



**HAL**  
open science

# Caractérisation et limitation des biais de mesure de l'élastographie par résonance magnétique

Samuel Kurtz

► **To cite this version:**

Samuel Kurtz. Caractérisation et limitation des biais de mesure de l'élastographie par résonance magnétique. Imagerie médicale. Université de Montpellier; Université de Sherbrooke. Chaire CRSNG-industrie sur l'auscultation des structures en béton, 2023. Français. NNT : 2023UMONS023 . tel-04551861

**HAL Id: tel-04551861**

**<https://theses.hal.science/tel-04551861>**

Submitted on 18 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE POUR OBTENIR LES GRADES DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER ET DE PH.D. DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

En Mécanique et Génie Civil

Préparée au sein de l'école doctorale Information, Structures, Systèmes

Unités de recherche : Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (Université de Montpellier), Département de génie  
mécanique (Université de Sherbrooke)

## Caractérisation et limitation des biais de mesure de l'élastographie par résonance magnétique

Présentée par Samuel KURTZ  
Le 20 juin 2023

Sous la direction de Elijah VAN HOUTEN et Bertrand WATTRISSE

Devant le jury composé de

Christophe GOZE-BAC, DR CNRS, Université de Montpellier  
Yves BÉRUBÉ-LAUZIÈRE, PR, Université de Sherbrooke  
Marc BONNET, DR CNRS, ENSTA Paris  
Guy CLOUTIER, PR, Université de Montréal  
Pascal DOUMALIN, MCF HDR, Université de Poitiers  
Kévin TSE VE KOON, MCF, Université Lyon 1  
Elijah VAN HOUTEN, PR, Université de Sherbrooke  
Bertrand WATTRISSE, PR, Université de Montpellier

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Co-directeur  
Co-directeur



UNIVERSITÉ  
DE MONTPELLIER



Université de  
Sherbrooke





# Résumé

L'élastographie par résonance magnétique (ERM) est une technique adaptée de l'IRM pour la caractérisation non-invasive et *in vivo* des propriétés mécaniques des tissus vivants. L'ERM consiste généralement à identifier des propriétés associées à un champ de déplacement induit par la propagation d'ondes de cisaillement dans le milieu tissulaire. L'intérêt fondamental de l'ERM réside dans le fort contraste des propriétés mécaniques des tissus mous, biomarqueurs pertinents pour la détection et la stadification du processus pathologique. Depuis son introduction à la fin des années 1990, l'ERM s'est ainsi distinguée comme une modalité d'imagerie médicale polyvalente fournissant des cartographies quantitatives de la viscoélasticité des tissus mous. Le champ d'applications de l'ERM est vaste et l'essor progressif de cette technique en milieu clinique témoigne de l'intérêt conséquent qu'elle suscite.

Le fort degré d'interdisciplinarité de l'ERM, et les interactions entre les acteurs des différentes communautés qui en résultent, représentent toutefois un frein à son développement. L'absence de méthodes rigoureuses d'intégration des biais liés aux mesures en est un exemple évocateur. C'est par l'approche de cette problématique des biais que ce travail de thèse est construit.

Le premier axe est motivé par le besoin de caractérisation des biais liés aux mesures par IRM. Pour cela, un dispositif de tomographie par découpage optique et une procédure de corrélation digitale volumique sont adaptés afin de fournir des mesures de champs cinématiques harmoniques tridimensionnels. La validation du dispositif est éprouvée par une phase d'analyse des champs obtenus par ce dispositif sur différents matériaux fantômes. La prise en compte des différentes sources d'erreurs et la diversité des champs mesurables font de ce dispositif un outil métrologique pour la mesure de tels champs cinématiques en milieu IRM.

Le second axe porte sur la limitation de l'impact des erreurs de mesure dans le modèle d'identification. Pour cela, une formulation couplée du problème direct adjoint de l'ERM est implémentée à un algorithme d'identification par décomposition en sous-domaines pour la viscoélasticité isotrope quasi-incompressible. Cette

---

formulation spécifique s'appuie sur la présence d'un champ complémentaire pour contourner l'influence indirecte des erreurs de mesure au travers de leur application en tant que conditions aux limites, particulièrement redondantes dans le cadre d'une décomposition en sous-domaines. Il est ainsi démontré que la non-consideration des conditions aux limites provoque un gain conséquent sur la qualité des identifications.

Les développements présentés dans ces travaux sont confrontés à plusieurs études portant sur des reconstructions des propriétés mécaniques de données *in silico*, de fantômes et d'un cerveau humain *in vivo*. Ces applications constituent une évaluation détaillée des gains de stabilité de l'algorithme et permettent d'établir de nouveaux standards de pilotage augmentant la résolution spatiale des identifications en ERM. Ces développements sont particulièrement utiles pour la validation d'études ERM précliniques.

**Mots-clés :** élastographie, identification, IRM, problème inverse, conditions aux limites, biais ; tomographie.

# Abstract

Magnetic Resonance Elastography (MRE) is an adapted technique of MRI for non-invasive and *in vivo* characterization of mechanical properties of living tissues. MRE typically involves identifying properties associated with a displacement field induced by the propagation of shear waves in the tissue medium. The fundamental interest of MRE relies in the strong contrast of the mechanical properties of soft tissues, which are relevant biomarkers for the detection and staging of pathological processes. Since its introduction in the late 1990s, MRE has established itself as a versatile medical imaging modality providing quantitative maps of the soft tissues viscoelasticity. The field of applications of MRE is vast, and the gradual growth of this technique in a clinical setting testifies to its significant interest.

However, the high degree of interdisciplinarity of MRE, and the resulting interactions between actors from different communities, represent a barrier to its development. The absence of rigorous methods for integrating measurement biases is an illustrative example of this problem. This thesis work is built around addressing this bias problem.

The first axis is motivated by the need to characterize biases related to MRI measurements. To do this, an optical slicing tomography device and a digital volume correlation procedure are adapted to provide three-dimensional harmonic kinematic field measurements. The validation of the device is tested by analyzing the fields obtained on different phantom materials. The consideration of different sources of measurement errors and the diversity of measurable fields make this device a metrological tool for measuring such kinematic fields in an MRI environment.

The second axis focuses on limiting the impact of measurement errors in the identification model. To achieve this, a coupled formulation of the direct adjoint problem that underlies MRE is implemented in a subzone decomposition-based identification algorithm for a nearly-incompressible, isotropic, viscoelastic model. This specific formulation relies on the presence of a complementary field to avoid the indirect influence of measurement errors through their application as Dirichlet-

---

type boundary conditions which are particularly abundant considering the subzone decomposition of the problem. It is thus demonstrated that the non-consideration of the boundary conditions contributes significantly to the quality of identifications.

The developments presented in this work are compared to several studies on reconstructions of mechanical properties of *in silico* data, phantoms, and *in vivo* human brain. These applications provide a detailed evaluation of the stability gains of the algorithm and establish new standards for driving the spatial resolution of identifications in MRE. These developments are particularly useful for validating preclinical MRE studies.

**Keywords :** elastography, identification, MRI, inverse problem, boundary conditions, bias, tomography.

# Remerciements

Ce mémoire de thèse est l'aboutissement d'un travail s'étalant sur plus de 4 années, partagées entre le Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Montpellier et le Département de génie mécanique de Sherbrooke. Je tiens à remercier mes directeurs de thèse pour leur encadrement et la confiance qu'ils m'ont accordé ces années. Les relations saines et respectueuses que nous avons eu la chance de construire en amont de ces années de doctorat ont sans aucune doute constitué la source de motivation première pour me lancer dans cette aventure.

Je remercie Bertrand Wattrisse pour son mentorat, débuté bien avant la thèse par l'encadrement de divers projets menés lors de mes années en école d'ingénieurs. Son implication et la finesse de ses analyses m'ont permis d'établir un cadre de travail dont je retiens la grande rigueur et l'humilité scientifique. Ces éléments représentent des enseignements fondamentaux qui ponctueront ma vie personnelle et professionnelle.

Je remercie Elijah Van Houten pour m'avoir ouvert au monde de l'élastographie. Son expérience dans ce milieu couplée à sa vision de la discipline m'ont nettement aidé à définir avec précision le contexte dans lequel inscrire mes travaux et les perspectives qu'ils portent. Les échanges et moments que nous avons partagé dans des situations très variées, du Canada à la France en passant par l'Irlande et l'Allemagne, ont nourri ma curiosité scientifique et mon envie de valoriser nos projets.

Je tiens à faire part de ma reconnaissance envers les membres de mon jury et de l'honneur que représentent leurs retours sur mon travail. Les rapports conséquents fournis par Marc Bonnet, Yves Bérubé-Lauzière et Guy Cloutier témoignent du professionnalisme avec lequel ils ont abordé l'évaluation de ce mémoire, et la précision de leurs recommandations m'a permis d'apporter de précieux éclaircissements.

---

Les multiples collaborations développées durant ces années, en dehors de mes laboratoires, représentent des expériences enrichissantes qui ont animé mon parcours. Je remercie ainsi Pascal Doumalin et Jean-Christophe Dupré pour leur accueil et leur implication lors de mes nombreux déplacements à Poitiers. J'exprime également ma gratitude à Curtis Johnson et ses équipes à Delaware pour l'intérêt qu'ils ont porté envers mes développements et les contributions à leur valorisation. Enfin, je tiens à remercier les collègues de Montpellier qui ont contribué, d'une manière ou d'une autre, à l'avancement des mes différents projets : Françoise Krasucki, Giuseppe Geymonat, Emmanuelle Le Bars, Christophe Goze-Bac, Maïda Cardoso et Marion Tardieu.

Une thèse en cotutelle en pleine pandémie étant un nid à complexités administratives, financières et politiques, je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui se sont impliquées de part et d'autre de l'Atlantique, et tout particulièrement à Isabelle pour tout ce temps passé à s'arracher les cheveux sur ces dossiers !

Je remercie les personnes, membres du LMGC et stagiaires, qui m'ont aidé sur les aspects expérimentaux, numériques et théoriques de cette thèse : Quentin, Jonathan, Yvan, Oualim, Kenneth, Gille, Gilles, Farid et Rémy. Si, en parallèle de ma recherche, les enseignements que j'ai pu effectué à la Faculté des Sciences et à Polytech, se sont si bien déroulés, c'est avant tout grâce à la disponibilité de nombreuses personnes durant ces années : Bertrand, Jean-Michel, Hervé, Delphine, Christine, Nathalie, Julien, Sandrine et Béatrice.

Une pensée à la masse de mes camarades en thèse ou en maîtrise, anciens comme nouveaux, pour les nombreux moments de partage et de légèreté : Assia, Pankaj, Jonaz, Félix, Noémie, Julien, Federica, Luisa, Lo, Xavier, Sneha, Manuel, Théo, Chenghe, Oscar, Alexandre, Amir, Martin, Sidharth, Léa, Agathe, William, Nathan, Clément, Camelia, Max, Thomas, Agathe et les autres. Un grand merci à Emilie pour son soutien précieux dans la dernière ligne droite.

Merci enfin aux copains de Montpellier, de Sherbrooke, de Grenoble, du Vaucluse et d'ailleurs, d'être là. Merci à ma famille d'avoir conservé tant d'attention et de patience dans cette période.

À ces lieux, en vrac, qui m'ont tant inspirés durant ces années : Verdon, Beaufortain, Rocheuses, Chaouen, Galway, New-York... en attendant les prochains.



---

*« Une question à résultats pour être positif  
Quitte à pas être égal »*

Odezenne

# Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
Table des matières	ix
Introduction	1
<b>1 Elastographie par résonance magnétique</b>	<b>7</b>
1.1 Génération d'une sollicitation mécanique . . . . .	9
1.1.1 Actionneurs . . . . .	10
1.1.2 Configurations . . . . .	11
1.1.2.1 Statique . . . . .	11
1.1.2.2 Dynamique harmonique . . . . .	12
1.1.3 Propriétés mécaniques . . . . .	12
1.1.3.1 Élasticité linéaire isotrope quasi-incompressible . . .	12
1.1.3.2 Viscoélasticité linéaire . . . . .	14
1.1.4 Propagation d'ondes mécaniques . . . . .	15
1.2 Mesure de la réponse mécanique . . . . .	16
1.2.1 Résonance Magnétique Nucléaire . . . . .	18
1.2.2 Séquençage de l'élastographie par résonance magnétique . . .	19
1.2.2.1 Encodage spatial . . . . .	19
1.2.2.2 Encodage du mouvement . . . . .	20
1.2.2.3 Diversité des séquences . . . . .	21
1.2.3 Imagerie par ultrason . . . . .	22
1.3 Identification des propriétés mécaniques . . . . .	23
1.3.1 Diversité des méthodes . . . . .	24

---

1.3.2	Exemples de méthodes directes . . . . .	25
1.3.2.1	Estimation locale de la fréquence . . . . .	26
1.3.2.2	Gradient de phase . . . . .	26
1.3.2.3	Inversion algébrique . . . . .	26
1.3.2.4	Inversion multi-fréquentielle . . . . .	27
1.3.3	Méthodes itératives . . . . .	27
1.3.3.1	Problème inverse . . . . .	27
1.3.3.2	Problème d'identification . . . . .	28
1.3.3.3	Approche des moindres carrés . . . . .	29
1.3.3.4	Erreur en relation de comportement . . . . .	30
1.3.4	Inversion non-linéaire par décomposition en sous-domaines . . . . .	33
1.3.4.1	Historique et applications . . . . .	33
1.3.4.2	Algorithme . . . . .	35
1.4	Biais et limites . . . . .	37
1.4.1	Limites de l'acquisition IRM . . . . .	37
1.4.2	L'erreur dans la mesure . . . . .	39
1.4.2.1	Sources . . . . .	39
1.4.2.2	Profils de distribution . . . . .	40
1.4.3	L'erreur dans la déformation en cisaillement . . . . .	42
1.4.4	L'erreur dans l'identification . . . . .	44
1.4.5	Sensibilité de l'identification . . . . .	45
1.5	Synthèse et objectifs . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Mesures de champs cinématiques inspirées par l'élastographie</b>	<b>51</b>
2.1	Tomographie par découpage optique . . . . .	53
2.1.1	Principe du tomographe . . . . .	53
2.1.2	Montage original . . . . .	53
2.1.3	Adaptation au contexte harmonique . . . . .	54
2.1.4	Erreur expérimentale . . . . .	56
2.2	Matériaux fantômes . . . . .	57
2.2.1	Spécificités de conception . . . . .	57
2.2.2	Gélatines . . . . .	59
2.2.3	Silicones . . . . .	61
2.3	Mesure des champs cinématiques . . . . .	61
2.3.1	Signal de mesure . . . . .	62
2.3.1.1	Intensité lumineuse . . . . .	62
2.3.1.2	Niveau de gris . . . . .	62

2.3.1.3	Précision voxel . . . . .	62
2.3.2	Corrélation digitale volumique . . . . .	63
2.3.2.1	Transformation matérielle volumique . . . . .	63
2.3.2.2	Coefficient de corrélation . . . . .	64
2.3.2.3	Calcul de la position déformée . . . . .	65
2.3.2.4	Erreur numérique . . . . .	65
2.3.3	Évaluation de la précision . . . . .	66
2.3.4	Filtrage harmonique . . . . .	66
2.4	Évaluation préliminaire par simulation numérique . . . . .	68
2.4.1	Modélisation numérique des champs cinématiques . . . . .	68
2.4.2	Champ cinématique de l'échantillon de gélatine . . . . .	70
2.4.3	Champs cinématiques des échantillons de silicone . . . . .	72
2.5	Bilan et perspectives . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Minimisation des erreurs de mesures pour l'identification par sous-domaines</b>	<b>79</b>
3.1	Mise en place du problème d'identification . . . . .	80
3.1.1	Problème de référence . . . . .	80
3.1.2	Formulation adjointe . . . . .	82
3.1.3	Formulation lagrangienne . . . . .	84
3.2	Problème direct . . . . .	85
3.2.1	Conditions d'optimalité . . . . .	86
3.2.2	DFC : Formulation découplée . . . . .	87
3.2.3	AFC : Formulation couplée . . . . .	89
3.3	Problème inverse . . . . .	91
3.3.1	Calcul du gradient . . . . .	91
3.3.2	Gradient conjugué . . . . .	93
3.4	Aspects numériques complémentaires . . . . .	94
3.4.1	Compressibilité . . . . .	95
3.4.2	Filtrage spatial . . . . .	97
3.4.3	Coûts de calcul . . . . .	98
3.5	Synthèse . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Applications vers la reconstruction des paramètres mécaniques</b>	<b>103</b>
4.1	Données simulées . . . . .	103
4.1.1	Modèle <i>in silico</i> . . . . .	104
4.1.1.1	Géométrie et comportement . . . . .	104

---

4.1.1.2	Simulation des mesures . . . . .	105
4.1.1.3	Paramétrage général des reconstructions . . . . .	107
4.1.2	Sensibilité au bruit . . . . .	108
4.1.2.1	Paramétrage de l'étude . . . . .	108
4.1.2.2	Évaluation qualitative . . . . .	109
4.1.2.3	Évaluation quantitative . . . . .	110
4.1.3	Effets de la résolution spatiale . . . . .	111
4.1.3.1	Paramétrage de l'étude . . . . .	111
4.1.3.2	Stabilité liée à la taille de zone . . . . .	112
4.1.3.3	Détection d'hétérogénéité . . . . .	113
4.1.4	Effets des modules initiaux . . . . .	113
4.1.4.1	Paramétrage de l'étude . . . . .	113
4.1.4.2	Stabilité liée à la rigidité initiale . . . . .	113
4.1.5	Bruit non-gaussien . . . . .	116
4.1.5.1	Transformation du bruit gaussien . . . . .	116
4.1.5.2	Paramétrage de l'étude . . . . .	118
4.1.5.3	Évaluation quantitative d'un bruit non-gaussien . . . . .	118
4.1.6	Bilan . . . . .	118
4.2	Échantillons fantômes par tomographie par découpage optique . . . . .	121
4.2.1	Cadre pour l'identification . . . . .	121
4.2.1.1	Nature des données cinématiques . . . . .	121
4.2.1.2	Paramétrage des reconstructions de l'échantillon de gélatine . . . . .	122
4.2.1.3	Paramétrage des reconstructions des échantillons de silicone . . . . .	122
4.2.2	Propriétés de l'échantillon de gélatine homogène . . . . .	123
4.2.3	Propriétés de l'échantillon de silicone homogène . . . . .	123
4.2.4	Propriétés de l'échantillon de silicone hétérogène . . . . .	125
4.2.5	Propriétés de l'échantillon de silicone bi-couche . . . . .	127
4.2.6	Synthèse des reconstructions des échantillons . . . . .	128
4.2.6.1	Stabilité (échantillon de gélatine) . . . . .	128
4.2.6.2	Détection d'hétérogénéités (échantillons de silicone) . . . . .	130
4.2.7	Bilan . . . . .	131
4.3	Cerveau humain . . . . .	132
4.3.1	Origine des données . . . . .	132
4.3.2	Contexte des reconstructions . . . . .	135
4.3.2.1	Données <i>in vivo</i> . . . . .	135

---

4.3.2.2	Paramétrage général des reconstructions . . . . .	135
4.3.3	Limitation de la variabilité . . . . .	136
4.3.3.1	Paramétrage . . . . .	137
4.3.3.2	Réduction de la variabilité . . . . .	137
4.3.3.3	Reproductibilité . . . . .	138
4.3.4	Adoucissement des régularisations sur l'approche AFC . . . .	140
4.3.4.1	Paramétrage . . . . .	141
4.3.4.2	Effet de la variation totale . . . . .	142
4.3.4.3	Gain de la résolution spatiale . . . . .	142
4.3.5	Bilan . . . . .	146
<b>Conclusion</b>		<b>149</b>
<b>A Dispositif pneumatique multi-voies</b>		<b>153</b>
A.1	Principe et pilotage . . . . .	154
A.1.1	Description du dispositif . . . . .	154
A.1.2	Fonctionnement du dispositif . . . . .	155
A.2	Métérologie . . . . .	155
A.2.1	Réponse en fréquence . . . . .	157
A.2.2	Perte de charge . . . . .	157
A.3	Perspectives . . . . .	159
<b>B Étude préclinique sur le petit animal</b>		<b>161</b>
<b>C Protocoles de fabrication de matériaux fantômes</b>		<b>167</b>
C.1	Gélatine . . . . .	167
C.2	Silicone . . . . .	168
<b>Nomenclature</b>		<b>171</b>
<b>Table des figures</b>		<b>178</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>187</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>189</b>

# Introduction

Selon une étude mandatée par l'Institut International de Cancérologie de Paris [Bentata and Bouzou, 2020], le coût total du cancer en France est estimé à 28 milliards d'euros pour l'année 2017. Ce coût est principalement porté par les soins ( $\sim 16$  G€) et les pertes de production du fait d'une mortalité précoce ( $\sim 10$  G€). Si la mortalité liée au cancer pour la période de 2004 à 2017 est en légère baisse (-2 %), l'incidence relative aux coûts est en hausse significative (+44 %), prouvant la problématique sociétale que représente ce type de pathologie. La disparité entre l'évolution des coûts et de la mortalité démontre l'amélioration des méthodes de dépistage, de précocité des diagnostics et de prise en charge. Sur cette même période, le dépistage est d'ailleurs l'unique type de coût à connaître une diminution (-30 %). Au-delà des coûts, le diagnostic précoce témoigne d'un besoin d'éviter la mise en œuvre de traitements lourds aux effets secondaires indésirables. En identifiant une pathologie à un stade plus précoce, il est alors possible d'utiliser un traitement moins complexe, moins onéreux, et avec de meilleures perspectives pour le patient. Les programmes de dépistage systématique s'inscrivent dans cette recherche de la précocité du diagnostic. Les campagnes autour du cancer du sein développées au Canada entre 1986 et 2019 en sont un bon exemple : le taux de mortalité a largement chuté (-48 %) avec l'application de cette stratégie d'après une étude gouvernementale (2019). Ce constat sur l'incidence du diagnostic des cancers peut être étendu à un grand nombre de pathologies et d'organes pour lesquelles le diagnostic précoce est essentiel. Sa complexité technique, son coût et son niveau de précocité sont des éléments qui motivent son développement.

Cet exemple du cancer illustre, ici de manière comptable, les enjeux sociétaux que représentent les thématiques de santé publique et les besoins d'interactions entre diverses communautés de recherche qu'ils engendrent. Depuis plusieurs décennies, la mécanique représente une discipline produisant des solutions concrètes et applicables pour les problématiques de santé. Plusieurs actes médicaux, comme le diagnostic cli-

---

nique, la stadification et la classification, ou encore le suivi thérapeutique, peuvent notamment se baser sur une estimation de la viscoélasticité des tissus biologiques. Celle-ci se traduit par une connaissance des paramètres mécaniques, biomarqueurs pertinents pour la médecine du fait de leur fort niveau de contraste. De nombreuses pathologies modifient les structures microscopique et macroscopique du milieu tissulaire, engendrant une modification des paramètres viscoélastiques. Motivée par ce besoin d’apporter une caractérisation mécanique quantitative *in vivo* du milieu tissulaire, l’élastographie s’affirme progressivement comme une modalité d’imagerie concrète pour le milieu clinique et suffisamment diversifiée pour intéresser de multiples communautés scientifiques.

L’élastographie, du grec *elastós* (élasticité) et *gráphō* (écrire), est introduite à la fin des années 1980 par le biais de l’imagerie ultrasonore [Ophir et al., 1991]. Cette technique repose sur l’interprétation de la propagation d’une déformation mécanique induite localement, le plus souvent assimilable à une onde, caractéristique du milieu qu’elle traverse pour identifier ses propriétés mécaniques. L’utilisation de l’imagerie par résonance magnétique (IRM) est entrée en scène quelques années plus tard comme une poursuite de cette volonté de caractériser mécaniquement le comportement des tissus, en élargissant l’accès de la technique à des zones volumiques, inaccessibles aux ondes ultrasonores [Muthupillai et al., 1995].

L’élastographie est régulièrement présentée comme une modalité d’imagerie médicale où une « palpation virtuelle » permet la caractérisation non-invasive des tissus *in vivo* [Sack, 2023]. L’élastographie est usuellement décomposée en trois étapes successives. La première consiste à exercer une contrainte mécanique induisant une déformation du milieu tissulaire. En élastographie par résonance magnétique (ERM), la plupart des dispositifs générant la sollicitation mécanique, appelés actionneurs, sont des sources vibratoires, éventuellement multi-fréquentielles, propageant des ondes mécaniques dont les caractéristiques (célérité, longueur d’onde) sont des marqueurs du milieu biologique. La deuxième étape est la mesure du mouvement du tissu provoqué par la sollicitation à l’aide d’un appareil d’imagerie médicale. Dans le contexte vibratoire, le mouvement correspond à la propagation d’ondes de cisaillement, associées à un champ de déplacement harmonique à la fréquence imposée par l’actionneur. La dernière étape est l’identification, qui consiste à associer au mouvement mesuré un modèle contenant les caractéristiques mécaniques associées à la déformation. Une variété importante de modèles existe, illustrant la pluralité des applications actuelles de l’élastographie.

L'ERM est une thématique de recherche à fort degré d'interdisciplinarité, à l'interface de domaines d'activité de plusieurs communautés. Les cliniciens orientent les applications en identifiant les études cliniques pouvant apporter un savoir nouveau ou plus précis sur les milieux étudiés. La communauté de l'imagerie médicale s'organise autour d'un objectif d'amélioration de la qualité des mesures. L'implication de la communauté des mécaniciens est, pour sa part, motivée par la volonté de mieux rendre compte du comportement du milieu tissulaire. Enfin, la variété des algorithmes d'identification développés illustre l'intérêt que trouvent les mathématiques appliquées pour l'ERM.

L'interdisciplinarité et la pluralité des applications peuvent brouiller la compréhension des études. Une problématique partiellement intégrée dans les études en ERM, symptomatique de ces éléments, est celle des biais et de leur impact au travers des différentes étapes. En effet, en l'absence d'outils adéquats, la caractérisation du bruit de mesure est faite de manière partielle. Son impact dans la phase d'identification est par conséquent mal assimilé et entrave les reconstructions des propriétés matérielles. En l'absence de méthode rigoureuse, le rapport signal-sur-bruit sur la mesure ne fait pas l'objet d'une définition conventionnelle, et il est par conséquent usuel d'observer que plusieurs groupes travaillent à partir de définitions qui leur sont propres, parasitant la compréhension et la comparaison des mesures. Ces dernières années ont été marquées par la création de groupes de travail internationaux afin d'établir, notamment, des standardisations de l'ERM, principalement sur les pratiques et terminologies, afin d'en faciliter les comparaisons [Manduca et al., 2021].

La question de la caractérisation et, par extension, de la limitation des biais de l'ERM constitue la problématique centrale abordée dans ce manuscrit de thèse. Celui-ci s'articule en 4 chapitres :

- Le premier chapitre établit une description détaillée de l'élastographie basée sur un état de l'art des différentes étapes la composant. L'objectif de ce chapitre est de représenter la diversité des approches majeures utilisées afin de traduire les difficultés précédemment évoquées concernant la standardisation de cette discipline. Ce chapitre introduit également les formalismes et méthodes analytiques régulièrement employés dans ce manuscrit. L'algorithme d'inversion non-linéaire pour l'identification des propriétés matérielles par décomposition en sous-domaines, exploité dans ces travaux, est présenté. Enfin, un inventaire des biais liés à la mesure en ERM et la sensibilité des stratégies

---

d'identifications face aux données bruitées est présenté.

- Le deuxième chapitre décrit une approche expérimentale motivée par le besoin de caractérisation du bruit dans la mesure. Pour cela, un dispositif expérimental et des méthodes de mesures de champs cinématiques par tomographie sont adaptés au contexte de l'ERM. La tomographie, du grec *tomê* (section) et *gráphō* (écrire), désigne l'ensemble des techniques d'imagerie permettant d'étudier la composition et la structure interne d'un objet de manière non-invasive et non-destructive. L'objectif est d'introduire un outil alternatif à l'IRM, pour la mesure de champs cinématiques tridimensionnels et harmoniques. Le concept expérimental, basé sur un découpage optique d'échantillons de matériaux fantômes, et les procédures numériques, exploitant la corrélation d'images volumiques et un filtrage des composantes harmoniques, sont présentés. Des éléments relatifs à la quantification de l'erreur expérimentale et une évaluation préliminaire des mesures sont également fournis.
- Le troisième chapitre traite de la limitation des biais par l'intermédiaire de la réduction de la sensibilité au bruit de mesure de l'algorithme d'identification par inversion non-linéaire adapté aux données de l'ERM. Pour cela, une formulation adjointe couplée du problème inverse est définie, afin d'éviter l'influence indirecte du bruit contenu dans la mesure appliquée comme conditions aux limites. Le cadre théorique d'une formulation viscoélastique ainsi que son implémentation à l'algorithme d'identification sont détaillés. Des éléments complémentaires relatifs à la régularisation des identifications et aux performances de calculs sont également présentés.
- Le quatrième et dernier chapitre regroupe une série de reconstructions de propriétés matérielles évaluant les développements réalisés durant ces travaux de thèse. Pour cela, les paramètres essentiels pour l'évaluation de la qualité des identifications sont présentés. D'abord, les procédures expérimentales et numériques du dispositif de tomographie optique pour la mesure de champs tridimensionnels harmoniques sont évaluées par l'analyse des reconstructions des propriétés des matériaux fantômes. Ensuite, la limitation de l'impact du bruit de mesure au travers des nouveaux formalismes du problème d'inversion non-linéaire est démontrée sur des données simulées spécifiques, ainsi que sur le cerveau humain *in vivo*. Tirant bénéfice du gain de stabilité des construc-

tions, un nouveau cadre de paramétrage produisant une augmentation de la résolution spatiale des identifications est finalement proposé.



# Chapitre 1

## Elastographie par résonance magnétique

La palpation est l'un des gestes médicaux les plus anciens, dont la pratique remonte à la Haute Antiquité, les premiers écrits à propos du geste chirurgical remontant à l'Égypte Ancienne [Atta, 1999]. Ce moyen exploratoire, répandu dans un très grand nombre de médecines, se base sur les sensibilités et les connaissances de l'anatomie d'un praticien pour établir un pré-diagnostic *in vivo*. La palpation offre un large éventail d'applications, allant de la simple prise de pouls à la détection d'anomalies pathologiques caractérisées par une discontinuité mécanique ou topologique, comme une tumeur. Cependant, cette technique non-invasive est limitée à des applications en faible profondeur du corps humain ou de l'organe. Par ailleurs, le diagnostic se base sur une perception d'un individu dont le biais est difficilement quantifiable et la variation inter-évaluateur mal documentée [Adhia et al., 2013]. Une application essentielle de la palpation est la détection d'une zone rigide dans un tissu, marqueur d'une pathologie ayant provoqué des modifications biomécaniques. La détection du cancer du sein par palpation est un acte encore largement pratiqué par le médecin généraliste aujourd'hui, qui se valide par des examens complémentaires.

La composition moléculaire ainsi que les caractéristiques macroscopiques d'un tissu sont des indicateurs de sa rigidité. Il est établi que l'apparition de cellules cancéreuses au sein d'un tissu mou modifient l'organisation structurale de celui-ci à différentes échelles [Fung, 2013]. Ce contraste de propriétés sert de base aux méthodes de dépistages basées sur l'estimation de la rigidité du tissu.

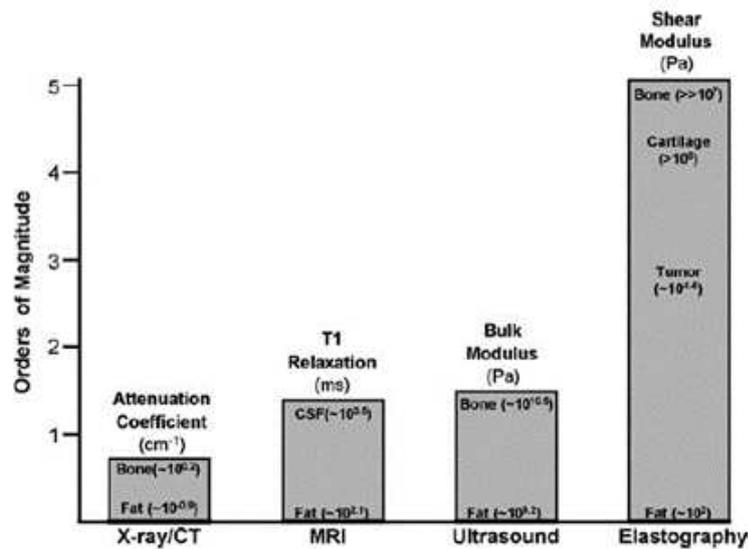


FIGURE 1.1 – Contraste des modalités d’imagerie médicale [Mariappan et al., 2010].

Évolution technologique de la palpation, l’élastographie est une méthode non-invasive visant à quantifier les propriétés mécaniques des tissus mous à partir d’imagerie médicale, technique exploratoire remplaçant le rôle du praticien. L’avantage remarquable de l’élastographie est que les propriétés mécaniques estimées à l’aide de cette technique bénéficient de contrastes très élevés par rapport à d’autres méthodes d’imagerie traditionnelles (rayon-X, IRM, ultrasons...), comme l’illustre la figure 1.1 [Mariappan et al., 2010].

Le principe de l’élastographie se décline en trois étapes :

1. Générer une sollicitation mécanique au sein du tissu biologique.
2. Mesurer la réponse mécanique du tissu soumis par l’utilisation d’un dispositif d’imagerie médicale.
3. Identifier numériquement des propriétés mécaniques associées à la réponse mécanique mesurée.

L’élastographie est une technique dont les déclinaisons sont vastes et variées pour chacune des trois étapes qui la composent. Ce chapitre vise à établir une synthèse bibliographique en décrivant le processus de l’élastographie selon ces étapes. Ce chapitre établit également une description des biais propres à l’élastographie. Les concepts techniques et formalismes théoriques considérés dans ces travaux de thèse

## 1.1. Génération d'une sollicitation mécanique

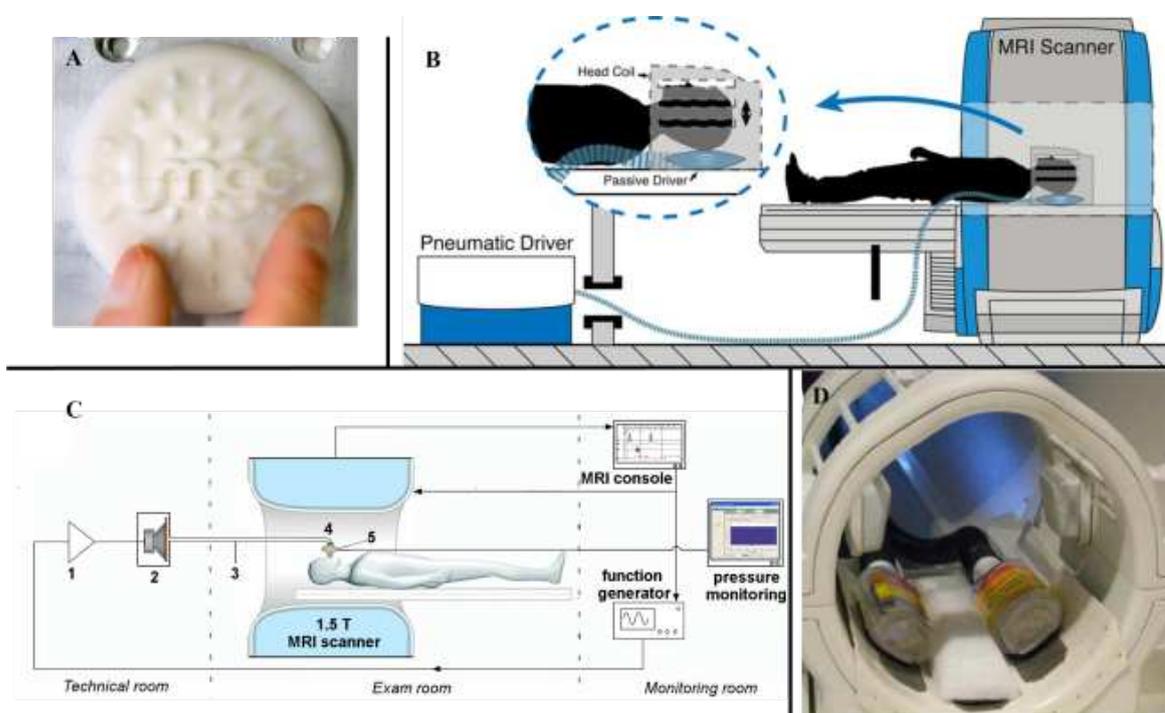


FIGURE 1.2 – Diversité des actionneurs de l'ERM destinés aux sollicitations extrinsèques sur le cerveau humain. A : coussin vibrateur issu d'un système multi-voies développé au LMGC (détaillé dans l'annexe A) ; B : dispositif de l'actionneur pneumatique Resoundant [Klatt et al., 2015] ; C : dispositif d'actionneur par onde de pression guidée [Tardieu et al., 2022] ; D : actionneur pneumatique piloté par des caissons de basses fréquences actifs [Latta et al., 2011].

sont progressivement introduits afin de définir le cadre dans lequel se développent ces travaux.

## 1.1 Génération d'une sollicitation mécanique

La sollicitation mécanique correspond à la contrainte appliquée en périphérie du tissu. Cette contrainte propage une déformation tissulaire. L'estimation des propriétés mécaniques s'effectue par la mesure de cette déformation.

### 1.1.1 Actionneurs

Il existe deux types de sources de la sollicitation :

- La sollicitation intrinsèque, qui est générée par des déformations physiologiques. Les sollicitations intrinsèques les plus répandues en élastographie à basses fréquences sont les mouvements cardiaques et les pulsations sanguines ( $\sim 1$  Hz). Ces sollicitations offrent des moyens exploratoires prometteurs pour le cerveau [Forouhandehpour et al., 2021; Yin et al., 2018], la thyroïde [Bae et al., 2007] ou bien le foie [Van Houten et al., 2020].
- La sollicitation extrinsèque, qui représente une majorité des applications en élastographie. Le geste de palpation en est la première déclinaison, le praticien appliquant une pression continue sur la zone inspectée. En élastographie, les sources mécaniques externes, exercées au moyen d'actionneurs, sont installées en périphérie du tissu étudié pour propager une sollicitation, aussi appelée excitation. Une multitude de systèmes a été développée afin de s'adapter au tissu, à l'environnement d'acquisition des mesures de déformations, à la séquence IRM et à l'utilisateur. Ces actionneurs sont utilisés pour générer des ondes de cisaillement au travers de solutions électromécaniques [Kruse et al., 1999], piézo-électriques [Chen et al., 2006] ou pneumatiques [Klatt et al., 2015; Latta et al., 2011]. La génération d'ondes de pression guidées pour l'élastographie du cerveau a également été explorée [Tardieu et al., 2022]. En 2008, une synthèse des dispositifs utilisés pour des travaux de recherche [Uffmann and Ladd, 2008] illustre déjà la diversité des systèmes mis en place pour l'élastographie par résonance magnétique. La figure 1.2 présente quelques actionneurs des études citées. Les développements d'actionneurs portent sur la capacité à générer en profondeur des ondes capables de se répartir dans tout un organe malgré la présence de barrières naturelles. Les paramètres mécaniques et l'ordre de grandeur de la rigidité tissulaire sont les deux facteurs qui pilotent la stratégie de sollicitation.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, un dispositif pneumatique multi-voies permettant le pilotage simultané en fréquence de 6 actionneurs pour l'ERM a été développé au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de l'Université de Montpellier et installé au Département de génie mécanique de l'Université de Sherbrooke. Une description des caractéristiques et de certains aspects métrologiques du dispositif sont présentés dans l'annexe A.

## 1.1.2 Configurations

### 1.1.2.1 Statique

La première étude introduisant l'élastographie comme une technique d'imagerie quantitative utilisait une méthode ultrasonore statique en appliquant un effort constant au moyen d'une barrette échographique [Ophir et al., 1991]. La déformation des tissus est calculée en dérivant les déplacements mesurés par corrélation croisée des images correspondant aux états pré et post sollicitation. Dans ce cadre quasi-statique, la loi de Hooke lie le tenseur d'ordre 2 des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le tenseur d'ordre 2 des déformations linéarisées  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  doublement contracté avec le tenseur d'ordre 4 d'élasticité  $\underline{\underline{\underline{C}}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (1.1)$$

Dans les premiers travaux en élastographie quasi-statique, les milieux étudiés étaient considérés élastiques isotropes. Le module d'Young  $E$ , caractéristique de la rigidité élastique, est alors l'unique paramètre identifié, le coefficient de Poisson  $\nu$  étant fixé *a priori*.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur des déformations linéarisées est défini à partir du gradient du vecteur de déplacement  $\vec{u}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{u}). \quad (1.2)$$

La forme matricielle du tenseur de déformation est donnée, dans la base cartésienne  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (1.3)$$

avec  $u$ ,  $v$  et  $w$  les composantes de déplacement dans la base cartésienne.

Les contraintes développées au sein d'un tissu *in vivo* demeurant impossibles à mesurer, elles sont considérées homogènes par ces méthodes. L'estimation des propriétés élastiques est alors limitée à une approche qualitative. Plus récemment, des approches basées sur l'équation de Navier introduisent des évaluations quantitatives des propriétés viscoélastiques dans le cadre de sollicitations quasi-statique [Doyley and Parker, 2014].

### 1.1.2.2 Dynamique harmonique

On distingue deux types d'élastographie dynamique. D'abord, l'élastographie transitoire repose sur la mesure de la transition d'un état stationnaire vers un état dynamique périodique. En général, une impulsion est générée et sa propagation mesurée. Le tissu ayant un effet amortissant, l'élastographie transitoire est réalisée en faible profondeur par ultrasons [Sigrist et al., 2017]. En utilisant l'imagerie par résonance magnétique, des travaux sur le régime transitoire existent [Troelstra et al., 2021], mais ils sont peu répandus. L'élastographie harmonique repose sur l'hypothèse d'un régime permanent (aussi appelé régime établi) dans le tissu soumis à une sollicitation périodique. Une grande partie des travaux en ERM portent sur les régimes harmoniques [Mariappan et al., 2010].

L'élastographie harmonique se base sur la propagation d'une onde mécanique dans le tissu générée par une source vibratoire. Le champ de déplacement complexe à la position  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , en régime permanent, peut alors s'écrire :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x})e^{i\omega t + \varphi}, \quad (1.4)$$

avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $\varphi$  le déphasage. La recherche d'un champ de propriété mécanique associé à un mouvement harmonique peut ainsi être effectuée à partir d'un état de déformation indépendante du temps, dont la norme du champ de déplacement correspond à :

$$A_0(\vec{x}) = \|\vec{u}(\vec{x})\|. \quad (1.5)$$

L'équation d'équilibre dynamique de la contrainte en régime harmonique dans un domaine  $\Omega$  s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{b} = \rho \partial_{tt} \vec{u} \quad (1.6)$$

avec  $\vec{b}$  les forces volumiques et  $\rho$  la masse volumique. Les opérateurs  $\vec{\nabla} \cdot$  et  $\partial_{tt}$  représentent respectivement la divergence et la dérivée seconde par rapport au temps.

## 1.1.3 Propriétés mécaniques

### 1.1.3.1 Élasticité linéaire isotrope quasi-incompressible

Afin de pouvoir fermer le problème de mécanique (1.6), il convient de rajouter, en plus des conditions initiales et des conditions aux limites, les équations de comportement qui permettent de relier le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  au tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . De très nombreux tissus vivants peuvent être considérés comme

étant élastiques linéaires isotropes. Dans ce cas, le tenseur d'élasticité linéaire introduit par (1.1) est purement réel et est noté  $\underline{\underline{C}}'$ . Il s'exprime, indépendamment de sa base, au travers des composantes réelles des paramètres de Lamé,  $\lambda$  et  $G'$ , de sorte que sa représentation matricielle (ordre 2) s'écrit :

$$\underline{\underline{C}}' = \begin{pmatrix} \lambda + 2G' & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G' & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G' \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Pour un milieu isotrope, en petite perturbation, l'identification des propriétés mécaniques est restreinte à la masse volumique,  $\rho$ , et aux deux coefficients de Lamé,  $\lambda$  et  $G'$ , qui caractérisent respectivement les déformations longitudinales (compression) et transverses (cisaillement). En élasticité linéaire, la composante réelle du second coefficient de Lamé,  $G'$ , aussi appelée module de cisaillement, est plus communément dénotée par  $\mu$ . Dans ces travaux, ces deux coefficients sont distingués,  $G = G' + iG''$  étant complexe dans des configurations de dynamique harmonique pour un comportement de viscoélasticité linéaire, tandis que  $\mu$  est purement réel dans le cas de l'élasticité linéaire. En élasticité linéaire, les coefficients de Lamé sont associés au module d'Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  par :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{ et } G' = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.8)$$

La saturation en eau de nombreux tissus amène généralement à les considérer comme quasi-incompressibles, soit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \rightarrow 0$  [Manduca et al., 2001]. Cette hypothèse sur les faibles variations de volumes conduit à considérer :

$$\lambda \gg G' \Rightarrow \nu \rightarrow 0.5. \quad (1.9)$$

Le module de compressibilité ou module isostatique  $K'$ , aussi appelé *bulk*, traduit le comportement d'un solide en compression isotrope tel que  $K' = \lambda + \frac{2}{3}G'$ .

La condition de quasi-incompressibilité (1.9) des tissus donne :

$$\frac{\lambda}{K'} \rightarrow 1. \quad (1.10)$$

Dans ces travaux, les propriétés mécaniques des modèles élastiques étudiés seront généralement décrites par le triplet de propriétés réelles :

$$\theta' = (G', K', \rho), \quad (1.11)$$

où, généralement,  $G'$  s'exprime en kPa,  $K'$  en GPa et  $\rho$  en  $\text{kg.m}^{-3}$ .

**Tableau 1.1** Ordres de grandeurs des valeurs principales propriétés matérielles introduites pour des modélisations élastiques linéaires isotropes de différents organes *in vivo* [Emelianov et al., 2004].

Organe	$G'$ (Pa)	$K'$ (Pa)	$\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
Tissus mous	$10^3 - 10^4$	$1 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^9$	1,0 - 1,1
Muscle contracté	$10^5 - 10^6$	$1 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^9$	1,1 - 1,3
Cartilage	$10^7 - 10^8$	$1 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^9$	1,0 - 1,1
Os	$5 \cdot 10^8 - 10^{10}$	$5 \cdot 10^9 - 10^{10}$	1,5 - 2,5

Le tableau 1.1 illustre un grand contraste au niveau des propriétés élastiques des tissus biologiques. Pour les tissus mous, les variations relatives de ces différents modules conduit généralement à ne considérer que  $G'$  comme bio-marqueur pertinent pour leur évaluation, caractéristique de l'élasticité tissulaire. Les estimations de  $K'$  (ou  $\lambda$ , selon les configurations) et  $\rho$  demeurent accessoires en élastographie, car leurs valeurs sont très semblables.

### 1.1.3.2 Viscoélasticité linéaire

De nombreux tissus biologiques montrent une sensibilité de leur comportement à la vitesse de déformation. Pour rendre compte de cette caractéristique, il est souvent fait appel à des modèles viscoélastiques. Dans le cadre de sollicitations harmoniques, la prise en compte d'un comportement viscoélastique conduit à l'introduction de modules élastiques complexes qui permettent de décrire les déphasages entre les contraintes et les déformations. Par exemple, l'analyse rhéologique d'un modèle de Maxwell permet une première description de la dynamique harmonique à la pulsation  $\omega$  d'un solide viscoélastique en régime établi, en décomposant le module de cisaillement complexe  $G(\omega)$  en une partie réelle  $G'(\omega)$  et une partie imaginaire  $G''(\omega)$ , appelées respectivement module de conservation en cisaillement et module de perte en cisaillement. Afin de simplifier les paramètres mécaniques étudiés dans le présent travail, les grandeurs physiques associées au module complexe  $G(\omega)$  (simplifié par  $G = G' + iG''$ ) sont :

$$\mu = \frac{2|G|^2}{G' + |G|} \text{ et } \xi = \frac{G''}{2G'}, \quad (1.12)$$

avec  $\mu$  la rigidité de cisaillement, purement réelle, exprimé en kPa, et  $\xi$  le module d'amortissement, adimensionnel (aussi parfois converti en taux d'amortissement, exprimé en %). L'élasticité impose  $G'' = 0$ , ce qui conduit à  $\mu = G$  et  $\xi = 0$ . Il est usuel, en élastographie harmonique, d'associer la rigidité du tissu au seul module  $\mu$ , bien que cela soit réducteur, car (i) la rigidité n'est pas contenue qu'au travers du cisaillement, mais aussi par la compression caractérisée par  $\lambda$  et (ii) ce module décrit un comportement dans une dynamique spécifique, définie par la fréquence d'excitation  $\omega$ .

### 1.1.4 Propagation d'ondes mécaniques

Dans le cas d'un milieu solide élastique linéaire isotrope, la loi de Hooke (1.1) généralisée par Cauchy à l'aide du tenseur (1.7) s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2G'\underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (1.13)$$

Pour un comportement viscoélastique, ces équations sont généralisées en considérant les modules complexes associés à la pulsation imposée :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2G\underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (1.14)$$

L'équilibre défini dans (1.6) permet ainsi d'écrire l'équation aux dérivées partielles de Navier élastodynamique en viscoélasticité compressible [Graff, 2012] :

$$\rho \partial_{tt} \vec{u} = G \underline{\underline{\nabla}} \vec{u} + (\lambda + 2G) (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u} : \underline{\underline{\mathbb{I}}}) \underline{\underline{\mathbb{I}}}, \quad (1.15)$$

avec  $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$  le tenseur identité d'ordre 2. Le vecteur de déplacement solution de cette équation d'élastodynamique peut-être décomposé en composantes irrotationnelle  $\vec{u}_L$  et à divergence nulle  $\vec{u}_T$ , tel que  $\vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_T$ , afin de séparer l'équation (1.15) en deux équations décrivant la propagation d'une onde de compression et d'une onde de cisaillement [Sinkus et al., 2005]. Celles-ci sont respectivement :

$$\rho \partial_{tt} \vec{u}_L = (\lambda + 2G) \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}_L, \quad (1.16)$$

$$\rho \partial_{tt} \vec{u}_T = G \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}_T \quad (1.17)$$

Ainsi, pour un milieu homogène, la célérité d'une onde de compression issue de l'équation (1.16) est :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}. \quad (1.18)$$

De la même manière, la célérité d'une onde de cisaillement issue de l'équation (1.17) est :

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1.19)$$

Dans les tissus mous, l'onde de cisaillement se propage généralement à une vitesse de l'ordre de 10 mm/ms et l'onde de compression atteint 1500 mm/ms [Wells, 1975]. La célérité élevée des ondes de compressions rend leur visualisation complexe. Par ailleurs, celle-ci sont dépendantes du module isostatique, dont la variation dans le milieu tissulaire est faible. La quasi-intégralité des travaux effectués en élastographie dynamique portent donc sur les ondes de cisaillement et le module  $\mu$  qui les caractérise.

Enfin, pour des sollicitations harmoniques à la fréquence  $f$ , les longueurs d'ondes associées à ces célérités valent :

$$\lambda_L = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad (1.20)$$

pour l'onde de compression, et :

$$\lambda_T = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (1.21)$$

pour l'onde de cisaillement.

La figure 1.3 schématise la propagation d'une onde dans un milieu en distinguant sa composante longitudinale (compression) et sa composante transverse (cisaillement).

## 1.2 Mesure de la réponse mécanique

La mesure du mouvement tissulaire représente un enjeu essentiel dans le domaine de l'imagerie médicale depuis plus d'un demi-siècle. Dès les années 1950, des méthodes optiques étaient développées pour mesurer les propagations d'ondes viscoélastiques sur la peau [von Gierke et al., 1952]. D'autres méthodes plus sophistiquées permettent aujourd'hui d'approcher les problématiques d'élastographie par solutions optiques ou mécaniques. L'imagerie par résonance magnétique (IRM) et l'imagerie par ultrasons demeurent cependant les deux moyens d'investigation les

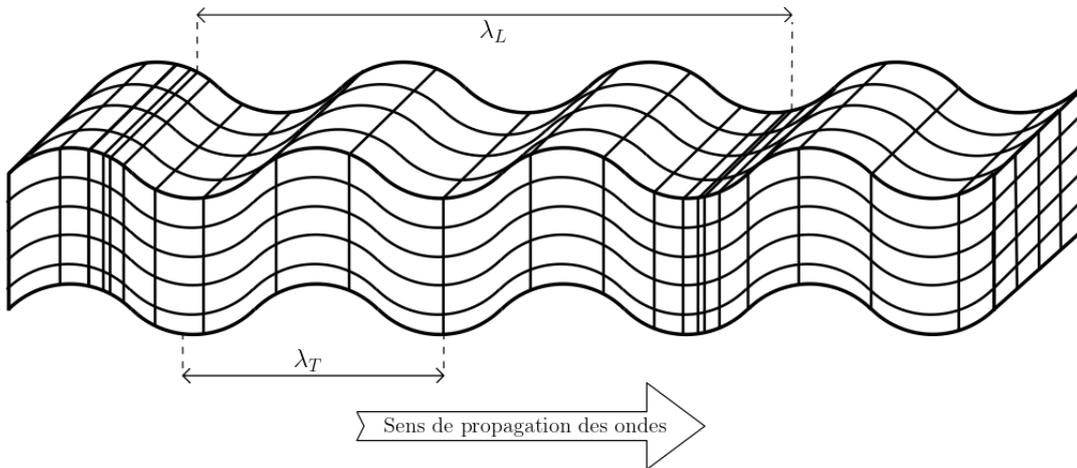


FIGURE 1.3 – Représentation de la propagation d’une onde dans un milieu unidimensionnel homogène. Les longueurs d’ondes caractéristiques de la compression ( $\lambda_L$ ) et du cisaillement ( $\lambda_T$ ) sont indiquées.

plus largement utilisés.

L'élastographie par résonance magnétique (ERM) est une technique d'imagerie médicale non-invasive introduite au milieu des années 1990 [Muthupillai et al., 1995]. Cette méthode se base sur une approche en IRM par contraste de phase dont le fonctionnement est brièvement décrit dans cette section. L'ERM est applicable sur différentes plateformes d'IRM, les champs magnétiques statiques des scanners d'IRM allant de 1.5 à 7 T pour l'humain, et de 4.7 à 11.7 T pour le petit animal.

En ERM dynamique, un actionneur vibratoire est placé en périphérie du tissu étudié d'un sujet installé dans un scanner par IRM. L'actionneur, aimantique, est capable de supporter le fort champ magnétique du scanner tout en limitant le développement d'artefacts et de bruit électromagnétique. Il génère des ondes mécaniques dont la fréquence varie généralement entre 20 Hz et 250 Hz. L'actionneur est synchronisé au scanner IRM, ce qui permet d'avoir une information dans la détection des ondes de cisaillement caractéristiques du tissu. Ces ondes se propagent dans le milieu tissulaire et jouent le rôle de sonde dans la méthode.

Cette section introduit succinctement des éléments relatifs au séquençage utilisé en ERM ainsi qu'une brève synthèse de l'élastographie par ultrason.

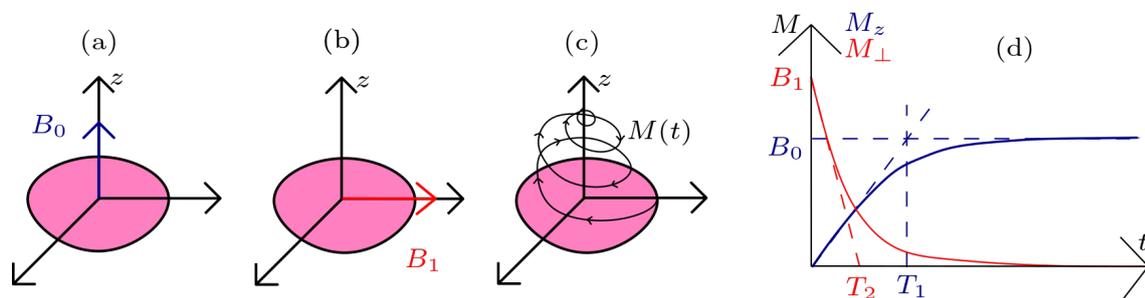


FIGURE 1.4 – RMN : (a) Aimantation autour du champ statique selon l'axe  $z$ ; (b) Basculement transversal de l'aimantation par application de l'onde RF; (c) Retour à l'équilibre de l'aimantation; (d) Représentation graphique de l'aimantation dans le temps par décomposition de la relaxation longitudinale (en bleu), caractérisée par  $T_1$ , et de la relaxation transverse (en rouge), caractérisée par  $T_2$ .

### 1.2.1 Résonance Magnétique Nucléaire

L'IRM est une technique d'imagerie non-invasive basée sur la résonance magnétique nucléaire (RMN), phénomène découvert en 1938 par Rabi (prix Nobel 1944) et mise en évidence 6 ans plus tard par deux groupes indépendants [Purcell et al., 1946; Bloch, 1946]. La RMN peut être décrite comme un phénomène quantique qui se produit lorsque certains atomes, dont le spin nucléaire est non nul, sont placés dans un champ magnétique statique  $\vec{B}_0$  et soumis à une brève impulsion radiofréquentielle (RF) d'une onde électromagnétique  $\vec{B}_1$ . Le champ statique, intense, créé par un super-aimant, est utilisé pour aligner les spins nucléaires des atomes dans un certain sens associé à la direction de ce champ (appelée direction longitudinale). Le principe de résonance magnétique consiste à perturber l'alignement des spins nucléaires dans le champ statique par une excitation transversale de RF émise par une antenne à une fréquence spécifique choisie pour résonner avec les noyaux atomiques cibles, appelés isochromats. L'absorption de l'énergie de l'onde électromagnétique à cette résonance modifie leur niveau d'énergie, et est ensuite retransmise sous forme de signal RMN au travers de l'aimantation des spins. Le retour à l'équilibre, après impulsion, de la composante longitudinale de l'aimantation au champ statique s'écrit :

$$M_z(t) = B_0 - (B_0 - M_z(0))e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (1.22)$$

**Tableau 1.2** Valeurs approximatives des temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$  à  $B_0 = 1.5\text{T}$ . [Brown et al., 2014].

Tissu	$T_1$ (ms)	$T_2$ (ms)
Liquide céphalo-rachidien (eau)	4500	2200
Matière blanche	600	80
Matière grise	950	100
Foie	500	40
Muscle	900	50
Tendon	400	5
Graisse	250	60

avec  $M_z(0)$  l'aimantation longitudinale initiale et  $T_1$  le temps de relaxation longitudinal. La composante transverse vaut :

$$M_{\perp}(t) = M_{\perp}(0)e^{-\frac{t}{T_2}}, \quad (1.23)$$

avec  $M_{\perp}(0)$  l'aimantation transverse initiale et  $T_2$  le temps de relaxation transverse. Le phénomène de RMN est schématisé à la figure 1.4.

Les temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$  caractérisent l'isochromat respectivement selon les champs  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$ . Leurs variations spatiales déterminent la composition des tissus. Le tableau 1.2 fournit les valeurs des temps de relaxation pour un scanner de 1.5 T [Brown et al., 2014]. Un séquençage spatial est alors requis pour reconstruire les images IRM.

## 1.2.2 Séquençage de l'élastographie par résonance magnétique

### 1.2.2.1 Encodage spatial

L'ajout d'un champ gradient en ajout au champ statique, dépendant du temps, modifie la fréquence du spin selon sa position dans l'espace. La dépendance spatiale de la fréquence du signal RMN devient alors un outil pour réaliser l'imagerie par résonance magnétique. Pour un échantillon de volume dont la position est connue, le signal RMN mesuré par l'antenne dépend de la fréquence spatiale de l'aimantation et son amplitude dépend du temps de relaxation. La reconstruction d'image est réalisée par une application de la transformée de Fourier du signal mesuré. L'aimantation reconstruite se traite sous la forme d'une amplitude et d'une phase, comme

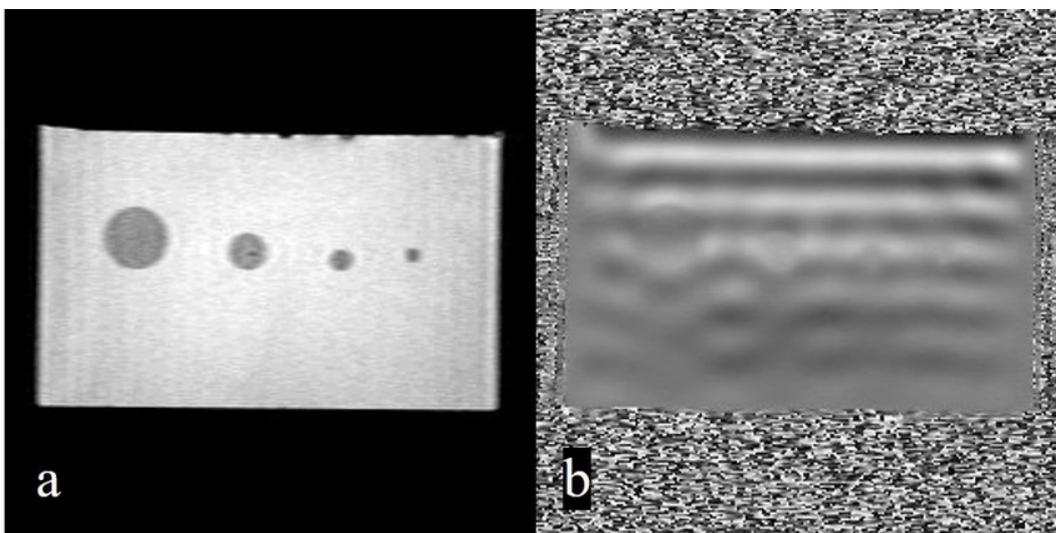


FIGURE 1.5 – Imagerie d’un matériau fantôme par détection du signal RMN : (a) image d’amplitude; (b) image de phase [Maharjan, 2020].

illustré à la figure 1.5. La répétition des cycles d’excitations et des gradients pour reconstruire l’ensemble d’un volume définit la séquence IRM. En ERM, l’imagerie issue du contraste de phase [Moran, 1982] est le support à la mesure du déplacement du tissu.

### 1.2.2.2 Encodage du mouvement

Une séquence IRM standard est implémentée avec des gradients d’encodage du mouvement (GEM),  $\vec{G}$ , qui sensibilisent la séquence au mouvement tissulaire causé par la propagation d’ondes mécaniques, dont la fréquence est pilotée par l’actionneur. Les mesures par GEM se font selon une direction spécifiée, et peuvent être appliquées dans les 3 directions du mouvement du tissu pour reconstruire un champ de déplacement 3D. Les GEM, synchronisés aux déplacements des spins du tissu *via* la séquence IRM standard, permettent d’accentuer le contraste de phase. Bien qu’elle varie selon les séquences, la sensibilité des déplacements est généralement inférieure à 100 nm. Plusieurs mesures (généralement 4 à 8) sont effectuées à différents instants d’une période liée à la sollicitation afin d’obtenir par transformée de Fourier discrète (TFD) le champ de déplacement volumique dans le domaine fréquentiel. Un traitement sur la divergence et le rotationnel est parfois appliqué et permet de séparer les déplacements de spins liés aux ondes de cisaillement et longitudinales [Low, 2016]. La figure 1.6 représente un exemple de diagramme de

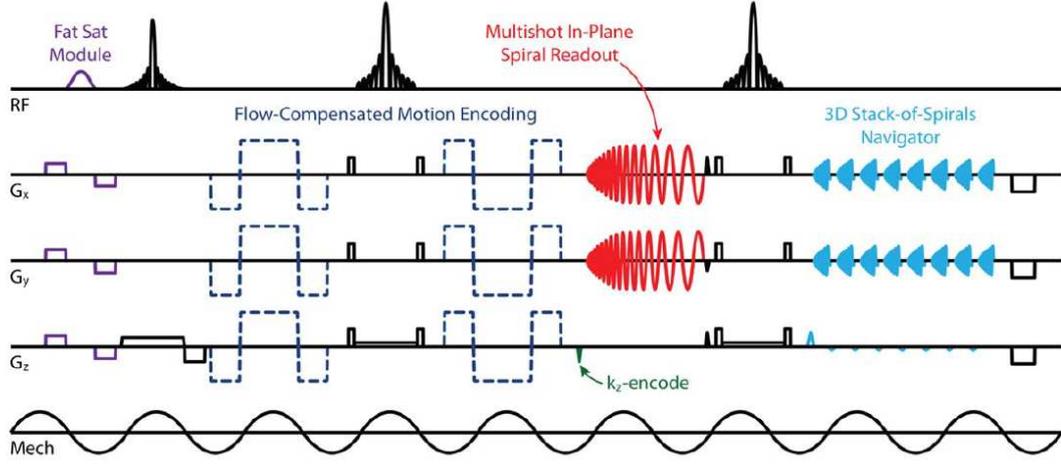


FIGURE 1.6 – Diagramme de séquence d'impulsions pour l'acquisition ERM. Le pilotage de l'impulsion RF, des directions du GEM et de la sollicitation mécanique sont indiqués en noir. Les spécificités de la séquence, non détaillées ici, sont représentées en couleur [Johnson et al., 2014].

séquence ERM exploitée dans des applications *in vivo* développées au chapitre 4.

Le déphasage  $\phi$  du signal RMN induit par un GEM d'amplitude  $\vec{A}_{GEM}$  pour une position de spin  $\vec{r}$  à la phase  $\varphi$  de l'onde de cisaillement est :

$$\phi(\vec{r}, \varphi) = \frac{\gamma N T_{GEM} (\vec{A}_{GEM} \cdot \vec{A}_0)}{2} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} + \varphi), \quad (1.24)$$

avec  $\gamma$  le moment gyromagnétique,  $N$  le nombre de cycles de gradient,  $T_{GEM}$  la période du GEM (synchronisée avec la période de l'excitation mécanique),  $\vec{A}_0$  l'amplitude du vecteur du champ de déplacement précédemment introduite par (1.5), et  $\vec{K}$  le vecteur d'onde [Muthupillai et al., 1995].

### 1.2.2.3 Diversité des séquences

De nombreuses séquences, définies par une approche d'encodage et de lecture d'ondes, ont été développées pour la mesure des 3 composantes du déplacement dans le volume des tissus ces deux dernières décennies [Guenther and Kozerke, 2018]. La synchronisation des GEM avec la fréquence de l'onde mécanique à imager définit les limites de la durée de lecture, donnée essentielle dans les applications cliniques.

Le besoin de limiter ce temps global d'acquisition, tout en maximisant la résolution spatiale, le rapport signal-bruit SNR (*signal-to-noise ratio*) et les artefacts liés au champ magnétique, motive ces développements. La comparaison des deux séquences standard de l'ERM illustre ces enjeux :

- La séquence écho de spin [Carr and Purcell, 1954] consiste à sommer deux gradients d'encodage d'amplitude et de durée identiques, mais de directions opposées, dans le but d'annuler la phase des spins non-excités tout en augmentant celle des spins en mouvement. Cette séquence restreint ainsi largement les artefacts lié au champ magnétique statique, mais les répétitions de gradients allongent le temps d'acquisition et restreignent son utilisation aux tissus riches en eau et en graisse avec un  $T_2$  important. La première utilisation de l'écho de spin, en 2000, à constitué une ouverture de l'ERM vers de nouvelles gammes de résolutions spatiales [Sinkus et al., 2000].
- La séquence écho de gradient supprime l'impulsion de direction opposée, réduisant les temps de relaxation et donc la durée globale de la séquence [Yin et al., 2007]. La séquence est cependant plus sensible aux artefacts. Les premières études en élastographie exploitaient cette approche [Muthupillai et al., 1995, 1996].

### 1.2.3 Imagerie par ultrason

L'élastographie ultrasonore regroupe différentes techniques utilisées pour la visualisation du mouvement du tissu biologique à partir de l'imagerie par ultrason. Introduite au début des années 1990 [Ophir et al., 1991], l'élastographie ultrasonore est une technique facile à mettre en œuvre, portable et peu coûteuse. Les examens ne demandent ni hospitalisation, ni anesthésie et ont une bonne répétabilité. Selon la sollicitation émise, deux techniques d'élastographie ultrasonore se distinguent : l'imagerie de déformation, correspondant au cas quasi-statique où une sollicitation constante est appliquée, et l'imagerie de l'onde de cisaillement, correspondant au cas dynamique où la sollicitation est générée par un dispositif vibratoire. Trois techniques associées aux différents moyens de sollicitations et mises en avant dans des synthèses récentes [Sigrist et al., 2017; Ozturk et al., 2018] sont présentées au tableau 1.3.

**Tableau 1.3** Elastographie ultrasonore : Présentation de trois classes de mesures [Sigrist et al., 2017; Ozturk et al., 2018].

	Elastographie statique ( <i>Strain Elastography</i> )	Elastographie impulsionnelle ( <i>Transient Elastography</i> )	Vibro-acoustographie ( <i>Shear Wave Elastography</i> )
Méthode de sollicitation	Pression externe appliquée par un transducteur ultrasonore	Impulsion mécanique par un dispositif vibratoire	Impulsion mécanique par pression de radiation
Moyen de mesure	Traitement de RF de pré et post sollicitation	Mesure des ondes de cisaillement dans la direction perpendiculaire à la sollicitation	Mesure des ondes de cisaillement dans la direction perpendiculaire à la sollicitation
Applications	Sein, thyroïde, foie, rein	Fibrose hépatique	Foie, prostate, sein, rein, thyroïde, tendon, pancréas
Avantages	Largement implémenté dans des systèmes cliniques, bonne résolution spatiale	Rapidité et facilité de l'examen, reproductivité	Variété des applications, évaluation quantitative
Inconvénients	Limité aux zones superficielles, évaluation qualitative, variabilité	Applications limitées, résultats non fiables pour les patients obèses	Reconstruction simplifiée des propriétés du tissu, nécessite un examen à jeun

### 1.3 Identification des propriétés mécaniques

La troisième étape de l'élastographie est l'estimation des propriétés biomécaniques du tissu imagé soumis à une sollicitation mécanique. L'objectif est d'associer à un champ de données de déplacement, généralement volumique, obtenu par le moyen d'imagerie médicale, un jeu de propriétés caractéristiques d'un comportement mécanique associé au milieu tissulaire.

### 1.3.1 Diversité des méthodes

Dans la pratique, l'estimation des propriétés biomécanique est effectuée par des algorithmes qui vont les évaluer quantitativement. Les premières approches de quantification de l'ERM portaient sur une estimation automatisée de la longueur d'onde de cisaillement. Ces traitements sont encore très largement répandus et leur qualité repose grandement sur la finesse des méthodes de filtrage associées. Ils ont l'avantage d'être directs et robustes pour certains milieux tissulaires. Le champ de recherche de l'ERM se diversifiant, des algorithmes plus complets sont apparus, basés sur la résolution de l'équation d'onde pour identifier les modules de cisaillement.

Le champ actuel d'applications de l'élastographie permet une grande variété de reconstructions, au sens mécanique, des milieux tissulaires, allant de l'élasticité linéaire isotrope [Huwart et al., 2008] à la viscoélasticité anisotrope [McGarry et al., 2021]. Au-delà de la complexité de la description du tissu, le temps et les ressources nécessaires aux calculs permettant d'obtenir les cartographies des modules mécaniques doivent être considéré selon le besoin, s'il est plus axé sur une exploitation en milieu clinique, comme l'examen individuel [Venkatesh et al., 2013] ou la méta-analyse [Singh et al., 2015], ou bien destiné à des travaux de recherches spécifiques, comme la classification [Hiscox et al., 2020b], ou le pré-diagnostic [Bayly and Garbow, 2018].

Dans de nombreuses applications, l'estimation qualitative du contraste de propriétés mécaniques d'une zone pathologique dans une région saine du tissu est tout à fait suffisante. La plupart de ces estimations sont obtenues par une sollicitation quasi-statique, où l'information sur la déformation du tissu est directement associée à une rigidité. En outre, les méthodes quantitatives permettent d'obtenir la valeur d'un module mécanique correspondant au modèle associé. Parmi ceux-ci, le module de cisaillement dynamique complexe  $G$ , ou le couple de propriétés viscoélastiques  $(\mu, \xi)$  traduisant une dynamique spécifiée, sont les plus fréquents. En plus du contraste de propriétés dans le tissu utile à la détection pathologique, la valeur identifiée représente une finalité de l'ERM, plaçant la technique comme une méthode de mesure absolue des propriétés de tissus *in vivo* et donc quantitative. Pour la plupart, ces méthodes nécessitent la mise en place d'algorithmes plus complexes, ordinairement itératifs, où l'estimation des contraintes dans le tissu est nécessaire.

Dans cette section, quelques méthodes remarquables d'identification directe en

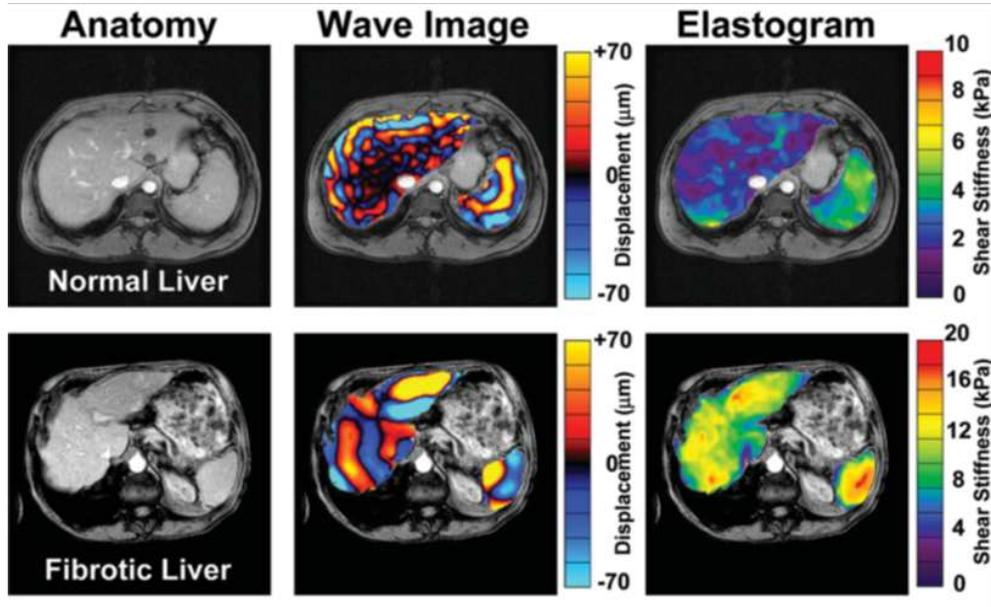


FIGURE 1.7 – Application de la méthode LFE (droite) sur le foie sain (haut) et fibrotique (bas), présentant l’image anatomique (gauche), l’onde de cisaillement (centre) et le module reconstruit (droite) [Talwalkar et al., 2007].

ERM sont présentées. L’intérêt est d’illustrer par ce prisme la diversité des enjeux pour le milieu clinique ou la recherche que cette technique a pu générer ces deux dernières décennies. Le formalisme sur lequel repose les méthodes itératives est ensuite introduit, puis une méthode spécifique utilisant une décomposition en sous-domaines est présentée plus en détail.

### 1.3.2 Exemples de méthodes directes

Les méthodes directes profitent d’un jeu de données abondant pour calculer directement la rigidité. Elles ont l’avantage d’être relativement rapides et assez simples. Les méthodes directes reposent sur une hypothèse d’homogénéité locale qui permettent une reconstruction globale à partir de résolutions directes sur de petits domaines. Cela engendre une forte dépendance envers la qualité des données et nécessite de nombreux moyens de régularisation pour permettre d’obtenir des reconstructions hétérogènes cohérentes.

### 1.3.2.1 Estimation locale de la fréquence

Introduite dans les premiers travaux en ERM [Manduca et al., 1996], l’algorithme LFE (*Local Frequency Estimation*) se base sur une estimation de la longueur d’onde des mesures pour estimer quantitativement le module de cisaillement associé. Pour arriver à cette considération, le comportement du tissu est considéré comme élastique, homogène, isotrope, incompressible. Cette méthode se montre efficace pour des analyses rapides dans de tels milieux et présente une bonne répétabilité. Elle est également peu sensible au bruit. La qualité des identifications est cependant limitée à des tissus vérifiant les hypothèses simplificatrices. Par ailleurs, la résolution est limitée par la taille de la longueur d’onde [Manduca et al., 2001]. De très nombreuses études ont été réalisées avec la méthode LFE pour des pathologies du foie [Talwalkar et al., 2007] (figure 1.7) et des reins [Rouvière et al., 2011].

### 1.3.2.2 Gradient de phase

Dérivée de la technique développée pour l’élastographie ultrasonore, cette méthode repose sur des principes proches de la méthode LFE. Elle consiste à calculer le vecteur d’onde à partir de l’estimation du gradient de la phase pour un déplacement donné. La longueur d’onde est alors obtenue avec le nombre d’onde (module du vecteur d’onde). Cette méthode peut traiter des problèmes avec une très bonne résolution. Cependant, le calcul de gradient augmente la sensibilité de la méthode au bruit et nécessite une importante quantité de méthodes de filtrage [Manduca et al., 2001]. La méthode du gradient de phase est également sensible aux ondes interférentielles, qui peuvent notamment être générées par des phénomènes de réflexion ou de diffraction d’ondes. Elle s’avère particulièrement efficace dans le cas de la propagation d’ondes planes, ce qui limite son utilisation dans des cas tridimensionnels.

### 1.3.2.3 Inversion algébrique

L’algorithme AIDE (*Algebraic Inversion of the Differential Equation*) repose sur l’inversion de l’équation de Navier en régime harmonique (1.15) dans un milieu supposé homogène dans lequel les termes portant l’onde de compression sont négligés. Cette méthode calcule le module de cisaillement complexe pour un milieu isotrope incompressible [Oliphant et al., 2001]. Pour une direction  $i = x, y, z$  d’encodage du mouvement à une sollicitation à la fréquence  $\omega$ , le module de cisaillement complexe est estimé par la relation :

$$\mu_{AIDE} = -\rho\omega^2 \frac{u_i}{\nabla^2 u_i} \quad (1.25)$$

A nouveau, la qualité de l'algorithme réside fortement dans le calcul du terme de dérivée seconde du déplacement. Celui-ci est généralement approché par un filtrage polynomial local de type Savitzky-Golay. En plus du bruit, les zones où l'intensité de déplacement est faible présentent des difficultés dans l'estimation de ces termes. L'algorithme se montre néanmoins robuste face aux ondes interférentielles.

#### 1.3.2.4 Inversion multi-fréquentielle

En multipliant les données d'un tissu soumis à plusieurs changements à différentes fréquences, les algorithmes multi-fréquentiels représentent une technique stable et prometteuse pour l'ERM. L'approche k-MDEV (*Multifrequency Dual Elastovisco*) utilise des filtres passe-haut sur les fréquences pour déterminer la propagation d'ondes planes dans le tissu. Les propriétés de rigidité et d'amortissement sont estimées en moyennant les multiples ondes planes avec leurs fréquences associées [Tzschätzsch et al., 2016]. Cette méthode d'inversion directe permet d'obtenir des reconstructions à haute résolution tout en demeurant robuste face au bruit. Elle demeure limitée à des analyses d'ondes planes et peu de tissus ont pu être imagés à cette méthode.

### 1.3.3 Méthodes itératives

Les méthodes visant à résoudre un problème inverse constituent les approches les plus répandues en ERM [Fovargue et al., 2018]. Parmi elles, les méthodes itératives, régulièrement appelées NLI (*Non-Linear Inversion*), résolvent un problème de minimisation non-linéaire entre un champ de déplacement calculé et le champ mesuré. Le champ des propriétés biomécaniques constitue la variable recherchée et détermine généralement les critères de convergence.

#### 1.3.3.1 Problème inverse

L'évaluation de quantités gouvernant un système physique représente un domaine extrêmement vaste et récurrent en sciences physique. En mécanique, le problème consiste généralement à associer des paramètres (module de cisaillement, module d'Young...), le plus souvent non-mesurables, à des quantités mesurables (déplacement, force) par un modèle respectant des lois physiques (équilibre, comportement). Pour un comportement donné, les problèmes directs (PD) utilisent les paramètres comme données d'entrée pour calculer les quantités mesurables à partir

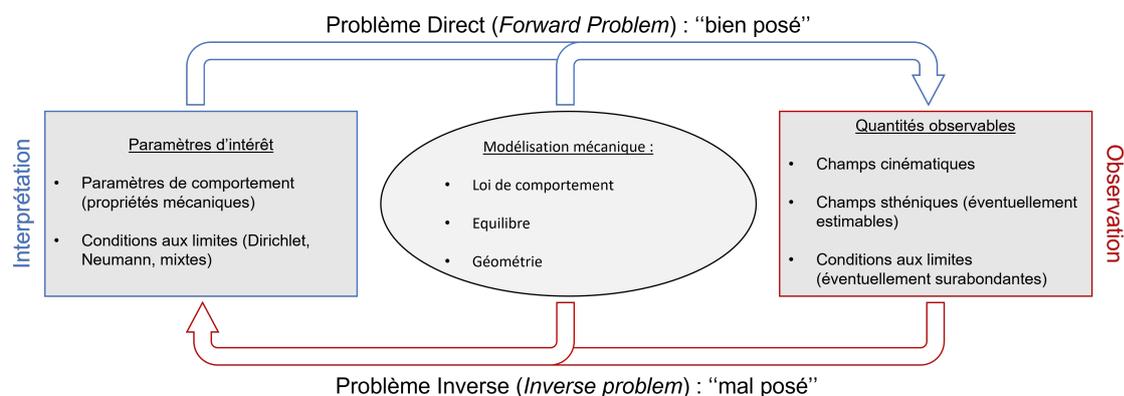


FIGURE 1.8 – Représentation schématique du problème direct et du problème inverse en mécanique.

d’un jeu de conditions aux limites et de conditions initiales fixé. En appliquant cette logique dans l’autre sens, les problèmes inverses (PI) utilisent les mesures comme données d’entrée pour déterminer les paramètres, et éventuellement certaines conditions aux limites (CL). La figure 1.8 fournit un schéma représentant les quantités connues et inconnues des problèmes direct et inverse.

La résolution d’un PI passe d’abord par la proposition d’un modèle direct bien posé au sens d’Hadamard, c’est-à-dire respectant trois conditions mathématiques : l’existence, l’unicité et la continuité [Hadamard, 1902]. Une fonctionnelle faisant intervenir ce modèle et des mesures expérimentales est formulée afin que sa minimisation fournisse un accès aux grandeurs recherchées : les paramètres comme le coefficient matériau pour un milieu homogène (ou le champ de coefficients pour un milieu hétérogène), les CL... La minimisation de cette fonctionnelle par rapport aux grandeurs recherchées constitue le PI. Cependant, même si le PD est bien posé, plusieurs biais contenus dans la définition du modèle et dans les mesures conduisent le PI à violer au moins l’une des conditions de Hadamard. Les méthodes visant à résoudre un PI diffèrent selon les grandeurs recherchées (type, quantité) et la stratégie numérique de minimisation.

### 1.3.3.2 Problème d’identification

Des approches portant essentiellement sur des discrétisations par éléments finis (EF) seront ici traitées. Les données cinématiques issues des images de phases ac-

quises par IRM fournissent un grand nombre de points de mesures ( $10^4 - 10^5$ ). Elles servent généralement de support à une distribution nodale régulière de la solution du schéma EF. Si le grand nombre de nœuds du système engendre un grand nombre de degrés de liberté, le nombre de paramètres distribués à estimer est inférieur (typiquement 3 à 100 fois moindre). La résolution du PI aboutissant à ce nombre fini de paramètres est souvent appelée identification, et parfois reconstruction.

De nombreuses méthodes existent pour traiter les problèmes d'identification de propriétés mécaniques [Avril et al., 2008]. Cela se formule en général sous la forme d'un problème d'optimisation, où l'objectif est de minimiser une fonctionnelle (fonction coût) convexe, qui quantifie la différence entre le modèle et la mesure. Les méthodes de résolution sont les approches qui permettent de rechercher son minimum. Dans ce travail sont présentés les méthodes de recalage par éléments finis au sens des moindres carrés (FEMU - *Finite Element Model Updating*) ainsi que les méthodes d'erreur en relation de comportement (ERC). Une autre méthode itérative utilisée dans des applications est la méthode de l'écart à la réciprocité [Calderón, 2006]. Pour les cas de comportements linéaires, il existe également des approches non-itératives portant sur la résolution de problèmes plans comme l'écart à l'équilibre [Claire et al., 2002] et la méthode des champs virtuels [Grédiac and Pierron, 2006].

### 1.3.3.3 Approche des moindres carrés

Généralisée il y a une quarantaine d'années [Tarantola and Valette, 1982], la méthode de recalage par éléments finis, appelée FEMU, consiste à minimiser la norme de la différence entre un champ solution d'un modèle direct et un champ de mesures. L'approche des moindres carrés par l'utilisation d'une norme  $L^2$  en est la déclinaison la plus naturelle et la plus répandue. Les mesures, obtenues dans un domaine  $\Omega^m$  constituent le domaine de référence pour le champ calculé ( $\Omega^m = \Omega$ ). Dans le cadre de l'ERM, le champ mesuré porte exclusivement sur les déplacements et assure deux fonctions : il définit la configuration optimale du champ calculé tout en permettant de spécifier des CL de type Dirichlet.

La fonctionnelle  $\Phi$  associée à cette méthode porte sur les données cinématiques et s'écrit comme un terme d'erreur quadratique entre  $\vec{u}(\theta)$ , le vecteur de déplacement complexe obtenu par la résolution du problème direct dépendant des propriétés  $\theta$ , et  $\vec{u}_m$ , les déplacements mesurés :

$$\Phi(\vec{u}(\theta)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\vec{u}(\theta) - \vec{u}_m) \overline{(\vec{u}(\theta) - \vec{u}_m)} d\Omega, \quad (1.26)$$

avec  $\bar{x}$  le conjugué de  $x$  [Tan et al., 2017a]. Le problème direct permettant le calcul de  $\vec{u}$  correspond à la résolution d'un problème classique en mécanique uniquement soumis à des conditions de Dirichlet. Il est défini et développé au chapitre 3. Le problème d'identification au sens des moindres carrés consiste à minimiser cette fonctionnelle par rapport au champ du jeu de propriétés inconnu  $\theta$  :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \Phi(\vec{u}(\theta)). \quad (1.27)$$

Dans la procédure itérative, le problème se résout à la  $n$ -ième itération par :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta\theta, \quad (1.28)$$

avec  $\Delta\theta$  le vecteur de correction des propriétés déterminé par la minimisation de  $\Phi$ , éventuellement régularisée par un terme de pénalisation. La recherche directionnelle de la valeur optimale est réalisée par des approches de minimisation, les méthodes de Gauss-Newton [Vogel, 2002] et du gradient conjugué (GC) étant parmi les plus courantes. Une formulation du problème d'optimisation développé dans ces travaux utilisant le GC est développée à la section 3.3.

#### 1.3.3.4 Erreur en relation de comportement

La méthode de résolution de problèmes inverses par formulation d'une fonctionnelle énergétique, appelée Erreur en Relation de Comportement (ERC) a d'abord été introduite pour qualifier l'erreur associée à la résolution d'un modèle EF [Ladeveze and Leguillon, 1983]. Par la suite, l'ERC est devenue un outil d'identification de paramètres en élasticité en quasi-statique [Geymonat et al., 2002], en plasticité [Marchand et al., 2019] ou encore en dynamique rapide [Feissel and Allix, 2007].

Le principe de l'approche par ERC est de traiter les espaces de champs cinématiquement admissibles (déformations) et dynamiquement admissibles (contraintes) comme des quantités indépendantes. La fonctionnelle ERC définit un terme résiduel sous la forme d'une norme énergétique au travers des équations de comportement entre ces deux champs. Une telle fonctionnelle a l'avantage de s'annuler quand les équations de comportement sont exactes et d'être sinon strictement positive. Un choix de formulation courant consiste à définir une norme d'erreur énergétique entre une contrainte dynamiquement admissible vérifiant l'équilibre et une

contrainte construite à partir d'un champ cinématiquement admissible, et de la relation de comportement viscoélastique. Dans ce sens, l'ERC en contrainte s'écrit pour un matériau viscoélastique linéaire comme :

$$\Psi(\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{C}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u})) : \underline{\underline{P}}^{-1} : \overline{(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u}))} d\Omega. \quad (1.29)$$

Le tenseur purement réel  $\underline{\underline{P}}$  est constant, homogène aux propriétés matérielles et confère à la fonctionnelle son sens énergétique. Dans l'ERC élastodynamique, les déplacements (ou déformations) calculés sont forcés de respecter l'admissibilité cinématique, ce qui est en contradiction avec des données expérimentales bruitées. Par conséquent, les travaux exploitant l'ERC appliqués à des données perturbées ont rapidement couplé cette méthode avec un terme d'erreur quadratique en déplacement (sur le volume et/ou sur la frontière) formant l'Erreur en Relation de Comportement Modifiée (ERCM), dont la fonction coût est :

$$\mathcal{F}(\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{C}}) = \Psi(\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{C}}) + \kappa \Phi(\vec{u}(\theta)), \quad (1.30)$$

avec  $\kappa$  un terme de pénalisation strictement positif,  $\Phi(\vec{u}(\theta))$  la fonctionnelle de recalage introduite par (1.26).

Le problème de minimisation de  $\mathcal{F}$  s'écrit :

$$(\vec{u}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*, \underline{\underline{C}}^*) = \arg \min_{\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{C}}} \mathcal{F}(\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{C}}). \quad (1.31)$$

Le principe de minimisation par directions alternées introduit dans l'ERC est également utilisé ici. A l'itération  $n$ , la première étape porte sur les champs mécaniques :

$$(\vec{u}^{n+1}, \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) = \arg \min_{\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}} \mathcal{F}(\vec{u}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{C}}^n). \quad (1.32)$$

Le second problème porte sur les paramètres matériaux à partir des nouveaux champs :

$$\underline{\underline{C}}^{n+1} = \arg \min_{\underline{\underline{C}}} \mathcal{F}(\vec{u}^{n+1}, \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}, \underline{\underline{C}}). \quad (1.33)$$

Pour introduire les conditions de stationnarité du problème (1.31), la forme lagrangienne des conditions d'optimalité est utilisée [Aquino and Bonnet, 2019]. Elle introduit un champ de déplacement adjoint  $\vec{w}$  jouant le rôle de multiplicateur

de Lagrange. L'annulation des dérivées directionnelles de Gâteaux au premier ordre des champs du lagrangien, développées et discrétisées par la méthode des EF dans [Diaz et al., 2015], conduit au système couplé résolvant le premier problème de minimisation (1.32) :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{P}] & [\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}] \\ ([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])^H & -\kappa[\mathbf{D}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\vec{\mathbf{w}}\} \\ \{\vec{\mathbf{u}}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ -\kappa\{\mathbf{R}\} \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

avec  $[P]$  la matrice du tenseur  $\underline{\underline{P}}$ ,  $[\mathbf{K}]$  la matrice du tenseur  $\underline{\underline{C}}$ ,  $[\mathbf{D}]$  la projection du domaine.

Le second problème (1.33) peut être résolu en forçant l'annulation de la dérivée de Gâteaux dans la direction du tenseur de propriétés [Diaz et al., 2015]. Pour un matériau visco-élastique isotrope, les modules s'obtiennent en découplant les parties déviatoriques et volumiques des tenseurs de contraintes et de déformations calculés dans le premier problème (1.34) et en les associant aux composantes du tenseur des propriétés. En les supposant constants dans un domaine  $D \subseteq \Omega$ , cela donne :

$$K^{n+1} = \frac{\int_D \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} : \underline{\underline{1}} dV}{3 \int_D \underline{\underline{\varepsilon}}(u^{n+1}) : \underline{\underline{1}} dV}, \quad (1.35)$$

$$\mu^{n+1} = \frac{\int_D \underline{\underline{\sigma}}_{dev}^{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{dev}(\vec{u}^{n+1}) dV}{3 \int_D \underline{\underline{\varepsilon}}_{dev}(\vec{u}^{n+1}) : \underline{\underline{\varepsilon}}_{dev}(\vec{u}^{n+1}) dV}, \quad (1.36)$$

avec  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ . Les notations  $\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{1}}$  et  $\underline{\underline{X}}_{dev}$  représentent respectivement la trace et le déviateur du tenseur  $\underline{\underline{X}}$ .

L'approche ERCM, plus robuste que l'ERC face au bruit, conserve les définitions fiables de l'équilibre et des CL connues et place les mesures cinématiquement non fiables dans le résidu de la fonctionnelle. Des applications de l'ERCM à des problèmes d'optimisation élastodynamique ont montré que cette méthode possède une bonne convexité dans l'espace des propriétés [Feissel and Allix, 2007], permet de traiter des problèmes aux CL partiellement ou totalement inconnues [Diaz et al., 2015], et s'avère robuste face aux fréquences de résonances [Banerjee et al., 2013]. Une analyse des propriétés mathématiques de cette méthode en dynamique harmonique a été effectuée par [Aquino and Bonnet, 2019], démontrant que le système couplé discrétisé (1.34), sous réserve de la présence de données intérieures suffisamment abondantes, est bien défini même dans des cas où des CL sont manquantes, voir absentes. Sur la base de cette approche, l'ERCM a récemment été appliqué à l'élastographie ultrasonore [Ghavami et al., 2020; Ghosh et al., 2017]. Ces études comparatives sur

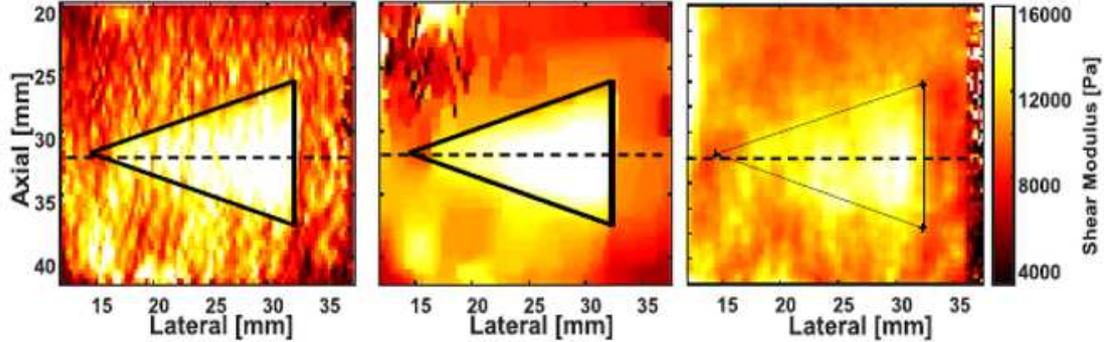


FIGURE 1.9 – Reconstruction du module de cisaillement d’un fantôme avec inclusion rigide triangulaire par ERCM (gauche), ERCM régularisée (milieu) et *Shear Wave Elastography* (droite) [Ghavami et al., 2020].

données hétérogènes *in-silico* et fantômes ont montré que cette méthode, parfois régularisée, peut produire des reconstructions de modules de cisaillement plus précises que les méthodes classiques de vibro-acoustographie. La figure 1.9 montre que la méthode ERCM (gauche) présente un meilleur contraste vis-à-vis d’une méthode classique de type *Shear Wave Elastography* (droite). En étant couplée à un terme de régularisation (centre), l’ERCM présente également une définition supérieure de la topographie de la matrice et de l’inclusion. La réduction de la sensibilité aux biais de mesures intégrée par l’approche de l’ERCM a inspiré certains développements présentés au chapitre 3.

### 1.3.4 Inversion non-linéaire par décomposition en sous-domaines

#### 1.3.4.1 Historique et applications

Une méthode inverse itérative souvent utilisée pour l’ERM harmonique est la méthode de découpage en sous-domaines, dite *subzone-based NLI*. Le domaine global est décomposé en de nombreux sous-domaines, aussi appelés zones, se superposant légèrement. Les équations gouvernantes sont discrétisées par zone et résolues par recalage FEMU. Des critères locaux (à l’échelle de la zone) et globaux (à l’échelle du domaine) pilotent la convergence. En plus d’un gain de stabilité constaté sur les propriétés globales grâce aux critères locaux, la décomposition en sous-domaines permet le calcul en parallélisation et une réduction conséquente des coûts de calcul.

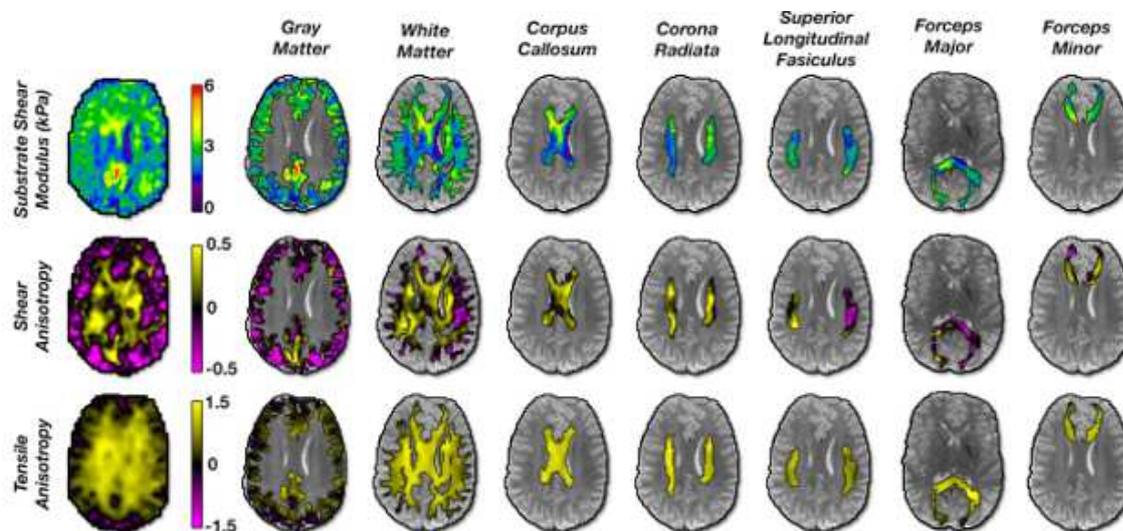


FIGURE 1.10 – Un exemple d’application récente de la méthode *subzone NLI MRE* : cartes du module de cisaillement et des paramètres anisotropes estimés dans le cerveau humain dans une tranche représentative pour plusieurs zones d’intérêt : matière grise, matière blanche, corps calleux, corona radiata, fasciculus longitudinal supérieur, forceps minor et forceps major [Smith et al., 2022].

Les résultats sur les propriétés mécaniques reconstruites de ces travaux sont réalisés avec la méthode *subzone NLI*.

Introduite par Van Houten en 1999, de nombreuses évolutions sont venues compléter la méthode, permettant notamment de prendre en compte des données *in vivo* 3D [Van Houten et al., 2003], le calcul en parallélisation [Doyley et al., 2004], ou encore le choix de paramètres d’identifications [Van Houten et al., 2005]. De nombreux modèles constitutifs ont été développés pour cet algorithme, notamment des formulations élastiques linéaires [Perreard et al., 2010], viscoélastiques [McGarry et al., 2012] et poroélastiques [Perrinez et al., 2009]. L’anisotropie, abordée au travers de comportements isotropes transverses, a également été récemment étudiée avec succès pour les structures fibreuses, en particulier la matière blanche cérébrale [Smith et al., 2022] (voir figure 1.10). La méthode de minimisation utilisée pour l’identification des paramètres mécaniques a été effectuée à l’origine avec la méthode de Gauss-Newton, puis étendue à des approches de GC et de quasi-Newton [Tan et al., 2017b]. Si l’atout principal de la méthode initiale était la stabilité de

l'inversion assurée par le chevauchement des sous-zones, qui agit comme un filtre spatial [Van Houten et al., 1999], une formulation additionnelle de régularisation portant sur la variation totale [Paulsen and Jiang, 1996] a ensuite été implémentée [McGarry et al., 2013]. Récemment, les applications *in vivo* en viscoélasticité sur le cerveau humain sain ont notamment permis d'établir le premier atlas standardisé des propriétés mécaniques par ERM [Hiscox et al., 2020b], ainsi que d'illustrer des changements de rigidité par IRM fonctionnelle [Forouhandehpour et al., 2021].

#### 1.3.4.2 Algorithme

La programmation de *subzone NLI MRE* est initiée en 2007 à l'Université de Canterbury (Christchurch, Nouvelle-Zélande) par Elijah Van Houten, Han Uwe-Berger et Matthew McGarry. L'algorithme est programmé dans le langage Fortran 90 [Brainerd et al., 1990] et intègre les bibliothèques MPI ([mpi-forum.org](http://mpi-forum.org)) pour la communication en parallélisation et MUMPS ([mumps-solver.org](http://mumps-solver.org)) pour l'inversion parallélisée des matrices creuses. Il est aujourd'hui développé par des équipes du Dartmouth College (New Hampshire, États-Unis) et de l'Université de Sherbrooke (Québec, Canada). Plusieurs groupes de recherche, principalement aux États-Unis, mais aussi au Canada, en France ou encore aux Pays-Bas, exploitent l'algorithme. L'algorithme est notamment implémenté sur les supercalculateurs Narval et Béluga sous la gouverne de Calcul Québec et de l'Alliance de recherche numérique du Canada. L'exploitation de ce supercalculateur est financée par la Fondation canadienne pour l'innovation, le ministère de l'Économie et de l'Innovation du Québec et le Fonds de recherche du Québec.

La structure globale de l'algorithme est présentée à la figure 1.11. Une présentation des calculs liés à la parallélisation par sous-domaines est développée au chapitre 3. Brièvement, les étapes principales de cet algorithme sont :

1. Les données d'entrée contiennent les champs de déplacements volumiques mesurés  $\vec{u}_m$ , groupés par composantes (parties réelles et imaginaires pour les trois directions de l'espace) et associés à une grille de coordonnées, généralement directement issue du quadrillage associé à l'acquisition IRM, qui formera le maillage EF utilisé pour discrétiser le problème. A cela s'ajoute un paramétrage de l'algorithme défini, notamment, par un jeu de propriétés mécaniques initial homogène  $\theta_0$ , ainsi que des termes de régularisation éventuels sur les modules identifiés (facteur de variation totale  $\alpha_{TV}$  et taille de filtrage spatial

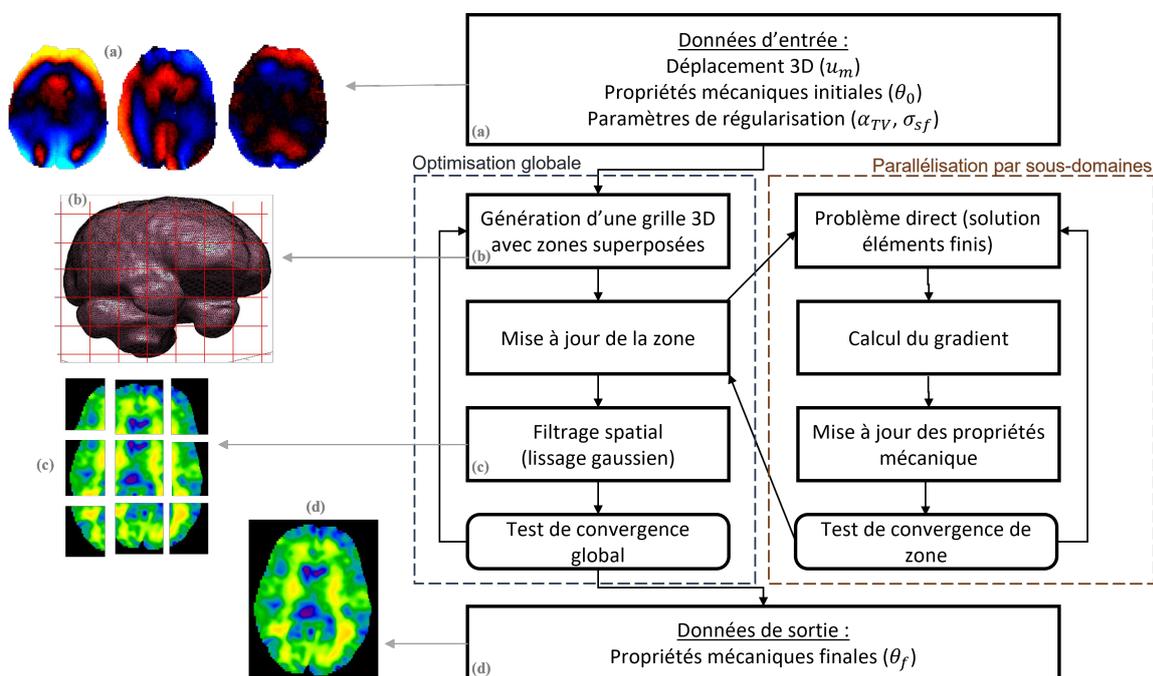


FIGURE 1.11 – Algorithme *subzone NLI MRE*, incluant des exemples illustratifs de : (a) données de déplacements 3D mesurés, (b) découpage par sous-domaines, (c) reconstructions par sous-domaines, (d) reconstruction globale.

gaussien  $\sigma_{fs}$ ).

- L'itération globale de l'algorithme débute avec une décomposition aléatoire, réalisée par le noeud maître, du domaine géométrique global  $\Omega$ , défini par un masque contenu dans les données initiales, en plusieurs géométries indépendantes  $\Omega_Z$  décrivant un réseau de sous-zones (*subzone*) qui se superposent légèrement. Cette superposition des maillages est définie comme étant 5 à 20% du nombre de noeuds EF par direction. Une sous-zone est attribuée à un noeud esclave qui va être en charge de mettre à jour les propriétés des noeuds EF la composant.
- Le problème adjoint associé à une sous-zone consiste d'abord à résoudre le PD en calculant un couple de champs cinématiques  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ , dénommés respectivement par les termes « déplacement » et « adjoint », satisfaisant les équations d'équilibre de la dynamique d'un modèle mécanique défini par un champ de propriétés  $\theta$  associé. Il est considéré que les trois familles de modèles sont la viscoélasticité (compressible, incompressible), la poroélasticité et la visco-

élasticité isotrope-transverse. Dans les cas où des termes sur la pression sont considérés, ceux-ci sont également calculés durant cette étape. Le PD en viscoélasticité est développé à la section 3.2.

4. Pour une même sous-zone, le PI consiste à calculer itérativement le gradient des champs cinématiques obtenus par le PD pour obtenir le champ de propriétés mécaniques optimisant la différence entre le champ mesuré et le champ calculé. Plusieurs stratégies de minimisation existent pour obtenir les propriétés mécaniques : GC, Gauss Newton et quasi-Newton. La régularisation sur la variation totale est intégrée durant cette étape. Ces travaux seront réalisés à l'aide de la méthode du GC et des éléments de calculs donnés à la section 3.3. Un premier critère de convergence, local car défini sur la sous-zone, est ensuite appliqué sur les propriétés itérées. Celui-ci intègre un nombre maximal d'itérations et la variation, relative et absolue, des propriétés.
5. Quand l'ensemble des noeuds esclaves à terminé la mise à jour des propriétés, le noeud maître applique un filtre gaussien, homogénéisant les résultats entre les zones. Un second test de convergence, semblable au premier mais global, est ensuite appliqué. Si les critères ne sont pas complétés, une nouvelle décomposition en sous-zone est réalisée et la résolution parallélisée reproduite. Après convergence globale, le jeu de propriétés identifiées finales  $\theta_f$  est stocké pour le post-traitement.

## 1.4 Biais et limites

Cette section énumère les limites usuelles, physiques et physiologiques, de l'ERM, puis présente des éléments quantitatifs d'incertitude afin d'introduire la question, centrale dans ces travaux, des biais et de leur impact.

### 1.4.1 Limites de l'acquisition IRM

Les applications de l'ERM sont vastes, mais demeurent limitées par plusieurs facteurs. Quatre aspects liés au protocole clinique et à l'IRM sont développés ici : la résolution spatiale, l'intensité des champs magnétiques, le niveau de vibrations mécaniques, et la durée d'une acquisition IRM.

- La résolution spatiale, définie par la séquence IRM au travers de la taille d'échantillonnage et du SNR, contraint l'application de l'ERM. Du point de vue de la modélisation mécanique à l'échelle macroscopique, la résolution spa-

tiale est définie au premier ordre par la taille de voxel et cantonne l'analyse, a minima, aux objets de taille équivalente. Un surplus d'information est requis pour les modélisations de milieux à forte hétérogénéité ou anisotropie. Cette prise en compte de données complémentaires alourdit le protocole ou la séquence, comme le font par exemple pour le cerveau l'acquisition multifréquentielle [Reiss-Zimmermann et al., 2015] ou l'utilisation de l'imagerie du tenseur de diffusion [Johnson et al., 2013]. Les travaux sur le développement du séquençage intègrent ces défis d'amélioration de la définition spatiale, tout en limitant les détériorations du SNR, paramètre clés dans la qualité des reconstructions, ou bien du temps d'acquisition. Les résolutions sur images pré-identification atteignent  $2.0 \times 2.0 \times 2.0 \text{ mm}^3$  sur un champ de vue (FOV - *field-of-view*) de  $240 \times 240 \times 240 \text{ mm}^3$  pour des séquences adaptées au cerveau humain [Johnson et al., 2014] et descendent à  $0.19 \times 0.19 \times 1.0 \text{ mm}^3$  sur un FOV de  $24.0 \times 24.0 \times 10.0 \text{ mm}^3$  pour le cerveau de souris [Yin et al., 2018].

- Pour les séquences d'IRM classiques, un protocole éthique bien établi définit les règles à suivre en matière d'intensité de champs magnétiques et temps de gradients [Kanal et al., 2007]. Il s'applique dans le cadre du séquençage de l'ERM, l'ajout d'un GEM n'apportant que des modifications mineures au séquençage.
- Les vibrations générées par l'actionneur extrinsèque exposent les tissus à des gammes de fréquences mécaniques dont la bénignité n'est pas forcément absolue. L'intensité de la sollicitation en vibration des tissus peut poser de nombreux problèmes, notamment sur le système neuromusculaire ou bien déclencher des lombalgies. La sécurité du patient soumis à ces vibrations est réglementée, notamment par des normes ISO qui fixent un seuil d'exposition aux vibrations à basses fréquences, basées sur une mesure de l'accélération maximale. Un cadre s'inspirant de ces normes et directives a été proposé pour l'ERM en prenant en compte la variété des tissus et le domaine fréquentiel [Ehman et al., 2008]. Ces données peuvent restreindre le potentiel de signal contenu dans la mesure et doivent donc être intégrées dans la stratégie d'acquisition IRM. Lors de ces séances d'acquisition, la détermination de l'intensité (amplitude et fréquence) de la source de sollicitation extrinsèque est donc essentielle pour optimiser les contraintes liées à la sécurité du sujet, aux mesures et à la validité mécanique par rapport au modèle d'identification appliqué.
- Le temps d'acquisition pose des problèmes de pénibilité, voire de sécurité pour

le sujet installé dans le scanner, et restreint la diffusion en milieu clinique de l'ERM. Dans les applications déjà en place, le protocole d'imagerie est généralement allongé de 5 à 10 minutes, en considérant l'installation d'un actionneur et l'acquisition IRM [Sack, 2023]. Les applications commerciales de l'ERM se cantonnent pour l'instant à des pathologies bien identifiées comme la fibrose hépatique.

## 1.4.2 L'erreur dans la mesure

L'acquisition de données en ERM se compose de plusieurs étapes durant lesquelles vont s'accumuler les erreurs de mesure associées au bruit. Celui-ci est généralement défini comme étant la cause du décalage entre la mesure et la valeur estimée attendue. Il est donc essentiel d'identifier correctement les sources provoquant l'erreur contenue dans la mesure du champ de déplacement pour pouvoir estimer la fiabilité de la reconstruction.

### 1.4.2.1 Sources

Une étude récente propose un cadre pour la caractérisation du bruit en ERM et l'applique au cerveau humain [Hannum et al., 2022]. Dans ce travail, les sources du bruit liées à l'acquisition sont regroupées en 3 catégories :

1. Le bruit d'image. Il est associé à une séquence d'IRM de gradient de phase « classique », c'est-à-dire d'une imagerie statique sans GEM. D'une part, celui-ci se compose d'un bruit de fond, largement documenté en IRM, associé principalement à l'agitation thermique provoquée par les porteurs de charges que sont le sujet et les composants électroniques du système IRM [Liu, 2016]. Le bruit de fond inclut également les signaux RF parasites (environnement, composants métalliques). Par ailleurs, l'acquisition IRM est sensible au mouvement, qu'il soit inéluctable (pulsation cardiaque, respiration) ou non (mouvement de l'ensemble du tissu imagé), et se traduit par la reconstruction d'images « floutées » [Havsteen et al., 2017]. La figure 1.12 donne un exemple d'artéfacts liés à de mauvaises acquisitions du mouvement [Liu et al., 2004]. Cette sensibilité aux artéfacts de mouvement est particulièrement présente dans les régions à faible signal et sur les images de reconstruction de la phase. Le bruit d'image est généralement considéré comme gaussien et des techniques de filtrage limitent son impact lors de la génération d'images.

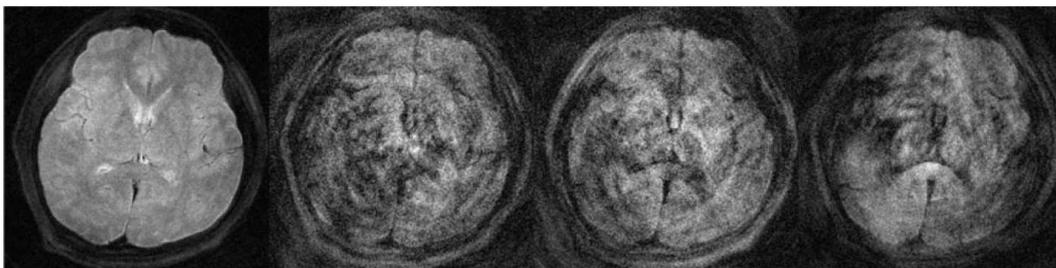


FIGURE 1.12 – Exemple d’un niveau extrême d’erreur de lecture du mouvement liée à la sensibilité de la séquence. Les images de phase représentent l’acquisition statique (gauche) et les lectures des trois directions de gradients [Liu et al., 2004].

2. Le bruit physiologique. La mesure du mouvement engendrée par l’ajout d’un GEM accroît grandement la sensibilité de l’acquisition à l’ensemble des mouvements résiduels, dissociés des ondes de cisaillement synchronisées au GEM. On retrouve parmi ceux-ci les mouvements physiologiques. Par exemple, en périphérie du cerveau, les déplacements induits par la pulsation cardiaque ( $\sim 1$  Hz) atteignent l’ordre de la centaine de micromètres [Weaver et al., 2012], mais suivent une fréquence différente de celle du GEM, encodant un signal disjoint du déplacement harmonique. Selon la séquence et le système, les vibrations du scanner produites par les GEM transmises à la table peuvent également être une source supplémentaire du bruit.
3. Le bruit de vibration. Par son contact indirect avec le tissu et sa capacité limitée à reproduire un mouvement purement périodique, l’actionneur contribue également à répandre un bruit physiologique supplémentaire. Ce bruit est propre au besoin de l’ERM de générer des ondes de cisaillement.

#### 1.4.2.2 Profils de distribution

En isolant et quantifiant les mesures des 3 différentes sources du bruit (voir figure 1.13), l’étude de Hannum et al. démontre l’existence d’une corrélation spatiale de ces différents bruits. Le bruit d’image est celui qui a le moins d’effet, car il est aujourd’hui bien identifié et compensé par les séquences d’IRM et le filtrage. Cependant, la considération du caractère spatialement corrélé du bruit en ERM n’a pour l’instant pas été intégrée dans d’autres études. Par ailleurs, bien que la question du bruit à distribution non-gaussienne soit brièvement considérée au chapitre 4, la plupart des développements liés au bruit présentés dans ces travaux considéreront

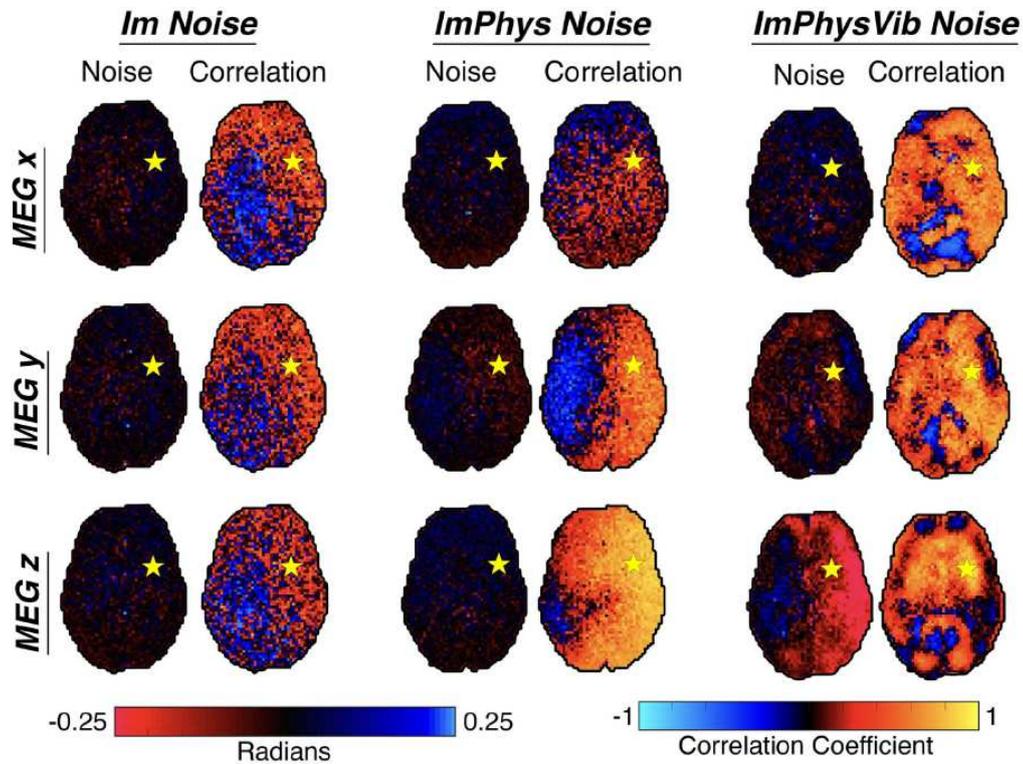


FIGURE 1.13 – Un exemple de quantification du bruit dans le cerveau humain : comparaison visuelle du bruit et de la corrélation du bruit dans les 3 directions d’imagerie pour des bruits s’additionnant : l’image (*Im Noise*), le physiologique (*ImPhys Noise*) et la vibration (*ImPhysVib Noise*). Le bruit est affiché pour une répétition d’une tranche et le coefficient de corrélation correspondant est ainsi calculé pour un seul point. Les coefficients de corrélation indiquent le degré de corrélation du bruit observé à travers l’image par rapport au point indiqué par l’étoile [Hannum et al., 2022].

des distributions gaussiennes.

Les processus numériques utilisés dans la lecture et l’éventuelle mise en place de filtres convolutifs afin de récupérer la composante harmonique du déplacement (TFD, filtre gaussien) conservent la distribution normale d’un signal. Dans la pratique, les traitements en ERM associent un caractère gaussien au bruit issu du signal RMN et maîtrisent ainsi l’effet des filtrages limitant l’impact de bruit. Ces techniques de réduction du bruit sont abondantes et la qualité des méthodes d’identification est fortement corrélée à leurs performances. Les réductions du bruit des

images de phase incluent le seuillage de la TFD pour isoler les mouvements liés à la fréquence d'activation [Ophir et al., 1991] et le filtrage passe-bande pour isoler les ondes de cisaillement [Manduca et al., 2003].

En théorie, le signal RMN sous sa forme complexe est exprimé comme :

$$S_0 = I_0 e^{j\phi_0}, \quad (1.37)$$

avec  $I_0$  et  $\phi_0$  le module et la phase du signal, respectivement. Le module est la norme de la composante réelle  $I'$  et imaginaire  $I''$  de l'aimantation transverse  $M_\perp$  (1.23) :

$$I_0 = \sqrt{I'^2 + I''^2}. \quad (1.38)$$

La phase est donnée par :

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{I''}{I'}\right). \quad (1.39)$$

La forme non-linéaire du module (1.38) confirme l'aspect non-gaussien du bruit, car il est alors défini selon une distribution ricienne [Gudbjartsson and Patz, 1995]. Cependant, dans la pratique, l'efficacité des méthodes de filtrage du bruit d'image conduit à simplifier le bruit en le supposant gaussien [Coupé et al., 2010].

### 1.4.3 L'erreur dans la déformation en cisaillement

En imagerie, la quantification du bruit à l'aide du rapport signal-sur-bruit évalue la qualité de la mesure, et donc la capacité à reproduire des reconstructions de propriétés mécaniques fiables dans le cas de l'identification. Pour la description de ce rapport signal-sur-bruit, un champ basé sur un invariant (scalaire) de la déformation permet une interprétation simplifiée par rapport à un champ de déplacement (vectoriel). De nombreuses méthodes en ERM considérant des ondes de cisaillement, une grandeur pertinente pour caractériser l'erreur est la composante déviatorique  $\varepsilon_d$  du tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  (donné par (1.3)). Une formulation introduite par McGarry est basée sur le calcul du rapport signal-sur-bruit à partir de cette composante [McGarry et al., 2011]. Cette approche permet de ne pas considérer les déformations axiales liées aux variations de volume associées aux ondes de compression. Ce paramètre déviatorique scalaire est le second invariant du tenseur de déformation, et rend compte de la déformation de cisaillement mesurée maximale. Il est donné par :

$$\varepsilon_d = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}. \quad (1.40)$$

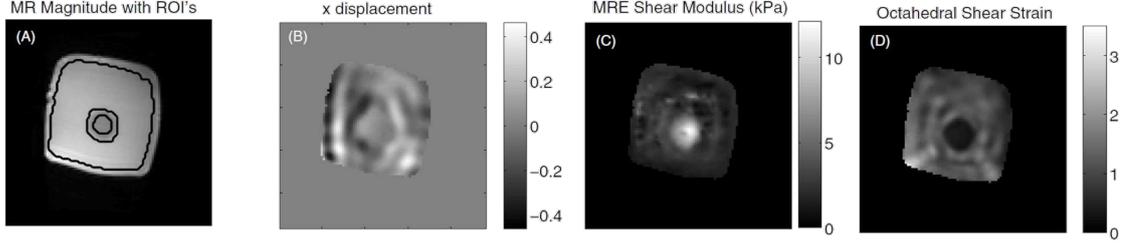


FIGURE 1.14 – Représentations caractéristiques d'une coupe d'un échantillon en ERM : image de magnitude (A), déplacement caractéristique (B), module de cisaillement (C), OSS (D) [McGarry et al., 2011].

La déformation déviatorique est définie par une opération non-linéaire par rapport au déplacement, mais intègre néanmoins son caractère harmonique en doublant la fréquence d'excitation. La déformation déviatorique  $\bar{\varepsilon}_d$  moyennée temporellement sur une période  $T$  est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_d(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_d(x, y, z, t) dt, \quad (1.41)$$

avec  $T = \frac{\omega}{2\pi}$ . La déformation déviatorique  $\bar{\varepsilon}_d$  moyennée spatialement sur un volume d'intérêt  $\Omega$  est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_d = \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_d(x, y, z) d\Omega. \quad (1.42)$$

L'intégration temporelle de (1.41) est réalisée numériquement par une quadrature de Gauss. La figure 1.14 fournit une représentation spatiale de l'OSS (*octahedral shear strain*).

Le bruit de déplacement  $\delta\vec{u}_i$  associé à la  $i$ -ème phase du signal d'excitation est la différence entre le déplacement mesuré,  $\vec{u}_i^m$ , et le déplacement  $\vec{u}_i^k$  associé à la première harmonique de  $\vec{u}_i^m$ . Dans la pratique, cette mesure est obtenue par l'analyse des phases du signal IRM avec l'encodage du mouvement. Le bruit sur le déplacement associé à la  $i$ -ème phase est le résiduel entre le déplacement mesuré et celui associé à la pulsation de sollicitation. De la même manière que le champ de mesure, il est possible de calculer la déformation déviatorique moyennée du champ de déplacement bruité  $\delta\vec{u}$ . Un rapport signal-bruit basé sur la déformation déviatorique moyennée, l'OSS-SNR, est défini par :

$$\text{OSS-SNR} = \frac{\bar{\varepsilon}_d(\vec{u})}{\bar{\varepsilon}_d(\delta\vec{u})}. \quad (1.43)$$

Le calcul de l'OSS-SNR évalue la qualité de la mesure et donc, indirectement, celle de la reconstruction des paramètres mécaniques. Il est intégré aux routines de gestion des données de plusieurs groupes [Hiscox et al., 2020a; Arani et al., 2017] et définit un seuil permettant de sélectionner les données. Cette évaluation demeure cependant corrélée à différents aspects des routines, comme la séquence ou la méthode d'identification.

#### 1.4.4 L'erreur dans l'identification

L'identification vise à établir un champ de propriétés mécaniques qui, associé à la mesure, respecte les équations constitutives. Le niveau de SNR est tout particulièrement important pour les méthodes directes de l'ERM, qui supposent une dépendance linéaire de la rigidité de cisaillement par rapport au déplacement. Pour les méthodes itératives résolvant un PI, cette sensibilité est moins directe, car la relation n'est plus linéaire. L'incertitude de mesure demeure cependant influente au travers de son utilisation pour définir le problème de minimisation. En plus du bruit expérimental, les facteurs d'incertitudes pour le PI sont multiples :

- La description matérielle et géométrique du milieu, qui n'est forcément qu'une simplification de la réalité expérimentale.
- La discrétisation (spatiale et temporelle) et le passage d'un milieu continu à un milieu discrétisé possédant un nombre fini de degrés de libertés, qui conduisent à une altération des données et à une description partielle d'un phénomène physique caractérisé par une représentation mathématique.
- La troncature liée à la précision numérique.
- La méconnaissance sur les CL (pour la reconstruction).
- Les défauts d'harmonicité du pilotage ou de la réponse du milieu.
- L'existence de minima multiples sur la fonction coût.

Le cumul de ces incertitudes a un fort impact sur la résolution du PI, celui-ci se basant sur un modèle où le calcul d'une grandeur dérivée (déformation) de la mesure (déplacement), plus sensible aux erreurs, est requise. Dans cette situation, les considérations mathématiques du PI sont assouplies pour admettre une solution *a priori* acceptable, autorisant l'incorporation d'informations complémentaires. En pratique, le manque d'information sur l'éventuelle hétérogénéité des propriétés est compensé par l'incorporation de données surabondantes [Avril et al., 2008].

D'un point de vue pratique, il est très délicat, pour ne pas dire impossible de pouvoir garantir l'unicité de la solution du PI. En particulier, la difficulté d'estimation des CL et le bruit de mesure associé au moyen d'imagerie sont difficilement quantifiables lors d'un essai, ce qui rend très délicat leur prise en compte dans la chaîne de traitement. En ERM, l'association approximative d'une distribution gaussienne au bruit de mesure décrite à la section 1.4.2 témoigne de ces difficultés. En élastographie ultrasonore, les problèmes de non-unicité pour des PI élastiques quasi-statiques ont été démontré [Barbone and Gokhale, 2004], puis étendus aux à des formulations viscoélastiques en contraintes planes qui nécessitent la mise en place de termes additionnels de régularisation [Zhang et al., 2012]. Cependant, il ne semble pas exister à ce jour d'études traitant d'une approche rigoureuse de l'analyse de la solution numérique du PI viscoélastique harmonique tel qu'il se pratique dans la plupart des travaux sur l'ERM. Une étude récente s'est intéressée à la convergence d'un tel problème en viscoélasticité et poroélasticité en négligeant les forces volumiques et d'inertie (basse fréquence) et sans considérer d'informations sur des CL en efforts [McGarry et al., 2019]. Il a été montré par des analyses de convergence de la méthode itérative appliquée à un matériaux fantôme, qu'un tel PI possède une bonne stabilité dans des sollicitations classiques en ERM (35 - 250Hz), bien que fortement dépendant des valeurs initiales des modules identifiés. Cette conclusion n'est toutefois pas partagée pour des sollicitations à des fréquences plus basses (1 Hz). Pour des problèmes poro-élastiques, la stabilité à la convergence est bonne à diverses fréquences, mais requiert la connaissance d'un paramètre de conductivité hydraulique. De manière générale, la question de la stabilité des problèmes demeure toutefois ignorée dans les travaux en ERM.

### 1.4.5 Sensibilité de l'identification

La méthode d'identification *subzone NLI* introduite à la section 1.3.4 est le fruit d'un développement multi-sites effectué ces 15 dernières années. Ses applications sont multiples et son paramétrage est vaste et varie selon le type d'étude. Les paramètres essentiels d'un problème d'identification assimilable à cette méthode sont :

- Le niveau de OSS-SNR. Indicateur de la qualité des données cinématiques, ce paramètre, introduit à la section 1.4.3, définit un seuil de stabilité à partir duquel la méthode d'identification correctement calibrée sera en mesure de produire un résultat satisfaisant sur le domaine  $\Omega$  considéré. Le niveau de signal est généralement assimilable à la capacité de propagation des ondes de cisaillement dans le tissu et peut être perturbé notamment par des limites

structurelles localisées. Par exemple, le « blindage naturel » que forment le crâne, le liquide céphalo-rachidien et les méninges, amortit considérablement la propagation d’ondes provoquant ainsi une chute du SNR en périphérie du cerveau humain [Sack et al., 2008]. La composition du tissu influe sur les temps de relaxation utilisés pour la reconstruction des images de phases, et donc du signal. Un faible OSS-SNR conduit généralement l’algorithme à associer la zone concernée à un milieu très élastique : la rigidité de cisaillement est sur-estimée, créant un « point chaud » localisé, tandis que l’amortissement est sous-estimé. Une représentation volumique de l’OSS-SNR, comme décrite par l’équation (1.41), est fréquemment intégrée dans la procédure de génération des données de reconstruction pour déterminer un masque où ces zones à faible SNR seront exclues afin de ne pas considérer la reconstruction de régions à trop faible rapport signal-sur-bruit.

- La résolution spatiale. D’une part, un bon niveau de discrétisation permet une meilleure représentation macroscopique de la structure. La taille d’un voxel découle de ce choix de représentation du milieu continu considéré. Par ailleurs, le niveau de résolution est assimilable à une quantité d’information contenue dans un domaine borné. Dans le contexte de la sous-zone, le rapport onde - zone (ROZ) est le rapport de taille d’une longueur de l’onde de cisaillement  $\lambda_T$  déjà définie par (1.21), caractéristique de la rigidité, par la longueur de la zone  $L_Z$ . Ce rapport est donné par :

$$\text{ROZ} = \frac{\lambda_T}{L_Z}. \quad (1.44)$$

Il permet une description regroupant des données géométriques et mécaniques.

- Le niveau de régularisation. Les variations spatiales du déplacement et des propriétés couplées au bruit augmentent la variabilité de l’identification. Cela peut détériorer la convexité de la fonctionnelle et, par conséquent, la stabilité du calcul de gradient. Le bruit peut également détériorer les valeurs des propriétés optimales, faussant l’identification. L’application de termes additionnels de régularisation comme la variation totale atténue ces effets négatifs en pénalisant les forts gradients de propriétés. La régularisation peut également être appliquée sur une portion du domaine, directement sur les données reconstruites. L’algorithme *subzone NLI* applique une convolution avec un noyau de lissage gaussien sur les portions du domaine global. Cette régularisation est particulièrement efficace pour l’algorithme, car la superposition des zones permet d’avoir un échantillonnage de points plus important pour le lissage, comme détaillé à la section 3.4.2.

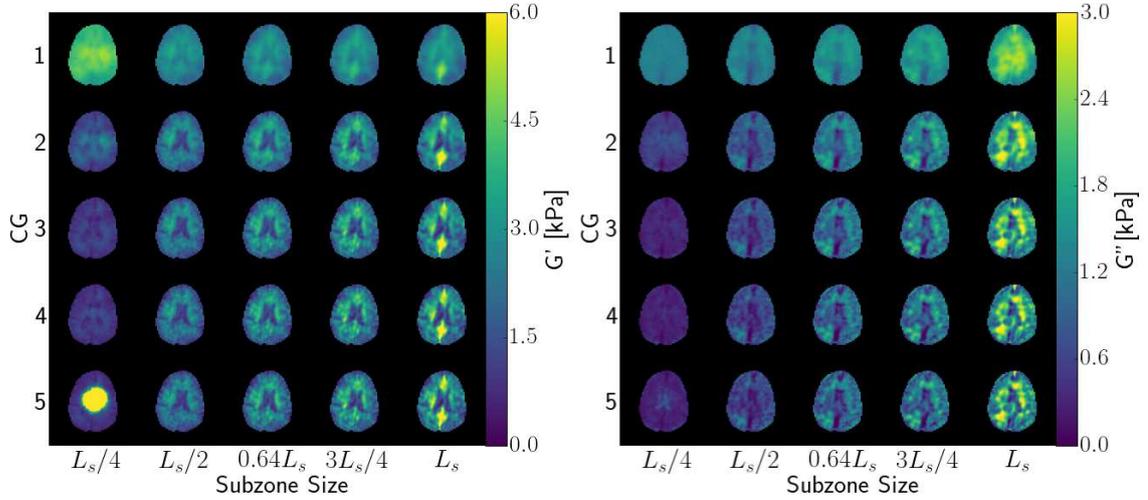


FIGURE 1.15 – Propriétés mécaniques reconstruites par NLI pour le sujet humain des modules de stockage (gauche) et de perte (droite) en fonction de la résolution spatiale ( $L_s$  est la longueur d’onde attendue) et le nombre d’itérations de gradient conjugué (CG) [Anderson et al., 2017].

- Les modules initiaux. L’estimation des paramètres mécaniques étant itérative, minimiser la distance à couvrir pour le vecteur de correction des propriétés  $\Delta\theta$  défini par (1.28) accélère la convergence et diminue le risque de piéger l’identification dans un minimum local.
- Les paramètres itératifs. Le pilotage de la convergence de la méthode d’identification conditionne sa sensibilité, notamment aux minima locaux. Une précision affinée, généralement définie par un critère de norme sur la variation des propriétés identifiées, se fait néanmoins au détriment d’une augmentation du nombre d’itérations, conditionnant par conséquent le temps de calcul global.

Le processus d’identification d’une méthode comme *subzone NLI* faisant intervenir un grand nombre de paramètres, la relation entre la qualité des reconstructions et les biais, principalement le SNR, est complexe. La question de la sensibilité de cette méthode a déjà été abordée dans de précédentes études, en isolant un ou deux paramètres parmi ceux énumérés ci-dessus. D’abord, différentes natures de niveau de bruit ont été analysées sur des données simulées inspirées du cerveau humain [Hannum et al., 2022]. Il a été montré, dans cette étude, qu’une régression exponentielle à 2 termes permettait de mettre en relation la qualité des reconstructions, évaluée par l’erreur quadratique moyenne NRMSE (*normalized root mean square error*) des

paramètres viscoélastiques, et le niveau d'OSS-SNR, tel que  $y = ae^{bx} + ce^{dx}$  avec  $x$  l'OSS-SNR et  $y$  le NRMSE. La présence de bruit spatialement corrélé augmente la sensibilité de la méthode par rapport au bruit gaussien spatialement non corrélé. L'étude conclue qu'un « point d'instabilité » de l'algorithme, où les reconstructions ne deviennent plus pertinentes, est situé à un niveau d'OSS-SNR entre 2 et 3. Le choix d'un ROZ optimal et l'influence des itérations du GC ont fait l'objet d'une étude sur fantômes et sur le cerveau humain *in vivo* [Anderson et al., 2017]. Augmenter la résolution spatiale en définissant une taille de zone importante garantit une meilleure description du domaine au détriment du temps de calcul. De même, les itérations du GC affinent le résultat, mais ajoutent des opérations coûteuses en temps de calcul. L'étude conclue, notamment, qu'un ROZ optimal pour le cerveau se situe vers 1.3, soit une taille de zone d'environ 23.0mm, et que 2 itérations de GC conviennent, comme l'illustre la figure 1.15.

Une étude récente s'est intéressée plus en détail aux performances de la fonctionnelle FEMU en viscoélasticité linéaire [Van Houten et al., 2023]. En s'appuyant sur une expression analytique du déplacement d'un milieu unidimensionnel homogène aux propriétés de références  $\theta_0$ , il est possible de définir un champ de mesure  $u_m$  contenant un bruit gaussien. Le bruit intérieur  $\gamma_m$  et le bruit aux CL  $\gamma_c$  sont dissociés. Le champ  $u$  est calculé à partir de l'équation de l'équilibre à l'aide d'un jeu de propriétés  $\theta$ , des CL et de  $u_m$ . La fonctionnelle sur un domaine de longueur  $L$  est :

$$\Phi_L(\theta, \gamma_c, \gamma_m) = \arg \min_{\theta} \int_0^L |\vec{u}(\theta, \gamma_c) - \vec{u}_m(\gamma_c, \gamma_m)|^2 dx. \quad (1.45)$$

L'étude représente des cartographies de la fonctionnelle dans le plan des propriétés viscoélastiques ( $\xi$ , ROZ) pour un paramétrage donné ( $\gamma_c$ ,  $\gamma_m$ ). La figure 1.16 démontre que la précision de la fonctionnelle dans l'identification du couple de propriétés est avant tout liée au bruit sur les CL. En effet, ce bruit est transmis directement par les équations d'équilibre au déplacement calculé sur lequel est effectuée l'identification. Au contraire, le bruit intérieur ne biaise pas le calcul direct et, par conséquent, joue un rôle bien plus marginal dans l'identification.

## 1.5 Synthèse et objectifs

Dans ce chapitre, un état de l'art de l'ERM a été exposé *via* ses 3 étapes principales : la sollicitation, la mesure, et l'identification. Cette présentation traite également des incertitudes associées à ces différentes étapes et des solutions techniques

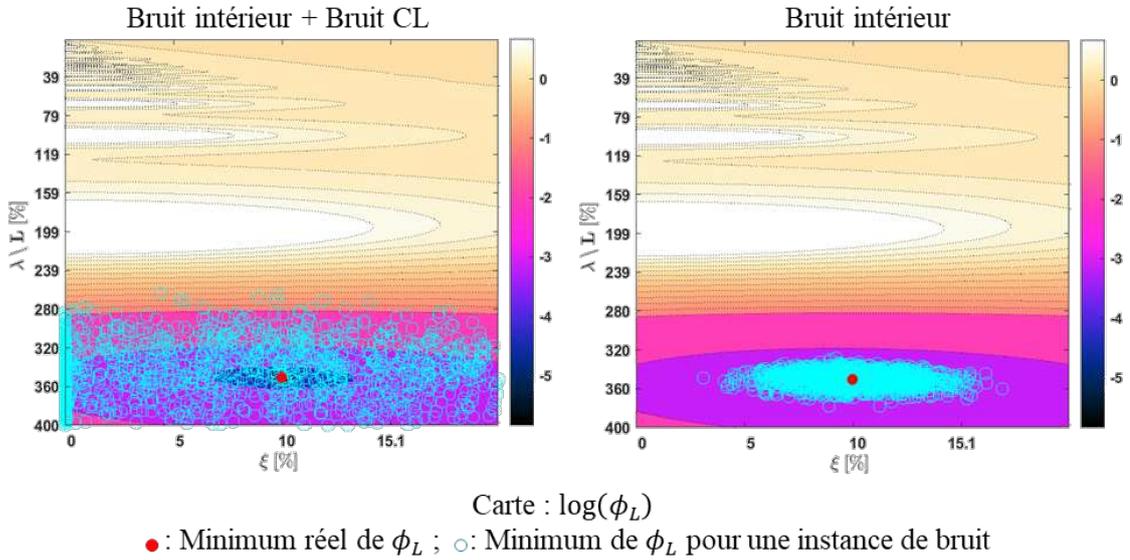


FIGURE 1.16 – Cartographies des minimums de la fonctionnelle dans le plan  $(\xi, \text{ROZ})$  pour un scénario de bruit répandu dans toute la mesure (gauche) et un scénario de bruit contenu uniquement dans les données intérieures (droite) [Van Houten et al., 2023].

développées pour minimiser leur impact. Enfin, ce chapitre décrit l’algorithme utilisé dans ces travaux et les paramètres essentiels qui le pilotent.

Depuis son introduction, l’ERM est apparue comme une modalité d’imagerie médicale innovante et porteuse. La multidisciplinarité portée par l’ERM se retrouve dans la variété de ses applications. Une partie des travaux de recherche effectués durant ces années s’est tournée vers l’innovation, en faisant de l’ERM une technique commercialisable pour le diagnostic de pathologies hépatiques en milieu clinique. Pour ce faire, les cliniciens priorisent logiquement un traitement direct et peu coûteux des données IRM pour établir des identifications locales rapides (quelques secondes) du module de cisaillement du tissu. Cependant, au-delà des quelques applications commerciales ciblées, l’innovation logicielle est pour l’instant limitée par le temps de calcul, obstacle majeur à une diffusion clinique plus globale de l’ERM. D’autre part, les méthodes itératives d’identification représentent une ouverture vers un spectre d’applications médicales plus large, intégrant le diagnostic, la classification ou le suivi thérapeutique. Le temps de calcul requis (quelques heures) est

néanmoins un frein à l'exploitation de ces méthodes itératives en dehors d'un cadre de recherche.

Les travaux de thèse détaillés dans ce manuscrit visent à fournir des moyens pour limiter l'impact des biais en ERM. Ces travaux ont porté sur les 3 étapes de l'élastographie. La mesure et l'identification constituent les deux axes de cette thèse. Le premier axe porte sur l'adaptation d'un dispositif, totalement différent de l'IRM, utilisant la tomographie par découpage optique. Celui-ci est développé afin de fournir des mesures de champs cinématiques, volumiques, dynamiques, tridimensionnels, comparables à celles obtenues avec l'IRM. La validation de ce dispositif de tomographie optique, dans l'objectif d'en faire un outil alternatif au scanner IRM pour matériaux fantômes, constitue l'un des enjeux de ces travaux. Les éléments expérimentaux et numériques développés dans cet axe sont présentés au chapitre 2. Le second axe présente un cadre théorique et adapte une formulation du problème inverse pour l'algorithme d'identification *subzone NLI*. Son développement est détaillé au chapitre 3. Enfin, les identifications réalisées pour valider les contributions de ces deux axes et les discussions sont présentées au chapitre 4. Des travaux se concentrant sur la sollicitation mécanique pour l'ERM ont également été réalisés. Ils portent sur le développement d'un dispositif composé de plusieurs actionneurs et des aspects relatifs à sa métrologie. Ils sont présentés à l'annexe A.

## Chapitre 2

# Mesures de champs cinématiques inspirées par l'élastographie

La mesure et la reconstruction de champs de déplacements dans un environnement IRM, bien que largement documentées et adoptées par les études d'élastographie de ces dernières décennies, présentent de nombreux aspects contraignants, comme l'accessibilité au scanner, les coûts humains et financiers ou bien les résolutions spatiales et temporelles. L'outil IRM peut devenir, sous certaines considérations, un frein dans le développement de certaines études, en particulier lors de la réalisation de mesures sur des matériaux fantômes. Ces verrous, couplés au constat que la caractérisation des biais et des performances usuels de la mesure en ERM sont assez indirects, motivent le développement d'un dispositif contournant ces contraintes, capable de fournir des mesures alternatives. S'appuyant sur des expertises communes entre le Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (*CNRS - Université de Montpellier, France*) et de l'Institut Pprime (*CNRS - Université de Poitiers, France*), une adaptation d'un dispositif de tomographie optique à la mesure volumique de la cinématique harmonique est réalisée.

Les techniques optiques de mesures de champs représentent un outil largement exploité en mécanique expérimentale. Une variété importante d'informations peut être mesurée : déformations localisées, détection de striction ou de fissures... Ces applications sont largement utilisées dans des techniques bidimensionnelles (2D) en utilisant des images issues de caméras. Dans le cadre de la mesure de champs de déplacements ou de déformations sur la surface d'un échantillon, la corrélation d'images numériques et le suivi de marqueurs représentent des déclinaisons particulièrement répandues. Ces techniques sont néanmoins limitées par leur nature

surfaccique qui requiert des hypothèses sur la réponse mécanique dans l'épaisseur non-vérifiées dans de nombreuses configurations (géométries irrégulières, hétérogénéités matérielles, sollicitations localisées...). Les techniques tridimensionnelles (3D) permettent de s'affranchir de certaines de ces hypothèses et élargissent les champs d'applications. En mécanique expérimentale, la tomographie 3D permet de mesurer des paramètres physiques à l'intérieur d'un objet, par exemple en combinant plusieurs coupes. Les résultats de ces mesures sont présentés sous forme d'un ensemble de valeurs qui représentent des échantillons de mesure dans le plan, appelés pixels, répartis sur un quadrillage spatial 2D d'un plan de coupe. L'assemblage des plans de coupe reconstitue la mesure dans le volume : le quadrillage est alors 3D et l'échantillon de volume est appelé voxel.

Ce chapitre établit un parallèle dans les techniques de mesure de champs de déplacement 3D harmoniques dans le contexte de l'élastographie. Le chapitre 1 a précédemment présenté le principe de résonance magnétique et d'encodage du mouvement utilisé pour la mesure cinématique par IRM. Pour des applications autour de l'ERM, les caractéristiques de mesure de l'IRM servent donc naturellement de cible à l'adaptation d'un dispositif de tomographie 3D par découpage optique de laboratoire développé au sein du Département de Génie Mécanique et Systèmes Complexes de l'Institut Pprime. Une description des spécificités du montage expérimental et de l'acquisition permet de dresser les caractéristiques du dispositif. Ensuite, les traitements numériques successifs développés pour convertir une mesure 2D de niveaux de gris vers la reconstruction 3D des propriétés viscoélastiques de matériaux fantômes sont présentés. L'évaluation de la précision de l'approche expérimentale et numérique est effectuée par énumération des sources d'erreurs et quantification des incertitudes de mesure. Enfin, une comparaison des champs cinématiques mesurés avec un modèle numérique par éléments finis apporte une première évaluation des performances du dispositif expérimental et de la chaîne de traitements numériques.

Ces travaux étant les premiers à décrire cette adaptation de la tomographie par découpage optique vers l'élastographie harmonique, seule l'analyse d'une configuration matérielle simple, que sont les matériaux fantômes cubiques avec un faible degré d'hétérogénéité matérielle, est traitée ici. L'extension d'une telle technique vers des applications *in-vivo* répandues en ERM représente un ensemble de défis complexes, évoqués seulement partiellement dans les perspectives de ce chapitre.

## 2.1 Tomographie par découpage optique

### 2.1.1 Principe du tomographe

La mesure expérimentale de champs, couplée à une approche numérique, repose sur un principe d'observation de contrastes comme marqueur de l'information spatiale. En ERM, la variation de la phase du signal IRM procure le marqueur du tissu dans le plan de coupe. D'un autre côté, le tomographe par découpage optique présenté dans cette section repose sur le contraste de l'intensité lumineuse au coeur du matériau étudié. Une transparence suffisante est requise pour la détection d'une intensité lumineuse suffisante au coeur de l'échantillon. Ces deux approches mesurent donc des signaux, associés à des niveaux de gris de natures différentes. Dans les deux cas, la reconstruction du champ de déplacement dans l'espace et dans le temps passe par une série d'acquisitions d'images d'une coupe (2D) à un instant donné. Pour cela, une comparaison entre un état de référence et à un état déformé est réalisée. Des assemblages dans l'espace, pour couvrir l'ensemble du volume, et dans le temps, pour suffisamment échantillonner le caractère harmonique, sont nécessaires pour générer de tels champs cinématiques 3D temporels. Ce contexte de mesure de champs par tomographie par découpage optique est développé sur des matériaux fantômes transparents.

Le dispositif expérimental est adapté des travaux de Germaneau et al. à l'Institut Pprime [Germaneau et al., 2007]. Il est schématisé à la figure 2.1.

### 2.1.2 Montage original

Le montage original développé pour des mesures statiques est composé d'une source laser monochromatique et d'un assemblage optique muni également d'une lentille convergente et d'une lentille cylindrique. Ce dispositif permet de générer un faisceau plan orienté de manière à isoler la tranche étudiée de l'échantillon. Une caméra CCD (*Charge-Coupled Device*) 8 bits disposée selon l'axe  $\vec{z}$ , perpendiculaire au faisceau laser, capture une image de 256 niveaux de gris du plan de l'échantillon éclairé. Pour limiter les phénomènes de réflexion et de réfraction, il est nécessaire que les faisceaux arrivent perpendiculairement à la surface de l'échantillon. Pour respecter cette contrainte ainsi que pour des facilités de conception, la géométrie des échantillons est limitée à des parallélépipèdes rectangles. Un miroir disposé sur une plateforme équipée d'un moteur pas à pas effectue le pilotage en translation dans l'axe  $\vec{z}$  du faisceau afin de balayer l'ensemble de l'échantillon.

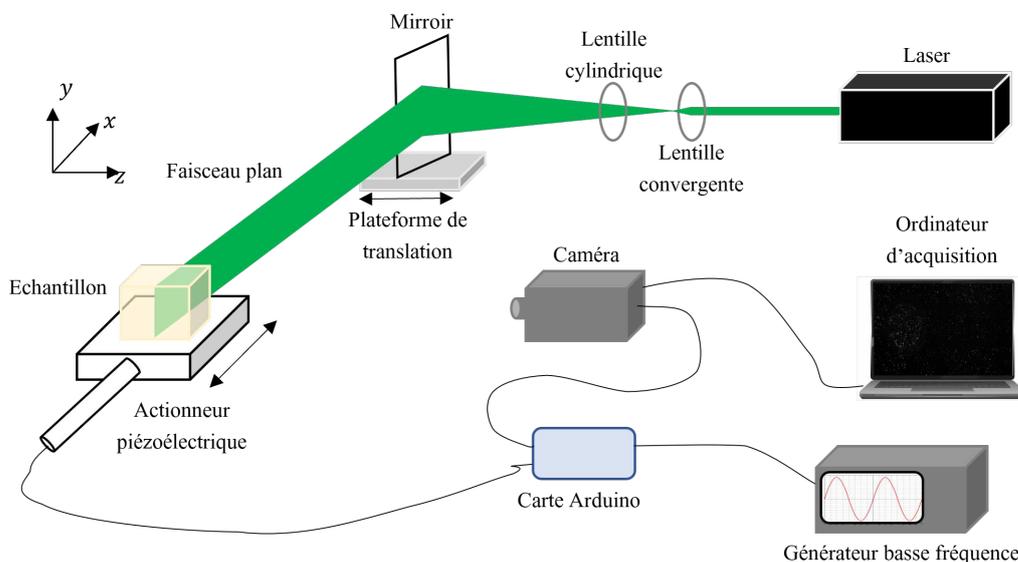


FIGURE 2.1 – Montage expérimental du tomographe par découpage optique mesurant des champs cinématiques tridimensionnels harmoniques.

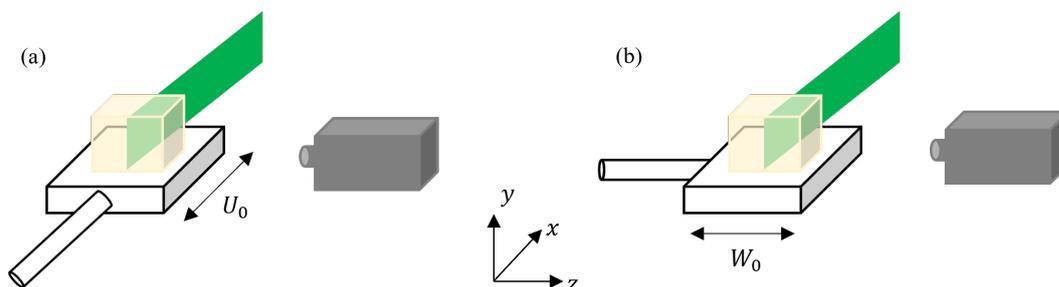


FIGURE 2.2 – Configurations de disposition de l'ensemble actionneur-support : la sollicitation peut être (a) dans le plan de coupe (plan d'acquisition de la caméra), selon  $\vec{x}$  ou (b) hors-plan, selon  $\vec{z}$ .

### 2.1.3 Adaptation au contexte harmonique

Le mouvement harmonique nécessaire à la génération des ondes dans le milieu est généré par un actionneur piézoélectrique unidirectionnel (*Non-magnetic P-842.60, Physik Instrumente*) vissé à un support en polymère (PLA) obtenu par impression 3D et couvert d'une surface adhérente sur laquelle repose la base de l'échantillon. La configuration de l'ensemble actionneur-support est schématisée à la figure 2.2. Elle varie selon le sens de sollicitation désiré par rapport au plan de coupe : dans

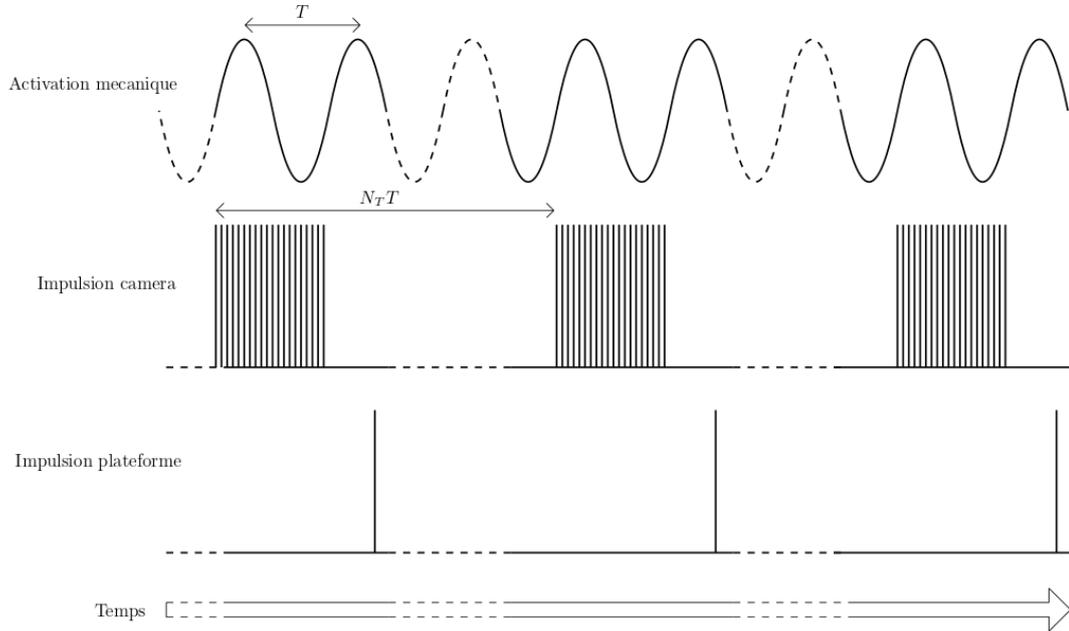


FIGURE 2.3 – Séquence de pilotage du tomographe par découpage optique pour l'acquisition 3D harmonique.

une direction hors-plan (suivant l'axe  $\vec{z}$ ), ou dans une direction dans le plan (suivant l'axe  $\vec{x}$ ). L'ensemble des composants du bloc de sollicitation est amagnétique afin de pouvoir être opéré dans l'environnement du scanner IRM dans des conditions identiques. Une tension électrique décrivant un signal sinusoïdal de période  $T$  est produite par un générateur de basses fréquences et est amplifiée d'un gain de 10 avant d'être transmise à l'actionneur. Une carte Arduino synchronise le signal transmis par le générateur vers l'actionneur et la caméra rapide. L'acquisition est lancée manuellement plusieurs dizaines de secondes après la mise en marche de l'actionneur afin de ne pas considérer le régime transitoire de l'échantillon. Sur chaque période de la sollicitation, 20 impulsions régulièrement réparties déclenchent une acquisition de la caméra associée à une phase du déplacement harmonique qui est stockée sur un PC. L'image obtenue à la première impulsion étant synchronisée au déplacement instantané nul de l'actionneur, elle représente l'état de référence, tandis que l'ensemble des autres images représentent un déphasage utilisé pour reconstruire le mouvement. Le signal de sollicitation étant purement positif afin d'éviter la compression des composants piézoélectriques, le déplacement moyen est donné par sa valeur avec un déphasage de  $\frac{\pi}{4}$ . L'acquisition débute en tenant compte de la phase du déplacement de sollicitation afin d'intégrer comme image de référence l'état de

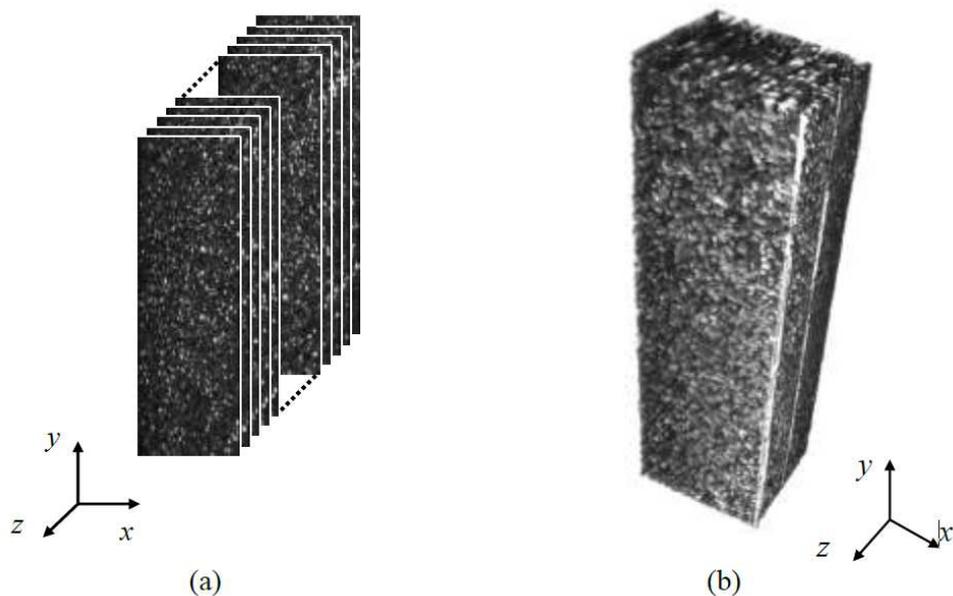


FIGURE 2.4 – Image volumique obtenue par tomographie optique. (a) : Acquisition d’une série d’image ; (b) : Reconstruction de l’image volumique [Germaneau et al., 2007].

déplacement moyen d’un cycle. Une impulsion est ensuite transmise à la plateforme motorisée *via* le PC pour une translation vers le plan de coupe suivant. Une période d’attente ( $\sim 5$  s) laisse dérouler  $N_T$  cycles d’activation afin d’assurer la translation et la stabilisation du nouveau plan de coupe avant un nouveau cycle d’acquisition. La séquence d’acquisition est synthétisée à la figure 2.3. L’incrément de translation de la plateforme pilotant la distance entre chaque plan de coupe est de  $80 \mu\text{m}$ , tandis que la résolution spatiale d’un pixel de l’acquisition 2D est de  $110 \times 110 \mu\text{m}^2$ , ce qui correspond à un voxel anisotrope. L’image volumique reconstituée contient un nombre de voxels de l’ordre de  $10^9$ . Un exemple d’image volumique reconstruite issu du protocole original est donné à la figure 2.4

### 2.1.4 Erreur expérimentale

Les sources d’erreur liées au processus expérimental sont multiples. Elles peuvent être décomposées en 3 catégories relatives au montage et à l’acquisition :

- Le montage optique. Le mouvement de caméra peut causer des erreurs de positionnement qui peuvent affecter la précision de la reconstruction. Le flou

d'image est une autre source d'erreur, liée au réglage de la caméra, pouvant réduire la résolution de l'image produite. La distorsion de la lentille peut également causer des erreurs dans l'image produite. Enfin, la résolution spatiale du système détermine la capacité du tomographe à distinguer les objets les uns des autres.

- Le mouvement mécanique. Les mauvaises reproductions du mouvement harmonique de l'actionneur piézo-électrique, bien qu'*a priori* négligeables, peuvent causer des erreurs dans le contrôle de l'activation du fantôme. La transmission du mouvement de l'actionneur vers le support, *via* la liaison vissée, et le contact entre le support et le fantôme peuvent également propager des erreurs dans la mesure.
- L'acquisition et la reconstruction d'image. Le choix du marqueur (ou *speckle*), caractérisé par sa forme et sa taille, fait varier l'incertitude sur la reconstruction d'images. Un travail de quantification de cette erreur est par la suite détaillé. Le bruit d'image est une source inévitable d'erreurs dans l'image produite. Le niveau de contraste détermine la capacité de l'instrument à distinguer les points matériels les uns des autres. Une faible différence de contraste entre les points matériels provoque une perte dans la détection du signal et donc dans la qualité de la mesure. La conversion de l'intensité lumineuse par le capteur CCD peut également causer des erreurs dans l'image. De plus, différentes sources d'artefacts génèrent l'apparition de ces formes parasites dans les images reconstruites. Quand la fréquence d'échantillonnage est insuffisante, un effet de repliement spectral (*aliasing*) se propage. Enfin, la taille des fluctuations de l'intensité lumineuse est également une source d'erreur.

## 2.2 Matériaux fantômes

### 2.2.1 Spécificités de conception

La conception des échantillons doit intégrer les contraintes imposées par les environnements de la tomographie optique et de l'IRM tout en ayant un comportement mécanique imitant celui des tissus. Le choix de matériaux doit notamment respecter les contraintes suivantes :

- Optique, pour permettre l'acquisition par tomographie optique :
  - Une certaine densité de particules servant de marqueurs visuels d'un point matériel pour permettre la mesure des champs de déplacement doit être

intégré lors de la conception des échantillons.

- Une transparence suffisamment importante pour l'observation des particules dans l'ensemble du volume selon la configuration de l'optique de la caméra.
- Des propriétés optiques équivalentes entre les différentes phases, dans le cas d'échantillons hétérogènes.
- Magnétique, pour permettre l'acquisition, à terme, par IRM :
  - Avoir une composition sensible au signal RMN. Comme pour le tissu, une présence importante d'hydrogène est une condition nécessaire.
- Géométrique, pour la représentation 3D :
  - Les surfaces orientées vers la caméra et l'origine du faisceau laser plan doivent être perpendiculaires aux faisceaux incidents pour éviter leur diffraction et réfraction. Par conséquent, les géométries sphériques sont susceptibles de détériorer la qualité des mesures.
  - Une ou plusieurs longueurs d'ondes de l'onde mécanique doivent être observables dans les différentes directions du volume. L'ordre de grandeur de taille minimale est donnée par la longueur d'onde dans un tissu comme le cerveau qui, en ERM, varie généralement entre 2 et 4 cm selon la zone et la fréquence de sollicitation.
- Mécanique, pour être en mesure d'exploiter les méthodes d'identification hétérogènes de l'ERM dans les gammes de fréquences de sollicitation adaptées ( $f \in [10; 100]$  Hz) :
  - Une rigidité relativement faible ( $E$  ou  $\mu \in [1; 15]$  kPa).
  - Un amortissement significatif ( $\xi \in [2; 40]$  %).
  - La quasi-incompressibilité du matériau ( $\nu \approx 0.5$ ).
  - La dépendance aux conditions environnementales (température,...) doit être suffisamment faible.
  - Le vieillissement de l'échantillon doit être limité afin de permettre la reproductivité des manipulations dans les deux environnements d'acquisition différents (découpage laser et IRM).

Deux choix de matériaux fantômes sont présentés : les gélatines de laboratoire et les silicones. Tous les échantillons sont moulés dans des boîtes cubiques en plexiglass transparentes de 10 cm de côté et de 5 mm d'épaisseur. Un couvercle permet de recouvrir la surface supérieure par laquelle est réalisée la coulée de la solution formant

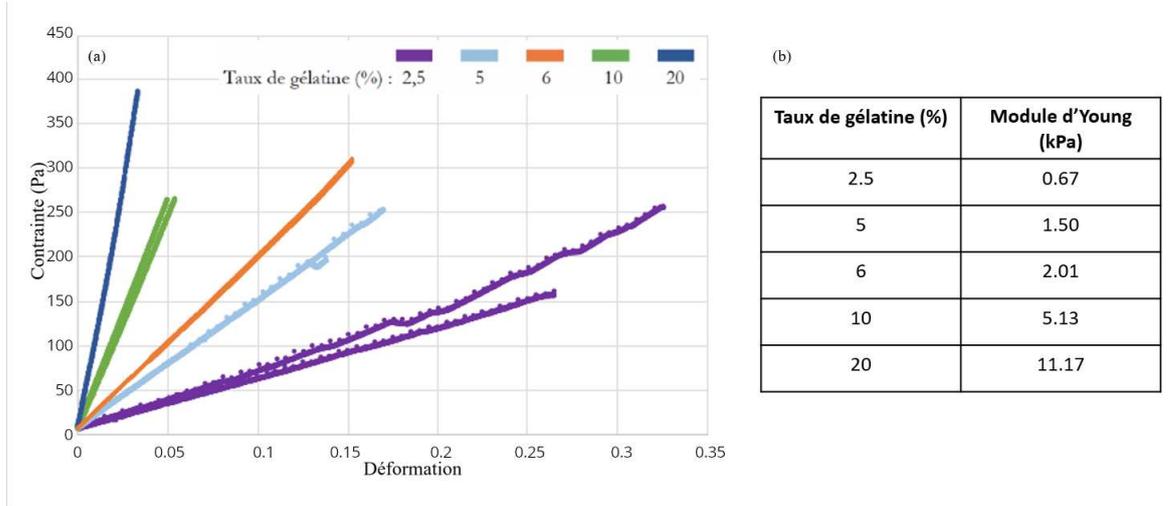


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de la réponse contrainte-déformation d'échantillons de gélatine en compression unidimensionnelle quasi-statique (a) et modules de rigidité caractérisés par ces essais (b) à différentes concentrations de gélatine.

le matériau. La transparence du moule permet deux configurations de sollicitation mécanique de l'échantillon. En supposant que le moule est beaucoup plus rigide que le matériau et que le contact est parfait, 5 des 6 faces de l'échantillon (la face supérieure par laquelle est réalisé le moulage est laissée libre) suivent le déplacement harmonique transmis par l'actionneur. Si l'échantillon est démoulé, alors seule la face inférieure impose ce déplacement, tandis que les autres sont laissées libres. Le marquage des points matériels est réalisé par intégration lors de la fabrication de billes de polyamide, blanches, sphériques avec un diamètre d'environ 150  $\mu\text{m}$ . La répartition de ces marqueurs doit être relativement homogène quelque soit le sous-volume sélectionné. La taille des particules est supérieure à celle du voxel ce qui permet une description fine (précision sous-voxel) de la transformation locale subie par la matière (déformation homogène).

### 2.2.2 Gélatines

La transparence de l'échantillon est conditionnée par ses concentrations en flocons de gélatine et en particules. Afin de déterminer les dosages, une étude préliminaire de la détection des marqueurs pour diverses concentrations est effectué en

quasi-statique, dans des conditions d'acquisition en conservant l'échantillon dans son moule. La concentration en gélatine maximale de la matrice du fantôme, permettant une lecture suffisante du signal, est estimée à 4.8 % de la masse en eau tandis que celle en particules est de 0.1 %. Par ailleurs, des essais de compression quasi-statiques d'éprouvettes en gélatine permettent de déterminer la relation entre la concentration et le module de rigidité illustrée à la figure 2.5. Le module de rigidité en statique à la concentration maximale en gélatine est de l'ordre de 2 kPa pour permettre de réaliser des mesures optiques, ce qui place l'échantillon dans la fourchette basse de la gamme des rigidités, même en configuration harmonique. Par conséquent, le choix des concentrations étant limité, le contraste entre les hétérogénéités est faible.

Le protocole de fabrication de la matrice d'un fantôme en gélatine est détaillé à l'annexe C. Le processus de fabrication d'un fantôme en gélatine suivant le protocole retenu est relativement simple, peu onéreux et rapide. En général, les échantillons sont fabriqués sur place et la mesure effectuée dans les 24 heures après la fabrication. Cependant, plusieurs inconvénients sont associés au matériaux gélatine dans le contexte de mesure :

- Une gamme de taux de gélatine limitée, cette concentration ayant un impact sur la transparence des échantillons.
- Le faible potentiel de contraste des propriétés matérielles pour les fantômes hétérogènes, conséquence des limites de gamme de taux de gélatine.
- L'application d'un agent démoulant pour les sollicitations en dehors du moule de l'échantillon perturbe sa transparence car l'agent diffuse dans son épaisseur.
- L'importante fragilité de l'échantillon qui peut être endommagé lors du démoulage ou lors de sa manipulation.
- Le vieillissement de la gélatine est rapide et nécessite une stabilisation par des techniques de réticulation moins simples à maîtriser.

Ces diverses limites liées à la conception conduisent à ne considérer que des fantômes de gélatine comme des échantillons homogènes, non-démoulés, réalisés avec un taux de gélatine de 4.8 % de la masse d'eau. Des configurations d'échantillons plus variées sont développées avec des matériaux silicones.

### 2.2.3 Silicones

Les échantillons sont conçus à partir d'un mélange du gel silicone A-341 (*Factor II, Inc.*) et d'un silicone fluide (V40104), servant d'agent catalyseur. La rigidité du fantôme augmente avec la proportion de gel A-341. La procédure de fabrication de la matrice homogène d'un échantillon appliquée est détaillée à l'annexe C.

D'après des études précédentes, ce matériau silicone produit un niveau de signal IRM satisfaisant pour les mesures dans les 2 environnements [Solamen et al., 2018]. Contrairement aux échantillons de gélatine, les échantillons de silicone présentent une plus large gamme de propriétés mécaniques tout en étant transparents. Cela permet donc de considérer différents niveaux d'hétérogénéités dans les échantillons. Par ailleurs, le vieillissement des fantômes ne représente pas une problématique majeure pour ce matériau, ce qui permet donc d'envisager des essais de reproductibilité des mesures entre le tomographe optique et l'IRM. Dans les travaux présentés ici, 2 proportions différentes de silicone sont considérées afin de distinguer des régions par leur rigidité. La région « souple » est obtenue par un dosage de 1.5 % de A-341, tandis que la région « rigide » est obtenue par un dosage de 50 % de A-341. À partir de ces matériaux, 3 configurations de fantôme de silicone sont développés : (i) un échantillon « homogène » composé d'une matrice souple ; (ii) un échantillon « hétérogène » composé d'une matrice souple et d'une inclusion rigide cubique centrée ; (iii) un échantillon « bi-couche » composé d'une couche rigide sous une couche souple. Ces échantillons ont été mis en oeuvre par l'équipe de Pascal Doumalin et Jean-Christophe Dupré à l'Institut Pprime.

## 2.3 Mesure des champs cinématiques

Cette section présente la procédure numérique développée au sein de l'équipe *Photomécanique & analyse expérimentale en Mécanique des solides* de l'Institut Pprime pour la mesure des champs cinématiques par tomographie optique. Pour cela, le signal physique supportant la mesure et son adaptation au moyen d'acquisition sont d'abord introduits. À partir de l'acquisition des images, la corrélation d'images volumiques permet l'obtention des champs cinématiques 3D dans le contexte harmonique. Un filtrage harmonique et une projection spectrale de ces champs temporels effectue finalement une transformation vers le domaine fréquentiel.

## 2.3.1 Signal de mesure

### 2.3.1.1 Intensité lumineuse

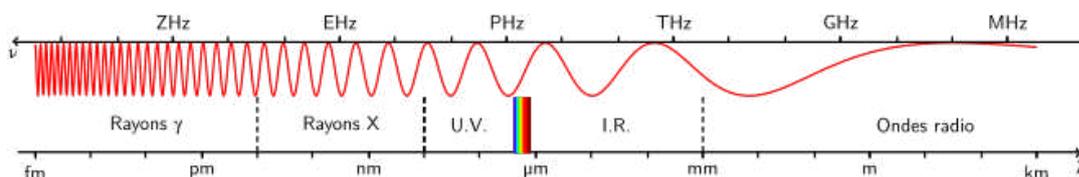


FIGURE 2.6 – Domaines du spectre magnétique selon la longueur d'onde.

La lumière est une onde électromagnétique qui se propage à travers le vide et les milieux matériels. L'interaction entre la lumière et la matière peut se traduire par une absorption, une réflexion ou une transmission. Les caractéristiques électromagnétiques des propriétés de la lumière sont obtenues à partir des équations de Maxwell-Lorentz [Maxwell, 1890]. Ces propriétés incluent notamment la longueur d'onde, la fréquence et l'amplitude. Le spectre de la lumière visible, illustré à la figure 2.6, se situe aux longueurs d'ondes comprises entre 380 nm (violet) et 770 nm (rouge). L'utilisation d'une source laser permet l'émission d'une onde lumineuse monochromatique dont l'amplitude détermine l'intensité lumineuse, grandeur caractérisant la quantité de lumière qui atteint un point donné dans l'espace. L'intensité lumineuse correspond à la puissance lumineuse par unité de surface et est mesurée à l'aide d'un détecteur de lumière.

### 2.3.1.2 Niveau de gris

Dans l'application expérimentale, les particules présentes dans le matériau transparent agissent comme des sources lumineuses ponctuelles et causent la diffusion de la lumière tout en procurant une intensité lumineuse caractéristique. Le détecteur de lumière est le capteur CCD de la caméra. Il est constitué de matrice de photodiodes qui génèrent un signal électrique proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. Ce signal est ensuite amplifié et converti en un niveau de gris, qui correspond à une valeur numérique de la luminosité de chaque pixel. Les niveaux de gris sont filtrés par un lissage gaussien de 1.15 pixel d'écart-type.

### 2.3.1.3 Précision voxel

Le calcul des déplacements aux voxels nécessite l'estimation des valeurs des intensités lumineuses entre deux voxels, pour une transformation quelconque de l'image.

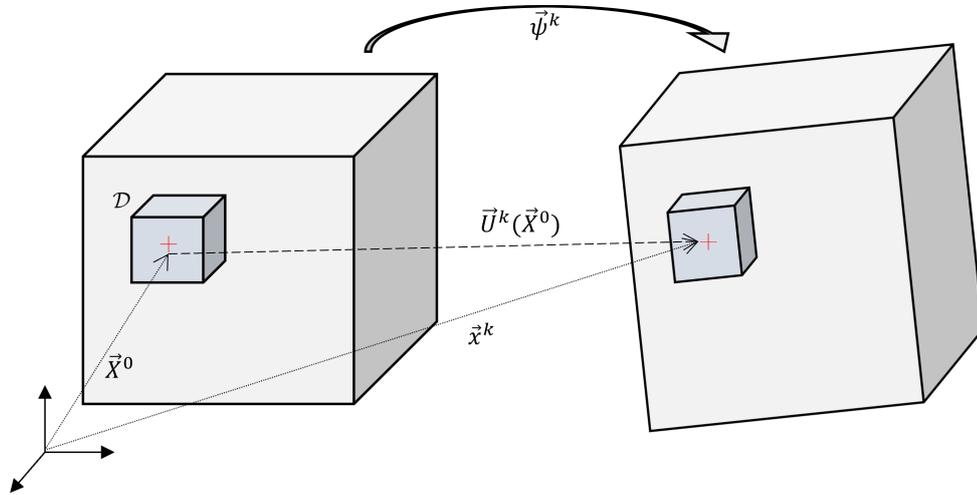


FIGURE 2.7 – Transformation matérielle volumique d'un état de référence (gauche) vers un état déformé (droite) au  $k$ -ème état de déphasage.

Une technique d'interpolation linéaire est employée pour estimer les variations de niveaux de gris entre deux voxels adjacents. Appliquée dans l'espace, celle-ci correspond à une interpolation trilineaire et nécessite la détermination de 8 coefficients associés aux niveaux de gris des 2 voxels adjacents dans chacune des 3 directions.

### 2.3.2 Corrélation digitale volumique

La procédure de la corrélation d'images volumiques (CIV) est relativement similaire à celle de la corrélation d'images numériques 2D, technique largement répandue depuis les années 1980 pour la mesure de champs en mécanique expérimentale [Chu et al., 1985; Wattrisse et al., 2001]. L'objectif de la CIV est de déterminer le champ cinématique 3D entre une image volumique de référence et une image volumique déformée. Les calculs des déplacements (et des déformations) et la visualisation des résultats sont obtenus grâce au logiciel de corrélation volumique *CorrelVol* développé par l'équipe *Photomécanique & analyse expérimentale en Mécanique des solides* à l'Institut Pprime [Germaneau et al., 2007].

#### 2.3.2.1 Transformation matérielle volumique

Le domaine de corrélation  $\mathcal{D}_i$  correspondant au  $i$ -ème point de mesure est défini à l'aide d'une discrétisation de l'image volumique de référence par une grille virtuelle de points 3D. La position du domaine à l'état de référence correspond au vecteur

$\vec{X}$ , tandis que celle associée au  $k$ -ème état de déphasage  $\varphi^k$  de la sollicitation à une certaine fréquence est notée  $\vec{x}^k$ . Les niveaux de gris de l'état de référence et de l'état déformé sont respectivement notés  $V(\vec{X})$  et  $v(\vec{x}^k)$ . L'égalité supposée des niveaux de gris entre les deux états relative à l'hypothèse de la conservation du flux optique conduit à  $V(\vec{X}) = v(\vec{x}^k)$ . La transformation  $\vec{\psi}^k$  relie les deux états tel que  $\vec{x}^k = \vec{\psi}^k(\vec{X})$  (voir figure 2.7). Dans la pratique, l'égalité stricte en chaque voxel ne peut être obtenue du fait de la présence de bruits de mesure et de la méconnaissance de la transformation réelle, la CIV propose un critère de ressemblance entre  $V(\vec{X})$  et  $v(\vec{x}^k)$  défini sur un petit volume de matière,  $\mathcal{D}_i$ , appelé « motif » (ou *subset*), centré sur la position de  $i$ -ème point de mesure.

Le champ de déplacement  $\vec{U}^k$  entre les deux états est introduit tel que :  $\vec{U}^k(\vec{X}) = \vec{x}^k - \vec{X}$ . Le processus de passage de l'état de référence vers l'état transformé est schématisé à la figure 2.7. La transformation s'écrit donc :

$$\vec{\psi}^k(\vec{X}) = \vec{X} + \vec{U}^k(\vec{X}). \quad (2.1)$$

La formulation de la transformation étant indéterminée, elle est approchée par son développement limité à l'ordre 1 autour du point de position  $\vec{X}_i^0$ , le centre du domaine  $\mathcal{D}_i$  :

$$\vec{\psi}^k(\vec{X}_j) \approx \vec{X}_i^0 + \vec{U}^k(\vec{X}_i^0) + \frac{\partial \vec{U}^k}{\partial \vec{X}}(\vec{X}_i^0)(\vec{X}_j - \vec{X}_i^0). \quad (2.2)$$

La transformation dépend donc de 12 paramètres : 3 paramètres de translation ( $\vec{U}^k(\vec{X}_i^0)$ ) et 9 paramètres du gradient du déplacement sont associés aux 3 dilata-tions, aux 3 cisaillements et aux 3 rotations du milieu. Ces 9 paramètres décrivant la transformation locale sont regroupés au  $k$ -ème pas de temps et au voisinage du point  $\vec{X}_i^0$ , centre du domaine  $\mathcal{D}_i$  dans un vecteur  $\vec{P}_i^k$ .

### 2.3.2.2 Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est utilisé pour évaluer la similitude entre deux sous-images volumiques dans un domaine prédéfini  $\mathcal{D}_i$  des deux états en quantifiant la ressemblance entre le volume de corrélation à l'état initial et celui à l'état chargé. Le minimum de ce coefficient permet les coefficients optimaux pour approximer la transformation matérielle entre les deux domaines, donc le déplacement du centre du domaine  $\mathcal{D}_i$ . Une formulation normalisée du coefficient de corrélation est présentée. Celle-ci est insensible aux variations de luminosité et de contraste, car elle évalue la ressemblance des variations de niveaux de gris par rapport à la moyenne sur chaque

domaine de corrélation. Pour la  $k$ -ème phase  $\varphi^k$ , toujours autour du  $i$ -ème point de mesure, le critère s'écrit :

$$C^k(\vec{P}_i^k) = 1 - \frac{\sum_{\vec{X}_j \in \mathcal{D}_i} (V(\vec{X}_j) - \overline{V_{\mathcal{D}_i}})(v(\psi^k(\vec{X}_j)) - \overline{v_{\mathcal{D}_i}})}{\sqrt{\sum_{\vec{X}_j \in \mathcal{D}_i} (V(\vec{X}_j) - \overline{V_{\mathcal{D}_i}})^2} \sqrt{\sum_{\vec{X}_j \in \mathcal{D}_i} (v(\psi^k(\vec{X}_j)) - \overline{v_{\mathcal{D}_i}})^2}}, \quad (2.3)$$

avec  $\overline{V_{\mathcal{D}_i}}$  et  $\overline{v_{\mathcal{D}_i}}$  les valeurs moyennes des niveaux de gris dans le domaine de référence  $\mathcal{D}_i$  et le domaine déformé  $\psi^k(\mathcal{D}_i)$ , respectivement. Les termes  $v(\psi^k(\vec{X}_j))$  et  $\overline{v_{\mathcal{D}_i}}$  dépendent des coefficients de  $\vec{P}_i^k$ .

### 2.3.2.3 Calcul de la position déformée

L'optimisation du critère de ressemblance considère comme inconnue le vecteur groupant les 12 paramètres de la transformation donné par l'approximation (2.2). La procédure consiste à d'abord déterminer, en chaque point matériel, la meilleure approximation pour une translation au voxel près, par une méthode systématique explorant toutes les translations possibles dans une zone de recherche autour du point. La solution est ensuite affinée en servant de point de départ à une minimisation de l'ensemble des paramètres dont dépend le coefficient de corrélation donné par (2.3). La convergence est assurée par un contrôle de la norme de la correction entre 2 itérations successives.

La résolution d'un voxel est de  $120 \times 120 \times 120 \mu\text{m}^3$ . Le traitement CIV pour le calcul des champs cinématiques dans ici présenté, est réalisé sur des *subsets* de  $51 \times 51 \times 51$  voxels (soit  $6.12 \times 6.12 \times 6.12 \text{ mm}^3$ ), sur une grille atteignant environ  $900 \times 900 \times 900$  points de mesure (variable selon les acquisitions), et d'un pas de grille 3D de  $20 \times 20 \times 20$  voxels (soit  $2.4 \times 2.4 \times 2.4 \text{ mm}^3$ ).

### 2.3.2.4 Erreur numérique

Le traitement numérique, en particulier l'algorithme de CIV, contient des sources d'erreurs qui viennent se cumuler aux erreurs expérimentales énumérées précédemment dans 2.1.4. Ces erreurs peuvent être regroupées en 2 catégories :

- La CIV. D'abord, le choix d'une interpolation linéaire des niveaux de gris permet de limiter les coûts de calculs, particulièrement importants en 3D. Cela représente une approximation assez limitée de la nature de la distribution de la luminosité dans le volume, mais qui est communément admise. Par ailleurs,

la méthode de minimisation introduit elle aussi un biais associé au critère de convergence retenu. Le paramétrage de l'algorithme, comme la taille du domaine de corrélation, le pas de la grille 3D et le choix des fonctions de formes de la transformation, déterminent eux aussi la qualité de la CIV.

- Le paramétrage de calibration. Les conditions réelles d'acquisition pouvant différer des conditions théoriques, l'estimation des erreurs de mesure, comme la distorsion provoquée par la lentille ou les mouvements parasites de la caméra, n'est que partiellement intégrée et corrigée. La qualité d'image et la prise en compte de la précision sous-voxel limitent également la procédure de mesure de champs cinématiques.

Des éléments relatifs à la quantification des incertitudes sont par la suite détaillés.

### 2.3.3 Évaluation de la précision

Afin de caractériser l'erreur de mesure en fonction du déplacement imposé, une quantification de la précision entre l'état de référence et un état « déplacé » est effectuée par des tests de translation subvoxel. Dans le contexte harmonique, l'amplitude du déplacement correspond à celle du déplacement imposé par l'actionneur. Une évaluation des données statiques dans chacune des directions entre les deux états fournit l'erreur systématique et l'incertitude, comme étant respectivement l'écart moyen et l'écart-type des distributions dans le volume. Si les niveaux d'erreur sur les composantes du déplacement sont équivalents dans les directions du plan de coupe ( $x - y$ ), ils sont logiquement plus importants dans la direction du balayage optique ( $z$ ).

Les estimations d'erreur sur la mesure du déplacement des échantillons considérés sont estimées à 0.05 pixels (soit 6  $\mu\text{m}$ ) pour les composantes  $U$  et  $V$  et à 0.16 pixels (soit 19  $\mu\text{m}$ ) pour le déplacement hors-plan  $W$ .

### 2.3.4 Filtrage harmonique

Le champ de déplacement harmonique, complexe, est reconstruit par projection dans le domaine spectral des déplacements temporels issus de la procédure de CIV. Étant donné que seule la composante harmonique du déplacement sera considérée, les champs temporels subissent d'abord un lissage harmonique dans les différentes

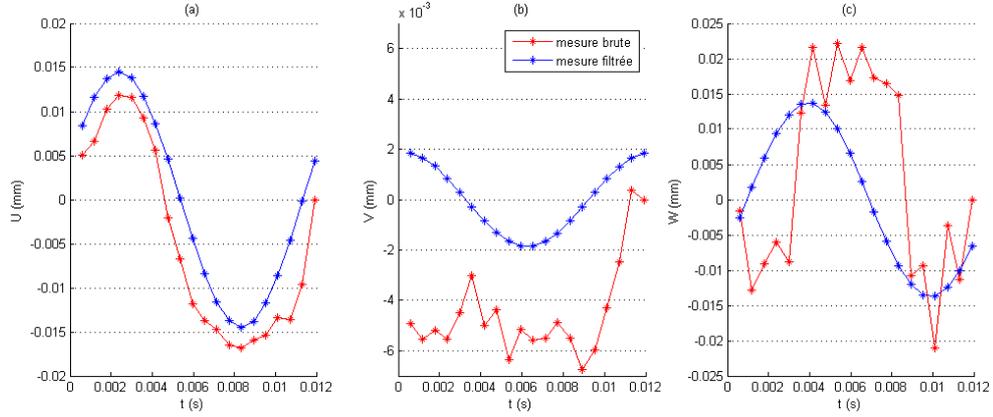


FIGURE 2.8 – Représentation temporelle du filtrage harmonique des composantes spatiales du déplacement d'un point d'intérêt (dans le plan de coupe  $x - y$  médian) d'un échantillon sollicité à 80 Hz par un mouvement dans la direction  $x$ .

directions de l'espace. Le déplacement temporel lissé  $\vec{U}$  est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{U}(\vec{X}, t) &= \vec{A}_1(\vec{X}) \sin(\omega t) + \vec{A}_2(\vec{X}) \cos(\omega t) + \vec{B}(\vec{X}) \\ &= \vec{A}(\vec{X}) \sin(\omega t + \varphi) + \vec{B}(\vec{X}).\end{aligned}\quad (2.4)$$

L'expression (2.4) est linéaire par rapport aux champs inconnus  $\vec{A}_1(\vec{X})$ ,  $\vec{A}_2(\vec{X})$  et  $\vec{B}(\vec{X})$ . Ces grandeurs sont déterminées en chaque voxel des images de déplacement par une méthode des moindres carrés linéaires.

Les figures 2.8 et 2.9 illustrent l'application du filtrage harmonique, respectivement par les lissages temporel et spatial des mesures. Le déplacement complexe est déduit de l'équation (2.4), tel que ses composantes complexes s'écrivent :

$$\text{Re}(\vec{U}(\vec{X})) = \vec{A}(\vec{X}) \cos(\varphi), \quad (2.5)$$

et :

$$\text{Im}(\vec{U}(\vec{X})) = \vec{A}(\vec{X}) \sin(\varphi). \quad (2.6)$$

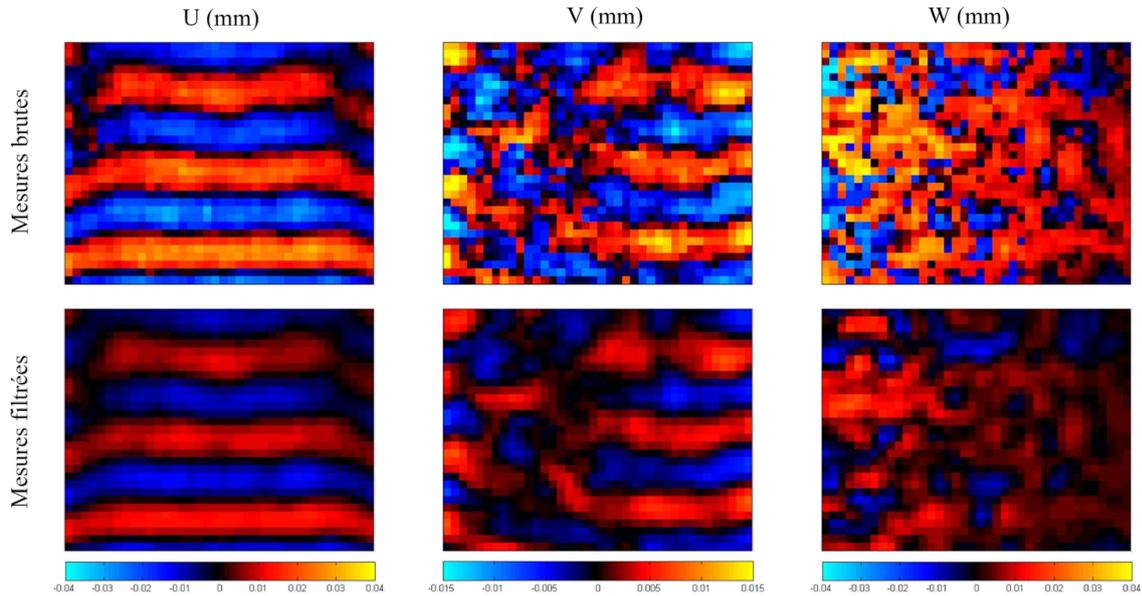


FIGURE 2.9 – Représentation spatiale du filtrage harmonique des composantes spatiales du déplacement d’une tranche d’intérêt (dans le plan de coupe  $x - y$  médian) à une phase temporelle d’un échantillon sollicité à 80 Hz par un mouvement dans la direction  $x$ .

## 2.4 Évaluation préliminaire par simulation numérique

En préambule des reconstructions de propriétés mécaniques présentées au chapitre 4, cette section fournit de premiers éléments d’évaluation du processus de mesure expérimentale et de la chaîne de traitements numériques pour la mesure de champs cinématiques harmoniques 3D par tomographie par découpage optique. Les matériaux fantômes et les conditions des expérimentations sont reproduites dans un modèle EF afin de calculer des champs de référence.

### 2.4.1 Modélisation numérique des champs cinématiques

Un modèle EF 3D reproduisant le processus expérimental est mis en place pour générer des déplacements représentatifs des mesures. Deux types de matériaux sont considérés : l’un souple ( $\mu \sim 1$  kPa) et l’autre rigide ( $\mu \sim 10$  kPa). La géométrie est

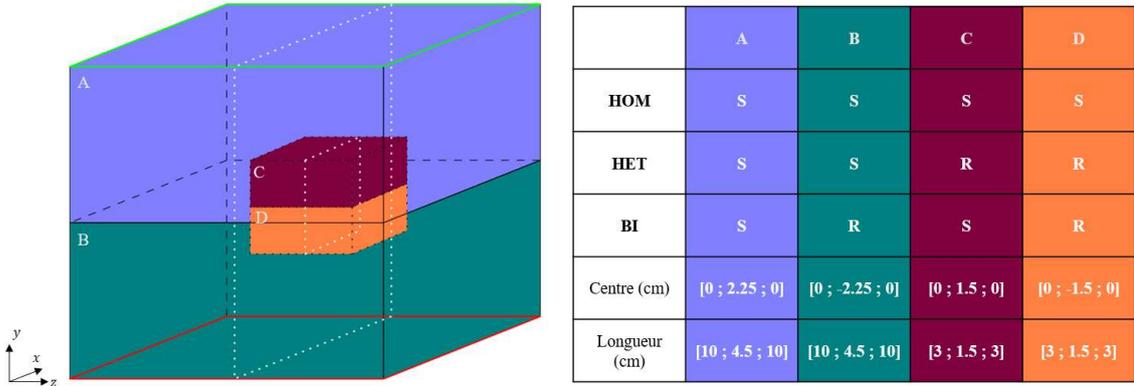


FIGURE 2.10 – Variété des configurations matérielles du modèle numérique : homogène (HOM), hétérogène (HET) et bi-couche (BI). A chaque zone (A, B, C ou D) est affectée une propriété, à tendance souple (S) ou rigide (R). Les dimensions géométriques des zones sont définies dans les directions de l'espace par la position du point central et la longueur. Les traces pleines rouge et verte indiquent respectivement la surface inférieure, subissant un déplacement imposé, et la surface supérieure, laissée libre. Les autres surfaces du modèle peuvent être libres ou imposées, selon les configurations testées. La coupe en pointillé blanche représente le plan  $\vec{x} - \vec{y}$  par défaut pour la visualisation en coupe.

composée d'un bloc de  $10 \times 9 \times 10 \text{ cm}^3$  partitionné afin de représenter les différents fantômes étudiés. La figure 2.10 présente les dimensions géométriques des partitions et les 3 configurations matérielles considérées : homogène (souple), hétérogène (matrice souple, inclusion rigide) et bi-couche (couche souple sur couche rigide). Les propriétés viscoélastiques sont traitées avec les paramètres réels  $\mu$ ,  $\xi$  et  $\nu$  introduits à la section 1.1.3, mais les calculs des champs harmoniques intègrent leur conversion dans les modules complexes de Lamé,  $\lambda$  et  $G$ . La simulation de vibration dans le modèle est initiée en imposant un déplacement uni-axial et harmonique selon la direction  $\vec{x}$  ou  $\vec{z}$ , piloté par un mouvement de  $50 \text{ }\mu\text{m}$  d'amplitude à une fréquence  $f$  spécifiée. Deux modes de sollicitation sont applicables au modèle : un mode « dé-moulé » où la face inférieure vibre et les autres sont laissées libres, et un mode « moulé » où toutes les faces du bloc vibrent hormis la face supérieure, laissée libre. Les modèles partagent comme propriétés homogène communes la masse volumique de  $900 \text{ kg.m}^{-3}$  et un coefficient de Poisson de 0.48. Un maillage EF à  $3.84 \cdot 10^5$  degrés de liberté ayant fait l'objet d'une étude préliminaire de convergence, composé d'éléments tétraédriques quadratiques (TET10), est généré. Une fois la configura-

tion matérielle définie, les déplacements 3D sont calculés en utilisant une formulation quasi-incompressible par le solveur stationnaire de *Comsol Multiphysics*. Les champs solutions sont interpolés par les fonctions de forme sur une grille régulière, isotrope, définie par la résolution du protocole expérimental au travers du pas  $l_0$ . En accord avec les grilles de mesures (identiques dans les 3 configurations), les déplacements complexes calculés sont ainsi interpolés vers une grille 3D avec un pas de 2.2 mm. Un masque s'appliquant sur les points extérieurs de la solution numérique permet de reproduire des maillages de simulation et de mesure identiques, ces dernières étant rognées lors de la procédure de CIV. Dans les analyses du mouvement, seules les composantes réelles des champs de déplacement sont représentées. Les composantes imaginaires ne sont pas illustrées, car les structurations de ces champs diffèrent généralement peu de celles des parties réelles.

### 2.4.2 Champ cinématique de l'échantillon de gélatine

Le matériau gélatine est ici considéré par un bloc homogène défini par  $\mu = 1.7$  kPa et  $\xi = 10$  %. Le modèle est configuré dans un mode « moulé » avec 5 des 6 faces du bloc sollicitées à une fréquence de 20 Hz dans la direction  $\vec{x}$  et bloquées dans les autres directions.

La figure 2.11 fournit une comparaison qualitative des champs cinématiques entre les mesures et les simulations. Dans les 3 composantes du déplacement, les intensités et les motifs de propagation du mouvement dans le domaine présentent une similarité satisfaisante étant donné la relative simplicité du modèle. La différence la plus significative porte sur la composante  $U$  selon l'axe vertical  $\vec{y}$  : si le modèle décrit un mouvement rigide avec peu de déformation dans sa partie inférieure assimilé au déplacement imposé aux bords, la mesure décrit la présence d'une onde dans cette zone. Cette différence peut s'expliquer par le choix de conditions aux limites du mode « moulé » dans le modèle, qui rendrait mal compte de la réalité. Un mouvement de l'échantillon le long de la paroi, particulièrement un glissement dans le plan  $\vec{x} - \vec{z}$  de la base pourrait être toléré. Une autre explication pourrait être la prise en compte seulement partielle du contexte dynamique dans le modèle, notamment la réflexion de l'onde visible dans la partie supérieure vers le bas de l'échantillon, qui est considérée parfaite (car libre) dans le modèle.

## 2.4. Évaluation préliminaire par simulation numérique

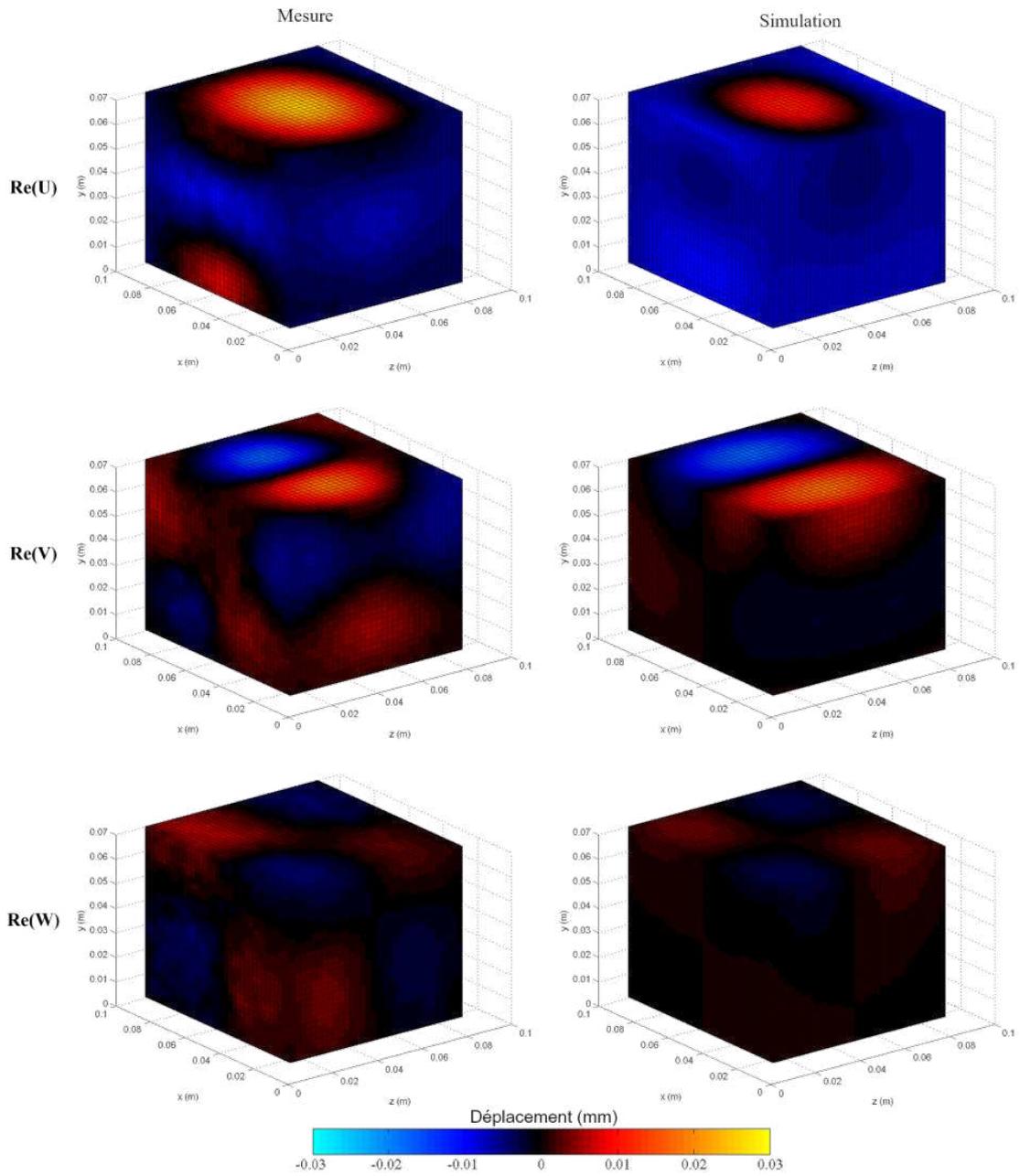


FIGURE 2.11 – Représentations volumiques des 3 composantes réelles du déplacement harmonique (en mm) des données mesurées et simulées de l'échantillon homogène de gélatine après application des masques.

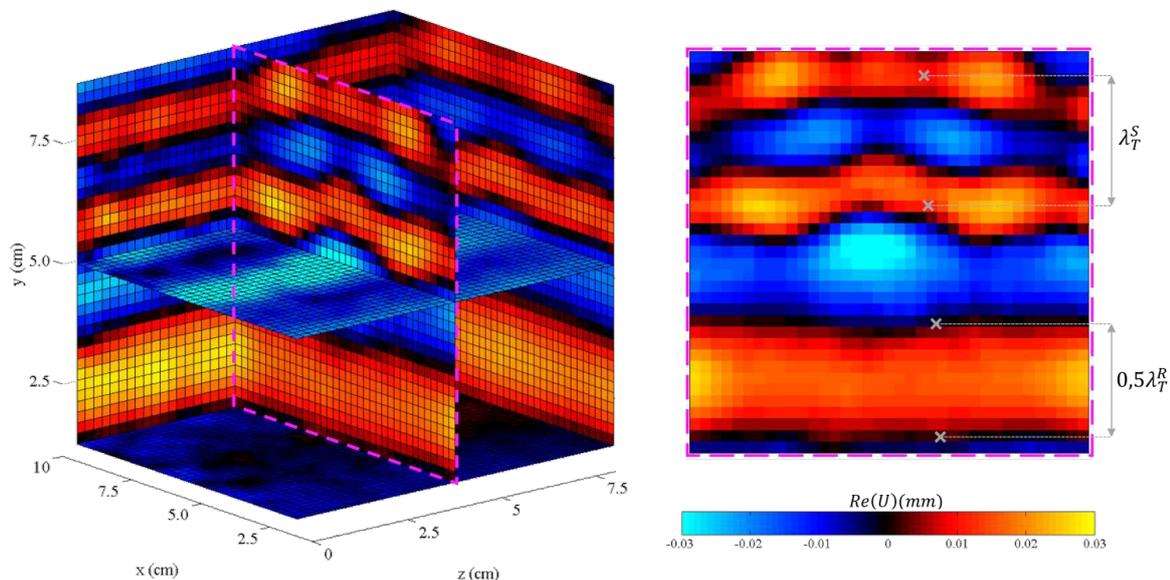


FIGURE 2.12 – Estimation des longueurs d’onde de cisailment (transversales) du matériau souple ( $\lambda_T^S$ ) et rigide ( $\lambda_T^R$ ) dans le silicone bi-couche à 80 Hz par mesure partielle de la propagation du mouvement horizontal ( $\text{Re}(U)$ , en mm) dans l’axe vertical ( $y$ ) dans le plan de coupe  $\vec{x}$  -  $\vec{y}$  médian.

### 2.4.3 Champs cinématiques des échantillons de silicone

Les 3 configurations de bloc sont étudiées sur le matériau silicone, dans un mode « démolé » vibrant dans l’axe  $x$  à 80 Hz. La sollicitation étant effectuée sur une surface du plan  $\vec{x}$  -  $\vec{z}$ , les ondes de cisailment se propagent tout particulièrement dans l’axe transversal, et vertical,  $\vec{y}$ . Une approche approximative, mais directe, de la valeur des modules de cisailment consiste à considérer qu’ils peuvent être déterminés à partir d’une estimation de la longueur d’onde de cisailment, liée au module, à la fréquence et à la densité par l’équation (1.21) dans chacun des milieux. La démarche adoptée pour les mesures des longueurs d’ondes de cisailment des matériaux souple et rigide est illustrée à la figure 2.12. Avec cette approche sur la mesure de l’échantillon bi-couche, les longueurs d’ondes des régions « souple » et « rigide » sont respectivement estimées à 2.42 cm et 4.40 cm. Cela conduit à associer au modèle des modules de cisailment de 3.37 kPa et de 11.15 kPa, respectivement. Le taux d’amortissement est arbitrairement fixé à 10 % dans les deux matériaux.

Les figures 2.13, 2.14 et 2.15 répertorient une comparaison entre les mesures et

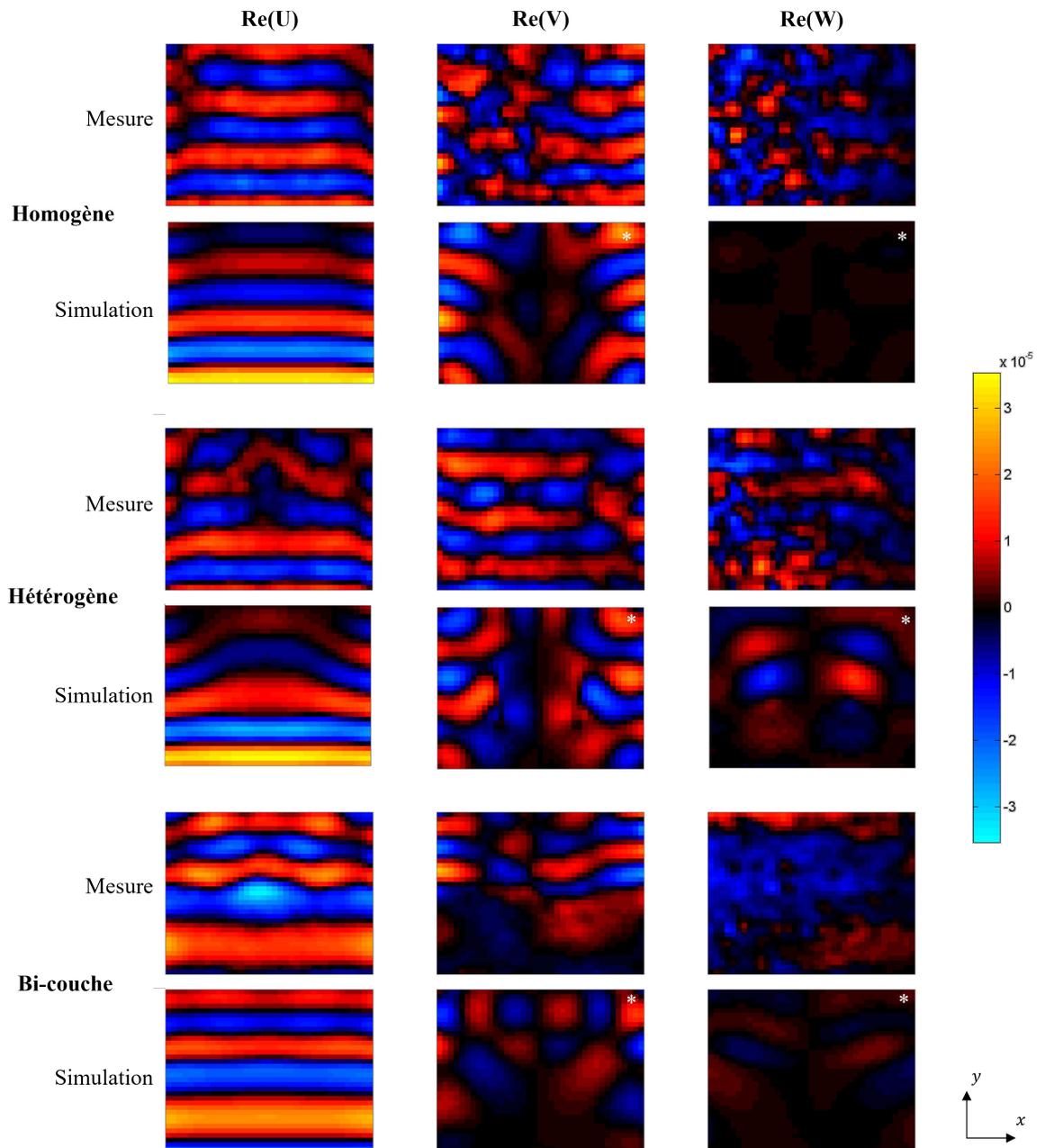


FIGURE 2.13 – Comparatif d’une coupe d’intérêt dans le plan  $\vec{x} - \vec{y}$  entre les 3 composantes directionnelles réelles des déplacements (en m) mesurés et simulés des fantômes de silicone homogène, hétérogène et bi-couche. La valeur des coupes marquées d’un astérisque blanc a été multipliée par 3.

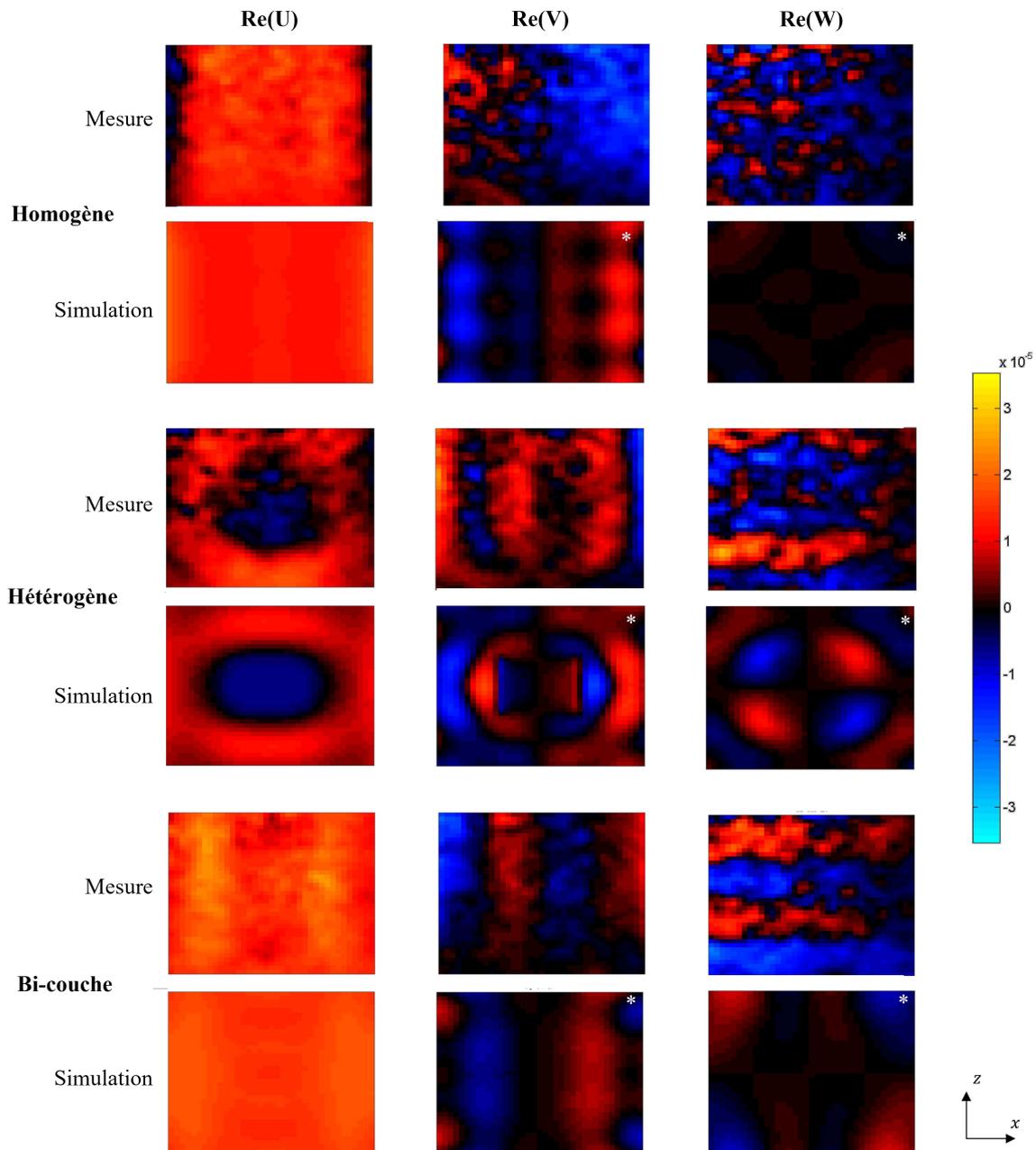


FIGURE 2.14 – Comparatif d’une coupe d’intérêt dans le plan  $\vec{z} - \vec{x}$  entre les 3 composantes directionnelles réelles des déplacements (en m) mesurés et simulés des fantômes de silicone homogène, hétérogène et bi-couche. La valeur des coupes marquées d’un astérisque blanc a été multipliée par 3.

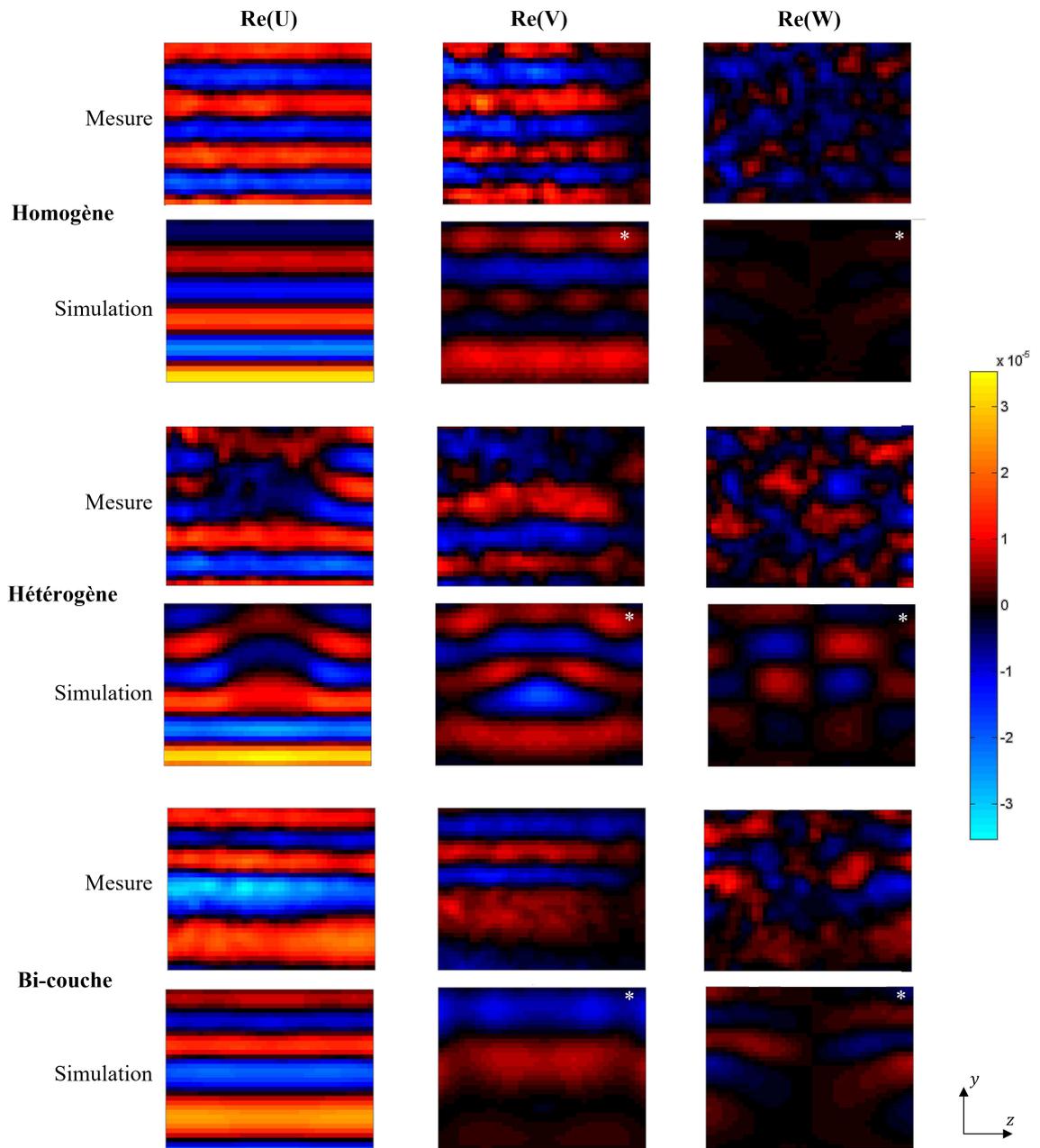


FIGURE 2.15 – Comparatif d’une coupe d’intérêt dans le plan  $\vec{y} - \vec{z}$  entre les 3 composantes directionnelles réelles des déplacements (en m) mesurés et simulés des fantômes de silicone homogène, hétérogène et bi-couche. La valeur des coupes marquées d’un astérisque blanc a été multipliée par 3.

les simulations de l'ensemble des plans de coupes, des composantes du mouvement et des matériaux fantômes. Dans cette configuration, le champ de déplacement  $U$  représente la composante la plus importante du mouvement, dictée par la direction de vibration imposée. Une reproduction satisfaisante des propagations d'ondes dans cette composante est obtenue dans l'ensemble des coupes d'intérêt et des fantômes. L'effet de l'hétérogénéité sur la propagation des ondes est détecté dans l'ensemble des coupes de cette direction du déplacement, présumant d'une estimation cohérente des modules mécaniques. La modélisation de la vibration reproduit l'intensité des déplacements et les motifs de propagation associés, bien que l'effet de l'amortissement soit plus prononcé que la mesure dans cette composante. En revanche, les gammes de valeur des composantes  $V$  et  $W$  des simulations sont plus faibles que celles des mesures. Par ailleurs, les motifs de propagation des simulations ne sont pas toujours reproduits par la mesure. Par exemple, la simulation du plan de coupe  $\vec{z} - \vec{x}$  (figure 2.14) du fantôme hétérogène met remarquablement en évidence la forme cubique de l'inclusion rigide sur la composante  $V$ , car elle provoque un déphasage du mouvement directement assimilable à une variation de propriétés. Ce motif est moins perceptible dans la coupe de la mesure, alors que celle-ci contient pourtant l'inclusion, *a priori*. Outre l'erreur cumulée dans la mesure expérimentale et les processus de traitement numérique de génération et de visualisation des champs cinématiques, cette observation témoigne d'une prise en compte partielle du mouvement vibratoire. Si la nature harmonique du mouvement semble correctement établie par l'acquisition des mesures en régime établi et le filtrage écartant tout signal de fréquence différente de celle de l'activation, la stratégie d'approche de la simulation du mouvement par formulation du problème direct harmonique représente toutefois une modélisation simplifiée de l'expérience. La réflexion des ondes de cisaillement n'est par exemple pas considérée comme parfaite dans le modèle en laissant les déplacements libres les surfaces externes du modèle. La diffusion multi-directionnelle dans l'ensemble du domaine des vibrations, observable dans les mesures, n'affecte pas les simulations qui présentent par conséquent des intensités moindres dans les composantes transversales et multiplient les plans de symétries.

## 2.5 Bilan et perspectives

Ce chapitre présente l'adaptation d'un dispositif de tomographie par découpage optique pour la mesure 3D de champs cinématiques viscoélastiques harmoniques. Le montage expérimental et les échantillons de silicone sont développés dans l'objectif de reproduire, dans des conditions équivalentes, l'expérimentation dans un

scanner IRM. Le dispositif d'acquisition valorise la haute précision d'un faisceau monochromatique laser plan piloté pour couvrir en quelques minutes 20 phases du déplacement généré par un actionneur piézo-électrique d'un échantillon cubique de dimensions de l'ordre du décimètre par reconstruction d'imagerie volumique avec une résolution isotrope de l'ordre du millier de voxels par direction. Un processus de corrélation d'images volumiques reconstruit les différentes phases du champ de déplacement dans des résolutions isotropes de l'ordre du millimètre similaires à celle de l'acquisition IRM. Une quantification de la précision est également réalisée. Les mesures cinématiques sont spatialement et temporellement lissées par un filtrage et la composante harmonique est extraite par projection sur une base harmonique battant à la fréquence de la sollicitation mécanique.

Dans l'objectif de confronter directement les diverses mesures cinématiques expérimentales, une analyse qualitative des champs cinématiques de plusieurs échantillons par comparaison a été effectuée. Pour cela, une modélisation par EF des déplacements harmoniques volumiques a été réalisée pour les échantillons en gélatine et en silicone. Des comparaisons qualitatives ont montré une relativement bonne correspondance entre les données expérimentales et les simulations. Une majeure partie des motifs de propagation d'ondes ont été reproduits par le modèle à des amplitudes comparables. Cependant, les modélisations ont présenté quelques limites, témoignant de certains manques dans la prise en compte de la complexité du contexte expérimental. En effet, différents aspects du modèle numérique, comme le choix des propriétés mécaniques et la gestion des conditions aux limites, pourraient être affinés. Par ailleurs, la prise en compte de la dynamique au travers d'une formulation harmonique ne reproduit que partiellement la démarche d'analyse spectrale des données expérimentales. Une approche implicite du problème EF permettrait d'intégrer le temps dans les simulations afin d'effectuer une évaluation plus représentative du processus expérimental, sur le déplacement d'une phase de la sollicitation. La cohérence de ces premiers résultats valide tout de même le concept expérimental et les procédures numériques mises en place pour ces mesures. Il s'agit vraisemblablement des premiers travaux considérant la dynamique harmonique 3D de matériaux viscoélastiques par tomographie optique. L'évaluation est par la suite complétée au chapitre 4 à l'aide de l'identification des propriétés matérielles des échantillons.

Par rapport au milieu IRM, le dispositif expérimental par tomographie optique et la procédure qui l'accompagne présentent plusieurs avantages encourageant leur développement. D'abord, les caractérisations des biais et des performances des me-

sures par CIV sont moins indirectes que pour les mesures IRM. Ensuite, pour de nombreuses équipes travaillant sur les thématiques de recherche en élastographie, les forts coûts financiers et humains d'opération machine et l'environnement clinique rendent les scanners IRM parfois difficiles d'accès. Outre les caractéristiques techniques du scanner IRM, la qualité de la mesure dans cet environnement est grandement liée aux séquences, dont les accès et développements sont partiellement contrôlés par les fabricants. L'environnement de laboratoire et la simplicité des séquences d'acquisition rendent l'utilisation du tomographe optique plus aisée. Enfin, le signal mesuré en IRM présente des sensibilités variables selon le milieu imagé et limite certains développements de matériaux fantômes. Par exemple, la prise en compte de flux pour des applications sur la poroélasticité est complexe et actuellement mal intégrée à des études sur fantômes. Enfin, la technique de tomographie par découpage optique possède un potentiel de résolution spatiale et temporelle important qui peut être exploité par une substitution de caméra rapide et de haute-résolution. Cela conforte l'intérêt de son développement en qualité d'outil alternatif, voir métrologique, à l'IRM.

Toujours dans la perspective de confronter cette nouvelle technique, une reproduction de l'expérimentation en milieu IRM avec une séquence d'encodage du mouvement éprouvée offrant des résolutions similaires des champs cinématiques fournirait un nouvel indicateur de la qualité des mesures obtenues par tomographie optique. L'OSS-SNR, métrique d'estimation de la qualité des mesures cinématiques introduite à la section 1.4.3, constitue une donnée complémentaire issue des mesures temporelles capable de permettre une évaluation quantitative commune aux dispositifs d'acquisition. D'autres perspectives de développement de la procédure expérimentale présentée dans ce chapitre peuvent porter sur la diversification des échantillons. Ceux développés dans cette étude présentent une géométrie simple afin de garantir des conditions optiques idéales. La non-perpendicularité des faisceaux laser avec la surface incidente de l'échantillon peut être corrigée en plongeant celui-ci dans une cuve à liquide d'indice pour minimiser les phénomènes de réfraction ou de réflexion. Cette complexification des échantillons pourrait être réalisée dans une perspective de mesures multi-physiques optiquement observables, avec par exemple la présence de mouvements de fluides pour des applications de caractérisation en poroélasticité.

# Chapitre 3

## Minimisation des erreurs de mesures pour l'identification par sous-domaines

Ce chapitre traite de l'adaptation d'une formulation nouvelle du PI de l'élastographie par résonance magnétique. L'algorithme *subzone NLI* introduit à la section 1.3.4 utilise une formulation itérative d'un problème inverse défini par la méthode de recalage par éléments finis évoquée à la section 1.3.3.3. L'objectif est de minimiser une fonctionnelle FEMU qui quantifie un écart entre deux champs de déplacements : un champ calculé, associé à un champ de contrainte dynamiquement admissible, et un champ mesuré. A chaque itération, le champ de déplacement calculé est d'abord obtenu par résolution du PD, puis les propriétés sont mises à jour afin de réduire l'écart entre le modèle direct et les mesures.

La caractéristique de l'algorithme *subzone NLI* à décomposer le problème d'identification principal en plusieurs sous-problèmes lui confère deux spécificités remarquables : l'optimisation du temps de calcul par parallélisation des sous-problèmes, et le contrôle d'un paramètre de régularisation spatial, extérieur à la fonctionnelle utilisée. Cependant, l'incertitude liée à la mesure détériore la solution du PD, ce qui vient perturber la résolution du PI en parasitant la fonctionnelle. Par ailleurs, la décomposition en sous-domaines accroît la proportion de mesures impliquées dans les conditions aux limites par rapport à celles associées au volume étudié, ce qui restreint l'utilisation de l'algorithme à des configurations présentant un niveau suffisant de signal.

Ce chapitre détaille une formulation du problème d'identification en utilisant la méthode adjointe où l'influence indirecte du bruit à travers les CL est évitée dans

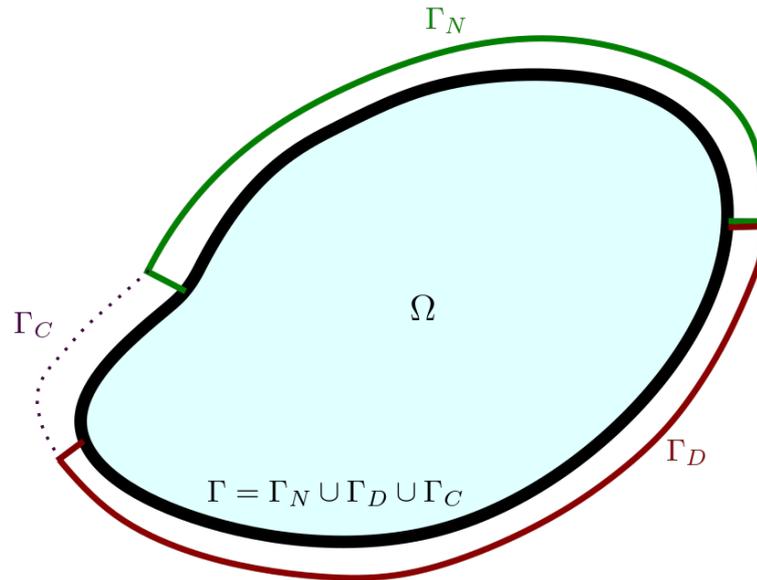


FIGURE 3.1 – Définition du domaine et des frontières du problème de référence, avec  $\Omega$  le domaine d'étude et  $\Gamma$  sa frontière composée de  $\Gamma_N$  la frontière de type Neumann,  $\Gamma_D$  la frontière de type Dirichlet et  $\Gamma_C$  la frontière indéterminée.

le PD. Le calcul des propriétés associée à la réduction du PI par la méthode du GC est également décrit. Enfin, des éléments relatifs à l'implémentation numérique sont présentés.

## 3.1 Mise en place du problème d'identification

### 3.1.1 Problème de référence

Le problème de référence est repris [Diaz et al., 2015] et est représenté à la figure 3.1 : la frontière  $\Gamma$  d'un domaine  $\Omega$  est décomposée en plusieurs sous-frontières portant des informations de type Dirichlet sur  $\Gamma_D$ , Neumann sur  $\Gamma_N$  ou indéterminées sur  $\Gamma_C = \Gamma \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N)$ .

Cette section adapte les équations du problème de référence à un solide viscoélastique linéaire, isotrope, en petites déformations, en régime dynamique harmonique. Certains éléments introduits aux sections 1.1.2 et 1.1.3 du chapitre 1 sont ici retravaillés. Le problème mécanique est gouverné par l'ensemble d'équations suivant :

- L'équilibre local :

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{b} = -\omega^2 \rho \vec{u} \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.1)$$

- Le relation de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{I}}} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.2)$$

- La compatibilité cinématique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}^T \vec{u} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}) \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.3)$$

- Les conditions aux limites :

$$\text{en déplacement : } \vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (3.4)$$

$$\text{en effort : } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{t}_0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (3.5)$$

Avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur de contraintes,  $\vec{b}$  la densité de force volumique,  $\omega$  la pulsation,  $\rho$  la masse volumique,  $\vec{u}$  le champ de déplacement,  $\lambda$  et  $G$  les paramètres de Lamé complexes,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  le tenseur de déformations,  $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$  le tenseur identité d'ordre 2,  $\vec{u}_0$  le champ de déplacement imposé sur  $\Gamma_D$ ,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal extérieur à  $\Gamma$  et  $\vec{t}_0$  le champ de force surfacique connu sur  $\Gamma_N$ .

Afin de dissocier les contributions des efforts en compression et en cisaillement, le tenseur des contraintes peut-être décomposé comme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^s + \underline{\underline{\sigma}}^d, \quad (3.6)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^s$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^d$  sont respectivement les parties sphériques et déviatoriques de  $\underline{\underline{\sigma}}$ . La partie sphérique est définie par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = -p \underline{\underline{\mathbb{I}}}, \quad (3.7)$$

avec  $p$  la pression. Par ailleurs, l'expression (3.2) donne :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = (3\lambda + 2G) \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 3K \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad (3.8)$$

avec  $K = \lambda + \frac{2}{3}G$  le module de compressibilité complexe. La trace de  $\underline{\underline{\sigma}}^d$  étant nulle, cela conduit à :

$$p = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = -K \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}). \quad (3.9)$$

La densité de force volumique est très souvent négligée en ERM, d'où le choix de prendre ici  $\vec{b} = \vec{0}$ . Par ailleurs, dans la pratique, la connaissance de la distribution du vecteur contrainte ne peut être connue que dans des cas très particuliers (bord libre ou surface de géométrie connue soumise à une pression connue), c'est pourquoi, afin de s'adapter aux conditions *in vivo*, la condition  $\Gamma_N = \emptyset$  est retenue. Le problème requiert alors  $\Gamma_D = \Gamma$  pour être bien posé. En injectant dans l'équation d'équilibre (3.1) les expressions (3.2), (3.3) et (3.9), la forme forte du système des équations décrivant le problème de référence s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\nabla}^T \vec{u} + \underline{\nabla} \vec{u}) - p\underline{\underline{1}}] &= -\omega^2 \rho \vec{u} & \text{sur } \Omega \\ -\frac{p}{K} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u} & \text{sur } \Omega \\ \vec{u} &= \vec{u}_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.10)$$

Bien que cette formulation soit générale, elle convient particulièrement pour la considération de la condition quasi-incompressible  $\nu \rightarrow 0.5$ , où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Dans ce cas de figure, une indétermination est posée par l'implication de la limite incompressible, qui conduit à  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \rightarrow 0$  et  $K \rightarrow +\infty$  présentés à la section 1.1.3.

### 3.1.2 Formulation adjointe

Le calcul des propriétés mécaniques d'un système comme (3.10), discrétisé, nécessite d'appliquer plusieurs opérations différentielles en cascade au champ de déplacement (gradient, divergence). La présence du bruit dans la mesure est usuellement transmise dans le PD au travers des CL, et son impact est fortement augmenté dans le PI par le calcul des dérivées secondes, rendant la matrice hessienne mal conditionnée sans l'ajout de termes de régularisation [Kallel and Bertrand, 1996]. Si la discrétisation par EF conduit à considérer un champ hétérogène de propriétés supposées constantes constitué de  $N$  éléments, alors le calcul du gradient requiert  $N$  solutions du PD. Ces coûts étant trop importants dans le cadre d'une identification en ERM ( $N \sim 10^4 - 10^5$ ), une méthode formulant un opérateur adjoint du problème est adoptée pour contourner le calcul de la matrice hessienne du PI [Oberai et al., 2003]. Cet opérateur réduit considérablement le nombre de calculs du PD, passant de  $N$  à 2. Le PI supporté par ces deux champs solutions du PD adjoint, par la suite appelés « champ de déplacement » et « champ adjoint », est ensuite résolu par le calcul des gradients de ces champs.

Les discrétisations contenant les inconnues du PD sous sa forme adjointe sont introduites. L'ensemble des fonctions d'essai lié aux propriétés  $\theta$ , fixées dans cette

considération, est donnée par :

$$U(\theta) = (\vec{u}(\theta), p(\theta))^T, \quad (3.11)$$

et l'ensemble des fonctions de pondération, ou fonctions test, jouant le rôle de multiplicateurs de Lagrange, est donné par :

$$W = (\vec{w}, q)^T, \quad (3.12)$$

avec  $\vec{w}$  le champ de vecteurs déplacement test et  $q$  le champ de pressions test.

Les équations (3.10) sont reformulées en introduisant les fonctions test. La première sous-équation du système est pondérée avec le déplacement test, et la deuxième sous-équation avec la pression test. Une condition sur le déplacement du champ adjoint l'impose nul à la frontière. Cela donne le système :

$$\begin{cases} (-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] - \omega^2\rho\vec{u}) \cdot \vec{w} = 0, \\ ((\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{p}{K})q = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

La forme variationnelle  $\mathcal{A}$  du PD est ainsi obtenue en intégrant et en groupant sur  $\Omega$  ce système :

$$\mathcal{A}(W, U(\theta); \theta) = \int_{\Omega} ((-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] - \omega^2\rho\vec{u}) \cdot \vec{w} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{p}{K}]q) d\Omega. \quad (3.14)$$

Classiquement, le premier terme, qui correspond à la divergence de la contrainte, peut être simplifié en utilisant une intégration par parties. Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] \cdot \vec{w}) d\Omega &= \int_{\Omega} [G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] : \underline{\nabla}\vec{w} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} -[G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] \cdot \vec{w} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il est possible de faire disparaître le terme sur la frontière avec :

$$\vec{w} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3.16)$$

Cela conduit à :

$$\mathcal{A}(W, U(\theta); \theta) = \int_{\Omega} ([G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] : \underline{\nabla}\vec{w} - \omega^2\rho\vec{u} \cdot \vec{w} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{p}{K}]q) d\Omega. \quad (3.17)$$

En remarquant que pour deux champs vectoriels  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , on a les égalités scalaires :

- $\underline{\nabla}^T \underline{v}_1 : \underline{\nabla} \underline{v}_2 = \underline{\nabla} \underline{v}_1 : \underline{\nabla}^T \underline{v}_2$ ,
- $\underline{\mathbb{I}} : \underline{\nabla} \underline{v}_1 = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_1$ ,

le problème (3.17) peut alors aussi s'écrire :

$$\mathcal{A}^*(U(\theta), W; \theta) = \int_{\Omega} ([G(\underline{\nabla} \underline{w} + \underline{\nabla}^T \underline{w}) - q \underline{\mathbb{I}}] : \underline{\nabla} \underline{u} - \omega^2 \rho \underline{w} \cdot \underline{u} - [(\underline{\nabla} \cdot \underline{w}) + \frac{q}{K}] p) d\Omega. \quad (3.18)$$

avec  $\mathcal{A}^*$  l'adjoint de  $\mathcal{A}$ . La formulation faible comprenant les équations sur  $\Omega$  de (3.10) est donc définie par la fonctionnelle  $A$  tel que :

$$\mathcal{A}(W, U(\theta); \theta) = 0. \quad (3.19)$$

L'égalité entre les formes (3.17) et (3.18) assure que la fonctionnelle du problème viscoélastique est un endomorphisme autoadjoint. Cette propriété garantit l'inversion d'une unique matrice discrétisant le problème, pour les calculs directs respectifs des fonctions de test (3.11) et de pondération (3.12). La fonctionnelle  $\mathcal{A}$  joue le rôle de contrainte dans le problème d'identification.

### 3.1.3 Formulation lagrangienne

La fonctionnelle FEMU détaillée à la section 1.3.3.3 définit l'écart entre le champ calculé,  $\underline{u}(\theta)$ , et le champ mesuré,  $\underline{u}_m$  :

$$\Phi(U(\theta)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{u}(\theta) - \underline{u}_m) \cdot \overline{(\underline{u}(\theta) - \underline{u}_m)} d\Omega, \quad (3.20)$$

avec  $\bar{x}$  le conjugué de  $x$ .

Un terme de régularisation sur la variation totale des propriétés, au travers de leur gradient  $\underline{\nabla} \theta$ , est également considéré. Son rôle est d'adoucir la sensibilité au bruit en lissant les oscillations des champs de propriétés reconstruits sans pénaliser les gradients importants [Goenezen et al., 2011]. Ce terme s'écrit :

$$\mathcal{R}(\theta) = \int_{\Omega} \sqrt{\underline{\nabla} \theta : \underline{\nabla} \theta + \beta_{\theta}^2} d\Omega, \quad (3.21)$$

avec  $\beta_{\theta}$  une constante non-nulle pour rendre le terme de régularisation dérivable quand  $\underline{\nabla} \theta \rightarrow \underline{0}$ .

L'opérateur Lagrangien  $\mathcal{L}$  combinant la fonctionnelle FEMU (3.20), la contrainte associée au PD (3.17) et le terme de régularisation (3.21) est introduit tel que :

$$\mathcal{L}(W, U(\theta); \theta) = \Phi(U(\theta)) + \mathcal{A}(W, U(\theta); \theta) + \alpha_{TV}\mathcal{R}(\theta), \quad (3.22)$$

avec  $\alpha_{TV}$  le facteur de pondération du terme de régularisation. L'ensemble des fonctions de pondération  $W$  peut être considéré comme un multiplicateur de Lagrange dans (3.22).

Les conditions optimales du Lagrangien sont ici approchées par les dérivations directionnelles, prises au sens de Gâteaux. Pour un opérateur  $\mathcal{F}$  prenant un argument  $x$ , celle-ci est définie par :

$$\mathcal{F}'_x(\delta x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}(x + \epsilon\delta x) \right|_{\epsilon=0}. \quad (3.23)$$

Les variables dont dépend  $\mathcal{L}$  dans (3.22) sont  $U$ ,  $W$  et  $\theta$ . La variation globale s'exprime ainsi par :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_U(\delta U) + \mathcal{L}'_W(\delta W) + \mathcal{L}'_\theta(\delta\theta). \quad (3.24)$$

L'algorithme *subzone NLI* résout le problème d'identification en viscoélasticité, compressible ou quasi-incompressible, en résolvant les 3 conditions d'optimalité de (3.24) de manière séquentielle :

1. Déterminer le champ principal  $U$  en imposant l'équation posée par le « problème en équilibre » (régulièrement aussi dénommé « problème en force » dans la littérature)  $\mathcal{L}'_W(\delta W) = 0$ .
2. Déterminer le champ adjoint  $W$  en imposant l'équation posée par le « problème de mesure » (régulièrement aussi dénommé « problème différentiel » dans la littérature)  $\mathcal{L}'_U(\delta U) = 0$  avec l'aide de  $U$  identifié dans la première étape.
3. Déterminer le champ de propriétés  $\theta$  en résolvant l'équation du problème inverse  $\mathcal{L}'_\theta(\delta\theta) = 0$  avec l'aide de  $U$  et de  $W$  respectivement identifiés dans la première et la deuxième étape.

## 3.2 Problème direct

Deux stratégies permettant le calcul des termes  $U$  et  $W$  de (3.24) sont présentées dans cette section. D'abord, une formulation développée par Tan et al. présente une

approche conventionnelle du PD adjoint où la même matrice est utilisée pour calculer chacun des champs  $U$  et  $W$ , et où seul le second membre et les CL diffèrent [Tan et al., 2017a]. Ensuite, une approche inspirée de la méthode CASE (*coupled adjoint-state equation*) développée en élasticité linéaire et en contraintes planes par Seidl et al., où les deux champs  $U$  et  $W$  sont calculés en une seule étape, est adaptée pour être implémentée à l'algorithme *subzone NLI* [Seidl et al., 2019]. La comparaison des performances de ces deux méthodes constitue un élément central des résultats présentés au chapitre 4.

### 3.2.1 Conditions d'optimalité

Les deux conditions d'optimalités du PD présentées ci-dessus sont maintenant détaillées.

1. La première étape de la résolution du PD est le problème en équilibre, où les efforts volumiques, supposés nuls, sont pris en compte. Celui-ci impose :

$$\mathcal{L}'_W(\delta W) = \mathcal{A}'_W(\delta W) = 0, \quad (3.25)$$

où la variation de (3.17) selon  $\delta W$  vaut :

$$\mathcal{A}'_W(\delta W) = \int_{\Omega} ([G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] : \underline{\nabla}\delta\vec{w} - \omega^2\rho\vec{u} \cdot \delta\vec{w} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{p}{K}]\delta q) d\Omega. \quad (3.26)$$

Le terme  $\underline{\nabla}\delta\vec{w}$  est remplacé par une intégration par partie afin de linéariser cette expression selon le couple de fonctions test  $(\delta\vec{w}, \delta q)$ . La condition (3.25) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] - \omega^2\rho\vec{u}) \cdot \delta\vec{w} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{p}{K}]\delta q) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} [G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}] \cdot \delta\vec{w} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

2. La seconde étape de la résolution du PD est le problème de mesure, où le champ  $\vec{u}_m$  est pris en compte. Celui-ci impose :

$$\mathcal{L}'_U(\delta U) = \Phi'_U(\delta U) + \mathcal{A}'_U(\delta U) = 0, \quad (3.28)$$

où la variation de (3.20) selon  $\delta U$  vaut :

$$\Phi'_U(\delta U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\delta\vec{u}(\vec{u} - \vec{u}_m) + (\vec{u} - \vec{u}_m)\delta\vec{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \text{Re}(\overline{(\vec{u} - \vec{u}_m)}\delta\vec{u}) d\Omega. \quad (3.29)$$

et la variation de (3.18) par rapport à  $\delta\vec{u}$  vaut :

$$\mathcal{A}'_U(\delta U) = \int_{\Omega} ([G(\underline{\nabla}\vec{w} + \underline{\nabla}^T\vec{w}) - q\underline{\mathbb{I}}] : \underline{\nabla}\delta\vec{u} - \omega^2\rho\vec{w} \cdot \delta\vec{u} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) + \frac{q}{K}]\delta p) d\Omega. \quad (3.30)$$

Comme pour le problème en équilibre, le terme  $\underline{\nabla}\delta\vec{u}$  de (3.30) est intégré par partie pour linéariser le problème de mesure en  $(\delta\vec{u}, \delta p)$ . La condition (3.28) devient donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\nabla}\vec{w} + \underline{\nabla}^T\vec{w}) - q\underline{\mathbb{I}}] - \omega^2\rho\vec{w} - \overline{(\vec{u} - \vec{u}_m)}) \cdot \delta\vec{u} - [(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) + \frac{q}{K}]\delta p) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} [G(\underline{\nabla}\vec{w} + \underline{\nabla}^T\vec{w}) - q\underline{\mathbb{I}}] \cdot \delta\vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dans (3.31), le forçage du champ adjoint s'effectue sur la partie réelle. S'il y a un écart entre le champ calculé et la mesure, la partie imaginaire sera non-nulle à cause des termes complexes contenus dans (3.30) [Zhang et al., 2012].

Les fonctions tests en déplacement permettent d'appliquer un champ connu sur la frontière. Le terme sur la surface dans (3.27) disparaît en imposant  $\delta\vec{w} = \vec{0}$ . Dans le cas quasi-statique, il a été montré que le développement du terme sur la surface de (3.31) conduit à une forme équivalente à (3.16), apportant une double CL sur  $\vec{w}$  [Seidl et al., 2019].

### 3.2.2 DFC : Formulation découplée

La première approche présentée ici est la méthode DFC (*displacement field condition*). Dans ce cas, les problèmes d'équilibre et de mesure sont résolus successivement et requièrent chacun des CL. Celles-ci découlent directement des définitions du problème de référence (3.10) pour  $U$  et du champ adjoint (3.13) pour  $W$ . Les espaces des fonctions spatiales du système DFC sont notés  $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$  et  $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$  définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{D}} &= \{U = (\vec{u}, p) | \vec{u} \in H^1(\Omega), p \in H^1(\Omega), \vec{u} = \vec{u}_m \text{ sur } \Gamma\} \\ \mathcal{W}_{\mathcal{D}} &= \{W = (\vec{w}, q) | \vec{w} \in H^1(\Omega), q \in H^1(\Omega), \vec{w} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le problème d'équilibre défini par (3.25) associé à la CL (3.4) correspond au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}) + \omega^2\rho\vec{u} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{p}{K} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{u} = \vec{u}_m & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.33)$$

avec  $U = (\delta\vec{u}, p)$  le champ recherché.

De même, le problème de mesure associé à (3.28) avec la CL nulle en déplacement impose le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (G(\underline{\nabla}\vec{w} + \underline{\nabla}^T\vec{w}) - q\underline{\mathbb{I}}) + \omega^2\rho\vec{w} = \overline{\vec{u}} - \overline{\vec{u}_m} & \text{sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \frac{q}{K} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{w} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.34)$$

Le système (3.33) discrétisé par EF en matrices bloc s'écrit :

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{U}_D\} = \{\mathbf{f}_{U_D}\}, \quad (3.35)$$

avec la matrice :

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}] & [\mathbf{A}_p] \\ [\mathbf{A}_p] & [\mathbf{A}_d] \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

le vecteur d'inconnues associées aux fonctions d'essai :

$$\{\mathbf{U}_D\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}_D\} \\ \{\mathbf{p}_D\} \end{array} \right\}, \quad (3.37)$$

le vecteur second membre traduisant l'absence d'efforts extérieurs dans le problème :

$$\{\mathbf{f}_{U_D}\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{array} \right\}, \quad (3.38)$$

avec  $[\mathbf{K}]$  la matrice de rigidité,  $[\mathbf{M}]$  la matrice de masse,  $[\mathbf{A}_p]$  la matrice de couplage pression-déplacement,  $[\mathbf{A}_d]$  la matrice de pression,  $\{\mathbf{u}_D\}$  et  $\{\mathbf{p}_D\}$  les champs discrétisés respectifs de déplacement et de pression. La présence de CL sur  $\vec{u}$  sur la frontière  $\Gamma$  conduit à l'obtention de champs solution non-nuls.

Le système (3.34) requiert le conjugué du champ  $\{u_D\}$ , solution de (3.35). Le système de matrices bloc s'écrit :

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{W}_D\} = \{\mathbf{f}_{W_D}\}, \quad (3.39)$$

avec le vecteur d'inconnues associées aux fonctions test :

$$\{\mathbf{W}_D\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{w}_D\} \\ \{\mathbf{q}_D\} \end{array} \right\}, \quad (3.40)$$

**Algorithm 1** Problème direct DFC**Require:** Propriétés  $\theta$ , mesures  $\{\mathbf{u}_m\}$ , pulsation  $\omega$ **Ensure:** Champs  $\{\mathbf{U}_D\}$  et  $\{\mathbf{W}_D\}$ 

```

1:  $[\mathbf{D}] \leftarrow \mathcal{A}'_W(\theta, \omega)$ 
2:  $\{\mathbf{f}_{U_D}\} \leftarrow \{\mathbf{0}\}$ 
3:  $N_{ddl} \leftarrow \text{length}(\{\mathbf{f}_{U_D}\})$ 
4: for  $ii \leftarrow 1$  to  $N_{ddl}$  do
5:   if  $ii \in \Gamma$  then
6:     for  $jj \leftarrow 1$  to  $N_{ddl}$  do
7:       if  $ii = jj$  then
8:          $[\mathbf{D}]_{ii,jj} \leftarrow 1$ 
9:       else
10:         $[\mathbf{D}]_{ii,jj} \leftarrow 0$ 
11:      end if
12:       $\{\mathbf{f}_{U_D}\}_{ii} \leftarrow \{\mathbf{u}_m\}_{ii}$ 
13:    end for
14:  end if
15: end for
16:  $\{\mathbf{U}_D\} \leftarrow \text{MUMPS}([\mathbf{D}], \{\mathbf{f}_{U_D}\})$ 
17:  $\{\mathbf{f}_{W_D}\} \leftarrow \{\mathbf{U}_D\}, \{\mathbf{u}_m\}$ 
18:  $\{\mathbf{W}_D\} \leftarrow \text{MUMPS}([\mathbf{D}], \{\mathbf{f}_{W_D}\})$ 
19: return  $\{\mathbf{U}_D\}$  et  $\{\mathbf{W}_D\}$ 

```

et le second membre qui rend compte de la différence entre le champ calculé et la mesure :

$$\{\mathbf{f}_{W_D}\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\overline{\mathbf{u}_D}\} - \{\overline{\mathbf{u}_m}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{array} \right\}, \quad (3.41)$$

avec  $\{\mathbf{u}_m\}$  la projection du champ de mesure sur le maillage,  $\{\mathbf{w}_D\}$  et  $\{\mathbf{q}_D\}$  les champs adjoints discrétisés respectifs de déplacement et de pression. Le pseudo-code 2 synthétise le PD DFC.

### 3.2.3 AFC : Formulation couplée

La seconde approche présentée ici est la méthode AFC (*adjoint field condition*). L'objectif est de coupler le problème en force (3.27) et le problème de mesure (3.31), traités successivement dans DFC, afin d'ôter la CL du champ de déplacement principal du PD. Cela est rendu possible par l'apparition naturelle d'une CL additionnelle dans le terme du problème de mesure [Seidl et al., 2019]. A la frontière, le champ adjoint est ainsi contraint directement par (3.16) et indirectement par (3.30). Dans

cette optique, les espaces des fonctions spatiales  $\mathcal{U}_A$  et  $\mathcal{W}_A$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_A &= \{U = (\vec{u}, p) | \vec{u} \in H^1(\Omega), p \in H^1(\Omega)\} \\ \mathcal{W}_A &= \{W = (\vec{w}, q) | \vec{w} \in H^1(\Omega), q \in H^1(\Omega), \vec{w} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Si les espaces des fonctions tests sont identiques ( $\mathcal{W}_A = \mathcal{W}_D$ ), l'espace des fonctions d'essai de la formulation AFC n'intègre plus les CL imposées dans la formulation DFC ( $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}_D$ ).

L'unique système d'équations d'Euler-Lagrange couplant (3.27) et (3.31) et où la CL n'est portée que sur  $\vec{w}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{u} - [\vec{\nabla} \cdot (G(\underline{\nabla}\vec{w} + \underline{\nabla}^T\vec{w}) - q\underline{\mathbb{I}}) + \omega^2\rho\vec{w}] = \vec{u}_m & \text{sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \frac{q}{K} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot (G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) - p\underline{\mathbb{I}}) + \omega^2\rho\vec{u} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{p}{K} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{w} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Ces équations couplant  $U$  et  $W$  sont discrétisées vers le système linéaire bloc :

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{f}_A\}, \quad (3.44)$$

avec la matrice hermitienne :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}]^H - \omega^2[\mathbf{M}]^H & [\mathbf{A}_p]'^H \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{A}_p]^H & [\mathbf{A}_d]^H \\ [\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}] & [\mathbf{A}_p]' & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{A}_p] & [\mathbf{A}_d] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

le vecteur d'inconnues aux fonctions spatiales :

$$\{\mathbf{x}\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{U}_A\} \\ \{\mathbf{W}_A\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}_A\} \\ \{\mathbf{p}_A\} \\ \{\mathbf{w}_A\} \\ \{\mathbf{q}_A\} \end{array} \right\}, \quad (3.46)$$

et le second membre :

$$\{\mathbf{f}_A\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}_m\} \\ \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{array} \right\}, \quad (3.47)$$

**Algorithm 2** Problème direct AFC**Require:** Propriétés  $\theta$ , mesures  $\{\mathbf{u}_m\}$ , pulsation  $\omega$ **Ensure:** Champs  $\{\mathbf{U}_A\}$  et  $\{\mathbf{W}_A\}$ 

```

1:  $[\mathbf{A}] \leftarrow \mathcal{A}'_W(\theta, \omega)$ 
2:  $\{\mathbf{f}_A\} \leftarrow \{\mathbf{u}_m\}$ 
3:  $N_{ddl} \leftarrow \text{length}(\{\mathbf{f}_{\mathbf{U}_D}\})$ 
4: for  $ii \leftarrow 1$  to  $N_{ddl}$  do
5:   if  $ii \in \Gamma$  then
6:     for  $jj \leftarrow 1$  to  $N_{ddl}$  do
7:       if  $ii = jj$  then
8:          $[\mathbf{A}]_{ii+N_{ddl}.jj+N_{ddl}} \leftarrow 1$ 
9:       else
10:         $[\mathbf{A}]_{ii+N_{ddl}.jj+N_{ddl}} \leftarrow 0$ 
11:      end if
12:       $\{\mathbf{f}_A\}_{ii+N_{ddl}} \leftarrow 0$ 
13:    end for
14:  end if
15: end for
16:  $\{\mathbf{x}\} \leftarrow \text{MUMPS}([\mathbf{A}], \{\mathbf{f}_A\})$ 
17:  $\{\mathbf{U}_A\}, \{\mathbf{W}_A\} \leftarrow \{\mathbf{x}\}$ 
18: return  $\{\mathbf{U}_A\}$  et  $\{\mathbf{W}_A\}$ 

```

où  $[\mathbf{Y}]^H$  est la matrice hermitienne (transposée conjuguée) de  $[\mathbf{Y}]$ ,  $\{\mathbf{u}_A\}$  et  $\{\mathbf{p}_A\}$  les champs principaux discrétisés en déplacement et en pression,  $\{\mathbf{w}_A\}$  et  $\{\mathbf{q}_A\}$  les champs adjoints discrétisés respectifs de déplacement et de pression. Les matrices blocs sont identiques à la formulation découplée de l'approche DFC. Cependant, le lien entre le conjugué du déplacement principal et le déplacement adjoint contenu dans la première sous-équation de (3.43) est traité par le produit hermitien dans (3.45). Autrement dit, le champ adjoint calculé par le système AFC doit être conjugué pour la suite des calculs. Le pseudo-code 2 synthétise le PD AFC.

## 3.3 Problème inverse

### 3.3.1 Calcul du gradient

Le problème inverse correspond à la troisième étape du schéma généralisé présenté précédemment. Il est associé à la condition d'optimalité sur les propriétés

mécaniques :

$$\mathcal{L}'_{\theta}(\delta\theta) = \Phi'_{\theta}(\delta\theta) + \mathcal{A}'_{\theta}(\delta\theta) + \alpha_{TV}\mathcal{R}'_{\theta}(\delta\theta). \quad (3.48)$$

La configuration  $\theta = (G, K)$  est ici considérée. La variation de la fonctionnelle (3.17) par rapport à  $\delta\theta = (\delta G, \delta K)$  donne :

$$\mathcal{A}'_{\theta}(\delta G, \delta K) = \int_{\Omega} (((\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) : \underline{\nabla}\vec{w})\delta G + \frac{pq}{K^2}\delta K) d\Omega. \quad (3.49)$$

La variation du terme de régularisation (3.21) vaut :

$$\mathcal{R}'_{\theta}(\delta\theta) = \int_{\Omega} \text{Re}\left(\frac{\overline{\nabla\theta}}{\sqrt{\nabla\theta : \overline{\nabla\theta} + \beta_{\theta}^2}} : \nabla\delta\theta\right) d\Omega. \quad (3.50)$$

La discrétisation par EF du champ de propriétés permet de linéariser le terme de régularisation par rapport aux fonctions tests, le gradient de ces dernières étant supporté par la fonction de forme. Pour la suite des développements, la fonction discrète  $r_{\varphi}$  réduisant le terme de régularisation, non-explicitée ici [Tan et al., 2017a], est introduite telle que :

$$\mathcal{R}'_{\theta}(\delta\theta) = \int_{\Omega} r_{\varphi}(\theta)\delta\theta d\Omega = \int_{\Omega} (r_{\varphi}(G)\delta G + r_{\varphi}(K)\delta K) d\Omega. \quad (3.51)$$

La variation du terme de régularisation sur la variation totale est intégrée aux calculs du vecteur gradient  $g_{\theta}$  de la fonction objectif pour un jeu de propriétés. Le vecteur est défini comme vérifiant :

$$\Phi'_{\theta}(\delta\theta) = -\mathcal{A}'_{\theta}(\delta\theta) - \alpha_{TV}\mathcal{R}'_{\theta}(\delta\theta), \quad (3.52)$$

exprimé sous la forme  $= g_{\theta} \cdot \delta\theta$  avec :

$$g_G = - \int_{\Omega} ((\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) : \underline{\nabla}\vec{w} + \alpha_{TV}r_{\varphi}(G)) d\Omega, \quad (3.53)$$

et :

$$g_K = - \int_{\Omega} \left(\frac{pq}{K^2} + \alpha_{TV}r_{\varphi}(K)\right) d\Omega. \quad (3.54)$$

Si le calcul de  $g_G$  requiert les dérivées premières des champs de déplacement  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ , le calcul de  $g_K$  est quant à lui linéaire par rapport aux champs de pression  $p$  et  $q$  mais a une dépendance quadratique au module précédemment utilisé. Cela augmente la sensibilité de ce dernier gradient et donc le risque d'importantes dispersions des modules identifiés. Il est assez courant de ne pas considérer le module  $K$  dans la reconstruction, celui-ci ayant une importance moindre pour la caractérisation du tissu et étant moins stable dans les identifications.

### 3.3.2 Gradient conjugué

La diminution de l'erreur de recalage  $\Phi(U(\theta))$  est recherchée. La discrétisation des propriétés sur laquelle est effectuée l'optimisation n'est pas nécessairement identique à celle des champs de déplacement et adjoint. Une suite de corrections  $\Delta\theta_k$  est construite afin de faire décroître  $\Phi$  en utilisant une méthode du GC. Le vecteur de correction est introduit par (1.28) et défini par :

$$\Delta\theta_k = a_k p_k, \quad (3.55)$$

avec  $a_k$  un pas utilisé pour réduire la fonction objectif et  $p_k$  la direction de recherche [Tan et al., 2017a]. Celle-ci est appelée direction conjuguée et correspond à la combinaison du gradient courant,  $g_k$ , et de la direction de recherche précédente tel que :

$$p_k = -g_k + b_k p_{k-1}, \quad (3.56)$$

avec  $b_n$  une constante choisie de telle sorte que  $p_n$  forme une base conjuguée à l'itération courante. La méthode de Polak-Ribière formule l'approche la plus courante de ce paramètre :

$$b_k = \max \left\{ \frac{\operatorname{Re}(g_k^H (g_k - g_{k-1}))}{\operatorname{Re}(g_{k-1}^H g_{k-1})}, 0 \right\}. \quad (3.57)$$

La méthode de Polak-Ribière peut dans certains cas boucler sans converger à cause de la non-linéarité du PI. La condition sur le maximum de  $b_k$  permet d'effectuer des réinitialisations éventuelles dans la recherche de direction par la descente, montrant un gain général des convergences [Shewchuk, 1994]. Un algorithme exploitant la méthode du GC ne requiert que 4 vecteurs ( $g_{k-1}$ ,  $g_k$ ,  $p_{k-1}$ ,  $p_k$ ), la rendant nettement moins coûteuse que les méthodes de Newton qui nécessitent le calcul d'une matrice hessienne, dont le côté est le nombre de paramètres à identifier.

Le pas  $a_k$  optimal est trouvé par une technique de recherche linéaire. La méthode de la sécante résout itérativement la recherche linéaire pour un point stationnaire tel que :

$$\Phi'_a(\theta + ap) = 0, \quad (3.58)$$

où  $\Phi'_a$  est la dérivée directionnelle de la fonctionnelle  $\Phi$  par rapport à la direction  $p$ . Le développement limité au second ordre de la fonctionnelle donne :

$$\Phi(\theta + ap) \approx \Phi(\theta) + a\Phi'_a(\theta) + \frac{a^2}{2}\Phi''_a(\theta). \quad (3.59)$$

Le terme au second ordre est développé à l'aide du gradient  $g(\theta)$  et la contrainte (3.58) conduit à :

$$a = -\delta_s \frac{\operatorname{Re}(p^H g(\theta))}{\operatorname{Re}(p^H g(\theta + \delta_s p)) - \operatorname{Re}(p^H g(\theta))}, \quad (3.60)$$

avec  $\delta_s$  le pas de discrétisation du gradient, définit comme paramètre.

La méthode de GC non-linéaire est résumée par le pseudo-code 3.

---

**Algorithm 3** Gradient Conjugué Non Linéaire

---

**Require:** Champs  $U$  et  $W$ , paramètre  $\alpha_{TV}$ , propriétés initiales  $\theta_0$ , tolérance  $\epsilon_\theta$ ,  
itération maximale  $k_N$ , pas  $\delta_s$

**Ensure:** Propriétés optimales  $\theta_f$

- 1:  $k \leftarrow 0$
  - 2:  $g_0 \leftarrow \mathcal{A}'_\theta(\vec{u}, \vec{w}, \theta_0) + \mathcal{R}'_\theta(p, q, \theta_0)$
  - 3:  $p_0 \leftarrow -g_0$
  - 4: **while**  $\|g_k\| > \epsilon_\theta$  &  $k < k_N$  **do**
  - 5:      $a_k \leftarrow \delta_s \frac{\operatorname{Re}(p_k^H g_k(\theta_k))}{\operatorname{Re}(p_k^H g_k(\theta_k + \delta_s p_k)) - \operatorname{Re}(p_k^H g_k(\theta_k))}$
  - 6:      $\theta_{k+1} \leftarrow \theta_k + a_k p_k$
  - 7:      $g_{k+1} \leftarrow \mathcal{A}'_\theta(U, W, \theta_{k+1}) + \alpha_{TV} \mathcal{R}'_\theta(\theta_{k+1})$
  - 8:      $b_k \leftarrow \max \left\{ \frac{\operatorname{Re}(g_k^H (g_k - g_{k-1}))}{\operatorname{Re}(g_{k-1}^H g_{k-1})}, 0 \right\}$
  - 9:      $p_{k+1} \leftarrow -g_{k+1} + b_k p_k$
  - 10:     $k \leftarrow k + 1$
  - 11: **end while**
  - 12: **return**  $\theta_f$
- 

## 3.4 Aspects numériques complémentaires

L'approche du problème d'identification pour l'ERM présentée dans ce chapitre se décompose en deux résolutions successives : un champ de déplacement, discrétisé sur un maillage fixe, pour des propriétés données, discrétisées sur un maillage identique ou plus grossier, est dans un premier temps recherché. Celui-ci permet l'optimisation des propriétés au travers de la résolution d'un problème inverse, où l'objectif est le minimum d'une fonctionnelle décrivant l'écart entre le champ calculé et le champ mesuré. D'autres éléments relatifs à l'algorithme *subzone NLI*, jusque là non-introduits bien qu'essentiels dans ces travaux, sont développés dans

cette section. Tout d'abord, une formulation du problème compressible est fournie en extension des développements analytiques précédents. Ensuite, la stratégie de filtrage spatial associée à une régularisation « douce », essentielle pour la cohérence des reconstructions produites par l'algorithme, est présentée. Enfin, une étude comparative du surplus en coût de calcul apporté par l'approche AFC est réalisée.

### 3.4.1 Compressibilité

L'approche du problème d'identification développée dans ce chapitre rend compte d'un formalisme en quasi-incompressibilité largement adapté, utilisé et éprouvé dans les applications *in vivo* en ERM. Cependant, une formulation compressible du problème d'identification n'apporte que des modifications mineures dans la stratégie adoptée et permet d'élargir le champ d'application à d'autres classes de matériaux, souvent utilisés pour fabriquer des fantômes comme présentés et reconstruits dans les chapitres 2 et 4, respectivement. Cette sous-section reprend les formalismes développés dans ce chapitre pour décrire l'intégration de la compressibilité dans l'algorithme *subzone NLI*.

La forme forte des équations du problème de référence en viscoélasticité linéaire compressible reprend l'équation d'équilibre local (3.1), la relation de comportement (3.2) et la condition de Dirichlet (3.4), tel que :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot [\lambda(\underline{\nabla}\vec{u} : \underline{\mathbb{I}})\underline{\mathbb{I}} + G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u})] = -\omega^2\rho\vec{u} & \text{sur } \Omega \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.61)$$

Le problème de référence compressible ne contenant pas de termes de pression, les champs de vecteurs déplacement constituent les inconnues du PD. En introduisant un champ adjoint uniquement composé du déplacement test  $\vec{w}$  et procédant à une intégration par parties, la forme variationnelle du problème compressible  $\mathcal{A}^c$  est auto-adjointe et s'écrit :

$$\mathcal{A}^c(\vec{w}, \vec{u}(\theta^c); \theta^c) = \int_{\Omega} ([G(\underline{\nabla}\vec{u} + \underline{\nabla}^T\vec{u}) + \lambda(\underline{\nabla}\vec{u} : \underline{\mathbb{I}})\underline{\mathbb{I}}] : \underline{\nabla}\vec{w} - \omega^2\rho\vec{u} \cdot \vec{w}) d\Omega, \quad (3.62)$$

avec  $\theta^c = (G, \lambda, \rho)$  le vecteur groupant les propriétés mécaniques du problème compressible. L'approche par formulation d'une fonction lagrangienne est reconduite tel que :

$$\mathcal{L}^c(\vec{w}, \vec{u}(\theta^c); \theta^c) = \Phi(\vec{u}(\theta^c)) + \mathcal{A}^c(\vec{w}, \vec{u}(\theta^c); \theta^c) + \alpha_{TV}\mathcal{R}(\theta^c). \quad (3.63)$$

Le problème d'identification consiste à nouveau à résoudre les différentes conditions d'optimalité. Le problème en équilibre du cas compressible s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{u}) + \lambda(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})] - \omega^2\rho\vec{u}) \cdot \delta\vec{w} \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma} [G(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{u}) + \lambda(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})] \cdot \delta\vec{w} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

De même, le problème de mesure compressible s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\vec{\nabla} \cdot [G(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{w}) + \lambda(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})] - \omega^2\rho\vec{w} - \overline{(\vec{u} - \vec{u}_m)}) \cdot \delta\vec{u} \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma} [G(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{w}) + \lambda(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})] \cdot \delta\vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La formulation couplant le problème en force (3.64) et le problème de mesure (3.65) permet de faire disparaître la CL du problème en équilibre et les espaces des fonctions spatiales sont identiques aux composantes cinématiques des espaces définis par (3.42). Le système d'équations d'Euler-Lagrange couplant les problèmes et l'unique CL en  $\vec{w}$  s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \vec{u} - [\vec{\nabla} \cdot (G(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{w}) + \lambda(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})) + \omega^2\rho\vec{w}] = \overline{\vec{u}_m} & \text{sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot (G(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{u}) + \lambda(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})) + \omega^2\rho\vec{u} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{w} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.66)$$

Ces équations sont discrétisées, ce qui donne le système linéaire bloc du problème compressible :

$$[\mathbf{A}^c]\{\mathbf{x}^c\} = \{\mathbf{f}_A^c\}, \quad (3.67)$$

avec la matrice hermitienne :

$$[\mathbf{A}^c] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & [\mathbf{K}^c]^H - \omega^2[\mathbf{M}]^H \\ [[\mathbf{K}^c] - \omega^2[\mathbf{M}]] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

le vecteur d'inconnues aux fonctions spatiales :

$$\{\mathbf{x}^c\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_A\} \\ \{\mathbf{w}_A\} \end{Bmatrix}, \quad (3.69)$$

et le second membre :

$$\{\mathbf{f}_A^c\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_m\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.70)$$

avec  $[\mathbf{K}^c]$  la matrice de rigidité compressible. Cette approche du problème direct est très semblable à celle en quasi-incompressible, donnée dans sa forme discrétisée

par (3.44), avec comme différences (i) une formulation de la rigidité incluant le paramètre  $\lambda$  dans son terme diagonal compensant (ii) la suppression des équations de pression, allégeant sensiblement le problème. La procédure algorithmique de cette approche peut donc être adaptée à partir du pseudo-code 2.

Dans la pratique, contrairement au problème quasi-incompressible où seule l'identification de  $G$  est généralement réalisée, le problème compressible procède à l'identification de  $(\lambda, G)$ . En effet, même si le premier paramètre de Lamé demeure être un bio-marqueur généralement moins pertinent, son identification relaxe celle du second paramètre et joue donc indirectement un rôle de régularisation. Dans la fonctionnelle (3.62), le module  $\lambda$  est linéaire par rapport aux gradients de déplacement, tout comme l'est le module  $G$ . La composante  $g_G$  du vecteur gradient  $g_{\theta^c}$  est donnée par (3.54), tandis que la composante  $g_\lambda$  s'écrit :

$$g_\lambda = \int_{\Omega} ((\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} : \underline{\underline{\mathbb{I}}})(\underline{\underline{\nabla}}\vec{w} : \underline{\underline{\mathbb{I}}}) + r_\varphi(\lambda)) d\Omega. \quad (3.71)$$

L'identification peut être effectuée avec la méthode du GC précédemment détaillée. Comme pour le PD, le pseudo-code 3 s'applique dans le calcul des propriétés avec l'approche compressible.

### 3.4.2 Filtrage spatial

La stabilité de la méthode *subzone NLI* est assurée par la sur-abondance de points de reconstruction grâce à la superposition des zones, couplée à un filtrage spatial (FS) des reconstructions [Van Houten et al., 1999]. Le FS consiste à limiter les variations des propriétés matérielles dans l'espace. Le lissage de ces variations permet de limiter les aberrations d'identification causées par un faible SNR, mais adoucit localement les discontinuités à la frontière entre les éventuelles hétérogénéités du tissu. Cette régularisation pénalise sans distinction et est par conséquent qualifiée de « douce », par contraste avec les méthodes s'adaptant aux hétérogénéités comme la variation totale, définie dans (3.21). Le FS remplace chaque propriété par une valeur intégrant les propriétés avoisinantes [McGarry et al., 2013]. Un point de propriété matérielle  $i$  est associé à une région  $R_i$  tel que si  $R_i = \emptyset$ , alors le point  $i$  n'est associé à aucune région et le FS n'est pas appliqué. La superposition des zones permet d'augmenter le nombre de points du filtrage et s'avère être une source de stabilisation globale conséquente. Un opérateur de convolution contenant un noyau de lissage gaussien définit le calcul du FS tel que la propriété  $\theta$  en un point après

transformation donne :

$$\theta_{f_s}(i) = \frac{1}{S_{f_s}} \sum_{j=1}^{N_n} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r_{ij}}{\sigma_{f_s}} \right)^2} \theta(j), \quad (3.72)$$

avec  $\sigma_{f_s}$  la largeur du filtre gaussien,  $r_{ij}$  la distance entre le point de propriété matérielle  $j$  et le point  $i$ ,  $N_n$  le nombre de points de propriétés matérielles avoisinantes, et  $S_{f_s}$  la pondération. Le critère de sélection des points considérés dans le filtre impose la condition :

$$r_{ij} < 3\sigma_{f_s} \quad (3.73)$$

La largeur du filtre est le paramètre qui pilote le niveau de filtrage. La figure 3.2 illustre l'intérêt du FS dans les reconstructions pour un exemple numérique simple (dont une présentation détaillée est donné au chapitre 4). Un faible filtrage s'avère robuste pour détecter les hétérogénéités, mais conserve une erreur moyenne élevée et une importante variabilité des modules identifiés entre des points voisins. A l'inverse, un fort filtrage lisse la solution et efface ainsi les hétérogénéités de faible taille au détriment d'une détection des interfaces matérielles « émoussée ».

### 3.4.3 Coûts de calcul

Une grande partie du chapitre 4 présente un comparatif des performances de reconstructions obtenues à l'aide de l'algorithme *subzone NLI* dans les deux configurations du PD développées à la section 3.2. Si l'objectif de l'introduction de la formulation AFC est de réduire la sensibilité à l'erreur de mesure, cela requiert une résolution couplée des champs recherchés par le PD. Dans l'autre cas, la formulation DFC repose sur deux résolutions successives : le problème d'équilibre puis le problème de mesure. Les tailles des matrices utilisées pour ces deux approches conditionnent le temps nécessaire à la réalisation des différentes étapes pour leur inversion (construction, analyse, factorisation, résolution). La résolution du reste du problème d'identification, comme la descente de gradient ou le filtrage spatial sur les sous-zones, n'est pas étudiée, car elle ne varie pas de manière significative entre DFC et AFC, les deux méthodes utilisant des champs de tailles identiques et les fonctionnelles de convexité *a priori* similaire. La taille du PD est directement associée aux nombres d'inconnues de degrés de libertés du champ principal ( $\vec{u}$  et  $p$ ),

Bien que les deux problèmes résolus par DFC soient différents, les équations aux dérivées partielles sous-jacentes sont autoadjointes dans le cas viscoélastique, amenant à une unique matrice de discrétisation et une seule décomposition LU. En

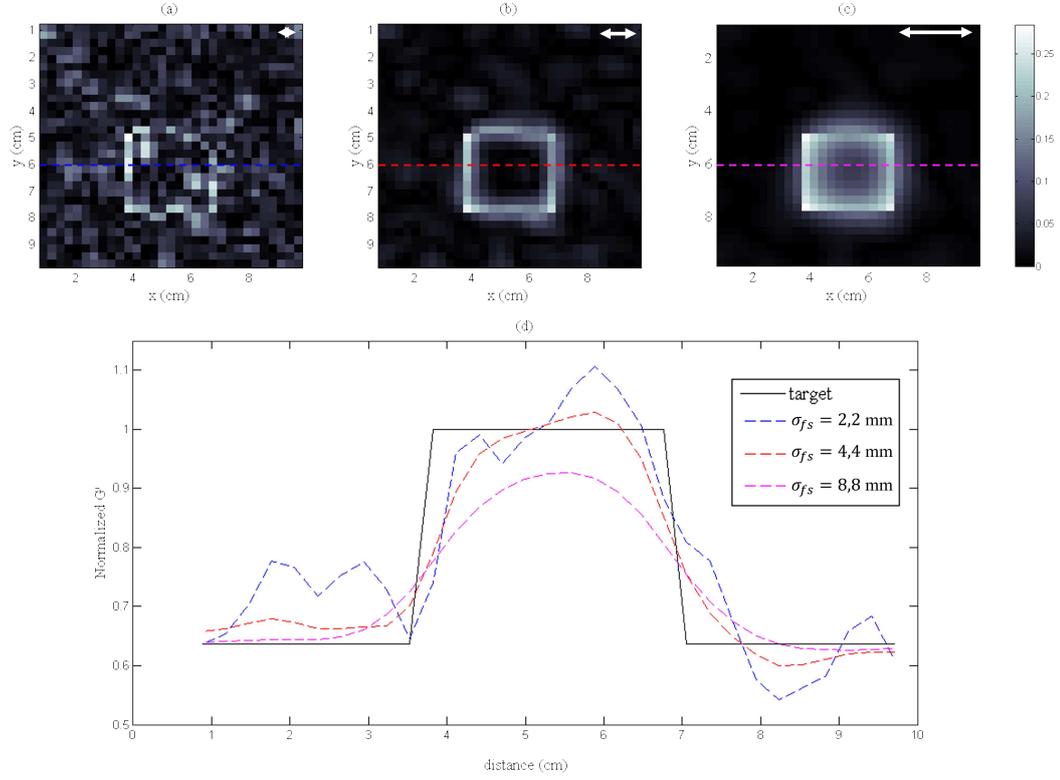


FIGURE 3.2 – Coupes représentatives des erreurs de reconstruction du module  $G'$  normalisé d'un modèle numérique bi-matériaux pour différentes tailles de filtre  $\sigma_{fs}$  : sous-dimensionné (a), standard (b) et sur-dimensionné (c). La portée approximative de la région de sélection pour les différents cas est indiquée par la double flèche blanche (en haut à droite des coupes). Les poids des filtres sont données en légende de la représentation d'une ligne représentative des 3 reconstructions considérées incluant la cible (d).

utilisant une substitution de Gauss, les coûts de calcul du problème adjoint sont principalement liés à l'étape de factorisation. Pour la matrice DFC, carrée, définie par (3.36), de taille  $n \times n$  avec une largeur de bande  $b_D$ , il est établi que le coût de la factorisation est de l'ordre  $\mathcal{O}(b_D^2 n)$  [Oberai et al., 2004]. Dans la formulation quasi-incompressible couplant les déplacements et les pressions, l'assemblage de la matrice et l'emplacement des CL substituées influe sur la factorisation de la matrice. La figure 3.3 montre l'aspect des matrices pour de petits maillages et laisse deviner la difficulté de prédire avec précision la largeur de bande de la matrice après factorisation. Par défaut, la largeur de bande de la matrice DFC est fixé à  $b_D = n^{\alpha_D}$  avec  $\alpha_D \in [0, 1]$  un paramètre qualifiant le taux de remplissage de la matrice DFC. De son

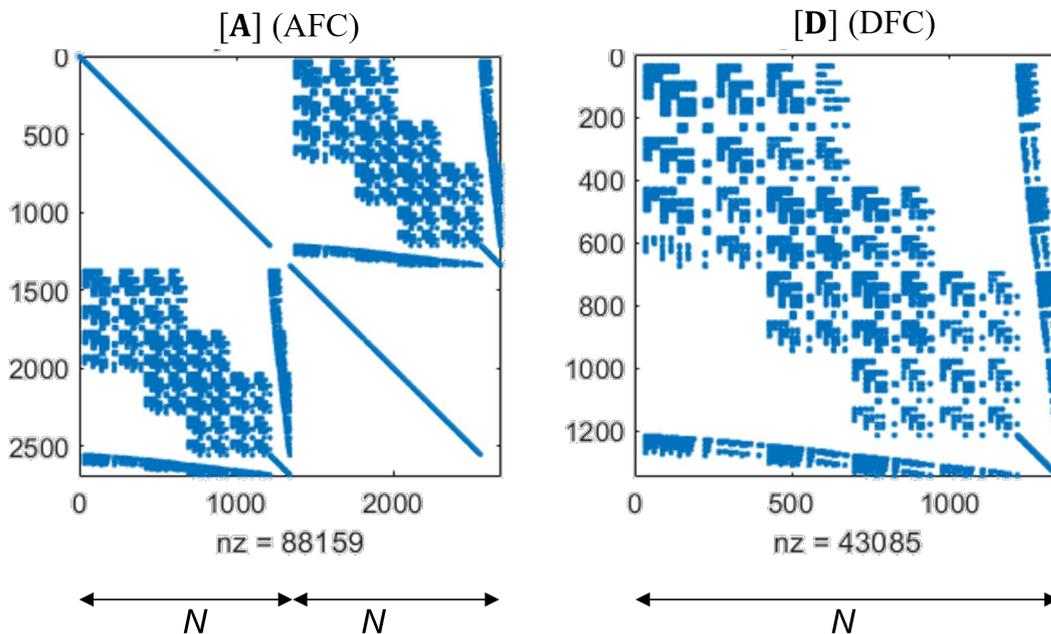


FIGURE 3.3 – Représentation des matrices carrées creuses AFC (gauche) et DFC (droite) après leur assemblage et substitution des CL, pour un même problème avec  $N = 1343$  degrés de liberté, soit 32 éléments. Les bandes globalement diagonales sont les valeurs de matrices associées aux champs de déplacements ou aux CL, alors que les bandes verticales et horizontales sont liées aux champs de pressions.  $nz$  : nombre de valeurs non-nulles.

côté, la formulation AFC inclut tous les champs et double par conséquent la taille de sa matrice qui vaut  $2n \times 2n$ . Suivant le même principe, le coût de calcul est de l'ordre de  $\mathcal{O}(2b_A^2 n)$ , avec la largeur de bande  $b_A = (2n)^{\alpha_A}$  à nouveau donnée par  $\alpha_A \in [0, 1]$ .

Le temps de calcul associé au PD prend en compte plusieurs des étapes présentées dans les algorithmes DFC (1) et AFC (2). Parmi celles-ci figurent l'initialisation des matrices, le remplissage, la préparation, l'analyse, la factorisation et la (les) résolution(s), et la redistribution des champs résolus vers les structures utilisées pour le calcul du PI. L'étude du surplus de coût de calcul généré par la méthode AFC est réalisée en mesurant le temps nécessaire à toutes ces étapes selon un nombre de degrés de liberté  $N$ , équivalent à la taille de la matrice DFC et la moitié de la matrice AFC, variant entre  $N = 500$  et  $N = 7500$ . Les temps de calcul sont associés à une loi de puissance basée sur le paramètre de largeur de bande. La figure 3.4

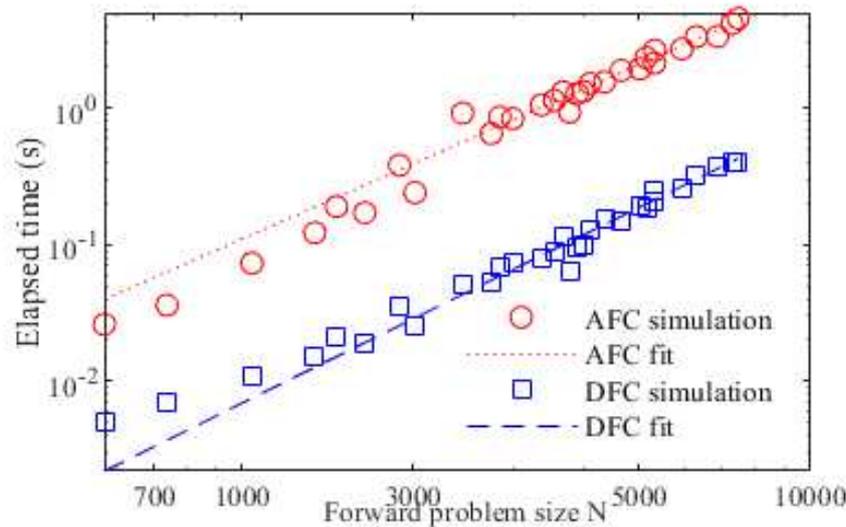


FIGURE 3.4 – Temps de calcul du PD défini par le nombre d’inconnues dans les formulations DFC et AFC. Une régression par une loi puissance basée sur la largeur de bande est associé à chaque formulation avec une bonne précision ( $R^2 > 0.98$ ).

montre que la loi puissance proposée est bien cohérente pour décrire l’évolution du temps de calcul en fonction de la taille du problème pour les 2 approches, avec  $R^2 > 0.98$ . Pour des tailles de problèmes courantes, le temps de calcul de la formulation AFC est environ 10 fois plus long que celui de la formulation DFC. Les coefficients de la puissance valent respectivement  $\alpha_A = 0.41$  et  $\alpha_D = 0.53$ . Ce résultat manifeste une différence dans le taux de remplissage des matrices : celle de l’AFC, bien que plus grande, est plus creuse ( $\alpha_A > \alpha_D$ ) et donc moins sensible à l’augmentation du nombre de degrés de libertés.

### 3.5 Synthèse

Ce chapitre développe le problème d’identification par la méthode du champ adjoint pour l’élastographie par résonance magnétique associé à l’algorithme *sub-zone NLI*. Les équations aux dérivées partielles gouvernant un modèle viscoélastique quasi-incompressible sont introduites au travers d’un Lagrangien. Dans un premier temps, le problème direct vise à déterminer des champs de déplacement et de pression pour un champ de propriétés donné. Deux formalismes sont présentés : l’approche DFC, qui valorise la forme autoadjointe du lagrangien pour calculer successi-

vement le champ principal  $(\vec{u}, p)$  et le champ adjoint  $(\vec{w}, q)$ , et la méthode AFC, qui couple les équations relatives aux deux champs. Cette deuxième méthode a l'avantage de ne pas inclure de conditions aux limites, biaisées par l'erreur de mesure, dans sa procédure. L'approche AFC du problème viscoélastique compressible est également traitée en établissant un parallèle avec la formulation quasi-incompressible. La régularisation est traitée au travers d'une pénalisation directe au moyen d'un terme de variation totale introduit dans le problème adjoint partout sur l'ensemble du domaine, puis d'une pénalisation douce avec le filtrage spatial des propriétés identifiées lors de la phase d'assemblage des identifications par maillages matériel de zones vers celles du maillage matériel global. Des éléments relatifs à la méthode de descente de gradient et aux approches utilisées sont également introduits. Par ailleurs, les algorithmes clés de la méthode sont synthétisés sous la forme de pseudo-codes.

La résolution des champs couplés en une seule opération augmente le temps de calcul du PD sans affecter les autres opérations. L'étude indique que le temps de procédure peut être estimé à partir de la largeur de bande associée à la matrice à inverser. Il est établi par ces travaux que la méthode AFC allonge d'environ 10 fois le temps de calcul du problème direct. Les temps requis aux autres opérations sont inchangés, comme par exemple celui du problème inverse, lié à la taille du maillage matériel et au nombre d'itérations du GC, de l'algorithme demeurent inchangés. Le problème direct représentant 5 à 20 % du temps de calcul global dans des configurations courantes, il est estimé qu'une identification globale par AFC est 1.5 à 2.5 fois plus longue que par DFC.

La méthode en élasticité linéaire et contraintes planes a été démontrée et testée sur des données simulées et issues de fantômes [Seidl et al., 2019]. Le développement et l'implémentation algorithmique en viscoélasticité linéaire quasi-incompressible n'avait *a priori* pas été exploré. En complément du temps de calcul, le chapitre 4 explore plus en détail les points de comparaisons des méthodes DFC et AFC.

# Chapitre 4

## Applications vers la reconstruction des paramètres mécaniques

Ce chapitre présente des reconstructions réalisées à l'aide de l'algorithme *subzone NLI*. Ces reconstructions ont pour objectifs la validation, l'analyse et l'application des méthodes présentées aux chapitres 2 et 3. Un large spectre de données de l'ERM est utilisé pour atteindre ces objectifs. Tout d'abord, un modèle numérique à géométrie simple est développé pour valider, comparer et évaluer l'approche de résolution couplée des champs du problème direct de l'algorithme d'identification développée au chapitre 3. Ce modèle est développé dans l'optique de piloter une variété de paramètres essentiels dans l'identification en ERM. Ensuite, des reconstructions des propriétés sur des matériaux fantômes évaluent la capacité du dispositif expérimental et du processus numérique développés au chapitre 2. Pour finir, l'intérêt et l'apport pratique de l'application de la nouvelle méthode sont explorés sur des données de cerveau *in vivo*. Les bénéfices de la méthode sont discutés et permettent de proposer une nouvelle stratégie de gestion des régularisations.

### 4.1 Données simulées

Cette section présente des travaux de reconstructions sur des données issues de simulations numériques, dites *in-silico*. Un modèle éléments finis reproduisant des données cinématiques harmoniques, viscoélastiques, 3D et inspirées de l'ERM, est d'abord détaillé. L'objectif est d'évaluer la formulation AFC (*adjoint field condition*) introduite précédemment à la section 3.2.3 au regard de trois paramètres clés dans la méthode d'identification, détaillés à la section 1.4.5 : le rapport signal-bruit (SNR),

la résolution spatiale des zones (ROZ) et l'initialisation des paramètres mécaniques. Le processus de génération de données et le pilotage des biais du modèle sont d'abord détaillés, puis des comparatifs de reconstructions sont présentés et discutés.

### 4.1.1 Modèle *in silico*

#### 4.1.1.1 Géométrie et comportement

Un modèle hétérogène, décrit à la figure 4.1, associé à un solide dont la géométrie 3D est relativement simple est ici développé. Celui-ci correspond à un bloc cubique de 10 cm de côté, appelé “matrice” par la suite. Celle-ci contient un autre bloc cubique plus raide, appelé “inclusion”, de 3 cm de côté légèrement décentrée de [0,1,-1] cm par rapport au centre de la matrice. Afin de générer des ondes de cisaillement multi-directionnelles réparties de manière plutôt homogène dans tout le volume, un déplacement tangentiel, uni-axial et harmonique est imposé sur toutes les faces externes de la matrice. L'amplitude du déplacement est de 1  $\mu\text{m}$  et la fréquence d'activation est fixée à 70 Hz. Ces déplacements imposés étant constants par face, ils présentent une discontinuité au niveau des arêtes, partagées par ces faces. L'effet de cette incompatibilité est cependant minoré par le rognage des points extérieurs, décrit par la suite, pour les besoins de l'identification.

La matrice et l'inclusion sont modélisées par un milieu homogène isotrope et un comportement viscoélastique linéaire quasi-incompressible piloté par leur modules complexes de cisaillement  $G$  et le module de compressibilité  $K$ . Pour simplifier les interprétations, les propriétés matérielles seront par la suite traitées avec le couple de paramètres introduits à la section 1.1.3. Ceux-ci sont définis par :

$$\mu = \frac{2|G|^2}{G' + |G|} \text{ et } \xi = \frac{G''}{2G'}, \quad (4.1)$$

avec  $\mu$  le module de cisaillement dynamique réel, associé à l'onde de cisaillement, et  $\xi$  le taux d'amortissement viscoélastique. Les propriétés cibles de la matrice sont  $\mu_{\text{ref}}^{\text{M}} = 3 \text{ kPa}$  et  $\xi_{\text{ref}}^{\text{M}} = 20 \%$ . Le jeu de propriétés de l'inclusion est fixé à  $\mu_{\text{ref}}^{\text{I}} = 1.5\mu_{\text{ref}}^{\text{M}} = 4.5 \text{ kPa}$  et  $\xi_{\text{ref}}^{\text{I}} = 0.75\xi_{\text{ref}}^{\text{M}} = 15 \%$ . La quasi-incompressibilité de la matrice et de l'inclusion est posée à l'aide d'un coefficient de Poisson vérifiant  $\nu = 0.495$ . Enfin, la masse volumique est homogène et vaut  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . La figure 4.1 synthétise cette description du modèle.

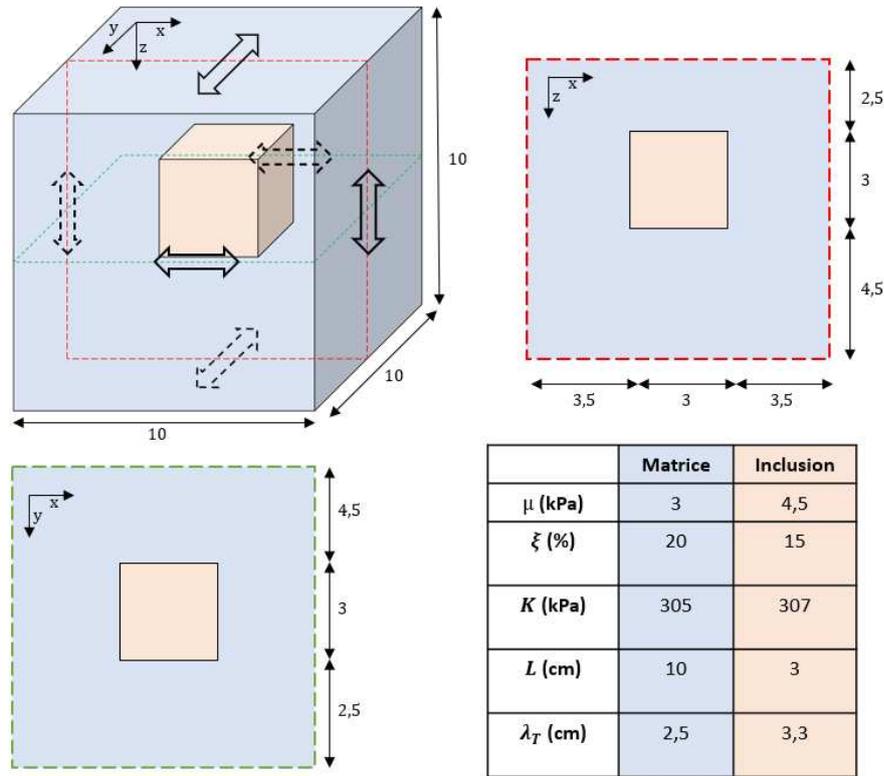


FIGURE 4.1 – Détails de la géométrie et des paramètres des matériaux du modèle numérique. Les doubles flèches indiquent la direction de la sollicitation harmonique imposée en déplacement sur chaque face externe. Les cotes sont données en cm.

#### 4.1.1.2 Simulation des mesures

Trois étapes définissent la génération des données associées à des “mesures numériques” qui feront l’objet des reconstructions :

1. Le modèle est implémenté sur un maillage EF, associé aux propriétés cibles, et les déplacements sont générés par un calcul direct utilisant le solveur en stationnaire de *Comsol Multiphysics* suivant une formulation quasi-incompressible. Le maillage discrétisant le problème est composé d’environ  $10^5$  éléments tétraédriques quadratiques (TET10) qui a fait au préalable l’objet d’une étude de convergence de maillage.
2. Les déplacements simulés sont interpolés quadratiquement sur une grille régulière non-isotrope, qui est utilisée pour construire le maillage de reconstruction, plus grossier que celui du calcul direct. Ce maillage se compose de 6720 élé-

ments hexaédriques quadratiques (HEX27). La taille des voxels ainsi formés varie entre 2 et 3 mm, soit une résolution d'un même ordre de grandeur à celle issue d'une acquisition IRM. Les grilles des déplacements interpolés sont transférées vers *Matlab* pour pré-traitement des données de reconstruction.

3. Les déplacements interpolés sont perturbés par un bruit aléatoire. Pour cela, une approche de perturbation cohérente vis-à-vis de l'origine expérimentale des données est développée [Guenther and Kozerke, 2018]. Celle-ci dissocie les composantes réelles et imaginaires du déplacement, qui subissent chacune une perturbation non-corrélée mais de distribution identique. Pour la  $k$ -ème composante du déplacement  $\tilde{u}_k = \tilde{u}'_k + i\tilde{u}''_k$ ,  $\delta\tilde{u}'_k$  et  $\delta\tilde{u}''_k$  sont respectivement les composantes réelle et imaginaire de la perturbation. Le champ de déplacement associé à la mesure de la  $k$ -ème composante  $\hat{u}_k$  est alors définie par :

$$\hat{u}_k = \tilde{u}'_k + \delta\tilde{u}'_k + i(\tilde{u}''_k + \delta\tilde{u}''_k). \quad (4.2)$$

Les perturbations sont données par une distribution normale :

$$\delta\tilde{u}'_k = \max(\tilde{u}') \frac{\text{SNR}_m}{\sqrt{2}} r_k \text{ and } \delta\tilde{u}''_k = \max(\tilde{u}'') \frac{\text{SNR}_m}{\sqrt{2}} q_k, \quad (4.3)$$

où  $r_k$  et  $q_k$  sont des variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite, et  $\text{SNR}_m$  un rapport de signal-sur-bruit basé sur la valeur absolue maximale du champ de déplacement. Il est essentiel d'observer que dans la plupart des études de l'ERM incluant des données simulées, le pourcentage de SNR simulé est basé sur la valeur moyenne du déplacement, limitant l'intérêt de comparaison directe avec d'autres travaux du niveau de bruit [Sinkus et al., 2005; McGarry et al., 2021]. Une telle définition du SNR en régime harmonique est d'ailleurs discutable, la moyenne pouvant être proche d'une valeur nulle.

La figure 4.2 illustre les étapes de simulation des mesures numériques. La métrique évaluant le niveau de bruit est l'OSS-SNR, tel que :

$$\text{OSS-SNR} = \frac{\overline{\text{OSS}(\hat{u})}}{\overline{\text{OSS}(\delta\tilde{u})}}. \quad (4.4)$$

Il est important de signaler que ce processus de calcul du SNR et d'application du bruit diffère de celui qui est effectué sur des données courantes en ERM, présenté à la section 1.4.3. En effet, dans la pratique, la perturbation est souvent associée au résidu entre le champ mesuré par IRM et sa première composante harmonique. Dans le modèle présenté ici, la comparaison de valeur absolue de l'OSS-SNR avec d'autres études doit être pondérée.

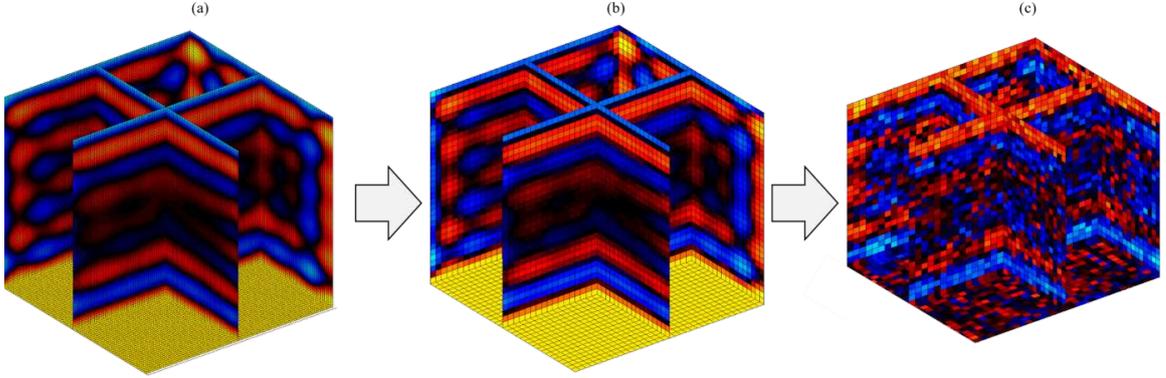


FIGURE 4.2 – Chaîne de génération des mesures numériques illustrée par des représentations 3D d’une composante du déplacement. Les déplacements solutions d’un calcul par EF (a) sont interpolés quadratiquement vers une grille régulière (b) avant l’application d’un masque rognant les points extérieurs et l’ajout de perturbations artificielles parasitant la mesure (c).

#### 4.1.1.3 Paramétrage général des reconstructions

Le maillage utilisé pour la reconstruction est formé à partir des mesures et se définit donc par une résolution isotrope entre chaque noeuds de  $2.94 \times 2.94 \times 2.94 \text{ mm}^3$ . Dans cette étude, le maillage sur lequel est effectuée l’identification matérielle est identique au maillage de calcul des déplacements. Les propriétés sont donc associées à des éléments hexaédriques linéaires (HEX8) isotropes de  $2.94 \times 2.94 \times 2.94 \text{ mm}^3$  côté. La taille des zones  $L_Z$  est un paramètre de l’étude et varie selon les sous-sections. La superposition des zones est d’environ 15 %. Le nombre total de degrés de liberté est de l’ordre de  $10^6$ . Dans l’ensemble des reconstructions, le paramétrage lié à la descente de gradient présenté à la section 3.3.2 est limité à 3 itérations de GC. La régularisation par variation totale  $\alpha_{TV}$  n’est pas activée et le filtre spatial  $\sigma_{fs}$  vaut 4.4 mm. La convergence globale de l’algorithme est assurée par un maximum de 100 itérations et une variation relative des propriétés identifiées maximale de 0.1 %. Les reconstructions sont effectuées en parallélisation sur le serveur *Beluga* de l’*Alliance de recherche numérique du Canada*, sur 48 ou 96 processeurs durant 1 à 2 heures selon la configuration spatiale et la formulation abordée.

Dans les reconstructions considérées, les modules  $\mu$  et  $\xi$  sont mis à jour itérativement à partir des reconstructions de  $G'$  et  $G''$ . La qualité des reconstructions de ces

modules est évaluée par une erreur normalisée au sens de la méthode des moindres carrés (NRMSE) définie par :

$$\text{NRMSE}_X = \frac{\|X - X_{ref}\|}{\|X_{ref}\|}, \quad (4.5)$$

avec  $X$  le module reconstruit,  $X_{ref}$  le module de référence et  $\|X\|$  la norme  $L^2$  de  $X$ .

Les sous-sections suivantes présentent un comparatif multi-paramétrique des méthodes DFC et AFC. L'objectif est d'explorer l'influence des paramètres clés de l'identification par sous-domaines, introduits à la section 1.4.5. Parmi ces paramètres figurent le bruit au travers de l'OSS-SNR, la résolution spatiale par le ROZ, rapport entre la longueur d'onde dans la matrice  $\lambda^M$  et la taille de zone  $L_z$ , et le couple de paramètres viscoélastiques initiaux  $(\mu_0, \xi_0)$ . L'application numérique de l'équation (1.17), déterminant la longueur de l'onde de cisaillement de la matrice, donne  $\lambda^M = 2.47$  cm, ce qui permet de piloter le ROZ à partir de la définition de  $L_z$ . A l'état initial, le domaine est homogène et piloté par le couple de paramètres initiaux  $(\mu_0, \xi_0)$ . Si le module  $\mu_0$  varie selon les applications, car il est l'un des paramètres de l'étude, l'amortissement initial de l'ensemble des reconstructions à venir est fixé par  $\xi_0 = 0.9\xi_{ref}^M$ .

Dans cette section, les reconstructions sont illustrées sous différents formats selon le résultat considéré. Les représentations 1D (ligne représentative, cf figure 4.6) et 2D (coupes d'intérêt, cf figure 4.3) permettent de partiellement illustrer la sensibilité à l'hétérogénéité de l'identification en fournissant un résultat qui rend compte de la géométrie du modèle. Les représentations qui contiennent l'intégralité des points reconstruits se concentrent sur leurs profils de distributions. Ainsi, une représentation en diagramme violons des données inclut tous les points sous forme de dispersion, superposé avec un histogramme lissé (vertical) des données et un diagramme en forme de boîte à moustaches affichant la médiane, les quartiles inférieur et supérieur, et les extremums de la distribution (cf figures 4.5, 4.7 et 4.21) [Bechtold, 2021].

## 4.1.2 Sensibilité au bruit

### 4.1.2.1 Paramétrage de l'étude

En plus du paramétrage général présenté à la section précédente, cette première étude traite 180 jeux de mesures définies pour des OSS-SNR allant de 1.28 à 14.

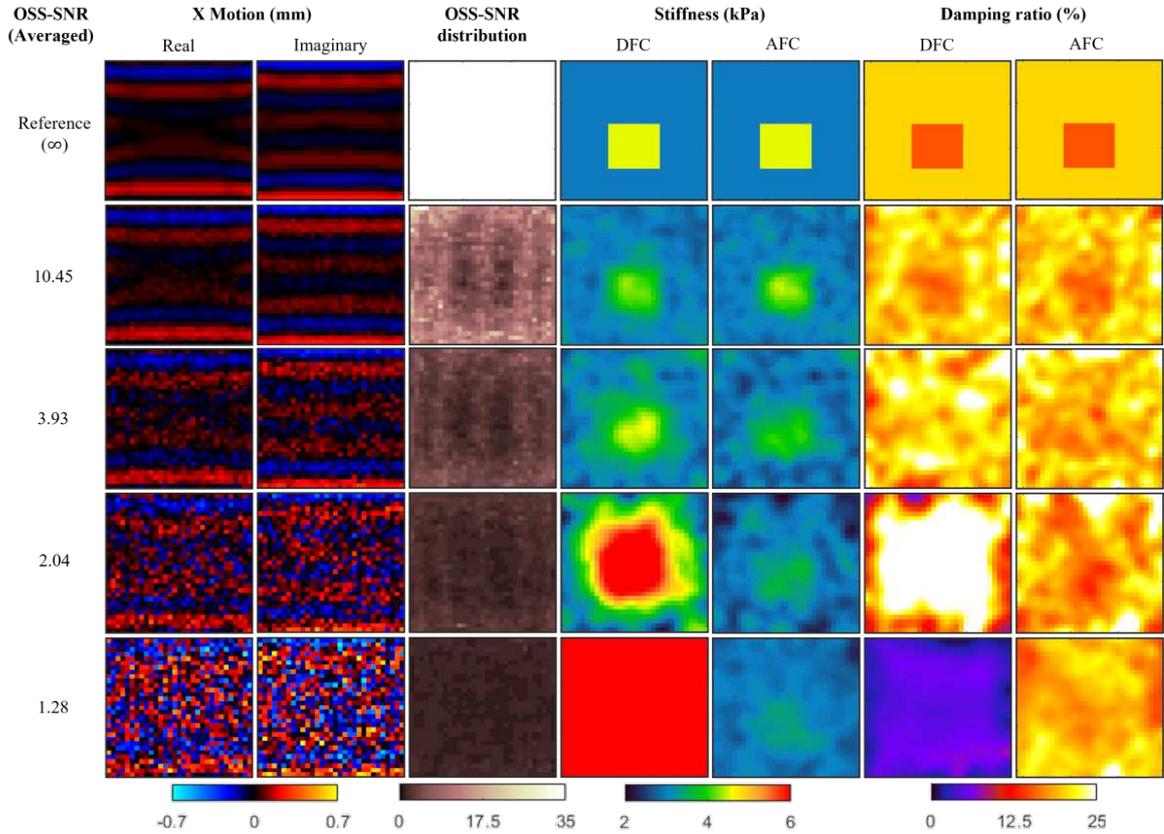


FIGURE 4.3 – Coupes représentatives des parties réelles et imaginaires de la première composante du champ de déplacement, de la distribution de l’OSS-SNR, des reconstructions du module de cisaillement et d’amortissement pour les formulations DFC et AFC. Les valeurs de références pour 4 niveaux d’OSS-SNR moyens sont tirées.

La rigidité initiale est donnée par  $\mu_0/\mu_{ref}^M = 1$  et la taille de zone est fixée par  $\lambda^M/L_Z = 1$ , soit  $L_Z = 2.47$  cm.

#### 4.1.2.2 Évaluation qualitative

Tout d’abord, la figure 4.3 présente un aperçu qualitatif des identifications pour 4 niveaux différents de bruit dans une tranche représentative contenant l’inclusion. Pour de bas niveaux de bruits (hauts niveaux d’OSS-SNR), les propriétés ciblées sont correctement retrouvés par les méthodes DFC et AFC, sans distinction nette entre les 2 approches. Pour de plus haut niveaux de bruits, la forme du champ de

déplacements caractéristique de l'onde de cisaillement devient difficile à visualiser. La perte de signal affecte l'OSS-SNR et la qualité des reconstructions. Dans une situation fortement bruitée, la méthode DFC surestime la rigidité de cisaillement et sous-estime l'amortissement, associant donc les données détériorées à un milieu homogène, rigide, quasi-élastique. En revanche, la méthode AFC présente des identifications stables autour des valeurs cibles pour l'ensemble des propriétés et des exemples. Il est possible de détecter, de manière plus ou moins évidente, une augmentation locale de la rigidité estimée liée à l'inclusion dans chacun des 4 exemples de la figure. Sur cette tranche représentative, la variance des propriétés matérielles reconstruites par l'approche AFC est plus élevée à l'OSS-SNR de niveau 2.04 qu'à celui de niveau 1.28. Ce constat illustre le fait que l'approche AFC stabilise ses identifications autour d'une valeur globalement correcte, et que la présence de bruit complique avant tout sa capacité à détecter les hétérogénéités.

### 4.1.2.3 Évaluation quantitative

La figure 4.4 montre quantitativement la sensibilité au bruit sur les mesures de déplacement de l'identification des propriétés mécaniques. Les approches DFC et AFC présentent des évaluations satisfaisantes des modules, avec moins de 10 % d'erreur sur  $\mu$  et  $\xi$ , pour un niveau moyen d'OSS-SNR supérieur à 7. Cependant, en deçà de ce seuil, l'erreur d'identification des deux modules par l'approche DFC augmente exponentiellement avec la diminution de l'OSS-SNR, corroborant les résultats du paragraphe précédent qui montraient la sur-estimation de la rigidité de cisaillement et la sous-estimation de l'amortissement. L'erreur NRMSE de l'approche AFC, quant à elle, suit une évolution relativement linéaire par rapport au bruit. Pour un niveau d'OSS-SNR inférieur à 2, l'erreur associée à la méthode AFC décroît même sensiblement. Cette observation peut être associée à la réduction de la variance des identifications précédemment constatée à ces faibles niveaux bruits. Quelque soit le niveau d'OSS-SNR, les erreurs sur  $\mu$  et  $\xi$  par approche AFC sont toujours inférieures à celles par l'approche DFC au seuil de 3, référence pour les méthodes *subzone NLI*. Enfin, l'erreur dans l'identification du module de rigidité de cisaillement avec l'approche AFC est diminuée, car elle est du même ordre de grandeur que l'erreur associée à un module homogène optimal.

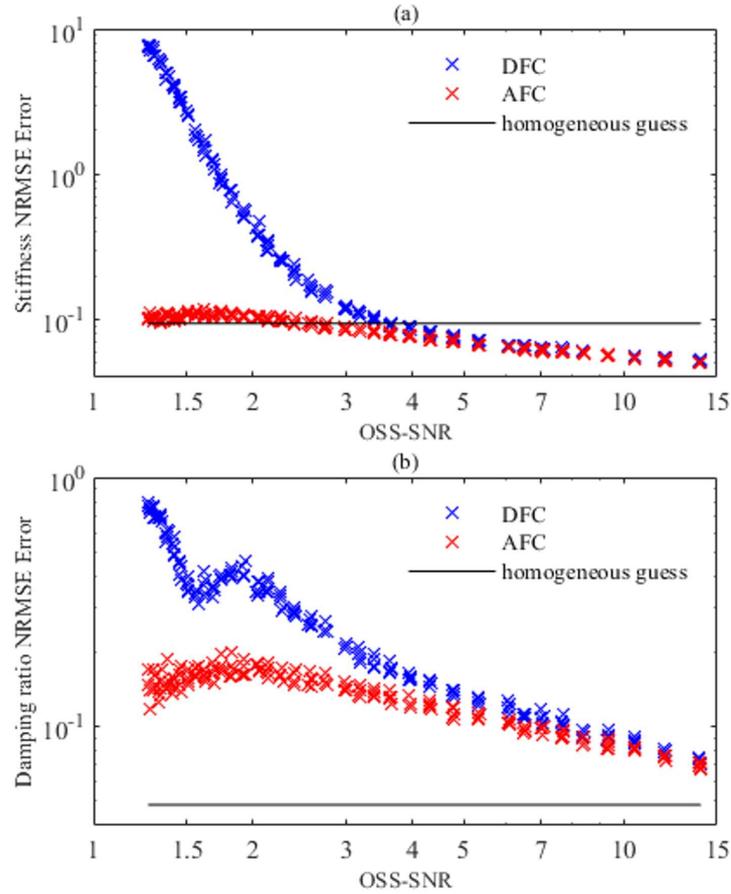


FIGURE 4.4 – Erreur (NRMSE) des reconstructions de la rigidité de cisaillement (a) et de l’amortissement (b) à partir des approches DFC (bleu) et AFC (rouge) pour différents niveaux moyennés d’OSS-SNR. La ligne d’estimation correspond à l’erreur NRMSE en considérant la reconstruction homogène optimale obtenue par un calcul de la fraction volumique des paramètres de matrices et d’inclusions. Le volume de l’inclusion ne représentant que 3.7 % du volume total discrétisé, les valeurs des lignes d’estimation sont fatalement faibles.

### 4.1.3 Effets de la résolution spatiale

#### 4.1.3.1 Paramétrage de l’étude

Cette étude s’intéresse à l’efficacité de l’algorithme par rapport aux tailles de zones à l’aide du ROZ. Pour cela, différents scénarios de situations bruitées sont considérés pour quatre valeurs d’OSS-SNR allant de 1.28 à 10.45. Comme dans l’étude précédente, le module initial est fixé par  $\mu_0/\mu_{ref}^M = 1$ . Deux tailles de sous-

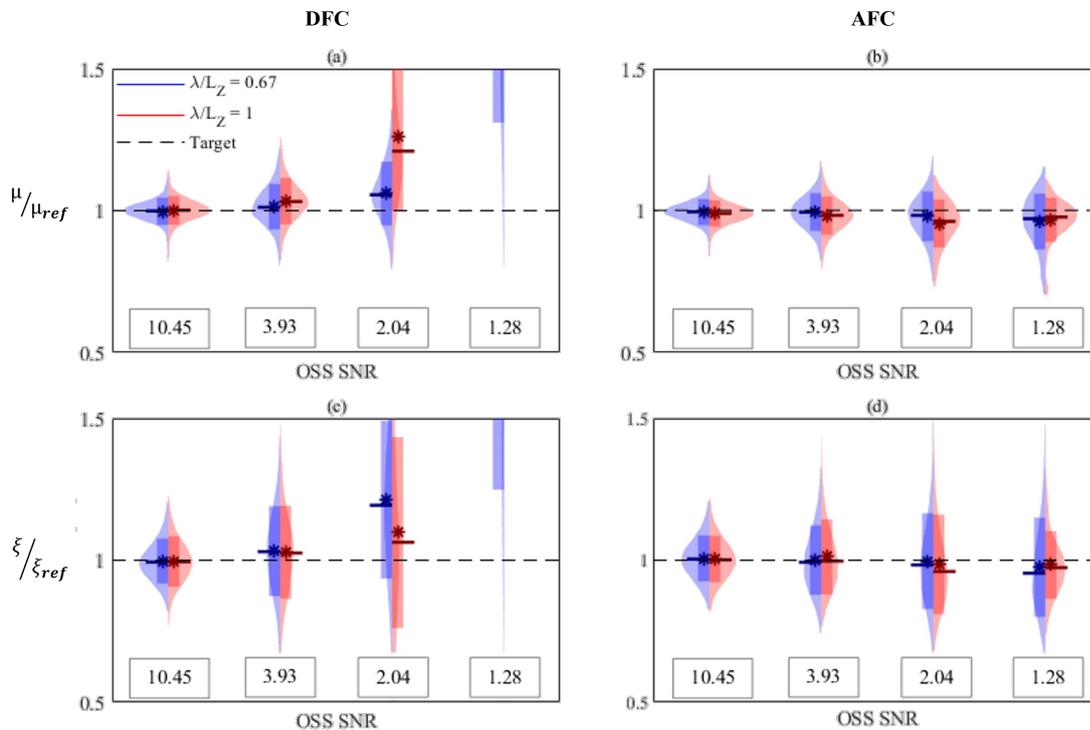


FIGURE 4.5 – Profils de distributions des reconstructions normalisées des rigidités de cisaillement (a,b) et d’amortissement (c,d) pour 4 niveaux d’OSS-SNR et 2 ROZ par approche DFC (a,c) et AFC (b,d). Les distributions des reconstructions des données DFC pour les niveaux d’OSS-SNR 2.04 et 1.28 sortent de la figure.

zones sont considérées, telles que  $\lambda^M/L_Z = [0.67; 1]$ . Dans la pratique, la première valeur de ROZ correspond à une situation bien résolue pour laquelle une quantité importante de l’onde est contenue dans la zone. Le seconde valeur de ROZ est plus commune. La différence liée au temps de calcul relatif au choix des tailles de zones est discutée dans 3.4.3. Les profils de distribution des modules reconstruits sont normalisés par rapport à la valeur cible et représentent la qualité de la reconstruction.

#### 4.1.3.2 Stabilité liée à la taille de zone

La figure 4.5 montre que les reconstructions des propriétés suivent une distribution sensiblement gaussienne. Pour de faibles niveaux de bruit, les deux tailles de zone de l’étude donnent des distributions gaussiennes similaires et ne semblent pas par conséquent limiter la qualité de la reconstruction. Pour l’approche DFC, la taille

de zone a néanmoins un impact dans le cas de données présentant un niveau de bruit conséquent. Pour cette approche, un plus faible rapport signal-bruit conduit à une sur-estimation de la rigidité moyenne et à une variance plus importante des valeurs identifiées. Pour un OSS-SNR égal à 2.04, les reconstructions par DFC sont plus dispersées pour un fort ROZ (donc une plus petite zone), démontrant la sensibilité liée au choix de taille de zone déjà discutée à la section 1.4.5. En revanche, l'approche AFC demeure relativement stable autour de la valeur cible, avec une valeur moyenne sous-estimant légèrement la référence ( $< 10\%$ ) pour  $\mu$  et  $\xi$  dans les configurations à fort niveau de bruit. Les distributions pour les 2 ROZ étant ressemblantes, l'impact du choix de taille de zone est donc partiellement limité par cette nouvelle méthode, même dans des configurations extrêmement bruitées.

#### 4.1.3.3 Détection d'hétérogénéité

La figure 4.6 montre le long d'une ligne de coupe représentative la sensibilité de l'approche AFC pour différents niveaux de bruit et de tailles de zone. Comme attendu, la précision des reconstructions décroît avec l'augmentation du bruit. Les valeurs reconstruites pour les zones les plus grandes (ROZ=0.67) montrent une précision sensiblement meilleure que les petites zones (ROZ=1) pour tous les niveaux de bruits. Cela indique que, bien que la méthode demeure capable d'être robuste dans l'identification, la taille de sous-zone associé à la reconstruction influe sur la qualité de la détection des contrastes.

### 4.1.4 Effets des modules initiaux

#### 4.1.4.1 Paramétrage de l'étude

Cette étude conserve les quatre mêmes jeux de données associés à l'OSS-SNR de la section précédente. Le ROZ est désormais fixé tel que  $\lambda^M/L_Z = 1$ , tandis que deux configurations de modules initiaux sont considérées, l'une sous-estimant et l'autre sur-estimant le module de rigidité cible tel que  $\mu_0/\mu_{REF}^M = [0.7; 1.5]$ . Les profils de distribution des modules identifiés sont à nouveau présentés sous une forme normalisée.

#### 4.1.4.2 Stabilité liée à la rigidité initiale

La figure 4.7 montre que les approches DFC et AFC fournissent toutes deux des distributions des valeurs moyennes des propriétés reconstruites similaires pour des niveaux d'OSS-SNR supérieurs à 3 quelque soit la valeur des modules initiaux. En

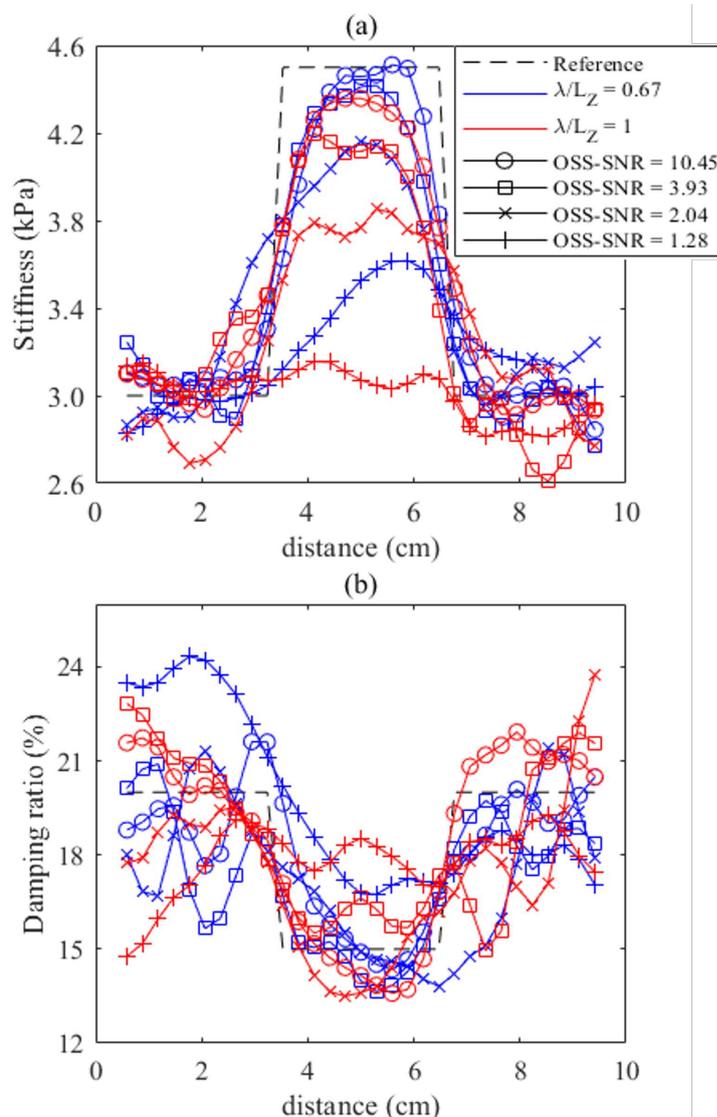


FIGURE 4.6 – Ligne représentative des reconstructions de la rigidité de cisaillement (a) et d’amortissement (b) à partir de l’approche AFC pour 4 différents niveaux de bruits. Les deux résolutions spatiales de zones sont représentées.

revanche, pour des niveaux de bruit plus élevés, les résultats obtenus par les deux méthodes commencent à différer significativement. Pour un OSS-SNR de 1.28, les distributions des reconstructions par l’approche AFC sont toutes deux gaussiennes avec des écart-types similaires, même si la valeur moyenne associée à la configuration initialement sur-estimée est supérieure à la configuration sous-estimant le

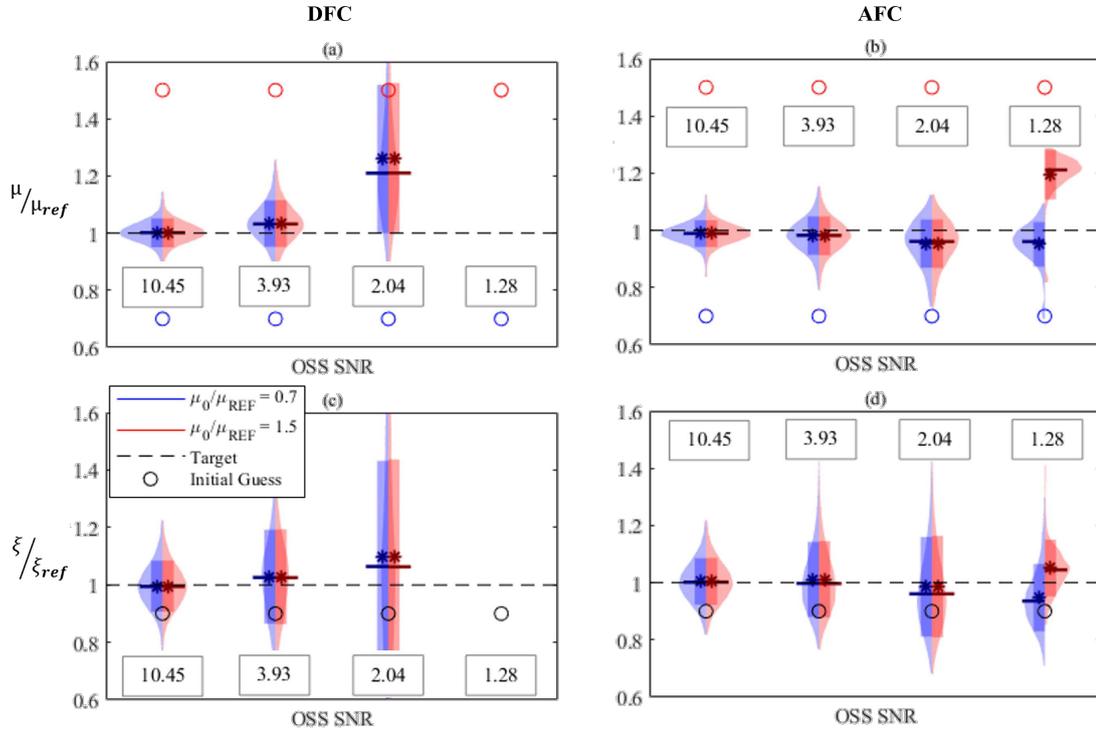


FIGURE 4.7 – Profils de distributions des reconstructions normalisées des rigidités de cisaillement (a,b) et d’amortissement (c,d) pour 4 niveaux d’OSS-SNR et 2 modules initiaux par approche DFC (a,c) et AFC (b,d). Les cercles correspondent aux valeurs des modules initiaux. Les distributions des reconstructions des données DFC pour les niveaux d’OSS-SNR 2.04 et 1.28 sortent de la figure.

module initial. Cela illustre la nature indéterminée du problème inverse dans ces conditions à faible niveau de signal, où une sur-estimation (ou respectivement une sous-estimation) des modules de cisaillement peut correspondre à une sur-estimation (ou respectivement sous-estimation) de l’amortissement. Dans ces derniers exemples, la qualité de la reconstruction finale est cependant toujours meilleure que celle de la configuration initiale, ce qui indique que la méthode d’identification a bien permis d’accéder à une meilleure estimation des propriétés.

## 4.1.5 Bruit non-gaussien

### 4.1.5.1 Transformation du bruit gaussien

Dans les études précédentes, le bruit artificiel implémenté dans les mesures numériques par (4.3) dont le niveau est piloté par le paramètre  $\text{SNR}_m$  et suit une distribution normale, dit gaussienne. Une modification courante de la nature du bruit repose sur l'ajout au modèle de perturbation de paramètres de forme modifiant la fonction de répartition de la loi de probabilité. Dans le cas non-gaussien, deux paramètres de forme sont considérés. Le premier paramètre est le coefficient d'asymétrie (appelé *skewness* en anglais), qui mesure l'asymétrie de la distribution de la variable aléatoire. Le second paramètre est le coefficient d'acuité, ou kurtosis, qui mesure la forme de la distribution en caractérisant son aplatissement. Ces coefficients sont respectivement fondés sur les moments probabilistes d'ordre 3 et 4. Un programme *Matlab* transformant des données gaussiennes vers des données non-gaussiennes à partir d'un modèle de transformation cubique d'Hermite basé sur les moments est utilisé dans cette application [Cheynet, 2022]. Celui-ci détermine les paramètres de transformation  $h_3$  et  $h_4$  à partir respectivement du coefficient de symétrie  $m_3$  et du kurtosis  $m_4$  tels que :

$$m_3 = \frac{h_3}{(3h_4)^{3/2}} \text{ et } m_4 = \frac{h_4(1 + 2h_3^2 + 6h_4^2)}{1 + 2h_3^2 + h_4^2}. \quad (4.6)$$

Ce système est résolu par le solveur non-linéaire *fsolve*, après vérification d'applicabilité de la transformation. Le bruit est donc piloté, en plus du  $\text{SNR}_m$ , par les paramètres  $m_3$  et  $m_4$ . Dans le cas de l'équation de la perturbation du champ de mesure, la  $k$ -ième composante complexe gaussienne  $\delta\tilde{u}_k$  contenue dans (4.3) est remplacée par la composante non-gaussienne  $\eta\tilde{u}_k$ . Le nouveau champ de déplacement perturbé associé à la mesure s'écrit :

$$\hat{u}_k = \tilde{u}'_k + \eta\tilde{u}'_k + i(\tilde{u}''_k + \eta\tilde{u}''_k). \quad (4.7)$$

La perturbation non-gaussienne du modèle s'écrit à partir du signal gaussien et des paramètres de forme :

$$\eta\tilde{u}_k = \frac{\alpha_{ng}}{b_{ng}} \left( \frac{\delta\tilde{u}_k^3}{3} + a_{ng}\delta\tilde{u}_k^2 + (b_{ng} - 1)\delta\tilde{u}_k^3 - a_{ng} \right), \quad (4.8)$$

avec :

$$a_{ng} = \frac{h_3}{3h_4}, \quad b_{ng} = \frac{1}{3h_4} \text{ et } \alpha_{ng} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2h_3^2 + 6h_4^2}}. \quad (4.9)$$

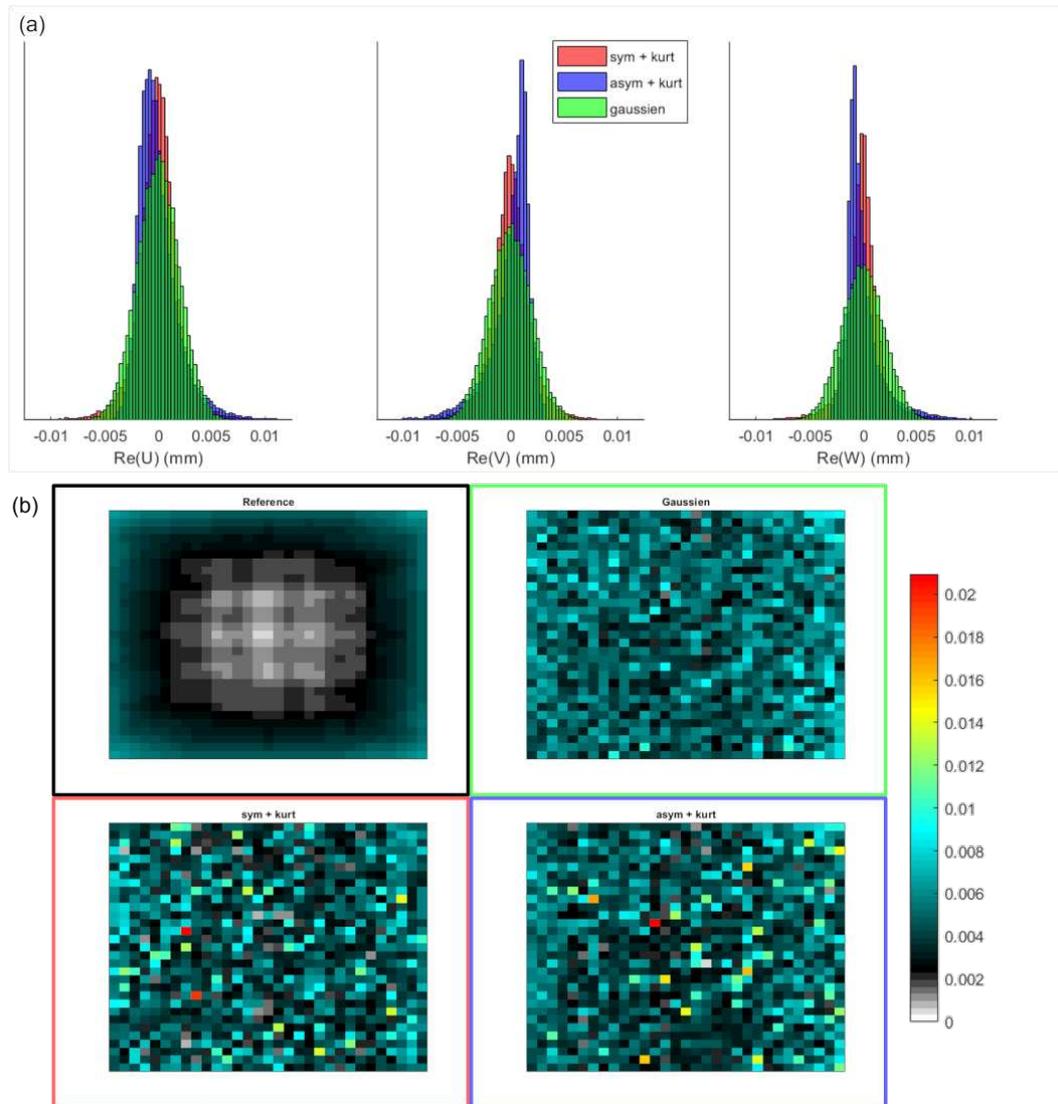


FIGURE 4.8 – Applications pour produire un bruit non-gaussien sur le déplacement (en mm) dans une configuration définie par un  $SNR_m = 100\%$  : (a) distributions normalisées des composantes directionnelles réelles des déplacements après perturbation pour 3 natures de perturbations : normale (vert), symétrique platykurtique (rouge) et asymétrique platykurtique (bleu) ; (b) vue d'une coupe d'intérêt de l'amplitude de déplacement dans la configuration non-bruitée (haut, gauche) et pour les 3 natures de perturbations.

### 4.1.5.2 Paramétrage de l'étude

Cette étude reprend le paramétrage de la première étude sur l'OSS-SNR (voir 4.1.2) en isolant 48 instances de  $\text{SNR}_m$ . Aux champs à distribution gaussienne ( $m_3 = 0; m_4 = 0$ ) déjà présentés s'ajoutent 2 autres champs à distribution non-gaussienne : le premier suit une distribution symétrique platykurtique ( $m_3 = 0; m_4 \neq 0$ ) et le second suit une distribution asymétrique platykurtique ( $m_3 \neq 0; m_4 \neq 0$ ). Chaque composante de la perturbation intègre des paramètres différents, générant un bruit anisotrope. La figure 4.8 illustre la variation des distributions des champs de déplacement après perturbation pour un fort de  $\text{SNR}_m$ . Les bruits varient selon leur paramétrage, l'OSS-SNR n'est pas exactement identique pour un même niveau de  $\text{SNR}_m$ . Cependant, le calcul de la déformation pour obtenir l'OSS-SNR intégrant un filtrage spatial, l'évaluation du niveau de signal est fortement similaire. L'ensemble des données ont un OSS-SNR moyen variant entre 1.33 et 14.

### 4.1.5.3 Évaluation quantitative d'un bruit non-gaussien

La figure 4.9 montre que le passage vers un bruit non-gaussien par une modification des paramètres de forme des fonctions de distribution n'a pas d'impact significatif sur les reconstructions des propriétés viscoélastiques, que ce soit dans les approches DFC ou AFC. Les commentaires formulés dans la première étude sur l'OSS-SNR (sous-section 4.1.2) sont par conséquent équivalents dans celle-ci.

## 4.1.6 Bilan

Les diverses applications sur des données simulées, présentées dans cette section, fournissent de premières démonstrations du gain de stabilité apporté par l'approche AFC. Cette amélioration des performances de l'algorithme *subzone NLI* est réalisée dans des conditions simples, mais caractéristiques de l'ERM.

La première étude de cette section démontre qu'éviter l'introduction indirecte du bruit, par les CL du PD du problème d'identification, dans processus de reconstruction limite la dégradation des identifications des propriétés viscoélastiques en raison d'un faible SNR. Ce résultat offre un nouveau seuil de SNR pour les données ERM traitées par la méthode *subzone NLI* et d'autres méthodes connexes. Les études précédentes utilisant la formulation adjointe généralisée de cet algorithme étaient basées sur un rapport signal sur bruit basé sur la déformation égal à 3 [Hiscox et al., 2020a]. Dans cette étude, l'erreur de reconstruction utilisant cette nouvelle formula-

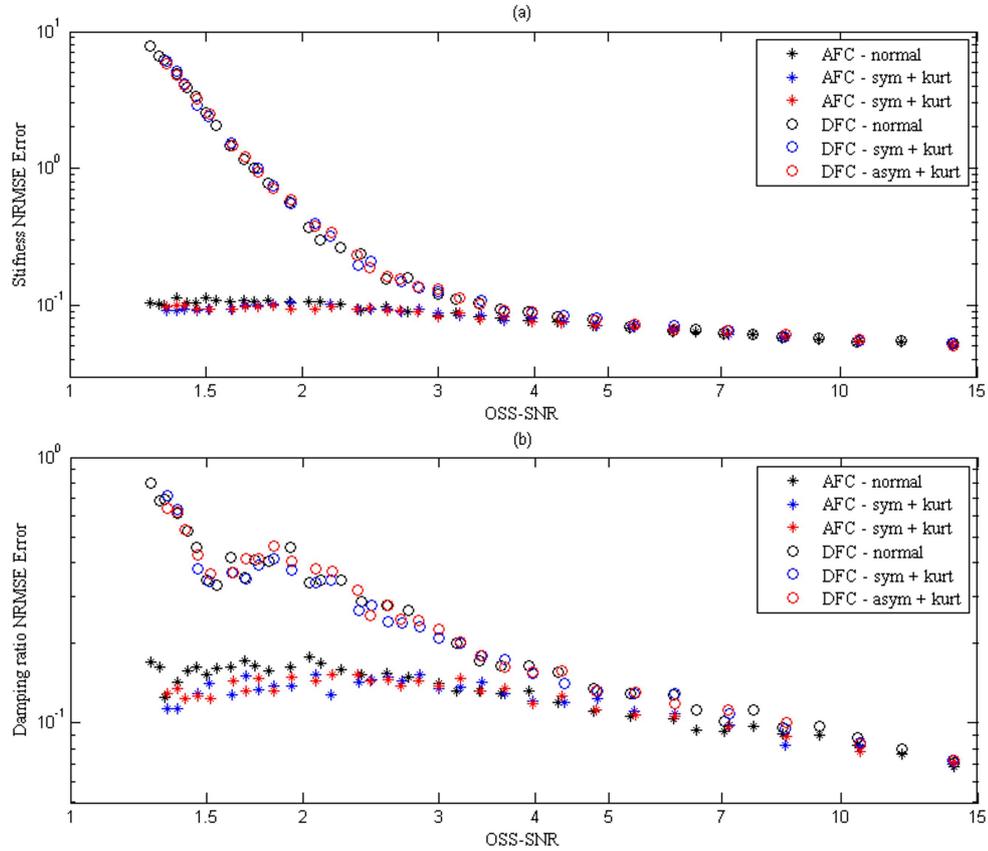


FIGURE 4.9 – Erreur (NRMSE) des reconstructions de la rigidité de cisailment (a) et de l’amortissement (b) à partir des approches DFC (o) et AFC (\*) pour différentes distributions de bruits et différents niveaux moyennés d’OSS-SNR. Les 3 configurations de bruits sont : normale (noir), symétrique platykurtique (bleu) et asymétrique platykurtique (rouge).

tion AFC était inférieure à l’erreur basée sur la formulation DFC pour cette valeur de seuil. Ces travaux indiquent qu’elle peut être repoussée à un niveau inférieur, bien que la sensibilité aux hétérogénéités soit toujours liée au niveau SNR. Au regard de la qualité des reconstruction, une valeur d’OSS-SNR égale à 2 est proposée comme nouveau seuil. La stabilité des reconstructions en deçà de cette valeur semble valide bien que la détection de contraste est plus faible et limite donc l’évaluation quantitative de données à très faible SNR.

La problématique de l’impact du bruit non-gaussien est considérée à l’aide d’un

modèle de transformation non-linéaire d'un signal de distribution normale. Dans ces travaux, les diverses régularisations de la méthode d'identification semblent limiter l'effet du caractère non-gaussien des perturbations et aucun impact notable dans l'erreur des reconstructions n'est identifié. Au delà de la considération du profil de distribution, le caractère corrélé du bruit de l'ERM [Hannum et al., 2022] est l'élément qui permettrait d'approcher plus correctement la sensibilité des reconstructions à ces incertitudes.

La question du choix de la taille des zones est l'objet de la deuxième étude. Celle-ci a été réalisée en comparant les résultats avec différents ROZ. En accord avec les études précédentes de ce paramètre, l'analyse retrouve un effet « taille de zone » précédemment observé dans les modules identifiés pour des niveaux de bruit élevés avec l'approche précédente basée sur les CL (DFC) [Anderson et al., 2017]. La nouvelle formulation AFC fournit des résultats stables, quel que soit le niveau de bruit, pour une taille de zone égale à la longueur d'onde mécanique. Considérant que la taille de la zone joue un rôle important dans le PI basé sur les sous-domaines en raison des limites de temps de calcul et de mémoire, cette nouvelle formulation offre une approche robuste et stable pour l'algorithme.

Tous les résultats de simulation basés sur l'approche AFC démontrent une sensibilité à l'hétérogénéité des matériaux, bien que la capacité à caractériser correctement le contraste des hétérogénéités de rigidité et d'amortissement reste liée au SNR. Ce résultat démontre l'efficacité de la nouvelle formulation pour l'évaluation reproductible des propriétés matérielles, même à des niveaux variables de SNR. La capacité de contraste dans la détection des propriétés demeure toutefois étroitement liée à la taille de zone.

La troisième étude montre une réaction positive de la méthode AFC face aux effets du choix des modules initiaux pour le processus d'identification. La sensibilité de la méthode au signal est conservée quel que soit le niveau de bruit. L'erreur dans le modèle induite par une mauvaise estimation initiale n'affecte que les valeurs moyennes des propriétés reconstruites, tandis que la variance dans la solution finale reste stable. Ce résultat pourrait être associé à un changement de convexité de la fonctionnelle d'erreur autour du minimum attendu à des niveaux de bruit élevés. Les résultats d'identification à partir de suppositions initiales opposées démontrent la capacité de la méthode à tendre naturellement vers une estimation correcte des propriétés. Dans ces configurations fortement bruitées, il pourrait être

intéressant d'analyser la convergence de l'algorithme pour éventuellement déterminer si un nombre plus important d'itérations maximales permettrait de retrouver des résultats aux moyennes plus proches. Plus généralement, cette étude montre que le choix du module initial joue un rôle secondaire vis-à-vis des autres paramètres étudiés.

## 4.2 Échantillons fantômes par tomographie par découpage optique

Cette section étend le champ d'application de l'algorithme d'identification en le confrontant pour la première fois à des données expérimentales issues d'un processus d'acquisition de la cinématique 3D autre que celui de l'acquisition par un moyen d'imagerie médicale.

### 4.2.1 Cadre pour l'identification

#### 4.2.1.1 Nature des données cinématiques

L'analyse préliminaire des données cinématiques 3D de matériaux fantômes effectuée au chapitre 2 est prolongée jusqu'à l'identification. L'acquisition d'images par tomographie par découpage optique permet la reconstruction d'images volumiques, et la corrélation volumique convertit l'intensité lumineuse de ces images vers des champs cinématiques 3D dont le caractère harmonique est extrait par TFD. Une première évaluation qualitative des champs de déplacement a été effectuée, à la section 2.4, par comparaison avec un modèle EF. La reconstruction des propriétés mécaniques de ces champs poursuit cette évaluation avec une approche désormais quantitative qui repose sur la connaissance *a priori* de la structuration matérielle des échantillons. Dans cette section, les échantillons étudiés présentent des géométries simples et des matériaux à une ou deux phases, permettant donc leur partitionnement pour l'analyse des reconstructions par phases. Les reconstructions de l'échantillon homogène de gélatine moulé, puis des 3 échantillons en silicone démoulés sont réalisées et commentées. Toutes les reconstructions sont effectuées sur des grilles isotropes. Si les 3 échantillons en silicone traités suivent une configuration d'identification identique, des différences de paramétrage existent avec l'échantillon de gélatine, dont le contexte expérimental était moins maîtrisé. L'objectif de ces reconstructions portant d'avantage sur la validation de l'ensemble du processus expérimental et numérique, la méthode AFC, dont le gain de stabilité a été montré par

l'analyse *in silico* de la section 4.1, est employée par défaut. Pour chaque matériau, le paramétrage mécanique et spatial des identifications est cohérent avec celui du modèle numérique précédemment détaillé. La masse volumique pour l'ensemble des reconstructions est donnée par  $\rho = 900 \text{ kg.m}^{-3}$  selon des mesures approximatives sur l'échantillon. La descente de gradient pour l'optimisation du problème d'identification est assurée par une méthode du GC à 3 itérations. La convergence globale de l'algorithme est assurée par un maximum de 100 itérations et une variation relative des propriétés identifiées maximale de 0.1 %. Les reconstructions sont effectuées en parallélisation sur le serveur *Narval* de l'*Alliance de recherche numérique du Canada*.

#### 4.2.1.2 Paramétrage des reconstructions de l'échantillon de gélatine

Les données cinématiques de l'échantillon de gélatine homogène vibrant à 20 Hz dans son moule sont reconstruites par approche AFC. Bien que l'évaluation qualitative des champs cinématiques traitée à la section 2.4.2 assure la cohérence des données, celles-ci présentent un fort niveau de bruit qui peut perturber de manière significative la reconstruction. La formulation compressible du problème d'identification détaillée à la section 3.4.1 est adoptée, car elle permet de stabiliser les distributions du module de cisaillement reconstruit. Inspirée de l'étude préliminaire sur les champs de déplacements réalisée à la section 2.4, la configuration matérielle homogène initiale est donnée par  $\mu_0 = 1.7 \text{ kPa}$ ,  $\lambda_0 = 40.8 \text{ kPa}$  et  $\xi_0 = 10 \%$ . Si le module  $\lambda$  est bien identifié par l'algorithme, seule la reconstruction du couple  $(\mu, \xi)$  est considérée. La reconstruction s'effectue sur une grille de  $40 \times 34 \times 47$  voxels isotropes de 2.4 mm de côté. La stratégie de décomposition est associée à des zones isotropes de 2.5 cm de côté. La régularisation est assurée par un filtrage gaussien spatial défini par  $\sigma_{fs} = 3.6 \text{ mm}$ . Ce paramétrage est appliqué aux deux approches DFC et AFC afin de réaliser une brève comparaison sur ce type de données. La reconstruction est effectuée sur 24 processeurs durant environ 4 à 8 heures, selon l'approche.

#### 4.2.1.3 Paramétrage des reconstructions des échantillons de silicone

Considérant un cadre de fabrication et d'acquisition expérimentale identique entre les différents échantillons de silicone, une seule stratégie d'identification est développée pour les échantillon homogène, hétérogène et bi-couche. L'ensemble des échantillons vibre à 80 Hz. A cause des différences de géométrie initiale, la seule donnée variant parmi ces 3 cas est la taille globale de la grille des mesures, sur laquelle est effectuée la reconstruction. Elle est de  $42 \times 35 \times 41$  voxels pour l'échantillon

homogène, de  $41 \times 37 \times 43$  voxels pour l'échantillon hétérogène et de  $41 \times 39 \times 43$  voxels pour l'échantillon bi-couche. Les voxels sont isotropes, de 2.2 mm de côté. La décomposition du domaine global est associée à des zones isotropes de 2.0 cm de côté. Contrairement à l'échantillon de gélatine, la formulation quasi-incompressible est utilisée avec seulement le couple de propriétés viscoélastiques  $(\mu, \xi)$  reconstruit. Les valeurs des modules initiaux sont  $\mu_0 = 3.3$  kPa,  $\xi_0 = 15$  % et  $K = 1.0$  MPa. La régularisation est assurée par un filtrage gaussien spatial défini par  $\sigma_{fs} = 3.3$  mm. Les trois reconstructions sont effectuées sur 48 processeurs durant 2 à 4 heures. Afin de réaliser une analyse statistique des reconstructions, des masques sont développés lors du traitement post-identification pour la distinction d'une région « souple » et d'une région « rigide » comme phases des fantômes. Des critères géométriques (centre et dimensions de l'inclusion cubique pour l'échantillon hétérogène, interface 2D pour l'échantillon bi-couche), basés sur les informations issues de la fabrication, définissent les masques. Afin de limiter l'interférence entre les deux phases diffusée notamment par la régularisation spatiale, les points aux frontières des 2 régions ne sont pas considérés dans les post-traitements.

### 4.2.2 Propriétés de l'échantillon de gélatine homogène

La figure 4.10 représente les reconstructions par approche AFC de l'échantillon de gélatine homogène composé d'une matrice souple, dans une configuration « moulé » avec les parois verticales rigides. Une relativement bonne homogénéité du module de cisaillement identifié est observée, variant entre 1.5 et 2.5 kPa dans l'ensemble du volume. Quelques voxels, en particulier dans les régions proche des bordures, sont sous-estimés par rapport à la valeur moyenne. L'amortissement identifié est généralement faible ( $< 5$  %) dans une grande partie de l'échantillon, en particulier en son coeur. Ce paramètre est cependant sensiblement plus élevé aux bords, soulignant un possible « effet de peau » couplé aux faiblesses de l'algorithme dans ces régions moins fournies en données.

### 4.2.3 Propriétés de l'échantillon de silicone homogène

La figure 4.11 représente les reconstructions de l'échantillon de silicone homogène composé d'une matrice souple, dans une configuration « démoulé », où les parois verticales sont libres. La structure homogène de l'échantillon est reproduite avec succès par l'identification dans l'ensemble du volume. Peu de variations spatiales du module de cisaillement reconstruit sont détectées, et les valeurs identifiées de

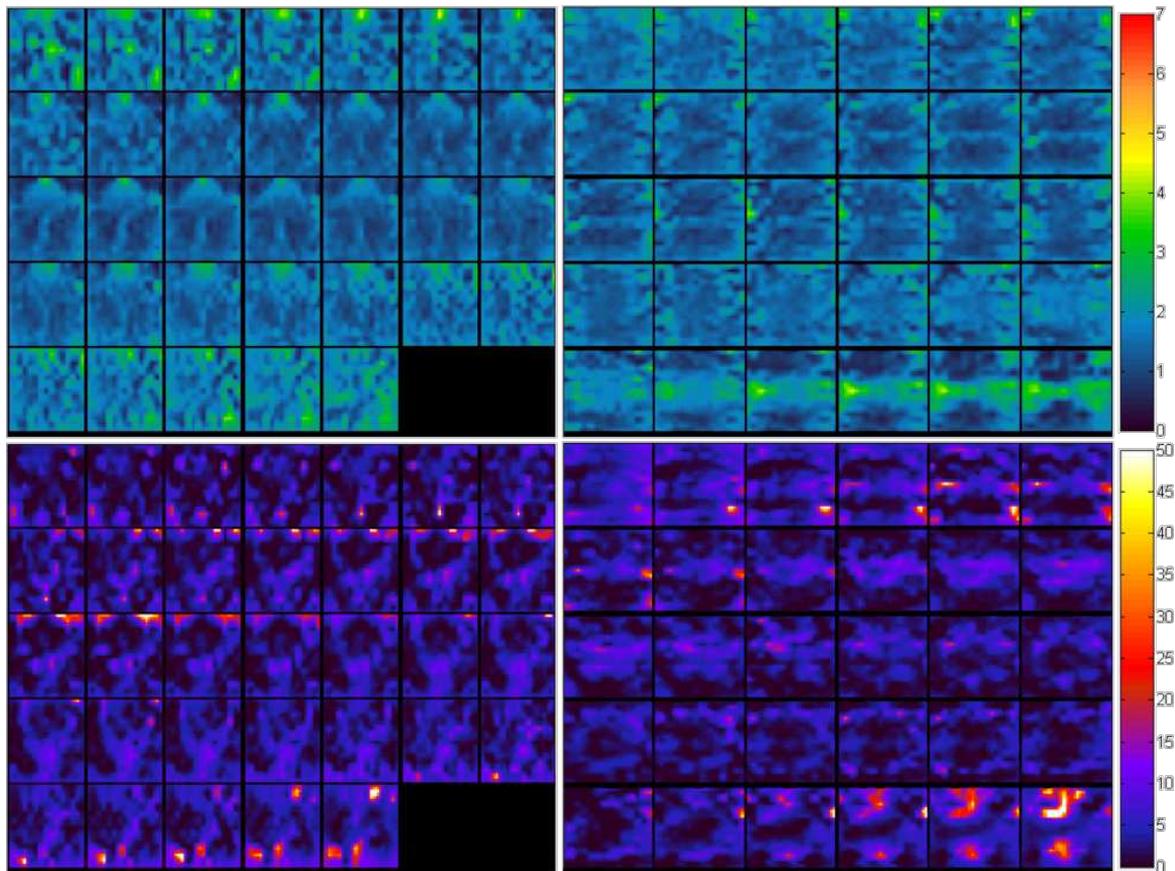


FIGURE 4.10 – Représentation des coupes (espacées de 2.4 mm) de la reconstruction par approche AFC de l'échantillon de gélatine homogène (moulé, vibrant à 20 Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan  $x - y$ , à gauche) et la direction verticale (plan  $z - x$ , à droite).

celui-ci oscillent entre 2 et 4 kPa. Comme pour l'échantillon précédent, les voxels proches des bordures sont susceptibles d'être plus sous-estimés que ceux du reste du domaine. Une valeur plus élevée de l'amortissement est identifiée dans la partie inférieure de l'échantillon, proche de la base dont le déplacement est imposé par l'actionneur. L'amortissement demeure relativement faible et oscille principalement entre 4 et 8 %.

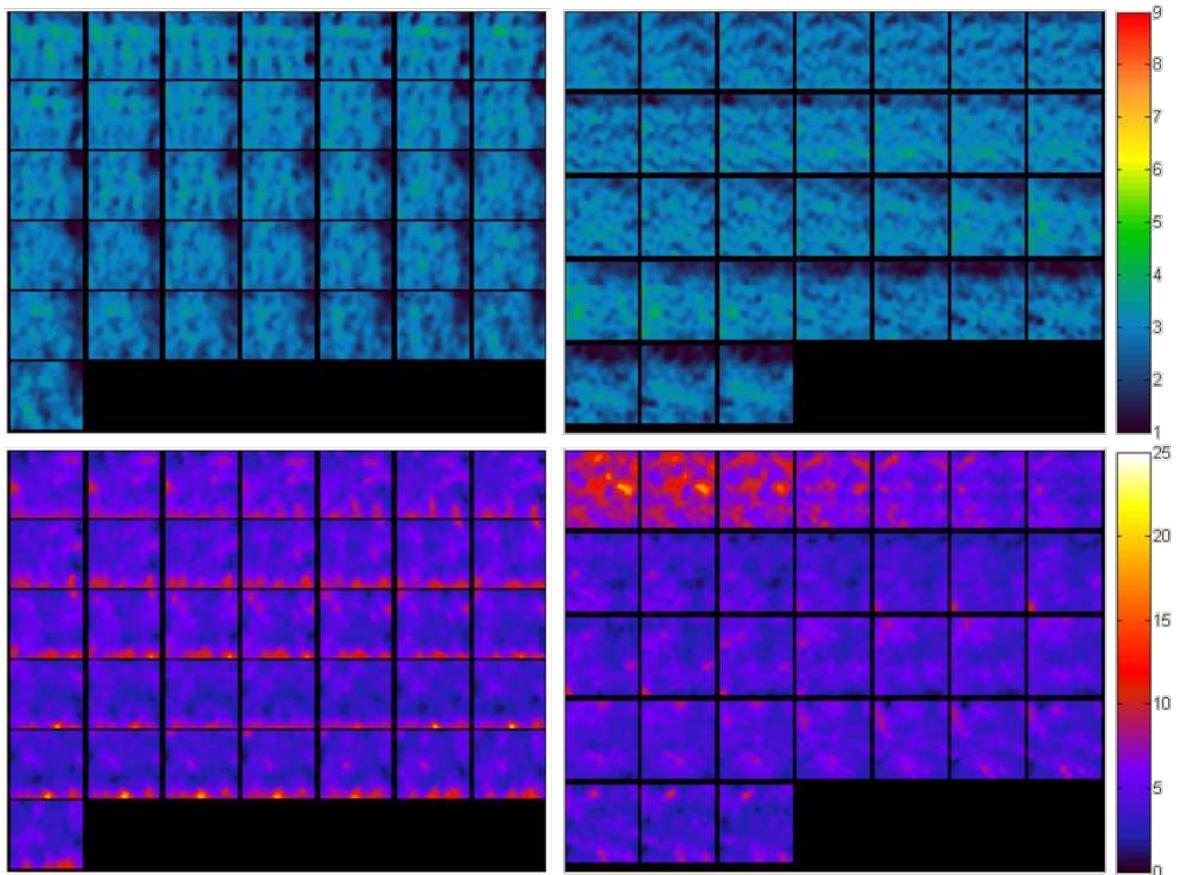


FIGURE 4.11 – Représentation des coupes (espacées de 2.2 mm) de la reconstruction de l'échantillon homogène de silicone (démoulé, vibrant à 80 Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan  $x - y$ , à gauche) et la direction verticale (plan  $z - x$ , à droite).

#### 4.2.4 Propriétés de l'échantillon de silicone hétérogène

La figure 4.12 représente les reconstructions de l'échantillon de silicone composé d'une matrice souple avec une inclusion rigide de 3 cm de côté, centrée, dans une configuration « démoulé ». Ces résultats témoignent d'une stabilité globale de l'identification. Les reconstructions du module de cisaillement sont sensibles à l'hétérogénéité, et l'inclusion détectée s'étend sur une région de 12 à 15 voxels (soit 26.4 à 33.0 mm), relativement centrée, conformément aux dimensions issues de la fabrication de l'échantillon. Sous l'hypothèse que cette partition désigne la distinction

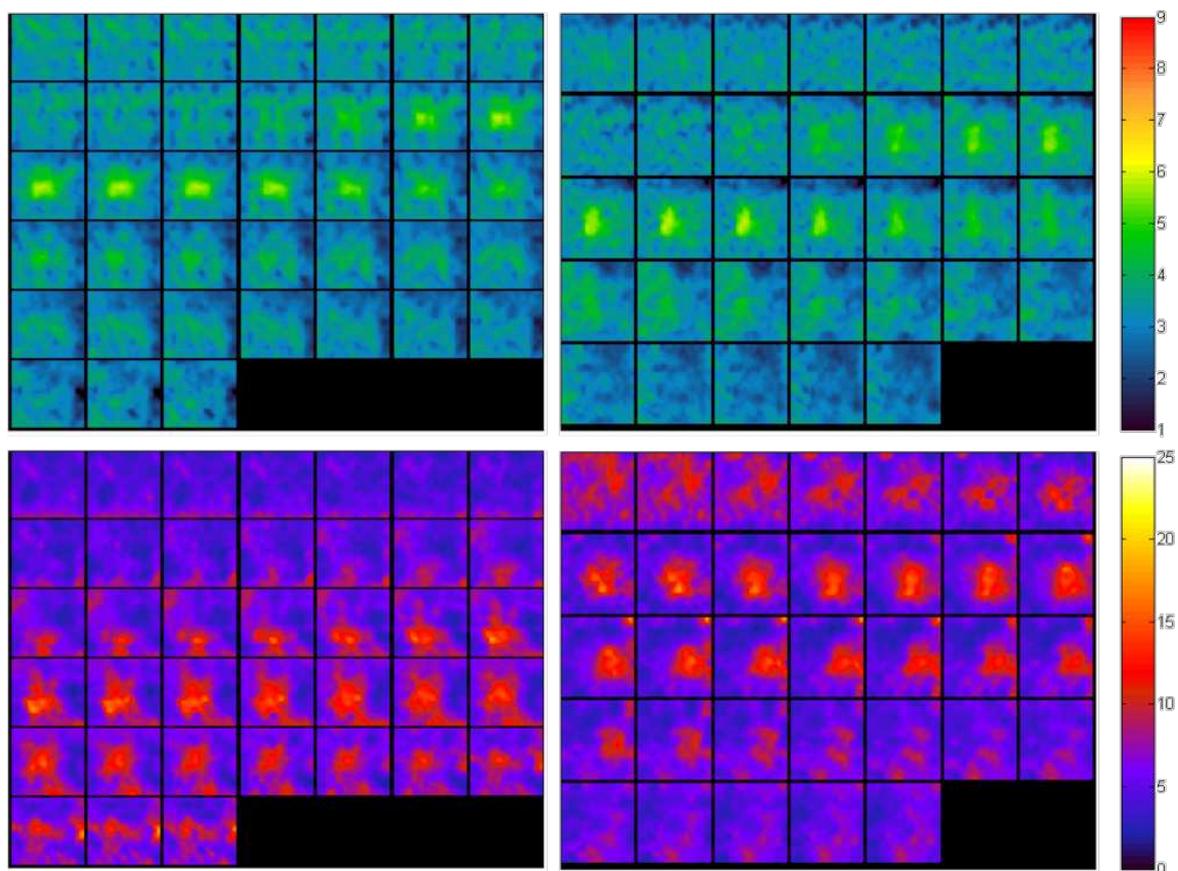


FIGURE 4.12 – Représentation des coupes (espacées de 2.2 mm) de la reconstruction de l'échantillon hétérogène (matrice-inclusion) de silicone (démoulé, vibrant à 80 Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan  $x - y$ , à gauche) et la direction verticale (plan  $z - x$ , à droite).

entre les deux matériaux, les valeurs des modules identifiés sont estimés entre 2 et 4 kPa dans la région de la matrice et entre 4 et 6 kPa dans la région de l'inclusion. En revanche, la détection de l'inclusion par analyse des cartes de reconstructions de l'amortissement, dont le contraste avec la matrice est inconnu, est moins évidente. Bien qu'un amortissement de l'ordre de 10 à 20 % décrivant un motif semblable à la représentation cubique de l'inclusion soit visible dans ces représentations, celui-ci, en plus d'être décentré, présente des dimensions d'au moins 17 voxels (soit au moins 37.4 cm), trop importantes pour ne contenir qu'uniquement cette hétérogénéité. Selon le module considéré, il existe un décalage dans les coupes induisant la région

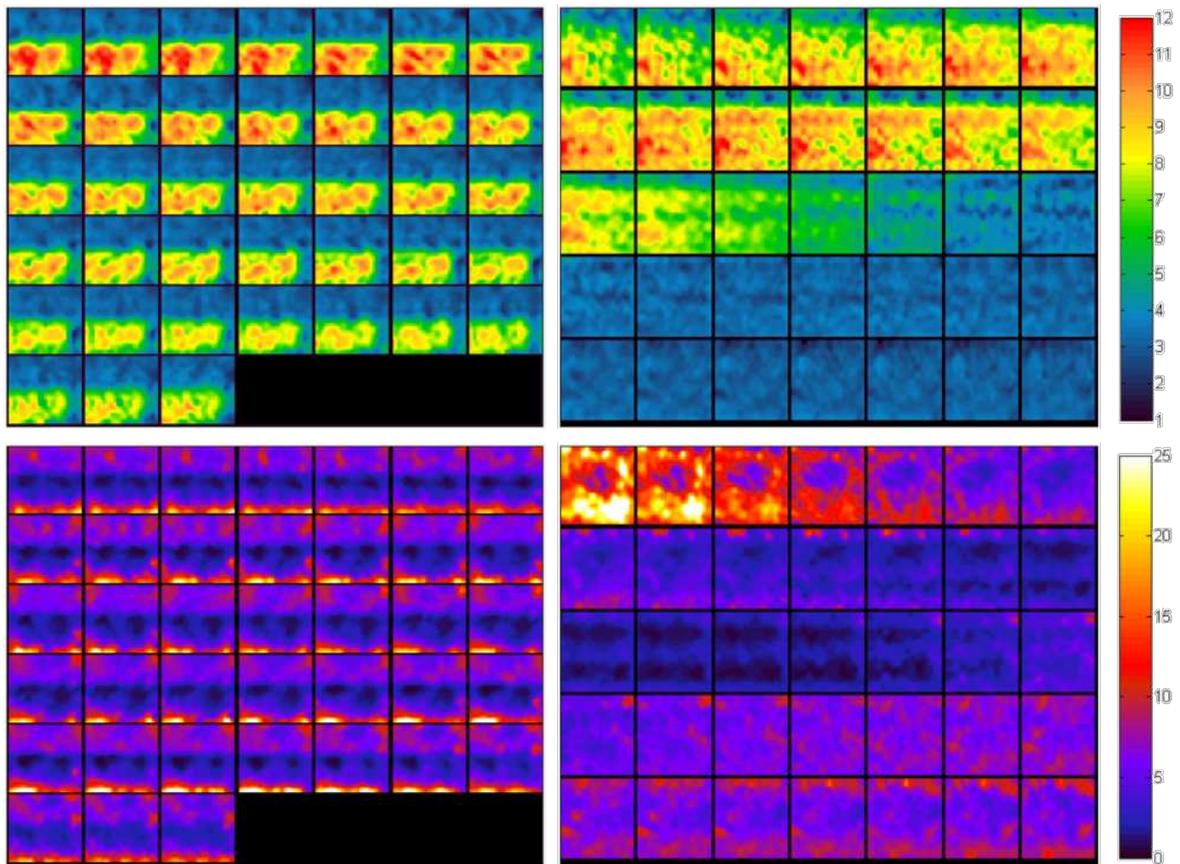


FIGURE 4.13 – Représentation des coupes (espacées de 2.2 mm) de la reconstruction de l'échantillon bi-couche de silicone (démoulé, vibrant à 80Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan  $x - y$ , à gauche) et la direction verticale (plan  $z - x$ , à droite).

potentielle de l'inclusion, particulièrement dans les directions  $x$  et  $z$ .

#### 4.2.5 Propriétés de l'échantillon de silicone bi-couche

La figure 4.13 représente les reconstructions de l'échantillon de silicone bi-matériaux divisé en un bloc souple dans la partie inférieure et d'un bloc plus rigide dans la partie supérieure, dans une configuration « démoulé ». La structure de superposition des deux matériaux est convenablement rétablie par les reconstructions du module de cisaillement. Si la région souple présente une distribution assez cohérente, variant

entre de 2 à 4 kPa, la région rigide est elle plus dispersée, avec des modules variant entre 7 et 12 kPa. La discontinuité matérielle entre les deux phases, supposée brutale, s’observe dans les coupes verticales par une transition d’environ 6 voxels (soit 13.2 mm). Par ailleurs, une région associée à la face  $y-z$ , incidente du faisceau laser, dont la zone inférieure est normalement associée à la partie rigide, semble sous-estimée et augmente la dispersion du module dans cette région. L’amortissement présente une sensibilité à l’hétérogénéité, mais pas de manière aussi directe que pour le cisaillement. En effet, l’amortissement à mi-hauteur de l’échantillon, soit l’interface attendue entre les 2 régions, est particulièrement faible ( $< 5\%$ ). En revanche, il atteint des valeurs bien plus importantes proche de la base de l’échantillon. Sans considérer cette zone, il semblerait que, de manière générale, l’amortissement soit sensiblement plus important dans la région rigide.

## 4.2.6 Synthèse des reconstructions des échantillons

Cette section présente les premières identifications viscoélastiques 3D de mesures expérimentales de champs de déplacement issues d’un dispositif de tomographie par découpage optique. Le problème d’identification est appliqué aux données cinématiques de 4 échantillons, en gélatine et en silicone, et une analyse des modules identifiés est effectuée. Cette synthèse s’articule autour de deux objectifs : la confrontation des approches DFC et AFC, traitée sur l’échantillon homogène de gélatine, ainsi que la détection d’hétérogénéité, traitée sur les différents échantillons de silicone exclusivement par approche AFC.

### 4.2.6.1 Stabilité (échantillon de gélatine)

**Tableau 4.1** Moyennes et écart-types de l’ensemble des modules de cisaillement et d’amortissement de l’échantillon de gélatine homogène reconstruit par approche DFC et AFC.

	$\mu$ (kPa)		$\xi$ (%)	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
DFC	1.90	0.84	4.67	7.96
AFC	1.53	0.49	4.23	4.64

La figure 4.14 synthétise la reconstruction du fantôme homogène de gélatine par AFC précédemment présenté et inclut la reconstruction par DFC, et le tableau 4.1

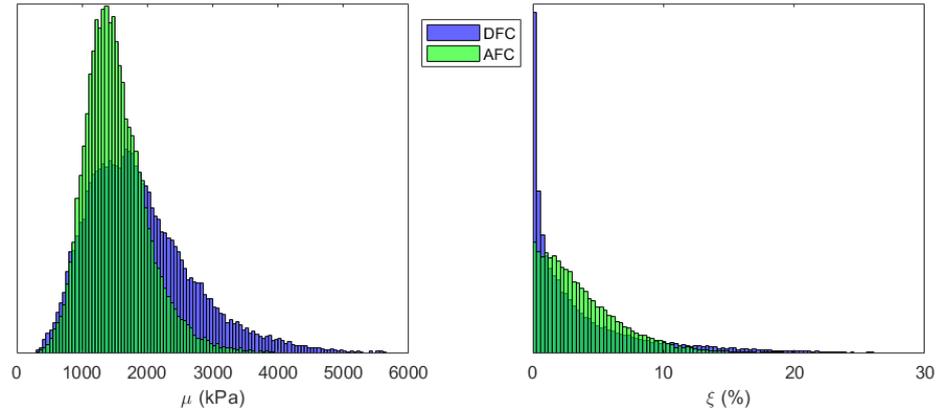


FIGURE 4.14 – Distributions normalisées par densité de probabilité du module de cisaillement (gauche, en kPa) et de l’amortissement (droite, en %) identifiés de l’échantillon homogène de gélatine (moulé, vibrant à 20 Hz), pour la comparaison des approche DFC (bleu) et AFC (vert).

présente les données statistiques issues de ces distributions. Les modules de cisaillement identifiés présentent une distribution assimilable à une gaussienne, d’avantage symétrique avec l’approche AFC. Cet aspect n’est cependant pas obtenu dans le cas de l’amortissement : une importante proportion des parties imaginaires identifiées ( $G''$ ) des propriétés matérielles est très proche de la valeur nulle, rendant l’amortissement très faible. Bien que les profils soient similaires, ce constat est d’avantage observé avec l’approche DFC et un peu mieux équilibré par l’approche AFC. La valeur moyenne des modules de cisaillement identifiés par AFC (1.53 kPa) est plus faible que celle par DFC (1.90 kPa). Il est intéressant de remarquer que ces valeurs moyennes des modules de cisaillement, par approche AFC et DFC, traduisent respectivement une diminution et une augmentation dans la phase d’identification dont la rigidité initiale est de  $\mu_0 = 1.70$  kPa. Comme attendu, l’approche AFC diminue largement la distribution des modules identifiés : les écart-types des modules sont chacun réduits de plus de 40 %. Ces résultats confortent l’apport de l’approche AFC pour le traitement des matériaux fantômes et justifient le choix de mener les reconstructions uniquement par cette méthode sur les données de silicones.

En considérant les reconstructions par approche AFC, l’estimation du module de cisaillement moyen concorde de manière satisfaisante avec les estimations des propriétés du matériau issus d’essais mécaniques 1D quasi-statiques avec un écart

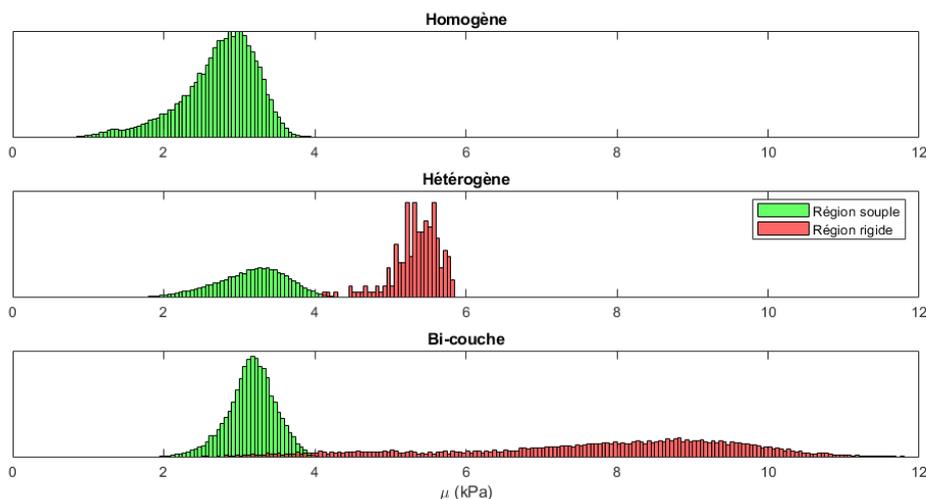


FIGURE 4.15 – Distributions normalisées par densité de probabilité des modules de cisaillement (en kPa) identifiés dans les régions partitionnées (souple en vert, rigide en rouge) des reconstructions des échantillons de silicone homogène (haut), hétérogène (centre) et bi-couche (bas).

de 10 % entre les deux techniques de caractérisation. En revanche, l'amortissement est très faible ( $< 1\%$ ) au coeur du domaine, mais des valeurs plus élevées ( $> 10\%$ ) sont tout de même présentes, en particulier dans les régions proches des bordures où l'atténuation des ondes lors de leur réflexion sur les parois est *a priori* plus intense qu'au coeur de l'échantillon. Sur ces données, la valeur moyenne de l'amortissement est de 4.2 %. Si ces résultats sont cohérents avec les grandeurs des modules obtenus, la réduction de l'écart-type des distributions des modules identifiés constitue tout de même l'enjeu principal des reconstructions. De manière plus générale, ces données présentent de nombreux défauts, comme le manque de stabilité du processus de fabrication du matériaux gélatine, mais aussi la sollicitation mécanique dont la fréquence (20 Hz) n'est pas assez élevée pour obtenir une description suffisamment fine des ondes de cisaillement dans l'ensemble de l'échantillon.

#### 4.2.6.2 Détection d'hétérogénéités (échantillons de silicone)

La figure 4.15 groupe les distributions des identifications des modules de cisaillement des 3 échantillons de silicones, vibrant à 80 Hz, dont les cartes de recons-

truction ont été discutées précédemment. Les identifications des régions associées au silicone souple, utilisé dans les 3 échantillons, présentent des profils similaires variant entre 2 et 4 kPa, conformément aux observations déjà formulées. Les valeurs moyennes du module de cisaillement identifié associées à ce matériaux pour les échantillons homogène, hétérogène et bi-couche sont respectivement de 2.73, 3.21 et 3.31 kPa. Ces résultats, de par leur profils de distribution ainsi que par leur valeurs, sont cohérents avec les estimations effectuées dans la pré-évaluation des mesures par comparaison avec un modèle numérique. Des sensibilités de l'identification à l'hétérogénéité matérielle sont également observées dans une configuration matrice-inclusion (hétérogène) et dans une configuration bi-matériaux (bi-couche). Les estimations des modules de cisaillement associés aux régions rigides demeurent cependant moins précises que pour les régions souples. Plusieurs arguments permettent d'interpréter ce constat. D'abord, la mise en place de l'hétérogénéité peut avoir été affecté les signaux expérimentaux en induisant par exemple des biais dans la diffusion l'intensité lumineuse, et donc dans l'ensemble de la chaîne de traitement des données conduisant aux reconstructions. Par ailleurs, la rigidité de l'inclusion augmente la longueur d'onde de cisaillement, et par conséquent le ROZ nécessaire à l'identification. En effet, dans cette configuration, les observations précédemment effectuées ont montré que la région rigide n'a seulement qu'une demi-longueur d'onde de cisaillement la traversant. Enfin, les régularisations de l'algorithme sur les propriétés identifiés, garants de la stabilité permettant la validation des reconstructions, limitent les forts contrastes dans un espace de petites dimensions, et donc la précision de l'identification. Dans l'échantillon bi-couche, l'importante dispersion des modules de cisaillement identifiés dans la partie rigide s'explique à nouveau par une éventuelle faiblesse dans la résolution spatiale de l'identification. Les modules de cisaillement moyens pour la partie rigide des échantillons hétérogène et bi-couche sont respectivement estimés à 4.61 kPa et 7.58 kPa, restant à nouveau dans l'ordre de grandeur des estimations précédemment effectuées. Les identifications de l'amortissement ne semblent cependant pas représenter un indicateur de l'hétérogénéité aussi précis que ne le sont celles de la rigidité de cisaillement pour les matériaux silicones de l'étude.

### 4.2.7 Bilan

En conclusion, cette section montre la validité des procédures expérimentales et numériques développées dans ces travaux portant sur la mise en place d'un nouveau

système d'identification de propriétés viscoélastiques de matériaux fantômes à partir de mesures de champs cinématiques 3D harmoniques par méthode optique. Les identifications réalisées par approche AFC se sont avérées plus cohérentes et moins dispersées que par l'approche DFC, démontrant un intérêt de la méthode pour la reconstruction de données sur matériaux fantômes. Des valeurs crédibles de la rigidité de cisaillement des matériaux étudiés sollicités par une unique fréquence de vibration ont été retrouvées, avec une bonne reproductibilité entre les échantillons considérés, et dans des gammes de grandeurs similaires à celles des tissus mous *in vivo*. Des extensions à court terme de ces travaux pourraient porter sur le calcul de l'OSS-SNR lors du processus de conversion des champs cinématiques temporels en leur composantes harmoniques. Par ailleurs, une confrontation des reconstructions entre ces données et des champs cinématiques issus d'une séquence IRM suivant le même processus expérimental, constituerait un test concret dans l'objectif de développer un système de tomographe optique comme outil métrologique pour la mesure cinématique de l'élastographie.

### 4.3 Cerveau humain

Cette section adapte des données ERM du cerveau humain déjà existantes dans l'optique de confronter les méthodes d'identification à un contexte de données expérimentales *in vivo*. D'abord, la comparaison entre les méthodes AFC et DFC achève la phase de validation de l'approche couplée initiée dans l'étude numérique de ce chapitre. Ensuite, celle-ci fait l'objet d'une investigation du paramétrage des termes de régularisation, dans l'objectif d'affiner la précision de l'algorithme *subzone NLI* tout en garantissant sa stabilité.

#### 4.3.1 Origine des données

Les données traitées dans cette section sont issues d'une étude du groupe du *Mechanical Neuroimaging Lab (University of Delaware, DE, États-Unis)* de Curtis L. Johnson et Daniel R. Smith sur les propriétés mécaniques anisotropes dans le cerveau humain sain [Smith et al., 2022]. La microstructure fibreuse de la matière blanche du cerveau, dont l'ordre de grandeur de dimension est de celle du voxel, amène à considérer l'anisotropie par l'entremise d'une formulation isotrope-transverse quasi-incompressible. Dans *subzone NLI*, ce comportement est approché par un modèle d'identification intégrant, en plus du modèle visco-élastique quasi-incompressible développé à la section 3.1 avec les modules de cisaillement et d'incompressibilité, les

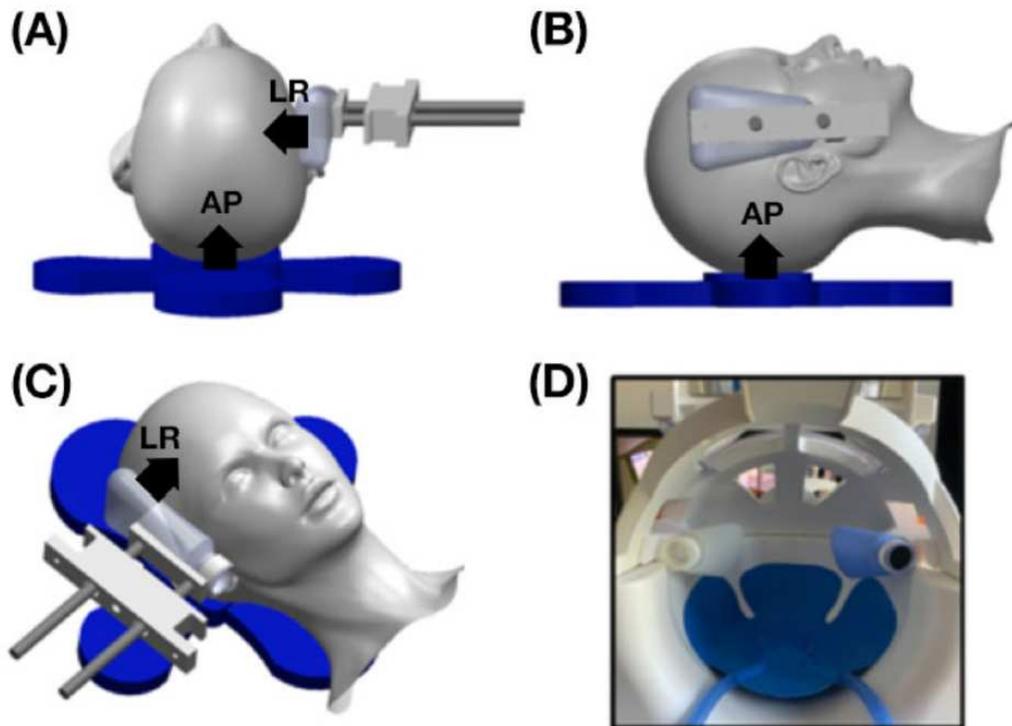


FIGURE 4.16 – Schéma de l'actionneur développé pour la sollicitation bidirectionnelle du cerveau humain. Les directions d'activations AP et LR sont indiquées par les flèches. [Smith et al., 2022].

facteurs d'anisotropie de cisaillement et d'anisotropie de tension [McGarry et al., 2021]. Pour cela, l'algorithme NITI (*nearly-incompressible transverse-isotropic*) nécessite 2 mesures dans 2 directions. Ce besoin a motivé le développement d'un actionneur additionnel, composé de réservoirs flexibles imprimés en 3D, intégrés à une antenne de tête comprenant un coussin pneumatique commercial (*Resoundant Inc., Rochester, MN, États-Unis*) illustré à la figure 4.16. En plus de l'activation classique du coussin dans l'axe antéro-postérieur (AP), le système secondaire de bouteilles flexibles disposé sur la tempe permet une sollicitation dans la direction gauche-droite (LR) (*left-right*). Les vibrations dans les 2 directions sont appliquées séparément, à 50 Hz. Les acquisitions sont réalisées par la séquence *3D multiband multishot spiral* et procurent une résolution isotope de  $2.0 \times 2.0 \times 2.0 \text{ mm}^3$  sur un FOV de  $240 \times 240 \times 128 \text{ mm}^3$  [Johnson et al., 2014]. Pour les besoins de l'étude de l'anisotropie, les données sont couplées à une acquisition du tenseur de diffusion (qui caractérise l'organisation des structures par détection du mouvement directionnel

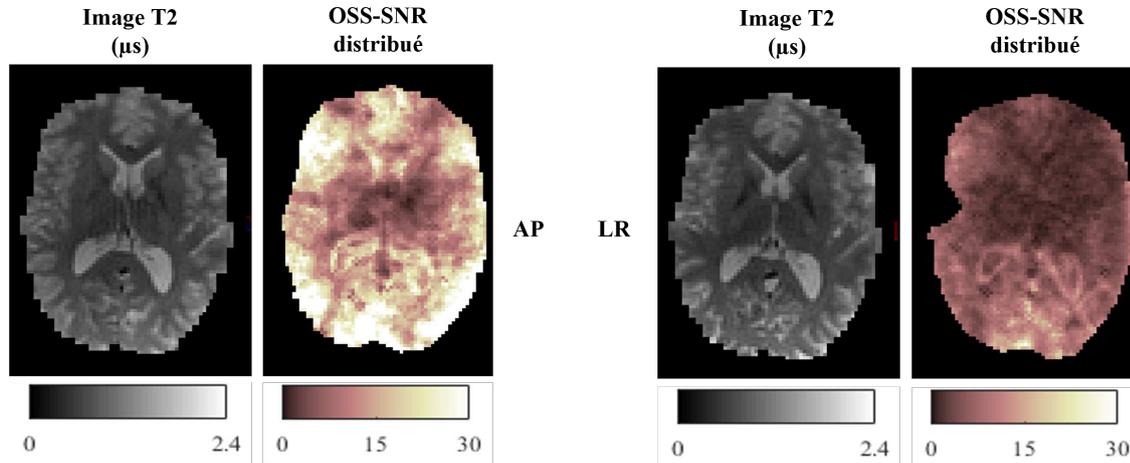


FIGURE 4.17 – Images  $T_2$  et OSS-SNR distribué d’une coupe représentative du cerveau humain d’un même sujet, activé dans la direction AP (gauche) et LR (droite). Si les images  $T_2$  présentent une forte similarité, le niveau d’OSS-SNR est nettement plus faible pour les données de type LR, en particulier au centre du cerveau.

des molécules d’eau), dont la résolution est sensiblement plus fine, pour intégrer l’orientation des fibres nécessaire à la reconstruction des modules d’anisotropie.

La matière blanche est constituée de faisceaux de fibres nerveuses myélinisées qui relient différentes zones du cerveau entre elles. Ces faisceaux peuvent avoir des orientations différentes, mais il n’y a pas de direction d’orientation de la matière blanche dominante dans l’ensemble du cerveau. Les directions de sollicitation n’ont donc pas pour objectif de mesurer une direction spécifique par rapport aux fibres. Les mouvements associés aux ondes mesurées pour les excitations AP et LR peuvent donc être considérées comme deux séries distinctes pour la reconstruction en viscoélasticité quasi-incompressible isotrope, sans prendre en compte l’imagerie du tenseur de diffusion. Cependant, dans la pratique, le moins bon contact entre les réservoirs flexibles et le crâne lors de l’activation LR rend ces données moins fiables et stables que les données AP [Anderson et al., 2016]. Le SNR plus faible des données LR, illustré à la figure 4.17 limite leur utilisation dans l’identification isotrope et nécessite un certain nombre de répétitions pour être valide.

## 4.3.2 Contexte des reconstructions

### 4.3.2.1 Données *in vivo*

Dans le but d'étudier la reproductibilité des reconstructions entre les directions d'activation, deux groupes de jeux de données, issus d'un même sujet sain féminin de 21 ans, sont sélectionnés. Le premier groupe concerne des données d'activation dans la direction AP et est composé de trois acquisitions, supposées de « bonne qualité » avec un fort SNR. Le deuxième groupe contient trois acquisitions dans la direction LR, de « qualité moindre ». Le tableau 4.2 présente ces jeux de données avec leurs niveaux moyens d'OSS-SNR. La figure 4.18 illustre, avec les jeux de données de chaque activation, les motifs des trois composantes de déplacement selon les deux directions. Dans cet exemple, les motifs de propagation d'onde du cas AP se démarquent plus nettement que pour le cas LR.

**Tableau 4.2** OSS-SNR des différentes acquisitions de cerveau humain.

Acquisition	1	2	3
Direction AP	19.37	15.20	14.53
Direction LR	6.60	12.22	12.64

### 4.3.2.2 Paramétrage général des reconstructions

L'identification est effectuée en viscoélasticité isotrope quasi-incompressible sur le module de cisaillement dynamique. Sa valeur initiale vaut  $G_0 = 3.30 + 1.19i$  kPa (soit  $\mu_0 = 3.61$  kPa et  $\xi_0 = 18$  %), tandis que la masse volumique et le module de compressibilité valent respectivement  $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup> et  $K = 1.65$  GPa. Les reconstructions sont effectuées uniquement sur le module complexe de  $G$ . Les données AP et LR sont au préalable placées dans le même repère, permettant ainsi la comparaison point par point des modules  $\mu$  et  $\xi$  reconstruits. Le maillage sur lequel sont calculés les champs de déplacement est issu de la mesure et la maille vaut donc  $2.0 \times 2.0 \times 2.0$  mm<sup>3</sup> pour un total d'environ  $5 \cdot 10^6$  degrés de liberté après application du masque. Les propriétés matérielles sont calculées sur le même maillage. Les propriétés mécaniques, représentées par le module complexe  $G$ , sont également associées à ce maillage. Les paramètres de convergence globale de l'algorithme sont le nombre maximum d'itérations, fixé à 100, et la variation relative maximale des propriétés identifiées, définie à 0.1 %. L'optimisation est assurée par la méthode

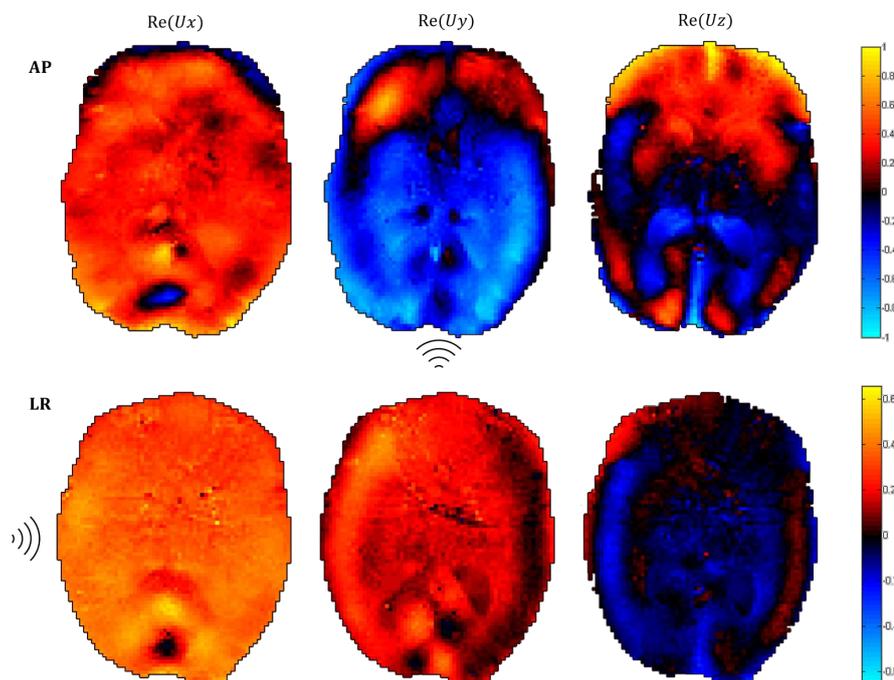


FIGURE 4.18 – Composantes réelles du déplacement normalisé par rapport au maximum des données AP-1 (haut) et LR-1 (bas) d’une coupe représentative du cerveau humain d’un même sujet. La direction principale de l’excitation dans chacune des deux configurations est indiquée par un symbole. Des motifs de propagation d’ondes différents entre les deux directions d’activation se distinguent, particulièrement dans la direction hors-plan (droite).

du GC à 3 itérations maximales. Les reconstructions sont effectuées en parallélisation sur le serveur *Narval* de l’*Alliance de recherche numérique du Canada*. Enfin, les paramètres de régularisation faisant l’objet d’une étude, ils sont détaillés par sous-section.

### 4.3.3 Limitation de la variabilité

L’approche AFC, dont l’apport pour la reconstruction a été précédemment éprouvé dans un cadre *in silico* multi-paramétrique, est ici confrontée à un contexte *in vivo* relativement standard. Cette étude vise à comparer les reconstructions par approche DFC et AFC entre plusieurs jeux de données du cerveau humain avec une approche qualitative puis quantitative. L’intérêt de l’utilisation de l’approche pour la reproductibilité des reconstructions est présenté.

### 4.3.3.1 Paramétrage

Cette sous-section reprend le paramétrage de l'étude de Smith détaillé précédemment et s'intéresse à la variabilité des reconstructions AP et LR pour les formulations DFC et AFC. Dans ce cadre, les zones sont isotropes tel que  $L_Z = 2.54$  cm (soit  $\lambda_0/L_Z = 1.50$ ). Le FS est donné est par  $\sigma_{fs} = 3.0$  mm et la variation totale n'est pas activée ( $\alpha_{TV} = 0$ ). Les exemples « extrêmes » de reconstructions sont d'abord isolés et analysés. Il s'agit du « meilleur » jeu, le AP-1 (OSS-SNR=19.57), et du pire jeu, le LR-1 (OSS-SNR=6.60). Ensuite, les reconstructions sont groupées par direction d'activation afin de déterminer la variabilité des reconstructions entre les acquisitions. Les reconstructions sont effectuées sur 48 processeurs durant environ 2.5 heures (pour la formulation DFC) ou 4.5 heures (pour la formulation AFC).

### 4.3.3.2 Réduction de la variabilité

La figure 4.19 montre que la formulation AFC fournit des reconstructions plus stables sur différents niveaux de signal. Les reconstructions du module de cisaillement des données AP s'accordent pour les 2 formulations. La reconstruction par l'approche DFC des données LR présente une région « chaude » où le module de cisaillement est sur-estimé et dont la répartition est asymétrique, en désaccord avec les profils attendus. Ce résultat est lié directement à une chute du SNR dans cette même région. En revanche, la formulation AFC évite cela en reconstruisant des modules avec une faible variance dans la région concernée, mais à valeur plus proche de ce qui est attendu. Les autres régions, dont le niveau de SNR est plus élevé, montrent une meilleure similarité entre les formulations DFC et AFC tout comme les données AP et LR. Les différences des identifications de l'amortissement sont moins prononcées, mais demeurent favorables à la formulation AFC. Le tableau 4.3 quantifie les différences entre les données AP et LR selon la formulation employée. Cette différence est à peu près réduite de moitié par la méthode AFC.

**Tableau 4.3** Différences moyennées des paramètres de reconstruction pour les données AP-1 et LR-1.

Formulation	$ \overline{\mu_{AP}} - \overline{\mu_{LR}} $ (kPa)	$ \overline{\xi_{AP}} - \overline{\xi_{LR}} $ (%)
DFC	0.686	47.0
AFC	0.365	22.3

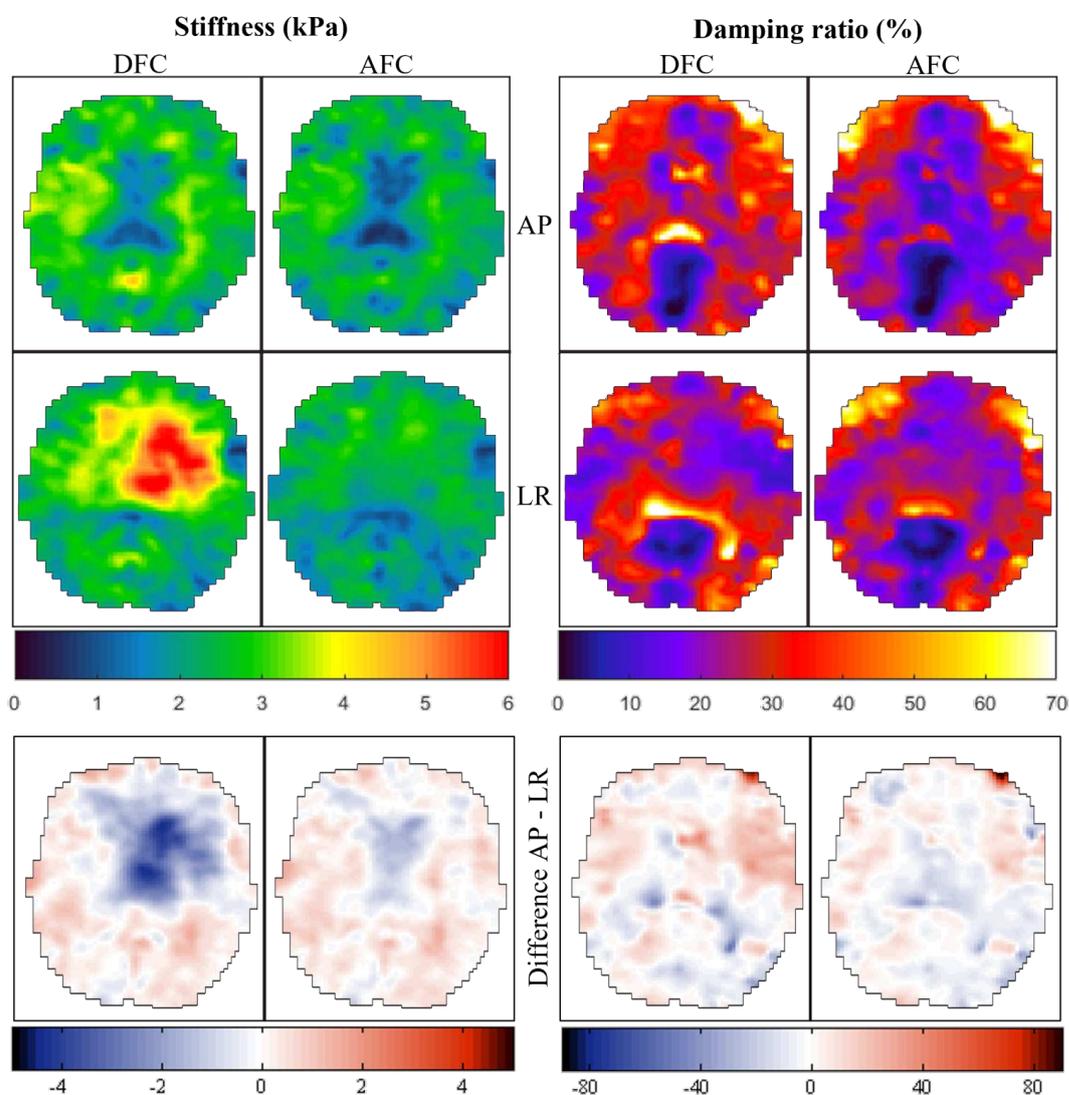


FIGURE 4.19 – Reconstruction des cartes du module de cisaillement (gauche) et de l’amortissement (droite) d’une tranche représentative du cerveau humain pour des données AP-1 (première ligne) et LR-1 (deuxième ligne) en utilisant les approches DFC (première et troisième colonnes) et AFC (deuxième et quatrième colonnes). Les différences entre les reconstructions AP et LR pour chaque considération sont intégrées (troisième ligne).

### 4.3.3.3 Reproductibilité

La figure 4.20 illustre, pour une tranche représentative, le gain de reproductivité pour diverses données ERM *in vivo* apporté par AFC. En effet, l’écart-type spatial

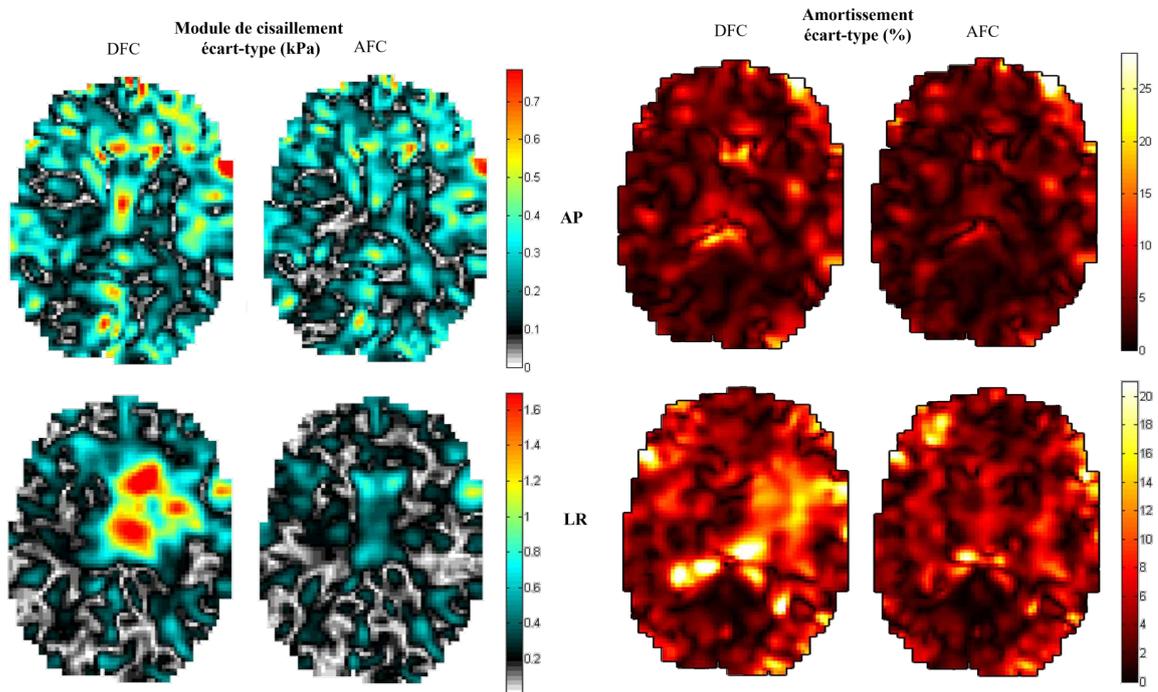


FIGURE 4.20 – Écart-types des modules de cisaillement (gauche) et de l’amortissement (droite) reconstruits d’une tranche représentative pour trois jeux de données AP (haut) et trois jeux de données LR (bas) par les méthodes DFC (première et troisième colonne) et AFC (deuxième et quatrième colonne).

des trois jeux de données est toujours plus faible pour l’approche AFC que la DFC, quelque soit la direction d’activation et le module reconstruit. Si la pertinence d’une telle donnée statistique est limitée au vu du faible nombre de répétitions, la tendance de restriction de la variabilité des modules reconstruits dans l’ensemble du volume démontre l’apport de la méthode AFC. La figure 4.21 représente les profils de distribution des modules de cisaillement intégrant l’ensemble des reconstructions. Conformément aux observations précédentes, la méthode AFC tend vers une évaluation de la rigidité d’une moyenne plus faible que pour la méthode DFC. Cette différence entre les rigidités moyennes s’estime à 0.3 kPa dans le cas des données AP. L’écart-type global des reconstructions par AFC est plus faible que par DFC. Enfin, les profils de distribution des jeux de données AP et LR reconstruits par AFC sont relativement similaires, contrairement aux reconstructions par la méthode DFC pénalisées notamment par une sur-estimation du module dans le cas des données

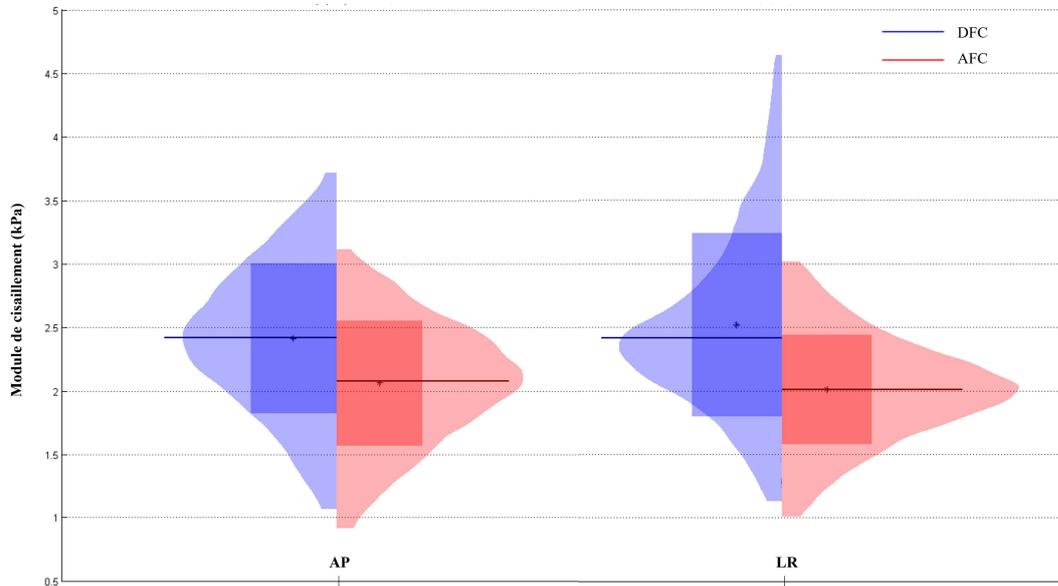


FIGURE 4.21 – Profils de distributions des reconstructions des rigidités de cisaillement (en kPa) par approche DFC (bleu) et AFC (rouge) de trois répétitions moyennées d’activation AP (gauche) et LR (droite) d’un cerveau humain.

LR.

#### 4.3.4 Adoucissement des régularisations sur l’approche AFC

Considérant le contexte actuel des reconstructions ERM du cerveau (résolution, hétérogénéité multi-échelle, moyens de calculs, niveaux de bruits, ...), le filtrage spatial introduit à la section 3.4.2 représente une régularisation indissociable de l’algorithme *subzone NLI*. Toutefois, les gains de stabilité et de reproductibilité des reconstructions apportés par l’approche AFC offrent un nouveau cadre de paramétrage des régularisations. Cette étude explore ce nouveau cadre dans l’optique de mieux tolérer les contrastes de propriétés matérielles dans des régions localisées.

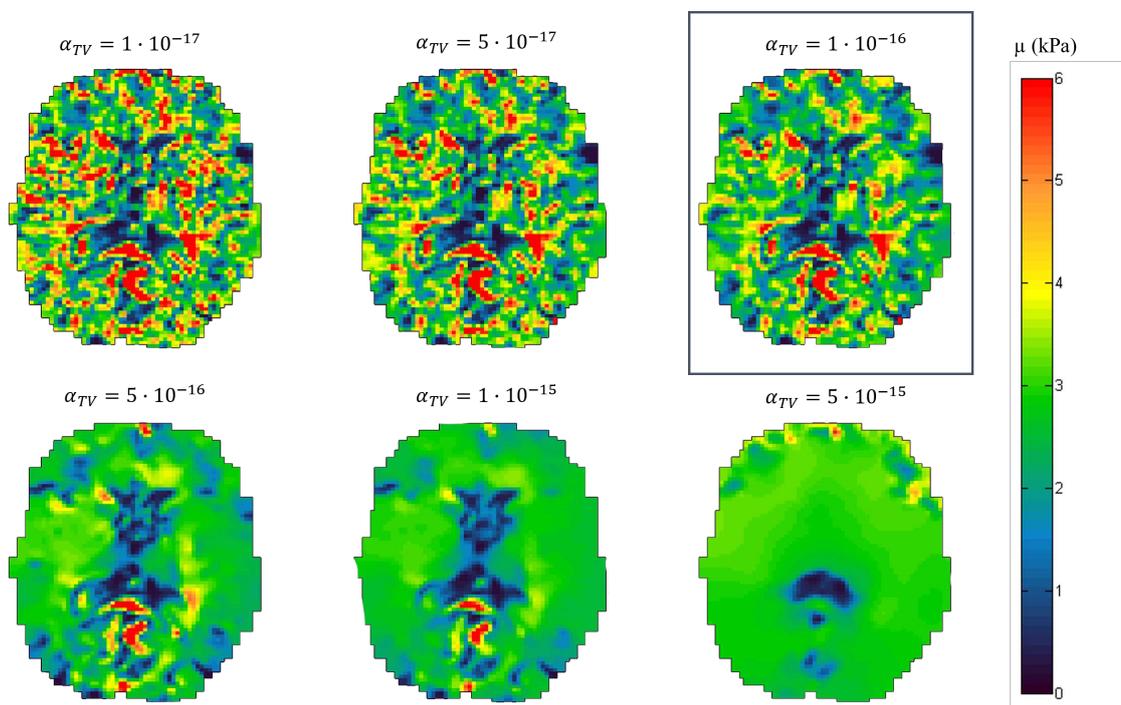


FIGURE 4.22 – Reconstruction des cartes du module de cisaillement (en kPa) d’une tranche représentative des données AP-1 par approche AFC pour différentes valeurs de  $\alpha_{TV}$ . La carte encadrée indique le paramétrage retenu par l’étude.

#### 4.3.4.1 Paramétrage

Pour cette étude, la résolution spatiale est sensiblement augmentée par rapport à la configuration précédente *via* le choix des tailles de zones. Celles-ci sont définies comme isotropes tel que  $L_Z = 2.99$  cm (soit  $\lambda_0/L_Z = 1.09$ ). Afin de limiter la régularisation spatiale, trois tailles de filtre sont définies tel que  $\sigma_{fs} = [0.67; 1.0; 1.5]$  mm. Afin de stabiliser les reconstructions, la régularisation par variation totale est désormais activée avec  $\alpha_{TV} \in [5 \cdot 10^{-17}; 1 \cdot 10^{-15}]$ . L’approche AFC est employée sur les 3 jeux de données AP. Les reconstructions sont effectuées sur 144 processeurs durant environ 6.5 heures.

#### 4.3.4.2 Effet de la variation totale

Dans un premier temps, plusieurs reconstructions d'un seul jeu de données (AP-1) sont effectuées afin de déterminer une valeur de pondération de la variation totale  $\alpha_{TV}$  permettant une distinction nette de contrastes tout en limitant la multiplication des sur-estimations causées par un mauvais SNR dans des régions très localisées (quelques voxels). Pour cela, la plus petite taille de filtrage spatial ( $\sigma_{fs} = 0.67$  mm) est appliquée. La figure 4.22 présente les reconstructions du module de cisaillement de différentes pondérations de la variation totale. Pour une faible pondération, les régions *a priori* sur-estimées ( $\mu > 6$  kPa) sont très nombreuses. En revanche, pour une forte pondération, la rigidité reconstruite est très homogène dans l'ensemble de la tranche, hormis dans la zone centrale contenant les ventricules. La valeur de pondération  $\alpha_{TV} = 1 \cdot 10^{-16}$  est retenue, car elle limite la présence de points chauds, présente une relativement bonne symétrie, et permet notamment de distinguer une baisse de la rigidité dans la périphérie du cerveau associée à la matière grise corticale [Hiscox et al., 2020b].

#### 4.3.4.3 Gain de la résolution spatiale

Les reconstructions sont effectuées en fixant la pondération de la variation totale, et 3 tailles de FS sur les 3 jeux de données AP sont étudiées. L'augmentation de la taille de FS s'accompagne d'une baisse des modules identifiés, comme le démontrent respectivement les figures 4.23 et 4.24 pour la rigidité de cisaillement et l'amortissement. Une diminution des écarts-types est également observée, ce qui représente un résultat naturel découlant de l'adoucissement de la distribution spatiale des modules identifiés par le FS. Une stabilité importante dans les distributions des différents paramètres mécanique reconstruits entre les répétitions est constatée aux différents niveaux de FS : pour une taille de filtre fixée, les valeurs étudiées varient dans des ordres de grandeurs de l'ordre du point de pourcentage. En effet, pour une taille de filtre fixée, les différences absolues maximales des modules identifiés moyennés sur l'ensemble du volume sont de 25 Pa pour le cisaillement et de 1.3 % pour l'amortissement. Les faibles variations entre les reconstructions pour une taille de filtre petite ( $\sigma_{fs} = 0.67$  mm) et moyenne ( $\sigma_{fs} = 1.0$  mm) dans les trois répétitions illustrent le niveau de sensibilité de ce filtrage, dont l'effet est progressivement désactivé. La taille de filtre la plus grande ( $\sigma_{fs} = 1.5$  mm) présente de grands gains dans la détection d'hétérogénéités par rapport aux reconstructions avec les paramétrages standards précédemment discutés (figure 4.19) tout en restant cohérent avec la structure du cerveau. Considérant ce dernier paramétrage de FS,

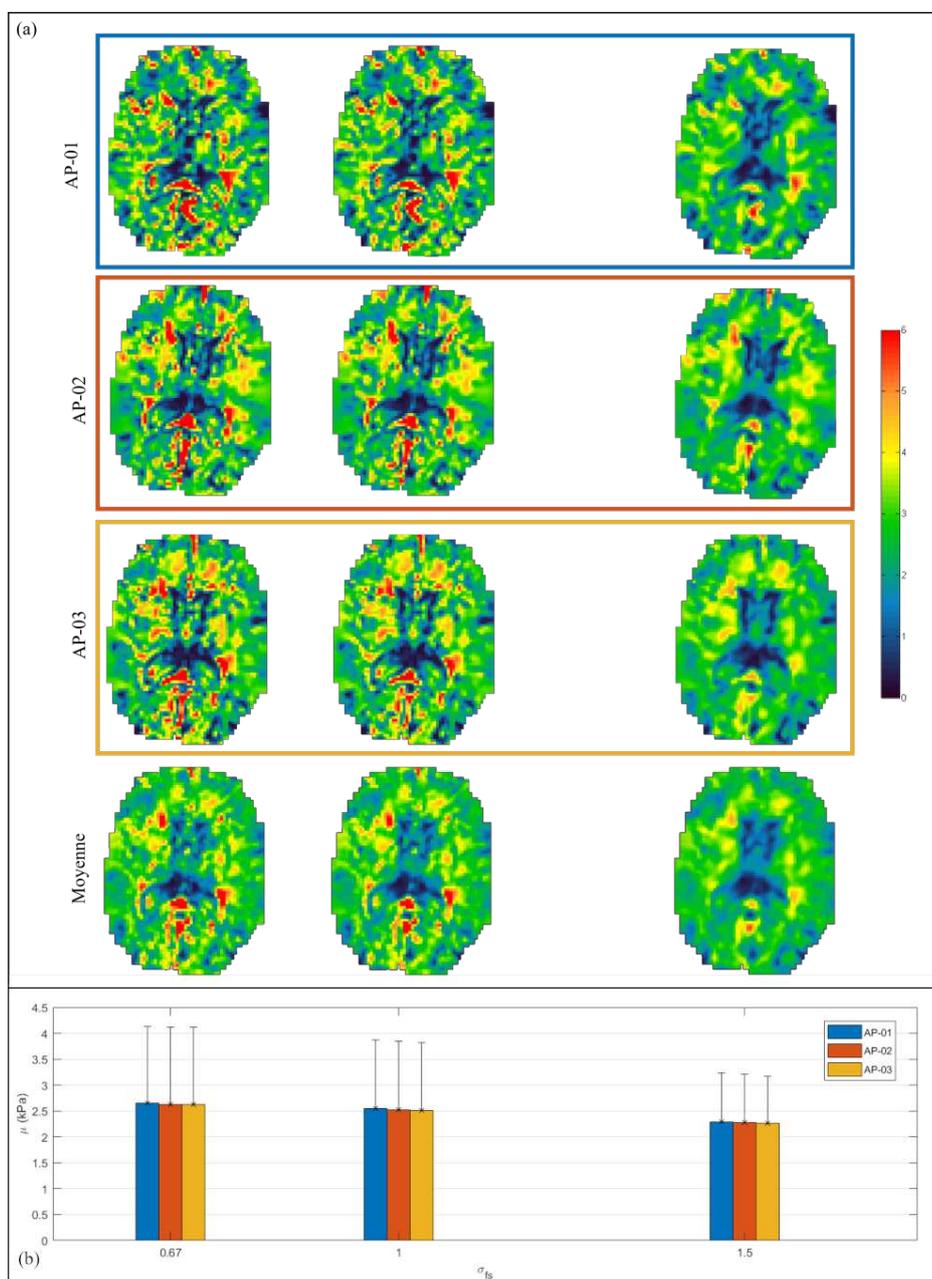


FIGURE 4.23 – Reconstructions individuelles et moyennées (a) des cartes du module de cisaillement (en kPa) d'une tranche représentative à partir des trois jeux de données (lignes) selon différents niveaux de filtrage spatial (colonnes). Le graphique (b) indique la valeur moyenne et l'écart-type dans l'ensemble du domaine des identifications individuelles.

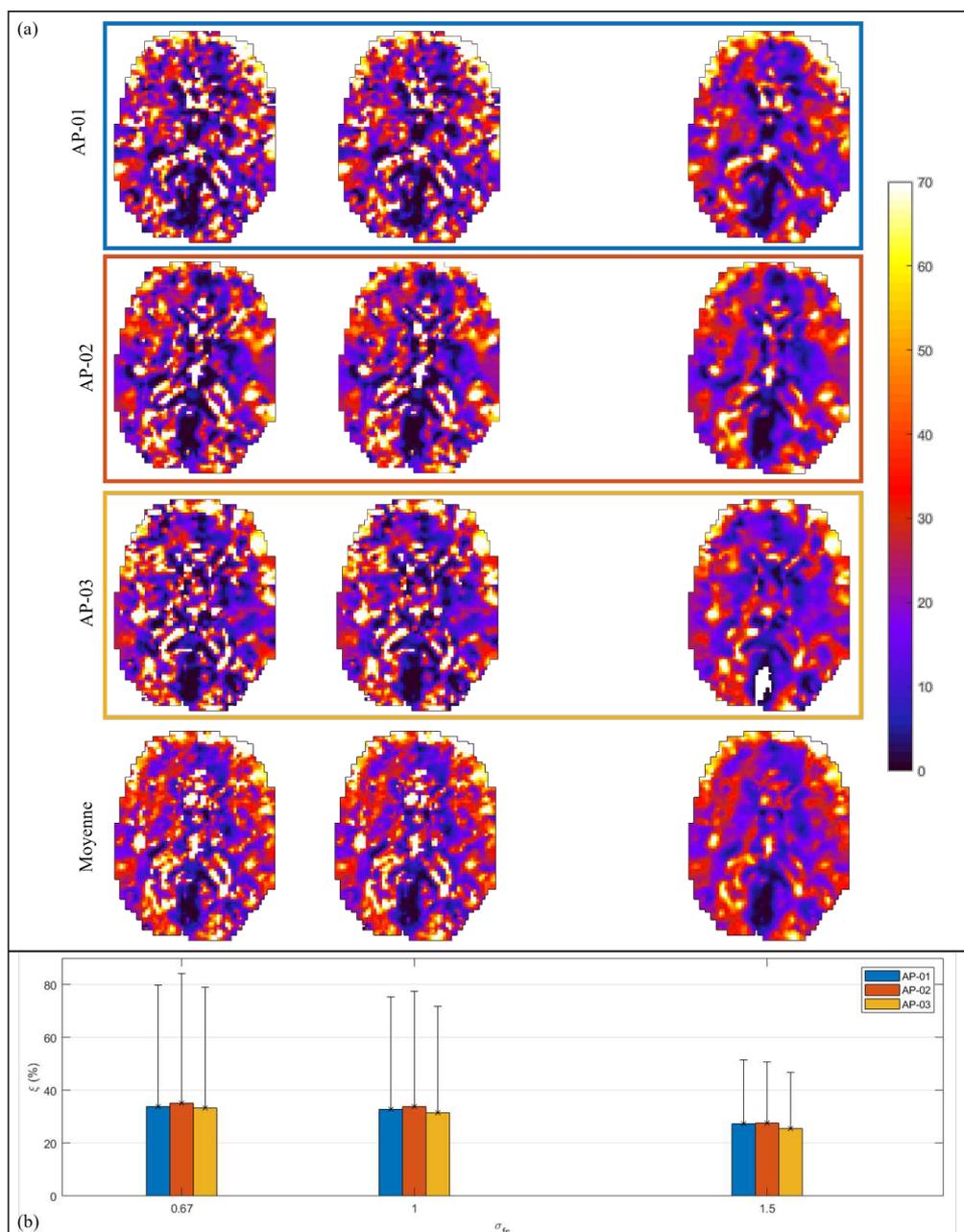


FIGURE 4.24 – Reconstructions individuelles et moyennées (a) des cartes de l’amortissement (en %) d’une tranche représentative à partir des 3 jeux de données (lignes) selon différents niveaux de filtrage spatial (colonnes). Le graphique (b) indique la valeur moyenne et l’écart-type dans l’ensemble du domaine de chaque identifications individuelles.

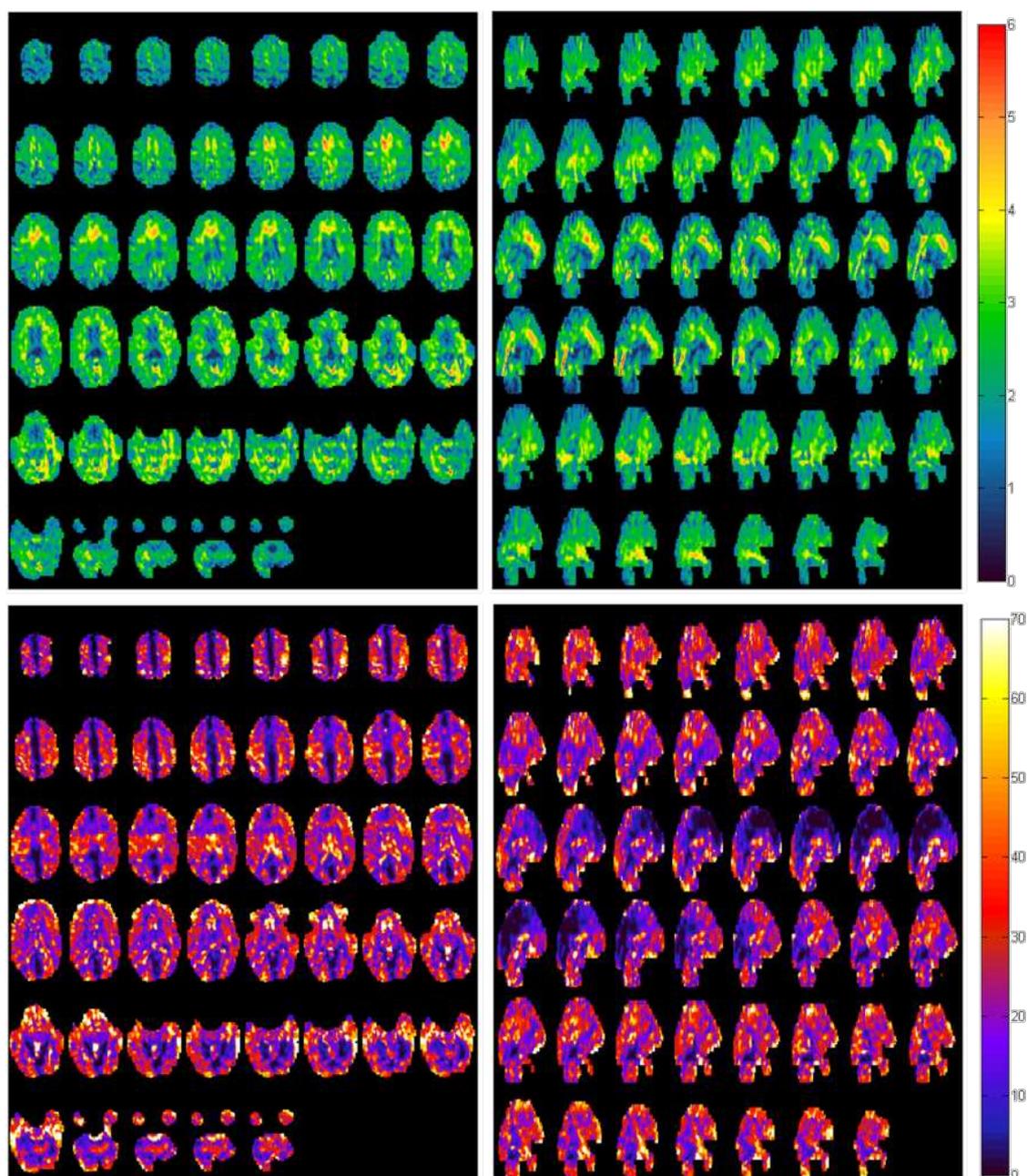


FIGURE 4.25 – Représentation de coupes de la reconstruction moyennée du modules de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans le plan axial (gauche) et sagittal (droite) à partir des reconstructions des 3 répétitions AP.

une représentation plus complète de la reconstruction moyennée dans le plan axial et le plan sagittal est fournie à la figure 4.25. Ces résultats permettent notamment des distinctions visuelles nettes, comme la détection de la matière grise corticale et la structure des ventricules, tout en contenant les sur-estimations ( $\mu > 6$  kPa), particulièrement en périphérie des ventricules.

### 4.3.5 Bilan

Des reconstructions préliminaires d'un cerveau *in vivo* humain sain confirment la robustesse de l'approche couplée pour les reconstructions de l'algorithme *subzone NLI*. Cette nouvelle approche permet de retrouver des valeurs et variances proches dans les zones à niveau de SNR raisonnable tout en réduisant la sur-estimation du module de cisaillement causée par la perte locale de signal caractéristique dans l'approche DFC. Considérant le paramétrage standard pour ce type d'identification, le décalage entre les reconstructions selon deux excitations (AP et LR) est significativement réduit par l'approche AFC, démontrant une très bonne reproductibilité pour les données en ERM sur une large plage de SNR. La répétition des activations présentées dans cette étude, bien qu'en faible nombre, indique que ce gain de reproductibilité, en plus d'être démontré à un niveau global, s'observe sur la quasi-intégralité des points reconstruits au travers d'une baisse de l'écart-type. Ce résultat rend possible l'utilisation de l'algorithme *subzone NLI* dans les situations à faible SNR telles que les études précliniques en ERM [Bayly and Garbow, 2018]. L'annexe B présente ainsi une première application concrète de la formulation AFC dans le contexte préclinique pour le petit animal réalisée par le groupe du *Mechanical Neuroimaging Lab*. L'étude présentée démontre une amélioration provoquée par l'exercice et la complexité environnementale des propriétés viscoélastiques du cerveau de rat souffrant d'un syndrome d'alcoolisation fœtale.

Des reconstructions préliminaires d'un cerveau *in vivo* humain sain confirment la robustesse de l'approche couplée pour les reconstructions de l'algorithme *subzone NLI*. Cette nouvelle approche permet de retrouver des valeurs et variances proches dans les zones à niveau de SNR raisonnable tout en réduisant la sur-estimation du module de cisaillement causée par la perte locale de signal caractéristique dans l'approche DFC. Considérant le paramétrage standard pour ce type d'identification, le décalage entre les reconstructions selon deux excitations différentes (AP et LR) est significativement réduit par l'approche AFC, démontrant une très bonne reproductibilité pour les données en ERM sur une large plage de SNR. La répétition des activations présentées dans cette étude, bien qu'en faible nombre, indique que

ce gain de reproductibilité, en plus d'être démontré à un niveau global, s'observe sur la quasi-intégralité des points reconstruits par une baisse de l'écart-type. Ce résultat rend possible l'utilisation de l'algorithme *subzone NLI* dans les situations à faible SNR telles que les études précliniques en ERM [Bayly and Garbow, 2018]. L'annexe B présente ainsi une première application concrète de la formulation AFC dans le contexte préclinique pour le petit animal réalisée par le groupe du *Mechanical Neuroimaging Lab*. L'étude présentée démontre une amélioration provoquée par l'exercice et la complexité environnementale des propriétés viscoélastiques du cerveau de rat souffrant d'un syndrome d'alcoolisation fœtale.

Lors du développement de l'approche adjointe du problème d'identification dans l'algorithme *subzone NLI* [Tan et al., 2017b], la configuration de l'intensité des régularisations a été standardisée en rendant compte d'un contexte qui a depuis évolué [McGarry et al., 2013]. L'application d'un filtrage spatial d'une valeur de  $\sigma_{fs} = 3.0$  mm fait ainsi partie des standards appliqués par les utilisateurs de l'algorithme. D'une part, la qualité des acquisitions a augmenté avec les méthodes d'activation et surtout les séquences, qui ont permis de garantir une meilleure détermination du mouvement harmonique et donc de réduire le SNR, tout en garantissant une résolution spatiale fine. Les reconstructions bénéficient également d'un gain de stabilité procuré par la méthode AFC. Ces constats permettent d'envisager une redéfinition des standards de l'algorithme *via* la diminution des termes de régularisation tout en conservant un cadre pertinent pour l'interprétation des reconstructions. Les reconstructions des données *in vivo* faiblement bruitées pour des tailles de filtre spatial réduites d'un facteur 2 à 5 stabilisées par l'implémentation d'une régularisation par variation totale, ont montré une sensibilité aux hétérogénéités infracentimétriques validée qualitativement par un bon niveau de symétrie. Une excellente répétabilité est observée entre les différentes reconstructions sur tous les paramétrages de régularisations considérés, sans relation directe avec l'OSS-SNR des données. Considérant ces résultats, un nouveau paramétrage de la régularisation par approche AFC, défini par un filtrage spatial de  $\sigma_{fs} = 1.5$  mm et stabilisé par une pondération de variation totale de  $\alpha_{TV} = 1 \cdot 10^{-16}$ , représente un standard stable de l'algorithme *subzone NLI* par approche AFC pour des données ERM *in vivo*. L'analyse de données d'avantage biaisées (OSS-SNR bas, résolution spatiale) représente un prolongement inhérent de cette étude et pourrait permettre la mise en place éventuelle de différents scénari de paramétrage de régularisation.

Au delà de la validation de l'approche AFC et le nouveau cadre de régularisation

proposé, ces analyses *in vivo* pourraient bien entendu être approfondies. L'extraction de différentes régions d'intérêt du cerveau humain affinerait grandement l'analyse de la capacité de l'approche AFC à la quantification matérielle *in vivo*. Si des distinctions cohérentes d'hétérogénéités se distinguent dans les reconstructions traitées, par exemple entre la matière blanche et la matière grise corticale, celles-ci ne peuvent être quantifiées en l'état. L'extraction des ROI est généralement réalisée à l'aide d'un modèle structurel standardisé qui requière les images  $T_1$  et  $T_2$ , non-utilisées dans cette étude. La prise en compte de l'imagerie du tenseur de diffusion mérite également d'être considérée étant donné la multiplication récente des études en ERM intégrant l'orientation des fibres. Une intégration de ces ROI couplée au nouveau contexte de résolution spatiale dans l'identification développé dans ces travaux représente une ouverture stimulante dans les applications de l'ERM en neuroimagerie.

# Conclusion

L'étude fondatrice de l'élastographie par résonance magnétique, réalisée par Muthupillai et al. en 1995, se concluait en présageant de l'utilité de la technique pour la caractérisation « d'objets hétérogènes », et se risquait à « spéculer » sur la capacité de la technique à « jouer un rôle dans la détection de tumeurs dans des tissus comme le sein, le foie, les reins et la prostate » [Muthupillai et al., 1995]. En août 2022 se tenait à l'Hôpital Universitaire de la Charité (Berlin, Allemagne) un workshop ISMRM [Guo et al., 2023] rassemblant un groupe de travail international autour des thématiques de l'élastographie par résonance magnétique. Durant ce rassemblement, une large majorité de travaux présentés par la communauté décrivait des applications cliniques d'une grande diversité, allant de l'interaction cellulaire à la détection de nouveaux biomarqueurs de la sclérose en plaques. En moins de trois décennies, l'élastographie par résonance magnétique est devenue une modalité d'imagerie médicale à part entière, aujourd'hui adoptée par le milieu clinique, et dont l'application à des finalités médicales concrètes est le moteur des activités de la recherche actuelle menée par cette communauté.

Ce manuscrit de thèse est construit afin d'intégrer cette tendance d'applications concrètes à des développements plus vastes inspirés par la modélisation numérique et la mécanique expérimentale. La problématique portée par les biais de mesure de l'élastographie, socle commun de ces développements, est considérée sous deux aspects : leur caractérisation et leur limitation.

La pluridisciplinarité requise par les études en élastographie rend la caractérisation de ses biais complexe et indirecte, restreignant par conséquent une description consensuelle des biais. Dans ces travaux, la problématique de leur caractérisation est abordée par l'adaptation d'un système de tomographie optique par découpage laser au contexte de l'élastographie. L'ensemble du dispositif expérimental et la procédure numérique mises en place forment un outil nouveau, alternatif au scanner

---

IRM, pour la mesure de champs cinématiques 3D harmoniques, particulièrement adapté aux matériaux fantômes. La procédure bénéficie notamment d'éléments de techniques expérimentales en tomographie éprouvées pour produire une caractérisation plus directe des biais que celle existante par IRM. La confrontation des mesures, réalisée dans un contexte reproductible en IRM sur divers échantillons, valide les dispositions de l'ensemble à des applications plus concrètes. Les perspectives de poursuite de ces travaux sont déclinées sous deux aspects. Premièrement, les fortes résolutions spatiales et temporelles potentielles du tomographe peuvent en faire un dispositif métrologique pertinent pour la caractérisation de nouvelles techniques de mesures cinématiques IRM, intégrant les développements d'actionneurs ou de séquences. Secondement, le tomographe peut tirer bénéfice d'une sensibilité amoindrie envers certains phénomènes physiques contraignants pour la mesure de champs en environnement IRM, le couplage fluide-solide préfigurant parmi les applications les plus évidentes. Cet aspect constitue une ouverture stimulante vers des problématiques d'amélioration de l'intégration de la vascularisation dans l'élastographie par résonance magnétique.

L'accumulation des biais au cours des différentes phases des études d'élastographie restreint le possible des applications. Le second aspect abordé dans ce manuscrit, la limitation des biais de l'élastographie, est traité par une nouvelle approche de la résolution du problème d'identification. Cette approche, dénommée AFC, s'inscrit dans le prolongement de précédents travaux inspirés des problématiques de l'imagerie médicale en adaptant ces formalismes à un algorithme de reconstruction *subzone NLI*, en viscoélasticité linéaire isotrope 3D par décomposition en sous-domaines. L'approche AFC repose sur un formalisme où le calcul d'un champ de déplacement associé aux propriétés mécaniques recherchées n'intègre pas directement les mesures expérimentales, principales sources de biais. Dans ce nouveau formalisme, les champs mesurés sont pleinement supportés par un champ adjoint, désormais couplé au champ de déplacement calculé, permettant l'optimisation du problème d'identification par rapport aux propriétés. Ces travaux de thèse décrivent l'implémentation de l'approche couplée dans un algorithme d'inversion non-linéaire et présente les premières confrontations d'une telle approche à des données réelles. Un net gain de stabilité des identifications est démontré dans de multiples configurations, élargissant la gamme de tolérance au bruit des mesures de l'élastographie par résonance magnétique et confirmant la pertinence de cette modalité pour la quantification de biomarqueurs à forts niveaux de contrastes. Une poursuite immédiate de ces travaux s'inscrivant dans la dynamique de récentes applications porte sur l'implémentation

d'une forme anisotrope suivant un principe similaire. Plus généralement, un cadre d'applications direct particulièrement prometteur, déjà exploré dans des travaux annexes, porte sur le développement d'études pré-cliniques et l'accélération de leur validation assurée par la stabilisation des reconstructions.

Enfin, les multiples études paramétriques de reconstructions des propriétés matérielles à partir de mesures de diverses natures (simulations, fantômes, cerveaux *in vivo*) font de ce manuscrit un inventaire détaillé et actualisé de l'algorithme d'identification *subzone NLI*, dans ses formulations isotropes viscoélastiques compressible et incompressible. Ce travail représente un outil pratique pour la compréhension et la prise en main de cet algorithme, développé et exploité par plusieurs groupes de recherches. Un paramétrage affinant la résolution spatiale en permettant la détection d'hétérogénéités infracentimétriques *in vivo* est établi et constitue une ouverture vers de nouvelles perspectives d'applications de l'élastographie par résonance magnétique.



# Annexe A

## Dispositif pneumatique multi-voies

Un travail complémentaire effectué dans ces travaux de thèses non développé dans ce manuscrit porte sur la mise en place et la validation d'un dispositif pneumatique multi-voies d'actionneurs pour diverses applications autour des thématiques de l'élastographie par résonance magnétique. Le rôle et la diversité des actionneurs sont présentés dans la section 1.1.1.

Le développement de l'actionneur a été réalisé au LMGC en collaboration avec deux structures d'appui à la recherche du laboratoire : le service Expérimentation et Calcul Scientifique (COMPEX) pour le développement technique et la métrologie de l'actionneur, et la plateforme PRO3D pour le développement des prototypes 3D. Le personnel ayant participé à la conception du dispositif se compose de Jonathan Barès (fabrication des silicones, CAO, expertise métrologique), de Quentin Chapelier (conception électronique), d'Yvan Duhamel (impressions 3D) et de Gille Camp (conception mécanique). Le dispositif est portatif et peut donc être déplacé et installé dans différents environnements. Il est actuellement utilisé à l'Université de Sherbrooke pour des travaux au Département de génie mécanique portant sur des développements d'un soutien-gorge intelligent pour la détection de cancer du sein. Bien qu'il ait fait l'objet d'analyses métrologiques en laboratoire dans la foulée de sa conception, ce dispositif n'a pas encore été sujet d'une évaluation complète selon les critères imposés en milieu clinique au sujet pour sa bénignité. Son utilisation en milieu IRM passe par la validation d'un protocole éthique. Cette annexe présente quelques éléments de description de la conception du dispositif et d'analyses métrologiques.

## A.1 Principe et pilotage

### A.1.1 Description du dispositif

L'objectif du dispositif est de propager des ondes créées par le mouvement oscillatoire d'un actionneur connecté au réseau pneumatique. Le mouvement est obtenu par le pilotage en fréquence de deux circuits dans l'actionneur : le circuit de surpression (P+, supérieur à 1 bar) et le circuit de dépression (P-, inférieur à 1 bar). Chaque canal associé à un actionneur est une voie, le dispositif étant composé de six voies. Enfin, deux réseaux de composants se distinguent : le réseau pneumatique et le réseau électronique.

Le réseau pneumatique contient :

- Une entrée d'air comprimé à pression constante.
- Des raccords et tuyaux pneumatiques avec un diamètre externe de 4 mm (circuit P+) ou de 8 mm (circuit P-).
- Des cônes de venturi (6), utilisés pour générer la dépression dans le circuit P-.
- Des régulateurs de pression (2) permettant de contrôler le niveau de pression dans le circuit P+ et le circuit P-, indépendamment l'un de l'autre.
- Des électrovannes (12), également connectées au réseau électronique. Elles permettent de piloter l'ouverture ou la fermeture par voies et par circuits.
- Des actionneurs (6), aussi appelés coussins. Ils se composent d'un coeur en PLA réalisé par impression 3D, sur lequel est collée une couche de silicone de quelques millimètres d'épaisseur. Le coeur du coussin est connecté au réseau pneumatique par un tuyau à air d'un diamètre extérieur de 4 mm. Afin de varier les applications, deux tailles de coussins ont été développées : de 6 cm et de 12 cm de diamètre, avec une hauteur commune de 2 cm. Les coussins supportent un différentiel de pression entre l'extérieur et l'intérieur atteignant 2 bar.
- Des vannes peuvent également être disposées en sortie d'une voie, à la place des actionneurs, afin de la fermer, dans des applications où toutes les voies ne sont pas nécessaires. Dans cette situation, il est cependant plus convenable de ne simplement pas activer la voie concernée.

Le réseau électronique contient :

- Une alimentation 24 V.

- Une carte Arduino MEGA 2560 avec afficheur LCD. La carte contient un programme permettant le pilotage en fréquence et en phase des voies. Chacun de ces paramètres est définissable manuellement par une interface sur l’afficheur.
- Des modules à MOSFET (*metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*) (12), utilisés pour la transmission des signaux de pilotage de la carte Arduino vers les électrovannes.

### A.1.2 Fonctionnement du dispositif

La figure A.1 illustre le prototype et schématise le réseau pneumatique. Le dispositif est connecté à une entrée d’air pneumatique du réseau de laboratoire ou d’hôpital. Un raccord permet de séparer la pression d’entrée en deux circuits (P+ et P-), chacun étant connecté à un régulateur de pression afin de maintenir un niveau de surpression constant dans chaque circuit. Pour le circuit P-, les venturis génèrent une dépression dont l’intensité est inversement proportionnelle à la surpression en entrée. Les électrovannes d’une même voie s’ouvrent et se ferment en alternance selon la fréquence et la déphasage de pilotages. Pour chaque voie, il est possible de piloter des fréquences (de 1 à 100 Hz) et des déphasages (de 0 à  $2\pi$  rad) différents. En sortie d’électrovannes, les deux circuits sont raccordés par voies et transmettent aux actionneurs le niveau de pression : si l’électrovanne P+ est ouverte (*i.e.* P-fermée), alors le coussin gonfle ; si l’électrovanne P- est ouverte (*i.e.* P+ fermée), alors le coussin dégonfle. Un tuyaux connecte le raccord des circuits vers le coussin. Dans un environnement IRM, l’ensemble est conçu afin que seuls les coussins soient disposés dans la salle du scanner, le reste du dispositif restant en salle de contrôle. Les tuyaux connectant les coussins mesurent environ 5 m de long mais leur longueur peut varier selon les dimensions des salles.

## A.2 Métrologie

Dans l’optique d’évaluer la qualité du mouvement généré sur les actionneurs par le dispositif, celui-ci fait l’objet d’analyses métrologiques. Les 6 actionneurs du dispositif sont activés par une fréquence de pilotage  $f_0$  variant de 1 à 100 Hz, sans déphasage imposé. Un actionneur vibrant librement est isolé et disposé entre une caméra rapide et un panneau de LED permettant l’acquisition d’images à forts niveaux de contraste avec une résolution temporelle de 40 mesures par période  $T_0$ . Les 5 autres actionneurs demeurent actifs, libres ou sous charge. L’actionneur étudié

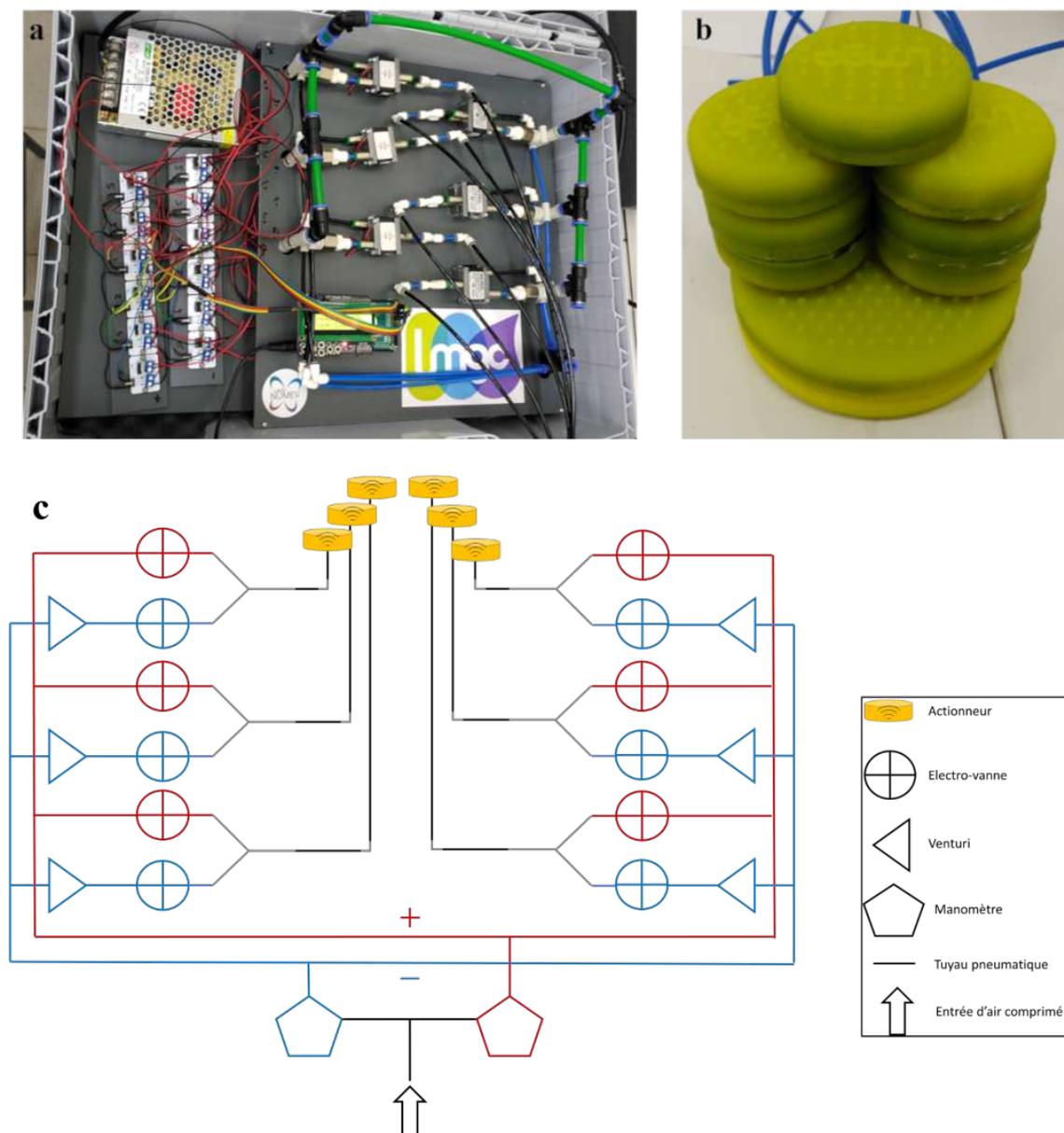


FIGURE A.1 – Photographie du réseau électronique (gauche) et pneumatique (droite), actifs (a). Photographie des actionneurs (7 de 6 cm de diamètre, 1 de 12 cm de diamètre) (b). Schéma du réseau pneumatique du dispositif à 6 voies (c). Le circuit générant la surpression est désigné en bleu et le circuit générant la dépression est représenté en rouge.

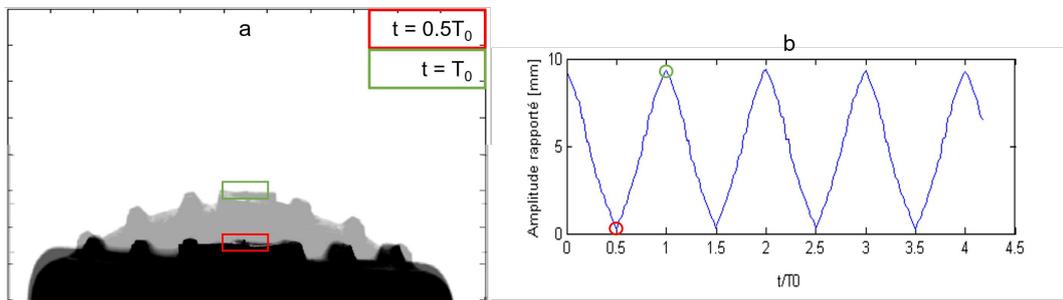


FIGURE A.2 – Suivi temporel de la position verticale de la zone centrale moyennée de l'actionneur libre par rétro-éclairage. Les encadrements en rouge indiquent l'instant où l'amplitude est minimale, et les encadrements en vert indiquent l'instant où l'amplitude est maximale. (a) : Images superposées acquises à une demi-période d'écart. (b) : Représentation temporelle de l'amplitude mesurée.

est régulièrement permuté. Les résultats présentés portent sur les actionneurs de 6 cm de diamètre. Pour une image à un pas de temps donné, la détection d'une variation brutale des niveaux de gris dans l'axe vertical d'une zone de la surface supérieure de l'actionneur détermine la position verticale. Le mouvement vertical est ensuite reconstruit en moyennant les valeurs mesurées dans la zone puis en assemblant temporellement ces moyennes. La figure A.2 illustre cette technique par rétro-éclairage pour la mesure de l'amplitude temporelle de l'actionneur.

### A.2.1 Réponse en fréquence

Le but de l'actionneur isolé, tel que conceptualisé dans ces développements, étant de retranscrire un signal mono-fréquentiel, une analyse spectrale des déplacements temporels mesurés est réalisée par TFD. La figure A.3 montre que les 4 réponses fréquentielles (25, 50, 75 et 100 Hz) étudiées fournissent des résultats satisfaisants. Un pic d'amplitude est observé à la fréquence de pilotage et peu de signaux résiduels sont présents autour de la fréquence. La qualité des signaux a toutefois tendance à se dégrader légèrement avec l'augmentation de la fréquence. Ce résultat est en partie lié à la perte globale d'amplitude avec la fréquence, rendant l'analyse plus sensible aux erreurs de mesure.

### A.2.2 Perte de charge

Les tuyaux reliant le dispositif en salle de contrôle aux coussins ayant une longueur importante, une évaluation des pertes de charge est réalisée. En assumant une

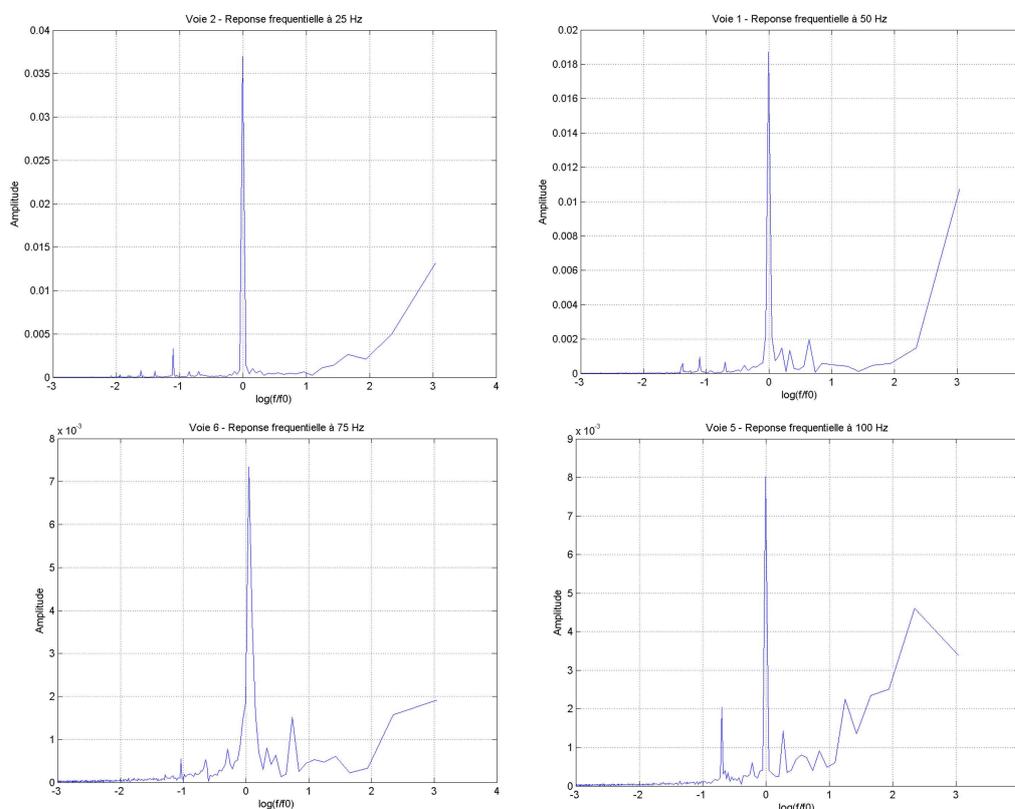


FIGURE A.3 – Réponse fréquentielle de l’amplitude de l’actionneur autour de la fréquence de pilotage  $f_0$  normalisée à 25 Hz (haut, gauche), 50 Hz (haut, droite), 75 Hz (bas, gauche) et 100 Hz (bas, droite).

relation linéaire entre la pression et l’amplitude verticale des coussins, l’influence de la longueur du tuyau sur l’amplitude est étudiée. Pour cela, une acquisition à une fréquence de pilotage et une longueur de tuyau comporte 20 périodes et les amplitudes associées à chacune de ces périodes sont moyennées. Les niveaux de pressions des circuits P+ et P- varient selon la fréquence, rendant la comparaison par fréquence peu pertinente. La figure A.4 représente l’évolution de l’amplitude moyennée pour différentes longueurs de tuyaux et différentes fréquences. Bien qu’une diminution de l’amplitude avec la longueur soit généralement observée, celle-ci est peu significative (5 à 15 %).

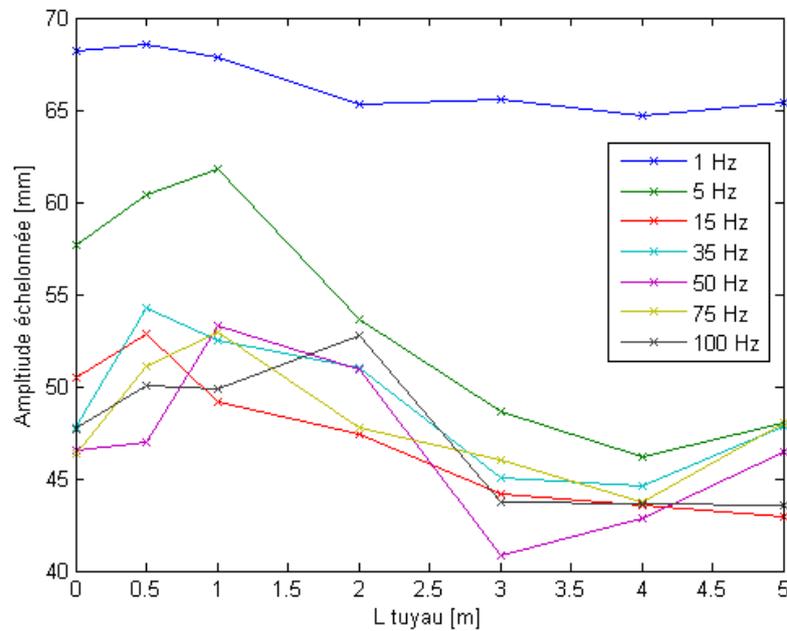


FIGURE A.4 – Effet de 7 longueurs différentes du tuyau sur l’amplitude échantillonnée (moyenne sur 20 périodes) d’un actionneur libre pour 7 fréquences différentes.

### A.3 Perspectives

La métrologie du dispositif multi-voies non-chargé présente des résultats encourageants pour des applications futures. Les analyses réalisées ont montré une bonne capacité du dispositif à générer des ondes dans un milieu matériel pour une gamme de fréquence allant de 1 à 100 Hz. La confrontation du dispositif à des matériaux fantômes constitue une étape intermédiaire en vue de validation pour une application en milieu clinique. Le dispositif est facilement transportable et la multiplication des voies en font un outil polyvalent, lui offrant un champ d’applications large. Le dispositif semble notamment particulièrement adapté pour la réalisation de sollicitations multi-fréquentielles simultanées.



## Annexe B

# Étude préclinique sur le petit animal

Cette annexe présente une application concrète de la formulation AFC, dont le formalisme est introduit dans le chapitre 3 et l'apport valorisé par les résultats du chapitre 4, dans un contexte préclinique pour le petit animal. Cette étude, réalisée à l'Université de Delaware par L. Tyler Williams et al., traite de la reconstruction des propriétés mécaniques du cerveau de rongeurs atteints d'un syndrome d'alcoolisation fœtale. La reconstruction du module de cisaillement est effectuée avec la formulation AFC (appelée plus justement *NoBC NLI* dans l'article). Cette formulation a permis d'obtenir un taux de succès de 100 % dans la distinction des sujets sains et pathologiques, ce qui n'était pas atteint avec la précédente formulation (DFC).

## Exercise and Environmental Complexity Superintervention Improves Mechanical Property Recovery in FASD Rodents Measured via MRE

L. Tyler Williams<sup>1</sup>, Ian F. Smith<sup>2</sup>, Katrina A. Milbocker<sup>2</sup>, Diego A. Caban-Rivera<sup>1</sup>, Samuel Kurtz<sup>3,4</sup>, Matthew D. J. McGarry<sup>5</sup>, Elijah E. W. Van Houten<sup>4</sup>, Anna Y. Klintsova<sup>2</sup>, and Curtis L. Johnson<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Biomedical Engineering, University of Delaware, Newark, DE, United States, <sup>2</sup>Dept. of Psychological & Brain Sciences, University of Delaware, Newark, DE, United States, <sup>3</sup>Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, CNRS, Université de Montpellier, Montpellier, France, <sup>4</sup>Département de Génie Mécanique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, QC, Canada, <sup>5</sup>Thayer School of Engineering, Dartmouth College, Hanover, NH, United States

### Synopsis

**Keywords:** Elastography, Preclinical

In this longitudinal study, we investigate the effects of fetal alcohol exposure on mechanical properties in the developing rodent brain using magnetic resonance elastography (MRE). Additionally, we test whether behavioral “superintervention,” consisting of combined exposure to wheel running followed by environmental complexity, can mitigate changes to property measures. We found that alcohol exposed rats exhibit lower stiffness than sham intubated rats at baseline but recover stiffness to near baseline levels after superintervention. Furthermore, we confirmed MRE is sensitive to small property variations in rodents which may reflect myelination and microstructural integrity.

### Introduction

Fetal alcohol spectrum disorders (FASDs) can result from alcohol exposure (AE) during the prenatal period. Individuals diagnosed with FASDs suffer from impaired cognition, motor control, emotionality, and social behavior.<sup>1</sup> Neuroanatomical changes brought on by AE include abnormal myelination and white matter connectivity, particularly in executive function-related neural circuitry.<sup>2</sup> Behavioral treatments for AE are nonexistent, but exercise has been shown to enhance proliferation of neuronal precursors and increase white matter growth.<sup>3,4</sup> Furthermore, environmental complexity following exercise extends the survival of newly generated cells in rats.<sup>5</sup> Brain mechanical properties measured *in vivo* using magnetic resonance elastography (MRE) may reflect these microstructural changes in FASD rats.

MRE is a noninvasive, quantitative MRI technique used to estimate mechanical properties. While preclinical MRE research is limited,<sup>6,7</sup> we validated a technique for rodent MRE using the nonlinear inversion algorithm (NLI) with translatable quality and resolution to humans.<sup>8</sup> In this longitudinal study, we investigate the effects of fetal alcohol exposure on mechanical properties in the developing rodent brain. Additionally, we test whether behavioral “superintervention,” consisting of combined exposure to wheel running (WR) followed by environmental complexity (EC), can mitigate AE-induced changes to MRE measures.

### Methods

#### *Animal Preparation & Imaging*

To model FASD, female Long Evans rat pups (n=9) were given alcohol (5.25 g/kg) in milk formula twice per day from postnatal days (PD) 4-9 via intragastric intubation. Sham intubated (SI) controls were not administered any liquid during intubation (n=11). All rats were weaned and socially housed at PD23.

Between PD25-29, MRE and DTI scans were performed on animals anesthetized with 1-3% isoflurane using a Bruker 9.4T preclinical imaging system. For the MRE scans, we used a nonmagnetic, piezoelectric actuator and bite bar driver to apply vibrations at 800 Hz. A resolution of 0.25x0.25x0.5

---

mm<sup>3</sup> was achieved in 32 minutes using a custom MRE-EPI sequence with frequency matched motion encoding gradients with the following imaging parameters: TE/TR = 60/3400 ms, FOV = 20x20 mm<sup>2</sup>, matrix = 80x80, slice thickness = 0.5 mm, slices = 40, averages = 24. The MRE scan was followed by a 30 direction diffusion tensor imaging scan which is required to measure anisotropy.

Following the first scan (TP1), half of the rats were assigned to the wheel running/environmental complexity (WR/EC) superintervention group. They were pair-housed in cages with free access to an attached running wheel where they could exercise for 12 days (PD30-42). WR/EC rats were then transferred to environmental complexity cages (6-9 animals/cage). These cages were furnished with various objects and toys that were changed every other day. The remaining rats were returned to social housing (SH). After 30 days, all rats received their second MRE and DTI scans (TP2). Figure 1 shows the timeline of this study.

### Mechanical Property Estimation

Mechanical properties were estimated from MRE displacement data using isotropic NLI with a no boundary condition formulation (NoBC-NLI).<sup>9</sup> NLI outputs storage modulus ( $G'$ ) and loss modulus ( $G''$ ) which were used to calculate shear stiffness ( $\mu$ ). We also performed preliminary inversions using transversely isotropic NLI (TI-NLI), which provides more information about anisotropic tissues (such as white matter), by estimating 3 parameters: baseline shear stiffness ( $\mu$ ), shear anisotropy ( $\varphi$ ), and tensile anisotropy ( $\zeta$ ), where  $\varphi$  and  $\zeta$  represent higher stiffness in the fiber direction.<sup>10</sup> Primary fiber directions are given by the DTI data.

## Results & Discussion

Figure 2 shows AE rats exhibited softer brain tissue than SI controls at TP1 (SI = 6.59 kPa, AE = 5.94 kPa,  $p = 0.012$ ); this stiffness difference likely reflects lower white matter integrity in AE rats. Preliminary results from TI-NLI suggest that shear anisotropy and tensile anisotropy are also lower in AE rats compared to controls (Figure 3); however, optimization of TI-NLI for rodent MRE is needed to confirm how the anisotropic properties are affected. While the AE rats had slightly lower stiffness than SI rats at TP2 (SI = 6.84 kPa, AE = 6.46 kPa,  $p = 0.069$ ), this difference was less than at TP1, suggesting that the superintervention led to stiffness recovery. Indeed, the longitudinal analysis (Figure 4) indicated there was no difference from TP1 to TP2 for SI ( $\Delta\mu = 0.26$  kPa,  $p = 0.32$ ), though the AE group saw a significant increase in stiffness over time ( $\Delta\mu = 0.52$  kPa,  $p = 0.020$ ). The WR/EC condition also had a positive effect on stiffness ( $\Delta\mu = 0.45$  kPa,  $p = 0.010$ ) which agrees with the hypothesis that superintervention proliferates neuronal growth; there was also no significant difference for the SH control condition ( $\Delta\mu = 0.28$  kPa,  $p = 0.39$ ). This conclusion was reinforced by a significant increase in stiffness only within the AE/WR/EC subgroup ( $\Delta\mu = 0.62$  kPa,  $p = 0.029$ ).

## Conclusion

This study demonstrates that exercise followed by environmental complexity has a positive effect on rodent brain mechanical properties. The superintervention particularly improved the stiffness of alcohol exposed rats over time, such that brain stiffness recovered to near baseline values. Furthermore, we confirmed MRE is sensitive to small property variations in rodents which may reflect myelination and microstructural integrity. In future work, we will correlate these results with immunohistochemistry and investigate how fetal alcohol exposure and superintervention impact anisotropic properties in white matter throughout development.

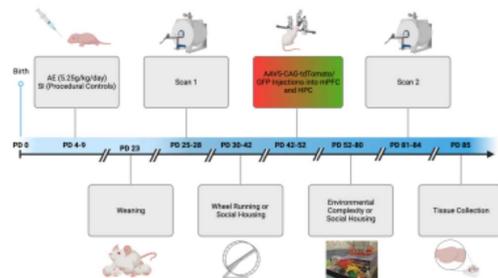
## Acknowledgements

NIH/NIBIB R01 EB027577 (Johnson), NIH/NIAAA R01AA027269-01 (Klintsova), NIH 2P20GM10365 (University of Delaware Center for Biomedical and Brain Imaging; Klintsova and Johnson)

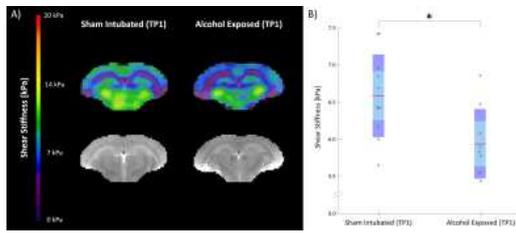
## References

1. Streissguth, A. P., Aase, J. M., Clarren, S. K., Randles, S. P., LaDue, R. A., and Smith, D. F. (1991). Fetal alcohol syndrome in adolescents and adults. *JAMA J. Am. Med. Assoc.* 266, 1077.
2. Wilhelm, C. J., and Guizzetti, M. (2016). Fetal alcohol spectrum disorders: An overview from the glia perspective. *Front. Integr. Neurosci.* 9, 1–16.
3. Helfer, J. L., Goodlett, C. R., Greenough, W. T., and Klintsova, A. Y. (2009). The effects of exercise on adolescent hippocampal neurogenesis in a rat model of binge alcohol exposure during the brain growth spurt. *Brain Res.* 1294, 1–11.
4. Milbocker, K. A., LeBlanc, G. L., Brengel, E. K., Hekmatyar, K. S., Kulkarni, P., Ferris, C. F., et al. (2022). Reduced and delayed myelination and volume of corpus callosum in an animal model of Fetal Alcohol Spectrum Disorders partially benefit from voluntary exercise. *Sci. Rep.* 12, 1–17.
5. Hamilton, G. F., Boschen, K. E., Goodlett, C. R., Greenough, W. T., and Klintsova, A. Y. (2012). Housing in Environmental Complexity Following Wheel Running Augments Survival of Newly Generated Hippocampal Neurons in a Rat Model of Binge Alcohol Exposure During the Third Trimester Equivalent. *Alcohol. Clin. Exp. Res.* 36, 1196–1204.
6. Bayly P V., Garbow JR. Pre-clinical MR elastography: principles, techniques, and applications. *J Magn Reson.* 2018;291:73-83.
7. Bigot M, Chauveau F, Beuf O, Lambert SA. Magnetic resonance elastography of rodent brain. *Front Neurol.* 2018;9(NOV):1-8.
8. Williams LT, Milbocker KA, Sullivan SR, et al. Mapping Rodent Brain Mechanical Properties In Vivo with Magnetic Resonance Elastography and Nonlinear Inversion. In: *Proc. Intl. Soc. Mag. Reson. Med.* 2022:10-12.
9. McGarry MDJ, Van Houten EEW, Johnson CL, et al. Multiresolution MR elastography using nonlinear inversion. *Med Phys.* 2012;39(10):6388-6396.
10. McGarry M, Van Houten E, Sowinski D, et al. Mapping heterogenous anisotropic tissue mechanical properties with transverse isotropic nonlinear inversion MR elastography. *Med Image Anal.* 2022;78:102432.

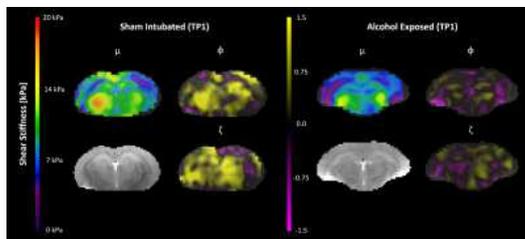
## Figures



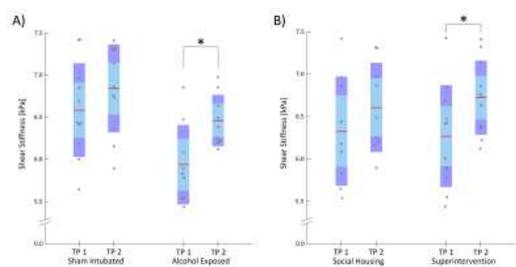
**Figure 1.** Experiment timeline. Note that the treatment conditions (SI and AE) are established at PD4-9, prior to scan one (TP1) while the intervention conditions (SH and WR/EC) are established at PD30-42, prior to scan two (TP2). Immunohistochemistry and viral axon tracing will be covered in future work.



**Figure 2.** (A) Representative shear stiffness maps for sham intubated (SI) and alcohol exposed (AE) rats at scan one (TP1). (B) Shear stiffness results from TP1. AE rats are significantly softer than SI rats ( $p = 0.012$ ).



**Figure 3.** Representative property maps of baseline shear stiffness ( $\mu$ ), shear anisotropy ( $\phi$ ), and tensile anisotropy ( $\zeta$ ) from sham intubated (SI) and alcohol exposed (AE) rats at scan one (TP1). AE rats exhibit lower anisotropic properties compared to SI rats.



**Figure 4.** (A) Shear stiffness results for sham intubated (SI) and alcohol exposed (AE) rats from scan one (TP1) to scan two (TP2). Shear stiffness increased significantly in AE rats ( $p = 0.020$ ). (B) Shear stiffness results for the social housing (SH) and wheel running/environmental complexity superintervention (WR/EC) groups from TP1 to TP2. Shear stiffness increased significantly in the WR/EC group ( $p = 0.010$ ).



# Annexe C

## Protocoles de fabrication de matériaux fantômes

Cette annexe présente les protocoles de fabrication d'une matrice d'un échantillon fantôme en gélatine et en silicone.

### C.1 Gélatine

Les motivations et problématiques liées au développement d'échantillons de gélatine sont développés dans la section 2.2.2. Le protocole pour la fabrication d'un échantillon de gélatine appliqué est :

1. Peser entre 870 et 900g d'eau distillée dans un bécher.
2. Ajouter le taux de gélatine souhaité (par rapport à la masse d'eau distillée) au bécher. Laisser quelques minutes les flocons de gélatine s'imprégner d'eau.
3. Ajouter 0.1 % de la masse d'eau distillée de marqueurs au bécher.
4. Réchauffer la solution à au moins 45° en plaçant le bécher dans un bain-marie avec agitateur activé pour générer un mélange. L'eau chaude peut-être renouvelée si la température visée n'est pas atteinte. Une dizaine de minutes sont souvent nécessaires.
5. Placer le bécher avec l'agitateur à vitesse modérée. Celui-ci a pour but de conserver une disposition homogène des marqueurs. Quand la température de la solution passe sous les 30°, réduire encore la vitesse d'agitation afin de ne pas piéger de bulles d'air dans la solution. Procéder à un refroidissement de la solution, jusqu'à 25°. Pour cela, il y a deux options :

- a) Laisser la solution à l'air libre et refroidir doucement.
  - b) Réaliser un bain-marie froid et surveiller attentivement l'évolution de la température de la solution.
6. Si un démoulage de l'échantillon est planifié : percer le centre de la face inférieure du moule et le scotcher afin d'aménager une entrée d'air pour faciliter le démoulage. La faible concentration de gélatine la rendant fragile, il est possible d'appliquer un agent démoulant, à l'aide d'un tissu, sur les arrêtes internes du moule préalablement nettoyé.
  7. Vérifier la température du bécher. Celui-ci doit être coulé idéalement à 24°. Transvaser doucement la solution vers la boîte. Si le mélange est trop chaud, les marqueurs vont avoir tendance à décanter, ce qui rendra leur densité hétérogène. S'il est trop froid, la solution a déjà commencé à gélifier et sera inexploitable, des bulles d'air étant piégées à l'intérieur. Dans ce cas, il est préférable de refondre la solution et de reprendre le protocole en réchauffant la solution.
  8. Recouvrir la face supérieure et placer le bloc dans un réfrigérateur et attendre 5 heures jusqu'à gélification complète.
  9. Si l'échantillon doit être démoulé, enlever le scotch pour générer une entrée d'air. Enlever le couvercle du moule et le retourner afin de le démouler, d'abord par gravité, sans manipulation sur la plateforme d'activation. Si l'échantillon reste dans le moule, appliquer progressivement de l'air comprimé dans l'entrée d'air pour générer une pression supplémentaire.

## C.2 Silicone

Les motivations et problématiques liées au développement d'échantillons de gélatine sont développés dans la section 2.2.3. Le protocole pour la fabrication d'un échantillon de silicone appliqué est :

1. Mesurer dans deux pots les quantités de gel A-341 et de fluide adaptées à la rigidité cible. Peser également les marqueurs, dont la masse est égale à 0.1 % des silicones.
2. Mélanger les deux silicones dans un bécher durant quelques minutes et le placer dans une hotte afin de minimiser les risques de bulles d'air piégées dans la solution. Quand celle-ci est homogène, inclure les marqueurs et poursuivre le mélange.

3. S'assurer de la propreté de la surface du moule, puis l'enduire de l'agent de démoulage pour faciliter la libération du matériau.
4. Verser délicatement la solution dans le moule.
5. Laisser l'échantillon réticuler pendant 24 heures à température ambiante.
6. Procéder délicatement au démoulage.



# Nomenclature

2D	Bidimensionnel.
3D	Tridimensionnel.
AFC	<i>Adjoint field condition.</i>
CCD	<i>Charge-Coupled Device.</i>
CIV	Corrélation d'images volumiques.
CL	Conditions aux limites.
DFC	<i>Displacement field condition.</i>
EF	Éléments finis.
ERC	Erreur en relation de comportement.
ERM	Elastographie par résonance magnétique.
FEMU	<i>Finite element method updating.</i>
FOV	<i>Field-of-view.</i>
FS	Filtrage spatial.
GC	Gradient conjugué.
GEM	Gradient d'encodage du mouvement.
IRM	Imagerie par résonance magnétique.
NLI	<i>Non-linear inversion.</i>
NRMSE	<i>Normalized root mean square error.</i>
OSS	<i>Octahedral shear strain.</i>
PD	Problème direct.

---

PI	Problème inverse.
RF	Radio-fréquentiel.
RMN	Résonance magnétique nucléaire.
ROZ	Rapport onde-zone.
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i> .
TFD	Transformée de Fourier discrète.
[ $\mathbf{A}_d$ ]	Matrice de pression.
[ $\mathbf{A}_p$ ]	Matrice de couplage pression-déplacement.
[ $\mathbf{A}$ ]	Matrice du système AFC.
[ $\mathbf{D}$ ]	Matrice du système DFC.
[ $\mathbf{I}$ ]	Matrice identité.
[ $\mathbf{K}$ ]	Matrice de rigidité.
[ $\mathbf{M}$ ]	Matrice de masse.
$\hat{u}_k$	Composante complexe de déplacement de mesure.
$\mathcal{A}$	Forme variationnelle du PD.
$\mathcal{D}$	Domaine de corrélation.
$\mathcal{L}$	Opérateur Lagrangien.
$\mathcal{R}$	Régularisation sur la variation totale des propriétés.
SNR <sub>m</sub>	Ratio de signal-bruit artificiel.
$\tilde{u}_k$	Composante complexe de déplacement interpolé.
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Tenseur identité d'ordre 2.
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}$	Tenseur d'ordre 4 d'élasticité.
$\vec{A}_{GEM}$	Vecteur d'amplitude du gradient d'encodage de mouvement.
$\vec{b}$	Vecteur des forces volumiques.
$\vec{B}_0$	Vecteur du champ magnétique statique.
$\vec{B}_1$	Vecteur de l'impulsion RF.

---

$\vec{G}$	Vecteur gradient d'encodage du mouvement.
$\vec{K}$	Vecteur d'onde de cisaillement.
$\vec{N}_\theta$	Nombre de points de propriétés matérielles.
$\vec{n}$	Taille de matrice.
$\vec{n}$	Vecteur unitaire normal extérieur à une frontière.
$\vec{r}$	Vecteur de position de spin.
$\vec{t}_0$	Champ de force surfacique.
$\vec{u}_L$	Vecteur de déplacement d'une onde de compression.
$\vec{u}_T$	Vecteur de déplacement d'une onde de cisaillement.
$\vec{u}$	Vecteur du champ de déplacement principal.
$\vec{U}_\varphi$	Vecteur du champ de déplacement en une phase donnée.
$\vec{w}$	Vecteur du champ de déplacement adjoint.
$\vec{X}$	Vecteur de position à un état de référence.
$\vec{x}_\varphi$	Vecteur de position à une phase de l'état déformé.
$\{\mathbf{f}_A\}$	Second membre du système AFC.
$\{\mathbf{f}_{UD}\}$	Second membre du problème des fonctions d'essai du système DFC.
$\{\mathbf{f}_{WD}\}$	Second membre du problème des fonctions adjointes du système DFC.
$\{\mathbf{p}_A\}$	Champ de pression principal discrétisé du système AFC.
$\{\mathbf{p}_D\}$	Champ de pression principal discrétisé du système DFC.
$\{\mathbf{q}_A\}$	Champ de pression adjoint discrétisé du système AFC.
$\{\mathbf{q}_D\}$	Champ de pression principal discrétisé du système DFC.
$\{\mathbf{U}_A\}$	Vecteur d'inconnues des fonctions d'essai du système AFC.
$\{\mathbf{u}_A\}$	Champ de déplacement principal discrétisé du système AFC.
$\{\mathbf{U}_D\}$	Vecteur d'inconnues des fonctions d'essai du système DFC.
$\{\mathbf{u}_D\}$	Champ de déplacement principal discrétisé du système DFC.
$\{\mathbf{W}_A\}$	Vecteur d'inconnues des fonctions adjointes du système AFC.

---

$\{\mathbf{w}_A\}$	Champ de déplacement adjoint discrétisé du système AFC.
$\{\mathbf{W}_D\}$	Vecteur d'inconnues des fonctions adjointes du système DFC.
$\{\mathbf{w}_D\}$	Champ de déplacement adjoint discrétisé du système DFC.
$\{\mathbf{x}\}$	Vecteur d'inconnues du système AFC.
$\{\vec{P}_\varphi\}$	Vecteur des paramètres de la transformation matérielle à l'ordre 1 pour une phase donnée.
$A$	Amplitude du champ de déplacement.
$a_k$	Pas de réduction du calcul du GC.
$a_{ng}$	Paramètre de transformation du bruit non-gaussien.
$b_A$	Largeur de bande de la matrice AFC.
$b_D$	Largeur de bande de la matrice DFC.
$b_k$	Constante dans la recherche du GC.
$b_{ng}$	Paramètre de transformation du bruit non-gaussien.
$c_L$	Célérité d'une onde de compression.
$c_T$	Célérité d'une onde de cisaillement.
$E$	Module d'Young.
$f$	Fréquence du mouvement harmonique.
$G$	Module de cisaillement dynamique (complexe), second coefficient de Lamé.
$g_\theta$	Vecteur gradient des propriétés.
$h_3$	Paramètre de forme du bruit non-gaussien.
$h_4$	Paramètre de forme du bruit non-gaussien.
$i$	Indice, ou nombre complexe.
$I_0$	Module du signal RMN.
$j$	Indice, ou nombre complexe.
$K$	Module de compressibilité.
$L$	Longueur d'un domaine 1D.
$l_0$	Pas uniforme d'une grille 3D.

---

$L_Z$	Taille de zone.
$m_3$	Coefficient de symétrie du bruit non-gaussien.
$m_4$	Kurtosis du bruit non-gaussien.
$M_z$	Aimantation longitudinale.
$M_{\perp}$	Aimantation transversale.
$N_{TT}$	Nombre entier de périodes du déplacement.
$nz$	Somme de valeurs non-nulles.
$p$	Pression du champ principal.
$q$	Pression du champ adjoint.
$q_k$	Variable aléatoire.
$R_i$	Région associée à un point matériel.
$r_j$	Norme euclidienne en un point matériel.
$r_k$	Variable aléatoire.
$r_{\varphi}$	Forme discrétisée du terme du terme de régularisation.
$S_0$	Signal RMN.
$S_{fs}$	Pondération du FS.
$T$	Période de la sollicitation mécanique.
$t$	Temps.
$T_1$	Temps de relaxation longitudinale.
$T_2$	Temps de relaxation transversale.
$T_{GEM}$	Période du gradient d'encodage de mouvement.
$U$	Fonctions d'essai.
$u_m$	Champ de déplacement mesuré.
$u_x, u_y, u_z$	Composantes du champ de déplacement dans les directions correspondantes.
$V$	Niveau de gris à l'état de référence.
$v$	Niveau de gris à l'état déformé.

---

$W$	Fonctions test (adjointes).
$x, y, z$	Directions des coordonnées.
$\alpha_A$	Paramètre de largeur de bande de la matrice AFC.
$\alpha_D$	Paramètre de largeur de bande de la matrice DFC.
$\alpha_{ng}$	Paramètre de transformation du bruit non-gaussien.
$\alpha_{TV}$	Facteur de variation totale.
$\beta_\theta$	Constante non-nulle.
$\delta\theta$	Vecteur de correction des propriétés.
$\delta\tilde{u}_k$	Composante complexe de déplacement de perturbation gaussienne.
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker.
$\eta\tilde{u}_k$	Composante complexe de déplacement de perturbation non-gaussienne.
$\Gamma$	Frontière d'un domaine.
$\Gamma_C$	Frontière indéterminée d'un domaine.
$\gamma_c$	Bruit aux limites d'un domaine.
$\Gamma_D$	Frontière de Dirichlet d'un domaine.
$\gamma_m$	Bruit intérieur d'un domaine.
$\Gamma_N$	Frontière de Neumann d'un domaine.
$\lambda$	Premier coefficient de Lamé.
$\lambda_L$	Longueur d'une onde de compression.
$\lambda_T$	Longueur d'une onde de cisaillement.
$\mu$	Module de cisaillement.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\Omega$	Domaine du problème.
$\omega$	Pulsation du mouvement harmonique ( $\text{rad.s}^{-1}$ ).
$\Omega^m$	Domaine des mesures.
$\Omega^Z$	Domaine d'une sous-zone.

$\Phi$	Fonctionnelle FEMU.
$\Phi_0$	Module du signal RMN.
$\psi_\varphi$	Transformation entre deux états matériels à une phase donnée.
$\rho$	Masse volumique.
$\sigma_{fs}$	Largeur du filtre spatial.
$\theta$	Couple de propriétés mécanique.
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur d'ordre 2 des contraintes.
$\underline{\underline{\sigma}}^d$	Partie déviatorique du tenseur des contraintes.
$\underline{\underline{\sigma}}^s$	Partie sphérique du tenseur des contraintes.
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur d'ordre 2 des déformations linéarisées.
$\varepsilon_d$	Scalaire de la partie déviatorique du tenseur de déformation.
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$	Composantes du tenseur déformations linéarisées dans les directions correspondantes.
$\varphi$	Phase du mouvement harmonique.
$\vec{\sigma}_U$	Vecteur de l'écart-type du déplacement.
$\xi$	Taux d'amortissement.
$p_k$	Direction du recherche du GC.

Le nombre complexe est représenté par  $i$  ou  $j$ . L'indice itératif est représenté par  $n$ . L'indice de numéro de phase est représenté par  $k$ .  $N$  indique un nombre entier positif. Une grandeur complexe  $x$  se décompose en une partie réelle  $x'$  et une partie imaginaire  $x''$ .

# Table des figures

1.1	Contraste des modalités d'imagerie médicale [Mariappan et al., 2010]. . .	8
1.2	Diversité des actionneurs de l'ERM destinés aux sollicitations extrin- sèques sur le cerveau humain. A : coussin vibreur issu d'un système multi-voies développé au LMGC (détaillé dans l'annexe A); B : dis- positif de l'actionneur pneumatique Resoundant [Klatt et al., 2015]; C : dispositif d'actionneur par onde de pression guidée [Tardieu et al., 2022]; D : actionneur pneumatique piloté par des caissons de basses fréquences actifs [Latta et al., 2011]. . . . .	9
1.3	Représentation de la propagation d'une onde dans un milieu unidimen- sionnel homogène. Les longueurs d'ondes caractéristiques de la compres- sion ( $\lambda_L$ ) et du cisaillement ( $\lambda_T$ ) sont indiquées. . . . .	17
1.4	RMN : (a) Aimantation autour du champ statique selon l'axe $z$ ; (b) Basculement transversal de l'aimantation par application de l'onde RF; (c) Retour à l'équilibre de l'aimantation; (d) Représentation graphique de l'aimantation dans le temps par décomposition de la relaxation longi- tudinale (en bleu), caractérisée par $T_1$ , et de la relaxation transverse (en rouge), caractérisée par $T_2$ . . . . .	18
1.5	Imagerie d'un matériau fantôme par détection du signal RMN : (a) image d'amplitude; (b) image de phase [Maharjan, 2020]. . . . .	20
1.6	Diagramme de séquence d'impulsions pour l'acquisition ERM. Le pilo- tage de l'impulsion RF, des directions du GEM et de la sollicitation mécanique sont indiqués en noir. Les spécificités de la séquence, non détaillées ici, sont représentées en couleur [Johnson et al., 2014]. . . . .	21
1.7	Application de la méthode LFE (droite) sur le foie sain (haut) et fibro- tique (bas), présentant l'image anatomique (gauche), l'onde de cisaille- ment (centre) et le module reconstruit (droite) [Talwalkar et al., 2007]. .	25
1.8	Représentation schématique du problème direct et du problème inverse en mécanique. . . . .	28

1.9	Reconstruction du module de cisaillement d'un fantôme avec inclusion rigide triangulaire par ERCM (gauche), ERCM régularisée (milieu) et <i>Shear Wave Elastography</i> (droite) [Ghavami et al., 2020]. . . . .	33
1.10	Un exemple d'application récente de la méthode <i>subzone NLI MRE</i> : cartes du module de cisaillement et des paramètres anisotropes estimés dans le cerveau humain dans une tranche représentative pour plusieurs zones d'intérêt : matière grise, matière blanche, corps calleux, corona radiata, fasciculus longitudinal supérieur, forceps minor et forceps major [Smith et al., 2022]. . . . .	34
1.11	Algorithme <i>subzone NLI MRE</i> , incluant des exemples illustratifs de : (a) données de déplacements 3D mesurés, (b) découpage par sous-domaines, (c) reconstructions par sous-domaines, (d) reconstruction globale. . . . .	36
1.12	Exemple d'un niveau extrême d'erreur de lecture du mouvement liée à la sensibilité de la séquence. Les images de phase représentent l'acquisition statique (gauche) et les lectures des trois directions de gradients [Liu et al., 2004]. . . . .	40
1.13	Un exemple de quantification du bruit dans le cerveau humain : comparaison visuelle du bruit et de la corrélation du bruit dans les 3 directions d'imagerie pour des bruits s'additionnant : l'image ( <i>Im Noise</i> ), le physiologique ( <i>ImPhys Noise</i> ) et la vibration ( <i>ImPhysVib Noise</i> ). Le bruit est affiché pour une répétition d'une tranche et le coefficient de corrélation correspondant est ainsi calculé pour un seul point. Les coefficients de corrélation indiquent le degré de corrélation du bruit observé à travers l'image par rapport au point indiqué par l'étoile [Hannum et al., 2022]. . . . .	41
1.14	Représentations caractéristiques d'une coupe d'un échantillon en ERM : image de magnitude (A), déplacement caractéristique (B), module de cisaillement (C), OSS (D) [McGarry et al., 2011]. . . . .	43
1.15	Propriétés mécaniques reconstruites par NLI pour le sujet humain des modules de stockage (gauche) et de perte (droite) en fonction de la résolution spatiale ( $L_s$ est la longueur d'onde attendue) et le nombre d'itérations de gradient conjugué (CG) [Anderson et al., 2017]. . . . .	47
1.16	Cartographies des minimums de la fonctionnelle dans le plan ( $\xi, ROZ$ ) pour un scénario de bruit répandu dans toute la mesure (gauche) et un scénario de bruit contenu uniquement dans les données intérieures (droite) [Van Houten et al., 2023]. . . . .	49

---

2.1	Montage expérimental du tomographe par découpage optique mesurant des champs cinématiques tridimensionnels harmoniques. . . . .	54
2.2	Configurations de disposition de l'ensemble actionneur-support : la sollicitation peut être (a) dans le plan de coupe (plan d'acquisition de la caméra), selon $\vec{x}$ ou (b) hors-plan, selon $\vec{z}$ . . . . .	54
2.3	Séquence de pilotage du tomographe par découpage optique pour l'acquisition 3D harmonique. . . . .	55
2.4	Image volumique obtenue par tomographie optique. (a) : Acquisition d'une série d'image; (b) : Reconstruction de l'image volumique [Germaineau et al., 2007]. . . . .	56
2.5	Représentation graphique de la réponse contrainte-déformation d'échantillons de gélatine en compression unidimensionnelle quasi-statique (a) et modules de rigidité caractérisés par ces essais (b) à différentes concentrations de gélatine. . . . .	59
2.6	Domaines du spectre magnétique selon la longueur d'onde. . . . .	62
2.7	Transformation matérielle volumique d'un état de référence (gauche) vers un état déformé (droite) au $k$ -ème état de déphasage. . . . .	63
2.8	Représentation temporelle du filtrage harmonique des composantes spatiales du déplacement d'un point d'intérêt (dans le plan de coupe $x - y$ médian) d'un échantillon sollicité à 80 Hz par un mouvement dans la direction $x$ . . . . .	67
2.9	Représentation spatiale du filtrage harmonique des composantes spatiales du déplacement d'une tranche d'intérêt (dans le plan de coupe $x - y$ médian) à une phase temporelle d'un échantillon sollicité à 80 Hz par un mouvement dans la direction $x$ . . . . .	68
2.10	Variété des configurations matérielles du modèle numérique : homogène (HOM), hétérogène (HET) et bi-couche (BI). A chaque zone (A, B, C ou D) est affectée une propriété, à tendance souple (S) ou rigide (R). Les dimensions géométriques des zones sont définies dans les directions de l'espace par la position du point central et la longueur. Les traces pleines rouge et verte indiquent respectivement la surface inférieure, subissant un déplacement imposé, et la surface supérieure, laissée libre. Les autres surfaces du modèle peuvent être libres ou imposées, selon les configurations testées. La coupe en pointillé blanche représente le plan $\vec{x} - \vec{y}$ par défaut pour la visualisation en coupe. . . . .	69

2.11	Représentations volumiques des 3 composantes réelles du déplacement harmonique (en mm) des données mesurées et simulées de l'échantillon homogène de gélatine après application des masques. . . . .	71
2.12	Estimation des longueurs d'onde de cisaillement (transversales) du matériau souple ( $\lambda_T^S$ ) et rigide ( $\lambda_T^R$ ) dans le silicone bi-couche à 80 Hz par mesure partielle de la propagation du mouvement horizontal ( $\text{Re}(U)$ , en mm) dans l'axe vertical ( $y$ ) dans le plan de coupe $\vec{x} - \vec{y}$ médian. . . . .	72
2.13	Comparatif d'une coupe d'intérêt dans le plan $\vec{x} - \vec{y}$ entre les 3 composantes directionnelles réelles des déplacements (en m) mesurés et simulés des fantômes de silicone homogène, hétérogène et bi-couche. La valeur des coupes marquées d'un astérisque blanc a été multipliée par 3. . . . .	73
2.14	Comparatif d'une coupe d'intérêt dans le plan $\vec{z} - \vec{x}$ entre les 3 composantes directionnelles réelles des déplacements (en m) mesurés et simulés des fantômes de silicone homogène, hétérogène et bi-couche. La valeur des coupes marquées d'un astérisque blanc a été multipliée par 3. . . . .	74
2.15	Comparatif d'une coupe d'intérêt dans le plan $\vec{y} - \vec{z}$ entre les 3 composantes directionnelles réelles des déplacements (en m) mesurés et simulés des fantômes de silicone homogène, hétérogène et bi-couche. La valeur des coupes marquées d'un astérisque blanc a été multipliée par 3. . . . .	75
3.1	Définition du domaine et des frontières du problème de référence, avec $\Omega$ le domaine d'étude et $\Gamma$ sa frontière composée de $\Gamma_N$ la frontière de type Neumann, $\Gamma_D$ la frontière de type Dirichlet et $\Gamma_C$ la frontière indéterminée. 80	80
3.2	Coupes représentatives des erreurs de reconstruction du module $G'$ normalisé d'un modèle numérique bi-matériaux pour différentes tailles de filtre $\sigma_{fs}$ : sous-dimensionné (a), standard (b) et sur-dimensionné (c). La portée approximative de la région de sélection pour les différents cas est indiquée par la double flèche blanche (en haut à droite des coupes). Les poids des filtres sont données en légende de la représentation d'une ligne représentative des 3 reconstructions considérées incluant la cible (d). . . . .	99
3.3	Représentation des matrices carrées creuses AFC (gauche) et DFC (droite) après leur assemblage et substitution des CL, pour un même problème avec $N = 1343$ degrés de libertés, soit 32 éléments. Les bandes globalement diagonales sont les valeurs de matrices associées aux champs de déplacements ou aux CL, alors que les bandes verticales et horizontales sont liées aux champs de pressions. $nz$ : nombre de valeurs non-nulles. . . . .	100

---

3.4	Temps de calcul du PD défini par le nombre d'inconnues dans les formulations DFC et AFC. Une régression par une loi puissance basée sur la largeur de bande est associé à chaque formulation avec une bonne précision ( $R^2 > 0.98$ ).	101
4.1	Détails de la géométrie et des paramètres des matériaux du modèle numérique. Les doubles flèches indiquent la direction de la sollicitation harmonique imposée en déplacement sur chaque face externe. Les cotes sont données en cm.	105
4.2	Chaîne de génération des mesures numériques illustrée par des représentations 3D d'une composante du déplacement. Les déplacements solutions d'un calcul par EF (a) sont interpolés quadratiquement vers une grille régulière (b) avant l'application d'un masque rognant les points extérieurs et l'ajout de perturbations artificielles parasitant la mesure (c).	107
4.3	Coupes représentatives des parties réelles et imaginaires de la première composante du champ de déplacement, de la distribution de l'OSS-SNR, des reconstructions du module de cisaillement et d'amortissement pour les formulations DFC et AFC. Les valeurs de références pour 4 niveaux d'OSS-SNR moyens sont tirées.	109
4.4	Erreur (NRMSE) des reconstructions de la rigidité de cisaillement (a) et de l'amortissement (b) à partir des approches DFC (bleu) et AFC (rouge) pour différents niveaux moyennés d'OSS-SNR. La ligne d'estimation correspond à l'erreur NRMSE en considérant la reconstruction homogène optimale obtenue par un calcul de la fraction volumique des paramètres de matrices et d'inclusions. Le volume de l'inclusion ne représentant que 3.7 % du volume total discrétisé, les valeurs des lignes d'estimation sont fatalement faibles.	111
4.5	Profils de distributions des reconstructions normalisées des rigidités de cisaillement (a,b) et d'amortissement (c,d) pour 4 niveaux d'OSS-SNR et 2 ROZ par approche DFC (a,c) et AFC (b,d). Les distributions des reconstructions des données DFC pour les niveaux d'OSS-SNR 2.04 et 1.28 sortent de la figure.	112
4.6	Ligne représentative des reconstructions de la rigidité de cisaillement (a) et d'amortissement (b) à partir de l'approche AFC pour 4 différents niveaux de bruits. Les deux résolutions spatiales de zones sont représentées.	114

4.7	Profils de distributions des reconstructions normalisées des rigidités de cisaillement (a,b) et d'amortissement (c,d) pour 4 niveaux d'OSS-SNR et 2 modules initiaux par approche DFC (a,c) et AFC (b,d). Les cercles correspondent aux valeurs des modules initiaux. Les distributions des reconstructions des données DFC pour les niveaux d'OSS-SNR 2.04 et 1.28 sortent de la figure. . . . .	115
4.8	Applications pour produire un bruit non-gaussien sur le déplacement (en mm) dans une configuration définie par un $\text{SNR}_m = 100\%$ : (a) distributions normalisées des composantes directionnelles réelles des déplacements après perturbation pour 3 natures de perturbations : normale (vert), symétrique platykurtique (rouge) et asymétrique platykurtique (bleu) ; (b) vue d'une coupe d'intérêt de l'amplitude de déplacement dans la configuration non-bruitée (haut, gauche) et pour les 3 natures de perturbations. . . . .	117
4.9	Erreur (NRMSE) des reconstructions de la rigidité de cisaillement (a) et de l'amortissement (b) à partir des approches DFC (o) et AFC (*) pour différentes distributions de bruits et différents niveaux moyennés d'OSS-SNR. Les 3 configurations de bruits sont : normale (noir), symétrique platykurtique (bleu) et asymétrique platykurtique (rouge). . . . .	119
4.10	Représentation des coupes (espacées de 2.4 mm) de la reconstruction par approche AFC de l'échantillon de gélatine homogène (moulé, vibrant à 20 Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan $x-y$ , à gauche) et la direction verticale (plan $z-x$ , à droite). . . . .	124
4.11	Représentation des coupes (espacées de 2.2 mm) de la reconstruction de l'échantillon homogène de silicone (démoulé, vibrant à 80 Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan $x-y$ , à gauche) et la direction verticale (plan $z-x$ , à droite). . . . .	125
4.12	Représentation des coupes (espacées de 2.2 mm) de la reconstruction de l'échantillon hétérogène (matrice-inclusion) de silicone (démoulé, vibrant à 80 Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan $x-y$ , à gauche) et la direction verticale (plan $z-x$ , à droite). . . . .	126

---

4.13	Représentation des coupes (espacées de 2.2 mm) de la reconstruction de l'échantillon bi-couche de silicone (démoulé, vibrant à 80Hz) du module de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans la direction du découpage optique (plan $x - y$ , à gauche) et la direction verticale (plan $z - x$ , à droite). . . . .	127
4.14	Distributions normalisées par densité de probabilité du module de cisaillement (gauche, en kPa) et de l'amortissement (droite, en %) identifiés de l'échantillon homogène de gélatine (moulé, vibrant à 20 Hz), pour la comparaison des approche DFC (bleu) et AFC (vert). . . . .	129
4.15	Distributions normalisées par densité de probabilité des modules de cisaillement (en kPa) identifiés dans les régions partitionnées (souple en vert, rigide en rouge) des reconstructions des échantillons de silicone homogène (haut), hétérogène (centre) et bi-couche (bas). . . . .	130
4.16	Schéma de l'actionneur développé pour la sollicitation bi-directionnelle du cerveau humain. Les directions d'activations AP et LR sont indiquées par les flèches. [Smith et al., 2022]. . . . .	133
4.17	Images $T_2$ et OSS-SNR distribué d'une coupe représentative du cerveau humain d'un même sujet, activé dans la direction AP (gauche) et LR (droite). Si les images $T_2$ présentent une forte similarité, le niveau d'OSS-SNR est nettement plus faible pour les données de type LR, en particulier au centre du cerveau. . . . .	134
4.18	Composantes réelles du déplacement normalisé par rapport au maximum des données AP-1 (haut) et LR-1 (bas) d'une coupe représentative du cerveau humain d'un même sujet. La direction principale de l'excitation dans chacune des deux configurations est indiquée par un symbole. Des motifs de propagation d'ondes différents entre les deux directions d'activation se distinguent, particulièrement dans la direction hors-plan (droite). . . . .	136
4.19	Reconstruction des cartes du module de cisaillement (gauche) et de l'amortissement (droite) d'une tranche représentative du cerveau humain pour des données AP-1 (première ligne) et LR-1 (deuxième ligne) en utilisant les approches DFC (première et troisième colonnes) et AFC (deuxième et quatrième colonnes). Les différences entre les reconstructions AP et LR pour chaque considération sont intégrées (troisième ligne). . . . .	138
4.20	Écart-types des modules de cisaillement (gauche) et de l'amortissement (droite) reconstruits d'une tranche représentative pour trois jeux de données AP (haut) et trois jeux de données LR (bas) par les méthodes DFC (première et troisième colonne) et AFC (deuxième et quatrième colonne). . . . .	139

4.21	Profils de distributions des reconstructions des rigidités de cisaillement (en kPa) par approche DFC (bleu) et AFC (rouge) de trois répétitions moyennées d'activation AP (gauche) et LR (droite) d'un cerveau humain.	140
4.22	Reconstruction des cartes du module de cisaillement (en kPa) d'une tranche représentative des données AP-1 par approche AFC pour différentes valeurs de $\alpha_{TV}$ . La carte encadrée indique le paramétrage retenu par l'étude. . . . .	141
4.23	Reconstructions individuelles et moyennées (a) des cartes du module de cisaillement (en kPa) d'une tranche représentative à partir des trois jeux de données (lignes) selon différents niveaux de filtrage spatial (colonnes). Le graphique (b) indique la valeur moyenne et l'écart-type dans l'ensemble du domaine des identifications individuelles. . . . .	143
4.24	Reconstructions individuelles et moyennées (a) des cartes de l'amortissement (en %) d'une tranche représentative à partir des 3 jeux de données (lignes) selon différents niveaux de filtrage spatial (colonnes). Le graphique (b) indique la valeur moyenne et l'écart-type dans l'ensemble du domaine de chaque identifications individuelles. . . . .	144
4.25	Représentation de coupes de la reconstruction moyennée du modules de cisaillement (haut, en kPa) et de l'amortissement (bas, en %) dans le plan axial (gauche) et sagittal (droite) à partir des reconstructions des 3 répétitions AP. . . . .	145
A.1	Photographie du réseau électronique (gauche) et pneumatique (droite), actifs (a). Photographie des actionneurs (7 de 6 cm de diamètre, 1 de 12 cm de diamètre) (b). Schéma du réseau pneumatique du dispositif à 6 voies (c). Le circuit générant la surpression est désigné en bleu et le circuit générant la dépression est représenté en rouge. . . . .	156
A.2	Suivi temporel de la position verticale de la zone centrale moyennée de l'actionneur libre par rétro-éclairage. Les encadrements en rouge indiquent l'instant où l'amplitude est minimale, et les encadrements en vert indiquent l'instant où l'amplitude est maximale. (a) : Images superposées acquises à une demi-période d'écart. (b) : Représentation temporelle de l'amplitude mesurée. . . . .	157
A.3	Réponse fréquentielle de l'amplitude de l'actionneur autour de la fréquence de pilotage $f_0$ normalisée à 25 Hz (haut, gauche), 50 Hz (haut, droite), 75 Hz (bas, gauche) et 100 Hz (bas, droite). . . . .	158

---

A.4 Effet de 7 longueurs différentes du tuyau sur l'amplitude échantillonnée (moyenne sur 20 périodes) d'un actionneur libre pour 7 fréquences différentes. . . . . 159

# Liste des tableaux

1.1	Ordres de grandeurs des valeurs principales propriétés matérielles introduites pour des modélisations élastiques linéaires isotropes de différents organes <i>in vivo</i> [Emelianov et al., 2004]. . . . .	14
1.2	Valeurs approximatives des temps de relaxation $T_1$ et $T_2$ à $B_0 = 1.5T$ . [Brown et al., 2014]. . . . .	19
1.3	Elastographie ultrasonore : Présentation de trois classes de mesures [Sigrist et al., 2017; Ozturk et al., 2018]. . . . .	23
4.1	Moyennes et écart-types de l'ensemble des modules de cisaillement et d'amortissement de l'échantillon de gélatine homogène reconstruit par approche DFC et AFC. . . . .	128
4.2	OSS-SNR des différentes acquisitions de cerveau humain. . . . .	135
4.3	Différences moyennées des paramètres de reconstruction pour les données AP-1 et LR-1. . . . .	137



# Bibliographie

- D. B. Adhia, M. D. Bussey, D. C. Ribeiro, S. Tumilty, and S. Milosavljevic. Validity and reliability of palpation-digitization for non-invasive kinematic measurement – A systematic review. *Manual Therapy*, 18(1) :26–34, Feb. 2013. ISSN 1356689X. doi : 10.1016/j.math.2012.06.004. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1356689X12001452>.
- A. T. Anderson, E. E. Van Houten, M. D. McGarry, K. D. Paulsen, J. L. Holtrop, B. P. Sutton, J. G. Georgiadis, and C. L. Johnson. Observation of direction-dependent mechanical properties in the human brain with multi-excitation MR elastography. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 59 : 538–546, June 2016. ISSN 17516161. doi : 10.1016/j.jmbbm.2016.03.005. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S175161611630025X>.
- A. T. Anderson, C. L. Johnson, M. McGarry, K. D. Paulsen, B. P. Sutton, E. E. Van Houten, and J. G. Georgiadis. Inversion parameters based on convergence and error metrics for nonlinear inversion mr elastography. In *Proc. Intl. Soc. Mag. Reson. Med*, volume 25, page 1139, 2017. URL <https://cds.ismrm.org/protected/17MProceedings/PDFfiles/1139.html>.
- W. Aquino and M. Bonnet. Analysis of the Error in Constitutive Equation Approach for Time-Harmonic Elasticity Imaging. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 79 (3) :822–849, Jan. 2019. ISSN 0036-1399, 1095-712X. doi : 10.1137/18M1231237. URL <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/18M1231237>.
- A. Arani, S. P. Arunachalam, I. C. Chang, F. Baffour, P. J. Rossman, K. J. Glaser, J. D. Trzasko, K. P. McGee, A. Manduca, M. Grogan, A. Dispenzieri, R. L. Ehman, and P. A. Araoz. Cardiac MR elastography for quantitative assessment of elevated myocardial stiffness in cardiac amyloidosis : Cardiac MRE Can Access Myocardial Stiffness. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 46

- 
- (5) :1361–1367, Nov. 2017. ISSN 10531807. doi : 10.1002/jmri.25678. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jmri.25678>.
- H. M. Atta. Edwin Smith Surgical Papyrus : the oldest known surgical treatise. *The American Surgeon*, 65(12) :1190, 1999. Publisher : SAGE PUBLICATIONS, INC.
- S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron. Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, Aug. 2008. ISSN 0014-4851, 1741-2765. doi : 10.1007/s11340-008-9148-y. URL <http://link.springer.com/10.1007/s11340-008-9148-y>.
- U. Bae, M. Dighe, T. Dubinsky, S. Minoshima, V. Shamdasani, and Y. Kim. Ultrasound Thyroid Elastography Using Carotid Artery Pulsation : Preliminary Study. *Journal of Ultrasound in Medicine*, 26(6) :797–805, June 2007. ISSN 02784297. doi : 10.7863/jum.2007.26.6.797. URL <http://doi.wiley.com/10.7863/jum.2007.26.6.797>.
- B. Banerjee, T. F. Walsh, W. Aquino, and M. Bonnet. Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253 :60–72, Jan. 2013. ISSN 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2012.08.023. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782512002770>.
- P. E. Barbone and N. H. Gokhale. Elastic modulus imaging : on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions. *Inverse Problems*, 20(1) :283–296, Feb. 2004. ISSN 0266-5611, 1361-6420. doi : 10.1088/0266-5611/20/1/017. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/20/1/017>.
- P. Bayly and J. Garbow. Pre-clinical MR elastography : Principles, techniques, and applications. *Journal of Magnetic Resonance*, 291 :73–83, June 2018. ISSN 10907807. doi : 10.1016/j.jmr.2018.01.004. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1090780718300168>.
- B. Bechtold. Violin Plots for Matlab, Github Project, 2021. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.4559847>.

- 
- P. Bentata and N. Bouzou. Le coût du cancer en France : une forte hausse. Technical report, Institut International de Cancérologie de Paris, 2020. URL <https://asteres.fr/site/wp-content/uploads/2020/02/ASTERES-CANCER-FEV-2020-compressé.pdf>.
- F. Bloch. Nuclear Induction. *Physical Review*, 70(7-8) :460–474, Oct. 1946. ISSN 0031-899X. doi : 10.1103/PhysRev.70.460. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.70.460>.
- W. S. Brainerd, C. H. Goldberg, and J. C. Adams. *Programmer's Guide to FORTRAN 90*. Springer, 1990.
- R. W. Brown, Y.-C. N. Cheng, E. M. Haacke, M. R. Thompson, and R. Venkatesan. *Magnetic resonance imaging : physical principles and sequence design*. John Wiley & Sons, 2014.
- A. P. Calderón. On an inverse boundary value problem. *Computational & Applied Mathematics*, 25(2-3), 2006. ISSN 0101-8205. doi : 10.1590/S0101-82052006000200002. URL [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0101-82052006000200002&lng=en&nrm=iso&tlng=en](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-82052006000200002&lng=en&nrm=iso&tlng=en).
- H. Y. Carr and E. M. Purcell. Effects of Diffusion on Free Precession in Nuclear Magnetic Resonance Experiments. *Physical Review*, 94(3) :630–638, May 1954. ISSN 0031-899X. doi : 10.1103/PhysRev.94.630. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.94.630>.
- J. Chen, C. Ni, and T. Zhuang. Imaging mechanical shear waves induced by piezoelectric ceramics in magnetic resonance elastography. *Chinese Science Bulletin*, 51(6) :755–760, Mar. 2006. ISSN 1001-6538, 1861-9541. doi : 10.1007/s11434-006-0755-7. URL <http://link.springer.com/10.1007/s11434-006-0755-7>.
- E. Cheynet. Non-gaussian process generation. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/52193-non-gaussian-process-generation>, 2022.
- T. C. Chu, W. F. Ranson, and M. A. Sutton. Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics. *Experimental Mechanics*, 25(3) :232–244, Sept. 1985. ISSN 0014-4851, 1741-2765. doi : 10.1007/BF02325092. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF02325092>.

- 
- D. Claire, F. Hild, and S. Roux. Identification of damage fields using kinematic measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(11) :729–734, Nov. 2002. ISSN 16310721. doi : 10.1016/S1631-0721(02)01524-3. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1631072102015243>.
- C. C. S. A. Committee. Canadian cancer statistics 2019. Technical report, Canadian Cancer Society, 2019. URL [cancer.ca/Canadian-Cancer-Statistics-2019-EN](http://cancer.ca/Canadian-Cancer-Statistics-2019-EN).
- P. Coupé, J. V. Manjón, E. Gedamu, D. Arnold, M. Robles, and D. L. Collins. Robust Rician noise estimation for MR images. *Medical Image Analysis*, 14(4) : 483–493, Aug. 2010. ISSN 13618415. doi : 10.1016/j.media.2010.03.001. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1361841510000241>.
- M. I. Diaz, W. Aquino, and M. Bonnet. A modified error in constitutive equation approach for frequency-domain viscoelasticity imaging using interior data. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 296 :129–149, 2015.
- M. Doyley, E. VanHouten, J. Weaver, S. Poplack, L. Duncan, F. Kennedy, and K. Paulsen. Shear Modulus Estimation Using Parallelized Partial Volumetric Reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(11) :1404–1416, Nov. 2004. ISSN 0278-0062. doi : 10.1109/TMI.2004.834624. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/1350898/>.
- M. M. Doyley and K. J. Parker. Elastography. *Ultrasound Clinics*, 9(1) :1–11, Jan. 2014. ISSN 1556858X. doi : 10.1016/j.cult.2013.09.006. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1556858X13001060>.
- E. C. Ehman, P. J. Rossman, S. A. Kruse, A. V. Sahakian, and K. J. Glaser. Vibration safety limits for magnetic resonance elastography. *Physics in Medicine and Biology*, 53(4) :925–935, Feb. 2008. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/0031-9155/53/4/007. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9155/53/4/007>.
- S. Y. Emelianov, S. R. Aglyamov, J. Shah, S. Sethuraman, W. G. Scott, R. Schmitt, M. Motamedi, A. Karpiouk, and A. A. Oraevsky. Combined ultrasound, optoacoustic, and elasticity imaging. In A. A. Oraevsky and L. V. Wang, editors, *Photons Plus Ultrasound : Imaging and Sensing*, volume 5320, pages 101 – 112. SPIE, 2004. doi : 10.1117/12.537155. URL <https://doi.org/10.1117/12.537155>. Backup Publisher : International Society for Optics and Photonics.

- P. Feissel and O. Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13-16) :1968–1983, Mar. 2007. ISSN 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2006.10.005. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782506003434>.
- R. Forouhandehpour, M. Bernier, G. Gilbert, R. Butler, K. Whittingstall, and E. Van Houten. Cerebral stiffness changes during visual stimulation : Differential physiological mechanisms characterized by opposing mechanical effects. *Neuroimage : Reports*, 1(2) :100014, June 2021. ISSN 26669560. doi : 10.1016/j.nirp.2021.100014. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S266695602100012X>.
- D. Fovargue, D. Nordsletten, and R. Sinkus. Stiffness reconstruction methods for MR elastography. *NMR in Biomedicine*, 31(10) :e3935, Oct. 2018. ISSN 09523480. doi : 10.1002/nbm.3935. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nbm.3935>.
- Y.-C. Fung. *Biomechanics : Mechanical properties of living tissues*. Springer Science & Business Media, 2013.
- A. Germaneau, P. Doumalin, and J. C. Dupré. 3D Strain Field Measurement by Correlation of Volume Images Using Scattered Light : Recording of Images and Choice of Marks. *Strain*, 43(3) :207–218, Aug. 2007. ISSN 00392103, 14751305. doi : 10.1111/j.1475-1305.2007.00340.x. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1475-1305.2007.00340.x>.
- G. Geymonat, F. Hild, and S. Pagano. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(6) :403–408, Jan. 2002. ISSN 16310721. doi : 10.1016/S1631-0721(02)01476-6. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1631072102014766>.
- S. Ghavami, O. Babaniyi, S. Adabi, D. Rosen, A. Alizad, W. Aquino, and M. Fatemi. Ultrasound elastography using a regularized modified error in constitutive equations (MECE) approach : A comprehensive phantom study. *Physics in medicine and biology*, 65(22) :225026, 2020.
- S. Ghosh, Z. Zou, O. Babaniyi, W. Aquino, M. I. Diaz, M. Bayat, and M. Fatemi. Modified error in constitutive equations (MECE) approach for ultrasound elastography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 142

- 
- (4) :2084–2093, Oct. 2017. ISSN 0001-4966. doi : 10.1121/1.5006911. URL <http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.5006911>.
- S. Goenezen, P. Barbone, and A. A. Oberai. Solution of the nonlinear elasticity imaging inverse problem : The incompressible case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(13-16) :1406–1420, Mar. 2011. ISSN 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2010.12.018. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782510003749>.
- K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation, 2012.
- M. Grédiac and F. Pierron. Applying the virtual fields method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22(4) :602–627, Apr. 2006. ISSN 07496419. doi : 10.1016/j.ijplas.2005.04.007. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641905000896>.
- H. Gudbjartsson and S. Patz. The rician distribution of noisy mri data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 34(6) :910–914, Dec. 1995. ISSN 07403194, 15222594. doi : 10.1002/mrm.1910340618. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.1910340618>.
- C. Guenther and S. Kozerke. Encoding and readout strategies in magnetic resonance elastography. *NMR in Biomedicine*, 31(10) :e3919, Oct. 2018. ISSN 09523480. doi : 10.1002/nbm.3919. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nbm.3919>.
- J. Guo, S. Marticorena Garcia, and I. Sack. Summary and overview of the first ISMRM workshop on magnetic resonance elastography, August 25–26, 2022, Berlin, Germany. *Magnetic Resonance in Medicine*, 89(3) :898–907, Mar. 2023. ISSN 0740-3194, 1522-2594. doi : 10.1002/mrm.29503. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.29503>.
- J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52, 1902.
- A. J. Hannum, G. McIlvain, D. Sowinski, M. D. J. McGarry, and C. L. Johnson. Correlated noise in brain magnetic resonance elastography. *Magnetic Resonance in Medicine*, 87(3) :1313–1328, Mar. 2022. ISSN 0740-3194, 1522-2594. doi : 10.1002/mrm.29050. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.29050>.

- I. Havsteen, A. Ohlhues, K. H. Madsen, J. D. Nybing, H. Christensen, and A. Christensen. Are Movement Artifacts in Magnetic Resonance Imaging a Real Problem?—A Narrative Review. *Frontiers in Neurology*, 8 :232, May 2017. ISSN 1664-2295. doi : 10.3389/fneur.2017.00232. URL <http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fneur.2017.00232/full>.
- L. V. Hiscox, C. L. Johnson, M. D. J. McGarry, H. Marshall, C. W. Ritchie, E. J. R. van Beek, N. Roberts, and J. M. Starr. Mechanical property alterations across the cerebral cortex due to Alzheimer’s disease. *Brain Communications*, 2(1) :fcz049, Jan. 2020a. ISSN 2632-1297. doi : 10.1093/braincomms/fcz049. URL <https://academic.oup.com/braincomms/article/doi/10.1093/braincomms/fcz049/5679770>.
- L. V. Hiscox, M. D. J. McGarry, H. Schwarb, E. E. W. Van Houten, R. T. Pohlig, N. Roberts, G. R. Huesmann, A. Z. Burzynska, B. P. Sutton, C. H. Hillman, A. F. Kramer, N. J. Cohen, A. K. Barbey, K. D. Paulsen, and C. L. Johnson. Standard-space atlas of the viscoelastic properties of the human brain. *Human Brain Mapping*, 41(18) :5282–5300, Dec. 2020b. ISSN 1065-9471, 1097-0193. doi : 10.1002/hbm.25192. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/hbm.25192>.
- L. Huwart, C. Sempoux, E. Vicaux, N. Salameh, L. Annet, E. Danse, F. Peeters, L. C. ter Beek, J. Rahier, R. Sinkus, Y. Horsmans, and B. E. Van Beers. Magnetic Resonance Elastography for the Noninvasive Staging of Liver Fibrosis. *Gastroenterology*, 135(1) :32–40, July 2008. ISSN 00165085. doi : 10.1053/j.gastro.2008.03.076. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0016508508005726>.
- C. L. Johnson, M. D. McGarry, A. A. Gharibans, J. B. Weaver, K. D. Paulsen, H. Wang, W. C. Olivero, B. P. Sutton, and J. G. Georgiadis. Local mechanical properties of white matter structures in the human brain. *NeuroImage*, 79 :145–152, Oct. 2013. ISSN 10538119. doi : 10.1016/j.neuroimage.2013.04.089. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1053811913004485>.
- C. L. Johnson, J. L. Holtrop, M. D. McGarry, J. B. Weaver, K. D. Paulsen, J. G. Georgiadis, and B. P. Sutton. 3D multislabs, multishot acquisition for fast, whole-brain MR elastography with high signal-to-noise efficiency : 3D Multislabs, Multishot Whole-Brain MRE. *Magnetic Resonance in Medicine*, 71(2) : 477–485, Feb. 2014. ISSN 07403194. doi : 10.1002/mrm.25065. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.25065>.

- 
- F. Kallel and M. Bertrand. Tissue elasticity reconstruction using linear perturbation method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(3) :299–313, June 1996. ISSN 02780062. doi : 10.1109/42.500139. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/500139/>.
- E. Kanal, A. J. Barkovich, C. Bell, J. P. Borgstede, W. G. Bradley, J. W. Froelich, T. Gilk, J. R. Gimbel, J. Gosbee, E. Kuhni-Kaminski, J. W. Lester, J. Nyenhuis, Y. Parag, D. J. Schaefer, E. A. Sebek-Scoumis, J. Weinreb, L. A. Zarembo, P. Wilcox, L. Lucey, and N. Sass. ACR Guidance Document for Safe MR Practices : 2007. *American Journal of Roentgenology*, 188(6) :1447–1474, June 2007. ISSN 0361-803X, 1546-3141. doi : 10.2214/AJR.06.1616. URL <http://www.ajronline.org/doi/10.2214/AJR.06.1616>.
- D. Klatt, C. L. Johnson, and R. L. Magin. Simultaneous, multidirectional acquisition of displacement fields in magnetic resonance elastography of the in vivo human brain : SLIM-MRE of in Vivo Human Brain. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 42(2) :297–304, Aug. 2015. ISSN 10531807. doi : 10.1002/jmri.24806. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jmri.24806>.
- S. Kruse, M. Dresner, P. Rossman, J. Felmlee, C. Jack, and R. Ehman. “palpation of the brain” using magnetic resonance elastography. In *ISMRM CDS*, 1999. URL <https://cds.ismrm.org/ismrm-1999/PDF1/258.pdf>.
- P. Ladeveze and D. Leguillon. Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, June 1983. ISSN 0036-1429, 1095-7170. doi : 10.1137/0720033. URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0720033>.
- P. Latta, M. L. Gruwel, P. Debergue, B. Matwiy, U. N. Sbotto-Frankensteen, and B. Tomanek. Convertible pneumatic actuator for magnetic resonance elastography of the brain. *Magnetic Resonance Imaging*, 29(1) :147–152, Jan. 2011. ISSN 0730725X. doi : 10.1016/j.mri.2010.07.014. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0730725X10002213>.
- C. Liu, R. Bammer, D.-h. Kim, and M. E. Moseley. Self-navigated interleaved spiral (SNAILS) : Application to high-resolution diffusion tensor imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 52(6) :1388–1396, Dec. 2004. ISSN 0740-3194, 1522-2594. doi : 10.1002/mrm.20288. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.20288>.

- T. T. Liu. Noise contributions to the fMRI signal : An overview. *NeuroImage*, 143 :141–151, Dec. 2016. ISSN 10538119. doi : 10.1016/j.neuroimage.2016.09.008. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1053811916304694>.
- G. Low. General review of magnetic resonance elastography. *World Journal of Radiology*, 8(1) :59, 2016. ISSN 1949-8470. doi : 10.4329/wjr.v8.i1.59. URL <http://www.wjgnet.com/1949-8470/full/v8/i1/59.htm>.
- S. Maharjan. *Phase Unwrapping and Directional Filtering in Magnetic Resonance Elastography of Lumbar Muscles*. PhD thesis, Indiana University-Purdue University Indianapolis, 09 2020.
- A. Manduca, R. Muthupillai, P. J. Rossman, J. F. Greenleaf, and R. L. Ehman. Image processing for magnetic-resonance elastography. In M. H. Loew and K. M. Hanson, editors, *Medical Imaging 1996 : Image Processing*, pages 616–623, Newport Beach, CA, 1996. SPIE. doi : 10.1117/12.237965. URL <http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=1016943>.
- A. Manduca, T. Oliphant, M. Dresner, J. Mahowald, S. Kruse, E. Amromin, J. Felmlee, J. Greenleaf, and R. Ehman. Magnetic resonance elastography : Non-invasive mapping of tissue elasticity. *Medical Image Analysis*, 5(4) :237–254, Dec. 2001. ISSN 13618415. doi : 10.1016/S1361-8415(00)00039-6. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1361841500000396>.
- A. Manduca, D. S. Lake, S. A. Kruse, and R. L. Ehman. Spatio-temporal directional filtering for improved inversion of MR elastography images. *Medical Image Analysis*, 2003.
- A. Manduca, P. V. Bayly, R. L. Ehman, A. Kolipaka, T. J. Royston, I. Sack, R. Sinkus, and B. E. Van Beers. MR elastography : Principles, guidelines, and terminology. *Magnetic Resonance in Medicine*, 85(5) :2377–2390, May 2021. ISSN 0740-3194, 1522-2594. doi : 10.1002/mrm.28627. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.28627>.
- B. Marchand, L. Chamoin, and C. Rey. Parameter identification and model updating in the context of nonlinear mechanical behaviors using a unified formulation of the modified Constitutive Relation Error concept. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345 :1094–1113, Mar. 2019. ISSN 00457825. doi : 10.

- 
- 1016/j.cma.2018.09.008. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782518304511>.
- Y. K. Mariappan, K. J. Glaser, and R. L. Ehman. Magnetic resonance elastography : A review. *Clinical Anatomy*, 23(5) :497–511, June 2010. ISSN 08973806, 10982353. doi : 10.1002/ca.21006. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ca.21006>.
- J. C. Maxwell. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...*, volume 2. University Press, 1890.
- M. McGarry, C. L. Johnson, B. P. Sutton, E. E. Van Houten, J. G. Georgiadis, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. Including Spatial Information in Nonlinear Inversion MR Elastography Using Soft Prior Regularization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 32(10) :1901–1909, Oct. 2013. ISSN 0278-0062, 1558-254X. doi : 10.1109/TMI.2013.2268978. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/6542013/>.
- M. McGarry, E. Van Houten, L. Solamen, S. Gordon-Wylie, J. Weaver, and K. Paulsen. Uniqueness of poroelastic and viscoelastic nonlinear inversion MR elastography at low frequencies. *Physics in Medicine & Biology*, 64(7) :075006, Mar. 2019. ISSN 1361-6560. doi : 10.1088/1361-6560/ab0a7d. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6560/ab0a7d>.
- M. McGarry, E. V. Houten, C. Guertler, R. Okamoto, D. Smith, D. Sowinski, C. Johnson, P. Bayly, J. Weaver, and K. Paulsen. A heterogenous, time harmonic, nearly incompressible transverse isotropic finite element brain simulation platform for MR elastography. *Physics in Medicine & Biology*, 66(5) :055029, Mar. 2021. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/1361-6560/ab9a84. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6560/ab9a84>.
- M. D. J. McGarry, E. E. W. Van Houten, P. R. Perriñez, A. J. Pattison, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. An octahedral shear strain-based measure of SNR for 3D MR elastography. *Physics in Medicine and Biology*, 56(13) :N153–N164, July 2011. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/0031-9155/56/13/N02. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9155/56/13/N02>.
- M. D. J. McGarry, E. E. W. Van Houten, C. L. Johnson, J. G. Georgiadis, B. P. Sutton, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. Multiresolution MR elastography using nonlinear inversion. *Medical Physics*, 39(10) :6388–6396, Oct. 2012. ISSN 00942405. doi : 10.1118/1.4754649. URL <http://doi.wiley.com/10.1118/1.4754649>.

- P. R. Moran. A flow velocity zeugmatographic interlace for NMR imaging in humans. *Magnetic Resonance Imaging*, 1(4) :197–203, Jan. 1982. ISSN 0730725X. doi : 10.1016/0730-725X(82)90170-9. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0730725X82901709>.
- R. Muthupillai, D. Lomas, P. Rossman, J. Greenleaf, A. Manduca, and R. Ehman. Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves. *Science*, 269(5232) :1854–1857, Sept. 1995. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.7569924. URL <https://www.sciencemag.org/lookup/doi/10.1126/science.7569924>.
- R. Muthupillai, P. J. Rossman, D. J. Lomas, J. F. Greenleaf, S. J. Riederer, and R. L. Ehman. Magnetic resonance imaging of transverse acoustic strain waves. *Magnetic Resonance in Medicine*, 36(2) :266–274, Aug. 1996. ISSN 07403194, 15222594. doi : 10.1002/mrm.1910360214. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mrm.1910360214>.
- A. A. Oberai, N. H. Gokhale, and G. R. Feij o. Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. *Inverse Problems*, 19(2) :297–313, Apr. 2003. ISSN 0266-5611. doi : 10.1088/0266-5611/19/2/304. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/19/2/304>.
- A. A. Oberai, N. H. Gokhale, M. M. Doyley, and J. C. Bamber. Evaluation of the adjoint equation based algorithm for elasticity imaging. *Physics in Medicine and Biology*, 49(13) :2955–2974, July 2004. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/0031-9155/49/13/013. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9155/49/13/013>.
- T. E. Oliphant, A. Manduca, R. L. Ehman, and J. F. Greenleaf. Complex-valued stiffness reconstruction for magnetic resonance elastography by algebraic inversion of the differential equation. *Magnetic Resonance in Medicine : An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, page 12, 2001.
- J. Ophir, I. Cespedes, H. Ponnekanti, Y. Yazdi, and X. Li. Elastography : A quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues. *Ultrasonic imaging*, 13(2) :111–134, 1991.
- A. Ozturk, J. R. Grajo, M. Dhyani, B. W. Anthony, and A. E. Samir. Principles of ultrasound elastography. *Abdominal Radiology*, 43(4) :773–785, Apr. 2018. ISSN

---

2366-004X, 2366-0058. doi : 10.1007/s00261-018-1475-6. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00261-018-1475-6>.

- K. D. Paulsen and H. Jiang. Enhanced frequency-domain optical image reconstruction in tissues through total-variation minimization. *Applied Optics*, 35(19) : 3447, July 1996. ISSN 0003-6935, 1539-4522. doi : 10.1364/AO.35.003447. URL <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-35-19-3447>.
- I. M. Perreard, A. J. Pattison, M. Doyley, M. D. J. McGarry, Z. Barani, E. E. Van Houten, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. Effects of frequency- and direction-dependent elastic materials on linearly elastic MRE image reconstructions. *Physics in Medicine and Biology*, 55(22) :6801–6815, Nov. 2010. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/0031-9155/55/22/013. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9155/55/22/013>.
- P. Perrinez, F. Kennedy, E. Van Houten, J. Weaver, and K. Paulsen. Modeling of Soft Poroelastic Tissue in Time-Harmonic MR Elastography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 56(3) :598–608, Mar. 2009. ISSN 0018-9294, 1558-2531. doi : 10.1109/TBME.2008.2009928. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/4694123/>.
- E. M. Purcell, H. C. Torrey, and R. V. Pound. Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid. *Physical Review*, 69(1-2) :37–38, Jan. 1946. ISSN 0031-899X. doi : 10.1103/PhysRev.69.37. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.69.37>.
- M. Reiss-Zimmermann, K.-J. Streitberger, I. Sack, J. Braun, F. Arlt, D. Fritsch, and K.-T. Hoffmann. High Resolution Imaging of Viscoelastic Properties of Intracranial Tumours by Multi-Frequency Magnetic Resonance Elastography. *Clinical Neuroradiology*, 25(4) :371–378, Dec. 2015. ISSN 1869-1439, 1869-1447. doi : 10.1007/s00062-014-0311-9. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00062-014-0311-9>.
- O. Rouvière, R. Souchon, G. Pagnoux, J.-M. Ménager, and J.-Y. Chapelon. Magnetic resonance elastography of the kidneys : Feasibility and reproducibility in young healthy adults. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 34(4) : 880–886, Oct. 2011. ISSN 10531807. doi : 10.1002/jmri.22670. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jmri.22670>.

- I. Sack. Magnetic resonance elastography from fundamental soft-tissue mechanics to diagnostic imaging. *Nature Reviews Physics*, 5(1) :25–42, Jan. 2023. ISSN 2522-5820. doi : 10.1038/s42254-022-00543-2. URL <https://doi.org/10.1038/s42254-022-00543-2>.
- I. Sack, B. Beierbach, U. Hamhaber, D. Klatt, and J. Braun. Non-invasive measurement of brain viscoelasticity using magnetic resonance elastography. *NMR in Biomedicine*, 21(3) :265–271, Apr. 2008. ISSN 09523480, 10991492. doi : 10.1002/nbm.1189. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nbm.1189>.
- D. T. Seidl, A. A. Oberai, and P. E. Barbone. The Coupled Adjoint-State Equation in forward and inverse linear elasticity : Incompressible plane stress. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357 :112588, Dec. 2019. ISSN 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2019.112588. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782519304591>.
- J. R. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, USA, 1994.
- R. M. Sigrist, J. Liau, A. E. Kaffas, M. C. Chammas, and J. K. Willmann. Ultrasound Elastography : Review of Techniques and Clinical Applications. *Theranostics*, 7(5) :1303–1329, 2017. ISSN 1838-7640. doi : 10.7150/thno.18650. URL <http://www.thno.org/v07p1303.htm>.
- S. Singh, S. K. Venkatesh, Z. Wang, F. H. Miller, U. Motosugi, R. N. Low, T. Hasanein, P. Asbach, E. M. Godfrey, M. Yin, J. Chen, A. P. Keaveny, M. Bridges, A. Bohte, M. H. Murad, D. J. Lomas, J. A. Talwalkar, and R. L. Ehman. Diagnostic Performance of Magnetic Resonance Elastography in Staging Liver Fibrosis : A Systematic Review and Meta-analysis of Individual Participant Data. *Clinical Gastroenterology and Hepatology*, 13(3) :440–451.e6, Mar. 2015. ISSN 15423565. doi : 10.1016/j.cgh.2014.09.046. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1542356514013950>.
- R. Sinkus, J. Lorenzen, D. Schrader, M. Lorenzen, M. Dargatz, and D. Holz. High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection. *Physics in Medicine and Biology*, 45(6) :1649–1664, June 2000. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/0031-9155/45/6/317. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9155/45/6/317>.

- 
- R. Sinkus, M. Tanter, T. Xydeas, S. Catheline, J. Bercoff, and M. Fink. Viscoelastic shear properties of in vivo breast lesions measured by MR elastography. *Magnetic Resonance Imaging*, 23(2) :159–165, Feb. 2005. ISSN 0730725X. doi : 10.1016/j.mri.2004.11.060. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0730725X05000391>.
- D. R. Smith, D. A. Caban-Rivera, M. D. McGarry, L. T. Williams, G. McIlvain, R. J. Okamoto, E. E. Van Houten, P. V. Bayly, K. D. Paulsen, and C. L. Johnson. Anisotropic mechanical properties in the healthy human brain estimated with multi-excitation transversely isotropic MR elastography. *Brain Multiphysics*, 3 : 100051, 2022. ISSN 26665220. doi : 10.1016/j.brain.2022.100051. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2666522022000089>.
- L. M. Solamen, M. D. McGarry, L. Tan, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. Phantom evaluations of nonlinear inversion MR elastography. *Physics in Medicine & Biology*, 63(14) :145021, July 2018. ISSN 1361-6560. doi : 10.1088/1361-6560/aacb08. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6560/aacb08>.
- J. A. Talwalkar, M. Yin, J. L. Fidler, S. O. Sanderson, P. S. Kamath, and R. L. Ehman. Magnetic resonance imaging of hepatic fibrosis : Emerging clinical applications. *Hepatology*, 47(1) :332–342, Dec. 2007. ISSN 02709139. doi : 10.1002/hep.21972. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/hep.21972>.
- L. Tan, M. D. J. McGarry, E. E. W. Van Houten, M. Ji, L. Solamen, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. Gradient-Based Optimization for Poroelastic and Viscoelastic MR Elastography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 36(1) :236–250, Jan. 2017a. ISSN 0278-0062, 1558-254X. doi : 10.1109/TMI.2016.2604568. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/7556963/>.
- L. Tan, M. D. J. McGarry, E. E. W. Van Houten, M. Ji, L. Solamen, W. Zeng, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. A numerical framework for interstitial fluid pressure imaging in poroelastic MRE. *PLOS ONE*, 12(6) :e0178521, June 2017b. ISSN 1932-6203. doi : 10.1371/journal.pone.0178521. URL <https://dx.plos.org/10.1371/journal.pone.0178521>.
- A. Tarantola and B. Valette. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20(2) :219, 1982. ISSN 8755-1209. doi : 10.1029/RG020i002p00219. URL <http://doi.wiley.com/10.1029/RG020i002p00219>.

- M. Tardieu, N. Salameh, L. Souris, D. Rousseau, L. Jourdain, H. Skeif, F. Prévot, L. de Rochefort, D. Ducreux, B. Louis, P. Garteiser, R. Sinkus, L. Darrasse, M. Poirier-Quinot, and X. Maître. Magnetic resonance elastography with guided pressure waves. *NMR in Biomedicine*, 35(7), July 2022. ISSN 0952-3480, 1099-1492. doi : 10.1002/nbm.4701. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nbm.4701>.
- M. A. Troelstra, J. H. Runge, E. Burnhope, A. Polcaro, C. Guenther, T. Schneider, R. Razavi, T. F. Ismail, J. Martorell, and R. Sinkus. Shear wave cardiovascular MR elastography using intrinsic cardiac motion for transducer-free non-invasive evaluation of myocardial shear wave velocity. *Scientific Reports*, 11(1) :1403, Jan. 2021. ISSN 2045-2322. doi : 10.1038/s41598-020-79231-z. URL <https://www.nature.com/articles/s41598-020-79231-z>.
- H. Tzschätzsch, J. Guo, F. Dittmann, S. Hirsch, E. Barnhill, K. Jöhrens, J. Braun, and I. Sack. Tomoelastography by multifrequency wave number recovery from time-harmonic propagating shear waves. *Medical Image Analysis*, 30 :1–10, May 2016. ISSN 13618415. doi : 10.1016/j.media.2016.01.001. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1361841516000025>.
- K. Uffmann and M. Ladd. Actuation Systems for MR Elastography. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 27(3) :28–34, May 2008. ISSN 0739-5175. doi : 10.1109/EMB.2007.910268. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/4527219/>.
- E. Van Houten, M. Doyley, F. Kennedy, K. Paulsen, and J. Weaver. A three-parameter mechanical property reconstruction method for MR-based elastic property imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(3) :311–324, Mar. 2005. ISSN 0278-0062. doi : 10.1109/TMI.2004.842451. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/1397819/>.
- E. Van Houten, G. Gibert, and A. Tang. Actuator-free MR elastography of the liver : Imaging liver tumors with viscoelastic intrinsic mre. In *ISMRM & SMRT Virtual Conference & Exhibition*, 2020. URL <https://archive.ismrm.org/2020/3332.html>.
- E. Van Houten, G. Geymonat, F. Krasucki, and B. Wattrisse. General guidelines for the performance of viscoelastic property identification in elastography : A monte-carlo analysis from a closed-form solution. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, page e3741, 2023.

- 
- E. E. Van Houten, K. D. Paulsen, M. I. Miga, F. E. Kennedy, and J. B. Weaver. An overlapping subzone technique for MR-based elastic property reconstruction. *Magnetic Resonance in Medicine : An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, 42(4) :779–786, 1999. Publisher : Wiley Online Library.
- E. E. Van Houten, M. M. Doyley, F. E. Kennedy, J. B. Weaver, and K. D. Paulsen. Initial in vivo experience with steady-state subzone-based MR elastography of the human breast. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 17(1) :72–85, Jan. 2003. ISSN 1053-1807, 1522-2586. doi : 10.1002/jmri.10232. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jmri.10232>.
- S. K. Venkatesh, M. Yin, and R. L. Ehman. Magnetic resonance elastography of liver : Technique, analysis, and clinical applications. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 37(3) :544–555, Mar. 2013. ISSN 10531807. doi : 10.1002/jmri.23731. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jmri.23731>.
- C. R. Vogel. *Computational methods for inverse problems*. SIAM, 2002.
- H. E. von Gierke, H. L. Oestreicher, E. K. Franke, H. O. Parrack, and W. W. von Wittern. Physics of Vibrations in Living Tissues. *Journal of Applied Physiology*, 4 (12) :886–900, June 1952. ISSN 8750-7587, 1522-1601. doi : 10.1152/jappl.1952.4.12.886. URL <https://www.physiology.org/doi/10.1152/jappl.1952.4.12.886>.
- B. Wattrisse, A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole, and M. Némoz-Gaillard. Analysis of strain localization during tensile tests by digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 41(1) :29–39, Mar. 2001. ISSN 0014-4851, 1741-2765. doi : 10.1007/BF02323101. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF02323101>.
- J. B. Weaver, A. J. Pattison, M. D. McGarry, I. M. Perreard, J. G. Swienckowski, C. J. Eskey, S. S. Lollis, and K. D. Paulsen. Brain mechanical property measurement using MRE with intrinsic activation. *Physics in Medicine and Biology*, 57(22) :7275–7287, Nov. 2012. ISSN 0031-9155, 1361-6560. doi : 10.1088/0031-9155/57/22/7275. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9155/57/22/7275>.
- P. Wells. Absorption and dispersion of ultrasound in biological tissue. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 1(4) :369–376, Mar. 1975. ISSN 03015629.

- 
- doi : 10.1016/0301-5629(75)90124-6. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0301562975901246>.
- M. Yin, J. A. Talwalkar, K. J. Glaser, A. Manduca, R. C. Grimm, P. J. Rossman, J. L. Fidler, and R. L. Ehman. Assessment of Hepatic Fibrosis With Magnetic Resonance Elastography. *Clinical Gastroenterology and Hepatology*, 5(10) :1207–1213.e2, Oct. 2007. ISSN 15423565. doi : 10.1016/j.cgh.2007.06.012. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1542356507006283>.
- Z. Yin, A. J. Romano, A. Manduca, R. L. Ehman, and J. Huston. Stiffness and Beyond : What MR Elastography Can Tell Us About Brain Structure and Function Under Physiologic and Pathologic Conditions. *Topics in Magnetic Resonance Imaging*, 27(5) :305–318, Oct. 2018. ISSN 0899-3459. doi : 10.1097/RMR.000000000000178. URL <https://journals.lww.com/00002142-201810000-00002>.
- Y. Zhang, A. A. Oberai, P. E. Barbone, and I. Harari. Solution of the time-harmonic viscoelastic inverse problem with interior data in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(13) :1100–1116, Dec. 2012. ISSN 00295981. doi : 10.1002/nme.4372. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.4372>.

