent être dues à des différences dans les taux d'amplification des ondes d'instabilité $-k_i r_0$, où k_i est la partie imaginaire du nombre d'onde axial. Pour déterminer ces taux d'amplification, une analyse de stabilité linéaire spatiale non visqueuse est réalisée pour le mode axisymétrique. Elle est similaire à celles effectuées par Varé & Bogey [304, 305]. Elle est réalisée en considérant le profil de vitesse en tangente hyperbolique

$$\langle u_z \rangle(r,z) = \frac{u_j}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{1}{2}\frac{(r-r_0)}{\delta_\theta(z)}\right)\right] \tag{4.2}$$

et un profil de masse volumique obtenu par une relation de Crocco-Busemann.

Les taux d'amplification des ondes d'instabilité sont déterminés en résolvant l'équation de Rayleigh compressible à l'aide d'une méthode de tir, basée sur la méthode d'Euler pour l'intégration des équations différentielles ordinaires et la méthode de la sécante pour la recherche du nombre d'onde complexe [50, 208]. Au-delà des fréquences pour lesquelles le taux d'amplification est nul, $k_i = 0$, les taux de décroissance des ondes d'instabilité évanescentes $-k_i < 0$ sont approchés en utilisant les taux de croissance des ondes d'instabilité amplifiées par extrapolation linéaire, comme dans l'étude des effets de l'épaisseur de couche limite de la section 4.1.

Taux d'amplification et gains en amplitude des ondes d'instabilité

Les taux d'amplification sont représentés en fonction de la position axiale pour $0 \leq z \leq L-r_0$ et du nombre de Strouhal pour les jets non excités et fortement excités sur la figure 4.9. Dans tous les cas, lorsque la position axiale augmente, les taux d'amplification diminuent et la gamme de fréquence instable est réduite, car les couches de mélange s'épaississent dans la direction de l'écoulement. Au nombre de Strouhal du pic dominant $\mathrm{St}_D \simeq 0.4$, près de la buse, pour $z \lesssim 2r_0$ pour $L = 6r_0$ et pour $z \lesssim 3r_0$ pour $L = 8r_0$, les taux d'amplification ne varient pas significativement entre les cas excités et non excités. En revanche, plus en aval, ils sont plus élevés pour les jets fortement excités, ce qui est attribué au fait que les couches de mélange de ces jets sont plus fines que celles des jets non excités pour $z \gtrsim L - 4r_0$, comme indiqué sur la figure 4.3.

À partir des taux d'amplification, les gains en amplitude des ondes d'instabilité ont été calculés entre $z = 0$ et $z = L-r_0$, comme dans l'étude des effets de l'épaisseur de couche limite de la section 4.1. Ils sont tracés en fonction du nombre de Strouhal sur la figure 4.10 en utilisant une échelle logarithmique. Dans tous les cas, le gain est maximum pour $0.3 \lesssim \mathrm{St}_D \lesssim 0.45$. Pour les deux distances plaque-buse, au nombre de Strouhal du pic dominant, il est approximativement cinq fois plus élevé pour les jets excités que pour les jets non excités. Pour les premiers jets, l'amplification des ondes d'instabilité à la fréquence du pic dominant entre la buse et la plaque est donc plus forte. Cela contribue certainement à l'augmentation de l'amplitude du pic dominant quand les jets sont excités pour $L = 8r_0$. Pour $L = 6r_0$, en revanche, les niveaux acoustiques du pic dominant sont plus faibles pour le jet avec des couches limites excitées. Ces variations ne sont donc pas attribuées à une modification du gain en amplitude des ondes d'instabilité.

Prédominance des fluctuations axisymétriques dans les couches de mélange

Pour examiner la prédominance des fluctuations axisymétriques dans les couches de mélange près de la plaque, les variations des niveaux des fluctuations de vitesse radiale axisymétriques en $r = r_0$ sont tracées sur les figures 4.11(a,b), pour les deux distances plaque-buse, pour les cas

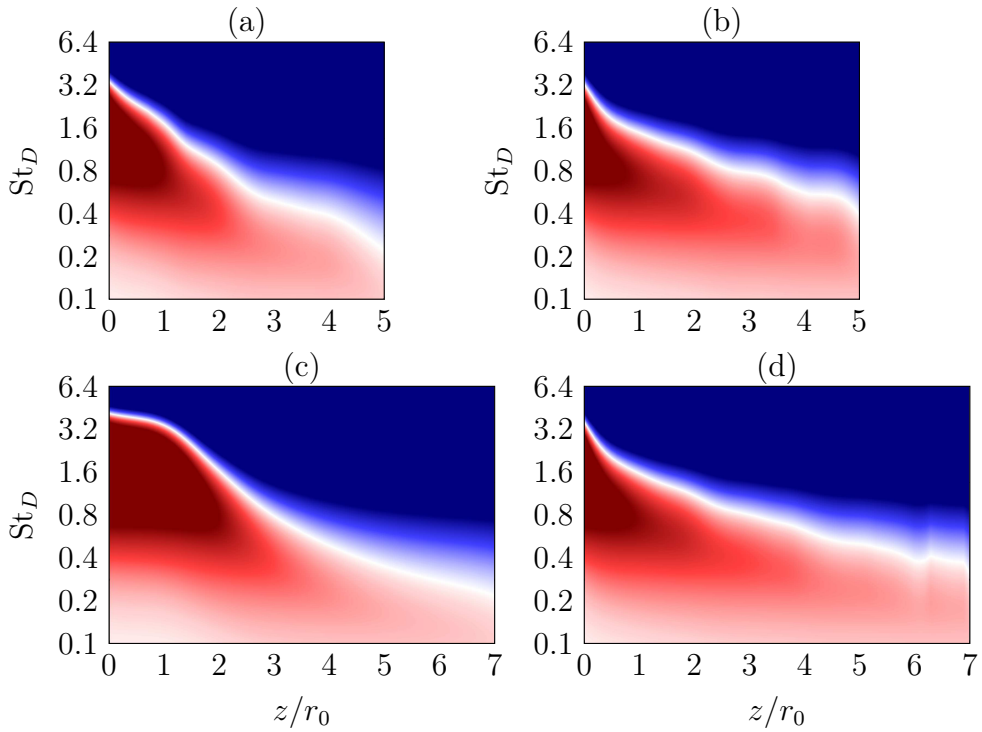

Figure 4.9 – Taux d'amplification $-k_i r_0$ pour $n_\theta = 0$ en fonction de la position axiale et du nombre de Strouhal pour les jets (a) `0%L6`, (b) `12%L6`, (c) `0%L8` et (d) `12%L8`. L'échelle de couleur varie entre ± 2, du bleu au rouge.

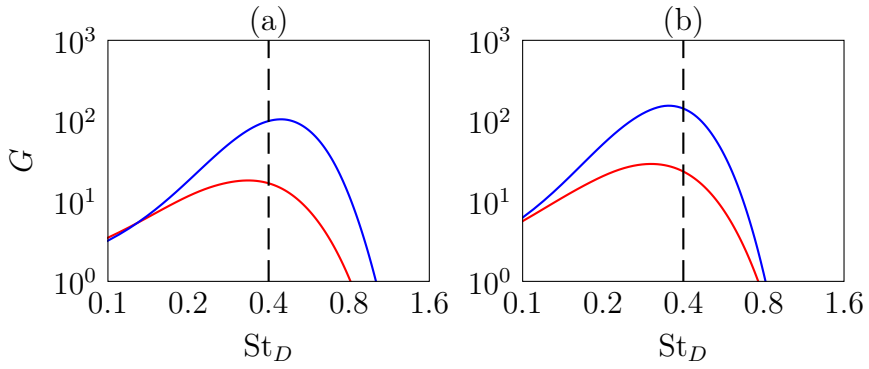

Figure 4.10 – Gains en amplitude des ondes d'instabilité entre $z = 0$ et $z = L - r_0$ pour $n_\theta = 0$ pour les jets (a) `0%L6` et `12%L6`, et (b) `0%L8` et `12%L8` ; – – – nombre de Strouhal du pic dominant dans les spectres acoustiques.

non excités et fortement excités. Pour les jets résonants `0%L6`, `12%L6` et `12%L8`, des oscillations sont visibles en raison d'interférences constructives et destructives entre des ondes se propageant vers l'amont et vers l'aval.

Pour $L = 6r_0$, sur la figure 4.11(a), l'intensité des fluctuations de vitesse axisymétriques croît plus fortement pour le jet non excité que pour le jet excité. Près de la plaque, pour $z = L - r_0$, elle est égale à 20% de la vitesse d'éjection pour le premier jet et à 15% pour le second. Les structures axisymétriques impactant la plaque contiennent ainsi plus d'énergie pour le jet non

excité, ce qui peut contribuer à l'augmentation des niveaux acoustiques du pic dominant pour ce jet. Pour $L = 8r_0$, sur la figure 4.11(b), pour le jet non excité, les niveaux d'intensité augmentent entre $z = 0$ et $z \simeq 2r_0$, où ils sont égaux à 10% de la vitesse d'éjection, puis diminuent et valent approximativement 5% pour $z > 6r_0$. La décroissance des niveaux pour ce jet est attribuée à la transition laminaire-turbulent des couches de mélange, qui conduit à une redistribution de l'énergie contenue dans le mode axisymétrique dans les modes azimutaux plus élevés.

Pour les deux distances plaque-buse, pour $z = L - r_0$, les niveaux sont plus forts de 5% de la vitesse d'éjection pour le jet `0%L6` que pour le jet `12%L6` et plus faibles de 10% pour le jet `0%L8` que pour le jet `12%L8`. Ces variations sont en accord avec celles des niveaux acoustiques du pic dominant sur la figure 4.8. Alors que pour le jet `0%L8` une diminution de l'intensité des fluctuations de vitesse axisymétriques est visible entre $z = 2r_0$ et $z = 6r_0$, pour le jet `0%L6`, cette intensité augmente globalement entre $z = 0$ et $z = L - 2r_0$. Cette tendance opposée pour les deux distances plaque-buse peut être due à une différence dans la distance entre la position de la transition laminaire-turbulent et celle de la plaque. Comme cette distance est plus courte pour $L = 6r_0$ que pour $L = 8r_0$, la diminution des niveaux liées à la transition laminaire-turbulent est moins importante pour le jet `0%L6` que pour le jet `0%L8`.

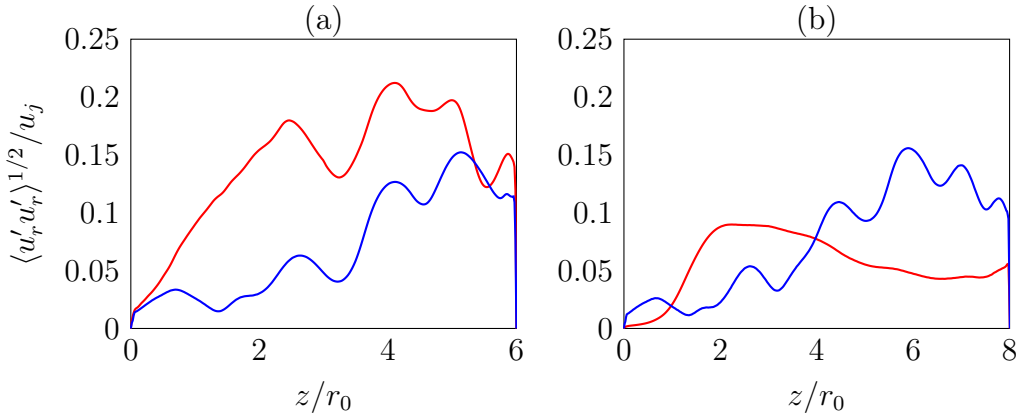

Figure 4.11 – Variations des valeurs quadratiques moyennes des fluctuations de vitesse radiale axisymétrique en $r = r_0$ pour les jets (a) `0%L6` et `12%L6`, et (b) `0%L8` et `12%L8`.

4.2.4 Conclusions

Les effets du niveau d'excitation des couches limites sur les composantes de bruit tonales produites par les jets impactants hautement subsoniques ont été étudiés. Pour cela, des simulations de jets à un nombre de Mach de 0.9 avec des couches limites non excitées, très faiblement, faiblement ou fortement excitées ont été réalisées pour deux distances plaque-buse, $L = 6r_0$ et $L = 8r_0$. Les résultats obtenus indiquent que le niveau d'excitation des couches limites est susceptible d'affecter significativement l'amplitude des composantes tonales

produites par les jets impactants, en modifiant le développement des couches de mélange et, par conséquent, la prédominance des structures axisymétriques près de la plaque ainsi que l'amplification entre la buse et la plaque des ondes d'instabilité impliquées dans les mécanismes de production de bruit. Ils montrent également que les effets du niveau d'excitation des couches limites dépendent surtout de la distance plaque-buse.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Dans ce travail de thèse, des études de sensibilité portant sur le développement et le bruit des écoulements turbulents cisaillés ont été réalisées à l'aide de simulations aéroacoustiques directes et de la méthode de la différentiation complexe.

La méthode de la différentiation complexe s'est montrée capable de déterminer l'influence d'un paramètre physique (comme le nombre de Mach par exemple) ou de maillage sur le développement et le bruit d'une couche de mélange bidimensionnelle contrôlée par une excitation. À titre d'exemple, pour une simulation de couche de mélange réalisée pour une taille de maille donnée, elle a été en mesure d'estimer les dérivées des champs aérodynamiques et acoustiques par rapport à la taille de maille, et donc les effets d'une petite modification du maillage sur l'écoulement. Bien que l'utilisation de cette méthode pour des jets turbulents soit limitée en raison du caractère chaotique de ces écoulements, il a été mis en évidence qu'elle peut être appliquée à un jet tridimensionnel à haut nombre de Reynolds pour déterminer, par exemple, les effets d'une perturbation acoustique sur les couches de mélange du jet et ainsi caractériser le mécanisme de réceptivité ayant lieu lors de la réflexion d'une onde acoustique sur les lèvres de la buse d'un jet. Concernant le coût en ressources numériques de la méthode, les simulations sont approximativement deux fois plus longues et requièrent presque deux fois plus de mémoire quand la méthode est employée. Au sujet de sa mise en œuvre, la méthode a été implémentée facilement dans deux codes de calcul utilisés pour résoudre les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes (x, y) et cylindriques (r, θ, z).

En étudiant des jets impactant une plaque pleine à des nombres de Mach de 0.6 et 0.9 avec différents profils de vitesse en sortie de buse, plusieurs niveaux d'excitation des couches limites et en considérant deux distances plaque-buse, il a été montré, d'une part, que les conditions de sortie sont susceptibles de modifier considérablement l'amplitude des composantes de bruit tonales produites par les jets impactants hautement subsoniques et, d'autre part, que des jets à des nombres de Mach inférieurs à 0.65 peuvent être résonants pour des conditions de sortie spécifiques. Les composantes tonales dominantes se sont révélées résulter de boucle de rétroaction aéroacoustique de nature axisymétrique. Les effets des conditions de sortie sur ces composantes tonales ont été attribués à des modifications dans le développement des couches de mélange des jets, qui conduisent à des différences dans les propriétés d'amplification des ondes d'instabilité entre la buse et la plaque, et dans l'énergie contenue dans les structures cohérentes axisymétriques dans les couches de mélange à proximité de la zone d'impact.

Perspectives

Dans de futurs travaux, il pourrait être intéressant de poursuivre l'étude du mécanisme de réceptivité menée avec la méthode de la différentiation complexe dans la section 3.3. Cela permettrait d'améliorer la compréhension de ce mécanisme qui est impliqué dans les phénomènes de résonance pouvant se produire dans les jets libres initialement laminaires [28, 32], les jets supersoniques contenant des cellules de choc [87, 235, 236] et les jets impactants [87, 150, 323]. Dans la littérature, sauf erreur, la réceptivité d'un jet à une onde guidée n'a pas encore été étudiée. Pour les jets impactants, en particulier, il manque une description claire des phénomènes de réflexion des ondes guidées qui peuvent se produire sur les lèvres de la buse du jet ou sur l'ensemble de la section en sortie de buse. Cette description pourrait être effectuée à l'aide de la méthode de la différentiation complexe en étudiant les effets d'une onde guidée sur un des jets impactants simulés dans la thèse. Pour cela, il faudra tout d'abord modéliser une onde guidée. La modélisation pourra être effectuée à partir des résultats d'une simulation de jet en utilisant un filtrage fréquence-nombre d'onde pour isoler une onde guidée. À titre d'illustration, pour un jet à un nombre de Mach de 0.9 impactant une plaque à une distance de 8 rayons de buse, un champ de pression obtenu en isolant les fluctuations de pression se propageant à la fréquence et à la vitesse des ondes guidées impliquées dans le mécanisme de rétroaction dominant du jet considéré est représenté sur la figure A.

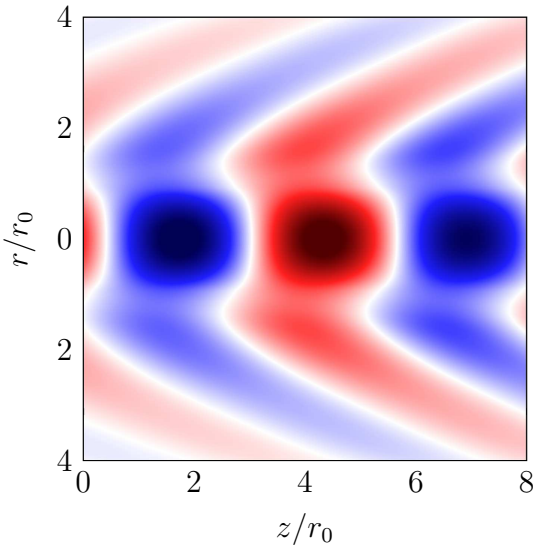

Figure A – Représentation des fluctuations de pression axisymétriques se propageant à la fréquence et à la vitesse des ondes guidées impliquées dans le mode de rétroaction axisymétrique dominant d'un jet à un nombre de Mach de 0.9 impactant une plaque à une distance de 8 rayons de buse. L'échelle de couleur varie entre $\pm\,0.04p_0$ du bleu au rouge.

Une fois modélisées, pour étudier la réceptivité d'un jet à une onde guidée, les perturbations de pression associées à une onde guidée pourraient être introduites à un instant donné dans un des jets simulés en leur attribuant une amplitude imaginaire. Les parties imaginaires des variables de l'écoulement seraient alors associées aux effets de l'onde guidée sur l'écoulement et permettraient donc certainement de décrire le mécanisme de réceptivité impliqué dans les phénomènes de rétroaction se produisant dans les jets impactants. Le code développé pour effectuer la décomposition de Hodge-Helmholtz utilisée dans l'étude de réceptivité pourrait être adapté pour permettre l'application d'une décomposition de Doak, et ainsi séparer leurs composantes aérodynamiques, acoustiques et entropiques [72, 80]. Pour mettre en œuvre cette dernière décomposition, on pourrait s'inspirer des méthodes numériques utilisées très récemment par Unnikrishnan & Gaitonde [298, 299] et Han *et al.* [123].

Enfin, les couches limites des jets non excités des présents travaux de thèse se sont révélées être significativement perturbées en sortie de buse, indiquant que des ondes d'instabilité de couche limite se développent dans les buses des jets. Pour une couche de mélange supersonique et un jet libre à un nombre de Mach de 0.4, Barone & Lele [11] et Kaplan *et al.* [148] ont respectivement mis en évidence la présence d'un couplage entre les ondes d'instabilité de couche limite et celles de Kelvin-Helmholtz. On peut s'attendre à ce que ce couplage soit également présent pour les jets impactants étudiés et que des ondes d'instabilité de couche limite se développant à la fréquence du mode de rétroaction dominant se couplent aux ondes de Kelvin-Helmholtz en sortie de buse. Il pourrait donc être intéressant de l'examiner afin de déterminer son implication dans les mécanismes de rétroaction aéroacoustique des jets impactants.

Annexe A

Coefficients des schémas numériques

Dans cette annexe, les coefficients des schémas aux différences finies, des filtres et de l'algorithme de Runge-Kutta utilisées pour les simulations directes sont données.

Tableau 2 – Coefficients a_l des schémas aux différences finies d'ordre 6 standard FDs7p et d'ordre 4 optimisé FDo11p [34] ($a_l = -a_{-l}$).

l	FDs7p	FDo11p
-5	–	0.872756993962667
-4	–	-0.286511173973333
-3	3/4	0.090320001280002
-2	$-3/20$	-0.020779405824000
-1	1/60	0.0024845946880000
0	0	0

Tableau 3 – Coefficients a_l^d des schémas décentrés FDoGDp, où G et D sont les nombres de points à gauche et à droite [16].

l	FDo46d	FDo37d	FDo28d	FDo19d	FDo010d
-4	0.016756572303	–	–	–	–
-3	-0.117478455239	-0.013277273810	–	–	–
-2	0.411034935097	0.115976072920	0.057982271137	–	–
-1	-1.130286765151	-0.617479187931	-0.536135360383	-0.180022054228	–
0	0.341435872100	-0.274113948206	-0.264089548967	-1.237550583044	-2.391602219538
1	0.556396830543	1.086208764655	0.917445877606	2.484731692990	5.832490322294
2	-0.082525734207	-0.402951626982	-0.169688364841	-1.810320814061	-7.650218001182
3	0.003565834658	0.131066986242	-0.029716326170	1.112990048440	7.907810563576
4	0.001173034777	-0.028154858354	0.029681617641	-0.481086916514	-5.922599052629
5	-0.000071772671	0.002596328316	-0.005222483773	0.126598690230	3.071037015445
6	-0.000000352273	0.000128743150	-0.000118806260	-0.015510730165	-1.014956769726
7	–	0.0	-0.000118806260	0.000021609059	0.170022256519
8	–	–	-0.000020069730	0.000156447571	0.002819958377
9	–	–	–	-0.000007390277	-0.004791009708
10	–	–	–	–	-0.000013063429

Tableau 4 – Coefficients α_j de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 à six sous-étapes [34].

j	α_j
1	0.1179799016288171
2	0.1846469664944847
3	0.2466236043095879
4	0.3318395427356208
5	0.5
6	1

Tableau 5 – Coefficients d_l du filtre sélectif d'ordre 6 optimisé SFo11p [34] ($d_l = -d_{-l}$).

l	d_l
−5	−0.002999540834789
−4	0.0187216091572037
−3	−0.059227575575744
−2	0.1237559487873421
−1	−0.187772883589467
0	0.2150448841109084

Tableau 6 – Coefficients d_l^d des filtres décentrés SFoGDp, où G et D sont les nombres de points disponibles à gauche et à droite [16].

l	FSo46d	FSo37d	FSo28d	FSo19d	FSo010d
−4	0.008391235145	–	–	–	–
−3	−0.047402506444	−0.000054596010	–	–	–
−2	0.121438547725	0.042124772446	0.052523901012	–	–
−1	−0.200063042812	−0.173103107841	−0.206299133811	−0.085777408970	–
0	0.240069047836	0.299615871352	0.353527998250	0.277628171524	0.320882352941
1	−0.207269200140	−0.276543612935	−0.348142394842	−0.356848072173	−0.465
2	0.122263107844	0.131223506571	0.181481803619	0.223119093072	0.179117647059
3	−0.047121062819	−0.023424966418	0.009440804370	−0.057347064865	−0.035
4	0.009014891495	0.013937561779	−0.077675100452	−0.000747264596	0
5	0.001855812216	−0.024565095706	0.044887364863	−0.000027453993	0
6	−0.001176830044	0.013098287852	−0.009971961849	0	0
7	–	−0.002308621090	0.000113359420	0	0
8	–	–	0.000113359420	0	0

Tableau 7 – Coefficients c_l du filtre adaptatif [42] ($c_{1-l} = -c_l$).

l	c_l
1	−0.210383
2	0.039617

Références

[1] Anderson, W. K., Newman, J. C., Whitfield, D. L. et Nielsen, E. J., "Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables", *AIAA J.*, vol. 39, n° 1, p. 56-63, 2001. doi : 10.2514/2.1270.

[2] André, B., "Étude expérimentale de l'effet du vol sur le bruit de choc de jets supersoniques sous-détendus", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2012. adresse : http://www.theses.fr/2012ECDL0042/document.

[3] Arthurs, D. et Ziada, S., "Development of a feedback model for the high-speed impinging planar jet", *Exp. Fluids*, vol. 55, n° 5, p. 1723, 2014. doi : 10.1007/s00348-014-1723-7.

[4] Arthurs, D. et Ziada, S., "Self-excited oscillations of a high-speed impinging planar jet", *J. Fluids Struct.*, vol. 34, p. 236-258, 2012. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2012.06.002.

[5] Astley, R., Agarwal, A., Joseph, P., Self, R., Smith, M., Sugimoto, R. et Tester, B., "Predicting and reducing aircraft noise", *14th Int. Cong. Sound Vib.*, 2007. adresse : https://eprints.soton.ac.uk/50463/.

[6] Atvars, J., Schubert, L. K. et Ribner, H. S., "Refraction of sound from a point source placed in an air jet", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 37, n° 1, p. 168-170, 2005. doi : 10.1121/1.1909297.

[7] Babucke, A., Kloker, M. et Rist, U., "DNS of a plane mixing layer for the investigation of sound generation mechanisms", *Comput. Fluids*, vol. 37, n° 4, p. 360-368, 2008. doi : 10.1016/j.compfluid.2007.02.002.

[8] Bailly, C. et Comte-Bellot, G., *Turbulence* (Experimental Fluid Mechanics). Springer International Publishing, 2015, isbn : 9783319161600. doi : 10.1007/978-3-319-16160-0.

[9] Bailly, C., Bogey, C. et Marsden, O., "Progress in direct noise computation", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 9, n° 1-2, p. 123-143, 2010. doi : 10.1260/1475-472X.9.1-2.123.

[10] Bailly, C. et Fujii, K., "High-speed jet noise", *Mech. Eng. Rev.*, vol. 3, n° 1, p. 15-00 496, 2016. doi : 10.1299/mer.15-00496.

[11] Barone, M. F. et Lele, S. K., "Receptivity of the compressible mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 540, p. 301-335, 2005. doi : 10.1017/S0022112005005884.

[12] Barré, S., "Étude numérique et expérimentale du bruit aérodynamique avec application aux jets ronds subsoniques", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2006. adresse : http://www.theses.fr/2006ECDL0009.

[13] Bell, J. H. et Mehta, R. D., "Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers", *AIAA J.*, vol. 28, n° 12, p. 2034-2042, 1990. doi : 10.2514/3.10519.

[14] Berland, J., "Modélisation des erreurs numériques dans une simulation des grandes échelles et étude du screech dans un jet rectangulaire supersonique", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2006. adresse : http://www.theses.fr/2006ECDL0019.

[15] Berland, J., Bogey, C. et Bailly, C., "Numerical study of screech generation in a planar supersonic jet", *Phys. Fluids*, vol. 19, n° 7, p. 075-105, 2007. doi : 10.1063/1.2747225.

[16] Berland, J., Bogey, C., Marsden, O. et Bailly, C., "High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems", *J. Comput. Phys.*, vol. 224, n° 2, p. 637-662, 2007. doi : 10.1016/j.jcp.2006.10.017.

[17] Bernal, L. et Roshko, A., "Streamwise vortex structure in plane mixing layers", *J. Fluid Mech.*, vol. 170, p. 499-525, 1986. doi : 10.1017/S002211208600099X.

[18] Bewley, T. R., Moin, P. et Temam, R., "DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms", *J. Fluid Mech.*, vol. 447, p. 179-225, 2001. doi : 10.1017/S0022112001005821.

[19] Blonigan, P. J. et Wang, Q., "Multiple shooting shadowing for sensitivity analysis of chaotic dynamical systems", *J. Comput. Phys.*, vol. 354, p. 447-475, 2018. doi : 10.1016/j.jcp.2017.10.032.

[20] Blonigan, P. J., Wang, Q., Nielsen, E. J. et Diskin, B., "Least-squares shadowing sensitivity analysis of chaotic flow around a two-dimensional airfoil", *AIAA J.*, vol. 56, n° 2, p. 658-672, 2018. doi : 10.2514/1.J055389.

[21] Bodony, D. J. et Lele, S. K., "Current status of jet noise predictions using large-eddy simulation", *AIAA J.*, vol. 46, n° 2, p. 364-380, 2008. doi : 10.2514/1.24475.

[22] Bodony, D., "Understanding the role of tempreature in free shear flows via modification of the dynamics of the large scales", *CFTR, Proc. Summer Program*, p. 227-236, 2010. adresse : https://web.stanford.edu/group/ctr/Summer/SP10/4_02_bodony.pdf.

[23] Bogdanoff, D., "Compressibility effects in turbulent shear layers", *AIAA J.*, vol. 21, n° 6, p. 926-927, 1983. doi : 10.2514/3.60135.

[24] Bogey, C. et Bailly, C., "Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far-field formulation and validation test cases", *Acta. Acust.*, vol. 88, n° 4, p. 463-471, 2002.

[25] Bogey, C. et Bailly, C., "Large-eddy simulations of transitional round jets: influence of the Reynolds number on flow development and energy dissipation", *Phys. Fluids*, vol. 18, n° 6, p. 065-101, 2006. DOI : 10.1063/1.2204060.

[26] Bogey, C. et Bailly, C., "An analysis of the correlations between the turbulent flow and the sound pressure fields of subsonic jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 583, p. 71-97, 2007. DOI : 10.1017/S002211200700612X.

[27] Bogey, C., Marsden, O. et Bailly, C., "Influence of initial turbulence level on the flow and sound fields of a subsonic jet at a diameter-based Reynolds number of 10^5", *J. Fluid Mech.*, vol. 701, p. 352-385, 2012. DOI : 10.1017/jfm.2012.162.

[28] Bogey, C., "Effects of nozzle-lip thickness on the tones in the near-field pressure spectra and on the initial instability waves of jets", *AIAA Paper 2023-921*, DOI : 10.2514/6.2023-3935.

[29] Bogey, C., "Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2000. adresse : http://www.theses.fr/2000ECDL0011.

[30] Bogey, C., "Grid sensitivity of flow field and noise of high-Reynolds-number jets computed by large-eddy simulation", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 17, n° 4-5, p. 399-424, 2018. DOI : 10.1177/1475472X18778287.

[31] Bogey, C., "Acoustic tones in the near-nozzle region of jets: characteristics and variations between Mach numbers 0.5 and 2", *J. Fluid Mech.*, vol. 921, A3, 2021. DOI : 10.1017/jfm.2021.426.

[32] Bogey, C., "Interactions between upstream-propagating guided jet waves and shear-layer instability waves near the nozzle of subsonic and nearly ideally expanded supersonic free jets with laminar boundary layers", *J. Fluid Mech.*, vol. 949, A41, 2022. DOI : 10.1017/jfm.2022.776.

[33] Bogey, C., "Tones in the acoustic far field of jets in the upstream direction", *AIAA J.*, vol. 60, n° 4, p. 2397-2406, 2022. DOI : 10.2514/1.J061013.

[34] Bogey, C. et Bailly, C., "A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations", *J. Comput. Phys.*, vol. 194, n° 1, p. 194-214, 2004. DOI : 10.1016/j.jcp.2003.09.003.

[35] Bogey, C. et Bailly, C., "Decrease of the effective Reynolds number with eddy-viscosity subgrid modeling", *AIAA J.*, vol. 43, n° 2, p. 437-439, 2005. doi : 10.2514/1.10665.

[36] Bogey, C. et Bailly, C., "Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic Smagorinsky model", *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 27, n° 4, p. 603-610, 2006. doi : 10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.02.008.

[37] Bogey, C. et Bailly, C., "Influence of nozzle-exit boundary-layer conditions on the flow and acoustic fields of initially laminar jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 663, p. 507-538, 2010. doi : 10.1017/S0022112010003605.

[38] Bogey, C., Bailly, C. et Juve, D., "Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer", *AIAA J.*, vol. 38, n° 12, p. 2210-2218, 2000. doi : 10.2514/2.906.

[39] Bogey, C., Bailly, C. et Juvé, D., "Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible large eddy simulation", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 16, p. 273-297, 2003. doi : 10.1007/s00162-002-0079-4.

[40] Bogey, C., Barré, S., Fleury, V., Bailly, C. et Juvé, D., "Experimental study of the spectral properties of near-field and far-field jet noise", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 6, n° 2, p. 73-92, 2007. doi : 10.1260/147547207781041868.

[41] Bogey, C., Barré, S. et Bailly, C., "Direct computation of the noise generated by subsonic jets originating from a straight pipe nozzle", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 7, n° 1, p. 1-21, 2008. doi : 10.1260/147547208784079917.

[42] Bogey, C., de Cacqueray, N. et Bailly, C., "A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations", *J. Comput. Phys.*, vol. 228, n° 5, p. 1447-1465, 2009. doi : 10.1016/j.jcp.2008.10.042.

[43] Bogey, C., de Cacqueray, N. et Bailly, C., "Finite differences for coarse azimuthal discretization and for reduction of effective resolution near origin of cylindrical flow equations", *J. Comput. Phys.*, vol. 230, n° 4, p. 1134-1146, 2011. doi : 10.1016/j.jcp.2010.10.031.

[44] Bogey, C. et Gojon, R., "Feedback loop and upwind-propagating waves in ideally expanded supersonic impinging round jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 823, p. 562-591, 2017. doi : 10.1017/jfm.2017.334.

[45] Bogey, C. et Marsden, O., "Identification of the effects of the nozzle-exit boundary-layer thickness and its corresponding Reynolds number in initially highly disturbed subsonic jets", *Phys. Fluids*, vol. 25, n° 5, p. 055-106, 2013. doi : 10.1063/1.4807071.

[46] Bogey, C. et Marsden, O., "Numerical investigation of temperature effects on properties of subsonic turbulent jets", *AIAA Paper 2013-2140*, 2013. doi : 10.2514/6.2013-2140.

[47] Bogey, C. et Marsden, O., "Simulations of initially highly disturbed jets with experiment-like exit boundary layers", *AIAA J.*, vol. 54, n° 4, p. 1299-1312, 2016. doi : 10.2514/1.J054426.

[48] Bogey, C., Marsden, O. et Bailly, C., "On the spectra of nozzle-exit velocity disturbances in initially nominally turbulent, transitional jets", *Phys. Fluids*, vol. 23, n° 9, p. 091 702, 2011. doi : 10.1063/1.3642642.

[49] Bogey, C., Marsden, O. et Bailly, C., "Effects of moderate Reynolds numbers on subsonic round jets with highly disturbed nozzle-exit boundary layers", *Phys. Fluids*, vol. 24, n° 10, p. 105-107, 2012. doi : 10.1063/1.4757667.

[50] Bogey, C. et Sabatini, R., "Effects of nozzle-exit boundary-layer profile on the initial shear-layer instability, flow field and noise of subsonic jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 876, p. 288-325, 2019. doi : 10.1017/jfm.2019.546.

[51] Borggaard, J. et Burns, J., "A PDE sensitivity equation method for optimal aerodynamic design", *J. Comput. Phys.*, vol. 136, n° 2, p. 366-384, 1997. doi : 10.1006/jcph.1997.5743.

[52] Breen, N. P. et Ahuja, K. K., "Measuring jet noise source locations with acoustic beamforming", *AIAA Paper 2015-0735*, 2015. doi : 10.2514/6.2015-0735.

[53] Brès, G., Jordan, P., Jaunet, V., Le Rallic, M., Cavalieri, A. V. G., Towne, A., Lele, S. K., Colonius, T. et Schmidt, O. T., "Importance of the nozzle-exit boundary-layer state in subsonic turbulent jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 851, p. 83-124, 2018. doi : 10.1017/jfm.2018.476.

[54] Bridges, J. et Hussain, A., "Roles of initial condition and vortex pairing in jet noise", *J. Sound Vib.*, vol. 117, n° 2, p. 289-311, 1987. doi : 10.1016/0022-460X(87)90540-2.

[55] Browand, F. K. et Weidman, P. D., "Large scales in the developing mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 76, n° 1, p. 127-144, 1976. doi : 10.1017/S0022112076003169.

[56] Browand, F. et Latigo, B., "Growth of the two-dimensional mixing layer from a turbulent and nonturbulent boundary layer", *Phys. Fluids*, vol. 22, n° 6, p. 1011-1019, 1979. doi : 10.1063/1.862705.

[57] Browand, F. et Winant, C., "Laboratory observations of shear-layer instability in a stratified fluid", *Bound.-Layer Meteorol.*, vol. 5, p. 67-77, 1973. doi : 10.1007/BF02188312.

[58] Brown, G. L. et Roshko, A., "On density effects and large structure in turbulent mixing layers", *J. Fluid Mech.*, vol. 64, n° 4, p. 775-816, 1974. doi : 10.1017/S002211207400190X.

[59] Buchta, D., Vishnampet, R., Bodony, D. J. et Freund, J. B., "A discrete adjoint-based shape optimization for shear-layer-noise reduction", *AIAA Paper 2016-2776*, 2016. doi : 10.2514/6.2016-2776.

[60] Cacqueray, N. de et Bogey, C., "Noise of an overexpanded Mach 3.3 jet: non-linear propagation effects and correlations with flow", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 13, n° 7-8, p. 607-632, 2014. doi : 10.1260/1475-472X.13.7-8.607.

[61] Cacqueray, N. d., "Méthodes numériques pour les écoulements supersoniques avec application au calcul du bruit rayonné par un jet sur-détendu", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2010. adresse : http://www.theses.fr/2010ECDL0037.

[62] Capuano, M., Bogey, C. et Spelt, P., "Simulations of viscous and compressible gas-gas flows using high-order finite difference schemes", *J. Comput. Phys.*, vol. 361, p. 56-81, 2018, issn : 0021-9991. doi : 10.1016/j.jcp.2018.01.047.

[63] Cardesa, J., Fiévet, R., Piot, E., Deniau, H. et Airiau, C., "Optimizing an acoustic liner by automatic differentiation of a compressible flow solver", *J. Comput. Sci.*, vol. 61, p. 101 703, 2022. doi : 10.1016/j.jocs.2022.101703.

[64] Cardesa, J., Hascoët, L. et Airiau, C., "Adjoint computations by algorithmic differentiation of a parallel solver for time-dependent PDEs", *J. Comput. Sci.*, vol. 45, p. 101 155, 2020. doi : 10.1016/j.jocs.2020.101155.

[65] Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Colonius, T. et Gervais, Y., "Axisymmetric superdirectivity in subsonic jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 704, p. 388-420, 2012. doi : 10.1017/jfm.2012.247.

[66] Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Gervais, Y., Wei, M. et Freund, J. B., "Intermittent sound generation and its control in a free-shear flow", *Phys. Fluids*, vol. 22, n° 11, p. 115 113, 2010. doi : 10.1063/1.3517297.

[67] Cerviño, L. I., Bewley, T., Freund, J. B. et Lele, S. K., "Perturbation and adjoint analyses of flow-acoustic interactions in an unsteady 2D jet", *CTR Proc. Summ. Prog*, p. 27-39, 2002. adresse : https://web.stanford.edu/group/ctr/ctrsp02/bewley.pdf.

[68] Cerviño, L. I. et Bewley, T. R., "On the extension of the complex-step derivative technique to pseudospectral algorithms", *J. Comput. Phys.*, vol. 187, n° 2, p. 544-549, 2003. doi : 10.1016/S0021-9991(03)00123-2.

[69] Chandramoorthy, N., Fernandez, P., Talnikar, C. et Wang, Q., "Feasibility analysis of ensemble sensitivity computation in turbulent flows", *AIAA J.*, vol. 57, n° 10, p. 4514-4526, 2019. doi : 10.2514/1.J058127.

[70] Chen, S., Gojon, R. et Mihaescu, M., "Flow and aeroacoustic attributes of highly-heated transitional rectangular supersonic jets", *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 114, p. 106 747, 2021. doi : 10.1016/j.ast.2021.106747.

[71] Chinzei, N, Masuya, G., Komuro, T, Murakami, A et Kudou, K, "Spreading of two-stream supersonic turbulent mixing layers", *Phys. Fluids*, vol. 29, n° 5, p. 1345-1347, 1986. doi : 10.1063/1.865698.

[72] Chu, B.-T. et Kovásznay, L. S. G., "Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas", *J. Fluid Mech.*, vol. 3, n° 5, p. 494-514, 1958. doi : 10.1017/S0022112058000148.

[73] Clemens, N. et Mungal, M., "Effects of sidewall disturbances on the supersonic mixing layer", *J. Propuls. Power*, vol. 8, n° 1, p. 249-251, 1992. doi : 10.2514/3.23468.

[74] Colin, E., Etienne, S., Pelletier, D. et Borggaard, J., "Application of a sensitivity equation method to turbulent flows with heat transfer", *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 44, n° 11, p. 1024-1038, 2005. doi : 10.1016/j.ijthermalsci.2005.04.002.

[75] Colonius, T., Lele, S. K. et Moin, P., "Sound generation in a mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 330, 1997. doi : 10.1017/S0022112096003928.

[76] Crow, S. C. et Champagne, F. H., "Orderly structure in jet turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 48, n° 3, p. 547-591, 1971. doi : 10.1017/S0022112071001745.

[77] Curle, N., "The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound", *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Sci.*, vol. 231, n° 1187, p. 505-514, 1955. doi : 10.1098/rspa.1955.0191.

[78] Day, M. J., Reynolds, W. C. et Mansour, N. N., "The structure of the compressible reacting mixing layer: Insights from linear stability analysis", *Phys. Fluids*, vol. 10, n° 4, p. 993-1007, 1998. doi : 10.1063/1.869619.

[79] Deneuve, A., Druault, P., Marchiano, R. et Sagaut, P., "A coupled time-reversal/complex differentiation method for aeroacoustic sensitivity analysis: towards a source detection procedure", *J. Fluid Mech.*, vol. 642, p. 181, 2010. doi : 10.1017/S0022112009991704.

[80] Doak, P., "Momentum potential theory of energy flux carried by momentum fluctuations", *J. Sound Vib.*, vol. 131, n° 1, p. 67-90, 1989. doi : 10.1016/0022-460X(89)90824-9.

[81] Dragna, D., Blanc-Benon, P. et Poisson, F., "Time-domain solver in curvilinear coordinates for outdoor sound propagation over complex terrain", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 133, n° 6, p. 3751-3763, 2013. doi : 10.1121/1.4803863.

[82] Dragna, D., Cotté, B., Blanc-Benon, P. et Poisson, F., "Time-domain simulations of outdoor sound propagation with suitable impedance boundary conditions", *AIAA J.*, vol. 49, n° 7, p. 1420-1428, 2011. doi : 10.2514/1.J050636.

[83] Druault, P., Marchiano, R. et Sagaut, P., "Localization of aeroacoustic sound sources in viscous flows by a time reversal method", *J. Sound Vib.*, vol. 332, n° 15, p. 3655-3669, 2013. doi : 10.1016/j.jsv.2013.02.006.

[84] Drubka, R., Reisenthel, P et Nagib, H., "The dynamics of low initial disturbance turbulent jets", *Phys. Fluids*, vol. 1, n° 10, p. 1723-1735, 1989. doi : 10.1063/1.857537.

[85] Duvigneau, R. et Pelletier, D., "A sensitivity equation method for fast evaluation of nearby flows and uncertainty analysis for shape parameters", *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 20, n° 7, p. 497-512, 2006. doi : 10.1080/10618560600910059.

[86] Duvigneau, R. et Pelletier, D., "On accurate boundary conditions for a shape sensitivity equation method", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 50, n° 2, p. 147-164, 2006. doi : 10.1002/fld.1048.

[87] Edgington-Mitchell, D., "Aeroacoustic resonance and self-excitation in screeching and impinging supersonic jets - A review", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 18, n° 2-3, p. 118-188, 2019. doi : 10.1177/1475472X19834521.

[88] Edgington-Mitchell, D., Jaunet, V., Jordan, P., Towne, A., Soria, J. et Honnery, D., "Upstream-travelling acoustic jet modes as a closure mechanism for screech", *J. Fluid Mech.*, vol. 855, R1, 2018. doi : 10.1017/jfm.2018.642.

[89] Edgington-Mitchell, D., Li, X., Liu, N., He, F., Wong, T. Y., Mackenzie, J. et Nogueira, P., "A unifying theory of jet screech", *J. Fluid Mech.*, vol. 945, A8, 2022. doi : 10.1017/jfm.2022.549.

[90] Edgington-Mitchell, D., Weightman, J., Lock, S., Kirby, R., Nair, V., Soria, J. et Honnery, D., "The generation of screech tones by shock leakage", *J. Fluid Mech.*, vol. 908, A46, 2021. doi : 10.1017/jfm.2020.945.

[91] Edgington-Mitchell, D. M. et Nogueira, P. A., "The guided-jet mode in compressible jets", *AIAA Paper 2023-3647*, 2023. doi : 10.2514/6.2023-3647.

[92] Eldred, K., "Acoustic loads generated by the propulsion system", *NASA SP-8072*, 1971. adresse : https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19710023719/downloads/19710023719.pdf.

[93] Fauconnier, D., Bogey, C. et Dick, E., "On the performance of relaxation filtering for large-eddy simulation", *J. Turbul.*, vol. 14, n° 1, p. 22-49, 2013. doi : 10.1080/14685248.2012.740567.

[94] Ferreira, F., Fiore, M., Parisot-Dupuis, H. et Gojon, R., "Neutral acoustic wave modes in supersonic impinging jets", *AIAA J.*, vol. 61, n° 2, p. 955-964, 2023. doi : 10.2514/1.J062262.

[95] Ffowcs Williams, J. E., "Hydrodynamic Noise", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 1, n° 1, p. 197-222, 1969. doi : 10.1146/annurev.fl.01.010169.001213.

[96] Ffowcs-Williams, J. E. et Lighthill, M. J., "The noise from turbulence convected at high speed", *Philos. Trans. Royal Soc. A: Math. Phys. Sci.*, vol. 255, n° 1061, p. 469-503, 1963. doi : 10.1098/rsta.1963.0010.

[97] Fiorini, C., Chalons, C. et Duvigneau, R., "A modified sensitivity equation method for the Euler equations in presence of shocks", *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, vol. 36, n° 4, p. 839-867, 2020. doi : 10.1002/num.22454.

[98] Fisher, M. J., Lush, P. A. et Harper Bourne, M., "Jet noise", *J. Sound Vib.*, vol. 28, n° 3, p. 563-585, 1973. doi : 10.1016/S0022-460X(73)80040-9.

[99] Fontaine, R., Elliott, G. S., Austin, J. M. et Freund, J. B., "Very near-nozzle shear-layer turbulence and jet noise", *J. Fluid Mech.*, vol. 770, p. 27-51, 2015. doi : 10.1017/jfm.2015.119.

[100] Fortuné, V., "Étude par simulation numérique directe du rayonnement acoustique de couches de mélange isothermes et anisothermes", thèse de doct., Université de Poitiers, 2000, III-161 p. adresse : https://theses.hal.science/tel-00006902.

[101] Fortuné, V., Lamballais, É. et Gervais, Y., "Noise radiated by a non-isothermal, temporal mixing layer. Part I: direct computation and prediction using compressible DNS", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 18, p. 61-81, 2004. doi : 10.1007/s00162-004-0114-8.

[102] Freund, J. B. et Fleischman, T. G., "Ray traces through unsteady jet turbulence", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 1, n° 1, p. 83-96, 2002. doi : 10.1260/1475472021502686.

[103] Freund, J., "Adjoint-based optimization for understanding and suppressing jet noise", *J. Sound Vib.*, vol. 330, n° 17, p. 4114-4122, 2011. doi : 10.1016/j.jsv.2011.02.009.

[104] Freund, J. B., "Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at Mach 0.9", *J. Fluid Mech.*, vol. 438, p. 277-305, 2001. doi : 10.1017/S0022112001004414.

[105] Freund, J. B., Lele, S. K. et Moin, P., "Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. Part 1. Turbulence and growth rate", *J. Fluid Mech.*, vol. 421, p. 229-267, 2000. doi : 10.1017/S0022112000001622.

[106] Freymuth, P., "On transition in a separated laminar boundary layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 25, n° 4, p. 683-704, 1966. doi : 10.1017/S002211206600034X.

[107] Gaster, M, "The growth of three-dimensional disturbances in inviscid flows", *J. Fluid Mech.*, vol. 43, n° 4, p. 837-839, 1970. doi : 10.1017/S0022112070002793.

[108] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. et Cabot, W. H., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", *Phys. Fluids*, vol. 3, n° 7, p. 1760-1765, 1991. doi : 10.1063/1.857955.

[109] Gloerfelt, X., Bailly, C. et Juvé, D., "Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods", *J. Sound Vib.*, vol. 266, n° 1, p. 119-146, 2003. doi : 10.1016/S0022-460X(02)01531-6.

[110] Gloerfelt, X., "Cavity noise", *Von Karman Institute Lecture Series*, vol. 3, 2009.

[111] Goebel, S. et Dutton, J., "An experimental study of turbulent compressible mixing layers", *AIAA J.*, vol. 29, n° 4, p. 538-546, 1991. doi : 10.2514/3.10617.

[112] Gojon, R., Bogey, C. et Mihaescu, M., "Oscillation modes in screeching jets", *AIAA J.*, vol. 56, n° 7, p. 2918-2924, 2018. doi : 10.2514/1.J056936.

[113] Gojon, R., "Étude de jets supersoniques impactant une paroi par simulation numérique : Analyse aérodynamique et acoustique des mécanismes de rétroaction", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2015. adresse : http://www.theses.fr/2015ECDL0039.

[114] Gojon, R. et Bogey, C., "Flow structure oscillations and tone production in underexpanded impinging round jets", *AIAA J.*, vol. 55, n° 6, p. 1792-1805, 2017. doi : 10.2514/1.J055618.

[115] Gojon, R. et Bogey, C., "Numerical study of the flow and the near acoustic fields of an underexpanded round free jet generating two screech tones", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 16, n° 7-8, p. 603-625, 2017. doi : 10.1177/1475472X17727606.

[116] Gojon, R. et Bogey, C., "Flow features near plate impinged by ideally expanded and underexpanded round jets", *AIAA J.*, vol. 56, n° 2, p. 445-457, 2018. doi : 10.2514/1.J056421.

[117] Gojon, R. et Bogey, C., "Effects of the angle of impact on the aeroacoustic feedback mechanism in supersonic impinging planar jets", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 18, n° 2-3, p. 258-278, 2019. doi : 10.1177/1475472X18812808.

[118] Gojon, R., Bogey, C. et Marsden, O., "Investigation of tone generation in ideally expanded supersonic planar impinging jets using large-eddy simulation", *J. Fluid Mech.*, vol. 808, p. 90-115, 2016. doi : 10.1017/jfm.2016.628.

[119] Gojon, R., Gutmark, E. et Mihaescu, M., "Antisymmetric Oscillation Modes in Rectangular Screeching Jets", *AIAA J.*, vol. 57, n° 8, p. 3422-3441, 2019. doi : 10.2514/1.J057514.

[120] Golanski, F., Fortuné, V. et Lamballais, E., "Noise radiated by a non-isothermal, temporal mixing layer: Part II: Prediction using DNS in the framework of low Mach number approximation", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 19, p. 391-416, 2005. doi : 10.1007/s00162-005-0002-x.

[121] Guo, Y. P., "Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems", *J. Fluid Mech.*, vol. 403, p. 201-221, 2000. doi : 10.1017/S0022112099006989.

[122] Hall, J. L., "An experimental investigation of structure, mixing and combustion in compressible turbulent shear layers", thèse de doct., California Institute of Technology, 1991. adresse : https://thesis.library.caltech.edu/3727/1/Hall_jl_1991.pdf.

[123] Han, S., Li, H., Luo, Y., Wang, Y., Ma, R. et Zhang, S., "A hydro-acoustic mode decomposition method for velocity and pressure field and application to a subsonic turbulent jet", *Phys. Fluids*, vol. 35, n° 7, p. 076 107, 2023. doi : 10.1063/5.0157377.

[124] Han, S., Luo, Y., Li, H., Wu, C., Liu, X. et Zhang, S., "Data-driven and physical property-based hydro-acoustic mode decomposition", *Phys. Fluids*, vol. 34, n° 2, p. 026 102, 2022, issn : 1070-6631. doi : 10.1063/5.0079906.

[125] Harper-Bourne, M., "Some observations on the noise of heated jets", *QinetiQ Report 07/01953*, 2007.

[126] Hay, A., Borggaard, J., Akhtar, I. et Pelletier, D., "Reduced-order models for parameter dependent geometries based on shape sensitivity analysis", *J. Comput. Phys.*, vol. 229, n° 4, p. 1327-1352, 2010. doi : 10.1016/j.jcp.2009.10.033.

[127] Hileman, J. I., Thurow, B. S., Caraballo, E. J. et Samimy, M., "Large-scale structure evolution and sound emission in high-speed jets: real-time visualization with simultaneous acoustic measurements", *J. Fluid Mech.*, vol. 544, p. 277-307, 2005. doi : 10.1017/S002211200500666X.

[128] Ho, C.-M. et Huang, L.-S., "Subharmonics and vortex merging in mixing layers", *J. Fluid Mech.*, vol. 119, p. 443-473, 1982. doi : 10.1017/S0022112082001438.

[129] Ho, C.-M. et Huerre, P., "Perturbed free shear layers", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 16, n° 1, p. 365-422, 1984. doi : 10.1146/annurev.fl.16.010184.002053.

[130] Ho, C.-M. et Nosseir, N., "Dynamics of an impinging jet. Part 1. The feedback phenomenon", *J. Fluid Mech.*, vol. 105, p. 119-142, 1981. doi : 10.1017/S0022112081003133.

[131] Howe, M. S., "Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute", *J. Fluid Mech.*, vol. 71, n° 4, p. 625-673, 1975. doi : 10.1017/S0022112075002777.

[132] Howe, M. S., *Acoustics of Fluid-Structure Interactions* (Cambridge Monographs on Mechanics). Cambridge University Press, 1998. doi : 10.1017/CBO9780511662898.

[133] Hristova, H., Étienne, S., Pelletier, D. et Borggaard, J., "A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 50, n° 7, p. 817-844, 2006. doi : 10.1002/fld.1079.

[134] Hu, F., Hussaini, M. et Manthey, J., "Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics", *J. Comput. Phys.*, vol. 124, n° 1, p. 177-191, 1996. doi : https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0052.

[135] Huber, J. et Illa, S., "Jet noise assessment and sensitivity at aircraft level", *AIAA Paper 2007-3728*, 2007. doi : 10.2514/6.2007-3728.

[136] Hussain, A. K. M. F. et Clark, A. R., "On the coherent structure of the axisymmetric mixing layer: A flow-visualization study", *J. Fluid Mech.*, vol. 104, p. 263-294, 1981. doi : 10.1017/S0022112081002917.

[137] Hussain, A. K. M. F. et Zedan, M. F., "Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer: Effect of the initial fluctuation level", *Phys. Fluids*, vol. 21, n° 9, p. 1475-1481, 1978. doi : 10.1063/1.862410.

[138] Hussain, A. K. M. F. et Zedan, M. F., "Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer: Effects of the initial momentum thickness", *Phys. Fluids*, vol. 21, n° 7, p. 1100-1112, 1978. doi : 10.1063/1.862349.

[139] Hussain, A. K. M. F., "Coherent structures and turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 173, p. 303-356, 1986. doi : 10.1017/S0022112086001192.

[140] Jackson, T. L. et Grosch, C. E., "Absolute/convective instabilities and the convective Mach number in a compressible mixing layer", *Phys. Fluids*, vol. 2, n° 6, p. 949-954, 1990. doi : 10.1063/1.857655.

[141] Jackson, T. et Grosch, C., "Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 208, p. 609-637, 1989. doi : 10.1017/S002211208900296X.

[142] Jameson, A., Schmidt, W. et Turkel, E., "Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes", *AIAA Paper 1981-1259*, 1981. doi : 10.2514/6.1981-1259.

[143] Jaunet, V., Mancinelli, M., Jordan, P., Towne, A., Edgington-Mitchell, D. M., Lehnasch, G. et Girard, S., "Dynamics of round jet impingement", *AIAA Paper 2019-2769*, 2019. doi : 10.2514/6.2019-2769.

[144] Jordan, P. et Colonius, T., "Wave packets and turbulent jet noise", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 45, n° 1, p. 173-195, 2013. doi : 10.1146/annurev-fluid-011212-140756.

[145] Jordan, P., Jaunet, V., Towne, A., Cavalieri, A. V. G., Colonius, T., Schmidt, O. et Agarwal, A., "Jet-flap interaction tones", *J. Fluid Mech.*, vol. 853, p. 333-358, 2018. doi : 10.1017/jfm.2018.566.

[146] Juvé, D., Sunyach, M. et Comte-Bellot, G., "Intermittency of the noise emission in subsonic cold jets", *J. Sound Vib.*, vol. 71, n° 3, p. 319-332, 1980. doi : 10.1016/0022-460X(80)90416-2.

[147] Juve, D., Sunyach, M. et Comte-Bellot, G., "Filtered azimuthal correlations in the acoustic far field of a subsonic jet", *AIAA J.*, vol. 17, n° 1, p. 112-113, 1979. doi : 10.2514/3.61076.

[148] Kaplan, O., Jordan, P., Cavalieri, A. et Brès, G. A., "Nozzle dynamics and wavepackets in turbulent jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 923, A22, 2021. doi : 10.1017/jfm.2021.566.

[149] Karami, S. et Soria, J., "Influence of nozzle external geometry on wavepackets in under-expanded supersonic impinging jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 929, A20, 2021. doi : 10.1017/jfm.2021.822.

[150] Karami, S., Stegeman, P. C., Ooi, A., Theofilis, V. et Soria, J., "Receptivity characteristics of under-expanded supersonic impinging jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 889, A27, 2020. doi : 10.1017/jfm.2020.63.

[151] Karon, A. et Ahuja, K., "Effect of nozzle-exit boundary layer on jet noise", *AIAA Paper 2013-615*, doi : 10.2514/6.2013-615.

[152] Kim, J., Bodony, D. J. et Freund, J. B., "Adjoint-based control of loud events in a turbulent jet", *J. Fluid Mech.*, vol. 741, p. 28-59, 2014. doi : 10.1017/jfm.2013.654.

[153] Kim, J. et Choi, H., "Large eddy simulation of a circular jet: effect of inflow conditions on the near field", *J. Fluid Mech.*, vol. 620, p. 383-411, 2009. doi : 10.1017/S0022112008004722.

[154] Kirkman, R. D. et Metzger, M., "Sensitivity analysis of low Reynolds number channel flow using the finite volume method", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 57, n° 8, p. 1023-1045, 2008. doi : 10.1002/fld.1669.

[155] Kirkman, R. D. et Metzger, M., "Direct numerical simulation of sensitivity coefficients in low Reynolds number turbulent channel flow", *J. Turbul.*, vol. 10, N23, 2009. doi : 10.1080/14685240902960173.

[156] Kleinman, R. et Freund, J., "Adjoint-based control of the noise from a turbulent mixing layer", *AIAA Paper 2006-2501*, 2006. doi : 10.2514/6.2006-2501.

[157] Ko, J., Lucor, D. et Sagaut, P., "Sensitivity of two-dimensional spatially developing mixing layers with respect to uncertain inflow conditions", *Phys. Fluids*, vol. 20, n° 7, p. 077 102, 2008. DOI : 10.1063/1.2937465.

[158] Kopiev, V., Zaitsev, M., Chernyshev, S. et Kotova, A., "The role of large-scale vortex in a turbulent jet noise", *AIAA Paper 1999-1839*, 1999. DOI : 10.2514/6.1999-1839.

[159] Kremer, F. et Bogey, C., "Large-eddy simulation of turbulent channel flow using relaxation filtering: Resolution requirement and Reynolds number effects", *Comput. Fluids*, vol. 116, p. 17-28, 2015. DOI : 10.1016/j.compfluid.2015.03.026.

[160] Kusano, K., "Adjoint sensitivity analysis method based on lattice Boltzmann equation for flow-induced sound problems", *Comput. Fluids*, vol. 248, p. 105 662, 2022. DOI : 10.1016/j.compfluid.2022.105662.

[161] Lacerda, J. F., Souza, L. F., Rogenski, J. K. et Mendonça, M. T., "Direct numerical simulation code validation for compressible shear flows using linear stability theory", *J. Aerosp. Technol. Manag.*, vol. 10, e2318, 2018, ISSN : 2175-9146. DOI : 10.5028/jatm.v10.858.

[162] Lau, J. C., "Effects of exit Mach number and temperature on mean-flow and turbulence characteristics in round jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 105, p. 193-218, 1981. DOI : 10.1017/S0022112081003170.

[163] Lau, J. C., Morris, P. J. et Fisher, M. J., "Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter", *J. Fluid Mech.*, vol. 93, n° 1, p. 1-27, 1979. DOI : 10.1017/S0022112079001750.

[164] Laufer, J., Schlinker, R. et Kaplan, R. E., "Experiments on supersonic jet noise", *AIAA J.*, vol. 14, n° 4, p. 489-497, 1976. DOI : 10.2514/3.61388.

[165] Lea, D. J., Allen, M. R. et Haine, T. W., "Sensitivity analysis of the climate of a chaotic system", *Tellus A: Dyn. Meteorol. Oceanogr.*, vol. 52, n° 5, p. 523-532, 2000. DOI : 10.3402/tellusa.v52i5.12283.

[166] Leclerc, E., Sagaut, P. et Mohammadi, B., "On the use of incomplete sensitivities for feedback control of laminar vortex shedding", *Comput. Fluids*, vol. 35, n° 10, p. 1432-1443, 2006. DOI : 10.1016/j.compfluid.2003.09.009.

[167] Lee, S. S. et Bridges, J., "Phased-array measurements of single flow hot jets", *AIAA Paper 2005-2842*, 2005. DOI : 10.2514/6.2005-2842.

[168] Lele, S. K., "Direct numerical simulation of compressible free shear flows", *AIAA Paper 1989-374*, p. 374, 1989. DOI : 10.2514/6.1989-374.

[169] Lele, S. K., "Compressibility effects on turbulence", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 26, n° 1, p. 211-254, 1994. doi : 10.1146/annurev.fl.26.010194.001235.

[170] Lighthill, M. J., "On sound generated aerodynamically I. General theory", *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, vol. 211, n° 1107, p. 564-587, 1952. doi : 10.1098/rspa.1952.0060.

[171] Lilly, D. K., "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", *Phys. Fluids*, vol. 4, n° 3, p. 633-635, 1992. doi : 10.1063/1.858280.

[172] Lorenz, E. N., "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, n° 2, 1963. doi : 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.

[173] Lu, S.-Y. et Sagaut, P., "Direct sensitivity analysis for smooth unsteady compressible flows using complex differentiation", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 53, n° 12, p. 1863-1886, 2007. doi : 10.1002/fld.1386.

[174] Lubert, C. P., Gee, K. L. et Tsutsumi, S., "Supersonic jet noise from launch vehicles: 50 years since NASA SP-8072a)", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 151, n° 2, p. 752-791, 2022. doi : 10.1121/10.0009160.

[175] Lush, P., "Measurements of subsonic jet noise and comparison with theory", *J. Fluid Mech.*, vol. 46, n° 3, p. 477-500, 1971. doi : 10.1017/S002211207100065X.

[176] Lyness, J. N. et Moler, C. B., "Numerical differentiation of analytic functions", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 4, n° 2, p. 202-210, 1967. doi : 10.1137/0704019.

[177] Lyrintzis, A. S. et Coderoni, M., "Overview of the use of large-eddy simulations in jet aeroacoustics", *AIAA J.*, vol. 58, n° 4, p. 1620-1638, 2020. doi : 10.2514/1.J058498.

[178] Mahieu, J.-N., Étienne, S., Pelletier, D. et Borggaard, J., "A second-order sensitivity equation method for laminar flow", *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 19, n° 2, p. 143-157, 2005. doi : 10.1080/10618560410001729144.

[179] Mancinelli, M., Jaunet, V., Jordan, P. et Towne, A., "Screech-tone prediction using upstream-travelling jet modes", *Exp. Fluids*, vol. 60, p. 1-9, 2019. doi : 10.1007/s00348-018-2673-2.

[180] Margnat, F. et Gloerfelt, X., "On compressibility assumptions in aeroacoustic integrals: A numerical study with subsonic mixing layers", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 135, n° 6, p. 3252-3263, 2014. doi : 10.1121/1.4875561.

[181] Marinc, D. et Foysi, H., "Investigation of a continuous adjoint-based optimization procedure for aeroacoustic control of plane jets", *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 38, p. 200-212, 2012. doi : 10.1016/j.ijheatfluidflow.2012.07.005.

[182] Marsden, O., Bailly, C., Bogey, C. et Jondeau, E., "Investigation of flow features and acoustic radiation of a round cavity", *J. Sound Vib.*, vol. 331, n° 15, p. 3521-3543, 2012. doi : 10.1016/j.jsv.2012.03.017.

[183] Marsden, O., Bogey, C. et Bailly, C., "A study of infrasound propagation based on high-order finite difference solutions of the Navier-Stokes equations", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 135, n° 3, p. 1083-1095, 2014. doi : 10.1121/1.4864793.

[184] Marsden, O., Bogey, C. et Bailly, C., "High-order curvilinear simulations of flows around non-cartesian bodies", *J. Comput. Acoust.*, vol. 13, n° 4, p. 731-748, 2005. doi : 10.1142/S0218396X05002906.

[185] Marsden, O., Bogey, C. et Bailly, C., "Direct noise computation of the turbulent flow around a zero-incidence airfoil", *AIAA J.*, vol. 46, n° 4, p. 874-883, 2008. doi : 10.2514/1.29825.

[186] Marsh, A. H., "Noise measurements around a subsonic air jet impinging on a plane, rigid surface", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 33, n° 8, p. 1065-1066, 1961. doi : 10.1121/1.1908894.

[187] Martins, J. R. R. A. et Hwang, J. T., "Review and unification of methods for computing derivatives of multidisciplinary computational models", *AIAA J.*, vol. 51, n° 11, p. 2582-2599, 2013. doi : 10.2514/1.J052184.

[188] Martins, J. R. R. A., Sturdza, P. et Alonso, J. J., "The complex-step derivative approximation", *ACM Trans. Math. Softw.*, vol. 29, n° 3, p. 245-262, 2003. doi : 10.1145/838250.838251.

[189] Melander, M. V., Zabusky, N. J. et Mcwilliams, J. C., "Symmetric vortex merger in two dimensions: causes and conditions", *J. Fluid Mech.*, vol. 195, p. 303-340, 1988. doi : 10.1017/S0022112088002435.

[190] Metcalfe, R. W., Orszag, S. A., Brachet, M. E., Menon, S. et Riley, J. J., "Secondary instability of a temporally growing mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 184, p. 207-243, 1987. doi : 10.1017/S0022112087002866.

[191] Michalke, A, "A note on spatially growing three-dimensional disturbances in a free shear layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 38, n° 4, p. 765-767, 1969. doi : 10.1017/S0022112069002588.

[192] Michalke, A. et Fuchs, H. V., "On turbulence and noise of an axisymmetric shear flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 70, n° 1, p. 179-205, 1975. doi : 10.1017/S0022112075001966.

[193] Michalke, A., "On the inviscid instability of the hyperbolictangent velocity profile", *J. Fluid Mech.*, vol. 19, n° 4, p. 543-556, 1964. doi : 10.1017/S0022112064000908.

[194] Michalke, A., "On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 23, n° 3, p. 521-544, 1965. doi : 10.1017/S0022112065001520.

[195] Michalke, A., "Vortex formation in a free boundary layer according to stability theory", *J. Fluid Mech.*, vol. 22, n° 2, p. 371-383, 1965. doi : 10.1017/S0022112065000812.

[196] Michalke, A., "Survey on jet instability theory", *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 21, p. 159-199, 1984. doi : 10.1016/0376-0421(84)90005-8.

[197] Michalke, A. et Hermann, G., "On the inviscid instability of a circular jet with external flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 114, p. 343-359, 1982. doi : 10.1017/S0022112082000196.

[198] Miles, J. B. et Shih, J.-S., "Similarity parameter for two-stream turbulent jet-mixing region", *AIAA J.*, vol. 6, n° 7, p. 1429-1430, 1968. doi : 10.2514/3.4782.

[199] Mills, R., "Numerical and experimental investigations of the shear layer between two parallel streams", *J. Fluid Mech.*, vol. 33, n° 3, p. 591-616, 1968. doi : 10.1017/S0022112068001540.

[200] Mitchell, B. E., Lele, S. K. et Moin, P., "Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair", *J. Fluid Mech.*, vol. 285, p. 181-202, 1995. doi : 10.1017/S0022112095000504.

[201] Mitchell, B. E., Lele, S. K. et Moin, P., "Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet", *J. Fluid Mech.*, vol. 383, p. 113-142, 1999. doi : 10.1017/S0022112099003869.

[202] Mitchell, D. M., Honnery, D. R. et Soria, J., "The visualization of the acoustic feedback loop in impinging underexpanded supersonic jet flows using ultra-high frame rate schlieren", *J. Vis.*, vol. 15, n° 4, p. 333-341, 2012.

[203] Mohseni, K. et Colonius, T., "Numerical treatment of polar coordinate singularities", *J. Comput. Phys.*, vol. 157, n° 2, p. 787-795, 2000. doi : 10.1006/jcph.1999.6382.

[204] Monkewitz, P. A., "Subharmonic resonance, pairing and shredding in the mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 188, p. 223-252, 1988. doi : 10.1017/S0022112088000710.

[205] Monkewitz, P. A. et Huerre, P., "Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers", *Phys. Fluids*, vol. 25, n° 7, p. 1137-1143, 1982. doi : 10.1063/1.863880.

[206] Moore, C. J., "The role of shear-layer instability waves in jet exhaust noise", *J. Fluid Mech.*, vol. 80, n° 2, p. 321-367, 1977. doi : 10.1017/S0022112077001700.

[207] Morris, P. J., "The spatial viscous instability of axisymmetric jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 77, n° 3, p. 511-529, 1976. doi : 10.1017/S0022112076002231.

[208] Morris, P., "The instability of high speed jets", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 9, n° 1-2, p. 1-50, 2010. doi : 10.1260/1475-472X.9.1-2.1.

[209] Moser, C., Lamballais, E., Margnat, F., Fortuné, V. et Gervais, Y., "Numerical study of Mach number and thermal effects on sound radiation by a mixing layer", *Int. J. Aeroacoust.*, vol. 11, n° 5-6, p. 555-579, 2012. doi : 10.1260/1475-472X.11.5-6.555.

[210] Moser, R. D. et Rogers, M. M., "The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 247, p. 275-320, 1993. doi : 10.1017/S0022112093000473.

[211] Nana, C., Marx, D., Prax, C. et Fortuné, V., "Hybrid aeroacoustic computation of a low Mach number non-isothermal shear layer", *Comput. Fluids*, vol. 93, p. 30-40, 2014. doi : 10.1016/j.compfluid.2014.01.006.

[212] Naumann, U., *The art of differentiating computer programs: an introduction to algorithmic differentiation* (Software, Environments, and Tools). Society for Industrial et Applied Mathematics, 2012, isbn : 9781611972061. doi : 10.1137/1.9781611972078.

[213] Neuwerth, G., "Akustische rueckkopplungserscheinungen am unter-und uberschallfreistrahl der auf einen stoerkoerper trifft", thèse de doct., Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1974.

[214] Ni, A. et Wang, Q., "Sensitivity analysis on chaotic dynamical systems by Non-Intrusive Least Squares Shadowing (NILSS)", *J. Comput. Phys.*, vol. 347, p. 56-77, 2017, issn : 0021-9991. doi : 10.1016/j.jcp.2017.06.033.

[215] Nogueira, P., Jaunet, V., Mancinelli, M., Jordan, P. et Edgington-Mitchell, D., "Closure mechanism of the A1 and A2 modes in jet screech", *J. Fluid Mech.*, vol. 936, A10, 2022. doi : 10.1017/jfm.2022.58.

[216] Oster, D. et Wygnanski, I., "The forced mixing layer between parallel streams", *J. Fluid Mech.*, vol. 123, p. 91-130, 1982. doi : 10.1017/S0022112082002973.

[217] Otero, J., Sandberg, R. D. et Sharma, A., "Direct numerical simulations for adjoint-based optimal flow and noise control of a backward-facing step", *AIAA Paper 2016-2889*, 2016. doi : 10.2514/6.2016-2889.

[218] Panda, J., "An experimental investigation of screech noise generation", *J. Fluid Mech.*, vol. 378, p. 71-96, 1999. doi : 10.1017/S0022112098003383.

[219] Panickar, P. et Raman, G., "Criteria for the existence of helical instabilities in subsonic impinging jets", *Phys. Fluids*, vol. 19, n° 10, p. 106 103, 2007. doi : 10.1063/1.2798804.

[220] Pantano, C et Sarkar, S, "A study of compressibility effects in the high-speed turbulent shear layer using direct simulation", *J. Fluid Mech.*, vol. 451, p. 329-371, 2002. doi : 10.1017/S0022112001006978.

[221] Papamoschou, D. et Roshko, A., "The compressible turbulent shear layer: An experimental study", *J. Fluid Mech.*, vol. 197, p. 453-477, 1988. doi : 10.1017/S0022112088003325.

[222] Pelletier, D., "Verification, validation, and uncertainty in computational fluids dynamics", *Can. J. Civ. Eng.*, vol. 37, n° 7, p. 1003-1013, 2010. doi : 10.1139/L10-032.

[223] Pelletier, D., Hay, A., Etienne, S. et Borggaard, J., "The sensitivity equation method in fluid mechanics", *Eur. J. Comput. Mech.*, vol. 17, n° 1-2, p. 31-61, 2008. doi : 10.3166/remn.17.31-61.

[224] Pinker, R., "Results from an experimental programme on static single-stream jet noise", *QinetiQ*, vol. QinetiQ/FST/TN026455, 1983.

[225] Poinsot, T. J et Lele, S. K, "Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows", *J. Comput. Phys.*, vol. 101, n° 1, p. 104-129, 1992. doi : 10.1016/0021-9991(92)90046-2.

[226] Powell, A, "On the mechanism of choked jet noise", *Proc. Phys. Soc. B*, vol. 66, n° 12, p. 1039, 1953. doi : 10.1088/0370-1301/66/12/306.

[227] Powell, A., "The sound-producing oscillations of round underexpanded jets impinging on normal plates", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, n° 2, p. 515-533, 1988. doi : 10.1121/1.396146.

[228] Powell, A., "On edge tones and associated phenomena", *Acta. Acust.*, vol. 3, n° 4, p. 233-243, 1953. adresse : https://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaua/1953/00000003/00000004/art00008?crawler=true.

[229] Prasad, C., Stahl, S. et Gaitonde, D., "Exchange mechanisms between hydrodynamic and acoustic components of an under-expanded supersonic impinging jet", *AIAA Paper 2021-2118*, doi : 10.2514/6.2021-2118.

[230] Preisser, J., "Fluctuating surface pressure and acoustic radiation for subsonic normal jet impingement", *NASA TP-1361*, 1979. adresse : https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19790011642/downloads/19790011642.pdf.

[231] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. et Flannery, B. P., *Numerical recipes 3rd edition: the art of scientific computing*, 3e éd. Cambridge University Press, 2007, isbn : 0521880688.

[232] Pui, N., "The plane mixing layer between parallel streams", thèse de doct., University of British Columbia, 1969. adresse : https://open.library.ubc.ca/media/download/pdf/831/1.0102058/2.

[233] R. Duvigneau, D. P. et Borggaard, J., "An improved continuous sensitivity equation method for optimal shape design in mixed convection", *Numer. Heat Transf. B: Fundam.*, vol. 50, n° 1, p. 1-24, 2006. doi : 10.1080/10407790500459346.

[234] Ragab, S. A. et Wu, J., "Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers", *Phys. Fluids*, vol. 1, n° 6, p. 957-966, 1989. doi : 10.1063/1.857407.

[235] Raman, G., "Supersonic jet screech: half-century from Powell to the present", *J. Sound Vib.*, vol. 225, n° 3, p. 543-571, 1999. doi : 10.1006/jsvi.1999.2181.

[236] Raman, G., "Cessation of screech in underexpanded jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 336, p. 69-90, 1997. doi : 10.1017/S002211209600451X.

[237] Ribner, H. S., "Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise", *J. Fluid Mech.*, vol. 38, n° 1, p. 1-24, 1969. doi : 10.1017/S0022112069000012.

[238] Riley, J. J. et Metcalfe, R. W., "Direct numerical simulation of a perturbed, turbulent mixing layer", *AIAA Paper 1980-274*, 1980. doi : 10.2514/6.1980-274.

[239] Risborg, A. et Soria, J., "High-speed optical measurements of an underexpanded supersonic jet impinging on an inclined plate", *Int. Soc. Opt. Phot.*, vol. 7126, 2009. doi : 10.1117/12.822137.

[240] Roache, P. J., *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa Albuquerque, NM, 1998, vol. 895.

[241] Rockwell, D et Naudascher, E, "Self-sustained oscillations of impinging free shear layers", *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 11, n° 1, p. 67-94, 1979. doi : 10.1146/annurev.fl.11.010179.000435.

[242] Rogers, M. M. et Moser, R. D., "The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz rollup", *J. Fluid Mech.*, vol. 243, p. 183-226, 1992. doi : 10.1017/S0022112092002696.

[243] Roshko, A., "Structure of turbulent shear flows: A new look", *AIAA J.*, vol. 14, n° 10, p. 1349-1357, 1976. doi : 10.2514/3.61477.

[244] Rossiter, J., "Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds", *Tech. Rep. 3438, Aer. Res. Counc. Rep. and Mem.*, 1964. adresse : https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/bitstream/handle/1826.2/4020/arc-rm-3438.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[245] Sabatini, R., Marsden, O., Bailly, C. et Gainville, O., "Three-dimensional direct numerical simulation of infrasound propagation in the Earth's atmosphere", *J. Fluid Mech.*, vol. 859, p. 754-789, 2019. doi : 10.1017/jfm.2018.816.

[246] Samimy, M, Reeder, M. et Elliott, G. S., "Compressibility effects on large structures in free shear flows", *Phys. Fluids*, vol. 4, n° 6, p. 1251-1258, 1992. doi : 10.1063/1.858243.

[247] Sandham, N. et Reynolds, W., "Compressible mixing layer-linear theory and direct simulation", *AIAA J.*, vol. 28, n° 4, p. 618-624, 1990. doi : 10.2514/3.10437.

[248] Sandham, N. et Reynolds, W., "Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 224, p. 133-158, 1991. doi : 10.1017/S0022112091001684.

[249] Sarkar, S., "The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 282, p. 163-186, 1995. doi : 10.1017/S0022112095000085.

[250] Sarkar, S., Erlebacher, G., Hussaini, M. Y. et Kreiss, H. O., "The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 227, p. 473-493, 1991. doi : 10.1017/S0022112091000204.

[251] Sarohia, V. et Massier, P. F., "Experimental results of large-scale structures in jet flows and their relation to jet noise production", *AIAA J.*, vol. 16, n° 8, p. 831-835, 1978. doi : 10.2514/3.60969.

[252] Schmidt, O., Towne, A., Colonius, T., Cavalieri, A. V. G., Jordan, P. et Brès, G. A., "Wavepackets and trapped acoustic modes in a turbulent jet: coherent structure eduction and global stability", *J. Fluid Mech.*, vol. 825, p. 1153-1181, 2017. doi : 10.1017/jfm.2017.407.

[253] Schoder, S., Roppert, K. et Kaltenbacher, M., "Postprocessing of direct aeroacoustic simulations using Helmholtz decomposition", *AIAA J.*, vol. 58, n° 7, p. 3019-3027, 2020. doi : 10.2514/1.J058836.

[254] Schoder, S., Spieser, E., Vincent, H., Bogey, C. et Bailly, C., "Acoustic modeling using the aeroacoustic wave equation based on Pierce's operator", *AIAA J.*, vol. 61, n° 9, p. 4008-4017, 2023. doi : 10.2514/1.J062558.

[255] Schram, C. F., "Aeroacoustics of subsonic jets: Prediction of the sound produced by vortex pairing based on particle image velocimetry", thèse de doct., Technische Universiteit Eindhoven, 2003. adresse : https://pure.tue.nl/ws/files/2271312/200310442.pdf.

[256] Schulze, J et Sesterhenn, J, "Adjoint based noise minimization of a round supersonic jet", *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 318, n° 9, p. 092 005, 2011. doi : DOI10.1088/1742-6596/318/9/092005.

[257] Schulze, J. et Sesterhenn, J., "Optimal distribution of porous media to reduce trailing edge noise", *Comput. Fluids*, vol. 78, p. 41-53, 2013. DOI : 10.1016/j.compfluid.2011.12.022.

[258] Seiner, J. M., McLaughlin, D. K. et Liu, C.-H., "Supersonic jet noise generated by large scale instabilities", *NASA TP-2072*, 1982. adresse : https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19820026313/downloads/19820026313.pdf?attachment=true.

[259] Seo, T., "The spatial viscous instability of a two-dimensional developing mixing layer", *KSME J.*, vol. 9, n° 1, p. 14-18, 1995. DOI : 10.1007/BF02954350.

[260] Sharma, A et Lele, S. K., "Effects of heating on noise radiation from a two-dimensional mixing layer: direct computation and acoustic analogy predictions", *AIAA Paper 2011-2744*, 2011. DOI : 10.2514/6.2011-2744.

[261] Shen, H. et Tam, C. K. W., "Three-dimensional numerical simulation of the jet screech phenomenon", *AIAA J.*, vol. 40, n° 1, p. 33-41, 2002. DOI : 10.2514/2.1638.

[262] Slessor, M. D., Zhuang, M. et Dimotakis, P. E., "Turbulent shear-layer mixing: growth-rate compressibility scaling", *J. Fluid Mech.*, vol. 414, p. 35-45, 2000. DOI : 10.1017/S0022112099006977.

[263] Spagnoli, B et Airiau, C., "Adjoint analysis for noise control in a two-dimensional compressible mixing layer", *Comput. Fluids*, vol. 37, n° 4, p. 475-486, 2008. DOI : 10.1016/j.compfluid.2007.02.006.

[264] Spencer, B. W. et Jones, B. G., "Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulent two-stream mixing layer", *AIAA Paper 1971-613*, 1971. DOI : 10.2514/6.1971-613.

[265] Squire, W. et Trapp, G., "Using complex variables to estimate derivatives of real functions", *SIAM Review*, vol. 40, n° 1, p. 110-112, 1998. DOI : 10.1137/S003614459631241X.

[266] Stanley, S. A. et Sarkar, S., "Influence of nozzle conditions and discrete forcing on turbulent planar jets", *AIAA J.*, vol. 38, n° 9, p. 1615-1623, 2000. DOI : 10.2514/2.1144.

[267] Stanley, S. et Sarkar, S., "Simulations of spatially developing two-dimensional shear layers and jets", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 9, p. 121-147, 1997. DOI : 10.1007/s001620050036.

[268] Sutherland, W., "LII. The viscosity of gases and molecular force", *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 36, n° 223, p. 507-531, 1893. DOI : 10.1080/14786449308620508.

[269] Suzuki, T., "A review of diagnostic studies on jet-noise sources and generation mechanisms of subsonically convecting jets", *Fluid Dyn. Res.*, vol. 42, n° 1, p. 014 001, 2010. DOI : 10.1088/0169-5983/42/1/014001.

[270] Suzuki, T. et Colonius, T., "Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array", *J. Fluid Mech.*, vol. 565, p. 197-226, 2006. DOI : 10.1017/S0022112006001613.

[271] Suzuki, T. et Lele, S. K., "Shock leakage through an unsteady vortex-laden mixing layer: application to jet screech", *J. Fluid Mech.*, vol. 490, p. 139-167, 2003. DOI : 10.1017/S0022112003005214.

[272] Tam, C. K. W., "Excitation of instability waves in a two-dimensional shear layer by sound", *J. Fluid Mech.*, vol. 89, n° 2, p. 357-371, 1978. DOI : 10.1017/S0022112078002645.

[273] Tam, C. K. W., "Excitation of instability waves by sound - A physical interpretation", *J. Sound Vib.*, vol. 105, n° 1, p. 169-172, 1986. DOI : 10.1016/0022-460X(86)90228-2.

[274] Tam, C. K. W., "Supersonic jet noise", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 27, n° 1, p. 17-43, 1995. DOI : 10.1146/annurev.fl.27.010195.000313.

[275] Tam, C. K. W., *Computational aeroacoustics: A wave number approach* (Cambridge Aerospace Series). Cambridge University Press, 2012, ISBN : 9780521806787. DOI : 10.1017/CBO9780511802065.

[276] Tam, C. K. W. et Ahuja, K., "Theoretical model of discrete tone generation by impinging jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 214, p. 67-87, 1990. DOI : 10.1017/S0022112090000052.

[277] Tam, C. K. W. et Chandramouli, S., "Jet-plate interaction tones relevant to over-the-wing engine mount concept", *J. Sound Vib.*, vol. 486, p. 115 378, 2020. DOI : 10.1016/j.jsv.2020.115378.

[278] Tam, C. K. W. et Hu, F. Q., "On the three families of instability waves of high-speed jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 201, p. 447-483, 1989. DOI : 10.1017/S002211208900100X.

[279] Tam, C. K. W. et Norum, T. D., "Impingement tones of large aspect ratio supersonic rectangular jets", *AIAA J.*, vol. 30, n° 2, p. 304-311, 1992. DOI : 10.2514/3.10919.

[280] Tam, C. K. W., "Computational aeroacoustics - Issues and methods", *AIAA J.*, vol. 33, n° 10, p. 1788-1796, 1995. DOI : 10.2514/3.12728.

[281] Tam, C. K. W., "Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics", *J. Comput. Acoust.*, vol. 6, n° 4, p. 377-402, 1998. DOI : 10.1142/S0218396X98000259.

[282] Tam, C. K. W., "Jet noise: Since 1952", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 10, p. 393-405, 1998. DOI : 10.1007/s001620050072.

[283] Tam, C. K. W., "Computational aeroacoustics: An overview of computational challenges and applications", *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 18, n° 6, p. 547-567, 2004. DOI : 10.1080/10618560410001673551.

[284] Tam, C. K. W., "Mach wave radiation from high-speed jets", *AIAA J.*, vol. 47, n° 10, p. 2440-2448, 2009. DOI : 10.2514/1.42644.

[285] Tam, C. K. W. et Auriault, L., "Mean flow refraction effects on sound radiated from localized sources in a jet", *J. Fluid Mech.*, vol. 370, p. 149-174, 1998. DOI : 10.1017/S0022112098001852.

[286] Tam, C. K. W. et Auriault, L., "Jet mixing noise from fine-scale turbulence", *AIAA J.*, vol. 37, n° 2, p. 145-153, 1999. DOI : 10.2514/2.691.

[287] Tam, C. K. W. et Dong, Z., "Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow", *J. Comput. Acoust.*, vol. 4, n° 2, p. 175-201, 1996. DOI : 10.1142/S0218396X96000040.

[288] Tam, C. K. W., Golebiowski, M. et Seiner, J., "On the two components of turbulent mixing noise from supersonic jets", *AIAA Paper 1996-1716*, p. 1716, 1996. DOI : 10.2514/6.1996-1716.

[289] Tam, C. K. W. et Shen, H., "Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high-order finite difference schemes", *AIAA Paper 1993-4325*, 1993. DOI : 10.2514/6.1993-4325.

[290] Tam, C. K. W., Viswanathan, K., Ahuja, K. K. et Panda, J., "The sources of jet noise: experimental evidence", *J. Fluid Mech.*, vol. 615, p. 253-292, 2008. DOI : 10.1017/S0022112008003704.

[291] Tam, C. K. W. et Webb, J. C., "Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics", *J. Comput. Phys.*, vol. 107, n° 2, p. 262-281, 1993. DOI : 10.1006/jcph.1993.1142.

[292] Tanna, H., "An experimental study of jet noise part I: Turbulent mixing noise", *J. Sound Vib.*, vol. 50, n° 3, p. 405-428, 1977. DOI : 10.1016/0022-460X(77)90493-X.

[293] Tester, B. et Morfey, C., "Jet mixing noise: A review of single stream temperature effects", *AIAA Paper 2009-3376*, 2009. DOI : 10.2514/6.2009-3376.

[294] Thorpe, S. A., "Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids", *J. Fluid Mech.*, vol. 46, n° 2, p. 299-319, 1971. DOI : 10.1017/S0022112071000557.

[295] Towne, A., Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Colonius, T., Schmidt, O., Jaunet, V. et Brès, G. A., "Acoustic resonance in the potential core of subsonic jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 825, p. 1113-1152, 2017. DOI : 10.1017/jfm.2017.346.

[296] Towne, A., Schmidt, O. T. et Brès, G. A., "An investigation of the Mach number dependence of trapped acoustic waves in turbulent jets", *AIAA Paper 2019-2546*, DOI : 10.2514/6.2019-2546.

[297] Unnikrishnan, S., "Recent advances in feature extraction techniques for high-speed flowfields", *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 140, p. 100 918, 2023. DOI : 10.1016/j.paerosci.2023.100918.

[298] Unnikrishnan, S. et Gaitonde, D. V., "Acoustic, hydrodynamic and thermal modes in a supersonic cold jet", *J. Fluid Mech.*, vol. 800, p. 387-432, 2016. DOI : 10.1017/jfm.2016.410.

[299] Unnikrishnan, S. et Gaitonde, D. V., "A pressure decomposition framework for aeroacoustic analysis of turbulent jets", *Eur. J. Mech. B Fluids*, vol. 81, p. 41-61, 2020. DOI : 10.1016/j.euromechflu.2020.01.006.

[300] Upadhyay, P. et Zaman, K. Q., "Pressure fluctuations due to 'trapped waves' in heated jets", *AIAA Paper 2022-2829*, 2022. DOI : 10.2514/6.2022-2829.

[301] Varé, M. et Bogey, C., "Flow and acoustic fields of rocket jets impinging on a perforated plate", *AIAA J.*, vol. 60, n° 8, p. 4614-4627, 2022. DOI : 10.2514/1.J061253.

[302] Varé, M. et Bogey, C., "Generation of acoustic tones in round jets at a Mach number of 0.9 impinging on a plate with and without a hole", *J. Fluid Mech.*, vol. 936, A16, 2022. DOI : 10.1017/jfm.2022.47.

[303] Varé, M. et Bogey, C., "Presence and properties of acoustic peaks near the nozzle of impinging rocket jets", *Acta. Acust.*, vol. 6, p. 36, 2022. DOI : 10.1051/aacus/2022033.

[304] Varé, M. et Bogey, C., "Acoustic tones generated by impinging jets: differences between laminar and highly-disturbed nozzle-exit boundary layers", *Int. J. Aeroacoust.*, 2023, soumis.

[305] Varé, M. et Bogey, C., "Mach number dependence of tone generation by impinging round jets", *AIAA J.*, vol. 61, n° 8, p. 3551-3565, 2023. DOI : 10.2514/1.J062746.

[306] Varé, M., "Étude du rayonnement acoustique et des mécanismes de rétroaction des jets impactant une plaque trouée par simulation des grandes échelles", thèse de doct., École Centrale de Lyon, 2020. adresse : http://www.theses.fr/2020LYSEC045.

[307] Varé, M. et Bogey, C., "Tone generation in impinging jets with laminar and highly-disturbed nozzle-exit boundary layers", *AIAA Paper 2023-3745*, DOI : 10.2514/6.2023-3745.

[308] Vatsa, V., "Computation of sensitivity derivatives of Navier-Stokes equations using complex variables", *Adv. Eng. Softw.*, vol. 31, n° 8, p. 655-659, 2000. doi : 10.1016/S0965-9978(00)00025-9.

[309] Vergnault, E. et Sagaut, P., "Application of lattice Boltzmann method to sensitivity analysis via complex differentiation", *J. Comput. Phys.*, vol. 230, n° 13, p. 5417-5429, 2011. doi : 10.1016/j.jcp.2011.03.044.

[310] Vergnault, E. et Sagaut, P., "An adjoint-based lattice Boltzmann method for noise control problems", *J. Comput. Phys.*, vol. 276, p. 39-61, 2014. doi : 10.1016/j.jcp.2014.07.027.

[311] Vergnault, E., Malaspinas, O. et Sagaut, P., "Noise source identification with the lattice Boltzmann method", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 133, n° 3, p. 1293-1305, 2013. doi : 10.1121/1.4776181.

[312] Vincent, H. et Bogey, C., "Application of the complex differentiation method to the sensitivity analysis of aerodynamic noise", *Comput. Fluids*, vol. 264, 2023. doi : 10.1016/j.compfluid.2023.105965.

[313] Vincent, H. et Bogey, C., "Influence of the boundary-layer thickness on the generation of tonal noise components by subsonic impinging jets", *J. Fluid Mech.*, 2023, en révision.

[314] Vishnampet, R., Bodony, D. J. et Freund, J. B., "A practical discrete-adjoint method for high-fidelity compressible turbulence simulations", *J. Comput. Phys.*, vol. 285, p. 173-192, 2015. doi : 10.1016/j.jcp.2015.01.009.

[315] Viswanathan, K., "Aeroacoustics of hot jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 516, p. 39-82, 2004. doi : 10.1017/S0022112004000151.

[316] Viswanathan, K., "Scaling laws and a method for identifying components of jet noise", *AIAA J.*, vol. 44, n° 10, p. 2274-2285, 2006. doi : 10.2514/1.18486.

[317] Vreman, A. W., Sandham, N. et Luo, K., "Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics", *J. Fluid Mech.*, vol. 320, p. 235-258, 1996. doi : 10.1017/S0022112096007525.

[318] Wagner, F., "The sound and flow field of an axially symmetric free jet upon impact on a wall", *NASA TT F-131942*, 1971.

[319] Wang, Q., "Forward and adjoint sensitivity computation of chaotic dynamical systems", *J. Comput. Phys.*, vol. 235, p. 1-13, 2013. doi : 10.1016/j.jcp.2012.09.007.

[320] Wang, Q. et Gao, J.-H., "The drag-adjoint field of a circular cylinder wake at Reynolds numbers 20, 100 and 500", *J. Fluid Mech.*, vol. 730, p. 145-161, 2013. doi : 10.1017/jfm.2013.323.

[321] Wang, Q., Hu, R. et Blonigan, P., "Least squares shadowing sensitivity analysis of chaotic limit cycle oscillations", *J. Comput. Phys.*, vol. 267, p. 210-224, 2014. doi : 10.1016/j.jcp.2014.03.002.

[322] Wei, M. et Freund, J. B., "A noise-controlled free shear flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 546, p. 123-152, 2006. doi : 10.1017/S0022112005007093.

[323] Weightman, J. L., Amili, O., Honnery, D., Edgington-Mitchell, D. et Soria, J., "Nozzle external geometry as a boundary condition for the azimuthal mode selection in an impinging underexpanded jet", *J. Fluid Mech.*, vol. 862, p. 421-448, 2019. doi : 10.1017/jfm.2018.957.

[324] Weightman, J. L., Amili, O., Honnery, D., Soria, J. et Edgington-Mitchell, D., "An explanation for the phase lag in supersonic jet impingement", *J. Fluid Mech.*, vol. 815, R1, 2017. doi : 10.1017/jfm.2017.37.

[325] Williamson, J., "Low-storage Runge-Kutta schemes", *J. Comput. Phys.*, vol. 35, nº 1, p. 48-56, 1980. doi : 10.1016/0021-9991(80)90033-9.

[326] Winant, C. D. et Browand, F. K., "Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, vol. 63, nº 2, p. 237-255, 1974. doi : 10.1017/S0022112074001121.

[327] Wu, G. J., Lele, S. K. et Jeun, J., "Effects of initial shear layer state on screech in a Rectangular Jet", *AIAA Paper 2022-3086*, doi : 10.2514/6.2022-3086.

[328] Yule, A. J., "Large-scale structure in the mixing layer of a round jet", *J. Fluid Mech.*, vol. 89, nº 3, p. 413-432, 1978. doi : 10.1017/S0022112078002670.

[329] Yule, A., "Two-dimensional self-preserving turbulent mixing layers at different free stream velocity ratios", thèse de doct., University of Manchester, 1971. adresse : https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/bitstream/handle/1826.2/2957/arc-rm-3683.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[330] Zaman, K., "Effect of initial condition on subsonic jet noise", *AIAA J.*, vol. 23, nº 9, p. 1370-1373, 1985. doi : 10.2514/3.9094.

[331] Zaman, K., "Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation", *J. Fluid Mech.*, vol. 152, p. 83-111, 1985. doi : 10.1017/S0022112085000581.

[332] Zaman, K., "Effect of initial boundary-layer state on subsonic jet noise", *AIAA J.*, vol. 50, nº 8, p. 1784-1795, 2012. doi : 10.2514/1.J051712.

[333] Zaman, K., "Increased jet noise due to a" nominally laminar" state of nozzle exit boundary layer", *NASA TM 2017-219440*, 2017. adresse : https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20170004649/downloads/20170004649.pdf.

[334] Zaman, K., "Initial boundary layer state of typical model-scale jet nozzles and its impact on noise", *Int. J. Aeroacoust.*, 2023. doi : 10.1177/1475472X231199189.

[335] Zaman, K., Fagan, A. et Upadhyay, P., "Pressure fluctuations due to 'trapped waves' in the initial region of compressible jets", *J. Fluid Mech.*, vol. 931, A30, 2022. doi : 10.1017/jfm.2021.954.

[336] Zaman, K., Fagan, A. et Upadhyay, P., "Pressure fluctuation spectral peaks due to 'guided waves' in the upstream direction of a jet", *AIAA Paper 2023-3649*, 2023. doi : 10.2514/6.2023-3649.

[337] Zayernouri, M. et Metzger, M., "Coherent features in the sensitivity field of a planar mixing layer", *Phys. Fluids*, vol. 23, n° 2, p. 025 105, 2011. doi : 10.1063/1.3546174.

[338] Zeman, O., "Dilatation dissipation: the concept and application in modeling compressible mixing layers", *Phys. Fluids*, vol. 2, n° 2, p. 178-188, 1990. doi : 10.1063/1.857767.

[339] Zhou, B. Y., Ryong Koh, S., Gauger, N. R., Meinke, M. et Schöder, W., "A discrete adjoint framework for trailing-edge noise minimization via porous material", *Comput. Fluids*, vol. 172, p. 97-108, 2018. doi : 10.1016/j.compfluid.2018.06.017.

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur C. BOGEY

et les rapports de

M. C. AIRIAU
Professeur - IMFT - 2 allée du professeur Camille Soula - 31500 Toulouse

et de

M. R. MARCHIANO
Professeur - Université Pierre et Marie Curie - Institut Jean Le Rond d'Alembert (case 162)
4 place Jussieu - 75252 Paris cedex 05

Monsieur VINCENT Hugo

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 25 janvier 2024

Pour le directeur de l'École Centrale de Lyon
Le directeur de la recherche

Christophe CORRE