



**HAL**  
open science

# Stabilité des écoulements parallèles incompressibles à grande variation de masse volumique

Corentin Jacques

► **To cite this version:**

Corentin Jacques. Stabilité des écoulements parallèles incompressibles à grande variation de masse volumique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2023. Français. NNT : 2023LYO10061 . tel-04556739

**HAL Id: tel-04556739**

**<https://theses.hal.science/tel-04556739>**

Submitted on 23 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE de DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1**

**École Doctorale N°162**  
Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

**Discipline** : Mécanique des fluides

Soutenue publiquement le 25/04/2023, par :

**Corentin JACQUES**

---

**Stabilité des écoulements parallèles  
incompressibles à grande variation  
de masse volumique**

---

Devant le jury composé de :

Abid Malek	Maître de conférences - IRPHE Aix-Marseille Université	Rapporteur
Danaila Luminata	Professeure - M2C Université de Rouen Normandie	Rapporteuse
Trontin Pierre	Professeur - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Président
Hank Sarah	Ingénieure de recherche - DGA	Examinatrice
Buffat Marc	Professeur - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur de thèse
Di Pierro Bastien	Maître de conférences - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Co-directeur de thèse
Pier Benoît	Directeur de recherche CNRS - LMFA École Centrale de Lyon	Invité



# *Résumé*

## **Stabilité des écoulements parallèles incompressibles à grande variation de masse volumique**

Le comportement instable des écoulements incompressibles cisailés à grande variation de masse volumique, représentatif des rejets atmosphériques, est étudié au travers de considérations théoriques, analytiques, asymptotiques et numériques. Dans un premier temps, on montre l'influence non triviale de la variation de masse sur la stabilité linéaire temporelle des écoulements de couche de mélange et de jet. Les théorèmes fondamentaux de Squire, Rayleigh et Fjørtoft énoncés dans le cadre à masse volumique constante sont généralisés aux cas des écoulements inhomogènes. Les résultats analytiques et asymptotiques sont comparés aux résultats numériques obtenus grâce au code de stabilité linéaire spectral développé. On montre également que les effets visqueux et diffusif sont purement stabilisant. Une étude des instabilités secondaires linéaires qui se développent dans un jet plan dans la phase non linéaire montre qu'il s'agit d'instabilités de type Rayleigh–Taylor cylindrique.

**Mots-clés :** Stabilité linéaire, Masse volumique variable, Écoulements incompressibles, Écoulements parallèles cisailés

# *Abstract*

## **Stability of incompressible parallel flows with high density variation**

The unsteady behaviour of incompressible sheared flows with large density variation, representative of atmospheric discharges, is studied through theoretical, analytical, asymptotic and numerical considerations. First, the non-trivial influence of mass variation on the linear time stability of mixing layer and jet flows is shown. The fundamental theorems of Squire, Rayleigh and Fjørtoft stated in the constant density flow are generalized to the case of inhomogeneous flows. Analytical and asymptotic results are compared with numerical results, obtained with the developed spectral linear stability code. It is also shown that the viscous and diffusive effects are purely stabilizing. A study of the linear secondary instabilities that developping in a plane jet in the non-linear phase shows that they are of cylindrical Rayleigh–Taylor type.

**Keywords:** Linear stability, Variable density, Incompressible flows, Parallel sheared flows



# *Remerciements*

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude envers mes directeurs de thèse, Marc Buffat et Bastien Di Pierro. Je les remercie de m'avoir fait partager et profiter de leurs expériences et connaissances scientifiques, tout au long de ce travail de recherche. Je tiens également à leur témoigner une immense reconnaissance pour le soutien qu'ils m'ont apporté au quotidien.

Je remercie sincèrement Malek Abid et Luminita Danaila d'avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. Je remercie également Pierre Trontin, Sarah Hank et Benoit Pier de leur présence dans le jury.

La réalisation d'une thèse est un travail difficile et exigeant. C'est pourquoi je tiens à témoigner de ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont soutenu et accompagné tout au long de cette aventure.

J'aimerais remercier particulièrement cinq personnes. Sans leur aide et sans leur soutien, ce travail n'aurait probablement pas vu le jour.

Bastien, tu étais hier l'un de mes professeurs, tu as été mon directeur de thèse et tu es aujourd'hui l'un de mes meilleurs amis. Je te suis extrêmement reconnaissant de tout ce que tu m'as apporté. Ta présence tout au long de ces années a été fondamentale pour mon parcours académique et personnel. Je ne te remercierais jamais assez.

Camille, je te remercie de m'avoir supporté pendant toutes ces années et de l'amour que tu as pu me donner. Ton regard aiguisé et expert a été d'une très grande aide.

Loïc, tu es un puits infini de connaissances, je te suis extrêmement reconnaissant de l'aide que tu as pu me fournir. Je te remercie aussi pour les longues nuits passées à discuter, jouer et surtout rire.

Noëlie, tu es un catalyseur de sourire, sans toi ces dernières années auraient été bien différentes.

Jérôme, nous avons passé de grandes étapes de nos études supérieures ensemble, je te remercie du soutien et des discussions que nous avons eues pendant toutes ces années.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur soutien inconditionnel et leurs encouragements tout au long de ces années.

Ces remerciements ne pourront être à la hauteur de la reconnaissance que j'éprouve pour chacune des personnes qui ont contribué à la finalisation de cette thèse. Je suis fier de présenter cette thèse et je suis infiniment reconnaissant envers tous ceux et toutes celles qui ont contribué à sa réalisation.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l’art</b>	<b>3</b>
1.1 Les équations de Navier–Stokes incompressibles inhomogènes . . . . .	3
1.1.1 Principes de la mécanique des fluides . . . . .	3
1.1.2 Définition des paramètres thermodynamiques de mélange miscible . . . . .	5
1.1.3 Équations de bilan . . . . .	5
1.1.4 Écoulement isovolume . . . . .	7
1.1.5 Loi de Fick et de Newton–Stokes . . . . .	8
1.1.6 Système d’équations de Kazhikhov–Smagulov . . . . .	9
1.2 Instabilité des écoulements parallèles cisailés ouverts inhomogènes . . . . .	12
1.2.1 Mécanisme d’instabilité et formalisme . . . . .	12
1.2.2 Équations de stabilité à densité variable . . . . .	16
1.3 État de l’art : Stabilité des écoulements ouverts parallèles . . . . .	20
1.3.1 Cas à densité uniforme . . . . .	20
1.3.2 Cas à densité variable . . . . .	22
1.4 Objectifs du travail . . . . .	23
<b>2 Résolution numérique</b>	<b>25</b>
2.1 Résolution d’équations différentielles par méthode spectrale . . . . .	25
2.1.1 Intégration temporelle . . . . .	26
2.1.2 Discrétisation spatiale : méthode spectrale . . . . .	26
2.2 Code de stabilité linéaire . . . . .	30
2.2.1 Caractéristiques de l’écoulement de base . . . . .	30
2.2.2 Discrétisation : Méthode de Collocation de Chebyshev . . . . .	32
2.2.3 Projection de la vitesse sur une base solénoïdale . . . . .	33
2.3 Code DNS . . . . .	36
2.3.1 Intégration temporelle . . . . .	36
2.3.2 Opérateur de projection à densité variable . . . . .	37
2.3.3 Solveur des opérateurs de viscosité et de pression . . . . .	38
2.4 Validations . . . . .	38
2.4.1 Validation du solveur de stabilité linéaire . . . . .	38
2.4.2 Validation du solveur DNS . . . . .	40
2.4.3 Validation croisée . . . . .	40
<b>3 Étude des instabilités linéaires primaires</b>	<b>43</b>
3.1 Considérations préliminaires . . . . .	43
3.1.1 Théorème de Squire généralisé . . . . .	43
3.1.2 Caractéristiques de l’instabilité . . . . .	45
3.1.3 Étude numérique . . . . .	46
3.2 Considérations non visqueuses . . . . .	47

3.2.1	Quelques considérations théoriques . . . . .	47
3.2.2	Caractéristiques de l'instabilité . . . . .	57
3.2.3	Résumé . . . . .	67
3.3	Influence de la viscosité et de la diffusion . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Étude des instabilités linéaires secondaires</b>	<b>71</b>
4.1	Observations . . . . .	71
4.2	Modèles simplifiés . . . . .	72
4.2.1	État de l'art des écoulements tournant . . . . .	73
4.2.2	Modélisation . . . . .	74
4.2.3	Disque en rotation . . . . .	76
4.2.4	Couronne en rotation . . . . .	83
4.3	Comparaison modèles et simulations . . . . .	83
	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>

# Table des figures

1	Simulation numérique d'un jet lourd. En jaune la masse volumique est de $2 \text{ kg m}^{-3}$ et en noir la masse volumique est de $1 \text{ kg m}^{-3}$ . . . . .	2
2.1	Écoulement de base pour une couche de mélange et un jet. . . . .	30
2.2	Profils des fractions volumiques d'une couche de mélange (a) et d'un jet (b). . . . .	31
2.3	Transformation de l'espace associé aux points $\xi$ de Gauss-Lobatto en espace $z$ infini. . . . .	33
2.4	Comparaison du spectre du problème aux valeurs propres obtenu numériquement <i>avec</i> (1.57) et <i>sans</i> (1.52) la projection de la vitesse sur une base solénoïdale. Gauche : couche de mélange (2.24). Droite : jet (2.27). Les figures du bas représentent un zoom autour de l'origine. Paramètres : $N = 201$ , $Re = 1000$ , $Sc = 1$ , $\delta = 0.1$ , $S = 0.1$ , $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ . . . . .	35
2.5	Fonction propre $\hat{\rho}$ d'un mode singulier $\omega_{sp}$ (première ligne) et $\omega_\sigma$ (deuxième ligne) indiqués sur la figure 2.4. . . . .	35
2.6	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet en $\sinh$ (2.46) avec $N = 201$ , $Re = Sc = \infty$ et $n = 1$ pour plusieurs valeurs de rapport de densité $S$ . . . . .	39
2.7	Taux de croissance du mode le plus instable $\sigma_{\max}$ en fonction de $S$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet en $\sinh$ (2.46) avec $N = 201$ , $Re = Sc = \infty$ , $n = 1$ . . . . .	39
2.8	Comparaison de la croissance temporelle des perturbations obtenue par le problème aux valeurs propres (théorie linéaire) et le code DNS ( $Re = 10^4$ ) pour un jet en $\sinh$ (2.46) avec $S = 0.5$ et $n = 4$ . . . . .	40
2.9	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet en $\tanh$ (2.27) avec $N = 201$ , $Re = 10^3$ , $Sc = 1$ , $\delta = 0.1$ et $S = 4$ . Le mode $\alpha = 0.5$ est le mode injecté dans le code DNS. . . . .	41
2.10	Comparaison de la croissance temporelle des perturbations obtenue par le problème aux valeurs propres (théorie linéaire) et le code DNS pour un jet en $\tanh$ (2.27) avec $Re = 10^3$ , $Sc = 1$ , $\delta = 0.1$ et $S = 4$ pour le mode $\alpha = 0.5$ . . . . .	41
2.11	Simulation numérique directe du mode sinueux d'un profil de jet en $\tanh$ (2.27) avec $Re = 10^3$ , $Sc = 1$ , $S = 4$ , $\delta = 0.1$ et $\alpha = 0.5$ . . . . .	42
2.12	Simulation numérique directe du mode variqueux d'un profil de jet en $\tanh$ (2.27) avec $Re = 10^3$ , $Sc = 1$ , $S = 4$ , $\delta = 0.1$ et $\alpha = 0.5$ . . . . .	42
3.1	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha, \beta)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) avec $Re = Sc = \infty$ , $\delta = 0.1$ et $S = 2$ . . . . .	45

3.2	Relation de dispersion $\sigma = \sigma(\alpha)$ avec l'identification des quatre caractéristiques de l'instabilité : $\alpha_c$ nombre d'onde de coupure, $\sigma_{\max}$ taux de croissance du mode le plus instable, $\alpha_{\max}$ nombre d'onde du mode le plus instable et $\sigma^*$ taux de croissance lorsque $\alpha \rightarrow 0$ . . . . .	46
3.3	Illustration du théorème de Rayleigh généralisé : (a) stable, (b) potentiellement instable, (c) potentiellement instable, (d) stable. . . . .	50
3.4	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha, S)$ pour des profils de vitesse linéaires par morceau et des profils de masse volumique constants par morceau. . . . .	56
3.5	Influence des caractéristiques de l'instabilité en fonction du rapport de masse $S$ pour des profils de vitesse linéaires par morceau et des profils de masse volumique constants par morceau. . . . .	56
3.6	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha, \delta)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d'une couche de mélange (2.24) pour plusieurs valeurs de $S$ . La ligne noire représente le taux de croissance $\sigma_{\max}$ . . . . .	58
3.7	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha, S)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d'une couche de mélange (2.24) pour plusieurs valeurs de $\delta$ . La ligne noire représente le taux de croissance $\sigma_{\max}$ . . . . .	58
3.8	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha, \delta)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d'un jet (2.27) pour plusieurs valeurs de $S$ . La ligne en noire représente le taux de croissance $\sigma_{\max}$ . . . . .	59
3.9	Taux de croissance $\sigma = \sigma(\alpha, S)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d'un jet (2.27) pour plusieurs valeurs de $\delta$ . La ligne noire représente le taux de croissance $\sigma_{\max}$ . . . . .	59
3.10	Taux de croissance du mode le plus instable $\sigma_{\max}$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27). La zone hachurée correspond au cas homogène $S = 1$ . . . . .	60
3.11	Nombre d'onde du mode le plus instable $\alpha_{\max}$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27). La zone hachurée correspond au cas homogène $S = 1$ . . . . .	60
3.12	Comparaison du taux de croissance du mode le plus instable $\sigma_{\max}$ obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres (num) pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) avec celui obtenu par les relations de dispersion analytiques des profils linéaires par morceau (lpm) ( $\delta = 0.1$ ). . . . .	61
3.13	Comparaison du nombre d'onde du mode le plus instable $\alpha_{\max}$ obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres (num) pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) ( $\delta = 0.1$ ) avec celui obtenu par les relations de dispersion analytiques des profils linéaires par morceau (lpm). . . . .	62
3.14	Comparaison du mode le plus instable $\sigma_{\max} = \sigma(\alpha_{\max})$ obtenu par la résolution numérique du problème aux valeurs propres d'un jet (2.27) pour $\delta_u = 0.3$ et $\delta_\rho = 0.1$ avec celui obtenu par la relation de dispersion analytique (3.37) d'un profil de vitesse linéaire par morceau pour $\delta = 0.3$ (lpm). . . . .	62
3.15	Comparaison de la valeur de $c_i = \text{Im}(c)$ entre les résultats obtenus par la résolution numérique du problème aux valeurs propres, les cas limites de profils constants et linéaires par morceau et l'étude asymptotique quand $\alpha \rightarrow 0$ . ( $S = 2, \delta = 0.1$ ) . . . . .	63

3.16	Comparaison de $c_i = \text{Im}(c)$ en $\alpha_0 \ll 1$ indiqué sur la figure 3.15 en fonction de $S$ , entre les résultats obtenus par la résolution numérique du problème aux valeurs propres (1.57), les cas limites de profils constants (3.32)-(3.34) et linéaires (3.35)-(3.37) par morceau et l'étude asymptotique quand $\alpha \rightarrow 0$ (3.15)-(3.16). ( $\delta = 0.1$ ) . . . . .	63
3.17	Taux de croissance $\sigma$ du mode variqueux et du mode sinueux en $\alpha = 0.1$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres (1.57) pour un jet (2.27) avec $\delta = 0.1$ . . . . .	64
3.18	Nombres d'onde de coupure $\alpha_c$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres (1.57) pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) avec $Re = Sc = \infty$ . La zone hachurée correspond au cas homogène $S = 1$ . . . . .	65
3.19	Comparaison du nombre d'onde de coupure $\alpha_c$ obtenu par résolution du problème aux valeurs propres avec celui obtenu asymptotiquement $\alpha_c^\dagger$ (3.38) . . . . .	66
3.20	Résumé de l'influence de la variation de masse ( $S$ et $\delta$ ) sur les caractéristiques de la relation $\sigma = \sigma(\alpha)$ pour des écoulements de couche de mélange et de jet. . . . .	67
3.21	Évolution du taux de croissance du mode le plus instable $\sigma_{\max}$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) en fonction du $Re$ et du $Sc$ . . . . .	68
3.22	Évolution du taux de croissance du mode le plus instable $\sigma_{\max}$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet (2.27) en fonction du $Re$ et du $Sc$ . . . . .	68
3.23	Évolution du nombre d'onde du mode le plus instable $\alpha_{\max}$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) en fonction du $Re$ et du $Sc$ . . . . .	69
3.24	Évolution du nombre d'onde du mode le plus instable $\alpha_{\max}$ dans le plan $(\delta, S)$ obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet (2.27) en fonction du $Re$ et du $Sc$ . . . . .	69
4.1	Isocontours de masse volumique obtenus par simulation numérique directe d'un jet plan avec $Re = 1000$ et $Sc = 10$ à plusieurs instants. Les rectangles rouges indiquent les zones d'apparitions des instabilités secondaires. . . . .	72
4.2	Zoom sur les zones d'instabilités secondaires indiqué par les rectangles rouges sur la figure 4.1. . . . .	73
4.3	Schémas des écoulements de base modèles . . . . .	74
4.4	Taux de croissance non visqueux $\text{Im}(\omega)$ en fonction du nombre d'onde azimutal $m$ pour un rapport de masse volumique $S = 2$ et une épaisseur $e = 0.2$ . . . . .	78
4.5	Taux de croissance visqueux $\text{Im}(\omega)$ en fonction du nombre d'onde azimutal $m$ pour $Re = 10^3$ , $S = 10$ et $e = 0.2$ . . . . .	79
4.6	Taux de croissance $\text{Im}(\omega_{n,\max})$ en fonction du nombre d'onde $m_{\max}$ du mode le plus instable pour $e = 0.2$ . . . . .	80
4.7	Simulation numérique directe d'un disque de masse volumique en rotation avec $S = 2$ et $Re = 10^3$ : (a) distribution radiale initiale, isocontours du champ de masse volumique aux temps $t \approx 5$ (b), $t \approx 6$ (c) et $t \approx 7$ (d). . . . .	82
4.8	Amplitude de perturbation du mode azimutale $m = 17$ en fonction du temps, pour $Re = 1000$ et $S = 2$ et les prédictions asymptotiques (4.23a,4.23b). . . . .	83

4.9	Zones potentiellement instables pour un écoulement de base en rotation solide d'une couronne : (a) cas d'une couronne lourde par rapport à son environnement, (b) cas d'une couronne légère par rapport à son environnement. . . . .	84
4.10	Superposition des isocontours de masse volumique avec les zones d'instabilité de Rayleigh–Taylor cylindriques données par le critère $G^2 = \mathbf{a}_c \cdot \nabla \rho / \rho > 0$ (en vert) . . . . .	85

# Liste des tableaux

1.1	Grandeurs liées au mélange . . . . .	6
2.1	Comparaison du temps de calcul et du nombre de modes singuliers entre la résolution du problème aux valeurs propres <i>avec</i> (1.57) et <i>sans</i> (1.52) la projection de la vitesse sur une base solénoïdale pour des profils en tanh (couche de mélange (2.24) et jet (2.27)) avec $N = 201$ , $Re = 1000$ , $Sc = 1$ , $S = 0.1$ , $\delta = 0.1$ , $\beta = 0$ et $\alpha = 1$ . . . . .	34
2.2	Convergence du taux de croissance de la perturbation $\sigma$ obtenu par le problème aux valeurs propres (1.57) pour une couche de mélange (2.24) avec $Re = 1000$ , $Sc = 1$ , $S = 2$ , $\delta = 0.1$ , $\beta = 0$ et le nombre d'onde $\alpha$ variant de 0 à 3. avec un pas de 0.015. . . . .	34



# Introduction

La moitié des émissions de Gaz à Effet de Serre (GES) cumulées entre 1750 et 2010 est survenue sur une période de 40 ans de 1970 à 2010 [27, 68]. En raison de leurs conséquences écologiques, économiques et sociétales, l'augmentation des gaz à effet de serre est aux cœurs des enjeux du XXI<sup>e</sup> siècle. Ceux-ci sont principalement liés aux secteurs énergétiques et industriels avec 50 % des émissions de GES et se font principalement sous forme de rejets atmosphériques. Partant de ce constat, une compréhension fondamentale du comportement de ces rejets atmosphériques semble être un atout pour mieux appréhender ces problématiques.

Ces écoulements de gaz d'échappement de cheminée ne sont pas cloisonnés dans une certaine région de l'espace et s'effectuent de l'amont vers l'aval dans une direction particulière (définition d'écoulement ouvert [67]). De plus, un différentiel de vitesse de même direction peut exister au sein de l'écoulement entre les gaz éjectés et le milieu extérieur. Cette configuration est qualifiée d'écoulement cisailé. Parmi cette classe d'écoulements, on distingue trois grands groupes : les sillages, les jets et les couches de mélange. Ainsi, ces écoulements de gaz d'échappement de cheminée peuvent être modélisés par des écoulements *ouverts*, *cisailés* de type *jet* (voir figure 1) ou *couche de mélange*.

De surcroit, ces rejets atmosphériques sont souvent sujets à de grandes variations de masse volumique. Cette inhomogénéité peut être liée à des effets thermiques ou de mélange ou encore à des effets inhérents à la nature compressible de l'écoulement (présence de détente). Compte tenu des vitesses et des différences de températures dans les états étudiés, nous nous intéresserons ici uniquement au cas où la variation de masse est due aux effets de mélange entre plusieurs espèces.

L'état d'écoulement que l'on observe de ces rejets atmosphériques est généralement turbulent<sup>1</sup> (caractère instationnaire et « imprévisible »). Une compréhension de ces mécanismes complexes est généralement liée aux phénomènes de transition entre le régime laminaire et l'état turbulent. Cette notion de transition est étroitement liée à la notion de stabilité des écoulements. C'est donc au travers de ce prisme de stabilité que nous allons étudier ces écoulements ouverts cisailés et inhomogènes.

---

1. En transposant une citation d'Héraclite à notre problématique : « on n'observe jamais deux fois le même panache de fumée d'une cheminée ».

---

Le comportement instable et turbulent des écoulements de fluide homogène a largement été traité et est depuis bien compris [73, 74]. En revanche, les études et la compréhension des mécanismes en jeu lors de l'introduction d'une forte variation de masse sont plus récentes [70, 33, 58].

Ce manuscrit s'organise autour de quatre chapitres. Le premier chapitre énonce l'ensemble des éléments de base (caractère incompressible des écoulements, diffusion de masse, etc.) afin de mieux appréhender le modèle de Kazhikhov–Smagulov représentatif de la dynamique des écoulements à grande variation de masse. Par la suite, les équations modélisant la stabilité linéaire temporelle de ces écoulements sont énoncées. Afin d'obtenir une vision d'ensemble, les principaux résultats de stabilité linéaire à densité constante sont présentés ainsi que les résultats récents de stabilité linéaire dans le cas à grande variation de masse. Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les éléments de base de discrétisation temporelle et spectrale afin d'introduire le solveur de stabilité linéaire développé et le solveur de simulation numérique directe utilisé. Ces codes numériques permettent de résoudre les équations développées dans le premier chapitre. Ces deux solveurs sont validés à partir des résultats de la littérature. Dans le troisième chapitre, nous énonçons et analysons l'ensemble des résultats théoriques, analytiques et numériques sur l'influence de la variation de masse pour la couche de mélange et le jet. Finalement, dans le dernier chapitre, nous explorons et analysons les instabilités linéaires secondaires qui se développent dans la phase non linéaire d'un jet plan.

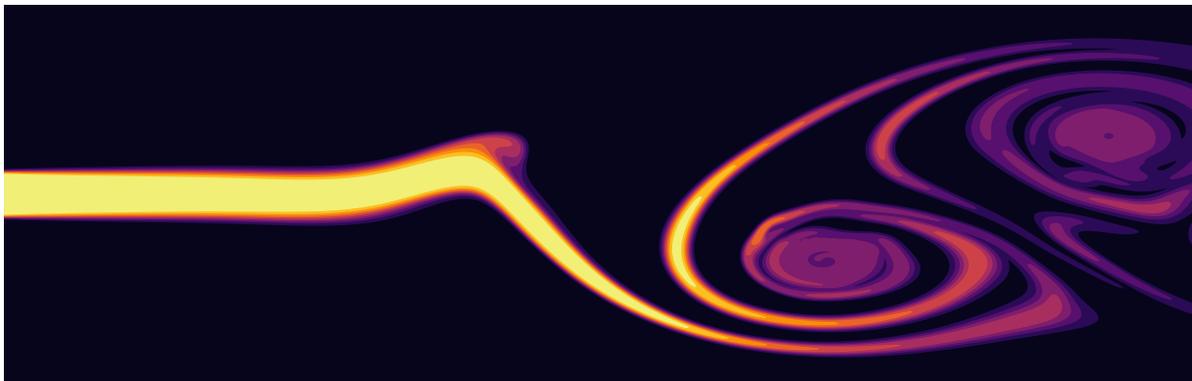


FIGURE 1 – Simulation numérique d'un jet lourd. En jaune la masse volumique est de  $2 \text{ kg m}^{-3}$  et en noir la masse volumique est de  $1 \text{ kg m}^{-3}$

# Chapitre 1

## État de l'art

Ce premier chapitre permet de mettre en place les équations modélisant les instabilités linéaires qui peuvent se développer au sein d'un écoulement incompressible à grande variation de masse représentatif des rejets atmosphériques. Nous verrons dans un premier temps les éléments de base de la mécanique des fluides appliqués aux écoulements multiespèces, notamment au travers de la question centrale de la contrainte d'incompressibilité, pour obtenir les équations de Kazhikhov–Smagulov modélisant ces rejets atmosphériques. Une fois cette modélisation obtenue, la démarche classique d'étude de stabilité linéaire temporelle est introduite et appliquée pour obtenir le problème aux valeurs propres modélisant la dynamique instable de ces écoulements. Les principaux résultats de stabilité linéaire à densité constante ainsi que les récents résultats à densité variable sont énoncés et finalement les objectifs de cette étude de stabilité sont fixés.

### 1.1 Les équations de Navier–Stokes incompressibles inhomogènes

Cette section est consacrée à la présentation du modèle d'équations de Navier–Stokes incompressibles inhomogènes permettant de modéliser la dynamique d'écoulements de type rejets atmosphériques. On considère un fluide multiespèces en mouvement dans un domaine  $\mathcal{Q} = \Omega \times \mathcal{T}$ . On pose  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  avec  $\Omega$  un domaine muni d'un référentiel fixe  $(0, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et  $t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}_+^*$  avec  $\mathcal{T}$  un intervalle de temps.

#### 1.1.1 Principes de la mécanique des fluides

La description macroscopique de la dynamique d'un fluide est fondée sur *l'hypothèse de continuum* et d'état local, les *principes fondamentaux de la mécanique* (bilan de masse, quantité de mouvement et énergie) ainsi que sur les *lois de comportement* [5, 8, 9].

Il est possible de définir un volume, appelé particule fluide, assez grand pour contenir une importante quantité de molécules et assez petit pour définir un état local permet-

tant de justifier le calcul différentiel et intégral. Chaque particule possédant son propre état d'équilibre thermodynamique, on peut alors définir, pour chaque particule fluide, les grandeurs extensives thermodynamiques habituelles. Ainsi, en définissant  $\Omega$  un domaine élémentaire quelconque mobile de l'écoulement et  $\partial\Omega$  ses frontières se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$ , une grandeur extensive  $F$  du fluide et sa grandeur intensive ou grandeur volumique  $f$  associée sont définies par

$$F = \int_{\Omega} f \, dV, \quad \text{et} \quad f = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{F}{V}. \quad (1.1)$$

Pour pouvoir modéliser le comportement d'un écoulement, il convient alors de définir la variation temporelle de  $F$  dans  $\Omega$  (équation de transport). Cette évolution correspond à la variation temporelle volumique  $\partial f / \partial t$  dans le domaine matériel et aux quantités volumiques transportées par l'écoulement traversant la surface du domaine  $f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $\partial\Omega$ .

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f \, dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \, dV + \oint_{\partial\Omega} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right) \, dV \quad (1.2)$$

Il est alors nécessaire de relier l'évolution temporelle de  $F$  aux mécanismes qui génèrent ces variations (équation de bilan). Pour définir ces équations de bilan, le domaine  $\Omega$  est confondu avec celui d'une particule fluide et est appelé domaine matériel  $\Omega_m$ . Il est important de souligner que dans le cas d'un domaine matériel, la vitesse de ses frontières  $\partial\Omega_m$ , notée  $\mathbf{w}$ , correspond à la vitesse de la particule fluide. Les mécanismes qui génèrent la variation temporelle d'une grandeur extensive dans un domaine matériel sont liés à des termes de production volumique  $\sigma_F$  et des termes de flux non convectif  $\boldsymbol{\varphi}$ . Ainsi, une équation de bilan pour une grandeur extensive  $F$  s'écrit sous forme intégrale :

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Omega_m} \sigma_F \, dV_m - \int_{\partial\Omega_m} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \, dS_m = \int_{\Omega_m} \left( \sigma_F - \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \, dV_m. \quad (1.3)$$

L'expérience montre que les termes de flux non convectifs peuvent être le résultat de deux types de transferts, les transferts par *diffusion* liés à des mécanismes microscopiques et les transferts par *rayonnement* (non traités ici). En combinant l'équation de transport (1.2) sur un domaine matériel et l'équation de bilan (1.3) il est possible d'obtenir la forme locale d'une équation de bilan :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{w}) = \sigma_F - \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}. \quad (1.4)$$

Pour finalement modéliser entièrement le comportement d'un écoulement, il est nécessaire, pour chaque équation de bilan de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie, d'explicitier chaque terme de production volumique et surfacique. Ceux-ci sont obtenus

grâce aux principes de la mécanique et de la thermodynamique : *conservation de la masse, principe fondamental de la dynamique, premier et second principe de la thermodynamique*. Les termes diffusifs décrivant de manière macroscopique des phénomènes microscopiques peuvent être obtenus grâce à la loi d'Onsager liant linéairement le flux diffusif d'une grandeur extensive au gradient des variables intensives associées (lois constitutives) [18].

### 1.1.2 Définition des paramètres thermodynamiques de mélange miscible

Dans un processus de mélange miscible faisant intervenir  $N$  espèces, il est indispensable de définir les grandeurs permettant d'identifier le mélange. On peut définir pour une espèce  $k$  sa concentration massique  $\rho_k$ , sa masse volumique spécifique  $\bar{\rho}_k$ , sa fraction volumique  $\phi_k$  et sa fraction massique  $Y_k$  (voir tableau 1.1). Les relations suivantes permettent de relier certaines grandeurs du mélange entre elles :

$$\rho = \sum_{k=1}^N \rho_k, \quad \sum_{k=1}^N Y_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N \phi_k = 1, \quad \rho_k = Y_k \rho = \phi_k \bar{\rho}_k. \quad (1.5)$$

Dans un mélange, chaque espèce possède une vitesse  $\mathbf{v}_k$  définie comme la vitesse moyennée, dans le référentiel fixe, des molécules de l'espèce  $k$ . Il est possible de définir une vitesse d'ensemble de toutes ces espèces. Le choix de cette vitesse d'ensemble n'est pas unique, on peut choisir soit  $\mathbf{w}$  la vitesse moyennée par la masse totale du mélange, soit  $\mathbf{u}$  la vitesse moyennée par le volume total du mélange, que l'on exprime respectivement comme

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^N Y_k \mathbf{v}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \sum_{k=1}^N \phi_k \mathbf{v}_k. \quad (1.6)$$

Nous verrons par la suite que ces deux définitions sont utiles : on utilise ainsi  $\mathbf{w}$  comme vitesse d'ensemble dans les équations de bilan, et  $\mathbf{u}$  pour traduire la contrainte d'incompressibilité.

### 1.1.3 Équations de bilan

Le bilan de masse partielle d'une espèce  $k$  en l'absence de réactions chimiques s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0. \quad (1.7)$$

Il est possible de représenter le terme de flux  $\rho_k \mathbf{v}_k$  comme une somme d'un terme de flux de convection par rapport à une vitesse moyennée et d'un terme de flux de diffusion tels que :

$$\rho_k \mathbf{v}_k = \rho_k \mathbf{w} + \mathbf{J}_k, \quad \rho_k \mathbf{v}_k = \rho_k \mathbf{u} + \mathbf{J}_k^V, \quad (1.8)$$

---

$m$	Masse totale	
$V$	Volume total	
$m_k$	Masse de l'espèce $k$	
$V_k$	Volume de l'espèce $k$	
$\mathbf{v}_k$	Vitesse moyenne des molécules de l'espèce $k$	
$\rho$	Masse volumique totale	$m/V$
$\rho_k$	Concentration massique de l'espèce $k$	$m_k/V$
$\bar{\rho}_k$	Masse volumique spécifique de l'espèce $k$	$m_k/V_k$
$\phi_k$	Fraction volumique de l'espèce $k$	$V_k/V$
$Y_k$	Fraction massique de l'espèce $k$	$m_k/m$
$\mathbf{w}$	Vitesse moyennée par la masse	$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^N Y_k \mathbf{v}_k$
$\mathbf{u}$	Vitesse moyennée par le volume	$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N \phi_k \mathbf{v}_k$
$\mathbf{J}_k$	Flux massique diffusif de l'espèce $k$	$\mathbf{J}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{w})$
$\mathbf{J}_k^V$	Flux volumique diffusif de l'espèce $k$	$\mathbf{J}_k^V = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{u})$

---

TABLE 1.1 – Grandeurs liées au mélange

avec  $\mathbf{J}_k$  et  $\mathbf{J}_k^V$  les termes de flux massique diffusif de l'espèce  $k$  respectivement moyennés par la masse et par le volume. Ces termes de flux diffusif sont les termes fondamentaux contenant l'information des vitesses relatives de chaque espèce. En prenant  $\mathbf{w}$  comme vitesse de référence, l'équation de bilan de masse partielle (1.7) s'écrit alors sous la forme

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{w}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_k. \quad (1.9)$$

En sommant les bilans locaux des  $N$  masses partielles (1.7) on obtient l'équation de bilan de masse totale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0. \quad (1.10)$$

On voit donc ici l'intérêt d'avoir écrit le terme de vitesse  $\mathbf{v}_k$  par rapport à  $\mathbf{w}$  puisqu'il s'agit du champ de vitesse qui apparaît naturellement dans l'équation de bilan 1.4.

Le bilan de quantité de mouvement est obtenu grâce au principe fondamental de la dynamique et s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.11)$$

avec  $P$  la pression et  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses.

### 1.1.4 Écoulement isovolume

Par définition, un écoulement est incompressible ou isovolume, si le volume élémentaire  $V$  d'une particule fluide quelconque ne varie pas au cours du temps :

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (1.12)$$

Lorsqu'il existe plusieurs espèces au sein de l'écoulement, la variation de volume élémentaire est égale à la somme des variations de volume partiel  $V_k$  de chaque espèce :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dV_k}{dt}. \quad (1.13)$$

En utilisant la définition de la fraction volumique d'une espèce  $k$  (1.5), l'équation de transport (1.2) sur chaque volume  $V_k$  et la définition de la vitesse  $\mathbf{u}$  (1.6), l'équation (1.13) s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_k \mathbf{v}_k) \right) dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV. \quad (1.14)$$

Ainsi, la variation du volume élémentaire d'un écoulement composé de plusieurs espèces est égale à la divergence du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  moyenné par le volume.

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.15)$$

Cette formulation nous permet de constater l'intérêt d'utiliser le champ de vitesse moyenné par le volume  $\mathbf{u}$  pour traiter des écoulements incompressibles multiespèces. En effet, dans cette configuration, la contrainte d'incompressibilité est donnée par la relation :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.16)$$

On remarque à cette étape que le champ de vitesse  $\mathbf{w}$  n'est pas solénoïdal dans le cas inhomogène *i.e.*  $\nabla \cdot \mathbf{w} \neq 0$ . Ceci est directement lié au fait que la vitesse  $\mathbf{w}$  est dépendante de la variation de masse au sein de ce volume. En effet, comme de la masse peut entrer ou sortir de ce volume, la conséquence directe est que  $\mathbf{w}$  n'est pas à divergence nulle. Ainsi, dans le cas d'un écoulement multiespèces incompressible, les vitesses moyennées par la masse et le volume sont deux grandeurs fondamentales différentes, l'une permettant de caractériser la conservation de la masse et l'autre la condition isovolume. Cependant, ces vitesses ne sont pas indépendantes et peuvent être reliées par le terme de flux diffusif massique telles que :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \sum_{k=1}^N \phi_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{\rho_k} \mathbf{J}_k = \mathbf{u} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\bar{\rho}_k} \mathbf{J}_k. \quad (1.17)$$

### 1.1.5 Loi de Fick et de Newton-Stokes

Finalement, pour modéliser entièrement ces écoulements, il reste à expliciter les termes de diffusion massique et visqueux responsables de l'irréversibilité des phénomènes. Ces termes peuvent être déterminés à partir de la relation d'Onsager, permettant de relier linéairement les termes de flux diffusif et les termes de force thermodynamique.

Le terme de diffusion de masse, modélisé par le terme de flux  $\mathbf{J}_k$ , est relié linéairement au gradient de concentration massique par la loi de Fick généralisée<sup>1</sup> [80] définie par :

$$\mathbf{J}_k = -\rho \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \lambda_{ki} \nabla Y_k, \quad (1.18)$$

avec  $\lambda_{ki}$  le coefficient de diffusion de l'espèce  $k$  dans l'espèce  $i$ . Dans le cas binaire  $N = 2$ , la loi de Fick généralisée (1.18) s'écrit classiquement :

$$\mathbf{J}_1 = -\rho \lambda_{12} \nabla Y_1, \quad \mathbf{J}_2 = -\rho \lambda_{21} \nabla Y_2. \quad (1.19)$$

---

1. Loi nommée en référence à Adolf Fick [31] qui a trouvé une formulation similaire pour la cas d'un mélange binaire.

Dans cette configuration, les coefficients de diffusion sont égaux  $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda$  et la relation permettant de relier les vitesses massiques et volumiques (1.17) s'écrit [49] :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \rho\lambda\nabla\left(\frac{Y_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{Y_2}{\bar{\rho}_2}\right) = \mathbf{u} + \rho\lambda\nabla\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{\rho}\right) = \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\rho}\nabla\rho. \quad (1.20)$$

La diffusion visqueuse, modélisée par le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$ , est reliée linéairement au tenseur de taux de déformations  $\mathbf{D}$ , défini comme la partie symétrique du tenseur de déformation  $\nabla\mathbf{w}$  :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu'(\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (1.21)$$

avec  $\mu > 0$  la viscosité dynamique,  $\mu'$  tel que  $3\mu' + 2\mu > 0$  et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité. Dans ce cas on parle de fluide newtonien. Dans le cas d'un mélange binaire, en injectant la loi de Fick (1.20) dans (1.21) et en utilisant la contrainte d'incompressibilité (1.16), le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu' \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\lambda}{\rho} \nabla \rho \right) \right] \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (1.22)$$

Cette formulation fait apparaître explicitement les contributions de  $\rho$  dans le tenseur des contraintes visqueuses et traduit uniquement le déplacement des particules lié à la diffusion moléculaire.

### 1.1.6 Système d'équations de Kazhikhov–Smagulov

L'ensemble des points abordés précédemment permettent de modéliser un écoulement *incompressible* d'un *mélange binaire*<sup>2</sup> de *fluide miscible newtonien à viscosité dynamique constante monophasique isotherme*. Dans cette configuration, les relations données dans la section 1.1.2, s'écrivent :

$$\rho = \phi\bar{\rho}_1 + (1 - \phi)\bar{\rho}_2, \quad \mathbf{u} = \phi\mathbf{v}_1 + (1 - \phi)\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w} = Y\mathbf{v}_1 + (1 - Y)\mathbf{v}_2,$$

avec  $\phi$  et  $Y$  respectivement les fractions volumique et massique de l'un des deux constituants. Ces écoulements sont modélisés par le système d'équations (appelé équations de Navier–Stokes incompressibles inhomogènes) composé des équations de bilan de masse totale (1.10), de bilan de quantité de mouvement totale (1.11) pour un fluide newto-

2. Le cas d'un mélange binaire est suffisant pour représenter l'inhomogénéité.

nien (1.21), de la contrainte isovolume (1.16) et de la loi de Fick (1.20) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{w} + (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \rho \mathbf{g}, \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0, \quad (1.23b)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\rho} \nabla \rho, \quad (1.23c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.23d)$$

Dans cette configuration, les coefficients  $\lambda, \mu > 1$  et  $\mu'$  liés à la nature du fluide sont supposés constants. Ce système d'équations fait intervenir simultanément les vitesses  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{u}$ . En utilisant la loi de Fick, il est alors possible de faire apparaître uniquement une seule de ces deux variables. Le choix de ce champ peut être fait de manière arbitraire, car les systèmes seront strictement équivalents. Si le champ de vitesse  $\mathbf{w}$  est choisi comme variable apparente, le caractère isovolume explicite est perdu, puisque  $\mathbf{w}$  n'est pas un champ solénoïdal. Dans l'autre cas, si le champ  $\mathbf{u}$  est choisi, le caractère isovolume est conservé de manière explicite, en revanche les équations de quantité de mouvement et de masse sont modifiées. Nous avons décidé de choisir cette dernière principalement parce qu'il s'agit de la variable naturelle de vitesse lorsque l'on veut traiter d'écoulement isovolume. Ainsi, en remplaçant la vitesse  $\mathbf{w}$  grâce à la loi de Fick, les équations (1.23) se ré-écrivent sous la forme

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = - \underbrace{\nabla p}_{(3)} + \mu \Delta \mathbf{u} + \lambda \left[ \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho + (\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{(1)} \right] + \rho \mathbf{g} + \underbrace{O(\lambda^2)}_{(2)}, \quad (1.24a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = \lambda \Delta \rho, \quad (1.24b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.24c)$$

Les termes (1) et (2) proviennent du remplacement de la vitesse  $\mathbf{w}$  par  $\mathbf{u}$  dans les termes d'accélération et de diffusions visqueuses. Le terme  $p$  dans (3) correspond à la partie dynamique de la pression  $P$  et de la divergence du champ de vitesse  $\mathbf{w}$ . Il s'interprète donc comme une pression généralisée. Puisque  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , ce terme de pression s'interprète également comme un multiplicateur de Lagrange permettant d'assurer cette contrainte<sup>3</sup>.

En négligeant les termes d'ordre supérieur en  $\lambda$ , autrement dit en supposant les effets diffusifs suffisamment faibles<sup>4</sup>, ces équations forment ce qui est appelé le modèle de Kazhikhov–Smagulov [11, 17]. Ce modèle initialement posé et étudié par FRANK-

3. Le terme de pression  $p$  et les termes en  $O(\lambda^2)$  sont explicités dans l'article de GUILLÉN-GONZÁLEZ et al. [43]

4. Cette hypothèse sera vérifiée par la suite dans le cas qui nous intéresse ici.

KAMENETSKII [36], KAZHIKHOV et al. [49] et ANTONSEV et al. [4] permet de modéliser le transport/mélange de polluants ou encore la propagation d'une flamme à faible Mach. Ce système, développé il y a 70 ans, reste assez peu utilisé dans le domaine. Néanmoins, cette formulation connaît un regain d'intérêt, notamment pour l'étude d'écoulements avec de grandes variations de masse volumique [43, 75, 83, 28, 69, 35].

Les grandeurs fondamentales d'adimensionnement de masse  $\bar{\rho}$ , de vitesse  $U$  et de longueur  $L$  permettent d'exprimer le système d'équations de Kazhikhov–Smagulov sous forme adimensionnée tel que :

$$t = t^\dagger \frac{U}{L}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^\dagger}{L}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^\dagger}{U}, \quad \rho = \frac{\rho^\dagger}{\bar{\rho}},$$

l'exposant  $\dagger$  indique le caractère dimensionnel de la grandeur<sup>5</sup>. Cette analyse dimensionnelle [40] permet d'extraire les nombres sans dimension caractéristiques de ces écoulements : le nombre de Reynolds  $Re$  caractérisant les effets inertiels sur les effets visqueux, le nombre de Schmidt  $Sc$  caractérisant les effets diffusifs sur les effets visqueux, le nombre de Froude  $Fr$  caractérisant les effets inertiels sur les effets gravitaires et le rapport de masse volumique  $S$  entre les deux espèces :

$$Re = \frac{\bar{\rho}UL}{\mu}, \quad Sc = \frac{\mu}{\bar{\rho}\lambda}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \quad S = \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}}. \quad (1.25)$$

Il convient de vérifier si ce modèle est pertinent pour représenter des rejets atmosphériques. Pour cela, il faut s'assurer que les conditions d'évolution de ces écoulements satisfont les hypothèses et approximations faites lors de la mise en œuvre des équations :

- **Caractère isovolume de l'écoulement** : les vitesses d'éjections pour des échappements de cheminée sont de l'ordre de  $20 \text{ m s}^{-1}$ . Dans ces conditions, le nombre de Mach est alors de l'ordre de 0.05, ce qui est bien inférieur à la limite compressible [2].
- **Viscosité dynamique et coefficient de diffusion constant** : pour un mélange binaire de gaz parfaits, la viscosité dynamique et le coefficient de diffusion sont très peu sensibles à la variation de masse [33].
- **Diffusion de masse suffisamment faible** : l'analyse dimensionnelle montre que les termes diffusifs sont maintenant proportionnels à  $1/(Re Sc)$ . Ainsi, même si le nombre de Schmidt  $Sc$  est en  $O(1)$ , le nombre de Reynolds  $Re$  est supposé très grand devant 1, justifiant la non-retention des termes en  $\lambda^2$ .
- **Condition isotherme** : pour des rejets atmosphériques, les variations de température sont de l'ordre de quelques dizaines de Kelvin. De plus, pour des gaz, le coefficient de dilatation thermique est de l'ordre  $1 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Ainsi, la variation de volume liée à la variation de température peut être considérée comme négligeable.

---

5. Tout ce qui est écrit précédemment est réalisé de manière dimensionnelle. L'exposant  $\dagger$  n'a pas été écrit pour ne pas surcharger les notations.

Cependant, il est possible de généraliser cette démarche à des cas non isothermes avec la prise en compte d'une équation de bilan sur l'énergie.

Cette modélisation se place également dans un *régime de convection forcée*, *i.e.* les forces de flottabilité sont négligeables devant les forces inertielles  $Fr \gg 1$ . Cette hypothèse peut être discutée à la vue des valeurs des nombres de Froude, mais cela nous permet de mettre l'accent sur l'impact de la variation de masse sur la dynamique inertielle de l'écoulement. Cette hypothèse est d'autant plus valable proche de la zone d'éjection, où nous souhaitons placer notre étude.

Ainsi, le modèle Kazhikhov–Smagulov est pertinent pour étudier le comportement des rejets atmosphériques pour lequel on supposera :

$$\mu = cte, \quad \lambda = cte, \quad Re \sim O(1000), \quad Sc \sim O(1), \quad Fr \gg 1, \quad (1.26)$$

et dont les équations adimensionnées s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho Re Sc} \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho + (\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad (1.27a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = \frac{1}{Re Sc} \Delta \rho \quad (1.27b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.27c)$$

## 1.2 Instabilité des écoulements parallèles cisailés ouverts inhomogènes

Le concept de stabilité trouve sa genèse au début du XIX<sup>e</sup> siècle<sup>6</sup> et de façon abondante dans le domaine de l'hydrodynamique. Ces questions ont particulièrement été explorées par HELMHOLTZ, KELVIN, ORR, RAYLEIGH, REYNOLDS, et SOMMERFELD. Ces notions sont condensées et formalisées à partir des années 1950 dans des ouvrages de référence : LIN [57], CHANDRASEKHAR [14], GEORGESCU [39], DRAZIN et al. [24], MANNEVILLE [60], CHARRU [15], CRIMINALE et al. [16].

### 1.2.1 Mécanisme d'instabilité et formalisme

L'état stable ou instable d'un système dynamique (pendule, écoulement, réaction chimique, etc.) n'a de sens qu'au regard d'un état spécifique du système. Il s'agit de l'état d'équilibre ou état de base du système. Une étude de stabilité se concentre sur l'analyse

---

6. Euler peut être considéré comme l'un des précurseurs dans ce domaine, en particulier avec la compréhension du phénomène de convection en 1767 [30, 29].

de l'évolution d'une perturbation (quelconque) en espace  $\mathbf{x}$  et en temps  $t$  appliquée au système dans son état de base. Un état d'équilibre<sup>7</sup> est dit :

- *stable* lorsque pour toute perturbation (spatiale ou temporelle) le système tend vers son état d'équilibre au cours du temps,
- *instable* lorsque pour toute perturbation (spatiale ou temporelle) le système s'éloigne continuellement de son état d'équilibre au cours du temps,
- *métastable* ou *local* lorsque l'amplification ou la diminution de la perturbation dépend de l'amplitude initiale de celle-ci.

Le caractère stable ou instable d'un système peut être étudié par rapport à des perturbations de faible amplitude (approche linéaire), mais peut également être étudié à partir des grandeurs moyennes du système (approche énergétique)<sup>8</sup> tel que :

- *Stabilité linéaire* : étude qui s'intéresse à la croissance ou décroissance *exponentielle* d'une perturbation lorsque celle-ci est initialement *d'amplitude infinitésimale*,
- *Stabilité énergétique* : étude qui s'intéresse à la croissance ou décroissance *monotone* d'une perturbation lorsque celle-ci est initialement *d'amplitude finie*.

Dans le présent document, la stabilité linéaire constitue notre prisme d'étude et la suite de cette section aborde l'ensemble des points nécessaires à la réalisation d'une étude de stabilité linéaire.

Les principes de base de la stabilité linéaire sont présentés sur un système dynamique général de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi; \zeta), \quad (1.28)$$

avec  $\phi$  l'état du système à une position de l'espace  $\mathbf{x}$  et de temps  $t$  donné,  $F$  un opérateur non linéaire spatial et  $\zeta$  l'ensemble des paramètres de contrôle. Pour étudier la réponse à une perturbation de ce système dynamique, l'état  $\phi$  est décomposé en une somme d'un état de base  $\phi_0$ , solution du système (1.28), et d'une perturbation  $\tilde{\phi}$  tel que :

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}. \quad (1.29)$$

L'étude de stabilité est réalisée au sens de Lyapunov [59] *i.e.* les perturbations  $\tilde{\phi}$  sont supposées d'amplitude infinitésimale. Dans notre cas, seules les perturbations aux temps longs nous intéressent. On parlera de *stabilité asymptotique* si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(\mathbf{x}, t) - \phi_0(\mathbf{x}, t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{\phi}\| = 0, \quad (1.30)$$

et d'*instabilité asymptotique* dans le cas contraire. Le caractère infinitésimal des perturbations permet de linéariser le système (1.28) autour de son état de base  $\phi_0$ , en introduisant

7. En 1883, Clerk Maxwell donne une définition d'état stable et instable [22, p.1].

8. On parle en anglais de « stability in small » et « stability in mean » [39].

un opérateur différentiel linéaire  $L$  :

$$L(\zeta)\tilde{\phi} = 0 \quad \text{avec} \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial F(\phi; \zeta)}{\partial \phi} \Big|_{\phi_0}. \quad (1.31)$$

La forme des perturbations est obtenue en étudiant la réponse impulsionnelle de cette équation linéarisée :

$$LG = \delta(\mathbf{x}, t) \quad (1.32)$$

La perturbation est alors modélisée par un Dirac  $\delta(\mathbf{x}, t)$  et sa réponse est appelée fonction de Green  $G(\mathbf{x}, t; \zeta)$  [25]. La transformée de Fourier-Laplace [6] de la réponse impulsionnelle (1.32) s'écrit sous la forme

$$D\hat{G}(\mathbf{k}, \omega; \zeta) = 1, \quad (1.33)$$

avec  $\omega \in \mathbb{C}$  la pulsation complexe,  $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^N$  le vecteur d'onde complexe d'instabilité (avec  $N$  la dimension de l'espace considéré),  $\hat{G}$  la transformée de la fonction de Green et  $D$  l'opérateur correspondant à la transformation de l'opérateur  $L$ .  $\hat{G}$  est obtenue par la résolution de l'équation (1.33) ( $\hat{G} = D^{-1}$ ), ce qui permet de calculer  $G$  par transformation inverse :

$$G(\mathbf{x}, t; \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_L d\omega \int_F d\mathbf{k} D^{-1} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (1.34)$$

L'allure de la fonction de Green (allure des perturbations) aux temps longs permet de formaliser les définitions de stabilité et d'instabilité linéaire, telles que :

- le système est *stable* si

$$\forall \mathbf{x}, \forall t > 0; \|G(\mathbf{x}, t; \zeta)\| < \|G(\mathbf{x}, 0; \zeta)\|. \quad (1.35)$$

- le système est *instable* s'il existe un point de l'espace où les perturbations sont amplifiées :

$$\exists \mathbf{x}, \forall t > 0; \|G(\mathbf{x}, t; \zeta)\| > \|G(\mathbf{x}, 0; \zeta)\|. \quad (1.36)$$

Dans le cas d'un écoulement instable, les perturbations aux temps longs peuvent être transportées loin de leur position initiale ou alors occuper tout l'espace :

- le système est *convectivement instable* : les perturbations se propagent en aval de l'écoulement et en tout point de l'espace, celles-ci s'atténuent, alors on a :

$$\forall \mathbf{x}, \exists t^* > 0; \|G(\mathbf{x}, t > t^*; \zeta)\| = 0, \quad (1.37)$$

- le système est *absolument instable* : les perturbations croissent de telle façon à envahir tout l'espace, et donc on a :

$$\forall \mathbf{x}; \lim_{t \rightarrow +\infty} G(\mathbf{x}, t; \zeta) = \infty \quad (1.38)$$

De plus, le comportement de la fonction de Green est conditionné par les zéros de l'opérateur  $D(\mathbf{x}, t; \zeta)$  que l'on nomme *relation de dispersion* linéaire :

$$D(\mathbf{k}, \omega; \zeta) = 0 \quad (1.39)$$

Ainsi, d'après la définition de stabilité et de la forme exponentielle de la fonction de Green, une étude de stabilité d'un état de base se ramène à l'analyse du signe de la partie imaginaire de  $\omega$  et de  $\mathbf{k}$ , solutions de la relation de dispersion (1.39).

Dans le cas général où  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  sont complexes, l'étude de stabilité est dite spatio-temporelle. Cette résolution est assez complexe et non nécessaire pour obtenir le caractère stable ou instable d'un système. En effet, le nombre d'onde et la pulsation peuvent être choisis comme des variables réelles, définies telles que :

- résolution temporelle (*stabilité temporelle*) : on considère  $\omega = \omega_r + i\sigma \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{R}^N$ , la relation de dispersion s'écrit  $\omega = \omega(\mathbf{k}; \zeta)$  et le caractère stable ou instable se réduit donc à l'étude du signe de la partie imaginaire de la pulsation, appelé taux de croissance. Dans ce cas, le système est dit temporellement :

$$\text{stable si } \sigma < 0, \quad \text{instable si } \sigma > 0, \quad \text{marginal si } \sigma = 0. \quad (1.40)$$

- résolution spatiale (*stabilité spatiale*) : on considère  $\mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa}_r + i\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{C}^N$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ , la relation de dispersion s'écrit  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega; \zeta)$  et le caractère stable ou instable se réduit à l'étude du signe de la partie imaginaire des nombres d'onde. Dans ce cas, le système est dit spatialement :

$$\text{stable si } \|\boldsymbol{\kappa}\| > 0, \quad \text{instable si } \|\boldsymbol{\kappa}\| < 0, \quad \text{marginal si } \|\boldsymbol{\kappa}\| = 0. \quad (1.41)$$

Dans le cadre de ce travail, l'étude temporelle est privilégiée.

Les propriétés de *symétrie* et *d'invariance* de l'état de base du système permettent d'écrire les perturbations sous une forme particulière. En effet, en supposant l'état de base invariant par translation, arbitrairement selon  $x_0$  et  $x_1$  et stationnaire, alors les coefficients présents dans les équations linéaires (1.31) dépendent uniquement de la variable  $x_2$ . On peut alors écrire les perturbations sous forme de modes normaux

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi}(x_2) \exp[i(k_0 x_0 + k_1 x_1 - \omega t)], \quad (1.42)$$

avec  $k_0$  et  $k_1$  les nombres d'onde respectivement dans les directions  $x_0$  et  $x_1$  et  $\hat{\phi}$  l'amplitude des perturbations. Cette formulation permet de définir simplement les opérateurs

de dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \equiv ik_0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \equiv ik_1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega. \quad (1.43)$$

Avec cette formulation, l'équation linéaire (1.31) peut se mettre sous la forme algébro-différentielle

$$\mathbf{A} \hat{\phi} = \omega \mathbf{B} \hat{\phi}, \quad (1.44)$$

avec  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\phi_0, d\phi_0/dx_2, \dots, d^n\phi_0/dx_2^n, d/dx_2, \dots, d^n/dx_2^n, k_2, \zeta)$ . Résoudre ce problème aux valeurs propres généralisé revient à résoudre la relation de dispersion contenant toute l'information de stabilité du système.

### 1.2.2 Équations de stabilité à densité variable

Les équations de stabilité linéaire des écoulements inhomogènes sont exprimées dans le système de coordonnées cartésiennes plan  $(x_0, x_1, x_2) = (x, y, z)$  et  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . On décompose les champs de vitesse, de masse volumique et de pression comme la somme d'un état de base et d'une perturbation

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad p = p_0 + \tilde{p} \quad (1.45)$$

On considère un écoulement de base parallèle de direction  $Ox$  ne dépendant que de la variable spatiale  $z$  et du temps. Cet écoulement doit être solution des équations de Kazhikhov–Smagulov :

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{Sc} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] \frac{\partial U_0}{\partial z} \right), \quad (1.46a)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2}, \quad (1.46b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_0 = 0. \quad (1.46c)$$

Cette formulation impose des formes particulières pour l'écoulement de base. Cependant, en considérant les hypothèses (1.26), il apparaît clairement que les temps de diffusion (visqueuse)  $\tau_\nu \propto Re$  sont très grands devant les temps caractéristiques de l'instabilité  $\tau_I \propto 1/\sigma$  (avec a priori  $\sigma = O(1)$ ). On peut alors figer l'écoulement de base en le considérant comme non visqueux et non diffusif :

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0. \quad (1.47a)$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'un écoulement de base parallèle il vient que tout profil stationnaire

$$\mathbf{U}_0 = U_0(z)\mathbf{e}_x, \quad \rho_0 = \rho_0(z), \quad p_0 = cte, \quad (1.48)$$

est solution du problème. Puisque l'écoulement de base ne dépend pas des coordonnées  $x, y$  et du temps, les perturbations peuvent être cherchées sous la forme de modes normaux

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}, \tilde{p})^T = (\hat{\mathbf{u}}(z), \hat{\rho}(z), \hat{p}(z))^T \exp[i(\alpha x + \beta y - \omega t)], \quad (1.49)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  les nombres d'onde respectivement dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ . Par conséquent, les équations de Kazhikhov–Smagulov (1.27) linéarisées autour de l'état de base (1.48) avec des perturbations (1.49) s'écrivent

$$i\omega \hat{u}_x = \left[ i\alpha U_0 - \frac{1}{\rho_0 Re} \Delta - \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} \right] \hat{u}_x + \frac{dU_0}{dz} \hat{u}_z + \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \left[ \alpha^2 U_0 - \frac{dU_0}{dz} \frac{d}{dz} \right] \hat{\rho} + \frac{i\alpha}{\rho_0} \hat{p}, \quad (1.50a)$$

$$i\omega \hat{u}_y = \left[ i\alpha U_0 - \frac{1}{\rho_0 Re} \Delta - \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} \right] \hat{u}_y + \frac{\alpha\beta U_0}{\rho_0 Re Sc} \hat{\rho} + \frac{i\beta}{\rho_0} \hat{p}, \quad (1.50b)$$

$$i\omega \hat{u}_z = \left[ i\alpha U_0 - \frac{1}{\rho_0 Re} \Delta - \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} - \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \frac{d^2\rho_0}{dz^2} \right] \hat{u}_z - \frac{i\alpha U_0}{\rho_0 Re Sc} \frac{d\hat{\rho}}{dz} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\hat{p}}{dz}, \quad (1.50c)$$

$$i\omega \hat{\rho} = \left[ i\alpha U_0 - \frac{1}{Re Sc} \Delta \right] \hat{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz} \hat{u}_z, \quad (1.50d)$$

$$0 = i\alpha \hat{u}_x + i\beta \hat{u}_y + \frac{d\hat{u}_z}{dz}, \quad (1.50e)$$

avec  $\Delta \equiv -\alpha^2 - \beta^2 + d^2/dz^2$ . Ce système d'équations doit être complété par des conditions aux limites. La structure du système couplée aux écoulements de base donnent naturellement que toutes les perturbations s'atténuent en  $z = \pm\infty$  :

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \hat{u}_x, \hat{u}_z, \hat{\rho}, \hat{p} = 0. \quad (1.51)$$

Ce système d'équations (1.50) peut alors être mis sous forme algèbro-différentielle :

$$\mathbf{A}_* \hat{\boldsymbol{\phi}} = i\omega \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.52)$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \\ \hat{\rho} \\ \hat{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_* = \begin{bmatrix} L & 0 & \frac{dU_0}{dz} & M_u & \frac{i\alpha}{\rho_0} \\ 0 & L & 0 & M_v & \frac{i\beta}{\rho_0} \\ 0 & 0 & L_w & M_w & \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & \frac{d\rho_0}{dz} & L_r & 0 \\ i\alpha & i\beta & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les opérateurs qui apparaissent dans ce système d'équations sont définis par :

$$L \equiv i\alpha U_0 - \frac{1}{\rho_0 Re} \Delta - \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz}, \quad L_w \equiv L - \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \frac{d^2\rho_0}{dz^2}, \quad L_r \equiv i\alpha U_0 - \frac{1}{Re Sc} \Delta$$

$$M_u \equiv \frac{1}{\rho_0 Re Sc} \left[ \alpha^2 U_0 - \frac{dU_0}{dz} \frac{d}{dz} \right], \quad M_v \equiv \frac{\alpha\beta U_0}{\rho_0 Re Sc}, \quad M_w \equiv -\frac{i\alpha U_0}{\rho_0 Re Sc} \frac{d}{dz}$$

Ces équations linéaires forment un problème aux valeurs propres généralisé dans lequel l'équation liée à l'incompressibilité de l'écoulement introduit un terme de singularité pour les termes de pression. En effet, cette équation ne dépend pas explicitement de la pression, mais est une contrainte sur l'écoulement et la pression est un multiplicateur de Lagrange de cette contrainte. Généralement, une façon d'éliminer cette singularité est d'écrire une équation sur la pression en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement, ce qui conduit à une équation de Poisson pour la pression. La démarche est ici généralisée au cas à densité variable ce qui conduit à une équation elliptique de la forme

$$L_{\rho_0}(\tilde{p}) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} \right) = f(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, \tilde{\rho}). \quad (1.53)$$

D'après les propriétés de l'écoulement de base et la forme normale des perturbations, l'opérateur de cette équation s'écrit :

$$L_{\rho_0} \equiv \left[ \frac{\alpha^2}{\rho_0} + \frac{\beta^2}{\rho_0} - \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \right], \quad (1.54)$$

et  $\hat{p}$  est solution de l'équation

$$L_{\rho_0} \hat{p} = f(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z, \hat{\rho}). \quad (1.55)$$

Sous réserve que l'opérateur  $L_{\rho_0}$  soit inversible, l'amplitude des perturbations de pression s'écrit sous la forme

$$\hat{p} = H(f(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z, \hat{\rho})), \quad \text{avec} \quad H \equiv L_{\rho_0}^{-1} \quad (1.56)$$

En injectant cette pression dans les équations (1.50), le système algébro-différentiel associé s'écrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres classique :

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_w \\ \hat{\rho} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_w \\ \hat{\rho} \end{bmatrix}, \quad (1.57)$$

avec l'opérateur  $\mathbf{A}$  défini par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{\rho_0} \right] \mathbf{L} & -\frac{\alpha\beta}{\rho_0} \mathbf{HL} & \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{\rho_0} \right] \frac{dU_0}{dz} + \frac{i\alpha}{\rho_0} \mathbf{H} \frac{d}{dz} \mathbf{L}_w & \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{\rho_0} \right] \mathbf{M}_u + \frac{i\alpha}{\rho_0} \mathbf{H} \left( i\beta \mathbf{M}_v + \frac{d}{dz} \mathbf{M}_w \right) \\ -\frac{\alpha\beta}{\rho_0} \mathbf{HL} & \left[ 1 - \frac{\beta^2}{\rho_0} \right] \mathbf{L} & -\frac{\alpha\beta}{\rho_0} \mathbf{H} \frac{dU_0}{dz} + \frac{i\beta}{\rho_0} \mathbf{H} \frac{d}{dz} \mathbf{L}_w & \left[ 1 - \frac{\beta^2}{\rho_0} \right] \mathbf{M}_v + \frac{i\beta}{\rho_0} \mathbf{H} \left( i\alpha \mathbf{M}_u + \frac{d}{dz} \mathbf{M}_w \right) \\ \frac{i\alpha}{\rho_0} \frac{d}{dz} \mathbf{HL} & \frac{i\beta}{\rho_0} \frac{d}{dz} \mathbf{HL} & \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \right] \mathbf{L}_w + \frac{i\alpha}{\rho_0} \frac{d}{dz} \mathbf{H} \frac{dU_0}{dz} & \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \right] \mathbf{M}_w + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \mathbf{H} \left( i\alpha \mathbf{M}_u + i\beta \mathbf{M}_v \right) \\ 0 & 0 & \frac{d\rho_0}{dz} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

## 1.3 État de l'art : Stabilité des écoulements ouverts parallèles

### 1.3.1 Cas à densité uniforme

Les études de stabilité des écoulements à densité homogène sont abondantes dans la littérature [23, 64, 47]. Cette section résume les principaux résultats de stabilité dans ce domaine. Pour rappel, les écoulements incompressibles à densité constante sont modélisés par les équations de Navier–Stokes<sup>9</sup> :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (1.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.60)$$

En reprenant les mêmes notations introduites dans la partie précédente, les équations modélisant la stabilité d'écoulement de base parallèle, invariant par translation selon  $Ox, Oy$  et stationnaire, s'écrivent :

$$i\omega \hat{u}_x = \left( iU_0\alpha - \frac{1}{Re} \Delta \right) \hat{u}_x + \frac{dU_0}{dz} \hat{u}_z + i\alpha \hat{p}, \quad (1.61a)$$

$$i\omega \hat{u}_y = \left( iU_0\alpha - \frac{1}{Re} \Delta \right) \hat{u}_y + i\beta \hat{p}, \quad (1.61b)$$

$$i\omega \hat{u}_z = \left( iU_0\alpha - \frac{1}{Re} \Delta \right) \hat{u}_z + \frac{d\hat{p}}{dz}, \quad (1.61c)$$

$$0 = i\alpha \hat{u}_x + i\beta \hat{u}_y + \frac{d\hat{u}_z}{dz}. \quad (1.61d)$$

En 1933, SQUIRE [79] démontre que pour tout mode instable tridimensionnel, il existe un mode bidimensionnel plus instable. Ainsi, selon ce théorème, il est possible de restreindre l'étude de stabilité au cas d'un écoulement plan bidimensionnel. Il devient alors commode d'introduire la fonction de courant perturbée

$$\tilde{\psi} = \hat{\psi}(z) \exp(i(\alpha x - \omega t)) \quad \text{tel que} \quad \hat{u}_x = \frac{d\hat{\psi}}{dz} \quad \text{et} \quad \hat{u}_z = -i\alpha \hat{\psi}. \quad (1.62)$$

**Cas non visqueux : Équation de Rayleigh** La stabilité linéaire des écoulements parallèles *non visqueux* a été largement étudiée (HELMHOLTZ, RAYLEIGH, SQUIRE etc.). Dans le cas non visqueux et bidimensionnel, le système linéaire (1.61), peut se réduire à une équation différentielle, appelée équation de Rayleigh, de la forme

$$(U_0 - c) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) \hat{\psi} - \frac{d^2 U_0}{dz^2} = 0, \quad (1.63)$$

9. Cas particulier du système de Kazhikhov–Smagulov avec  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ ,  $\rho = cte$ .

avec  $c = \omega/\alpha$  la célérité adimensionnée complexe de l'onde perturbée (on note  $c = c^\dagger/U$ ). Même si cette équation n'a pas de solution analytique, il est possible d'extraire de celle-ci des informations sur la stabilité de ces écoulements :

- **Théorème de Rayleigh 1879 [71]**. *Si un écoulement est instable alors il existe un point d'inflexion sur le profil de vitesse tel que :*

$$\sigma > 0 \implies \exists z_s; \left. \frac{d^2 U_0}{dz^2} \right|_{z_s} = 0. \quad (1.64)$$

Le théorème de Rayleigh est sûrement l'un des théorèmes fondamentaux de stabilité les plus connus. Il s'agit d'une condition nécessaire d'instabilité.

- **Théorème de Fjørtoft 1950 [32]**. *Si un écoulement est instable alors il existe un point d'inflexion et une condition sur le profil de vitesse telle que :*

$$\sigma > 0 \implies \exists z_s; \frac{d^2 U_0}{dz^2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^2 U_0}{dz^2} (U_0(z) - U_0(z_s)) \leq 0, \quad \forall z \quad (1.65)$$

Ce théorème est une extension du théorème de Rayleigh en le précisant.

- **Théorème du demi-cercle de Howard 1961 [47]**. *La vitesse de propagation  $c$  complexe pour tout mode instable est comprise dans le demi-plan complexe supérieur à l'intérieur du demi-cercle défini par :*

$$\left( c_r^\dagger - \frac{U_{\max} + U_{\min}}{2} \right)^2 + c_i^{\dagger 2} < \left( \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2} \right)^2, \quad (1.66)$$

avec  $U_{\max}, U_{\min}$  respectivement le maximum et le minimum de  $U_0$ .

- **Relation de dispersion asymptotique quand  $\alpha \rightarrow 0$  (Drazin et al. 1962 [23])**. En 1962, DRAZIN et al. [23] trouvent une relation de dispersion asymptotique quand  $\alpha$  tend vers zéro pour des écoulements ouverts parallèles telle que :

$$0 = -\alpha (W_\infty^2 + W_{-\infty}^2) - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} (W^2 - W_\infty^2) (W^2 - W_{-\infty}^2) W^{-2} dz + O(\alpha^3), \quad (1.67)$$

avec  $W = U_0 - c$ . Dans le cas d'une couche de mélange, la relation de dispersion s'écrit

$$c^\dagger = \frac{1}{2} [U_0(\infty) + U_0(-\infty) + i(U_0(\infty) - U_0(-\infty))]. \quad (1.68)$$

Dans le cas d'un jet, la relation de dispersion s'écrit

$$c^\dagger \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} i\alpha^{1/2} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0^2 dz \right)^{1/2}. \quad (1.69)$$

- **Profil linéaire par morceau (Charru [15])**. Dans le cas d'un écoulement de base  $U_0$  quelconque, l'équation de Rayleigh (1.63) n'a pas de solution analytique.

Cependant, dans le cas d'un profil de vitesse constant ou linéaire par morceau, cette équation se réduit à une EDO d'ordre deux à coefficients constants sur chaque domaine de définition.

$$\frac{d^2\hat{\psi}}{dz^2} - \alpha^2\hat{\psi} = 0 \quad (1.70)$$

En ajoutant à cette EDO les conditions de raccordement de vitesse et de contrainte

$$\Delta \left[ \frac{\hat{\psi}}{U_0 - c} \right] = 0, \quad \Delta \left[ (U_0 - c) \frac{d\hat{\psi}}{dz} - \frac{dU_0}{dz} \hat{\psi} \right] = 0, \quad (1.71)$$

avec  $\Delta[X] = X_+(z_i) - X_-(z_i)$  le saut de la grandeur  $X$  à travers la discontinuité, il est possible d'obtenir la relation de dispersion associée à cet écoulement. Dans le cas d'une couche de mélange, les relations analytiques de dispersion sont données par :

$$\begin{array}{ll} \text{Feuille de vortacité} & \text{Épaisseur de vortacité non nulle} \\ c^2 + 1 = 0 & 4\omega^2 - (2\alpha^2 - 1)^2 - e^{-4a} = 0 \end{array}$$

avec  $c = c^\dagger/U$ ,  $\alpha = \alpha^\dagger\delta$ ,  $\omega = \delta\omega^\dagger/U$  et  $\delta$  l'échelle caractéristique de longueur des variations de  $U_0$ . Malgré leur apparente simplicité, ces relations de dispersion donnent un excellent accord avec des solutions numériques pour lesquelles le profil de vitesse est quelconque [15].

**Cas visqueux : Équation d'Orr-Sommerfeld** De la même manière que pour l'équation de Rayleigh, on obtient l'équation décrivant la stabilité d'un écoulement parallèle bidimensionnel visqueux, appelée équation d'Orr-Sommerfeld, sous la forme

$$(U_0 - c) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) \hat{\psi} - \frac{d^2U_0}{dz^2} \hat{\psi} = -\frac{i}{\alpha Re} \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right)^2 \hat{\psi}. \quad (1.72)$$

Cette équation est une généralisation de l'équation de Rayleigh incluant une contribution visqueuse. Elle ajoute cependant une difficulté supplémentaire inhérente à sa structure, en augmentant l'ordre de dérivation. Une analyse linéaire par morceau n'est plus possible car les conditions de saut sont mal définies.

### 1.3.2 Cas à densité variable

Les études de stabilité sur des écoulements parallèles à densité variable sont assez récentes. Néanmoins, il existe un grand nombre d'études de stabilité dans lesquelles la variation de masse est prise en compte seulement au travers des hypothèses de Boussinesq [64, 41]. Il s'agit d'une hypothèse forte qui ne prend en compte que la variation de masse au travers des termes de flottabilité. Bien que ce modèle soit particulièrement utilisé en météorologie [81], il ne permet pas de rendre compte des effets purement inertiels. Cependant, des travaux numériques, théoriques et expérimentaux sur des écoulements à

grande variation de masse volumique ont été réalisés. En effet, RAVIER [70] a permis de mettre en évidence pour un jet plan une valeur critique de rapport de masse pour laquelle les instabilités convectives transitionnent vers des instabilités absolues. FONTANE [33] a également exploré expérimentalement et numériquement les effets de grande variation de masse au travers du couple barocline sur des écoulements de couche de mélange et notamment en montrant des effets non évidents de celle-ci sur les instabilités linéaire. De plus, LANDAU et al. [52] et YU et al. [85] mettent respectivement en évidence le caractère instable d'une feuille de vorticité (couche de mélange) et de deux feuilles de vorticité symétriques (jet) avec une expression analytique de la relation de dispersion pour ces deux configurations académiques.

## 1.4 Objectifs du travail

Ces travaux visent à étudier les écoulements incompressibles à grande variation de masse volumique, *i.e.* sans recourir à l'hypothèse de Boussinesq, au travers du prisme de la stabilité, afin d'observer et d'analyser l'impact de cette inhomog niet  sur la dynamique inertielle de ces écoulements. De plus, cette thèse a pour objectif de combler les lacunes dans la compréhension des mécanismes instables d'une couche de mélange et d'un jet à masse volumique variable. Cela se fera aussi bien d'un point vu théorique que numérique en étendant les résultats connus à masse volumique constante au cas inhomogène.



# Chapitre 2

## Résolution numérique

Les équations de la mécanique des fluides incompressibles regorgent de complexités (termes fortement non linéaires, contrainte d'incompressibilité, etc.) et à ce jour il n'existe pas de solutions analytiques générales de ces équations<sup>1</sup>. Par conséquent, pour étudier le comportement d'un écoulement, il est d'usage de recourir largement aux simulations numériques. Ainsi, l'ensemble des méthodes numériques de base (intégration, résolution de systèmes linéaires, etc.), combiné aux 4 grandes classes de discrétisation (différences finies, volumes finis, éléments finis, méthode spectrale) constitue le socle élémentaire nécessaire à la résolution numérique des ces équations.

Dans cette section, nous rappellerons dans un premier temps les bases de la résolution d'une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) par discrétisation spectrale. Par la suite, nous détaillerons le code de résolution des équations de stabilité linéaire que nous avons développé et nous introduirons le code de simulation numérique direct (DNS) utilisé afin de résoudre le système de Kazhikhov–Smagulov . Finalement, nous validerons le code de stabilité à partir des résultats de la littérature et des simulations issues du code DNS.

### 2.1 Résolution d'équations différentielles par méthode spectrale

Comme indiqué dans la section 1.2.1, les équations de la dynamique peuvent se mettre sous la forme générale

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = L_* \mathbf{u} + N(\mathbf{u}), \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  la solution,  $L_*$  et  $N$  respectivement des opérateurs différentiels linéaires et non linéaires. Numériquement, il est alors nécessaire de discrétiser cette équation temporellement et spatialement. Nous verrons brièvement les bases d'intégration temporelle pour ensuite introduire le principe de discrétisation spatiale à l'aide de méthodes spectrales.

---

1. La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution des équations Navier–Stokes fait partie des problèmes du millénaire non encore résolus.

### 2.1.1 Intégration temporelle

La discrétisation temporelle d'une équation différentielle se base sur le principe de développement de Taylor. Son expression n'est pas unique et dépend de l'erreur de troncature souhaitée, on parle alors de schéma d'intégration (Euler, Runge-Kutta, Adams-Bashfort, etc.). Ces schémas peuvent être explicites, implicites ou encore semi-implicites et le choix de celui-ci est souvent conditionné par la stabilité et la rapidité qu'il offre. Un schéma implicite améliore la stabilité, mais est souvent complexe et coûteux à mettre en place lorsque les non-linéarités sont fortes. A contrario, un choix de résolution explicite est simple à implémenter, mais nécessite de satisfaire une condition de stabilité très restrictive. Les équations de la forme (2.1) sont alors généralement résolues par un schéma hybride semi-implicite, donnant un meilleur compromis par rapport aux méthodes précédentes. Pour illustrer cela, considérons une discrétisation Euler semi-implicite de l'équation (2.1) de la forme

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{L}_* \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{N}(\mathbf{u}^n), \quad (2.2)$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps et  $\mathbf{u}^n(\cdot)$  l'approximation numérique de  $\mathbf{u}(\cdot, n\Delta t)$ . À chaque pas de temps, le système à résoudre prend la forme

$$\mathbf{L} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}^n) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} \equiv \mathbf{I} - \delta t \mathbf{L}_*. \quad (2.3)$$

Ainsi, à chaque pas de temps, le problème est alors vu comme la résolution d'une équation stationnaire et linéaire en  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Ce système peut être discrétisé à l'aide de méthodes spectrales et résolu grâce aux routines de résolution de systèmes linéaires.

### 2.1.2 Discrétisation spatiale : méthode spectrale

Les méthodes spectrales<sup>2</sup> permettent d'obtenir une approximation très précise d'une solution  $\mathbf{u}$  d'une équation linéaire de la forme (2.3). Sans perte de généralité, on se restreindra à l'étude d'une solution de la forme  $\mathbf{u} = u(x), \forall x \in [a, b]$  tel que :

$$\mathbf{L} u(x) = f(x) \quad + \quad C.L. \quad (2.4)$$

L'opérateur linéaire  $\mathbf{L}$  peut être à coefficients constants ( $\mathbf{L}_c$ ), à coefficients variables ( $\mathbf{L}_v$ ) ou une combinaison des deux. La mise en forme discrète de l'équation linéaire est réalisée en introduisant ces opérateurs sous la forme :

$$\mathbf{L}_c = \sum_{p=0}^M \alpha_p \frac{d^p}{dx^p}, \quad \mathbf{L}_v = \sum_{p=0}^M \beta_p(x) \frac{d^p}{dx^p}.$$

---

2. Cette section est largement inspirée des ouvrages de référence [13, 42, 34, 10, 62, 66, 38, 12, 61, 76, 44].

On suppose que toute fonction solution de l'équation (2.4) est de classe  $C^\infty([a, b])$  et évolue dans un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  tel que :

$$\forall (u, v) \in C^\infty([a, b]), \quad \langle u, v \rangle_w = \int_a^b u(x)v(x)w(x) dz, \quad (2.5)$$

où  $w$  est sa fonction de pondération associée. La solution de cette équation différentielle est cherchée sous la forme d'une série infinie

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k \varphi_k(x). \quad (2.6)$$

Les  $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont appelés les coefficients spectraux et les fonctions  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont nommées fonctions de base. Cette décomposition en série est *exacte* et *unique* si les fonctions  $\varphi_k(x)$  forment une base génératrice de l'espace des solutions. On choisit de plus une base orthogonale tel que :

$$\langle \varphi_i, \bar{\varphi}_k \rangle_w = c_i \delta_{ik}, \quad (2.7)$$

avec  $\bar{\varphi}_k$  le complexe conjugué de  $\varphi_k$  et  $\delta_{ik}$  le symbole de Kronecker. Ces fonctions de base orthogonale peuvent être des fonctions trigonométriques (*e.g.* Fourier  $e^{ikx}$ ) pour des problèmes périodiques, ou des polynômes orthogonaux (*e.g.* Chebyshev  $T_k$ , Legendre  $L_k$ , Hermite  $H_k$  etc. [38]) pour des problèmes non périodiques.

Numériquement, il n'est pas possible de décomposer la fonction  $u$  comme une série infinie. Par conséquent, la solution est cherchée sous forme d'une série tronquée de  $u$  sur  $N \in \mathbb{N}$  fonctions de base,

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x), \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Cette décomposition converge exponentiellement vers la solution exacte (2.6) si les coefficients  $|\hat{u}_k| \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow N$ .

Les méthodes spectrales appartiennent à la classe des méthodes des résidus pondérés. La mesure de l'erreur commise sur l'équation différentielle est appelée résidu, noté  $R_N$  et défini par

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x). \quad (2.9)$$

Le principe de la méthode des résidus pondérés consiste à annuler la projection de  $R_N$  sur un sous-espace de Hilbert de dimension  $N + 1$ . Ainsi le problème initial se ramène à la résolution de  $N + 1$  équations de la forme

$$\langle R_N, \psi_i \rangle_{w_*} = 0, \quad \forall i \in [0 ; N]. \quad (2.10)$$

Le choix des fonctions  $\psi_i$ , appelées fonctions tests, conditionne la façon dont le résidu est projeté. Il existe deux méthodes classiques<sup>3</sup> de projection : la méthode de *Galerkin* et la méthode de *collocation*.

### Méthode de Galerkin

Une résolution par la méthode de Galerkin consiste à projeter le résidu  $R_N$  sur les fonctions bases de la série tronquée  $u_N$ .

$$\psi_i = \varphi_i \quad \text{et} \quad w_* = w, \quad \forall i \in \llbracket 0 ; N \rrbracket. \quad (2.11)$$

L'annulation en moyenne du résidu (2.9) s'écrit alors :

$$\forall i \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, \quad \langle R_N, \varphi_i \rangle_w = 0 \iff \langle L u_N, \varphi_i \rangle_w = \langle f, \varphi_i \rangle_w \quad (2.12)$$

Les coefficients  $\hat{u}_k$  de  $u_N$  sont une approximation des coefficients spectraux de la solution exacte  $u(x)$ . Dans le cas d'une équation différentielle à coefficients constants ( $L \equiv L_c$ ), le système de  $N + 1$  équations s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=0}^N \hat{u}_k \sum_{p=0}^M \alpha_p \hat{l}_i^{k(p)} = \hat{f}_i, \quad \forall i \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, \quad (2.13)$$

avec  $\hat{f}_i$  et  $\hat{l}_i^{k(p)}$  respectivement les coefficients spectraux de  $f(x)$  et  $d^p \varphi_k(x)/dx^p$ . Lorsque l'équation différentielle est à coefficients variables ( $L \equiv L_v$ ) le système n'est pas aussi direct que dans le cas à coefficients constants. En effet, des « aller-retour » dans l'espace spectral sont nécessaires pour déterminer les coefficients spectraux des produits entre les membres de l'opérateur et la solution. Dans ce cas, il est alors préférable de se tourner vers la méthode de collocation.

### Méthode de collocation

Une résolution par la méthode de collocation consiste à annuler le résidu sur un ensemble de  $N + 1$  points  $x_i \in [a, b]$  appelés points de collocation.

$$\psi_i = \delta(x - x_i) \quad \text{et} \quad w_* = 1, \quad \forall i \in \llbracket 0 ; N \rrbracket. \quad (2.14)$$

En posant  $u(x_i) = u_i$  et  $f(x_i) = f_i$ , le résidu pondéré (2.9) s'écrit alors :

$$\forall i \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, \quad \langle R_N, \psi_i \rangle_w = 0 \iff L u_i = f_i \quad (2.15)$$

Les coefficients  $u_i$  sont alors une approximation de la valeur de la solution exacte aux points de collocation. Ainsi, la méthode de collocation peut être considérée comme une

---

3. Il existe les méthodes de Petrov-Galerkin, tau, moment, moindres carrés, etc. [10, p.62]

interpolation<sup>4</sup> de  $u$  par les fonctions de base  $\varphi_k$  aux points  $x_i$ . Par conséquent, la solution approchée  $u_N$  est alors vue comme une approximation polynomiale plutôt qu'une série tronquée. Par interpolation de Lagrange sur les points de collocations  $x_i$  de type Gauss (Gauss-Lobatto, Gauss-Radau, etc.),  $u_N$  peut s'écrire sous la forme

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N u_i h_i(x), \quad (2.16)$$

avec  $h_i(x)$  le polynôme de Lagrange (aussi appelé fonction cardinale) associé aux points  $x_i$  [76]. Cette formulation fait apparaître les grandeurs physiques  $u_i$  comme les inconnues naturelles. Ainsi, par collocation, les coefficients spectraux  $\hat{u}_k$  ne sont jamais calculés (d'où le terme pseudo-spectral).

Cette formulation permet d'expliciter les termes de dérivées de la fonction  $u$  aux points de collocation tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, \quad \frac{d^p u_i}{dx^p} = \sum_{k=0}^N d_{ki}^{(p)} u_k, \quad \text{avec} \quad d_{ki}^{(p)} = \frac{d^p}{dx^p} h_k(x_i) \quad (2.17)$$

En notant  $\mathbf{U} = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$  et  $\mathbf{D} = (d_{ki}^{(1)})$  la matrice de différentiation de l'opérateur  $d/dx$  alors les dérivées s'écrivent matriciellement

$$\frac{d^p \mathbf{U}}{dx^p} = \mathbf{D}^p \mathbf{U}. \quad (2.18)$$

Ainsi, résoudre numériquement une équation différentielle linéaire par collocation revient à calculer les matrices de différentiation  $\mathbf{D}^p$  et écrire les  $N + 1$  équations sous forme matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \sum_{p=0}^M \alpha_p \mathbf{D}^p & \text{Cas } L = L_c \\ \sum_{p=0}^M \text{diag}(\beta_p) \mathbf{D}^p & \text{Cas } L = L_v \end{cases} \quad (2.19)$$

avec  $\mathbf{F} = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T$  et  $\beta_p = (\beta_{p0}, \beta_{p1}, \dots, \beta_{pN})^T$ .

---

4. Méthodes de collocation, d'interpolation et pseudo-spectrale sont des termes équivalents, mais ce lexique est souvent conditionné par le type d'étude que l'on réalise [10, p.81].

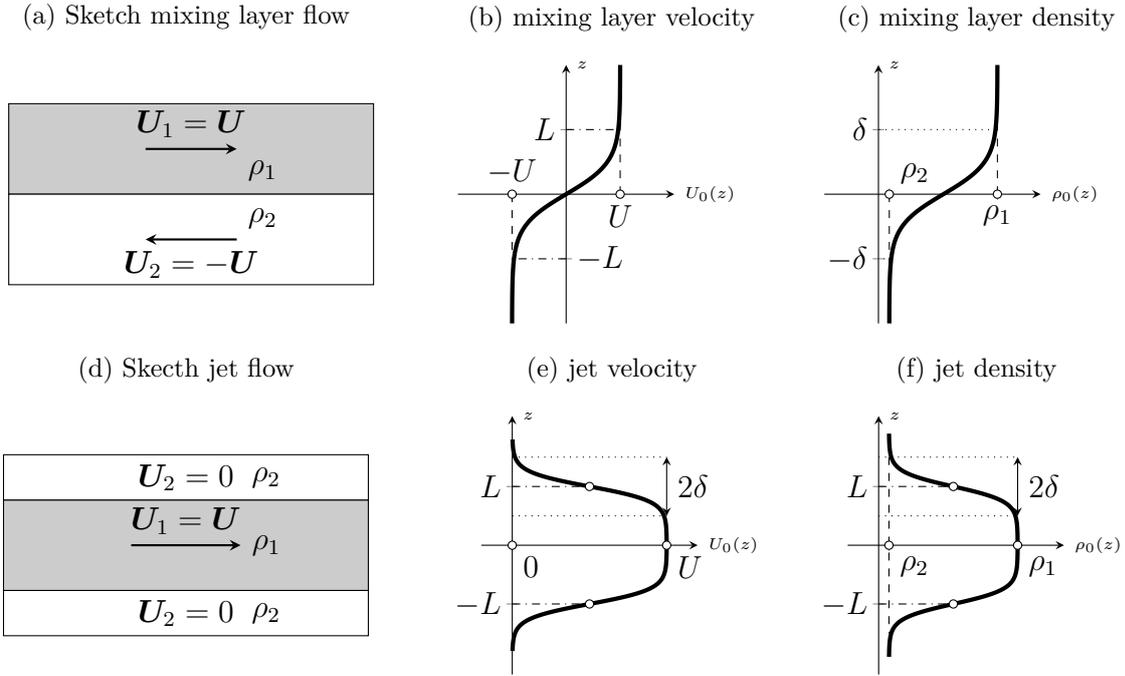


FIGURE 2.1 – Écoulement de base pour une couche de mélange et un jet.

## 2.2 Code de stabilité linéaire

On rappelle que l'objectif de ces travaux est d'étudier la relation de dispersion  $\omega = \omega(\alpha, \beta)$  solution du problème aux valeurs propres (1.57) :

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_w \\ \hat{\rho} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_w \\ \hat{\rho} \end{bmatrix}, \quad + \text{CL} \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z, \tilde{\rho} = 0.$$

En discrétisant le problème selon une méthodologie établie précédemment, la relation de dispersion  $\omega = \omega(\alpha, \beta)$  est estimée numériquement <sup>5</sup>.

Les sections qui suivent sont consacrées à l'établissement de ces matrices par un choix avisé de discrétisation spatiale, de l'écoulement de base et de quelques astuces numériques. Ce système est discrétisé par la méthode de collocation-Chebyshev et résolu avec les routines LAPACK [3], pour des profils de vitesse et de masse volumique de bases en tangente hyperbolique.

### 2.2.1 Caractéristiques de l'écoulement de base

Comme mentionné dans la section 1.2.2, tout écoulement de base parallèle est solution du problème. Afin de garder une formulation la plus générale possible, les champs de base

5. Il n'existe pas à notre connaissance de relation analytique de cette relation de dispersion

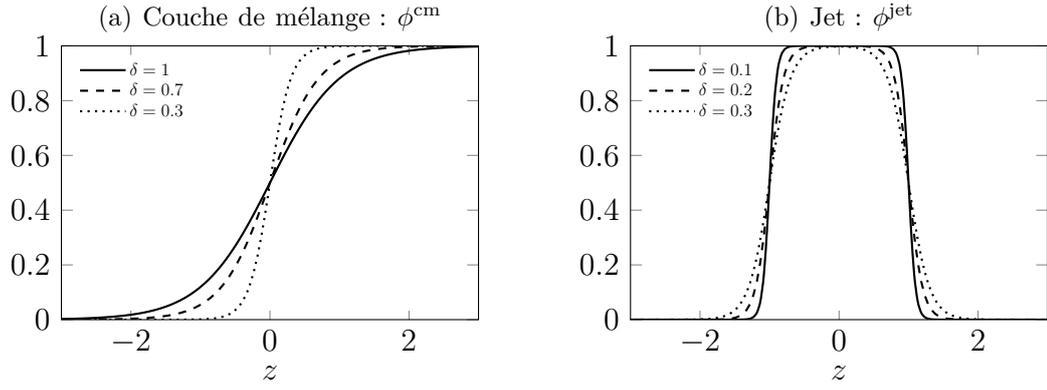


FIGURE 2.2 – Profils des fractions volumiques d'une couche de mélange (a) et d'un jet (b).

sont écrits sous la forme :

$$U_0(z) = \phi_u(z)U_1 + (1 - \phi_u(z))U_2, \quad \rho_0(z) = \phi_\rho(z)\rho_1 + (1 - \phi_\rho(z))\rho_2, \quad (2.20)$$

avec  $\phi_u(z), \phi_\rho(z) \in [0, 1]$ ,  $U_2 \leq U_0(z) \leq U_1$  et  $\rho_2 \leq \rho_0(z) \leq \rho_1$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ . Si cela est nécessaire, il est possible de faire une transformation galiléenne des champs de vitesse par rapport à une vitesse  $\langle U \rangle$  de façon à pouvoir redéfinir les vitesses  $U_1$  et  $U_2$  par :

$$U_1 \equiv U_1 - \langle U \rangle, \quad U_2 \equiv U_2 - \langle U \rangle \quad (2.21)$$

Nous nous sommes intéressés à des profils de vitesse et de masse volumique en tangente hyperbolique afin de mimer des champs  $C^\infty$  et de maîtriser l'épaisseur des zones de mélange/cisaillement. Le choix le plus naturel et le plus simple pour étudier un écoulement parallèle cisailé est la couche de mélange. On modélise cet écoulement sous la forme

$$\phi_\star^{\text{cm}}(z, \delta_\star) = \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{z}{\delta_\star}\right) + 1 \right], \quad (2.22)$$

avec  $\delta_\star$  l'épaisseur de la zone de transition entre les deux couches de fluide. L'épaisseur de cisaillement est choisie naturellement comme la longueur caractéristique. On peut alors écrire les profils de fraction volumique adimensionnés (voir figure 2.2a)

$$\phi_u(z) = \frac{1}{2} [\tanh(z) + 1] \quad \text{et} \quad \phi_\rho(z) = \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{z}{\delta}\right) + 1 \right], \quad (2.23)$$

avec  $\delta$  l'épaisseur de densité, adimensionnée par l'épaisseur de cisaillement. En réalisant un changement de référentiel galiléen  $U_1 = -U_2 = U$  et en posant  $\rho_0(+\infty) = \rho_1$  et  $\rho_0(-\infty) = \rho_2$  (voir figure 2.1), les profils de vitesse et de masse adimensionnés s'écrivent :

$$U_0 = \tanh z, \quad \rho_0 = \phi_\rho(z)(S + 1) + 1, \quad (2.24)$$

avec  $S = \rho_1/\rho_2$ . Un second type d'écoulement représentant des écoulements parallèles cisailés est un écoulement de type jet. À des fins de simplicité, les jets seront modélisés

comme une double couche de mélange symétrisée sous la forme

$$\phi_{\star}^{\text{jet}} = \phi_{\star}^{\text{cm}}(z - z_0, \delta_{\star}) - \phi_{\star}^{\text{cm}}(z + z_0, \delta_{\star}). \quad (2.25)$$

La demi-épaisseur  $z_0$  du jet est choisie comme étant identique pour la vitesse et la masse volumique. De plus, celle-ci est choisie naturellement comme la longueur caractéristique du problème. Cela introduit alors le paramètre supplémentaire  $\delta$  caractéristique de la zone d'épaisseur des gradients, qui sera identique pour la vitesse et la densité. Ce dernier choix s'appuie sur l'argumentation faite au chapitre 1 stipulant que le nombre de Schmidt est d'ordre 1. On peut alors écrire les profils de fraction volumique adimensionnés (voir figure 2.2b) :

$$\phi_u = \phi_\rho = \frac{1}{2} \left( \tanh \left( \frac{z+1}{\delta} \right) - \tanh \left( \frac{z-1}{\delta} \right) \right). \quad (2.26)$$

En réalisant un changement de référentiel galiléen  $U_0(\pm\infty) = 0$ ,  $U_0(0) = U_0$  et en posant  $\rho_0(\pm\infty) = \rho_1$  et  $\rho_0(0) = \rho_2$  (voir figure 2.1), les profils de vitesse et de masse adimensionnés s'écrivent :

$$U_0 = \phi_u, \quad \rho = \phi_u (S - 1) + 1. \quad (2.27)$$

### 2.2.2 Discrétisation : Méthode de Collocation de Chebyshev

Le problème aux valeurs propres (1.57) est discrétisé par une méthode de collocation avec comme fonction de base les polynômes de Chebyshev de premiers types  $T_\xi$  définis par :

$$\forall \xi \in [-1, 1], \quad T_k(\xi) = \cos(k \cos^{-1} \xi). \quad (2.28)$$

Les  $N$  points de discrétisation (points de collocation)  $\xi_k \in [-1, 1]$  sont définis par les points de Gauss-Lobatto :

$$\xi_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad \forall k \in \llbracket 0 ; N \rrbracket. \quad (2.29)$$

Comme indiqué dans la section précédente 2.1.2, les opérateurs de dérivées  $d^p/d\xi^p$  sont transformés en leurs matrices associées  $\mathbf{D}_\xi^p$  avec  $\mathbf{D}_\xi = (d_{i,j})$  la matrice de différentiation de l'opérateur  $d/d\xi$  [66] :

$$d_{i,j} = \frac{\bar{c}_i (-1)^{i+j}}{\bar{c}_j x_i - x_j}, \quad 0 < i, j < N, \quad i \neq j \quad (2.30)$$

$$d_{i,i} = -\frac{x_i}{2(1-x_i^2)}, \quad 0 < i < N-1 \quad (2.31)$$

$$d_{0,0} = -d_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6} \quad (2.32)$$

Les polynômes de Chebyshev imposent un espace de discrétisation  $\xi \in [-1, 1]$ , tandis que les écoulements étudiés sont non bornés *i.e.* définis dans un espace  $z \in ]-\infty, +\infty[$ . Ainsi, pour appliquer une discrétisation qui puisse s'appliquer à ces écoulements, il est nécessaire

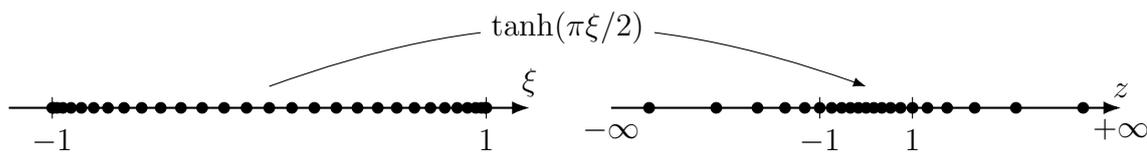


FIGURE 2.3 – Transformation de l'espace associé aux points  $\xi$  de Gauss-Lobatto en espace  $z$  infini.

de réaliser un changement géométrique d'espace (mapping) entre l'espace  $\xi$  associé aux polynômes de Chebyshev et l'espace physique  $z$ . Le mapping utilisé est de la forme

$$z = \tan(\pi\xi/2). \quad (2.33)$$

Ce changement géométrique, illustré sur la figure 2.3, permet, sans l'introduction de paramètre libre, de projeter les points du bord de  $\xi$  à l'infini dans l'espace physique et de resserrer la grille dans les zones de fort gradient autour de  $z = 0$  (la moitié des points se trouvent dans l'intervalle  $z \in [-1, 1]$ ). De plus, ce changement d'espace modifie nécessairement les matrices de différentiation :

$$\frac{d}{dz} \rightarrow \mathbf{D} = \frac{d\xi}{dz} \mathbf{D}_\xi, \quad \frac{d^2}{dz^2} \rightarrow \mathbf{D}^2 = \frac{d^2\xi}{dz^2} \mathbf{D}_\xi + \left( \frac{d\xi}{dz} \right)^2 \mathbf{D}_\xi^2. \quad (2.34)$$

Par conséquent, le problème aux valeurs propres est discrétisé sur les points  $z_i$  de l'espace physique et les opérateurs  $d^n/dz^n$  sont remplacés par leur matrice associée  $\mathbf{D}^n$ . De plus, les conditions aux limites d'atténuation des perturbations à l'infini sont prises en compte numériquement par une méthode de réduction de matrices, consistant à retirer des matrices de dérivation, les lignes et colonnes correspondant aux points  $z_i = \pm\infty$ . Le système est alors résolu avec les matrices et vecteurs dans lesquels les bords ont été retirés.

### 2.2.3 Projection de la vitesse sur une base solénoïdale

On rappelle que le système aux valeurs propres (1.57) est obtenu en écrivant une équation explicite pour la pression (1.55), afin de l'éliminer des équations. Cela revient à projeter le champ de vitesse sur une base de solution à divergence nulle (solénoïdale). Pour ce faire, on introduit l'opérateur  $L_{\rho_0}$  que l'on cherchera par la suite à inverser et qui s'écrit de manière discrète

$$\mathbf{L}_{\rho_0} = \frac{\alpha^2}{\rho_0} + \frac{\beta^2}{\rho_0} - \mathbf{D} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{D}, \quad (2.35)$$

avec  $\mathbf{D}$  la matrice de différentiation. C'est par l'introduction des conditions aux limites discrètes sur la pression que l'on assure l'irréversibilité de cet opérateur. Cette formulation offre l'avantage d'assurer explicitement la contrainte d'incompressibilité tout en évitant de calculer les modes singuliers liés aux termes de pression (voir le tableau 2.1 et la figure 2.4). De plus, la figure 2.5 montre que ces modes singuliers (parfois appelés modes

Projection	Temps de calcul (s)		Nombre de modes singuliers	
	<i>couche de mélange</i>	<i>jet</i>	<i>couche de mélange</i>	<i>jet</i>
Sans	19.4	17.9	402	403
Avec	1.2	1.1	0	0

TABLE 2.1 – Comparaison du temps de calcul et du nombre de modes singuliers entre la résolution du problème aux valeurs propres *avec* (1.57) et *sans* (1.52) la projection de la vitesse sur une base solénoïdale pour des profils en tanh (*couche de mélange* (2.24) et *jet* (2.27)) avec  $N = 201$ ,  $Re = 1000$ ,  $Sc = 1$ ,  $S = 0.1$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\beta = 0$  et  $\alpha = 1$ .

$N$	Écart relatif %			Temps de calculs (s)
	$\ \sigma(\alpha)\ _\infty$	$\max_\alpha(\sigma(\alpha))$	$\sigma(\alpha \rightarrow 0)$	
100	1.22	$1.95 \times 10^{-3}$	0.12	29
150	$7.27 \times 10^{-5}$	$2.19 \times 10^{-7}$	$1.1 \times 10^{-3}$	56
200	$3.33 \times 10^{-6}$	$1.88 \times 10^{-10}$	$5.03 \times 10^{-5}$	110
250	$8.35 \times 10^{-8}$	$8.47 \times 10^{-10}$	$1.26 \times 10^{-6}$	146
300	$1.15 \times 10^{-7}$	$3.39 \times 10^{-9}$	$1.74 \times 10^{-6}$	212
350	$1.3 \times 10^{-8}$	$5.72 \times 10^{-9}$	$1.37 \times 10^{-7}$	292
400	$1.73 \times 10^{-8}$	$2.29 \times 10^{-9}$	$2.83 \times 10^{-8}$	363
450	$2.05 \times 10^{-8}$	$5.64 \times 10^{-10}$	$4.06 \times 10^{-8}$	472
500	$2.89 \times 10^{-8}$	$9.13 \times 10^{-9}$	$6.5 \times 10^{-9}$	587

TABLE 2.2 – Convergence du taux de croissance de la perturbation  $\sigma$  obtenu par le problème aux valeurs propres (1.57) pour une *couche de mélange* (2.24) avec  $Re = 1000$ ,  $Sc = 1$ ,  $S = 2$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\beta = 0$  et le nombre d'onde  $\alpha$  variant de 0 à 3. avec un pas de 0.015.

spurieux), correspondent à des modes non physiques (valeur propre infinie ou de norme supérieure à  $10^6$ ). Finalement, cette méthode permet de réduire significativement les temps de calcul. Ceci permet d'augmenter la base de décomposition spectrale à un coût de calcul convenable pour atteindre la convergence (voir tableau 2.2).

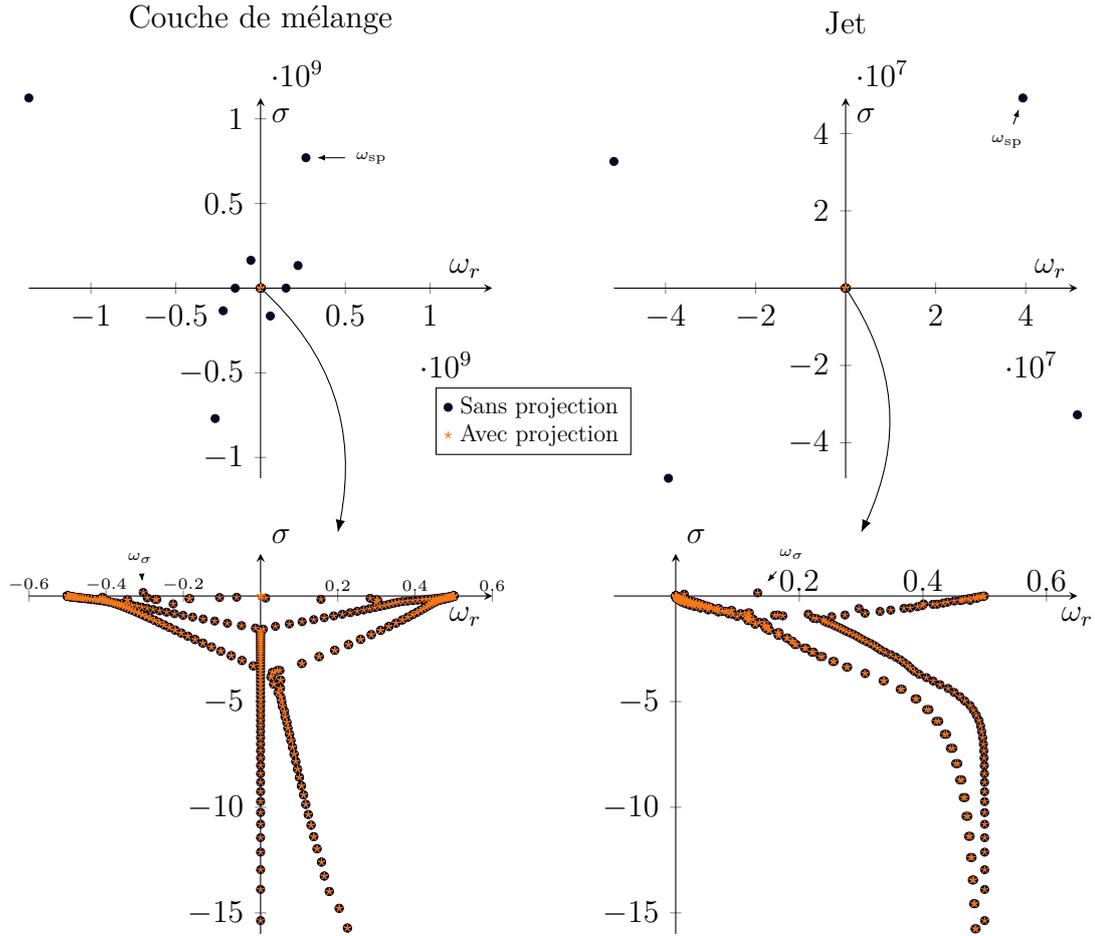


FIGURE 2.4 – Comparaison du spectre du problème aux valeurs propres obtenu numériquement *avec* (1.57) et *sans* (1.52) la projection de la vitesse sur une base solénoïdale. Gauche : couche de mélange (2.24). Droite : jet (2.27). Les figures du bas représentent un zoom autour de l'origine. Paramètres :  $N = 201$ ,  $Re = 1000$ ,  $Sc = 1$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $S = 0.1$ ,  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ .

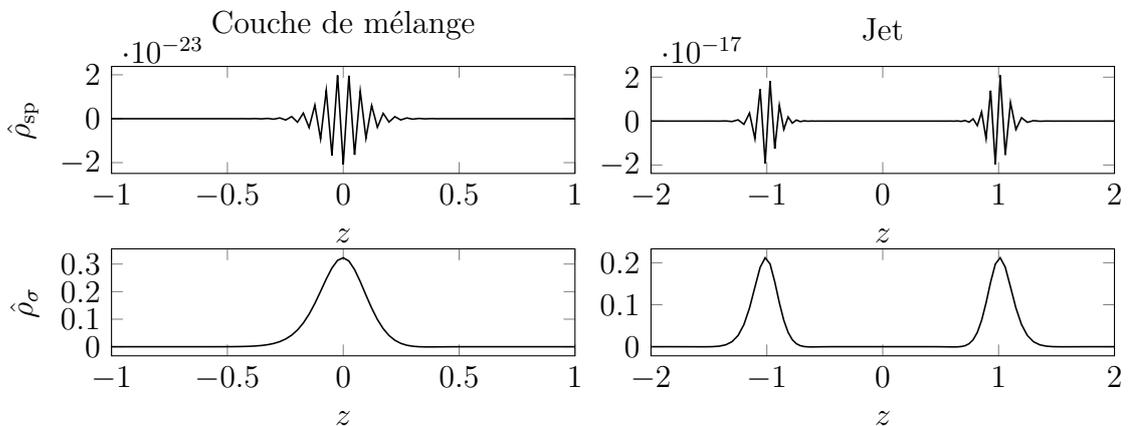


FIGURE 2.5 – Fonction propre  $\hat{\rho}$  d'un mode singulier  $\omega_{sp}$  (première ligne) et  $\omega_{\sigma}$  (deuxième ligne) indiqués sur la figure 2.4.

## 2.3 Code DNS

Cette section donne les principes de base du code de simulation numérique direct utilisé pour résoudre les équations de Kazhikhov–Smagulov . Il s’agit d’un code tridimensionnel, avec un schéma d’intégration temporelle aux seconds ordres semi-implicite et une méthode pseudo-spectrale qui utilise les modes de Fourier pour la discrétisation spatiale. Les équations (1.27) sont ré-écrites afin de regrouper les termes visqueux sous une seule variable  $\zeta$  pour ne pas surcharger l’écriture du schéma d’intégration :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \zeta(\rho, \mathbf{u}), \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = \frac{1}{Re Sc} \Delta \rho, \quad (2.36b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.36c)$$

$$\zeta(\rho, \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho Re Sc} \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho + (\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u} \right]. \quad (2.36d)$$

Cette section récapitule brièvement les grandes étapes, mais un lecteur intéressé est invité à se reporter à [72].

### 2.3.1 Intégration temporelle

Ces équations sont intégrées temporellement au deuxième ordre avec un schéma semi-implicite de Crank-Nicolson pour les termes de diffusion visqueuse :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{n+1/2} - \frac{\nabla p^{n+1/2}}{\rho^{n+1/2}} + \frac{1}{2} [\zeta(\rho^{n+1/2}, \mathbf{u}^{n+1}) + \zeta(\rho^{n+1/2}, \mathbf{u}^n)], \quad (2.37a)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = - [\mathbf{u} \cdot \nabla \rho]^{n+1/2} + \frac{1}{2} (\Delta \rho^{n+1} + \Delta \rho^n), \quad (2.37b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (2.37c)$$

On note  $\Delta t$  le pas de temps de discrétisation temporelle, les variables avec un exposant représentent leurs approximations aux pas de temps  $t^n = n\Delta t$ . L’exposant  $n+1/2$  identifie les termes d’approximation temporelle du second ordre (Runge-Kutta, Adam-Bashforth) au temps  $t^{n+1/2}$ . Les termes en  $\zeta$  sont calculés en prenant  $\rho^{n+1/2} = (\rho^{n+1} + \rho^n)/2$  (pour des considérations de stabilité).

La résolution de ce système est basée sur le principe de prédicteur-correcteur de la vitesse. En effet, une vitesse  $\mathbf{u}^*$  (prédite) est obtenue en résolvant uniquement les équations de quantité de mouvement et de masse *sans prendre en compte la contrainte d’incompress-*

sibilité :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{n+1/2} - \frac{\nabla p^{n-1/2}}{\rho^{n+1/2}} + \frac{1}{2} [\zeta(\rho^{n+1/2}, \mathbf{u}^*) + \zeta(\rho^{n+1/2}, \mathbf{u}^n)], \quad (2.38a)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = - [\mathbf{u} \cdot \nabla \rho]^{n+1/2} + \frac{1}{2} (\Delta \rho^{n+1} + \Delta \rho^n). \quad (2.38b)$$

Cette vitesse calculée  $\mathbf{u}^*$  est alors corrigée en la projetant, grâce au projecteur  $P_\rho$ , dans l'espace des vecteurs à divergence nulle pour imposer la contrainte d'incompressibilité. On note cette vitesse corrigée  $\mathbf{u}^{n+1}$  tel que :

$$\mathbf{u}^{n+1} = P_\rho(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^* - \Delta t \frac{\nabla \phi}{\rho^{n+1/2}}, \quad (2.39)$$

La section suivante est entièrement dédiée au calcul de  $\phi$  ainsi qu'aux propriétés de l'opérateur de projection  $P_\rho$ . Pour respecter le second ordre du schéma, la pression  $p^{n+1/2}$  est obtenue en injectant  $\mathbf{u}^*$  dans l'équation (2.37a), donnant :

$$\nabla p^{n+1/2} = \nabla p^{n-1/2} + \nabla \phi - \frac{\Delta t}{2} \rho^{n+1/2} \zeta(\rho^{n+1/2}, \nabla \phi / \rho^{n+1/2}). \quad (2.40)$$

### 2.3.2 Opérateur de projection à densité variable

La résolution numérique de ces équations se base sur le principe de projecteur dans l'espace des champs à divergence nulle. Cette projection permet d'assurer le caractère incompressible des champs de vitesse calculés [20, 19]. Soit  $\mathbf{u}^*$  un champ à divergence non nulle et  $\mathbf{u}$  sa projection dans l'espace des vecteurs solénoïdaux. Selon la décomposition de Helmholtz-Hodge, il existe un scalaire  $\phi$ , analogue à une pression, tel que :

$$\mathbf{u} = P_\rho(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^* - \frac{\nabla \phi}{\rho}. \quad (2.41)$$

En appliquant la divergence à cette équation de projection et en utilisant la propriété solénoïdale du champ  $\mathbf{u}$ , il est possible d'introduire l'opérateur  $L_\rho$  tel que :

$$L_\rho(\phi) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \phi \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (2.42)$$

Ainsi, en injectant cette formulation dans l'équation de projection, l'opérateur de projection à densité variable  $P_\rho$  s'écrit :

$$P_\rho \equiv \left( \mathbf{I} - \frac{1}{\rho} \nabla L_\rho^{-1} \nabla \cdot \right). \quad (2.43)$$

Cette projection est *exacte* [20, 19] puisque pour tout champ de vitesse différentiable  $\mathbf{v}$ , cet opérateur  $P_\rho$  satisfait les conditions :

$$P_\rho^2 \equiv P_\rho, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot P_\rho(\mathbf{v}) = 0.$$

### 2.3.3 Solveur des opérateurs de viscosité et de pression

À chaque pas de temps il est nécessaire de résoudre le système linéaire en  $\mathbf{u}^*$  lié aux termes visqueux et le système linéaire (2.42) en  $\phi$ . Ces équations elliptiques sont alors résolues par des méthodes itératives de Krylov (Richardson, Gradient conjugué, General Minimal Residual) et sont préconditionnées afin d'augmenter les vitesses de convergence de ces schémas itératifs.

Pour obtenir la solution  $\mathbf{u}^*$ , il est nécessaire d'inverser un opérateur  $\mathbf{V}_\rho$  faisant intervenir les contributions visqueuses. Ce système s'écrit formellement :

$$\mathbf{V}_\rho \mathbf{u}^* = \mathbf{b}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_\rho = \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}(\rho^{n+1/2}, \cdot) \right]. \quad (2.44)$$

Ce système est préconditionné par  $\mathbf{V}^{-1}$  l'inverse de l'opérateur  $\mathbf{V}$ , avec  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\rho=1}$ .

La détermination de la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  nécessite la résolution de l'équation présentant de mauvaises propriétés de conditionnement. Afin de l'améliorer, on introduit le changement de variable  $\Phi = \sqrt{\rho} \phi$  et l'équation devient :

$$\mathbf{K}_\rho \Phi = \left[ \Delta + \frac{\nabla \rho}{2\rho} - \frac{3}{4} \frac{\|\nabla \rho\|^2}{\rho^2} \right] \Phi = \frac{\sqrt{\rho}}{\delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (2.45)$$

Ce système est préconditionné par l'inverse du Laplacien  $\Delta^{-1}$  qui n'est autre que l'inverse de  $K_\rho$  dans le cas à densité constante.

## 2.4 Validations

Cette section est dédiée à la validation de l'ensemble des méthodes numériques développé dans les sections précédentes. Le solveur aux valeurs propres ainsi que le solveur DNS sont validés pour des écoulements jet plan bidimensionnel. Il est important de noter que, dans le cas d'un jet, il est possible d'extraire deux modes instables [70, p.15] : le mode sinueux et le mode variqueux. Ainsi, l'ensemble des résultats sera montré en faisant cette distinction entre ces deux modes.

Le solveur aux valeurs propres est validé à partir des résultats obtenus par RAVIER [70]. Le solveur DNS est ensuite validé pour le même profil d'écoulement de base. Finalement, le solveur aux valeurs propres et le solveur DNS sont validés dans le cas d'un profil de jet en tangente hyperbolique comme introduit dans la section 2.2.1.

### 2.4.1 Validation du solveur de stabilité linéaire

Le solveur aux valeurs propres est validé grâce aux résultats de RAVIER [70] obtenus pour des écoulements de type jet en configuration non visqueuse. Le profil d'écoulement

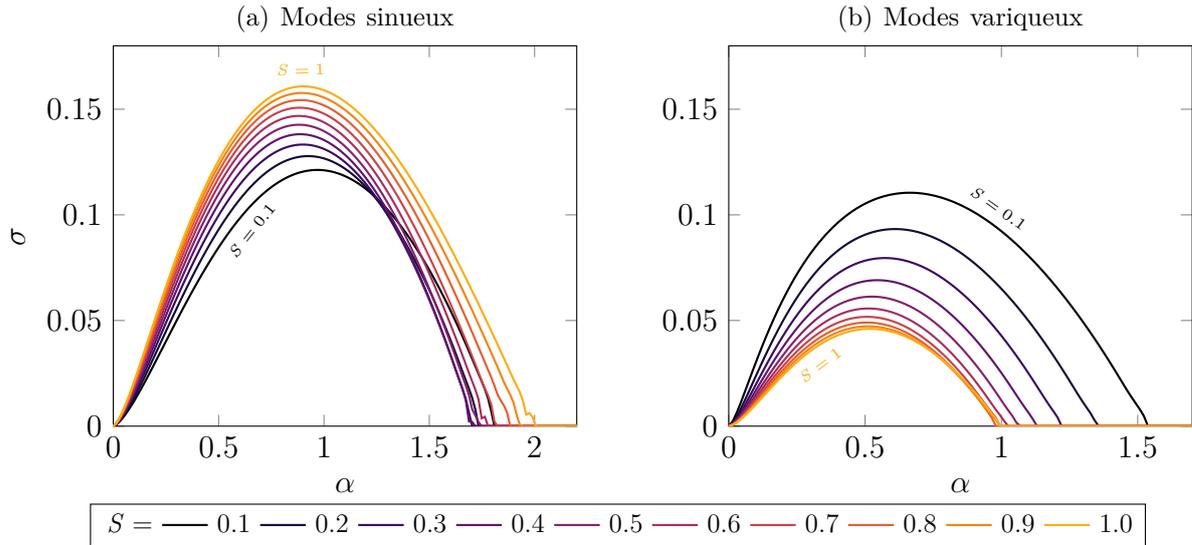


FIGURE 2.6 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet en sinh (2.46) avec  $N = 201$ ,  $Re = Sc = \infty$  et  $n = 1$  pour plusieurs valeurs de rapport de densité  $S$ .

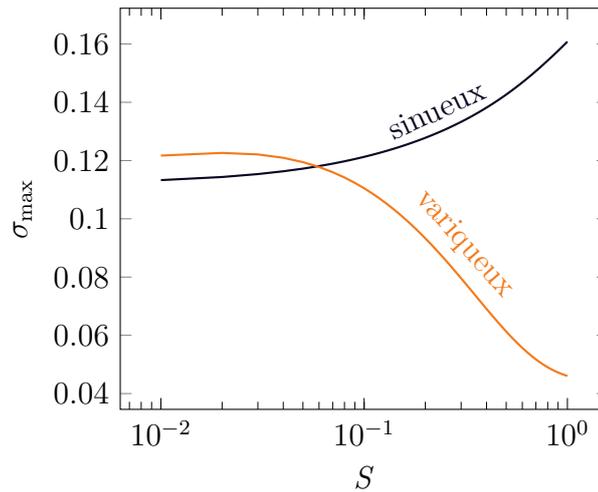


FIGURE 2.7 – Taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{\max}$  en fonction de  $S$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet en sinh (2.46) avec  $N = 201$ ,  $Re = Sc = \infty$ ,  $n = 1$ .

de base étudié est alors de la forme :

$$U_0(z) = \frac{1}{1 + \sinh^{2n} z}, \quad \rho_0(z) = 1 + (S - 1)U_0(z), \quad p_0(z) = Cte \quad (2.46)$$

La figure 2.6 montre les relations de dispersions  $\sigma = \sigma(\alpha)$  obtenues par le solveur de stabilité linéaire pour plusieurs valeurs de  $S$ . On constate un très bon accord avec les relations de dispersion obtenues par RAVIER. De plus, la figure 2.7 permet de constater une excellente reproduction des résultats obtenus par RAVIER lorsque l'on capte les maximums des taux de croissance instable  $\sigma_{\max} = \max_{\alpha}(\sigma(\alpha))$ . Ces résultats permettent de valider notre solveur de stabilité linéaire.

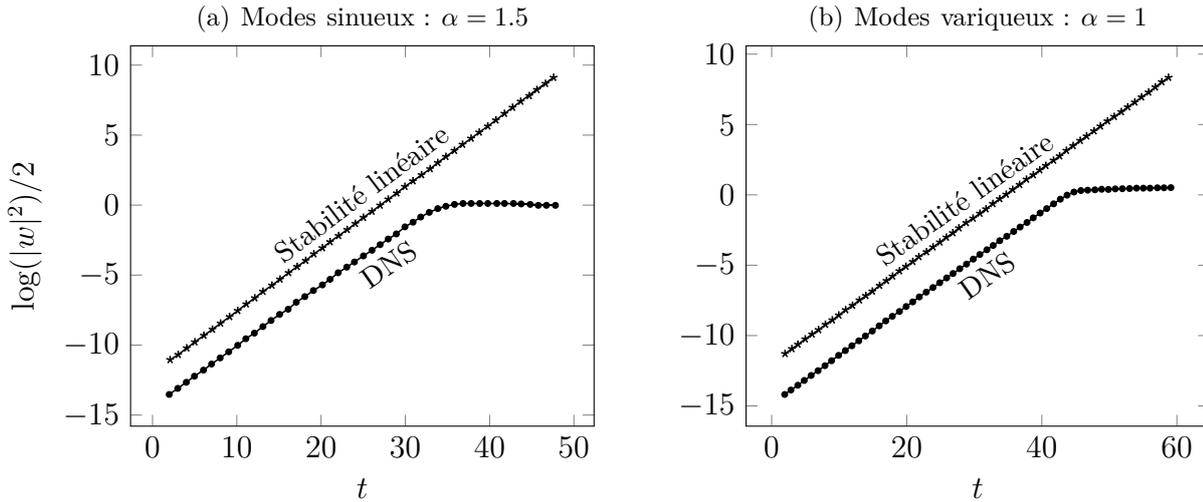


FIGURE 2.8 – Comparaison de la croissance temporelle des perturbations obtenue par le problème aux valeurs propres (théorie linéaire) et le code DNS ( $Re = 10^4$ ) pour un jet en sinh (2.46) avec  $S = 0.5$  et  $n = 4$ .

### 2.4.2 Validation du solveur DNS

Le solveur DNS est vérifié (gamme linéaire) en comparant la croissance temporelle des perturbations avec celle obtenue par le solveur de stabilité linéaire avec un profil d'écoulement de base identique à la section précédente. La résolution du problème aux valeurs propres est réalisée dans une configuration non visqueuse, avec un rapport de masse  $S = 0.5$  et  $n = 4$ . Les modes  $\alpha = 1.5$  pour le mode sinueux et  $\alpha = 1$  pour le mode variqueux sont injectés dans le solveur DNS avec les mêmes paramètres d'écoulement de base en prenant un nombre Reynolds  $Re = 10^4$  pour approcher le cas non visqueux. Les calculs sont réalisés dans un domaine  $[4\pi, 2\pi]$  avec  $1024 \times 512$  points de maillage.

La figure 2.8 compare la croissance temporelle du mode instable sélectionné au cours du temps entre le solveur DNS et solveur de stabilité linéaire. On constate que le taux de croissance de la théorie linéaire est bien reproduit par les simulations DNS avant la saturation liée aux termes non linéaires.

### 2.4.3 Validation croisée

Le solveur de stabilité et le solveur DNS ont été validés pour un profil en sinus hyperbolique en configuration non visqueuse. Il est alors possible de réaliser une validation croisée entre ces deux solveurs pour un écoulement diffusif avec un profil d'écoulement de base en tangente hyperbolique. Les simulations sont réalisées pour les paramètres d'écoulement  $Re = 10^3$ ,  $Sc = 1$ ,  $\delta = 0.1$  et  $S = 4$ . Les calculs de stabilité linéaire sont réalisés avec  $N = 201$  points de discrétisation et les calculs pour le solveur DNS sont réalisés dans un domaine  $[4\pi, 2\pi]$  avec  $512 \times 254$  points de maillage. Le mode  $\alpha = 0.5$  pour le mode sinueux et le mode variqueux, indiqués sur la figure 2.9, sont injectés dans le solveur DNS.

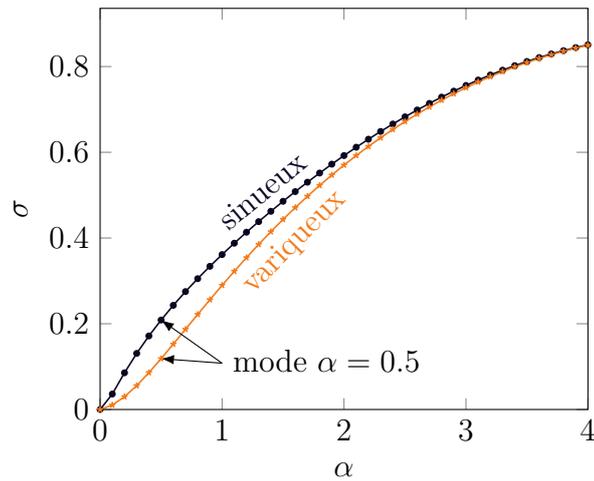


FIGURE 2.9 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet en tanh (2.27) avec  $N = 201$ ,  $Re = 10^3$ ,  $Sc = 1$ ,  $\delta = 0.1$  et  $S = 4$ . Le mode  $\alpha = 0.5$  est le mode injecté dans le code DNS.

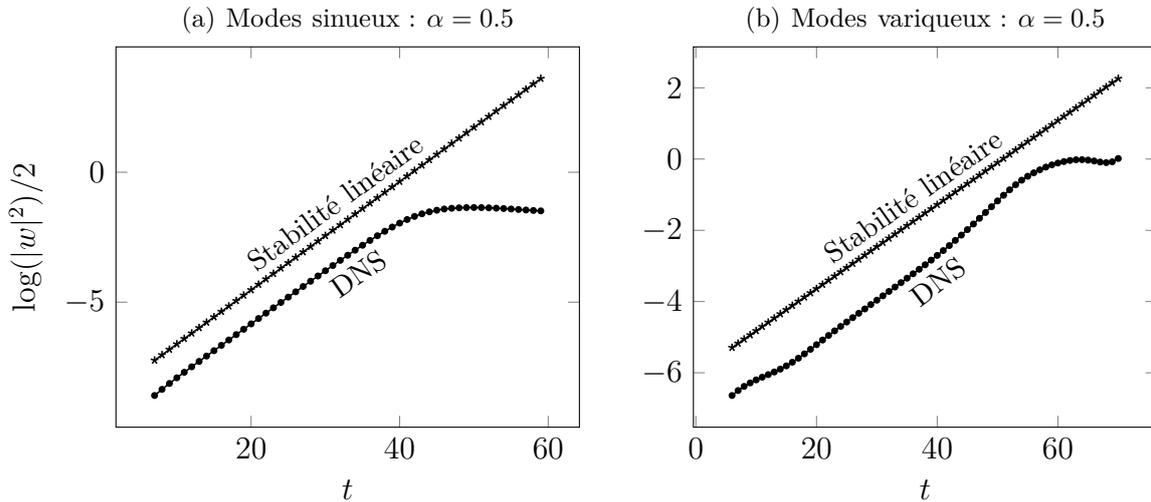


FIGURE 2.10 – Comparaison de la croissance temporelle des perturbations obtenue par le problème aux valeurs propres (théorie linéaire) et le code DNS pour un jet en tanh (2.27) avec  $Re = 10^3$ ,  $Sc = 1$ ,  $\delta = 0.1$  et  $S = 4$  pour le mode  $\alpha = 0.5$ .

La figure 2.10 compare la croissance temporelle du mode instable sélectionné au cours du temps entre le solveur DNS et le solveur de stabilité linéaire. On constate que le taux de croissance de la théorie linéaire est bien reproduit par les simulations DNS avant la saturation liée aux termes non linéaires. Le lecteur intéressé pourra observer l'évolution des perturbations appliquées au jet sur les figures 2.11 et 2.12.

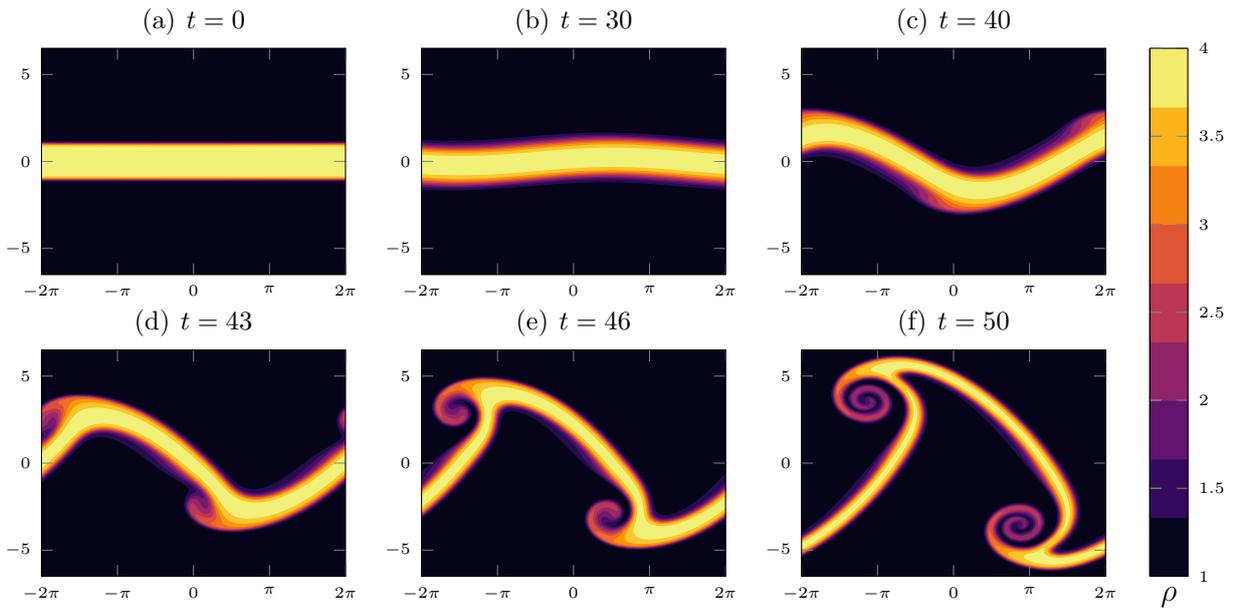


FIGURE 2.11 – Simulation numérique directe du mode sinueux d’un profil de jet en tanh (2.27) avec  $Re = 10^3$ ,  $Sc = 1$ ,  $S = 4$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\alpha = 0.5$

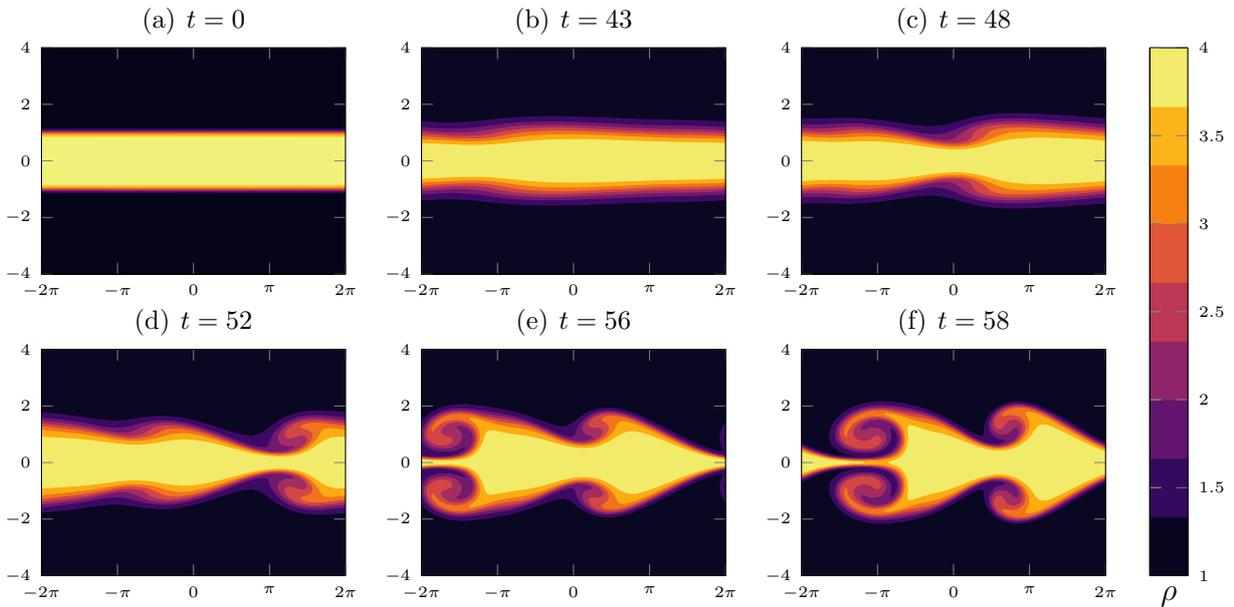


FIGURE 2.12 – Simulation numérique directe du mode variqueux d’un profil de jet en tanh (2.27) avec  $Re = 10^3$ ,  $Sc = 1$ ,  $S = 4$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\alpha = 0.5$

# Chapitre 3

## Étude des instabilités linéaires primaires

Ce chapitre a pour objectif de montrer l'impact de la variation de masse sur la stabilité linéaire primaire des écoulements de type couche de mélange et jet. Tout d'abord, nous verrons cette influence au travers de considérations théoriques, asymptotiques et numériques pour des écoulements non visqueux. Une fois le comportement instable étudié dans cette dernière limite, on observera l'influence de la viscosité et de la diffusion de masse sur la stabilité de ces écoulements.

### 3.1 Considérations préliminaires

#### 3.1.1 Théorème de Squire généralisé

On sait que pour des écoulements cisailés ouverts à *densité constante*, le théorème de Squire permet de restreindre l'étude de stabilité linéaire temporelle à une configuration bidimensionnelle. À notre connaissance, ce résultat n'a pas été étendu pour des écoulements ouverts à densité variable. On démontre que le théorème de Squire peut être étendu au cas à *densité variable*.

#### **Théorème de Squire généralisé aux cas des écoulements parallèles à densité variable**

*Pour toute perturbation tridimensionnelle  $(\alpha, \beta, \omega)$  instable de taux de croissance temporelle  $\sigma$  pour un nombre de Reynolds  $Re$  et un nombre de Schmidt  $Sc$ , il existe un mode bidimensionnel  $(k, \underline{\omega})$  de taux de croissance temporelle  $\underline{\sigma} > \sigma$  plus instable pour un nombre de Reynolds  $\underline{Re} < Re$ .*

*Démonstration*

Soit  $(\alpha, \beta, \omega)$  le mode instable ( $\sigma > 0$ ) tridimensionnel d'un écoulement parallèle à densité

variable régi par les équations de stabilité (1.52) que l'on réécrit :

$$i\omega \hat{u}_x = L \hat{u}_x + \frac{dU_0}{dz} \hat{u}_z + M_u \hat{\rho} + \frac{i\alpha}{\rho_0} \hat{p}, \quad (3.1a)$$

$$i\omega \hat{u}_y = L \hat{u}_y + M_v \hat{\rho} + \frac{i\beta}{\rho_0} \hat{p}, \quad (3.1b)$$

$$i\omega \hat{u}_z = L_w \hat{u}_z + M_w \hat{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\hat{p}}{dz}, \quad (3.1c)$$

$$i\omega \hat{\rho} = L_r \hat{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz} \hat{u}_z, \quad (3.1d)$$

$$0 = i\alpha \hat{u}_x + i\beta \hat{u}_y + \frac{d\hat{u}_z}{dz}. \quad (3.1e)$$

En introduisant la transformation de Squire

$$k \hat{u} = \alpha \hat{u}_x + \beta \hat{u}_y, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (3.2)$$

la manipulation algébrique  $\alpha(3.1a) + \beta(3.1b)$  s'écrit sous la forme

$$i\omega k \hat{u} = k L \hat{u} + \alpha \frac{dU_0}{dz} \hat{u}_z + (\alpha M_u + \beta M_v) \hat{\rho} + \frac{ik^2}{\rho_0} \hat{p}. \quad (3.3)$$

En posant

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= \frac{k}{\alpha} \omega, & \underline{\hat{p}} &= \frac{k}{\alpha} \hat{p}, & \underline{\rho} &= \frac{\alpha}{k} \rho, & \underline{Re} &= \frac{\alpha}{k} Re \\ \underline{L} &= \frac{k}{\alpha} L = \frac{Re}{Re} L, & \underline{L}_w &= \frac{k}{\alpha} L_w = \frac{Re}{Re} L_w, & \underline{L}_r &= \frac{k}{\alpha} L_r = \frac{Re}{Re} L_r, \\ \underline{M}_u &= \frac{1}{\rho_0 \underline{Re} Sc} \left( k^2 U_0 - \frac{dU_0}{dz} \frac{d}{dz} \right), & \underline{M}_w &= \frac{k}{\alpha} M_w = \frac{Re}{Re} M_w, \end{aligned}$$

le système d'équations (3.1) s'écrit alors de la façon suivante :

$$i\underline{\omega} \hat{u} = \underline{L} \hat{u} + \frac{dU_0}{dz} \hat{u}_z + \underline{M}_u \hat{\rho} + \frac{ik}{\rho_0} \hat{p}, \quad (3.4a)$$

$$i\underline{\omega} \hat{u}_z = \underline{L}_w \hat{u}_z + \underline{M}_w \hat{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\hat{p}}{dz}, \quad (3.4b)$$

$$i\underline{\omega} \hat{\rho} = \underline{L}_r \hat{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz} \hat{u}_z, \quad (3.4c)$$

$$0 = ik \hat{u} + \frac{d\hat{u}_z}{dz}. \quad (3.4d)$$

On constate que la transformation de Squire (3.2) permet de réduire le problème tridimensionnel (3.1) à un problème bidimensionnel équivalent (3.4). Cette formulation permet de démontrer le théorème. En effet, puisque

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > \alpha,$$

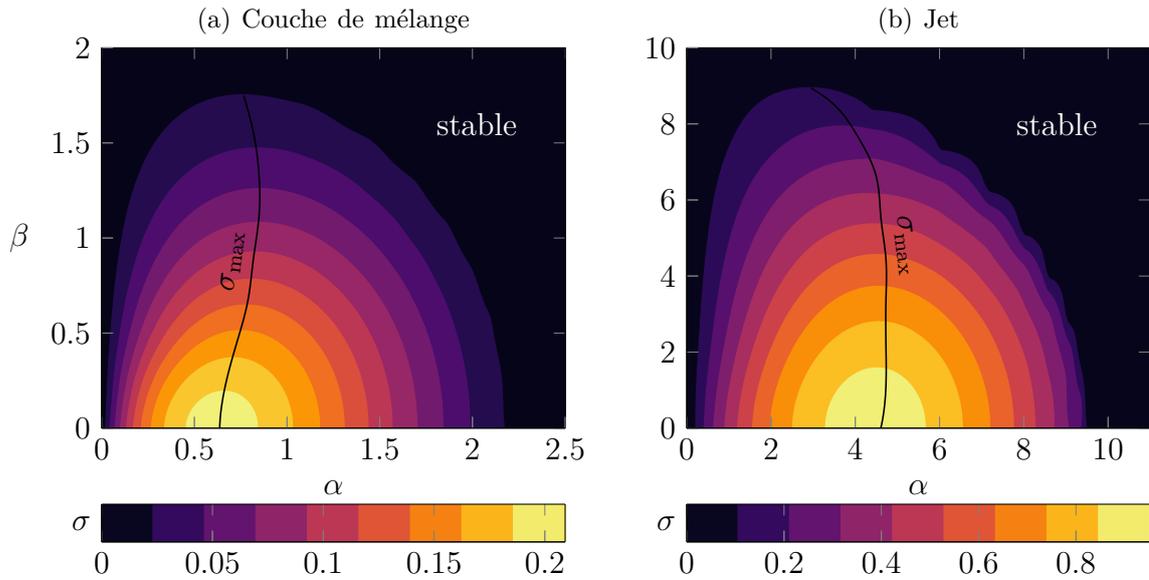


FIGURE 3.1 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha, \beta)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) avec  $Re = Sc = \infty$ ,  $\delta = 0.1$  et  $S = 2$ .

alors

$$\underline{\sigma} = \frac{k}{\alpha} \sigma > \sigma, \quad \underline{Re} = \frac{\alpha}{k} Re < Re. \quad \blacksquare$$

Cette extension du théorème de Squire au cas à densité variable permet de restreindre notre étude de stabilité aux cas bidimensionnels, *i.e.* en éliminant la composante  $u_y$  et  $\beta$  des équations (1.57). Ceci est illustré sur la figure 3.1 qui montre que le taux de croissance le plus instable apparaît à  $\beta = 0$  et qu'il décroît de façon monotone lorsque  $\beta$  croît.

### 3.1.2 Caractéristiques de l'instabilité

On rappelle que le comportement des perturbations appliquées à un écoulement est régi par la relation de dispersion  $\omega = \omega(\alpha)$ . Pour caractériser l'instabilité, on s'intéresse uniquement aux taux de croissance de la perturbation  $\sigma = \sigma(\alpha)$ <sup>1</sup>. On définit quatre points caractéristiques de l'instabilité comme :

- le mode le plus instable  $\alpha_{\max}$  tel que  $\sigma(\alpha_{\max}) = \max_{\alpha}(\sigma(\alpha))$ ,
- le taux de croissance associé au mode le plus instable  $\sigma_{\max} = \sigma(\alpha_{\max})$ , qui a priori conditionne l'instabilité,
- le taux de croissance  $\sigma^*$  dans la limite des grandes longueurs d'onde,
- le nombre d'onde de coupure  $\alpha_c$ , à partir duquel l'écoulement devient stable.

Ces grandeurs représentées sur la figure 3.2 montrent que ces quantités sont caractéristiques de l'instabilité.

1. Par la suite, on fera un abus de notation en définissant la relation de dispersion comme  $\sigma = \sigma(\alpha)$ .

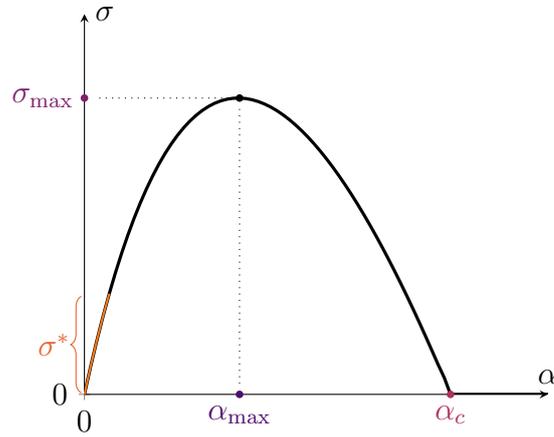


FIGURE 3.2 – Relation de dispersion  $\sigma = \sigma(\alpha)$  avec l'identification des quatre caractéristiques de l'instabilité :  $\alpha_c$  nombre d'onde de coupure,  $\sigma_{\max}$  taux de croissance du mode le plus instable,  $\alpha_{\max}$  nombre d'onde du mode le plus instable et  $\sigma^*$  taux de croissance lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ .

### 3.1.3 Étude numérique

L'étude numérique du problème aux valeurs propres est réalisée de façon à balayer une large gamme de l'espace des paramètres  $(S, \delta)$  représentatif de la variation de masse, afin d'observer leurs influences sur le comportement instable de ces écoulements :

- *couche de mélange* : le rapport de masse volumique  $S$  varie de 1 et 100 et l'épaisseur de la zone de mélange  $\delta$  varie de 0.1 à 10,
- *jet* : le rapport de masse volumique  $S$  varie de 0.1 à 10 et l'épaisseur de la zone de cisaillement/mélange  $\delta$  varie de 0.1 à 0.3.

Dans le cas de la couche de mélange, la symétrie du problème par rapport à  $S = 1$  permet de limiter les valeurs de  $S \geq 1$ . En effet, il est possible de passer du cas  $S \geq 1$  à  $S \leq 1$  par simple changement de référentiel. De plus, la borne supérieure d'étude  $S = 100$  est ici fixée suffisamment grande afin d'étudier le comportement instable de cet écoulement académique sur une très large gamme de rapports de masse. En revanche, dans le cas d'un jet, construit comme la superposition de deux couches de mélange, les perturbations de chacune des deux couches de cisaillement vont a priori interagir entre elles et ainsi briser la symétrie par rapport à  $S = 1$ . De surcroit, la plage d'étude  $S \in [0.1, 10]$  correspond à la gamme représentative des rapports de masse des rejets atmosphériques. La valeur minimale de l'épaisseur de la zone de mélange est limitée par la méthode de discrétisation numérique. En effet, pour des valeurs de  $\delta < 0.1$  les profils d'écoulement de base deviennent trop raides et sont vus comme des discontinuités par décomposition spectrale. On remarque également, dans le cas du jet, que la valeur de l'épaisseur de cisaillement/mélange maximal ( $\delta = 0.3$ ) est limitée intrinsèquement à la géométrie du profil. En effet, au-delà de cette valeur, les deux couches se superposent.

## 3.2 Considérations non visqueuses

Tout d'abord, l'impact de la variation de masse sur la stabilité est observé et analysé pour des écoulements de fluide *non visqueux*. Nous verrons dans un premier temps les extensions à densité variable des résultats connus à densité constante. Ensuite, nous montrerons l'influence de cette variation de masse sur les caractéristiques de l'instabilité.

Dans une configuration bidimensionnelle non diffusive et en introduisant la fonction de courant perturbé, le système d'équations modélisant la stabilité de ces écoulements peut se réduire sous la forme d'une équation différentielle, appelée équation de Rayleigh généralisée [70] :

$$(U_0 - c) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - \alpha^2 \hat{\psi} \right) - \frac{d^2 U_0}{dz^2} \hat{\psi} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{dU_0}{dz} \hat{\psi} - (U_0 - c) \frac{d\hat{\psi}}{dz} \right). \quad (3.5)$$

Cette équation peut être vue comme une équation de Taylor–Goldstein [64] pour laquelle les gradients de masse volumique sont quelconques. Dans cette équation, on constate que le membre de gauche correspond aux termes de l'équation de Rayleigh à densité constante (1.63) tandis que le membre de droite correspond aux contributions liées à la variation de masse. Ce dernier fait intervenir un couplage non trivial entre la masse volumique, la vitesse et la fonction de courant ainsi que leurs dérivées. Ceci représente une difficulté supplémentaire pour la résolution du problème par rapport au cas homogène.

### 3.2.1 Quelques considérations théoriques

Dans la section 1.3.1 nous avons énoncé les résultats fondamentaux de stabilité dans le cas d'écoulements non visqueux à densité constante. On propose ici de généraliser ces résultats au cas inhomogène. Afin de faciliter la lecture, les notations des travaux originaux sont conservées au maximum.

**Théorèmes de Rayleigh et de Fjørtoft** On démontre que les théorèmes de Rayleigh et de Fjørtoft peuvent être étendus au cas à densité variable. Ces théorèmes montrent que le point d'inflexion sur le profil de vitesse n'est plus la condition nécessaire de stabilité, mais s'étend à une condition faisant intervenir les gradients de masse et de vitesse.

#### Théorème de Rayleigh généralisé

Soit un écoulement bidimensionnel non visqueux défini par  $U_0(z)$  et  $\rho_0(z) \forall z \in [z_1, z_2]$ . Si l'écoulement est instable alors

$$\exists z_s; \frac{d}{dz} \left( \rho_0 \frac{dU_0}{dz} \right) \Big|_{z_s} = 0. \quad (3.6)$$

### Théorème de Fjørtoft généralisé

Soit un écoulement bidimensionnel non visqueux défini par  $U_0(z)$  et  $\rho_0(z) \forall z \in [z_1, z_2]$ .

Si l'écoulement est instable alors

$$\begin{cases} \exists z_s; \left. \frac{d}{dz} \left( \rho_0 \frac{dU_0}{dz} \right) \right|_{z_s} = 0, \\ \exists z_f; \left. \frac{d}{dz} \left( \rho_0 \frac{dU_0}{dz} \right) \right|_{z_f} (U_0(z_f) - U_0(z_s)) < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

#### Démonstration

Soit un écoulement bidimensionnel non visqueux défini par  $U_0(z)$  et  $\rho_0(z) \forall z \in [z_1, z_2]$ . Les perturbations  $(\alpha, \omega)$  appliquées à cet écoulement sont gouvernées par l'équation de Rayleigh généralisée (3.5) ré-écrite sous la forme<sup>2</sup>

$$\left( \rho_0 \hat{\psi}' \right)' - \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{U_0 - c} + \rho_0 \alpha^2 \right) \hat{\psi} = 0. \quad (3.8)$$

On suppose que cet écoulement est instable  $\sigma > 0$ . Pour démontrer ces deux théorèmes fondamentaux, l'équation (3.8) est multipliée par le complexe conjugué de  $\hat{\psi}$ , noté  $\hat{\psi}^*$ , puis intégrée sur le domaine :

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[ \left( \rho_0 \hat{\psi}' \right)' \hat{\psi}^* - \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{U_0 - c} + \rho_0 \alpha^2 \right) \hat{\psi} \hat{\psi}^* \right] dz = 0. \quad (3.9)$$

En faisant une intégration par partie et en considérant les conditions aux limites on peut écrire

$$\int_{z_1}^{z_2} \left( \rho_0 \hat{\psi}' \right)' \hat{\psi}^* dz = - \int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 dz. \quad (3.10)$$

Ainsi l'équation (3.9) peut s'écrire sous la forme

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 + \left( \frac{U_0 - c^*}{|U_0 - c|^2} (\rho_0 U_0')' + \rho_0 \alpha^2 \right) |\hat{\psi}|^2 dz = 0, \quad (3.11)$$

avec  $c^*$  le conjugué de  $c$ . En prenant la partie imaginaire et la partie réelle de cette

2. Les termes de dérivée par rapport à  $z$  sont remplacés par le symbole  $'$  pour alléger les notations.

équation, on obtient :

$$\text{Im}(3.11) \implies \int_{z_1}^{z_2} \frac{c_i(\rho_0 U_0')'}{|U_0 - c|^2} |\psi|^2 dz = 0, \quad (3.12a)$$

$$\text{Re}(3.11) \implies \int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 + \left( \frac{U_0 - c_r}{|U_0 - c|^2} (\rho_0 U_0')' + \rho_0 \alpha^2 \right) |\hat{\psi}|^2 dz = 0. \quad (3.12b)$$

Comme l'écoulement est supposé instable, l'équation (3.12a) ne peut être satisfaite que si  $(\rho_0 U_0)'$  change de signe au moins une fois dans le domaine, autrement dit s'il existe un point  $z_s$  tel que  $(\rho_0 U_0)'(z_s) = 0$ . Ceci démontre le théorème de Rayleigh généralisé.

En posant  $U_s = U_0(z_s)$  et en décomposant  $U_0 - c_r = U_0 - U_s + U_s - c_r$  l'équation (3.12b) peut s'écrire sous la forme

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 + \left( \frac{U_0 - U_s}{|U_0 - c|^2} (\rho_0 U_0')' + \rho_0 \alpha^2 \right) |\hat{\psi}|^2 dz = (c_r - U_s) \int_{z_1}^{z_2} \frac{(\rho_0 U_0')'}{|U_0 - c|^2} |\psi|^2 dz. \quad (3.13)$$

Puisque l'écoulement est instable, le membre de droite est nul d'après (3.12a), ce qui permet d'écrire :

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 + \left( \frac{U_0 - U_s}{|U_0 - c|^2} (\rho_0 U_0')' + \rho_0 \alpha^2 \right) |\hat{\psi}|^2 dz = 0. \quad (3.14)$$

Cette équation ne peut être satisfaite que s'il existe un point  $z_f$  dans le domaine tel que  $(\rho_0 U_0)'(z_f)(U_0(z_f) - U_s) < 0$ . Ceci démontre le théorème de Fjørtoft généralisé. ■

La figure 3.3 donne des illustrations du théorème de Rayleigh généralisé pour des cas simples dans lesquels la masse volumique varie linéairement en fonction de la hauteur, et la vitesse varie de façon quadratique. Ce théorème montre que la masse volumique peut avoir un effet stabilisant/déstabilisant sur l'écoulement. Ceci s'explique en ré-écrivant le théorème (3.6) sous la forme

$$\frac{\rho_0'}{\rho_0} = -\frac{U_0''}{U_0'} \quad \text{en } z = z_s,$$

qui montre que l'instabilité apparaît au point où les gradients réduits de  $\rho_0$  sont strictement opposés aux gradients réduits de  $U_0'$ . Un choix avisé de  $\rho_0(z)$  peut alors déstabiliser un écoulement stable à densité constante, ou au contraire stabiliser une configuration instable.

**Relation de dispersion asymptotique dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$**  Le résultat obtenu par DRAZIN et al. [23] donne le comportement du taux de croissance dans la limite

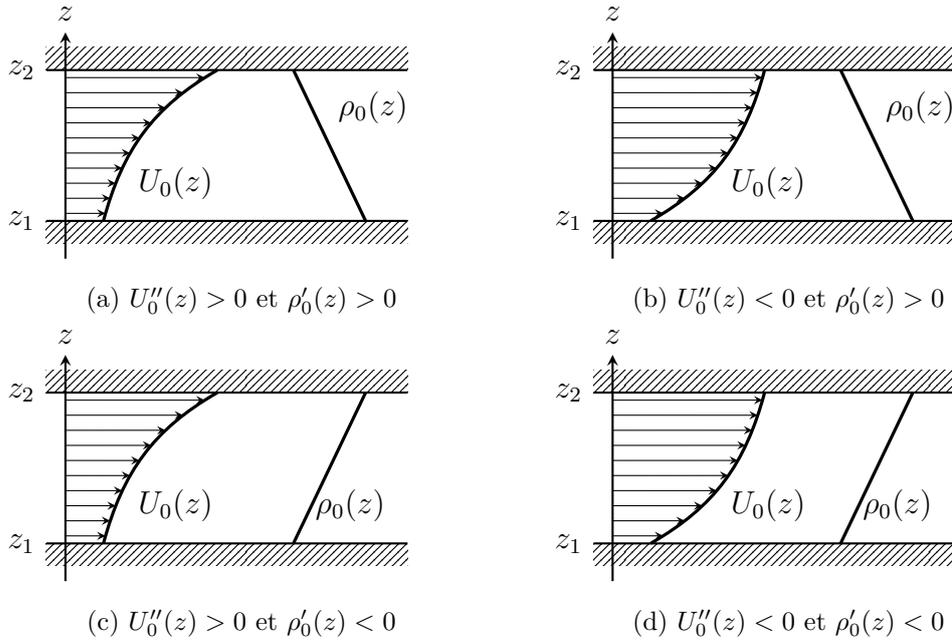


FIGURE 3.3 – Illustration du théorème de Rayleigh généralisé : (a) stable, (b) potentiellement instable, (c) potentiellement instable, (d) stable.

des grandes longueurs d'onde *i.e.* lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . En suivant une démarche analogue, l'influence de la masse volumique sur la stabilité de l'écoulement peut être obtenue.

### Relation de dispersion asymptotique lorsque $\alpha \rightarrow 0$

Si l'écoulement est instable et  $\rho_0', U_0', U_0'' \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  alors la relation de dispersion s'écrit :

$$c^\dagger = U \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + 2i \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \right) \quad (3.15) \quad \begin{array}{l} \text{Couche de mélange} \\ \text{Jet} \end{array} \quad c^\dagger \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} i\alpha^{1/2} \left( \frac{1}{2\rho_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 U_0^2 dz \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

### Démonstration

En réalisant un changement de variable astucieux sur l'équation de Rayleigh généralisée, il est possible d'utiliser la même démarche que celle proposée par DRAZIN et al. [23] pour démontrer ces résultats. En effet, en posant  $\hat{\phi} = \sqrt{\rho_0} \psi$  l'équation de Rayleigh généralisée s'écrit sous la forme

$$W \left( \hat{\phi}'' - k^2 \hat{\phi} \right) - W'' \hat{\phi} = 0, \quad (3.17)$$

avec  $W = \sqrt{\rho_0} \Sigma$  et  $\Sigma = U_0 - c$ . On suppose que l'écoulement est instable et que  $\rho_0', U_0', U_0'' \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  suffisamment rapidement pour que l'on cherche les solutions asymp-

totiques en  $\pm\infty$  de l'équation (3.17) sous la forme

$$\hat{\phi}_+ = e^{-kz} \chi(z) \quad \text{avec} \quad \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \chi_n(z) \quad (z > 0), \quad (3.18)$$

$$\hat{\phi}_- = e^{+kz} \theta(z) \quad \text{avec} \quad \theta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\alpha)^n \theta_n(z) \quad (z < 0). \quad (3.19)$$

La relation de dispersion  $D(\omega, \alpha) = 0$  associée à ce type de problème s'obtient en utilisant la continuité des fonctions  $\hat{\phi}_+$  et  $\hat{\phi}_-$  à l'interface, de telle sorte que :

$$\hat{\phi}_+(0^+) = K \hat{\phi}_-(0^-) \quad \text{et} \quad \hat{\phi}'_+(0^+) = K \hat{\phi}'_-(0^-). \quad (3.20)$$

Pour déterminer correctement  $\chi$  et  $\theta$ , il reste à déterminer les coefficients constants. On normalise alors ces fonctions :

$$\chi(\infty) = W(\infty) \equiv W_\infty, \quad \chi_0(\infty) = W_\infty, \quad \chi_n(\infty) = 0 \quad (n \geq 1), \quad (3.21)$$

$$\theta(-\infty) = W(-\infty) \equiv W_{-\infty}, \quad \theta_0(-\infty) = W_{-\infty}, \quad \theta_n(-\infty) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (3.22)$$

En introduisant la solution  $\hat{\phi}_+$  dans l'équation (3.17) on obtient la relation de récurrence<sup>3</sup> :

$$\left[ W^2 \left( \frac{\chi_0}{W} \right)' \right]' = 0 \quad \text{et} \quad \left[ W^2 \left( \frac{\chi_{n+1}}{W} \right)' \right]' = 2W \chi'_n \quad (\forall n \geq 0). \quad (3.23)$$

En intégrant ces équations de récurrence, on obtient :

$$\chi_0(z) = W(z) \quad \text{et} \quad \chi_{n+1} = 2W(z) \int_{\infty}^z W^{-2}(\eta) \int_{\infty}^{\eta} W(\xi) \chi'_n(\xi) \, d\xi \, d\eta. \quad (3.24)$$

La relation de dispersion est alors obtenue en annulant le Wronskien en  $z = 0$  pour assurer la continuité de la relation (3.20) :

$$\theta(0)\chi(0)' - \chi(0)\theta(0)' - 2\alpha\theta(0)\chi(0) = 0. \quad (3.25)$$

Ainsi, en injectant les formulations de  $\chi_n$  et  $\theta_n$  dans l'équation ci-dessus, la relation de dispersion s'écrit :

$$-\alpha (W_\infty^2 + W_{-\infty}^2) - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} (W^2 - W_\infty^2) (W^2 - W_{-\infty}^2) W^{-2} \, dz + O(\alpha^3) = 0. \quad (3.26)$$

Au premier ordre et dans le cas d'une couche de mélange, cette relation de dispersion donne  $W_\infty^2 + W_{-\infty}^2 = 0$ . En posant  $\rho_0(\infty) = \rho_1$ ,  $U_0(\infty) = U > 0$ ,  $\rho_0(-\infty) = \rho_2$  et

---

3. On obtient la même relation de récurrence pour  $\hat{\phi}_-$  en remplaçant  $\chi$  par  $\theta$

$U_0(-\infty) = -U$  les racines de ce polynôme en  $c = c^\dagger/U$  sont alors :

$$c^\dagger = U \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm 2i \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \right).$$

Dans le cas d'un jet avec  $\rho_{0_\infty} = \rho_{0_{-\infty}} = \rho_2 > 0$  et  $U_{0_\infty} = U_{0_{-\infty}} = 0$ , la première approximation  $2\rho_2 c^2 = 0$  de la relation de dispersion ne peut être satisfaite que si  $c = 0$ . Il est alors nécessaire de regarder cette relation de dispersion au deuxième ordre :

$$2\rho_2 c^2 + \alpha \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_0 U_0^2 - 2\rho_0 U_0 c) dz + c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} ((\rho_0 - 2\rho_2) W^2 + \rho_2^2 c^2) W^{-2} dz \right] = 0. \quad (3.27)$$

Par un développement de  $c$  en  $\alpha$  tel qu'introduit par DRAZIN et al. [23], on trouve au deuxième ordre la relation de dispersion :

$$c^\dagger \sim \pm i \alpha^{1/2} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 U_0^2 dz \right)^{1/2} \quad (\alpha \rightarrow 0) \quad \blacksquare$$

On observe que la relation de dispersion (3.15) est strictement identique à celle obtenue en considérant des profils constants par morceau (3.32). Cela indique que, dans la limite des grandes longueurs d'onde, les zones de gradients de masse volumique et de vitesse sont vues comme des discontinuités par les perturbations. De plus, on constate ici que la masse volumique a un effet purement stabilisant et que le cas homogène est la configuration la plus instable. La relation (3.16) montre au contraire que dans le cas d'un jet, la masse volumique a un effet déstabilisant sur l'écoulement puisque le taux de croissance varie comme la racine carrée de l'énergie cinétique du système  $\rho_0 U_0^2$ . On observe finalement que le taux de croissance associé à cette dernière configuration varie comme  $\alpha^{3/2}$ , montrant ici que l'instabilité d'un jet ne se comporte pas comme deux couches de mélanges indépendants, mais que l'interaction des perturbations au centre est prédominante (3.25).

**Cas limites : profils constants ou linéaires par morceau** On considère ici un écoulement de base pour lequel la masse volumique est constante par morceau et définie par :

$$\begin{array}{cc} \text{Couche de mélange} & \text{Jet} \\ \rho_0 = \begin{cases} \rho_1 & z > 0 \\ \rho_2 & z < 0 \end{cases} & \rho_0 = \begin{cases} \rho_1 & |z| < 1 \\ \rho_2 & |z| > 1 \end{cases} \end{array}$$

Si l'on ajoute à cela un profil de vitesse tel que  $d^2 U_0 / dz^2 = 0$  (vitesse constante ou linéaire par morceau), l'équation de Rayleigh généralisée (3.5) se réduit alors à une équation

différentielle du second ordre à coefficients constants sur chaque intervalle :

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \alpha^2\psi = 0. \quad (3.28)$$

Les solutions de cette équation sur chaque intervalle de définition sont de la forme

$$\hat{\psi}(z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}. \quad (3.29)$$

La relation de dispersion est obtenue en utilisant les conditions aux limites  $\hat{\psi}(\pm\infty) = 0$  et les conditions de continuité de vitesse et de contrainte entre chaque solution [15, p.114] sur chaque segment des profils :

$$\Delta\left[\frac{\hat{\psi}}{U_0 - c}\right] = 0, \quad \Delta\left[\rho_0\left((U_0 - c)\frac{d\hat{\psi}}{dz} - \frac{dU_0}{dz}\hat{\psi}\right)\right] = 0. \quad (3.30)$$

Pour des profils de vitesse constants par morceau définis par :

$$\begin{array}{cc} \text{Couche de mélange} & \text{Jet} \\ U_0 = \begin{cases} U & z > 0 \\ -U & z < 0 \end{cases} & U_0 = \begin{cases} U & |z| < 1 \\ 0 & |z| > 1 \end{cases} \end{array}$$

les relations de dispersion sont des polynômes en  $c = c^\dagger/U$ . Dans le cas d'une couche de mélange, la relation de dispersion s'écrit [52, p.154] :

$$c^2 - 2Atc + 1 = 0, \quad (3.31)$$

dont les racines sont :

$$c^\dagger = U \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm 2i \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \right). \quad (3.32)$$

Dans le cas d'un jet, la relation de dispersion s'écrit [85, p.1177] :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{c - 1}{c} \right)^2 = \frac{1 - \lambda e^{2\alpha}}{1 + \lambda e^{2\alpha}}, \quad (3.33)$$

dont les racines sont :

$$c^\dagger = \frac{U}{\lambda e^{2\alpha} + At} \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} (\lambda e^{2\alpha} + 1) \pm i \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{\lambda^2 e^{4\alpha} - 1} \right), \quad (3.34)$$

où  $\lambda = \pm 1$  est un paramètre donnant la symétrie des perturbations :  $\lambda = 1$  pour un mode variqueux ou  $\lambda = -1$  pour un mode sinueux et  $At$  le nombre d'Atwood  $At = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ .

On observe que la relation de dispersion (3.32), dans le cas d'une couche de mélange, est identique à (3.15), ce qui montre que lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , les perturbations agissent de la même manière que pour des cas constants par morceau comme indiqués précédemment.

Ceci n'est plus du tout le cas en considérant un jet, puisque les relations (3.34) et (3.16) se comportent très différemment. La différence la plus importante réside dans le fait que la densité a un effet purement stabilisant pour des profils constants par morceau, alors qu'elle est déstabilisante dans l'analyse précédente. Nous verrons par la suite que ces relations de dispersion sont de très bonnes approximations pour des profils continus avec  $\delta \ll 1$  lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . En revanche, ces taux de croissance sont strictement croissants avec  $\alpha$  puisqu'il n'existe pas de longueur de coupure de l'instabilité. Pour introduire cette longueur de coupure, il est alors nécessaire de travailler avec des profils linéaires par morceau (lpm) pour la vitesse :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Couche de mélange} & \text{Jet} \\
 U_0 = \begin{cases} U & z > \delta \\ Uz/\delta & |z| < \delta \\ -U & z < -\delta \end{cases} & U_0 = \begin{cases} 0 & |z| > 1 + \delta \\ U(1 + \delta - z)/(2\delta) & |z - 1| < \delta \\ U(1 + \delta + z)/(2\delta) & |z + 1| < \delta \\ U & |z| < 1 - \delta \end{cases}
 \end{array}$$

Les relations de dispersions associées à ces profils linéaires par morceau sont des polynômes en  $\tilde{\omega} = \delta\omega/U$  avec  $\tilde{\alpha} = \delta\alpha$ . Dans le cas d'une *couche de mélange*, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\tilde{\omega} \left[ 4\tilde{\omega}^2 - \left( (2\tilde{\alpha} - 1)^2 - e^{-4\tilde{\alpha}} \right) \right] + At \left[ (2\tilde{\alpha} - 1 + e^{-2\tilde{\alpha}})^2 - 4\tilde{\omega}^2 (1 - e^{-2\tilde{\alpha}}) \right] = 0. \quad (3.35)$$

Cette relation de dispersion extrêmement simple montre directement la contribution de  $\rho_0$  par l'intermédiaire du nombre d'Atwood  $At$ . On retrouve la relation usuelle [15, p.120] lorsque  $\rho_1 = \rho_2$  ( $At = 0$ ). On constate sur les courbes de niveau de cette relation, tracées sur la figure 3.4a, que la masse volumique peut rendre l'écoulement plus instable tout en déplaçant les valeurs de  $\alpha_{\max}$  et de  $\alpha_c$  vers de plus grandes valeurs. Ceci est encore plus visible sur la figure 3.5, sur laquelle on observe que toutes les quantités atteignent un plateau pour de grandes valeurs de  $S$ . Cela s'explique par le fait que l'on atteint le cas limite  $At \rightarrow 1$  dans la relation (3.35). Finalement on remarque également que la conclusion liée à la relation - stabilisation à petite valeur de  $\alpha$  quand  $S$  augmente - reste valable. La relation de dispersion pour un *jet* à densité variable est obtenue à l'aide du paramètre de symétrie des perturbations  $\lambda$  :  $\lambda = 1$  pour les modes variqueux et  $\lambda = -1$  pour les modes sinueux. Tout comme pour la couche de mélange, la relation de dispersion pour le jet est un polynôme du troisième ordre en  $\tilde{\omega}$  :

$$\sum_{n=0}^3 a_n \tilde{\omega}^n = 0, \quad (3.36)$$

dont les coefficients sont :

$$a_3 = 32 (\lambda e^{2\tilde{\alpha}} + At), \quad (3.37a)$$

$$a_2 = 8 (-6\alpha [\lambda e^{2\alpha} + At] + 2\lambda At (e^{-2\tilde{\alpha}} - 1) e^{2\alpha} - e^{2\tilde{\alpha}} + e^{-2\tilde{\alpha}}), \quad (3.37b)$$

$$a_1 = 2 \left( 8\tilde{\alpha}^2 [\lambda e^{2\alpha} + At] + 2\tilde{\alpha} \left[ e^{2\tilde{\alpha}} - 3e^{-2\tilde{\alpha}} + 2\lambda \left( \frac{3S-1}{S+1} - 2At e^{-2\tilde{\alpha}} \right) e^{2\alpha} \right] \right. \\ \left. + \lambda (e^{-4\tilde{\alpha}} - 1) e^{2\alpha} - 4At + \frac{S-3}{S+1} e^{-2\tilde{\alpha}} + \frac{3S-1}{S+1} e^{2\tilde{\alpha}} \right), \quad (3.37c)$$

$$a_0 = At \left[ \lambda (e^{-4\tilde{\alpha}} - 2e^{-2\tilde{\alpha}} + 1) e^{2\alpha} - e^{2\tilde{\alpha}} + 2 - e^{-2\tilde{\alpha}} \right] + 4\tilde{\alpha}^2 \left[ \lambda (At e^{-2\tilde{\alpha}} - 1) e^{2\alpha} + (e^{-2\tilde{\alpha}} - At) \right] \\ + \tilde{\alpha} \left[ \left( -e^{-4\tilde{\alpha}} + 4At e^{-2\tilde{\alpha}} - \frac{3S-5}{S+1} \right) e^{2\alpha} - e^{2\tilde{\alpha}} + 4At - \frac{3S-5}{S+1} e^{-2\tilde{\alpha}} \right]. \quad (3.37d)$$

Cette relation montre une forte influence de la masse volumique, aussi bien par l'intermédiaire de  $S$  que du nombre d'Atwood. Les relations de dispersion sont également tracées sur les figures 3.4b et 3.4c, et les caractéristiques correspondantes sur la figure 3.5. On remarque en premier lieu que les modes sinueux et variqueux présentent une symétrie lorsque  $S \rightarrow 1/S$ , déjà visible sur la relation (3.34). Ceci se comprend en observant que tous les coefficients  $a_n$  de la relation (3.37) sont invariants par la transformation  $S = 1/S$ . Cette symétrie s'estompe progressivement lorsque  $\alpha$  augmente, jusqu'à ce que ces deux modes soient de même taux de croissance lorsque  $\alpha \gtrsim 1$ .

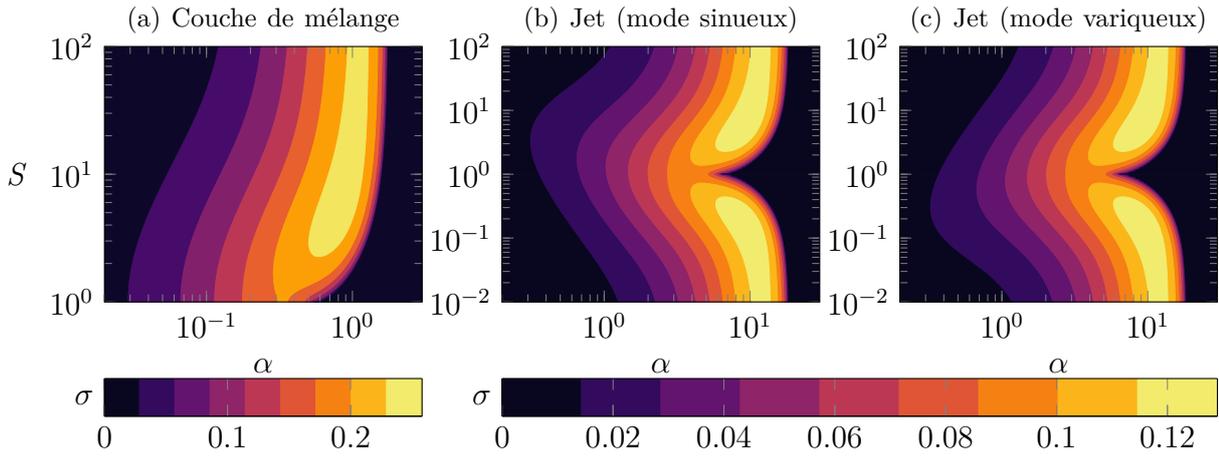


FIGURE 3.4 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha, S)$  pour des profils de vitesse linéaires par morceau et des profils de masse volumique constants par morceau.

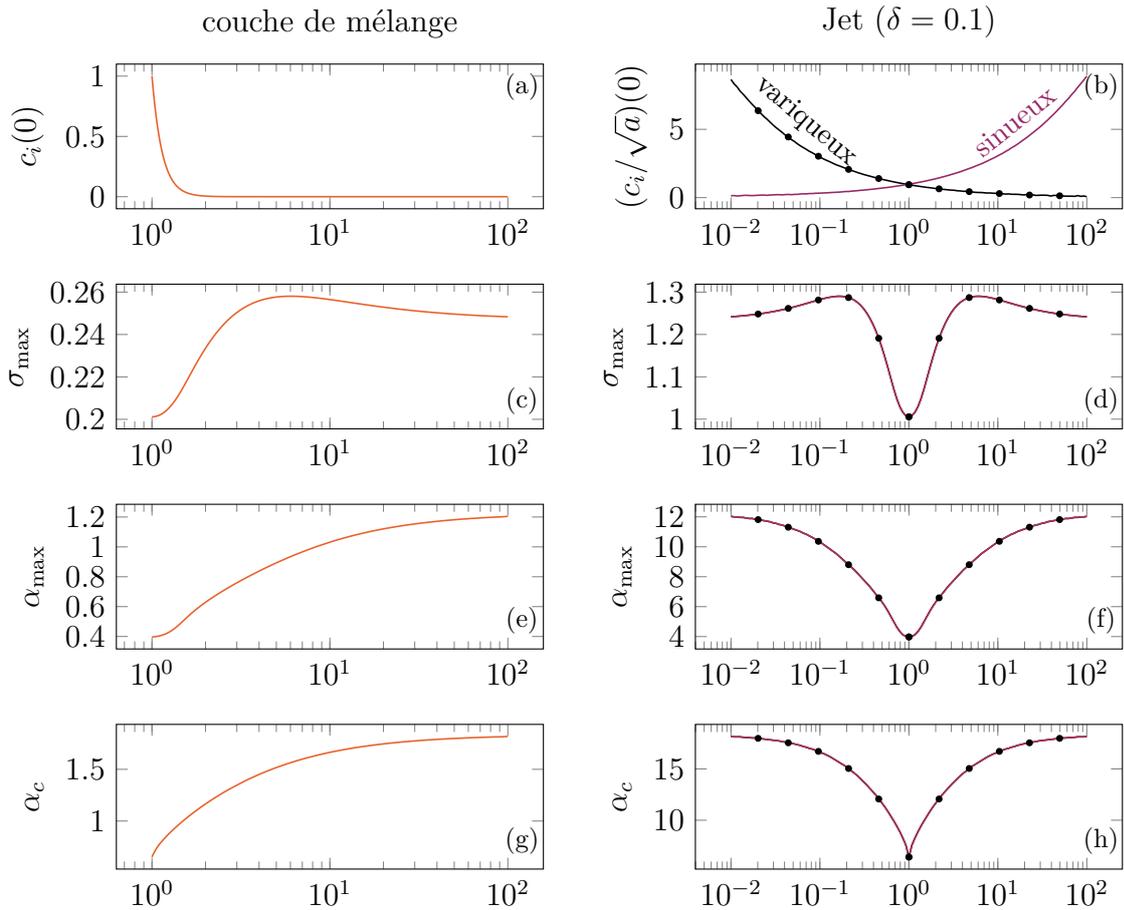


FIGURE 3.5 – Influence des caractéristiques de l'instabilité en fonction du rapport de masse  $S$  pour des profils de vitesse linéaires par morceau et des profils de masse volumique constants par morceau.

### 3.2.2 Caractéristiques de l'instabilité

#### Observation générale

On souhaite maintenant étudier le comportement de l'instabilité dans un cas où les profils de base  $\rho_0$  et  $U_0$  sont infiniment dérivables, par les méthodes numériques développées au chapitre 2. Cela nous permettra de confronter les conclusions précédemment obtenues à des cas plus réalistes. Pour cela, on souhaite s'attarder sur l'influence du rapport de masse  $S$  et de l'épaisseur  $\delta$  de la zone de mélange. Ceci est représenté sur les figures 3.6 et 3.7 pour une couche de mélange et les figures 3.8 et 3.9 pour un jet. On observe en premier lieu sur ces figures que l'augmentation de l'épaisseur  $\delta$  a pour effet de réduire la gamme instable en nombre d'onde  $\alpha$ , ainsi que la position  $\alpha_{\max}$  du mode le plus instable. Ceci se comprend par le fait que  $\delta$  se comporte comme une échelle de longueur de coupure pour l'instabilité. Cependant, la courbe neutre ne se comporte pas comme  $\delta\alpha = Cte$ , montrant que  $\delta$  n'est pas la seule échelle de longueur à prendre en compte. En second lieu, on peut constater que l'augmentation de  $S$  lorsque  $S < 1$  (respectivement diminution lorsque  $S > 1$ ) a également pour effet d'augmenter la gamme instable de  $\alpha$ , tout en déplaçant  $\alpha_{\max}$  vers de plus grandes valeurs. A contrario, s'éloigner du cas homogène ( $S = 1$ ) n'entraîne pas systématiquement une augmentation du taux de croissance. On en déduit que ce taux de croissance ne varie pas de façon monotone en fonction de  $\nabla\rho \sim (S-1)/\delta$ .

Ainsi, les variations des relations de dispersion étant non triviales en fonctions de ces paramètres  $S$  et  $\delta$ , on regardera en détail les quatre points caractéristiques de l'instabilité dans les sections suivantes.

#### Observations et estimation du mode le plus instable $\sigma_{\max} = \sigma(\alpha_{\max})$

Les figures 3.10 et 3.11 montrent les courbes de niveaux du taux de croissance maximal  $\sigma_{\max}$  et du nombre d'onde du mode le plus instable  $\alpha_{\max}$  en fonction de  $S$  et de  $\delta$ . On remarque en premier lieu que l'épaisseur de la couche  $\delta$  est le paramètre le plus influent sur l'instabilité aussi bien pour la couche de mélange que pour le jet. Dans le cas de la couche de mélange, on observe que le rapport de densité  $S$  n'a d'influence que si  $\delta < 1$ . Dans ce cas, on observe une « poche » d'instabilité située autour de  $S = 4$ , qui était déjà prédite par l'analyse linéaire par morceau développée précédemment. A contrario, lorsque  $\delta > 1$ , l'instabilité se comporte comme celle d'une couche de mélange à densité constante (indépendante de  $S$ ). Ceci s'explique par le fait que lorsque  $\delta > 1$  les perturbations ne voient que le gradient de vitesse comme source d'instabilité, les gradients de masse volumique devenant négligeables. Si l'on considère la configuration de jet, on observe, comme dans les considérations analytiques précédentes, que celle-ci ne se comporte pas comme deux couches de mélanges indépendantes. L'observation la plus étonnante est que le taux de croissance maximal est indépendant du rapport de densité  $S$ , alors que ce rapport modifie significativement la position  $\alpha_{\max}$  de ce taux de croissance. Cela indique

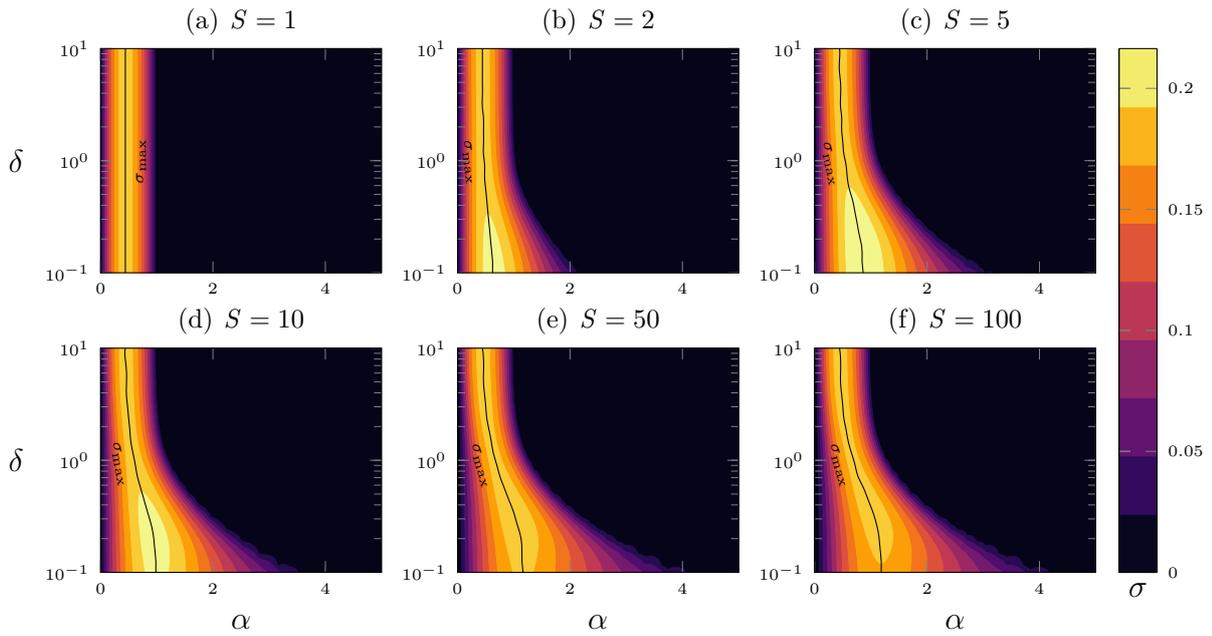


FIGURE 3.6 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha, \delta)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d’une couche de mélange (2.24) pour plusieurs valeurs de  $S$ . La ligne noire représente le taux de croissance  $\sigma_{\max}$ .

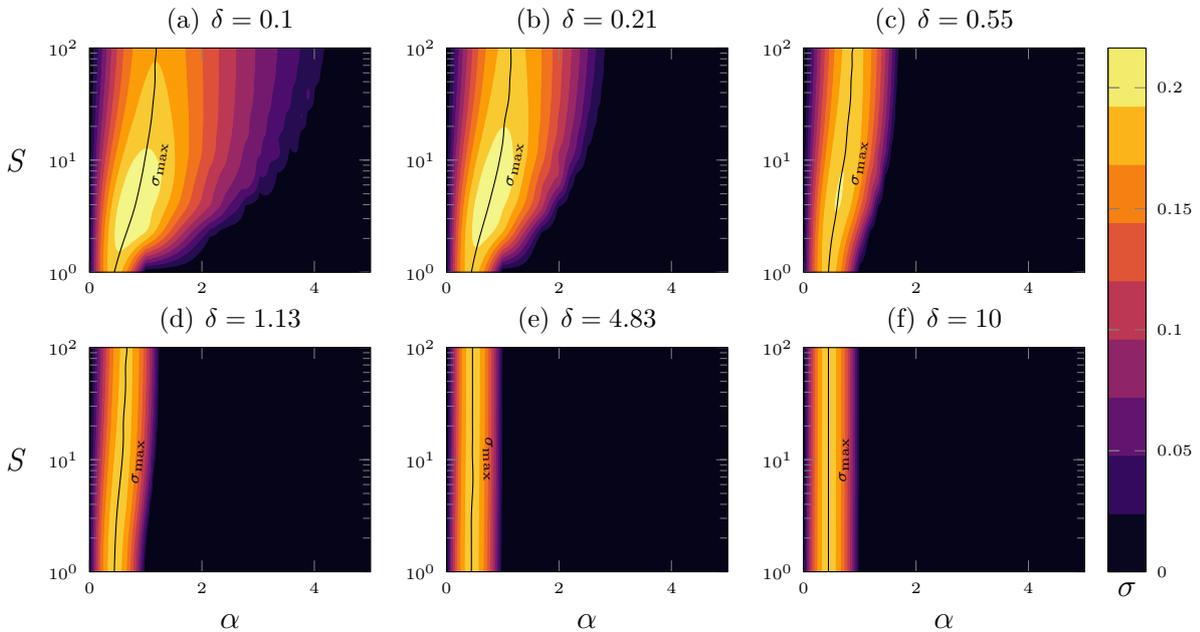


FIGURE 3.7 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha, S)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d’une couche de mélange (2.24) pour plusieurs valeurs de  $\delta$ . La ligne noire représente le taux de croissance  $\sigma_{\max}$ .

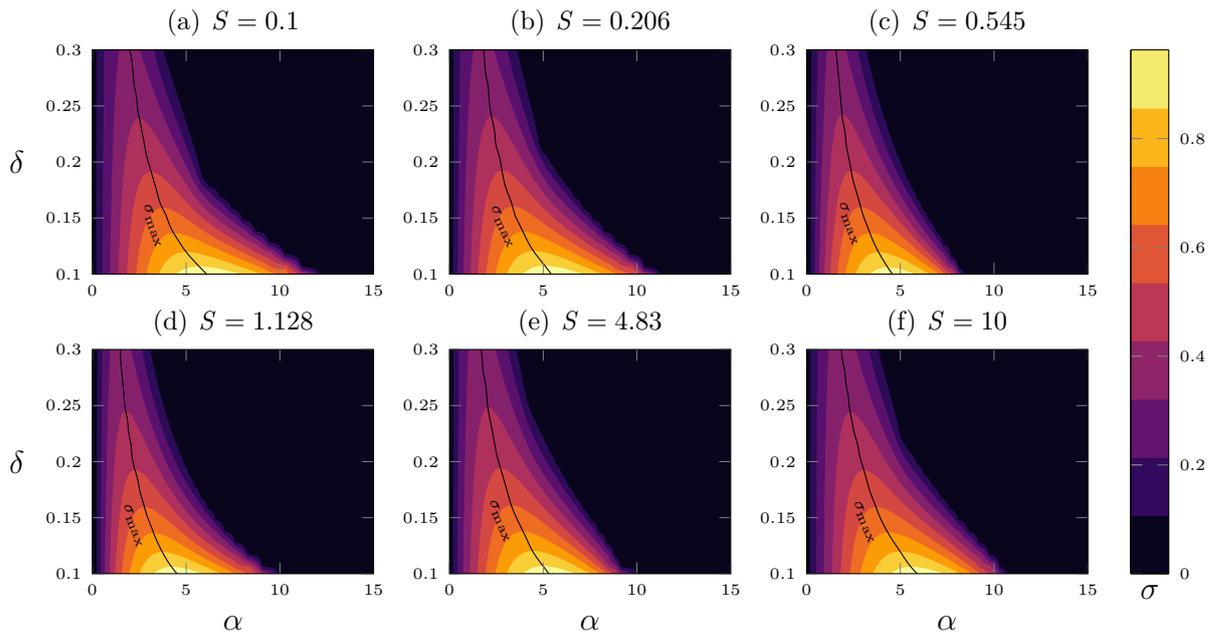


FIGURE 3.8 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha, \delta)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d'un jet (2.27) pour plusieurs valeurs de  $S$ . La ligne en noire représente le taux de croissance  $\sigma_{\max}$ .

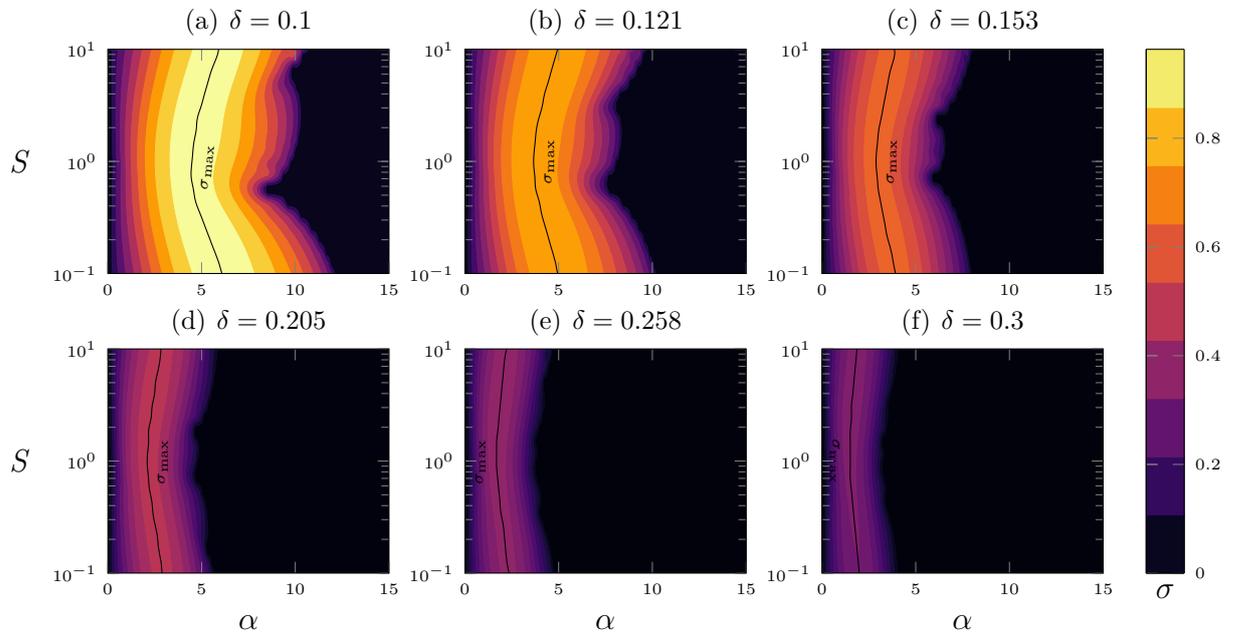


FIGURE 3.9 – Taux de croissance  $\sigma = \sigma(\alpha, S)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres dans le cas d'un jet (2.27) pour plusieurs valeurs de  $\delta$ . La ligne noire représente le taux de croissance  $\sigma_{\max}$ .

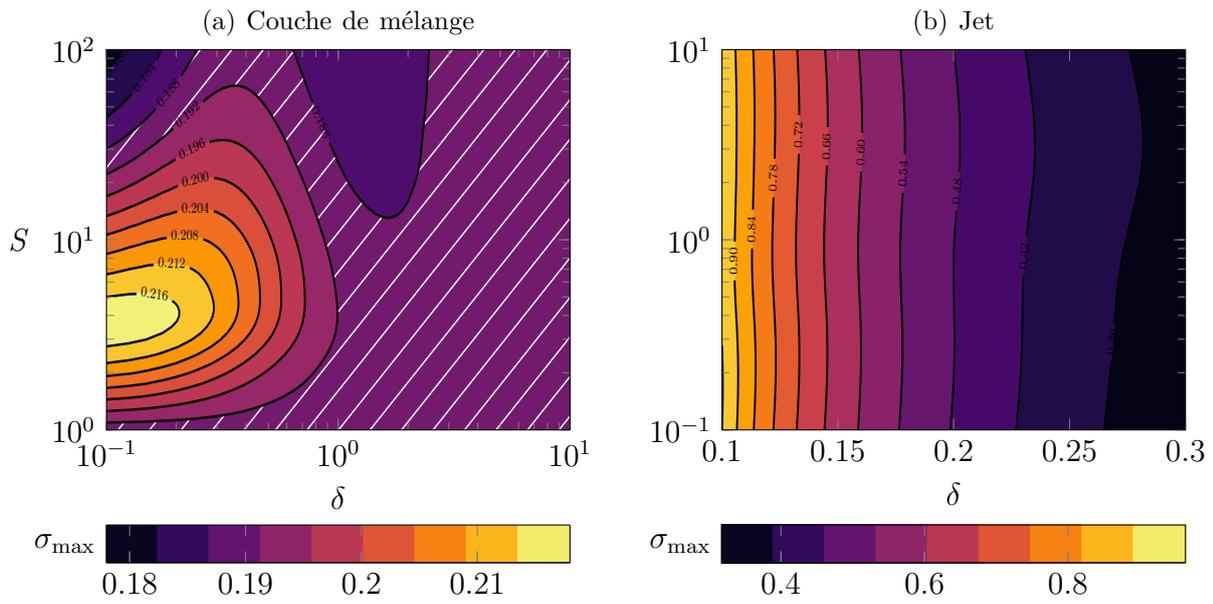


FIGURE 3.10 – Taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{\max}$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27). La zone hachurée correspond au cas homogène  $S = 1$ .

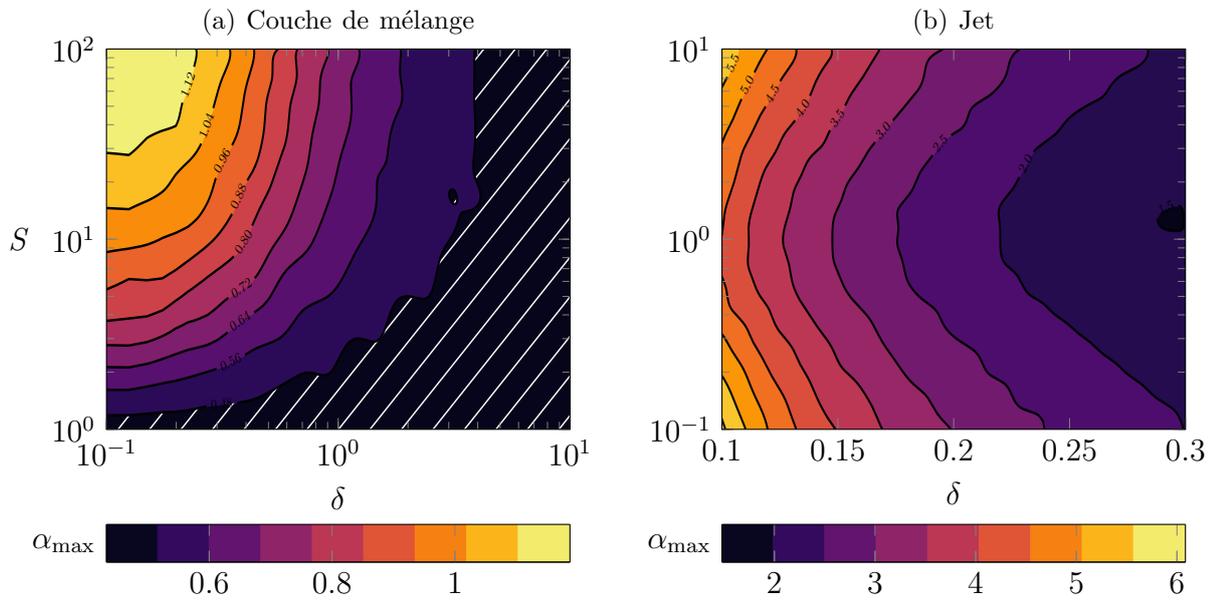


FIGURE 3.11 – Nombre d’onde du mode le plus instable  $\alpha_{\max}$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27). La zone hachurée correspond au cas homogène  $S = 1$ .

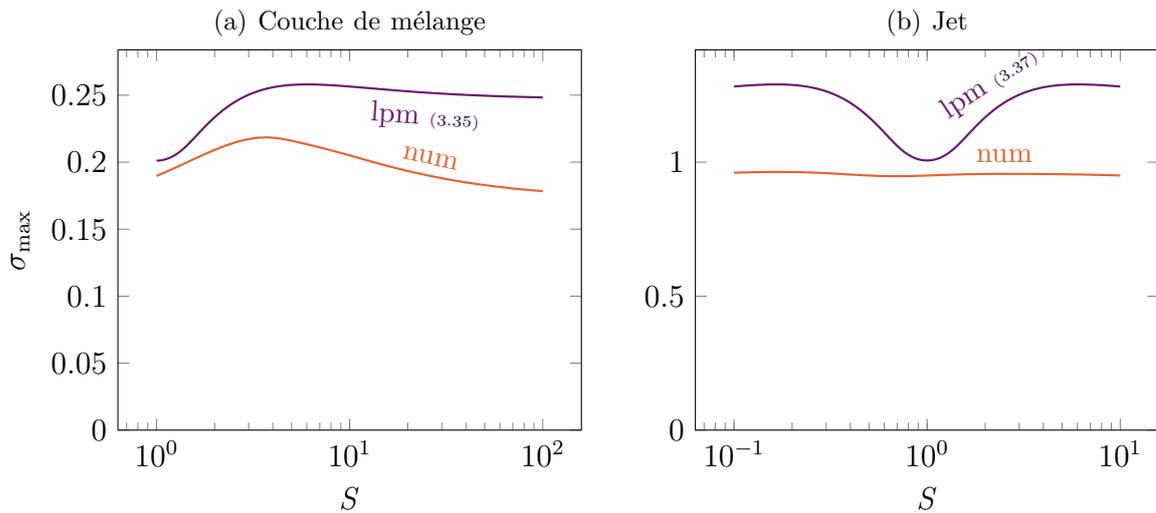


FIGURE 3.12 – Comparaison du taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{\max}$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres (num) pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) avec celui obtenu par les relations de dispersion analytiques des profils linéaires par morceau (lpm) ( $\delta = 0.1$ ).

qu'en s'éloignant d'une configuration homogène, le taux de croissance maximal se déplace vers de plus grandes valeurs de nombre d'ondes sans changer sa valeur. A contrario, l'épaisseur de couche  $\delta$  a une forte influence tant sur le taux de croissance maximal que sur la position  $\alpha_{\max}$  associée. Comme on pouvait s'y attendre, plus cette épaisseur est faible, plus le taux de croissance est fort. Finalement, comme évoqué précédemment,  $\alpha_{\max}$  varie inversement par rapport à  $\delta$ .

Le taux de croissance le plus instable est celui qui pilote a priori la dynamique instable de l'écoulement. Pour le caractériser, on cherche ici à confronter les résultats obtenus sur des profils linéaires par morceau avec les simulations numériques, particulièrement dans le cas  $\delta = 0.1$ , la limite basse accessible par nos simulations. Les figures 3.11 et 3.12 montrent que le mode le plus instable, obtenu par les relations de dispersions analytiques d'écoulement linéaire par morceau, constitue une bonne estimation du mode obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres. Pour la couche de mélange, le modèle linéaire par morceau donne une bonne estimation du taux de croissance ( $\sim 30\%$  d'écart), mais prédit surtout la tendance en fonction de  $S$ , avec notamment un maximum pour  $S = 4$ . Une observation similaire est faite sur le jet, pour lequel la valeur de  $\sigma_{\max}$  n'est pas atteinte, mais où la tendance est respectée. Ceci s'explique par le fait que les simulations sont faites en considérant un problème parfaitement continu alors que le modèle analytique prévoit une épaisseur nulle pour les gradients de masse volumique. Cependant, l'accord entre les deux modèles est rétabli en se plaçant dans la limite numérique de faible épaisseur de gradient de masse volumique, comme illustré sur la figure 3.14. De plus, dans la cas d'une couche de mélange le cas linéaire par morceau permet d'avoir une excellente estimation du  $\alpha_{\max}$ .

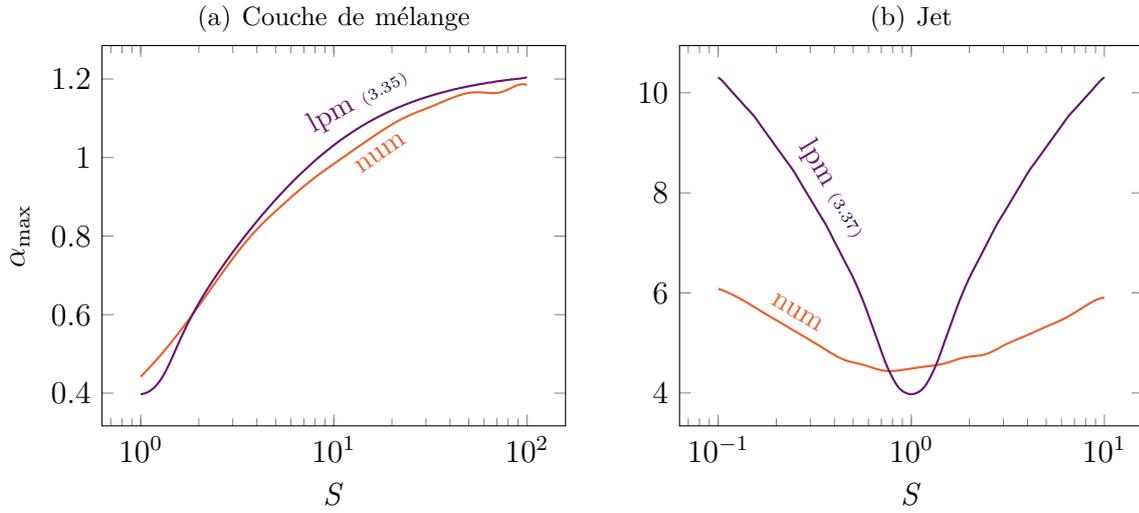


FIGURE 3.13 – Comparaison du nombre d’onde du mode le plus instable  $\alpha_{\max}$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres (num) pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) ( $\delta = 0.1$ ) avec celui obtenu par les relations de dispersion analytiques des profils linéaires par morceau (lpm).

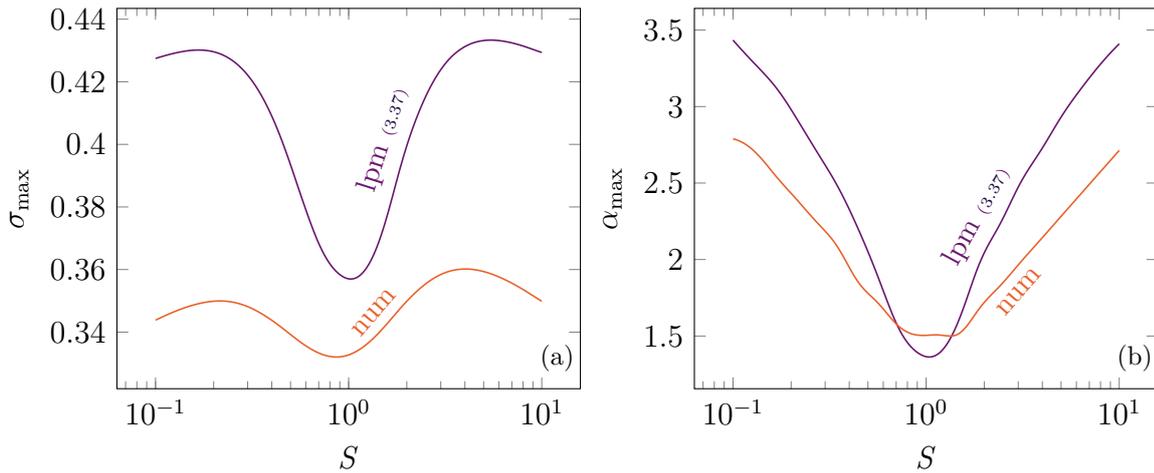


FIGURE 3.14 – Comparaison du mode le plus instable  $\sigma_{\max} = \sigma(\alpha_{\max})$  obtenu par la résolution numérique du problème aux valeurs propres d’un jet (2.27) pour  $\delta_u = 0.3$  et  $\delta_\rho = 0.1$  avec celui obtenu par la relation de dispersion analytique (3.37) d’un profil de vitesse linéaire par morceau pour  $\delta = 0.3$  (lpm).

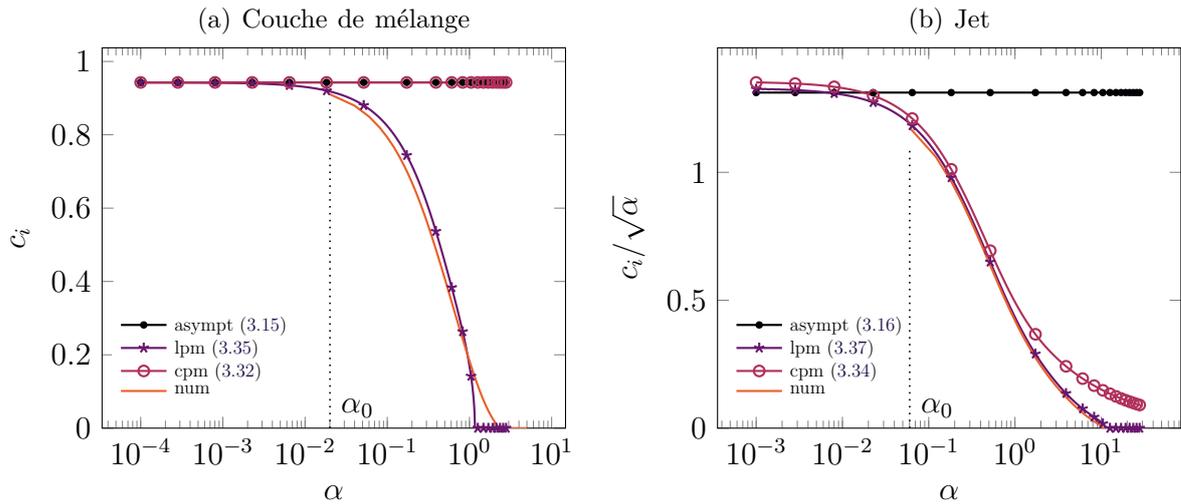


FIGURE 3.15 – Comparaison de la valeur de  $c_i = \text{Im}(c)$  entre les résultats obtenus par la résolution numérique du problème aux valeurs propres, les cas limites de profils constants et linéaires par morceau et l'étude asymptotique quand  $\alpha \rightarrow 0$ . ( $S = 2, \delta = 0.1$ )

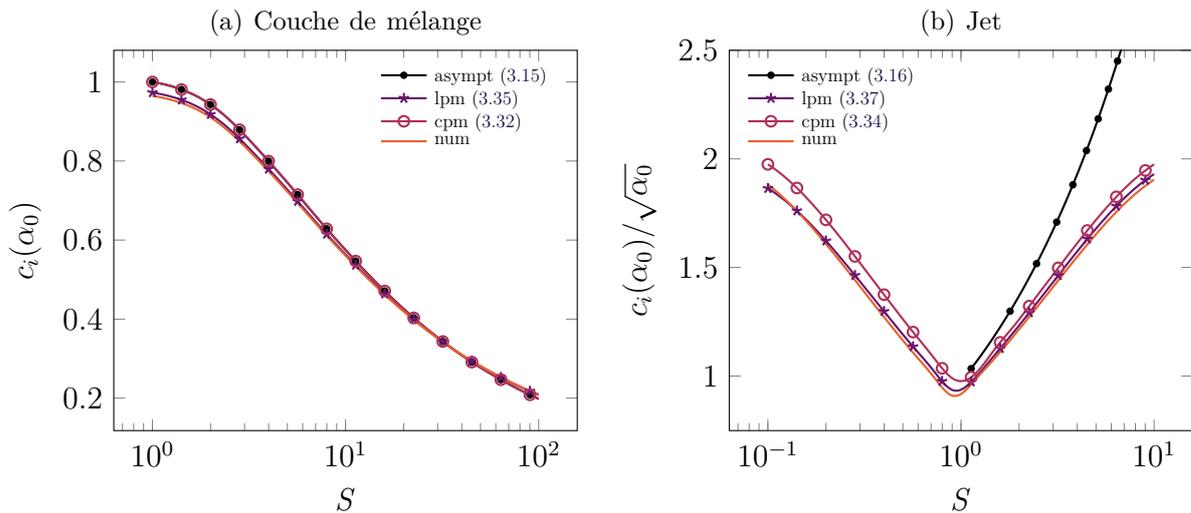


FIGURE 3.16 – Comparaison de  $c_i = \text{Im}(c)$  en  $\alpha_0 \ll 1$  indiqué sur la figure 3.15 en fonction de  $S$ , entre les résultats obtenus par la résolution numérique du problème aux valeurs propres (1.57), les cas limites de profils constants (3.32)-(3.34) et linéaires (3.35)-(3.37) par morceau et l'étude asymptotique quand  $\alpha \rightarrow 0$  (3.15)-(3.16). ( $\delta = 0.1$ )

### Observations et estimation du taux de croissance dans la limite des grandes longueurs d'ondes

On cherche ici à caractériser le comportement du taux de croissance, dans la limite où  $\alpha \rightarrow 0$ . Ceci est illustré sur la figure 3.15, comparant les modèles analytiques de la section précédente avec les simulations numériques. On peut voir que ces modèles reproduisent très fidèlement le comportement de l'instabilité pour de grandes longueurs d'onde et particulièrement le modèle linéaire par morceau. L'influence de  $S$  sur  $\sigma^* = \sigma(\alpha \rightarrow 0)$  est montrée sur la figure 3.16. On observe encore une fois que ces modèles donnent une

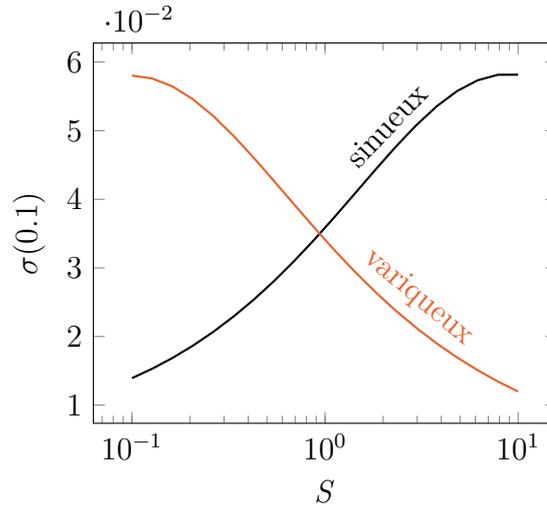


FIGURE 3.17 – Taux de croissance  $\sigma$  du mode variqueux et du mode sinueux en  $\alpha = 0.1$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres (1.57) pour un jet (2.27) avec  $\delta = 0.1$ .

bonne prédiction de  $\sigma^*$ , reproduisant la rapide décroissance lorsque le rapport de masse volumique s'éloigne de 1. Dans le cas d'un jet, on observe une décroissance de la pente lorsque  $S < 1$  et une croissance de la pente lorsque  $S > 1$ . Il est important de souligner ici que ce comportement est intrinsèquement lié à la parité du mode propre de perturbation : le mode sinueux prédomine lorsque  $S > 1$  alors que c'est le mode variqueux qui pilote l'instabilité lorsque  $S < 1$ . Ceci est clairement représenté sur la figure 3.17, qui illustre cette antisymétrie précédemment observée grâce au modèle linéaire par morceau.

### Observations et estimation du nombre d'onde de coupure $\alpha_c$

Le nombre d'onde de coupure  $\alpha_c$  est aussi fortement influencé par le rapport de masse volumique et l'épaisseur  $\delta$ . Ceci est représenté sur la figure 3.18 qui montre cette quantité en fonction de  $S$  et  $\delta$ . On observe qu'augmenter le rapport de masse volumique augmente la gamme instable en augmentant  $\alpha_c$ , alors que cette dernière valeur varie inversement par rapport à  $\delta$ . On constate encore une fois que  $\delta$  est le paramètre le plus influent. En effet, dans le cas d'une couche de mélange,  $\alpha_c$  devient indépendant de  $S$  lorsque  $\delta > 2$ .

On cherche alors à expliquer ce comportement par une nouvelle considération analytique. Pour cela on fait un développement asymptotique des équations dans la limite où  $c_i \rightarrow 0$ . On obtient une condition suffisante de stabilité.

#### Nombre d'onde de coupure $\alpha_c$ asymptotique

*L'écoulement est stable si*

$$\alpha \geq \alpha_c^\dagger = \sqrt{\max \left[ -\frac{1}{U_0'} \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{\rho_0} \right)' \right]} \quad (3.38)$$

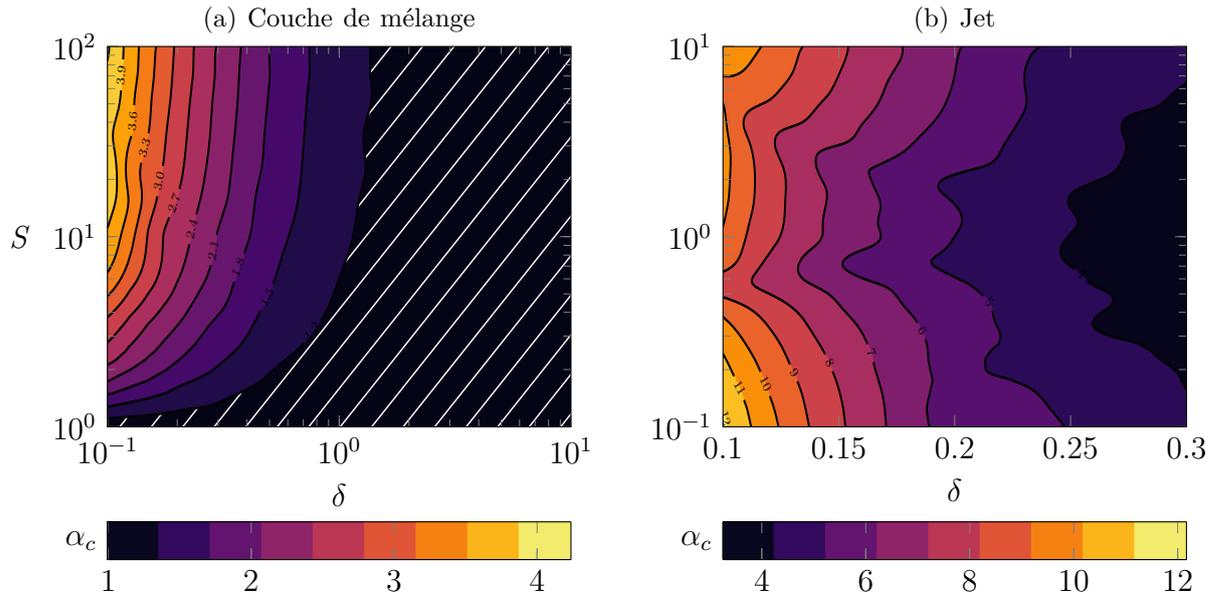


FIGURE 3.18 – Nombres d’onde de coupure  $\alpha_c$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres (1.57) pour une couche de mélange (2.24) et un jet (2.27) avec  $Re = Sc = \infty$ . La zone hachurée correspond au cas homogène  $S = 1$ .

### Démonstration

On suppose l’écoulement instable dans la limite  $c_i \rightarrow 0$ . Dans cette configuration on repart de l’équation de (3.11) que l’on écrit sous la forme

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 + \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{\Sigma} + \rho_0 \alpha^2 \right) |\hat{\psi}|^2 dz = 0, \quad (3.39)$$

avec, dans la limite  $c_i \rightarrow 0$ ,  $\Sigma = U_0 - c_r$ . En réarrangeant les termes de cette équation, on obtient :

$$\int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{\Sigma} + \rho_0 \alpha^2 \right) |\hat{\psi}|^2 dz = - \int_{z_1}^{z_2} \rho_0 |\hat{\psi}'|^2 dz < 0. \quad (3.40)$$

L’équation ci-dessus ne peut être satisfaite que s’il existe un point de l’écoulement tel que

$$\frac{(\rho_0 U_0')'}{\Sigma} + \rho_0 \alpha^2 < 0. \quad (3.41)$$

Cela implique qu’il existe au moins un point où

$$\alpha^2 < - \frac{(\rho_0 U_0')'}{\rho_0 \Sigma}. \quad (3.42)$$

Ce point n’étant pas connu, il est quand même possible de déterminer une condition nécessaire de stabilité. Pour cela, on se place dans le cas le plus défavorable, *i.e.* en prenant le minimum du terme de droite de l’inégalité. On obtient alors la valeur de  $\Sigma_m$

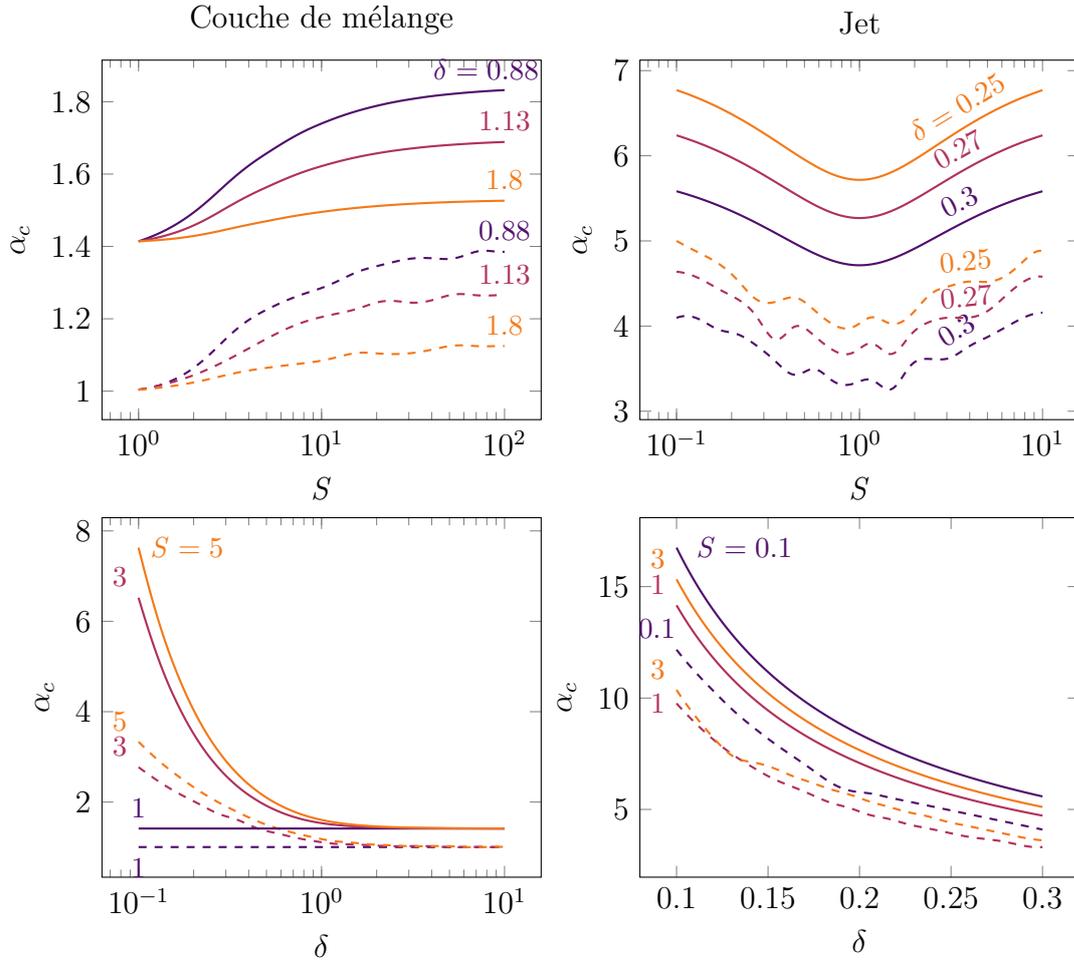


FIGURE 3.19 – Comparaison du nombre d’onde de coupure  $\alpha_c$  obtenu par résolution du problème aux valeurs propres (1.57) --- avec celui obtenu asymptotiquement  $\alpha_c^\ddagger$  (3.38) —

garantissant ce minimum :

$$\left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{\rho_0 \Sigma} \right)' = 0 \implies \Sigma_m = \frac{(\rho_0 U_0')' U_0'}{(\rho_0 U_0'')'' - (\rho_0 U_0')' \rho_0' / \rho_0}. \quad (3.43)$$

En introduisant  $\Sigma_m$  dans l’inéquation (3.41) on obtient :

$$\alpha^2 < -\frac{1}{U_0'} \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{\rho_0} \right)'. \quad (3.44)$$

La condition suffisante de stabilité est obtenue en majorant ce terme tel que :

$$\alpha \geq \alpha_c^\ddagger = \sqrt{\max \left[ -\frac{1}{U_0'} \left( \frac{(\rho_0 U_0')'}{\rho_0} \right)' \right]}. \quad \blacksquare$$

On remarque sur la figure 3.19 que le nombre d’onde de coupure asymptotique (3.38) majore systématiquement la valeur numérique (d’un facteur  $\sqrt{2}$  environ), mais donne la tendance en fonction de  $S$  et  $\delta$ .

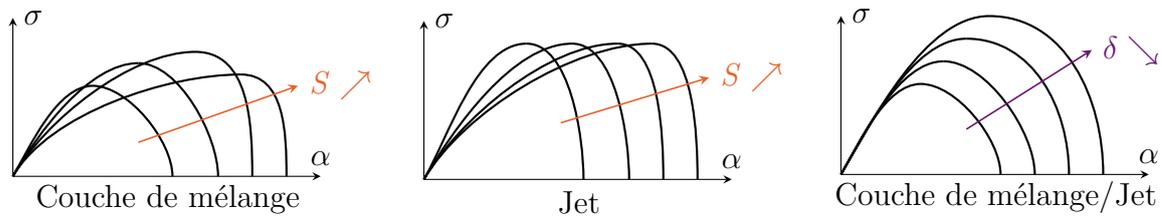


FIGURE 3.20 – Résumé de l'influence de la variation de masse ( $S$  et  $\delta$ ) sur les caractéristiques de la relation  $\sigma = \sigma(\alpha)$  pour des écoulements de couche de mélange et de jet.

### 3.2.3 Résumé

De cette étude, nous pouvons conclure que l'influence de la variation de masse sur la stabilité d'écoulement de couche de mélange et de jet est significative au travers des paramètres  $S$  et  $\delta$ . La figure 3.20 permet de résumer les observations faites dans les sections précédentes. De plus, les études asymptotiques et analytiques (profils constants et linéaires par morceau) permettent d'obtenir de très bonnes estimations des caractéristiques de l'instabilité et cela au travers de formulations simples au regard du problème aux valeurs propres à résoudre.

## 3.3 Influence de la viscosité et de la diffusion

Après avoir analysé l'influence du rapport de masse  $S$  et de l'épaisseur de couche  $\delta$ , on cherche ici à caractériser l'influence des termes visqueux et diffusifs au travers des nombres de Reynolds  $Re$  et de Schmidt  $Sc$ . L'influence de ces termes sur les caractéristiques de l'instabilité est montrée sur les figures 3.21 - 3.24 pour différentes valeurs de  $Re$  et de  $Sc$ . Celles-ci mettent en évidence, aussi bien pour la couche de mélange que pour le jet, le rôle purement stabilisant de ces termes sur la dynamique de l'instabilité. En effet, on observe que la diminution du nombre de Reynolds n'a pour effet que de diminuer le taux de croissance  $\sigma_{\max}$  de quelques pour cent, ainsi que de diminuer le mode  $\alpha_{\max}$  associé. On observe cependant, dans le cas d'un jet, qu'à  $Re = 100$  la symétrie  $S \rightarrow 1/S$  est brisée, avec une forte diminution du taux de croissance  $\sigma_{\max}$  pour  $S < 1$ . Aucune instabilité de source visqueuse n'est observée dans toute la gamme instable des paramètres étudiés. De plus, au-delà de  $Re \approx 1000$ , la considération non visqueuse devient une excellente approximation du taux de croissance, et ce, quel que soit le nombre de Schmidt  $1 \leq Sc \leq 100$ . Finalement, la variation du nombre de Schmidt n'a quasiment aucune influence sur l'instabilité, avec simplement un effet stabilisant supplémentaire pour les plus petites valeurs de Reynolds.

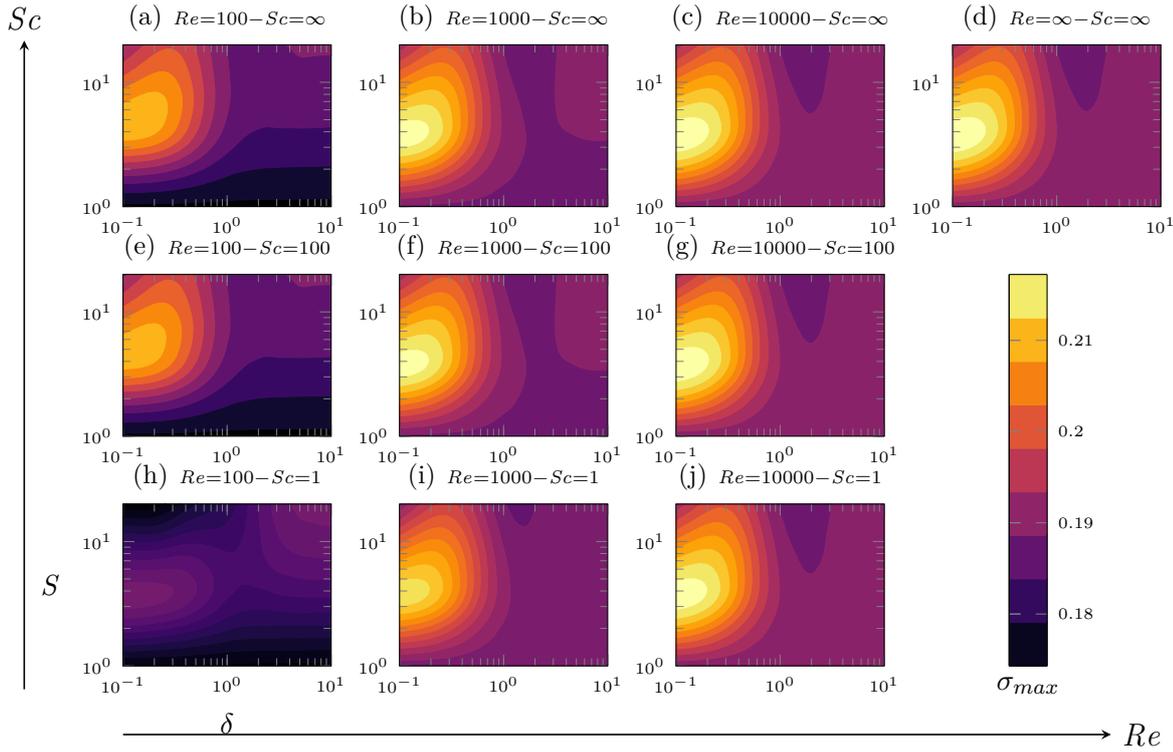


FIGURE 3.21 – Évolution du taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{\max}$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) en fonction du  $Re$  et du  $Sc$ .

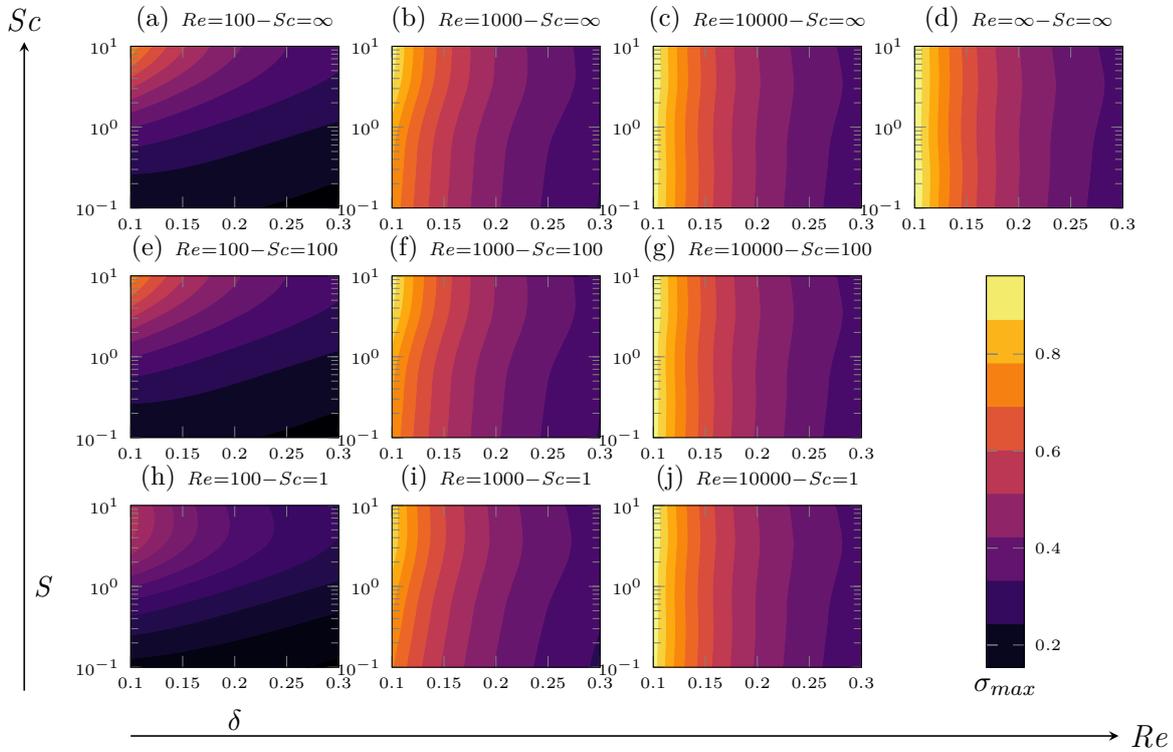


FIGURE 3.22 – Évolution du taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{\max}$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet (2.27) en fonction du  $Re$  et du  $Sc$ .

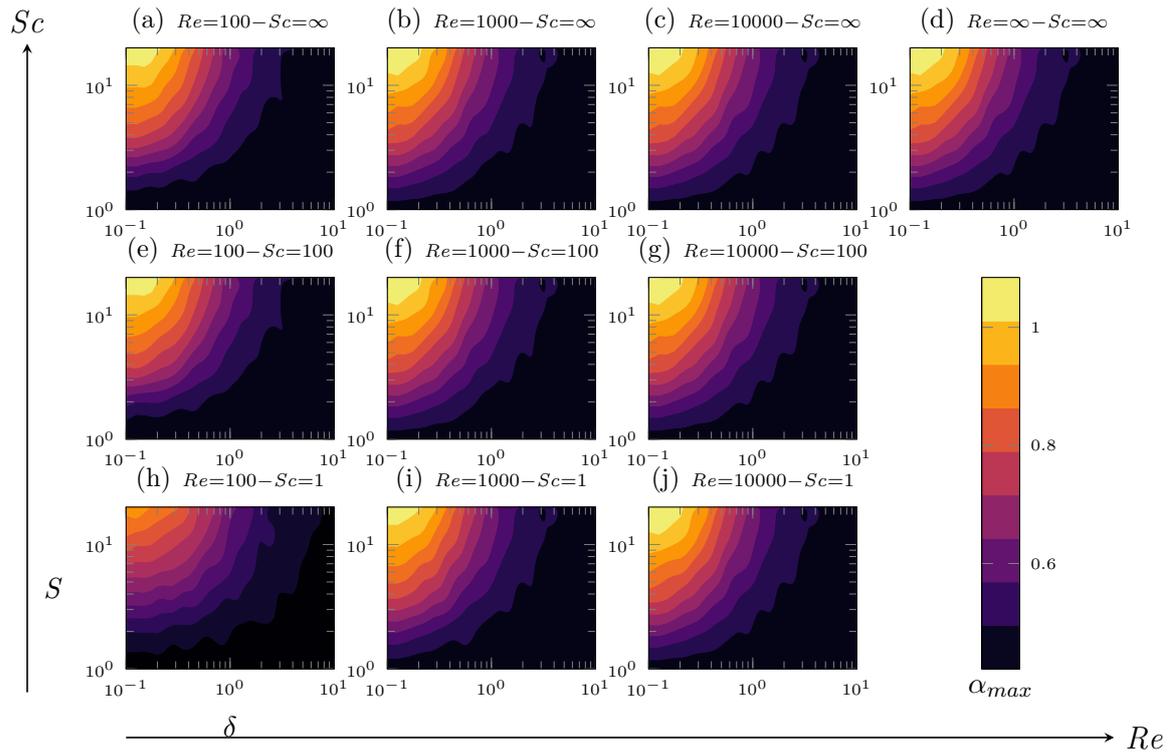


FIGURE 3.23 – Évolution du nombre d'onde du mode le plus instable  $\alpha_{\max}$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour une couche de mélange (2.24) en fonction du  $Re$  et du  $Sc$ .

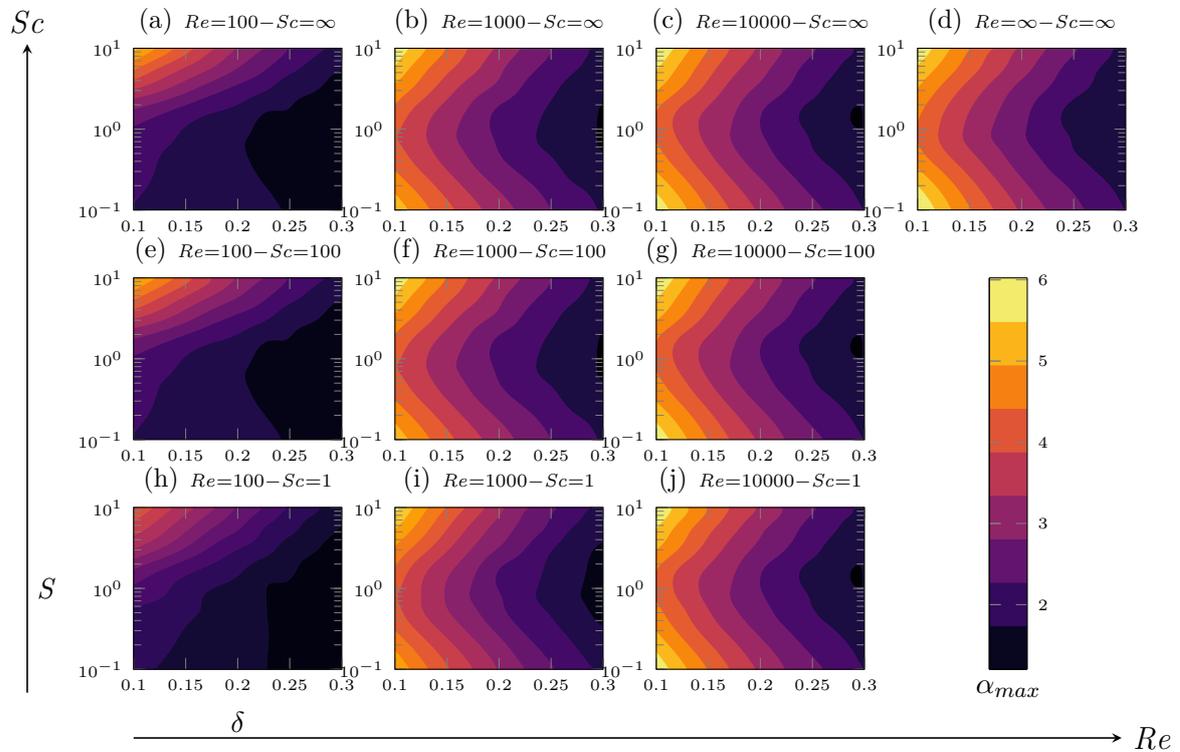


FIGURE 3.24 – Évolution du nombre d'onde du mode le plus instable  $\alpha_{\max}$  dans le plan  $(\delta, S)$  obtenu par résolution numérique du problème aux valeurs propres pour un jet (2.27) en fonction du  $Re$  et du  $Sc$ .



# Chapitre 4

## Étude des instabilités linéaires secondaires

Nous avons pu voir, dans le chapitre précédent, l'influence significative de la variation de masse volumique sur l'instabilité primaire d'un jet plan. Ainsi, son comportement au-delà de la zone de saturation non linéaire de ces instabilités primaires est a priori conditionné par cette variation de masse.

Il est bien connu qu'un jet plan à masse volumique constante est soumis à une instabilité secondaire transverse, *i.e.* dans la direction orthogonale au plan de symétrie du jet. On observe dans ce chapitre que les jets à masse volumique variable sont sujets à une instabilité secondaire, qui a lieu dans le plan de symétrie.

L'objectif de ce chapitre est alors de comprendre le phénomène responsable de ces instabilités secondaires. Dans un premier temps, on observe et analyse la configuration de l'écoulement où se localisent ces instabilités secondaires. Ceci permet d'identifier des modèles d'écoulements simplifiés représentatifs de ces zones instables. Sur ces écoulements, on réalise une étude de stabilité linéaire pour comprendre les mécanismes à l'origine de ces instabilités secondaires. Finalement, les résultats de stabilité obtenus par les modèles simplifiés sont confrontés à des simulations numériques directes.

### 4.1 Observations

Pour analyser le comportement du jet plan au-delà de sa croissance linéaire, on réalise des simulations numériques directes avec la méthode présentée au chapitre 2. Ces simulations sont réalisées pour  $Re = 10^3$ ,  $Sc = 10$  et  $S = 0.5$ , 2 et 4, en perturbant initialement le jet avec le mode instable  $\alpha = 0.5$ . Les isocontours de masse volumique sont représentés sur la figure 4.1. On peut observer que le mode instable croît puis atteint sa saturation non linéaire, avec la forme de zone d'enroulement, où la vorticité devient dominante. En observant attentivement ces zones plus tard dans la simulation (encadrés en rouge sur la figure 4.1), on observe l'apparition de nouvelles perturbations le long des filaments en spirale de masse volumique. En zoomant sur ces zones (figure 4.2), on constate que ces

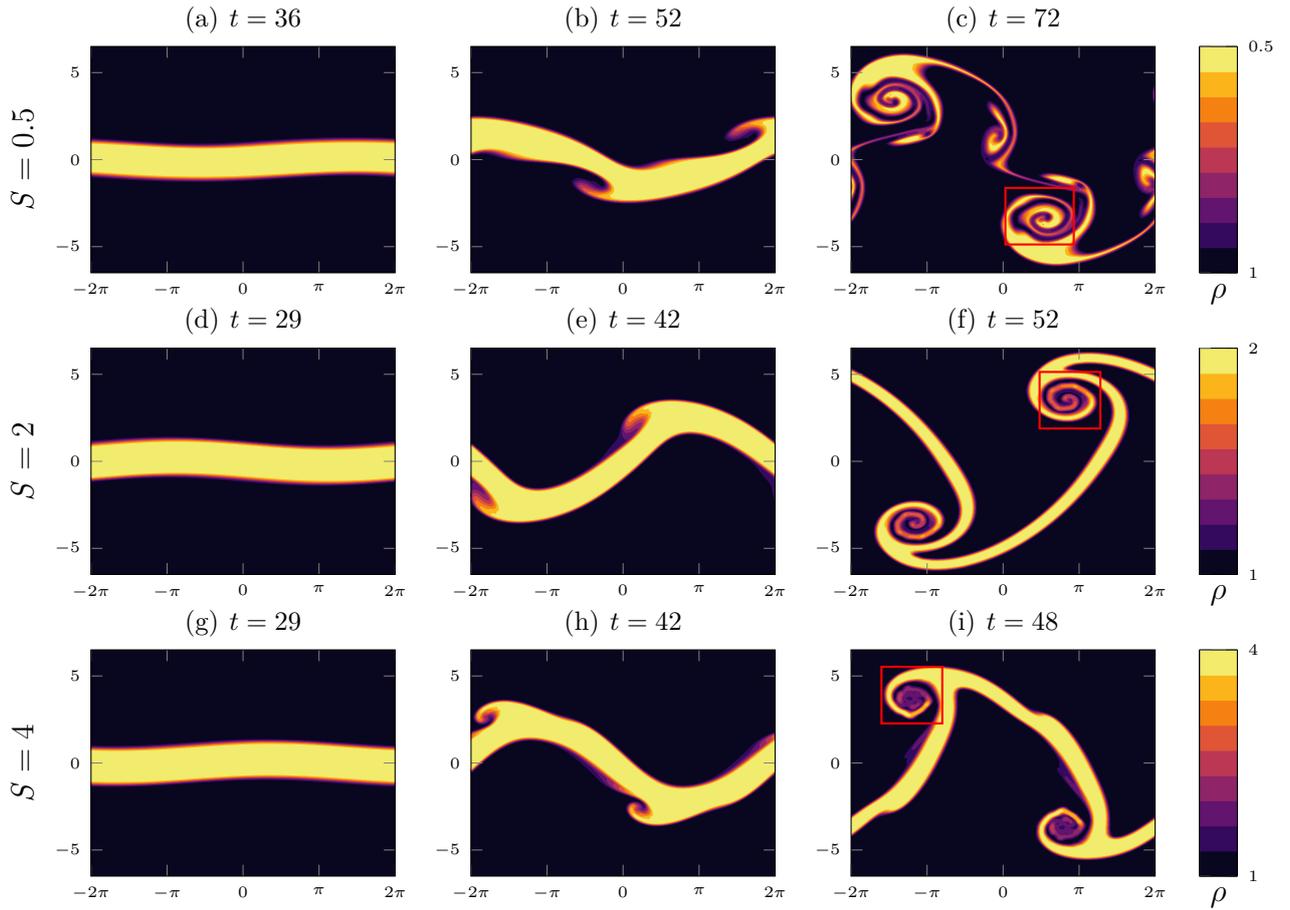


FIGURE 4.1 – Isocontours de masse volumique obtenus par simulation numérique directe d’un jet plan avec  $Re = 1000$  et  $Sc = 10$  à plusieurs instants. Les rectangles rouges indiquent les zones d’apparitions des instabilités secondaires.

perturbations ne se comportent pas de la même façon en fonction du rapport de masse  $S$ . En effet, la figure 4.2 permet d’observer très nettement que les perturbations se développent radialement sur le bord extérieur des zones d’enroulement dans le cas  $S > 1$  et sur le bord intérieur des zones d’enroulement dans le cas  $S < 1$ . De plus, on observe également que la longueur d’onde instable qui apparaît dans ces zones d’enroulements semble également être influencée par le rapport de masse.

Pour comprendre les mécanismes à l’origine de ces perturbations, on réalise une étude de stabilité linéaire sur des écoulements idéalisés modélisant ces zones d’instabilités.

## 4.2 Modèles simplifiés

Comme observé dans la section précédente, les perturbations apparaissent dans les zones de fort gradient de masse volumique dans les régions en rotation. On se propose alors ici d’étudier ce comportement instable au travers d’un modèle d’écoulement incompressible en rotation solide en présence d’un gradient radial de masse volumique.

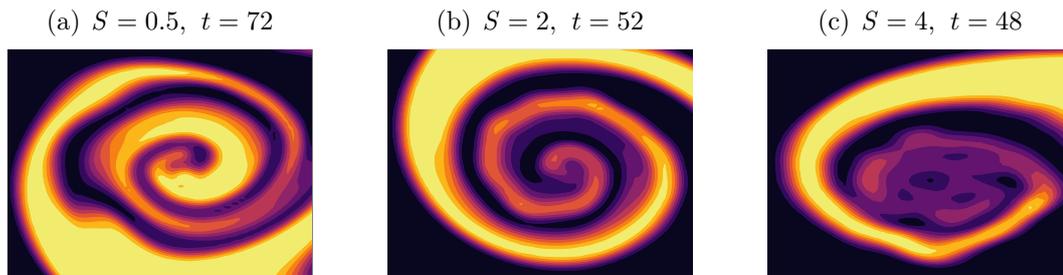


FIGURE 4.2 – Zoom sur les zones d’instabilités secondaires indiqué par les rectangles rouges sur la figure 4.1.

### 4.2.1 État de l’art des écoulements tournant

Il est bien connu que la rotation solide d’un fluide homogène est une configuration marginalement stable des équations d’Euler [52, 50] créant des ondes en rotation dans l’écoulement ; la viscosité n’ayant qu’une influence stabilisante. Par conséquent, ces ondes, dites inertielles, ont été observées expérimentalement uniquement lorsque la source d’excitation est maintenue [63]. Si l’on considère les perturbations tridimensionnelles d’une configuration de base axisymétrique bidimensionnelle, l’écoulement présente une instabilité si le discriminant de Rayleigh  $\Phi = 2V(dV/dr + V/r)/r$  ( $r$  étant la distance au centre de rotation et  $V(r)$  la vitesse azimutale) est négatif quelque part dans l’écoulement [56]. Si les variations de densité au sein du fluide sont prises en compte, un équivalent de la fréquence Brünt-Vaïssalla  $G$  est généralement défini par  $G^2 = -(\Omega^2 r/\rho)d\rho/dr$  ( $\rho$  étant la densité et  $\Omega = V/r$ ) permettant de caractériser l’écoulement. LEIBOVICH [55] et HOWARD [48] ont montré indépendamment que l’écoulement (incompressible et compressible) soumis à des perturbations axisymétriques est stable si  $G^2 < \Phi$ . En considérant des écoulements en rotation avec jet axial, LEIBOVICH et al. [56] ont obtenu théoriquement le spectre discret de l’instabilité près du point où la fréquence Doppler  $kW + m\Omega - \omega$  admet un extremum ( $\omega$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $W$  étant respectivement la pulsation, le nombre d’onde axial, le nombre d’onde azimutal et la vitesse axiale), tandis que ECKHOFF [26] a dérivé une condition suffisante pour l’instabilité en utilisant un développement WKB [7]. Ces résultats ont été étendus par LEBLANC et al. [54] en établissant un lien entre les fréquences propres de [26] et [56]. DI PIERRO et al. [21] ont mis en évidence une expression asymptotique de la fréquence propre associée à un écoulement rotatif avec jet axial, dans le cas de grands nombres d’ondes. Parallèlement, GANS [37] a montré que l’écoulement est instable par rapport à toute perturbation bidimensionnelle non axisymétrique si  $G^2$  est légèrement positif. Enfin, en considérant une configuration équivalente, SIPP et al. [77] ont montré par des expériences numériques que  $G^2 > 0$  est une condition nécessaire pour une telle instabilité. Les auteurs ont affirmé que le mécanisme sous-jacent était associé à une instabilité de Rayleigh–Taylor.

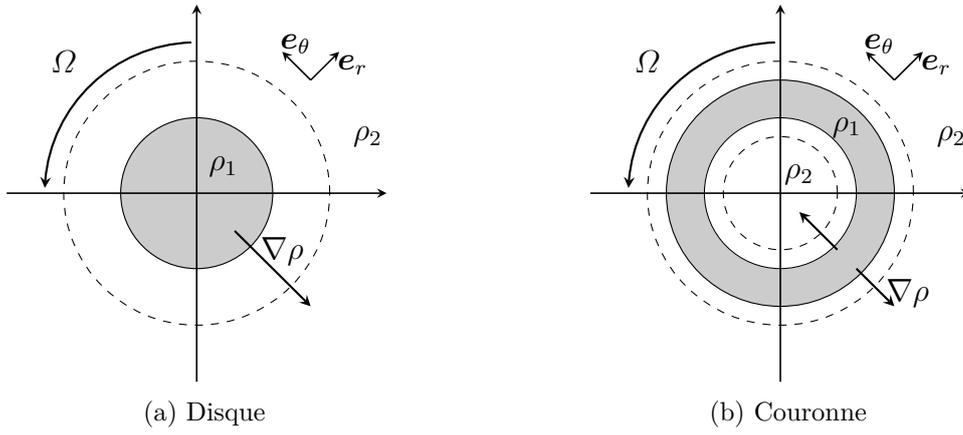


FIGURE 4.3 – Schémas des écoulements de base modèles

L'objectif de cette section est d'explorer numériquement et asymptotiquement les aspects de l'instabilité de Rayleigh–Taylor en rotation, pour ensuite les mettre en lien avec l'instabilité secondaire observée.

### 4.2.2 Modélisation

On se place dans la même configuration qu'énoncée dans la section 1.1.6, *i.e.* un écoulement incompressible à masse volumique variable pour lequel la diffusion de masse est négligée. Ainsi, ces écoulements sont régis par les équations (1.27) avec  $Sc = \infty$ .

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathbf{u} \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (4.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1c)$$

Pour comprendre l'origine de ces instabilités secondaires, on étudie, dans un système de coordonnées polaires, la stabilité linéaire<sup>1</sup> d'un écoulement de base stationnaire et axisymétrique en rotation solide de taux de rotation  $\Omega$  avec une variation de masse volumique radiale tel que schématisé sur la figure 4.3 :

$$\mathbf{U}_0(r) = \Omega r \mathbf{e}_\theta, \quad \rho_0(r), \quad P_0(r) \quad (4.2)$$

En posant,  $\rho_1 = \max(\rho_0(r))$  et  $\rho_2 = \rho(r \rightarrow \infty)$  le nombre de Reynolds est défini par  $Re = \rho_2 \Omega R^2 / \mu$  et le rapport de masse par  $S = \rho_1 / \rho_2$  avec  $R$  le rayon caractéristique de la zone de variation de masse volumique. D'après le caractère stationnaire et axisymétrique des profils de l'écoulement de base, les perturbations peuvent être cherchées sous la forme

1. Même démarche que celle détaillée dans la section 1.2.1 page 12

de modes normaux

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}, \tilde{p})^T = (\hat{\mathbf{u}}(r), \hat{\rho}(r), \hat{p}(r))^T \exp[i(m\theta - \omega t)], \quad (4.3)$$

avec  $m$  le nombre d'onde azimutal. Par conséquent, les équations de Navier–Stokes à densité variable (4.1) linéarisées autour de l'état de base (4.2) avec des perturbations (4.3) s'écrivent :

$$i\omega \hat{u}_r = i \left( m\Omega + i \frac{L}{Re \rho_0} \right) \hat{u}_r - 2 \left( \Omega - \frac{im}{Re \rho_0 r^2} \right) \hat{u}_\theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\hat{p}}{dr} - \frac{\Omega^2 r}{\rho_0} \hat{\rho}, \quad (4.4a)$$

$$i\omega \hat{u}_\theta = 2 \left( \Omega - \frac{im}{Re \rho_0 r^2} \right) \hat{u}_r + i \left( m\Omega + i \frac{L}{Re \rho_0} \right) \hat{u}_\theta + \frac{im}{r \rho_0} \hat{p}, \quad (4.4b)$$

$$i\omega \hat{\rho} = im\Omega \hat{\rho} + u \frac{d\rho_0}{dr}, \quad (4.4c)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{dr \hat{u}_r}{dr} + \frac{im}{r} \hat{u}_\theta, \quad (4.4d)$$

avec  $L \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2+1}{r^2}$ . Pour compléter ce système d'équations, les conditions aux limites d'atténuation des perturbations en  $r = \infty$  sont prises en compte :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{\rho}, \hat{p} = 0. \quad (4.5)$$

Par une démarche équivalente à celle présentée dans la section 1.2.2, le terme de pression lié à la contrainte d'incompressibilité est éliminé des équations (4.4) en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement et en utilisant l'inverse de l'opérateur elliptique associé à cette équation :

$$H = \left[ \frac{m^2}{r^2 \rho_0} - \left( \frac{d}{dz} + \frac{1}{r} \right) \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \right]^{-1}. \quad (4.6)$$

Ainsi le système algèbro-différentiel s'écrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres classique :

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{\rho} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{\rho} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} im\Omega - \frac{1}{Re \rho_0} L + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dr} H C_u & -2 \left( \Omega - \frac{im}{Re \rho_0 r^2} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dr} H C_v & \frac{-\Omega^2 r}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dr} H C_\rho \\ 2 \left( \Omega - \frac{im}{Re \rho_0 r^2} \right) + \frac{im}{\rho_0 r} H C_u & im\Omega - \frac{1}{Re \rho_0} L + \frac{im}{\rho_0 r} H C_v & \frac{im}{\rho_0 r} H C_\rho \\ \frac{d\rho_0}{dr} & 0 & im\Omega \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} C_u &= \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \left(im\Omega - \frac{1}{Re\rho_0} L\right) + 2\frac{im}{r} \left(\Omega - \frac{im}{r^2 Re\rho_0}\right) \\ C_v &= -2\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \left(\Omega - \frac{im}{r^2 Re\rho_0}\right) + \frac{im}{r} \left(im\Omega - \frac{1}{Re\rho_0} L\right) \\ C_\rho &= -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \frac{\Omega^2 r}{\rho_0} \end{cases}$$

Numériquement, ce problème aux valeurs propres est résolu selon la même démarche que décrit dans la section 2.2, *i.e.* en utilisant une décomposition spectrale Chebyshev collocation pour les dérivées radiales. Les points de Gauss-Lobato  $\zeta \in [-1, 1]$  permettent de construire l'espace  $r \in [-\infty, +\infty]$  par la transformation  $r = \tan(\pi\zeta/2)$ . Il faut noter que l'espace physique  $r \in [0, +\infty]$  est numériquement doublé, ce qui permet de ne pas imposer de condition aux limites en  $r = 0$ . De plus, le point singulier  $r = 0$  est évité en prenant un nombre pair de points de collocation.

### 4.2.3 Disque en rotation

Le premier modèle idéal considéré est un écoulement en rotation solide d'un disque de masse volumique représenté schématiquement sur la figure 4.3a. La validation numérique de l'ensemble des résultats énoncé dans cette section est faite avec un profil de masse volumique de la forme

$$\rho_0(r) = 1 + \frac{s-1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{r-1}{e}\right)\right), \quad (4.8)$$

qui modélise le noyau lourd (ou léger) d'un tourbillon avec  $e$  la longueur de variation du profil de masse volumique, ici choisi comme  $e = 0.2$ .

#### Approche non visqueuse

Dans une configuration non visqueuse ( $Re = \infty$ ) et après quelques manipulations algébriques, le système d'équation (4.1) peut être réécrit sous une seule équation avec la variable  $\phi = r\hat{u}_r$  :

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{d\rho_0 r}{dr} \frac{d\phi}{dr} - \left[ \frac{2m\Omega}{r\rho_0\Sigma} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{m^2}{r^2} \left(1 + \frac{G^2}{\Sigma^2}\right) \right] \phi = 0, \quad (4.9)$$

avec

$$G^2 = -\frac{\Omega^2 r}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr}, \quad \Sigma = m\Omega - \omega. \quad (4.10)$$

En introduisant le changement de variable  $\psi = \sqrt{r\rho_0}\phi$ , l'équation (4.9) s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left[ \zeta - \frac{2m\Omega}{r\rho_0\Sigma} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \left(1 + \frac{G^2}{\Sigma^2}\right) \right] \psi = 0, \quad (4.11)$$

avec

$$\zeta = \left[ \frac{1}{2\rho_0 r} \frac{d\rho_0 r}{dr} \right]^2 - \frac{1}{2\rho_0 r} \frac{d^2\rho_0 r}{dr^2}. \quad (4.12)$$

On suppose que la dynamique instable se produit à la position  $r^*$  de telle sorte que  $G^2(r^*)$  admet un extremum local. Le développement de l'équation (4.11) au voisinage de  $r^*$ , au second ordre en  $\tilde{r} = r - r^*$  s'écrit en introduisant la nouvelle fonction  $\tilde{\psi}(\tilde{r}) = \psi(r)$

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{d\tilde{r}^2} + \Theta(\tilde{r})\tilde{\psi} = 0, \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta(\tilde{r}) &= \zeta(r^*) - \frac{\chi(r^*)}{r^{*2}} + \left( \frac{d\zeta}{dr}(r^*) + \frac{2\chi(r^*)}{r^{*3}} \right) \tilde{r} + \left( \frac{d^2\zeta}{dr^2}(r^*) - \frac{1}{r^{*2}} \frac{d^2\chi}{dr^2}(r^*) - \frac{6\chi(r^*)}{r^{*3}} \right) \frac{\tilde{r}^2}{2}, \\ \chi(r) &= 2m \frac{G^2}{\Omega\Sigma} + m^2 \left( 1 + \frac{G^2}{\Sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

L'équation (4.13) est une équation de la forme parabolique cylindrique [1]. En supposant que  $\psi$  s'annule loin de  $r^*$ , l'équation (4.13) admet alors des solutions sous la forme de polynôme Weber-Hermite  $\tilde{\psi}(\tilde{r}) = H_n(\alpha\tilde{r} + \beta)$  avec

$$\alpha = \sqrt{2} \left( 3 \frac{\chi(r^*)}{r^{*4}} + \frac{1}{2r^{*2}} \frac{d^2\chi}{dr^2}(r^*) - \frac{1}{2r^*} \frac{d^2\zeta}{dr^2}(r^*) \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{2}{\alpha^3} \left( \frac{d\zeta}{dr}(r^*) + \frac{2\chi(r^*)}{r^{*3}} \right), \quad (4.15)$$

si et seulement si

$$-\frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\chi(r^*)}{r^{*2}} - \zeta(r^*) + \frac{\left( \frac{d\zeta}{dr}(r^*) + \frac{2\chi(r^*)}{r^{*3}} \right)^2}{2 \frac{d^2\zeta}{dr^2}(r^*) - 2 \frac{1}{r^{*2}} \frac{d^2\chi}{dr^2}(r^*) - \frac{12\chi(r^*)}{r^{*3}}} \right) = n + \frac{1}{2}, \quad (4.16)$$

où  $n$  est un entier. Cette relation de dispersion non visqueuse correspond au cas étudié numériquement par [77] pour de faibles largeurs de distribution de densité (défini par «  $b$  » dans leur article). En guise de validation, dans la limite des grands nombres d'ondes azimuthaux, il est possible d'obtenir le taux de croissance asymptotique de la relation de dispersion (4.16) sous la forme

$$\omega_n = m\Omega + \frac{G^2}{m\Omega} + i \left( \sqrt{G^2(r^*)} + \frac{n + \frac{1}{2}}{m} \sqrt{-\frac{r^{*2}}{2} \frac{d^2G^2}{dr^2}(r^*)} \right). \quad (4.17)$$

On constate que la partie imaginaire de cette relation est identique à celle obtenue dans [21], alors que la correction n'intervient que sur la fréquence réelle. L'équation (4.16) n'ayant pas de solution explicite, elle est résolue numériquement en utilisant l'algorithme de recherche des racines de Muller [53].

La figure 4.4 permet de constater qu'il y a un excellent accord entre les taux de croissance obtenus par le problème aux valeurs propres (4.7), la relation (4.16) et l'expression asymptotique (4.17). Il est important de noter que l'erreur relative entre les taux de croissance obtenus par la relation asymptotique (4.17) et le problème aux valeurs propres (4.16) est inférieure à 10% pour des valeurs de  $m > 6$ .

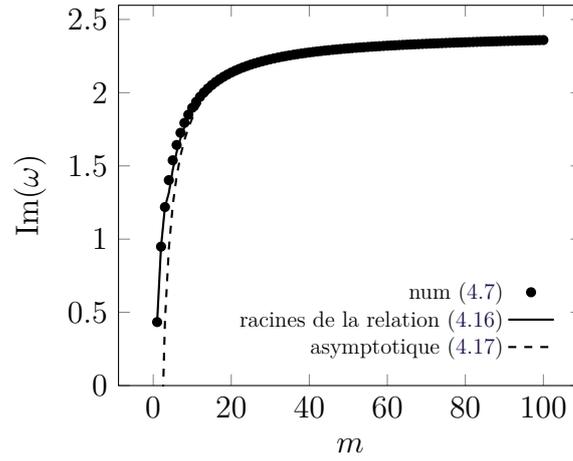


FIGURE 4.4 – Taux de croissance non visqueux  $Im(\omega)$  en fonction du nombre d'onde azimutal  $m$  pour un rapport de masse volumique  $S = 2$  et une épaisseur  $e = 0.2$ .

### Instabilité visqueuse asymptotique

On considère maintenant le cas visqueux dans la limite des grands nombres de Reynolds ainsi que des grands nombres d'ondes tels que  $1 \ll m^2 \ll Re$ . Dans cette limite, le terme  $m^2 Re^{-1}$  est donc un petit paramètre et le terme dominant de l'opérateur visqueux se comporte au premier ordre comme

$$\frac{1}{Re} L \approx \frac{-m^2}{r^2 Re}. \quad (4.18)$$

Par conséquent, le système d'équations (4.1) peut être réécrit sous la forme d'une équation différentielle avec la variable  $\phi = ru$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \left[ \frac{1}{\rho_0 r} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{1}{\Sigma + i\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{dr} \right] \frac{d\phi}{dr} \\ - \left[ \frac{2m(\Omega - i\mathcal{M})}{r\rho_0(\Sigma + i\mathcal{N})} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{m^2}{r^2} \left( 1 + \frac{G^2}{\Sigma(\Sigma + i\mathcal{N})} \right) - \frac{2im}{r} \frac{1}{\Sigma + i\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{M}}{dr} \right] \phi = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

avec

$$\mathcal{N} = \frac{-m^2}{r^2 Re}, \quad \mathcal{M} = \frac{m}{r^2 Re}. \quad (4.20)$$

Par une démarche similaire à la section précédente, on obtient à l'ordre dominant en  $m$  et  $m^2/Re$  :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \left[ \frac{2mG^2}{r^2\Omega(\Sigma + i\mathcal{N})} + \frac{m^2}{r^2} \left( 1 + \frac{G^2}{\Sigma(\Sigma + i\mathcal{N})} \right) \right] \psi = 0, \quad (4.21)$$

avec  $\psi = \sqrt{\rho_0 r (\Sigma + i\mathcal{N})} \phi$ . Cette équation est également une équation cylindrique parabolique, dont les solutions sont des polynômes de Weber-Hermite, associés à la relation

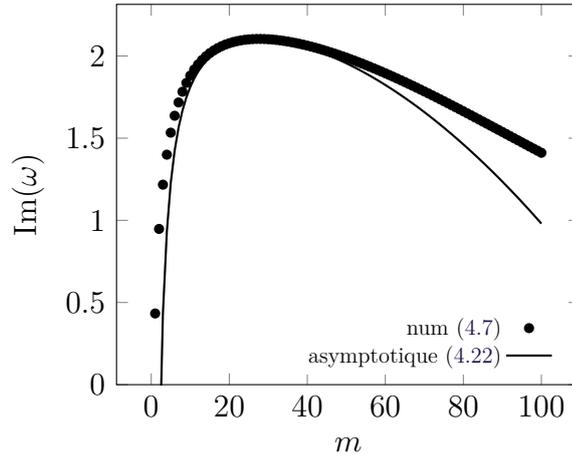


FIGURE 4.5 – Taux de croissance visqueux  $\text{Im}(\omega)$  en fonction du nombre d'onde azimutal  $m$  pour  $Re = 10^3$ ,  $S = 10$  et  $e = 0.2$ .

de dispersion donnée par

$$\omega_n = m\Omega + \frac{G^2(r^*)}{\Omega m} + i \left( \sqrt{G^2(r^*)} - \frac{n + 1/2}{m} \sqrt{-\frac{r^{*2}}{2} \frac{d^2 G^2}{dr^2}(r^*)} - \frac{m^2}{2 Re \rho_0(r^*) r^{*2}} \right). \quad (4.22)$$

Cette relation de dispersion asymptotique est très similaire à celle obtenue dans le cas non visqueux ( $\mu = 0$ ) en faisant apparaître un terme de correction visqueux. De plus, on constate également que la viscosité a un effet purement stabilisant. En effet, le taux de croissance de l'instabilité visqueuse se comporte comme  $-m^2/Re < 0$ . La figure 4.5 compare les taux de croissance obtenus par le problème aux valeurs propres (4.7) avec ceux obtenus par la relation asymptotique (4.22). On observe que la relation asymptotique (4.22) donne une bonne estimation du taux de croissance lorsque  $12 \leq m \leq 50$  (l'erreur relative est inférieure à 2.5%), *i.e.* dans la limite des grands nombres d'onde  $m$  et  $m^2 Re^{-1} \lesssim O(1)$ . De plus, on constate que le maximum des taux de croissance est parfaitement capturé par l'approche asymptotique (voir figure 4.5). Par conséquent, le mode le plus instable ainsi que le nombre d'onde azimutal correspondant sont donnés par

$$\omega_{n,\max} = m\Omega + \frac{G^2(r^*)}{\Omega m} + i\sqrt{G^2} - \frac{3i}{2} \frac{\left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{-\frac{r^{*2}}{2} \frac{d^2 G^2}{dr^2}(r^*)} \right)^{\frac{2}{3}}}{(r^{*2} \rho_0(r^*) Re)^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.23a)$$

$$m_{\max} = \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) Re \rho_0(r^*) r^{*2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( -\frac{r^{*2}}{2} \frac{d^2 G^2}{dr^2}(r^*) \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.23b)$$

La figure 4.6 montre une comparaison des résultats obtenus par le problème aux valeurs propres (4.7) et l'approximation asymptotique (4.23a) et (4.23b) pour plusieurs valeurs de rapport de masse  $S$  et de nombre de Reynolds  $Re$ . On observe un excellent accord aussi bien pour le mode le plus instable  $\omega_{n,\max}$  que pour le nombre d'onde azimutal associé  $m_{\max}$ .

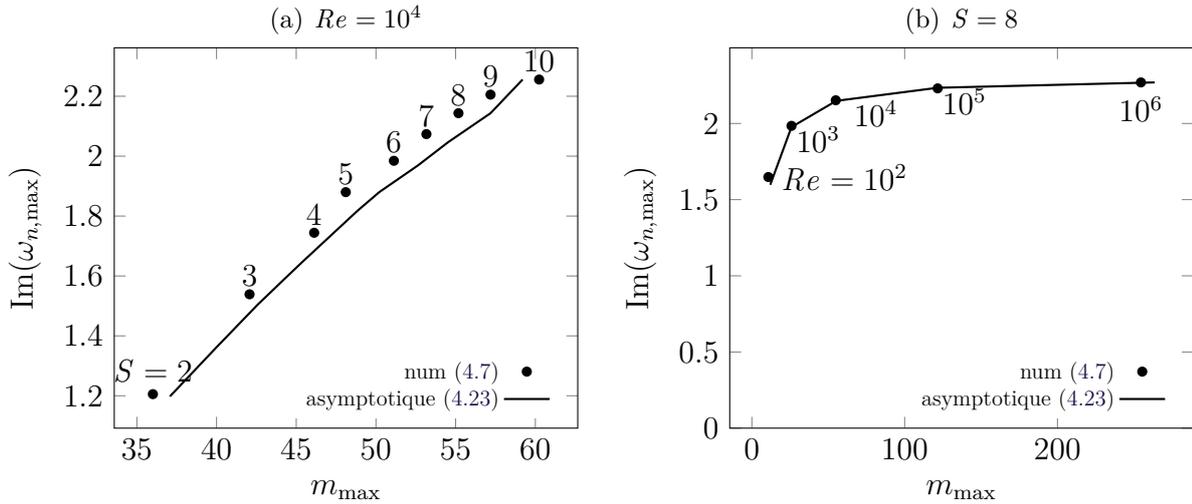


FIGURE 4.6 – Taux de croissance  $\text{Im}(\omega_{n,\max})$  en fonction du nombre d'onde  $m_{\max}$  du mode le plus instable pour  $e = 0.2$ .

### Instabilité non linéaire

Pour analyser les instabilités dans la phase non linéaire, les équations (4.1) sont résolues numériquement par la méthode présentée dans la section 2.3. La discrétisation spatiale bidimensionnelle est faite par une méthode pseudo-spectrale sur les modes de Fourier avec des conditions aux limites périodiques. L'intégration temporelle est réalisée par un schéma du second ordre de Runge-Kutta et la pression est obtenue par une méthode du point fixe pour assurer l'incompressibilité. Le pas de temps est choisi à  $10^{-2}$  afin de satisfaire le critère de stabilité. Les calculs sont réalisés dans un domaine carré de taille  $6\pi \times 6\pi$  avec  $512 \times 512$  points de maillage. L'écoulement est initialisé avec un profil de masse volumique (4.8) et un profil de vitesse de type Lamb-Oseen vortex  $\Delta(U_\theta \mathbf{e}_\theta) = -\nabla \times (\Omega_{LO}(r) \mathbf{e}_z)$  avec la vorticité  $\Omega_{LO}(r) = \Omega \exp(-r^2/a^2)$  et  $a = 5$ . Ce champ de vitesse est alors compatible avec des conditions aux limites périodiques et permet de mimer un écoulement en rotation solide dans la zone des gradients de masse volumique. Un tracé de la distribution initiale est présenté sur la figure 4.7a. L'écoulement est perturbé initialement par un bruit aléatoire d'amplitude  $O(10^{-3})$ .

L'amplitude de perturbation  $A_m$  de chaque mode  $m$  est extraite de la décomposition de Fourier  $\hat{\rho}_m(r, t)$  du champ de masse volumique  $\rho(r, \theta, t)$  interpolé sur la grille cartésienne  $(x, y)$  et défini par

$$A_m(t) = \sqrt{\int_0^R |\hat{\rho}_m(r, t)|^2 r dr}. \quad (4.24)$$

La figure 4.7 montre les isocontours de masse volumique au temps  $t \approx 5, 6$  et  $7$  pour  $Re = 1000$  et  $S = 2$ . Au temps court, de nombreux modes azimutaux se développent (figure 4.7b) tandis que le mode azimutal  $m \approx 17$  émerge un peu plus tard (figure 4.7c). Ce dernier mode est le plus instable prédit par la théorie asymptotique  $m_{\max}$  (4.23b). La figure 4.8 montre l'amplitude du mode  $m = 17$  en fonction du temps et la prédiction

asymptotique  $\exp(\omega_{n,max}t)$  (4.23a, 4.23b);  $\omega_{n,max} \approx 1.04$  avec les paramètres considérés. Après un temps transitoire, on constate que la croissance exponentielle est bien représentée par la théorie asymptotique. Pour  $t \approx 7$ , la figure 4.7d montre que l'instabilité atteint un stade non linéaire où les interactions modales ne peuvent plus être négligées.

### Discussion sur la physique de l'écoulement

Dans le cas non visqueux, le problème est régi par une équation différentielle du second ordre. On constate que la dynamique instable est caractérisée par un terme équivalent à la fréquence de Brünt-Vaïssalla  $G(r)$  (avec  $G^2(r) = (-\Omega^2 r / \rho_0) d\rho_0/dr$ ) et que les perturbations atteignent un maximum proche de l'endroit où  $G^2(r)$  admet un extremum. La relation de dispersion analytique obtenue dans la limite des grands nombres d'onde permet de remarquer qu'une instabilité peut survenir si et seulement si  $G^2 > 0$  (*i.e.* si  $d\rho_0/dr < 0$ ). On en déduit que l'instabilité est déclenchée lorsque l'accélération centrifuge locale  $\mathbf{a}_c = \Omega^2 r \mathbf{e}_r$  et le gradient de densité réduit  $\nabla \rho_0 / \rho$  sont de directions opposées. Ainsi, l'instabilité résultante est une instabilité cylindrique de Rayleigh–Taylor, le taux de croissance de la perturbation étant proportionnel au maximum de  $\sqrt{-\mathbf{a}_c \cdot \nabla \rho_0 / \rho_0}$ , très similaire au taux de croissance classique de Rayleigh–Taylor plan  $\sqrt{gk At}$  ( $g$ ,  $k$  et  $At$  étant respectivement l'accélération gravitationnelle, le nombre d'onde et le nombre d'Atwood). De plus, en comparant l'expression des fréquences propres pour de grandes valeurs de nombres d'onde  $m$  au résultat asymptotique de [21] obtenus en supposant des profils de vitesse faiblement variables, il apparaît que les taux de croissance de l'instabilité sont identiques jusqu'à l'ordre  $1/m$ , la seule différence est observée pour la partie réelle de la fréquence d'ordre  $1/m$ . Dans une configuration non visqueuse, tous les modes sont instables et le taux de croissance croît de façon monotone en fonction du nombre d'onde azimutal avec une valeur asymptotique  $\sqrt{G^2}$  pour  $m \gg 1$ . Ainsi, aucun mode n'est sélectionné. Comme la limite non visqueuse ne permet pas d'observer de sélection de mode, on considère le cas visqueux dans la limite  $1 \ll m \ll Re$ . Comme indiqué précédemment, l'équation régissant cette dynamique instable est très similaire à celle obtenue dans le cas non visqueux, avec la viscosité jouant un rôle purement stabilisant. En effet, la partie réelle de la fréquence n'est pas affectée par la traînée visqueuse tandis que le taux de croissance varie comme  $-m^2/(\rho_0 Re)$ . Encore une fois, ceci est très similaire à la correction visqueuse de Rayleigh–Taylor plan, qui est proportionnelle à  $-k^2/(\rho_m Re)$  ( $\rho_m$  étant une densité moyenne). L'instabilité qui en résulte présente alors des mécanismes compétitifs où l'instabilité non visqueuse de Rayleigh–Taylor est amortie par des effets visqueux. Le mode le plus instable en géométrie cylindrique a un taux de croissance variant comme  $Re^{-1/3}$  tandis que le nombre d'onde azimutal correspondant croît comme  $Re^{1/3}$ . Cette dernière loi d'échelle est également très similaire à l'instabilité de Rayleigh–Taylor plan pour laquelle le taux de croissance varie comme  $Re^{-1/3}$  et le nombre d'onde longitudinal correspondant croît comme  $Re^{2/3}$ . Il apparaît alors très clairement que le mécanisme mis en jeu est une instabilité de Rayleigh–Taylor visqueuse.

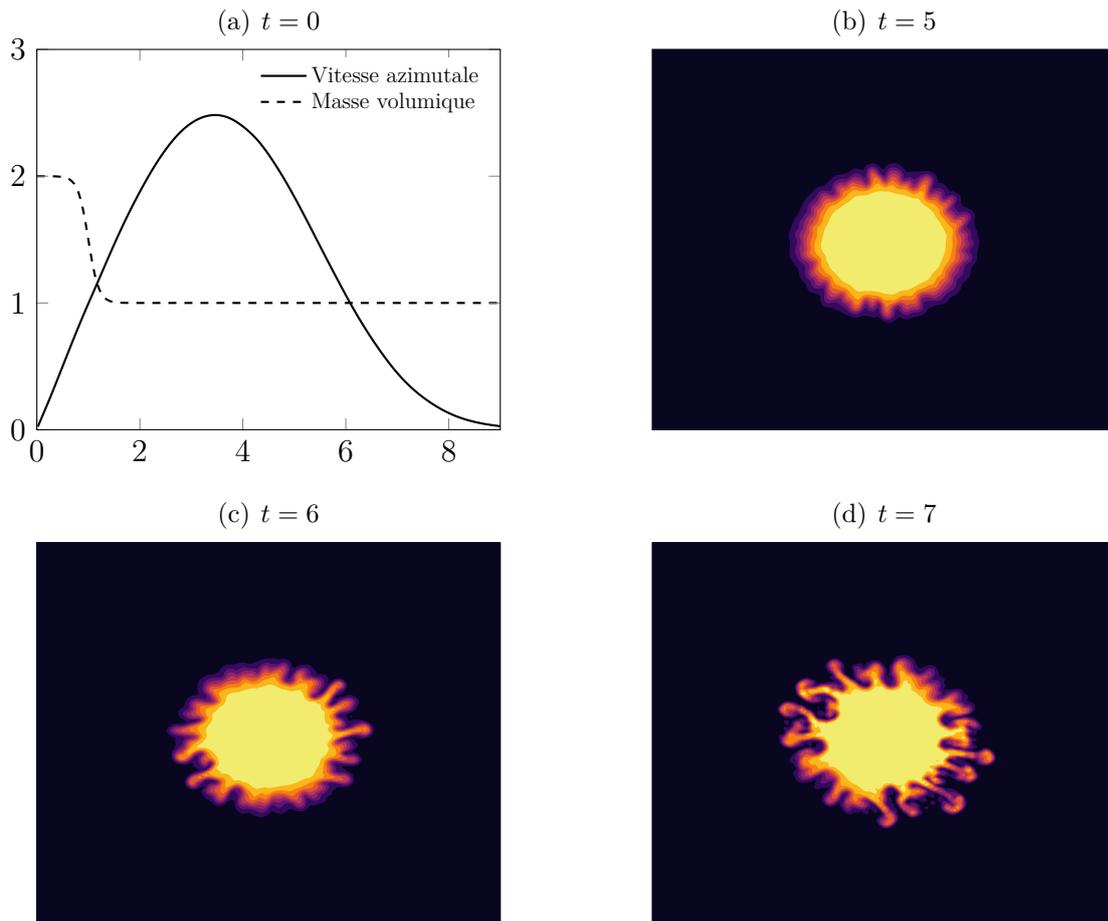


FIGURE 4.7 – Simulation numérique directe d'un disque de masse volumique en rotation avec  $S = 2$  et  $Re = 10^3$  : (a) distribution radiale initiale, isocontours du champ de masse volumique aux temps  $t \approx 5$  (b),  $t \approx 6$  (c) et  $t \approx 7$  (d).

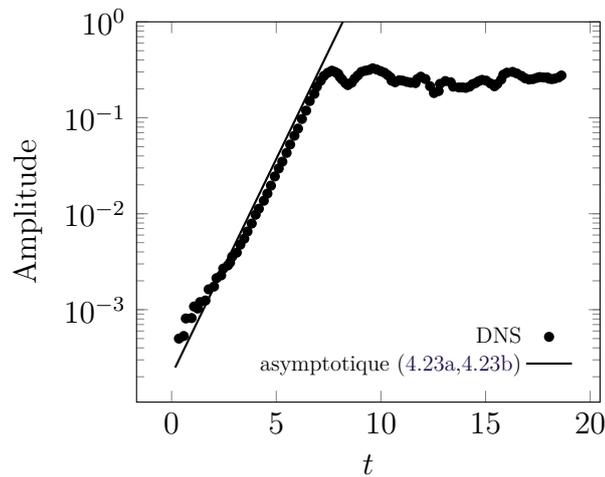


FIGURE 4.8 – Amplitude de perturbation du mode azimutale  $m = 17$  en fonction du temps, pour  $Re = 1000$  et  $S = 2$  et les prédictions asymptotiques (4.23a,4.23b).

#### 4.2.4 Couronne en rotation

Afin de raffiner notre modèle représentatif des zones instables (spirales), on considère maintenant un écoulement en rotation solide d'un disque creux (couronne) de masse volumique représenté schématiquement sur la figure 4.3b. Dans cette configuration, il est alors possible de réaliser exactement les mêmes calculs que dans la section précédente, dans la limite où l'épaisseur de la couronne est très grande devant l'épaisseur des gradients (ce qui est le cas des zones instables visibles sur les figures 4.2). Les développements mathématiques sont strictement identiques et les mêmes résultats sont obtenus. Les zones potentiellement instables correspondent aux zones où les gradients de masse volumique et l'accélération locale du fluide sont opposés, et cette instabilité est de type Rayleigh–Taylor cylindrique. Cependant, on précise que dans le cas d'une couronne lourde par rapport à son environnement ( $\rho_1 > \rho_2$ ), la zone potentiellement instable correspond au bord extérieur de la couronne (voir figure 4.9a). Inversement, dans le cas d'une couronne légère par rapport à son environnement ( $\rho_1 < \rho_2$ ), c'est le bord intérieur qui est potentiellement instable (voir figure 4.9b).

### 4.3 Comparaison modèles et simulations

On souhaite maintenant confronter les résultats obtenus dans la section précédente avec les simulations pour en déduire la pertinence du modèle. Comme indiqué précédemment, le modèle le plus représentatif de la zone d'apparition des instabilités secondaires (voir figure 4.2) correspond au cas d'un écoulement en rotation solide d'une couronne de masse volumique. De plus, on observe que la longueur de la spirale est grande devant les zones de gradients. Ainsi, le cas considéré dans la section précédente d'une couronne avec une épaisseur grande devant les zones de gradients est représentatif de ces zones instables. Ceci permet alors d'utiliser l'ensemble des résultats obtenus dans le cas d'un écoulement en

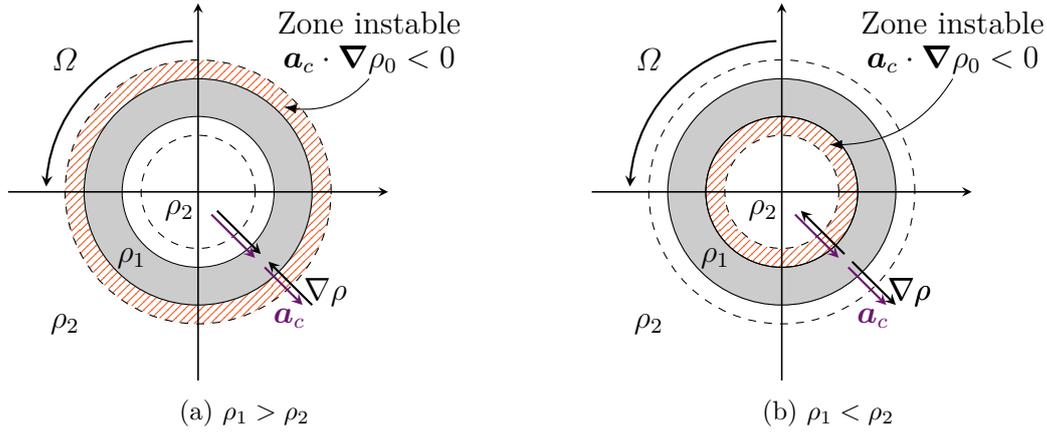


FIGURE 4.9 – Zones potentiellement instables pour un écoulement de base en rotation solide d’une couronne : (a) cas d’une couronne lourde par rapport à son environnement, (b) cas d’une couronne légère par rapport à son environnement.

rotation solide d’un disque de masse volumique. La figure 4.10 montre à plusieurs instants les zones d’apparition des instabilités secondaires avec une visualisation de la zone potentiellement instable (contour en vert) prédite par le critère d’instabilité de Rayleigh–Taylor cylindrique développé dans la section précédente. Ce critère est ici adapté en utilisant l’accélération locale du fluide :  $[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \nabla \rho / \rho < 0$ , l’écoulement n’étant pas parfaitement en rotation solide. On observe que les zones où se développent les instabilités secondaires correspondent aux zones de prédiction des instabilités de Rayleigh–Taylor cylindrique. Pour obtenir le mode azimutal sélectionné depuis la DNS, on réalise une transformée de Fourier dans la direction azimutale  $\theta$ , obtenue par interpolation sur la grille cartésienne  $(x, y)$  depuis le centre de rotation des zones d’enroulement (voir ci-dessous pour l’estimation de ce dernier). La valeur  $m = 8$  est obtenue par les simulations à  $S = 2$ . Pour obtenir la valeur prédite par le modèle analytique, les zones d’enroulement sont détectées depuis la DNS en appliquant le critère  $Q$ . Le centre de rotation est alors déduit comme le barycentre de vorticité dans la zone où  $Q$  est négatif. Depuis ce centre, on balaie radialement l’écoulement à la recherche de la valeur de  $r^*$  pour laquelle  $G^2$  est minimal. Toutes les valeurs sont alors calculées en ce point pour estimer la valeur de  $m_{\max}$  (4.23b). Dans le cas  $S = 2$ , on obtient la valeur  $m = 11$ . On constate que l’approche asymptotique donne une assez bonne estimation du nombre d’onde du mode le plus instable. Cet écart provient très certainement du fait que l’écoulement observé ne correspond pas exactement à une rotation et que la masse volumique crée des bras en spirale plutôt qu’une couronne.

  la vue de ces résultats, il est alors possible de conclure que les instabilités secondaires qui se développent dans les zones d’enroulement de la phase non linéaire correspondent à des instabilités de type Rayleigh–Taylor cylindrique.

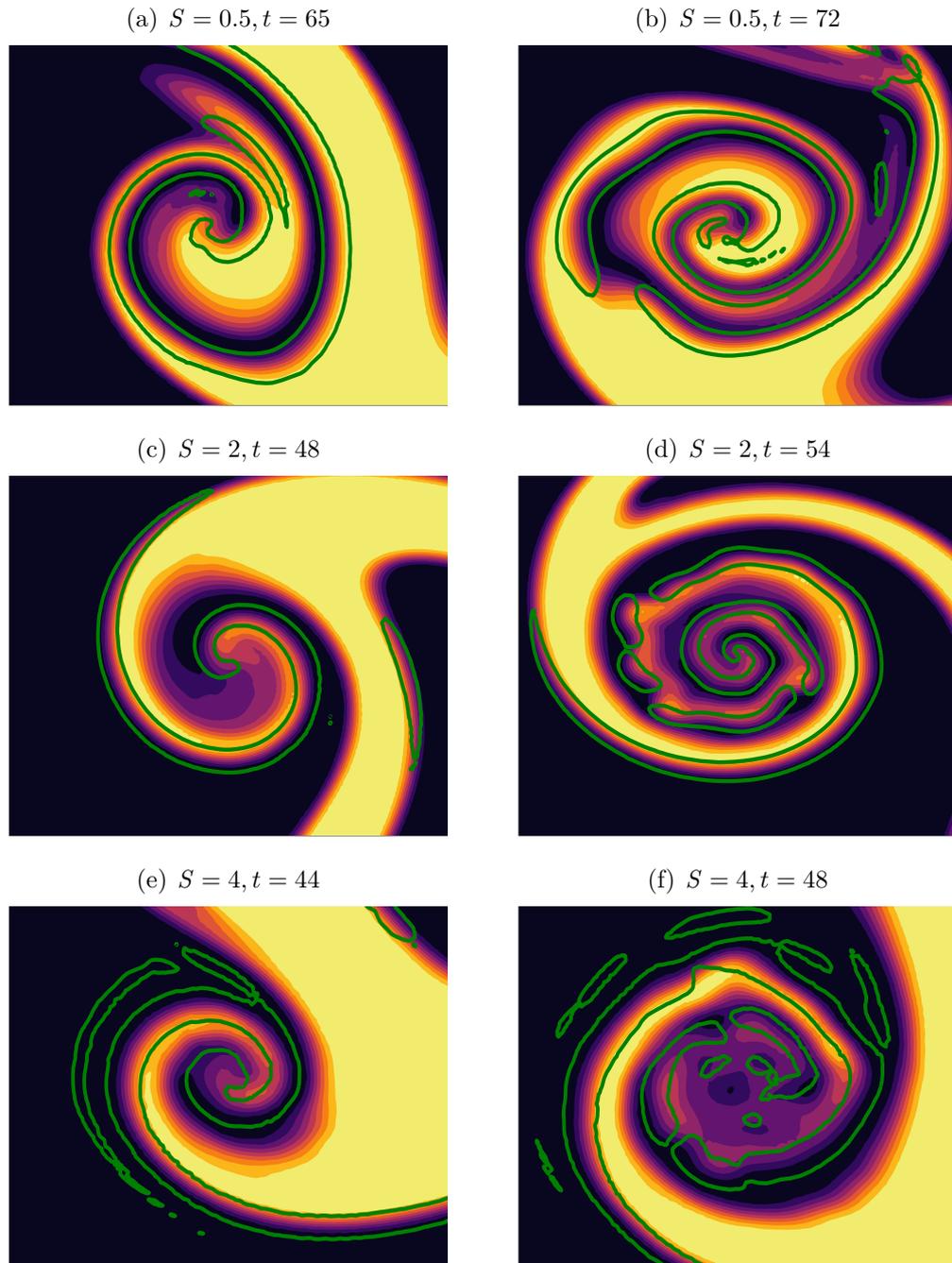


FIGURE 4.10 – Superposition des isocontours de masse volumique avec les zones d’instabilité de Rayleigh–Taylor cylindriques données par le critère  $G^2 = \mathbf{a}_c \cdot \nabla \rho / \rho > 0$  (en vert)



# Conclusion

En conclusion, au travers d'une modélisation d'écoulement incompressible à masse volumique variable, pertinente pour représenter les rejets atmosphériques (couche de mélange et jet), nous avons exploré l'influence de la variation de masse volumique, de la viscosité et de la diffusion de masse sur leurs dynamiques instables. Les approximations de type Boussinesq n'ont pas été considérées ici afin de mettre l'accent sur les effets purement inertiels.

Les conclusions apportées par ces travaux se sont appuyées sur des analyses analytiques et asymptotiques validées par des simulations numériques de précision spectrale, réalisées avec un solveur aux valeurs propres pour la phase linéaire et un solveur DNS pour étudier la phase non linéaire.

Dans un premier temps, nous avons observé et analysé au travers de considérations asymptotiques, analytiques et numériques, dans une configuration non visqueuse, l'influence non triviale de la variation de masse volumique sur les instabilités linéaires primaires qui se développent au sein de ces écoulements. Les résultats asymptotiques et analytiques obtenus permettent d'avoir directement et sans résolution du problème une bonne estimation des caractéristiques de l'instabilité (taux de croissance et nombre d'onde du mode le plus instable, nombre d'onde de coupures et taux de croissance dans la limite des grandes longueurs d'onde). Dans un deuxième temps, l'introduction des effets visqueux et diffusifs a permis de montrer l'impact purement stabilisant, en observant que le cas limite non visqueux permet de rendre compte de manière fidèle des instabilités qui se développent dans un écoulement visqueux pour  $Re > 1000$  quel que soit  $Sc > 1$ .

Nous avons également étudié le comportement d'un écoulement de jet au-delà de la phase de croissance linéaire. Nous avons remarqué l'apparition d'instabilités secondaires dans les zones d'enroulements non observées dans le cas à densité constante. Pour comprendre la nature de ces instabilités, nous avons étudié la stabilité d'un écoulement modèle mimant la configuration de la zone d'enroulement. Nous avons pu alors identifier cette instabilité secondaire comme étant de type Rayleigh–Taylor, poussant le fluide lourd vers un fluide léger sous l'effet de l'accélération centrifuge. Les résultats analytiques obtenus sur l'écoulement modèle montrent une assez bonne prédiction du mode sélectionné pour

cette instabilité secondaire.

Dans la continuité de ces travaux d'études de stabilité, il serait alors pertinent d'étendre cette analyse à une configuration tridimensionnelle plane et cylindrique et d'observer la transition convective-absolue afin d'analyser le mode instable sélectionné. Il serait également judicieux d'explorer la compétition potentielle entre ces instabilités secondaires de type Rayleigh–Taylor cylindrique et les instabilités secondaires transverses classiquement observées dans le cas à densité constante pour un jet plan, et d'analyser dans quelle mesure cette instabilité secondaire est un vecteur de transition vers la turbulence.

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York : Dover, 1964.
- [2] T. ALAZARD. « Low Mach Number Limit of the Full Navier-Stokes Equations ». Dans : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 180.1 (août 2005), p. 1-73. DOI : 10.1007/s00205-005-0393-2.
- [3] E. ANDERSON. *LAPACK users' guide*. Philadelphia : Society for Industrial et Applied Mathematics, 1999. ISBN : 0898714478.
- [4] S. N. ANTONSEV, A. V. KAZHIKHOV et V. M. MONAKHOV. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*. Amsterdam New York New York, N.Y., U.S.A : North-Holland Distributors for the United States et Canada Elsevier Science Pub. Co, 1990. ISBN : 9780444883827.
- [5] G. K. BATCHELOR. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge, U.K. New York, NY : Cambridge University Press, 1999. ISBN : 0521663962.
- [6] R. J. BEERENDS et al. *Fourier and Laplace Transforms*. Cambridge University Press, août 2003. DOI : 10.1017/cbo9780511806834.
- [7] C. M. BENDER et S. A. ORSZAG. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. International series in pure and applied mathematics. New York : McGraw-Hill, 1978. ISBN : 9780070044524.
- [8] R. BIRD. *Transport phenomena*. New York : J. Wiley, 2002. ISBN : 0471410772.
- [9] O. BONNEFOY. *Mécanique des fluides et transferts*.
- [10] J. P. BOYD. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Second. Dover Books on Mathematics. Mineola, NY : Dover Publications, 2001. ISBN : 9780486411835.
- [11] D. BRESCH, E. H. ESSOUFI et M. SY. « De nouveaux systèmes de type Kazhikhov–Smagulov : modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach ». Dans : *Comptes Rendus Mathématique* 335.11 (2002), p. 973-978.
- [12] C. CANUTO. *Spectral methods : fundamentals in single domains*. Berlin New York : Springer-Verlag, 2006. ISBN : 3540307257.
- [13] C. CANUTO et al. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 1988. DOI : 10.1007/978-3-642-84108-8.

- [14] S. CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. New York : Dover Publications, 1981. ISBN : 9780486640716.
- [15] F. CHARRU. *Instabilités hydrodynamiques*. Les Ulis, France Paris : EDP Sciences CNRS Éditions, 2007. ISBN : 9782868839855.
- [16] W. O. CRIMINALE, T. L. JACKSON et R. D. JOSLIN. *Theory and Computation in Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, nov. 2018. DOI : 10.1017/9781108566834.
- [17] C. M. DAFERMOS. *Handbook of differential equations : evolutionary equations Volume 5*. Amsterdam Boston : Elsevier/North Holland, 2004. ISBN : 0444532226.
- [18] S. R. DE GROOT. *Non-equilibrium thermodynamics*. New York : Dover Publications, 1984. ISBN : 9780486647418.
- [19] B. DI PIERRO. « Etude de l'évolution spatio-temporelle d'un jet tournant tridimensionnel à masse volumique variable ». Thèse de doct. Aix-Marseille, 2012.
- [20] B. DI PIERRO et M. ABID. « A projection method for the spectral solution of non-homogeneous and incompressible Navier-Stokes equations ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 71.8 (juin 2012), p. 1029-1054. DOI : 10.1002/flid.3700.
- [21] B. DI PIERRO et M. ABID. « Instabilities of variable-density swirling flows ». Dans : *Physical Review E* 82.4 (oct. 2010). DOI : 10.1103/physreve.82.046312.
- [22] P. G. DRAZIN. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, sept. 2002. DOI : 10.1017/cbo9780511809064.
- [23] P. G. DRAZIN et L. N. HOWARD. « The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 14.2 (oct. 1962), p. 257-283. DOI : 10.1017/s0022112062001238.
- [24] P. G. DRAZIN et W. H. REID. *Hydrodynamic stability*. Cambridge, UK New York : Cambridge University Press, 2004. ISBN : 0521525411.
- [25] D. G. DUFFY. *Green's functions with applications*. Chapman et Hall/CRC, 2015. ISBN : 9781315371412.
- [26] K. S. ECKHOFF. « A note on the instability of columnar vortices ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 145.-1 (août 1984), p. 417. DOI : 10.1017/s0022112084002998.
- [27] O. EDENHOFER. *IPCC, 2014 : Climate change 2014 : mitigation of climate change. Working Group III contribution to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. New York, NY : Cambridge University Press, 2014. ISBN : 9781107654815.
- [28] J. ETIENNE, E. J. HOPFINGER et P. SARAMITO. « Numerical simulations of high density ratio lock-exchange flows ». Dans : *Physics of Fluids* 17.3 (jan. 2005), 036601:1-12. DOI : 10.1063/1.1849800.

- [29] L. EULER. *Commentationes physicae ad theoriam caloris, electricitatis et magnetismi pertinentes*. T. 3. Springer Science & Business Media, 2004.
- [30] L. EULER. « De motu fluidorum a diverso caloris gradu oriundo ». Dans : *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* (1767), p. 232-267.
- [31] A. FICK. « Ueber Diffusion ». Dans : *Annalen der Physik und Chemie* 170.1 (1855), p. 59-86. DOI : 10.1002/andp.18551700105.
- [32] R. FJØRTOFT. *Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex*. Grøndahl & søns boktr., I kommisjon hos Cammermeyers boghandel, 1950.
- [33] J. FONTANE. « Transition des écoulements cisailés libres à densité variable ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Toulouse, nov. 2005.
- [34] B. FORNBERG. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, jan. 1996. DOI : 10.1017/cbo9780511626357.
- [35] F. FRANCHI et B. STRAUGHAN. « A comparison of the Graffi and KazhikhovSmagulov models for top heavy pollution instability ». Dans : *Advances in Water Resources* 24.6 (juin 2001), p. 585-594. DOI : 10.1016/s0309-1708(00)00073-7.
- [36] D. A. FRANK-KAMENETSKII. *Diffusion and heat exchange in chemical kinetics*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1955. ISBN : 9781400877195.
- [37] R. F. GANS. « On the stability of shear flow in a rotating gas ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 68.02 (mars 1975), p. 403. DOI : 10.1017/s0022112075000882.
- [38] W. GAUTSCHI. *Orthogonal polynomials : computation and approximation*. OUP Oxford, 2004.
- [39] A. GEORGESCU. *Hydrodynamic stability theory*. Dordrecht Boston : M. Nijhoff, 1985. ISBN : 9024731208.
- [40] J. C. GIBBINGS. *Dimensional Analysis*. Springer London, 2011. DOI : 10.1007/978-1-84996-317-6.
- [41] S. GOLDSTEIN et G. I. TAYLOR. « On the stability of superposed streams of Fluids of different densities ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 132.820 (1931), p. 524-548. DOI : 10.1098/rspa.1931.0116.
- [42] D. GOTTLIEB et S. A. ORSZAG. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. Society for Industrial et Applied Mathematics, jan. 1977. DOI : 10.1137/1.9781611970425.
- [43] F. GUILLÉN-GONZÁLEZ, P. DAMÁZIO et M. A. ROJAS-MEDAR. « Approximation by an iterative method for regular solutions for incompressible fluids with mass diffusion ». Dans : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 326.1 (2007), p. 468-487. ISSN : 0022-247X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.009>.

- [44] W. GUO, G. LABROSSE et R. NARAYANAN. *The Application of the Chebyshev Spectral Method in Transport Phenomena*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. DOI : 10.1007/978-3-642-34088-8.
- [45] C. R. HARRIS et al. « Array programming with NumPy ». Dans : *Nature* 585.7825 (sept. 2020), p. 357-362. DOI : 10.1038/s41586-020-2649-2.
- [46] H. von HELMHOLTZ. *über discontinuirliche Flüssigkeits-Bewegungen*. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.
- [47] L. N. HOWARD. « Note on a paper of John W. Miles ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 10.04 (juin 1961), p. 509. DOI : 10.1017/s0022112061000317.
- [48] L. N. HOWARD. « On the Stability of Compressible Swirling Flow ». Dans : *Studies in Applied Mathematics* 52.1 (mars 1973), p. 39-43. DOI : 10.1002/sapm197352139.
- [49] A. V. KAZHIKHOV et S. SMAGULOV. « The correctness of boundary-value problems in a diffusion model of an inhomogeneous liquid ». Dans : *SPhD* 22 (1977), p. 249.
- [50] KELVIN. « Mathematical and Physical papers, IV ». Dans : *Hydrodynamics and General Dynamics, Cambridge, England* 69 (1910).
- [51] L. KELVIN. « XLVI. Hydrokinetic solutions and observations ». Dans : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 42.281 (nov. 1871), p. 362-377. DOI : 10.1080/14786447108640585.
- [52] L. LANDAU et E. LIFCHITZ. *Physique théorique : mécanique des fluides*. Moscou : Paris Mir, Ellipses, 1994. ISBN : 9782729894238.
- [53] M. LANG et B.-C. FRENZEL. « Polynomial root finding ». Dans : *IEEE Signal Processing Letters* 1.10 (oct. 1994), p. 141-143. DOI : 10.1109/97.329845.
- [54] S. LEBLANC et A. L. DUC. « The unstable spectrum of swirling gas flows ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 537.-1 (août 2005), p. 433. DOI : 10.1017/s0022112005005483.
- [55] S. LEIBOVICH. « Stability of density stratified rotating flows. » Dans : *AIAA Journal* 7.1 (jan. 1969), p. 177-178. DOI : 10.2514/3.5066.
- [56] S. LEIBOVICH et K. STEWARTSON. « A sufficient condition for the instability of columnar vortices ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 126 (jan. 1983), p. 335-356. DOI : 10.1017/s0022112083000191.
- [57] C.-C. LIN. *The theory of hydrodynamic stability*. 1955.
- [58] A. LOPEZ-ZAZUETA. « Stabilité secondaire non-modale d'une couche de mélange inhomogène ». Thèse de doct. ISAE Toulouse, 2015.
- [59] A. M. LYAPUNOV. « The general problem of the stability of motion ». Dans : *International Journal of Control* 55.3 (mars 1992), p. 531-534. DOI : 10.1080/00207179208934253.
- [60] P. MANNEVILLE. *Instabilités, chaos et turbulence*. Palaiseau France : Editions de l'Ecole Polytechnique, 2004. ISBN : 2730209131.

- 
- [61] F. MARCELLÁN et W. V. ASSCHE. *Orthogonal Polynomials and Special Functions*. Springer Berlin Heidelberg, 2006. DOI : 10.1007/b128597.
- [62] J. C. MASON et D. C. HANDSCOMB. *Chebyshev Polynomials*. Chapman et Hall-/CRC, sept. 2002. DOI : 10.1201/9781420036114.
- [63] A. D. MCEWAN. « Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 40.3 (fév. 1970), p. 603-640. DOI : 10.1017/s0022112070000344.
- [64] J. W. MILES. « On the stability of heterogeneous shear flows ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 10.04 (juin 1961), p. 496. DOI : 10.1017/s0022112061000305.
- [65] W. M. ORR. « The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid. Part I : A Perfect Liquid ». Dans : *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences* 27 (1907), p. 9-68. ISSN : 00358975.
- [66] R. PEYRET. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Springer New York, 2002. DOI : 10.1007/978-1-4757-6557-1.
- [67] B. PIER. « Dynamique des écoulements ouverts : instabilités et transition, courbure et rotation ». Thèse de doct. École centrale de Lyon ; Université de Lyon, jan. 2015.
- [68] H.-O. RAMA et al. *Climate Change 2022 : Impacts, Adaptation and Vulnerability Working Group II Contribution to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Août 2022. DOI : 10.1017/9781009325844.
- [69] J. D. RAMSHAW. « Fluid dynamics and energetics in ideal gas mixtures ». Dans : *American Journal of Physics* 70.5 (mai 2002), p. 508-512. DOI : 10.1119/1.1463737.
- [70] S. RAVIER. « Étude des instabilités d'un jet plan à masse volumique variable ». Thèse de doct. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, juin 2004.
- [71] L. RAYLEIGH. « On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions ». Dans : *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-11.1 (nov. 1879), p. 57-72. DOI : 10.1112/plms/s1-11.1.57.
- [72] L. REYNIER et al. « A preconditioning for the spectral solution of incompressible variable-density flows ». Dans : *Computers and Fluids* (soumis).
- [73] O. REYNOLDS. « XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels ». Dans : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 174 (déc. 1883), p. 935-982. DOI : 10.1098/rstl.1883.0029.
- [74] P. SAGAUT. *Homogeneous turbulence dynamics*. Cham, Switzerland : Springer, 2018. ISBN : 9783319731612.
- [75] P. SECCHI. « On the Motion of Viscous Fluids in the Presence of Diffusion ». Dans : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 19.1 (jan. 1988), p. 22-31. DOI : 10.1137/0519002.

- [76] J. SHEN, T. TANG et L.-L. WANG. *Spectral Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 2011. DOI : 10.1007/978-3-540-71041-7.
- [77] D. SIPP et al. « Stability of a vortex with a heavy core ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 526 (mars 2005), p. 67-76. DOI : 10.1017/s0022112004003143.
- [78] A. SOMMERFELD. *Ein beitrage zur hydrodynamischen erklarung der turbulenten fluessigkeitsbewegungen*. 1909.
- [79] H. B. SQUIRE. « On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 142.847 (nov. 1933), p. 621-628. DOI : 10.1098/rspa.1933.0193.
- [80] R. TAYLOR. *Multicomponent mass transfer*. New York : Wiley, 1993. ISBN : 9780471574170.
- [81] G. K. VALLIS. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, juin 2017. DOI : 10.1017/9781107588417.
- [82] G. VAN ROSSUM et F. L. DRAKE. *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA : CreateSpace, 2009. ISBN : 1441412697.
- [83] H. B. d. VEIGA, R. SERAPIONI et A. VALLI. « On the motion of non-homogeneous fluids in the presence of diffusion ». Dans : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 85.1 (jan. 1982), p. 179-191. DOI : 10.1016/0022-247x(82)90033-6.
- [84] P. VIRTANEN et al. « SciPy 1.0 : fundamental algorithms for scientific computing in Python ». Dans : *Nature Methods* 17.3 (fév. 2020), p. 261-272. DOI : 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [85] M.-H. YU et P. A. MONKEWITZ. « The effect of nonuniform density on the absolute instability of two-dimensional inertial jets and wakes ». Dans : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 2.7 (juill. 1990), p. 1175-1181. DOI : 10.1063/1.857618.

---

La mise en page a été réalisée avec le logiciel de typographie `LATEX`. L'ensemble des figures présenté dans ce document a été réalisé à l'aide des packages `LATEX pgfplots`, `tikz` et `externalize`.

Le code de simulation de stabilité linéaire a été écrit en `Python 3` [82] et utilise les bibliothèques `Numpy` [45] et `SciPy` [84]. Les demandes d'accès au code source peuvent être faites sur simple demande par courriel à `corentin.jacques@coja.dev`.

L'édition de tous les fichiers sources a été réalisée avec le logiciel `neovim` et l'ensemble des fichiers sources ont été versionnés avec le logiciel `git`.

L'ensemble du travail produit a été réalisé sur une distribution `GNU/Linux Debian`.

---





# *Résumé*

## **Stabilité des écoulements parallèles incompressibles à grande variation de masse volumique**

Le comportement instable des écoulements incompressibles cisailés à grande variation de masse volumique, représentatif des rejets atmosphériques, est étudié au travers de considérations théoriques, analytiques, asymptotiques et numériques. Dans un premier temps, on montre l'influence non triviale de la variation de masse sur la stabilité linéaire temporelle des écoulements de couche de mélange et de jet. Les théorèmes fondamentaux de Squire, Rayleigh et Fjørtoft énoncés dans le cadre à masse volumique constante sont généralisés aux cas des écoulements inhomogènes. Les résultats analytiques et asymptotiques sont comparés aux résultats numériques obtenus grâce au code de stabilité linéaire spectral développé. On montre également que les effets visqueux et diffusif sont purement stabilisant. Une étude des instabilités secondaires linéaires qui se développent dans un jet plan dans la phase non linéaire montre qu'il s'agit d'instabilités de type Rayleigh–Taylor cylindrique.

**Mots-clés :** Stabilité linéaire, Masse volumique variable, Écoulements incompressibles, Écoulements parallèles cisailés

# *Abstract*

## **Stability of incompressible parallel flows with high density variation**

The unsteady behaviour of incompressible sheared flows with large density variation, representative of atmospheric discharges, is studied through theoretical, analytical, asymptotic and numerical considerations. First, the non-trivial influence of mass variation on the linear time stability of mixing layer and jet flows is shown. The fundamental theorems of Squire, Rayleigh and Fjørtoft stated in the constant density flow are generalized to the case of inhomogeneous flows. Analytical and asymptotic results are compared with numerical results, obtained with the developed spectral linear stability code. It is also shown that the viscous and diffusive effects are purely stabilizing. A study of the linear secondary instabilities that develop in a plane jet in the non-linear phase shows that they are of cylindrical Rayleigh–Taylor type.

**Keywords:** Linear stability, Variable density, Incompressible flows, Parallel sheared flows