



**HAL**  
open science

# Contrôle des processus de désassemblage à l'aide des formalismes des systèmes à événements discrets

Syrine Bouazza

► **To cite this version:**

Syrine Bouazza. Contrôle des processus de désassemblage à l'aide des formalismes des systèmes à événements discrets. Automatique. Université Paris-Saclay; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2023. Français. NNT : 2023UPAST215 . tel-04556531

**HAL Id: tel-04556531**

**<https://theses.hal.science/tel-04556531>**

Submitted on 23 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contrôle des processus de désassemblage à l'aide des formalismes des systèmes à événements discrets

**Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay et de L'École Nationale d'Ingénieurs  
de Sfax Tunisie**

École doctorale n°580, Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication, STIC  
Spécialité de doctorat : Automatique  
Graduate School : Sciences de l'ingénieur et des systèmes. Référent : ENS Paris-Saclay

Thèse préparée dans les unités de recherche **LURPA et LA2MP**, sous la direction de **Saïd AMARI**, Maître de conférences HDR, LURPA ENS Paris Saclay /Université Sorbonne Paris Nord, et **Maher BARKALLAH**, Professeur Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, le co-encadrement de **Mohammed HADDAR**, Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie

Thèse soutenue à Sfax, Tunisie, le 09 décembre 2023, par

**Syrine BOUAZZA**

## Composition du Jury

Membres du jury avec voix délibérative

<b>Zoubeir BOUAZIZ</b> Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie	Président
<b>Ahmed NAIT SIDI MOH</b> Professeur, Université de Saint-Etienne	Rapporteur
<b>Ajmi HOUIDI</b> Maître de conférences HDR, ISSAT, Sousse	Rapporteur
<b>Molka HILI ATTIA</b> Professeur, ENSIT, Tunis	Examinatrice
<b>Salah RAMTANI</b> Professeur, Université Paris Nord	Examineur
<b>Dimitri LEFEBVRE</b> Professeur, Université Le Havre Normandie	Examineur

# Résumé

Le contrôle des processus de désassemblage fait référence aux méthodes et aux techniques utilisées pour démonter de manière sûre et efficace des composants mécaniques ou des ensembles complexes. Pour ce faire, des approches de commandes des contrôles sont développés pour satisfaire les contraintes imposées à ces systèmes. Plus précisément, dans cette thèse nous nous intéressons à trois types de spécifications : les contraintes marquages, les Contraintes de Marquage Généralisées (CMGs), et les Contraintes d'Exclusions Mutuelles (CEMs).

Pour cela, nous avons proposé trois méthodes analytiques. La première contribution concerne une nouvelle technique de conception de lois de commande pour les systèmes de désassemblages afin d'assurer la satisfaction des contraintes de marquage dans des Graphes d'Événements Temporisés (GETs) avec certaines transitions d'entrée incontrôlables. La deuxième technique met l'accent sur la synthèse des contrôleurs tout en assurant des CMGs spécifiées par des inégalités pondérées dans l'algèbre Min-Plus soumis à des GETs. La dernière approche vise à piloter les processus de désassemblage modélisés par des Réseaux de Graphes d'Événements Temporisés (RGETs) imposés à des CEMs.

En alternative, il convient de noter que ces approches se basent sur les structures conceptuelles des Systèmes à Événements Discrets (SEDs) ainsi que sur l'algèbre Min-Plus. Ces outils offrent la capacité de représenter de façon exacte et méthodique les systèmes de manufacturier. Par conséquent, la problématique se trouve formulée en utilisant des modèles linéaires de contrôle basés sur l'algèbre Min-Plus. En fait, le comportement de ces graphes est décrite en utilisant des équations Min-Plus linéaires, et les contraintes sont exprimées par des inégalités ou des inégalités pondérées dans l'algèbre Min-Plus.

Des conditions suffisantes pour l'existence des lois de commande causales sont établies. Ces contrôleurs développés sont des retours d'états qui peuvent être symbolisés par des places de surveillance empêchant le système de toute violation de contrainte. Le graphe est vivant et sans blocage.

**Mots clés :** Systèmes à événements discrets, Graphes d'événements temporisés, Des transitions de perturbations, Réseaux de graphes d'événements temporisés, contraintes de

marquage, contraintes de marquage généralisées, contraintes d'exclusions mutuelles, algèbre Min-Plus, Systèmes de désassemblages.

# Abstract

Disassembly process control involves the methods and techniques used to safely and efficiently disassemble mechanical components or complex assemblies. To do this, control approaches are developed to satisfy the constraints imposed on these systems. More specifically, in this thesis we are interested in three types of specifications: marking constraints, Generalized Marking Constraints (GMCs), and Mutual Exclusion Constraints (MECs).

To this aim, we have proposed three analytical methods. The first contribution concerns a new technique for designing control laws for disassembly systems to ensure the satisfaction of marking constraints in Timed Event Graphs (TEGs) with some uncontrollable input transitions. The second technique focuses on controller synthesis while ensuring GMCs specified by weighted inequalities in the Min-Plus algebra subject to GETs. The final method aims to control disassembly processes modelled by Timed Event Graph Networks (NTEGs) imposed on MECs.

Alternatively, it is worth noting that these approaches are based on the conceptual structures of Discrete Event Systems (DES) and the Min-Plus algebra. These tools offer the ability to represent manufacturing systems accurately and methodically. Consequently, the problem is formulated using linear control models based on Min-Plus algebra. In fact, the behaviour of these graphs is described using linear Min-Plus equations, and constraints are expressed by inequalities or weighted inequalities in the Min-Plus algebra.

Sufficient conditions for the existence of causal control laws are established. These developed controllers are state feedbacks that can be represented by monitoring places preventing the system from any constraint violation. The graph is alive and unblocked.

**Keywords:** Discrete event systems, Timed event graphs, Disturbed transitions, Networks of timed event graphs, Generalized marking constraints, Mutual exclusion constraints, Marking constraints, Min-Plus algebra, Disassembly systems.

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance envers toutes les personnes qui ont contribué de manière significative à la réalisation de cette thèse.

Tout d'abord, je suis reconnaissant envers mon directeur de thèse, monsieur **AMARI Saïd** pour leur guidance éclairée, leurs conseils judicieux et leur patience infinie ont été les piliers essentiels qui m'ont permis de mener à bien cette recherche. Leurs remarques constructives, leurs discussions stimulantes et leurs orientations pertinentes ont grandement enrichi ma réflexion et ont conduit à des résultats que je suis fier de présenter aujourd'hui.

Je souhaite exprimer ma sincère appréciation envers mon directeur de thèse, monsieur **BARKALLAH Maher** pour sa vision stratégique, ses précieux commentaires et sa guidance tout au long de ma thèse. Votre expertise, vos conseils et votre soutien ont été essentiels à mon succès académique.

Je tiens également à remercier chaleureusement mon co-encadrant de thèse, monsieur **HASSINE Hichem** pour son expertise approfondie et sa disponibilité constante. Ses conseils méthodologiques précieux et sa volonté de partager son expérience ont été des éléments clés dans la progression de mon travail de recherche.

À mon co-encadrant, monsieur **HADDAR Mohammed**, Je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour son orientation, son soutien et sa confiance en moi tout au long de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers monsieur **BOUAZIZ Zoubeir** pour avoir accepté de présider ma soutenance de thèse. Sa disponibilité et son expertise ont grandement enrichi cette expérience académique,

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux rapporteurs de ma thèse, monsieur **AOUIDI Ajmi** et monsieur **NAIT SIDI MOH Ahmed** pour avoir accepté d'évaluer mon manuscrit. Vos expertises et vos temps précieux consacrés à cette tâche sont inestimables pour moi.

Je tenais à vous exprimer ma plus sincère gratitude à monsieur **RAMTANI Salah** pour avoir accepté d'être l'examineur de ma thèse. Votre expertise est incontestable, et je suis honorée de pouvoir bénéficier de vos précieux conseils et de votre évaluation de mon travail de recherche.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers l'ensemble de l'équipe de **LURPA Paris-Saclay** pour le précieux environnement de travail qu'ils ont créé. Les interactions avec mes collègues chercheurs ont été une source d'inspiration constante, et j'ai appris énormément grâce à nos échanges fructueux.

Mes remerciements s'étendent également à toute l'équipe de L'IUT de Saint-Denis, ma famille et à mes amis qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure. Leur soutien inconditionnel, leurs encouragements et leur compréhension ont été une source d'énergie inestimable.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse, qu'il s'agisse de participants à l'étude, de ressources bibliographiques, ou de toute autre contribution qui a enrichi mon travail.

En cet instant de réussite, je mesure la chance qui a été la mienne d'être entouré d'une communauté si bienveillante et engagée. Les accomplissements que je célèbre aujourd'hui ne sont pas seulement les miens, mais sont le fruit d'un effort collectif.

Merci du fond du cœur.

# Dédicaces

**"L'amour tendre de nos proches est la lumière qui guide  
notre chemin vers le sommet de la réussite."**

À mon cher père **Fathi**, source inépuisable de soutien et d'inspiration. Ta persévérance et ton amour inconditionnel ont toujours été un phare dans ma vie. Cette thèse est dédiée à toi, en reconnaissance de tout ce que tu as sacrifié pour mon éducation et mon épanouissement.

À ma chère mère **Kalthoum**, qui a été ma première enseignante et mon roc tout au long de ce voyage. Ton dévouement à cultiver ma curiosité et à encourager mes rêves est une bénédiction que je chérirai toujours. Cette thèse porte le reflet de ton amour et de tes enseignements.

À ma sœur bien-aimée **oumaïma**, compagne de rires et de confidences, qui a toujours été là pour m'inspirer à persévérer, même lorsque les défis semblaient insurmontables. Ses conseils précieux, ses discussions stimulantes et son amour constant ont été des sources d'inspiration qui m'ont aidé à traverser les moments difficiles de cette recherche.

À mes chers frères **Yessine** et **Slim**, cette thèse est dédiée à vous. Leurs encouragements, leur soutien moral et leur compréhension ont été des éléments essentiels qui ont contribué à la réalisation de cette thèse.

À toute ma famille, pilier de ma vie et source d'inspiration collective. Votre foi en moi a été la force motrice derrière chaque réussite. Cette thèse honore notre unité et célèbre les valeurs que nous partageons.

Que cette dédicace reflète l'amour, la gratitude et le respect que j'ai pour vous tous. Vos encouragements ont rendu possible ce moment de réalisation, et je vous dédie ce travail avec tout mon cœur.

# Sommaire

Liste des Figures	
Liste des Tableaux	
Abréviations	
Liste des notations	
Introduction générale.....	1
Chapitre 1. Rappels des formalismes des systèmes à événements discrets .....	7
1.1. Introduction .....	8
1.2. Réseaux de Petri et Graphes d'événements temporisés .....	8
1.2.1. Rappel sur le réseau de Petri .....	8
1.2.1.1. Définition et notion.....	9
1.2.1.2. Propriétés de RdP .....	11
1.2.1.3. Les principaux classes existantes.....	12
1.2.2. Graphes d'événements temporisés .....	13
1.2.2.1. Graphes d'événements temporisés perturbés .....	13
1.2.2.2. Propriétés des graphes d'événements temporisés.....	14
1.2.2.3. Réseaux de graphes d'événements temporisés.....	16
1.2.2.4. Fonctionnement au plus tôt d'un GET .....	17
1.3. Théorie de l'algèbre Min-Plus.....	17
1.3.1. Préliminaires algébriques .....	18
1.3.2. Propriétés de l'algèbre Min-Plus .....	19
1.3.2.1. Dioïde complet .....	19
1.3.2.2. Relation d'ordre.....	20
1.3.2.3. Dioïde matriciel .....	20
1.3.3. Résolution d'équations dans le formalisme Min-Plus .....	21
1.4. Modèles Min-Plus des GETs avec des transitions de perturbations.....	21
1.4.1. Fonctions compteurs des transitions .....	22
1.4.2. Equation Min-Plus implicites et explicites des GETs en présence des perturbations .....	23
1.4.3 Equations d'état des GETs avec des transitions incontrôlables dans l'algèbre Min-Plus.....	24
1.5. Conclusion .....	28
Chapitr 2. Commande des GETs en présence de perturbations sous contraintes de marquage : Application sur un système de désassemblage .....	29

2.1. Introduction.....	30
2.2 Etat de l’art sur les problèmes de contraintes de marquage .....	31
2.3. Problème de contraintes de marquage.....	34
2.3.1. Motivations et problématique.....	34
2.3.2. Problème de commande des GETs sous contraintes de marquage imposées sur des places .....	36
2.3.3. Contraintes de marquage imposées sur un chemin d’un GET.....	37
2.4. Commande des GETs perturbées et totalement observables sous contraintes imposées sur des places .....	39
2.4.1. Commande monovariante .....	39
2.4.1.1. GET soumis à une seule contrainte de marquage.....	39
2.4.1.2. GET soumis à plusieurs contraintes de marquage.....	42
2.4.2. Commande multivariante .....	43
2.4.2.1. GETs soumis à une seule contrainte de marquage .....	43
2.4.2.2. GETs soumis à plusieurs contraintes de marquage .....	44
2.4.3. Algorithme de contrôle des GETs sous multi-contraintes de marquage .....	45
2.5. Conception de lois de commande pour des GETs sous contraintes imposées sur des chemins .....	46
2.5.1. Commande monovariante.....	46
2.5.1.1. Un chemin soumis à une contrainte de marquage .....	46
2.5.1.2. Un chemin soumis à plusieurs contraintes .....	47
2.5.2. Commande multivariante .....	48
2.5.2.1. Des chemins soumis à une contrainte de marquage .....	48
2.5.2.2. Des chemins soumis à plusieurs contraintes de marquage .....	49
2.5.3. Instruction algorithmique pour la synthèse de contrôle.....	50
2.6. Contrôle par rétroaction pour les GETs perturbés partiellement observables .....	51
2.6.1. Commande monovariante .....	51
2.6.1.1. Un chemin soumis à une contrainte de marquage.....	51
2.6.1.2. Un chemin soumis à plusieurs contraintes .....	53
2.6.2. Commande multivariante .....	53
2.6.2.1. Des chemins soumis à une contrainte de marquage .....	54
2.6.2.2. Des chemins soumis à plusieurs contraintes.....	54
2.6.3. Procédure algorithmique de synthèse des commandes.....	55
2.7. Etude de cas : application à un système de désassemblage.....	56
2.7.1. Description du système.....	56
2.7.2. Modélisation du système par GET .....	57
2.7.3. Calcul des lois de commande .....	63
2.8. Conclusion .....	65

Chapitre 3. Conception des lois de commande des GETs partiellement commandables sous contraintes de marquage généralisées : Application à un processus de désassemblage .....	68
3.1. Introduction.....	69
3.2. Problématique : Contraintes de marquage généralisées.....	70
3.3. Méthodologie formelle pour synthétiser des lois de commande qui satisfaisent des CMGs soumis à des GETs partiellement contrôlables .....	73
3.3.1. GET avec une seule transition d'entrée .....	73
3.3.1.1. Une contrainte de marquage généralisée .....	73
3.3.1.2. Plusieurs contraintes de marquage généralisée .....	78
3.3.2. Commande multivariables .....	80
3.3.2.1. Une contrainte de marquage généralisée .....	80
3.3.2.2. Plusieurs contraintes de marquage généralisées .....	81
3.3.3. Algorithme de contrôle des GETs perturbés et totalement observables .....	82
3.3.4. Étude de cas : un exemple illustratif.....	84
3.4. Conception de contrôle pour le respect de CMGs dans des GETs partiellement observables et contrôlables.....	86
3.4.1. GET avec une seule transition d'entrée .....	86
3.4.1.1. GET soumis à une contrainte de marquage généralisée .....	87
3.4.1.2. Des GETs soumis à plusieurs contraintes de marquage généralisées .....	88
3.4.2. GETs à entrées multiples .....	90
3.4.2.1. GET soumis à une contrainte de marquage généralisée .....	90
3.4.2.2. GET soumis à multi-contraintes de marquage généralisées .....	91
3.4.3. Algorithme de contrôle des GETs partiellement contrôlables et observables .....	92
3.5. Application à un processus de désassemblage .....	93
3.6. Conclusion .....	97
Chapitre 4. Approches algébriques de commande des systèmes de désassemblages modélisées par des réseaux de graphes d'événements temporisés perturbés sous contraintes d'exclusions mutuelles.....	98
4.1. Introduction.....	99
4.2. Etat de l'art sur les problèmes de CEMs.....	100
4.3. Formulation du problème des CEMs.....	103
4.4. Loi de commandes des RGETs sous CEMs .....	105
4.4.1. Une seule CEM soumise à des places de RGETs.....	105
4.4.2. Plusieurs CEMs soumises à des places de RGETs .....	108
4.5. Conception de lois de commande pour les RGETs partiellement observables et contrôlables sous CEMs.....	109
4.5.1. Une seule CEM soumise à des places de RGETs .....	109
4.5.2. Plusieurs CEMs soumises à des places de RGETs.....	111
4.6. Algorithme de commande.....	112
4.7. Etude de cas : application de l'approche proposée à un système de désassemblage .....	113

4.7.1.	Modélisation du système de désassemblage .....	113
4.7.2.	Description du fonctionnement du système .....	115
4.7.3.	Conception des lois de commande .....	116
4.7.4.	Interprétation des lois de commande calculées .....	117
4.8.	Conclusion .....	119
	Conclusions et perspectives.....	121
	Références bibliographiques .....	126
	Publications scientifiques .....	131
	Table des matières.....	133

# Liste des Figures

Figure 1. Représentation synoptique de la thèse .....	5
Figure 1. 1. Exemple d'un RdP .....	10
Figure 1. 2. Représentation de marquage initial d'un RdP .....	10
Figure 1. 3. Exemple d'un réseau de Pétri avec son graphe d'accessibilité.....	11
Figure 1. 4. Exemple d'un graphe d'état .....	12
Figure 1. 5. Exemple d'un graphe d'événement .....	12
Figure 1. 6. Exemple d'un RdP pur.....	12
Figure 1. 7. Graphe d'événements temporisé.....	13
Figure 1. 8. Graphe d'événements temporisé avec des transitions de perturbations.....	14
Figure 1. 9.Représentation d'un chemin dans un GET .....	14
Figure 1. 10. Représentation d'un circuit dans un GET.....	15
Figure 1. 11. Les différentes transitions d'un GET .....	16
Figure 1. 12.Un exemple d'un RGETs .....	17
Figure 1. 13. Assemblage d'un vélo .....	19
Figure 1. 14. Exemple d'un GET avec une transition incontrôlable .....	22
Figure 2.1. Représentation synoptique du chapitre 2. ....	31
Figure 2.2. Modèle d'un atelier flexible.....	35
Figure 2.3. Modèle d'un atelier flexible avec une capacité limitée .....	36
Figure 2.4. Exemple de contrainte de marquage imposée sur un chemin d'un GET .....	38
Figure 2.5. Le système de désassemblage étudié.....	63
Figure 2.6. Modèle de GET du système de désassemblage .....	59
Figure 2.7. Graphe de marquage de modèle GET de la Figure 2.6.....	63
Figure 2. 8. Modèle de système de désassemblage avec des places de contrôle.....	67
Figure 2. 9.Graphe d'accessibilité de la Figure 2.8. ....	68
Figure 3.1. Structure générale de l'approche proposé dans le chapitre 3.....	70
Figure 3.2. Un exemple de GET avec des transitions incontrôlables.....	72
Figure 3.3. Modèle d'un GET avec transition incontrôlable.....	84

Figure 3.4. Graphe d'accessibilité du GET de la Figure 3.3.....	85
Figure 3.5. GET contrôlé du système proposé .....	85
Figure 3.6. Graphe de marquage du GET contrôlé .....	86
Figure 3.7. Ligne de désassemblage.....	94
Figure 3.8. Modèle GET du système de désassemblage .....	95
Figure 3.9. Graphe de marquage de Figure 3.8 .....	95
Figure 3.10. Le réseau de Petri contrôlé du système de désassemblage .....	96
Figure 3.11. Graphe d'accessibilité du GET contrôlé.....	96
Figure 4.1. Synthèse de l'approches proposer dans le chapitre 4.....	99
Figure 4.2. Un exemple de RGETs avec des transitions de perturbations .....	104
Figure 4.3. Réseau de GET du système étudié.....	114
Figure 4. 4. Graphe de marquage de la Figure. 4.3.....	115
Figure 4.5. Réseau de Petri du système contrôlé.....	117
Figure 4.6. Graphe d'accessibilité de la Figure 4.5. ....	118

# Liste des Tableaux

Table 2. 1. Description des places et des transitions utilisées dans la Figure 2.6 .....	60
Table 4. 1. Les événements identifiés pour le système de désassemblage illustré à la Figure 4.3.....	114

# Abréviations

SEDs	Système à Evénements Discret
RdP	Réseau de Petri
RPT	Réseaux de Petri Temporisés
GETs	Graphes d'Evénements Temporisés
RGETs	Réseau des Graphes d'Evénements Temporisés
CMGs	Contraintes de Marquage Généralisées
CEMs	Contraintes d'Exclusions Mutuelles
$P$	Ensemble non vide de places d'un réseau de Petri.
$T$	Ensemble non vide de transitions d'un réseau de Petri
$\oplus$	Addition dans un dioïde.
$\otimes$	Multiplication dans un dioïde
$E$	Elément neutre pour la loi $\oplus$ .
$\bar{E}$	Elément neutre pour la loi $\otimes$ .

# Liste des notations

$n$	Nombre de transitions internes dans un GETs
$L$	Nombre de GET dans RGETs
$l$	Indice de chaque GET perturbé
$b$	Nombre de jetons à ne pas dépasser
$b_s$	Nombre de jetons à ne pas dépasser dans chaque place $p_{ij_s}^l$
$S$	Nombre de contraintes imposés
$Z$	Nombre de places sous CMGs dans le chemin $\rho$
$Z_s$	Nombre de places sous CMGs dans les différents chemin $\rho_s$ limités
$H$	Nombre de transitions perturbées dans le chemin sous contraintes
$c$	Index associé à la transition de contrôle
$\bar{n}$	Nombre de transitions de contrôle
$c_s$	Index associé à la transition de contrôle soumise à des contraintes multiples s
$\rho$	Le chemin de GET soumis à une contrainte de marquage
$t_{j_s}^l$	Transition d'entrée de la place sous contrainte $p_{ij_s}^l$
$t_i^{z_s}$	Transition de sortie de la place sous contrainte $p_{ij}^{z_s}$
$t_j^{z_s}$	Transition d'entrée de la place sous contrainte $p_{ij}^{z_s}$
$t_u^{c_s}$	Transition d'entrée du chemin pondéré $\rho_s$
$t_w$	Transitions perturbées/ incontrôlables
$T_y$	Transitions observables
$T_\beta$	Ensemble de transitions non observables
$p_{ij_s}^l$	Place qui connecte la transition $t_{j_s}^l$ à $t_{i_s}^l$
$x_i(t)$	Compteurs liés aux transitions $t_i$
$x_j(t)$	Compteurs liés aux transitions $t_j$
$x_i^l(t)$	Compteur associé à $t_i^l$
$x_j^l(t)$	Compteur associé à $t_j^l$
$x_j^{z_s}(t)$	Compteur associé à $t_j^{z_s}$
$x_i^{z_s}(t)$	Compteur associé à la dernière transition de $\rho_s$
$x_j^{1s}(t)$	Compteur associé à la première transition de $\rho_s$

$p_{ij}^{z_s}$	Place reliant $t_j^{z_s}$ à $t_i^{z_s}$ pour chaque chemin $\rho_s$
$v^1$	Coefficients de pondérations associés aux premières places appartenant à $\rho$
$v^z$	Coefficients de pondérations associés à chaque place $p_{ij}^z$
$v^{z_s}$	Coefficient de pondérations associé aux places de marquages $p_{ij}^{z_s}$
$M_{ij}(t)$	Le nombre des jetons présents dans la place $p_{ij}$ à un instant $t$
$M_\rho(t)$	Le nombre de jetons dans $\rho$ à l'instant $t$ .
$M_{ij}^{z_s}$	Marquage du place $p_{ij}^{z_s}$
$M_{0ij}^{z_s}$	Marquage initial du place $p_{ij}^{z_s}$ dans chaque chemin $\rho$
$M_{0ij}$	Le nombre initial de jetons dans la place $p_{ij}$ .
$m_\rho$	Le marquage du chemins $\rho$ .
$m_\alpha^z$	Marquage initial du chemin $\alpha_z$ .
$\delta$	Chemin reliant la transition non observable à la transition observable
$m_\delta$	Marquage du chemin $\delta$
$\tau_\delta^{\beta_s}$	Temporisation du chemin $\delta$
$\tau_\rho$	Le temps du chemins $\rho$ .
$\tau_\alpha^{z_s}$	Temporisation de chaque chemin sous contrainte $\alpha_z$
$\tau_\alpha^{z_{c_s}}$	Temporisation du chemin $\alpha_z^{c_s}$ pour chaque transition contrôlable
$\tau_\alpha^{1_{c_s}}$	Temporisation du chemin $\alpha_1^{c_s}$
$\alpha$	Chemin reliant $t_u$ à $t_j$ du place $p_{ij}$ ,
$\alpha_1^{c_s}$	Le chemin reliant $t_u^{c_s}$ à la transition d'entrée de $\rho_s$
$\mu_0$	Vecteur du marquage initial.

# Introduction générale

La logistique inverse (Murphy et Poist [1989]) est devenue de plus en plus importante en raison de la sensibilisation croissante à la durabilité, de la pression réglementaire et de la nécessité de maximiser l'utilisation des ressources et de réduire les déchets. Les entreprises cherchent à optimiser leurs processus de logistique inverse pour minimiser les coûts, maximiser la récupération de valeur, améliorer la satisfaction des clients et respecter les normes environnementales (Brach and Brusset, [2014]). Dans ce contexte, le concept de désassemblage représente un point clé pour intégrer les notions de développement durable. Le désassemblage est un processus de décomposition d'un système/ produit en sous-assemblages et composants recyclables, réutilisables en assurant leur caractéristiques mécaniques et fonctionnelles (Gungor and Gupta, [1997]). C'est un maillon essentiel pour la remise à neuf et la maintenance de différents produits. Il a été considéré comme l'opération la plus efficace et la plus économique puisque les produits retournés sont généralement désassemblés avant d'être refabriqués, recyclés ou même éliminés.

Ces systèmes de désassemblage sont désormais considérés comme des Systèmes à Événements Discrets (SEDs) qui ont des états variables qui changent à des moments discrets. Les SEDs sont des systèmes dynamiques où les changements d'état se produisent à des moments spécifiques et discrets, généralement déclenchés par des événements spécifiques (Cassandras and Lafortune [2009]; Silva [2018]). Contrairement aux systèmes continus où les variables changent de manière continue, les SEDs se caractérisent par des états distincts et des transitions entre ces états en réponse à des événements bien définis.

Les SEDs sont des modèles mathématiques largement utilisés pour décrire et analyser les systèmes complexes où les événements se produisent à des moments spécifiques et discrets. Dans le contexte du désassemblage, ces événements discrets pourraient inclure des actions telles que le démontage d'une pièce, la vérification de la qualité, le tri des composants, etc. Néanmoins, à mesure que ces systèmes évoluent, leur fonctionnement est conditionné par certaines limitations et certains critères, tels que les délais, les capacités des ressources, les contraintes d'état et les exclusions mutuelles. Lorsque ces critères ne sont pas pris en compte,

nous atteignons ce que l'on appelle des états interdits. Afin de prévenir ces circonstances indésirables, un contrôleur doit être développé. En fait, le contrôle des processus de désassemblage à l'aide de SEDs implique l'utilisation de méthodes et d'outils pour superviser, réguler et optimiser les opérations de désassemblage dans un environnement de fabrication ou de recyclage.

En se référant à la littérature, plusieurs auteurs ont concentré leurs travaux sur les limites temporelles supérieures dans les parties sensibles d'un système (Atto et al. [2011] ; Amari et al. [2012]; Jacob et Amari [2016]; Tebani et al. [2017]). Leur objectif était de satisfaire les limitations temporelles imposées au comportement du système. D'autres auteurs ont étudié les spécifications des capacités, représentées dans les réseaux de Petri par des contraintes de marquage ou des états interdits (Basile et al. [2013]; Tebani et al. [2019]; Tebani et Amari [2021]). Plus précisément, cette étude est consacrée à la résolution du problème de contrôle des SEDs soumis à de différents types de contraintes de capacité telles que les contraintes de marquage, les Contraintes de Marquage Généralisées (CMGs) et Contraintes d'Exclusion Mutuelle (CEMs).

Les contraintes de marquage font référence aux limitations ou restrictions quant aux ressources, aux volumes ou aux quantités disponibles dans un système donné. Ils sont utilisés pour modéliser en détail la gestion des ressources au sein d'un système. Quant, aux CMGs, elles sont couramment utilisées pour modéliser de manière plus précise les diverses conditions et politiques dans les systèmes, telles que des ressources limitées, des priorités entre les processus, des allocations de ressources, etc. Leur utilité se manifeste de manière spécifique dans les SEDs, car elles étendent la portée des méthodes de contrôle établies. Les CEMs sont un moyen crucial de prévenir les conflits et de favoriser des conditions de concurrence équitables. Elles permettent de gérer les accès concurrents à des ressources limitées ou stratégiques, ce qui contribue à maintenir l'ordre, la stabilité et l'efficacité dans divers domaines d'activité tels que les processus de désassemblage.

La synthèse de contrôleurs pour les SEDs implique généralement l'utilisation des techniques formelles, telles que la logique temporelle, les automates, les réseaux de Petri, etc. Ces techniques permettent de traduire les spécifications en règles et en séquences d'actions qui guident le comportement du système. Dans ce travail, le processus de désassemblage est modélisé en utilisant une sous classe des réseaux de Petri. Plusieurs approches tel que (Dideban and Alla [2013], Iordache and Antsaklis [2006]) ont étudié le contrôle supervisé des réseaux de Petri sous des contraintes de marquage sans prendre en compte le paramètre temps, alors qu'il

est intéressant d'incorporer la durée des activités dans le modèle du système pour examiner les caractéristiques de performance et le contrôle des SEDs.

Afin de surmonter ces restrictions, certaines études ont incorporé les éléments temporels dans la conceptualisation des SEDs. Toutefois, l'utilisation de ces méthodes peut engendrer des situations d'explosion combinatoire lors de leur application à des systèmes industriels réels et complexes. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode analytique pour la conception de lois de commande pour les systèmes de désassemblages modélisés par une sous classe de Réseau de Petri (RdP) représentées par les Graphes d'Événements Temporisés (GETs), qui sont des représentations graphiques des états et des transitions du système. Il est généralement connu que les dioïdes représentent une structure mathématique qui peut être utilisée pour générer des modèles linéaires pour cette classe de réseaux de Petri temporisés (Baccelli et al. 1992). L'utilisation conjointe des GETs et de Max-Plus (ou Min-Plus) est une formalisation bien connue dans la littérature qui reste un domaine de recherche très actif.

Néanmoins, plusieurs auteurs ont abordé le problème des contraintes de capacités (Tebani et al. [2019], Tebani and Amari [2021] Rjah et al. [2023]a,b, Soumatia and Amari [2022] ), mais sans prendre en considération les transitions perturbées dans leurs systèmes. Même les travaux qui intègrent ces transitions dans leurs modèles des GETs, utilisent les dioïdes complets et en garantissent d'autres critères tels que l'ordonnancement dans les systèmes de criblage à haut débit (Shang, et al. 2016), critère de juste-à-temps (Oke et al. [2022]) et le partage des ressources (Goltz et al. 2022). Pour un GET, le problème de commande en présence d'entrées non maîtrisables (des perturbations) consiste à retarder davantage le franchissement des transitions d'entrée contrôlables, tout en maintenant la progression de la trajectoire résultante des transitions incontrôlables.

L'élaboration de stratégies de commande répondant à des spécifications précises, tout en prenant compte des transitions incontrôlables dans la modélisation des systèmes, représente un défi majeur qui oriente notre approche. Notre objectif est de proposer une nouvelle méthode analytique pour concevoir des lois de commande afin de garantir un ensemble de contraintes dans des GETs ou des Réseaux des Graphes d'Événements Temporisés (RGETs) avec des transitions perturbées. Pour développer cette loi de commande, des équations Min-Plus linéaires sont utilisées pour décrire le comportement des graphes étudié et des inégalités Min-Plus afin traduire les spécifications à satisfaire.

L'algèbre dioïde (Max-Plus ou Min-Plus) permet de transposer plusieurs résultats de la théorie classique du contrôle pour résoudre des problèmes liés aux SEDs. Ces modèles analytiques ont été utilisés pour développer diverses stratégies de contrôle exhaustives, telles que : des méthodes de contrôle utilisant des structures en boucle ouverte pour surmonter le suivi de la sortie du système ou le suivi de la référence du modèle, des contributions basées sur des techniques en boucle fermée prenant en compte les perturbations et les inadéquations modèle-système, tout en incluant, éventuellement, un observateur d'état, des approches de contrôle prédictif pour garantir des contraintes strictes. Les principaux avantages de ce formalisme sont les suivants :

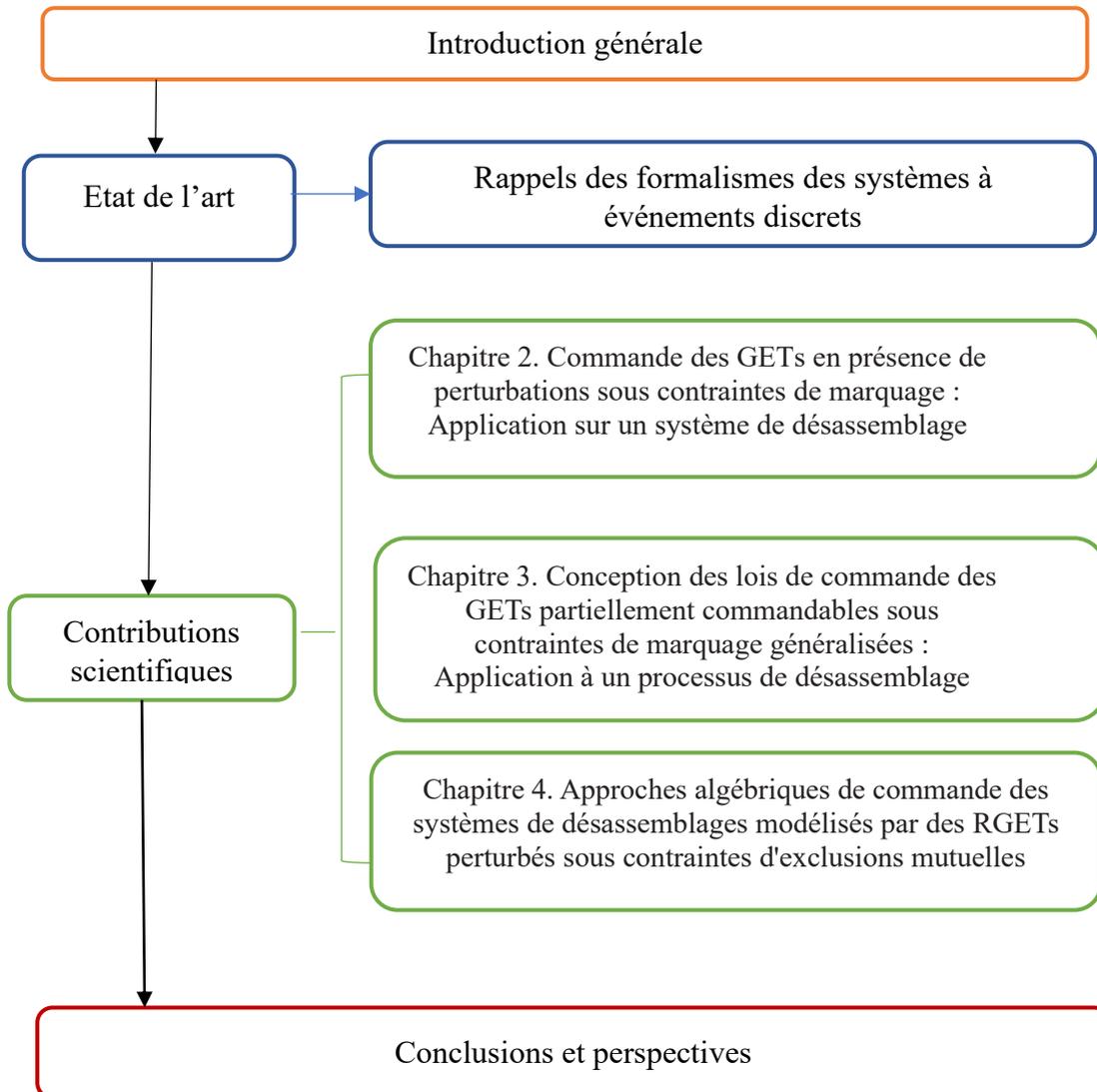
- i) La résolution de ces équations linéaires et le calcul des lois de commande ne nécessitent pas d'outils spécifiques ni de ressources informatiques importantes,
- ii) La mise en œuvre et l'application des approches développées sont faciles et ne requièrent pas beaucoup d'espace mémoire,
- iii) La méthode analytique adoptée dans ce travail ne souffre pas de problème de l'explosion combinatoire des états, comme les méthodes qui utilisent des automates temporisés ou d'autres formalismes graphiques des SEDs,
- iv) Les différentes approches qui utilisent les modèles Min-Plus sont analytiques et exhaustives et peuvent traiter des applications complexes,
- v) Cette méthodologie de contrôle est exhaustive et admet une solution réalisable si les conditions suffisantes sont satisfaites.

Ces formalismes algébriques sont généralement dédiés à la modélisation et au contrôle des graphes d'événements temporisés. Mais, malheureusement, les applications impliquant des phénomènes de partage de ressources sont moins traitées. L'objectif de cette thèse est de synthétiser un contrôleur qui permet d'améliorer la performance et la protection des systèmes manufacturier, en respectant les caractéristiques données par le fabricant selon les besoins et les conditions du travail.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres articulés selon le schéma synoptique illustré par Figure 1 comme suit :

- Dans le premier chapitre nous introduisons des concepts de base et des rappels des réseaux de Petri et des graphes d'événements temporisés. Ensuite, nous rappelons les outils algébriques nécessaires à la représentation et à la commande de ces graphes à savoir les algèbres Min-Plus. Nous montrons comment décrire le comportement des graphes d'événements temporisés par des équations et des

inéquations linéaires de formalisme. Ce chapitre se termine par des discussions de la modélisation de GET dans les dioïdes afin d'obtenir des représentations d'état linéaires. Nous présentons une description générale de cette théorie, en nous concentrant sur la modélisation des graphes d'événements temporels dans les algèbres Min-Plus.



**Figure 1.** Représentation synoptique de la thèse

- Le deuxième chapitre détaille nos contributions liées à la synthèse des lois de commande pour garantir la satisfaction des contraintes de marquage imposées sur des places indépendantes ou dépendantes (chemins) des GETs. En fait, deux études analytiques sont proposées : Dans la première, nous avons proposé des contrôleurs réalisables pour piloter les SEDs modélisés par des GETs perturbés totalement observables. Dans le deuxième, nous avons étendu notre champ de recherche en

considérant les graphes partiellement contrôlables et observables. Dans les deux cas nous avons traité les cas où une puis plusieurs contraintes sont imposées aux places ainsi, chemins des GETs. Par ailleurs, nous avons traduit cette démarche analytique sous un algorithme conçu pour les systèmes industriels à grande échelle. Finalement, pour montrer l'intérêt et l'efficacité de la méthode proposée, elle est illustrée sur un exemple d'un processus de désassemblage.

- Dans le troisième chapitre, l'accent sera mis sur la nouvelle stratégie de commande proposée pour résoudre le problème de contrôles des systèmes de désassemblages modélisés par des GETs imposés à des contraintes de marquage généralisées. En fait, ce chapitre est une extension des champs d'application de l'approche de contrôle proposé dans le chapitre 2. Nous commençons par aborder le cas où les GETs avec des transitions incontrôlables sont totalement observables. Ensuite, nous étendons l'hypothèse d'observabilité et nous proposons une nouvelle méthode de contrôle pour les GETs perturbés partiellement observables. Ensuite, cette approche est présentée sous la forme d'une procédure algorithmique pour illustrer sa viabilité, même en contexte de systèmes complexes et concrets. Enfin, un cas d'étude d'une ligne de désassemblage est étudié afin d'illustrer la méthode proposée et évaluer sa performance.

- Le dernier chapitre de ce manuscrit aborde le problème de contrôle des systèmes de désassemblage avec des perturbations, qui est soumis à des contraintes d'exclusion mutuelle. Notre objectif est de proposer une nouvelle approche analytique pour concevoir des lois de commande garantissant un ensemble de CEMs dans des réseaux de graphes d'événements temporisés perturbés dont toutes ses transitions sont observables, ensuite des GETs partiellement observable avec certaines transitions d'entrées incontrôlables. Cette méthode est présentée sous la forme d'un algorithme. Afin de prouver l'efficacité de cette technique, un exemple d'application d'un système de désassemblage est présenté et analysé.

Nous finissons par une conclusion générale qui synthétise les résultats obtenus et les contributions apportées, ainsi qu'introduire quelques perspectives de ce travail de recherche.

# Chapitre 1

## Rappels des formalismes des systèmes à événements discrets

---

---

1.1. Introduction .....	8
1.2. Réseaux de Petri et Graphes d'événements temporisés .....	8
1.2.1. Rappel sur le réseau de Petri .....	8
1.2.2. Graphes d'événements temporisés .....	13
1.3. Théorie de l'algèbre Min-Plus.....	17
1.3.1. Préliminaires algébriques .....	18
1.3.2. Propriétés de l'algèbre Min-Plus .....	19
1.3.3. Résolution d'équations dans le formalisme Min-Plus .....	21
1.4. Modèles Min-Plus des GETs avec des transitions de perturbations.....	21
1.4.1. Fonctions compteurs des transitions .....	22
1.4.2. Equation Min-Plus implicites et explicites des GETs en présence des perturbations .....	23
1.4.3 Equations d'état des GETs avec des transitions incontrôlables dans l'algèbre Min-Plus.....	24
1.5. Conclusion .....	28

---

---

## 1.1. Introduction

L'étude des systèmes à événements discrets (SEDs) a suscité un intérêt soutenu en raison de son importance tant sur le plan théorique qu'économique. D'après la littérature, diverses catégories de systèmes impliquant des phénomènes variés tels que: la synchronisation, le parallélisme, le choix, la saturation, le séquençement, et autant de modèles mathématiques. Les méthodes de modélisation les plus répandues figurent les RdP. Notre étude se focalise sur une sous-classe spécifique de ces réseaux, à savoir les GETs.

Ce chapitre présente quelques généralités et notions de base concernant les outils algébriques utilisés dans ce travail. Bien qu'il ne soit pas exhaustif, il offre une présentation détaillée afin de permettre aux lecteurs non-initiés de saisir aisément le reste de cette recherche. Nous commençons par présenter la modélisation de SEDs par les RdP. Ce survol nous donne l'occasion de revisiter la définition et les propriétés des GETs. De là, nous passons à la modélisation en utilisant ces graphes puis à leur représentation dans l'algèbre des dioïde et plus précisément les algèbres Min-Plus. Cependant, avant cela, nous procédons à un bref rappel des définitions et concepts de base concernant le dioïde  $(\min,+)$  et son utilisation pour représenter la dynamique des GETs. Ce chapitre se termine par des discussions de la modélisation de ces derniers dans des algèbres Min-Plus afin d'obtenir des représentations d'état linéaires.

## 1.2. Réseaux de Petri et graphes d'événements temporisés

Les réseaux de Petri sont un formalisme très puissant pour l'étude des propriétés d'un système complexe. Il est très répondu notamment dans le monde de la recherche et permet essentiellement la modélisation des systèmes dans différents domaines d'application (automatique, Informatique, Mécanique, Télécommunication, Production, ...). Cependant dans notre étude, nous nous intéressons plutôt aux GETs qui est une sous-classe d'un RdP. Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et formalismes concernant cet outil. Nous présentons également quelques structures de base fréquemment utilisées dans les systèmes de production.

### 1.2.1. Rappel sur le réseau de Petri

Les réseaux de Petri ont été introduits sous forme graphique en 1962 par Carl Adam Pétri. Ils sont considérés comme l'un des formalismes puissants pour la modélisation à la fois

graphique et mathématique des SEDs. Ils sont particulièrement bien adaptés à l'analyse des processus complexes comprenant des caractéristiques de synchronisation, de retard et de partage des ressources. Leur support mathématique a permis de créer des modèles graphiques efficaces et de développer plusieurs résultats analytiques (Murata [1989], Cohen [1985]). L'avantage principal de ce réseau est l'utilisation des techniques algébriques notamment algèbre des dioïdes ou l'algèbre linéaire ou pour l'analyse des systèmes. Pour en apprendre davantage sur les réseaux de Petri, les lecteurs trouveront un aperçu général et des références bibliographiques dans (Murata [1989], Proth and Xie [1995], David and Alla [1992]). Plusieurs classes de RdP, telles que les GETs sont utilisés pour décrire le comportement des SEDs. Dans cette section, nous revenons sur la définition et les notions fondamentales de ce réseau.

### 1.2.1.1. Définition et notion

#### **Définition 1. (Réseau de Petri)**

Un réseau de Petri est une structure graphique bipartite comprenant deux catégories de sommets : des places (représentées sous forme des cercles) et les transitions (symbolisées par des barres). Des arcs dirigés sont établis entre certaines places et certaines transitions, ainsi qu'entre certaines transitions et places spécifiques (consultez la Figure 1.1 pour plus de détails). Chaque liaison est associée à un poids ( $W$ ) ; lorsque tous les liens orientés ont un poids uniforme de 1, le réseau de Petri est qualifié d'ordinaire. Si au moins une liaison orientée possède un poids supérieur à 1, le réseau de Petri est alors dit généralisé. Le RdP possède un nombre fini et non nul de transitions et de places. Chaque place peut contenir un ou plusieurs "jetons", représentés par des points, qui servent à modéliser l'état du système.

**Définition formelle**, un RdP est un 6-uple  $PN = (P, T, A, W, M_0, \mu_0)$  où :

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  est un ensemble fini, non vide de places ;
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  est un ensemble fini, non vide de transitions ;
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  est l'ensemble fini des arcs qui relient les places aux transition, et les transitions aux places;
- $W : A \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  est la fonction poids associée aux arcs ;
- $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$  est le marquage initial (nombre de jetons qui se trouvent initialement dans les places).
- $\mu_0$  : Correspond à un vecteur constitué d'entiers non négatifs, où la  $i^{\text{ème}}$  composante représente le nombre initial de "jetons" dans la place  $p_i$ .

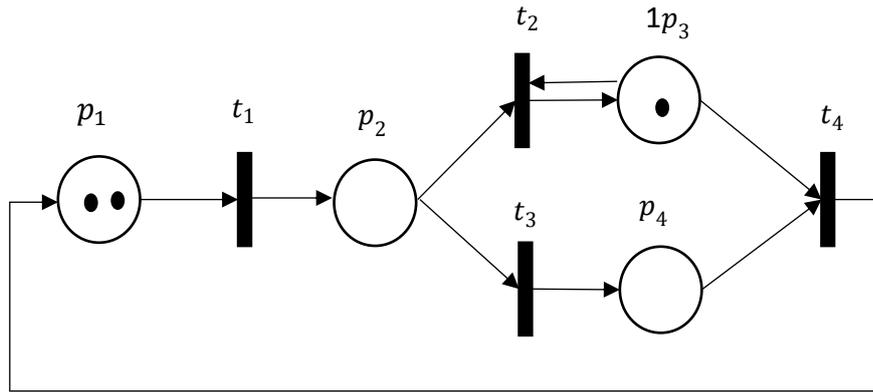


Figure 1. 1. Exemple d'un RdP

- **Marquage**

Chaque place dans un RdP contient un nombre entier positif ou nul de jetons, identifiés par des points noirs. Ces jetons se déplacent dans les places en se conformant à des règles spécifiques. Le marquage, noté  $\mu$ , reflète l'état du système à un instant donné. Il est représenté sous forme d'un vecteur colonne dont la dimension correspond au nombre de places dans le réseau. Ce marquage  $\mu$  décrit l'état actuel du système tel que défini par le réseau à ce moment précis. C'est un vecteur colonne dont la dimension coïncide avec le nombre de places dans le réseau. Chaque élément de ce vecteur indique la quantité de jetons présents dans la place  $p_i$  (voir Figure 1.2).

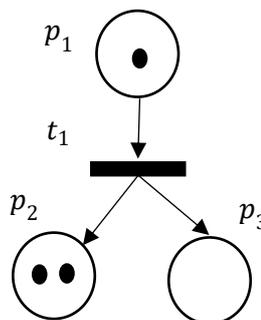


Figure 1. 2. Représentation de marquage initial d'un RdP

- **Franchissement d'une transition**

Une transition est qualifiée de franchissable si chaque place  $P$  en amont (celles reliées à l'entrée de la transition  $T$ ) contient au moins un nombre de jetons équivalent au poids associé à l'arc reliant  $P$  à  $T$ . Le franchissement de la transition  $t_i$  consiste à retirer ce nombre de jetons de chaque place d'entrée et à les ajouter à chaque place de sortie. En d'autres termes, au moment  $\tau_i$ , la transition  $t_i$  peut être franchie depuis l'état  $\mu$ , et son franchissement entraîne l'état  $\mu_0$ .

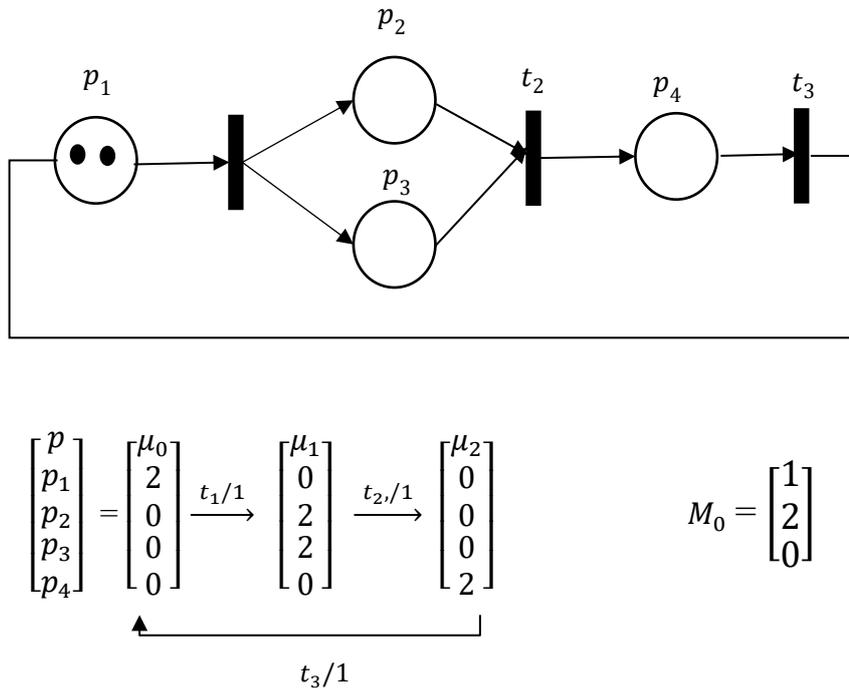
Cette séquence d'événements est représentée de la manière suivante par:  $\mu \xrightarrow{\tau_i} \mu_0$ .

- **Graphe d'accessibilité**

Considérons  $\eta = (R, \mu_0)$  un réseau de Petri donné. L'ensemble des marquages accessibles  $A(R, \mu_0)$  de ce réseau marqué correspond à l'ensemble des marquages vers lesquelles il est possible d'évoluer depuis le marquage initial  $\mu_0$  en réalisant une séquence de transitions au cours d'une période de temps  $\tau$  donnée, c'est à dire :

$$A(R, \mu_0) = \{ \mu_i, \exists t_q, \mu_0 \xrightarrow{t_q/\tau} \mu_i \}$$

Quand cet ensemble est de nature finie, il peut être exprimé sous la forme d'un graphe, dans lequel les sommets du graphe correspondent aux marquages accessibles de  $A(R, \mu_0)$ . Une liaison orientée relie deux nœuds  $\mu_i$  et  $\mu_j$  s'il existe une transition  $t_q$  qui peut être franchie, permettant le passage d'un marquage à l'autre dans un intervalle de temps  $\tau$  :  $\mu_i \xrightarrow{t_q/\tau} \mu_j$ . La Figure ci-dessous présente un exemple d'un réseau de Pétri avec son graphe d'accessibilité



**Figure 1. 3.** Exemple d'un réseau de Pétri avec son graphe d'accessibilité

### 1.2.1.2. Propriétés de RdP

- **Vivacité**

En prenant en compte un RdP avec  $\mu_0$  représentant son marquage initial, une transition  $t_i$  est qualifiée de "vivante" par rapport à  $\mu_0$ , si, pour tout marquage  $\mu$  qui peut être atteint à partir de  $\mu_0$  et où il est possible de franchir une séquence de transitions  $T'$  ladite séquence  $T'$  contient au moins une occurrence de la transition  $t_i$ . Un RdP est considéré comme "vivant" si toutes ses transitions sont "vivantes".

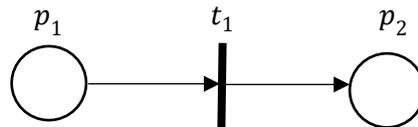
- **RDP sans blocage**

Un marquage accessible d'un RdP pour un marquage initial  $\mu_0$  est en situation de blocage si toute transition  $t \in T$  n'est pas franchissable.

Un RdP est dit sans blocage si aucun marquage atteignable n'est en blocage.

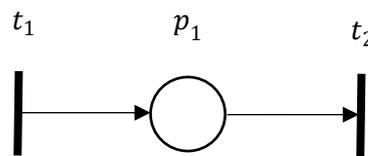
### 1.2.1.3. Les principales classes existantes

- Un **graphe d'événement** est un RdP où chaque place est liée à une transition d'entrée et une transition de sortie.



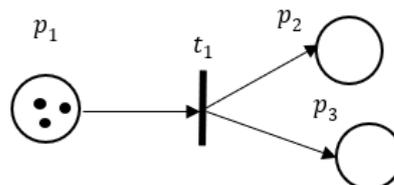
**Figure 1. 4.** Exemple d'un graphe d'état

- Un **graphe d'événement** est un RdP telle que toute place possède une transition d'entrée et une transition de sortie.



**Figure 1. 5.** Exemple d'un graphe d'événement

- Un RdP est qualifié de "**pur**" lorsque aucune transition n'est présente, ce qui signifie que la place d'entrée est également une place de sortie.



**Figure 1. 6.** Exemple d'un RdP pur

### 1.2.2. Graphes d'événements temporisés

Les GETs (Murata [1989]) sont des Réseaux de Petri Temporisés (RPT) dans lesquels chaque place a exactement une transition en amont et une transition en aval et tous les arcs ont un poids égal à 1. Des temporisations sont associées aux places (définissent le temps de séjour de cette place) ou des transitions (représentent le temps de tir). Dans cette étude, nous utilisons les GETs où les temporisations sont associées aux places. Les transitions  $t_i, t_j \in T$ , tel que  $T$  est l'ensemble des transitions du graphe étudié. Dans ce graphe, une place désignée par  $p_{ij}$  reliant la transition  $t_j$  à  $t_i$  est caractérisée par une temporisation  $\tau_{ij}$  et un nombre de jetons  $M_{ij}$ . Nous notons par  $M_{0ij}$  son marquage initial. La Figure 1.7 représente un exemple de GET.

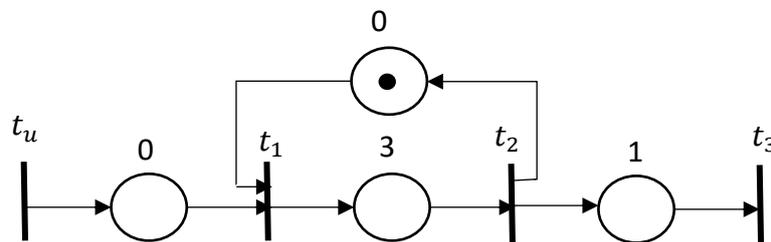


Figure 1. 7. Graphe d'événements temporisé

#### 1.2.2.1. Graphes d'événements temporisés perturbés

Dans ce travail, nous considérons des GETs avec des transitions incontrôlables. Ces transitions sont des transitions d'entrée perturbés qui peuvent affecter le fonctionnement du système. Il peut s'agir d'une panne de robot, d'un manque d'approvisionnement d'une machine ou de toute autre panne ou blocage, etc. Un exemple de GET avec des perturbations est illustré à la Figure 1.8.

Cette classe de graphe est caractérisées par trois types des transitions :

- Transition d'entrée ou de source, celles qui ne dépendent pas de tir d'autres transitions. En outre, nous distinguons deux types de transitions source définis et notés comme suit:
  - $t_u$  : est l'unique transition contrôlable dont on peut déterminer la fonction dans l'algèbre Min-Plus,
  - $t_w$  : sont des transitions incontrôlables ou perturbées sur lesquelles nous ne pouvons pas agir.
- Transitions internes, celles qui ne sont ni des transitions d'entrée ni des transitions de sortie
- Transitions de sortie qui n'affectent pas le tir d'autres transitions

Nous supposons aussi que chaque GET contient plusieurs transitions de source (entrée), les autres étant considérées comme internes.

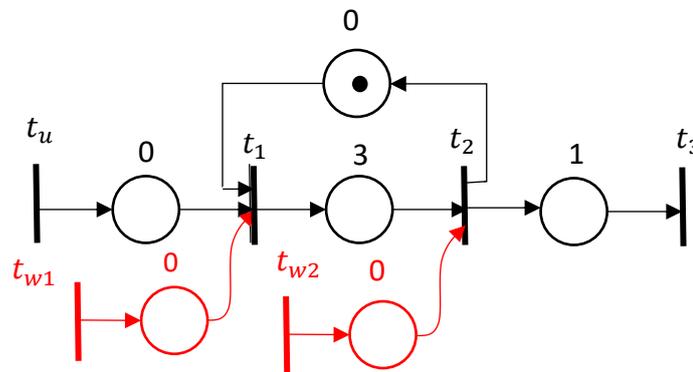


Figure 1. 8. Graphe d'événements temporisé avec des transitions de perturbations

### 1.2.2.2. Propriétés des graphes d'événements temporisés

Dans cette sous-section, nous rappelons brièvement les principales propriétés des graphes d'événements temporisés.

- **Chemin**

Dans un RdP, un chemin reliant deux transitions  $t_j$  et  $t_i$  est une séquence de places et de transitions liées par des arcs, où  $t_j$  est la première transition et  $t_i$  est la dernière transition. Dans cette étude, nous désignons par  $\rho$  le chemin qui relie la transition  $t_j$  à la transition  $t_i$ , tandis que  $\alpha$  représente le chemin qui connecte la transition d'entrée  $t_u$  à la transition interne  $t_j$ . Par conséquent, leurs temporisations sont respectivement notées  $\tau_\rho$  et  $\tau_\alpha$  et elles sont données par la somme des temporisations des places du chemin.

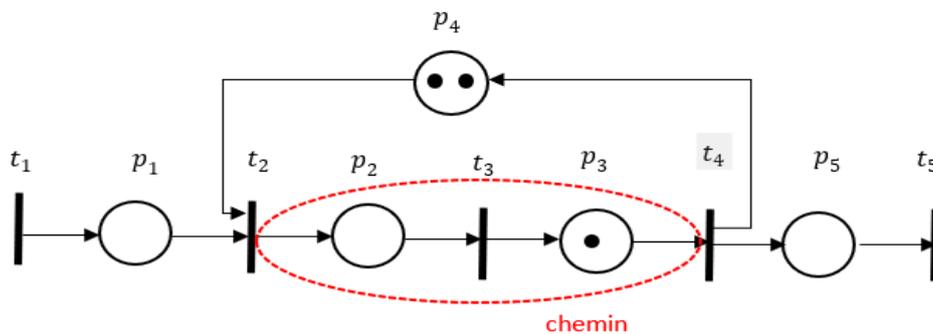


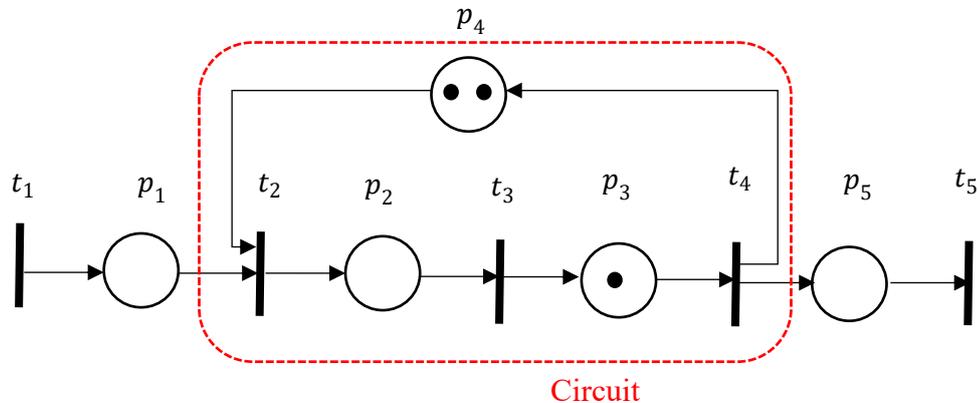
Figure 1. 9. Représentation d'un chemin dans un GET

- **Chemin élémentaire**

C'est un chemin où aucun arc n'est répété.

- **Circuit**

C'est un chemin où sa transition terminale présente aussi sa transition initiale.



**Figure 1. 10.** Représentation d'un circuit dans un GET

- **Un événement**

C'est l'activation d'une transition.

- **Contrôlabilité structurelle**

Un graphe d'événements est considéré structurellement contrôlable si chaque transition interne peut être atteinte en suivant un chemin à partir d'au moins une transition d'entrée.

- **Transition contrôlable**

Une transition  $t_u$  est contrôlable si elle est accessible par un chemin à partir d'au moins une transition d'entrée.

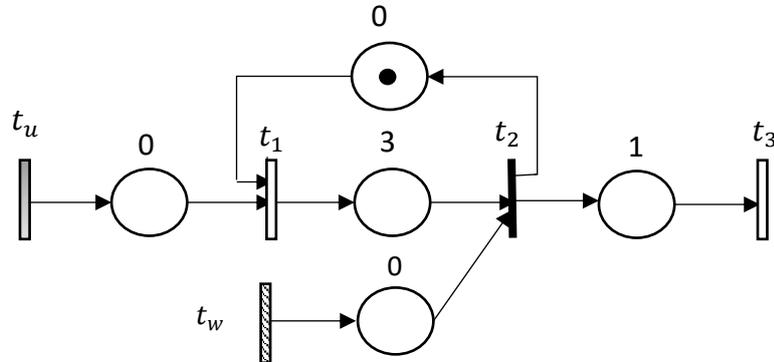
- **Observabilité**

Une transition  $t_i \in t_y$  est observable si elle est directement connectée à une transition de sortie et donne des informations sur l'état du système. Un GET est complètement observable si toutes ses transitions internes sont observables (Moody and Antsaklis [2000]). Nous désignons par  $T_y$  les transitions observables.

- **GET partiellement observable**

Un GET est dit partiellement observable s'il comporte au moins une transition  $t_i \in t_\beta$  non observable. On note par  $T_\beta$  l'ensemble des transitions non observables.

**Exemple 1.1.** Dans l'exemple illustré par la Figure 1.11., la transition  $t_u$  est la seule transition contrôlable et nous supposons que  $t_2$  est la seule transition observable dans ce graphe. Ainsi, toutes les autres transitions  $t_1$  et  $t_3$  sont non observables.



Légende :

- Transitions contrôlables,
- Transitions observables
- Transitions inobservables
- Transitions perturbés/ incontrôlables

**Figure 1. 11.** Les différentes transitions d'un GET

La légende de cette figure présente la désignation de chaque type de transitions que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

### 1.2.2.3. Réseaux de graphes d'événements temporisés

Dans ce travail, nous traitons un réseau composé d'un certain nombre de GET séparés qu'on note par RGETs, chacun étant indexé par  $l$  (GET $_l$ ),  $l = 1, \dots, L$ , interconnectés par des contraintes d'exclusions mutuelles. Ce phénomène représente le critère de partage des ressources. Ces contraintes sont définies par des marquages de places provenant de différents graphes. La Figure 1.12 montre un exemple de RGETs avec des transitions perturbées. Cet exemple présente des lignes de production, chacune est composée d'une transition de contrôle ( $t_u^1$ ,  $t_u^2$  et  $t_u^3$ ) et de trois transitions incontrôlables ( $t_w^1$ ,  $t_w^2$  et  $t_w^3$ ). Par exemple, nous supposons par ces transitions perturbées que le bras du robot est indisponible.

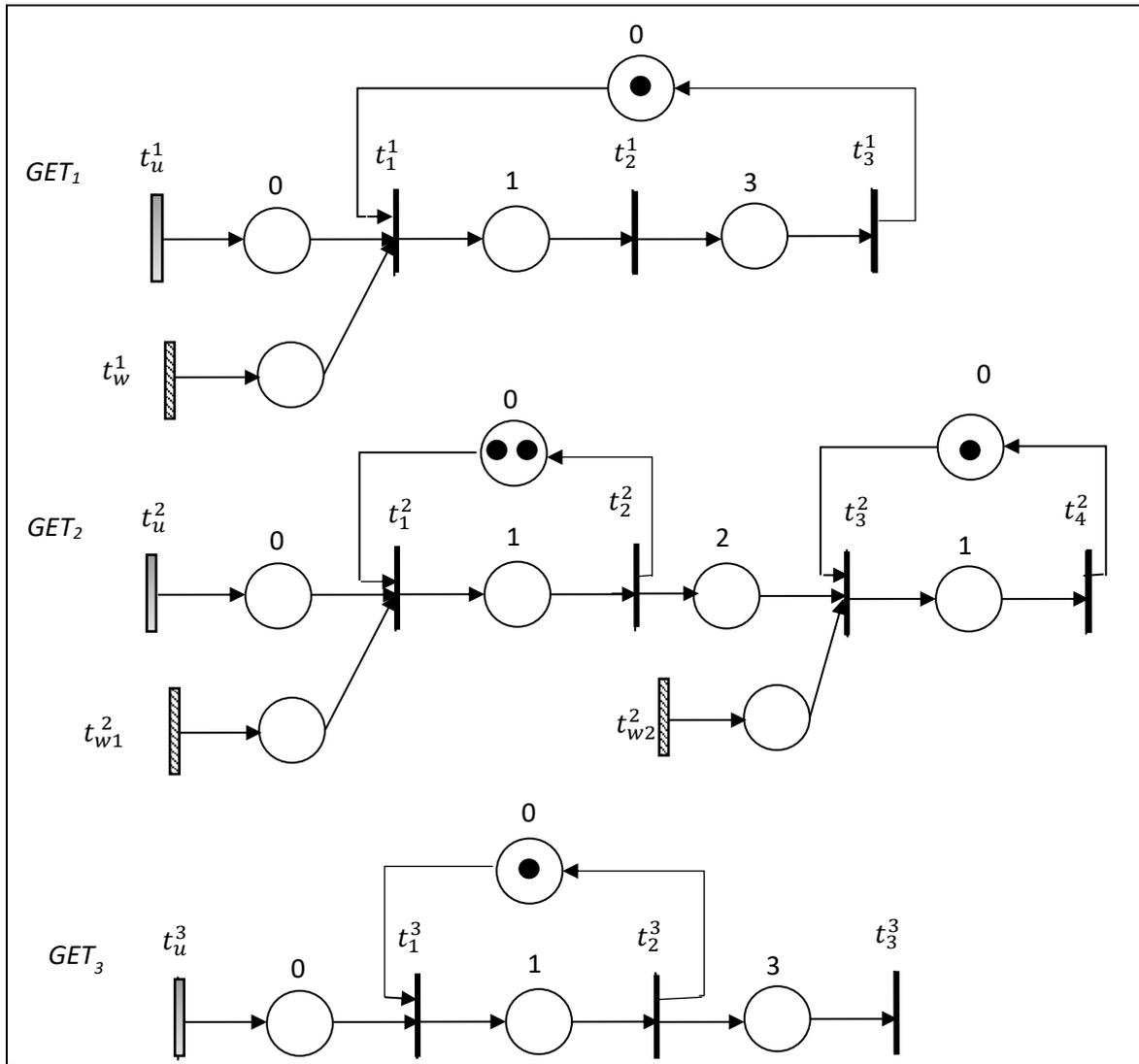


Figure 1. 12. Un exemple d'un RGETs

#### 1.2.2.4. Fonctionnement au plus tôt d'un GET

Nous dénommons "fonctionnement au plus tôt" d'un GET le mode dans lequel toutes les transitions sont franchies dès que cela est possible. En d'autres termes, les jetons qui entrent dans une place contribuent au franchissement de la transition en amont dès que le temps de séjour minimum est atteint. Une transition est considérée comme validée si au moins un jeton est présent dans les places en amont. Une transition " $t$ " est immédiatement déclenchée dès qu'elle est validée. Lors de ce déclenchement, un jeton est retiré des places en amont de cette transition, tandis qu'un jeton est simultanément ajouté aux places en aval.

### 1.3. Théorie de l'algèbre Min-Plus

Dans cette section, nous rappelons les concepts fondamentaux ainsi que des propriétés associées à l'algèbre des dioïdes. Notre objectif ici est d'introduire les notions et les notations

essentielles pour la commande des GETs. Ces rappels sont basés sur les sources suivantes, (Baccelli et al. [1992], Baccelli et al. [1994], Amari [2005], Abderrahim [2013]).

### 1.3.1. Préliminaires algébriques

**Définition 2.** Un dioïde se réfère à un ensemble  $D$  muni de deux opérations internes notées  $\oplus$  et  $\otimes$  désignées respectivement comme "addition" et "multiplication" respectivement. Ces opérations sont définies de telle manière que, pour tout  $a, b$  et  $c$  appartenant à l'ensemble  $D$ :

- La loi  $\oplus$  est associative :  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$  ;
- La loi  $\oplus$  est commutative :  $a \oplus b = b \oplus a$  ;
- La loi  $\oplus$  est idempotente :  $a \oplus a = a$  ;
- La loi  $\oplus$  admet un élément neutre noté  $\varepsilon$  et appelé zéro :  $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$  ;
- La loi  $\otimes$  est associative :  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$  ;
- La loi  $\otimes$  admet un élément neutre noté  $e$  et appelé identité:  $a \otimes e = e \otimes a = a$  ;
- La loi  $\otimes$  est distributive par rapport à la loi  $\oplus$  :  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ , idem pour la multiplication à droite ;
- L'élément  $\varepsilon$  est absorbant pour la multiplication :  $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  ;
- Un dioïde est dit commutatif si la loi  $\otimes$  est commutative.
- Pour plus de simplicité, l'opération  $\otimes$  peut être abrégée en (point), et l'expression  $ab$  (ou  $a.b$ ) peut être écrite comme en algèbre classique.

Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'algèbre Min-Plus.

**Définition 3.** L'algèbre Min-Plus est représentée par  $\overline{\mathbb{R}}_{min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ . La loi  $\oplus$  désignant l'application "min", indique que  $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}_{min} : a \oplus b = \min(a, b)$  où  $\varepsilon = +\infty$  est l'élément neutre. La deuxième loi  $\otimes$  correspond à l'addition classique, c'est-à-dire  $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}_{min} : a \otimes b = a + b$ , où l'élément neutre est défini par  $a + b$ . L'élément neutre est défini par  $e = 0$ .

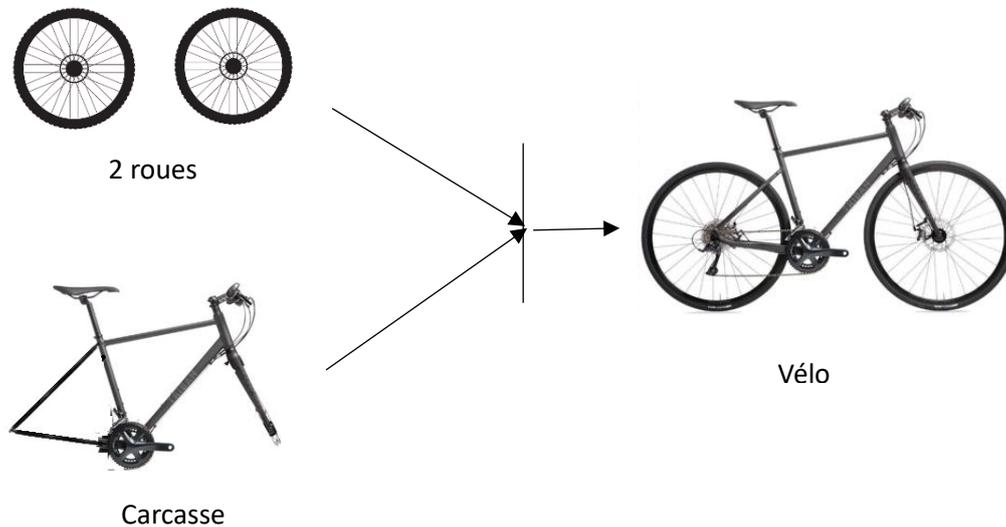
Exemple :  $4 \oplus 6 = \min(4, 6) = 4$

$$2 \otimes 5 = 2 + 5 = 7$$

- **Exemple 1.2.**

Prenons par exemple le cas de la fabrication de vélos (voir Figure 1.13). Nous pouvons considérer un vélo comme étant la combinaison de deux roues et d'une carcasse. Ainsi,  $1 \oplus 2 = 1$ . Cette relation est équivalente, dans l'algèbre classique, à l'utilisation de la fonction minimum (min) :  $\min(2, 1) = 1$ . Cette opération de sommation, notée par  $\oplus$  pour la distinguer

de l'addition traditionnelle (+), représente l'opération d'assemblage. Elle permet ensuite d'additionner des quantités qui ne sont pas exprimées dans les mêmes unités. C'est-à-dire si on a 2 roues et 1 carcasse, on ne peut avoir qu'un seul vélo.



**Figure 1.13.** Assemblage d'un vélo

**Remarque 1.1.** Dans l'algèbre des dioïdes, la multiplication classique ( $\times$ ) correspond à une puissance, c'est-à-dire.  $\forall \lambda \in \mathbb{N}$  et  $\forall C \in \overline{\mathbb{R}}_{min}: C^{\otimes \lambda} = \lambda \times C$ . Pour distinguer la multiplication de la puissance dans l'algèbre Min-Plus, nous ajoutons le symbole ( $\otimes$ ) à la puissance.

### 1.3.2. Propriétés de l'algèbre Min-Plus

#### 1.3.2.1. Dioïde complet

Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est dit complet lorsqu'il satisfait deux conditions : il doit être fermé pour les sommes infinies d'éléments de  $D$  et la loi  $\otimes$  doit distribuer (à gauche et à droite) sur ces sommes infinies  $\oplus$ , avec cette distributivité s'étendant également aux sommes infinies. Autrement dit, pour tout élément  $b \in D$  et pour tout sous-ensemble  $A \subset D$ , on a :

$$b \otimes (\oplus_{a \in A} a) = \oplus_{a \in A} (b \otimes a) \text{ et } (\oplus_{a \in A} a) \otimes b = \oplus_{a \in A} (a \otimes b).$$

On note par  $T$  l'élément maximum  $\oplus_{b \in D} b$ . Il est absorbant pour l'addition, c'est à dire,  $\forall a \in D, T \oplus a = T$ . Selon la définition d'un dioïde, pour tout élément de  $D$ , on note que l'élément zéro est absorbant pour la multiplication, aussi :  $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$ .

### 1.3.2.2. Relation d'ordre

Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , la relation présente par :

$$\forall (a, b) \in D^2, \quad a \geq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$$

est une relation d'ordre compatible avec les deux lois additive  $\oplus$  et multiplicative  $\otimes$ , telle que:

$$a \geq b \Rightarrow \forall (a, b, c) \in D^3, \quad a \oplus c \geq b \oplus c$$

$$a \geq b \Rightarrow \forall (a, b, c) \in D^3, \quad a \otimes c \geq b \otimes c \text{ et } c \otimes a \geq c \otimes b$$

La relation d'ordre est dite totale si :  $\forall (a, b) \in D^2, \quad a \geq b \text{ ou } b \geq a$

Pour qu'un dioïde ait un ordre total, une condition nécessaire et suffisante est définie comme suit :

$$\forall (a, b) \in D^2, \quad a \oplus b = a \text{ ou } b$$

Alors, on dit que ce dioïde est totalement ordonné. Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ , l'ordre naturel correspond à l'ordre usuel, c'est à dire  $x \leq y \Leftrightarrow x \oplus y = \min(x, y) = x$ .

### 1.3.2.3. Dioïde matriciel

Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde. Dans l'algèbre Min-Plus, l'ensemble des matrices correspondant à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne d'une matrice  $A$  est noté  $A_{ij}$ . Pour  $n, m \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des matrices  $n \times m$  sur  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$  est défini par  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times m}$  et les opérations suivantes, où  $\forall A, \overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times m}, \forall C \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{m \times p}$  sont présentées par :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

$$(A \otimes C)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^m A_{ik} \otimes C_{kj}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, p$$

- **Exemple 1.2.**

On considère  $A, B$  deux matrices dans l'algèbre  $(\min, +)$  tels que :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \min(3,1) & \min(7,8) \\ \min(4,5) & \min(2,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \min(3 + 1, 7 + 5) & \min(3 + 8, 3 + 3) \\ \min(4 + 1, 2 + 5,) & \min(4 + 8, 2 + 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

### 1.3.3. Résolution d'équations dans le formalisme Min-Plus

Dans les dioïdes complets, plusieurs équations sont définies et possèdent des solutions extrêmes spécifiques, c'est-à-dire des solutions qui sont plus petites ou plus grandes que toute autre solution possible. Nous orientons ceux qui veulent avoir plus de détails sur les solutions générales relatives à des équations sur des dioïdes complets, à consulter les travaux de (Baccelli et al. [1992], Baccelli et al. [1994]). Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la résolution de l'équation implicite  $x = A \otimes x \oplus B$  qu'on va utiliser par la suite.

**Théorème 1:** (Baccelli et al. [1992]) L'équation implicite  $(x = A \otimes x \oplus B)$  définie sur un dioïde complet  $D$  admet  $x = (A^* \otimes B)$  comme solution où  $A^*$  est l'étoile de Kleene de la matrice  $A$ , telle que :

$$\forall A \in D, \quad A^* = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$$

avec  $(A^i = A^{i-1} \otimes A)$  et  $A^0 = I$ . Notez que  $I$  est la matrice unitaire, avec des entrées égales à  $e$  sur la diagonale, et  $\varepsilon$  ailleurs.

**Démonstration.** (Karima [2017]) On vérifie que  $x = a * b$  est solution de  $(x = A \otimes x \oplus B)$  On a :

$$A(a * b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots) b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots) b = a * b.$$

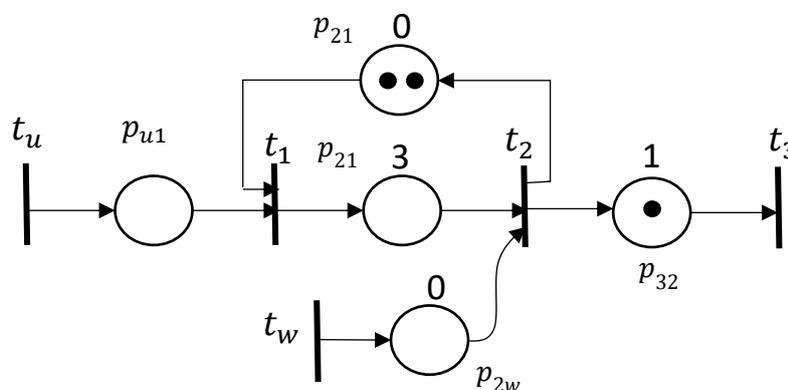
### 1.4. Modèles Min-Plus des GETs avec des transitions de perturbations

Pour l'étude et l'analyse des SEDs dans l'algèbre des dioïdes, les RdP, en particulier les GETs, sont utilisés comme premier outil et étape de modélisation graphique dans ce travail. La seconde étape, consiste à résoudre les équations du modèle graphique afin d'obtenir une représentation analytique du système étudié. Selon la littérature, le comportement d'un GET peut s'écrire par des équations linéaires dans les dioïdes  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$  (représente des dateurs) ou  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$  (représente des compteurs). L'utilisation de la représentation linéaire en dateurs implique la manipulation de variables discrètes liées aux dates de franchissement des transitions du GET. Les compteurs s'intéressent plus aux dates de franchissement des transitions des équations détaillent l'évolution du graphe à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine événementiel. Dans cette étude, nous sommes intéressés par la fonction compteur. En général, le comportement d'un GET est exprimé par la manière spécifiée dans le paragraphe suivant.

### 1.4.1. Fonctions compteurs des transitions

En tant que graphe orienté, le comportement dynamique d'un GET peut être représenté dans le domaine temporel, à l'aide d'équations dynamiques en *compteur*. C'est-à-dire, cette fonction est dédiée pour compter le nombre de franchissement des transitions jusqu'à l'instant  $t$  données. Le système s'exprime par des fonctions dépendantes du temps  $t$ . La place  $p_{ij}$  qui associe la transition  $t_j$  à  $t_i$  est définie par une temporisation  $\tau_{ij}$  et un nombre de jetons  $M_{ij}$ . Le terme  $\alpha$  définit le chemin qui relie la transition de contrôle  $t_u$  à la transition d'entrée  $t_j$  de la place  $p_{ij}$ , avec un délai  $\tau_\alpha$  et un marquage initial  $m_\alpha$ . On note par  $\tau^{max}$  la plus grande temporisation du graphe d'événements étudiés avec  $\tau^{max} = \max(\tau_{ij})$ . Ce comportement est représenté par des équations linéaires utilisant des fonctions de compteur  $\theta_i(t)$  associées à chaque transition du graphe  $t_i$ . Les fonctions de compteurs  $u(t)$  et  $w(t)$  sont associées respectivement à la transition source  $t_u$  et aux transitions incontrôlables  $t_w$ . Ces derniers ( $t_w$ ) sont des transitions qui perturbent le fonctionnement du système. La fonction  $x_i(t)$  définit le numéro de déclenchement de la transition  $t_i$  à l'instant  $T$ .

**Exemple 1.3.** Nous prenons en considération l'exemple de GETs illustré dans la Figure 1.14. Ce graphe décrit le fonctionnement d'un système composé principalement de deux machines d'assemblage et d'un stock. Les deux machines sont modélisées respectivement par les places  $p_{1u}$  et  $p_{21}$  avec des temporisations 3 et 1. Notons que la deuxième machine peut contenir jusqu'à deux pièces et le temps de traitement est une unité du temps. A l'instant  $t$ , cette machine qui est modélisée par la place  $p_{21}$  tombe en panne. Cette perturbation est présentée par une transition incontrôlable  $t_w$ , comme montre la figure ci-dessous. Nous attribuons à chaque transition du graphe présenté dans la figure une fonction compteur  $\theta_i(t)$ . Le comportement de ce graphe est modélisé par les inéquations suivantes :



**Figure 1. 14.** Exemple d'un GET avec une transition incontrôlable

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \min(0 + u_1(t), 2 + \theta_2(t)) \\ \theta_2(t) = \min(0 + \theta_1(t-3), 0 + w_1(t)) \\ \theta_3(t) = 1 + \theta_2(t-1) \end{cases}$$

Dans l'algèbre Min-Plus, l'opérateur min est présenté par  $\oplus$  et la somme classique (+) est noté par  $\otimes$ , ces équations peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = e \otimes u_1(t) \oplus 2 \otimes \theta_2(t) \\ \theta_2(t) = e \otimes \theta_1(t-3) \oplus e \otimes w_1(t) \\ \theta_3(t) = 1 \otimes \theta_2(t-1) \end{cases}$$

Ces équations peuvent être reformulées de la manière suivante:

$$\theta(t) \leq A_0 \otimes \theta(t) \oplus A_1 \otimes \theta(t-1) \oplus A_3 \otimes \theta(t-3) \oplus B_0 \otimes u(t) \oplus Q_0 \otimes w(t)$$

$$\text{avec: } \theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

L'équation ci-dessous présente le comportement du GET partiellement contrôlable :

$$\theta(t) \leq \bigoplus_{\tau \geq 0} (A_\tau \otimes \theta(t-\tau) \oplus B_\tau \otimes u(t-\tau) \oplus Q_\tau \otimes w(t-\tau))$$

où  $A_\tau \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times m}$  correspond à la matrice dont le terme  $A_{\tau,ij}$  est égal au marquage initial  $M_{0ij}$  du place  $p_{ij}$  s'il existe, et  $\varepsilon$  sinon. Les termes des matrices  $B_\tau \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times m}$  présentent les marquages initiaux des places de sortie des transitions sources. Les termes des matrices  $Q_\tau \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{n \times m}$  notent le marquage initial des perturbations existantes qui peuvent affecter la fonctionnalité du système.

#### 1.4.2. Equation Min-Plus implicites et explicites des GETs en présence des perturbations

Généralement, on s'intéresse à l'évolution au plutôt à un GET, c'est-à-dire qu'une transition se déclenche immédiatement dès qu'elle est validée. En termes de  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$ , cette évolution est équivalente à la solution maximale de l'inéquation précédente. Cette solution assure la satisfaction de l'équation linéaire suivante :

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau \geq 0} (A_\tau \otimes \theta(t-\tau) \oplus B_\tau \otimes u(t-\tau) \oplus Q_\tau \otimes w(t-\tau)) \quad (1.1)$$

En utilisant le Théorème 1, nous obtenons la solution explicite ci-dessous :

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau \geq 0} A_0^* \otimes A_\tau \oplus A_0^* \otimes B_\tau \otimes u(t) \oplus A_0^* \otimes Q_\tau \otimes w(t) \quad (1.2)$$

Où :  $A_0^*$  est l'étoile de Kleene de la matrice  $A_0$ .

On pose  $x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ , alors  $x(t)$  peut s'écrire comme suit:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$

Cette solution implicite peut être remplacée par sa solution explicite ce qui donne :

$$x(t) = A_0^*(A_1 \otimes x(t-1) \oplus A_3 \otimes x(t-3) \oplus B_0 \otimes u(t) \oplus Q_0 \otimes w(t))$$

avec  $A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ ,  $B_0 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ ,  $Q_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$

On commence par calculer  $A_0^*$ , où  $A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i$ , avec  $I$  est une matrice d'identité tel que :

$$I_3 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

### 1.4.3 Equations d'état des GETs avec des transitions incontrôlables dans l'algèbre Min-Plus

La forme explicite du comportement dynamique du système est donnée par l'équation (1.2). Cette dernière peut être transformée en une forme d'état. Mais d'abord, il faut décomposer chaque place qui a une temporisation  $\tau > 1$ , en places qui sont chronométrées avec une temporisation égale à 1, puis en ajoutant des transitions intermédiaires visibles. On associe à chaque transition intermédiaire à un compteur. Ces compteurs constituent les éléments du vecteur  $\bar{\theta}(t) \in \bar{\mathbb{R}}_{min}$ . Le vecteur d'état résultant, noté  $x(t)$  est présenté par :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

En conséquence, dans l'algèbre Min-Plus le comportement du GET étendu avec des transitions de perturbations est défini par la forme explicite suivante:

$$x(t) = \hat{A}_0 \otimes x(t) \oplus \hat{A}_1 \otimes x(t-1) \oplus \hat{B}_0 \otimes u(t) \oplus \hat{Q}_0 \otimes w(t) \quad (1.3)$$

En effet,  $A_0$  décrit les marquages de chemins qui relient les transitions internes  $t_i$  avec un délai nul. Les termes de cette matrice sont les marquages des chemins non temporisés qui connectent les transitions internes. C'est de même pour  $A_1$  mais avec un délai de 1. De plus,  $B_0$  représente les marquages des chemins à retard nul entre les transitions de contrôle  $t_u$  et la transition interne la transition interne  $t_i$ . Les termes de  $Q_0$  représentent les marquages des chemins à retard nul entre les transitions internes  $t_i$  et les transitions perturbées  $t_w$ .

Il est bien connu que, pour un GET vivant, le vecteur d'état peut être développé et réécrit sous la forme explicite suivante si tous les retards dans ce graphe sont équivalents à un seul retard :

$$x(t) = A \otimes x(t - 1) \oplus B \otimes u(t) \oplus Q \otimes w(t) \quad (1.4)$$

avec,  $A = \hat{A}_0^* \otimes \hat{A}_1$ ,  $B = \hat{A}_0^* \otimes \hat{B}_0$ , et  $Q = \hat{A}_0^* \otimes \hat{Q}_0$ .

Cette représentation d'état peut être exprimée de la manière suivante :

$$x(t) = A^\tau \otimes x(t - \tau) \oplus [\oplus_{k=0}^{\tau-1} A^k \otimes B \otimes u(t - k)] \oplus \oplus_{g=0}^{\tau-1} A^g \otimes Q \otimes w(t - g) \quad (1.5)$$

pour toute valeur  $\tau$  telle que  $\tau \geq 1$ .

Pour les graphes partiellement observables, il existe deux types de transitions. Nous désignons les transitions observables  $T_y$  et l'ensemble des transitions non observables  $T_\beta$ , où  $\|T_y\| + \|T_\beta\| = N$ , où  $N$  représente le nombre des transitions internes.

**Propriété 1.** Etant donné un GET avec au moins une transition observable dans chaque boucle, pour chaque transition inobservable  $t_i \in t_\beta$ , il existe un chemin  $\delta$  reliant cette transition à une transition observable  $t_i \in t_y$ . Le temps et le marquage de ce chemin sont respectivement désignés par  $\tau_\delta$  et  $m_\delta$ . Le compteur associé à une transition inobservable  $t_i$  peut-être exprimé en fonction de la transition observable  $t_j$  comme suit :

$$x_i(t) \leq m_\delta \otimes x_j(-\tau_\delta) \quad (1.6)$$

**Exemple 1.4.** Nous considérons l'exemple du GET illustré par la Figure 1.14. On pose

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \text{ matriciellement, on peut écrire l'équation suivante :}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$

Cette solution implicite peut être substituée par la solution explicite comme suit :

$$x(t) = A_0^*(A_1 \otimes x(t-1) \oplus A_3 \otimes x(t-3) \oplus B_0 \otimes u(t) \oplus Q_0 \otimes w(t))$$

avec  $A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$

Premièrement, on commence par calculer  $A_0^*$  :

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I_3 \oplus A_0 \oplus A_0^3$$

avec  $I$  est une matrice d'identité tel que :

$$I_3 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

On calcule  $A_0^3$ :

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Donc  $A_0^* = I_3 \oplus A_0$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Calcul de la forme explicite :

$$A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* A_3 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* B_0 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* Q_0 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-3) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes u(t) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$

Nous remarquons que la place  $p_{21}$  a un retard  $\tau = 3 > 1$ . Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le GET initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations équivalent dans lequel les temporisations sont fixées à 1 ou 0. Par conséquent, nous étendons la place  $p_{21}$  à trois places avec des retards égaux à 1 et nous ajoutons deux nouvelles transitions  $t_4$  et  $t_5$ . Nous obtenons alors le graphe ci-dessous :

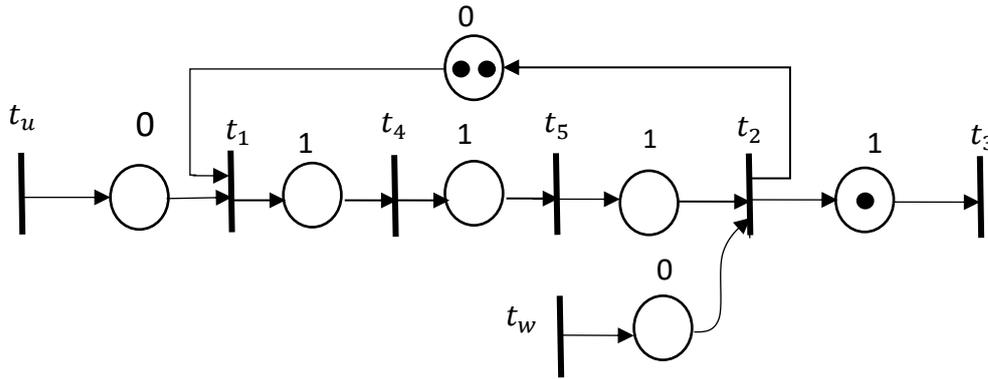


Figure 1. 15. Graphe étendue de l'exemple 1.14.

D'après ce graphe, on aura les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = e \otimes u_1(t) \oplus 2 \otimes x_2(t) \\ x_2(t) = e \otimes \theta_5(t-1) \oplus e \otimes w_1(t) \\ x_3(t) = 1 \otimes x_2(t-1) \\ x_4(t) = 1 \otimes x_1(t-1) \\ x_5(t) = 1 \otimes x_4(t-1) \end{cases}$$

On remplace  $x_2(t)$  dans  $x_1(t)$  par son équation on obtient :

$$\begin{cases} x_1(t) = e \otimes u_1(t) \oplus 2 \otimes x_5(t-1) \oplus 2 \otimes w_1(t) \\ x_2(t) = e \otimes x_5(t-1) \oplus e \otimes w_1(t) \\ x_3(t) = 1 \otimes x_2(t-1) \\ x_4(t) = 1 \otimes x_1(t-1) \\ x_5(t) = 1 \otimes x_4(t-1) \end{cases}$$

Le modèle d'état obtenue s'écrit comme suit

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t) \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$

## 1.5. Conclusion

Ce chapitre introductif a fourni une liste d'outils mathématiques qui seront utilisés tout au long de notre thèse. Ces éléments constituent prérequis pour le contrôle des GETs présenté dans les chapitres subséquents. En particulier, nous avons donné un panorama général sur des GETs après un rappel sur les RdP. Nous avons présenté quelques définitions et propriétés liées aux dioïdes. Ensuite, nous avons démontré comment à partir d'un GET, il est possible d'obtenir des modèles linéaires au sein de l'algèbre Min-Plus.

Dans le chapitre suivant, nous mettons l'accent sur la commande des systèmes de désassemblage modélisés par des GETs sous contraintes de marquage. Plus précisément, nous élaborons des approches algébriques basée sur l'utilisation des formalismes Min-Plus pour synthétiser des lois de commande qui vise à superviser et contrôler le fonctionnement de ces systèmes en tenant compte des contraintes concernées.

## Chapitre 2

# Commande des GETs en présence de perturbations sous contraintes de marquage : Application sur un système de désassemblage

---

---

2.1. Introduction .....	30
2.2 Etat de l'art sur les problèmes de contraintes de marquage .....	31
2.3. Problème de contraintes de marquage.....	34
2.3.1. Motivations et problématique.....	34
2.3.2. Problème de commande des GETs sous contraintes de marquage imposées sur des places .....	36
2.3.3. Contraintes de marquage imposées sur un chemin d'un GET.....	37
2.4. Commande des GETs perturbées et totalement observables sous contraintes imposées sur des places.....	39
2.4.1. Commande monovariante.....	39
2.4.2. Commande multivariante.....	43
2.4.3. Algorithme de contrôle des GETs sous multi-contraintes de marquage .....	45
2.5. Conception de lois de commande pour des GETs sous contraintes imposées sur des chemins.....	46
2.5.1. Commande monovariante.....	46
2.5.2. Commande multivariante.....	48
2.5.3. Instruction algorithmique pour la synthèse de contrôle.....	50
2.6. Contrôle par rétroaction pour les GETs perturbés partiellement observables.....	51
2.6.1. Commande monovariante.....	51
2.6.2. Commande multivariante.....	53
2.6.3. Procédure algorithmique de synthèse des commandes.....	55
2.7. Etude de cas : application à un système de désassemblage.....	56
2.7.1. Description du système.....	56
2.7.2. Modélisation du système par GET .....	57
2.7.3. Calcul des lois de commande .....	63
2.8. Conclusion.....	65

---

---

## 2.1. Introduction

Dans la réalité, il existe plusieurs contraintes qui doivent être vérifiées et respectées pour garantir le meilleur fonctionnement des systèmes manufacturiers. En outre, elles peuvent prendre diverses formes telles que, les contraintes de temps, capacité limitée des ressources, critères justes à temps, exclusion mutuelle, etc. Dans ce chapitre, notre attention se porte sur la commande des SEDs temporisés, et plus précisément au problème d'états interdits, qui est connu comme problème de contraintes de marquage. Dans un réseau de Petri, l'état du système est décrit par le vecteur de marquage, et les états interdits sont des marquages qui peuvent être atteints, mais qui sont interdits par les spécifications imposées au système. Le problème consiste donc à empêcher la succession d'événements qui aboutissent à ces situations. Dans cette partie, nous élaborerons une démarche analytique qui vise à créer des lois de commande pour assurer que les contraintes de marquage imposées sur les GETs soient satisfaites.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la première partie, nous présentons un état de l'art détaillé pour illustrer cette problématique et positionner notre travail par rapport à l'existant. Dans la deuxième partie, nous posons le problème de la commande des GETs avec des contraintes de marquage dans le cadre de l'algèbre Min-Plus. Nous mettons en évidence la manière dont ces contraintes peuvent être exprimées à travers des inéquations linéaires, en utilisant ce formalisme. Par la suite, nous présenterons de manière très détaillée notre approche pour la conception d'une commande pour les GETs perturbés sous contrainte de marquage. Tout d'abord, nous examinerons le cas des graphes dans lesquels ces transitions sont observables mais partiellement contrôlables et nous imposerons des contraintes de marquage sur des places indépendantes, puis sur des places dépendantes (chemins). Nous avons étendu notre étude selon une méthode de contrôle par rétroaction pour garantir le respect des contraintes de marquage imposées pour certains chemins des GETs partiellement observables et contrôlables. La procédure suivie pour le calcul des superviseurs est structurée selon le schéma synoptique ci-dessous (Figure 2.1). Dans la dernière section, une étude de cas liée à un système de désassemblage est proposée pour étudier l'efficacité de l'approche développée et pour prouver l'applicabilité des résultats proposés.

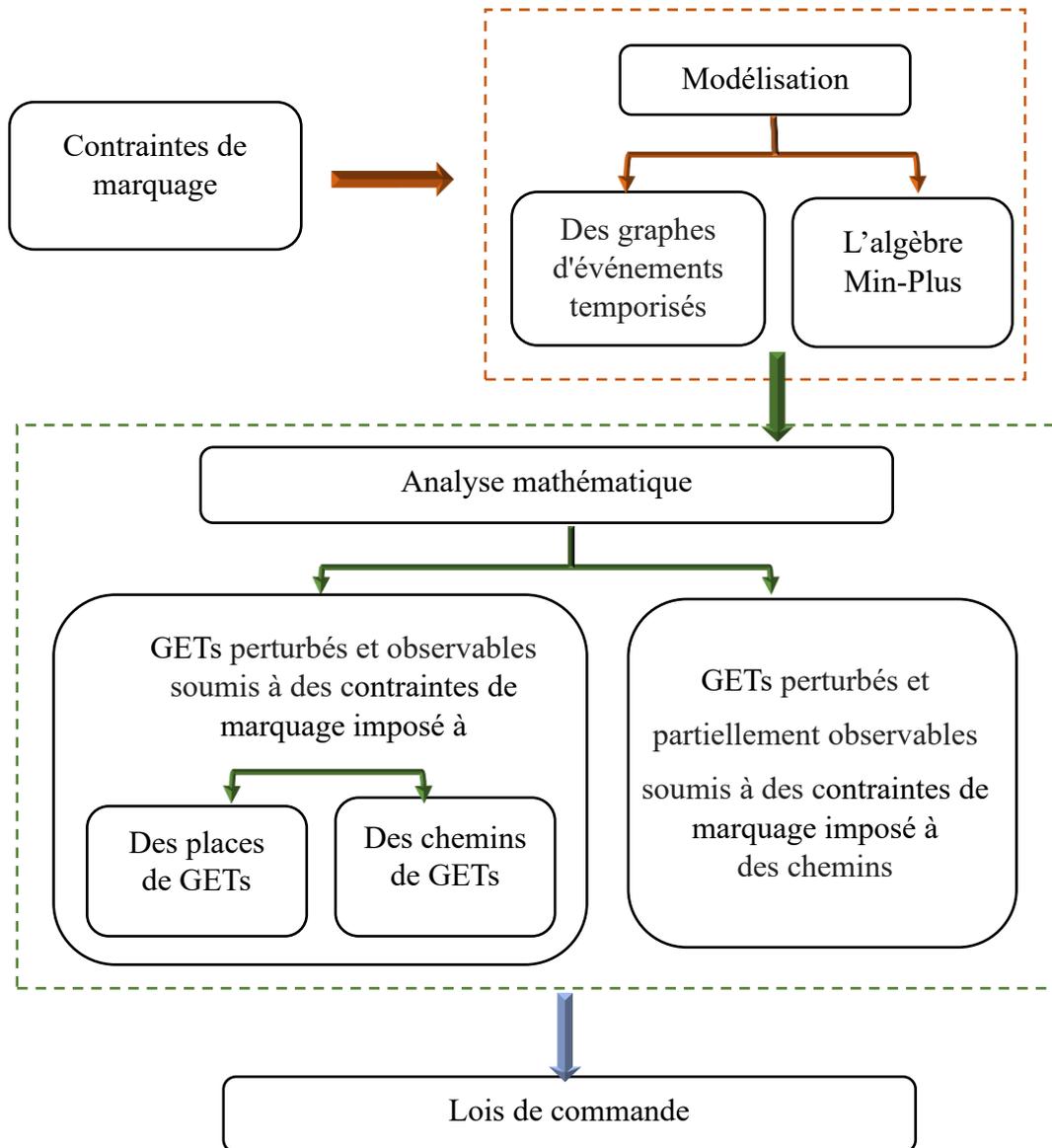


Figure 2. 1. Représentation synoptique du chapitre 2.

## 2.2. Etat de l'art sur les problèmes de contraintes de marquage

Ce travail aborde le problème de contrôle des contraintes de capacité des ressources dans les SEDs. L'objectif du contrôleur est de limiter le nombre de jetons dans des places dépendantes (chemins) ou indépendantes des graphes. En réalité, ces contraintes peuvent représenter un stock limité dans le domaine industriel, une mémoire minimale dans les systèmes de communication ou des stations limitées dans les réseaux de transport. Dans la littérature, les auteurs ont exprimé les spécifications à respecter (Yamalidou et Kator [1991] ; Giua et al. [1992] ; Yamalidou et al. [1996]) à l'aide d'inégalités linéaires sur les marquages. Les places de contrôle sont générées en utilisant la propriété P-invariante des réseaux de Petri. Des auteurs,

comme Iordache et Antsaklis [2006], ont abordé le contrôle de supervision des réseaux de Petri en développant des moniteurs basés sur des invariants de place. Cette approche donne une solution très simple et optimale lorsqu'il s'agit de systèmes entièrement observables et contrôlables. D'autres travaux ont proposé une méthode basée sur les RdP avec des transitions inobservables (Dideban et Alla [2013]). Cette approche est basée sur une transformation linéaire des contraintes. Ils ont étudié le contrôle supervisé des RdP sous contraintes de marquage sans prendre en considération le paramètre temps, alors qu'il est intéressant d'incorporer la durée des activités dans le modèle du système pour examiner les caractéristiques de performance et le contrôle des SEDs. À cet égard, nous pouvons noter le travail d'Achour et Rezg [2006] où les auteurs ont proposé une technique de conception de contrôle basée sur les RPT pour traiter le problème des contraintes de capacité. Leur méthode associe la méthodologie de Ramadge et Wonham à la théorie des régions pour créer un ensemble de places de contrôle. Zhao et al. [2017] ont fourni une méthode de modélisation des SEDs temporisés qui dépend de l'utilisation de langages formels et d'automates temporisés, où le comptage du temps est décrit par des TIC. Une telle solution doit utiliser le graphe de transition d'activité et le graphe de transition temporisé des SEDs temporisés pour l'affichage. Ces deux caractéristiques contribuent au problème de l'explosion des états, rendant cette technique pratiquement inefficace.

Dans le présent travail, nous nous intéressons particulièrement au problème des capacités de ressources dans les SEDs modélisés par des GETs. Il est généralement connu que les dioïdes représentent une structure mathématique qui peut être utilisée pour générer des modèles linéaires pour cette classe de réseaux de Petri temporisés (Baccelli et al. 1992). L'utilisation conjointe des GETs et de l'algèbre Min-Plus est une formalisation bien connue dans la littérature qui reste un domaine de recherche très actif. Cette combinaison de formalisme a été adoptée efficacement pour traiter une variété de problèmes de contrôle et d'analyse, tels que le suivi de trajectoire (Cottenceau et al. [1999]), la synchronisation de modèles de commutation (Lopes et al. [2012] ; Lopes et al. [2014]), le contrôle des limitations d'état (Maia et al. [2011]), l'ordonnancement dynamique (Kim et Lee [2008] ; Bonhomme [2013]), des critères de juste-à-temps (Houssin et al. [2007]; Lhommeau et al. [2012]; Goltz et al. [2022]) et le contrôle prédictif de modèle (Xu et al. [2016]).

D'autres travaux, comme celui de Basile et al. [2021], ont récemment développé l'approche de contrôle de supervision des réseaux de Petri temporisés, qui intégrerait à la fois les contraintes logiques et temporelles. Dans notre cas, nous traitons le problème de la synthèse des lois de commande par rétroaction pour les GETs partiellement contrôlables et observables

sous contraintes de marquage en utilisant l'algèbre Min-plus. Dans ce contexte, des auteurs comme Tebani et amari [2019] ont également présenté des techniques de commande par rétroaction qui se basent sur la combinaison de l'algèbre Min-Plus et des GETs totalement observables et contrôlables afin de garantir des contraintes prohibées sur une place ou un chemin de places. D'autre part, Soumatia et Amari [2022] ont fourni une commande par retour d'état pour établir un réseau de GET soumis à des contraintes d'exclusions mutuelles lorsque les emplacements contrôlés ont des chemins différents.

Néanmoins, les approches citées précédemment n'ont jamais pris en compte la contrainte de marquage dans les GETs partiellement observables et contrôlables. En d'autres termes, ils ont calculé les lois de commande sans intégrer les transitions perturbées. En fait, la loi calculée est de la forme  $u(t) = F \otimes x(t - 1)$  dans l'algèbre Min-Plus (Tebani et al. [2019], Tebani et Amari [2021], Soumatia et Amari [2022]). Tebani et Amari [2021] ont proposé une approche de contrôle par rétroaction pour les GETs partiellement observables, qui assure la contrainte de marquage sur une place ou un chemin. Cependant, ces techniques mentionnées n'ont jamais abordé le problème des contraintes de capacité dans les GETs en présence de perturbations.

Les perturbations sont des entrées non contrôlées qui empêchent les transitions internes de s'activer. Pour les systèmes linéaires Min-Plus, une perturbation est un événement qui empêche la survenue d'un autre événement (dans un contexte de production, il peut s'agir d'une panne de machine ou d'un retard dans la livraison d'un composant. Néanmoins, les travaux existants traitent des GETs en présence des transitions de perturbations en utilisant les dioïdes complets garantissant d'autres critères tels que la problématique de l'ordonnancement dans les systèmes de criblage à haut débit (Shang, et al. [2013]), les contraintes de juste-à-temps (Oke et al. [2022]), et les critères de partage des ressources (Goltz et al. [2022]).

Dans ce contexte, nous citons en particulier les travaux d'Oke et al. [2022], dans lesquels les auteurs ont utilisé l'algèbre Max-Plus pour résoudre le problème de découplage des GETs perturbés tout en respectant les critères du juste-à-temps. Shang et al. [2016a] ont conçu un contrôleur à rétroaction d'état et un autre de sortie. Les mêmes auteurs ont présenté des contrôleurs robustes pour traiter les problèmes de découplage des perturbations dans une classe de systèmes linéaires Max-Plus incertains avec des matrices de système connues (Shang et al. [2016b]). Goltz et al. [2022] ont proposé de mettre à jour de manière optimale les entrées de contrôle pour être juste à temps, afin de réduire l'influence des perturbations et de prendre en compte l'interaction entre les participants au système de partage des ressources. Dans ce

contexte, un système de contrôle basé sur un observateur a été proposé par (Oke et al. [2017]) pour traiter le problème de découplage des perturbations utilisant l'algèbre Max-Plus. La même stratégie a été suggérée par Shang et al. [2013] pour résoudre le problème d'ordonnancement des systèmes de criblage à haut débit. Leur contribution significative est de concevoir un contrôle en boucle ouverte.

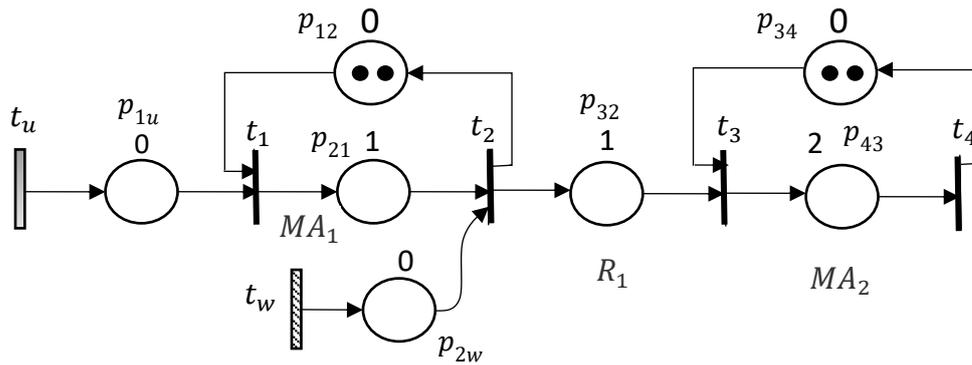
Notre étude traite le problème de contrôle de la contrainte de capacité pour les SEDs avec perturbations qui sont modélisées par des GETs, dont les transitions d'entrée sont partiellement contrôlables et observables. Nous démontrons que si chaque boucle du GET considéré contient au moins une transition observable, nous pouvons dériver une loi de commande réalisable qui satisfait un ensemble de contraintes. Nous établissons une nouvelle approche analytique pour résoudre ce problème basé sur les modèles décrits dans l'algèbre Min-Plus. Le comportement des GETs avec des perturbations et des contraintes de marquage est décrit respectivement par des équations linéaires et des inégalités de l'algèbre Min-Plus. Il est important de noter que le comportement de cette classe de RPT peut être exprimé par des équations linéaires Min-Plus, ce qui permet de transposer plusieurs résultats de la théorie du contrôle aux SEDs.

### 2.3. Problème de contraintes de marquage

Dans cette section, nous abordons la problématique des contraintes de marquage et illustrons comment la traduire en termes mathématiques à travers des équations et des inéquations linéaires dans l'algèbre Min-Plus.

#### 2.3.1. Motivations et problématique

Pour mieux comprendre le problème des contraintes de marquage, nous présentons un exemple d'un atelier flexible modélisé par le GET (Figure 2.2). Ce graphe présente une ligne de production en série composée d'un robot ( $R_1$ ) et de deux machines : fraiseuse à commande numérique ( $MA_1$ ), et poste d'assemblage ( $MA_2$ ). Ces deux machines sont modélisées respectivement par les deux places  $p_{21}$  et  $p_{43}$  et le robot est présenté par la place  $p_{32}$ . Les transitions  $t_1$  (resp.  $t_3$ ) et  $t_2$  (resp.  $t_4$ ) représentent respectivement le début et la fin de l'opération sur la machine  $MA_1$  (resp.  $MA_2$ ). Le déclenchement de la transition  $t_2$  (resp.  $t_3$ ) indique que deux pièces (deux jetons) sont ajoutées (retirées) à la machine  $MA_1$  (place  $p_{21}$ ). Sur ce graphe, seule la transition d'entrée  $t_u$  est contrôlable.



**Figure 2. 2.** Modèle d'un atelier flexible

Les deux machines ont une capacité d'usinage de deux pièces, c'est-à-dire, qu'elles ne peuvent traiter que deux pièces en même temps. Une fois que l'opération de  $MA_1$  est terminée, le robot  $R_1$  transfère la pièce à  $MA_2$ . Deux jetons dans la place  $p_{34}$  (resp.  $p_{12}$ ) indiquent que  $MA_2$  (resp.  $MA_1$ ) est disponible. Le temps de traitement dans  $R_1$  et  $MA_2$  est respectivement 1 et 2 unités de temps, vu que le temps de traitement de  $MA_2$  est plus long que  $R_1$ . Ce dernier peut être obligé d'attendre un certain temps avant de décharger la pièce sur  $MA_2$ . Les spécifications de ce système stipulent que le robot ne doit pas se trouver en position d'attente lorsqu'il dépose les pièces dans la machine  $MA_2$ , sinon le nombre de pièces (de jetons) de  $MA_2$  va dépasser son nombre maximal. Pour éviter ce problème, nous recommandons que  $R_1$  ne reçoit pas d'unité lorsque  $MA_2$  est en fonctionnement.

Lorsque la transition  $t_2$  est contrôlable, la réponse à ce problème est évidente, tout comme dans les RdP en général. Il convient d'ajouter la place  $p_{23}$  marquée par deux jetons pour garantir que le nombre de pièces dans cette place n'excède pas deux, comme illustré la Figure 2.3. Dans le cas où la transition d'entrée de la place soumise à une contrainte est incontrôlable, la résolution du problème n'est pas évidente. Il faut donc concevoir d'autres techniques et méthodes qui satisfont les contraintes de marquage imposées aux places/chemins des GETs perturbés. Ce chapitre se penche sur la question du contrôle, et nous présentons une nouvelle approche pour synthétiser des lois de commande qui assurent le respect des contraintes de marquage soumis sur les places d'un GET. L'objectif de cette contribution est de relâcher l'hypothèse de contrôlabilité de toutes les transitions d'entrée des GETs et de proposer de nouvelles méthodes de contrôle pour satisfaire ce type de contraintes dans ces graphes. Dans la suite, nous montrerons comment exprimer ces contraintes par des inéquations linéaires dans l'algèbre Min-Plus.

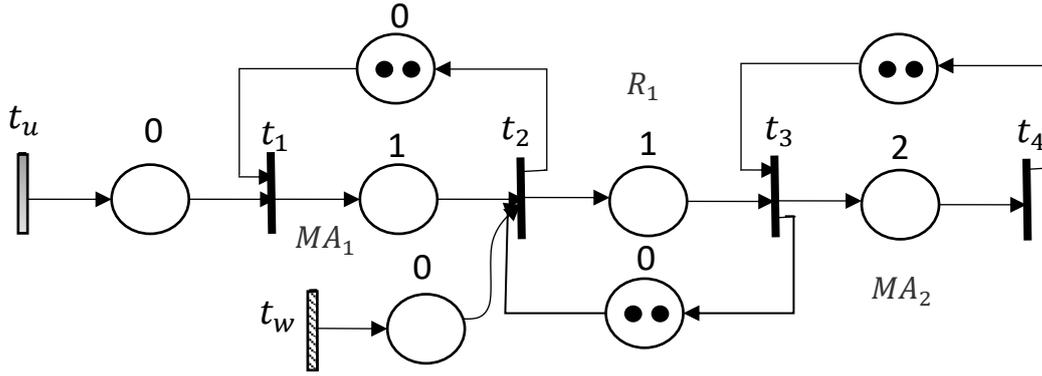


Figure 2. 3. Modèle d'un atelier flexible avec une capacité limitée

### 2.3.2. Problème de commande des GETs sous contraintes de marquage imposées sur des places

En général, l'état des réseaux de Petri temporisés, et en particulier d'un GET reflète le nombre précis de jetons présents dans chaque place à un moment donné. Une contrainte de marquage dans les GETs est la limite maximale imposée à une place ou à un ensemble de places dépendantes ou indépendantes. Nous considérons un SED modélisé par un GET, où une place  $p_{ij}$  restreinte par une à une contrainte de marquage (n'autorisant pas la présence de plus de  $b$  jetons durant l'opération du système). Nous utilisons la notation  $M_{ij}(t)$  pour indiquer le nombre des jetons présents dans la place  $p_{ij}$  à un instant  $t$ . Ainsi, ces contraintes sont présentées par l'inégalité suivante :

$$M_{ij}(t) \leq b \quad b \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

Pour obtenir la contrainte de marquage sous la forme d'une inégalité linéaire dans l'algèbre Min-Plus, nous associons une fonction compteur à chaque transition du GET. Les variables  $x_i(t)$  et  $x_j(t)$  sont utilisées pour dénoter les compteurs liés aux transitions  $t_i$  et  $t_j$  dans cet ordre. Par définition, le compteur  $x_j(t)$  représente le nombre d'activations de transition  $t_j$  à l'instant  $t$ . En parallèle, le compteur  $x_i(t)$  indique le nombre de jetons sortis de la place  $p_{ij}$  à l'instant  $t$ .

Dans l'algèbre Min-Plus,  $M_{ij}(t)$  peut être exprimée par :

$$M_{ij}(t) = x_j(t) - x_i(t) + M_{0ij} \quad (2.2)$$

Ainsi,  $M_{0ij}$  désigne le nombre initial de jetons dans la place  $p_{ij}$ . En remplaçant  $M_{ij}(t)$  par son équation (2.2) dans l'équation (2.1), on obtient la contrainte de capacité comme suit :

$$x_j(t) - x_i(t) + M_{0ij} \leq b \quad (2.3)$$

Dans l'algèbre Min-Plus, cette contrainte peut être représentée par :

$$x_j(t) \leq (b - M_{0ij}) \otimes x_i(t) \quad (2.4)$$

**Exemple 2.1.** Pour mieux expliquer ce problème, nous prenons l'exemple d'un GET (Figure 2.2.) présenté dans le paragraphe précédent. Nous rappelons que le nombre de jetons dans la place  $p_{32}$  ne doit en aucun cas excéder 2. Cette spécification est présentée par l'inéquation suivante :

$$M_{32}(t) \leq 2$$

On associe une fonction compteur à chaque marquage. Cette inégalité peut s'exprimer comme suit :

$$x_2(t) - x_3(t) + 0 \leq 2$$

Ce qui donne :

$$x_2(t) \leq 2 \otimes x_3(t)$$

### 2.3.3. Contraintes de marquage imposées sur un chemin d'un GET

Nous étudions un GET, dans lequel une place  $p_{ij}(t)$  est liée à une limite de marquage. Nous notons par  $\rho$  le chemin de ce graphe soumis à une contrainte de marquage et par  $M_\rho(t)$  le nombre de jetons dans ce chemin à l'instant  $t$ . Les notions  $t_i$  et  $t_j$  désignent respectivement la transition d'entrée et la transition de sortie de ce chemin. Cette contrainte de marquage peut être décrite par l'inégalité suivante :

$$M_\rho(t) \leq b \quad (2.5)$$

Comme mentionné dans le paragraphe précédent, pour représenter cette restriction sous la forme d'une inégalité linéaire dans l'algèbre Min-Plus, nous associons une fonction compteur à chaque transition du graphique. Nous désignons le compteur associé aux transitions  $t_i$  et  $t_j$

par  $x_i(t)$  et  $x_j(t)$ , respectivement. On note  $M_{0\rho}(t)$  le marquage initial du chemin  $\rho$ . Par conséquent, dans l'algèbre Min-Plus,  $M_\rho(t)$  peut-être exprimé par :

$$M_\rho(t) = x_j(t) - x_i(t) + M_{0\rho} \quad (2.6)$$

L'inégalité (2.5) peut être décrite comme suit :

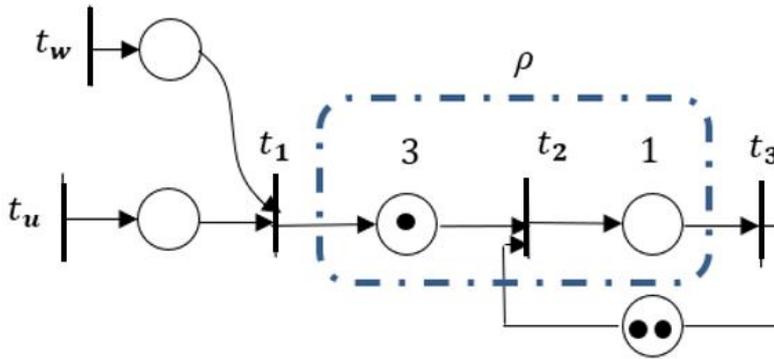
$$x_j(t) - x_i(t) + M_{0\rho} \leq b \quad (2.7)$$

Dans l'algèbre Min-Plus, cette contrainte peut être représentée par :

$$x_j(t) \leq (b - M_{0\rho}) \otimes x_i(t) \quad (2.8)$$

**Exemple 2.2.** Nous prenons en compte l'exemple présenté dans la Figure 2.4. Il existe un chemin  $\rho$  qui relie la transition  $t_1$  à la transition  $t_3$ . Ce chemin présente les places soumises à une contrainte de marquage. C'est-à-dire que le nombre de jetons dans les deux places  $p_{21}$  et  $p_{32}$  ne doit pas dépasser 3. Le marquage initial de  $\rho$  est  $M_{0\rho} = M_{021} + M_{032} = 1$ . Ce graphe est décrit par la spécification de marquage suivante :

$$M_{21}(t) + M_{32}(t) \leq 3$$



**Figure 2. 4.** Exemple de contrainte de marquage imposée sur un chemin d'un GET

En utilisant la formulation de la fonction compteurs présenté par l'équation (2.2), l'inégalité précédente peut être décrite comme suit :

$$(x_1(t) - x_2(t) + 1) + (x_2(t) - x_3(t) + 0) \leq 3$$

Cela conduit à:  $x_1(t) + x_2(t) - x_2(t) \leq 3 - 1 \otimes x_1(t)$

or  $x_1(t) \leq 2 \otimes x_1(t)$

Dans la suite de notre étude, nous considérons dans un premier temps, les graphes soumis à des contraintes de marquage imposées sur des places indépendantes, ensuite sur des chemins des GETs. Nous traitons le problème où toutes les transitions de ce graphe sont perturbées et observables. Ensuite, nous avons étendu l'hypothèse d'observabilité et nous avons introduit une nouvelle approche de contrôle pour les GETs partiellement observables et contrôlables.

## **2.4. Commande des GETs perturbées et totalement observables sous contraintes imposées sur des places**

Cette section aborde le problème de contrôle des contraintes de capacité pour des GETs avec des transitions de perturbations. Cette approche est basée sur l'utilisation combinée de ces graphes et de l'algèbre Min-Plus afin de synthétiser des lois de commande réalisables sous la forme  $u(t) = F_1 \otimes x(t-1) \oplus F_2 \otimes w(t-1)$ . Nous allons commencer par traiter le problème lorsque le contrôle est monovarié et s'étend ensuite au problème avec plusieurs entrées et restrictions. Nous traitons cette approche pour des contraintes imposées à certain places de ce graphe. Nous suggérons que les transitions du GETs sont franchissables dès que possible. Les transitions considérées ne sont pas toutes contrôlables; seules les transitions d'entrée  $t_u$  le sont.

### **2.4.1. Commande monovarié**

Cette partie propose une nouvelle méthode pour résoudre le problème de synthèse d'un contrôleur à rétroaction dans le contexte des GETs perturbés et soumis à des contraintes de marquage. Nous commençons par considérer le cas où ces graphes ont une seule entrée et une seule contrainte de marquage imposée à une/des places avant de prendre en considération le cas des contraintes multiples.

#### **2.4.1.1. GET soumis à une seule contrainte de marquage**

Nous considérons un GET comprenant une transition d'entrée, soumis à une unique contrainte de marquage, imposée sur une place  $p_{ij}$  dont l'équation explicite est donnée par l'équation (1.4). Dans ce graphe, le chemin reliant les transitions  $t_j$  et  $t_i$  est soumis à une contrainte de marquage présentée par l'inégalité (2.4). Il est considéré qu'il existe au moins un chemin  $\alpha$  reliant la transition de contrôle  $t_u$  à la transition  $t_j$  (la transition amont du

chemin limité). Les notions  $m_\rho$  et  $\tau_\rho$  représentent respectivement le marquage et le temps des chemins considérés. D'après la définition de  $t_u$ , nous avons :

$$x_j(t) \leq (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \otimes u(t - \tau_\alpha) \quad (2.9)$$

En supposant que  $\tau = \phi$ , tel que  $\phi$  est un entier supérieur ou égale à 1, l'équation d'état (1.4),  $x_j(t)$  peut être décrit par l'expression suivante :

$$x(t) = A^\phi \otimes x(t - \phi) \oplus \left[ \bigoplus_{k=0}^{\phi-1} A^k \otimes B \otimes u(t - k) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{g=0}^{\phi-1} A^g \otimes Q \otimes w(t - g) \right] \quad (2.10)$$

La  $i^{\text{ème}}$  composante de  $x(t)$ , est présenté par :

$$x_i(t) = \left[ \bigoplus_{r=1}^n A_{ir}^\phi \otimes x_r(t - \phi) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_i \otimes u(t - k) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t - g) \right] \quad (2.11)$$

où  $\phi \geq 1$ ,  $A_\tau \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{n \times n}$ ,  $n$  définissent le nombre de transitions internes du système,  $A_{ir}^\phi$  représentent la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A^\phi$ , et  $h$  est le compteur associé aux transitions perturbées.

Nous cherchons à calculer la commande  $u(t)$  qui garantit la satisfaction de la contrainte de marquage imposée à une place dans un GET.

**Théorème 2 :** Nous considérons un GET perturbé, dont l'évolution est présentée par l'équation (1.4) et soumis à une contrainte de marquage formulée par (2.1). La loi de commande est établie par l'expression suivante :

$$u(t) = \left[ \bigoplus_{r=1}^N F_{1r} \otimes x_r(t - 1) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{h=1}^H F_{2h} \otimes w_h(t - 1) \right] \quad (2.12)$$

avec  $F_{1r} = \left[ b - M_{ij0} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \right] \otimes A_{ir}^{\tau_\alpha}$

et  $F_{2h} = \left[ b - M_{ij0} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \right] \otimes (A^g \otimes Q)_i$

assure le respect de la contrainte (2.1) si la condition suivante est vérifiée :

$$(A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \leq (b - M_{ij0}) \otimes (A^k \otimes B)_i \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } \tau_\alpha \quad (2.13)$$

### Démonstration

Nous proposons un GET avec des transitions de perturbations soumis à une seule contrainte de marquage imposée sur une place  $p_{ij}$  avec  $M_{ij}(t) \leq b$ . Cette inégalité peut être réécrite comme suit :

$$x_j(t) \leq (b - M_{0ij}) \otimes x_i(t) \quad (2.14)$$

On remplace alors la fonction compteur  $x_i(t)$  par son expression (2.11) dans équation (2.14), on obtient :

$$x_j(t) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{r=1}^n A_{ir}^\phi \otimes x_r(t - \phi)] \oplus [\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_i \otimes u(t - k)] \oplus [\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t - g)] \quad (2.15)$$

Pour assurer que la contrainte de marquage est respectée, (2.5), nous devons vérifier que les trois conditions (2.16), (2.17) et (2.18) suivantes sont respectées :

$$x_j(t) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{r=1}^n A_{ir}^\phi \otimes x_r(t - \phi)] \quad (2.16)$$

$$x_j(t) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_i \otimes u(t - k)] \quad (2.17)$$

$$x_j(t) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t - g)] \quad (2.18)$$

En considérant qu'il existe un chemin élémentaire  $\alpha$  qui relie la transition  $t_j$  à la transition contrôlée  $t_u$ , nous remplaçons la fonction  $x_j(t)$  dans les expressions (2.16), (2.17) et (2.18) par son expression donnée par l'inéquation (2.9). Ces inégalités peuvent être réécrites comme suit :

$$(A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \otimes u(t - \tau_\alpha) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{r=1}^n A_{ir}^\phi \otimes x_r(t - \phi)] \quad (2.19)$$

$$(A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \otimes u(t - \tau_\alpha) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_i \otimes u(t - k)] \quad (2.20)$$

$$(A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \otimes u(t - \tau_\alpha) \leq (b - M_{0ij}) \otimes [\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t - g)] \quad (2.21)$$

L'étape suivante de cette démonstration est de calculer la commande  $u(t)$  en fonction de  $x(t-1)$  et  $w(t-1)$ . Nous prenons  $\phi = \tau_\alpha + 1$ . Puisque  $u(t) \geq u(t-1)$ , la condition (2.13), comme dans le Théorème 2, sont dérivées des inégalités (2.20). Ensuite, en considérant les perturbations agissant sur le GET, les inégalités (2.19) et (2.21) donnent l'expression de la loi de commande qui satisfait la contrainte de marquage (2.1) :

$$u(t) \leq (b - M_{0ij} - (A^{\tau\alpha} \otimes B)_j) \otimes [(\bigoplus_{r=1}^n A_{ir}^{\phi} \otimes x_r(t-1)) \oplus (\bigoplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t-1))] \quad (2.22)$$

Ceci au cas où cette condition  $(b - M_{0ij} - (A^{\tau\alpha} \otimes B)_j) \otimes A_{ir}^{\phi} \geq 0$  est satisfaite.

La loi de commandes définie par le Théorème 2, se base sur l'exploitation de modèles GETs et de l'algèbre Min-Plus. Cette approche permet de créer des stratégies de commande assurant le respect des contraintes de marquage appliquées à la position d'un GET. Les contrôleurs calculés sont traduits en places temporisées et marquées, qui sont appelées moniteurs liés au modèle initial de GET. Ces places jouent le rôle de superviseurs qui empêchent la violation des contraintes.  $\square$

### 2.4.1.2. GET soumis à plusieurs contraintes de marquage

Dans cette partie, nous allons étendre l'approche à un cas plus complexe où les GETs perturbés sont soumis à S contraintes avec une seule transition d'entrée contrôlable ( $t_u$ ). Chaque contrainte s est imposée à S places notées  $p_s$ , avec  $s = 1 \dots S$ . Les notations sont résumées comme suit :

$M_{s_0}$  : Le marquage initial de la place  $p_s$

$\tau_s$  : Le temps de la place  $p_s$

$t_j$  : La transition d'entrée de places  $p_s$

$t_i$  : La transition de sortie de places  $p_s$

$\alpha_s$  : Le chemin reliant la transition d'entrée  $t_u$  à la transition de sortie  $t_e$

$\tau_{\alpha_s}$  : Le temps du chemin  $\alpha_s$

Les contraintes de marquage sont représentées par l'inégalité suivante :

$$x_j(t) \leq (b_s - M_{s_0}(t)) \otimes x_i(t) \quad (2.23)$$

**Théorème 3.** Nous considérons un GET perturbé avec une seule transition commande  $t_u$ , soumis à plusieurs contraintes de marquage. La loi de commande est représentée par la formulation ci-dessous :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_s(t) \quad (2.24)$$

$$\text{avec} \quad u_s(t) = F_{1rs} \otimes x(t-1) \oplus F_{2hs} \otimes w(t-1) \quad (2.25)$$

où  $F_{1rs} = \bigoplus_{r=1}^N [b_s - M_{s_0} - (A^{\tau_{as}} \otimes B)_j] \otimes A_{ir}^{\tau_{as}+1}$

et  $F_{2hs} = \bigoplus_{h=1}^H [b_s - M_{s_0} - (A^{\tau_{as}} \otimes B)_j] \otimes (A^g \otimes Q)_{ih}$  pour  $s = 1, \dots, S$

assure l'accomplissement de la contrainte (2.23) lorsque la condition (2.13) est validée.

### Démonstration

D'après le Théorème 2, le contrôle des  $s^{\text{ème}}$  contraintes (pour  $s = 1$  à  $S$ ) est représenté comme suit si les conditions (2.26) et (2.27) sont satisfaites pour chaque indice  $(q, q')$  :

$$u_s(t) = (b - M_{j_{i_0}} - (A^{\tau_{as}} \otimes B)_e) \otimes (A_{ir}^{\tau_{as}+1} \otimes x(t-1)) \oplus ((A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w(t-1))$$

Le contrôleur est alors donné par :

$$u(t) \leq \bigoplus_{s=1}^S u_s(t)$$

Ce feedback représente le minimum de contrôleurs calculés pour satisfaire les  $s$  contraintes.  $\square$

## 2.4.2. Commande multivariables

Nous généralisons maintenant la stratégie préalable pour traiter le problème des contraintes de marquage dans les GETs partiellement contrôlables à entrées multiples. L'équation explicite (1.4) décrit le comportement du GET considéré. Le terme  $\bar{n}$  représente le nombre de transitions d'entrée, avec  $\bar{n} \geq 1$ , pour  $e = 1$  à  $\bar{n}$ . Nous attribuons un compteur  $\mu_e(t)$  à chaque transition source. Dans un premier temps, nous étudions le scénario où ce graphe est initialement soumis à une unique contrainte. Ensuite, nous généralisons les résultats pour le scénario où ce graphe est soumis à plusieurs spécifications.

### 2.4.2.1. GETs soumis à une seule contrainte de marquage

Dans ce cas, nous traitons les GETs perturbés avec plusieurs transitions d'entrée  $\bar{n}$ , où l'équation (1.4) exprime leur comportement, soumis à une seule contrainte de marquage appliquée à une place donnée. Comme dans le cas du contrôle avec une transition d'entrée, nous posons comme hypothèse l'existence d'au moins un chemin connectant la transition de contrôle  $u_e$  à la transition  $t_j$ . La relation entre ces deux transitions peut être exprimée par cette inégalité:

$$x_j(t) \leq \bigoplus_{e=1}^{\bar{n}} (A^{\tau_{ae}} \otimes B)_{je} \otimes u_e(t - \tau_{ae})$$

Notre objectif consiste à développer un contrôleur  $u(t)$  qui garantit le respect de la contrainte (2.1).

**Théorème 4.** La loi de commande exprimée comme suit :

$$u_c(t) = \begin{cases} (b - M_{0ij} - (A^{\tau_{ac}} \otimes B)_{jc}) \otimes (A_{ic}^{\phi_c} \otimes x(t-1)) \oplus ((A^{g_c} \otimes Q)_{ic} \otimes w(t-1)) & \text{si } e = c, \\ \varepsilon, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.26)$$

garantit la validité de cette contrainte si la condition suivante est respectée :

$$(A^{\tau_{ac}} \otimes B)_{je} \leq (b - M_{0ij}) \otimes (A^k \otimes B)_{ie} \quad (2.27)$$

pour  $k = 0$  à  $(\phi_c - 1)$  et pour  $e = 1$  à  $\bar{n}$

**Démonstration.** Les étapes pour calculer la loi de commande  $u_c(t)$  (pour  $c \in \{1, \dots, \mu\}$ ) sont similaires à celles présentées lors de la démonstration du Théorème 2. L'expression (2.26) est obtenue si la condition (2.1) est satisfaite par une commande donnée  $u_c(t)$ , puis les autres commandes peuvent être forcées à  $\varepsilon$ .

#### 2.4.2.2. GETs soumis à plusieurs contraintes de marquage

Dans cette partie nous traitons le cas des GETs avec multi transitions d'entrées  $\bar{n}$  soumis à plusieurs contraintes de marquage. Nous désignons par  $b_s$  la limite maximale des nombres de jetons à ne pas dépasser. Ces contraintes peuvent être représentées par l'inégalité suivante :

$$M_{p_s}(t) \leq b_s \quad (2.28)$$

où  $p_s$  définit l'ensemble des places indépendantes imposées à des restrictions. Le théorème suivant généralise le Théorème 4.

**Théorème 5.** Soit un GET perturbé qui a  $\bar{n}$  transitions d'entrée dont leur comportement est donné par l'équation (1.4) et qui est soumis à des contraintes de la forme (2.28), la loi de commande est définie par la formule ci-dessous :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_{c_s}(t) \quad (2.29)$$

La contrainte (2.28) doit être respectée si la condition (2.27) est satisfaite pour chaque  $s = 1 \dots$  à  $S$ .

**Démonstration.** Dans le cas d'un GET avec plusieurs transitions d'entrées soumis à de multiples contraintes, le contrôleur donné par l'équation (2.29) garantit la satisfaction des spécifications identifiées dans (2.28).

### 2.4.3. Algorithme de contrôle des GETs sous multi-contraintes de marquage

Nous proposons un algorithme de contrôle pour les systèmes compliqués et les systèmes industriels de taille importante (Algorithme 1). Ce programme n'est utilisé que lorsque des GETs perturbés sont soumis à S contraintes de marquage. Si nous voulons considérer une seule contrainte, nous étudions le cas où  $s=1$ . Cette méthodologie de contrôle commence par établir toutes les matrices des GETs dans l'algèbre Min-Plus (matrices A, B et Q), les transitions d'entrées et de sorties des chemins sous contraintes  $(i_s, j_s)$  et son nombre de jetons initiaux  $M_{0p}$ . Ensuite, une vérification des conditions d'existence des lois de commande causales, qui sont écrites en termes de paramètres des contraintes de marquage est effectuée. Enfin, les lois de commande sont directement calculées à l'aide du Théorème 5. En outre, la mise en œuvre de ces techniques de contrôle analytique est simple et ne nécessite pas un grand espace de mémoire.

---

#### Algorithme 1: Contrôle des GETs perturbés avec plusieurs entrées soumis à des contraintes imposées sur des places

---

Entrée :  $\mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{A}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \tau_{\alpha_s}, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{l}_s$

Sortie:  $(\mathbf{u})$

**% Initialisation**

$\phi_s := \tau_{\alpha_s} + 1$

Pour  $k \in [1 \dots \phi_s - 1]$  faire **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

    Pour  $e_s \in [1 \dots \bar{\mathbf{n}}]$  faire **% Indice et nombre des transitions de commande**

        Pour  $g \in [0 \dots \phi_s - 1]$  faire **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

**% Vérifier les conditions suffisantes**

    Si  $(\mathbf{A}^{\tau_{\alpha_s}} \otimes \mathbf{B})_{j_{c_s}} \leq (\mathbf{b} - \mathbf{M}_{0p_s}) \otimes (\mathbf{A}^k \otimes \mathbf{B})_{i_{l_s}}$

    Si  $(\mathbf{A}^{\tau_{\alpha_s}} \otimes \mathbf{Q})_{j_{c_s}} \leq (\mathbf{b} - \mathbf{M}_{0p_s}) \otimes (\mathbf{A}^g \otimes \mathbf{Q})_{i_{l_s}}$

    Si  $(\mathbf{b} - \mathbf{M}_{0p_s} - (\mathbf{A}^{\tau_{\alpha_s}} \otimes \mathbf{B})_{j_{c_s}}) \otimes \mathbf{A}_{ir}^{\phi_{c_s}} \geq \mathbf{0}$

    Si  $e=c$

**% Calculer la loi de commande présentée dans le Théorème 5**

    Faire  $\mathbf{u} = [\mathbf{b} - \mathbf{M}_{0p_s} - (\mathbf{A}^{\tau_{c_s}} \otimes \mathbf{B})_{j_{c_s}}] \otimes [(\oplus_{r=1}^n \mathbf{A}_{ir}^{\phi_{c_s}} \otimes \mathbf{x}(t-1)) \oplus (\oplus_{r=1}^n (\mathbf{A}^{g_{c_s}} \otimes \mathbf{Q}_r)_{i_s} \otimes \mathbf{w}(t-1))]$

---

---

```

    Sinon  $u := \varepsilon$ 
        retour
    Fin si
    Fin si
    Fin si
    Fin si
    Fin pour
    Fin pour
    Fin pour

```

---

## 2.5. Conception de lois de commande pour des GETs sous contraintes imposées sur des chemins

Nous proposons dans cette section d'étudier la conception des lois de commande en considérant les contraintes imposées à des chemins (succession de places). On suppose dans ce qui suit que toutes les transitions sont observables et chaque restriction linéaire du marquage n'affecte que les places situées sur le même chemin.

### 2.5.1. Commande monovariante

Nous introduisons une nouvelle méthode pour développer des lois à rétroaction pour les GETs perturbés, qui sont soumis à des contraintes de marquage le long de leurs chemins. Nous commençons par le cas où ce graphe possède une seule entrée et une seule contrainte de marquage imposée à une succession de places situées sur le même chemin. Puis, nous étendons au cas de plusieurs contraintes.

#### 2.5.1.1. Un chemin soumis à une contrainte de marquage

Nous analysons un GET partiellement contrôlable, qui est soumis à une contrainte de marquage imposée sur le chemin  $\rho$ . Nous présumons qu'il existe un chemin élémentaire  $\alpha$  reliant la transition de contrôle  $t_u$  à la transition  $t_j$  qui représente la transition en amont du chemin  $\rho$  sous la contrainte. Cette spécification est formulée par l'inégalité (2.5), et l'équation d'état du système est définie par l'équation (1.4). Nous adoptons la même approche que celle utilisée pour le cas où un GET est soumis à une restriction de marquage sur une place.

**Théorème 6.** La loi de commande représentée par la formulation ci-dessous :

$$u(t) = [\bigoplus_{r=1}^N F_{1r} \otimes x_r(t-1)] \oplus [\bigoplus_{h=1}^H F_{2h} \otimes w_h(t-1)] \quad (2.30)$$

$$\text{avec} \quad F_{1r} = [b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j] \otimes A_{ir}^{\tau_\alpha}$$

$$\text{et} \quad F_{2h} = [b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j] \otimes (A^g \otimes Q)_i$$

garantit la satisfaction de la contrainte (2.5) si la condition suivante est vérifiée :

$$(A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \leq (b - M_{0\rho}) \otimes (A^k \otimes B)_i \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } \tau_\alpha \quad (2.31)$$

**Démonstration.** En remplaçant le marquage initial  $M_{0ij}$  de la place  $p_{ij}$  sous contrainte par le marquage initial de chemin  $M_{0\rho}$ , tel que discuté dans la sous-section 2.3.2, nous constatons que les deux expressions de la contrainte sont équivalentes. Étant donné que notre intérêt dans cette partie est de concevoir une commande de contrôle qui respecte la restriction imposée sur un chemin, nous avons suivi une approche semblable à celle utilisée pour calculer les lois de commande dans le cas où une contrainte est imposée sur une place. Les résultats obtenus sont identiques en substituant  $M_{0ij}$  par  $M_{0\rho}$ . En conclusion, les contrôleurs définis par l'équation (2.30) garantissent la satisfaction de la contrainte de marquage (2.5) lorsque la condition (2.31) est respectée.

### 2.5.1.2. Un chemin soumis à plusieurs contraintes

Cette partie traite le cas des GET perturbé avec une transition d'entrée  $t_u$  soumis à plusieurs contraintes de marquage. Ces contraintes sont imposées sur  $S$  chemins notés  $p_s$  pour  $s = 1$  à  $S$ . Les termes de  $M_{0\rho_s}$  et  $\tau_{\rho_s}$  font référence respectivement au marquage initial et au temps du chemin  $\rho_s$ . Le nombre de jetons le long du chemin  $\rho_s$  est noté  $M_{\rho_s}$  et  $b_s$  désigne le nombre de jetons requis. Les différentes contraintes de marquage imposées dans ce graphe sont exprimées par l'inégalité suivante :

$$M_{\rho_s}(t) \leq b \quad (2.32)$$

Ce qui donne :

$$x_j(t) \leq (b_s - M_{0\rho_s}(t)) \otimes x_i(t)$$

**Théorème 7.** Un GET dont l'évolution est donnée par L'équation (1.4) et soumis à plusieurs contraintes de marquage de la forme (2.32), admet une loi de commande décrite par l'équation ci-dessous :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_s(t) \quad (2.33)$$

$$\text{avec} \quad u_s(t) = F_{1rs} \otimes x(t-1) \oplus F_{2hs} \otimes w(t-1) \quad (2.34)$$

$$\text{dans lequel} \quad F_{1rs} = \bigoplus_{r=1}^N [b_s - M_{s_0} - (A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j] \otimes A_{ir}^{\tau_{\alpha_s}+1}$$

$$\text{et} \quad F_{2hs} = \bigoplus_{g=1}^G [b_s - M_{s_0} - (A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j] \otimes (A^g \otimes Q)_{ih}$$

garantisse la satisfaction de la condition (2.32) si la condition (2.31) est vérifiée pour  $\phi_s = \tau_{\alpha_s} + 1$ .

### Démonstration

Notre objectif est de synthétiser une loi de commande de la forme  $u_s(t) = F_{1rs} \otimes x(t-1) \oplus F_{2hs} \otimes w(t-1)$  qui satisfait la  $s^{\text{ème}}$  (pour  $s = 1$  à  $S$ ) contraintes de marquage. Si la condition (2.31) est satisfaite, nous obtenons l'équation suivante :

$$u_s(t) = (b - M_{0\rho_s} - (A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j) \otimes (A_{ir}^{\tau_{\alpha_s}+1} \otimes x(t-1)) \oplus ((A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w(t-1))$$

Le contrôleur est alors donné par :

$$u(t) \leq \bigoplus_{s=1}^S u_s(t) \quad \square$$

## 2.5.2. Commande multivariables

Nous généralisons maintenant l'approche préalable pour résoudre le problème des contraintes de marquage dans les GETs perturbés avec plusieurs transitions d'entrée. Ce graphe est soumis à des restrictions liées pour un même chemin. Nous commençons par le cas d'une seule contrainte avant de passer au cas de plusieurs spécifications.

### 2.5.2.1. Des chemins soumis à une contrainte de marquage

Nous allons adopter la même démarche que celle utilisée dans le cas où un GET est soumis à une contrainte de marquage imposée sur une place, pour déterminer les lois de commande assurant le respect de la contrainte (2.5). Les résultats obtenus pour la contrainte de marquage sur une place avec plusieurs entrées peuvent ensuite être appliqués pour résoudre le problème de contrainte de marquage imposée sur un chemin d'un GET. La seule modification que nous apportons est de substituer le marquage initial de la place  $M_{0ij}$  sous contrainte par le marquage initial du chemin  $M_\rho$ . Quelques modifications ont été effectuées à quelques paramètres, qui seront spécifiés ultérieurement.

**Théorème 8.** Nous proposons des GETs perturbés à multi-entrées  $\bar{n}$  dont leurs comportements sont exprimés par l'équation (1.4) et qui sont soumis à une contrainte de la forme (2.5). Le contrôleur donné comme suit :

$$u_c(t) = \begin{cases} (b - M_{0\rho} - (A^{\tau_{ac}} \otimes B)_{jc}) \otimes (A_{ic}^{\phi_c} \otimes x(t-1)) \oplus ((A^{g_c} \otimes Q)_{ic} \otimes w(t-1)) & \text{si } e = c, \\ \varepsilon, \text{ autre.} & \end{cases} \quad (2.35)$$

assure la validité de la contrainte (2.26) si la condition suivante est satisfaite :

$$(A^{\tau_{ac}} \otimes B)_{je} \leq (b - M_{0\rho}) \otimes (A^k \otimes B)_{ie} \quad (2.36)$$

Pour  $k = 0$  à  $\phi_c - 1$  et  $e = 1$  à  $\bar{n}$ .

**Démonstration :** Le processus de calcul d'une loi de commande  $u_c(t)$  (pour  $c \in \{1, \dots, \bar{n}\}$ ), est identique à celui décrit dans la preuve du Théorème 6. Le contrôleur  $u(t)$  décrit par l'équation (2.35) est établi si la condition (2.5) est vérifiée, puis les autres contrôleurs peuvent être forcés à  $\varepsilon$ .

### 2.5.2.2. Des chemins soumis à plusieurs contraintes de marquage

Nous examinons un GET perturbé comprenant plusieurs transitions d'entrée et étant soumis à  $s$  contraintes de marquage. Par conséquent, nous supposons que chaque chemin  $\rho_s$  est associé à au moins une transition d'entrée. Les contraintes de marquage sont exprimées par l'inégalité suivante :

$$M_{\rho_s}(t) \leq b_s \quad s = 1 \text{ à } S \quad (2.37)$$

Le théorème suivant généralise le Théorème 8.

**Théorème 9.** Soit des GETs soumis à  $\bar{n}$  transitions d'entrée et à des contraintes de la forme (2.37), le contrôleur est exprimé par :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_{c_s}(t) \quad (2.38)$$

avec

$$u_{c_s} = [b_s - M_{0\rho_s} - (A^{\tau_{c_s}} \otimes B)_{j_{c_s}}] \otimes [(\bigoplus_{r=1}^n A_{ir}^{\phi_{c_s}} \otimes x(t-1)) \oplus (\bigoplus_{r=1}^n (A^{g_{c_s}} \otimes Q_r)_{i_{e_s}} \otimes w(t-1))]$$

assure la validité de la spécification (2.37), si la condition (2.36) est satisfaite pour chaque  $s = 1$  à  $S$ , tel que  $u_{c_s}(t)$  est le contrôleur (2.35) calculé dans le Théorème 8.

**Démonstration** : La loi de commande décrite par l'expression (2.35), si elle existe, assure la satisfaction d'une seule contrainte. Dans le cas de multiples contraintes et de  $\bar{n}$  commandes, il est évident que le contrôleur donné par l'équation (2.38) assure la satisfaction de la contrainte (2.37) si la condition (2.36) est satisfaite.

### 2.5.3. Instruction algorithmique pour la synthèse de contrôle

Un algorithme, similaire à celui de la sous-section (2.4.3.) est élaboré pour synthétiser des lois de commande prévues dans le Théorème 9. Nous procédons en substituant le marquage initial de la place  $M_{0ij}$  soumis à la contrainte par le marquage initial de chemin  $M_{0\rho_s}$  et nous suivons la même démarche de l'algorithme 1. Cet algorithme peut être introduit comme suit :

---

#### Algorithme 2: Contrôle des GETs perturbés avec plusieurs entrées soumis à des contraintes multiples imposées sur des chemins

---

Entrée :  $\mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathbf{M}_{0\rho}, \mathbf{A}, \mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{s}, \mathbf{Q}, \tau_{\alpha_s}, \rho, \rho_0, \bar{n}$

Sortie : ( $\mathbf{u}$ )

**%Initialisations**

$\phi_s := \tau_{\alpha_s} + 1$

Pour  $k \in [1 \dots \phi_s - 1]$  faire **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

Pour  $e_s \in [1 \dots \bar{n}]$  faire **% Indice et nombre des transitions de commande**

Pour  $h \in [1 \dots \phi_s - 1]$  faire **% Indice et le nombre de transitions perturbées**

**%Vérifier les conditions suffisantes**

Si  $(\mathbf{A}^{\tau_{\alpha_s}} \otimes \mathbf{B})_{j c_s} \leq (\mathbf{b} - \mathbf{M}_{0\rho_s}) \otimes (\mathbf{A}^k \otimes \mathbf{B})_{i y_s}$

Si  $\mathbf{e} = \mathbf{c}$

**% Calculer la loi de commande présentée dans Théorème 9**

Faire  $\mathbf{u} = [\mathbf{b}_s - \mathbf{M}_{0\rho_s} - (\mathbf{A}^{\tau_{\alpha_s}} \otimes \mathbf{B})_{j c_s}] \otimes [(\bigoplus_{r=1}^n \mathbf{A}_{ir}^{\phi_{c_s}} \otimes \mathbf{x}(t - 1)) \oplus (\bigoplus_{r=1}^n (\mathbf{A}^{g_{c_s}} \otimes \mathbf{Q}_r)_{i_d h s} \otimes \mathbf{w}(t - 1))]$

sinon  $\mathbf{u} := \boldsymbol{\varepsilon}$

retour

Fin si

Fin si

Fin pour

Fin pour

Fin pour

---

## 2.6. Contrôle par rétroaction pour les GETs perturbés partiellement observables

Nous abordons le problème du contrôle des SEDs modélisés par des GETs partiellement observables avec des transitions incontrôlables. Ces contrôleurs établis visent à restreindre le nombre de jetons dans certaines places de ces graphes. Nous suggérons que les transitions soient activées dès que possible et ne sont pas toutes contrôlables ; seules les transitions d'entrée  $t_u$  le sont. Nous traitons d'abord le cas où lorsque le système est monovarié, puis nous étendons l'approche au cas des commandes multi-variables. Dans cette étude, nous considérons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1 :** Nous supposons que chaque boucle du GET étudié possède au moins une transition observable.

### 2.6.1. Commande monovarié

Nous cherchons à calculer la commande  $u(t)$  qui garantit la satisfaction de la contrainte de marquage imposée sur la trajectoire  $\rho$  dans un GET partiellement observable et contrôlable avec une seule entrée. Nous considérons d'abord un GET soumis à une seule contrainte. Ensuite, nous nous étendons au cas de plusieurs contraintes.

#### 2.6.1.1. Un chemin soumis à une contrainte de marquage

Nous allons utiliser la même approche que celle appliquée dans le cas d'un GET soumis à une contrainte de marquage imposée sur un chemin, afin de calculer les lois de commande qui assurent le respect de la contrainte (2.5). Mais puisque ce graphe contient des transitions non observables, les lois de commande calculées présentées par l'équation (2.30) n'est pas réalisable. L'objectif du Théorème 10 est de définir des lois de commande en fonction des transitions observables qui assurent la satisfaction des limitations de marquage imposées sur un chemin d'un GET partiellement contrôlable et observable.

**Théorème 10 :** Nous considérons un GET partiellement observable et contrôlable soumis à une contrainte de marquage de la forme (2.5). La loi de commande est décrite par l'équation suivante :

$$u(t) = F'_1 \otimes x(t-1) \oplus F''_1 \otimes x(t - \tau_{\delta_\beta} - 1) \oplus F_2 \otimes w(t-1) \quad (2.39)$$

$$\text{avec } F'_1 = \bigoplus_{r \in y} [b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j] \otimes A_{ir}^{\tau_\alpha + 1}$$

$$F_1'' = \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} \left[ b + m_{\delta_\beta} - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \right] \otimes A_{ir}^{\tau_\alpha+1}$$

$$\text{et } F_2 = \bigoplus_{h=1}^H \bigoplus_{h \in y} \left[ b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \right] \otimes (A^g \otimes Q)_{ih}$$

garantisse le respect de la contrainte (2.5) lorsque la condition suivante est validée:

$$(A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \leq (b - M_{0\rho}) \otimes (A^k \otimes B)_i \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } \tau_\alpha \quad (2.40)$$

### Démonstration.

Dans la section 2.5, nous étudions le problème d'un GET qui contient un ensemble de transitions d'entrée incontrôlables et qui incluent également des contraintes de marquage imposées sur certains chemins de places dans ce graphe. L'inégalité de la loi de commande indiquée dans le Théorème 6 résultant de l'inégalité (2.30) décrit la commande qui satisfait à la contrainte de marquage (2.5), si la condition (2.31) est assurée. L'équation est la suivante :

$$u(t) = (b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j) \otimes \left[ \left( \bigoplus_{r=1}^N A_{ir}^\phi \otimes x_r(t-1) \right) \oplus \left( \bigoplus_{h=1}^H (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t-1) \right) \right]$$

Cependant, ce contrôleur n'est pas réalisable car son équation est fournie en fonction des transitions internes du GET contenant les transitions inobservables,  $t_i \in t_\beta$ . Nous rappelons qu'il existe un chemin  $\delta$  reliant cette transition à une transition observable  $t_i \in t_y$ . Le temps et le marquage de ce chemin sont respectivement désignés par  $\tau_\delta$  et  $m_\delta$ . Comme chaque boucle du GET perturbé étudié possède au moins une transition observable  $t_i \in t_y$ , ce contrôleur peut être traduit en un contrôleur réalisable en utilisant le résultat de la propriété 1. Pour ce faire, nous divisons la formule du contrôleur en deux parties : l'une pour les transitions inobservables et l'autre pour les transitions observables, comme l'indique l'inégalité suivante :

$$u(t) = \left[ (b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j) \left[ \left( \bigoplus_{r \in y} A_{ir}^\phi \otimes x_r(t-1) \right) \otimes \left( \bigoplus_{h=1}^H \bigoplus_{h \in y} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t-1) \right) \right] \oplus \left[ (b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j) \otimes \left( \bigoplus_{r \in \beta} A_{ir}^\phi \otimes x_r(t-1) \right) \right] \right]$$

L'équation suivante décrit la loi de commande obtenue en fonction des transitions observées :

$$u(t) = \left[ b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \right] \otimes \left[ \left( \bigoplus_{r \in y} A_{ir}^{\tau_\alpha} \otimes x_r(t-1) \right) \oplus \left( \bigoplus_{h=1}^H \bigoplus_{h \in y} (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t-1) \right) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{\beta=1}^E \left[ (b + m_{\delta_\beta} - M_{0\rho}) - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_j \right] \otimes \left[ \bigoplus_{r \in y} A_{ir}^{\tau_\alpha} \otimes x_r(t - \tau_{\delta_\beta} - 1) \right] \right] \quad \square$$

### 2.6.1.2. Un chemin soumis à plusieurs contraintes

Dans cette partie, nous considérons un GET avec une seule transition d'entrée et  $S$  contraintes de marquage appliquées aux  $s$  chemins de ce graphe. Nous tenons compte du fait que les restrictions ne s'appliquent qu'aux places situées sur le même chemin, et nous supposons qu'il existe au moins un chemin désigné par  $\alpha_s$ .

**Théorème 11** : Un GET perturbé dont l'évolution est représentée par l'équation (2.32) et soumis à plusieurs contraintes de marquage de la forme (2.28), admet une loi de commande représentée par la formulation ci-dessous :

$$\begin{aligned} u(t) &= \bigoplus_{s=1}^S u_s(t) \\ &= \bigoplus_{s=1}^S [(\bigoplus_{r \in y} F'_{1s} \otimes x_r(t-1)) \oplus (\bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} F''_{1s} \otimes x_r(t - \tau_{\delta_\beta} - 1)) \oplus \\ &\quad (F_{2s} \otimes w_h(t-1))] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{avec } F'_{1s} = \bigoplus_{r \in y} [b_s - M_{0\rho_s} - (A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j] \otimes A_{ir}^{(\tau_{\alpha_s} + 1)}$$

$$F''_{1s} = \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} [b_s + m_{\delta_\beta} - M_{0\rho_s} - (A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j] \otimes A_{ir}^{(\tau_{\alpha_s} + 1)}$$

$$\text{et } F_{2s} = \bigoplus_{h=1}^H \bigoplus_{h \in y} [b_s - M_{0\rho_s} - (A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j] \otimes (A^g \otimes Q)_{ih}$$

garantit que la contrainte (2.32) est satisfaite si la condition suivante est remplie :

$$(A^{\tau_{\alpha_s}} \otimes B)_j \leq (b_s - M_{0\rho_s}) \otimes (A^k \otimes B)_i \quad \text{pour } s = 1 \text{ à } S \quad (2.42)$$

**Démonstration.** Le contrôleur  $u(t)$  énoncé dans le Théorème 10 assure le respect de la contrainte de marquage (2.5) si la condition (2.40) est validée. La loi de commande  $u_s(t)$  évite alors la violation de la  $S^{\text{ème}}$  contrainte pour  $S$  contraintes de marquage (2.28) si la condition (2.42) est vérifiée. Ces lois sont représentées par l'équation :  $u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_s(t)$ .  $\square$

### 2.6.2. Commande multivariables

Nous étendons l'approche précédente pour traiter le problème de la contrainte de marquage dans les GETs perturbés partiellement observables avec des transitions d'entrée multiples. Ces graphes sont soumis à des contraintes de marquage liées pour un même chemin.

### 2.6.2.1. Des chemins soumis à une contrainte de marquage

Dans ce cas, on considère un GET partiellement observable et contrôlable avec  $\bar{n}$  transitions d'entrée soumis à une contrainte de marquage. L'objectif de l'approche est de déterminer les éléments du vecteur  $u(t)$  qui peuvent satisfaire cette contrainte. Nous supposons généralement que la transition d'entrée  $t_j$  du chemin sous contrainte est associée à, au moins, une transition d'entrée  $t_{uc}$  du GET perturbé considéré.

**Théorème 12.** Nous proposons des GETs perturbés partiellement observables avec des transitions à entrées multiples, dont la dynamique est donnée par l'équation (1.4) et est soumise à une contrainte du type (2.5). La contrainte de marquage est satisfaite s'il existe un contrôleur par rétroaction indice  $c$ ,  $u_c(t)$  tel que :

$$u_c(t) = [\oplus_{r \in y} F'_{1c} \otimes x_r(t-1)] \oplus [\oplus_{\beta=1}^E \oplus_{r \in y} F''_{1c} \otimes x_r(t - \tau_{\delta_\beta} - 1)] \oplus [\oplus_{h=1}^H F_{2c} \otimes w_h(t-1)] \quad (2.43)$$

$$\text{avec } F'_{1c} = \oplus_{r \in y} [b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_{j_c}] \otimes A_{ir}^{\tau_\alpha + 1}$$

$$F''_{1c} = \oplus_{\beta=1}^E \oplus_{r \in y} [(b + m_{\delta_\beta} - M_{0\rho}) - (A^{\tau_\alpha + 1} \otimes B)_{j_c}] \otimes A_{ir}^{\tau_\alpha}$$

$$\text{et } F_{2c} = \oplus_{p=1}^P [b - M_{0\rho} - (A^{\tau_\alpha} \otimes B)_{j_c}] \otimes (A^g \otimes Q)_{ih}$$

avec  $u_e(t) = \varepsilon$  pour  $e \neq c$  et si la condition suivante est satisfaite.

$$(A^{\tau_{\alpha_c}} \otimes B)_{j_c} \leq (b - M_{0\rho_c}) \otimes (A^k \otimes B)_{ic} \quad \text{pour } c = 0 \text{ à } \bar{n} \quad (2.44)$$

**Démonstration.** Le processus de calcul des lois de commande  $u_c(t)$  est identique à la synthèse du contrôleur  $u(t)$  fournie dans le Théorème 10. Si la condition (2.44) est satisfaite pour un indice  $c$  dans cette situation, la formule du contrôleur (2.43) est calculée, et les autres commandes peuvent alors être réalisées en  $\varepsilon$ .  $\square$

### 2.6.2.2. Des chemins soumis à plusieurs contraintes

Dans cette partie, nous généralisons l'approche pour traiter le cas général des GETs partiellement observables et contrôlables avec multi transitions d'entrées, soumis à  $S$  contraintes de marquage.

**Théorème 13.** Soit des GETs partiellement observables avec des transitions de perturbations, soumis à  $\bar{n}$  transitions d'entrée et soumis à des restrictions de la forme (2.37). Le contrôleur donné par :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_{c_s}(t) \quad (2.45)$$

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S [\bigoplus_{r \in y} \bigoplus_{h \in y} (b_{c_s} - M_{0\rho_{c_s}} - (A^{\tau_{\alpha_{c_s}}} \otimes B)_j) \otimes A_{ir}^{(\tau_{\alpha_{c_s}}+1)} \otimes x_r(t-1) \oplus (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t-1)] \oplus \bigoplus_{s=1}^S \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} [(b_{c_s} + m_{\delta_\beta} - M_{0\rho_{c_s}} - (A^{\tau_{\alpha_{c_s}}} \otimes B)_j) \otimes A_{ir}^{(\tau_{\alpha_{c_s}}+1)} \otimes x_r(t-1)]$$

garantisse la validité de cette spécification, si la condition suivante est satisfaite pour chaque  $s = 1$  à  $S$ .

$$(A^{\tau_{\alpha_{c_s}}} \otimes B)_j \leq (b_{c_s} - M_{0\rho_{c_s}}) \otimes (A^k \otimes B)_i \quad (2.46)$$

**Démonstration.** La loi de commande (2.43) présentée par le Théorème 12 garantit la satisfaction d'une seule contrainte. Dans le cas de contraintes multiples, le contrôleur donné par l'équation (2.45) vérifie que toutes les contraintes examinées (2.37) sont satisfaites si la condition (2.46) est vérifiée pour chaque spécification.

### 2.6.3. Procédure algorithmique de synthèse des commandes

Nous présentons un algorithme de contrôle pour les systèmes industriels complexes (Algorithme 3). Les étapes de ce script sont similaires aux étapes suivies dans l'algorithme 2.

---

#### Algorithme 3 : Contrôle des GETs partiellement observable et contrôlable soumis à des contraintes multiples imposées sur des chemins

---

Entrée:  $\mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathbf{M}_0, \mathbf{A}, i, j, \mathbf{s}, \mathbf{Q}, \tau_{\alpha_s}, \rho, \rho_0, \bar{n}, \mathbf{c}, \delta, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \beta, \mathbf{m}_{\delta_z}$ ,

Sortie: ( $\mathbf{u}$ )

**%Initialisation**

$\phi_s := \tau_{\alpha_s} + 1$

Pour  $k \in [1 \dots \phi_s - 1]$  faire      **%Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

    Pour  $c_s \in [1 \dots \bar{n}]$  faire      **% Indice et compteur des entrées d'un GETs**

        Pour  $g \in [1 \dots \phi_s - 1]$  faire      **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

            Pour  $\beta \in [1 \dots E]$  faire      **% Indice et compteur des transitions non observables**

**%Vérifier les conditions suffisantes**

---

$$\text{Si } (A^{\tau_{ac_s}} \otimes B)_{j_{c_s}} \leq (b_s - M_{0\rho_{c_s}}) \otimes (A^k \otimes B)_{iy_s}$$

$$\text{Si } (b_s - M_{0\rho_{c_s}} - (A^{\tau_{ac_s}} \otimes B)_{j_{c_s}}) \otimes A_{ir}^{\phi_{c_s}} \geq 0$$

**% Calculer la loi de commande présentée dans Théorème 13**

$$\begin{aligned} \text{faire } \mathbf{u}(t) = & \bigoplus_{s=1}^S [\bigoplus_{r \in y} \bigoplus_{h \in y} (b_{c_s} - M_{0\rho_{c_s}} - (A^{\tau_{ac_s}} \otimes B)_j) \otimes A_{ir}^{(\tau_{ac_s} + 1)} \otimes \\ & x_r(t-1) \oplus (A^g \otimes Q)_{ih} \otimes w_h(t-1)] \oplus \bigoplus_{s=1}^S \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} [(b_{c_s} + m_{\delta_\beta} - M_{0\rho_{c_s}} - \\ & (A^{\tau_{ac_s}} \otimes B)_j \otimes A_{ir}^{(\tau_{ac_s} + 1)} \otimes x_r(t-1)] \end{aligned}$$

*Sinon*  $\mathbf{u} := \boldsymbol{\varepsilon}$

*retour*

*Fin si*

*Fin si*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

---

## 2.7. Etude de cas : application à un système de désassemblage

### 2.7.1. Description du système

Pour évaluer l'efficacité de la méthodologie proposée, on se propose d'étudier un exemple de système de désassemblage (Figure 2.5) composé de deux lignes qui fonctionnent de la même manière (Reddy et al. [2009]). Ce système (modélisé par la figure 2.6) permet de désassembler chaque pièce en deux composantes :  $(J_1, J_2)$  et  $(J_3, J_4)$ . La première ligne sert à désassembler les produits en fin de vie en deux parties,  $J_1$  et  $J_2$ . En utilisant les deux machines  $MA_1$  et  $MA_4$ . Après le désassemblage des deux pièces, le composant  $J_1$  doit être transféré par un robot ( $R_1$ ) d'une capacité est ( $c_3$ ) avant d'être traité par la machine 1. De manière inattendue, un facteur externe incontrôlable interfère avec le fonctionnement du robot, donc Le bras de ce dernier est endommagé. Cela affecte le fonctionnement de la machine et entraîne un retard dans le traitement des composants. D'autre part,  $J_2$  est envoyé au stock intermédiaire pour être recyclé. Les deux stocks sont limités à 1 composant.

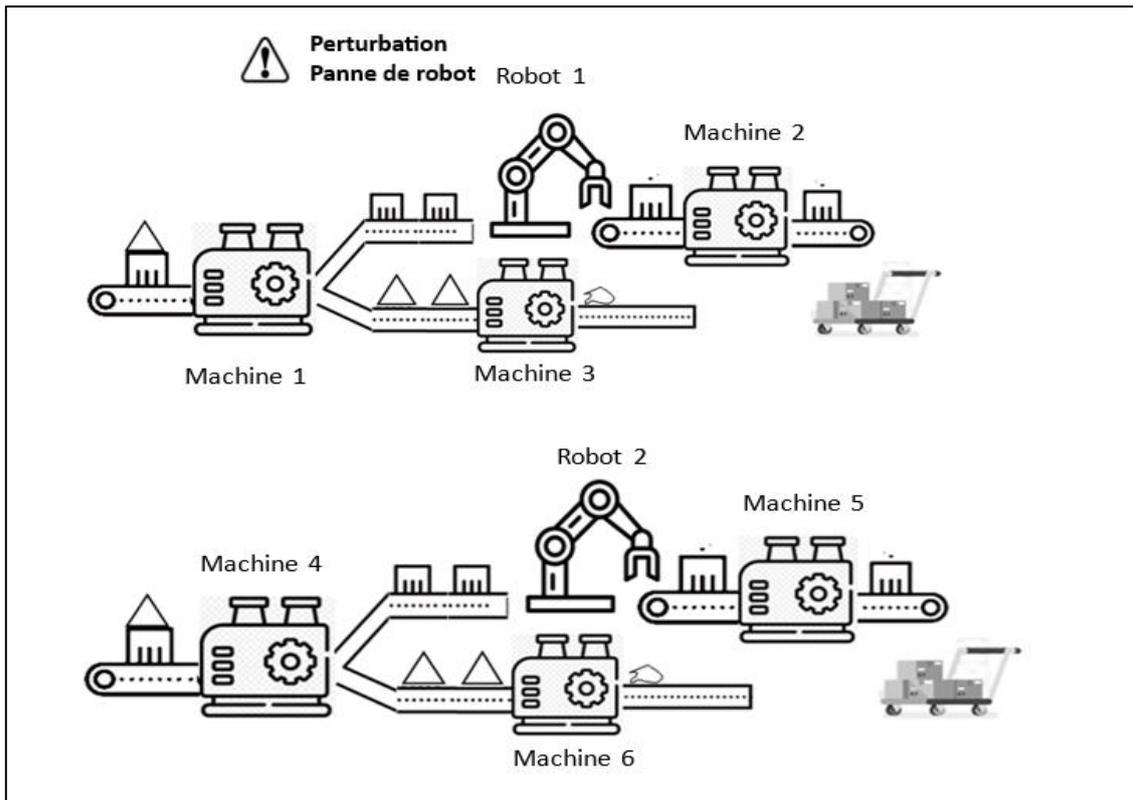


Figure 2.5. Le système de désassemblage étudié

### 2.7.2. Modélisation du système par GET

Ce système est modélisé par le GET présenté à la Figure 2.6. La description des places et des transitions utilisées dans ce modèle sont données dans le tableau 2.1. Ce graphe possède deux transitions sources ( $\bar{n} = 2$ ) et deux entrées, représentées par  $t_{u1}$  et  $t_{u2}$ . L'exécution de l'opération de désassemblage sur la machine  $MA_1$  (resp.  $MA_4$ ) commence par le déclenchement de la transition  $t_1$  (resp.  $t_7$ ). Suite à l'acquisition des composants, un robot  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) commence son déchargement du composant  $J_1$  vers la machine  $MA_2$  (resp.  $MA_5$ ) conçue avec la place  $p_{32}$  (resp.  $p_{98}$ ). Un jeton à la place  $p_{23}$  (resp.  $p_{89}$ ) indique que le robot est disponible. Le temps de traitement des deux machines ( $MA_1$  et  $MA_4$ ) et ( $MA_2$  et  $MA_5$ ) est respectivement de 1 et 2 unités de temps. Comme le temps de traitement de la machine  $MA_2$  est plus long que celui de  $R_1$ , ce dernier (ayant un composant) peut devoir attendre un certain temps avant de décharger la pièce dans la machine  $MA_2$ . Ainsi, à l'instant  $t$ , il y a un composant dans le robot et un composant dans la machine  $MA_2$ , ce qui constitue un état interdit. Le graphe d'accessibilité du GET perturbé est présenté par la Figure 2.6. L'ensemble  $\{\mu_6, \mu_7, \mu_{10}\}$  présente les états de marquages interdits. Cet état peut être décrit par la spécification de marquage suivante :

$$M_{32}(t) + M_{43}(t) \leq 1$$

$$M_{98}(t) + M_{109}(t) \leq 1$$

Les perturbations sont modélisées par  $t_{w1}$  et  $t_{w2}$ . Ces incidents provoquent un retard dans le transfert des composants suite à l'opération de désassemblage, ce qui entraîne une panne des deux robots  $R_1$  et  $R_2$ . A l'exception des transitions d'entrée  $t_{u1}$  et  $t_{u2}$ , les transitions de ce système sont donc imprévisibles. Dans ce graphe, nous considérons que seules les transitions  $t_2, t_4, t_5, t_8, t_{10}$  et  $t_{11}$  sont observables.

Avant d'appliquer le Théorème 13, nous devons d'abord calculer l'équation d'état du système. Pour ce faire, nous assignons à chaque transition du GET, une fonction compteur ( $\theta_i(t)$ ) pour  $i = 1$  à  $i = 13$ ). Le comportement de ce graphe peut être décrit par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(t) = e \otimes u_1(t) \oplus 1 \otimes \theta_2(t) \oplus 1 \otimes \theta_5(t) \\ \theta_2(t) = e \otimes \theta_1(t-1) \oplus 1 \otimes \theta_3(t) \oplus e \otimes w_1(t) \\ \theta_3(t) = e \otimes \theta_2(t) \oplus 1 \otimes \theta_4(t) \\ \theta_4(t) = e \otimes \theta_3(t-2) \\ \theta_5(t) = e \otimes \theta_1(t-1) \\ \theta_6(t) = e \otimes \theta_5(t-1) \\ \theta_7(t) = 1 \otimes u_2(t) \oplus 2 \otimes \theta_8(t) \oplus 1 \otimes \theta_{11}(t) \\ \theta_8(t) = e \otimes \theta_7(t-1) \oplus 1 \otimes \theta_9(t) \oplus e \otimes w_2(t) \\ \theta_9(t) = e \otimes \theta_8(t-1) \\ \theta_{10}(t) = e \otimes \theta_9(t-2) \\ \theta_{11}(t) = e \otimes \theta_7(t) \\ \theta_{12}(t) = e \otimes \theta_{11}(t-1) \\ \theta_{13}(t) = e \otimes \theta_4(t-1) \oplus e \otimes \theta_{10}(t-1) \end{array} \right.$$

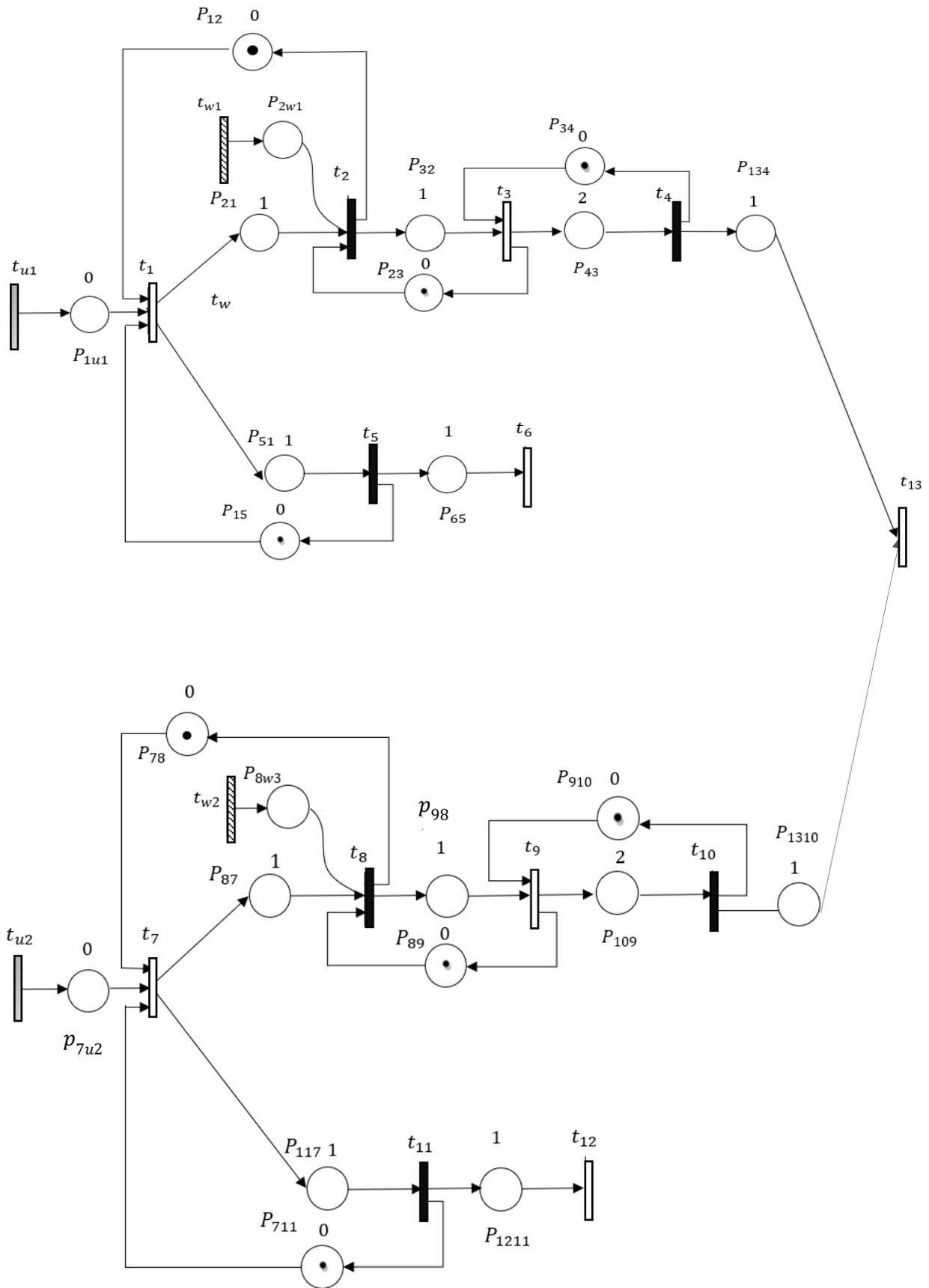


Figure 2. 6. Modèle de GET du système de désassemblage

**Table 2. 1. Description des places et des transitions utilisées dans la Figure 2.6**

<b>Places</b>	<b>Description</b>
$p_{1u1}$	Disponibilité des pièces A pour la transformation
$p_{21}$	Désassemblage de la composante $J_1$ par $MA_1$
$p_{12}$	Dépôt intermédiaire avec capacité $C_1$
$p_{32}$	Robot $R_1$
$p_{23}$	Capacité $C_2$ du robot $R_1$
$p_{43}$	Traitement de la composante $J_1$ sur la machine $M_2$
$p_{34}$	Dépôt intermédiaire avec capacité $C_3$
$p_{51}$	Désassemblage de la composante $J_2$
$p_{15}$	Dépôt intermédiaire avec capacité $C_4$
$p_{65}$	Stock intermédiaire pour les composants à recycler
$p_{134}$	Regroupement des composants obtenus
$p_{7u2}$	Disponibilité des pièces B pour la transformation
$p_{87}$	Désassemblage de la composante $J_3$
$p_{78}$	Disponibilité d'un tampon avec capacité $C_5$
$p_{98}$	Robot $R_2$
$p_{89}$	Capacité $C_6$ du robot $R_2$
$p_{109}$	Traitement de la composante $J_3$ sur la machine $MA_3$
$p_{910}$	Dépôt intermédiaire avec capacité $C_7$
$p_{117}$	Stock intermédiaire pour les composants à recycler
$p_{711}$	Dépôt intermédiaire avec capacité $C_4$
$p_{1310}$	Regroupement des composants obtenus
<b>Transitions</b>	<b>Description</b>
$t_1, t_7$	Démarrage du traitement du système de désassemblage
$t_2$	Transfert $J_1$ par le robot 1
$t_3$	Instance du traitement de $J_1$ par $MA_1$
$t_4$	Transfert du composant $J_1$ au stock
$t_5$	Transfert $J_3$ pour le recyclage
$t_6$	Fin de l'opération
$t_{w1}$	Panne du bras du robot 1
$t_8$	Transfert $J_3$ par le robot 2
$t_9$	Instance de traitement de $J_3$ par $MA_3$
$t_{10}$	Fin de l'opération
$t_{11}$	Transfert $J_4$ pour le recyclage
$t_{12}$	Fin de l'opération
$t_{13}$	Fin de l'opération
$t_{w2}$	Panne du bras du robot 2

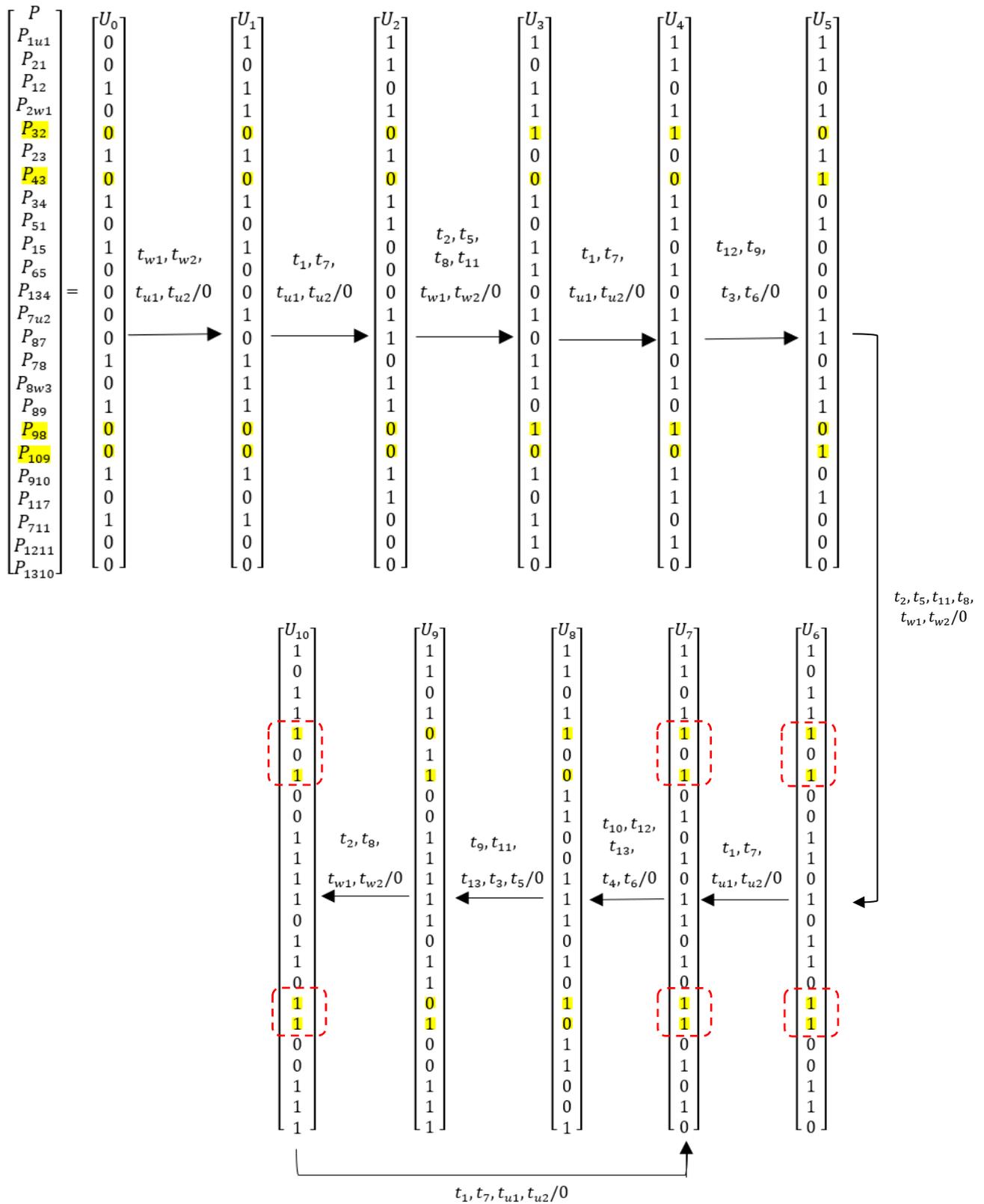


Figure 2.7. Graphe de marquage de modèle GET de la Figure 2.6.



$$\left[ \begin{array}{l}
 \theta_4(t) = e \otimes \theta_{14}(t-1) \\
 \theta_5(t) = e \otimes \theta_1(t-1) \\
 \theta_6(t) = e \otimes \theta_5(t-5) \\
 \theta_7(t) = 1 \otimes u_2(t) \oplus 2 \otimes \theta_8(t) \oplus 1 \otimes \theta_{11}(t) \\
 \theta_8(t) = e \otimes \theta_7(t-1) \oplus 1 \otimes \theta_9(t) \oplus e \otimes w_2(t) \\
 \theta_9(t) = e \otimes \theta_8(t-1) \\
 \theta_{10}(t) = e \otimes \theta_{15}(t-1) \\
 \theta_{11}(t) = e \otimes \theta_7(t) \\
 \theta_{12}(t) = e \otimes \theta_{11}(t-1) \\
 \theta_{13}(t) = e \otimes \theta_4(t-1) \oplus e \otimes \theta_{10}(t-1) \\
 \theta_{14}(t) = e \otimes \theta_4(t-1) \\
 \theta_{15}(t) = e \otimes \theta_9(t-1)
 \end{array} \right.$$

L'équation explicite de ce système est la suivante :

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & 1 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes u(t) \oplus \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$

### 2.7.3. Calcul des lois de commande

Dans cet exemple, il existe deux chemins. Le premier,  $\alpha_1$  relie la transition  $t_{u_1}$  à la transition  $t_2$  avec une temporisation  $\tau_{\alpha_1} = 1$ , et  $\varphi_1 = \tau_{\alpha_1} + 1 = 2$ . Le deuxième chemin  $\alpha_2$  relie la transition  $t_{u_2}$  à la transition  $t_8$  avec une temporisation  $\tau_{\alpha_2} = 1$ , alors  $\varphi_2 = \tau_{\alpha_2} + 1 = 2$ . On a,  $(A^k \otimes B)_{41} = [\varepsilon, \varepsilon]$ , pour  $k = 0$  à  $1$ , où  $(A^1 \otimes B)_{21} = e$ ,  $(A^g \otimes Q)_{41} = [\varepsilon, \varepsilon]$ , pour  $g = 0$  à  $1$ . A ce niveau, nous vérifions que les conditions du Théorème 13 sont respectées.

$$(A^1 \otimes B)_{21} \leq 1 \otimes (A^k \otimes B)_{41} \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } 1$$

$$(A^1 \otimes B)_{21} \leq 1 \otimes (A^g \otimes Q)_{41} \quad \text{pour } g = 0 \text{ à } 1$$

$$[1 - (A^1 \otimes B)_{21}] \otimes \bigoplus_{r=1}^{15} A_{4r}^2 \geq 0$$

$$[1 - (A^1 \otimes B)_{21}] \otimes (A^1 \otimes Q)_{4h} \geq 0 \quad \text{pour } h = 0 \text{ à } 2$$

Chaque boucle du GET étudié possède au moins une transition observable. En appliquant le Théorème 13, la loi de commande qui assure la validité de la première contrainte est donnée comme suit :

$$u_1(t) = (1 - 0) \otimes [(\bigoplus_{r=1}^{15} A_{4r}^2 \otimes x_r(t-1)) \oplus (\bigoplus_{h=1}^2 (A^g \otimes Q)_{4h} \otimes w_h(t-1))]$$

Nous avons,  $A_{4r}^2 = [\varepsilon, \varepsilon, e, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]$  et  $(A^1 \otimes Q)_{41} = \varepsilon$ . L'expression de  $u_1(t)$  devient :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 \otimes x_3(t-1) \oplus 1 \otimes w_1(t-1) \\ &= 1(e \otimes x_2(t-1-1) \oplus 1 \otimes x_4(t-1)) \oplus 1 \otimes w_1(t-1) \\ &= 1 \otimes x_2(t-2) \oplus 2 \otimes x_4(t-1) \oplus 1 \otimes w_1(t-1) \end{aligned}$$

De la même façon, on calcule  $u_2(t)$ , la deuxième composante du vecteur  $u(t)$ . Pour  $\bar{n}=2$ , on a,  $(A^k \otimes B)_{102} = \varepsilon$ , pour  $k = 0$  à  $1$ , où  $(A^1 \otimes B)_{82} = e$ , et  $(A^g \otimes Q)_{102} = [\varepsilon, \varepsilon]$ , pour  $g = 0$  à  $1$ . Les conditions du Théorème 13 sont satisfaites.

$$(A^1 \otimes B)_{82} \leq 1 \otimes (A^k \otimes B)_{102} \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } 1$$

$$(A^1 \otimes B)_{82} \leq 1 \otimes (A^g \otimes Q)_{102} \quad \text{pour } g = 0 \text{ à } 1$$

$$[1 - (A^1 \otimes B)_{82}] \otimes \bigoplus_{r=1}^{15} A_{10r}^2 \geq 0$$

$$[1 - (A^1 \otimes B)_{82}] \otimes (A^1 \otimes B)_{102} \geq 0$$

Par conséquent, la loi de commande satisfaisant la deuxième contrainte dans le GET étudié est la suivante :

$$u_2(t) = (1 - 0) \otimes [(\bigoplus_{r=1}^{15} A_{10r}^2 \otimes x_r(t-1)) \oplus (\bigoplus_{h=1}^2 (A^1 \otimes Q)_{10h} \otimes w_h(t-1))]$$

Après le calcul précédent, nous avons  $A_{10r}^2 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, e, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]$  et  $(A^1 \otimes Q)_{102} = \varepsilon$ . L'équation de la loi de commande  $u_2(t)$  devient :

$$u_2(t) = 1 \otimes x_9(t-1) \oplus 1 \otimes w_2(t-1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \otimes x_8(t-1-1) \oplus 1 \otimes x_{10}(t-1) \oplus 1 \otimes w_2(t-1) \\
 &= 1 \otimes x_8(t-2) \oplus 2 \otimes x_{10}(t-1) \oplus 1 \otimes w_2(t-1)
 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'algèbre Min-Plus, la loi de commande précédente peut être simplifiée comme suit :

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \otimes x_2(t-2) \oplus 2 \otimes x_4(t-1) \oplus 1 \otimes w_1(t-1) \\ 1 \otimes x_8(t-2) \oplus 2 \otimes x_{10}(t-1) \oplus 1 \otimes w_2(t-1) \end{bmatrix}$$

La méthode mathématique proposée pour contrôler les contraintes de marquage imposées pour certains chemins du GETs partiellement contrôlables et observables a prouvé son efficacité en éliminant toutes les situations interdites susceptibles de nuire au système. Les contrôleurs calculés sont traduits en places temporisées et marquées, connus sous le nom de moniteurs liés au modèle GET initial (Figure 2.8). Ces places assument la fonction de superviseurs, prévenant ainsi toute infraction aux contraintes. La Figure 2.9 présente le graphe d'accessibilité du GET contrôlé qui montre la satisfaction des contraintes de marquage. Les contrôles de rétroaction calculés garantissant que ces derniers sont satisfaites dans un GET avec des transitions de perturbations et démontrent l'utilité de cette approche.

## 2.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit de nouvelles méthodes algébriques efficaces pour résoudre les problèmes de contrôle des systèmes de désassemblage soumis à des contraintes de capacité. Mais d'abord, nous avons défini le problème de ce type de spécification et nous avons montré sa traduction mathématique par des équations et des inéquations linéaires dans l'algèbre Min-Plus. Ces systèmes ont été modélisés par des GETs avec un ensemble de transitions d'entrée incontrôlables. Nous avons étudié le problème de commande des GETs sous contraintes imposées sur des places indépendantes, puis des contraintes imposées sur des places dépendantes (chemins) d'un GET perturbés. Dans un premier temps, nous avons considéré le cas des GETs perturbés totalement observables, puis nous avons élargi notre approche pour les graphes partiellement observables et contrôlables. Nous avons démontré que si chaque boucle du GET considéré contient au moins une transition observable, nous pouvons dériver une loi de commande réalisable satisfaisant un ensemble de contraintes. Des conditions suffisantes pour l'existence de lois de commande garantissant le respect de ces contraintes sont introduites. Les contrôleurs calculés sont des feedbacks de rétroaction qui peuvent être représentés par des

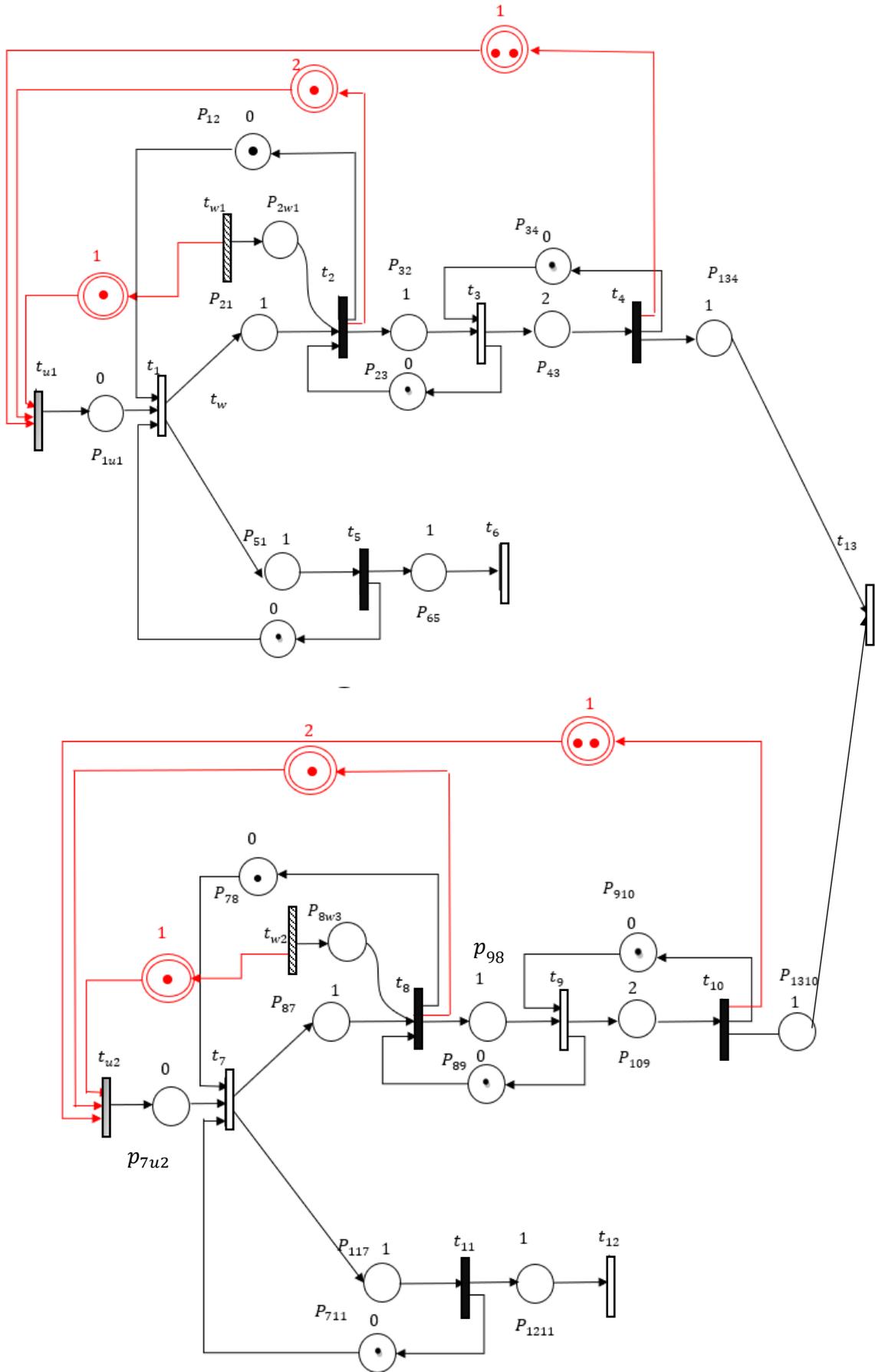


Figure 2. 8. Modèle de système de désassemblage avec des places de contrôle



---

## Chapitre 3

### Conception des lois de commande des GETs

#### partiellement commandables sous

#### contraintes de marquage généralisées :

### Application à un processus de désassemblage

---

3.1. Introduction .....	69
3.2. Problématique : Contraintes de marquage généralisées .....	70
3.3. Méthodologie formelle pour synthétiser des lois de commande qui satisfont des CMGs soumis à des GETs partiellement contrôlables .....	73
3.3.1. GET avec une seule transition d'entrée .....	73
3.3.2. Commande multivariables .....	80
3.3.3. Algorithme de contrôle des GETs perturbés et totalement observables .....	82
3.3.4. Étude de cas : un exemple illustratif .....	84
3.4. Conception de contrôle pour le respect de CMGs dans des GETs partiellement observables et contrôlables .....	86
3.4.1. GET avec une seule transition d'entrée .....	86
3.4.2. GETs à entrées multiples .....	90
3.4.3. Algorithme de contrôle des GETs partiellement contrôlables et observables .....	92
3.5. Application à un processus de désassemblage .....	93
3.6. Conclusion .....	97

---

### 3.1. Introduction

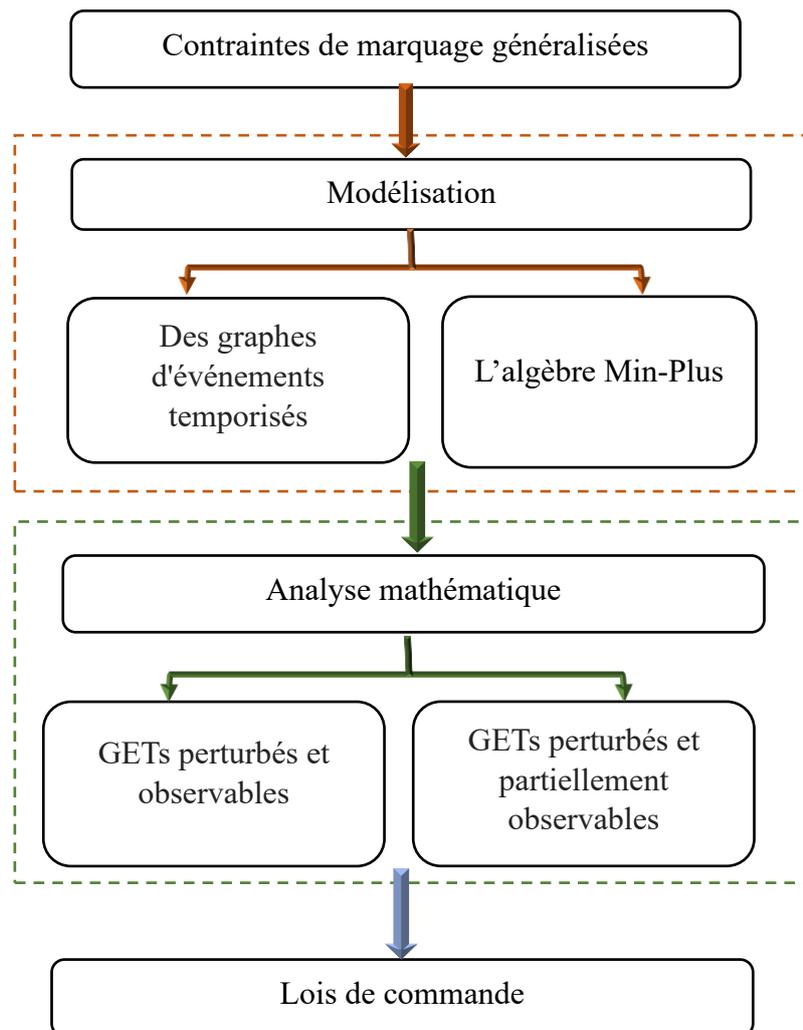
Dans le chapitre précédent, nous avons abordé le problème de GET qui comprennent des transitions d'entrée perturbées et qui sont soumis à des contraintes de capacité à certaines places dépendants ou indépendants. Cependant, les méthodes précédentes abordaient le problème des contraintes de marquage sans prendre en compte le coefficient de pondération associé aux marquages des places du GETs avec des transitions perturbées. Dans ce chapitre, nous abordons le problème des Contraintes de Marquage Généralisées (CMGs), dans lesquelles le problème est défini en attribuant des coefficients de pondération aux marquages de place qui doivent être respectés pour que ces contraintes soient satisfaites. Cette pondération élargit raisonnablement le champ d'application des méthodes de contrôle éprouvées. Ces coefficients peuvent présenter le nombre des tâches effectuées par une machine, le nombre des composantes transportées ou le robot multitâche.

Dans ce contexte, quelques études ont abordé la question du contrôle des CMGs: Atli et al. [2012] ont abordé le problème de marquage des contraintes d'exclusion en créant un contrôle de supervision des graphes marqués en temps et en place. D'autre part, Rajah et al. [2023a] ont proposé une méthode basée sur l'utilisation de l'algèbre Min-Plus et qui vise à synthétiser des superviseurs qui garantissent le respect des CMGs soumis à des GETs totalement contrôlables.

L'objectif de ce travail est de proposer une approche algébrique pour la synthèse des contrôleurs tout en assurant ces contraintes spécifiées par des inégalités pondérées dans l'algèbre Min-Plus. Cette étude étend l'hypothèse d'observabilité et propose une nouvelle technique de contrôle pour les GETs partiellement observables avec certaines transitions d'entrées perturbées soumis à des CMGs. On se propose de synthétiser des feedbacks réalisables qui satisfont les contraintes imposées sur des places des GETs et de traduire ses formulations uniquement avec des transitions observables. Des conditions suffisantes pour l'existence de lois de commande sont établies en fonction du marquage initial de ces graphes et des paramètres des spécifications à satisfaire. Cette méthode analytique n'est pas confrontée à l'explosion des états, contrairement aux approches qui utilisent des automates temporisés ou d'autres outils graphiques. Diverses techniques utilisent des modèles dioïdes sont formelles et peuvent traiter des applications complexes.

Le reste de ce chapitre est structuré comme suit. On commence par discuter le problème des CMGs de la manière dont il a été converti en une algèbre Min-Plus. Ensuite, nous allons

décrire et détailler la stratégie récemment proposée pour les GETs incontrôlables (Figure 3.1). Dans ce qui suit, nous allons généraliser cette approche pour synthétiser des contrôleurs pour les graphes partiellement observables et contrôlables. Enfin, pour illustrer ces méthodes théoriques, une étude de cas d'un système de désassemblage est suggérée pour évaluer l'approche proposée.



**Figure 3. 1.** Structure générale de l'approche proposée dans le chapitre 3

### 3.2. Problématique : Contraintes de marquage généralisées

Une CMG est une contrainte linéaire de marquage qui limite la somme pondérée des jetons dans un sous-ensemble de places d'un réseau de Petri. Dans ce travail, nous définissons les CMGs comme une condition qui limite la somme pondérée des jetons stockés dans un sous-ensemble de places dépendantes. C'est un ensemble d'inégalités linéaires générées par des coefficients associés à des marquages de places. Ces coefficients peuvent présenter le nombre

de composants à livrer ou le nombre d'opérations demandées à la machine. L'objectif de cette étude est de concevoir une nouvelle méthode algébrique pour synthétiser un contrôleur à retour d'état pour une sous-classe de RPT représentés par des GETs avec des transitions incontrôlables soumises à des CMGs. Dans cette partie, nous désignons par  $\alpha_z$  le chemin reliant la transition de contrôle  $t_u$  à la transition amont  $t_j^z$  des places  $p_{ij}^z$ . Les termes  $m_\alpha^z$  et  $\tau_\alpha^z$  définissent respectivement le marquage initial et la temporisation du chemin  $\alpha_z$ . Nous définissons par  $\rho$  le chemin sous contrainte reliant  $t_j^z$  à  $t_i^z$  qui représentent respectivement les transitions en amont et en aval de ce chemin. On note par  $Z$  le nombre de places dans  $\rho$ , et par  $\tau_\rho$  le temps de ce chemin, et  $M_\rho$  désigne le nombre des jetons cumulés. D'après l'étude de Ma et al. [2016], on peut exprimer les CMGs comme suit :

$$\sum_{z=1}^Z v^z \times M_{ij}^z(t) \leq b \quad (3.1)$$

où  $v^z$  est le coefficient correspondant au marquage du place  $p_{ij}^z$  dans  $\rho$ . Le terme  $b$  est un nombre entier qui présente la somme pondérée des jetons qui ne peuvent être dépassés dans le chemin  $\rho$ . Nous désignons par  $M_{ij}^z(t)$  et  $M_{0ij}^z$  respectivement le marquage et le marquage initial de la place  $p_{ij}^z$ . Ensuite,  $M_{ij}^z(t)$  peut être représenté comme suit :

$$M_{ij}^z(t) = x_j^z(t) - x_i^z(t) + M_{0ij}^z \quad (3.2)$$

Pour mieux comprendre le problème des CMGs, nous proposons un exemple de GET présenté dans la Figure 3.2. Ce graphe est soumis à une CMG imposée sur le chemin  $\rho$  (de  $t_j^1$  à  $t_i^3$ ). Cette contrainte est définie comme suit :

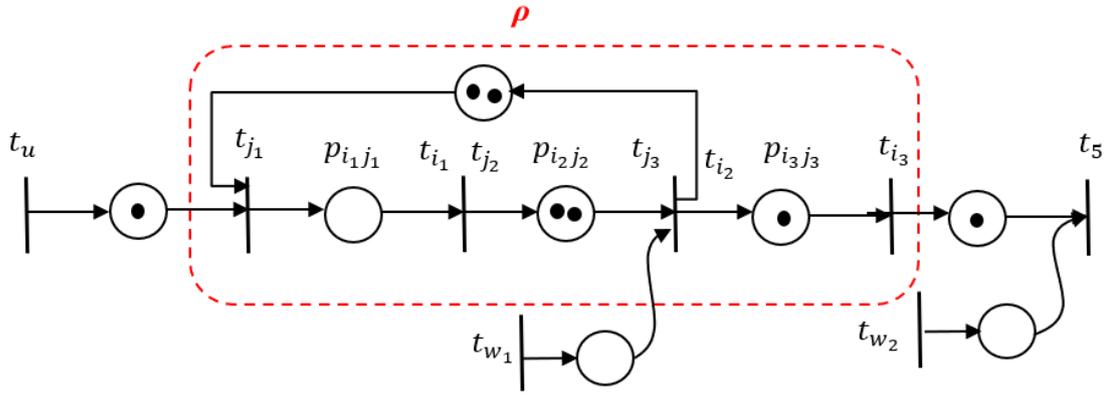
$$v^1 \times M_{ij}^1(t) + v^2 \times M_{ij}^2(t) + v^3 \times M_{ij}^3(t) \leq b \quad (3.3)$$

Selon la définition de la fonction compteur, l'inégalité (3.3) peut être exprimée comme suit :

$$v^1 \times (x_j^1(t) - x_i^1(t) + M_{0ij}^1) + v^2 \times (x_j^2(t) - x_i^2(t) + M_{0ij}^2) + v^3 \times (x_j^3(t) - x_i^3(t) + M_{0ij}^3) \leq b \quad (3.4)$$

Dans cet exemple, nous avons :  $M_{0ij}^1 = 0$ ,  $M_{0ij}^2 = 2$  et  $M_{0ij}^3 = 1$ , ce qui conduit à :

$$v^1 \times (x_j^1(t) - x_i^1(t) + 0) + v^2 \times (x_j^2(t) - x_i^2(t) + 2) + v^3 \times (x_j^3(t) - x_i^3(t) + 1) \leq b$$



**Figure 3. 2.** Un exemple de GET avec des transitions incontrôlables

Nous constatons que  $\forall z \in [1, Z]: x_j^z(t) = x_i^{z-1}(t)$ , donc :

$$v^1 \times (x_j^1(t) - x_j^2(t)) + v^2 \times (x_j^2(t) - x_j^3(t) + 2) + v^3 \times (x_j^3(t) - x_i^3(t) + 1) \leq b$$

Pour simplifier l'expression précédente, on rassemble les éléments identiques ce qui donne :

$$v^1 \times x_j^1(t) + (2 \times v^2 + 1 \times v^3) + (v^2 - v^1) \times x_j^2(t) + (v^3 - v^2) \times x_j^3(t) - v^3 \times x_i^3(t) \leq b \quad (3.5)$$

Puisque  $M_{0ij_z}$  représente le marquage initial de chaque place  $p_{ij_z}$ , nous pouvons écrire (3.5) comme suit :

$$v^1 \times x_j^1(t) + (v^1 \times M_{0ij}^1 + v^2 \times M_{0ij}^2 + v^3 \times M_{0ij}^3) + \sum_{z=2}^3 (v^z - v^{z-1}) \times x_j^z(t) - v^3 \times x_i^3(t) \leq b$$

Afin de rassembler les éléments et de simplifier l'expression, nous remplaçons le deuxième terme  $(v^1 \times M_{0ij}^1 + v^2 \times M_{0ij}^2 + v^3 \times M_{0ij}^3)$  de l'inégalité ci-dessus par une somme allant de 1 à 3, ce qui donne :

$$v^1 \times x_j^1(t) + \sum_{z=1}^3 v^z \times M_{0ij}^z + \sum_{z=2}^3 (v^z - v^{z-1}) \times x_j^z(t) - v^3 \times x_i^3(t) \leq b$$

Cette inégalité traite le cas d'un chemin limité présenté dans la Figure 3.2. Pour généraliser ce cas particulier au cas où le chemin sous contrainte à  $Z$  places ( $Z \neq 0$ ), on obtient la formule suivante :

$$v^1 \times x_j^1(t) + \sum_{z=1}^Z v^z \times M_{0ij}^z + \sum_{z=2}^Z (v^z - v^{z-1}) \times x_j^z(t) - v^Z \times x_i^Z(t) \leq b \quad (3.6)$$

où  $x_j^1(t)$  et  $x_i^Z(t)$  représentent respectivement le compteur associé à la première transition

(d'entrée de  $\rho$ ) et à la dernière transition (de sortie de  $\rho$ ) du chemin sous contraintes. Ensuite, nous déplaçons les termes  $(v^Z)$  et  $(v^Z \times x_i^Z(t))$  de l'inéquation précédente au côté opposé pour obtenir :

$$v^1 \times x_j^1(t) + \sum_{z=2}^Z (v^z - v^{z-1}) \times x_j^z(t) \leq (b - \sum_{z=1}^Z v^z \times M_{0ij}^z) + v^Z \times x_i^Z(t) \quad (3.7)$$

On note que  $M_{\rho_0} = \sum_{z=1}^Z v^z \times M_{0ij}^z$  est le marquage initial du chemin contraint  $\rho$ . L'inéquation (3.5) est donc représentée par :

$$v^1 \times x_j^1(t) + \sum_{z=2}^Z (v^z - v^{z-1}) \times x_j^z(t) \leq (b - M_{\rho_0}) + v^Z \times x_i^Z(t) \quad (3.8)$$

En utilisant l'algèbre Min-Plus, l'inégalité (3.8) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(x_j^1(t))^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes (x_i^Z(t))^{\otimes v^Z} \quad (3.9)$$

### 3.3. Méthodologie formelle pour synthétiser des lois de commande qui satisfaire des CMGs soumis à des GETs partiellement contrôlables

Dans cette section, nous présentons une nouvelle technique pour résoudre le problème de contrôle des GETs soumis à des CMGs. Comme indiqué précédemment, notre objectif est de synthétiser des contrôleurs qui assurent le respect de ces contraintes. Dans cette approche, seules les transitions d'entrée  $t_u$  sont considérées comme contrôlées, ce qui en fait des transitions instantanément franchissables. De plus, nous supposons que toutes les transitions sont observables.

#### 3.3.1. GET avec une seule transition d'entrée

L'objectif de cette partie est de développer une stratégie de contrôle algébrique pour les GETs perturbés à une seule entrée. Nous commençons à traiter le cas d'une seule contrainte, ensuite nous nous étendons à plusieurs spécifications.

##### 3.3.1.1. Une contrainte de marquage généralisée

Dans cette partie, nous traitons le problème d'une seule CMG imposée à un ensemble de places dépendants  $p_{ij}^z$  appartenant au même chemin pondéré spécifié dans les GETs avec des transitions d'entrée perturbées. Cette contrainte est présentée par l'inégalité (3.1). Si on considère l'équation (1.5) avec  $(\phi = \tau)$ ,  $x_i^z(t)$  peut être représenté comme suit :

$$x_i^z(t) = [\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi)] \oplus [\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_{i_z} \otimes u(t - k)] \oplus [\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{i_z} \otimes w(t - g)] \quad (3.10)$$

La notation  $n$  désigne le nombre de transitions internes du graphe et  $A_{i_z r}^\phi$  décrit la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A^\phi$ . Le terme  $Q$  correspond aux marquages initiaux des perturbations existantes qui peuvent affecter le fonctionnement du système. Dans la suite, nous supposons qu'il existe au moins un chemin élémentaire  $\alpha_z$  reliant la transition de contrôle  $t_u$  à la transition  $t_j^z$ . Nous avons donc:

$$x_j^1(t) \leq (A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1) \quad (3.11)$$

Alors,  $x_j^z(t)$  peut être exprimé par l'inégalité suivante :

$$x_j^z(t) \leq (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z) \quad (3.12)$$

Sachant que  $u(t)$  est une fonction croissante, c'est-à-dire,  $u(t) \geq u(t - 1) \geq \dots \geq u(t - n)$ , nous pouvons conclure que  $\forall z \in [1, Z]$ :

$$u(t - \tau_\alpha^z) \leq u(t - \tau_\alpha^{z-1}) \leq u(t - \tau_\alpha^{z-2}) \leq \dots \leq u(t - \tau_\alpha^1)$$

Le terme  $\tau_\alpha^1$  représente la temporisation de ce chemin, reliant la transition d'entrée  $t_u$  à la transition  $t_j^1$  du chemin sous contraintes  $\rho$ . Nous désignons par  $\tau_\alpha^z$  la temporisation du chemin reliant la transition d'entrée  $t_u$  à la transition  $t_j^z$  avec  $(\tau_\alpha^z \geq \tau_\alpha^1)$ . Nous avons alors  $u(t - \tau_\alpha^z) \leq u(t - \tau_\alpha^1)$  ce qui permet d'obtenir :

$$x_j^z(t) \leq (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^1) \quad (3.13)$$

**Théorème 14.** La loi de commande est présentée par l'expression suivante :

$$u(t) = \oplus_{r=1}^n F_r \otimes x_r(t - 1) \oplus \oplus_{h=1}^H F_h \otimes w_h(t - 1) \quad (3.14)$$

avec

$$F_r = \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^\phi \quad (3.15)$$

$$F_h = \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes (A^g \otimes Q)_{i_z h} \quad (3.16)$$

Notant que  $\lfloor y \rfloor$  représente le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $y$ .

En supposant que  $(\phi = \tau_\alpha^1 + 1)$ , le contrôleur calculé assure que la contrainte (3.1) est satisfaite si les deux conditions suivantes sont respectées :

$$((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_z})^{\otimes v^z} \quad (3.17)$$

pour  $k = 0, \dots, \tau_\alpha^1$

$$F_r, F_h \geq 0 \quad (3.18)$$

**Démonstration.** On se propose de traiter le cas d'un GET partiellement contrôlable et soumis à une CMG de la forme (3.9). Nous remplaçons la fonction compteur  $x_i^z(t)$  dans l'inégalité précédente par sa formulation présentée dans l'équation (3.10) si nous prenons ( $z=Z$ ). En conséquence, nous obtenons:

$$(x_j^1(t))^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes [(\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi)) \oplus (\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_{i_z} \otimes u(t - k)) \oplus \oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g)]^{\otimes v^z} \quad (3.19)$$

Il suffit de montrer que (3.19) est identique au système d'inéquation (3.20), (3.21), et (3.22). En d'autres termes, il est évident que si le minimum des trois termes est supérieur ou égal à une valeur, alors chacun d'entre eux est également supérieur ou égal à cette valeur :

$$(x_j^1(t))^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi))^{\otimes v^z} \quad (3.20)$$

$$(x_j^1(t))^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes (\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_{i_z} \otimes u(t - k))^{\otimes v^z} \quad (3.21)$$

$$(x_j^1(t))^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes (\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g))^{\otimes v^z} \quad (3.22)$$

La validation de l'inégalité (3.17) implique le respect simultané des trois critères (3.20), (3.21) et (3.22). En supposant que la fonction compteur  $x_j^1(t)$  (de la forme (3.1)) est corrélée

avec la transition d'entrée du chemin limité  $t_{j_1}$ , la formulation suivante peut être multipliée par  $v_1$  (puissance dans l'algèbre Min-Plus). On obtient ainsi :

$$(x_j^1(t))^{\otimes v_1} \leq ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v_1} \quad (3.23)$$

L'étape suivante consiste à multiplier l'inégalité (3.13) qui présente la fonction compteur  $x_j^z(t)$  associée à la transition d'entrée  $t_j^z$  de la place  $p_{ij}^z$  appartenant au chemin  $\rho$  par  $(v^z - v^{z-1})$ , ce qui donne :

$$\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})} \leq \otimes_{z=2}^Z [((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \quad (3.24)$$

On constate que  $v^z$  est toujours supérieur ou égal à 1,  $\forall z \in [1, Z]$ .

Sachant que  $x_j^z(t) \geq 0$ , on peut ajouter (3.23) et (3.24) (qui présentent la multiplication en algèbre Min-Plus) pour obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (x_j^1(t))^{\otimes v_1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] &\leq ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v_1} \otimes \\ &[\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dans la suite, nous substituons le terme  $(x_j^1(t))^{\otimes v_1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}]$  dans les formules (3.20), et (3.22) par l'inégalité (3.25) qui donne :

$$\begin{aligned} ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v_1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] &\leq \\ (b - M_{\rho_0}) \otimes (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v_1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] &\leq \\ (b - M_{\rho_0}) \otimes (\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.27)$$

En conséquence, la loi de commande est définie par l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v_1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] &\leq (b - M_{\rho_0}) \otimes \\ (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi))^{\otimes v^z} \oplus (\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.28)$$

En substituant le terme  $((x_j^1(t))^{\otimes v_1} \otimes (\otimes_{z=2}^Z (x_j^z(t))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}))$  dans l'inéquation (3.21) par son expression (3.25), nous obtenons les conditions suffisantes qui vérifient l'existence des contrôleurs comme suit :

$$\begin{aligned} & ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes u(t - \tau_\alpha^z))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq \\ & (b - M_{\rho_0}) \otimes (\oplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k \otimes B)_{i_z} \otimes u(t - k))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dans l'étape suivante, nous simplifions (3.26) et (3.27) en calculant la somme de  $u(t - \tau_\alpha^1)^{\otimes v^1}$  et  $u(t - \tau_\alpha^1)^{\otimes (v^z - v^{z-1})}$ , comme suit :

$$\begin{aligned} & (u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes [v^1 \otimes (\otimes_{z=2}^Z (v^z - v^{z-1}))]} \leq [b - M_{\rho_0} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} - \otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \otimes \\ & (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} & (u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes [v^1 \otimes (\otimes_{z=2}^Z (v^z - v^{z-1}))]} \leq [b - M_{\rho_0} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} - \otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \otimes \\ & (\oplus_{g=0}^{\phi-1} (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ensuite, nous calculons l'élément  $(u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes [v^1 \otimes (\otimes_{z=2}^Z (v^z - v^{z-1}))]}$  qui donne :

$$\begin{aligned} & (u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v^z} \leq [b - M_{\rho_0} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} - \otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \otimes \\ & (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & (u(t - \tau_\alpha^1))^{\otimes v^z} \leq [b - M_{\rho_0} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} - \otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \otimes \\ & (\oplus_{h=0}^H (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g))^{\otimes v^z} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Comme  $x_r(t)$  et  $w_h(t)$  sont multipliés par une constante ( $v^z$ ), la linéarité en algèbre classique n'est pas possible. Néanmoins, nous pouvons simplifier cette expression en la multipliant par  $(\frac{1}{v^z})$  pour obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned} & u(t - \tau_\alpha^1) \leq \left[ b \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0} \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes_{v^z}^{\frac{v_1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes_{v^z}^{\frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes \\ & (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t - \phi)) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & u(t - \tau_\alpha^1) \leq \left[ b \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0} \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1} \otimes_{v^z}^{\frac{v_1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z} \otimes_{v^z}^{\frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes \\ & (\oplus_{h=0}^H (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t - g)) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Comme nous recherchons une loi de commande sous la forme  $u(t) = F_r \otimes x(t - 1) \oplus F_h \otimes w(t - 1)$ , et sur la base de l'expression (3.29), la condition devient la suivante:

$$((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} \otimes [\otimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_z})^{\otimes v^z} \quad (3.36)$$

La loi de commande est alors donnée par les formules (3.34) et (3.35), ce qui se traduit par (3.37):

$$u(t) \leq \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1}^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes (\oplus_{r=1}^n A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t-1)) \oplus (\oplus_{h=0}^H (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t-1)) \quad (3.37)$$

Cela garantit la satisfaction de la contrainte (3.9) si les conditions suivantes sont respectées :

$$\left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1}^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^\phi \geq 0$$

$$\left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1}^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes (A^g \otimes Q)_{i_z h} \geq 0$$

### 3.3.1.2. Plusieurs contraintes de marquage généralisée

Dans cette partie, nous considérons un GET avec des transitions incontrôlables qui est soumis à un certain nombre de contraintes et qui a une seule transition de contrôle  $t_u$ . On désigne par  $S$ , le nombre de restrictions imposées à plusieurs chemins  $\rho_s$ , où  $s=1\dots S$ . De même, les transitions d'entrée et de sortie de  $\rho_s$  sont respectivement désignées par  $t_j^{z_s}$  et  $t_i^{z_s}$ . Les compteurs corrélatifs sont décrits par  $x_j^{z_s}(t)$  et  $x_i^{z_s}(t)$ , et la temporisation du chemin reliant  $t_u$  à  $t_j^{z_s}$  est donnée par  $\tau_\alpha^{z_s}$ . Le nombre prévu de jetons dans le chemin  $\rho_s$  est représenté par  $b_s$ . Le terme  $M_{ij}^{z_s}(t)$  représente le marquage de chaque chemin  $\rho_s$ . Compte tenu de ce qui précède, les CMGs dans ce cas sont exprimés par :

$$\sum_{z=1}^{Z_s} (v^{z_s} \times M_{ij}^{z_s}(t)) \leq b_s$$

Dans l'algèbre Min-Plus, cette contrainte peut être exprimée par l'inégalité suivante :

$$\otimes_{z=1}^{Z_s} v^{z_s} \otimes \otimes_{z=1}^{Z_s} M_{ij}^{z_s}(t) \leq b_s \quad (3.38)$$

En se basant sur l'expression (3.36), la CMG est donnée dans ce qui suit :

$$(A^{\tau_{\alpha}^{1s}} \otimes B)_{j_{1s}})^{\otimes v^{1s}} \otimes \otimes_{z_s=2}^{Z_s} ((A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}})^{\otimes (v^{z_s} - v^{z_s-1})} \otimes (u(t - \tau_{\alpha}^{1s}))^{\otimes v^{z_s}} \leq (b_s - M_{\rho_0}^s) \otimes (\oplus_{k=0}^{\phi-1} A^k \otimes B)_{i_{z_s}} \quad (3.39)$$

**Théorème 15.** Un GET avec des transitions incontrôlables soumis à des contraintes de la forme (3.38) admet une loi de commande causales décrite par :

$$u(t) = \oplus_{s=1}^S u_s(t) \quad (3.40)$$

$$\text{où} \quad u_s(t) \leq \oplus_{r=1}^n F_{r_s} \otimes x_r(t-1) \oplus \oplus_{h=1}^H F_{h_s} \otimes w_h(t-1) \quad (3.41)$$

$$\text{et} \quad F_r = \left[ b_s^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha_1}} \otimes B)_{j_{1s}})^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}}^{\otimes \frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_s} \quad (3.42)$$

$$F_h = \left[ b_s^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha_1}} \otimes B)_{j_{1s}})^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}}^{\otimes \frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes (A^{g_s} \otimes Q)_{i_{z_s} h} \quad (3.43)$$

si les critères d'existence suivantes sont satisfaits :

$$((A^{\tau_{\alpha}^{1s}} \otimes B)_{j_{1s}})^{\otimes v^{1s}} \otimes [\otimes_{z=2}^{Z_s} ((A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}})^{\otimes (v^{z_s} - v^{z_s-1})}] \leq (b_s - M_{\rho_{s_0}}) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_{z_s}})^{\otimes v^{z_s}} \quad \text{pour } (k = 0, \dots, \tau_{\alpha}^1) \quad (3.44)$$

$$F_{r_s}, F_{h_s} \geq 0 \quad (3.45)$$

### Démonstration.

En se référant au Théorème 14, si les conditions (3.17) et (3.18) sont satisfaites pour chaque indice ( $t_j^{z_s}$  et  $t_i^{z_s}$ ) de la  $S^{\text{ème}}$  contraintes. Ce contrôleur peut être réécrit comme suit:

$$u_s(t) \leq \oplus_{r=1}^n \left[ b_s^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_{s_0}}^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha_1}} \otimes B)_{j_{1s}})^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}}^{\otimes \frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_s} \otimes x_r(t-1)$$

□

### 3.3.2. Commande multivariables

Nous généralisons maintenant l'approche précédente en considérant des GETs à plusieurs entrées. Comme dans le cas de graphe monovariante, nous commençons par le cas d'une seule spécification, puis nous l'étendons à plusieurs contraintes.

#### 3.3.2.1. Une contrainte de marquage généralisée

Dans ce cas, nous considérons des GETs partiellement contrôlables soumis à une contrainte de marquage et avec  $\bar{n}$  transitions de contrôle. Nous corrélons un compteur créé par  $u_e(t)$ , où  $e=1\dots\bar{n}$ , avec chaque transition source. L'équation d'état du système est décrite dans l'équation (1.4).

**Théorème 16.** Soit un GET avec des transitions incontrôlables et  $\bar{n}$  transitions d'entrée et soumis à une CMG de la forme (3.1), la loi de commande est donnée par la formulation suivante:

$$u_c(t) = \begin{cases} \bigoplus_{r=1}^n F_{rc} \otimes x_r(t-1) \oplus \bigoplus_{h=1}^H F_{hc} \otimes w_h(t-1) & \text{if } e = c \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.46)$$

où

$$F_{rc} = \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_{\alpha}^{1c}} \otimes B)_{j_{1c}}^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_{\alpha}^{zc}} \otimes B)_{j_{zc}}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_c} \quad (3.47)$$

$$F_{hc} = \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - (A^{\tau_{\alpha}^{1c}} \otimes B)_{j_{1c}}^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_{\alpha}^{zc}} \otimes B)_{j_{zc}}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes (A^{g_c} \otimes Q)_{i_z c h} \quad (3.48)$$

La contrainte (3.1) est satisfaite si les conditions suivantes sont respectées :

$$((A^{\tau_{\alpha}^{1c}} \otimes B)_{j_{1c}})^{\otimes v^1} \otimes [\bigotimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_{\alpha}^{zc}} \otimes B)_{j_{zc}})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_z})^{\otimes v^z} \quad (3.49)$$

$$\text{et} \quad F_{rc}, F_{hc} \geq 0 \quad (3.50)$$

Dans le cas où  $e \neq c$ ,  $u_c(t) = \varepsilon$ .

**Démonstration.** La démarche de calcul des lois de commande  $u_c(t)$ , est similaire à celle décrite dans la démonstration du Théorème 14, nous avons juste substitué (3.29), (3.32) et (3.33) par les inégalités suivantes :

$$\bigoplus_{e=1}^{\mu} ((A^{\tau_{\alpha}^{1e}} \otimes B)_{j_{1e}} \otimes u_e(t - A^{\tau_{\alpha}^{1e}}))^{\otimes v^1} \otimes [\bigotimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_{\alpha}^{ze}} \otimes B)_{j_{ze}} \otimes u_e(t - \tau_{\alpha}^{ze}))^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes (\bigoplus_{k=0}^{\phi_e - 1} (A^k \otimes B)_{i_{ze}} \otimes u_e(t - k))^{\otimes v^z} \quad (3.51)$$

$$\bigoplus_{r=1}^n [\bigoplus_{e=1}^{\mu} (u_e(t - \tau_{\alpha}^{1e}))^{\otimes v^z} \leq (b - M_{\rho_0} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1e}} \otimes B)_{j_{1e}})^{\otimes v^1} - \bigotimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_{\alpha}^{ze}} \otimes B)_{j_{ze}})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}) \otimes (A_{i_{zr}}^{\phi_e} \otimes x_r(t - \phi))^{\otimes v^z}] \quad (3.52)$$

$$\bigoplus_{r=1}^n [\bigoplus_{e=1}^{\mu} (u_e(t - \tau_{\alpha}^{1e}))^{\otimes v^z} \leq (b - M_{\rho_0} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1e}} \otimes B)_{j_{1e}})^{\otimes v^1} - \bigotimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_{\alpha}^{ze}} \otimes B)_{j_{ze}})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}) \otimes (\bigoplus_{h=0}^H (A^{g_e} \otimes Q)_{i_{zh}} \otimes w_h(t - g))^{\otimes v^z}] \quad (3.53)$$

Nous définissons  $\phi_c$  comme une fonction de  $\tau_{\alpha}^{1c}$  afin de respecter la contrainte donnée par l'inéquation (3.1). Pour cela, on suppose qu'il existe un chemin désigné par  $\alpha^{zc}$  reliant la transition de contrôle  $t_{u_c}$  à la transition d'entrée  $t_j^{zc}$  du chemin. Considérant  $\phi_c = \tau_{\alpha}^{1c} + 1$  et se référant aux inégalités (3.52) et (3.53), nous obtenons la formule suivante :

$$u_c(t) \leq \bigoplus_{r=1}^n \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{1c}} \otimes B)_{j_{1c}} \right)^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_{\alpha}^{zc}} \otimes B)_{j_{zc}}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_{zr}}^{\phi_c} \otimes x_r(t - 1) \oplus (A^{g_c} \otimes Q)_{i_{zh}} \otimes w_h(t - 1) \quad (3.54)$$

□

### 3.3.2.2. Plusieurs contraintes de marquage généralisées

Nous généralisons maintenant l'approche précédente en considérant un GET composé de  $\bar{n}$  contrôles et soumis à  $S$  CMGs.

**Théorème 17.** Étant donné un GET avec de multiples transitions d'entrées soumises à  $S$  contraintes de la forme (3.38). Le feedback est donné par ce qui suit :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_{c_s}(t) \quad (3.55)$$

$$\text{avec} \quad u_{c_s}(t) \leq \bigoplus_{r=1}^n F_{rc_s} \otimes x_r(t - 1) \oplus \bigoplus_{h=1}^H F_{hc_s} \otimes w_h(t - 1) \quad (3.56)$$

$$F_{rc_s} = \left[ b_s \otimes \frac{1}{v^{z_s}} - M_{\rho_{s_0}} \otimes \frac{1}{v^{z_s}} - ((A^{\tau_\alpha^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s}) \otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}} - \otimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_\alpha^{z_s}} \otimes B)_{j_z c_s} \otimes \frac{v^{z_s} - v^{z_s - 1}}{v^{z_s}} \right] \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_{c_s}} \quad (3.57)$$

$$F_{hc_s} = \left[ b_s \otimes \frac{1}{v^{z_s}} - M_{\rho_{s_0}} \otimes \frac{1}{v^{z_s}} - ((A^{\tau_\alpha^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s}) \otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}} - \otimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_\alpha^{z_s}} \otimes B)_{j_z c_s} \otimes \frac{v^{z_s} - v^{z_s - 1}}{v^{z_s}} \right] \otimes (A^{g_{c_s}} \otimes Q)_{i_{z_s} h} \quad (3.58)$$

Ces conditions doivent être vérifiées pour admettre l'existence de ce contrôleur :

$$\begin{aligned} & [((A^{\tau_\alpha^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s}) \otimes v^{1s} \otimes [\otimes_{z=2}^{z_s} ((A^{\tau_\alpha^{z_s}} \otimes B)_{j_z c_s}) \otimes (v^{z_s} - v^{z_s - 1})] \leq (b_s - M_{\rho_{s_0}}) \otimes \\ & ((A^k \otimes B)_{i_{z_s} c_s}) \otimes v^{z_s} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$F_{rc_s}, F_{hc_s} \geq 0 \quad (3.60)$$

**Démonstration.** En examinant les conditions (3.59) et (3.60), on peut conclure que, si l'on choisit  $(\phi_{c_s} = \tau_\alpha^{1c_s} + 1)$ , il existe sans doute une loi de commande  $u_{c_s}(t)$  de la forme (3.55). □

### 3.3.3. Algorithme de contrôle des GETs perturbés et totalement observables

La conception des lois de commande prévue dans le Théorème 17 peut être reprise dans une procédure algorithmique (Algorithme 4). Elle requiert comme entrée le système d'équations d'état (matrices  $A$ ,  $B$  et  $Q$ ), les transitions d'entrées et de sorties des chemins sous contraintes  $(i_s, j_s)$ , son nombre de jetons initiaux  $M_{0\rho}$ , le nombre de places sous contraintes ( $S$ ), et le nombre de transitions perturbées  $H$  dans le chemin sous contraintes. Ensuite, si les conditions suffisantes sont vérifiées, nous calculons la loi de commande qui garantit les contraintes de marquage imposées sur les GETs, et échec dans le cas contraire. Ce script n'est utilisé que lorsque ces graphes perturbés sont appliqués à de nombreuses contraintes. Les étapes de l'algorithme sont les mêmes pour une seule contrainte, nous considérons simplement le scénario pour  $s=1$  seulement. Cet algorithme peut être introduit comme suit :

**Algorithme 4: Contrôle des GETs partiellement contrôlables soumis à des CMGs multiples**

---

Entrée :  $\mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{A}, i, j, s, \mathbf{Q}, \tau_{\alpha_s}, \rho, \rho_0, \mathbf{E}$

Sortie: ( $\mathbf{u}$ )

**% Initialisation**

$$\phi_{c_s} := \tau_{\alpha}^{z_{c_s}} + 1$$

Pour  $s \in [1 \dots S]$  faire **% Indice et nombre des places sous contraintes**

Pour  $h \in [1 \dots H]$  faire **% Indice et le nombre de transitions perturbées**

Pour  $z \in [1 \dots Z]$  faire **% Indice et nombre des places dans le chemin sous contraintes**

Pour  $k_s \in [1 \dots \tau_{\alpha}^{z_{c_s}}]$  faire **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_{c_s}$**

Pour  $g_{l_s} \in [1 \dots \tau_{\alpha}^{z_{c_s}}]$  faire **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_{c_s}$**

Pour  $c \in [1 \dots E]$  faire **% Indice et nombre des GETs**

**% Tests des conditions suffisantes**

$$\text{Si } \left[ ((A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s})^{\otimes v^{1s}} \otimes \left[ \otimes_{z=2}^{Z_s} ((A^{\tau_{\alpha}^{z_{c_s}}} \otimes B)_{j_z c_s})^{\otimes (v^{zs} - v^{zs-1})} \right] \leq (\mathbf{b}_s - \mathbf{M}_{\rho_{s0}}) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_z c_s})^{\otimes v^{zs}} \right.$$

$$\left. \text{Si } \left[ \mathbf{b}_s^{\otimes \frac{1}{v^{zs}}} - \mathbf{M}_{\rho_{s0}}^{\otimes \frac{1}{v^{zs}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s})^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{zs}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_{c_s}}} \otimes B)_{j_z c_s}^{\otimes \frac{v^{zs} - v^{zs-1}}{v^{zs}}} \right] \otimes A_{i_z s r}^{\phi_{c_s}} \right.$$

$$\left. \text{Si } \left[ \mathbf{b}_s^{\otimes \frac{1}{v^{zs}}} - \mathbf{M}_{\rho_{s0}}^{\otimes \frac{1}{v^{zs}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s})^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{zs}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_{c_s}}} \otimes B)_{j_z c_s}^{\otimes \frac{v^{zs} - v^{zs-1}}{v^{zs}}} \right] \otimes (A^{g_{c_s}} \otimes \mathbf{Q})_{i_z c_s h} \geq 0 \right.$$

**% Calculer la loi de commande**

$$\text{Faire } \mathbf{u}(t) = \left[ \mathbf{b}_s^{\otimes \frac{1}{v^{zs}}} - \mathbf{M}_{\rho_{s0}}^{\otimes \frac{1}{v^{zs}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s})^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{zs}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_{c_s}}} \otimes B)_{j_z c_s}^{\otimes \frac{v^{zs} - v^{zs-1}}{v^{zs}}} \right] \otimes A_{i_z s r}^{\phi_{c_s}} \otimes \mathbf{x}_r(t-1) \oplus (A^{g_{c_s}} \otimes \mathbf{Q})_{i_z c_s h} \otimes \mathbf{w}_h(t-1)$$

sinon

**Ecrire erreur**

*retour*

*Fin Si*

---

*Fin Si*

*Fin Si*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

---

### 3.3.4. Étude de cas : un exemple illustratif

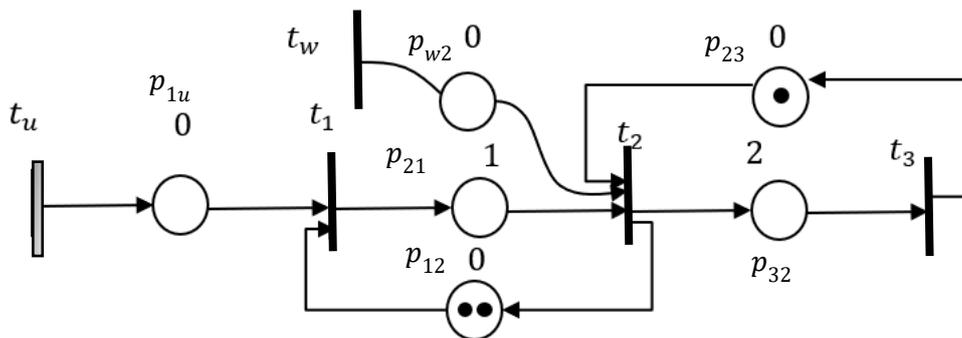
Dans cette section, un exemple de GET avec une transition perturbée est montré dans la Figure 3.3. Ce système est soumis à une CMG décrite par l'inéquation suivante :

$$M(p_{21}) + 2 \times M(p_{32}) \leq 2$$

Les paramètres correspondants sont les suivants :  $v^1 = 1, v^2 = 2, Z = 2, i_1 = 2, i_2 = 3, j_1 = 1, j_2 = 2,$  et  $b = 2$ . Le graphe d'accessibilité du GET perturbé est présenté par la Figure 3.4. L'ensemble  $\{\mu_5\}$  présente les états de marquages interdits. Dans ce graphe, seule la place  $p_{32}$  peut-être pondérée à 2. Nous considérons que les places  $p_{1u}$  ont généralement le nombre de jetons nécessaires pour traverser les transitions  $t_{1u}$  correspondantes. Avant d'appliquer Théorème 14, nous devons commencer par déterminer l'équation d'état de ce graphe. Ainsi, la formule suivante décrit le comportement dynamique de ce système :

$$x(t) = A \otimes x(t-1) \oplus B \otimes u(t) \oplus Q \otimes w(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ e & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes u(t) \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$



**Figure 3. 3.** Modèle d'un GET avec transition incontrôlable

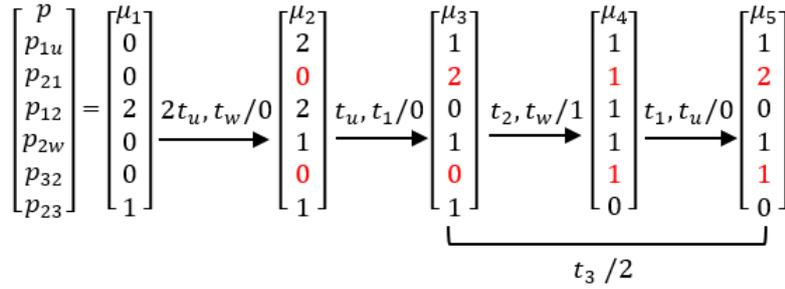


Figure 3. 4. Graphe d'accessibilité du GET de la Figure 3.3

Le marquage initial du chemin est nul ( $M_{\rho_0} = 0$ ) et le délai du chemin  $\alpha_1$  reliant la transition de contrôle  $t_u$  à la transition  $t_1$  est donné par  $\tau_{\alpha_1} = 0$ . On en déduit alors que  $\phi = 1$ . On a  $(A^0 \otimes B)_1 = e$ ,  $(A^1 \otimes B)_2 = e$ ,  $(A^0 \otimes B)_3 = \varepsilon$ ,  $A_{3r}^1 = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e]$  et  $(A^0 \otimes Q)_3 = \varepsilon$ . Nous pouvons facilement vérifier que les conditions du Théorème 14 données comme suit sont vérifiées:

$$((A^0 \otimes B)_1)^{\otimes 1} \otimes [((A^1 \otimes B)_2)^{\otimes (2-1)}] \leq (2 - 0) \otimes ((A^0 \otimes B)_3)^{\otimes 2}, \text{ pour } k = 0.$$

$$\left[ 2^{\otimes \frac{1}{2}} - 0 - ((A^0 \otimes B)_1)^{\otimes \frac{1}{2}} - (A^1 \otimes B)_2^{\otimes \frac{2-1}{2}} \right] \otimes A_{3r}^1 \geq 0$$

$$\left[ 2^{\otimes \frac{1}{2}} - 0 - ((A^0 \otimes B)_1)^{\otimes \frac{1}{2}} - (A^1 \otimes B)_2^{\otimes \frac{2-1}{2}} \right] \otimes (A^0 \otimes Q)_3 \geq 0$$

L'expression suivante représente la loi de commande  $u(t)$  qui satisfait la CMG:

$$\begin{aligned} u(t) &= \left[ 2^{\otimes \frac{1}{2}} - 0 - ((A^0 \otimes B)_1)^{\otimes \frac{1}{2}} - (A^1 \otimes B)_2^{\otimes \frac{2-1}{2}} \right] \otimes A_{3r}^1 \otimes x_r(t-1) \oplus (A^0 \otimes Q)_3 \\ &\quad \otimes w(t-1) \\ &= 1 \otimes x_2(t-2) \oplus 1 \otimes w(t-1) \end{aligned}$$

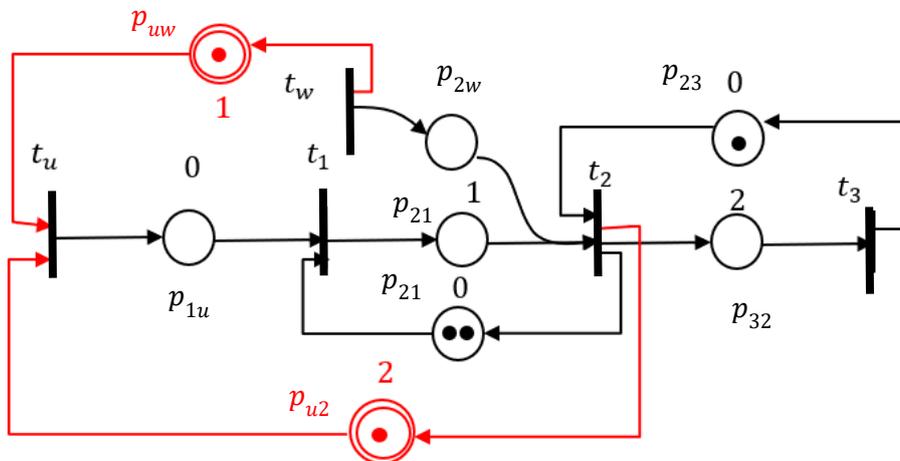
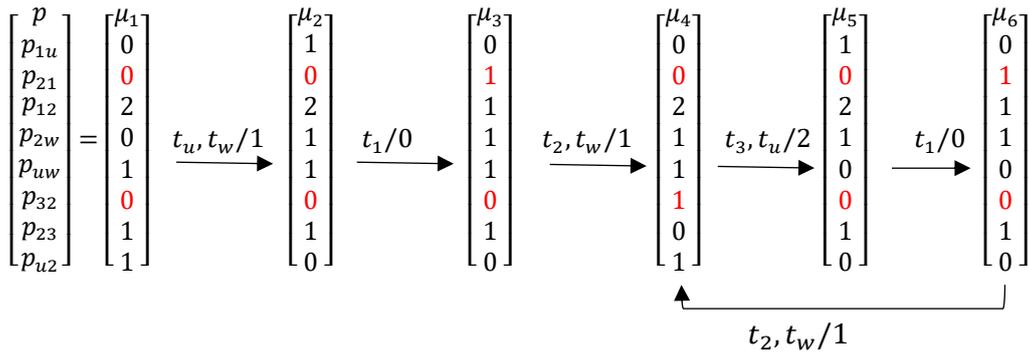


Figure 3. 5. GET contrôlé du système proposé



**Figure 3. 6.** Graphe de marquage du GET contrôlé

**Remarque 3.1.** L’approche mathématique proposée pour contrôler les CMGs imposés dans le GET avec des transitions incontrôlables a approuvé son efficacité en éliminant toute limitation restreinte qui pourrait nuire au système. La commande par rétroaction calculée est illustrée par deux places de commande temporels caractérisés par un double cercle et liés au modèle GET initial (Figure 3.5). Ce contrôleur garantit que les CMGs imposés au système sont satisfaits. Par conséquent, le graphe d’accessibilité illustré à la Figure 3.6 fournit une preuve solide de cette affirmation.

### 3.4. Conception de contrôle pour le respect de CMGs dans des GETs partiellement observables et contrôlables

Dans la partie précédente, nous avons présenté une méthodologie formelle pour concevoir des lois de commande qui satisfaisent des CMGs pour des GETs partiellement contrôlables et totalement observables. Cependant, en se référant à la littérature, de nombreuses approches de contrôle supposent que les états du système sont entièrement observables. Par conséquent, nous avons étendu notre approche en proposant une loi de commande par rétroaction pour assurer le respect des contraintes de marquage généralisées imposées pour certains chemins des GETs partiellement contrôlables et observables. Pour ce faire, nous avons pris en compte la possibilité que chaque boucle d’un GET possède au moins une transition observable. Tout d’abord, nous explorons le scénario où ce graphe a une transition d’entrée, puis des transitions multi-contrôlables.

#### 3.4.1. GET avec une seule transition d’entrée

L’objectif de cette partie est de développer une commande de contrôle algébrique pour les GETs perturbés à une entrée soumise à une seule contrainte avant d’aborder le cas de plusieurs spécifications.

### 3.4.1.1. GET soumis à une contrainte de marquage généralisée

Nous considérons qu'il existe au moins un chemin élémentaire  $\alpha_z$  de la transition de contrôle  $t_u$  à la transition  $t_j^z$ .

**Théorème 18.** La loi de commande pour un GET partiellement observable et contrôlable avec une seule transition d'entrée  $t_u$  et soumis à une CMG est décrite par l'équation suivante :

$$u(t) = F_r' \otimes x_r(t-1) \oplus F_r'' \otimes x(t - \tau_{\delta_\beta} - 1) \oplus F_h \otimes w_h(t-1) \quad (3.61)$$

$$F_r' = \bigoplus_{r \in y} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{izr}^{\phi_s} \quad (3.62)$$

$$F_r'' = \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{izr}^{\phi_s} \quad (3.63)$$

$$F_h = \bigoplus_{h \in y} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes (A^g \otimes Q)_{izh} \quad (3.64)$$

Le symbole  $\lfloor y \rfloor$  représente le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $y$ . Le contrôleur calculé garantit que la contrainte (3.1) est satisfaite si la condition suivante est respectée :

$$((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes v^1} \otimes [\bigotimes_{z=2}^Z ((A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z})^{\otimes (v^z - v^{z-1})}] \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes ((A^k \otimes B)_{iz})^{\otimes v^z} \quad (3.65)$$

**Démonstration.** Dans la sous-section précédente, nous avons abordé le problème d'un GET comprenant un ensemble de transitions d'entrée non contrôlées et totalement observables ainsi que des restrictions de marquage imposées à certains chemins de ce graphe. La loi de commande présentée dans le Théorème 14 résultant de l'inégalité (3.14) décrit la commande qui satisfait la contrainte de marquage (3.1), si les conditions (3.17) et (3.18) sont assurées. L'équation est la suivante :

$$u(t) = \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes \left( \bigoplus_{r=1}^n A_{izr}^{\phi} \otimes x_r(t - \phi) \right) \oplus \left( \bigoplus_{r=1}^n A_{izr}^{\phi} \otimes x_r(t - \phi) \right)$$

Le contrôleur conçu précédemment est un retour fonctionnel, mais il ne peut pas être exécuté puisqu'il est exprimé par des compteurs associés à des transitions inobservables. Cependant, comme ce GET partiellement contrôlable contient au moins une transition observable dans chaque boucle, nous devons décrire ces compteurs en fonction de ces transitions. Pour ce faire, nous avons divisé la formule du contrôleur en deux parties, l'une pour les transitions observables et l'autre pour les transitions inobservables, comme représentées par l'équation suivante :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S \left[ \bigoplus_{r \in \gamma} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t-1) \oplus \bigotimes (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t-1) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{r \in \beta} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} + m_{\delta_\beta} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^\phi \otimes x(t - \tau_{\delta_\beta} - 1) \right]$$

Sur la base des résultats de la propriété 1, nous obtenons l'expression suivante :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S \left[ \bigoplus_{r \in \gamma} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^\phi \otimes x_r(t-1) \oplus \bigotimes (A^g \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t-1) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in \gamma} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} + m_{\delta_\beta} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_\alpha^1} \otimes B)_{j_1})^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_\alpha^z} \otimes B)_{j_z}^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^\phi \otimes x(t - \tau_{\delta_z} - 1) \right]$$

### 3.4.1.2. Des GETs soumis à plusieurs contraintes de marquage généralisées

Dans cette section, nous examinons un cas où un GET partiellement contrôlable et est soumis à plusieurs CMGs. Nous présumons qu'il existe au moins un chemin élémentaire  $\alpha_z$  reliant la transition de contrôle  $t_u$  à la transition  $t_j^{z_s}$ .

**Théorème 19.** Un GET partiellement observable et contrôlable avec une seule entrée  $t_u$  soumis à  $S$  CMGs de la forme (3.38), admet une loi de commande décrite comme suit :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S [F'_{r_s} \otimes x_r(t-1) \oplus F''_{r_s} \otimes x(t - \tau_{\delta}^{z_s} - 1) \oplus F_{h_s} \otimes w_h(t-1)] \quad (3.66)$$

$$\text{avec } F'_{r_s} = \bigoplus_{r \in y} \left[ b_s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0} \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{1_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} \frac{v^{1_s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}} \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_s} \quad (3.67)$$

$$\text{et } F''_{r_s} = \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} \left[ b_s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} + m_{\delta}^{\beta_s} - M_{\rho_0}^s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1_s}} \otimes B)_{j_{1_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} \frac{v^{1_s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_{\alpha}^z} \otimes B)_{j_{z_s}} \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_s} \quad (3.68)$$

$$F_{h_s} = \bigoplus_{h \in y} \left[ b_s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0}^s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1_s}} \otimes B)_{j_{1_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} \frac{v^{1_s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}} \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes (A^g \otimes Q)_{i_{z_s} h} \quad (3.69)$$

et qui assure la satisfaction de la contrainte (3.38) si la condition suivante est respectée, pour  $(k = 0, \dots, \tau_{\alpha}^{1_s})$ :

$$\begin{aligned} & ((A^{\tau_{\alpha}^{1_s}} \otimes B)_{j_{1_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} v^{1_s}} \otimes \left( \bigotimes_{z=2}^{z_s} ((A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} (v^{z_s} - v^{z_s-1})} \right) \\ & \leq (b_s - M_{\rho_0}^s) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_{z_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} v^{z_s}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

**Démonstration.** En se basant sur le Théorème 18, si la condition (3.65) est satisfaite pour chaque indice  $(j_{z_s}, i_{z_s})$  de la  $S^{\text{ème}}$  contrainte, pour  $(s = 1, \dots, S)$ , le contrôleur à rétroaction peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} u_s(t) \leq & \bigoplus_{s=1}^S \left[ \bigoplus_{r \in y} \left[ b_s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0}^s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1_s}} \otimes B)_{j_{1_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} \frac{v^{1_s}}{v^{z_s}}} - \right. \right. \\ & \left. \left. \bigotimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z_s}} \otimes B)_{j_{z_s}} \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_s} \otimes x_r(t-1) \oplus (A^g \otimes Q)_{i_{z_s} h} \otimes w_h(t-1) \right] \oplus \\ & \left[ \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in y} \left[ b_s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} + m_{\delta}^{\beta_s} - M_{\rho_0}^s \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{1}{v^{z_s}}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{1_s}} \otimes B)_{j_{1_s}})^{\otimes_{v^{z_s}} \frac{v^{1_s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{z_s} (A^{\tau_{\alpha}^z} \otimes B)_{j_{z_s}} \otimes_{v^{z_s}}^{\frac{v^{z_s} - v^{z_s-1}}{v^{z_s}}} \right] \right. \\ & \left. \otimes A_{i_{z_s} r}^{\phi_s} \otimes x(t - \tau_{\delta}^{\beta_s} - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

□

### 3.4.2. GETs à entrées multiples

#### 3.4.2.1. GET soumis à une contrainte de marquage généralisée

Dans cette section, nous proposons une démarche de synthèse des lois de commande causale pour satisfaire une seule contrainte de marquage généralisée imposée à un GET partiellement observable et contrôlable.

**Théorème 20.** Un GET avec plusieurs transitions d'entrées  $c$ ,  $c=1 \dots \bar{n}$ , et partiellement observable soumis à une contrainte de marquage généralisée de la forme (3.1) admet une loi de commande présentée par :

$$u(t) = F'_r \otimes x_r(t-1) \oplus F''_r \otimes x(t - \tau_{\delta_z} - 1) \oplus F_h \otimes w_h(t-1) \quad (3.72)$$

$$\text{où} \quad F'_{r_c} = \oplus_{r \in y} \left[ b \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0} \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{z_c}} \otimes B)_{j_1 c_s}) \otimes_{v^z}^{\frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^z (A^{\tau_{\alpha}^z} \otimes B)_{j_c} \otimes_{v^z}^{\frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_c}$$

$$F''_{r_s} = \oplus_{\beta=1}^E \oplus_{r \in y} \left[ b \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} + m_{\delta}^{\beta_c} - M_{\rho_0} \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{z_c}} \otimes B)_{j_1 c_s}) \otimes_{v^z}^{\frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^z (A^{\tau_{\alpha}^z} \otimes B)_{j_z c} \otimes_{v^z}^{\frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_c}$$

$$F_{h_s} = \oplus_{h \in y} \left[ b \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0} \otimes_{v^z}^{\frac{1}{v^z}} - ((A^{\tau_{\alpha}^{z_c}} \otimes B)_{j_1 c_s}) \otimes_{v^z}^{\frac{v^1}{v^z}} - \otimes_{z=2}^z (A^{\tau_{\alpha}^z} \otimes B)_{j_z c} \otimes_{v^z}^{\frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes (A^{g_c} \otimes Q)_{i_z c h} \otimes w_h$$

si la condition suivante est satisfaite:

$$((A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_1 s}) \otimes_{v^{1s}} \otimes (\otimes_{z=2}^z ((A^{\tau_{\alpha}^z} \otimes B)_{j_z c}) \otimes_{v^{z_s - v^{z-1}}} \leq (b - M_{\rho_0}) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_z c}) \otimes_{v^z} \quad (3.73)$$

pour  $k = 0, \dots, \tau_{\alpha}^{z_c}$

**Démonstration.** Considérant  $(\phi_c = \tau_{\alpha}^{1c} + 1)$ , nous suivons les mêmes étapes de démonstration de Théorème 18, nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 u_c(t) \leq & \bigoplus_{c=1}^{\mu} \left[ \bigoplus_{r \in \mathcal{Y}} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - \left( (A^{\tau_{1c}^{1c}} \otimes B)_{j_1 c} \right)^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_{\alpha}^{zc}} \otimes \right. \right. \\
 & \left. \left. B)_{j_z c} \right)^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_c} \otimes x_r(t-1) \oplus (A^{g_c} \otimes Q)_{i_z h} \otimes w_h(t-1) \right] \oplus \\
 & \left[ \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in \mathcal{Y}} \left[ b^{\otimes \frac{1}{v^z}} + m_{\delta}^{\beta_s} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^z}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{1c}} \otimes B)_{j_1 c} \right)^{\otimes \frac{v^1}{v^z}} - \bigotimes_{z=2}^Z (A^{\tau_{\alpha}^{zc}} \otimes \right. \right. \\
 & \left. \left. B)_{j_z c} \right)^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^z}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_c} \otimes x(t - \tau_{\delta}^{\beta_s} - 1) \right]
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

### 3.4.2.2. GET soumis à multi-contraintes de marquage généralisées

Nous étendons l'approche précédente en considérant un GET composé de  $c$  contrôles et soumis à  $S$  CMGs.

**Théorème 21.** Soit un GET perturbé comportant des transitions inobservables et des transitions d'entrée multiples soumises à des contraintes de la forme (3.39). Ce contrôleur :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S u_{c_s}(t) \tag{3.75}$$

avec 
$$u_{c_s}(t) \leq F'_{rc_s} \otimes x_r(t-1) \oplus F''_{rc_s} \otimes x(t - \tau_{\delta_z} - 1) \oplus_{h=1}^H F_{hc_s} \otimes w_h(t-1)$$

et 
$$F'_{r_s} = \bigoplus_{r \in \mathcal{Y}} \left[ b_s^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{z c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s} \right)^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z c_s}} \otimes B)_{j_z c_s} \right)^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_{c_s}}$$

$$\begin{aligned}
 F''_{r_s} = & \bigoplus_{\beta=1}^E \bigoplus_{r \in \mathcal{Y}} \left[ b_s^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} + m_{\delta}^{\beta_{c_s}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{1 c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s} \right)^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z c_s}} \otimes \right. \\
 & \left. B)_{j_z c_s} \right)^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes A_{i_z r}^{\phi_{c_s}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{h_s} = & \bigoplus_{h \in \mathcal{Y}} \left[ b_s^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - M_{\rho_0}^{\otimes \frac{1}{v^{z_s}}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{1 c_s}} \otimes B)_{j_1 c_s} \right)^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{z_s}}} - \bigotimes_{z=2}^{Z_s} (A^{\tau_{\alpha}^{z c_s}} \otimes \right. \\
 & \left. B)_{j_z c_s} \right)^{\otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^{z_s}}} \right] \otimes (A^{g_{c_s}} \otimes Q)_{i_z c_s h} \otimes w_h
 \end{aligned}$$

assure la validation des  $S$  contraintes si la condition suivante :

$$((A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_{1c_s}})^{\otimes v^{1s}} \otimes (\otimes_{z=2}^{z_s} ((A^{\tau_{\alpha}^{zc_s}} \otimes B)_{j_{zc_s}})^{\otimes (v^{zs} - v^{zs-1})}) \leq (b_s - M_{\rho_0}^s) \otimes ((A^k \otimes B)_{i_{zc_s}})^{\otimes v^{zs}} \quad (3.76)$$

est satisfaite pour  $(k = 0, \dots, \tau_{\alpha}^{zc_s})$

**Démonstration.** Nous considérons un GET avec des transitions partiellement observables soumis à plusieurs CMGs et ayant des transitions à entrées multiples. L'approche du calcul des lois de commande  $u_{c_s}(t)$  est similaire à celle décrite dans la démonstration du Théorème 19. Compte tenu de la vérification de la condition (3.76), nous pouvons conclure qu'il s'agit d'une loi de commande introduite dans le Théorème 19 et donnée par l'expression (3.71), si nous prenons  $(\phi_{c_s} = \tau_{\alpha}^{1c_s} + 1)$ . □

### 3.4.3. Algorithme de contrôle des GETs partiellement contrôlables et observables

La méthodologie de conception des lois de commande, exposée dans le cadre du Théorème 21, peut être systématisée à travers une démarche algorithmique spécifique (Algorithme 5). Cette approche algorithmique permet de démontrer l'applicabilité de la méthode analytique suggérée, même lorsque l'on traite des systèmes industriels complexes et concrets. Les étapes de ce processus sont analogues à celles définies dans l'algorithme précédent, l'algorithme 4. Dans cette sous-section, nous présentons la procédure de multi CMGs. Par conséquent, nous pouvons aborder la question du contrôle des GETs partiellement observables et contrôlables lorsque la contrainte est placée sur un seul emplacement en supposant que  $S = 1$ .

---

#### Algorithme\_5: Contrôle des GETs partiellement contrôlables et observables soumis à des CMGs multiples

---

Entrée:  $b, B, M_{\rho_{s_0}}, A, i, j, S, Q, \tau_{\alpha}^{zc_s}, H, Z,$

Sortie:  $(u)$

**% Initialisation**

$\phi_{c_s} := \tau_{\alpha_{zc_s}} + 1$

Pour  $s \in [1 \dots S]$  faire **%Indice et nombre des places sous contraintes**

Pour  $h \in [1 \dots H]$  faire **%Indice et le nombre de transitions perturbées**

Pour  $z \in [1 \dots Z]$  faire **%Indice et nombre des places dans le chemin sous contraintes**

Pour  $k_s \in [1 \dots \tau_{\alpha}^{zc_s}]$  faire **%Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_{c_s}$**

Pour  $g_{l_s} \in [1 \dots \tau_{\alpha}^{zc_s}]$  faire **%Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_{c_s}$**

---

**% Tests des conditions suffisante**

$S_i \left( (A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_{1s}} \right)^{\otimes v^{1s}} \otimes \left( \otimes_{z=2}^{Z_s} \left( (A^{\tau_{\alpha}^{zc_s}} \otimes B)_{j_{zc_s}} \right)^{\otimes (v^{zs} - v^{zs-1})} \leq (b_s - M_{\rho_0}^s) \otimes \left( (A^k \otimes B)_{i_{zc_s}} \right)^{\otimes v^{zs}}$  faire

**% Calculer la loi de commande**

$$u(t) = \oplus_{s=1}^S \left[ \oplus_{r \in y} \left[ b_s \otimes \frac{1}{v^{zs}} - M_{\rho_0}^s \otimes \frac{1}{v^{zs}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{zc_s}} \otimes B)_{j_{1c_s}} \right)^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{zs}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} \left( A^{\tau_{\alpha}^{zc_s}} \otimes B \right)_{j_{zc_s}} \otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^{zs}} \right] \otimes \left( A_{i_{zs}r}^{\phi_{cs}} \otimes x_r(t-1) \right) \oplus \left( (A^{g_{cs}} \otimes Q)_{i_{zc_s}h} \otimes w_h(t-1) \right) \oplus \oplus_{\beta=1}^E \oplus_{r \in y} \left[ b_s \otimes \frac{1}{v^{zs}} + m_{\delta}^{\beta_{cs}} - M_{\rho_0}^s \otimes \frac{1}{v^{zs}} - \left( (A^{\tau_{\alpha}^{1c_s}} \otimes B)_{j_{1c_s}} \right)^{\otimes \frac{v^{1s}}{v^{zs}}} - \otimes_{z=2}^{Z_s} \left( A^{\tau_{\alpha}^{zc_s}} \otimes B \right)_{j_{zc_s}} \otimes \frac{v^z - v^{z-1}}{v^{zs}} \right] \otimes \left( A_{i_{zs}r}^{\phi_{cs}} \otimes x_r(t - \tau_{\delta_{zs}} - 1) \right)$$

Sinon

**Ecrire erreur ;**

*retour*

*Fin si*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

---

### 3.5. Application à un processus de désassemblage

Dans cette partie nous traitons un exemple de système de désassemblage qui rassemble au système présenté dans le chapitre 2, mais avec une seule ligne. Ce système est représenté par la Figure 3.7. Nous rappelons que ce système permet de désassembler des articles en fin de vie en deux composants  $J_1$  et  $J_2$ . Une fois les composants obtenus, un robot  $R_1$  à capacité intermédiaire limitée transfère le composant  $J_1$  à la machine  $MA_2$  pour exécution. D'autre part,  $J_2$  est transmis pour être recyclé. Soudain, un facteur externe incontrôlable modélisé par  $t_w$  empêche le robot de fonctionner. En raison du bras endommagé de ce dernier, le robot peut prendre plus de temps pour traiter les composants. Ce système est modélisé par le GET présenté à la Figure 3.8. L'interprétation et la signification physique de toutes les transitions et de toutes les places de ce graphique sont explicitement décrites dans le tableau 2.1 présenté dans le chapitre 2 section 2.7. Ce système a une transition de contrôle ( $t_u$ ) et soumis à deux contraintes sur les chemins  $\rho$ , ( $Z = 2$ ). Ainsi,  $t_2$  est la transition d'entrée et la transition  $t_4$  est la transition

de sortie de ce chemin  $\rho$ . Seules les transitions  $t_u$ ,  $t_2$ ,  $t_4$  et  $t_6$  sont observables. Comme le montre la Figure 3.9, nous observons qu'à l'instant  $t$ ,  $p_{32}$  et  $p_{43}$  sont marqués simultanément, ce qui présente des états interdits. Afin d'éviter de telles occurrences, la CMG est décrit comme suit :

$$M(p_{32}) + 2 \times M(p_{43}) \leq 2$$

avec,  $v_1 = 1, v_2 = 2, Z = 2, i_1 = 3, i_2 = 4, j_1 = 2, j_2 = 3$ , et  $b = 2$ .

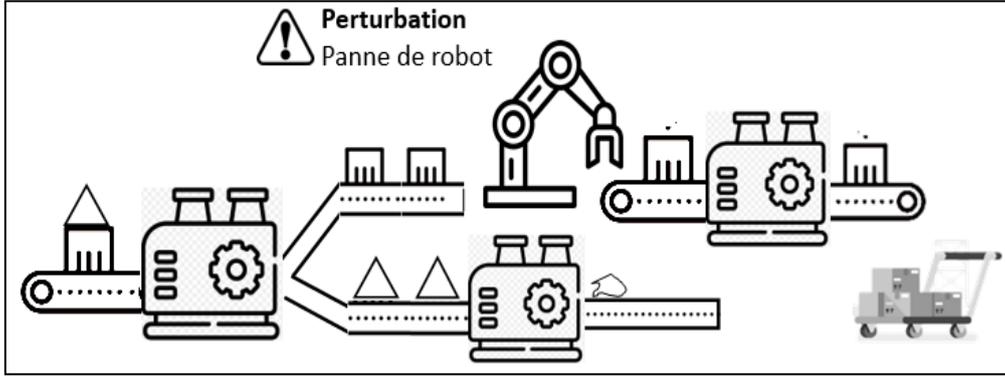


Figure 3. 7. Ligne de désassemblage

La machine représentée par la place  $p_{43}$  peut effectuer plus d'une tâche, de sorte que le coefficient 2 associé à  $M(p_{43})$  reflète le nombre de tâches effectuées dans cette place à l'instant  $t$ . Si nous supposons que le GET est effectué aussi rapidement que possible, l'équation explicite du système est représentée par l'énoncé ci-dessous :

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ e & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes u(t) \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \otimes w(t)$$

Afin de garantir la CMG imposé au chemin  $\rho$ , nous appliquons le Théorème 18 pour calculer  $u(t)$ , où le marquage initial de  $\rho$  est nul ( $M_{\rho_0} = 1$ ), et son délai qui relie la transition de contrôle  $t_u$  à  $t_2$  est  $\tau_\alpha = 1$ . On en déduit alors que  $\phi = 2$ . On a  $(A^1 \otimes B)_1 = 1$ ,  $(A^2 \otimes B)_3 = e$ ,  $(A^0 \otimes B)_4 = \varepsilon$ ,  $A_{3r}^1 = [\varepsilon \ e \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 1]$  et  $(A^0 \otimes Q)_3 = \varepsilon$ . On vérifie que la condition du Théorème 18 est satisfaite :

$$((A^1 \otimes B)_2)^{\otimes 1} \otimes ((A^2 \otimes B)_3)^{\otimes (2-1)} \leq 2 \otimes ((A^k \otimes B)_4)^{\otimes 2} \quad \text{pour } (k = 0, \dots, 2)$$

La loi de commande est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \left[ 2^{\otimes \frac{1}{2}} - 0 - ((A^0 \otimes B)_1)^{\otimes \frac{1}{2}} - (A^1 \otimes B)_2^{\otimes \frac{2-1}{2}} \right] \otimes A_{3r}^1 \otimes x_r(t-1) \oplus (A^0 \otimes \\
 &Q)_3 \otimes w(t-1) \\
 &= 1 \otimes x_3(t-1) \oplus 1 \otimes w(t-1) \\
 &= 1 \otimes x_2(t-2) \oplus 1 \otimes x_4(t-1) \oplus 1 \otimes w(t-1)
 \end{aligned}$$

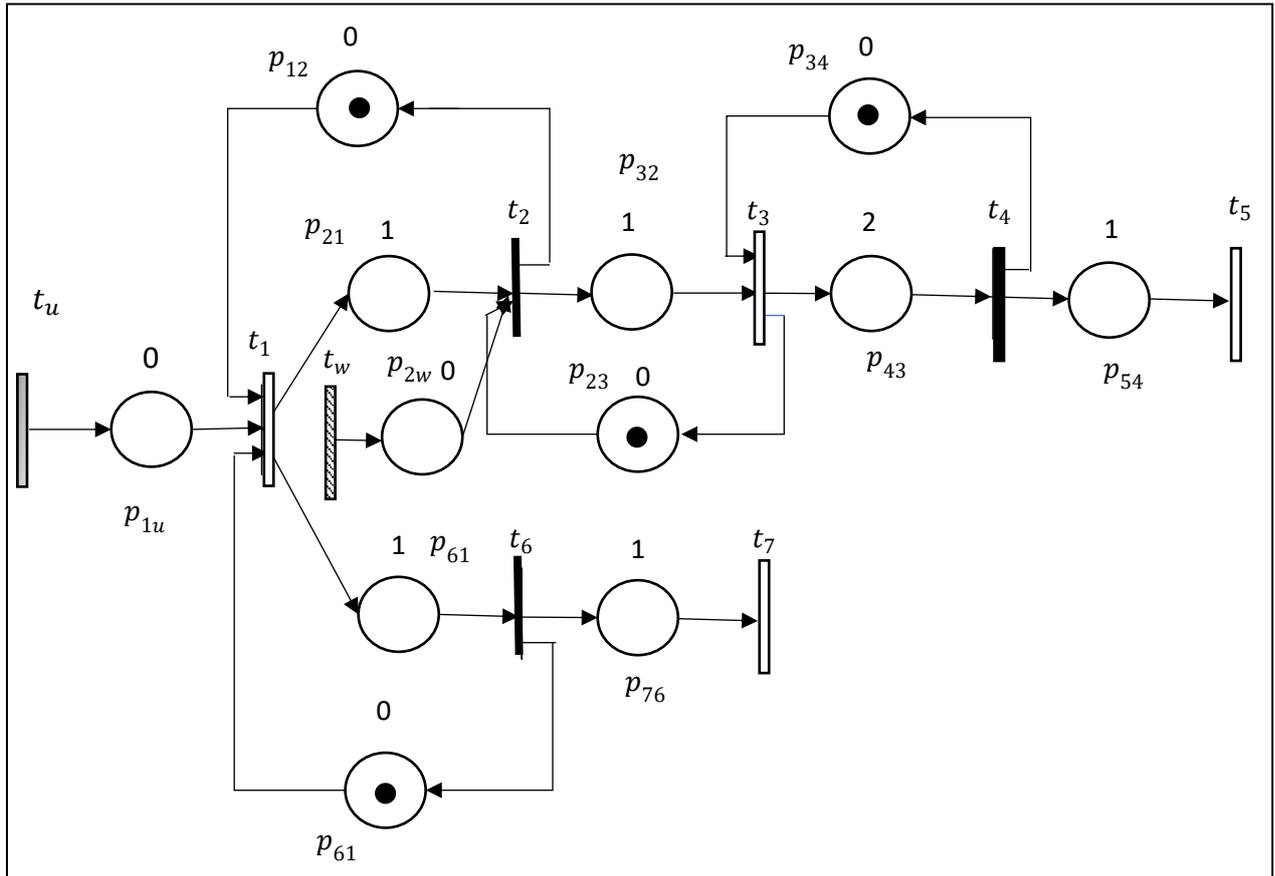


Figure 3.8. Modèle GET du système de désassemblage

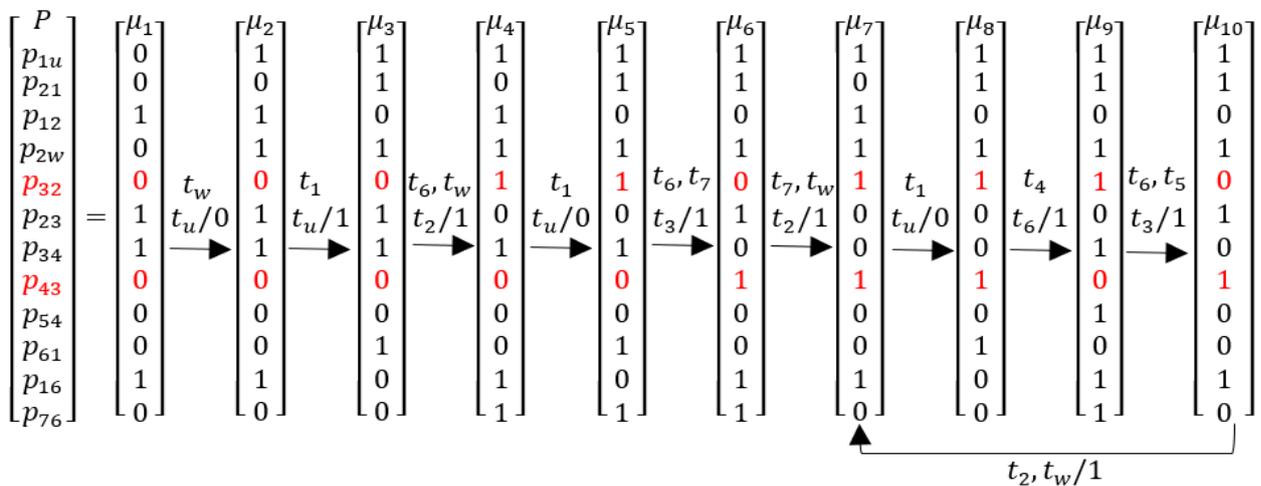


Figure 3.9. Graphe de marquage de Figure 3.8

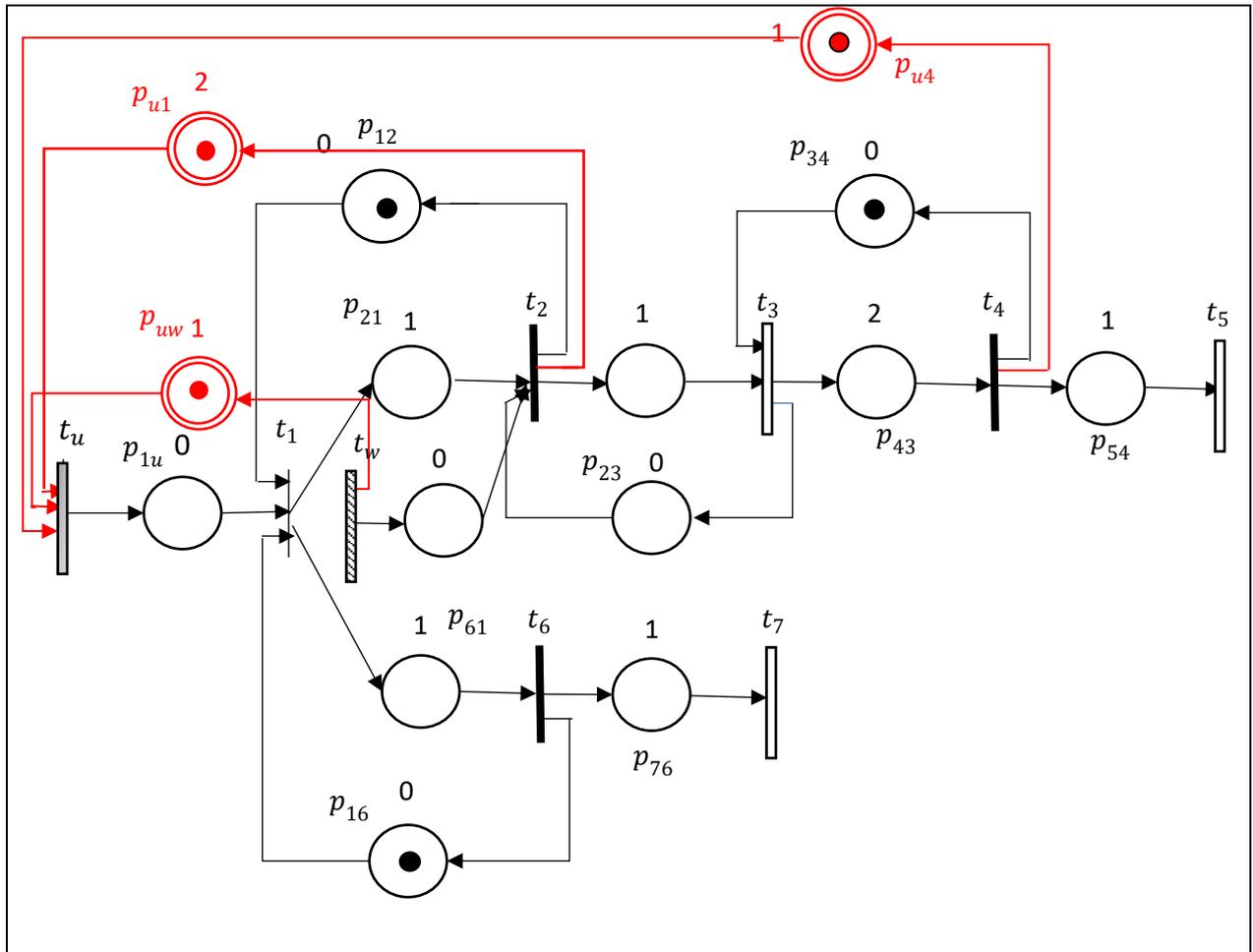


Figure 3.10. Le réseau de Petri contrôlé du système de désassemblage

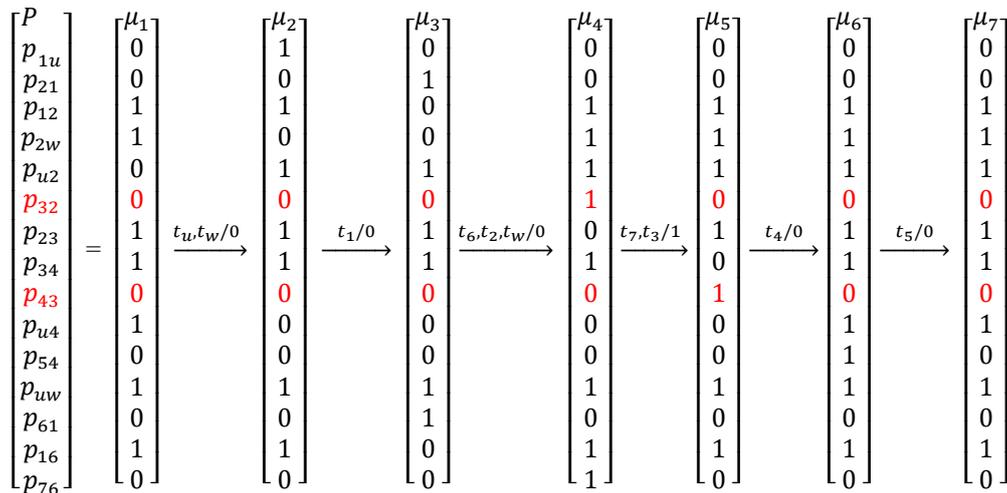


Figure 3.11. Graphe d'accessibilité du GET contrôlé

**Remarque 3.2.** L'approche proposée est basée sur la combinaison de modèles de GET et de l'algèbre Min-Plus pour concevoir des lois de commande qui garantissent le respect des CMGs imposés à certains GETs dont les transitions sont partiellement observables et

contrôlables. Les contrôleurs calculés sont convertis en trois moniteurs représentés par un double cercle. Après l'imposition des CMGs, toutes les instances interdites ont été éliminées, comme le montre la Figure 3.11 du graphe d'accessibilité du GET contrôlé.

### 3.6. Conclusion

Ce chapitre a été alloué à l'étude du problème de contrôle des SEDs soumis à des CMGs modélisés par des GETs partiellement contrôlables. Dans un premier temps, nous avons abordé le cas où les contraintes sont imposées à des GETs dont toutes ses transitions sont observables, ensuite des GETs partiellement observables. Le comportement dynamique du système est représenté par des équations linéaires, tandis que les contraintes sont exprimées à l'aide d'inégalités pondérées dans l'algèbre Min-Plus. L'objectif de cette étude est de synthétiser des contrôleurs qui garantissent la conformité aux CMGs. Pour ce faire, des critères suffisants pour la présence de la loi de commande ont été définis. Un algorithme de contrôle a été proposée pour mettre en évidence l'efficacité de la technique existante pour des systèmes de manufacturier réels. Afin de montrer la pertinence et l'efficacité de l'approche suggérée, nous l'avons appliqué sur un système de désassemblage.

Dans le prochain chapitre, nous aborderons une nouvelle technique de conception de lois de commande pour résoudre le problème des contraintes d'exclusions mutuelles imposées aux réseaux de graphes d'événements temporisés.

## Chapitre 4

# Approches algébriques de commande des systèmes de désassemblage modélisés par des réseaux de graphes d'événements temporisés perturbés sous contraintes d'exclusions mutuelles

---

---

4.1. Introduction .....	99
4.2. Etat de l'art sur les problèmes de CEMs .....	100
4.3. Formulation du problème des CEMs .....	103
4.4. Loi de commandes des RGETs sous CEMs.....	105
4.4.1. Une seule CEM soumise à des places de RGETs .....	105
4.4.2. Plusieurs CEMs soumises à des places de RGETs .....	108
4.5. Conception de lois de commande pour les RGETs partiellement observables et contrôlables sous CEMs .....	109
4.5.1. Une seule CEM soumis à des places de RGETs.....	109
4.5.2. Plusieurs CEMs soumis à des places de RGETs .....	111
4.6. Algorithme de commande .....	112
4.7. Etude de cas : application de l'approche proposée à un système de désassemblage .....	113
4.7.1. Modélisation du système de désassemblage .....	113
4.7.2. Description du fonctionnement du système .....	115
4.7.3. Conception des lois de commande .....	116
4.7.4. Interprétation des lois de commande calculées .....	117
4.8. Conclusion.....	119

---

---

#### 4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème de contrôle d'une classe de SEDs avec des perturbations soumis à des contraintes d'exclusions mutuelles. Plus précisément, une nouvelle technique de conception de lois de commande est proposée pour assurer la satisfaction de CEMs dans les RGETs avec certaines transitions d'entrée incontrôlables. Un ensemble de modèles Min-Plus est utilisé pour décrire le comportement du réseau, et des inégalités Min-Plus linéaires sont appliquées pour caractériser les contraintes impliquées. Des conditions suffisantes sont proposées pour l'existence de lois de commande garantissant ces CEMs pour les GETs partiellement observables. L'efficacité de la stratégie de contrôle décrite est illustrée par une application à un atelier de désassemblage flexible soumis à des restrictions de capacité. La figure 4.1 résume la présente approche proposée.

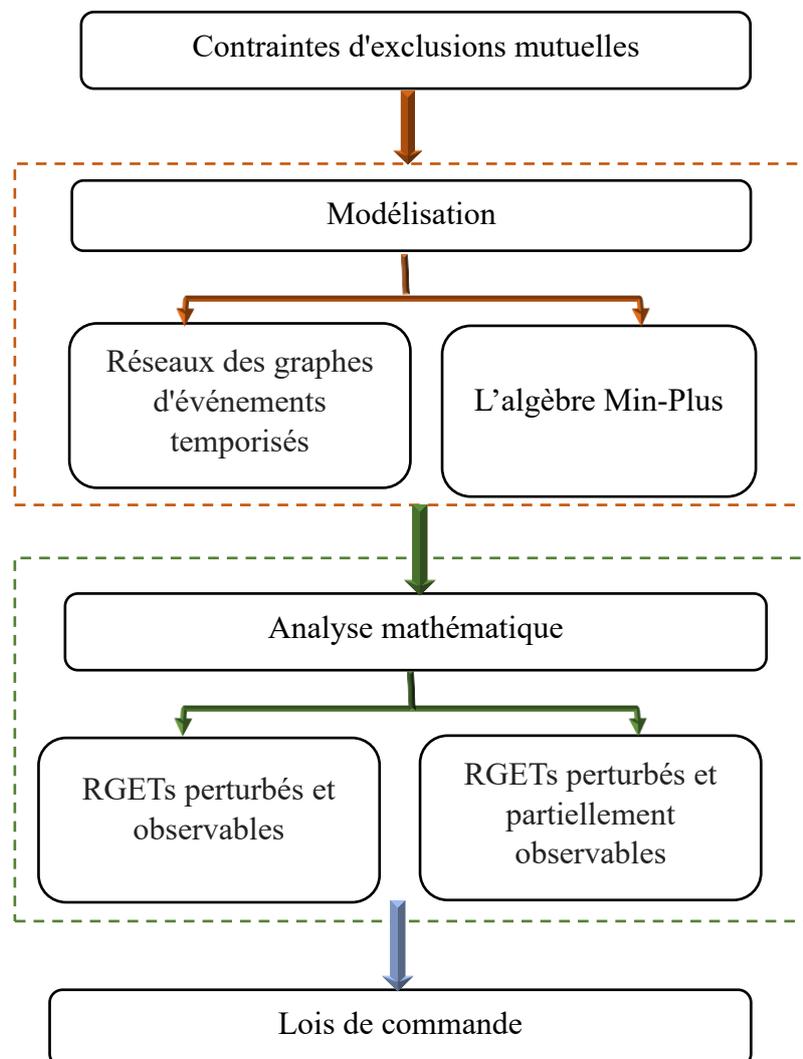


Figure 4. 1. Synthèse de l'approches proposer dans le chapitre 4

Le reste de ce chapitre est structuré comme suit : Dans la deuxième section, nous présentons un état de l'art approfondi pour illustrer cette problématique et contextualiser notre travail par rapport à l'existant. La section 3 présente une description des CEMs imposées à des RGETs perturbés à l'aide d'inégalités linéaires. Ensuite, des méthodes formelles de contrôle de ces graphes soumis à des restrictions sont présentées au section 4 et 5. Tout d'abord, nous abordons la question pour les graphes totalement observables. Ensuite, nous étendons l'hypothèse d'observabilité et nous proposons une nouvelle approche de contrôle pour les RGETs partiellement observables avec des transitions perturbées. Puis, la section 6 propose une étude de cas d'un réseau de systèmes de désassemblage.

## 4.2. Etat de l'art sur les problèmes de CEMs

Dans cette section, nous abordons la problématique de la synthèse de contrôleurs d'états interdit définie comme des CEM (Giua et al. [1992]), qui limitent la somme des jetons dans un sous-ensemble de places. Ces types de spécification, sont aussi appelées Contraintes d'Exclusions Mutuelles Généralisées (CEMGs) non pondérées (Giua et al. 1992), ne sont qu'un sous-ensemble des CEMGs. À cet égard, Giua et al. [1993] ont créé deux modèles de réseaux de Petri appliquant ses contraintes sur des graphes marqués avec des places de contrôle : les moniteurs et les superviseurs. En effet, Atli et al. [2010] ont étudié le problème de CEMs qui peut exprimer la conjonction et l'union de nombreux critères d'exclusion mutuelle généralisées. Par conséquent, une synthèse de contrôleurs a été effectué pour s'assurer que les spécifications des représentations graphiques mises en évidence étaient respectées. De même, Ma et al. [2015] se sont consacrés aux OR-GMEC disjonctifs, qui sont pilotés par un contrôleur en boucle fermée composé d'un commutateur qui choisit la contrainte actuellement active et d'une série de places de contrôle pour chaque contrainte. Les mêmes auteurs ont développé leur recherche pour proposer une disjonction de contraintes d'exclusions mutuelles généralisées (OR-AND-GMECs) qui peuvent être imposées en plus par des places de contrôle avec l'ajout d'un commutateur.

Plusieurs auteurs concentrent leurs travaux sur la conception de contrôleurs répondant aux mêmes critères que les réseaux de Petri non temporisés. Par conséquent, le temps est un paramètre crucial, en particulier pour les systèmes dynamiques, qui doit être pris en considération à la fois dans les approches de modélisation et de contrôle. Dans ce contexte, nous pouvons considérer l'étude de Atli et al. [2011] dans laquelle les auteurs ont couplé le temps avec les places et ont appliqué des graphes marqués de places temporisées pour gérer les

CEMs. Leur approche consiste à analyser les informations fournies par la loi de commande de la table construite en utilisant des tables de temps. D'autres auteurs comme Giua et al [2004] décrivent une méthode de commandes pour des RPT dans laquelle le marquage ne peut pas être détecté mais estimé par un observateur fonctionnel d'état.

La méthode proposée synthétise des lois de commande basées sur les formalismes de l'algèbre Min-Plus afin de garantir la conformité avec les CEMs dans un RGETs. Cette classe de RPT, associée à un dioïde algébrique, est appliquée pour résoudre divers problèmes de contrôle (Houssin et al. [2012]). Les GETs peuvent représenter la synchronisation des problèmes de retard, mais pas le choix, ni le conflit, ni le partage des ressources. Cependant, ce graphe présente un avantage significatif par rapport à de nombreux autres modèles de RPT vu que son comportement initial peut être exprimé à l'aide d'équations linéaires dans l'algèbre dioïde. Il en résulte une vaste théorie pour les systèmes linéaires Min-Plus ou Max-Plus qui a introduit plusieurs notions de la théorie des systèmes ordinaires dans les GETs.. Dans ce contexte, Soumatia et Amari (2022) ont fourni des méthodologies formelles pour la synthèse de lois de commande basées sur les formalismes de l'algèbre Min-Plus afin d'assurer la satisfaction des CEMs dans les RGETs. Ce dernier est un ensemble de GETs liés par des CEMs qui peuvent caractériser un phénomène de partage de ressources. D'autre part, Rajah et al. [2023b] ont proposé une méthode basée sur l'utilisation de l'algèbre Min-Plus et qui vise à synthétiser des superviseurs qui garantissent le respect de ce type de contraintes.

Toutefois, ces auteurs ont étudié le scénario dans lequel toutes les transitions sont observables. Par conséquent, le contrôleur estimé n'est pas toujours réalisable lorsque les GETs ou les RGETs présentent certaines transitions non observables. Par conséquent, il est nécessaire d'exprimer les lois de commande synthétisées en fonction des transitions observables. Dans ce contexte, Tebani et Amari [2021] intègrent des transitions inobservables dans leurs GETs, soumis à contraintes de marquage pour des places connectés par des chemins. De plus, les techniques précédentes n'ont jamais abordé les états interdits dans les RGETs partiellement observables et contrôlables. En effet, peu d'auteurs se sont intéressés au problème des GETs avec des transitions d'entrée perturbés. À cet égard, nous mentionnons le travail de Basile et al. [2006] qui ont traité le problème des CEMGs imposées sur les réseaux de place/transition avec des transitions incontrôlables. Ils ont développé une loi de commande de supervision logique appliquant une CEMG donnée sur un réseau de Petri temporisé sans tenir compte de sa structure temporelle. Cette approche propose une technique de synthèse de contrôleur efficace dans laquelle ses contraintes sont appliqués en introduisant des moniteurs. D'autres travaux, comme

celui de Basile et al. [2021], reposent sur l'élaboration de questions de programmation linéaire en nombres entiers et sur la conception d'un graphe de classes d'états modifié. Comme cette méthode est basée sur une analyse du pire cas, il arrive parfois que le problème n'admette aucune solution dans l'état actuel. En outre, Li et al. [2020a] ont développé une nouvelle approche pour concevoir un superviseur optimal qui mettrait en œuvre les CEMGs sur un modèle de RPT. Cette stratégie de commande était basée sur le graphe de classe d'état partiellement modifié (états qui peuvent être obtenus à partir de l'état existant en déclenchant simplement des transitions incontrôlables). Néanmoins, cette méthode diminuerait les performances du système et conduirait à des états de blocage. Les mêmes auteurs ont généralisé leurs résultats en présentant l'évolution du système générée par le franchissement des transitions contrôlables et incontrôlables (Li et al. [2020b]). Leur étude s'est limitée à un superviseur appliquant un ensemble de CEMGs initialement spécifiés et d'absence de blocage sur un système de réseaux de Petri non temporisé sous-jacent supposé être disponible. D'autre part, Li et al [2021] ont suggéré une approche pour synthétiser un superviseur pour prévenir les CEMGs sur un réseau de Petri temporisé en présence de transitions incontrôlables. Il a été conçu pour répondre aux spécifications logiques et temporelles. Néanmoins, cette approche n'est valable que pour les réseaux de Petri à temps limité. Cependant, ces techniques ne sont pas pertinentes pour les systèmes complexes et réels car elles conduisent à des états d'explosion combinatoire.

Néanmoins, plusieurs travaux existants traitent des perturbations dans les modèles de GETs en utilisant des Dioïdes complets garantissant d'autres critères tels que l'ordonnancement dans les systèmes de criblage à haut débit (Shang, et al. [2013]), les critères du juste-à-temps (Oke et al. 2022) et les spécifications de partage des ressources (Goltz et al. [2022]).

Face à ce manque, une nouvelle technique de conception de lois de commande est proposée pour garantir les CEMs dans les RGETs avec certaines transitions d'entrée incontrôlables et partiellement observables. Cette méthode proposée implique des informations temporelles et ne souffre pas de ce problème, comme c'est le cas des approches qui exploitent les automates temporisés. Un ensemble de modèles Min-Plus est utilisé pour décrire le comportement du réseau et des inégalités Min-Plus linéaires sont utilisées pour caractériser les contraintes impliquées. Les principales raisons et les avantages pratiques du choix des modèles Min-Plus sont les suivants :

- i) Comme les CEMs traitées dans cette étude sont décrites comme une somme de marquages inférieure ou égale à une valeur entière, nous avons pensé directement à

utiliser des fonctions de compteur et l'algèbre Min-Plus pour représenter simplement chaque marquage,

- ii) Le vecteur d'état  $x(t)$  dans l'équation linéaire Min-Plus présente le comportement quantitatif du système et correspond au nombre de transitions qui s'enclenchent, ce qui facilite la résolution des problèmes de capacité des ressources tels que les CEMs.

L'objectif principal est de concevoir des lois de commande réalisables qui satisfont aux spécifications imposées sur les marquages des GETs et de traduire les formulations de ces contrôleurs uniquement avec des transitions observables.

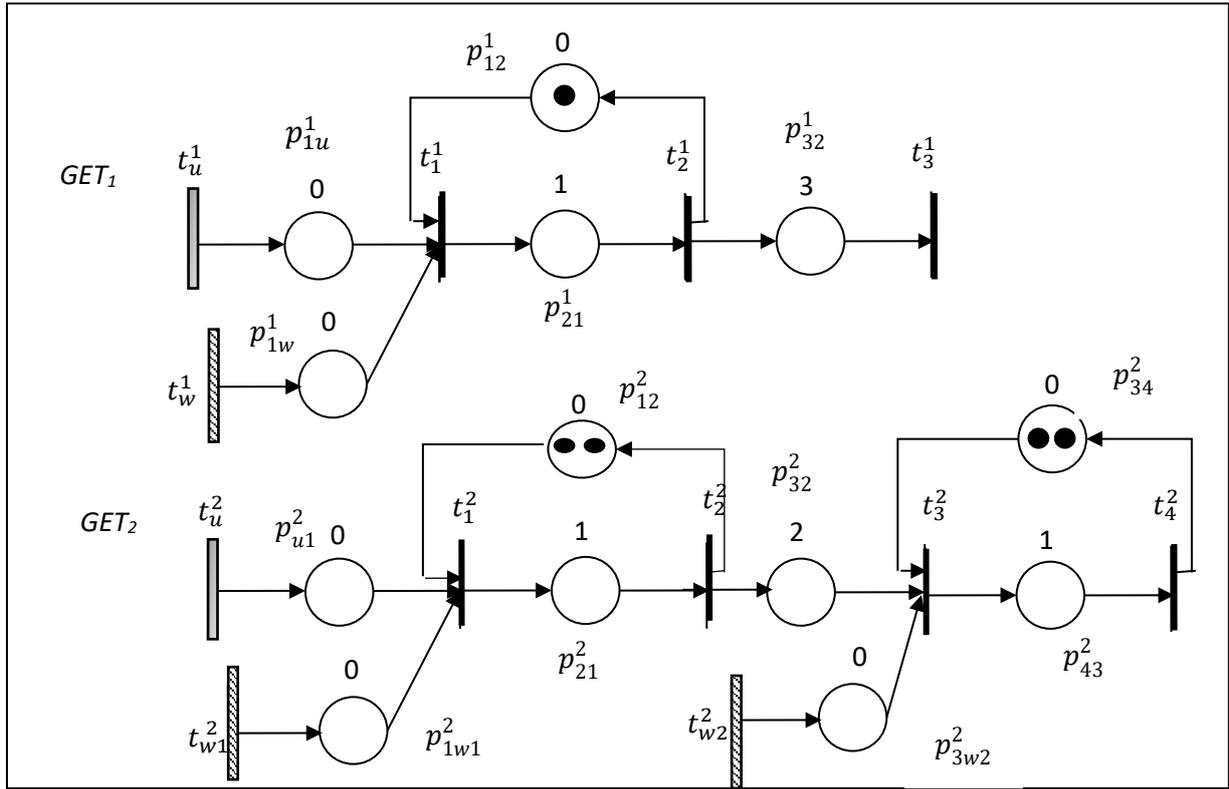
### 4.3. Formulation du problème des CEMs

Une contrainte d'exclusion mutuelle (Giua et al. [1992]) est une condition utilisée pour éviter l'occurrence d'un nombre particulier de jetons dans une somme de plus d'une place critique (deux ou plus) qui ne doit pas dépasser  $b$ , où  $b$  est un nombre entier positif qui est initialement connu et peut représenter une capacité de ressource qui doit être partagée exclusivement par plusieurs utilisateurs. Nous considérons que chaque GET<sub>l</sub> possède au moins une place limitée, notée  $p_{ij}^l$ , dont leur marquage est noté  $M_{ij}^l$ . En outre,  $M_{0ij}^l$  est le marquage initial de cette place, et  $x_i^l$  et  $x_j^l$  désignent respectivement les compteurs correspondants des transitions de sortie et d'entrée dans la place  $p_{ij}^l$ . Pour exprimer les CEMs dans une structure d'inégalité linéaire dans l'algèbre Min-Plus, nous combinons chaque transition du réseau avec une fonction compteur. En conséquence, nous obtenons :

$$M_{ij}^l(t) = M_{0ij}^l + x_j^l(t) - x_i^l(t) \quad (4.1)$$

Dans ce travail, nous traitons un réseau composé d'un certain nombre de GET séparés, chacun étant indexé par  $l$  (GET<sub>l</sub>),  $l=1, \dots, L$ . Chaque GET<sub>l</sub> perturbé possède une seule transition d'entrée contrôlable  $t_u^l$  et  $n$  transitions internes  $t_i^l$ , avec  $i = 1 \dots n$ . La Figure 4.2 montre un exemple de RGETs avec des transitions perturbées. Cet exemple présente des lignes de production, chacune est composée d'une transition de contrôle ( $t_u^1$  et  $t_u^2$ ) et des transitions incontrôlables ( $t_w^1$ ,  $t_{w1}^2$  et  $t_{w2}^1$ ). Par exemple, nous supposons par ces transitions perturbées que le bras du robot est indisponible. Ainsi, chaque GET a le comportement dynamique suivant :

$$x_l(t) = A_l \otimes x^l(t-1) \oplus B_l \otimes u^l(t) \oplus Q_l \otimes w^l(t) \quad (4.2)$$



**Figure 4. 2.** Un exemple de RGETs avec des transitions de perturbations

L'objectif principal est de concevoir une loi de commande qui assure la satisfaction des CEMs dans  $L$  GETs afin de garantir les fonctions nécessaires. Plus précisément, cette loi vise à limiter le nombre total de jetons dans ces places limités avec une capacité particulière dénotée par  $b$ . Une CEM peut être définie comme suit :

$$\sum_{l=1}^L M_{ij}^l (t) \leq b \quad (4.3)$$

En remplaçant  $M_{ij}^l(t)$  par son équation (4.1) donnée précédemment, l'inégalité (4.3) peut être exprimée comme suit :

$$\sum_{l=1}^L (M_{0ij}^l + x_j^l(t) - x_i^l(t)) \leq b \quad (4.4)$$

Dans l'algèbre Min-Plus, cette contrainte peut être décrite par :

$$\otimes_{l=1}^L x_j^l(t) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L x_i^l(t) \quad (4.5)$$

Pour mieux expliquer le problème de CEMs, nous considérons l'exemple de GETs illustré dans la Figure 4.2. Nous supposons que ce graphe présente deux lignes d'assemblage qui fonctionnent en parallèle. A un instant  $t$ , on peut avoir un jeton à la place  $p_{21}^1$  et deux jetons à  $p_{21}^2$  au même temps. Mais, en raison de contraintes technologiques, le nombre des composants

arrivant dans les deux machines  $M_1$  et  $M_2$  qui sont modélisées respectivement par les deux places  $p_{21}^1$  et  $p_{21}^2$ , ne peut pas dépasser deux ( $b=2$ ). Cette situation représente donc un problème d'exclusion mutuelle. L'inéquation suivante représente la contrainte imposée à ce graphe:

$$M_{21}^1(t) + M_{21}^2(t) \leq 2$$

Selon l'inéquation (4.4), cette contrainte peut être décrite par l'inéquation linéaire suivante:

$$(M_{021}^1 \otimes x_1^1(t) - x_2^1(t)) \otimes (M_{021}^2 \otimes x_1^2(t) - x_2^2(t)) \leq 2$$

Dans cet exemple on a  $M_{021}^1 = M_{021}^2 = 0$ . En simplifiant cette inéquation, on obtient :

$$x_1^1(t) \otimes x_1^2(t) \leq 2 \otimes x_2^1(t) \otimes x_2^2(t)$$

#### 4.4. Loi de commandes des RGETs sous CEMs

Dans cette section, nous présentons une méthode formelle de contrôle des RGETs perturbés soumis à des CEMs. L'objectif est de garantir la satisfaction de ces contraintes dans un ces graphes perturbés, parallèles et séparés. Tout d'abord, nous traitons la question d'une seule CEM. La technique est ensuite généralisée pour satisfaire plusieurs CEMs. Dans cette partie, nous supposons que toutes les transitions des GETs sont observables. En outre, seules les transitions d'entrée  $t_u^l$  sont contrôlables.

##### 4.4.1. Une seule CEM soumise à des places de RGETs

Comme  $\varphi \geq 1$ , est le nombre de transitions internes du GET et  $A_{ir}$  est l'élément de la  $i$ ème ligne et de la  $j$ ème colonne de la matrice  $A^\varphi$ , en utilisant l'équation explicite (1.5), nous obtenons la formule suivante pour  $x_i^l(t)$  pour chaque  $GET_l$  :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L x_i^l(t) = & \sum_{l=1}^L [ \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r(t - \varphi_l) \oplus \oplus_{k=0}^{\varphi_l-1} (A_l^k \otimes B_l)_i^l \otimes u^l(t - k) \oplus \\ & \oplus_{g=0}^{\varphi_l-1} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) ] \end{aligned} \quad (4.6)$$

En conséquence, la somme des  $l$  composantes de  $x_i^l(t)$  peut être décrite comme suit:

$$\begin{aligned} \otimes_{l=1}^L x_i^l(t) = & \otimes_{l=1}^L [ \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r(t - \varphi_l) \oplus \left( \oplus_{k=0}^{\varphi_l-1} (A_l^k \otimes B_l)_i^l \otimes \right. \\ & \left. u^l(t - k) \right) \oplus \left( \oplus_{g=0}^{\varphi_l-1} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \right) ] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous admettons qu'il y a un chemin  $\alpha_l$  reliant la transition de contrôle  $t_u^l(t)$  à la transition amont  $t_j^l$  de la place limitée  $p_{ji}^l$ , pour chaque CEM du modèle de réseau, indexé par  $l$  et nous indiquons la temporisation de ce chemin par  $\tau_\alpha^l$ . Par conséquent, l'inégalité suivante (4.8) est vraie pour chaque  $l, l = 1 \dots L$ :

$$\sum_{l=1}^L x_j^l(t) \leq \sum_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \otimes u^l(t - \tau_\alpha^l) \quad (4.8)$$

Dans l'algèbre Min-Plus, cette inégalité implique l'énoncé suivant :

$$\otimes_{l=1}^L x_j^l(t) \leq \otimes_{l=1}^L [(A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \otimes u^l(t - \tau_\alpha^l)] \quad (4.9)$$

Dans le premier scénario, nous analysons les RGETs qui sont limités à une CEM renforcée sur  $L$  places des GETs avec des perturbations. Les résultats suivants établissent les lois de commande  $u(t)$  et les conditions suffisantes pour l'existence de ces lois.

**Théorème 22.** Un RGETs partiellement contrôlable composé de  $L$  GETs dont l'évolution est donnée par l'équation (4.2) et soumis à une CEM de la forme (4.3), admet une loi de commande causale donnée par l'équation suivante :

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t) = \otimes_{l=1}^L F_1^l \otimes x^l(t-1) \oplus \otimes_{l=1}^L F_2^l \otimes w^l(t-1) \quad (4.10)$$

$$F_1^l = (b - M_{0ij}^l - (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l) \otimes \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \quad (4.11)$$

$$F_2^l = (b - M_{0ij}^l - (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l) \otimes (\oplus_{h=0}^{H_l} (A_l^h \otimes Q_l)_{ih}^l) \quad (4.12)$$

et  $\varphi_l = \tau_\alpha^l + 1$ , si les conditions suivantes sont vérifiées pour chaque GET:

$$(A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \leq b - M_{0ij}^l \otimes (A_l^k \otimes B_l)_i^l, \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } \tau_\alpha^l \quad (4.13)$$

$$F_1^l \geq 0 \quad (4.14)$$

$$F_2^l \geq 0 \quad (4.15)$$

### Démonstration.

Nous visons à synthétiser des lois de commande de la forme  $\otimes_{l=1}^L u^l(t) = \otimes_{l=1}^L F_1^l \otimes x^l(t-1) \oplus \otimes_{l=1}^L F_2^l \otimes w^l(t-1)$  qui assurent la satisfaction de la contrainte d'exclusion mutuelle de la forme (4.3) imposées sur des RGETs perturbées. En se basant sur l'équation (4.7)

et l'inéquation (4.9), nous remplaçons les deux termes  $\otimes_{l=1}^L x_i^l(t)$  et  $\otimes_{l=1}^L x_j^l(t)$  par leurs définitions dans l'inéquation de la contrainte (4.4), nous obtenons :

$$\otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes u^l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L \left[ \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi_l) \oplus \left( \oplus_{k=0}^{\varphi_l-1} (A_l^k \otimes B_l)_i^l \otimes u^l(t - k) \right) \oplus \left( \oplus_{g=0}^{\varphi_l-1} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \right) \right] \quad (4.16)$$

Pour garantir la satisfaction de l'inégalité (4.16), nous la divisons en trois critères qui doivent être satisfaites. Ils sont donnés par :

$$\otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes u^l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi) \quad (4.17)$$

$$\otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes u^l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{k=0}^{\varphi_l-1} (A_l^k \otimes B_l)_i^l \otimes u^l(t - k) \quad (4.18)$$

$$\otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes u^l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{g=0}^{\varphi_l-1} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \quad (4.19)$$

En utilisant les propriétés de l'algèbre Min-Plus, ces trois inégalités peuvent également être écrites comme suit :

$$\otimes_{l=1}^L u_l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi_l) \quad (4.20)$$

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{k=0}^{\varphi_l-1} (A_l^k \otimes B_l)_i^l \otimes u^l(t - k) \quad (4.21)$$

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{g=0}^{\varphi_l-1} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \quad (4.22)$$

Nous remplaçons  $\varphi_l$  par  $\tau_\alpha^l + 1$  dans les trois inéquations (4.20), (4.21) et (4.22). En conséquence, nous avons les nouvelles inéquations suivantes :

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t) \leq \left[ b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)_j^l \right] \otimes \otimes_{l=1}^L \left[ \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi_l) \right] \quad (4.23)$$

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha^l) \leq [b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l] \otimes \otimes_{l=1}^L \left[ \oplus_{k=0}^{\tau_\alpha^l} (A_l^k \otimes B_l)_i^l \otimes u^l(t - k) \right] \quad (4.24)$$

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha^l) \leq [b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l] \otimes \otimes_{l=1}^L \left[ \oplus_{g=0}^{\tau_\alpha^l} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \right] \quad (4.25)$$

La fonction  $u(t)$  est une fonction croissante, c'est-à-dire que  $u(t) \geq u(t-1) \geq u(t-2) \geq \dots \geq u(t-n)$ . En tenant compte de cette remarque, l'inégalité (4.21) peut être écrite comme suit :

$$\otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L (A_l^k \otimes B_l)_i^l \quad k = 0 \dots \tau_\alpha^l \quad (4.26)$$

D'autre part, les inégalités (4.23) et (4.25) qui démontrent la loi de commande n'a de sens que si elles sont positives, c'est-à-dire :

$$b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \otimes \otimes_{l=1}^L \left[ \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi_l) \right] \geq 0 \quad (4.27)$$

$$b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \otimes \otimes_{l=1}^L \left[ \oplus_{g=0}^{\tau_\alpha^l} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \right] \geq 0 \quad (4.28)$$

si l'équation suivante est valable pour chaque GET:

$$b - M_{0ij}^l - (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \otimes \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \geq 0 \quad (4.29)$$

Par conséquent, l'inéquation (4.17) représente la loi de commande fournie par le Théorème 22 qui garantit que la CEM présenté par l'expression (4.3) sera satisfaite dans le cas où les conditions (4.13), (4.14) et (4.15) sont valables dans chaque RGETs :

$$\otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha^l) \leq b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi_l) \oplus \otimes_{l=1}^L \oplus_{g=0}^{\tau_\alpha^l} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g) \quad \square$$

#### 4.4.2. Plusieurs CEMs soumises à des places de RGETs

Nous étendons l'approche précédente pour traiter un cas plus complexe où les RGETs perturbées sont soumises à  $S$  CEMs. Chaque contrainte est imposée sur  $L$  places qui est notée  $p_{i_j^s}^l$ ,  $s=1\dots S$ . On note respectivement par  $t_{j_s}^l$  et  $t_{i_s}^l$  les transitions d'entrée et de sortie, avec  $x_{j_s}^l$

et  $x_{i_s}^l$  définies leurs fonctions compteurs correspondantes. Le marquage initial est noté  $M_{0ij_s}^l$ . Le terme  $\alpha_s$  représente le chemin qui relie la transition de contrôle à la transition amont  $t_{j_s}^l$  des places sous contraintes  $p_{ij_s}^l$  et on note par  $\tau_{\alpha_s}^l$  le timing de ce chemin. L'inégalité suivante décrit les différentes CEMs :

$$\sum_{l=1}^L M_{0ij_s}^l \leq b_s \quad \text{pour } s = 1 \text{ à } S \quad (4.30)$$

**Théorème 23.** Soit un RGETs dont son comportement dynamique est défini par l'équation (4.2), Ce graphe est exposé à  $S$  CEMs de la forme (4.30) imposées à  $L$  GETs. La loi de commande causale est décrite par :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S (\bigotimes_{l=1}^L F_{1s}^l \otimes x^l(t-1) \oplus \bigotimes_{l=1}^L F_{2s}^l \otimes w^l(t-1)) \quad (4.31)$$

avec 
$$F_{1s}^l = (b_s - M_{0ij_s}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{j_s}^l) \otimes \bigoplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{i_s r}}^{\tau_{\alpha_s}^l + 1} \quad (4.32)$$

et 
$$F_{2s}^l = (b_s - M_{0ij_s}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{j_s}^l) \otimes \bigoplus_{h=0}^H (A_l^{g_{ls}} \otimes Q_{l_s})_{i_s h_s}^l \quad (4.33)$$

pour  $s = 1 \dots S$ , la loi de commande (4.17) est satisfaite si les conditions (4.13), (4.14) et (4.15) sont respectées pour les  $S$  contraintes.

**Démonstration.** La loi de commande développée assure la CEM si les conditions présentées par (4.13), (4.14) et (4.15) sont vérifiés, ce qui implique que les mêmes conditions doivent être validées pour satisfaire  $S$  contraintes entre les indices  $j_s^l$  et  $i_s^l$ . A cet égard, la loi de commande générale est formulée comme suit :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S \bigotimes_{l=1}^L u_s^l(t) = \bigoplus_{s=1}^S [\bigotimes_{l=1}^L (b_s - M_{0ij_s}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{j_s}^l) \otimes (\bigoplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{i_s r}}^{\tau_{\alpha_s}^l + 1} \otimes x^l(t-1)) \oplus -(\bigoplus_{h=0}^H (A_l^{g_{ls}} \otimes Q_{l_s})_{i_s h_s}^l \otimes w_h^l(t-1))] \quad \square$$

#### 4.5. Conception de lois de commande pour les RGETs partiellement observables et contrôlables sous CEMs

Dans la suite, nous supposons que seules les transitions d'entrée  $t_u^l$  sont contrôlées. En plus, les seules transitions observables dans les RGETs sont les transitions de sortie de chaque boucle.

##### 4.5.1. Une seule CEM soumis à des places de RGETs

Dans cette partie, nous étendons l'hypothèse d'observabilité et nous proposons une nouvelle approche de contrôle pour les RGETs partiellement observables avec des transitions perturbées.

**Théorème 24.** Soit un réseau de GETs partiellement observables et contrôlables soumis à une CEM. La loi de commande causale est de la forme suivante :

$$u(t) = \bigotimes_{l=1}^L u^l(t) = \bigotimes_{l=1}^L F_1^l \otimes x_r^l(t-1) \oplus \bigotimes_{l=1}^L F_2^l \otimes x_r^l(t - \tau_{\delta_\beta}^l - 1) \oplus \bigotimes_{l=1}^L F_3^l \otimes w_h^l(t-1) \quad (4.34)$$

avec:

$$F_1^l = \bigoplus_{r \in y} (b - M_{0ij}^l - (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)^l_j \otimes \bigoplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l}) \quad (4.35)$$

$$F_2^l = \bigoplus_{r \in z} \bigoplus_{\beta=1}^E (b - m_{\delta_z}^l - M_{0ij}^l - (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)^l_j \otimes \bigoplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l}) \quad (4.36)$$

$$F_3^l = \bigoplus_{h \in y} \bigoplus_{h=1}^{H_l} (b - M_{0ij}^l - (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)^l_j \otimes (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l) \quad (4.37)$$

et  $\varphi_l = \tau_\alpha^l + 1$  si pour chaque GET du réseau, les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)^l_j \leq b - M_{0ij}^l \otimes (A_l^k \otimes B_l)^l_i \quad (4.38)$$

$$F_1^l, F_2^l, F_3^l \geq 0 \quad (4.39)$$

**Démonstrations.** Dans la sous-section précédente (4.4.1), nous avons défini une méthode analytique pour la conception des lois de commande permettant de résoudre le problème des CEMs dans les RGETs totalement observables avec des entrées de perturbation. La loi de commande présentée dans le Théorème 22 résulte de l'inégalité (4.10) comme ci-dessous :

$$\bigotimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_{\alpha_s}^l) \leq b - \bigotimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \bigotimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha} \otimes B_l)^l_j \otimes \bigotimes_{l=1}^L \bigoplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \varphi_l) \oplus \bigotimes_{l=1}^L \bigoplus_{g=0}^{\varphi_l-1} (A_l^g \otimes Q_l)_{ih}^l \otimes w_h^l(t-g) \quad (4.40)$$

L'équation (4.40) décrit le contrôleur qui satisfait la contrainte de marquage (4.3), si les conditions (4.13), (4.14) et (4.15) sont assurées. Néanmoins, la formule dépend des transitions internes qui ne sont pas observables  $t_i \in t_{\beta}$ , d'où ce contrôleur n'est pas réalisable. Chaque boucle du GET perturbé considéré comporte au moins une transition observable,  $t_i \in t_y$ , de

sorte que ce contrôleur peut être converti en un contrôleur réalisable si le résultat de la propriété 1 est requis. En conséquence, l'équation de la loi de commande est divisée en deux parties : La première partie est en termes de transitions observables, tandis que la seconde en fonction des transitions non observables, comme indiqué dans l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha^l) \leq & [\oplus_{r \in \beta} (b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l) \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes \\ x_r^l(t - \varphi_l) \oplus & [\oplus_{r \in \gamma} b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l) \otimes \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l(t - \\ \varphi_l) \oplus & [\oplus_{h \in \gamma} \oplus_{h=0}^{H_l} \otimes_{l=1}^L (A_l^g \otimes Q)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g)] \end{aligned} \quad (4.41)$$

En tenant compte des résultats de la propriété 1, la loi de commande calculée en fonction des transitions observables est la suivante:

$$\begin{aligned} \otimes_{l=1}^L u^l(t - \tau_\alpha^l) \leq & [\oplus_{r \in \beta} \oplus_{\beta_l=1}^E (b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l \otimes \otimes_{l=1}^L m_{\delta_\beta}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l) \otimes \\ \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l & (t - \tau_{\delta_\beta}^l - 1)] \oplus [\oplus_{r \in \gamma} (b - \otimes_{l=1}^L M_{0ij}^l - \otimes_{l=1}^L (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_j^l) \otimes \\ \otimes_{l=1}^L \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{ir}}^{\varphi_l} \otimes x_r^l & (t - \varphi_l)] \oplus [\oplus_{h \in \gamma} \oplus_{h=0}^{H_l} \otimes_{l=1}^L (A_l^g \otimes Q)_{ih}^l \otimes w_h^l(t - g)] \end{aligned} \quad (4.42)$$

□

#### 4.5.2. Plusieurs CEMs soumis à des places de RGETs

L'approche précédente est étendue pour traiter un cas plus complexe dans lequel les GETs perturbés partiellement observables sont soumis à  $S$  CEMs défini par l'inéquation (4.30). Chaque contrainte  $s$  est appliquée à  $L$  places, désignés par  $p_{ijs}^l$ .

**Théorème 25.** Nous considérons un GET partiellement observable avec perturbations soumise à  $S$  CEMs de la forme (4.3). Le contrôleur :

$$\begin{aligned} u(t) = \oplus_{s=1}^S \otimes_{l=1}^L u_s^l(t) = \oplus_{s=1}^S & (\otimes_{l=1}^L F_{1s}^l \otimes x_r^l(t - 1) \oplus \otimes_{l=1}^L F_{2s}^l \otimes x_r^l(t - \tau_{\delta_\beta}^l - \\ 1) \oplus & \otimes_{l=1}^L F_{3s}^l \otimes w_h^l(t - 1)) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\text{avec } F_{1s}^l = \oplus_{r \in \gamma} (b_s - M_{0ijs}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{js}^l) \otimes \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{isr}}^{\tau_{\alpha_s}^l + 1} \quad (4.44)$$

$$F_{2s}^l = \oplus_{r \in \gamma} \oplus_{\beta_l=1}^E (b_s - m_{\delta_\beta}^l - M_{0ijs}^l - (A_l^{\tau_\alpha^l} \otimes B_l)_{js}^l) \otimes \oplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{isr}}^{\varphi_l} \quad (4.45)$$

$$\text{et } F_{3s}^l = \oplus_{h \in \gamma} (b_s - M_{0ijs}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{js}^l) \otimes \oplus_{h=0}^{H_l} (A_l^{g_l} \otimes Q_{ls})_{is, h_s}^l \quad (4.46)$$

satisfait la spécification (4.3) si les conditions (4.38) et (4.39) sont vérifiées pour  $s = 1 \dots S$ .

**Démonstrations.** Selon le Théorème 24, si les critères décrits par (4.38) et (4.39) sont vérifiés, la loi de commande explicite satisfaisant la CEM admet que les mêmes conditions doivent être validées pour chaque indice  $j_s^l$  et  $i_s^l$ . La loi de commande définie par :

$$u(t) = \bigoplus_{s=1}^S (\bigotimes_{l=1}^L u_s^l(t))$$

garantit la satisfaction des contraintes d'exclusions mutuelles S. □

#### 4.6. Algorithme de commande

Cette sous-section développe une procédure de contrôle pour mettre en œuvre la supervision des CEMs soumis à des RGETs. L'algorithme 6 montre une méthodologie explicite pour mettre en œuvre la synthèse de contrôle, y compris le calcul d'une loi de commande. Dans le cas d'une seule CEM, les étapes de l'algorithme sont fondamentalement les mêmes; nous considérons seulement le cas pour  $s=1$ . Cette méthodologie de contrôle commence par fixer toutes les paramètres et les matrices des GETs dans l'algèbre Min-Plus. Ensuite, les conditions d'existence des lois de commande causales, qui sont écrites en termes de paramètres de la contrainte, sont vérifiées. Enfin, le Théorème 25 est utilisé pour calculer directement les lois de commande. En outre, la mise en œuvre de ces techniques de contrôle analytiques est simple et ne nécessite pas un espace mémoire important.

---

#### Algorithme 6: Contrôle des RGETs perturbés sous CEMs

---

Entrée :  $L, A_l, B_l, Q_l, M_{0i_s j_s}^l, i_s, j_s, \tau_{\alpha_s}^l, S, H, b_s$

Sortie :  $u_s^l$

**% Initialisation**

$\varphi_{l_s} := \tau_{\alpha_s}^l + \mathbf{1}$

*Pour*  $s \in [1 \dots S]$  *faire*    **% Indice et nombre des places sous contraintes**

*Pour*  $h \in [1 \dots H]$  *faire*    **% Indice et le nombre de transitions perturbées**

*Pour*  $l \in [1 \dots L]$  *faire*    **% Indice et nombre des GETs séparés**

*Pour*  $k_s \in [1 \dots \tau_{\alpha_s}^l]$  *faire*    **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

*Pour*  $g_{l_s} \in [1 \dots \tau_{\alpha_s}^l]$  *faire*    **% Compteur de temps pour le chemin  $\alpha_s$**

**% Vérifier les conditions suffisantes**

Si  $b_s - M_{0i_s j_s}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{j_s}^l \otimes \left( \bigoplus_{r=1}^{n_l} A_{l_{i_s}}^{\varphi_l} \right) \geq \mathbf{0}$

et  $(b_s - M_{0i_s j_s}^l - (A_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes B_l)_{j_s}^l) \otimes \left( \bigoplus_{h=0}^{H_l} (A_l^{g_l} \otimes Q_{l_s})_{i_s h_s}^l \right) \geq \mathbf{0}$

---

$$\text{et } (\mathbf{b}_s - \mathbf{M}_{0ij_s}^l - \mathbf{m}_{\delta_z}^l - (\mathbf{A}_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes \mathbf{B}_l)_{j_s}^l) \otimes \left( \bigoplus_{r=1}^{n_l} \mathbf{A}_{l_{i_s}}^{\varphi_l} \right) \geq \mathbf{0}$$

$$\text{et } (\mathbf{A}_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes \mathbf{B}_l)_{j_s}^l \leq \mathbf{b}_s - \mathbf{M}_{0ij_s}^l - (\mathbf{A}_l^{k_l} \otimes \mathbf{B}_l)_{i_s}^l \text{ faire}$$

% Calculer la loi de commande présentée dans le Théorème 25

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s^l = & \bigoplus_{s=1}^S \bigoplus_{r \in \mathcal{Y}} \bigotimes_{l=1}^L \left[ (\mathbf{b}_s - \mathbf{M}_{0ij_s}^l - (\mathbf{A}_l^{\tau_{\alpha_s}^l} \otimes \mathbf{B}_l)_{j_s}^l) \otimes \bigoplus_{r=1}^{n_l} \mathbf{A}_{l_{i_s r}}^{\tau_{\alpha_s}^l + 1} \otimes \mathbf{x}_r^l (t - 1) \oplus \right. \\ & \left. \bigoplus_{h=0}^H (\mathbf{A}_l^{g_l} \otimes \mathbf{Q}_{l_s})_{i_s h_s}^l \otimes \mathbf{w}_h^l (t - 1) \right] \oplus \bigoplus_{r \in \beta} \bigoplus_{\beta=1}^E [(\mathbf{b}_s - \mathbf{m}_{\delta_\beta}^l - \mathbf{M}_{0ij_s}^l - (\mathbf{A}_l^{\tau_{\alpha}} \otimes \\ & \mathbf{B}_l)_{j_s}^l) \otimes \bigoplus_{r=1}^{n_l} \mathbf{A}_{l_{i_s r}}^{\varphi_l} \otimes \mathbf{x}_r^l (t - \tau_{\delta_\beta}^l - 1)] \end{aligned}$$

Sinon

Ecrire erreur ;

*Retour*

*Fin si*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

*Fin pour*

---

## 4.7. Etude de cas : application de l'approche proposée à un système de désassemblage

Nous prenons l'exemple de système de désassemblage présenté dans la partie de cas d'étude du chapitre 2. La Figure 2.4 illustre le modèle de réseau du système correspondant, ainsi la Figure 2.5 présente la modélisation de ce système. Ce réseau est composé de deux lignes de désassemblage.

### 4.7.1. Modélisation du système de désassemblage

La Figure 4.3 représente le modèle du système correspondant. Ce dernier est constitué de deux lignes de désassemblages où chacun permet de décomposer les articles en fin de vie en deux composants. Une fois que ces derniers sont obtenus, le robot  $R_1$  qui est représenté par la place  $p_{43}^1$  transfère le composant à la machine  $MA_2$  pour exécution. A son tour, le robot  $R_2$ , qui est modélisé par la place  $p_{32}^2$  transfère le composant à la machine  $MA_4$  pour exécution. En raison de contraintes technologiques, le nombre de composants arrivant dans les robots  $R_1$  et

$R_2$ , ne peut pas dépasser deux. Cette situation représente donc un problème d'exclusion mutuelle. Ainsi, les CEMs imposées aux deux places peuvent être exprimées par :

$$M_{43}^1(t) + M_{32}^2(t) \leq 2$$

Comme mentionné avant, seules les transitions  $t_u^1, t_u^2, t_2^1, t_3^2, t_4^1$ , et  $t_5^2$  sont observables.

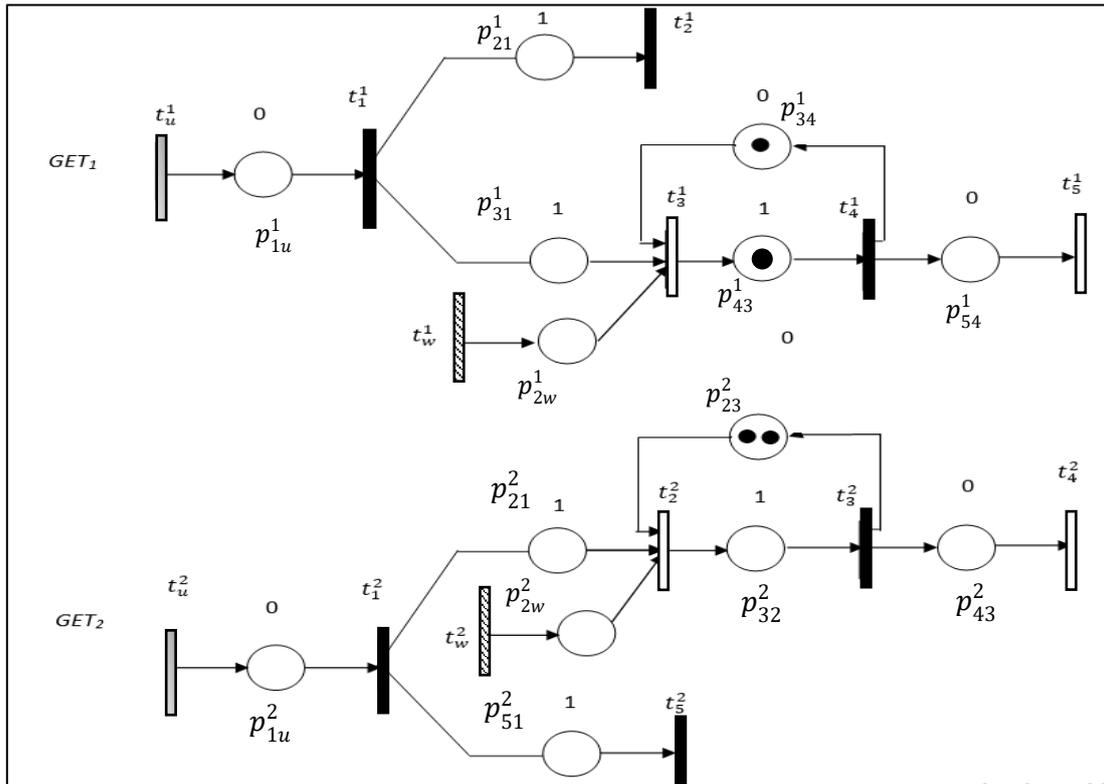


Figure 4.3. Réseau de GET du système étudié

Table 4.1. Les événements identifiés pour le système de désassemblage illustré à la Figure 4.3.

Places	Description
$p_{1u_1}^1, p_{2u_1}^2$	Disponibilité des parties 1 et 2 pour traitement par $MA_1$ et $MA_2$
$p_{21}^1, p_{51}^2$	Composants obtenus lors de l'opération de désassemblage de pièces A
$p_{31}^1, p_{21}^2$	Composants obtenus lors de l'opération de désassemblage de pièces B
$p_{43}^1, p_{32}^2$	Robot 1 et robot 2 respectivement
$p_{34}^1, p_{23}^2$	Capacité $c_1$ du robot 1 et capacité $c_2$ du robot 2
$p_{54}^1, p_{43}^2$	Machine $MA_3$ et $MA_4$

Transitions	Description
$t_1^1, t_1^2$	Démarrage de l'instance de traitement du système de désassemblage
$t_2^1, t_5^2$	Transfert de composantes vers le recyclage
$t_3^1, t_2^2$	Transfert la première composante par R1 et la deuxième par R2
$t_{w_1}^1, t_{w_1}^2$	Panne du bras du robot
$t_4^1, t_3^2$	Instance de départ de $MA_3$ et $MA_4$ respectivement
$t_5^1, t_4^2$	Fin de l'opérations

#### 4.7.2. Description du fonctionnement du système

Comme illustré dans le graphe d'accessibilité de la Figure 4.3, l'ensemble  $\{\mu_4, \mu_6\}$  présente les marquages interdits. Pour cet exemple, nous appliquons le Théorème 24 pour calculer un contrôleur réalisable satisfaisant les CEMs. Les équations explicites de ce système sont représentées par :

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x^1(t-1) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes u^1(t) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes w^1(t)$$

et

$$x^2(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x^2(t-1) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes u^2(t) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes w^2(t)$$

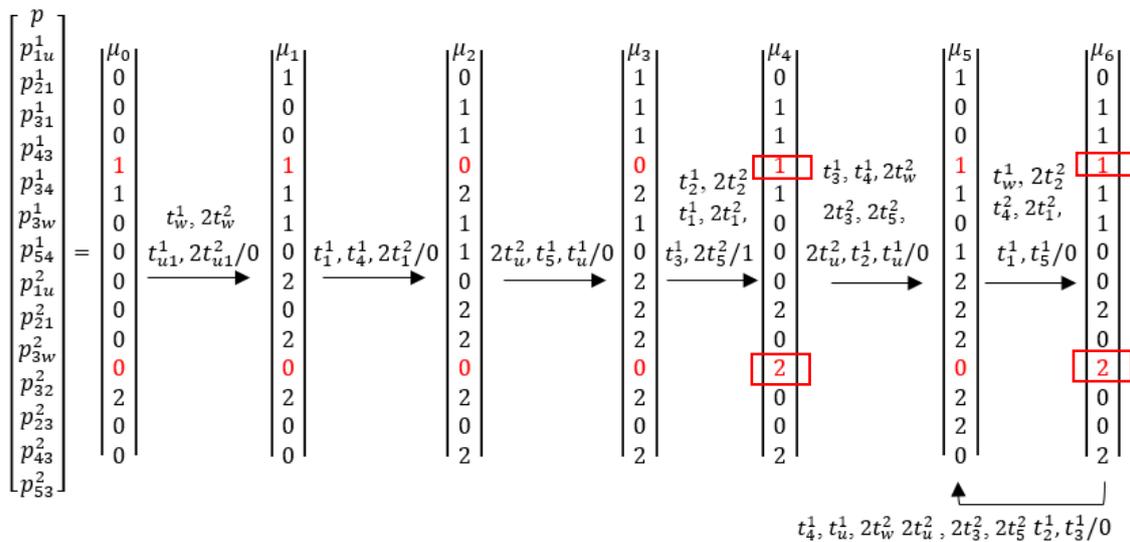


Figure 4. 4. Graphe de marquage de la Figure. 4.3

### 4.7.3. Conception des lois de commande

Afin de s'assurer que la CEM exprimée par l'inégalité (4.3) est respectée, avec :  $L = 2, l \in \{1, 2\}, i^1 = 4, j^1 = 3, i^2 = 3, j^2 = 3$  et  $b = 2$ , nous vérifions que les conditions du Théorème 24 sont respectées. Pour le premier  $GET_l$ , il existe un chemin  $\alpha_1$  reliant la transition de contrôle  $t_{u1}^1$ , à la transition  $t_3^1$ , avec un timing de  $\tau_{\alpha}^1 = 1$ . Par conséquent,  $\varphi_1 = \tau_{\alpha}^1 + 1 = 2$ . Le marquage initial de la première place bornée  $p_{43}^1$  est nul ( $M_{043}^1 = 1$ ). La satisfaction de la première condition :

$$(A_1^{\tau_{\alpha_1}} \otimes B_1)_j^1 \leq (b - M_{043}^1) \otimes (A_1^k \otimes B_1)_i^1$$

est vérifiée pour  $k = 0$  et  $k = \tau_{\alpha_1} = 1$ , avec  $(A_1^{\tau_{\alpha_1}} \otimes B_1)_3^1 = 0$  et  $(A_1^k \otimes B_1)_4^1 = [\varepsilon, \varepsilon]$ .

De même, nous calculons les mêmes paramètres pour  $GET_2$ . Nous avons  $M_{032}^2 = 0$ , le temps du chemin reliant la transition  $t_{u1}^2$  à  $t_2^2$  est  $\tau_{\alpha_2} = 1$  et  $\varphi_2 = \tau_{\alpha_2} + 1 = 2$ . La condition ci-dessous est aussi vérifiée pour  $k = 0$  à  $\tau_{\alpha}^2 = 1$ , avec  $(A_2^{\tau_{\alpha}^2} \otimes B_2)_3^2 = 0$  et  $(A_2^k \otimes B_2)_3^2 = [\varepsilon, \varepsilon]$  :

$$(A_2^{\tau_{\alpha}^2} \otimes B_2)_j^2 \leq (b - M_{032}^2) \otimes (A_2^k \otimes B_2)_i^2$$

En conséquence, ce feedback garantissant la satisfaction des CEMs dans le RGETs perturbées est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= u^1(t) \otimes u^2(t) \\ &= (2 - 0 - ((A_1^{\tau_{\alpha}^1} \otimes B_1)_3^1 \otimes (A_2^{\tau_{\alpha}^2} \otimes B_2)_3^2)) \otimes ([\oplus_{r=1}^5 A_{4r_1}^{\varphi_1} \otimes x_r^1(t-1)] \otimes \\ &\quad [\oplus_{r=1}^5 A_{3r}^{\varphi_2} \otimes x_r^1(t-1)]) \otimes (\oplus_{h=0}^{H_1} (A_1^g \otimes Q_1)_{ih}^1 \otimes \oplus_{h=0}^{H_2} (A_2^g \otimes Q_2)_{ih}^2) \end{aligned}$$

Après calcul, cette expression devient :

$$u(t) = 1 \otimes x_3^1(t-1) \oplus 1 \otimes w^1(t-1) \otimes (1 \otimes x_2^2(t-1) \oplus 1 \otimes w^2(t-1))$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1 \otimes x_1^1(t-2) \oplus 2 \otimes x_4^1(t-1) \oplus 1 \otimes w^1(t-1)) \otimes (1 \otimes x_1^2(t-2) \oplus 3 \\ &\quad \otimes x_3^2(t-2) \oplus 1 \otimes w^2(t-1)) \end{aligned}$$

#### 4.7.4. Interprétation des lois de commande calculées

La méthode proposée repose sur l'utilisation des modèles RGETs et de l'algèbre Min-Plus pour synthétiser des lois de commande garantissant le respect des CEMs imposées à certaines places de ces graphes. La loi de commande calculée est traduite en places temporisées et marquées, appelées moniteurs, en relation avec le modèle RGETs initial (voir Figure. 4.5). Il est représenté par deux transitions intermédiaires et sept moniteurs caractérisés par un double cercle. Les deux places  $p_{61}^1$  et  $p_{6w}^1$  contiennent un jeton, et leur temporisation est respectivement de 2 et 1. La place  $p_{64}^1$  a une temporisation de 1 et deux jetons. L'opération  $\oplus$  correspond à la synchronisation de ces trois places sur la même transition  $t_{61}^2$ . Cependant, les places  $p_{61}^2$  et  $p_{63}^2$  ont respectivement un et trois jetons. Leur temporisation est de 2 unités. La place  $p_w^2$  a une temporisation et deux jetons. Ces places sont connectées à  $t_6^2$ . Cependant, la dernière place  $p_u$  a un timing et un nombre de jetons nul. En fait, cette place est liée directement aux transitions de contrôle  $t_u^1$  et  $t_u^2$ . Elle exprime explicitement le produit  $\otimes$  dans l'algèbre Min-Plus qui est une addition habituelle de deux fonctions compteurs  $x_6^1(t)$  et  $x_6^2(t)$ . La performance de l'approche est facilement visible sur la partie du graphe de marquage donnée par la Figure 4.6.

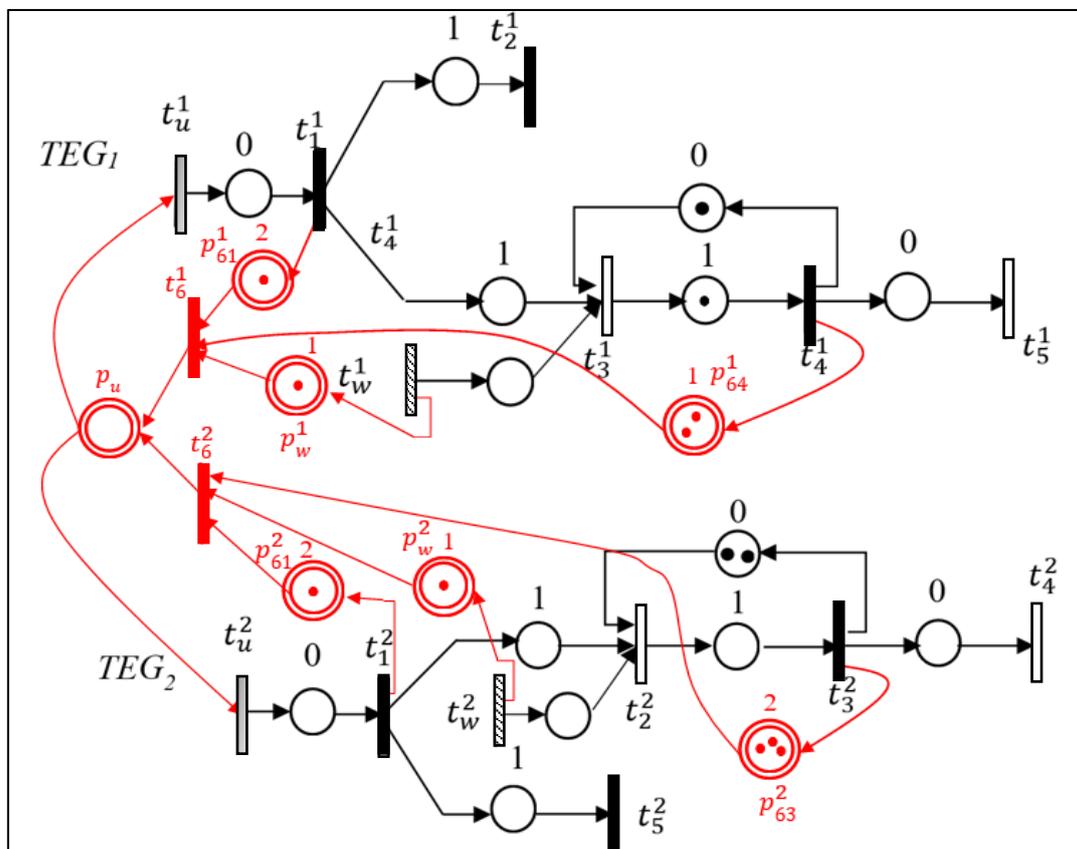


Figure 4. 5. Réseau de Petri du système contrôlé

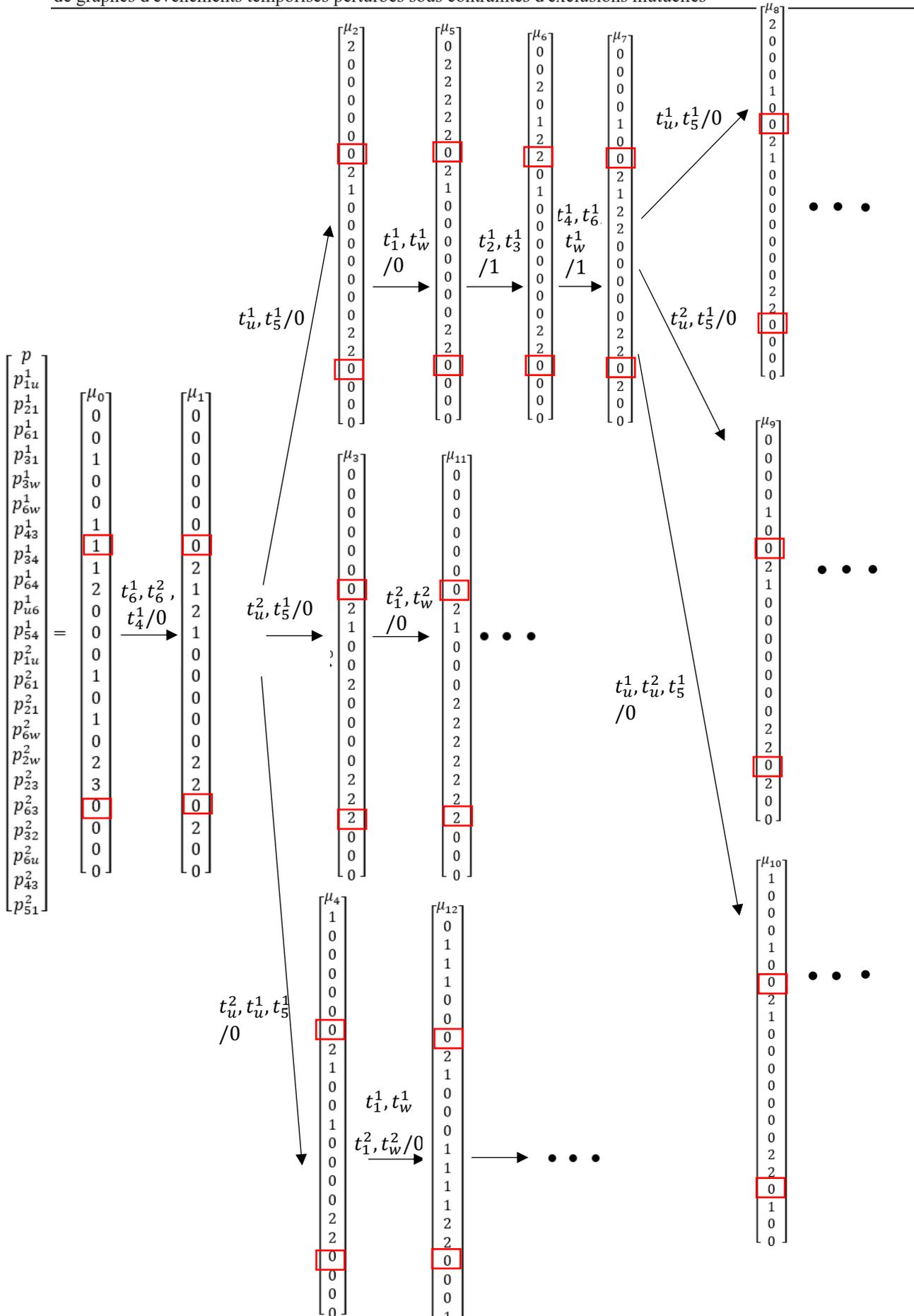


Figure 4.6. Graphe d'accessibilité de la Figure 4.5

## 4.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle méthode pour développer des contrôleurs de rétroaction destinés à des RGETs partiellement observables et contrôlables, soumis à des CEMs. Cette approche repose sur l'exploitation de l'algèbre Min-Plus, où les comportements de ces graphes ainsi que les CEMs sont respectivement modélisés par des équations linéaires et des inégalités de l'algèbre Min-Plus. L'objectif central de cette étude est de développer des lois de commande qui garantissent le respect de ces contraintes spécifiques. Pour atteindre cet objectif, nous avons établi des conditions suffisantes qui doivent être satisfaites par chaque RGET afin de concevoir une loi de commande qui respecte ces limitations. Pour illustrer l'efficacité de cette méthode, nous avons examiné un exemple concret mettant en jeu un système de désassemblage.

Ce chapitre constitue une contribution importante pour le développement de stratégies de contrôle dans des environnements où des CEMs sont imposées aux SEDs. Les résultats obtenus ouvrent la voie à l'application pratique de cette méthode dans des contextes variés et complexes.

---

# Conclusions et perspectives

Le contrôle des processus de désassemblage constitue un pilier fondamental de la gestion efficace des produits en fin de vie, des déchets industriels et de la durabilité environnementale. Il englobe un ensemble de méthodes, de techniques et de normes visant à superviser et à réguler chaque étape de désassemblage, depuis la préparation initiale jusqu'à la récupération et la gestion des matériaux. Lorsque des produits en fin de vie, des machines défectueuses ou des systèmes obsolètes doivent être démontés, le contrôle de ce processus revêt une importance cruciale pour minimiser les risques potentiels, maximiser la récupération de matériaux précieux et assurer le respect des normes environnementales et de sécurité.

En effet, il s'agit d'un processus divergent au cours duquel un produit récupéré est décomposé en plusieurs parties et/ou sous-ensembles afin d'être recyclable et réutilisable. Il se réfère généralement à des règles ou des mécanismes qui empêchent deux entités ou processus d'occuper ou d'utiliser simultanément une ressource ou une zone donnée. Dans ce travail, nous abordons les contraintes de marquage, les contraintes de marquage généralisées et les contraintes d'exclusions mutuelles.

L'objectif principal du contrôle des processus de désassemblage est de veiller à ce que chaque étape soit réalisée de manière méthodique et cohérente, en garantissant la traçabilité des composants, en évitant les dommages inutiles et en facilitant la récupération optimale des matériaux réutilisables. Pour cela, des techniques et des méthodes spécifiques sont mises en œuvre, et elles peuvent varier en fonction de la nature des composants mécaniques et de leur complexité.

Ce type de système se conforme à des spécifications et des règles opérationnelles bien déterminées. Leur état change en réaction à l'occurrence d'événements distincts et non synchronisés dans le temps, tels que l'arrivée d'un produit ou l'ordre du travail, la réalisation d'une tâche, etc. Les SEDs sont puissants pour modéliser des systèmes complexes et prévoir leur comportement dans différentes conditions. Ils sont largement utilisés pour la conception, l'analyse et la simulation de systèmes dynamiques dans lesquels les transitions entre les états sont déclenchées par des événements discrets plutôt que par une évolution continue.

Dans cette mémoire nous proposons trois méthodes de contrôle analytique pour le respect des contraintes de capacité dans les SEDs avec perturbations modélisées par des GETs/RGETs. Pour ce faire, nous supposons que ces graphes contiennent un ensemble de transitions d'entrée incontrôlables et qu'ils incluent également soit des contraintes de marquage, soit des CMGs, ou des CEMs imposées sur certaines places ou chemins dans ces graphes. Dans les études actuelles, le comportement dynamique des GETs est décrit par des équations linéaires tandis que les contraintes de capacité sont représentées à l'aide d'inégalités dans l'algèbre Min-Plus. Les spécifications imposées, sont prises en compte lors de la synthèse des lois de commande. Les contrôleurs doivent respecter ces contraintes tout en maximisant les performances souhaitées.

À ce point, nous synthétisons les diverses contributions élaborées au cours de cette étude, qui portent sur la modélisation, l'évaluation des résultats et le contrôle des processus de désassemblage à travers l'utilisation des approches algébriques. Les principales réalisations de cette recherche peuvent être classées selon les axes suivants:

- Dans le deuxième chapitre, nous considérons les systèmes de désassemblage modélisés par des GETs et soumis à des contraintes de marquage. Une méthodologie pour concevoir des lois de commande afin de garantir ces contraintes est proposée. Plus précisément, une formalisation mathématique de ce problème de contrôle est développée en utilisant l'algèbre Min-Plus et les GETs. Nous avons commencé par traiter le cas où les contraintes de marquage sont imposées à des places des graphes perturbés et totalement observables. Ensuite, nous avons étendue notre approche en considérant le cas des contraintes soumis à une succession de places (chemins). Dans les deux cas, nous avons abordé les cas où ces graphes étaient soumis à une seule contrainte, puis à plusieurs contraintes. Puis nous avons envisagé les GETs partiellement contrôlables et observables soumis à des spécifications imposées sur des chemins. Ces méthodes algébriques sont exposées à travers une procédure algorithmique, visant à démontrer sa faisabilité même dans le contexte des systèmes industriels complexes. Nous avons terminé ce chapitre en présentant un exemple concret qui illustre les propositions théoriques avancées. Le calcul des lois de commande ne demande ni outils spécifiques ni ressources informatiques significatives.
- Le troisième chapitre est une extension des résultats et des méthodes obtenues dans le chapitre 2. Nous avons proposé des approches analytiques pour synthétiser des lois de commande qui vise à contrôler les CMGs imposées à certaines places des GETs avec

quelques entrées perturbées. Dans un premier temps, nous avons considéré que ces graphes sont totalement observables, puis nous avons envisagé des graphes partiellement observables. L'objectif principal est de concevoir des lois de commande réalisables qui satisfont ces spécifications et de traduire les formulations de ces contrôleurs uniquement avec des transitions observables. Par conséquent, nous proposons un algorithme pour la synthèse des superviseurs afin de démontrer l'aspect pratique de l'outil et de généraliser son application à des systèmes réels. Il convient de mentionner que ces recherches ne nécessitent pas d'équipement spécialisé ni de ressources informatiques intensives pour le calcul des lois de commande. En conclusion, nous avons mis en évidence les résultats mathématiques obtenus en présentant une analyse détaillée d'un cas d'étude d'un processus de désassemblage

- L'objectif principal du quatrième chapitre est d'éviter les conflits et les problèmes liés à l'accès concurrentiel aux ressources partagées tel que les CEMs. Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode innovante de conception des contrôleurs pour satisfaire les CEMs imposées à certaines places dépendantes des GETs perturbés totalement observable. Ensuite, nous avons assoupli l'hypothèse d'observabilité de toutes les transitions d'entrées de ces graphes et de proposer de nouvelles méthodes de contrôle pour satisfaire les besoins des CEMs dans ces graphes. Pour montrer l'efficacité de cette stratégie de contrôle, un exemple de système de désassemblage avec des perturbations et soumis à des contraintes de capacité est illustré.

Les contrôleurs calculés sont convertis en emplacements temporisés et marqués, appelés moniteurs connectés aux premiers GET ou RGETs. Ces emplacements servent de superviseurs, empêchant la violation des restrictions. Dans la réalité, ces contrôleurs ajoutés peuvent se présenter sous la forme d'un programme installé directement dans le système ou de dispositifs temporisés agissant comme des contacteurs. Effectivement, ces approches proposées ont mis en évidence plusieurs avantages notables tels que :

- Le contrôleur résultant peut être traduit en une procédure algorithmique. En effet, les mises en œuvre de ces méthodes sont simples et n'exigent pas de grande quantité d'espace mémoire. Par conséquent, cette conversion simplifie l'intégration du contrôleur dans le système désiré et permet également une utilisation optimale des fonctionnalités et des ressources du système.
- La méthode analytique n'est pas confrontée à l'explosion des états, comme c'est le cas pour les approches qui utilisent des automates temporisés ou d'autres outils graphiques.

Les différentes techniques qui utilisent des modèles dioïdes sont formelles et permettent de traiter des applications complexes.

- La résolution de ces équations linéaires et le calcul des lois de contrôle ne nécessitent pas d'outils spécifiques et de ressources informatiques lourdes. Les estimations de l'efficacité et de la rentabilité de ces approches sont simplifiées, ce qui les rend plus facilement utilisables dans différents contextes industriels.
- Cette méthodologie de contrôle formel est exhaustive et admet une solution réalisable si les conditions suffisantes sont satisfaites.
- Les différentes approches qui utilisent les modèles Min-Plus sont analytiques et exhaustives ce qui les rend aptes à aborder des applications réelles. Leur caractère analytique assure une modélisation mathématique rigoureuse. Ces méthodes peuvent être efficacement utilisées dans différentes disciplines pour résoudre des problèmes complexes et concrets.
- L'aspect temporel est incorporé à la fois dans les spécifications de contrôle et dans la structure du modèle.

Néanmoins, malgré les progrès considérables, il est important de noter que ces approches présentent encore certaines limites. Ainsi, des horizons de recherche s'ouvrent pour améliorer les méthodes présentées dans cette étude, et les rendre plus performantes et mieux adaptées aux exigences particulières des systèmes de désassemblage. Voici quelques idées prometteuses qui méritent d'être explorées :

- Il semble intéressant d'étudier la robustesse des lois de commande calculées en intégrant les défaillances dans les systèmes manufacturier ou en associant les intervalles de temps pour toutes les places et en calculant des contrôleurs robustes du processus en présence des perturbations.
- Pour tenir compte d'une tolérance, nous pouvons étendre nos résultats aux graphes d'événements P-temps, qui sont des graphes d'événements où le temps de résidence des jetons dans les places est limité par des fenêtres temporelles spécifiées.
- Nous remarquons que les lois de commande établies dans les approches actuelles ne sont pas nécessairement maximales permissives. Il serait pertinent dans les futurs travaux d'améliorer cette technique algébrique à cet égard, en développant des contrôleurs optimaux et plus permissifs. Il serait intéressant de choisir un critère d'optimalité comme étant le débit du système considéré.

- Enfin, nous souhaitons appliquer cette méthodologie dans d'autres contextes, notamment pour le contrôle des réseaux de transport ou ferroviaires avec des perturbations, des chaînes d'approvisionnement résilientes et des systèmes de communication avec des entrées incontrôlables.

## Références bibliographiques

- Achour, Z., & Rezg, N. (2006). Time Floating General Mutual Exclusion Constraints (TFGMEC). *IMACS Multiconf. Computational Eng. Syst. Applicat.*, 1, 893–897.
- Amari, S., Demongodin, I., Loiseau, J-J., & Martinez, C. (2012). Max-plus control design for temporal constraints meeting in timed event graphs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57 (2), 462–467.
- Atto, A.M., & Martinez, C., Amari, S. (2011). Control of discrete event systems with respect to strict duration: Supervision of an industrial manufacturing plant, *Computers and Industrial Engineering*, Elsevier 61 (4), 1149–1159
- Atli, M., Sava, A., Achour Z. and Rezg, N. (2010). Supervisory control of partially observable marked graph based on marking exclusion constraint, *Proceedings of the IFAC, MCPL*,
- Atli, M. Adjallah, KH., Sava, A., Achour, Z. and Rezg, N. (2011). Supervisory control of timed–place marked graph based on marking exclusion constraint. *Proceedings of the IEEE International Conf on Communications, Computing and Control Applications (CCCA)*, 1–8.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., & Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley, New York
- Basile, F., Chiacchio, P. & Giua, A. (2006). Suboptimal supervisory control of Petri nets in presence of uncontrollable transitions via monitor places, *Automatica* 42(6), 995–1004.
- Basile, F., Cordone, R., & Piroddi, L. (2013). Integrated design of optimal supervisors for the enforcement of static and behavioral specifications in Petri net models, *Automatica* 49 (11), 3432–3439.
- Basile, F., Cordone, R., & Piroddi L, (2021). Supervisory control of timed discrete event systems with logical and timed specifications, *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Brach, F. and Brusset, X. (2014). La reverse logistique en tant qu’avantage compétitif. *Revue Française de Gestion Industrielle*, 33 :33–53
- Bonhomme, P. (2013). Scheduling and control of real-time systems based on a token player approach, *Discrete Event Dynamic Systems*, 23 (2), 197–209.

- Cassandras C. G. and Lafortune, S. (2010). Introduction to discrete event systems, 2. ed., corr. At 2. print. New York, NY: Springer.
- Chen, YF. and Li, ZW. (2011). Design of a maximally permissive liveness-enforcing supervisor with a compressed supervisory structure for flexible manufacturing systems, *Automatica*, 47, 1028–1034,
- Cottenceau, B.L. , Hardouin Boimond, J.L., & Ferrier, J.L. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for timed event graphs in dioid, *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (6)
- Cohen. G., Dubois. D., Quadrat. J.-P., and Viot. M. (1985)A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing". *IEEE Trans. on Automatic Control*, 30(3) :210-220,(1985).
- David, R., et Alla, H. (1192). Du grafcet au réseaux de petri". Editions Hermès, Paris.
- Dideban, A., Alla, H. (2013). Controller synthesis with highly simplified linear constraints. *Asian Journal of Control*,15 (1), 80–94.
- Giua, A., Di Cesare, F. M., & Silva, M. (1992). Generalized mutual exclusion constraints on petri nets with uncontrollable transitions. *Proc. IEEE Int. Conf. SMC*, 2, 974–979.
- Giua, A., Cesare, FD., and Silva, M., (1993). Petri net supervisors for generalized mutual exclusion constraints. *Proceedings of the IFAC World Congress*, 267–270,
- Giua, A., Seatzu, C. Basile, F., (2004). Observer-based state feedback control of timed Petri nets with deadlock recovery, *IEEE Trans. Autom. Control*, 49 (1) 17–29.
- Goltz, P., Schafaschek, G., Hardouin, L., & Raisch, J. (2022). Optimal output feedback control of Timed Event Graphs including disturbances in a resource sharing environment. *16th IFAC Workshop on Discrete Event Systems*.
- Houssin, L., Lahaye, S., & Boimond, J.L. (2007). Just in time control of constrained (max, +)-linear systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 17 (2), 159–178.
- Houssin, L. Lahaye, S., Boimond, JL. (2013). Control of (max,+) linear systems minimizing delays, *Discret. Event Dyn. Syst.* 23 (3), 261–276.
- Iordache, M.V. and Antsaklis, P.J. (2006). Supervision Based on Place Invariants: A Survey. *Discrete Event Dyn Syst* 16, 451–492

- Jacob, R., and Amari, S. (2016). Output feedback control of discrete processes under time constraint: application to cluster tools. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 1–15.
- Kim, J. H., and Lee, T.E. (2008). Schedul ability analysis of time constrained cluster tools with bounded time variation by an extended petri net. *Automation Science and Engineering, IEEE Transactions* 5 (3), 490–503.
- Lopes G. A, De Schutter, B., & van den, T. j. (2012). On the synchronization of cyclic discrete-event systems, *In 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 5810–5815. Maui, HI, USA, IEEE
- Lopes, G., Kersbergen, B., van den, B.J., SchutterB, D., & Babuska, R. (2014). Modeling and control of legged locomotion via switching max-plus models, *IEEE Transactions on Robotics*, 30 (3), 652–665.
- Li, L., Basile, F., and Li, Z. (2020a). An Approach to Improve Permissiveness of Supervisors for GMECs in Time Petri Net Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65 (1), 237-251.
- Li, L., Basile, F., & Li, Z. (2020b). Closed-Loop Deadlock-Free Supervision for GMECs in Time Petri Net Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66 (1), 5326 – 5341.
- Li, L., Li, Z., & Wang, J. (2021). An approach for enforcing a class of GMECs on time Petri nets with uncontrollable transitions, *Information Sciences*, 580, 897-916,
- Lhommeau, M., Hardouin, L., & Cottenceau, B. (2002). Disturbance Decoupling of Timed Event Graphs by Output Feedback Controller. *WODES'2002, Workshop on Discrete Event Systems, Zaragoza, Spain*.
- Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B, & Jaulin, L. (2004). Interval analysis and dioid: application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 40 (11), 1923–1930.
- Lhommeau, M., Jaulin, L., & Hardouin, L. (2012). A non-linear set-membership approach for the control of discrete event systems, *In Workshop on Discrete Event Systems-WODES*.
- Ma, ZY., Li, ZW., Giua, A., (2016). Petri net controllers for generalized mutual exclusion constraints with floor operators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 74: 238–246

- Maia, C.A., Andrade C, & Hardouin, L. (2011). On the control of max-plus linear system subject to state restriction, *Automatica* 47 (5), 988–992.
- Moody, J.O., and Antsaklis, P. (2000). Petri net supervisors for DES with uncontrollable and unobservable transition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3) : 462-476.
- Murata, T. (1989). Petri nets: properties, analysis and application. *Proc. IEEE*, 77 (4), 541–580.
- Proth. J.M., and Xie, X. (1995). Les réseaux de petri pour la conception et la gestion des systèmes de production. *Edition MASSON*,
- Oke, A., Hardouin, L., Lhommeau, M., & Shang, Y. (2017). Observer-based controller for disturbance decoupling of max-plus linear systems with applications to a high throughput screening system in drug discovery. *IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, (pp. 4242-4247)
- Oke, A., Hardouin, L., Chen, X., & Shang, Y. (2022). Scheduling and control of high throughput screening systems with uncertainties and disturbances. *Production & Manufacturing Research*, 10 (1), 450–469.
- Ramadge P. et Wonham, WMJ. (1989). The control of discrete event systems, *Dyn. Discret. Event Syst. Spec. 77*, 81–98 *Issue Proceedings of the IEEE*
- Rajah J, Tebani K, Amari A, Barkallah M, Haddar M. (2023a), Control laws synthesis for timed event graphs subject to generalised marking constraints by Min-Plus algebra: application to cluster tools, *International Journal of Control*, DOI : 10.1080/00207179.2023.2183344
- Rajah, J., Amari, S., Tebani, K., Barkallah, M., Haddar, M. (2023b). Feedback control laws to ensure generalized mutual exclusion constraints in a network of partially observable timed event graphs, *European Journal of Control*, 71, 100809.
- Reddy, Y.P., Janardhana, Ranga, G., Kim K. S. (2009). Modular modelling and performance evaluation of manufacturing systems using Max-Plus Algebra. *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, 4(5), 577.
- Shang, Y., Hardouin, L., Lhommeau, M. & Maia, C. A. (2013). Open-loop controllers to solve the disturbance decoupling problem for max-plus linear systems. *European Control Conference (ECC)*, (pp. 125-130).

- Shang, Y., Hardouin, L., Lhommeau, M., & Maia, C.A. (2016a). An integrated control strategy in disturbance decoupling of max-plus linear systems with applications to a high throughput screening system, *Automatica*. 63, 338-348.
- Shang, Y., Hardouin, L., Lhommeau, M. & Maia, C. A. (2016b). Robust controllers in disturbance decoupling of uncertain max-plus linear systems: an application to a high throughput screening system for drug discovery. *13th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES)*, (pp. 404-409).
- Soumatia, M., Amari, S. (2022). Design of control laws for timed event graphs networks subject to mutual exclusion constraints in Min-Plus algebra. *European Journal of Control*, 63, 270-276,
- Silva, M. (2018). On the history of Discrete Event Systems. *Annual Reviews in Control*, 45 : 213–222
- Tebani, K., Amari, S. Kara, R. (2017). Closed-loop control of constrained discrete event systems: application to a networked automation system. *Int J Advanced Manufacturing Technology*, 90 (5), 1295–1306
- Tebani, K., Amari, S., & Kara, R. (2019). State feedback control for a class of timed petri nets subject to marking constraints, *Asian Journal of Control* 21 (2), 934–951
- Tebani, K., & Amari, S. (2021). Min-plus realizable control design for partially observable timed event graphs under marking constraints, *Eur. Journal of Control* 57, 33–40.
- Xu, J., Schutter, B. D., & Boem, V. D. (2016). Optimistic optimization for model predictive control of max-plus linear systems, *Automatica* 74, 16–22.
- Yamalidou, E. C., & Kator, J. C. (1991). Modeling and optimal control of discrete-event chemical processes using petri nets. *Comput. Chem. Eng.*, 15(7), 503–519.
- Yamalidou, K., Moody, J., Lemmon, M., & Antsaklis, P. (1996). Feedback control Petri net based on place invariant. *Automatica*, 32(1), 15–28.
- Zhao, B., Lin, F., Wang, C., Zhang, X., Michael P.P., & Wang, L.Y. (2017). Supervisory control of networked timed discrete event systems and its applications to power distribution networks, *IEEE Trans. Control Netw. Syst.* 4 (2), 146–158.

# Publications scientifiques

Ci-après, nous exposons la liste des publications scientifiques en lien avec les travaux réalisés pendant l'élaboration de cette thèse :

## Articles de revue

- S. Bouazza, S. Amari, H. Hassine, M. Barkallah & M. Haddar (2023): Feedback control to guarantee marking constraints in timed event graphs including disturbances: Application to disassembly systems. *European Journal of Control*, DOI: 10.1016/j.ejcon.2023.100888
- S. Bouazza, S. Amari, H. Hassine, M. Barkallah & M. Haddar (2023): Analytical methods for controlling timed event graphs with disturbances and paths subject to marking constraints: application to a disassembly process, *International Journal of Control*, DOI: 10.1080/00207179.2023.2236723
- S. Bouazza, el al. (2023): Control of a class of discrete event systems with disturbances and capacity constraints: Application to a disassembly problem. *Asian Journal of control*, <https://doi.org/10.1002/asjc.3259>
- S. Bouazza, el al. (2023): Control laws for partially observable Min-Plus systems networks with disturbances and under mutual exclusion constraints. Accepté pour publication à *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2023.

## Conférences

- S. Bouazza, H. Hassine, M. Barkallah, S. Amari, & M. Haddar (2021): Dual-Objective Disassembly Sequence with Maximal Profit and Minimal Energy Consumption Using Petri Nets and Particle Swarm Optimization. *International Conference On Advanced Materials, Mechanics And Manufacturing, Sfax – Tunisia*, DOI: 10.1007/978-3-030-84958-0\_29
- S. Bouazza, S. Amari, H. Hassine, M. Barkallah & M. Haddar (2021): Optimisation des processus de désassemblage à l'aide des formalismes de systèmes à événements discrets. *Mining Software Repositories MSR, Paris*.

- S. Bouazza, S. Amari, H. Hassine, M. Barkallah & M. Haddar (2023): A new approach to solve the mutual exclusion constraints problem for discrete event systems with disturbances -application to a manufacturing workshop. ***International Conference On Advanced Materials, Mechanics And Manufacturing, Sousse – Tunisia***
- S. Bouazza, S. Amari, H. Hassine, M. Barkallah & M. Haddar (2023) : Modeling, performance evaluation and decision support of disassembly processes using BDSPNs. **Congrès ROADEF2023, Rennes.**
- S. Bouazza, et al. (2023) : Commande des réseaux de graphes d'événements temporisés partiellement contrôlables soumis à des contraintes d'exclusions mutuelles. ***Mining Software Repositories MSR (Modélisation des système Réactifs), Toulouse.***

# Table des matières

Liste des Figures	
Liste des Tableaux	
Abréviations	
Liste des notations	
Introduction générale.....	1
Chapitre 1. Rappels des formalismes des systèmes à événements discrets .....	7
1.1. Introduction .....	8
1.2. Réseaux de Petri et Graphes d'événements temporisés .....	8
1.2.1. Rappel sur le réseau de Petri.....	8
1.2.1.1. Définition et notion.....	9
1.2.1.2. Propriétés de RdP .....	11
1.2.1.3. Les principales classes existantes.....	12
1.2.2. Graphes d'événements temporisés .....	13
1.2.2.1. Graphes d'événements temporisés perturbés .....	13
1.2.2.2. Propriétés des graphes d'événements temporisés.....	14
1.2.2.3. Réseaux de graphes d'événements temporisés.....	16
1.2.2.4. Fonctionnement au plus tôt d'un GET .....	17
1.2. Théorie de l'algèbre Min-Plus.....	17
1.3.1. Préliminaires algébriques .....	18
1.3.2. Propriétés de l'algèbre Min-Plus .....	19
1.3.2.1. Dioïde complet .....	19
1.3.2.2. Relation d'ordre.....	20
1.3.2.3. Dioïde matriciel .....	20
1.3.3. Résolution d'équations dans le formalisme Min-Plus .....	21
1.3. Modèles Min-Plus des GETs avec des transitions de perturbations.....	21
1.4.1. Fonctions compteurs des transitions .....	22
1.4.2. Equation Min-Plus implicites et explicites des GETs en présence des perturbations .....	23
1.4.3. Equations d'état des GETs avec des transitions incontrôlables dans l'algèbre Min-Plus.....	24
1.4. Conclusion .....	28
Chapitre 2. Commande des GETs en présence de perturbations sous contraintes de marquage :	
Application sur un système de désassemblage .....	29
2.1. Introduction.....	30

2.2	Etat de l’art sur les problèmes de contraintes de marquage .....	31
2.3.	Problème de contraintes de marquage .....	34
2.3.1.	Motivations et problématique .....	34
2.3.2.	Problème de commande des GETs sous contraintes de marquage imposées sur des places .....	36
2.3.3.	Contraintes de marquage imposées sur un chemin d’un GET .....	37
2.4.	Commande des GETs perturbées et totalement observables sous contraintes imposées sur des places .....	39
2.4.1.	Commande monovariante .....	39
2.4.1.1.	GET soumis à une seule contrainte de marquage .....	39
2.4.1.2.	GET soumis à plusieurs contraintes de marquage .....	42
2.4.2.	Commande multivariante .....	43
2.4.2.1.	GETs soumis à une seule contrainte de marquage .....	43
2.4.2.2.	GETs soumis à plusieurs contraintes de marquage .....	44
2.4.3.	Algorithme de contrôle des GETs sous multi-contraintes de marquage .....	45
2.5.	Conception de lois de commande pour des GETs sous contraintes imposées sur des chemins .....	46
2.5.1.	Commande monovariante .....	46
2.5.1.1.	Un chemin soumis à une contrainte de marquage .....	46
2.5.1.2.	Un chemin soumis à plusieurs contraintes .....	47
2.5.2.	Commande multivariante .....	48
2.5.2.1.	Des chemins soumis à une contrainte de marquage .....	48
2.5.2.2.	Des chemins soumis à plusieurs contraintes de marquage .....	49
2.5.3.	Instruction algorithmique pour la synthèse de contrôle .....	50
2.6.	Contrôle par rétroaction pour les GETs perturbés partiellement observables .....	51
2.6.1.	Commande monovariante .....	51
2.6.1.1.	Un chemin soumis à une contrainte de marquage .....	51
2.6.1.2.	Un chemin soumis à plusieurs contraintes .....	53
2.6.2.	Commande multivariante .....	53
2.6.2.1.	Des chemins soumis à une contrainte de marquage .....	54
2.6.2.2.	Des chemins soumis à plusieurs contraintes .....	54
2.6.3.	Procédure algorithmique de synthèse des commandes .....	55
2.7.	Etude de cas : application à un système de désassemblage .....	56
2.7.1.	Description du système .....	56
2.7.2.	Modélisation du système par GET .....	57
2.7.3.	Calcul des lois de commande .....	63
2.8.	Conclusion .....	65

Chapitre 3. Conception des lois de commande des GETs partiellement commandables sous contraintes de marquage généralisées : Application à un processus de désassemblage .....	68
3.1. Introduction.....	69
3.2. Problématique : Contraintes de marquage généralisées.....	70
3.3. Méthodologie formelle pour synthétiser des lois de commande qui satisfont des CMGs soumis à des GETs partiellement contrôlables .....	73
3.3.1. GET avec une seule transition d'entrée .....	73
3.3.1.1. Une contrainte de marquage généralisée .....	73
3.3.1.2. Plusieurs contraintes de marquage généralisée.....	78
3.3.2. Commande multivariables .....	80
3.3.2.1. Une contrainte de marquage généralisée .....	80
3.3.2.2. Plusieurs contraintes de marquage généralisées .....	81
3.3.3. Algorithme de contrôle des GETs perturbés et totalement observables .....	82
3.3.4. Étude de cas : un exemple illustratif.....	84
3.4. Conception de contrôle pour le respect de CMGs dans des GETs partiellement observables et contrôlables.....	86
3.4.1. GET avec une seule transition d'entrée .....	86
3.4.1.1. GET soumis à une contrainte de marquage généralisée .....	87
3.4.1.2. Des GETs soumis à plusieurs contraintes de marquage généralisées .....	88
3.4.2. GETs à entrées multiples .....	90
3.4.2.1. GET soumis à une contrainte de marquage généralisée .....	90
3.4.2.2. GET soumis à multi-contraintes de marquage généralisées .....	91
3.4.3. Algorithme de contrôle des GETs partiellement contrôlables et observables .....	92
3.5. Application à un processus de désassemblage .....	93
3.6. Conclusion .....	97
Chapitre 4. Approches algébriques de commande des systèmes de désassemblages modélisés par des réseaux de graphes d'événements temporisés perturbés sous contraintes d'exclusions mutuelles.....	98
4.1. Introduction.....	99
4.2. Etat de l'art sur les problèmes de CEMs.....	100
4.3. Formulation du problème des CEMs.....	103
4.4. Loi de commandes des RGETs sous CEMs .....	105
4.4.1. Une seule CEM soumise à des places de RGETs .....	105
4.4.2. Plusieurs CEMs soumises à des places de RGETs .....	108
4.5. Conception de lois de commande pour les RGETs partiellement observables et contrôlables sous CEMs.....	109
4.5.1. Une seule CEM soumise à des places de RGETs .....	109
4.5.2. Plusieurs CEMs soumises à des places de RGETs.....	111
4.6. Algorithme de commande.....	112
4.7. Etude de cas : application de l'approche proposée à un système de désassemblage .....	113

4.7.1. Modélisation du système de désassemblage .....	113
4.7.2. Description du fonctionnement du système .....	115
4.7.3. Conception des lois de commande.....	116
4.7.4. Interprétation des lois de commande calculées.....	117
4.8. Conclusion .....	119
Conclusions et perspectives.....	121
Références bibliographiques .....	126
Publications scientifiques .....	131
Table des matières.....	133