



HAL
open science

Équations d'agrégation-diffusion : asymptotiques et approximations

Sébastien Tran Tien

► **To cite this version:**

Sébastien Tran Tien. Équations d'agrégation-diffusion : asymptotiques et approximations. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2023. Français. NNT : 2023LYO10107 . tel-04558297

HAL Id: tel-04558297

<https://theses.hal.science/tel-04558297>

Submitted on 24 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE de DOCTORAT de
L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1**

École Doctorale N° ED 512
Discipline : Mathématiques

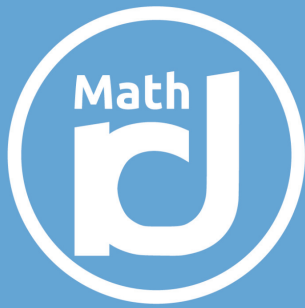
Soutenue publiquement le 3 juillet 2023 par :

Sébastien TRAN TIEN

**Équations d'agrégation-diffusion :
asymptotiques et approximations**

devant le Jury composé de :

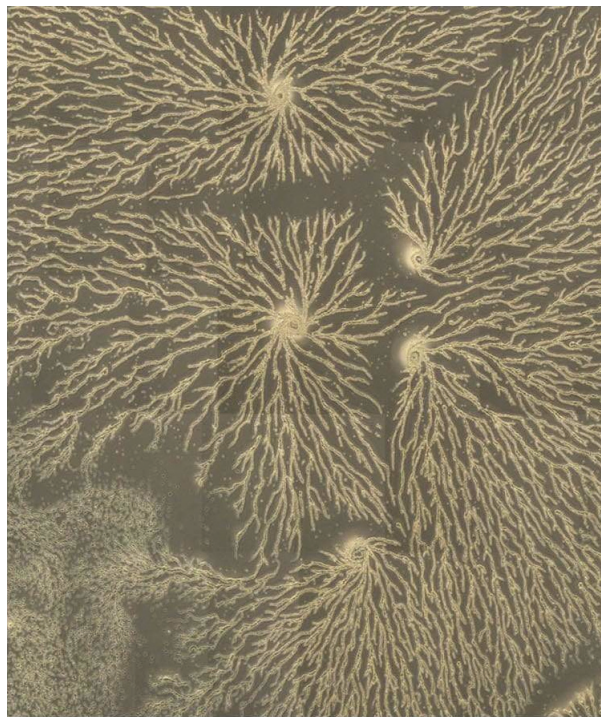
M. Vincent Calvez	Université Claude Bernard Lyon 1	Président
M. Francis Filbet	Université Toulouse III Paul Sabatier	Rapporteur
M. Frédéric Lagoutière	Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur de thèse
Mme Sepideh Mirrahimi	Université de Montpellier	Examinatrice
Mme Magali Ribot	Université d'Orléans	Rapporteuse
M. Filippo Santambrogio	Université Claude Bernard Lyon 1	Examinateur
Mme Ariane Trescases	Université Toulouse III Paul Sabatier	Examinatrice



Institut
Camille
Jordan

Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

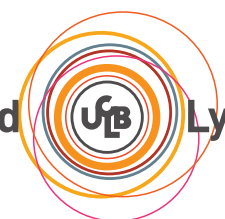
Équations d'agrégation-diffusion : asymptotiques et approximations



Sébastien Tran Tien

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard



Lyon 1

Résumé

Cette thèse s'articule autour de différentes asymptotiques et approximations des solutions de l'équation d'agrégation. Cette équation, dont le problème de Cauchy associé à une donnée ϱ^{ini} s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla \cdot (a[\varrho]\varrho) = 0, & t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \\ a[\varrho] = -\nabla W * \varrho, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}, \end{cases} \quad (1)$$

où $W : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ est un potentiel d'interaction donné, est une équation de transport conservative non linéaire et non locale qui apparaît notamment dans des modèles de mouvement collectifs d'individus en interaction (par chimiotactisme, typiquement). Ici, ϱ est une mesure de probabilité représentant la densité de population de tels individus. Il est désormais connu que les solutions faibles de cette équation peuvent devenir, en temps fini, des mesures singulières et la continuation des solutions à valeurs mesures a alors été menée par différents auteurs qui ont montré que les solutions mesures de (1) peuvent être définies en temps global et sont uniques.

La première partie de cette thèse est consacrée à des résultats de convergence pour les schémas de type volumes finis pour l'équation d'agrégation dans le cas de la dimension 1 et pour potentiel $W(x) = \alpha|x|$ pour un certain $\alpha \in \mathbf{R}^*$. En utilisant une correspondance entre l'équation de Burgers et l'équation d'agrégation et en effectuant des intégrations discrètes en espace, on obtient des schémas numériques pour l'équation d'agrégation ainsi que des estimations de convergence en distance de Wasserstein W_1 en partant de schémas pour les lois de conservations.

L'équation d'agrégation apparaissant, en réalité, rarement seule dans les modèles de chimiotactisme, on étudie, dans la suite de ce manuscrit, l'asymptotique d'un modèle parabolique puis celle d'un modèle hyperbolique qui dégènèrent tous deux vers (1).

Le chapitre 3 est ainsi consacré à l'asymptotique suivante : on ajoute dans le membre de droite de (1) un terme diffusif $\varepsilon \Delta \varrho$ et nous étudions la convergence dans limite de diffusion $\varepsilon \rightarrow 0$ des solutions de ce problème diffusif vers l'unique solution de (1).

Dans la première partie de ce chapitre, on s'intéresse à nouveau au cas unidimensionnel pour les potentiels du type $W(x) = \alpha|x|$ où $\alpha \neq 0$. A nouveau, en utilisant une correspondance avec l'équation de Burgers, on donne une estimation de convergence des solutions du problème diffusif vers une solution de (1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformément en temps en distance de Wasserstein W_1 .

La deuxième partie de ce chapitre traite du cas général de différentes classes de potentiels en dimension d quelconque. Nous montrons que ce résultat de convergence est encore valable à sous-suite près lorsque le potentiel est lipschitzien et que la donnée est bien préparée. Lorsque ce n'est plus le cas, on étend ensuite ce résultat à une donnée quelconque, pas nécessairement bien préparée, avec des arguments de transport optimal, lorsque le potentiel est λ -convexe, auquel cas on fournit à nouveau une estimation de convergence, et lorsque le potentiel se comporte comme $W(x) = -|x|$. On complète ensuite avec des résultats de convergence des états stationnaires de l'équation diffusive vers le Dirac sous des hypothèses d'attractivité un peu plus fortes sur W , illustrés par des test numériques.

Le chapitre 4, lui, est consacré à la limite de relaxation pour un système hyperbolique inspiré par les travaux de Jin et Xin sur les lois de conservations scalaires, transposé à l'équation d'agrégation en dimension $d = 1$. On établit des estimations de convergence uniformément en temps en distance W_1 , lorsque le paramètre de relaxation tend vers 0 et on propose des schémas préservant l'asymptotique au sens où ils dégènèrent vers des schémas éprouvés pour l'équation d'agrégation comme le schéma de Rusanov.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Agrégation et modèles de type Keller-Segel	9
1.1.1	L'interaction par chimiotactisme	9
1.1.2	Le phénomène de concentration	12
1.1.3	Hypothèses et nomenclature des noyaux d'interaction	15
1.2	L'équation d'agrégation : plusieurs notions de solutions	17
1.2.1	Solutions de dualité en dimension 1	18
1.2.2	Solutions flots de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$	21
1.2.3	Solutions au sens de Filippov	29
1.2.4	Propriétés des solutions de l'équation d'agrégation	32
1.3	Contributions	38
2	Schémas numériques pour les équations d'agrégation	45
2.1	Schémas pour l'agrégation	45
2.1.1	Généralités et état de l'art	45
2.1.2	Reconstruction et convergence dans différentes topologies	46
2.2	Schémas pour lois de conservation scalaires	47
2.2.1	Correspondance entre l'équation d'agrégation et l'équation de Burgers pour $d = 1$, $W(x) = \alpha x $, $\alpha \neq 0$	48
2.2.2	Correspondance entre schémas pour les lois de conservation et schémas pour l'agrégation, $d = 1$, $W(x) = \alpha x $, $\alpha \neq 0$	51
2.2.3	Estimations de convergence de schémas pour les solutions régulières	56
2.2.4	Estimations d'erreur $\ell^1_{\Delta x}$ pour les solutions $BV \cap L^\infty$ et surconvergence	62
2.2.5	Applications à l'équation d'agrégation	65
2.2.6	Quelques remarques concernant la stabilité de schémas semi-implicites	65
2.2.7	Perspectives	69
3	Approximation visqueuse	71
3.1	Limite non visqueuse pour l'agrégation : le cas $d = 1$ et $W(x) = \alpha x $, $\alpha \neq 0$	71
3.1.1	Limite non visqueuse pour une loi de conservation	72
3.1.2	Passage à l'équation d'agrégation	74
3.1.3	Surconvergence de l'approximation visqueuse	75
3.2	Limite non visqueuse pour l'agrégation : le cas général	77
3.2.1	Introduction	77
3.2.2	Preliminaries	79
3.2.3	$O(\varepsilon^{1/2})$ convergence rate when the potential is λ -convex	85
3.2.4	Convergence for repulsive potentials such that $\Delta W \leq 0$ and $\nabla^2 W \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$	108
3.2.5	Higher convergence rate for steady states under assumptions (A0)-(A1)-(A4-p)	112
3.2.6	Numerical illustrations	116

4	Approximation par relaxation	121
4.1	Introduction	121
4.2	Convergence Result	123
4.2.1	Notations	123
4.2.2	Convergence Estimates	124
4.3	Numerical Discretization	132
4.3.1	A Splitting Algorithm	132
4.3.2	Well-Balanced Discretization	134
4.4	Numerical Experiments	140
4.4.1	Accuracy of the Numerical Schemes	140
4.4.2	Illustration of Theorem 4.3	142
A	Annexe	147
A.1	Quelques rappels de probabilités et théorie de la mesure	147
A.1.1	Mesures de probabilité	147
A.1.2	Convergence des mesures (pas forcément de probabilité)	147
A.2	Quelques rappels d'analyse	149

Chapitre 1

Introduction

1.1 Agrégation et modèles de type Keller-Segel

1.1.1 L'interaction par chimiotactisme

Cette thèse est consacrée à l'étude de divers problèmes autour d'équations du type :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla \cdot (a[\varrho]\varrho) = \varepsilon \Delta \varrho, & t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \\ a[\varrho] = -\nabla W * \varrho, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}. \end{cases} \quad (1.1)$$

où $W : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ est un champ scalaire fixé¹, $\varepsilon > 0$ est un coefficient de diffusion, ϱ^{ini} est une mesure de probabilité sur \mathbf{R}^d donnée et, pour v champ de vecteurs, $\nabla \cdot v$ désigne la divergence de v . Ce type d'équations, appelées équations d'agrégation-diffusion, se retrouve dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques et biologiques ayant pour trait commun l'apparition de structures particulières lors de mouvements collectifs (bancs de poissons, mouvements de foule), comme des agrégats de particules, ou l'apparition d'une direction privilégiée.

Le terme de transport non local $\nabla \cdot (-\nabla W * \varrho)\varrho$ permet de décrire l'interaction d'un individu, via le potentiel d'interaction W , avec l'ensemble de la population et peut donner lieu à des phénomènes de concentration. L'idée est que le mouvement collectif d'une population d'espèces mobiles peut être influencé par la présence, dans l'environnement, d'un signal *émis par la population elle-même* (si tant est que les individus soient également sensibles à ce signal et mobiles). On peut penser, par exemple, à l'émission d'un signal chimique ou olfactif pour attirer les partenaires d'accouplement, ou à une information signalant la présence de nutriment.

Lorsque la modification du mouvement de la population est induite par un signal chimique, on parle de chimiotactisme (ou chimiotaxie). L'exemple historique est celui des *Dictyostelium Discoideum* (Dicty). Il s'agit d'amibes (organismes unicellulaires) vivant en communauté mais se déplaçant individuellement (pas de mouvement collectif) et se reproduisant par division cellulaire tant qu'il y a assez de nourriture et s'agrégeant en petites structures de 2mm de long et composées de dizaines de milliers d'individus (appelées pseudo-plasmodes ou *slugs* – limaces – à cause de leur forme), en cas de carence nutritionnelle [83, 74]. Pour ce faire, les amibes sécrètent un fort signal chimique, l'AMPc (Adénosine MonoPhosphate cyclique), ce qui attire leurs congénères vers un centre commun (figure 1.1 b–c) pour former des agrégats : c'est le phénomène de chimiotactisme. Ces pseudo-plasmodes migrent ensuite jusqu'à stagner et se développer en un corps de fructification (*fruiting body*) en haut duquel les cellules se différencient en spores. Elles peuvent alors se disséminer dans des zones plus favorables et former de nouvelles amibes.

1. Une première remarque sur les conventions : l'explication du signe – devant W (pourquoi ne pas choisir son opposé ?) sera donnée au lemme 1.3 décrivant l'équation (3.11) comme une équation de flot de gradient.

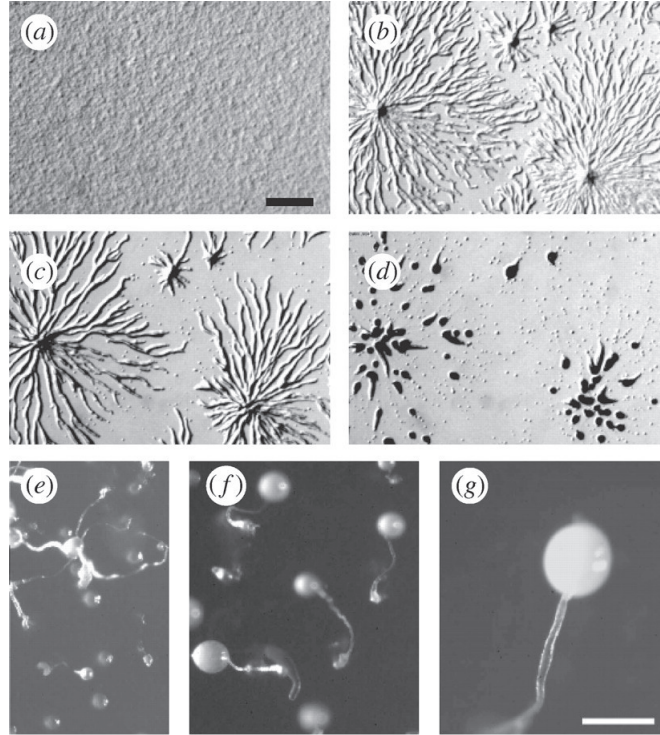


FIGURE 1.1 – Cycle de vie des Dictées. On part d’une répartition initiale uniforme de Dictées sur un plateau d’agar sans nutriments (a). Au bout de 5 heures, les amibes ont commencé à s’agréger en groupes en formant des motifs filamenteux caractéristiques (b-c), jusqu’à former plusieurs pseudo-plasmodes (d). Ceux-ci forment ensuite des corps de fructification (e-f-g). La barre d’échelle en (a-g) correspond à 1 mm. Expérience et illustration tirées de Jang et Gomer [74], *J. R. Soc. Interface* (2008) 5, S49–S58, reproduit avec l’autorisation des auteurs.

Mathématiquement, l’interaction par chimiotactisme peut être décrite par un système couplé de deux EDP, comme par exemple le modèle bidimensionnel parabolique-parabolique de Keller et Segel [81, 82] qui s’écrit, sur un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^2$:

$$\partial_t n + \nabla \cdot (\chi n \nabla c) = \Delta n, \quad (1.2a)$$

$$\kappa \partial_t c = \Delta c + n - \alpha c. \quad (1.2b)$$

En effet, l’équation (1.2a) décrit l’évolution d’une quantité $n(t, x)$ de particules, bactéries ou de cellules, soumises à un mouvement Brownien ainsi qu’à une dérive induite par leur tendance à se diriger vers les zones à fortes concentration du nutriment ou chimioattractant dont la concentration est notée $c(t, x)$. L’équation (1.2b) décrit, elle, la production du chimioattractant par les cellules elles-mêmes, à un taux constant fixé ici à 1, ainsi que sa diffusion uniformément dans le milieu et enfin sa dégradation à taux $\alpha \geq 0$. Le coefficient de chemosensibilité $\chi \geq 0$ quantifie, comme son nom l’indique, la sensibilité des cellules au signal chimique. On note aussi la masse totale de particules $M = \int_{\Omega} n(t, x) dx = \int_{\Omega} n(0, x)$, qui ne dépend pas de t car l’équation (1.2a) est conservative. Lorsque $M = 1$, on parlera de densité de particules.

La constante positive κ permet de jouer sur l’échelle de temps. Lorsque $\kappa = 0$, ce qui correspond au fait que le chimioattractant atteint un état d’équilibre bien plus rapidement que n , on parle naturellement de modèle de Keller-Segel parabolique-elliptique.

Les systèmes couplés du type (1.2) sont très proches des équations d’agrégation-diffusion. Pour $\alpha > 0$ et $\kappa = 0$ par exemple, on peut voir (1.2) comme une équation d’agrégation-diffusion pour le potentiel $W(x) = \frac{e^{-\sqrt{\alpha}|x|}}{2\chi\sqrt{\alpha}}$. En effet, la solution de l’équation elliptique (1.2b) pour $\kappa = 0$ est $c = -\chi W * n$ où χW est la solution fondamentale² de $-\Delta u + \alpha u = \delta_0$, c’est-à-dire le potentiel

2. on choisit $e^{-\sqrt{\alpha}|x|}$ plutôt que $e^{\sqrt{\alpha}|x|}$ afin d’avoir un potentiel attractif, ou du moins λ -convexe, voir plus

de Bessel $\frac{e^{-\sqrt{\alpha}|x|}}{2\sqrt{\alpha}}$. En reportant dans (1.2a) on obtient l'équation d'agrégation-diffusion (1.1) avec $\varepsilon = 1$.

Les modèles de type Keller-Segel (1.2) présentent une compétition entre le phénomène de rétro-action positive (les zones de fortes densité attirent de plus en plus de particules) du terme de drift et la diffusion. Il apparaît souvent un phénomène de seuil à partir duquel on bascule dans un régime plutôt que dans l'autre. Historiquement, ce phénomène de seuil a d'abord été quantifié pour le modèle de Keller-Segel parabolique-elliptique sur \mathbf{R}^2 avec $\alpha = 0$. Dans ce cas, l'équation (1.2b) devient l'équation de Poisson $-\Delta c = n$. Si, de plus $d = 2$, et $\Omega = \mathbf{R}^2$, alors c est donnée par la convolution par le potentiel Newtonien, qui est logarithmique en dimension 2 : $c(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\cdot| * n(t)$. Dans ce cas, le système (1.2) se réécrit donc comme l'équation d'agrégation-diffusion à potentiel logarithmique :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot ((-\nabla W * n)n) = \Delta n, & t > 0, x \in \mathbf{R}^2, \\ W(x) = \frac{\chi}{2\pi} \ln |x|. \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour ce modèle, la dichotomie entre diffusion et agrégation est régie par la masse totale du système : si la masse initiale (qui est en fait conservée) est inférieure à $\frac{8\pi}{\chi}$, les solutions sont globales en temps, et sinon, il y a apparition de singularités en temps fini. Jäger et Luckhaus [69] d'abord ont montré que, pour une masse assez petite les solutions étaient globales. Ce résultat a été précisé ensuite par Blanchet, Dolbeault et Perthame [46, 12] qui donnent la valeur seuil exacte, $\frac{8\pi}{\chi}$, pour la masse totale et montrent l'explosion en temps fini des solutions au-delà de ce seuil (c'est-à-dire que $\|n(t)\|_{L^p} \rightarrow +\infty$ dès lors que $p > 1$).

Théorème 1.1 (Blanchet, Dolbeault et Perthame [46, 12]). *Pour $\Omega = \mathbf{R}^2$ et si la donnée initiale n^{ini} vérifie $n^{ini}(|\ln n^{ini}| + (1 + |x|^2)) \in L^1(\mathbf{R}^2)$, alors la solution de (1.3) est globale en temps si $M < \frac{8\pi}{\chi}$, et explose en temps fini si $M > \frac{8\pi}{\chi}$.*

Ce phénomène d'explosion en temps fini se généralise en dimension $d \geq 3$ sur l'espace entier pour le système de Keller-Segel parabolique-elliptique (1.2) (voir [67] ; en dimension 1, les solutions sont globales en temps quelle que soit la valeur de M , voir [68]) et en dimension quelconque pour l'équation d'agrégation-diffusion avec potentiel logarithmique :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot ((-\nabla W * n)n) = \Delta n, & t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \\ W(x) = \frac{\chi}{2\pi} \ln |x|, \end{cases} \quad (1.4)$$

Théorème 1.2 (Calvez, Perthame et Sharifi Tabar [30]). *Pour $d \geq 1$ quelconque, si $\Omega = \mathbf{R}^d$ et si la donnée initiale n^{ini} vérifie $n^{ini}(|\ln n^{ini}| + (1 + |x|^2)) \in L^1(\mathbf{R}^2)$, alors la solution de (1.4) est globale en temps si $M < \frac{2d^2\pi}{\chi}$, et explose en temps fini si $M > \frac{2d^2\pi}{\chi}$.*

Notons que la valeur de la masse critique dans le théorème ci-dessus se retrouve formellement (on renvoie à [46] pour une preuve rigoureuse) en dérivant le moment d'ordre 2 de $n(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^d} |x|^2 n(t, x) dx = \int_{\mathbf{R}^d} |x|^2 \partial_t n(t, x) dx = 2 \int_{\mathbf{R}^d} x \cdot (\nabla W * n(t))(x) n(t, x) dx + 2dM,$$

par intégration par parties. En utilisant le fait que, pour $x \neq 0$, $\nabla W(x) = \frac{\hat{x}}{d\pi|x|} = \frac{x}{d\pi|x|^2}$ où on a noté $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$, et le fait que $\nabla W(-x) = -\nabla W(x)$, on peut écrire en utilisant un argument de symétrisation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^d} |x|^2 n(t, x) dx &= - \iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} (x - y) \cdot \frac{x - y}{d\pi|x - y|^2} n(t, x) n(t, y) dx dy + 2dM \\ &= -\frac{M^2}{d\pi} + 2dM = \frac{M}{d\pi} (2d^2\pi - M), \end{aligned}$$

loin.

ce qui permet de retrouver le fait que, si $M > 2d^2\pi$, les solutions de (1.4) ne peuvent pas être globales en temps, sans quoi le moment d'ordre 2 deviendrait négatif. Pour compléter le tableau, on renvoie à [30] pour l'existence globale de solutions pour (1.4), qui peut être obtenue en utilisant des estimations fines sur la fonctionnelle d'énergie $E(n) = \int_{\mathbf{R}^d} n(x) \ln n(x) dx + \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} W(x-y)n(x)n(y) dx dy$, qui sont liées à des inégalités du type Hardy-Littlewood-Sobolev logarithmique. Mentionnons enfin que, pour le cas critique dans le Théorème 1.2 i.e. $M = 2d^2\pi$, on peut exhiber une famille d'états stationnaires pour l'équation (1.4) (paramétrée par un paramètre de dilatation, l'équation étant dans ce cas invariante par dilatation [33]).

La concentration de masse conduit donc, dans de nombreux cas, à l'explosion en temps fini des solutions qui est un axe d'étude typique³ des modèles contenant un terme d'interaction du type $\nabla \cdot ((\nabla W * n)n)$, notamment lorsque le potentiel d'interaction W est singulier. Nous essayons de décrire ce phénomène un peu plus précisément dans le paragraphe suivant.

1.1.2 Le phénomène de concentration

On se concentre, dans ce manuscrit, non pas sur un système couplé général de type Keller-Segel mais sur l'équation d'agrégation seule avec diffusion (1.1), ou sans diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla \cdot (a[\varrho]\varrho) = 0, & t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \\ a[\varrho] = -\nabla W * \varrho, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}. \end{cases} \quad (1.5)$$

On n'abordera pas, dans ce manuscrit, de questions de type « masse critique ». On fixe donc $M = 1$, si bien que la dynamique de la population est désormais décrite par l'évolution de sa densité, qui est une mesure de probabilité, notée $\varrho(t)$ à la place de $n(t)$. Précisons maintenant ce que nous entendons par le phénomène d'agrégation et l'apparition de singularités en temps fini. La diffusion régularisant les solutions, on s'attend à ce que les solutions de l'équation sans diffusion (3.11) développent aussi des singularités en temps fini. Regardons-donc, dans ce paragraphe, le cas non diffusif $\varepsilon = 0$.

Exemple 1.1. Commençons par un cas très simple : on prend $d = 1$, $W(x) = |x|$ et pour donnée initiale ϱ^{ini} une densité régulière composée de deux gaussiennes. La solution exacte ne se calcule pas explicitement, même dans le cas $W(x) = |x|$. En effet, on verra que l'équation d'agrégation se ramène alors à celle de Burgers, pour laquelle la non linéarité empêche d'avoir une formule de représentation explicite, sauf dans des cas très particuliers (chocs, raréfactions). Aussi la description qui suit est-elle avant tout qualitative.

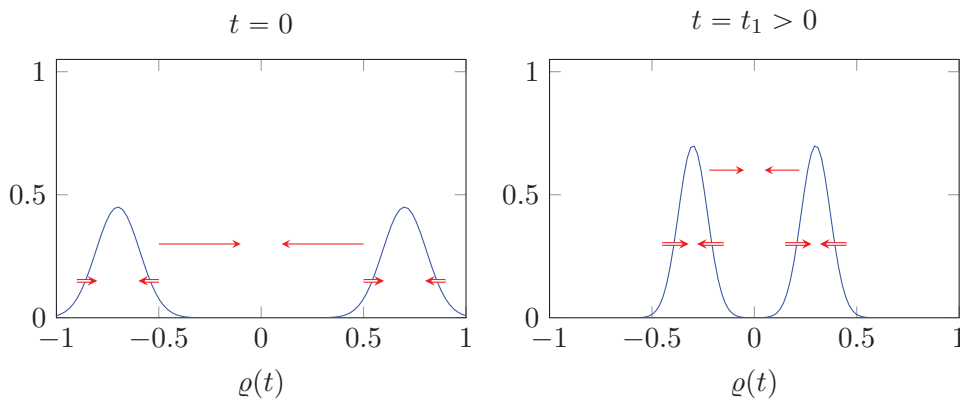


FIGURE 1.2 – Comportement de la solution de (3.11) pour $W(x) = |x|$, donnée initiale composée de deux gaussiennes, avant l'apparition de singularité ou la fusion des deux gaussiennes.

3. on pourrait citer de nombreuses autres variantes encore : diffusion non linéaire, diffusion fractionnaire, milieux poreux, agrégation sous contrainte...

La dynamique de l'équation d'agrégation (3.11) impose qu'une masse ponctuelle située au point x soit attirée par tous les autres points y , de façon proportionnelle à la masse $\varrho(t)(dy)$ située en y et au noyau $\nabla W(x - y)$. Ainsi, plus il y a de masse en un point donné, plus la masse restante va s'y concentrer. Concrètement, par définition du champ de vitesse, on a dans le cas présent :

$$a[\varrho(t)](x) = - \int \operatorname{sgn}(x - y)\varrho(t)(dy) = \int_{[x, +\infty[} \operatorname{sgn}(x - y)\varrho(t)(dy) - \int_{]-\infty, x]} \operatorname{sgn}(x - y)\varrho(t)(dy),$$

donc un individu (ou plus rigoureusement une masse de Dirac) situé au point x se déplacera à une vitesse égale à la masse à droite de cet individu moins celle à gauche.

Initialement (figure 1.2, $t = 0$), il y a donc, pour les points de la première gaussienne, une combinaison entre l'attraction vers le pic de cette première gaussienne et vers la seconde gaussienne. Ainsi, chacun des pics se resserre sur lui-même et se rapproche de l'autre (figure 1.2, $t = t_1$).

A ce stade, les deux bosses fusionnent (figure 1.3, $t = t_2$), puis (figure 1.3, $t = T$) la bosse restante se concentre jusqu'à ce qu'apparaisse une masse de Dirac qui reste alors stationnaire.

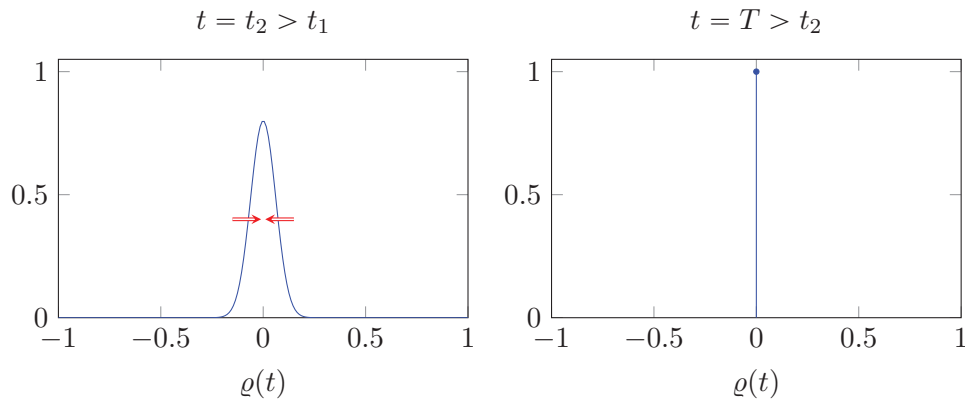


FIGURE 1.3 – Comportement de la solution de (3.11) pour $W(x) = |x|$ en temps long, donnée initiale composée de deux gaussiennes (fusion puis concentration).

L'autre comportement possible pourrait avoir lieu si W était davantage attractif, par exemple pour le potentiel de Morse $W(x) = 1 - e^{-|x|}$. Dans ce cas, (figure 1.4, $t = t'_2$) chacune des bosses se concentre en une masse de Dirac, qui se rejoignent alors (figure 1.4, $t = T'$) en un seul Dirac. Dans les deux cas, l'apparition de masse(s) de Dirac ne peut arriver que parce que le potentiel présente une singularité en l'origine. S'il était régulier, alors la solution serait régulière en temps global.

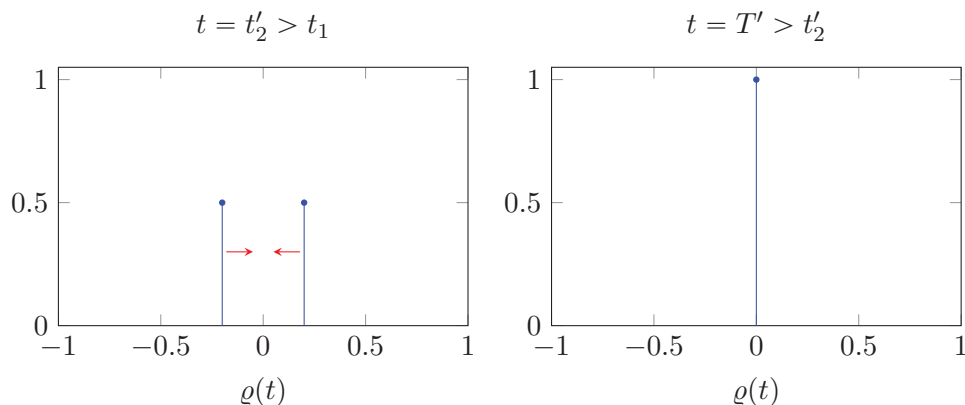


FIGURE 1.4 – Solution de (3.11) pour $W(x) = 1 - e^{-|x|}$ en temps long, donnée initiale composée de deux gaussiennes (concentration puis fusion).

Il a en fait été prouvé qu'en temps fini, lorsque le potentiel présente une singularité Lipschitz en 0, les solutions faibles explosaient en temps fini en norme L^p [7, 9, 8] quelle que soit la régularité et la répartition de la donnée initiale. Mais lorsque ϱ comporte des singularités et que ∇W est discontinu en 0, le produit $a[\varrho]\varrho = -(\nabla W * \varrho)\varrho$ n'a pas de sens distributionnel. On dit que l'équation d'agrégation est mal posée, au sens où elle fait apparaître un terme qui n'a pas de sens dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.

Se pose alors la question de continuation des solutions après le temps d'explosion. On peut faire un parallèle formel avec l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0, \quad (1.6)$$

pour laquelle l'apparition de chocs en temps fini est connue pour les solutions régulières, et appelle à la définition de solutions faibles disons dans $L^\infty \cap BV$ pour continuer les solutions après le temps d'apparition du choc. Cette analogie entre choc et singularités (disons masses de Dirac) sera précisée à la section 2.2.1 et servira plusieurs de nos résultats.

Pour l'équation d'agrégation, on convient donc de remplacer le champ de vitesse $a[\varrho]$ par :

$$\hat{a}[\varrho](x) := - \int_{y \neq x} \nabla W(x-y)\varrho(dy), \quad (1.7)$$

ce qui modélise l'hypothèse – raisonnable – que les particules situées au même endroit n'interagissent pas entre elles. On donnera à la section 1.2 une justification rigoureuse de ce choix, due à Carrillo, Di Francesco, Figalli, Laurent et Slepcev, et basée sur la théorie d'Ambrosio, Gigli et Savaré de flots de gradients dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$. Plus précisément, on verra que la définition de $\hat{a}[\varrho]$ apparaît lors du calcul de la pente de la fonctionnelle d'interaction dont l'équation d'agrégation est un flot de gradient, et provient essentiellement de la symétrie de W .

Exemple 1.2. Dans le cas de l'exemple 1.1, à partir du moment où la solution est composée de deux Dirac : $\varrho^{ini} = \frac{1}{2}\delta_{x_1} + \frac{1}{2}\delta_{x_2}$, on peut donc continuer les solutions et en fait donner explicitement la solution de (3.11).

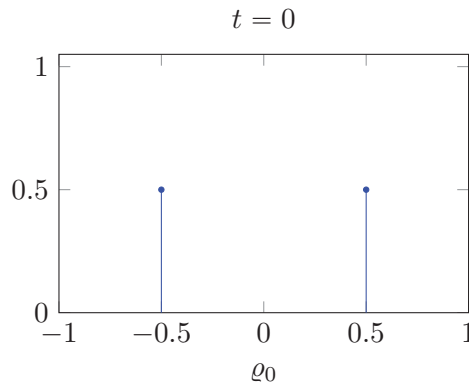


FIGURE 1.5 – Donnée initiale pour $x_1 = -0.5$ et $x_2 = 0.5$

Notons $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions respectives des deux masses de Dirac. Tant que celles-ci ne sont pas confondues, la vitesse de la première particule est $\hat{a}[\varrho(t)](x_1(t)) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ et celle de la seconde est $\hat{a}[\varrho(t)](x_2(t)) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. La dynamique est donc la suivante. Tant que $x_1(t) < x_2(t)$, on a $\varrho(t) = \frac{1}{2}\delta_{x_1(t)} + \frac{1}{2}\delta_{x_2(t)}$ où :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 + \frac{t}{2}, \\ x_2(t) = x_2 - \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Ceci est donc valable tant que $t < T := x_2 - x_1$. Pour $t = T$, les deux masses de Dirac s'agrègent en une seule au point $x_1 + \frac{T}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, et la solution reste alors stationnaire : $\varrho(t) = \delta_{\frac{x_1 + x_2}{2}}$ pour tout $t \geq T$.

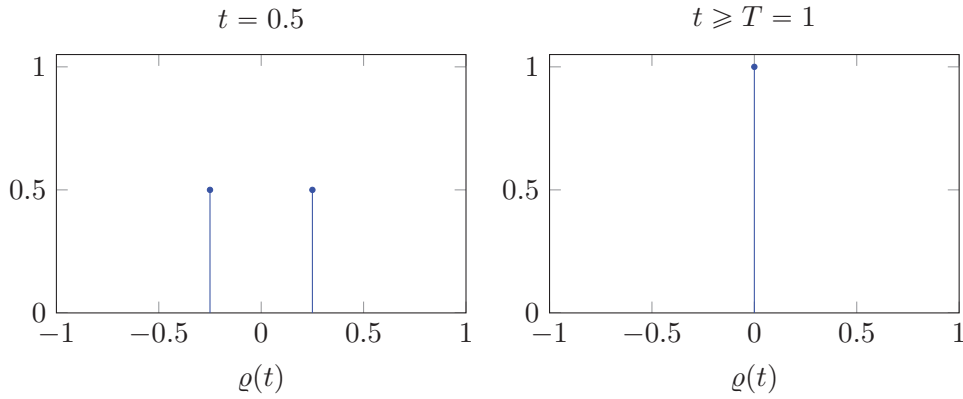


FIGURE 1.6 – Solution de (3.11) pour $W(x) = |x|$, donnée initiale deux masses de Dirac

1.1.3 Hypothèses et nomenclature des noyaux d'interaction

On trouve, dans la littérature, différentes classes de noyaux d'interaction. Dans ce manuscrit, on considérera souvent des potentiels d'interaction satisfaisant aux hypothèses suivantes :

- (A0) W est symétrique, i.e. $W(x) = W(-x)$, et $W(0) = 0$,
- (A1) $W \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$,
- (A2) W est lipschitzien : il existe $a_\infty \geq 0$ telle que $|W(x) - W(y)| \leq a_\infty |x - y|$,
- (A3) Pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$, W est λ -convexe, i.e. $W(x) - \lambda \frac{|x|^2}{2}$ est convexe⁴.

Parfois, l'hypothèse (A2) peut être remplacée par l'hypothèse de croissance au plus quadratique à l'infini :

$$(A2\text{-bis}) \quad \exists C > 0, \forall x \in \mathbf{R}^d, \quad |W(x)| \leq C(1 + |x|^2).$$

Si W est lipschitzien sur un voisinage de 0, et de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage épointé de 0 mais non différentiable en 0, on dit que W présente une singularité/discontinuité⁵ Lipschitz ou un point Lipschitz en 0 (voir [6, 7]). Un potentiel vérifiant les hypothèses (A0)-(A1)-(A2)-(A3) et présentant une singularité Lipschitz en 0 est appelé pointu [36, 90, 43].

Il pourra arriver qu'on désigne simplement par potentiel λ -convexe un potentiel vérifiant (A0)-(A1)-(A2)-(A3). Parmi les potentiels pointus attractifs, on peut penser à $|x|$, $1 - e^{-|x|}$. Enfin, lorsque W est radial, c'est-à-dire de la forme $W(x) = w(|x|)$, on dira qu'il est attractif si w est décroissante, et répulsif si w est croissante.

4. avec cette convention, le paramètre λ caractérise à quel point W est convexe, au sens où $\nabla^2 W \geq \lambda \text{Id}$: si $\lambda > 0$, W est strictement convexe.

5. W est bien continu quand même en 0, car lipschitzien sur un voisinage de 0.

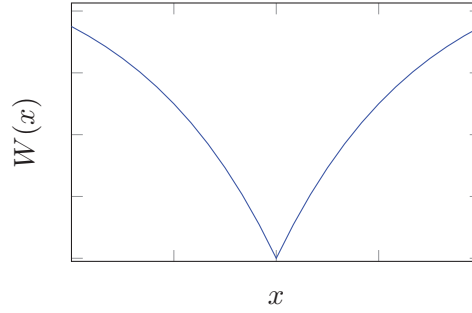


FIGURE 1.7 – Un potentiel pointu

Remarque 1.1.

- Les hypothèses (A2) et (A3) avec $\lambda > 0$ sont incompatibles, car la première impose une croissance au plus linéaire de W , et la seconde une croissance au moins quadratique. Lorsque l'on suppose (A2) et (A3), c'est donc que $\lambda \leq 0$ ou $\lambda > 0$ mais que l'on ne considère que des données à support compact. Dans ce cas, en l'absence de diffusion, le support décroît avec le temps car W est strictement convexe donc 0 est en fait minimum global, si bien que W est attractif. L'hypothèse (A2) est alors à prendre au sens où W est lipschitzien sur le « double⁶ » du support de la donnée initiale.
- De plus, au moins en dimension 1, la λ -convexité implique que W est lipschitzien sur voisinage de 0. En effet, $W'(x) - \lambda x$ est croissant donc W' doit être borné au voisinage de 0. Intuitivement, cela implique (même si on le demande à nouveau avec la condition (A2), qui elle, est globale) que W n'est pas plus singulier en 0 que $|\cdot|$.
- Dans la littérature, on trouve souvent comme dénomination *mildly singular* pour les potentiels lipschitziens et $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ (et éventuellement \mathcal{C}^1 en 0) et fortement singulier pour les potentiels de l'ordre de $|x|^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ [79, 7, 9, 8, 11].

Exemple 1.3 (Potentiel Newtonien).

On appelle potentiel Newtonien, noté u_d , la fonction de Green du laplacien sur tout l'espace \mathbf{R}^d , c'est-à-dire la solution fondamentale de l'équation de Poisson $-\Delta u = \delta_0$. Celui-ci est donné par :

$$u_d = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{si } d = 2, \\ \frac{1}{d(2-d)\omega_d} |x|^{2-d} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.8)$$

ω_d étant la mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbf{R}^d . Le potentiel Newtonien apparaît dans les modèles de type Keller-Segel (1.2) pour le chimiotactisme, lorsque $\kappa = \alpha = 0$, si bien que la concentration de chimioattractant c résout l'équation de Poisson de terme source l'inconnue ρ . Il s'agit d'un potentiel pointu seulement si $d = 1$. Il est, au sens de Biler et al. [11], *mildly singular* si $d = 1$ et fortement singulier si $d \geq 3$, le cas logarithmique $d = 2$ étant un peu intermédiaire.

Enfin, nous utiliserons pour certains résultats l'hypothèse suivante, pour $p \geq 1$:

$$(A4-p) \quad \exists C > 0, \forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \nabla W(x) \cdot x \geq C|x|^p.$$

Lemme 1.1. *L'hypothèse (A4-p) implique que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad W(x) \geq C \frac{|x|^p}{p}$$

Par ailleurs, si W est λ -convexe, alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \nabla W(x) \cdot x \geq \lambda|x|^2.$$

Pour $\lambda > 0$, la λ -convexité de W implique donc que (A4-2) est vérifiée avec $C = \lambda$.

6. c'est à dire un domaine Ω tel que, si x et y sont dans le support, alors $x - y \in \Omega$, si bien que $\nabla W * \rho$ soit bien L^∞ .

Démonstration. Supposons que (A4- p) soit vérifiée. Soit $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. On calcule, pour $t > 0$:

$$\frac{d}{dt}W(tx) = x \cdot \nabla W(tx) \geq C|x|^{p-1},$$

d'où, en intégrant entre 0 et 1, $W(x) \geq C \frac{|x|^p}{p} + \underbrace{W(0)}_{=0}$. A nouveau puisque $W(0) = 0$, le résultat reste vrai pour $x = 0$. Le second point provient essentiellement de (1.11), et le fait que ∇W soit borné par a_∞ donne l'égalité pour $x = 0$ étant entendu que $\nabla W(0) \cdot 0 = 0$. \square

La réciproque du lemme 1.1 n'est pas vraie. Pour $p = 1$, l'hypothèse (A4- p) exige que la dérivée radiale de W soit minorée par $C > 0$, ce qui implique que W est « vraiment pointu en l'origine » mais pas aussi globalement strictement attractif : on ne peut avoir ni puits ni plateaux (figure 1.8).

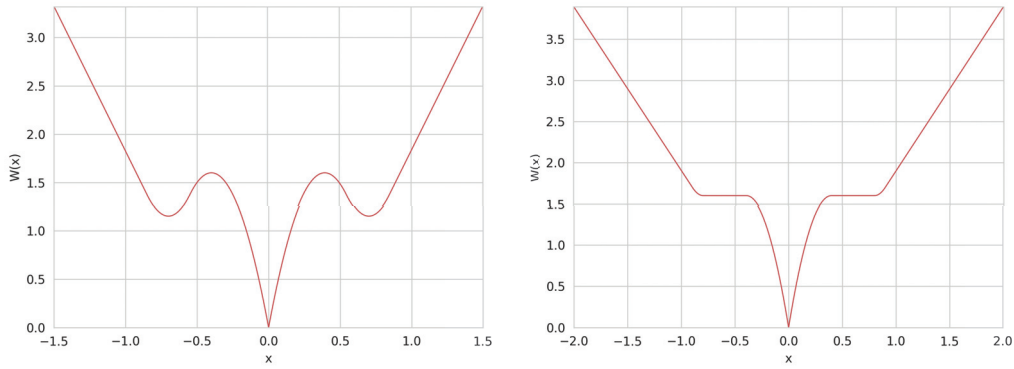


FIGURE 1.8 – Potentiels vérifiant $W(x) \geq C|x|$ mais pas (A4-1)

1.2 L'équation d'agrégation : plusieurs notions de solutions

Comme nous l'avons vu, les modèles faisant intervenir un terme agrégatif tendent à développer des masses de Dirac en temps fini. Pour cette raison, il faut savoir définir des solutions en un sens très faible, solutions qui peuvent ne pas avoir davantage de régularité que celle d'une mesure bornée. Nous proposons dans cette section un aperçu des travaux en ce sens, qui permettent de définir de façon rigoureuse les solutions mesures de l'équation d'agrégation avec ou sans diffusion. Dans toute cette section, comme dans la majeure partie des énoncés d'existence globale de solutions, nous considérons des potentiels satisfaisant au moins les hypothèses (A0)-(A1)-(A2) ou (A2-bis).

Commençons par l'équation d'agrégation visqueuse (1.1). Sous ces hypothèses, Carrillo, Gomez-Castro, Yao et Zeng montrent par une méthode de point fixe et un argument de bootstrap à partir de la formule de Duhamel, que les solutions existent, sont uniques, et sont régulières. Il n'y a donc pas d'apparition de singularités en temps fini, donc pas besoin de définir le produit $a[\varrho]\varrho$.

Théorème 1.3 ([35], Théorèmes 1.1, 2.1 and 2.2). *Supposons que W satisfasse les hypothèses (A0)-(A1)-(A2). Soit $\varepsilon > 0$ et $\varrho_0^\varepsilon \in L^1_+(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $L^1(\mathbf{R}^d)$ positives.*

- (1) *Pour tout $T > 0$, il existe une unique solution $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], L^1_+(\mathbf{R}^d))$ au problème d'agrégation-diffusion (1.1) au sens mild, c'est-à-dire :*

$$\forall t \in [0, T], \quad \varrho_t^\varepsilon = G_{\varepsilon t} * \varrho_0^\varepsilon + \int_0^t (\nabla G_{\varepsilon(t-s)}) * ((\nabla W * \varrho_s^\varepsilon) \varrho_s^\varepsilon) ds,$$

où G est le noyau de la chaleur donné par :

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

(2) Cette solution est en fait une solution classique appartenant, pour tout $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$ à $\mathcal{C}([0, T], W^{k,p}(\mathbf{R}^d))$.

Il ne faut donc porter un soin particulier à la définition des solutions et à celle du produit $a[\varrho]\varrho$ que lorsque $\varepsilon = 0$. Un autre cas où les solutions sont régulières et bien posées globalement en temps est celui des potentiels réguliers, même si $\varepsilon = 0$ (voir [91]). On s'intéresse donc désormais uniquement aux solutions de (3.11), pour des potentiels vérifiant (A0)-(A1)-(A2) ou (A2-bis), avec en tête des potentiels pointus. On introduit successivement trois notions de solutions : les solutions de dualité à la Bouchut et James, les solutions flots de gradient dans l'espace de Wasserstein, et les solutions à la Filippov.

Puisque l'on travaillera avec des solutions mesures, on rappelle rapidement quelques notations. On note $\mathcal{C}(\mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de \mathbf{R}^d dans \mathbb{R} et $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d)$ (resp. $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^d)$) le sous-espace des fonctions de limite nulle à l'infini (resp. des fonctions continues bornées, des fonctions continues à support compact). On note également $\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des mesures boréliennes signées de variation totale finie, systématiquement muni de la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d), \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d))$. Pour une suite $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$, on note la convergence faible (au sens des mesures) de $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ϱ par $\varrho_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \varrho$. Cela revient à demander que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d), \quad \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) d\mu_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) d\mu(x),$$

Pour $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ et Z un champ de vecteurs mesurable, on note $Z_{\#}\varrho$ la mesure image (pushforward) de ϱ par Z , définie par l'égalité suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}^d), \quad \int \varphi(x) Z_{\#}\varrho(dx) = \int \varphi(Z(x)) \varrho(dx).$$

Dans l'égalité ci-dessus ainsi que dans tout le manuscrit, lorsque le domaine d'intégration n'est pas précisé, il s'agira de l'espace entier. Si $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ est une mesure positive, on notera également $\varrho \ll \mu$ lorsque ϱ est absolument continue par rapport à μ .

Enfin, on renvoie à l'annexe A.1 pour de plus amples rappels sur les différentes notions de convergence des mesures.

1.2.1 Solutions de dualité en dimension 1

L'équation de continuité à champ de vitesse discontinu

Intéressons-nous un instant à un problème en apparence plus simple, à savoir l'équation de continuité à champ de vitesse a fixé :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (a\varrho) = 0, \tag{1.9}$$

On s'intéresse au cas où le champ de vitesses $a(t, x)$ est seulement lipschitzien à droite, c'est-à-dire tel qu'il existe $\alpha \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$ vérifiant :

$$\forall t > 0, \forall x, y \in \mathbf{R}^d, \quad (a(t, x) - a(t, y)) \cdot (x - y) \leq \alpha(t) \|x - y\|^2. \tag{1.10}$$

En effet, c'est exactement la régularité dont on disposera pour le champ de vitesse $\hat{a}[\varrho]$ de l'équation d'agrégation lorsque W est λ -convexe :

Lemme 1.2. *Si W est λ -convexe, alors pour toute mesure de probabilité ϱ , le champ de vitesse $\widehat{a}[\varrho]$ vérifie (1.10) avec $\alpha(t) = -\lambda$. En particulier, $\widehat{a}[\varrho]$ est lipschitzien à droite.*

Démonstration. La λ -convexité de W implique que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}, \quad (\nabla W(x) - \nabla W(y)) \cdot (x - y) \geq \lambda |x - y|^2.$$

En prenant $y = -x$ et en utilisant le fait que ∇W est impair, on en déduit en particulier :

$$\forall x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}, \quad \nabla W(x) \cdot x \geq \lambda |x|^2, \quad (1.11)$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \widehat{\nabla W}(x) \cdot x \geq \lambda |x|^2.$$

On en déduit :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^d, \quad (\widehat{\nabla W}(x) - \widehat{\nabla W}(y)) \cdot (x - y) \geq \lambda |x - y|^2.$$

On retrouve alors l'inégalité (1.10) :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbf{R}^d, \quad \widehat{a}[\varrho](x) - \widehat{a}[\varrho](y) &= - \iint (\widehat{\nabla W}(x - z) - \widehat{\nabla W}(y - z)) \cdot (x - z - (y - z)) \varrho(dz) \\ &\leq -\lambda \iint |x - y|^2 \varrho(dz) = -\lambda |x - y|^2. \end{aligned}$$

□

Comme pour l'agrégation, le fait que a ne soit que lipschitzien à droite implique que $a(t)$ peut être discontinu, et donc que le produit $a\varrho$ ne soit pas bien défini, même au sens des distributions, lorsque ϱ est une mesure. En dimension $d = 1$, Bouchut et James [17] introduisent la notion de solution de dualité qui permet de lever cette ambiguïté, et ainsi de définir les solutions à valeurs mesures de l'équation de continuité :

$$\partial_t \varrho + \partial_x(a\varrho) = 0 \quad (1.12)$$

avec un champ de vitesse $a(t, x)$ discontinu et seulement lipschitzien à droite (c'est-à-dire, en dimension 1, tel que $\partial_x a(t, x) \leq \alpha(t)$). Ils y définissent une notion de solution en dualité contre une classe de fonctions tests appropriées, appelées solutions réversibles de l'équation duale $\partial_t p + a\partial_x p = 0$, et il est prouvé que celles-ci sont des solutions aux sens des distributions de l'équation de continuité où a est remplacé par un représentant adapté noté \widehat{a} .

Définition 1.1 (Solutions réversibles de l'équation duale). *On suppose $d = 1$. Soit $T > 0$. Soit a un champ de vitesses lipschitzien à droite défini sur $]0, T[\times \mathbf{R}$ et soit p^T une application lipschitzienne sur \mathbf{R} . On note \mathcal{L} l'ensemble des solutions lipschitziennes du problème dual backward :*

$$\partial_t p + a(t, x)\partial_x p = 0, \quad (1.13a)$$

$$p(T) = p^T. \quad (1.13b)$$

Pour $p^T = 0$, l'ensemble \mathcal{L} est appelé ensemble de solutions exceptionnelles et noté \mathcal{E} .

On dit alors que $p \in \mathcal{L}$ est une solution réversible de (1.13) si p est localement constante sur $\{(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R} \mid \exists p_e \in \mathcal{E}, p_e(t, x) \neq 0\}$.

La notion de solution réversible permet d'assurer l'unicité de la solution de l'équation duale. La notion de solution de dualité pour (1.12) est alors basée sur le calcul formel suivant : si ϱ résout l'équation de continuité, et p l'équation duale (1.13), alors :

$$\begin{aligned} \partial_t(p\varrho) + \partial_x(ap\varrho) &= \varrho\partial_t p + p\partial_t \varrho + a\varrho\partial_x p + p\partial_x(a\varrho) \\ &= \varrho(\partial_t p + a\partial_x p) + p(\partial_t \varrho + \partial_x(a\varrho)) = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\frac{d}{dt} \langle \varrho, p \rangle = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} p(t, x) \varrho(t, dx) = - \int_{\mathbf{R}} \partial_x (ap\varrho) = 0.$$

Définition 1.2 (Solutions de dualité de l'équation de continuité 1D à champ lipschitzien à droite). *On suppose $d = 1$. Soit $T > 0$ et a un champ de vitesses lipschitzien à droite défini sur $]0, T[\times \mathbf{R}$. On dit que $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d))$ est une solution de dualité de (1.12) si pour tout $\tau \in]0, T]$ and pour tout solution réversible p de (1.13) à support compact en espace, $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} p(t, x) \varrho(t, dx)$ est constante sur $[0, \tau]$.*

Théorème 1.4 (Bouchut et James [17]). *On suppose $d = 1$. Soit $\varrho^{ini} \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R})$ et a un champ de vitesses lipschitzien à droite défini sur $]0, +\infty[\times \mathbf{R}$. Il existe une unique solution de dualité ϱ à l'équation de continuité (1.12) de donnée ϱ^{ini} . Cette solution est la mesure image de ϱ^{ini} par le flot backward X défini comme l'unique solution réversible de :*

$$\begin{aligned} \partial_t X + a \partial_x X &= 0 \quad \text{sur }]0, t[\times \mathbf{R}, \\ X(t, t, x) &= x, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, T]$, $\varrho(t) = X(t, 0, \cdot) \# \varrho^{ini}$.

De plus, il existe un représentant de a , noté \hat{a} , égal à a presque partout, tel que ϱ résolve, au sens des distributions, l'équation de continuité (1.12) où a est remplacé par \hat{a} .

Remarque 1.2. Réciproquement, si a est lipschitzien à droite et continu par morceaux, alors toute solution distributionnelle de $\partial_t \varrho + \partial_x \hat{a} \varrho = 0$, où \hat{a} est un représentant continu quelconque de a , est solution de dualité de $\partial_t \varrho + \partial_x (a\varrho) = 0$, ([17] théorème 4.3.7, [70] théorème 3.5).

Pour l'équation d'agrégation

La démarche de Bouchut et James [17] a ensuite été adaptée par les mêmes auteurs au système des gaz sans pression [19] puis au système de Keller-Segel parabolique-elliptique unidimensionnel, c'est-à-dire à l'équation d'agrégation avec potentiel de Bessel, par James et Vauchelet [73]. Dans [70], les mêmes auteurs étendent la définition de solution de dualité et l'existence et unicité de celle-ci à l'équation d'agrégation avec potentiel vérifiant les hypothèses (A0)-(A1)-(A2-bis)-(A3) avec $\lambda \leq 0$.

Définition 1.3 (Solution de dualité pour l'équation d'agrégation 1D). *On suppose $d = 1$. Soit $T > 0$ et $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_b(\mathbf{R}))$. On dit que ϱ est une solution de dualité de l'équation d'agrégation (3.11) s'il existe $\tilde{a}[\varrho] \in L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})$ lipschitzien à droite tel que, pour tout $0 < \tau < t < T$, ϱ soit solution de dualité de*

$$\partial_t \varrho + \partial_x \tilde{a}[\varrho] \varrho = 0$$

*sur $]\tau, t[$ et $\tilde{a} = -\nabla W * \varrho$ presque partout.*

Théorème 1.5 (James et Vauchelet, [70] théorème 3.7). *On suppose $d = 1$ et que W vérifie les hypothèses (A0)-(A1)-(A2-bis)-(A3) avec $\lambda \leq 0$. Soit $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_1(\mathbf{R})$. Pour tout $T > 0$, il existe un unique $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_b(\mathbf{R}))$ tel que $\varrho(0) = \varrho^{ini}$, $\varrho(t) \in \mathcal{P}_1(\mathbf{R})$ pour tout $t \in [0, T]$, et ϱ soit solution de dualité de (3.11) au sens de la définition 1.3, avec $\tilde{a}[\varrho] = \hat{a}[\varrho]$, où on rappelle que :*

$$\hat{a}[\varrho] := - \int_{y \neq x} \nabla W(x - y) \varrho(dy).$$

Remarque 1.3. Le résultat est même un peu plus général : il peut être étendu à un flux de la forme $f(\nabla W * \varrho) \varrho$ où f est une fonction éventuellement non linéaire, sous réserve de supposer (A2) à la place de (A2-bis).

1.2.2 Solutions flots de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$

On revient en dimension $d \geq 1$ quelconque. On commence par introduire les distances de Wasserstein, qui permettent de quantifier l'écart entre deux mesures, ainsi que les espaces métriques associés, qui fixent un cadre à l'étude de l'équation (3.11) comme flot de gradient de l'énergie d'interaction.

Distances de Wasserstein et transport optimal

Pour $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ et $r \in [0, +\infty)$, on note $M_r(\varrho)$ le moment d'ordre r de ϱ , donné par $M_r(\varrho) = \int_{\mathbf{R}^d} |x|^r \varrho(dx)$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne. On note aussi $\bar{M}_r(\varrho)$ son moment centré, donné par $\bar{M}_r(\varrho) = \int_{\mathbf{R}^d} |x - x_0|^r \varrho(dx)$, où $x_0 = \int_{\mathbf{R}^d} x \varrho(dx)$ est le barycentre (ou centre de masse) de ϱ .

On note aussi $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbf{R}^d et, pour $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des mesures de probabilité ayant un moment d'ordre p fini. La quantité suivante définit une distance sur $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, appelée distance de Wasserstein :

$$W_p(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \left\{ \iint |x - y|^p \gamma(dx, dy) \right\}^{1/p}, \quad (1.15)$$

où $\Gamma(\mu, \nu)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ ayant pour marginales μ et ν . Cette quantité correspond au coût minimal pour passer de la mesure de probabilité μ à ν : c'est le problème du transport optimal de μ vers ν (voir [1, 112, 128]). Pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, $\gamma(A \times B)$ désigne la quantité de masse à déplacer de A à B pour passer de μ à ν . Rappelons que cette formulation, due à Kantorovitch, est une relaxation du problème de Monge suivant :

$$\inf \left\{ \int |x - T(x)|^p \mu(dx); T : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d \text{ mesurable telle que } \nu = T\#\mu \right\},$$

qui peut ne pas admettre de solution (si μ est un Dirac par exemple, ν doit forcément être un Dirac). La formulation de Kantorovitch autorise à transférer de la masse d'un point x en plusieurs points y et admet toujours une solution. La borne inférieure dans (3.13) est donc, en fait, atteinte, et tout point de minimum est appelé plan de transport optimal pour μ et ν .

On note $\Gamma_0(\mu, \nu)$ l'ensemble des plans optimaux et l'ensemble $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ muni de la distance W_p est appelé espace de Wasserstein d'ordre p et noté $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$.

Les espaces de Wasserstein sont ordonnés : si $0 < q \leq p < +\infty$, on a, par inégalité de Hölder, $M_q(\varrho) \leq M_p(\varrho)^{q/p}$. Donc en particulier, pour $1 \leq q \leq p$, $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{P}_q(\mathbf{R}^d)$, et on a pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, $W_q(\mu, \nu) \leq W_p(\mu, \nu)$ (par inégalité de Jensen pour $|\cdot|^{p/q}$). L'inclusion inverse n'est en général pas vraie sauf en domaine Ω borné, sur lequel on a $W_p(\mu, \nu) \leq W_q^{\frac{q}{p}}(\mu, \nu) \text{diam}(\Omega)^{1-\frac{q}{p}}$ (voir [128]).

Enfin, on parle de convergence dans $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$ d'une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$ vers une mesure $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ lorsque, de façon équivalente,

- (1) $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} \mu$ et $\int |x|^p d\mu_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int |x|^p d\mu(x)$,
- (2) $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} \mu$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |x|^p d\mu_n(x) \leq \int |x|^p d\mu(x)$,
- (3) $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} \mu$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq R} |x|^p d\mu_n(x) = 0$,
- (4) pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^d)$ telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $\varphi(x) \leq C(1 + |x|^p)$, on a $\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) d\mu_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) d\mu(x)$.

On peut montrer ([128], théorème 7.12) que chacun des points ci-dessus équivaut à demander que $W_p(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On termine les considérations de convergence avec une propriété de compacité dans l'espace de Wasserstein :

Proposition 1.1 (Les bornés de $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$ sont des compacts de $\mathbb{W}_q(\mathbf{R}^d)$ pour $q < p$). *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(\varrho_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$ telle que $M_p(\varrho_n)$ soit uniformément borné par rapport à $n \in \mathbf{N}$. Alors il existe une sous-suite de ϱ_n qui converge faiblement vers un certain $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. De plus, pour tout $q \in [1, p[$, la convergence a lieu dans $\mathbb{W}_q(\mathbf{R}^d)$.*

Démonstration. Voir le dernier lemme des préliminaires dans [89]. □

Enfin, la convolution par une mesure fixée fait décroître la distance de Wasserstein :

Proposition 1.2. *Soit $p \geq 1$, $\varrho, \mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. Alors $W_p(\varrho * \mu, \varrho * \nu) \leq W_p(\mu, \nu)$.*

Démonstration. Rappelons que $\varrho * \mu$ est toujours une mesure de probabilité sur \mathbf{R}^d bien définie dès que ϱ et μ sont des mesures de probabilité, par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d), \quad \langle \varrho * \mu, \varphi \rangle := \iint \varphi(x + y) \varrho(dx) \mu(dy).$$

Par ailleurs, puisque $\varrho, \mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, $\varrho * \mu, \varrho * \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. En effet, en prenant $\varphi(x) = |x|^p$ dans l'expression ci-dessus (en réalité, il faudrait multiplier par une fonction cut-off), on a :

$$M_p(\varrho * \mu) = \iint |x + y|^p \varrho(dx) \mu(dy) \leq 2^p \left(\iint (|x|^p + |y|^p) \varrho(dx) \mu(dy) \right) = 2^p (M_p(\varrho) + M_p(\mu)),$$

donc $M_p(\varrho * \mu) < +\infty$, et pareil pour $\varrho * \nu$. En fait, si $p \in \mathbf{N}^*$, on a même, par formule du binôme :

$$M_p(\varrho * \mu) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M_k(\varrho) M_{p-k}(\mu).$$

Mais venons-en à la preuve. Soit $\gamma \in \Gamma_0(\mu, \nu)$ un plan optimal pour le coût $c(x, y) = |x - y|^p$. On définit $\gamma' \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ par

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d), \quad \iint \psi(x, y) \gamma'(dx, dy) = \iint \int \psi(x + z, y + z) \varrho(dz) \gamma(dx, dy).$$

Alors $\gamma' \in \Gamma(\varrho * \mu, \varrho * \nu)$ et le coût total associé à γ' égale celui associé à γ . En effet, en écrivant par exemple, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d)$,

$$\iint \varphi(x) \gamma'(dx, dy) = \iint \int \varphi(x + z) \varrho(dz) \gamma(dx, dy) = \int \int \varphi(x + z) \varrho(dz) \mu(dx) = \langle \varrho * \mu, \varphi \rangle,$$

donc la première marginale de γ' est $\varrho * \mu$ et, de même, la seconde est $\varrho * \nu$. Le fait que le coût total soit préservé provient simplement du fait que le coût c soit invariant par translation $(x, y) \leftarrow (x + z, y + z)$ et d'un changement de variable dans l'intégrale. On a donc :

$$W_p^p(\varrho * \mu, \varrho * \nu) \leq \iint |x - y|^p \gamma'(dx, dy) = \iint |x - y|^p \gamma(dx, dy) = W_p^p(\mu, \nu).$$

□

Théorie des flots de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$

Il est assez naturel de voir l'équation d'agrégation-diffusion (1.1) comme une équation de Fokker-Planck $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \nabla V) = \varepsilon \Delta \varrho$, avec un potentiel dépendant de la densité, donné par $V = -\nabla W * \varrho$. Pour l'équation de Fokker-Planck, les désormais célèbres travaux de Jordan, Kinderlehrer et Otto [77], donnent, au moyen d'un schéma d'Euler implicite généralisé, dont la marche en temps s'écrit :

$$\varrho_{\Delta t}^{n+1} \in \arg \min \left\{ \frac{1}{2\Delta t} W_2^2(\varrho, \varrho_{\Delta t}^n) + F^\varepsilon(\varrho); \varrho \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \right\}, \quad (1.16)$$

l'existence d'une solution faible à valeurs $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ en montrant la convergence⁷ de l'interpolation obtenue à partir des $\varrho_{\Delta t}^n$. Dans le schéma ci-dessus, la fonctionnelle F^ε est la somme de l'énergie potentielle et de l'entropie de Boltzmann que l'on définira plus loin. Ce schéma, communément appelé schéma de JKO, est basé sur le fait que, dans l'espace de Wasserstein $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$, l'équation de Fokker-Planck dispose d'une structure de flot de gradient. Ce point de vue a permis à Carrillo, Di Francesco, Figalli, Laurent, Slepcev [31] de montrer l'existence de solutions à valeurs mesures pour l'équation d'agrégation (3.11) avec potentiel localement attractif vérifiant (A0)-(A1)-(A2-bis)-(A3) avec $\lambda \leq 0$, en montrant que le schéma de JKO était bien posé et convergeait.

Avant de formaliser ce qu'est un flot de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$, intéressons-nous un instant au cas euclidien. Si on se donne une fonctionnelle $F : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ suffisamment régulière (si F n'est que convexe, la définition aura encore un sens en remplaçant le gradient ci-après par la sous-différentielle), un flot de gradient pour F sur \mathbf{R}^d est une courbe, disons \mathcal{C}^1 , $x : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ solution de l'EDO

$$x'(t) = -\nabla F(x(t)).$$

Ce point de vue permet d'obtenir facilement, du moins formellement, des propriétés très intéressantes comme la décroissance de l'énergie le long des solutions :

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = x'(t) \cdot \nabla F(x(t)) = -|x'(t)|^2 \leq 0,$$

l'unicité des solutions au problème de Cauchy si F est λ -convexe, due au calcul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x_1(t) - x_2(t)|^2 &= (x_1(t) - x_2(t)) \cdot (x_1'(t) - x_2'(t)) \\ &= -(x_1(t) - x_2(t)) \cdot (\nabla F(x_1(t)) - \nabla F(x_2(t))) \\ &\leq -\lambda |x_1(t) - x_2(t)|^2, \end{aligned}$$

qui donne, après application d'un lemme de Grönwall, $|x_1(t) - x_2(t)| \leq e^{-\lambda t} |x_1(0) - x_2(0)|$. Ou encore, comme nous l'avons vu, une méthode numérique – le schéma de JKO – d'approximation des solutions qui permet aussi d'en montrer l'existence.

Formaliser ce qu'est un flot de gradient dans l'espace de Wasserstein $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ a depuis donné lieu à de nombreux travaux, notamment ceux de Ambrosio, Gigli et Savaré dont la monographie [1] fait désormais référence. La vision géométrique des flots de gradient est basée sur le calcul d'Otto sur une variété Riemannienne (X, g) où g_x est une forme quadratique positive définie sur l'espace tangent à X en x , noté $Tan_x X$. On peut définir le gradient $\nabla_x F$ d'une fonctionnelle $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable en $x \in X$ par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} &= g_x(\nabla_x F, v), \\ \nabla_x F &\in Tan_x X, \end{aligned}$$

7. uniformément en temps à valeurs dans \mathbb{W}_2 et aussi L^1 en temps-espace

pour tous $v \in \text{Tan}_x X$ et $\gamma(t)$ courbe régulière sur X vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Un flot de gradient pour F est alors une solution de l'EDO $\frac{dx}{dt} = -\nabla_x F$.

Dans ce manuscrit, nous préférons à cette vision abstraite celle de [112]. Pour ce faire, soulignons que, dans [1], il est montré que les solutions flots de gradient au sens du calcul d'Otto sont équivalentes aux courbes de pente maximale sur X . Nous prendrons donc comme *définition* d'une solution flot de gradient une courbe de pente maximale sur $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$. Il nous reste donc à introduire les outils nécessaire pour cette définition.

Pour $p \in [1, +\infty[$ et $T > 0$, on appelle courbe sur $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$ toute fonction continue $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$. Notons que, dans ce manuscrit, on écrira souvent ϱ_t à la place de $\varrho(t)$ lorsque l'on manipule de telles courbes (c'est une notation standard dans la communauté du transport optimal). On dit, de plus, que ϱ est une courbe absolument continue sur $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$ s'il existe $b \in L^1([0, T])$ tel que $W_p(\varrho_s, \varrho_t) \leq \int_s^t b(\tau) d\tau$ pour tous $0 \leq s < t \leq T$. On note $AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ l'ensemble de telles courbes et $AC_{loc}([0, +\infty[, \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)) = \bigcap_{T>0} AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ l'ensemble des courbes localement (en temps) absolument continues sur $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$. On définit aussi la dérivée métrique de ϱ au temps $t \in [0, T]$ par :

$$|\varrho'_t| := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W_p(\varrho_{t+h}, \varrho_t)}{h}.$$

Si ϱ est une courbe lipschitzienne sur $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$, alors sa dérivée métrique existe pour presque tout $t \in [0, T]$. Quitte à la reparamétriser, toute courbe absolument continue peut être rendue lipschitzienne et admet donc une dérivée métrique pour presque tout temps.

Le théorème fondamental suivant fait le lien entre les courbes absolument continues sur $\mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d)$ et l'équation de continuité :

Théorème 1.6 ([1], théorème 8.3.1). *Soit $p \in]1, +\infty[$ et $T > 0$. Soit $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$. Alors, pour presque tout $t \in [0, T]$ il existe un champ de vitesses $v_t \in L^p(\varrho_t, \mathbf{R}^d)$ tel que :*

- (1) *l'équation de continuité $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0$ est satisfaite au sens des distributions,*
- (2) *pour presque tout $t \in [0, T]$, on a $\|v_t\|_{L^p(\varrho_t)} \leq |\varrho'_t|$.*

Réciproquement, partant d'une courbe $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ telle que pour tout $t \in [0, T]$, s'il existe un champ de vecteurs $v_t \in L^p(\varrho_t, \mathbf{R}^d)$ avec $\int_0^T \|v_t\|_{L^p(\varrho_t)} dt < +\infty$ qui résout l'équation de continuité $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0$ au sens des distributions, alors $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ et pour presque tout $t \in [0, T]$, on a $|\varrho'_t| \leq \|v_t\|_{L^p(\varrho_t)}$.

Par conséquent, le champ de vitesses v introduit dans la première partie de cet énoncé vérifie en fait $\|v_t\|_{L^p(\varrho_t)} = |\varrho'_t|$ pour presque tout $t \in [0, T]$.

Autre définition pratique, la notion de dérivée d'une fonctionnelle :

Définition 1.4. *Soit $F : \mathcal{P}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ vérifie :*

$$\forall \delta \in [0, 1], \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d) \cap L_c^\infty(\mathbf{R}^d), \quad F((1 - \delta)\varrho + \delta\mu) < +\infty.$$

On appelle alors variation première de F en ϱ , notée $\frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho)$, toute fonction mesurable g telle que :

$$\left. \frac{dF(\varrho + \delta\chi)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \int g d\chi,$$

pour tout $\chi = \mu - \varrho$ où $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d) \cap L_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ et $L_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions $L^\infty(\mathbf{R}^d)$ à support compact. Si elle existe, la variation première est unique à constante additive près.

Exemple 1.4. Les trois exemples essentiels que l'on utilisera dans ce manuscrit sont :

(1) L'énergie d'interaction, définie par :

$$\mathcal{W}(\varrho) = \frac{1}{2} \iint W(x-y) \varrho(dx) \varrho(dy).$$

L'énergie d'interaction est finie dès lors que W est lipschitzien et que $\varrho \in \mathcal{P}_1(\mathbf{R}^d)$, ce qui est toujours le cas dans ce manuscrit. En effet, sous l'hypothèse (A2), on a $W(x) \leq a_\infty|x| + |W(0)|$ et ainsi $\mathcal{W}(\varrho) \leq a_\infty M_1(\varrho) + |W(0)|$, quantité finie car les mesures que l'on considère sont toujours de moment d'ordre 1 fini. Sa variation première est donnée par ([112] Proposition 8.7) :

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \varrho}(\varrho) = W * \varrho.$$

(2) L'entropie de Boltzmann :

$$\mathcal{U}(\varrho) = \begin{cases} \int \varrho \ln(\varrho), & \text{si } \varrho \ll \text{Leb} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

de variation première :

$$\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \varrho}(\varrho) = \ln \varrho.$$

De façon générale, la variation première d'une fonctionnelle de la forme $\varrho \longmapsto \int f(\varrho(x)) dx$ si $\varrho \ll \text{Leb}$ et $+\infty$ sinon est donnée par $f'(\varrho)$.

(3) Et éventuellement l'énergie potentielle qui apparaît dans l'équation de Fokker-Planck :

$$G(\varrho) = \int V(x) \varrho(dx),$$

de variation première constante égale au potentiel V .

On en vient maintenant à l'équivalent métrique d'un gradient, dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$, que l'on appellera simplement pente dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$.

Définition 1.5. Soit $F : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle. On appelle pente de F dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ en $\varrho \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ (descending slope en anglais, à relier à la notion de gradient supérieur, voir [110, 112, 1]) la quantité :

$$|\partial F|(\varrho) = \limsup_{\mu \rightarrow \varrho} \frac{(F(\varrho) - F(\mu))_+}{W_2(\varrho, \mu)}$$

Proposition 1.3 ([1] lemme 10.1.5). La pente d'une fonctionnelle sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ quelconque F est caractérisée par :

$$|\partial F|(\varrho) = \min_{v \in \partial F(\varrho)} \|v\|_{L^2(\varrho)},$$

où $\partial F(\varrho)$ est la sous-différentielle de F en ϱ (pour une définition précise de celle-ci, on renvoie à [1], définition 10.3.1). De plus, le minimum est atteint en un unique $v \in L^2(\varrho)$ que l'on note⁸ $\partial^0 F(\varrho)$.

On est alors en mesure de définir formellement ce qu'est un flot de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$. Cette définition est celle citée dans [31] : on la mentionne pour rendre l'exposé plus complet bien que l'on ne l'utilisera jamais en pratique.

Définition 1.6 (Flot de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ à la Ambrosio-Gigli-Savaré). Soit une fonctionnelle $F : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On dit qu'une courbe $\varrho \in AC_{loc}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ est un flot de gradient pour F s'il existe un champ de vecteurs mesurable v tel que :

8. on veillera donc à noter différemment fonctionnelles et champs scalaires...

- (1) pour presque tout $t > 0$, $v(t) \in \text{Tan}_{\varrho_t} \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d) := \overline{\{\nabla \phi; \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)\}}^{L^2(\varrho_t)}$,
 (2) pour tout $T > 0$, $\int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\varrho_t)}^2 dt < +\infty$,
 (3) l'équation de continuité :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (v[\varrho]\varrho) = 0$$

est satisfaite au sens des distributions,

- (4) pour presque tout $t > 0$, $v(t) \in -\partial F(\varrho_t)$.

Sous ces hypothèses, le théorème 11.1.3 de [1] assure alors que $v = -\partial^0 F(\varrho)$.

La notion que nous utiliserons en pratique est celle d'inégalité de dissipation d'énergie ou de courbe de pente maximale. Cette notion étant équivalente à la définition 1.6 d'après le théorème 11.1.3 de [1], elle peut être prise comme définition d'un flot de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ et a le mérite de se comprendre comme une extension naturelle de l'EDO $x'(t) = -\nabla F(x(t))$ dans le cas euclidien.

En effet, cette EDO peut se reformuler en n'utilisant que des quantités métriques, avec la petite astuce $A = B \Leftrightarrow AB \geq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$. Ainsi, dans le cas euclidien, on a formellement :

$$\begin{aligned} \left(\forall t \in [0, T], x'(t) = -\nabla F(x(t)) \right) &\Leftrightarrow \left(\forall t \in [0, T], \underbrace{-x'(t) \cdot \nabla F(x(t))}_{= \frac{d}{dt} F(x(t))} \geq \frac{1}{2}|x'(t)|^2 + \frac{1}{2}|F(x(t))|^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall s, t \in [0, T], F(x(s)) - F(x(t)) \geq \frac{1}{2} \int_s^t |x'(\tau)|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t |F(x(\tau))|^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

Définition 1.7. Soit $F : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle et $T > 0$. On dit qu'une courbe $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ est une courbe de pente maximale pour F si $(t \mapsto F(\varrho_t)) \in AC([0, T], \mathbf{R})$ et si pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, l'inégalité de dissipation d'énergie est vérifiée :

$$F(\varrho_s) \geq F(\varrho_t) + \frac{1}{2} \int_s^t |\partial F|^2(\varrho_\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t |\varrho'_\tau|^2 d\tau. \quad (1.17)$$

Cette définition clôt la généralisation des notions nécessaires à définir un flot de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$. Notre but étant, dans ce manuscrit, d'utiliser des résultats provenant de cette théorie dans un cadre précis d'EDP, on se contentera d'un minimum de définitions abstraites et on tâchera plutôt de refaire le maximum de choses à la main.

Par exemple, en pratique, on se basera plutôt sur le lemme suivant, qui caractérise les EDP pouvant être vues comme des équations de flot de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ au sens où la bien-nommée inégalité de dissipation d'énergie est satisfaite : ce sont les équations de continuité où le champ de vitesse est donné par $-\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}$, où F est une fonctionnelle sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ avec une certaine hypothèse sur sa variation première.

Lemme 1.3. Soit une fonctionnelle $F : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $T > 0$ et $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$. On suppose que, pour presque tout $t \in [0, T]$, $\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_t) \in L^2(\varrho_t)$. Cela permet, en particulier, de donner un sens à l'équation (1.18) qui suit.

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) ϱ résout dans $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbf{R}^d)$ l'équation :

$$\partial_t \varrho - \nabla \cdot \left(\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho) \varrho \right) = 0, \quad (1.18)$$

- (2) Pour tout $t \in [0, T]$,

$$F(\varrho_0) \geq F(\varrho_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v[\varrho_s]\|_{L^2(\varrho_s)}^2 ds, \quad (1.19)$$

où $v[\varrho_s]$ est le champ de vitesse défini dans le théorème 3.2, c'est-à-dire celui de norme minimale parmi les champs v tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$, $v_t \in L^2(\varrho_t)$ et tels que l'équation de continuité $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0$ soit satisfaite dans $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbf{R}^d)$. Il est d'ailleurs égal à la dérivée métrique $|\varrho'_s|$.

Si ces assertions sont vérifiées, on a en fait $v[\varrho_t] = -\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_t)$ ϱ_t -presque partout pour presque tout $t \in [0, T]$

Remarque 1.4. Désormais⁹, par inégalité de dissipation d'énergie (IDE), on entendra (1.19) plutôt que (1.17). L'énoncé précédent pouvant être écrit en remplaçant (1.19) par une égalité, on l'appelle traditionnellement égalité de dissipation d'énergie (EDE).

Il est important de remarquer que le champ de vitesse $v[\varrho]$ défini dans le théorème 3.2 doit impérativement apparaître dans l'IDE. On ne peut pas se contenter de $F(\varrho_0) \geq F(\varrho_t) + \int_0^t \left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)} ds$, sans quoi il est impossible de remonter à une EDP.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) Notons $v[\varrho_t]$ le champ de vitesse de norme minimale dans $L^2(\varrho_t)$ donné par le théorème 3.2. En utilisant la définition de la variation première ainsi que l'équation (1.18), on obtient sans trop de peine :

$$\forall t \in [0, T], \quad F(\varrho_0) = F(\varrho_t) + \int_0^t \int \left| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right|^2 d\varrho_s ds = F(\varrho_t) + \int_0^t \left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)} ds.$$

En écrivant $\left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)} = \frac{1}{2} \left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)} + \frac{1}{2} \left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)}$ et en utilisant la minimalité de $\left\| v[\varrho_s] \right\|_{L^2(\varrho_s)}$, on obtient (2).

(2) \Rightarrow (1) A nouveau en utilisant l'équation de continuité $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0$ et la définition de la variation première, on trouve :

$$\forall t \in [0, T], \quad F(\varrho_0) = F(\varrho_t) - \int_0^t \int \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \cdot v[\varrho_s] d\varrho_s ds,$$

si bien que, en combinant avec l'IDE :

$$\forall t \in [0, T], \quad - \int_0^t \int \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \cdot v[\varrho_s] d\varrho_s ds \geq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right\|_{L^2(\varrho_s)} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v[\varrho_s]\|_{L^2(\varrho_s)} ds.$$

On a donc $\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \cdot v[\varrho_s] \geq \frac{1}{2} \left| \nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s) \right|^2 + \frac{1}{2} |v[\varrho_s]|^2$ ϱ_s -presque partout pour presque tout $s \in [0, t]$, et donc $v[\varrho_s] = -\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s)$ ϱ_s -presque partout pour presque tout $s \in [0, t]$, ce donne (1.18) en remplaçant le champ de vitesses par son expression en fonction de F dans l'équation de continuité. \square

Nous avons essayé de résumer de mieux que nous pouvions les notions de transport et de flots de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ nécessaires à la compréhension de ce manuscrit. Pour une meilleure introduction, on renvoie aux notes assez courtes et *self-contained* de Filippo Santambrogio au séminaire Bourbaki [110].

9. Implicitement, on sous-entend que la pente d'une fonctionnelle F définie sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ égale en fait $\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}$: le prouver pouvant, dans certains cas, être un peu subtil (c'est tout le travail de la proposition 2.2 dans [31] pour l'énergie d'interaction associée à un potentiel pointu par exemple), on évitera d'en faire un résultat général.

Existence et unicité d'une solution aux sens des distributions via les flots de gradient [31]

Revenons à l'équation d'agrégation (3.11). La définition de solution la plus naturelle qu'un EDPiste souhaiterait adopter est celle au sens des distributions, sous réserve de donner un sens au produit $a[\varrho]\varrho$.

Définition 1.8 (Solution au sens des distributions). *Soit $p \geq 1$, $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ et $T > 0$. On dit que $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ est une solution distributionnelle du problème d'agrégation (3.11) si $\int_0^T \|\hat{a}[\varrho_t]\|_{L^p(\varrho_t)} dt < +\infty$ et si, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T], \mathbf{R}^d)$,*

$$\int_0^T \int \partial_t \phi d\varrho_t dt + \int_0^T \int \hat{a}[\varrho] \cdot \nabla \phi d\varrho_t dt + \int \phi(0, x) \varrho^{ini}(dx) = 0. \quad (1.20)$$

On rappelle que, dans la définition ci-dessus :

$$\hat{a}[\varrho_t] = - \int_{y \neq x} \nabla W(x - y) \varrho_t(dy).$$

Remarque 1.5.

- (1) On précisera parfois « où $a[\varrho_t]$ est remplacé par $\hat{a}[\varrho_t]$ ». Dans le cas contraire, soit on le sous-entend, soit, en fait, $\varrho_t \ll \text{Leb}$ pour presque tout $t \in [0, T]$, si bien que $a[\varrho_t] = \hat{a}[\varrho_t]$.
- (2) Par ailleurs, il suffit que W soit lipschitzien pour que n'importe quelle courbe $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ soit absolument continue. En effet, si W est a_∞ -lipschitz alors $\int_0^T \|\hat{a}[\varrho_t]\|_{L^p(\varrho_t)} dt \leq a_\infty T$ et ϱ résout l'équation de continuité de champ de vitesse $\hat{a}[\varrho]$ au sens des distributions, donc la seconde partie du théorème 3.2 s'applique. Il arrivera donc que, lorsque l'on parle d'une solution distributionnelle de (3.11), l'on omette de préciser que celle-ci est une courbe localement absolument continue, car dans la majorité des énoncés, on travaille avec des potentiels lipschitziens.
- (3) Cette notion de solution est, en dimension 1, équivalente à la notion de solution de dualité ([70] théorème 4.1). Cela provient grossièrement du fait que les définitions distributionnelles sont uniques (résultat de [31], voir plus loin) et que les solutions de dualité sont des solutions distributionnelles.

Dorénavant, on supposera $p = 2$. La définition (1.8) est celle choisie dans [31] comme solution faible de l'équation d'agrégation, à ceci près que, le choix de remplacer $a[\varrho_t](x)$ par $\hat{a}[\varrho_t](x) := - \int_{y \neq x} \nabla W(x - y) \varrho_t(dy)$ étant a priori arbitraire, les auteurs le remplacent plutôt par $-\partial^0 W * \varrho_t(x)$ où $\partial^0 W$ est défini comme l'élément de norme euclidienne minimale dans la sous-différentielle de W en x . A posteriori, les auteurs montrent que, si W est un potentiel localement attractif vérifiant (A0) et (A1), alors :

$$\partial^0 W(x) = \begin{cases} \nabla W(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.21)$$

Dans [36], retrouvera les mêmes notations : $\widehat{\nabla W} = \partial^0 W$ où $\widehat{\nabla W}$ est défini comme dans (1.21). On rappelle qu'un potentiel symétrique W est dit localement attractif si $W(0)$ est un minimum local de W . Cela permet d'inclure des potentiels attractifs à courte portée mais répulsifs à longue portée ou même à une échelle intermédiaire, tout en excluant tout potentiel répulsif à courte portée (figure 1.9).

Le cadre des flots de gradients dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ permet alors de fournir une justification au choix de remplacer $a[\varrho]$ par $-\partial^0 W * \varrho$ dans (1.20). En effet, les auteurs de [31] montrent que $\partial^0 \mathcal{W}(\varrho) = \partial^0 W * \varrho$, et c'est donc (l'opposé de) ce champ de vitesse qui doit apparaître dans

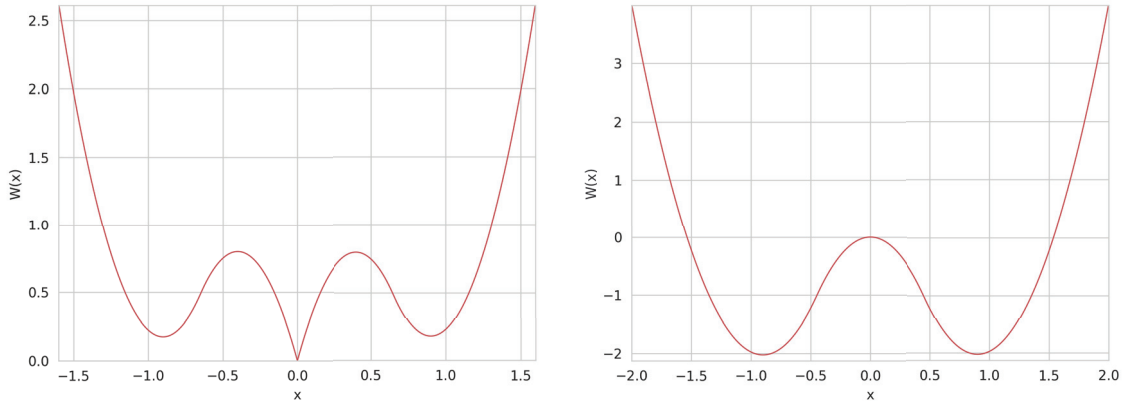


FIGURE 1.9 – Un potentiel admissible (gauche) et un potentiel non admissible (droite)

l'EDP (une autre façon serait de calculer la variation première de \mathcal{W}). Il permet aussi de prouver le caractère bien posé des solutions distributionnelles (définies à la définition 1.8) de l'équation d'agrégation : l'existence vient du fait que le schéma de JKO se trouve être bien posé et convergent ; l'unicité vient de la λ -convexité de l'énergie d'interaction (on développera un peu plus ce point à la sous-section 1.2.4).

Plus précisément, le schéma de JKO fournit une courbe de pente maximale :

Théorème 1.7 ([31] théorème 2.8). *On suppose que W est localement attractif et vérifie les hypothèses (A0)-(A1)-(A2-bis)-(A3) et soit $T > 0$. Alors il existe une courbe de pente maximale dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ pour \mathcal{W} . Puisque $\partial^0 \mathcal{W}(\varrho) = \partial^0 W * \varrho$, on a en particulier :*

$$|\partial \mathcal{W}|(\varrho)(x) = |\partial^0 W * \varrho|(x),$$

si bien que la condition de pente maximale s'écrit, dans le cas présent :

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \mathcal{W}(\varrho_s) \geq \mathcal{W}(\varrho_t) + \frac{1}{2} \int_s^t \left| \int_{y \neq x} \nabla W(x-y) \varrho_\tau(dy) \right|^2 \varrho_\tau(dx) d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t |\varrho'_\tau|^2 d\tau.$$

Théorème 1.8 ([31] théorème 2.12 et 2.13). *On suppose que W est localement attractif et vérifie les hypothèses (A0)-(A1)-(A2-bis)-(A3) et soit $T > 0$ et $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Il existe une unique solution flot de gradient (telle que définie à la définition 1.6) associée à \mathcal{W} , et celle-ci est équivalente à une courbe de pente maximale et à la notion de solution distributionnelle.*

En particulier, il existe une unique solution distributionnelle de (4.2a) de donnée ϱ^{ini} , où $a[\varrho]$ est remplacé par $-\partial \mathcal{W}^0(\varrho)$, qui se trouve être égal à $\hat{a}[\varrho]$. De plus, si ϱ^1 et ϱ^2 sont deux solutions distributionnelles, alors :

$$\forall t \geq 0, \quad W_2(\varrho_t^1, \varrho_t^2) \leq e^{-2\lambda t} W_2(\varrho_0^1, \varrho_0^2).$$

1.2.3 Solutions au sens de Filippov

Pour finir, nous introduisons une dernière notion de solutions basée sur la théorie de Filippov [58], reprise par Poupaud et Rasle dans [105] qui prouvent l'existence et l'unicité d'un flot qui généralise les caractéristiques pour l'équation de continuité (1.9) à champ de vitesse a lipschitzien à droite. Il est en effet connu que, pour cette équation, lorsque le champ de vitesses est régulier, disons $a \in L^1_{loc}([0, +\infty[, \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d))^d$, les caractéristiques $X(t, x)$ sont bien définies au sens classique par $\partial_t X(t, x) = a(t, X(t, x))$ et $X(0, x) = x$, et que le problème de Cauchy associé à (1.9) et à une donnée $\varrho^{ini} \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ quelconque admet une unique solution au sens des distributions qui se trouve être la mesure image $\varrho(t) = X(t) \# \varrho^{ini}$ (voir [105], théorème 3.1).

Le flot de Filippov est donc défini de la façon suivante :

Définition 1.9. Soit $a \in L^\infty([0, +\infty[, L^\infty(\mathbf{R}^d))^d$. Etant donnés $x \in \mathbf{R}^d$ et $s > 0$, un flot de Filippov pour a partant de x au temps s est une fonction $Z(\cdot, s, x) \in \mathcal{C}([s, +\infty[, \mathbf{R}^d)$ telle que $\partial_t Z(t, s, x)$ existe pour presque tout $t \in [s, +\infty[, Z(s, s, x) = x$ et :

$$\partial_t Z(t, s, x) \in \{\text{Convess}(a)(t, \cdot)\}(Z(t, s, x)), \quad \text{pour presque tout } t \geq s.$$

On notera également $Z(t, x) := Z(t, 0, x)$. Dans la définition ci-dessus, *Convess* désigne l'enveloppe convexe essentielle ([58, 2]) définie par :

$$\{\text{Convess}(a)(t, \cdot)\}(x) := \bigcap_{r>0} \bigcap_{N \in \mathcal{N}_0} \text{Conv}[a(t, B(x, r) \setminus N)],$$

où *Conv* désigne l'enveloppe convexe standard dans \mathbf{R}^d et \mathcal{N}_0 l'ensemble des parties négligeables de \mathbf{R}^d pour la mesure de Lebesgue.

Lorsque $a \in L^1_{loc}([0, +\infty[, L^\infty(\mathbf{R}^d))^d$ est lipschitzien à droite, Filippov [58] montre l'existence et l'unicité d'un tel flot. Poupaud et Rascle définissent alors, pour l'équation de continuité associée, une solution au sens de Filippov comme une fonction de la forme $\varrho(t) = X(t) \# \varrho^{ini}$ où X est un flot de Filippov associé au champ de vitesses a et $\varrho^{ini} \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$. Avec une telle définition, puisque le flot de Filippov existe et est unique, l'existence et unicité d'une solution au sens de Filippov pour le problème de Cauchy associé à (1.9) sont triviales. Le point important (prouvé dans [105], section 3.3) est qu'une telle solution résout l'équation de continuité (1.9) au sens des distributions et rend le produit $a\varrho$ bien défini, grâce au fait que ϱ est un pushforward. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^d)$, on peut montrer que $\int_0^T \partial_t X(t, x) \varphi(t, X(t, x)) dt$ est continu en x , si bien que :

$$\langle a\varrho, \varphi \rangle = \int \int_0^T \partial_t X(t, x) \varphi(t, X(t, x)) dt d\varrho^{ini}(x)$$

est bien défini. C'est donc une extension de la notion de solution distributionnelle. En revanche, rien ne garantit qu'une solution au sens des distributions, qui de toute façon n'a pas de sens tant que l'on n'a pas défini le produit $a\varrho$, soit une solution au sens de Filippov. Notons enfin qu'en dimension $d = 1$, la notion de solution au sens de Filippov est équivalente à celle de solution de dualité [17].

Les travaux de Poupaud et Rascle ont ensuite été adaptés par Carrillo, Lagoutière, James et Vauchelet pour l'équation d'agrégation :

Théorème 1.9 ([36] théorème 2.5). *Supposons que W satisfasse les hypothèses (A0)-(A1)-(A2)-(A3) pour $\lambda \leq 0$ et soit $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$.*

Il existe une solution distributionnelle $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ du problème d'agrégation (3.11) où $a[\varrho]$ est remplacé par $\hat{a}[\varrho]$ qui s'écrit comme une mesure image (pushforward) $\varrho_t := Z_\varrho(t, \cdot) \# \varrho^{ini}$ où $(Z_\varrho(t, \cdot))_{t \geq 0}$ est l'unique flot de Filippov associé au champ de vitesse lipschitzien à droite $\hat{a}[\varrho]$.

De plus, le flot Z_ϱ est lipschitzien et on a pour tout $t \geq 0$,

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}^d, x \neq y} \frac{|Z_\varrho(t, x) - Z_\varrho(t, y)|}{|x - y|} \leq e^{-\lambda t}. \quad (1.22)$$

Les auteurs montrent ensuite que la solution ϱ qu'ils construisent est forcément $AC([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ pour tout $T > 0$ (cela provient simplement de l'hypothèse (A2) et du théorème 3.2). Par conséquent, c'est une solution $AC([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ au sens des distributions de (3.11) (autrement dit une solution au sens de la définition 1.8), qui est unique d'après le théorème 1.8 de [31]. Les deux notions de solutions coïncident, et les trois notions – dualité, flot de gradient/solution distributionnelle et solution de Filippov – coïncident donc. En réutilisant ce théorème, ils en déduisent que la solution distributionnelle de (3.11) est unique ([43] théorème 2.1).

Remarque 1.6. Notons que l'unicité d'une solution distributionnelle de (3.11) (où $a[\varrho]$ est remplacé par $\widehat{a}[\varrho]$) est toujours un corollaire du théorème 1.8 dû à Carrillo, Di Francesco, Figalli, Laurent et Slepcev. L'approche des solutions de dualité (en dimension 1) et celle du flot de Filippov ne permettent pas de le déduire sans utiliser ce théorème, car sans ce théorème, a priori, une solution au sens des distributions n'a pas de raison d'être une solution de dualité (en dimension 1) ou une solution au sens de Filippov de l'équation (3.11).

Un des avantages de cette formulation « flot de Filippov » est l'obtention par une méthode assez directe de l'unicité d'une telle solution (la preuve ci-après est formelle, voir [36] pour la formalisation rigoureuse).

Soit, en effet, ϱ et μ deux solutions dans $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ des problèmes de Cauchy pour l'équation d'agrégation (3.11) associés aux conditions initiales ϱ^{ini} et μ^{ini} dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Notons X et Y les flots de Filippov respectivement associés aux champs de vitesse $a[\varrho]$ et $a[\mu]$. Soit, de plus, γ_0 un couplage optimal entre ϱ^{ini} et μ^{ini} . Pour $t > 0$, la mesure $(X(t), Y(t))\# \gamma_0$ est alors un couplage entre ϱ_t et μ_t , donc, par définition de la distance de Wasserstein :

$$W_2^2(\varrho_t, \mu_t) \leq \iint |X(t, x) - Y(t, y)|^2 \gamma_0(dx, dy) := I(t).$$

Par définition des flots X et Y , puis par définition de \widehat{a} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= 2 \iint (\widehat{a}[\varrho_t](t, X(t, x)) - \widehat{a}[\mu_t](t, Y(t, y))) \cdot (X(t, x) - Y(t, y)) \gamma_0(dx, dy) \\ &= -2 \iiint \left(\widehat{\nabla W}(X(t, x_1) - X(t, x_2)) - \widehat{\nabla W}(Y(t, y_1) - Y(t, y_2)) \right) \cdot \left(X(t, x_1) - \right. \\ &\quad \left. Y(t, y_1) \right) \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) \\ &= \iiint \left(\widehat{\nabla W}(X(t, x_1) - X(t, x_2)) - \widehat{\nabla W}(Y(t, y_1) - Y(t, y_2)) \right) \cdot \left(X(t, x_2) - X(t, x_1) \right. \\ &\quad \left. - (Y(t, y_2) - Y(t, y_1)) \right) \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) \quad (\text{par symétrisation}) \\ &\leq -\lambda \iiint |X(t, x_2) - X(t, x_1) - (Y(t, y_2) - Y(t, y_1))|^2 \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) \\ &\leq -\lambda \iiint |X(t, x_2) - Y(t, y_2) - (X(t, x_1) - Y(t, y_1))|^2 \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2). \end{aligned}$$

Si $\lambda \geq 0$, on trouve $\frac{d}{dt} I(t) \leq 0$. Si $\lambda \leq 0$, afin de faire réapparaître $I(t)$, on peut utiliser l'inégalité $|a - b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ mais on perd un facteur 2 et on n'obtient pas l'inégalité optimale. Il vaut mieux développer le carré et voir que l'intégrale correspond au double produit est, par théorème de Fubini, un carré, donc positive. Concrètement :

$$\begin{aligned} \iiint |X(t, x_2) - Y(t, y_2) - (X(t, x_1) - Y(t, y_1))|^2 \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) &= \\ \iiint |X(t, x_2) - Y(t, y_2)|^2 \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) & \\ - 2 \iiint (X(t, x_2) - Y(t, y_2)) \cdot (X(t, x_1) - Y(t, y_1)) \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) & \\ + \iiint (X(t, x_1) - Y(t, y_1))^2 \gamma_0(dx_1, dy_1) \gamma_0(dx_2, dy_2) & \\ = 2I(t) - 2 \left(\iint (X(t, x_1) - Y(t, y_1)) \gamma_0(dx_1, dy_1) \right)^2 &\leq 2I(t). \end{aligned}$$

Comme $\lambda \leq 0$, on trouve :

$$\frac{d}{dt} I(t) \leq -2\lambda I(t) \tag{1.23}$$

On peut résumer ceci quel que soit le signe de λ en :

$$\frac{d}{dt}I(t) \leq 2\lambda^{-1}I(t),$$

ce qui donne, grâce au lemme de Grönwall,

$$W_2(\varrho_t, \mu_t) \leq e^{\lambda^{-1}t} W_2(\varrho^{ini}, \mu^{ini}),$$

d'où l'unicité. Si de plus les deux mesures ont même centre de masse, alors on constate que, dans le développement du carré ci-dessus, la dernière intégrale est nulle :

$$\begin{aligned} \iint (X(t, x_1) - Y(t, y_1)) \gamma_0(dx_1, dy_1) &= \int X(t, x_1) \varrho^{ini}(dx_1) - \int Y(t, y_1) \mu^{ini}(dy_1) \\ &= \int x_1 \varrho_t(dx_1) - \int y_1 \mu_t(dy_1) = 0, \end{aligned}$$

si bien que, peu importe le signe de λ , (1.23) est valable, d'où le résultat. Le calcul ci-dessus n'est que formel, car a priori ϱ et μ ne sont pas régulières et les flots X et Y ne sont pas des flots au sens différentiel classique.

Remarque 1.7. L'inconvénient de cette méthode, néanmoins, elle qu'elle suppose de savoir que ϱ est une mesure image de ϱ^{ini} par flot de Filippov : on ne peut pas se contenter d'utiliser uniquement le fait que ϱ résolve (3.11) au sens des distributions.

1.2.4 Propriétés des solutions de l'équation d'agrégation

Quelques remarques autour de l'estimée de contraction

On trouve dans la littérature plusieurs estimées de contraction (en réalité, en fonction du signe de λ , il n'y a pas forcément contraction stricto sensu et c'est plutôt une estimée d'écartement) pour les solutions de l'équation d'agrégation (3.11) avec potentiel pointu. Dans [36], pour les solutions au sens de Filippov, le facteur d'écartement obtenu est, pour $\lambda \leq 0$, $e^{-2\lambda t}$ et $e^{-\lambda t}$ si les deux mesures ont même centre de masse. Ce dernier facteur est optimal mais il est valide même si les deux mesures n'ont pas le même centre de masse (voir [90]). Pour λ de signe quelconque, le facteur optimal est $e^{\lambda^{-1}t}$ (voir [43] ; pour $\lambda > 0$ cependant, il faut se restreindre aux solutions à support compact) et toujours $e^{-\lambda t}$ si les deux mesures ont le même centre de masse. On résume ceci dans la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Soit ϱ et μ deux solutions dans $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ des problèmes de Cauchy pour l'équation d'agrégation (3.11) associés aux conditions initiales ϱ^{ini} et μ^{ini} dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Alors, pour tout $t > 0$, on a :*

$$W_2(\varrho_t, \mu_t) \leq e^{\lambda^{-1}t} W_2(\varrho^{ini}, \mu^{ini}). \quad (1.24)$$

Si, de plus, ϱ^{ini} et μ^{ini} ont même centre de masse, alors l'estimée devient :

$$W_2(\varrho_t, \mu_t) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho^{ini}, \mu^{ini}). \quad (1.25)$$

Remarque 1.8. L'estimation (1.24) est optimale. En effet, pour $\lambda \geq 0$, si les deux mesures n'ont pas le même centre de masse, la distance W_2 ne peut pas décroître strictement (penser à deux masses de Dirac, toutes deux solutions stationnaires de l'équation d'agrégation et donc dont la distance W_2 entre les deux est constante). En particulier, la fonctionnelle d'interaction \mathcal{W} n'est pas λ -géodésiquement convexe.

On peut prouver ces estimées de façon élégante en utilisant la formule de dérivation d'une fonctionnelle le long de deux courbes absolument continues sur $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho_t, \mu_t) = \int \nabla \varphi \cdot v_t d\varrho_t + \int \nabla \psi \cdot w_t d\mu_t, \quad (1.26)$$

où (φ_t, ψ_t) est une paire de potentiels de Kantorovitch de ϱ_t vers μ_t pour le coût quadratique $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$.

Pour plus de détails, on revoie à [89]. Notons qu'on ne peut pas appliquer le théorème ci-après car la λ -géodésique-convexité de la fonctionnelle d'interaction \mathcal{W} est fautive en général. En effet, si les deux mesures n'ont pas le même centre de masse, la distance entre les deux ne peut pas décroître strictement (ceci étant, si $\lambda \geq 0$, (1.24) montre qu'elle n'augmente pas). En effet, $\varrho_t = \delta_{-1}$ et $\mu_t = \delta_1$ sont toutes deux des solutions, et la distance entre les deux est constante.

Notons que l'estimée (1.25) n'a d'intérêt par rapport à (1.24) que si $\lambda \geq 0$, sinon on retrouve le même facteur.

Cette propriété de « contraction » est en fait une propriété générale des solutions flots de gradient associés à une fonctionnelle λ -géodésiquement convexe :

Théorème 1.10 ([1] Théorème 11.1.4). *Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, et F une fonctionnelle sur $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$, λ -géodésiquement convexe, semi-continue inférieurement et minorée, alors les solutions flot de gradient associées à F existent et sont uniques.*

Plus précisément, on a l'estimée de contraction (si $\lambda \geq 0$) ou d'écartement (si $\lambda \leq 0$) suivante : si, pour $i = 1, 2$, $\varrho^{(i)} : \mathbf{R}_+^ \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ sont deux solutions flots de gradient associés à F , alors :*

$$W_2(\varrho_t^{(1)}, \varrho_t^{(2)}) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho_0^{(1)}, \varrho_0^{(2)}).$$

Ceci étant, on ne peut appliquer le théorème ci-dessus que lorsque $\lambda \leq 0$. En effet, c'est seulement dans ce cas que notre fonctionnelle, l'énergie d'interaction, est λ -géodésiquement convexe.

Proposition 1.5 (λ -géodésique-convexité de \mathcal{W} pour $\lambda \leq 0$). *On rappelle que l'énergie d'interaction est définie sur $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ par :*

$$\mathcal{W}(\varrho) = \frac{1}{2} \iint W(x - y) \varrho(dx) \varrho(dy).$$

Supposons que le potentiel d'interaction W soit λ -convexe avec $\lambda \leq 0$. Alors \mathcal{W} est λ -géodésiquement convexe sur $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$.

Remarque 1.9. Cette propriété est fautive si $\lambda > 0$. Même, si W est strictement convexe, \mathcal{W} n'est pas strictement géodésiquement convexe car les trajectoires sont invariantes par translation.

En particulier, si $\lambda > 0$, le théorème 1.10 ne s'applique pas et on n'a donc pas de propriété de contraction stricte. On a tout de même une propriété de contraction large, c'est-à-dire que la distance entre deux solutions n'augmente pas. En effet, si W est λ -convexe avec $\lambda > 0$, il est quand même (0-)convexe et le théorème s'applique avec $\lambda = 0$.

Démonstration. Pour obtenir la λ -géodésique-convexité de l'énergie d'interaction \mathcal{W} , il suffit de dériver 2 fois le long des géodésiques. Soit donc $\varrho_0, \varrho_1 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ quelconques, et considérons la géodésique à vitesse constante dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ entre les deux, donnée par $\varrho_t = T_t \# \varrho_0$ où $T_t = (1 - t) \text{Id} + tT = \text{Id} - t\nabla\varphi$, (φ, ψ) étant une paire de potentiels de Kantorovitch de ϱ_0 vers ϱ_1 .

Pour dériver $\mathcal{W}(\varrho_t)$ sans utiliser l'équation de continuité sur ϱ_t , on transfère tous les t dans l'argument de W en utilisant l'écriture de ϱ_t comme un pushforward :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varrho_t) &= \frac{1}{2} \iint W(x - y) \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \\ &= \frac{1}{2} \iint W(x - y - t(\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y))) \varrho_0(dx) \varrho_0(dy). \end{aligned}$$

D'où, successivement,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{W}(\varrho_t) &= -\frac{1}{2} \iint \nabla W(x-y-t(\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y))) \cdot (\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y)) \varrho_0(dx)\varrho_0(dy), \\ \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{W}(\varrho_t) &= \frac{1}{2} \iint (\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y))^T \nabla^2 W(x-y-t(\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y))) (\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y)) \varrho_0(dx)\varrho_0(dy).\end{aligned}$$

Si W est λ -convexe, c'est que $\nabla^2 W \geq \lambda \text{Id}$ (au sens des matrices positives, c'est-à-dire $X^T(\nabla^2 W - \lambda \text{Id})X \geq 0$ pour tout $X \in \mathbf{R}^d$). En injectant dans l'équation ci-dessus, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{W}(\varrho_t) &\geq \frac{\lambda}{2} \iint |\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y)|^2 \varrho_0(dx)\varrho_0(dy) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \left(\int |\nabla\varphi(x)|^2 \varrho_0(dx) + \int |\nabla\varphi(y)|^2 \varrho_0(dy) - 2 \left(\int \nabla\varphi(x) \varrho_0(dx) \right) \cdot \left(\int \nabla\varphi(y) \varrho_0(dy) \right) \right),\end{aligned}$$

simplement en développant le carré et en utilisant le fait que $\int \varrho_0 = 1$. Le dernier terme dans l'inégalité ci-dessus est un carré, il est positif, et, du reste, on reconnaît $\int |\nabla\varphi(x)|^2 \varrho_0(dx) = \int |\nabla\varphi(y)|^2 \varrho_0(dy) = W_2^2(\varrho_0, \varrho_1)$. Ainsi, **si λ est négatif** (sinon l'inégalité est dans le mauvais sens) :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{W}(\varrho_t) \geq \lambda W_2^2(\varrho_0, \varrho_1),$$

ce qui conclut la preuve. □

Bornes sur les moments

On a régulièrement besoin, pour appliquer des méthodes de compacité notamment, de bornes sur les moments des solutions d'équations d'agrégation. On dresse ici un petit catalogue des bornes que l'on peut obtenir.

On rappelle le lemme suivant, présent sous une forme un peu moins générale dans [89] :

Lemme 1.4. *Soit $p \in [1, \infty[$ et $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. Alors on a :*

$$\overline{M}_p(\varrho) \leq \iint |x-y|^p \varrho(dx)\varrho(dy) \leq 2^{p+1} \min(M_p(\varrho), \overline{M}_p(\varrho)),$$

où, on le rappelle, \overline{M}_p désigne le moment centré d'ordre p .

Remarque 1.10. La majoration n'est pas optimale : pour $p = 1$, en écrivant $|x-y| \leq |x| + |y|$, peut majorer par $2M_1(\varrho)$, et pour $p = 2$, puisque $|x-y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$, on peut majorer par $4M_2(\varrho)$. Pareil pour majorer par le moment centré, car $|x-y| = |x-x_0 - (y-x_0)|$.

Démonstration. Notons x_0 le barycentre de ϱ . On pose $u(x) = \int |x-y|^p \varrho(dy)$. Puisque $p \geq 1$, u est une fonction convexe, d'où par inégalité de Jensen :

$$\overline{M}_p(\varrho) = u(x_0) = u\left(\int x \varrho(dx)\right) \leq \int u(x) \varrho(dx) = \iint |x-y|^p \varrho(dx)\varrho(dy).$$

Pour la majoration, il suffit d'écrire $|x-y|^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p)$ (resp. $|x-y|^p \leq 2^p(|x-x_0|^p + |y-x_0|^p)$). □

Proposition 1.6. *Soit $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ solution distributionnelle de (3.11).*

(1) *Si W est a_∞ -lipschitzien, on a, pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned}M_2(\varrho_t) &\leq \left(a_\infty t + \sqrt{M_2(\varrho^{ini})} \right)^2 \\ &\leq 2(a_\infty^2 t^2 + M_2(\varrho^{ini})).\end{aligned}$$

(2) Si W est λ -convexe pour $\lambda \leq 0$, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\forall t \geq 0, \quad M_2(\varrho_t) \leq e^{-4\lambda t} M_2(\varrho^{ini}).$$

(3) Sous l'hypothèse (A4-2), on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\overline{M}_2(\varrho_t) \leq e^{-Ct} \overline{M}_2(\varrho^{ini}),$$

(4) Sous l'hypothèse (A4-p) pour $p \geq 2$, il existe une constante $C(p) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\overline{M}_2(\varrho_t) \leq C(p)t^{\frac{2}{2-p}},$$

et ce quelle que soit la donnée initiale : le résultat est vrai même si $\varrho^{ini} \notin \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$.

Démonstration. Toutes les estimations se basent sur le calcul formel suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_2(\varrho_t) &= \frac{d}{dt} \int |x|^2 \varrho_t(dx) & (1.27) \\ &= \int |x|^2 \partial_t \varrho_t(dx) \\ &= \int |x|^2 \nabla \cdot ((\widehat{\nabla W} * \varrho_t) \varrho_t) \\ &= -2 \int x \cdot (\widehat{\nabla W} * \varrho_t) \varrho_t(dx), \quad \text{par intégration par parties,} \\ &= - \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot (x-y) \varrho_t(dx) \varrho_t(dy), \end{aligned}$$

par symétrisation car $\widehat{\nabla W}$ vérifie $\widehat{\nabla W}(-z) = -\widehat{\nabla W}(z)$. Pour prouver ce calcul rigoureusement, il faut tester dans la formulation faible de (3.11) contre $\phi(t, x) = |x|^2 \eta_R(x)$ où η_R est une fonction cut-off adaptée et utiliser le fait que $\varrho_t \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ pour tout $t \geq 0$.

De la même façon, puisque $\nabla|x - x_0|^2 = 2(x - x_0)$ et que $x - x_0 - (y - x_0) = x - y$, on a pour le moment centré d'ordre 2 (la variance) :

$$\frac{d}{dt} \overline{M}_2(\varrho_t) = - \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot (x-y) \varrho_t(dx) \varrho_t(dy).$$

(1) Si W est a_∞ -lipschitzien, on écrit $|\nabla W(x-y) \cdot (x-y)| \leq a_\infty |x-y| \leq a_\infty(|x| + |y|)$, d'où :

$$\frac{d}{dt} M_2(\varrho_t) \leq a_\infty \iint |x-y| \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \leq 2a_\infty M_1(\varrho_t) \leq 2a_\infty \sqrt{M_2(\varrho_t)}.$$

Autrement dit, $\frac{d}{dt} \sqrt{M_2(\varrho_t)} \leq a_\infty$, et donc $\sqrt{M_2(\varrho_t)} \leq a_\infty t + \sqrt{M_2(\varrho^{ini})}$, d'où le résultat.

(2) Si W est λ -convexe, on a $\widehat{\nabla W}(x-y) \cdot (x-y) \geq \lambda|x-y|^2$ et donc :

$$\frac{d}{dt} M_2(\varrho_t) \leq -\lambda \iint |x-y|^2 \varrho_t(dx) \varrho_t(dy),$$

et si, de plus, $\lambda \leq 0$, comme $|x-y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$, on en déduit que :

$$\frac{d}{dt} M_2(\varrho_t) \leq -2\lambda \iint (|x|^2 + |y|^2) \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) = -4\lambda M_2(\varrho_t).$$

D'où le résultat après application d'un lemme de Grönwall.

(3) Sous l'hypothèse (A4-2), on a $\widehat{\nabla W}(x-y) \cdot (x-y) \geq C|x-y|^2$, d'où pour le moment centré :

$$\frac{d}{dt} \overline{M}_2(\varrho_t) \leq -C \iint |x-y|^2 \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \leq -C \overline{M}_2(\varrho_t),$$

d'après le lemme 3.17 et parce que $C \geq 0$. Le résultat en découle avec un lemme de Grönwall.

(4) Sous l'hypothèse (A4-p), on a, comme au point précédent :

$$\frac{d}{dt} \overline{M}_2(\varrho_t) \leq -C \iint |x-y|^p \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \leq -C \overline{M}_p(\varrho_t).$$

D'où, puisque $p \geq 2$, $\frac{d}{dt} \overline{M}_2(\varrho_t) \leq -C \overline{M}_2(\varrho_t)^{p/2}$. Le lemme de Grönwall non linéaire 5) de l'annexe (lemme A.1) donne alors :

$$\overline{M}_2(\varrho_t) \leq \left(\overline{M}_2(\varrho^{ini})^{1-\frac{p}{2}} + C \left(\frac{p}{2} - 1 \right) t \right)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} \leq C(p) t^{\frac{2}{2-p}},$$

à nouveau puisque $p \geq 2$, si bien que $z \mapsto z^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}$ est décroissante sur \mathbf{R}_+^* . □

Remarque 1.11. La première estimation est difficile à imiter en discret mais la borne est mieux qu'exponentielle.

Régularité 1/2-Hölder en temps

Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer des conditions « un peu minimales » sur le potentiel W pour que les solutions, au sens des distributions, dans $AC_{loc}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ de l'équation d'agrégation avec donnée $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, soient automatiquement 1/2-hölderienne en temps, en horizon fini. On suppose tout de même que W satisfait toujours les hypothèses (A0) et (A1).

Tout est basé sur l'IDE, qui peut se récrire, pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{W}(\varrho^{ini}) \geq \mathcal{W}(\varrho_t) + \int_0^t |\varrho'_s|^2 ds. \quad (1.28)$$

En effet, on a vu au lemme 1.3 que l'on a en fait $|\varrho'_s| = -\nabla \frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho_s)$ ϱ_s -presque partout pour presque tout $s \in [0, t]$.

Supposons que la donnée initiale soit d'énergie d'interaction finie. Cette supposition n'est pas très restrictive car elle est vérifiée pour toute donnée $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ dès que W est lipschitzien ou vérifie une condition de croissance du type $W(x) \leq C(1 + |x|^2)$ par exemple. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{W}(\varrho_t)$ est minorée en temps borné, car alors (1.28) montre que $\int_0^t |\varrho'_s|^2$ est borné et une inégalité de Cauchy-Schwarz donne le résultat :

$$W_2(\varrho_s, \varrho_t) \leq \int_s^t |\varrho'_\tau| d\tau \leq \sqrt{|t-s|} \sqrt{\int_s^t |\varrho'_\tau|^2 d\tau}.$$

Nous allons prendre comme hypothèse que, grossièrement, W est d'ordre de grandeur $p \in [1, 2[$ en ce qui concerne sa « partie non convexe », et λ -convexe en ce qui concerne sa « partie convexe ». On en convient, la notion de partie convexe n'est pas définie ici rigoureusement. Plus précisément, supposons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \overline{W} + \widetilde{W}, \\ \nabla \overline{W}(x) \cdot x \geq C|x|^p, \quad x \in \mathbf{R}^d, \\ \widetilde{W} \text{ est } \lambda\text{-convexe}, \\ \overline{W} \text{ et } \widetilde{W} \text{ vérifient (A0) et (A1)}. \end{array} \right.$$

Rappelons¹⁰ que l'hypothèse sur \overline{W} implique que $\overline{W}(x) \geq C \frac{|x|^p}{p}$ pour tout $x \in \mathbf{R}^d$. Dans notre décomposition, $p \in [1, 2[$ et, a priori, les constantes λ, C sont réelles, mais le cas intéressant est lorsqu'elle sont toutes les deux strictement négatives. Si elles sont toutes deux positives, W est positif et il n'y a rien à faire, puisqu'alors \mathcal{W} est minorée par 0. Si l'un des deux seulement de C ou λ est positif, il suffit d'oublier la partie du potentiel correspondante dans la preuve qui suit. On effectue donc les calculs dans le cas $C < 0$ et $\lambda < 0$.

Soit $T > 0$. Puisque \widetilde{W} est symétrique, nul en 0 et λ -convexe, on a $\widetilde{W}(x) \geq \lambda \frac{|x|^2}{2}$. En combinant avec $\overline{W}(x) \geq C \frac{|x|^p}{p}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varrho_t) &\geq \frac{C}{2p} \iint |x-y|^p \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) + \frac{\lambda}{4} \iint |x-y|^2 \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \\ &\geq \frac{2^p C}{p} M_p(\varrho_t) + \lambda M_2(\varrho_t), \\ &\geq \frac{2^p C}{p} M_2(\varrho_t)^{2/p} + \lambda M_2(\varrho_t), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $|x-y|^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p)$, $|x-y|^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ et $C, \lambda < 0$. Pour montrer que $\mathcal{W}(\varrho_t)$ est minoré, il suffit donc de montrer que $M_2(\varrho_t)$ est borné. Pour cela, on reprend le calcul (1.27) et on utilise le fait que $\nabla W(z) \cdot z = \nabla \overline{W}(z) \cdot z + \nabla \widetilde{W}(z) \cdot z \geq C|z|^p + \lambda|z|^2$, avec $C < 0$ et $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_2(\varrho_t) &\leq - \iint \nabla W(x-y) \cdot (x-y) \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \\ &\leq -C \iint |x-y|^p \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) - \lambda \iint |x-y|^2 \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) \\ &\leq -C 2^{p+1} M_p(\varrho_t) - 4\lambda M_2(\varrho_t) \\ &\leq -C 2^{p+1} M_2(\varrho_t)^{2/p} - 4\lambda M_2(\varrho_t). \end{aligned}$$

Comme $\frac{2}{p} \leq 1$, le point (6) du lemme de Grönwall non linéaire A.1 en annexe permet de montrer que $M_2(\varrho_t)$ est borné sur $[0, T]$. On en déduit que $\mathcal{W}(\varrho_t)$ est minorée, et que ϱ est une courbe $\frac{1}{2}$ -hölderienne à valeurs $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$:

Proposition 1.7. *Supposons que W se décompose sous la forme $W = \overline{W} + \widetilde{W}$ avec :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \overline{W}(x) \cdot x \geq C|x|^p, \quad x \in \mathbf{R}^d, \\ \widetilde{W} \text{ est } \lambda\text{-convexe}, \\ \overline{W} \text{ et } \widetilde{W} \text{ vérifient (A0) et (A1)}, \end{array} \right.$$

où $p \in [1, 2[$ et $\lambda, C \in \mathbf{R}$ sont des constantes. On suppose également que $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ vérifie $\mathcal{W}(\varrho^{ini}) < +\infty$. Soit $\varrho \in AC_{loc}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ solution au sens des distributions de l'équation d'agrégation (3.11). Alors, pour tout $T > 0$, $\varrho \in \mathcal{C}^{\frac{1}{2}}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$.

Remarque 1.12. Ce résultat reste évidemment vrai si $p = 2$, mais la décomposition est redondante dans ce cas : il suffit de supposer $W = \widetilde{W}$.

Une autre approche naturelle pour borner le moment d'ordre 2 aurait été d'utiliser le fait que pour $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t |\varrho'_s| ds \geq \frac{1}{T} (M_2(\varrho_t) - M_2(\varrho^{ini})),$$

(voir par exemple la preuve du théorème 4 dans [89]). Ainsi, (1.28) se réécrit :

$$\mathcal{W}(\varrho^{ini}) + \frac{M_2(\varrho^{ini})}{T} \geq \frac{2^p C}{p} M_2(\varrho_t)^{2/p} + \left(\lambda + \frac{1}{T} \right) M_2(\varrho_t),$$

10. En effet, la preuve du lemme 1.1 reste valable même si $C < 0$.

ce qui permet, puisque $2/p < 1$, d'obtenir une borne sur $M_2(\varrho_t)$ mais seulement en temps petit, si $T < -\frac{1}{\lambda}$.

1.3 Contributions

L'objectif de ce manuscrit est double : d'une part, nous avons tenté d'apporter des éclairages sur des résultats et des méthodes que l'on trouve dans la littérature, mais qui parfois ne sont pas suffisamment détaillés ou qui méritent d'être reformulés et rapprochés d'autres résultats. C'est l'objet de cette introduction ainsi que du chapitre 2. On peut citer, dans l'introduction, des développements sur l'estimée de contraction ou la régularité en temps des solutions de l'équation d'agrégation, et dans le chapitre 2, les reformulations de schémas pour l'agrégation comme des primitives discrètes de schémas pour l'équation de Burgers.

D'autre part, nous apportons des contributions originales en ce qui concerne l'approximation visqueuse de l'équation d'agrégation et l'approximation par relaxation : ce sont respectivement les chapitres 3 et 4.

Ce manuscrit s'organise donc comme suit :

Chapitre 2 : Analyse numérique de l'équation d'agrégation

Ce chapitre consiste en un aperçu des résultats de convergence pour les schéma de type volumes finis pour l'équation d'agrégation. Nous commençons par introduire et illustrer des schémas connus que le schéma de type upwind suivant :

$$\begin{aligned} \varrho_J^{n+1} &= \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left((a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n - (a_{iJ-e_i}^n)^+ \varrho_{J-e_i}^n + (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n \right), \quad J \in \mathbf{Z}^d \\ a_{iJ}^n &:= - \sum_{K \in \mathbf{Z}^d} \varrho_K^n D_i W_J^K, \quad \text{où} \quad D_i W_J^K := \widehat{\partial_{x_i} W}(x_J - x_K), \quad J \in \mathbf{Z}^d, i = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

qui est prouvé être convergent à l'ordre 1/2 en distance W_2 dans [43].

Nous nous concentrons ensuite sur le cas $W(x) = \alpha|x|$ pour un certain $\alpha \in \mathbf{R}^*$ et nous précisons rigoureusement la correspondance entre l'équation de Burgers et l'équation d'agrégation dans ce cas. Concrètement, en notant $F(t)$ la fonction de répartition de $\varrho(t)$, on montre que ϱ est solution de l'équation d'agrégation si et seulement si $u := \alpha(1 - 2F)$ résout l'équation de Burgers. Nous nous intéressons alors à cette correspondance du point de vue numérique. Concrètement, cela permet, en effectuant des intégrations discrètes en espace, d'obtenir des schémas numériques pour l'équation d'agrégation ainsi que des estimations de convergence en norme W_1 en partant de schémas pour les lois de conservations. En particulier, nous montrons que le schéma upwind ci-dessus revient au schéma de Roe sur u (lorsque $\alpha > 0$, u est décroissante et il s'agit donc du schéma de Godunov).

Chapitre 3 : Limite de viscosité évanescence pour l'équation d'agrégation et états stationnaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$ pour l'équation d'agrégation-diffusion. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$, on cherche à montrer que les solutions du problème visqueux :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho^\varepsilon + \nabla \cdot (a[\varrho^\varepsilon] \varrho^\varepsilon) = \varepsilon \Delta \varrho^\varepsilon, & t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \\ a[\varrho^\varepsilon] = -\nabla W * \varrho^\varepsilon, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \end{cases} \quad (1.1)$$

convergent, au sens des mesures, vers une solution du problème non visqueux :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla \cdot (\hat{a}[\varrho] \varrho) = 0, & t > 0, x \in \mathbf{R}^d, \\ \hat{a}[\varrho](x) = - \int_{y \neq x} \nabla W(x-y) \varrho(dy), \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}. \end{cases}$$

Si la solution du problème limite est unique, alors c'est toute la suite d'approximations visqueuses $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ qui converge, et sinon, la convergence a lieu à sous-suite près.

Dans la première partie de ce chapitre, on s'intéresse au cas unidimensionnel des potentiels du type $W(x) = \alpha|x|$ pour un certain $\alpha \neq 0$. Ce cas est bien particulier car les solutions de l'équation d'agrégation peuvent être vues comme des dérivées des solutions d'un problème de type Burgers (voir la sous-section 2.2.1 du chapitre 2). On utilise cette correspondance pour obtenir la convergence de l'approximation visqueuse dans ce cas particulier et pour estimer la vitesse de convergence en distance W_1 : celle-ci est de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon T}$ où $T > 0$ est le temps final. Notre méthode consiste à effectuer les estimations sur les solutions de problème de Burgers visqueux, et de les transposer à l'agrégation grâce à la représentation suivante (voir [126]) :

Lemme 1.5. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et μ, ν deux mesures de probabilité sur \mathbf{R} de fonctions de répartition respectives F et G , elles-même d'inverses généralisés respectifs F^{-1} et G^{-1} . Alors on a la formule de représentation :*

$$W_p(\mu, \nu) = \|F^{-1} - G^{-1}\|_{L^p([0,1])}.$$

Et, pour $p = 1$:

$$\|F^{-1} - G^{-1}\|_{L^1([0,1])} = \|F - G\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

L'analyse doit donc être conduite en distance W_1 car la bonne métrique pour l'équation de Burgers est la norme L^1 . Pour l'équation d'agrégation, la solution limite ϱ que l'on obtient lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ peut, quelle que soit la valeur de α , être vue comme la dérivée (à un facteur près) de la solution entropique de l'équation de Burgers. Dans le cas $\alpha < 0$, c'est-à-dire lorsque le potentiel est répulsif, on obtient donc la convergence de toute la suite $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ (contrairement au cas de la dimension quelconque où on utilisera une méthode de compacité qui suppose d'extraire une sous-suite) et le critère de viscosité peut être vu comme un critère de sélection de solution.

La deuxième partie est un travail en collaboration avec Frédéric Lagoutière et Filippo Santambrogio. Dans celui-ci, on traite le cas général de différentes classes de potentiels en dimension d quelconque. Le premier résultat, nouveau à notre connaissance, est la convergence d'une sous-suite de l'approximation visqueuse lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformément en temps en horizon $T > 0$ fini et en distance W_1 , pour les potentiels lipschitziens et pour données ϱ_0^ε bien préparées au sens suivant :

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) &\leq F(\varrho^{ini}), \\ \forall \varepsilon > 0, \quad F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) &\leq C, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad M_2(\varrho_0^\varepsilon) &\leq C, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_2(\varrho_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) &= 0, \end{aligned}$$

où la fonctionnelle d'énergie est la somme de l'énergie d'interaction et de l'entropie :

$$F^\varepsilon(\varrho) = \mathcal{W}(\varrho) + \varepsilon \mathcal{U}(\varrho).$$

Pour que les données soient bien préparées, il suffit que $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ vers ϱ^{ini} et soit d'entropie uniformément bornée par rapport à ε : on a essentiellement en tête une donnée fixe $\varrho_0^\varepsilon = \varrho^{ini}$ d'entropie finie.

Le point de départ est de voir les solutions de l'équation d'agrégation-diffusion comme des flots de gradient dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ pour la fonctionnelle F^ε , comme nous l'avons vu dans l'introduction. La question que l'on se pose alors est la suivante : dans le cas particulier où $F = \mathcal{W}$ et $F^\varepsilon = \mathcal{W} + \varepsilon\mathcal{U}$, peut-on montrer que la fonctionnelle F^ε converge vers F en un certain sens lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et en déduire que les flots de gradient ϱ^ε convergent vers le flot de gradient de F , noté ϱ ? Pour répondre à cette question dans le cas général, Etienne Sandier et Sylvia Serfaty ont introduit la notion de Γ -convergence de flots de gradient, d'abord pour l'appliquer à l'énergie de Ginzburg-Landau [109] puis dans un cadre général [113].

Notre méthode se base exactement sur la même idée de fond, mais le point de vue que nous adoptons dans ce travail est celui de [112], qui nous semble le plus pragmatique et efficace pour l'appliquer au cas particulier de l'agrégation-diffusion. On se passe autant que faire se peut de définitions abstraites comme celles du *upper gradient* ou de la pente d'une fonctionnelle, et nous effectuons au maximum les calculs à la main simplement en partant de l'équation. Par exemple, nous dérivons l'IDE comme dans le lemme 1.3 sans passer par des considérations abstraites. L'idée est ensuite de partir de l'IDE :

$$F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) \geq F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \varrho}(\varrho_s^\varepsilon) \right\|_{L^2(\varrho_s)} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v[\varrho_s^\varepsilon]\|_{L^2(\varrho_s)} ds,$$

pour en déduire une borne uniforme sur $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$ permettant, d'une part, d'obtenir de la compacité et, d'autre part, d'obtenir une borne uniforme (en t et ε) sur $|(\varrho_s^\varepsilon)'| = \|v[\varrho_s^\varepsilon]\|_{L^2(\varrho_s)}$ pour en déduire que $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est équi- $\frac{1}{2}$ -höldérienne (en horizon fini toujours). On prouve ensuite qu'il est possible de passer à la $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ dans chacun des termes du membre de droite en utilisant des propriétés de semicontinuité inférieure. A la $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$, le membre de gauche est contrôlé par $F(\varrho^{ini})$ lorsque la donnée est bien préparée, et on en déduit une IDE limite qui permet d'identifier la limite ϱ de ϱ^ε comme une solution de l'équation d'agrégation. Notons que, lors du passage à la limite dans l'IDE, il apparaît clairement que l'on doit supposer ∇W antisymétrique partout, ce qui implique de poser $\nabla W(0) = 0$.

On étend ensuite ce résultat à une donnée quelconque lorsque le potentiel est λ -convexe, pour $\lambda \leq 0$. En effet, nous avons besoin d'estimer la distance de Wasserstein entre les solutions lorsque l'on modifie la donnée, ce qui peut être fait en combinant des estimées de λ -convexité à la formule fondamentale suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{p} W_p^p(\varrho_t, \mu_t) = \int \nabla \varphi_t \cdot v_t d\varrho_t + \int \nabla \psi_t \cdot w_t d\mu_t, \quad (1.31)$$

valable dès lors que $\varrho, \mu \in AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbf{R}^d))$ satisfont les équation de continuité $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0$ et $\partial_t \mu + \nabla \cdot (\mu w) = 0$, et où (φ_t, ψ_t) est une paire de potentiels de Kantorovitch de ϱ_t vers μ_t pour le coût $c(x, y) = \frac{1}{p}|x - y|^p$. En effet, lorsque W est λ -convexe pour $\lambda \leq 0$, on peut montrer, lorsque le coût considéré est quadratique, que :

$$\int \nabla \varphi_t \cdot a[\varrho_t] d\varrho_t + \int \nabla \psi_t \cdot a[\mu_t] d\mu_t \leq -\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t).$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, on peut en déduire une estimation d'écartement des solutions de l'équation d'agrégation en distance W_2 en combinant avec la formule (1.31). Lorsque $\varepsilon > 0$, on peut montrer que cette estimation reste vraie, la diffusion n'écartant pas davantage les solutions en distance W_2 (et même en distance W_p pour $p \geq 1$ quelconque en fait).

Au passage, on déduit de la formule (1.31) une estimation de convergence de ϱ^ε vers ϱ lorsque le potentiel est λ -convexe, $\lambda \leq 0$, puisqu'en l'appliquant à ϱ_t^ε et ϱ_t , toujours pour $p = 2$, on obtient formellement :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq -\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) - \varepsilon \int \nabla \varphi_t \cdot \nabla \varrho_t^\varepsilon \leq -\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) + \varepsilon \int \Delta \varphi_t \varrho_t^\varepsilon,$$

où on a utilisé une intégration par parties pour le dernier terme. En utilisant la concavité de $x \mapsto \varphi_t(x) - \frac{|x|^2}{2}$, qui implique $\Delta\varphi_t \leq d$, on en déduit :

$$\frac{d}{dt}W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq -2\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) + 2\varepsilon d,$$

Après application du lemme de Grönwall, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 1.11. *Supposons que W satisfasse les hypothèses (A0)-(A1)-(A2)-(A3) avec $\lambda \leq 0$. Soit $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, et notons $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la suite de solutions faibles de (1.1). Supposons, de plus, que la suite de données initiales $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge dans $\mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d)$ vers ϱ^{ini} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.*

En notant $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$ l'unique solution distributionnelle de (3.11) où $a[\varrho]$ est remplacé par $\hat{a}[\varrho]$, on a l'estimation de convergence :

$$\forall t > 0, \quad W_2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) + \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{\lambda}} \sqrt{d\varepsilon}. \quad (1.32)$$

Cette estimation est, à notre connaissance, nouvelle, et des tests numériques suggèrent qu'elle est optimale si on ne suppose pas davantage d'attractivité sur le potentiel. On propose une preuve alternative basée sur les estimations de convergence du schéma de type upwind de Delarue, Lagoutière et Vauchelet [43] pour l'équation non visqueuse. En considérant un schéma convergent pour l'équation visqueuse, par exemple upwind avec diffusion explicite¹¹, et en adaptant la preuve de [43] on montre que :

$$W_2(\varrho_{t^n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}) \leq C \sqrt{\frac{e^{4\lambda^- t^n} - 1}{\lambda^-}} \sqrt{\Delta x + \varepsilon} + e^{2\lambda^- t^n} \Delta x.$$

où ϱ_{t^n} est la solution non visqueuse au temps t^n et $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}$ une approximation de la solution visqueuse $\varrho_{t^n}^\varepsilon$. Sous réserve de montrer que le schéma converge au sens des mesures, passer à la limite $\Delta x \rightarrow 0$ permet de retrouver l'estimation (3.60) (les constantes ne sont pas exactement les mêmes, ce que l'on pourrait corriger en travaillant un peu plus finement).

On étudie ensuite une extension du résultat de convergence (non quantifiée) à une certaine classe de potentiels répulsifs par la même méthode. Cette fois, on estime la distance entre deux solutions de données différentes au moyen d'estimées précises sur le champ de vitesse $a[\varrho^\varepsilon]$, et au prix d'une hypothèse d'intégrabilité sur $\nabla^2 W$, mais en utilisant toujours la formule de dérivation de W_p ci-dessus.

Enfin, pour compléter le tableau, on s'intéresse à la convergence des états stationnaires de l'équation visqueuse vers le Dirac sous des hypothèses d'attractivité un peu plus fortes sur W (concrètement, quand W vérifie (A4-p)). Dans cette dernière partie, nous donnons des estimations de convergence par rapport à ε , qui, à notre connaissance, n'étaient pas présentes dans la littérature. A nouveau, des tests numériques suggèrent qu'elles sont optimales (on sait montrer qu'elles le sont pour $p = 2$ et pour $p = 1$ en dimension 1).

Remarque 1.13. En termes de vocabulaire, on utilisera indifféremment le terme de viscosité et de diffusion pour parler du terme en $\Delta\varrho^\varepsilon$, bien que « diffusion » paraisse plus adapté étant donné que ϱ^ε modélise une densité de population et pas la vitesse d'un fluide par exemple. La dénomination « viscosité évanescence » semble toutefois être utilisée dans la littérature pour la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour les équations du type (1.1) (voir [41, 33]) et vient d'une certaine proximité entre (3.11) et les « *active scalar problems* » tels que l'équation sur la vorticité pour les équations d'Euler incompressible, qui s'écrit en dimension 2 :

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0, \quad \text{où } v = K * \omega, \quad K(x) = \frac{x^\perp}{|x|^2},$$

11. peu nous importe si ce schéma est bon en pratique, il nous suffit d'avoir un schéma convergent quitte à ce que la CFL soit mauvaise.

ω étant la vorticité et v la vitesse du fluide. Si on développe la divergence dans (3.11) et que l'on traite le terme $(\Delta W * \varrho)\varrho$ comme un terme source, alors (3.11) apparaît comme un « *active scalar problem* » (voir [6], et aussi [106] pour des modèles connexes).

Chapitre 4 : Estimation de convergence d'une approximation par relaxation de l'équation d'agrégation

Dans [76] Jin et Xin proposent le système suivant pour approcher les solutions d'une loi de conservation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x v^\varepsilon = 0, \\ \partial_t v^\varepsilon + c^2 \partial_x u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (f(u^\varepsilon) - v^\varepsilon), \end{cases} \quad (1.33)$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre de relaxation, et $c > 0$ un paramètre permettant d'ajuster la stabilité du système.

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, si $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ résout le système de relaxation, alors u^ε converge vers une solution de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$. En effet, si c est suffisamment grand, on peut montrer que les solutions sont suffisamment stables pour que le second membre de la seconde équation reste borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On aura ainsi, à la limite formelle, $v = f(u)$ où $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$ et $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon$. Reportant dans la première équation, u sera bien solution de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$.

En effectuant une analyse à la Chapman-Enskog (disons, un développement asymptotique par rapport à ε), on peut voir que le système de relaxation (1.33) revient, pour u^ε et à l'ordre 2 en ε , à une loi de conservation diffusive. Cela permet au passage de trouver la condition de stabilité sur c . Écrivons donc, formellement, le développement suivant lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$$v^\varepsilon = v_0^\varepsilon + \varepsilon v_1^\varepsilon + \varepsilon^2 v_2^\varepsilon + \dots$$

En regardant l'ordre -1 par rapport à ε dans la seconde équation de (1.33), on obtient $v_0^\varepsilon = f(u^\varepsilon)$. Cherchons maintenant l'ordre 0 dans les deux équations :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = O(\varepsilon), \\ \partial_t f(u^\varepsilon) + c^2 \partial_x u^\varepsilon = -v_1^\varepsilon + O(\varepsilon). \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $f'(u^\varepsilon)$ pour retrouver le terme $\partial_t f(u^\varepsilon)$, et on en déduit :

$$v_1^\varepsilon = ((f'(u^\varepsilon))^2 - c^2) \partial_x u^\varepsilon + O(\varepsilon).$$

Or, à l'ordre 1, on a $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = -\varepsilon \partial_x v_1^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, d'où l'équation suivante sur u^ε :

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \partial_x [(c^2 - f'(u^\varepsilon)^2) \partial_x u^\varepsilon] + O(\varepsilon^2).$$

Pour qu'il s'agisse vraiment d'une loi de conservation avec un terme de diffusion non linéaire, le coefficient de diffusion $(c^2 - f'(u^\varepsilon)^2)$ doit être positif, ce qui revient à la condition de stabilité $c \geq |f'(u^\varepsilon)|$, parfois appelée condition sous-caractéristique.

Dans ce travail en collaboration avec Benoît Fabrèges, Frédéric Lagoutière et Nicolas Vauchelet publié dans le journal *Axioms*, MDPI, nous adaptons le système de relaxation (1.33)   l'équation d'agrégation en dimension $d = 1$. Concrètement, on considère le système sur (ϱ, σ) :

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x \sigma &= 0, \\ \partial_t \sigma + c^2 \partial_x \varrho &= \frac{1}{\varepsilon} (a[\varrho] \varrho - \sigma), \\ a[\varrho] &= -W' * \varrho, \end{aligned}$$

Du point de vue de la modélisation, ce système est à rapprocher des modèles hyperboliques pour le chimiotactisme, qui permettent, contrairement aux modèles de type Keller-Segel, d'avoir une vitesse de propagation finie (ici $\pm c$) des individus. On renvoie par exemple à [66, 64] pour des modèles similaires et [99, 25] pour leur analyse numérique.

Nous cherchons ici à prouver rigoureusement la convergence de ϱ vers une solution de l'équation d'agrégation (3.11) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, tout en donnant des estimations de convergence. Pour ce système, la condition sous-caractéristique est $c \geq a_\infty$. Pour le potentiel $W(x) = \frac{|x|}{2}$ en dimension 1, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.12. *On suppose $d = 1$ et $W(x) = \frac{|x|}{2}$. Soit $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, $c > 1/2$ et posons $\sigma^{ini} = a[\varrho^{ini}]\varrho^{ini}$. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, en notant $(\varrho^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ la solution du système de relaxation ci-dessus avec donnée initiale (ϱ_0, σ_0) , on a :*

$$\forall T > 0, \quad W_1(\varrho(T), \varrho^\varepsilon(T)) \leq C(\sqrt{\varepsilon T} + \varepsilon),$$

où $\varrho \in C([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ est l'unique solution de (3.11).

Pour obtenir ce résultat, comme dans la première partie du chapitre 3, nous utilisons la correspondance entre l'équation d'agrégation et l'équation de Burgers lorsque $d = 1$ et $W(x) = \frac{|x|}{2}$. Tout le travail revient donc à obtenir des résultats de convergence pour le système (1.33) lorsque $f(u) = \frac{u^2}{2}$. Les premiers résultats de convergence pour ce système ont été établis par Roberto Natalini [96] par des méthodes de compacité (pour un panorama complet de telles méthodes, on renvoie au notes de cours du même auteur [97]). Cependant, la convergence a lieu dans $L_T^\infty L_{loc}^1$, ce qui, comme pour la viscosité, ne permet pas de passer à la limite pour le problème d'agrégation. A nouveau, on cherche donc à prouver un résultat de convergence L^1 en espace.

La méthode que nous adoptons pour ce faire n'est pas originale, elle est due à Katsoulakis et Tzavaras [80] mais nous proposons une preuve simplifiée et explicite dans le cas particulier du flux Burgers, qui d'ailleurs ne rentre pas exactement dans le cadre de [80] qui supposent que la condition sous-caractéristique $f'(u) \leq c$ est valable pour tout $u \in \mathbf{R}$. Nous modifions donc le flux de Burgers pour que cette condition soit vérifiée, et nous montrons a posteriori qu'une telle modification n'affecte pas les solutions.

Le coeur du travail consiste ensuite à établir des estimations de type Kruzkov dans le cadre précis de la relaxation. Il s'agit donc d'un travail essentiellement technique et assez calculatoire, mais nous pensons justement que le détail des calculs¹² dans le cas particulier de l'équation de Burgers constitue une contribution pertinente pour le lecteur intéressé par ce type d'estimations. Le passage de l'équation de Burgers à l'équation d'agrégation est lui, original dans le cadre de la relaxation¹³ et il n'y avait, à notre connaissance, pas de résultat de convergence quantifié pour l'approximation par relaxation pour l'équation d'agrégation.

Nous proposons également des schémas préservant l'asymptotique au sens où ils dégénèrent, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers des schémas convergents pour l'équation d'agrégation et qui préservent la bonne dynamique des masses de Dirac. Une première approche classique pour les systèmes de relaxation est celle du splitting. Elle consiste, sur un pas de temps, à résoudre le système hyperbolique sans second membre puis la partie EDO. Ce schéma dégénère vers le schéma de Rusanov, connu pour être assez diffusif. Nous proposons une deuxième approche basée sur les travaux de Gosse et Vauchelet [63, 64]. Il s'agit d'un schéma well-balanced qui se trouve être moins diffusif que le schéma de splitting.

12. d'ailleurs, les calculs sont volontairement détaillés de façon plus pédagogique dans cette version du manuscrit que dans l'article [55].

13. Dans d'autres contextes, il est bien connu et utilisé depuis longtemps, voir [16, 15, 70].

Chapitre 2

Schémas numériques pour les équations d'agrégation

2.1 Schémas pour l'agrégation

2.1.1 Généralités et état de l'art

L'approximation numérique des solutions mesures de l'équation d'agrégation (3.11) a déjà fait l'objet de nombreux travaux : on y retrouve notamment des schémas particuliers [31, 54, 36], d'autres basés sur le transport optimal [4] et des schémas de type volumes finis [71, 36, 90, 34, 4]. C'est ce type de discrétisation qui l'on considère dans ce chapitre.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux schémas volumes finis où on part, par exemple, de schémas connus pour l'équation de continuité $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (a\varrho) = 0$ et on prend garde à discrétiser correctement le produit $a[\varrho]\varrho$ lorsque W a une singularité en 0, afin de retrouver le comportement attendu des solutions mesures après blow-up. La convergence de ces schémas se prouve essentiellement par compacité, en appliquant un théorème de type Lax-Wendroff après avoir obtenu des bornes sur la solution discrète afin de pouvoir extraire de la suite d'approximations une sous-suite convergeant uniformément en temps fini $T > 0$ et faiblement en espace vers une limite $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d))$ [36, 90, 32, 89]. La convergence quantifiée de ce type de schéma a également été étudiée dans [43] pour le schéma de type upwind suivant, où $\Delta t > 0$ est le pas de temps et Δx_i le pas d'espace dans la direction $i \in \{1, \dots, d\}$ du maillage cartésien de \mathbf{R}^d associé :

$$\varrho_J^{n+1} = \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left((a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n - (a_{iJ-e_i}^n)^+ \varrho_{J-e_i}^n + (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n \right), \quad J \in \mathbf{Z}^d \quad (2.1a)$$

$$a_{iJ}^n := - \sum_{K \in \mathbf{Z}^d} \varrho_K^n D_i W_J^K, \quad \text{où} \quad D_i W_J^K := \widehat{\partial_{x_i} W}(x_J - x_K), \quad J \in \mathbf{Z}^d, i = 1, \dots, d, \quad (2.1b)$$

où $\widehat{\partial_{x_i} W}(x) := \partial_{x_i} W(x)$ si $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ et $\widehat{\partial_{x_i} W}(0) = 0$. On a aussi noté $(e_i)_{i=1, \dots, d}$ la base canonique de \mathbf{R}^d , et on notera, pour $J = (J_1, \dots, J_d) \in \mathbf{Z}^d$, $C_J := [(J_1 - \frac{1}{2})\Delta x_1, (J_1 + \frac{1}{2})\Delta x_1] \times \dots \times [(J_d - \frac{1}{2})\Delta x_d, (J_d + \frac{1}{2})\Delta x_d]$ la maille centrée en $x_J := (J_1\Delta x_1, \dots, J_d\Delta x_d)$. Dans [43], où les arguments probabilistes de [42] pour le transport à vitesse OSL sont adaptés à l'agrégation dans le formalisme du transport optimal, Delarue, Lagoutière et Vauchelet obtiennent, sous CFL stricte $a_\infty \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1/2$, convergence à l'ordre 1/2 du schéma (2.1) en distance de Wasserstein. Sous CFL large, $a_\infty \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, on peut montrer qu'il est convergent au sens de la convergence faible $(\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d))'$ (voir par exemple [90]).

Contrairement au schéma upwind standard où la vitesse est calculée aux interfaces :

$$\varrho_J^{n+1} = \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left((a_{iJ+\frac{1}{2}e_i}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+\frac{1}{2}e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n - (a_{iJ-\frac{1}{2}e_i}^n)^+ \varrho_{J-e_i}^n + (a_{iJ-\frac{1}{2}e_i}^n)^- \varrho_J^n \right), \quad (2.2)$$

$$a_{iJ+\frac{1}{2}e_i}^n = - \sum_{K \in \mathbf{Z}^d} \varrho_K^n \widehat{\partial_{x_i} W}(x_{J+\frac{1}{2}e_i} - x_K), \quad (2.3)$$

le schéma (2.1) discrétise au même point la vitesse $a[\varrho]$ et la solution ϱ . Ce procédé est nécessaire pour garantir la convergence pour les solutions mesures, et il est possible de construire des exemples de mesures initiales où le schéma upwind standard n'est pas convergent après le temps d'explosion [43].

Remarque 2.1. Le schéma (2.1) ne fait pas décroître l'énergie d'interaction de la solution discrète (voir encore [43] pour un exemple explicite).

2.1.2 Reconstruction et convergence dans différentes topologies

Quelle type de reconstruction/interpolation adopter pour définir une approximation $\varrho_{\Delta x}$ de la solution ϱ à valeurs mesures à partir des $(\varrho_J^n)_{J \in \mathbf{Z}^d}^{n \in \mathbf{N}}$? Doit-on imposer à $\varrho_{\Delta x}$ d'être constante par maille, comme dans le cadre des différences finies ou des volumes finis? Avec quelle métrique mesurer l'erreur de convergence?

Le point important est qu'en toute généralité $\varrho(t)$ peut contenir des masses de Dirac. Par conséquent, on n'estimera pas, en général, l'écart entre $\varrho_{\Delta x}(t^n)$ et $\varrho(t^n)$ dans une norme fonctionnelle de type L^p , mais plutôt en distance de Wasserstein. De plus, on considérera la reconstruction suivante, affine par morceaux en temps et, en espace, égale à une masse de Dirac dans chaque maille :

$$\varrho_{\Delta x}(t) := \sum_{n \in \mathbf{N}} \left(\frac{t^{n+1} - t}{\Delta t} \varrho_{\Delta x}^n + \frac{t - t^n}{\Delta t} \varrho_{\Delta x}^{n+1} \right) \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}[}(t), \quad (2.4a)$$

$$\varrho_{\Delta x}^n := \sum_{J \in \mathbf{Z}^d} \varrho_J^n \delta_{x_J}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (2.4b)$$

qui est bien adaptée à approximer une solution $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d))$. Pour les illustrations toutefois, on ne trace pas une somme de masses de Dirac, peu visuelle, mais une reconstruction affine par morceaux. Ainsi, une masse de Dirac sera représentée par un triangle (ou un polygone en présence de diffusion numérique, voir figure 2.1.

Notons que l'on aurait pu utiliser une reconstruction constante par morceaux en temps mais celle-ci a l'inconvénient de ne pas être continue en temps. Il est donc un peu plus technique d'en extraire une sous-suite convergente telle que l'extraction soit la même pour tout t (par exemple en appliquant le théorème d'Ascoli, voir [89]). Toutefois, en effectuant l'analyse d'abord sur la reconstruction affine par morceaux en temps puis en la comparant à celle constante par morceaux, on peut montrer que cette dernière bénéficie des mêmes propriétés de convergence¹.

Voir la solution discrète comme une somme de masses de Dirac à chaque étape permet aussi de mieux comprendre le schéma upwind (2.1) :

$$\varrho_J^{n+1} = \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(F_{J+\frac{1}{2}e_i}^n - F_{J-\frac{1}{2}e_i}^n \right),$$

$$F_{J+\frac{1}{2}e_i}^n := (a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n.$$

L'interprétation du flux numérique à l'interface $x_{J+\frac{1}{2}e_i}$, dans la direction i , est la suivante

1. Méthode à rapprocher de celle montrant la convergence du schéma de JKO pour l'équation de Fokker-Planck par exemple (voir [112], paragraphe 8.3) : la reconstruction affine par morceaux est uniformément $\frac{1}{2}$ -höldérienne en temps et est une courbe $AC([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}^d))$, qui vérifie donc une équation de continuité.

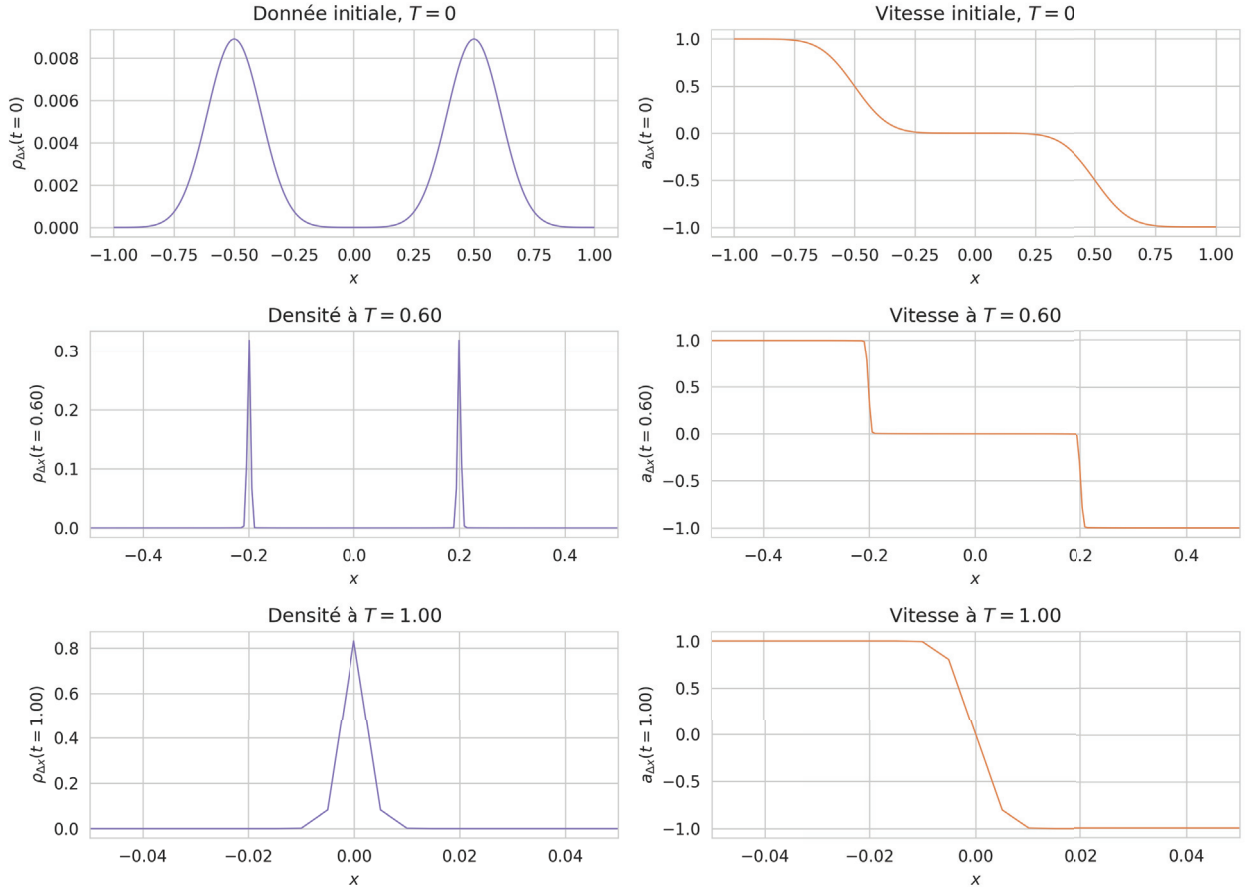


FIGURE 2.1 – Exemple de comportement du schéma upwind (2.1) pour donnée régulière, $W(x) = |x|$, 401 mailles, CFL= 0.9. On constate un peu de diffusion numérique qui fait « baver » la masse de Dirac sur 3 mailles.

(voir figure 2.2) : si $a_{iJ}^n \geq 0$, alors le demi-flux $a_{iJ}^n \varrho_J^n$ traverse l'interface $x_{J+\frac{1}{2}e_i}$ et apporte une contribution positive à $F_{J+\frac{1}{2}e_i}^n$; et si $a_{iJ}^n < 0$ la masse de Dirac $\varrho_J^n \delta_{x_J}$ ne contribue pas à $F_{J+\frac{1}{2}e_i}^n$, ce qui donne au bout du compte une contribution de $+(a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n$. De la même façon, la masse de Dirac $\varrho_{J+e_i}^n \delta_{x_{J+e_i}}$ contribue à $-(a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+1}^n$ dans le flux numérique $F_{J+\frac{1}{2}e_i}^n$.

On voit donc que ce schéma est construit précisément pour les solutions qui sont singulières. Lorsque l'on étudie la convergence d'un schéma pour l'agrégation, il faut, en fait, porter une attention particulière aux types de solutions que l'on souhaite approcher : s'agit-il de mesures de probabilité ou de solutions régulières ? Un schéma peut, en effet, être convergent ℓ^∞ pour les solutions régulières mais pas convergent \mathbb{W}_1 pour les solutions mesures, et vice-versa.

2.2 Schémas pour lois de conservation scalaires

Nous précisons, dans cette section, le lien entre l'équation d'agrégation en dimension 1 et les lois de conservation scalaires. Ce lien permet, comme dans la section 3.1 et dans le chapitre 4 pour potentiels du type $W(x) = \alpha|x|$ avec $\alpha \neq 0$, d'obtenir des résultats de convergence quantifiée pour l'équation d'agrégation dans ce cas particulier, en travaillant exclusivement sur des lois de conservation de type Burgers et en traduisant les estimations en distance de Wasserstein. D'un point de vue numérique, ce lien permet aussi d'obtenir des estimations, mais également de formuler des conjectures et de construire des schémas.

Le but de cette section est donc de rappeler ou de démontrer certaines estimations d'erreurs

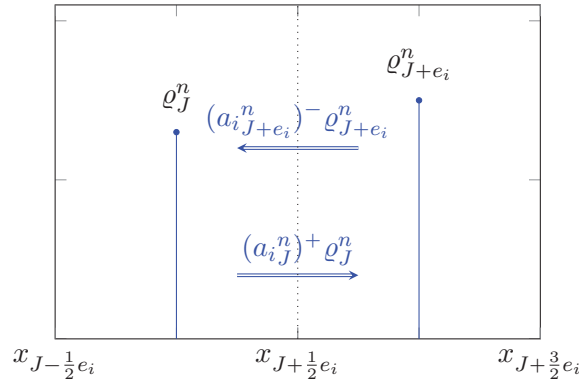


FIGURE 2.2 – Flux numérique $F_{J+\frac{1}{2}e_i}^n$ (dans la direction i) pour le schéma (2.1)

pour les schémas volumes finis approximant des lois de conservation scalaires, et de les adapter à l'équation d'agrégation.

Dans toute cette section, on se placera en dimension $d = 1$ et on munit \mathbf{R} d'un maillage cartésien régulier de noeuds $x_{j+\frac{1}{2}} := \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x$ où $j \in \mathbf{Z}$ et $\Delta x > 0$ est le pas d'espace. On notera $\Delta t > 0$ le pas de temps, et $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbf{N}$.

2.2.1 Correspondance entre l'équation d'agrégation et l'équation de Burgers pour $d = 1$, $W(x) = \alpha|x|$, $\alpha \neq 0$

On se place ici dans le cas $d = 1$ et $W(x) = \alpha|x|$, où α est un réel fixé non nul. Le but est de formaliser l'équivalence entre la résolution de l'équation d'agrégation (3.11) en dimension 1 et celle d'une loi de conservation scalaire de type Burgers, portant sur les fonctions de répartition.

Tout d'abord, la distance L^p entre les fonctions de répartition et la distance de Wasserstein W_p entre les mesures correspondantes [115, 94, 126] sont liées de la façon suivante (voir également [43] et [112] section 2.1) :

Lemme 2.1. Soit $p \in [1, +\infty[$ et μ, ν deux mesures de probabilité sur \mathbf{R} de fonctions de répartition respectives F et G , définies par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \mu([-\infty, x]) \text{ et } G(x) = \nu([-\infty, x]).$$

On note également F^{-1} et G^{-1} leurs inverses généralisés respectifs, donnés par² :

$$\forall y \in [0, 1], \quad F^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geq y\} \text{ et } G^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid G(x) \geq y\}.$$

Alors on a la formule de représentation :

$$W_p(\mu, \nu) = \|F^{-1} - G^{-1}\|_{L^p([0,1])}.$$

Et, pour $p = 1$:

$$\|F^{-1} - G^{-1}\|_{L^1([0,1])} = \|F - G\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

Cette représentation est utile en pratique pour évaluer la distance de Wasserstein W_1 en dimension 1, voir [42, 54].

La correspondance entre agrégation et équation de Burgers vient de l'argument suivant. Formellement, on sait que, lorsque l'on intègre en espace une équation conservative du type $\partial_t \varrho + \partial_x(b\varrho) = 0$, on obtient l'équation de transport non conservative $\partial_t F + b\partial_x F = 0$ portant

2. voir l'annexe A.1 pour plus de détails

sur n'importe quelle primitive $F(t)$ de $\varrho(t)$. Ici, $b = a[\varrho]$ et on prend pour $F(t)$ la fonction de répartition de $\varrho(t)$. Dans le cas du potentiel $W(x) = \alpha|x|$ et pour $\varrho(t)$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, un calcul simple donne $a[\varrho] = \alpha(1 - 2F)$ (voir le point 2) de la proposition 2.1), si bien que F vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t F + \partial_x \alpha F(1 - 2F) = 0, \\ F(0, x) = \varrho^{ini}([-\infty, x]), \quad x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (2.5)$$

et donc $u = \alpha(1 - 2F)$ vérifie l'équation de Burgers. Concrètement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$. On note $F(t)$ la fonction de répartition de $\varrho(t)$. Alors ϱ est solution, au sens des distributions, du problème d'agrégation (3.11) si et seulement si $u := \alpha(1 - 2F)$ est solution au sens des distributions de l'équation de Burgers (1.6) avec donnée initiale $u^{ini} : x \mapsto \alpha(1 - 2\varrho^{ini}([-\infty, x]))$.*

Le lien entre l'équation d'agrégation et l'équation de Burgers en dimension 1 est en fait bien connu et a été exploité dans les travaux de James et Vauchelet [70] ainsi que ceux de Bonaschi, Carrillo, Di Francesco, Peletier [16]. Pour de plus amples détails sur ces derniers travaux, on pourra consulter la partie II de la thèse de Giovanni Bonaschi [15].

Remarque 2.2. Ce résultat donne une autre façon de voir l'apparition éventuelle de singularités en temps fini pour (3.11), même si la donnée initiale est régulière : cela correspond à des chocs pour F . Plus précisément, une discontinuité de $F(t)$ correspond à une atome pour $\varrho(t)$.

Pour démontrer rigoureusement ce résultat pour ϱ quelconque, on a besoin d'utiliser l'expression explicite $W' = \alpha \operatorname{sgn}$ pour récrire $\hat{a}[\varrho](t)$ en fonction de $F(t)$. C'est le lemme suivant, qui donne aussi la dérivation exacte de F^2 au sens faible :

Lemme 2.2. *Soit $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ et $F : (t, x) \mapsto \varrho(t)([-\infty, x])$. Alors :*

- (1) $\partial_x F^2 = (2F - \varrho(t)\{x\})\varrho$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$,
- (2) $\hat{a}[\varrho](t, x) = -\alpha(2F(t, x) - \varrho(t)\{x\} - 1)$.

Preuve du lemme 2.2. (1) On doit montrer que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}), \quad 2 \langle \varrho, F\phi \rangle = - \langle F^2, \partial_x \phi \rangle + \langle \varrho, \varrho(t)\{x\}\phi(t, x) \rangle .$$

On récrit le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \langle \varrho, F\phi \rangle &= \iint d\varrho(t)(x) F(t, x) \phi(t, x) dt \\ &= \iint_{x \in \mathbf{R}} \int_{y \in [-\infty, x]} d\varrho(t)(y) d\varrho(t)(x) \phi(t, x) dt \\ &= \iint_{y \in \mathbf{R}} \int_{x \in [y, +\infty[} d\varrho(t)(y) d\varrho(t)(x) \phi(t, x) dt \\ &= - \iint_{y \in \mathbf{R}} d\varrho(t)(y) \int_{x \in [y, +\infty[} d\varrho(t)(x) \int_{z \in [x, +\infty[} \partial_x \phi(t, z) dz dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{puis, par théorème de Fubini, } \int_{x \in [y, +\infty[} \int_{z \in [x, +\infty[} = \int_{z \in [y, +\infty[} \int_{x \in [y, z]} : \\
\langle \varrho, F\phi \rangle &= - \iint_{y \in \mathbf{R}} d\varrho(t)(y) \int_{z \in [y, +\infty[} \partial_x \phi(t, z) \underbrace{\int_{x \in [y, z]} d\varrho(t)(x)}_{=F(t, z) - (F(t, y) - \varrho(t)\{y\})} dz dt \\
&= - \iint_{y \in \mathbf{R}} \int_{z \in [y, +\infty[} d\varrho(t)(y) \partial_x \phi(t, z) F(t, z) dz dt \\
&+ \iint_{y \in \mathbf{R}} d\varrho(t)(y) \underbrace{\left(\int_{z \in [y, +\infty[} \partial_x \phi(t, z) dz \right)}_{-\phi(t, y)} (F(t, y) - \varrho(t)\{y\}) dt \\
&= - \langle F^2, \partial_x \phi \rangle - \langle \varrho, F\phi \rangle + \langle \varrho, \varrho(t)\{x\}\phi(t, x) \rangle.
\end{aligned}$$

donc $2 \langle \varrho, F\phi \rangle = - \langle F^2, \partial_x \phi \rangle + \langle \varrho, \varrho(t)\{x\}\phi(t, x) \rangle$.

(2) Par définition de $\hat{a}[\varrho]$:

$$\begin{aligned}
\hat{a}[\varrho](t, x) &= - \left(\int_{y < x} \alpha \operatorname{sgn}(x - y) d\varrho(t)(y) + \int_{y > x} \alpha \operatorname{sgn}(x - y) d\varrho(t)(y) \right) \\
&= -\alpha \int_{y < x} d\varrho(t)(y) + \alpha \int_{y > x} d\varrho(t)(y) \\
&= -\alpha (F(t, x) - \varrho(t)\{x\}) + \alpha(1 - F(t, x)) \\
&= -\alpha (2F(t, x) - \varrho(t)\{x\} - 1).
\end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition 2.1. On prouve le sens réciproque. Soit $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ et $F : (t, x) \mapsto \varrho(t)(] - \infty, x])$. On suppose que $u := \alpha(1 - 2F)$ est solution de l'équation de Burgers, c'est-à-dire que F est solution de (2.5).

Comme $\varrho = \partial_x F$ au sens des distributions, en dérivant cette équation par rapport à x , on en déduit que ϱ vérifie au sens des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho - \alpha \partial_x (\partial_x F^2) + \alpha \partial_x \varrho = 0, \\ \varrho(t = 0) = \varrho^{ini}. \end{cases}$$

Or, d'après le lemme 2.2,

$$\begin{aligned}
\partial_x (\partial_x F^2) - \partial_x \varrho &= \partial_x (2F - \varrho(t)\{x\} - 1)\varrho, \\
&= -\frac{1}{\alpha} \partial_x \hat{a}[\varrho]\varrho,
\end{aligned}$$

si bien que ϱ est bien solution du problème d'agrégation (3.11).

Réciproquement, tous les calculs se remontent, par exemple en partant de $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ et en écrivant la formulation faible de (3.11) contre φ une primitive de ϕ . □

Bien sûr, la correspondance est aussi valable pour l'équation visqueuse (1.1) que nous étudierons dans la partie 3 : comme ϱ^ε est régulière, on a $\hat{a}[\varrho^\varepsilon] = a[\varrho^\varepsilon]$ et puisque la diffusion est linéaire, $\langle \partial_{xx} \varrho^\varepsilon, \varphi \rangle = \langle \partial_{xx} F^\varepsilon, \partial_x \varphi \rangle$. C'est la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Soit $\varepsilon > 0$, $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ et $F^\varepsilon : (t, x) \mapsto \varrho^\varepsilon(t)(] - \infty, x])$. Alors, ϱ^ε est solution, au sens des distributions, de (1.1) si et seulement si $u^\varepsilon := \alpha(1 - 2F^\varepsilon)$ est solution du problème de Cauchy suivant, où $u^{ini} : x \mapsto \alpha(1 - 2\varrho^{ini}(] - \infty, x])$:*

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon, \\ u(0, \cdot) = u^{ini}. \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.2 Correspondance entre schémas pour les lois de conservation et schémas pour l'agrégation, $d = 1$, $W(x) = \alpha|x|$, $\alpha \neq 0$

Du point de vue de l'approximation numérique, la correspondance que nous avons formalisée au paragraphe précédent est aussi valable au niveau discret. L'idée est donc d'utiliser cette correspondance avec l'équation de Burgers pour proposer des schémas pour l'équation d'agrégation ; l'objectif des sections suivantes sera ensuite de quantifier la convergence de ces schémas.

Schémas volumes finis pour une loi de conservation

Rappelons rapidement quelques notions sur la discrétisation volumes finis d'une loi de conservation scalaire à flux régulier $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(0, \cdot) = u^{ini}, \end{cases} \quad (2.7)$$

En toute généralité, un schéma volumes finis à $2k + 1$ points pour (2.7) s'écrit :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+k}^n), \quad (2.8)$$

où $H : \mathbf{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbf{R}$ est donné et décrit le schéma. Si ce dernier est conservatif, c'est que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad (2.9a)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_{j-k+1}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j-k}^n). \quad (2.9b)$$

Il est consistant si $g(u, u, \dots, u) = f(u)$ et monotone si H est croissante par rapport à chacun de ses arguments.

Proposition 2.3. Un schéma monotone

- préserve la monotonie : si $u^0 \leq v^0$ alors $u^n \leq v^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$,
- préserve la monotonie (bis) : si u^0 est croissante alors u^n l'est pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- fait décroître la norme L^∞ (autrement dit, il vérifie le principe du maximum discret³) ainsi que la variation totale.
- est entropique : pour toute entropie η , c'est-à-dire fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, il existe un flux d'entropie discrète S , c'est-à-dire une fonction vérifiant $\sigma'(u) = \eta'(u)f'(u)$ tel que

$$\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\sigma(u_{j-k+1}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j-k}^n) - \sigma(u_{j-k}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j-k-1}^n)) \leq 0.$$

Exemple 2.1. On donne quelques exemples de flux classiques de schémas conservatifs et consistants à 3 points. Pour vérifier la monotonie d'un schéma à 3 points, il suffit de regarder si g est croissant par rapport à son premier argument et décroissant par rapport au second. Plus précisément, de la relation $H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(v, w) - g(u, v))$, on déduit facilement que, si g est croissant par rapport à son premier argument et décroissant par rapport au second et si la condition CFL $\Delta t \sup (\partial_1 g - \partial_2 g) \leq \Delta x$ est vérifiée⁴, alors H est monotone. La réciproque est vraie sans que cette condition CFL ait besoin d'être satisfaite.

3. en cela, un schéma volume finis monotone est le pendant d'un schéma différences finies stable.

4. Le sup dans cette condition CFL peut être pris sur $[-\|u^{ini}\|_{L^\infty}, \|u^{ini}\|_{L^\infty}]^2$, car dans ce cas, le schéma est monotone et à chaque pas de temps, u^n reste dans $[-\|u^{ini}\|_{L^\infty}, \|u^{ini}\|_{L^\infty}]$.

(1) Flux de Rusanov :

$$g(u, v) = \frac{u + v}{2} - \frac{c}{2}(v - u).$$

Ce schéma est monotone sous la condition de stabilité $c \geq \|f'(u)\|_{L^\infty}$ ($\|f'(u)\|_{L^\infty}$ revient à $\|f'(u^{ini})\|_{L^\infty}$ pour flux convexe, et à $\sup_{[-\|u^{ini}\|_{L^\infty}, \|u^{ini}\|_{L^\infty}] |f'|}$ en général) et la condition CFL $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

(2) Flux de Godunov :

$$g(u, v) = \begin{cases} \min_{u \leq x \leq v} f(x) & \text{si } u \leq v, \\ \max_{v \leq x \leq u} f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il y a une façon équivalente de voir le schéma de Godunov : étant donné l'approximation au temps n , $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$, on résout explicitement les problèmes de Riemann à chaque interface $x_{j+\frac{1}{2}}$. La solution **entropique** du problème de Riemann associé aux états constants u_j^n à gauche et u_{j+1}^n à droite est autosimilaire, notons-la $\mathcal{R}\left(\frac{x}{t}, u_j^n, u_{j+1}^n\right)$. On assigne ensuite au flux numérique la valeur du flux continu donné par la solution du problème de Riemann évaluée à l'interface (cela ne dépend plus du temps car, encore une fois, la solution est autosimilaire) :

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n := f\left(\mathcal{R}(0, u_j^n, u_{j+1}^n)\right).$$

(3) Flux de Engquist-Osher :

$$g(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{2} \int_u^v |f'(\theta)| d\theta,$$

ce qui revient à :

$$g(u, v) = \int_0^u f'(x)^+ dx - \int_0^v f'(x)^- dx.$$

Les deux schémas précédents sont monotones sous la condition CFL $\|f'(u)\|_{L^\infty} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

(4) Flux de Roe :

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u) & \text{si } \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \geq 0, \\ f(v) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10)$$

En d'autres termes, le schéma de Roe est un schéma décentré (upwind/downwind) où le sens du décentrage est donné par le signe de la vitesse dans la relation de Rankine-Hugoniot $\sigma = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$. Autrement dit, étant donné l'approximation au temps n , $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$, si la solution discontinue en translation (choc) associée aux états constants u_j^n à gauche et u_{j+1}^n à droite se transporte vers la gauche, on assigne au flux numérique la valeur aval : $f_{j+\frac{1}{2}}^n := f(u_{j+1}^n)$. Sinon, on lui assigne la valeur amont : $f_{j+\frac{1}{2}}^n := f(u_j^n)$.

En des termes équivalents, cela revient à poser :

$$g(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{f(v) - f(u)}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{f(u) - f(v)}{u - v}\right).$$

On remarque que, en quelque sorte, le schéma de Roe ne prend pas en compte les raréfactions. D'une certaine façon, c'est un schéma de Godunov où, au lieu de résoudre de façon entropique les problèmes de Riemann aux interfaces, on le résout en imposant la contrainte que la solution est un choc.

Ainsi, ce schéma n'est, en fait, pas entropique ; il n'est donc pas non plus monotone et ne préserve pas la positivité. Il est toutefois bien connu et utilisé en mécanique des fluides numériques du fait de sa faible dissipation numérique [53, 60].

Remarque 2.3. Rappelons qu'avec un flux f général, un choc à vitesse σ entre les états gauche u_g et droit u_d résout $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ si et seulement si sa vitesse vérifie la relation de Rankine-Hugoniot $\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}$, et ce choc est entropique si et seulement si il vérifie la condition d'Oleinik :

$$\begin{cases} f(\theta u_d + (1 - \theta)u_g) \geq \theta f(u_d) + (1 - \theta)f(u_g) & \text{si } u_d > u_g, \\ f(\theta u_d + (1 - \theta)u_g) \leq \theta f(u_d) + (1 - \theta)f(u_g) & \text{si } u_d < u_g. \end{cases}$$

Si le flux f est convexe, la condition d'Oleinik se résume à $u_g > u_d$. Pour de plus amples détails sur la résolution du problème de Riemann, on renvoie au paragraphe 4.4 des notes de Jean-François Coulombel [37].

Ainsi, si l'on se trouve dans un cas où, à chaque interface, la solution entropique du problème de Riemann est le choc se propageant à la vitesse donnée par la relation de Rankine-Hugoniot, alors les schémas de Roe et Godunov coïncident. C'est le cas, par exemple, si u^{ini} est décroissante, et que le flux f est convexe : dans ce cas, u^0 est décroissante, c'est-à-dire $u_j^0 \geq u_{j+1}^0$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ et les chocs à chaque interface sont donc entropiques. Dans ce cas, tous les flux numériques Roe coïncident avec les flux Godunov, donc au temps suivant les deux schémas donnent la même solution discrète. Puisque le schéma de Godunov est monotone, au temps suivant, u^1 reste décroissante et le même raisonnement s'applique.

Remarque 2.4. Le schéma upwind de [43] peut être vu comme un schéma de type Engquist-Osher. En effet, le schéma de Engquist-Osher linéaire pour $\partial_t u + a \partial_x u = 0$ avec a constante $a \in \mathbf{R}$ a pour flux numérique, puisque $f(u) = au$:

$$g(u, v) = \int_0^u f'(x)^+ dx - \int_0^v f'(x)^- dx = a^+ u - a^- v,$$

En remplaçant la vitesse par son évaluation aux bons points, on retrouve bien le flux numérique de (2.1a).

Schémas pour l'équation d'agrégation

Quel est le lien exact entre les schémas que nous venons de voir et les schémas pour l'équation d'agrégation ? On rappelle que l'on suppose toujours $d = 1$ et $W(x) = \alpha|x|$ pour $\alpha \neq 0$. Considérons d'abord le cas du schéma upwind (2.1) de [43] que nous avons vu en introduction de ce chapitre. Nous allons montrer que ce schéma donne, pour l'équation de Burgers, le schéma de Roe.

Rappelons que, dans le cas de la dimension $d = 1$ avec potentiel $W(x) = \alpha|x|$, la marche en temps du schéma upwind de [43] s'écrit :

$$\begin{cases} \varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((a_j^n)^+ \varrho_j^n - (a_{j+1}^n)^- \varrho_{j+1}^n - (a_{j-1}^n)^+ \varrho_{j-1}^n + (a_j^n)^- \varrho_j^n \right), \\ a_j^n = -\alpha \sum_{k \neq j} \text{sgn}(j - k) \varrho_k^n, \end{cases} \quad (2.11)$$

ou, de façon plus compacte :

$$\varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (|a_j^n| \varrho_j^n - (a_{j+1}^n)^- \varrho_{j+1}^n - (a_{j-1}^n)^+ \varrho_{j-1}^n).$$

Remarque 2.5. Etant donné que, en continu, $\varrho = -\frac{1}{2\alpha} \partial_x u$, en discret, on décalera les approximations discrètes de ϱ d'une demi-maille par rapport à celles de u . Plus précisément, partant de la reconstruction volumes finis $u_{\Delta x}^n := \sum_{j \in \mathbf{Z}} u_j^n \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}$, la reconstruction $\varrho_{\Delta x}^n$ doit correspondre à sa dérivée en espace, donc être vue comme une somme de masses de Dirac aux interfaces. On

posera donc $\varrho_{\Delta x}^n := \sum_{j \in \mathbf{Z}} \varrho_j^n \delta_{x_{j+1/2}}$, et on remplacera ϱ_j^n par $\varrho_{j+1/2}^n$ et a_j^n par $a_{j+1/2}^n$ dans le schéma upwind, ce qui donne :

$$\varrho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|a_{j+\frac{1}{2}}^n| \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n - (a_{j+\frac{3}{2}}^n)^- \varrho_{j+\frac{3}{2}}^n - (a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+ \varrho_{j-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (2.12)$$

Proposition 2.4. *On suppose $d = 1$ et $W(x) = \alpha|x|$ pour $\alpha \neq 0$. Soit $u^{ini} \in L^\infty \cap BV$.*

Notons $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}}$ la solution du schéma de Roe de donnée $u^{ini} \in L^\infty \cap BV$ pour l'équation de Burgers. Alors, en posant $\varrho_{j+1/2}^n = \frac{u_j^n - u_{j+1}^n}{2\alpha}$, la suite $(\varrho_{j+1/2}^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}}$ est solution du schéma (2.11) pour la donnée initiale $\varrho^{ini} := -\frac{1}{2\alpha} \partial_x u^{ini}$.

Réciproquement, si $(\varrho_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}}$ est solution de (2.11) pour la donnée initiale $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, alors, en posant $u_j^n = \alpha \left(1 - 2 \sum_{k < j} \varrho_{k+1/2}^n \right)$, la suite $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}}$ est solution du schéma de Roe de donnée initiale $u^{ini}(x) := \alpha \left(1 - 2\varrho^{ini}([-\infty, x]) \right)$.

Remarque 2.6. L'hypothèse $u^{ini} \in L^\infty \cap BV$ sera rendue plus claire à la sous-section 2.2.4 : l'idée est que l'on souhaite demander le moins de régularité possible aux solutions, et le cadre $L^\infty \cap BV$ est le cadre minimal pour lequel des estimations de convergence pour les schémas monotones sont connues.

Démonstration. On prouve seulement le premier point (i.e. la dérivée discrète de Roe est upwind), car les calculs se remontent (voir aussi [43]).

Soit donc $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}}$ la solution du schéma de Roe, et posons $\varrho_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n - u_{j+1}^n}{2\alpha}$. Alors, on a $u_j^n = \alpha \left(1 - 2 \sum_{k < j} \varrho_{k+\frac{1}{2}}^n \right)$ et donc :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} &= \alpha - \alpha \sum_{k < j} \varrho_{k+\frac{1}{2}}^n - \alpha \sum_{k < j+1} \varrho_{k+\frac{1}{2}}^n, \\ &= \alpha - \alpha \sum_{k < j} \varrho_{k+\frac{1}{2}}^n - \alpha \left(1 - \sum_{k > j} \varrho_{k+\frac{1}{2}}^n \right), \\ &= -\alpha \sum_{k \neq j} \operatorname{sgn}(j-k) \varrho_{k+\frac{1}{2}}^n, \\ &= a_{j+\frac{1}{2}}^n, \end{aligned}$$

identité dont on se servira à plusieurs reprises.

Maintenant, récrivons le schéma de Roe sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (2.13a)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{(a_{j+\frac{1}{2}}^n)^+ (u_j^n)^2}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|} + \frac{(a_{j+\frac{1}{2}}^n)^- (u_{j+1}^n)^2}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|}. \quad (2.13b)$$

C'est bien le schéma de Roe (2.10) : on a ici $f(u) = \frac{u^2}{2}$, et la vitesse Rankine-Hugoniot entre les états u_j^n et u_{j+1}^n vaut $\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} = a_{j+\frac{1}{2}}^n$. On décentre donc à gauche si cette quantité est positive, et à droite si elle est négative, ce qui correspond bien au flux (2.13b).

Avec cette écriture, on a alors :

$$\varrho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{2\alpha} = \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2\alpha} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n - F_{j+\frac{3}{2}}^n \right).$$

Récrivons les flux pour tomber sur (2.12). On écrit, on utilisant que, $a^+ = |a| - a^-$ pour $a \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} F_{j+\frac{3}{2}}^n &= \left(1 - \frac{(a_{j+\frac{3}{2}}^n)^-}{|a_{j+\frac{3}{2}}^n|} \right) \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + \frac{(a_{j+\frac{3}{2}}^n)^-}{|a_{j+\frac{3}{2}}^n|} \frac{(u_{j+2}^n)^2}{2} \\ &= \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + \frac{(a_{j+\frac{3}{2}}^n)^-}{|a_{j+\frac{3}{2}}^n|} \left(\frac{u_{j+2}^n + u_{j+1}^n}{2} \right) (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) \\ &= \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - 2\alpha \frac{(a_{j+\frac{3}{2}}^n)^-}{|a_{j+\frac{3}{2}}^n|} \varrho_{j+\frac{3}{2}}^n a_{j+\frac{3}{2}}^n \\ &= \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - 2\alpha (a_{j+\frac{3}{2}}^n)^- \operatorname{sgn}(a_{j+\frac{3}{2}}^n) \varrho_{j+\frac{3}{2}}^n \\ &= \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + 2\alpha (a_{j+\frac{3}{2}}^n)^- \varrho_{j+\frac{3}{2}}^n, \end{aligned}$$

car on a $a^- \operatorname{sgn}(a) = -a^-$ quel que soit $a \in \mathbf{R}$. En utilisant $a^- = |a| - a^+$ et $a^+ \operatorname{sgn}(a) = a^+$, on obtient une réécriture similaire de $F_{j-\frac{1}{2}}^n$:

$$\begin{aligned} F_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{(a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+}{|a_{j-\frac{1}{2}}^n|} \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} + \left(1 - \frac{(a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+}{|a_{j-\frac{1}{2}}^n|} \right) \frac{(u_j^n)^2}{2} \\ &= \frac{(u_j^n)^2}{2} + 2\alpha \frac{(a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+}{|a_{j-\frac{1}{2}}^n|} \varrho_{j-\frac{1}{2}}^n a_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \frac{(u_j^n)^2}{2} + 2\alpha (a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+ \operatorname{sgn}(a_{j-\frac{1}{2}}^n) \varrho_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \frac{(u_j^n)^2}{2} + 2\alpha (a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+ \varrho_{j-\frac{1}{2}}^n. \end{aligned}$$

On déduit de tout ceci que :

$$2F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n - F_{j+\frac{3}{2}}^n = -\frac{(u_j^n)^2}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + 2F_{j+\frac{1}{2}}^n - 2\alpha \left((a_{j+\frac{3}{2}}^n)^- \varrho_{j+\frac{3}{2}}^n + (a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+ \varrho_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$

Il ne reste plus qu'une dernière transformation à faire. En réutilisant (2.13b) puis le fait que $\frac{a^-}{|a|} = 1 - \frac{a^+}{|a|}$, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{(u_j^n)^2}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} + 2F_{j+\frac{1}{2}}^n &= (u_j^n)^2 \left(\frac{(a_{j+\frac{1}{2}}^n)^+}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|} - \frac{1}{2} \right) + (u_{j+1}^n)^2 \left(\frac{(a_{j+\frac{1}{2}}^n)^-}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left((u_j^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2 \right) \left(\frac{(a_{j+\frac{1}{2}}^n)^+}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 4\alpha \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n a_{j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{(a_{j+\frac{1}{2}}^n)^+}{|a_{j+\frac{1}{2}}^n|} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2\alpha |a_{j+\frac{1}{2}}^n| \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n, \end{aligned}$$

où on a utilisé $a \left(\frac{a^+}{|a|} - \frac{1}{2} \right) = \frac{|a|}{2}$. En effet :

$$a \left(\frac{a^+}{|a|} - \frac{1}{2} \right) = a^+ \operatorname{sgn}(a) - \frac{a}{2} = \begin{cases} \frac{a}{2}, & \text{si } a > 0, \\ -\frac{a}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On retrouve donc exactement (2.12) :

$$\varrho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|a_{j+\frac{1}{2}}^n| \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n - (a_{j+\frac{3}{2}}^n)^- \varrho_{j+\frac{3}{2}}^n - (a_{j-\frac{1}{2}}^n)^+ \varrho_{j-\frac{1}{2}}^n \right),$$

c'est-à-dire que $(\varrho_{j+1/2}^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}}$ résout le schéma (2.11). \square

La méthode utilisée dans la preuve de la proposition 2.4 peut être adaptée à d'autres schémas volumes finis pour Burgers et permet d'écrire de nouveaux schémas pour l'équation d'agrégation, en dérivant en discret. Remarquons que u_j^n peut toujours s'exprimer en fonction de $\varrho_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $a_{j+\frac{1}{2}}^n$:

$$u_j^n = a_{j+\frac{1}{2}}^n + \alpha \varrho_{j+\frac{1}{2}}^n.$$

Néanmoins, le résultat ne donne un schéma lisible pour l'équation d'agrégation que dans des cas particuliers. On peut par exemple montrer que le schéma de Rusanov pour l'équation de Burgers donne le schéma de Rusanov pour l'équation d'agrégation. J'ai tenté de généraliser, sans succès : je ne suis pas sûr qu'on puisse aller plus loin.

2.2.3 Estimations de convergence de schémas pour les solutions régulières

Passons maintenant aux estimations de convergence : on se concentre pour le moment sur les lois de conservation, pour finalement transposer ces résultats à des schémas pour l'agrégation dans la sous-section 2.2.5.

Le but de cette sous-section est d'obtenir des estimations ℓ^∞ pour les approximations numériques de (2.7) pour les solutions régulières. Plus précisément, on cherche à montrer la convergence à l'ordre 1 de schémas volumes finis pour (2.7) pour une donnée initiale u^{ini} régulière et jusqu'au temps d'existence de celle-ci. Celui-ci est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ et $u^{ini} \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. On a deux cas :*

- si $f''(u^{ini})u^{ini'} \geq 0$ sur \mathbf{R} , alors (2.7) admet une unique solution globale $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$,
- sinon, en notant $T = -\frac{1}{\inf_{\mathbf{R}} f''(u^{ini})u^{ini'}}$, alors (2.7) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbf{R})$ et celle-ci ne peut pas être prolongée en temps supérieur.

Dans les deux cas, la solution est donnée par la méthode des caractéristiques :

$$\forall t \in [0, T[, \forall x \in \mathbf{R}, \quad u(t, x + tf'(u^{ini}(x))) = u^{ini}(x).$$

Remarque 2.7. En fait, les caractéristiques définies comme le flot associé à $f'(u)$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t, x) = f'(u(t, X(t, x))), & (t, x) \in [0, T[\times \mathbf{R}, \\ X(0, x) = x, & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

sont définies jusqu'au temps T et sont des droites : $X(t, x) = x + tf'(u^{ini}(x))$. Plus précisément, on peut montrer que $X(t)$ est inversible jusqu'au temps T .

Notre approche se base, d'une part, sur des calculs de type consistance et stabilité : on aura donc besoin, en plus de la régularité, que les dérivées soient bornées, disons $u \in \mathcal{C}_b^2([0, T[\times \mathbf{R})$. D'autre part, nos calculs imitent en discret l'estimation suivante sur la dérivée de u , et auront pour intérêt de retrouver par une méthode discrète le temps d'existence donné par le théorème 2.1.

Proposition 2.5. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ et $u^{ini} \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. On note $u \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbf{R})$ la solution régulière du problème (3.4) et T son temps d'existence, tous deux donnés par le théorème 2.1.

Alors, pour tout $T' \in [0, T[$, il existe une constante $C(T') > 0$ finie, telle que :

$$\forall t \in [0, T'], \forall x \in \mathbf{R}, \quad |\partial_x u(t, x)| \leq C(T').$$

Si, de plus, f est convexe, on a $C(T') \xrightarrow{T' \rightarrow T} +\infty$ si $T < +\infty$ et $C(T') \xrightarrow{T' \rightarrow T} 0$ si $T = +\infty$.

Remarque 2.8. Cette proposition signifie, qu'en continu, la dérivée $|\partial_x u(t, x)|$ est uniformément bornée sur $[0, T'] \times \mathbf{R}$ pour tout temps final T' strictement plus petit que le temps d'explosion, mais bien sûr que cette borne explose lorsque $T' \rightarrow T$. En effet, en présence de chocs, on sait que $\partial_x u$ tend en valeur absolue vers $+\infty$ lorsque $T' \rightarrow T$ (figure 2.3).

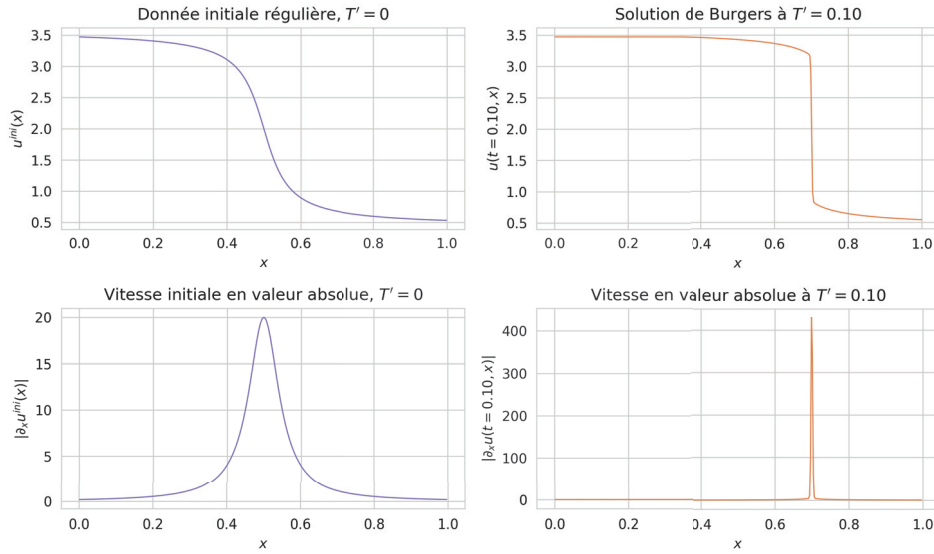


FIGURE 2.3 – Solution de l'équation de Burgers pour donnée décroissante, donc de temps de vie fini : $|\partial_x u(T', x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque T' tend vers le temps d'apparition du choc.

Démonstration. Pour plus de simplicité, on prouve la proposition dans le cas du flux Burgers $f(u) = \frac{u^2}{2}$. On commence par le cas $T < +\infty$.

Rappelons que dans ce cas, le théorème 2.1 donne $T = -\frac{1}{\inf_{\mathbf{R}} u^{ini'}} > 0$. Posons $v = \partial_x u$. En dérivant en espace l'équation de Burgers, on a⁵ :

$$\partial_t v + \partial_x \partial_x \frac{u^2}{2} = 0,$$

Puis en développant le terme $\partial_x \frac{u^2}{2} = u \partial_x u = uv$, on a :

$$\partial_t v + \partial_x (uv) = 0.$$

Enfin, en dérivant le produit : $\partial_x (uv) = u \partial_x v + v \partial_x u = u \partial_x v + v^2$, on en déduit :

$$\partial_t v + u \partial_x v = -v^2.$$

On se place alors le long des caractéristiques associées au champ de vitesse $f'(u) = u$, données par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t, x) = u(t, X(t, x)), & (t, x) \in [0, T[\times \mathbf{R}, \\ X(0, x) = x, & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

5. on développe sciemment les détails à l'excès car on imitera chacune de ces étapes en discret.

c'est-à-dire que l'on pose $\bar{v}(t) = v(t, X(t, x))$, si bien que :

$$\frac{d}{dt}\bar{v}(t) = -\bar{v}^2(t). \quad (2.14)$$

La résolution de cette équation de Riccati donne $\bar{v}(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{\bar{v}(0)}}$ tant que $0 \leq t < -\frac{1}{\bar{v}(0)}$. En d'autres termes, on a pour $(t, x) \in [0, T[\times \mathbf{R}$,

$$\partial_x u(t, X(t, x)) = \frac{1}{t + \frac{1}{u^{ini'}(x)}} \quad \text{i.e.} \quad \partial_x u(t, x) = \frac{1}{t + \frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))}}.$$

En prenant la valeur absolue, on trouve :

$$|\partial_x u(t, x)| = \frac{1}{\left| t + \frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))} \right|} = \frac{1}{\left| -\frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))} - t \right|}$$

Maintenant, $-\frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))} \geq -\frac{1}{\inf_{\mathbf{R}} u^{ini'}} = T$, donc :

$$\forall t \in [0, T[, \quad \left| -\frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))} - t \right| = -\frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))} - t \geq T - t.$$

En particulier, étant donné $T' \in [0, T[$, on a :

$$\forall t \in [0, T'], \quad |\partial_x u(t, x)| \leq \frac{1}{T - T'}.$$

D'où le résultat avec $C(T') = \frac{1}{T - T'}$ dans le cas où $T < +\infty$.

Dans le cas où $T = +\infty$, le théorème 2.1 donne $u^{ini'} \geq 0$. Ainsi, $\partial_x u(t, x) = \frac{1}{t + \frac{1}{u^{ini'}(X_t^{-1}(x))}} \geq 0$,

et on déduit aussi de cette identité que $\partial_x u(t, x) \leq \frac{1}{t}$. On a donc bien, pour tout $T' \in [0, +\infty[$,

$$\forall t \in [0, T'], \quad |\partial_x u(t, x)| \leq C(T'),$$

où $C(T') = 1/T' \xrightarrow{T' \rightarrow +\infty} 0$. □

Remarque 2.9. Au passage, on déduit de (2.14) que $\partial_x u(t, X(t, x)) = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) \leq 0$, donc que $\partial_x u(t, X(t, x)) \leq u^{ini'}(x)$. Donc, puisque les caractéristiques existent et sont inversibles jusqu'au temps T . On en déduit donc l'inégalité d'Oleinik suivante :

$$\forall t \in [0, T[, \forall x \in \mathbf{R}, \quad \partial_x u(t, x) \leq u^{ini'}(X(t)^{-1}(x)),$$

qui est un résultat moins fort que celui que l'on a obtenu, et qui ne nous suffit pas car, en discret, nous avons besoin de borner $\partial_x u$ en valeur absolue.

Interpolation et normes discrètes. Étant donné une collection d'approximations discrètes $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}^{n \in \mathbf{N}} \in \ell(\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, il nous faut définir une fonction $u_{\Delta x}$, dépendant du maillage, qui approxime la solution exacte u . Dans le cadre des lois de conservation telles que (2.7), le phénomène important à capturer étant la présence de chocs, c'est-à-dire de discontinuités de type Heaviside, on reconstruit le plus souvent $u_{\Delta x}$ comme étant constante par morceaux dans chaque maille, avec, en quelque sorte, un choc à chaque interface. On la prend également constante par morceaux en temps :

$$u_{\Delta x}(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{Z}} u_j^n \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}[\times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[(t, x). \quad (2.15)$$

On doit également savoir mesurer la distance entre deux approximations discrètes. Pour cela, on définit les normes discrètes $\ell_{\Delta x}^p$ suivantes pour $p \in [1, +\infty[$, de sorte à ce que $\|u^n\|_{\ell_{\Delta x}^p} = \|u_{\Delta x}(t^n)\|_{L^p}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall v \in \ell(\mathbf{Z}), \quad \|v\|_{\ell_{\Delta x}^p} := \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} \Delta x |v_j|^p \right)^{1/p}. \quad (2.16)$$

Remarque 2.10. Ces normes dépendant du maillage sont liées aux normes ℓ^p classiques par :

$$\|v\|_{\ell_{\Delta x}^p} = \Delta x^{1/p} \|v\|_{\ell^p}.$$

Pour $p = \infty$, elles sont égales, c'est pourquoi on omet généralement l'indice Δx puisque la norme n'en dépend plus.

Consistance. On définira l'erreur de consistance ε d'un schéma volumes finis conservatif de type (2.8)-(2.9) par :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - S(\bar{u}^n)_j}{\Delta t}, \quad (j, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}, \quad (2.17)$$

où $S : \ell(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell(\mathbf{Z})$ est l'opérateur décrivant le schéma, défini pour $v \in \ell(\mathbf{Z})$ et $j \in \mathbf{Z}$ par $S(v)_j = H(v_{j-k}, \dots, v_j, \dots, v_{j+k})$, et \bar{u} est la projection sur le maillage de la solution exacte :

$$\bar{u}_j^n = u(t^n, x_j), \quad (2.18)$$

u étant la solution exacte du problème (2.7) donnée par le théorème 2.1. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\ell(\mathbf{Z})$, on dit que le schéma est consistant à l'ordre $p > 0$ en norme $\|\cdot\|$ si $\|\varepsilon^n\| \leq C \Delta x^p$ où $C > 0$ ne dépend pas ni de $n \in \mathbf{N}$ ni du maillage. L'ordre de consistance d'un schéma numérique n'a rien à voir avec la linéarité, mais seulement avec la régularité des solutions (ainsi que la régularité du flux f mais nous ne nous en préoccupons pas dans ce manuscrit) :

Proposition 2.6. *Pour l'équation (2.7), tout schéma de volumes finis conservatif et consistant est consistant à l'ordre au moins 1 en norme ℓ^∞ si u est régulière et ses dérivées bornées, disons $u \in \mathcal{C}_b^2([0, T] \times \mathbf{R})$.*

Remarque 2.11. La preuve suivante peut être adaptée à un schéma consistant à l'ordre k pour les solutions régulières (ou, selon la littérature anglophone, « formally accurate of order k »).

Démonstration. On présente la preuve pour un schéma à trois points, que l'on écrit donc sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)), \quad (2.19)$$

Par un développement de Taylor et du fait que $u \in \mathcal{C}_b^2([0, T] \times \mathbf{R})$, on a :

$$u(t^n, x_{j\pm 1}) = u(t^n, x_j) \pm \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + O(\Delta x^2),$$

d'où :

$$\begin{aligned} g(u(t^n, x_j), u(t^n, x_{j+1})) &= f(u(t^n, x_j)) + \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) \partial_2 g(u(t^n, x_j), u(t^n, x_j)) + O(\Delta x^2), \\ g(u(t^n, x_{j-1}), u(t^n, x_j)) &= f(u(t^n, x_j)) + \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) \partial_1 g(u(t^n, x_j), u(t^n, x_j)) + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

D'autre part, comme par consistance $g(u, u) = f(u)$, on a $f'(u) = \partial_1 g(u, u) + \partial_2 g(u, u)$, si bien que la différence des flux numériques est consistante à l'ordre 1 avec $\Delta x f'(u) \partial_x u = \Delta x \partial_x f(u)$:

$$\begin{aligned} g(u(t^n, x_j), u(t^n, x_{j+1})) - g(u(t^n, x_{j-1}), u(t^n, x_j)) &= \Delta x f'(u(t^n, x_j)) \partial_x u(t^n, x_j) + O(\Delta x^2) \\ &= \Delta x \partial_x f(u)(t^n, x_j) + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Ainsi, puisque :

$$\begin{aligned} S(\bar{u}^n)_j &= \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j+1}^n) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)) \\ &= u(t^n, x_j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u(t^n, x_j), u(t^n, x_{j+1})) - g(u(t^n, x_{j-1}), u(t^n, x_j))), \end{aligned}$$

et par définition de l'erreur de consistance, on a :

$$\varepsilon_j^n = \underbrace{\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t}}_{\partial_t u(t^n, x_j) + O(\Delta t)} + \partial_x f(u)(t^n, x_j) + O(\Delta x) = O(\Delta t + \Delta x) = O(\Delta x),$$

sous CFL hyperbolique ($\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C$ indépendant du maillage) et parce que u résout (2.7) et est dans $\mathcal{C}_b^2([0, T[\times \mathbf{R})$. Le $O(\cdot)$ est uniforme en $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, ce qui conclut la preuve. \square

Convergence à l'ordre 1 du schéma Rusanov pour l'équation de Burgers

Soit u solution exacte de l'équation de Burgers, que l'on suppose régulière et à dérivées bornées (disons $u \in \mathcal{C}_b^2([0, T[\times \mathbf{R})$). On note T son temps d'existence. On va montrer que le schéma de Rusanov, donné par :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} ((u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.20)$$

que l'on sait monotone pour $c \geq \|u_0\|_{L^\infty}$ et sous CFL $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, est convergent à l'ordre 1 jusqu'à tout temps $T' < T$. On se donne donc $N \in \mathbf{N}$ tel que $T' = n\Delta t$, et on note $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}, n=0, \dots, N}$ la solution du schéma de Rusanov. D'après le paragraphe précédent, ce schéma est consistant à l'ordre 1. Maintenant, notons $e_j^n = u_j^n - \bar{u}_j^n$ l'erreur de convergence. L'équation d'évolution sur e est :

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= u_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1} \\ &= S(u^n)_j - S(\bar{u}^n)_j - (\bar{u}_j^{n+1} - S(\bar{u}^n)_j) \\ &= e_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} [(u_{j+1}^n)^2 - (\bar{u}_{j+1}^n)^2 - ((u_{j-1}^n)^2 - (\bar{u}_{j-1}^n)^2)] + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n) - \Delta t \varepsilon_j^n. \end{aligned}$$

Là, on utilise la relation $\frac{1}{2}(u^2 - \bar{u}^2) = \frac{u + \bar{u}}{2}(u - \bar{u})$:

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= e_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{u_{j+1}^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} e_{j+1}^n - \frac{u_{j-1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2} e_{j-1}^n \right) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n) - \Delta t \varepsilon_j^n \\ &= \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(c - \frac{u_{j+1}^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} \right) e_{j+1}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(c + \frac{u_{j-1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2} \right) e_{j-1}^n - \Delta t \varepsilon_j^n. \end{aligned}$$

Maintenant, par principe du maximum sur la solution exacte (entropique) de l'équation de Burgers, on a $|\bar{u}_j^n| \leq \|u^{ini}\|_{L^\infty}$ pour tous $j \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, si $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ et $c \geq \|u^{ini}\|_{L^\infty}$ le schéma de Rusanov vérifie le principe du maximum discret. On a donc aussi, sous ces conditions, $|u_j^n| \leq \|u^{ini}\|_{L^\infty}$ pour tous $j \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Ainsi, si $c \geq \|u^{ini}\|_{L^\infty}$, les coefficients devant e_{j+1}^n et e_{j-1}^n sont positifs, et sous CFL $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, le coefficient de e_j^n l'est aussi. Ainsi :

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c - \frac{c}{2} - \frac{c}{2} + \frac{u_{j+1}^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} - \frac{u_{j-1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2} \right) \right) \|e^n\|_{\ell^\infty} + \Delta t |\varepsilon_j^n| \\ |e_j^{n+1}| &\leq \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + \bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n) \right) \|e^n\|_{\ell^\infty} + \Delta t |\varepsilon_j^n|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Il suffit alors de montrer a priori que $u_{j+1}^n - u_{j-1}^n = O(\Delta x)$ et que $\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n = O(\Delta x)$ et d'utiliser un lemme de Grönwall discret.

Le fait que $\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n = O(\Delta x)$ provient du fait que $\|\partial_x u(t, x)\|_{L^\infty([0, T'] \times \mathbf{R})} \leq C(T')$ où $C(T')$ est la borne donnée par la proposition 2.5. Montrons maintenant que c'est vrai aussi au sens discret, en imitant les calculs de cette même proposition.

Lemme 2.3. *Soit $u^{ini} \in W^{1, \infty}(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$. On note T le temps d'existence de la solution de classe C^1 de l'équation de Burgers de donnée u^{ini} et on se donne $T' \in [0, T]$. On se donne aussi $c, \Delta x, \Delta t > 0$ tels que $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ et $c \geq \|u^{ini}\|_{L^\infty}$, et $N \in \mathbf{N}$ tel que $T' = n\Delta t$, et on note $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}, n=0, \dots, N}$ la solution du schéma de Rusanov (2.20) pour l'équation de Burgers.*

Alors il existe une constante $\tilde{C}(T') > 0$ telle que, pour tout $n = 0, \dots, N$,

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} |u_{j+1}^n - u_{j-1}^n| \leq \tilde{C}(T') \Delta x.$$

Démonstration. On pose $v_j^n = u_{j+1}^n - u_{j-1}^n$. On répète exactement dans le même ordre les étapes de l'estimation continue ci-dessus. On a, par définition du schéma de Rusanov et par linéarité du terme de diffusion numérique :

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} \\ &= v_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[(u_{j+2}^n)^2 - (u_j^n)^2 - ((u_j^n)^2 - (u_{j-2}^n)^2) \right] + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n + v_{j-1}^n) \end{aligned}$$

La ligne précédente peut se voir comme un version discrète en espace de l'équation de Burgers pour obtenir $\partial_t v = -\partial_x \partial_x \frac{u^2}{2}$. On développe maintenant la dérivée intérieure $\partial_x \frac{u^2}{2}$ en écrivant que $\frac{(u_{j+2}^n)^2}{2} - \frac{(u_j^n)^2}{2} = \frac{u_{j+2}^n + u_j^n}{2} (u_{j+2}^n - u_j^n) = v_{j+1}^n \frac{u_{j+2}^n + u_j^n}{2}$.

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(v_{j+1}^n \frac{u_{j+2}^n + u_j^n}{2} - v_{j-1}^n \frac{u_j^n + u_{j-2}^n}{2} \right) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n + v_{j-1}^n)$$

Il reste maintenant à développer la dérivée discrète $\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u$. Formellement, on utilise le fait que $ax - by = \frac{a+b}{2}(x - y) + (a - b)\frac{x+y}{2}$:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} \frac{u_{j+2}^n + u_j^n - (u_j^n + u_{j-2}^n)}{2} + (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \frac{u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4} \right) \\ &\quad + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n + v_{j-1}^n) \\ &= v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2} \frac{u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n + v_{j-1}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} \underbrace{\frac{u_{j+2}^n - u_{j-2}^n}{4}}_{= \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2}}, \end{aligned}$$

qui se lit comme $\partial_t v = -u\partial_x v - v\partial_x u = -u\partial_x v - v^2$. Plus précisément, on reconnaît dans la dernière équation :

- (1) la marche en temps du schéma de Rusanov pour $\partial_t v + u\partial_x v = 0$, où, dans la maille C_j , la vitesse est vue comme constante égale à $\frac{u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4}$, donc consistante avec $u(t^n, x_j)$; d'un point de vue discret, cela revient, comme en continu, à se placer le long des caractéristiques associées au champ de vitesse u ;
- (2) un terme source consistant avec $-\frac{\Delta t}{\Delta x} v^2(t^n, x_j)$.

Il suffit maintenant de réorganiser les termes correspondant à l'opérateur $\partial_t v + u \partial_x v$ comme une combinaison convexe des v_k^n (ce qui est possible, comme pour montrer la stabilité du schéma de Rusanov) :

$$v_j^{n+1} = v_j^n \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_{j+1}^n \left(c - \frac{u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4}\right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_{j-1}^n \left(c + \frac{u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2}\right)^2.$$

Les coefficients $1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ et $c \pm \frac{u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n}{4}$ étant positifs sous la condition CFL $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ et la condition de stabilité $c \geq \|u^{ini}\|_{L^\infty}$. De plus, la somme de ces 3 coefficients vaut 1 ; on en déduit, en majorant en valeur absolue :

$$|v_j^{n+1}| \leq \|v^n\|_{\ell^\infty} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|v^n\|_{\ell^\infty}^2.$$

Rappelons que l'on souhaite montrer $\|v^n\|_{\ell^\infty} = O(\Delta x)$ uniformément en $n \in \mathbf{N}$. On peut donc écrire, par exemple :

$$\left\| \frac{v^{n+1}}{\Delta x} \right\|_{\ell^\infty} \leq \left\| \frac{v^n}{\Delta x} \right\|_{\ell^\infty} + \Delta t \left\| \frac{v^n}{\Delta x} \right\|_{\ell^\infty}^2.$$

En notant $w^n = \left\| \frac{v^n}{\Delta x} \right\|_{\ell^\infty}$, on a donc :

$$w^{n+1} \leq w^n (1 + \Delta t w^n) \leq \frac{w^n}{1 - \Delta t w^n} = \frac{1}{\frac{1}{w^n} - \Delta t}.$$

Au rang précédent, on a de même $w^n \leq \frac{1}{\frac{1}{w^{n-1}} - \Delta t}$ donc $\frac{1}{w^n} \geq \frac{1}{w^{n-1} - \Delta t}$. Ainsi,

$$w^{n+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{w^n} - \Delta t} \leq \frac{1}{\frac{1}{w^{n-1}} - 2\Delta t} \leq \dots \leq \frac{1}{\frac{1}{w^0} - (n+1)\Delta t} = \frac{1}{\frac{1}{w^0} - t^{n+1}},$$

ce qui donne le fait que w^n est borné jusqu'au temps d'explosion. \square

Remarque 2.12. De façon analogue, on peut montrer que n'importe quelle dérivée discrète de u est un $O(\Delta x)$, par exemple $u_{j+1}^n - u_j^n = O(\Delta x)$.

En combinant l'estimation 2.21 avec le lemme 2.3, on obtient :

$$\|e^{n+1}\|_{\ell^\infty} \leq (1 + C\Delta t) \|e^n\|_{\ell^\infty} + C \|\varepsilon^n\|_{\ell^\infty}.$$

Après application d'un lemme de Grönwall discret linéaire (deuxième point du Lemme A.2 en annexe), et puisque le schéma de Rusanov est consistant à l'ordre 1 pour les solutions régulières, on en déduit $\|e^n\|_{\ell^\infty} \leq C(e^{Ct^n} - 1)\Delta x$.

2.2.4 Estimations d'erreur $\ell_{\Delta x}^1$ pour les solutions $BV \cap L^\infty$ et surconvergence

Revenons à notre problème initial, qui est l'approximation d'équations d'agrégation. Nous avons vu que le bon cadre pour l'étude de celles-ci était celui des solutions à valeurs mesures, en raison des singularités qu'elles peuvent présenter. Nous passons, via une intégration en espace, par les lois de conservation pour écrire des schémas et obtenir des estimations de convergence en utilisant la correspondance entre norme L^1 et distance W_1 donnée par le lemme 2.1. On aura donc besoin, d'une part, d'estimations de convergence en norme $\ell_{\Delta x}^1$ sur les approximations numériques et, d'autre part, que ces estimations soient valables pour des solutions dont la régularité n'est que BV .

Ordre 1/2

Le cadre minimal pour de telles estimations sur une loi de conservation est, en fait, celui des solutions à valeurs dans $BV \cap L^\infty$. Dans ce cadre, l'approche consistance/stabilité de la section précédente, inspirée des différences finies, s'écroule car les solutions ne sont plus régulières. L'obtention de résultats de convergence devient bien plus technique. Pour ceci, les travaux généralement cités sont ceux de Kuznetsov : en un mot, les schémas monotones convergent à l'ordre 1/2 en norme $\ell^1_{\Delta x}$ pour les solutions $BV \cap L^\infty$. Cette estimation est optimale si on inclut le cas linéaire $f(u) = au$ (voir [118]), même dans la classe des solutions régulières par morceaux (prendre par exemple pour u^{ini} la fonction de Heaviside). Elle est également optimale dans la classe des fonctions BV si f n'est pas supposé davantage que non linéaire. On renvoie à [117] et [103] pour un panorama complet des estimations d'erreurs pour les lois de conservation scalaires.

Surconvergence des approximations numériques

Ce paragraphe est motivé par des phénomènes connus (pour l'équation de Burgers, voir [44]) ou observés (résultats numériques pour les schémas upwind et de Rusanov pour l'équation d'agrégation, voir par exemple [54] ainsi que la figure 2.4) où des schémas numériques pour des lois de conservation à flux strictement convexe (respectivement, pour l'équation d'agrégation avec potentiel singulier) convergent à l'ordre 1 plutôt qu'à l'ordre 1/2 pour les solutions peu régulières, c'est-à-dire pour les solutions $BV \cap L^\infty$ (resp. les solutions mesures). Dans chacun des cas, la compression ou la concentration rend les solutions approchées plus proches de la solution exacte que ce que l'on attend, et compense ainsi la diffusion numérique présente dans la plupart des schémas volumes finis classiques tels que le schéma upwind ou le schéma de Rusanov.

Il s'agit d'un phénomène intéressant en soi, et bien que relativement connu et observé numériquement dans la communauté hyperbolique, son étude rigoureuse est encore un problème ouvert si ce n'est dans les cas bien particuliers et/ou assez restrictifs. Pourtant, il apparaît dès que l'on trace des courbes de convergence dans des cas très simples (figures 2.4 et 2.5).

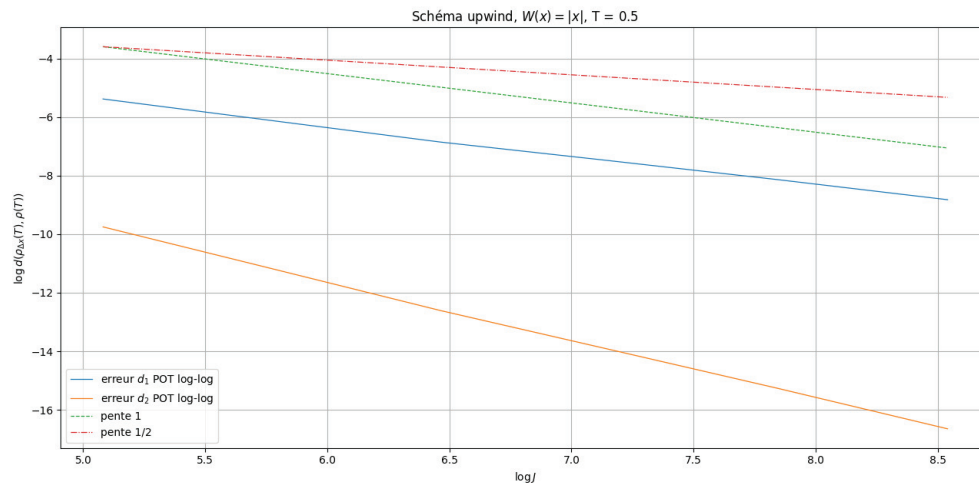


FIGURE 2.4 – Erreur numérique en échelle log-log pour le schéma (2.1), avec le potentiel $W(x) = |x|$ en dimension $d = 1$ et pour donnée initiale $\varrho^{ini} = \frac{1}{2}\delta_{-0.5} + \frac{1}{2}\delta_{0.5}$. La distance W_1 (notée d_1 en légende) est calculée grâce à la représentation de la proposition 2.1, et la distance W_2 (notée d_2) est calculée avec le package Python POT. L'ordre de convergence observé est 1 au lieu de 1/2.

Le phénomène observé ici pour un flux strictement convexe (par exemple $f(u) = \frac{u^2}{2}$) et une donnée décroissante est un phénomène de compression : de même que pour l'approximation visqueuse, la solution se comprime en un choc et compense ainsi la diffusion numérique induite par le schéma upwind.

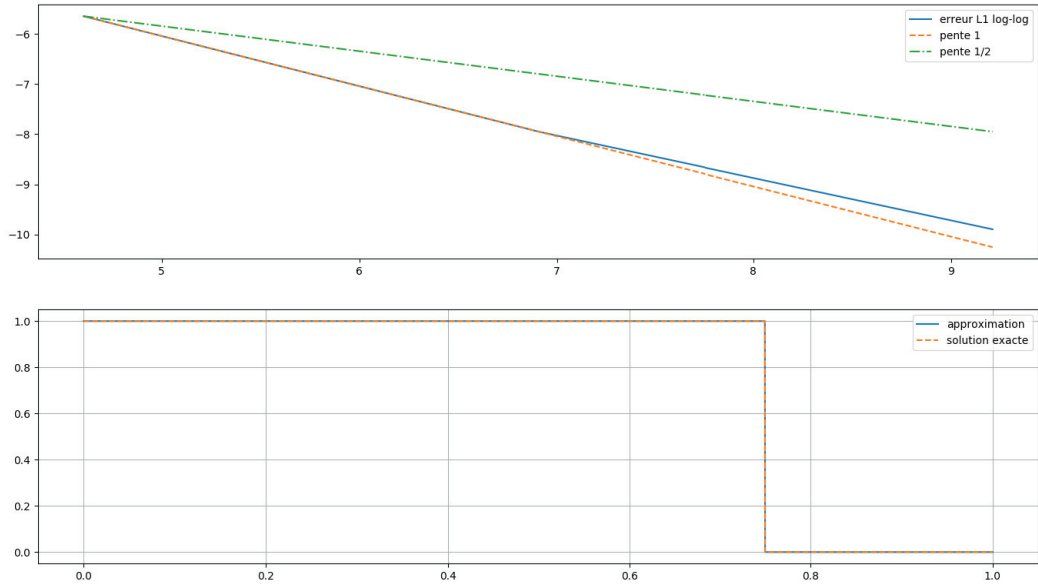


FIGURE 2.5 – Erreur numérique en échelle log-log pour le schéma de Rusanov pour l'équation de Burgers après compression de la donnée en un seul choc.

En ce qui concerne les résultats existants, on peut citer par exemple celui de Després [44] qui traite du schéma upwind appliqué à une loi de conservation à flux strictement convexe et avec donnée u^{ini} décroissante et vérifiant $u^{ini} \geq u_s$, où u_s est l'unique point d'annulation de f' (dans le cas de l'équation de Burgers, cela revient à u^{ini} positive). Essentiellement, il donne une preuve « à la main » du résultat de Kuznetsov (l'ordre 1/2) dans ce cas précis, et prouve qu'il y a surconvergence si la donnée est un choc ou bien après le temps de compression de celle-ci en un seul choc.

Théorème 2.2 (Després [44]). *Considérons le problème de Cauchy (2.7) associé à flux $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ strictement convexe et à une donnée initiale $u^{ini} \in BV \cap L^\infty$ décroissante et minorée par u_s , où u_s est l'unique point d'annulation de f' (point sonique). En particulier, $f'(u(t)) \geq 0$ pour tout $t > 0$. De plus, il existe $T > 0$ à partir duquel $u(t)$ consiste en un unique choc.*

On note $u_{\Delta x}$ l'approximation donnée par le schéma upwind, qui dans ce contexte s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)), \quad n \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{Z}.$$

et on se place sous la condition CFL $\lambda \|f'(u^{ini})\|_{L^\infty} < 1$, où $\lambda := \Delta t / \Delta x$ est fixé. Alors le schéma upwind est d'ordre 1 en temps grand :

$$\forall n \geq T / \Delta t, \quad \|u_{\Delta x}(t^n) - \bar{u}(t^n)\|_{L^1} \leq C(t^n, TV(u_0)) \Delta x,$$

où $C(t^n, TV(u_0))$ ne dépend pas de Δx et

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t, x) dx,$$

avec u la solution entropique du problème de Cauchy de donnée u^{ini} .

On peut également citer les travaux [93, 120, 121] ainsi que ceux de Osher, Nessyahu et Tadmor [101, 104] pour la distance W_1 (alors dénommée Lip'). Nous avons essayé d'adapter le

résultat de Després à l'équation d'agrégation, mais deux obstructions se présentent : d'une part, la positivité de u (dans notre cas, u prend ses valeurs entre 1 et -1) et il n'est pas clair que ce résultat s'adapte au schéma de Godunov ; d'autre part, ce théorème ne permettrait que de traiter la surconvergence que dans le cas d'un unique choc pour l'équation de Burgers, c'est-à-dire une seule masse de Dirac pour l'équation d'agrégation.

2.2.5 Applications à l'équation d'agrégation

La proposition 2.4 fournit une nouvelle preuve de la convergence du schéma (2.11), dans le cas particulier $W(x) = |x|$, via la convergence du schéma de Godunov⁶ à l'ordre 1/2 (voir [86]).

Il suffit en effet de traduire la proposition 2.1 pour les approximations discrètes. Au passage, ceci justifie à nouveau le choix de considérer $\varrho_{\Delta x}^n$ comme une somme de masses de Dirac aux interfaces, i.e. $\varrho_{\Delta x}^n = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \varrho_{j+1/2}^n \delta_{x_{j+1/2}}$.

Ce faisant, si on note $F_{\varrho_{\Delta x}^n}$ la fonction de répartition de $\varrho_{\Delta x}^n$, on a exactement $u_{\Delta x}^n = 1 - 2F_{\varrho_{\Delta x}^n}$. En effet, pour $x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$, on a :

$$\begin{aligned} F_{\varrho_{\Delta x}^n}(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varrho_{k+1/2}^n \underbrace{\delta_{x_{k+1/2}}([\!-\infty, x])}_{=1 \text{ ssi } k < j}, \\ &= \sum_{k < j} \varrho_{k+1/2}^n, \end{aligned}$$

et donc :

$$1 - 2F_{\varrho_{\Delta x}^n}(x) = 1 - 2 \sum_{k < j} \varrho_{k+1/2}^n = u_j^n = u_{\Delta x}^n(x).$$

Par conséquent, en notant $F_{\varrho(t)}$ la fonction de répartition de $\varrho(t)$, on a, d'après la proposition 2.1 :

$$\begin{aligned} W_2(\varrho(t^n), \varrho_{\Delta x}^n) &= \|F_{\varrho(t)}^{-1} - F_{\varrho_{\Delta x}^n}^{-1}\|_{L^2}, \\ &\leq \|F_{\varrho(t)}^{-1} - F_{\varrho_{\Delta x}^n}^{-1}\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|F_{\varrho(t)}^{-1} - F_{\varrho_{\Delta x}^n}^{-1}\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq 2 \|F_{\varrho(t)} - F_{\varrho_{\Delta x}^n}\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} = \|u(t) - u_{\Delta x}^n\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la convergence du schéma (2.11) en distance de Wasserstein W_2 , mais seulement à l'ordre 1/4, contrairement à l'analyse conduite dans [43], qui donne l'ordre 1/2.

2.2.6 Quelques remarques concernant la stabilité de schémas semi-implicites

Cette section ne concerne pas directement les problèmes de type « agrégation » mais fait suite à des discussions apparues lorsque nous travaillions sur l'article [55]. Dans une phase d'exploration numérique, nous nous sommes aperçus, numériquement, qu'un schéma a priori instable était rendu inconditionnellement stable par l'ajout de diffusion implicite. On se propose, dans cette section, de préciser un petit peu ce que l'on entend lorsque l'on dit que la diffusion implicite stabilise un schéma numérique. Dans toute cette section, on se place en dimension $d = 1$.

6. En fait, le schéma (6.6) de [43] correspond au schéma de Godunov, dans le cas particulier d'une donnée décroissante. Aussi (6.6) est-il conservatif dans ce cas particulier.

Stabilité pseudo-inconditionnelle du schéma centré avec diffusion implicite

Pour fixer les idées, considérons l'équation de transport-diffusion suivante :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) - \varepsilon \partial_{xx} u = 0, \quad (2.22)$$

où $\varepsilon > 0$ est un coefficient de diffusion, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ est un flux régulier. Considérons également une discrétisation volumes finis à trois points, conservative et consistante, pour la partie transport (comme définie à la sous-section 2.2.2) et implicite pour la partie diffusion. Autrement dit, on regarde un schéma de la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)) + \frac{\lambda \varepsilon}{\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}),$$

où on a noté, comme dans toute cette partie, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Nous avons constaté, numériquement, que le schéma centré, dont le flux est $g(u, v) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$, est, avec diffusion implicite toujours, non seulement stable sous CFL hyperbolique mais même inconditionnellement stable, sous réserve que le coefficient de diffusion ε ne soit pas trop petit par rapport au pas de temps (figures 2.6 et 2.7).

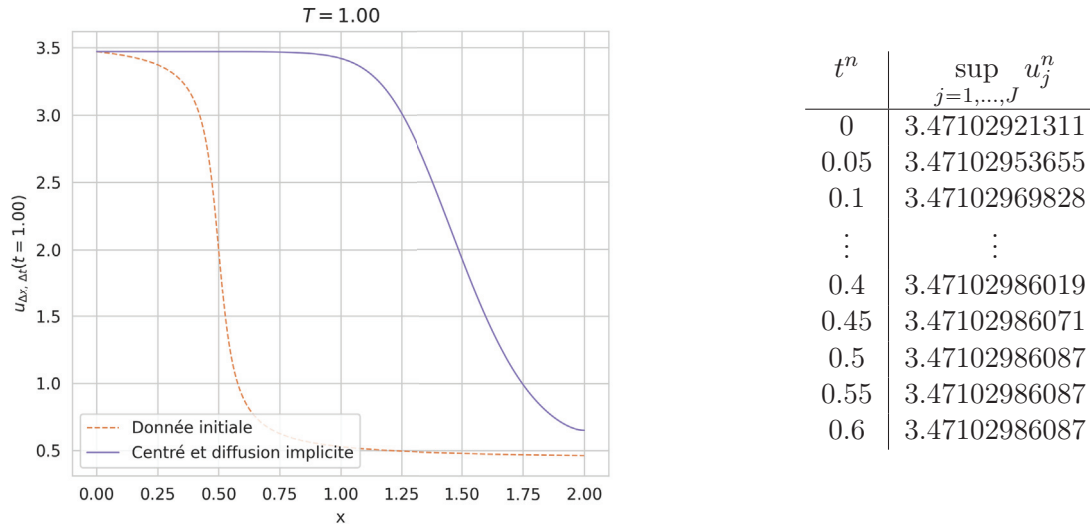


FIGURE 2.6 – Schéma centré avec diffusion implicite, pour le transport-diffusion linéaire à vitesse $a = 1$ et coefficient de diffusion $\varepsilon = 0.05$, à $T = 1$, $J = 2000$ mailles, avec $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 50$ et $\frac{a^2 \Delta t}{2\varepsilon} = 0.5$. Le schéma global semble stable, même en norme ℓ^∞ : il ne présente *visiblement* pas d'oscillations même en temps petit. Mais à y regarder de plus près, le principe du maximum n'est pas respecté : le schéma n'est pas stable ℓ^∞ au sens usuel. On constate néanmoins, numériquement, qu'il est stable $\ell_{\Delta x}^2$, ce que l'on retrouvera avec une analyse Von Neumann.

Définition 2.1. On dira qu'un schéma pour (2.22) est pseudo-inconditionnellement stable en norme $\ell_{\Delta x}^p$ pour un certain $p \in [1, +\infty]$ (si on ne le précise pas, c'est que $p = +\infty$) s'il existe $C > 0$ pouvant dépendre de f et de ε , telle que pour tout donnée initiale u^{ini} , la seule condition $\Delta t \leq C\varepsilon$ assure que l'on ait :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|u^n\|_{\ell_{\Delta x}^p} < +\infty,$$

où u^n est la solution dudit schéma au temps t^n .

Remarque 2.13. Dans la définition ci-dessus, la notion de stabilité que l'on considère est celle de stabilité asymptotique à savoir :

$$\exists C > 0, \forall u^0 \in \ell^p(\mathbf{Z}), \forall n \in \mathbf{N}, \quad \|u^n\|_{\ell_{\Delta x}^p} \leq C \|u^0\|_{\ell_{\Delta x}^p}.$$

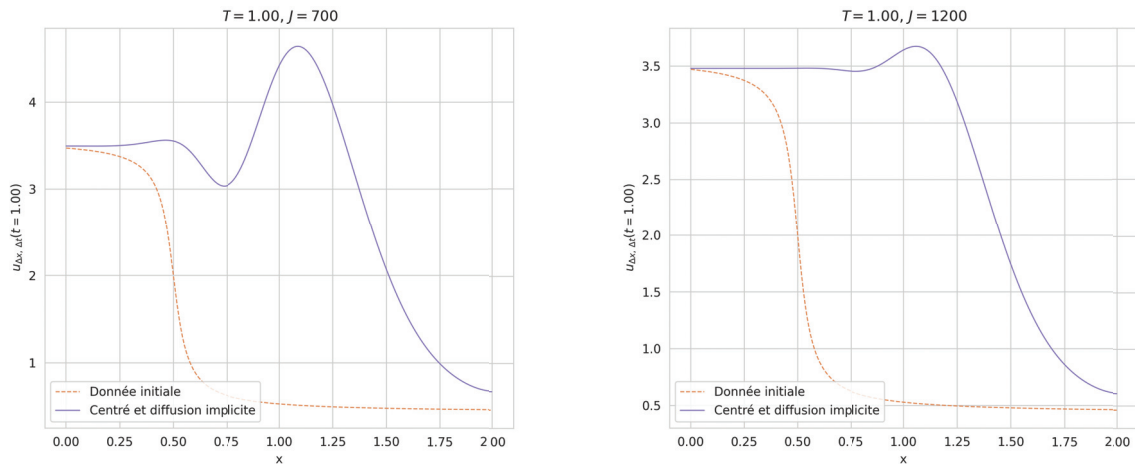


FIGURE 2.7 – Les mêmes paramètres qu’à la figure 2.6, mais avec 700 et 1200 mailles permettent de faire ressortir l’existence d’oscillations, qui ne sont toutefois pas aussi violentes que ce que l’on connaît en l’absence de diffusion, ainsi que le fait que l’amplitude de celles-ci tend vers 0 lorsque l’on raffine le maillage. Il est donc probable que le schéma converge ℓ^∞ . On constate qu’il est en fait stable ℓ^∞ au sens où $\|u^n\|_{\ell^\infty}$ reste bornée. Le schéma downwind donne exactement le même type de graphe.

En effet, en norme ℓ^∞ , on observe numériquement (figures 2.6 et 2.7) que les schémas semi-implicites évoqués ci-dessus ne sont pas stables au sens usuel, qui est, pour la norme $\ell^p_{\Delta x}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|u^{n+1}\|_{\ell^p_{\Delta x}} \leq \|u^n\|_{\ell^p_{\Delta x}},$$

mais la solution numérique n’explose pas pour autant, et le schéma converge ℓ^∞ . Il convient donc de remplacer cette définition par celle, plus forte, de stabilité asymptotique. Dans le formalisme de Thomée [123], ceci revient à demander que, si on note A l’opérateur définissant le schéma c’est-à-dire tel que $u^{n+1} = Au^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, l’on ait :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|A^n\|_{\ell^p(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbf{Z})} < +\infty.$$

Numériquement toujours, le schéma global est également pseudo-inconditionnellement stable si l’on remplace le schéma centré par le schéma upwind ou par n’importe quel schéma monotone : bien sûr, ceci n’est pas étonnant, car un schéma monotone est plus stable que le schéma centré. En revanche, en remplaçant le schéma centré par un schéma totalement instable, comme le schéma downwind, le schéma global reste encore stable et convergent, et c’est cette observation qui nous a étonnés.

Il y a, à notre connaissance, assez peu de références sur ce sujet précis dans la littérature. Dans [47] par exemple, on montre que, si la partie transport est stable sous CFL hyperbolique, c’est-à-dire si elle est définie au moyen d’un flux numérique $g(u, v)$ monotone (croissant en u et décroissant en v), alors la discrétisation est stable ℓ^∞ , ce qui est naturel, car on rajoute une discrétisation implicite du laplacien (inconditionnellement stable) à une discrétisation du transport elle-même stable.

Toutefois, en norme $\ell^2_{\Delta x}$ dans le cas du transport linéaire, il n’est pas très difficile de montrer la stabilité pseudo-inconditionnelle du schéma centré avec diffusion implicite au moyen d’une analyse classique à la Von Neumann.

Analyse Von Neumann dans le cas linéaire $f(u) = au$.

On suppose dans cette partie $f(u) = au$ où a est une constante réelle non nulle. On rappelle rapidement les définitions de base de l’analyse de Von Neumann (voir [116] par exemple). Pour

$u = (u_j)_{j \in \mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x e^{-ij\Delta x \xi} u_j, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x} \right].$$

Passer en Fourier est un moyen pratique d'effectuer des calculs de stabilité L^2 car, comme pour les translations dans le cadre continu, les différences finies se traduisent par un facteur exponentiel en Fourier, et on a la formule de Parseval,

$$\|\widehat{u}\|_{L^2}^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \Delta x u_j^2 =: \|u\|_{\ell_{\Delta x}^2}^2.$$

ainsi que la formule d'inversion :

$$v_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{ij\Delta x \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Le schéma centré avec diffusion implicite s'écrit pour (2.22) :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}).$$

En passant en Fourier, on obtient après quelques transformations :

$$\begin{aligned} \widehat{u^{n+1}}(\xi) &= \frac{1}{1 + \frac{4\lambda\varepsilon}{\Delta x} \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)} \left(1 + ai\lambda \sin(\xi\Delta x)\right) \widehat{u^n}(\xi) \\ &=: g(\xi\Delta x). \end{aligned}$$

La stabilité $\ell_{\Delta x}^2$ est gouvernée par le module du facteur d'amplification $g(\xi\Delta x)$. Or, on a :

$$\begin{aligned} |1 + ai\lambda \sin(\xi\Delta x)|^2 &= 1 + a^2\lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) \\ &= 1 + 4a^2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right) \\ &= 1 + 4a^2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4a^2\lambda^2 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

et également :

$$\left|1 + \frac{4\lambda\varepsilon}{\Delta x} \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right|^2 = 1 + \frac{8\lambda\varepsilon}{\Delta x} \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + \frac{16\lambda^2\varepsilon^2}{\Delta x^2} \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], |g(\xi)| \leq 1 &\Leftrightarrow \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], \left(\frac{8\lambda\varepsilon}{\Delta x} - 4a^2\lambda^2\right) \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{16\lambda^2\varepsilon^2}{\Delta x^2} + 4a^2\lambda^2\right)}_{\geq 0} \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{8\lambda\varepsilon}{\Delta x} - 4a^2\lambda^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{2\varepsilon}{a^2}. \end{aligned}$$

Le schéma centré avec diffusion implicite pour (2.22) est donc stable $\ell_{\Delta x}^2$ sous la condition $\Delta t \leq \frac{2\varepsilon}{a^2}$, qui n'est pas contraignante à $\varepsilon > 0$ fixé. Il suffit de prendre Δt assez petit. On peut donc le qualifier de pseudo-inconditionnellement stable en norme $\ell_{\Delta x}^2$. Notons que ce résultat est surtout intéressant pour $\Delta t \in [\frac{\Delta x}{a}, \frac{2\varepsilon}{a^2}]$. Par ailleurs, le calcul mené ci-dessus se reproduit sans problème, par exemple, pour le schéma upwind (resp. downwind) avec diffusion implicite et donne la stabilité $\ell_{\Delta x}^2$ sous la condition :

$$\Delta t - \frac{\Delta x}{a} \leq \frac{2\varepsilon}{a^2}, \quad \text{resp.} \quad \Delta t + \frac{\Delta x}{a} \leq \frac{2\varepsilon}{a^2}.$$

A nouveau, ces conditions ne sont pas restrictives à $\varepsilon > 0$ fixé. On s'attend donc à ce que la diffusion implicite rende inconditionnellement stable n'importe quel schéma consistant, fût-il violemment instable en l'absence de diffusion (ce qui est le cas du downwind par exemple). **En fait, je pense que la consistance n'a rien à voir. Il faudrait regarder quelles sont les hypothèses minimales sur le facteur d'amplification de la partie transport, ça doit avoir un rapport avec le truc général de Jean-François.**

Un mot sur le CEMRACS 2019

La stabilité $\ell_{\Delta x}^2$ ne garantit toutefois pas la stabilité ℓ^∞ : rappelons que le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur est inconditionnellement stable $\ell_{\Delta x}^2$, mais stable ℓ^∞ seulement sous condition CFL (parabolique). Par ailleurs, l'analyse ci-dessus, basée sur des transformations de Fourier, ne s'adapte pas aux schémas non linéaires.

Ces considérations sont, soyons honnêtes, assez éloignées du sujet de cette thèse. Il nous semble néanmoins que ce sont des questions profondément intéressantes car ce sont des points d'analyse numériques assez fins, pour des problèmes qui ne datent pas d'hier et qui s'énoncent pourtant de façon très simple, même si la littérature à ce propos est encore trop peu étoffée. On pourra notamment consulter les notes de Jean-François Coulombel [38] ou encore [22, 40, 39]. J'avais mis un pied dans ce sujet à l'occasion du CEMRACS 2019 pour travailler avec Nguyen Thi Hoai Thuong et Abraham Sylla dans le groupe de Benjamin Boutin, Jean-François Coulombel et Frédéric Lagoutière, ce qui avait donné lieu au proceedings⁷ [23]. On se rend compte que ces questions de stabilité sont des problèmes très délicats, ne serait-ce qu'en dimension 1, sans compter l'ajout d'un bord...

2.2.7 Perspectives

Il serait intéressant d'approfondir le cadre général d'étude (consistance, stabilité) des schémas pour l'agrégation ébauché à la sous-section ??, en s'attaquant aux maillages non cartésiens par exemple.

7. celui-ci ne figure pas dans ce manuscrit car ce travail est d'un an antérieur au début de cette thèse.

Chapitre 3

Approximation visqueuse

3.1 Limite non visqueuse pour l'agrégation : le cas $d = 1$ et $W(x) = \alpha|x|$, $\alpha \neq 0$

Dans cette section, on suppose $d = 1$ et $W(x) = \alpha|x|$ pour un certain $\alpha \neq 0$. On étudie ici l'asymptotique non visqueuse pour le problème d'agrégation de donnée $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x a[\varrho] \varrho = \varepsilon \partial_{xx} \varrho, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}, \end{cases} \quad (3.1)$$

Le but est de prouver et quantifier la convergence de ϱ^ε vers ϱ une solution distributionnelle de :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x \hat{a}[\varrho] \varrho = 0, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Rappelons en effet que, pour $\alpha > 0$, le potentiel est 0-convexe et le résultat d'existence et unicité du théorème 3.3 s'applique mais qu'en revanche, pour potentiel répulsif, c'est-à-dire si $\alpha < 0$, W n'est plus λ -convexe et il n'y a, a priori, même pas unicité de la solution. Notre approche fournit d'ailleurs, dans ce cas, un critère de sélection de solution à l'équation (3.2) pour potentiel répulsif.

Notre méthode consiste à utiliser, à fond, le fait que, intégré en espace, un problème d'agrégation-diffusion devient un problème de type Burgers avec viscosité sur les fonctions de répartition [70, 16]. Plus précisément, le problème (3.1) est équivalent à un problème de Burgers visqueux, et le problème (3.2) avec le bon de champ de vitesses \hat{a} est équivalent à un problème de Burgers. On renvoie à la sous-section 2.2.1 pour de plus amples détails, mais on reporte ici les propositions essentielles.

Proposition 2.1. *Soit $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$. On note $F(t)$ la fonction de répartition de $\varrho(t)$. Alors ϱ est solution, au sens des distributions, du problème d'agrégation (3.11) de donnée $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ si et seulement si $u := \alpha(1 - 2F)$ est solution au sens des distributions de l'équation de Burgers (1.6) avec donnée initiale $u^{ini} : x \mapsto \alpha(1 - 2\varrho^{ini}(\cdot - \infty, x))$.*

Dans la proposition ci-dessus, si $\alpha > 0$, alors u^{ini} est décroissante et la solution du problème de Burgers est forcément entropique. Sinon, rien ne garantit a priori que u soit solution entropique. En revanche, toujours dans le cas $\alpha < 0$, la proposition ci-dessus montre qu'il n'y a pas unicité des solutions du problème d'agrégation (3.2). Essentiellement, on peut penser à la dérivée tantôt d'un choc non entropique et tantôt d'une raréfaction. Dans le cas $\alpha = -1$ et $\varrho^{ini} = \delta_0$ par exemple, une première solution est donnée par $\varrho^{(1)}(t) = \delta_0$ pour tout $t \geq 0$ et la seconde, $\varrho^{(2)}(t)$ est la dérivée (au facteur 1/2 près) de la raréfaction donnée par :

$$u^{(2)}(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -t, \\ \frac{x}{t} & \text{si } x \in [-t, t], \\ 1 & \text{si } x \geq t, \end{cases}$$

si bien que

$$\varrho^{(2)}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -t, \\ \frac{1}{2t} & \text{si } x \in]-t, t[, \\ 1 & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Notre approche permettra de discriminer entre les deux solutions, pour choisir la deuxième, qui est la dérivée de la solution de viscosité, donc entropique, du problème de Burgers.

Proposition 2.2. *Soit $\varepsilon > 0$, $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ et $F^\varepsilon : (t, x) \mapsto \varrho^\varepsilon(t)(] - \infty, x])$. Alors, ϱ^ε est solution, au sens des distributions, de (1.1) avec donnée $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ si et seulement si $u^\varepsilon := \alpha(1 - 2F^\varepsilon)$ est solution du problème de Cauchy suivant, où $u^{ini} : x \mapsto \alpha(1 - 2\varrho^{ini}(] - \infty, x])$:*

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon, \\ u(0, \cdot) = u^{ini}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Remarque 3.1. Ici, il n'y a pas d'ambiguïté sur la solution du problème de Burgers, car à $\varepsilon > 0$, celle-ci est une solution forte et est unique quelle que soit la donnée initiale.

3.1.1 Limite non visqueuse pour une loi de conservation

L'équation de Burgers

Commençons par regarder l'asymptotique non visqueuse pour le problème de Burgers (2.6).

On sait que le problème (2.6) est bien posé, que les solutions sont régulières et globales en temps, même pour $u_0 \in L^\infty$, et que u^ε converge p.p. vers $u := u^0$ la solution entropique de l'équation sans viscosité (voir [100]). C'est d'ailleurs une façon de définir le critère entropique.

On peut le voir en procédant à une transformation de Hopf-Cole $v^\varepsilon := \exp\left(-\frac{w^\varepsilon}{2\varepsilon}\right)$ où w^ε est une primitive de u^ε : on se ramène à l'équation de la chaleur $\partial_t v^\varepsilon = \varepsilon \partial_{xx} v^\varepsilon$ et cela permet d'obtenir une expression explicite pour u^ε

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbf{R}} \frac{x-y}{t} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{w_0(y)}{2\varepsilon}\right) dy}{\int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{w_0(y)}{2\varepsilon}\right) dy}. \quad (3.3)$$

On peut passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans la formule (3.3) au moyen d'un lemme du type phase stationnaire (voir [52]) : u^ε converge p.p. sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ vers une certaine fonction $u \in L^\infty$. De plus, on a $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$.

Ces deux faits sont suffisants pour passer à la limite dans l'équation (??) testée contre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ ainsi que dans les inégalités d'entropie [100].

En effet, pour un couple entropie flux (S, G) , c'est-à-dire, pour $S \in C^2(\mathbf{R})$ convexe et $G \in C^2(\mathbf{R})$ vérifiant $G'(x) = xS'(x)$, on a, au sens classique :

$$\partial_t S(u^\varepsilon) + \partial_x G(u^\varepsilon) \leq \varepsilon \partial_{xx} S(u^\varepsilon).$$

Donc, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$,

$$-\iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} S(u^\varepsilon) \partial_t \varphi + \int_{\mathbf{R}} S(u_0) \varphi(0) - \iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} G(u^\varepsilon) \partial_x \varphi \leq \varepsilon \iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} S(u^\varepsilon) \partial_{xx} \varphi,$$

et on peut passer à la limite dans chacun des termes par convergence dominée, pour en déduire que u est solution entropique (le passage à la limite dans (??) est similaire). Au passage, on peut aussi obtenir via (3.3) une inégalité d'Oleinik sur u (voir à nouveau [52]).

Loi de conservation à flux (régulier) f quelconque $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$.

Pour plus de généralité, bien que cela ne soit pas nécessaire a priori pour l'équation d'agrégation, regardons on considère une loi de conservation scalaire à flux quelconque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(0, x) = u_0, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Commençons par donner quelques propriétés (voir [100, 114]) des solutions du problème visqueux (pour simplifier, on considère toujours la même donnée initiale pour le problème avec ou sans viscosité) :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Proposition 3.1. *Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $u_0 \in L^\infty \cap BV$. Alors, le problème de Cauchy (3.5) admet une unique solution u^ε globale en temps et régulière. De plus,*

- (1) u^ε vérifie le principe du maximum : $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$ pour tous $t > 0$,
- (2) (contraction L^1) si v^ε est solution du problème de Cauchy de donnée initiale $v_0 \in L^\infty \cap BV$ telle que $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbf{R})$, alors $u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t) \in L^1(\mathbf{R})$ et :

$$\forall t > 0, \quad \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1},$$

- (3) la variation totale décroît : pour tout $t > 0$, $TV(u^\varepsilon(t)) \leq TV(u_0)$.

Le résultat de convergence p.p. pour donnée initiale dans L^∞ , évoqué plus haut pour l'équation de Burgers, est encore valide :

Proposition 3.2. *Pour $u_0 \in L^\infty$, la solution u^ε de (3.5) converge vers u la solution entropique de (3.4), p.p. sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Pour une preuve de ce résultat, voir le théorème 4.62 dans [100], où on montre qu'une sous-suite de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge p.p. sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Le théorème 4.71 montre que la limite est une solution entropique du problème non visqueux. Celle-ci étant unique, toute la suite converge p.p.

Ceci étant, la convergence p.p. de u^ε vers u ne va pas suffire, pour l'agrégation, à conclure à la convergence de ϱ^ε vers ϱ . En effet, une limite ponctuelle de fonctions de répartition n'est pas nécessairement une fonction de répartition (prendre $\varrho^\varepsilon = H_{1/\varepsilon}$; ce sont des fonctions de répartition qui p.p. vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$).

Pour passer à l'équation d'agrégation (1.1), on a besoin d'une convergence plus forte. Un résultat de convergence en norme L^1 globale en espace sera adapté, car, pour l'agrégation, la convergence $L^1(\mathbf{R})$ de $F^\varepsilon(t)$ est équivalente à la convergence en distance W_1 de $\varrho^\varepsilon(t)$ (proposition 2.1). Remarquons qu'on ne peut supposer seulement que $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}) \cap BV(\mathbf{R})$ car u_0 a vocation à être une fonction de répartition, donc pas dans $L^1(\mathbf{R})$.

Ce type de résultat est fortement lié à la propriété de contraction L^1 dans la proposition 3.1, qui est aussi vraie pour les solutions entropiques de (3.4) (voir [114]) : pourvu que $u_0, v_0 \in L^\infty$ et que $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbf{R})$, les solutions entropiques vérifient, pour tout $t > 0$, $u(t) - v(t) \in L^1(\mathbf{R})$ et :

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1}. \quad (3.6)$$

L'idée, dans la suite, est de comparer la solution entropique de (3.4) avec u^ε en utilisant les mêmes méthodes.

Convergence en $\sqrt{\varepsilon}$

L'inégalité (3.6) s'obtient en utilisant les inégalités d'entropie sur u et v pour les entropies de Kruzkov $S_\kappa(u) := |u - \kappa|$, à savoir :

$$\begin{cases} \partial_t |u - \kappa| + \partial_x \operatorname{sgn}(u - \kappa) (f(u) - f(\kappa)) \leq 0, \\ \partial_t |v - \kappa| + \partial_x \operatorname{sgn}(v - \kappa) (f(v) - f(\kappa)) \leq 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

puis la technique de dédoublement de variables (voir [84]). Celle-ci consiste à écrire la première inégalité de Kruzkov au point (s, x) et pour $\kappa = v(t, y)$, et la seconde au point (t, y) et pour $\kappa = u(s, x)$. On en déduit une inégalité intégrale sur (u, v) en utilisant la symétrie des entropies de Kruzkov $S_\kappa(u)$ (lorsque que l'on échange κ et u) ainsi que la symétrie de (4.7) lorsque l'on échange u et v .

On va imiter cette méthode pour la viscosité afin obtenir une majoration de $\|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^1}$ pour $u_0 \in BV(\mathbf{R})$. On contrôlera le terme $\partial_{xx}|u^\varepsilon - \kappa|$ grâce au fait que la variation totale décroît. Ceci étant, la présence d'un second membre brise la symétrie entre les deux inégalités d'entropie et on ne peut pas mener le dédoublement de variable jusqu'au bout, ce qui rend la preuve un peu plus technique. Le contrôle du terme de diffusion fournit, in fine, une estimation de convergence en $\sqrt{\varepsilon T}$:

Théorème 3.1 (Kuznetsov [86]). *Pour $u_0 \in L^\infty \cap BV$, la solution u^ε de (3.5) converge vers u la solution entropique de (3.4), dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbf{R}))$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε et T , telle que :*

$$\|u^\varepsilon(T) - u(T)\|_{L^1} \leq C \cdot TV(u_0) \sqrt{\varepsilon T}. \quad (3.8)$$

On renvoie à [114] pour une preuve détaillée de ce résultat, selon les idées de Kuznetsov.

Remarque 3.2.

- Pour $p \in [1, +\infty[$, on peut déduire de (3.8) une estimée en norme L^p par inégalité de Hölder :

$$\|u^\varepsilon(T) - u(T)\|_{L^p} \leq C \cdot TV(u_0) \cdot (\varepsilon T)^{\frac{1}{2p}}.$$

- Si, de plus, $f'' \geq \alpha > 0$ et u_0 est à support compact, alors on a (voir [114]) :

$$\|u^\varepsilon(T) - u(T)\|_{L^1} \leq C \varepsilon^{1/2} T^{1/4},$$

qui est une meilleure estimée en temps grand.

- Même dans le cas « vraiment non linéaire » (*genuinely nonlinear*) i.e. si $f'' \geq \alpha > 0$, l'estimée (3.8) ne peut être uniforme en temps sans plus d'hypothèses sur la donnée initiale [114]. Mais, si l'on s'intéresse aux données initiales décroissantes, pour lesquelles les solutions de (3.5) sont compressives et donc plus proches de la solution entropique de (3.4) malgré la diffusion, on peut obtenir un ordre de convergence meilleur que 1/2, et ce uniformément en temps (voir un peu plus loin la sous-section ??).

3.1.2 Passage à l'équation d'agrégation

Soit $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ la solution de (3.1) et $F^\varepsilon : (t, x) \mapsto \varrho^\varepsilon(t)([-\infty, x])$, de sorte que $u^\varepsilon := \alpha(1 - 2F^\varepsilon)$ qui résout le problème de Burgers visqueux :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon, \\ u(0, \cdot) = u^{ini}, \end{cases}$$

où $u^{ini} : x \mapsto \alpha(1 - 2\rho^{ini}([-\infty, x]))$. D'après le théorème 3.1, pour tout $T > 0$, u^ε converge dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbf{R}))$ vers u la solution entropique du problème de Burgers :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0, \\ u(0, \cdot) = u^{ini}. \end{cases}$$

Notons $F = \frac{1-u/\alpha}{2}$, qui est donc la limite dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbf{R}))$ de F^ε . Pour tout $t \geq 0$, sa dérivée au sens des distributions $\rho(t) := \partial_x F(t, \cdot)$ est une distribution positive donc une mesure positive, d'après le théorème de Riesz-Markov. Par ailleurs, pour presque tout $t \geq 0$, $F^\varepsilon(t)$ est une fonction croissante à valeurs dans $[0, 1]$. C'est aussi le cas de $F(t)$ par limite p.p. La différence $F^\varepsilon(t) - F(t)$ admet donc une limite en $+\infty$ qui, puisque $F^\varepsilon(t) - F(t) \in L^1(\mathbf{R})$, ne peut être que 0. Ainsi, $F(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, et $\rho(t)$ est bien une mesure de probabilité.

D'après la proposition 2.1, on en déduit que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} W_1(\rho^\varepsilon(t), \rho(t)) = 0$. D'autre part, la proposition 2.1 montre que ρ est solution de (3.2). On a donc le résultat suivant :

Proposition 3.3. *On suppose $d = 1$ et $W(x) = \alpha|x|$ pour un certain $\alpha \neq 0$. Soit $\rho_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ et $T > 0$. On note, pour $\varepsilon > 0$, $\rho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ la solution de (3.1). Alors, la suite $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge au sens des mesures vers une solution $\rho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ de (3.2), et on a :*

$$\sup_{t \in [0, T]} W_1(\rho^\varepsilon(t), \rho(t)) \leq C\sqrt{\varepsilon T},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε et T .

Remarque 3.3.

- Pour $\alpha > 0$, la limite ρ est l'unique solution au sens des distributions de l'équation d'agrégation (3.2), il n'y a donc pas d'ambiguïté. Pour $\alpha < 0$ cependant, on peut seulement dire que ρ est une solution de (3.2). Mais il ne s'agit pas de n'importe quelle solution : avec les notations du paragraphe précédent, on a $\rho = -\frac{1}{2\alpha}\partial_x u$ où u est la solution entropique de l'équation de Burgers. En effet, u est la limite de u^ε dans $L_T^\infty L^1(\mathbf{R})$, c'est donc une solution de viscosité, ce qui revient, pour Burgers, à être une solution entropique.
- Dans tous les cas, on retrouve bien le bon champ de vitesse $\hat{a}[\rho]$ défini en (1.7) à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.1.3 Surconvergence de l'approximation visqueuse

On se concentre, dans cette section, sur le phénomène de surconvergence à l'ordre 1 par rapport au coefficient de viscosité ε de l'approximation visqueuse d'une loi de conservation, lorsque le flux est strictement convexe.

Au-delà de son intérêt intrinsèque, nous nous étions posé la question de la convergence à l'ordre 1 dans l'espoir de démontrer rigoureusement les observations de convergence à l'ordre 1 au lieu de l'ordre 1/2 attendu lorsque les solutions sont peu régulières, de schémas de type upwind ou Lax-Friedrichs pour l'équation de Burgers ou pour l'équation d'agrégation avec potentiel singulier (voir [54] ainsi que la sous-section 2.2.4). Grossièrement, nous nous basions sur l'heuristique suivante : pour l'équation d'advection à vitesse constante, disons $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ avec $a > 0$, il est connu¹ que le schéma upwind classique est consistant à l'ordre 2 avec l'équation d'advection visqueuse suivante où la viscosité est de l'ordre de Δx (sous CFL hyperbolique) :

$$\partial_t u + a\partial_x u = (\Delta x - a\Delta t)\partial_{xx} u. \quad (3.9)$$

1. C'est d'ailleurs un moyen de retrouver la condition CFL : le coefficient de diffusion de l'équation ci-dessus est positif si et seulement si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Voir par exemple [88].

Si l'on savait montrer par exemple que l'approximation visqueuse convergeait à l'ordre 1, c'est-à-dire $\|u(t) - u^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq C(t)\varepsilon$, on pourrait écrire, en notant \tilde{u} la solution de (3.9) (qui dépend donc de Δx) pour la donnée initiale u^{ini} et $u_{\Delta x}$ l'approximation donnée par le schéma upwind :

$$\|u(t) - u_{\Delta x}(t)\|_{L^1} \leq \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^1} + \|\tilde{u}(t) - u_{\Delta x}(t)\|_{L^1} \leq C(t)(\Delta x + \Delta x^2),$$

ce qui permettrait de traiter rigoureusement la surconvergence numérique du schéma upwind pour l'équation de Burgers. La propriété de consistance du schéma à l'ordre 2 avec une équation visqueuse étant vraie pour n'importe quel schéma monotone (cf. théorème de Harten-Hyman-Lax [cite](#)), on aurait pu espérer étendre ce résultat à toute la classe des schémas monotones.

break

Parmi les résultats existants, on peut citer ceux de Tang et Teng [119] et Nessyahu et Tadmor [101] notamment (voir aussi [103, 117, 93]).

Les résultats les plus forts sont ceux de Tang et Teng [119] qui concernent des solutions régulières par morceaux, et présentant un nombre fini de chocs et de raréfactions. Essentiellement, la vitesse de convergence obtenue est $O(\varepsilon|\ln \varepsilon|)$ et peut être améliorée en $O(\varepsilon)$, uniformément en temps, pour donnée décroissante.

Regardons seulement un cas très simple, à savoir le problème de Burgers associé à une donnée initiale « marche » décroissante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) := H_0(-x), \end{cases}$$

dont la solution entropique est donnée par $u(t, x) = H_0(t/2 - x)$. L'équation avec viscosité :

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = \varepsilon \partial_{xx} u,$$

admet une solution onde progressive $v^\varepsilon(t, x) := v\left(\frac{x-t/2}{\varepsilon}\right)$ avec $v(-\infty) = 1$, $v(+\infty) = 0$, $v'(\pm\infty) = 0$ et qui est centrée en 0. On a, par scaling d'une part car u et v^ε sont toutes deux fonctions de $\frac{x-t/2}{\varepsilon}$, et par la propriété de contraction L^1 de l'équation visqueuse d'autre part ² :

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^\varepsilon(t)\|_{L^1} &\leq \underbrace{\|u(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^1}}_{\text{scaling}} + \underbrace{\|v^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t)\|_{L^1}}_{\text{contraction } L^1} \\ &\leq \varepsilon \|u_0 - v\|_{L^1} + \|v^\varepsilon(0) - \underbrace{u^\varepsilon(0)}_{=u_0}\|_{L^1}, \quad \text{puis, à nouveau par scaling} \\ &\leq 2\varepsilon \|u_0 - v\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Dans le cas général, l'idée de Tang et Teng est de construire une solution auxiliaire v^ε en remplaçant chacun des chocs que présente u par une solution onde progressive adéquate. La vitesse de convergence obtenue est, lorsque u_0 est régulière par morceaux et qu'il y a un nombre fini de chocs futurs, $O(\varepsilon|\ln \varepsilon|)$, et même $O(\varepsilon)$, uniformément en temps, pour des données décroissantes.

Nous avons tenté de simplifier la preuve de [119] dans des cas particuliers, par exemple une somme finie de N masses de Dirac pour l'agrégation, c'est-à-dire N sauts décroissants séparant $N + 1$ états constants, sans y parvenir.

2. voir la proposition ??, point (2)

3.2 Limite non visqueuse pour l'agrégation : le cas général

Résumé. La section qui suit est une version légèrement augmentée de l'article *Vanishing viscosity limit for aggregation-diffusion equations* écrit en collaboration avec Frédéric Lagoutière et Filippo Santambrogio. On y prouve, sur tout l'espace et en dimension quelconque, la convergence uniformément en temps en distance de Wasserstein de l'approximation diffusive dans le cadre des potentiels Lipschitziens et on fournit une estimation en $O(\sqrt{\varepsilon})$, où ε est le coefficient de diffusion, lorsque le potentiel est λ -convexe. On étend ce résultat à une certaine classe de potentiels répulsifs et on prouve des estimations de convergence optimales des états stationnaires vers la masse de Dirac sous des hypothèses d'uniforme attractivité du potentiel.

3.2.1 Introduction

This paper addresses the vanishing viscosity limit $\varepsilon \rightarrow 0$ for the following aggregation-diffusion problem on the whole space \mathbb{R}^d , in any dimension d (probably all the analysis could be performed on a bounded domain with homogeneous Neumann boundary condition) :

$$\partial_t \varrho^\varepsilon + \nabla \cdot (a[\varrho^\varepsilon] \varrho^\varepsilon) = \varepsilon \Delta \varrho^\varepsilon, \quad (3.10a)$$

$$a[\varrho^\varepsilon] = -\nabla W * \varrho^\varepsilon, \quad (3.10b)$$

$$\varrho^\varepsilon(0, \cdot) = \varrho_0^\varepsilon, \quad (3.10c)$$

where $\varepsilon > 0$, $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is a given interaction potential and the sequence of initial data $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ belongs to $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ the set of probability measures with finite second order moment, and converges as ε goes to 0 towards a given $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

Equation (3.10a)–(3.10b) is often used in population dynamics to describe the collective motion of a population subject to Brownian diffusion and interacting through the interaction potential W . The term $\nabla W * \varrho^\varepsilon(x)$ models the combined contribution of the interaction of a particle located at point x with particles at all other points. These equations appear in several applications arising from physics and biology to model, for instance, swarming, chemotaxis, crowd motion, bird flocks, or fish schools, see, e.g., [95, 27, 125, 124, 45, 73]. The potential W depends on the model we consider. For example, the celebrated parabolic-elliptic Patlak-Keller-Segel model [82, 81] for chemotaxis with an adequate set of parameters corresponds to the aggregation-diffusion equation in dimension $d = 2$ for the logarithmic potential $W(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$.

In this work, we assume that the interaction potential W satisfies the following properties :

(A0) For all $x \in \mathbb{R}^d$, $W(x) = W(-x)$ and $W(0) = 0$,

(A1) $W \in C^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

(A2) W is a_∞ -Lipschitz continuous, for some constant $a_\infty \geq 0$.

In addition, some of our results only hold under one of the following supplementary assumptions :

(A3) W is λ -convex for some $\lambda \leq 0$, that is, $x \mapsto W(x) - \frac{\lambda}{2}|x|^2$ is convex,

(A4- p) There exists a constant $C > 0$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^d$, $\nabla W(x) \cdot x \geq C|x|^p$,

where $p \geq 1$. Potentials satisfying assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3) but not differentiable at the origin are often referred to as pointy [36, 43, 90].

Remarque 3.4. Note that assumption (A2) is incompatible with assumption (A4- p) whenever $p > 1$. This is the reason why we only consider $\lambda \leq 0$ in (A2), since (A2) with $\lambda > 0$ implies (A4-2). Still, when studying well-posedness of inviscid aggregation equations, the case $\lambda > 0$ can be tackled considering compactly supported data for, in that case, the support decreases in time (see [43] Theorem 2.1 and [31] Remark 2.14). When $\varepsilon > 0$, it is not clear however that we can reproduce this argument.

When the potential is pointy, finite time blowup of weak solutions occurs [6, 7] for the inviscid problem :

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (a[\varrho]\varrho) = 0, \quad (3.11a)$$

$$a[\varrho] = -\nabla W * \varrho, \quad (3.11b)$$

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho^{ini}, \quad (3.11c)$$

After blowup time, the solutions being possibly singular measures, the product $a[\varrho]\varrho$ is no longer well-defined. For λ -convex potentials, the continuation of weak solutions valued in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ has therefore been studied through three different approaches : gradient flow solutions in the Wasserstein space [31], duality solutions *à la* Bouchut-James [70, 73] in one dimension of space and Filippov solutions [36, 90]. These notions of solutions turn out to be equivalent to that of solutions in the sense of distributions provided the velocity field $a[\varrho]$ is replaced by :

$$\hat{a}[\varrho](x) = - \int_{y \neq x} \nabla W(x - y) \varrho(dy). \quad (3.12)$$

Our objective in this paper is to study the convergence of the viscous solutions $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ towards such a weak measure solution to (3.11). When W is λ -convex, these asymptotics had previously been mentioned in [33], where the authors explain how to use the techniques for the Γ -convergence of gradient flows developed by Serfaty in [113]. Our method basically relies on the same arguments which actually do not require the λ -convexity of the potential but only its Lipschitz continuity – along with the standard assumptions (A0)-(A1). Starting from the so-called Energy Dissipation Equality (EDE) for the viscous problem 3.10, we prove lower bounds of lower semicontinuity-type on each term of the EDE. This amounts to verifying the assumptions of Theorem 2 in [113]; if, in addition, the initial data is well-prepared, then we meet all the hypotheses of this theorem. However, we deliberately pass to the limit *by hand*, so as not to invoke abstract gradient flow arguments. Therefore, our proof is self-contained for the reader with minimal background regarding optimal transport. In particular, in our Theorem 3.5 we recover, at the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, the right definition of the velocity field for (3.11) as defined in (3.12).

We generalize this result in Corollary 3.1 to arbitrary $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ initial data converging in Wasserstein distance towards the initial datum ϱ^{ini} of the inviscid problem, when W is, in addition, λ -convex. This is done by smoothing out the initial data and estimating the distance to the modified solutions at time t , which is possible since the interaction energy is λ -geodesically convex. We then provide a convergence rate based on the differentiation formula of the Wasserstein distance between two absolutely continuous curves on the Wasserstein space. Note that, for the Newtonian potential, the vanishing viscosity limit had been established in [41] in dimension $d \geq 2$ and up to the time of existence of weak solutions in $L^1 \cap L^\infty$ but, to the best of our knowledge, without convergence rates.

This article is structured as follows. We recall in Section 3.2.2 some useful results and definitions regarding optimal transport and functionals defined over the Wasserstein spaces.

In Section 3.2.3, in the framework of Lipschitz potentials, we begin with the general convergence result of the diffusive solutions $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ towards a solution ϱ to the inviscid problem (3.11) for well-prepared initial data. We then relax some of our assumptions on the initial data and focus on λ -convex potentials, for which we prove that convergence still holds for arbitrary initial data $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converging towards ϱ^{ini} . We then prove that convergence occurs at rate $O(\sqrt{\varepsilon})$ in Wasserstein distance. We give, in addition, an alternate proof based on the convergence estimates of an upwind-type scheme for the inviscid problem due to the first author with Delarue and Vauchelet [42, 43].

In Section 3.2.4, we show that convergence (without convergence rate) still holds, up to an extraction, for repulsive potentials that behave like $W(x) = -|x|$. The idea is to estimate, as in the λ -convex case, the distance between solutions associated with smoothed out initial data and

solutions associated with a fixed initial datum ϱ^{ini} . This is done by differentiating the Wasserstein distance between solutions and proving appropriate estimates on the aggregation velocity field using an additional integrability assumption on $\nabla^2 W$.

Section 3.2.5 is devoted to the study of the stationary problem and, in particular, we provide higher convergence rates for the viscous steady states towards the unique steady state of the aggregation equation, that is, up to translations, the Dirac mass, when the interaction potential satisfies the key assumption (A4-1) but is not necessarily Lipschitz continuous. Under assumption (A4- p) for an arbitrary $p \geq 1$, estimates are also obtained and proved to be sharp for $p = 2$. We eventually illustrate our convergence results in Section 3.2.6 and observe all the proven convergence rates.

Acknowledgments : The authors are indebted to Benoît Fabrèges for his help with the numerical code. FS acknowledges the support of the Lagrange Mathematics and Computation Research Center project on Optimal Transportation.

3.2.2 Preliminaries

Notations

We denote by $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ the space of continuous functions from \mathbb{R}^d to \mathbb{R} , and by $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$) the subspace of continuous functions vanishing at ∞ (resp. of bounded continuous functions, of continuous and compactly supported functions). We also denote by $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ the space of Borel signed measures with finite total variation, equipped with the weak topology $\sigma(\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))$. For a sequence $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ and $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$, we denote the weak convergence of $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ towards ϱ by $\varrho_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \varrho$.

For $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ and $r \in [0, +\infty)$, we also denote by $M_r(\varrho)$ the r -th moment of ϱ , given by $M_r(\varrho) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \varrho(dx)$, where $|\cdot|$ is the Euclidean norm. For $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ and Z a measurable map, we denote by $Z_{\#}\varrho$ the pushforward measure of ϱ by Z , which satisfies, for any $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\int \varphi(x) Z_{\#}\varrho(dx) = \int \varphi(Z(x)) \varrho(dx).$$

Note that, in the above equality as in the whole article, whenever the integration domain is not specified, the integrals are considered over the whole space (which is \mathbb{R}^d here). If $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ is a positive measure, we also note $\varrho \ll \mu$ whenever ϱ is absolutely continuous with respect to μ .

We call $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ the subset of $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ of probability measures and we denote, for $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) := \{\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), M_p(\varrho) < +\infty\}$. For $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, we define the Wasserstein distance of order p between μ and ν by (see [1, 112, 128]) :

$$W_p(\mu, \nu) := \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \left\{ \iint |x - y|^p \gamma(dx, dy) \right\}^{1/p} \quad (3.13)$$

where $\Gamma(\mu, \nu)$ is the set of measures on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ with marginals μ and ν , i.e.

$$\Gamma(\mu, \nu) = \left\{ \gamma \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d); \forall \xi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \int \xi(x) \gamma(dx, dy) = \int \xi(x) \mu(dx), \right. \\ \left. \int \xi(y) \gamma(dx, dy) = \int \xi(y) \nu(dy) \right\}.$$

Any measure that realizes the minimum in the definition (3.13) of W_p is called an optimal plan, and the set of optimal plans is denoted by $\Gamma_0(\mu, \nu)$. The space $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ equipped with the distance W_p is called Wasserstein space of order p and denoted $\mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d)$.

We recall that the Wasserstein distance W_p metrizes the weak convergence of measures in the sense that, for $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ and $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, $W_p(\varrho_n, \varrho) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ if and only if $\varrho_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} \varrho$ and $M_p(\varrho_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M_p(\varrho)$ (see [128], Theorem 7.12).

We shall also denote the conjugate exponent of p by $p' \in [1, +\infty]$ defined by $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, with the usual convention $1' = +\infty$ and $\infty' = 1$. For $\alpha \in \mathbb{R}$, the positive and negative part of α are denoted by $\alpha^+ := \max(0, \alpha)$ and $\alpha^- := \max(0, -\alpha)$. With that convention, both α^+ and α^- are always nonnegative.

Throughout this paper, we will use the same notation C to denote any positive constant.

Curves and functionals over the Wasserstein space

Let $p \in [1, +\infty)$ and $T > 0$. We call curve on the metric space $\mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d)$ any continuous function $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d))$. We say that ϱ is an absolutely continuous curve if there exists $b \in L^1([0, T])$ such that $W_p(\varrho_s, \varrho_t) \leq \int_s^t b(\tau) d\tau$ for every $0 \leq s < t \leq T$, and we denote $AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d))$ the set of absolutely continuous curves on $\mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d)$. We also define for $t \in [0, T]$, the metric derivative of ϱ at time t as :

$$|\varrho'_t| := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W_p(\varrho_{t+h}, \varrho_t)}{h}. \quad (3.14)$$

If ϱ is a Lipschitz curve on $\mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d)$, then the above limit exists for a.e. $t \in [0, T]$. Now, up to a reparametrization in time, any absolutely continuous curve can become Lipschitz continuous and therefore admits a metric derivative for almost every time.

The fundamental property of absolutely continuous curves in $\mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d)$ is the link with a continuity equation :

Théorème 3.2 ([1], Theorem 8.3.1). *Let $p \in (1, +\infty)$ and $T > 0$. Let $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d))$. Then, for a.e. $t \in [0, T]$ there exists a vector field $v_t \in L^p(\varrho_t, \mathbb{R}^d)$ such that :*

- the continuity equation $\partial_t \varrho + \nabla \cdot \varrho v = 0$ is satisfied in the sense of distributions
- for a.e. $t \in [0, T]$, $\|v_t\|_{L^p(\varrho_t)} \leq |\varrho'_t|$.

Conversely, if we take a curve $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d))$ such that, for each $t \in [0, T]$, there exists a vector field $v_t \in L^p(\varrho_t, \mathbb{R}^d)$ with $\int_0^T \|v_t\|_{L^p(\varrho_t)} dt < +\infty$ solving the continuity equation $\partial_t \varrho + \nabla \cdot \varrho v = 0$, then $\varrho \in AC([0, T], \mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d))$ and for a.e. $t \in [0, T]$, we have $|\varrho'_t| \leq \|v_t\|_{L^p(\varrho_t)}$.

As a consequence, the velocity field v introduced in the first part of the statement actually satisfies $\|v_t\|_{L^p(\varrho_t)} = |\varrho'_t|$ for a.e. $t \in [0, T]$.

We now recall the definition of the first variation of a functional defined over probability measures.

Définition 3.1. *Let $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Assume that $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ is such that :*

$$\forall \delta \in [0, 1], \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad F((1 - \delta)\varrho + \delta\mu) < +\infty,$$

then we call first variation of F at ϱ , denoted $\frac{\delta F}{\delta \varrho}(\varrho)$, any measurable function g such that :

$$\left. \frac{dF(\varrho + \delta\chi)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \int g d\chi,$$

whenever $\chi = \mu - \varrho$ for some $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, where $L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ denotes the set of compactly supported functions in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. If it exists, the first variation is defined up to an additive constant.

We now introduce two functionals that are essential to our study, the interaction energy \mathcal{W} and the entropy \mathcal{U} , defined on $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ by :

$$\mathcal{W}(\varrho) = \frac{1}{2} \iint W(x - y) \varrho(dx) \varrho(dy), \quad (3.15)$$

$$\mathcal{U}(\varrho) = \begin{cases} \int \varrho \ln(\varrho), & \text{if } \varrho \ll \text{Leb} \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.16)$$

where Leb is the Lebesgue measure on \mathbb{R}^d . Note that, under assumption (A2), the interaction energy $\mathcal{W}(\varrho)$ is finite whenever $\varrho \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$. For $\varepsilon \geq 0$, we shall also define the energy functional as $F^\varepsilon = \mathcal{W} + \varepsilon\mathcal{U}$. One can easily show that $\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\varrho}(\varrho) = W * \varrho$ and $\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta\varrho}(\varrho) = \ln \varrho + 1$.

A key point in our proofs will be the lower semicontinuity (l.s.c) of the above functionals so that minimization arguments apply.

Lemme 3.1.

- (1) If W is l.s.c on \mathbb{R}^d and bounded from below, then the interaction energy \mathcal{W} is l.s.c for the weak convergence.
- (2) If W is Lipschitz continuous, then the interaction energy \mathcal{W} is Lipschitz continuous for the W_1 distance.

Démonstration. Let us recall from [112], Proposition 7.2. that if $V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is l.s.c and bounded from below, then the functional $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \mapsto \iint V(x, y)\varrho(dx)\varrho(dy)$ is l.s.c for the weak convergence of measures. This proves the first claim.

For the second claim, we will prove

$$|\mathcal{W}(\varrho) - \mathcal{W}(\mu)| \leq \text{Lip}(W)W_1(\varrho, \mu).$$

Indeed, we can write $\mathcal{W}(\varrho) = \frac{1}{2} \int (W * \varrho)d\varrho$, so that we have

$$\mathcal{W}(\varrho) - \mathcal{W}(\mu) = \frac{1}{2} \int (W * \varrho)d(\varrho - \mu) + \frac{1}{2} \int (W * (\mu - \varrho))d\mu.$$

We then use

$$\left| \int (W * \varrho)d(\varrho - \mu) \right| \leq \text{Lip}(W * \varrho)W_1(\varrho, \mu)$$

together with $\text{Lip}(W * \varrho) \leq \text{Lip}(W)$, and

$$|(W * (\mu - \varrho))(x)| = \left| \int W(x - y)(\mu - \varrho)(dy) \right| \leq \text{Lip}(W(x - \cdot))W_1(\varrho, \mu)$$

together with $\text{Lip}(W(x - \cdot)) = \text{Lip}(W)$.

□

The following lemma is proven in [111], Proposition 2.1.

Lemme 3.2. *There exists a constant C only depending on d such that the entropy functional \mathcal{U} satisfies $\mathcal{U}(\varrho) \geq -C(M_1(\varrho)^{1/2} + 1)$. Moreover, if $(\varrho_n)_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ is a sequence weakly converging towards some $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ such that $M_1(\varrho_n)$ is bounded, then we have $\mathcal{U}(\varrho) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\varrho_n)$.*

In particular, this means that the entropy is l.s.c for the W_q distance for all $q \geq 1$.

In order to obtain convergence of the moments of a weakly converging sequence of probability measures, we will often make use of the following lemma :

Lemme 3.3. *Let $1 \leq p < +\infty$ and $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of probability measures in $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ weakly converging towards $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ as $n \rightarrow +\infty$. Assume that, for some constant $C > 0$, we have for all $n \in \mathbb{N}$, $M_p(\varrho_n) \leq C$. Then, for all $q \in (0, p)$, $M_q(\varrho_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M_q(\varrho)$. In particular, if $p > 1$ then $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges towards ϱ in W_q distance for all $q \in [1, p)$.*

Démonstration. For $R > 0$, we introduce a nonnegative cut-off function $\eta_R \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ equal to 1 on $B(0, R)$. We write :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \eta_R(x) \varrho_n(dx) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)} |x|^q (1 - \eta_R(x)) \varrho_n(dx), \quad (3.17)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \eta_R(x) \varrho_n(dx) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)} |x|^q \varrho_n(dx). \quad (3.18)$$

Firstly, $x \mapsto |x|^q \eta_R(x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, therefore the weak convergence $\varrho_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} \varrho$ ensures that the first term in the above inequality converges to $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \eta_R(x) \varrho(dx)$ as $n \rightarrow +\infty$. Now, $M_q(\varrho) < +\infty$ since $M_p(\varrho) < +\infty$, hence, using Lebesgue's dominated convergence theorem, we have $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \eta_R(x) \varrho(dx) \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho(dx)$.

Besides, the uniform bound on the p -moment of ϱ_n ensures that the second term converges to 0 as $R \rightarrow +\infty$ uniformly with respect to n . Indeed, using a Hölder inequality with the exponents $(\frac{p}{q}, \frac{p}{p-q})$, we have :

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)} |x|^q \varrho_n(dx) \leq M_p(\varrho_n)^{q/p} \varrho_n(\mathbb{R}^d \setminus B(0, R))^{\frac{p-q}{p}} \leq C^{q/p} \varrho_n(\mathbb{R}^d \setminus B(0, R))^{\frac{p-q}{p}}.$$

Moreover, one has $R^p \varrho_n(\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)) \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)} |x|^p \varrho_n(dx) \leq M_p(\varrho_n) \leq C$. Combining these inequalities and plugging it into (3.17) then gives :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho_n(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \eta_R(x) \varrho_n(dx) + \frac{C}{R^{p-q}}.$$

Passing to the $\lim_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty}$, we obtain :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho_n(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho(dx).$$

Since $x \mapsto |x|^q$ is l.s.c and bounded from below, the functional $\varrho \mapsto M_q(\varrho)$ is l.s.c for the weak convergence. Hence, $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho(dx) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^q \varrho_n(dx)$, which concludes the proof. \square

We also have, as a corollary of the previous lemma, a compactness result :

Lemme 3.4. *Let $1 \leq p < +\infty$ and $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of probability measures in $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ such that $M_p(\varrho_n)$ is uniformly bounded with respect to n . Then, there exist a subsequence of $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converging towards some $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ in W_q distance for all $q \in [1, p)$.*

Démonstration. As a sequence of probability measures, $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges weakly towards some $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$. Now, the uniform bound on $M_p(\varrho_n)$ implies tightness on $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, hence it converges narrowly towards ϱ and therefore ϱ is a probability measure. We can then use the l.s.c of the p -th order moment to deduce that $M_p(\varrho) < +\infty$. Lemma 3.3 finally gives convergence of $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ towards ϱ in $\mathbb{W}_q(\mathbb{R}^d)$ for all $q \in [1, p)$. \square

We finally define one last functional that will be useful in our proofs. Let $p \in (1, +\infty)$. We set $K_p = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid a + \frac{1}{p} |b|^{p'} \leq 0 \right\}$ and, for $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,

$$f_p(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{p} \frac{|x|^p}{t^{p-1}}, & \text{if } t > 0, \\ 0, & \text{if } t = 0, x = 0, \\ +\infty, & \text{if } t = 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Then, for X a measurable space and for $(\varrho, E) \in \mathcal{M}_b(X) \times \mathcal{M}_b(X)^d$, we define the p -Benamou-Brenier functional by :

$$\mathcal{B}_p(\varrho, E) = \sup \left\{ \int a d\varrho + \int b \cdot dE ; (a, b) \in \mathcal{C}_b(X, K_p) \right\}.$$

The Benamou-Brenier functional satisfies the following properties (see [112], Proposition 5.18) :

Lemme 3.5.

(i) \mathcal{B}_p is convex and l.s.c on $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{M}(X)^d$ for the weak convergence,

- (ii) If ϱ and E are absolutely continuous with respect to a positive measure μ , then $\mathcal{B}_p(\varrho, E) = \int f_p(\varrho, E) d\mu$,
- (iii) $\mathcal{B}_p(\varrho, E) < +\infty$ only if $E \ll \varrho$,
- (iv) In that case, if we denote by v the density of E with respect to ϱ , that is $E = \varrho v$, then
- $$\mathcal{B}_p(\varrho, E) = \int \frac{|v|^p}{p} d\varrho.$$

We also have the following symmetrization lemma, which we will repeatedly use for $V = \nabla W$:

Lemme 3.6. *Let V be a bounded odd vector field on \mathbb{R}^d , $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ and v a vector field on \mathbb{R}^d such that $v \cdot (V * \varrho)$ is integrable with respect to ϱ . Then, one has :*

$$\int v(x) \cdot (V * \varrho)(x) \varrho(dx) = \frac{1}{2} \iint V(x-y) \cdot (v(x) - v(y)) \varrho(dx) \varrho(dy).$$

Démonstration. Using the fact that V is odd, we can write thanks to the change of variables $x \leftrightarrow y$:

$$\iint V(x-y) \cdot v(x) \varrho(dx) \varrho(dy) = - \iint V(x-y) \cdot v(y) \varrho(dx) \varrho(dy).$$

Therefore, taking the half sum of the two quantities above :

$$\begin{aligned} \int v(x) \cdot (V * \varrho)(x) \varrho(dx) &= \iint V(x-y) \cdot v(x) \varrho(dx) \varrho(dy) \\ &= \frac{1}{2} \left(\iint V(x-y) \cdot v(x) \varrho(dx) \varrho(dy) - \iint V(x-y) \cdot v(y) \varrho(dx) \varrho(dy) \right) \\ &= \frac{1}{2} \iint V(x-y) \cdot (v(x) - v(y)) \varrho(dx) \varrho(dy). \end{aligned}$$

□

We finish with a computation of the derivative of \mathcal{W} along a curve satisfying a continuity equation :

Lemme 3.7. *Let ϱ be a curve on $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ that solves in the weak sense $\partial_t \varrho + \nabla \cdot \varrho v = 0$ with $v_t \in L^2(\varrho_t)$ for a.e. $t \in [0, T]$ and $\int_0^T \|v_t\|_{L^2(\varrho_t)}^2 dt < +\infty$. Then :*

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathcal{W}(\varrho_t) - \mathcal{W}(\varrho_0) = \int_0^t \int (\widehat{\nabla W} * \varrho_s) \cdot v_s d\varrho_s. \quad (3.19)$$

Démonstration. Let $(W^\delta)_{\delta>0}$ be an approximation of W such that $W^\delta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, $W^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} W$ uniformly on \mathbb{R}^d , W^δ is even, ∇W^δ is bounded by a_∞ , and $\nabla W^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \nabla W$ pointwise on $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

We necessarily have $\nabla W^\delta(0) = 0$ for all $\delta > 0$ and therefore $\nabla W^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \widehat{\nabla W}$ pointwise on \mathbb{R}^d . On the other hand, for $\delta > 0$, since $W^\delta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ and W^δ is even, we have, for $t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \iint W^\delta(x-y) \varrho_t(dx) \varrho_t(dy) - \frac{1}{2} \iint W^\delta(x-y) \varrho_0(dx) \varrho_0(dy) = \int_0^t \iint \nabla W^\delta(x-y) \cdot v_s(x) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds. \quad (3.20)$$

Now, we can bound the integrand on the right-hand side writing $|\nabla W^\delta(x-y) \cdot v_s(x)| \leq a_\infty |v_s|$. Noting that we have

$$\int_0^t \iint |v_s(x)| \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds = \int_0^t \|v_s\|_{L^1(\varrho_s)} ds \leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \|v_s\|_{L^2(\varrho_s)}^2 ds \right)^{1/2} < +\infty,$$

we can then use Lebesgue's dominated convergence theorem w.r.t $\varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds$ to get that the right-hand side in equation (3.20) converges to $\int_0^t \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot v_s(x) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds$, which is equal to $\int_0^t \int (\widehat{\nabla W} * \varrho_s) \cdot v_s d\varrho_s$. The uniform convergence of W^δ towards W ensures convergence of the left-hand side, which concludes the proof. □

Preliminary results

We recall the following result of existence of a characteristic flow and well-posedness of measure-valued solutions to (3.11) :

Théorème 3.3 ([31] Theorems 2.12 and 2.13, [36] Theorems 2.5 and 2.9). *Assume W satisfies hypotheses (A0)-(A1)-(A2)-(A3) and let ϱ^{ini} be given in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. Then, there exists a unique solution $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ satisfying, in the sense of distributions, the aggregation problem (3.11) where $a[\varrho]$ is replaced by $\hat{a}[\varrho]$ as defined in (3.12).*

This solution may be represented as the family of pushforward measures $(\varrho_t := Z_\varrho(t, \cdot)_\# \varrho^{ini})_{t \geq 0}$ where $(Z_\varrho(t, \cdot))_{t \geq 0}$ is the unique Filippov characteristic flow associated with the one-sided Lipschitz velocity field $\hat{a}[\varrho]$. Besides, if ϱ and μ are the respective solutions to (3.11) with ϱ^{ini} and μ^{ini} as initial conditions in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, then, for all $t \geq 0$,

$$W_2(\varrho_t, \mu_t) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho^{ini}, \mu^{ini}). \quad (3.21)$$

In [35], Carrillo, Gómez-Castro, Yao and Zeng proved the following well-posedness and regularity Theorem for aggregation-diffusion equations with Lipschitz symmetric potentials. They prove existence and uniqueness through a fixed-point argument and regularity applying a bootstrap argument in adequate fractional Sobolev spaces. The solutions they define are mild solutions, which are stronger than our definition of solutions, which is in the sense of distributions. We recall the definition of the heat kernel used in the mild formulation :

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Théorème 3.4 ([35], Theorems 1.1, 2.1 and 2.2). *Assume that W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2). Let $\varepsilon > 0$ and $\varrho_0^\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

- (1) *For all $T > 0$, there exists a unique solution $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$ to the aggregation-diffusion problem (3.10) in the sense that :*

$$\forall t \in [0, T], \quad \varrho_t^\varepsilon = G_{\varepsilon t} * \varrho_0^\varepsilon + \int_0^t (\nabla G_{\varepsilon(t-s)}) * ((\nabla W * \varrho_s^\varepsilon) \varrho_s^\varepsilon) ds.$$

- (2) *This solution is actually a classical solution that belongs, for all $T > 0$, to $\mathcal{C}((0, T], W^{k,p}(\mathbb{R}^d))$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $p \in [1, +\infty]$ in the general case, and to $\mathcal{C}((0, T], W^{s,p}(\mathbb{R}^d))$ for all $s \geq 0$ and $p \in [1, +\infty]$ if we assume that $\varrho_0^\varepsilon \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 3.5. In [35], the authors state the second item of the above Theorem under the assumption that $W \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and assuming that the initial datum belongs to $L^1_+(\mathbb{R}^d)$ with total unit mass instead of $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. It seems to us that $W \in L^\infty$ is only required to obtain sharp decay of the energy functional and that the L^1 assumption on ϱ_0^ε is only useful to simplify the notations.

In the above Theorem, we actually have $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$. Indeed, as we will see in the proof of our Theorem 3.5 (see equation (3.29)), $\frac{1}{2}$ -Hölder continuity in time follows automatically from a uniform bound with respect to $t \in [0, T]$ on $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$. This in turn comes from the following computations, where we use, first, integration by parts, and, second, the symmetrization Lemma 3.6 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} M_2(\varrho_t^\varepsilon) = \int |x|^2 \partial_t \varrho_t^\varepsilon = \int |x|^2 \nabla \cdot ((\nabla W * \varrho_t^\varepsilon) \varrho_t^\varepsilon) + \varepsilon \int |x|^2 \Delta \varrho_t^\varepsilon = -2 \int x \cdot (\nabla W * \varrho_t^\varepsilon) d\varrho_t^\varepsilon + 2\varepsilon d, \\ -2 \int x \cdot (\nabla W * \varrho_t^\varepsilon) d\varrho_t^\varepsilon = - \iint \nabla W(x-y) \cdot (x-y) \varrho_t^\varepsilon(dx) \varrho_t^\varepsilon(dy) \leq 2a_\infty M_1(\varrho_t^\varepsilon) \leq 2a_\infty \sqrt{M_2(\varrho_t^\varepsilon)}. \end{cases}$$

We thus get $\frac{d}{dt} M_2(\varrho_t^\varepsilon) \leq 2a_\infty \sqrt{M_2(\varrho_t^\varepsilon)} + 2\varepsilon d$ which implies, using a nonlinear Grönwall Lemma, that $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$ is bounded over a finite horizon.

We finish by mentioning the special case of the dimension $d = 1$, with potentials of the form $W(x) = a|x|$ for $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, for which the vanishing viscosity limit can be obtained using the correspondence with Burgers' equation. Indeed, let us set, for $\varepsilon \geq 0$, $u^\varepsilon(t, x) = a(1 - 2f^\varepsilon(t))$, where $f^\varepsilon(t)$ is the cumulative distribution function of ϱ_t^ε . One can show that ϱ^ε solves (3.10a) if and only if u^ε solves the viscous Burgers equation :

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon, \quad (3.22)$$

and, similarly, ϱ solves the aggregation equation (4.2a) with the correct velocity field $\hat{a}[\varrho]$ if and only if u solves Burgers' equation (see [16, 55, 72]). Using the fact that, in dimension $d = 1$, we have the representation $W_1(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) = \|f^\varepsilon(t) - f(t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ and combining with Kuznetsov's estimate hereafter for the viscous Burgers equation (see [86]) :

$$\|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq CTV(u_0)\sqrt{\varepsilon t},$$

where C is a positive constant, we deduce the following proposition :

Proposition 3.4. *Assume $d = 1$ and $W(x) = a|x|$ for some constant $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Let $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, set $\varrho_0^\varepsilon = \varrho^{ini}$ for all $\varepsilon > 0$ and let $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ be the sequence of weak solutions to (3.10).*

Then, for all $T > 0$, $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converges in W_1 distance and uniformly on $[0, T]$, towards a solution $\varrho \in C([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}))$ to (3.11) with the velocity field $a[\varrho]$ being replaced by $\hat{a}[\varrho]$ as defined in (3.12). More precisely, we have :

$$\forall t \in [0, T], \quad W_1(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq C\sqrt{\varepsilon t},$$

where the constant $C > 0$ depends on a_∞ only.

In the case of one initial Dirac mass $\varrho^{ini} = \delta_0$, one can even obtain convergence of ϱ^ε towards ϱ at order 1 with respect to ε using simple scaling arguments. The initial data to the Burgers problem is $u^{ini} = 1 - 2H_0(x)$, and the solution to the inviscid Burgers problem is stationary, given by $u(t) = u^{ini}$. One can also show that there exists a stationary solution to equation (3.22) of the form $v^\varepsilon(t, x) = V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, with $V(-\infty) = 1$, $V(+\infty) = -1$ and $V'(\pm\infty) = 0$. We then have using a contraction property of the viscous Burgers equation and the stationarity of v^ε and u :

$$\|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^1} \leq \underbrace{\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^1}}_{\leq \|u^{ini} - v^\varepsilon(0)\|_{L^1}} + \underbrace{\|v^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^1}}_{=\|v^\varepsilon(0) - u^{ini}\|_{L^1}} \leq 2 \int \left| u^{ini}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \leq 2\varepsilon \int |u^{ini} - V|,$$

which gives $W_1(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq C\varepsilon$ with $C > 0$ independent of time. This result can be extended to the case of a finite sum of Dirac masses as initial datum, using the arguments of Teng and Zhang [121] to compare shocks with traveling waves. We also refer to [117, 119, 122] for generalizations of this result.

3.2.3 $O(\varepsilon^{1/2})$ convergence rate when the potential is λ -convex

In this section, we assume that W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3).

Method 1 : computing $\frac{d}{dt} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t)$

So as to make integration by parts rigorous, we actually compute $\frac{d}{dt} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t^\delta)$ for $\varepsilon, \delta > 0$ so that ϱ^ε and ϱ^δ are regular (see Theorem 3.4), and then we let $\delta \rightarrow 0$. We therefore need to know that ϱ_t^δ converges in the sense of measures towards ϱ_t .

Step 1 : Convergence in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$ without convergence rate for W satisfying (A0)-(A1)-(A2)

Let $T > 0$ and let $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ be the solution to the aggregation-diffusion problem (3.10) on $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, as given by Theorem 3.4. Let us denote $v^\varepsilon = -\nabla W * \varrho^\varepsilon - \varepsilon \frac{\nabla \varrho^\varepsilon}{\varrho^\varepsilon}$ so that the continuity equation $\partial_t \varrho^\varepsilon + \nabla \cdot \varrho^\varepsilon v^\varepsilon = 0$ is satisfied in the sense of distributions. We formally have, by definition of the first variation and then by integration by parts :

$$\frac{d}{dt} F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) = \int \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_t^\varepsilon) \partial_t \varrho_t^\varepsilon = \int \nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_t^\varepsilon) \cdot v_t^\varepsilon d\varrho_t^\varepsilon = - \int \left| \nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_t^\varepsilon) \right|^2 d\varrho_t^\varepsilon, \quad (3.23)$$

where, in the last equality, we used the identity $\frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho) = W * \varrho + \varepsilon(\ln \varrho + 1)$ to deduce that v_t^ε is nothing else than $-\nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_t^\varepsilon)$. Proving rigorously (3.23) can be made using an easy adaptation of Lemma 3.7. Integrating (3.23) over time then yields :

$$\forall t \in [0, T], \quad F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) = F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) + \int_0^t \int \left| \nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_s^\varepsilon) \right|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds.$$

Let us only use this equality as an inequality as it will turn out sufficient for passing to the limit, and let us write $\left| \nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_s^\varepsilon) \right|^2$ as the half-sum $\frac{1}{2} \left(|v_s^\varepsilon|^2 + \left| \nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_s^\varepsilon) \right|^2 \right)$ so as to recover a link between the velocity v and the functional F at the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. This way, we recover the so-called energy dissipation equality (EDE, that we use as an inequality in our paper) :

$$\forall t \in [0, T], \quad F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) \geq F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int \left| \nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho_s^\varepsilon) \right|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds, \quad (3.24)$$

Showing a sort of lower semicontinuity, when $\varepsilon \rightarrow 0$, of each term in (3.24), we will prove that up to successive extractions, $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges towards a measure ϱ that satisfies a continuity equation and an EDE. Combining both, we will prove that ϱ solves the aggregation problem (3.11). In case the solution to such a Cauchy problem is unique, the whole sequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges towards ϱ . This method does not require the λ -convexity but only the Lipschitz continuity of the potential W .

Théorème 3.5. *Assume W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2). Let $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, and let $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ be a sequence of weak solutions to (3.10).*

Assume that the sequence of initial data $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfies the following assumptions :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) \leq F(\varrho^{ini}), \quad (3.25a)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad M_2(\varrho_0^\varepsilon) \leq C, \quad (3.25b)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_2(\varrho_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) = 0, \quad (3.25c)$$

for some constant $C > 0$ independent of ε . Then, for all $T > 0$, $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges up to a subsequence, in W_1 distance and uniformly on $[0, T]$, towards a solution $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ to (3.11) with the velocity field $a[\varrho]$ being replaced by $\hat{a}[\varrho]$ as defined in (3.12) :

$$\sup_{t \in [0, T]} W_1(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

If the solution to (3.11) is unique, then the whole sequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges towards ϱ .

Remarque 3.6. Note that assumptions (3.25) are automatically satisfied if the entropy $\mathcal{U}(\varrho_0^\varepsilon)$ is uniformly bounded w.r.t $\varepsilon > 0$. In case we take $\varrho_0^\varepsilon = \varrho^{ini}$, this corresponds to ϱ^{ini} having finite entropy.

The following lemma shows that it is possible to construct such a sequence of initial data :

Lemme 3.8. *Recall that ϱ^{ini} is given in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. For all $p \geq 1$ such that $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ and for all $\alpha \in (-1, 0)$, there exists a sequence $(\mu_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ in $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ satisfying :*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\mu_0^\varepsilon) \leq F(\varrho^{ini}), \quad (3.26a)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad M_p(\mu_0^\varepsilon) \leq C e^{-C\varepsilon^\alpha}, \quad (3.26b)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_p(\mu_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) = 0 \quad (3.26c)$$

where the constant $C > 0$ depends on p but not on ε . Actually, we can be more specific in (3.26c) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad W_p(\mu_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) \leq C e^{-\varepsilon^\alpha}.$$

Démonstration. Let $\alpha \in (-1, 0)$ and let $p \geq 1$ such that $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Let $(r_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ be a sequence of positive real numbers to be specified later in the proof. Let $\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$ be a nonnegative function supported on $B(0, 1)$, with unit total mass, such that $\eta \ln \eta$ and $|x|^p \eta(x)$ are integrable on \mathbb{R}^d . We then set $\eta^\varepsilon(x) = r_\varepsilon^{-d} \eta\left(\frac{x}{r_\varepsilon}\right)$ and $\mu_0^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \varrho^{ini}$. Because of the compact support of η we have $M_p(\eta^\varepsilon * \varrho^{ini}) \leq C(M_p(\varrho^{ini}) + M_p(\eta^\varepsilon)) \leq C$, so that, in particular, $\mu_0^\varepsilon \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ for all $\varepsilon > 0$.

Firstly, let us choose r_ε so that $\varepsilon \mathcal{U}(\eta^\varepsilon)$ goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$. Since $\eta^\varepsilon \ll \text{Leb}$, we have $\mathcal{U}(\eta^\varepsilon) = \int \eta^\varepsilon \ln \eta^\varepsilon$. Therefore, using the change of variables $x = r_\varepsilon y$, one has :

$$\mathcal{U}(\eta^\varepsilon) = r_\varepsilon^{-d} \int \eta\left(\frac{x}{r_\varepsilon}\right) \ln \left(r_\varepsilon^{-d} \eta\left(\frac{x}{r_\varepsilon}\right)\right) dx = \int \eta(y) \ln \left(r_\varepsilon^{-d} \eta(y)\right) dy = \int \eta(y) \ln \eta(y) dy - d \ln r_\varepsilon. \quad (3.27)$$

Based on the above computation, we choose $r_\varepsilon = e^{-h_\varepsilon/\varepsilon}$ for some positive sequence $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ such that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon = 0$. More precisely, we set $h_\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+1}$, that is $r_\varepsilon = e^{-\varepsilon^\alpha}$.

Now, using the convexity and the invariance under translation of \mathcal{U} , we have $\mathcal{U}(\eta^\varepsilon * \varrho^{ini}) \leq \mathcal{U}(\eta^\varepsilon)$, and therefore $F^\varepsilon(\mu_0^\varepsilon) \leq \mathcal{W}(\mu_0^\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}(\eta^\varepsilon)$. Since \mathcal{W} is continuous on $\mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d)$ thanks to Lemma 3.1, we just need the convergence $\mu_0^\varepsilon \rightarrow \varrho^{ini}$ in $\mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d)$ in order to have $\mathcal{W}(\mu_0^\varepsilon) \rightarrow \mathcal{W}(\varrho^{ini})$ and hence $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{W}(\mu_0^\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}(\eta^\varepsilon) = \mathcal{W}(\varrho^{ini}) = F(\varrho^{ini})$. Then, (3.26a) will immediately follow.

We now use

$$W_p^p(\mu_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) = W_p^p(\eta^\varepsilon * \varrho^{ini}, \delta_0 * \varrho^{ini}) \leq W_p^p(\eta^\varepsilon, \delta_0) = M_p(\eta^\varepsilon) \rightarrow 0,$$

where the last limit is justified by $M_p(\eta^\varepsilon) = r_\varepsilon^p M_p(\eta) = C e^{-p\varepsilon^\alpha}$. This proves (3.26b) and (3.26c) since $\alpha < 0$, and this in turn proves (3.26a). \square

Relaxing assumption 3.25a can only be done under additional assumptions on the potential. In the case W satisfies assumption (A3), replacing the original initial data ϱ_0^ε by a smoothed out initial data μ_0^ε that verifies assumptions (3.25) and using the λ -convexity of the potential to estimate the distance between ϱ^ε and the new sequence of viscous solutions μ^ε , we obtain as a byproduct of Theorem 3.5 the following corollary :

Corollaire 3.1. *Assume W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3). Let $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, and let $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ be the sequence of weak solutions to (3.10). Assume that the sequence of initial data $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges in $\mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d)$ to ϱ^{ini} as $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Then, for all $T > 0$, the whole sequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges in W_1 distance, uniformly on $[0, T]$, towards the unique solution $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ of (3.11) with the velocity field $a[\varrho]$ being replaced by $\hat{a}[\varrho]$ as defined in (3.12).

Proof of Theorem 3.5. First of all, let us extract from $(\varrho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ a converging subsequence. For $\varepsilon > 0$, recall that the continuity equation $\partial_t \varrho^\varepsilon + \nabla \cdot \varrho^\varepsilon v^\varepsilon = 0$ is satisfied. Moreover, let us rewrite equation (3.24) using the identity $\nabla \frac{\delta F^\varepsilon}{\delta \varrho}(\varrho) = \nabla W * \varrho + \varepsilon \frac{\nabla \varrho}{\varrho}$ and split it into three terms :

$$\forall t \in [0, T], \quad F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon) \geq F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int \left| \nabla W * \varrho_s^\varepsilon + \varepsilon \frac{\nabla \varrho_s^\varepsilon}{\varrho_s^\varepsilon} \right|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds =: T_1^\varepsilon + T_2^\varepsilon + T_3^\varepsilon. \quad (3.28)$$

Note that, if $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$ is uniformly bounded, then T_1^ε is uniformly bounded from below thanks to the estimate in Lemma 3.2. In that case, using the fact that T_3^ε is nonnegative and the fact that $F^\varepsilon(\varrho_0^\varepsilon)$ is bounded from above thanks to assumption (3.25a) on the initial data, we can deduce that $\int_0^T \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds \leq C$ for some constant $C > 0$ independent of ε and t . In particular, for all $t \in [0, T]$, $v_t^\varepsilon \in L^2(\varrho_t^\varepsilon)$ and $\int_0^T \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds < +\infty$. Using Theorem 3.2, we obtain that $\varrho^\varepsilon \in AC([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ and that its metric derivative exists and is bounded by the L^2 norm of v_s^ε : $|(\varrho^\varepsilon)'_s| \leq \|v_s^\varepsilon\|_{L^2(\varrho_s^\varepsilon)}$ for all $s \in [0, T]$. We deduce the following bound, that is uniform with respect to ε , by integration over time :

$$\int_0^T |(\varrho^\varepsilon)'_s|^2 ds \leq C.$$

Then, using a Cauchy-Schwarz inequality, we get :

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad W_2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_s^\varepsilon) \leq \int_s^t |(\varrho^\varepsilon)'_\tau| d\tau \leq \left(\int_s^t |(\varrho^\varepsilon)'_\tau|^2 d\tau \right)^{1/2} \sqrt{t-s} \leq \sqrt{C(t-s)}, \quad (3.29)$$

which gives equicontinuity of $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ in W_2 distance (and therefore in W_1 distance). If we still assume that $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$ is uniformly bounded, then the set $\{\varrho_t^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ is relatively compact in $\mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d)$ in virtue of Lemma 3.4. We can therefore apply Ascoli-Arzelà theorem in the space $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$ to extract from $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ a subsequence converging in $\mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d)$, uniformly in $t \in [0, T]$, towards some $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$. We still denote this subsequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Moreover, the l.s.c of the W_2 distance along with the weak convergence $\varrho_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} \varrho_t$ for all $t \in [0, T]$ allows to pass to the \liminf in (3.29) to show that $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$. The limit ϱ is actually 1/2-Hölder in time and satisfies the same estimate as ϱ^ε :

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad W_2(\varrho_t, \varrho_s) \leq \sqrt{C(t-s)}.$$

Let us come back to the boundedness of $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$. This bound can actually be obtained from inequality (3.28). Indeed, from (3.28) and assumption (3.25a), we get, since $T_3^\varepsilon \geq 0$:

$$F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds \leq C. \quad (3.30)$$

Let us show that the second term controls $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$ if $t \in [0, T]$. Differentiating $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$ in time and integrating by parts, we have :

$$\frac{d}{dt} M_2(\varrho_t^\varepsilon) = 2 \int x \cdot v_t^\varepsilon(x) \varrho_t^\varepsilon(dx) \leq 2M_2(\varrho_t^\varepsilon)^{1/2} \left(\int |v_t^\varepsilon|^2 d\varrho_t^\varepsilon \right)^{1/2},$$

using Cauchy-Schwarz inequality. Applying a Grönwall Lemma, this implies, for all $t \in [0, T]$,

$$M_2(\varrho_t^\varepsilon)^{1/2} \leq M_2(\varrho_0^\varepsilon)^{1/2} + \int_0^t \left(\int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon \right)^{1/2} ds \leq M_2(\varrho_0^\varepsilon)^{1/2} + \sqrt{T} \left(\int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds \right)^{1/2},$$

where we used Jensen's inequality w.r.t the measure $\frac{ds}{t}$. Finally, we get :

$$\int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon \geq \frac{1}{T} (M_2(\varrho_t^\varepsilon) - M_2(\varrho_0^\varepsilon)).$$

Plugging this inequality into (3.30) and using the estimate in Lemma 3.2 one obtains :

$$-a_\infty M_2(\varrho_t^\varepsilon)^{1/2} - \varepsilon (M_2(\varrho_t^\varepsilon)^{1/4} + C) + \frac{1}{2T} (M_2(\varrho_t^\varepsilon) - M_2(\varrho_0^\varepsilon)) \leq C,$$

which provides a uniform bound on $M_2(\varrho_t^\varepsilon)$.

The point is now, for every $t \in [0, T]$, to show l.s.c of each term T_i^ε , $i = 1, 2, 3$, with respect to the W_1 convergence of $(\varrho_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ towards ϱ_t that we just proved.

* **Dealing with $T_1^\varepsilon = F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon)$.**

Using Lemma 3.1, the W_1 -convergence of $(\varrho_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ towards ϱ_t ensures that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{W}(\varrho_t^\varepsilon) = \mathcal{W}(\varrho_t)$. Besides, thanks to Lemma 3.2, we have for the entropy $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}(\varrho_t^\varepsilon) \geq \mathcal{U}(\varrho_t)$, and we deduce in turn $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \mathcal{U}(\varrho_t^\varepsilon) \geq 0$. Therefore :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\varrho_t^\varepsilon) \geq F(\varrho_t).$$

* **Dealing with $T_2^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds$.**

For $\varepsilon > 0$, letting $E^\varepsilon = \varrho^\varepsilon v^\varepsilon$, a Cauchy-Schwarz inequality shows that the total variation of E^ε is uniformly bounded with respect to $\varepsilon > 0$:

$$|E^\varepsilon|([0, t] \times \mathbb{R}^d) = \int_0^t \int |v_s^\varepsilon| d\varrho_s^\varepsilon ds \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t \int |v_s^\varepsilon|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{CT},$$

Thus, up to another extraction, we can assume that $E^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} E$ for some $E \in \mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)^d$. Now, since ϱ^ε and E^ε are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $[0, t] \times \mathbb{R}^d$ as long as $\varepsilon > 0$, Lemma 3.5 ensures that T_2^ε rewrites as follows :

$$T_2^\varepsilon = \int_0^t \int f_2(\varrho_s^\varepsilon, E_s^\varepsilon) dx ds = \mathcal{B}_2(\varrho^\varepsilon, E^\varepsilon).$$

Then the lower semicontinuity of \mathcal{B}_2 on $\mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)^d$ yields :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2^\varepsilon \geq \mathcal{B}_2(\varrho, E),$$

which, in turn, implies that $\mathcal{B}_2(\varrho, E)$ is finite and therefore gives the existence of a vector-valued density v verifying $E = \varrho v$. Using Lemma 3.5 (iv), the above inequality rewrites :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2^\varepsilon \geq \frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s|^2 d\varrho_s ds.$$

In addition, this transformation also allows to pass to the limit in the continuity equation $\partial_t \varrho^\varepsilon + \nabla \cdot E^\varepsilon = 0$, which is now linear. Indeed, letting $\varepsilon \rightarrow 0$ in the weak formulation, one easily gets $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0$. This shows that the limit density ϱ is still a solution to a continuity equation, and the link between the velocity field v and the functional F will be made thorough when passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in the EDE (3.24).

* **Dealing with $T_3^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^t \int \left| \nabla W * \varrho_s^\varepsilon + \varepsilon \frac{\nabla \varrho_s^\varepsilon}{\varrho_s^\varepsilon} \right|^2 d\varrho_s^\varepsilon ds$.**

As it is standard when dealing with terms belonging to $L^2(\varrho_s^\varepsilon)$, we set $G^\varepsilon = (\nabla W * \varrho^\varepsilon) \varrho^\varepsilon + \varepsilon \frac{\nabla \varrho^\varepsilon}{\varrho^\varepsilon} \varrho^\varepsilon$, so that $T_3^\varepsilon = \mathcal{B}_2(\varrho^\varepsilon, G^\varepsilon)$.

We deduce from (3.28) that T_3^ε is uniformly bounded w.r.t ε , which implies that G^ε is uniformly bounded in $\mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)^d$. Therefore, up to another extraction, we can assume that $G^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} G$ for some $G \in \mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)^d$. Since W is Lipschitz, we have $\int_0^t \int |\nabla W * \varrho_s^\varepsilon| d\varrho_s^\varepsilon ds \leq a_\infty t$ thus $(\nabla W * \varrho^\varepsilon) \varrho^\varepsilon$ is uniformly bounded too in $\mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)^d$.

As a consequence, the difference $\varepsilon \frac{\nabla \varrho^\varepsilon}{\varrho^\varepsilon} \varrho^\varepsilon$ is also uniformly bounded in $\mathcal{M}_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)^d$. Now, its limit when $\varepsilon \rightarrow 0$ is 0 in the sense of distributions. Indeed, for $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\langle \varepsilon \nabla \varrho^\varepsilon, \xi \rangle = -\varepsilon \int_0^t \int \nabla \xi d\varrho^\varepsilon$ which can be bounded, for instance, by $\varepsilon t \|\nabla \xi\|_{L^\infty}$ and therefore goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$. We deduce that $\varepsilon \frac{\nabla \varrho^\varepsilon}{\varrho^\varepsilon} \varrho^\varepsilon$ actually converges in the sense of measures towards 0, hence the limit, in the sense of measures, of G^ε is that of $(\nabla W * \varrho^\varepsilon) \varrho^\varepsilon$.

† **Limit in the sense of measures of $(\nabla W * \varrho^\varepsilon) \varrho^\varepsilon$.**

Let $\xi \in C_0([0, t] \times \mathbb{R}^d)$ and let us consider the duality bracket $\langle (\nabla W * \varrho^\varepsilon) \varrho^\varepsilon, \xi \rangle$ as ε goes to 0. That quantity equals, using Lemma 3.6 applied to the even vector field ∇W :

$$\int_0^t \iint \nabla W(x-y) \cdot \xi(s, x) \varrho_s^\varepsilon(dx) \varrho_s^\varepsilon(dy) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \iint \nabla W(x-y) \cdot (\xi(s, x) - \xi(s, y)) \varrho_s^\varepsilon(dx) \varrho_s^\varepsilon(dy) ds. \quad (3.31)$$

Now, since W is Lipschitz, ∇W is bounded, therefore the map

$$(s, x, y) \longmapsto \nabla W(x-y) \cdot (\xi(s, x) - \xi(s, y))$$

is continuous and the weak convergence $\varrho^\varepsilon \otimes \varrho^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} \varrho \otimes \varrho$ (which is equivalent to narrow convergence since we deal with probability measures) allows to pass to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in the above quantity to obtain :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \iint \nabla W(x-y) \cdot \xi(s, x) \varrho_s^\varepsilon(dx) \varrho_s^\varepsilon(dy) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \iint \nabla W(x-y) \cdot (\xi(s, x) - \xi(s, y)) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds. \quad (3.32)$$

Note that, until now, the value of $\nabla W(0)$ does not matter. Actually, all the integrals when $\varepsilon > 0$ hold w.r.t to the Lebesgue measure and therefore the diagonal $\{x = y\}$ can be avoided. We therefore only need $\nabla W(z) = -\nabla W(-z)$ for nonzero z to apply Lemma 3.6, and this do not impose any value to $\nabla W(0)$.

Now, to come back to some duality bracket tested against ξ , one needs to unsymmetrize the resulting expression by writing :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \iint \nabla W(x-y) \cdot (\xi(s, x) - \xi(s, y)) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot \xi(s, x) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds - \int_0^t \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot \xi(s, y) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot \xi(s, x) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds + \int_0^t \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot \xi(s, x) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds \right) \\ &= \int_0^t \iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot \xi(s, x) \varrho_s(dx) \varrho_s(dy) ds, \end{aligned} \quad (3.33)$$

where we used the fact that $\widehat{\nabla W}(z) = -\widehat{\nabla W}(-z)$ for all $z \in \mathbb{R}^d$, which now imposes $\widehat{\nabla W}(0) = 0$.

Remarque 3.7. These computations could hold against a test function ξ that is only Lipschitz on $[0, t] \times \mathbb{R}^d$ provided $\nabla W(z) \leq C/|z|^{1-\beta}$ for some $\beta > 0$. Indeed, the map $(s, x, y) \longmapsto \nabla W(x-y) \cdot (\xi(s, x) - \xi(s, y))$ would be continuous on the diagonal and hence everywhere on $[0, t] \times (\mathbb{R}^d)^2$. This could provide a way to deal with the non Lipschitz potentials $W(x) = |x|^\beta$

for $0 < \beta < 1$, that are more singular than the Lipschitz potentials but are still less singular than the logarithmic potential. However, extra difficulties arise for the limit analysis when W is not Lipschitz.

We finally get that $G = (\widehat{\nabla W} * \varrho)\varrho$ and therefore $\mathcal{B}_2(\varrho, G) = \frac{1}{2} \int_0^t \int |\widehat{\nabla W} * \varrho_s|^2 d\varrho_s ds$. Using the l.s.c of \mathcal{B}_2 we finally get :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} T_3^\varepsilon \geq \int_0^t \int |\widehat{\nabla W} * \varrho_s|^2 d\varrho_s ds.$$

* **Passing to the $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ to recover a limit EDE.**

We can now pass to the $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ in (3.24) using the assumption (3.25a) for the left-hand side to get the following EDE (which, once again is written as an inequality) :

$$F(\varrho^{ini}) \geq F(\varrho_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s|^2 d\varrho_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int |\widehat{\nabla W} * \varrho_s|^2 d\varrho_s ds. \quad (3.34)$$

Recall that ϱ still solves the continuity equation $\partial_t \varrho + \nabla \cdot \varrho v = 0$ in the sense of distributions. Identifying the velocity v is made through Lemma 3.7 which gives :

$$\forall t \in [0, T], \quad F(\varrho_t) - F(\varrho_0) = \int_0^t \int (\widehat{\nabla W} * \varrho_s) \cdot v_s d\varrho_s.$$

Since $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converges to both ϱ_0 and ϱ^{ini} in $\mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d)$, we have $\varrho_0 = \varrho^{ini}$. Plugging the above identity into (3.34) then yields :

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int |v_s + \widehat{\nabla W} * \varrho_s|^2 d\varrho_s ds \leq 0,$$

so that $v = -\widehat{\nabla W} * \varrho = \hat{a}[\varrho]$ almost everywhere. We deduce that ϱ solves the aggregation equation (3.11) in the sense of distributions with the correct velocity field $\hat{a}[\varrho]$, which concludes the proof. Incidentally, the identity $v = -\widehat{\nabla W} * \varrho$ confirms that the limit EDE (3.34) is actually an equality. \square

Proof of Corollary 3.1. We now come back to the case of arbitrary initial data ϱ_0^ε i.e. we do not assume anymore that assumptions (3.25) hold. However, we still assume that $W_2(\varrho_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ and in addition, we now assume W to be λ -convex.

Let $(\mu_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ be a sequence of smoothed out initial data for which $W_2(\mu_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ and the assumptions (3.25) hold on $(\mu_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. We denote by μ^ε a solution to (3.10) for the modified initial data μ_0^ε . Applying Theorem 3.5, we know that μ^ε converges in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$ towards ϱ solution to (3.11) as $\varepsilon \rightarrow 0$, up to a subsequence. But since W satisfies the assumptions of Theorem 3.3, such a solution is unique and we deduce that the whole sequence $(\mu^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converges towards ϱ .

It remains to show that $W_2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon)$ goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$ by estimating this quantity thanks to the λ -convexity of W :

Lemme 3.9. *Assume W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3). Let $\varrho, \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ and denote (φ, ψ) a pair of Kantorovitch potentials from ϱ to μ for the quadratic cost $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$. In addition, we assume that ϱ or μ is an absolutely continuous measure. Then,*

$$\int \nabla \varphi \cdot a[\varrho] d\varrho + \int \nabla \psi \cdot a[\mu] d\mu \leq -\lambda W_2^2(\varrho, \mu). \quad (3.35)$$

Remarque 3.8.

- (1) In particular, we recover the last estimate in Theorem 3.3 : if $\varrho, \mu \in AC_{loc}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ are solution to (3.11) with initial data $\varrho^{ini}, \mu^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ and if ϱ_t or μ_t is an absolutely continuous measure, the following inequality holds :

$$\frac{d}{dt} W_2^2(\varrho_t, \mu_t) \leq -2\lambda W_2^2(\varrho_t, \mu_t). \quad (3.36)$$

Indeed, this is a direct consequence of Lemma 3.9 and of the following computation (see [112] Theorem 5.25 or [1] Theorem 8.4.7)

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho_t, \mu_t) = \int \nabla \varphi_t \cdot v_t d\varrho_t + \int \nabla \psi_t \cdot w_t d\mu_t, \quad (3.37)$$

whenever ϱ, μ satisfy the continuity equations $\partial_t \varrho + \nabla \cdot \varrho v = 0$, $\partial_t \mu + \nabla \cdot \mu w = 0$. Inequality (3.36) then yields the aforementioned estimate using a Grönwall Lemma :

$$W_2(\varrho_t, \mu_t) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho^{ini}, \mu^{ini}). \quad (3.38)$$

Relaxing the assumptions that either ϱ_t or μ_t is an absolutely continuous measure can be done replacing ϱ_t by ϱ_t^ε for instance, and passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in the resulting estimate, thanks to Corollary 3.1.

- (2) Another way of proving Lemma 3.9 can be found in [110], Lemma 4.12.

Démonstration. Assume ϱ is an absolutely continuous measure. Then, there exists an optimal map from ϱ to μ for the cost $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$, which we denote T . Since $\nabla \psi \circ T = -\nabla \varphi$, using $\mu = T\#\varrho$ yields :

$$\begin{aligned} \int \nabla \varphi \cdot a[\varrho] d\varrho + \int \nabla \psi \cdot a[\mu] d\mu &= \int \nabla \varphi \cdot (a[\varrho] - a[\mu] \circ T) d\varrho \\ &= - \iint \nabla \varphi(x) \cdot \nabla W(x - y) \varrho(dy) \varrho(dx) + \iint \nabla \varphi(x) \cdot \nabla W(T(x) - y) \mu(dy) \varrho(dx) \\ &= - \iint \nabla \varphi(x) \cdot (\nabla W(x - y) - \nabla W(T(x) - T(y))) \varrho(dy) \varrho(dx), \end{aligned}$$

where we used once more $\mu = T\#\varrho$. Symmetrizing the above integral as in Lemma 3.6, since ∇W is odd, and using $\nabla \varphi = \text{id} - T$, we get :

$$\begin{aligned} \int \nabla \varphi \cdot a[\varrho] d\varrho + \int \nabla \psi \cdot a[\mu] d\mu &= -\frac{1}{2} \iint (\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)) \cdot (\nabla W(x - y) - \nabla W(T(x) - T(y))) \varrho(dy) \varrho(dx) \\ &= -\frac{1}{2} \iint (x - y - (T(x) - T(y))) \cdot (\nabla W(x - y) - \nabla W(T(x) - T(y))) \varrho(dy) \varrho(dx) \\ &\leq -\frac{\lambda}{2} \iint |x - T(x) - (y - T(y))|^2 \varrho(dy) \varrho(dx), \end{aligned}$$

where we used the λ -convexity of W . We then expand the square to obtain :

$$\iint |x - T(x) - (y - T(y))|^2 \varrho(dy) \varrho(dx) = 2 \int |x - T(x)|^2 \varrho(dx) - 2 \left(\iint (x - T(x)) \varrho(dx) \right)^2 \leq 2W_2^2(\varrho, \mu),$$

which concludes the proof, as we assumed in (A3) that $\lambda \leq 0$. \square

We now come back to the proof of Corollary 3.1. Denoting $(\varphi_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)$ a pair of Kantorovitch potentials from ϱ_t^ε to μ_t^ε , and using Lemma 3.9 along with equation (3.37), we get :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon) \leq -\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon) - \varepsilon \int (\nabla \varphi_t^\varepsilon \cdot \nabla \varrho_t^\varepsilon + \nabla \psi_t^\varepsilon \cdot \nabla \mu_t^\varepsilon).$$

The last term above being nonpositive (see [112] exercise 66 for instance), we obtain, using a Grönwall lemma, that $W_2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho_0^\varepsilon, \mu_0^\varepsilon)$. We then write, for $t \in [0, T]$,

$$W_1(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq W_1(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon) + W_1(\mu_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq e^{-\lambda T} W_2(\varrho_0^\varepsilon, \mu_0^\varepsilon) + \sup_{s \in [0, T]} W_1(\mu_s^\varepsilon, \varrho_s),$$

where we used the fact that $W_1 \leq W_2$. Since both sequences $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ and $(\mu_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge in $\mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d)$ to the same limit, $W_2(\varrho_0^\varepsilon, \mu_0^\varepsilon)$ goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$. Moreover, $(\mu^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converges to ϱ in W_1 distance uniformly in $[0, T]$. These two facts along with the above inequality show that $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ also converges to ϱ in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$. \square

Step 2 : Convergence rate

We are now in position to prove the following theorem :

Théorème 3.6. *Assume W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3). Let $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, and let $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ be the sequence of weak solutions to (3.10). Here, we assume that $(\varrho_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ is an arbitrary sequence in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.*

Denoting $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ the unique solution of (3.11) with $a[\varrho]$ being replaced by $\hat{a}[\varrho]$ as defined in (3.12), we have the following estimate :

$$\forall t > 0, \quad W_2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq e^{-\lambda t} W_2(\varrho_0^\varepsilon, \varrho^{ini}) + \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{\lambda}} \sqrt{d\varepsilon}. \quad (3.39)$$

Please note that in the above estimate $\lambda \leq 0$. If $\lambda < 0$, $1 - e^{-2\lambda t}$ and λ are negative numbers so the ratio is positive and for $\lambda = 0$ the expression should be extended by continuity.

Remarque 3.9. In dimension $d = 1$ with the Newtonian potential $W(x) = |x|$, the correspondence with Burgers' equation stated in Proposition 3.4, gives convergence at rate $\sqrt{\varepsilon t}$ in W_1 distance. Due to W being 0-convex, our estimate leads to the same estimate but in W_2 distance, since taking $\lambda = 0$ in (3.39) gives $W_2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq \sqrt{2d\varepsilon t}$ for any $t > 0$.

If assumption (A4-p) is satisfied for some $p \geq 1$ instead of assumption (A3) and if $\varrho_0^\varepsilon = \delta_0$ for all $\varepsilon > 0$, one can also obtain the exact same estimate using a direct computation. Indeed, in that case, $\varrho_t = \delta_0$ for all $t \geq 0$ and we have, using integration by parts and Lemma 3.6 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \delta_0) &= \frac{d}{dt} \int |x|^2 \varrho_t^\varepsilon(dx) = - \iint \nabla W(x-y) \cdot (x-y) \varrho_t^\varepsilon(dx) \varrho_t^\varepsilon(dy) + 2\varepsilon \int \varrho_t^\varepsilon(dx) \\ &\leq -C \iint |x-y|^p \varrho_t^\varepsilon(dx) \varrho_t^\varepsilon(dy) + 2\varepsilon d, \quad \text{using assumption (A4-p),} \\ &\leq 2\varepsilon d. \end{aligned}$$

Hence $W_2(\varrho_t^\varepsilon, \delta_0) \leq \sqrt{2d\varepsilon t}$ for all $t \geq 0$.

Démonstration. Take a sequence of initial data $(\mu_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converging in $\mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d)$ to ϱ^{ini} as $\varepsilon \rightarrow 0$ and denote $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ the sequence of solutions to (3.10) with such initial data. Let $\varepsilon > 0$. For all $\delta > 0$, using Lemma 3.9 along with equation (3.37), we have, denoting (φ_t, ψ_t) a pair of Kantorovitch potentials for the quadratic cost from ϱ_t^ε to ϱ_t^δ and integrating by parts :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\delta) \leq -\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\delta) - \varepsilon \int \nabla \varphi_t \cdot \nabla \varrho_t^\varepsilon - \delta \int \nabla \psi_t \cdot \nabla \mu_t^\delta \leq -\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\delta) + \varepsilon \int \Delta \varphi_t \varrho_t^\varepsilon + \delta \int \Delta \psi_t \mu_t^\delta.$$

The map $x \mapsto \varphi_t(x) - \frac{|x|^2}{2}$ being concave, $\nabla^2 \varphi_t \leq I_d$, hence $\Delta \varphi_t \leq d$ and the same holds for ψ_t . Therefore :

$$\frac{d}{dt} W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\delta) \leq -2\lambda W_2^2(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\delta) + 2(\varepsilon + \delta)d,$$

which gives the result after using a Grönwall lemma and passing to the limit $\delta \rightarrow 0$ thanks to Corollary 3.1. \square

Method 2 : using a numerical scheme

We now turn to a different proof of the previous result. This alternate proof will also allow to illustrate the results and the behavior of solutions with numerical results. Our main idea is to let, for a fixed $\varepsilon > 0$, $\varrho_{\Delta x}^\varepsilon$ be a suitable numerical approximation of the viscous solution ϱ^ε to the problem (3.10) with fixed initial data $\varrho_0^\varepsilon = \varrho^{ini}$, and then use the formalism of [43] to estimate the distance from this discretized solution to the solution ϱ to the aggregation problem (3.11) in terms of ε :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_2(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}, \varrho_{t^n}) \leq C(t^n) \sqrt{\Delta x + \varepsilon},$$

under suitable stability conditions for the numerical scheme, and where $\Delta t > 0$ is the time step, $t^n = n\Delta t$ and $\Delta x > 0$ denotes the maximal space step. Proving the convergence of the scheme with fixed ε beforehand using compactness arguments and a Lax-Wendroff-type theorem, then letting $\Delta x \rightarrow 0$, we shall deduce :

$$\forall t > 0, \quad W_2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq C(t) \sqrt{\varepsilon},$$

where we shall specify the constant $C(t)$. Note that our method also allows to deal with the case of arbitrary $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ initial data ϱ_0^ε as in Theorem 3.6, but we choose to present it with initial data not depending on ε for the sake of clarity.

Let us be more specific. We consider a Cartesian mesh of \mathbb{R}^d where the space step in the i th direction is denoted by $\Delta x_i > 0$. The nodes of the mesh are denoted by $x_J = (J_1 \Delta x_1, \dots, J_d \Delta x_d)$ for any $J = (J_1, \dots, J_d) \in \mathbb{Z}^d$, and the cell centered on x_J is denoted by $C_J := [(J_1 - \frac{1}{2})\Delta x_1, (J_1 + \frac{1}{2})\Delta x_1] \times \dots \times [(J_d - \frac{1}{2})\Delta x_d, (J_d + \frac{1}{2})\Delta x_d]$. We also denote by e_i the i th vector of the canonical basis of \mathbb{R}^d . We initialize our discretization with :

$$\varrho_J^0 := \int_{C_J} \varrho^{ini}(dx) \geq 0, \quad J \in \mathbb{Z}^d, \quad (3.40)$$

and we consider an upwind type discretization for the aggregative part [42, 90, 43] and an explicit discretization for the diffusive part. It writes, for $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varrho_J^{n+1} &= \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left((a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n - (a_{iJ-e_i}^n)^+ \varrho_{J-e_i}^n + (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n \right) \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} (\varrho_{J+e_i}^n - 2\varrho_J^n + \varrho_{J-e_i}^n), \end{aligned} \quad (3.41)$$

where the macroscopic velocity is defined by :

$$a_{iJ}^n := - \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} \varrho_K^n D_i W_J^K, \quad \text{where} \quad D_i W_J^K := \widehat{\partial_{x_i} W}(x_J - x_K). \quad (3.42)$$

Note that, for the sake of simplicity, we drop, in this section, the superscripts ε when it comes to the discrete unknowns $(\varrho_J^n)_{J \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{N}}$ but these unknowns always solve numerical schemes for the aggregation equation with viscosity $\varepsilon > 0$.

Since W is even, we also have $D_i W_J^K = -D_i W_K^J$ for all $J, K \in \mathbb{Z}^d$ and $i = 1, \dots, d$. Using a symmetrization argument as in the continuous setting, we deduce the discrete equivalent of Lemma 3.6 :

Lemme 3.10. *Denote, for $J, K \in \mathbb{Z}^d$, $DW_J^K = (D_1 W_J^K, \dots, D_d W_J^K)$ and whenever $(v_J)_{J \in \mathbb{Z}^d}$ is a discrete vector field on the mesh, $v_J = (v_{1J}, \dots, v_{dJ}) \in \mathbb{R}^d$. For any $(v_J)_{J \in \mathbb{Z}^d}$, we have :*

$$\forall i = 1, \dots, d, \quad \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} v_{iJ} a_{iJ}^n \varrho_J^n = \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} D_i W_J^K (v_{iJ} - v_{iK}) \varrho_J^n \varrho_K^n,$$

and therefore :

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} v_J \cdot a_J^n \varrho_J^n = \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} DW_J^K \cdot (v_J - v_K) \varrho_J^n \varrho_K^n.$$

Démonstration. Using the definition of the macroscopic velocity and the fact that $D_i W_J^K = -D_i W_K^J$, we have :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} v_{iJ} a_{iJ}^n \varrho_J^n &= - \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} D_i W_J^K v_{iJ} \varrho_J^n \varrho_K^n = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} D_i W_K^J v_{iJ} \varrho_J^n \varrho_K^n \\ &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} D_i W_J^K v_{iK} \varrho_J^n \varrho_K^n, \end{aligned}$$

thanks to exchanging K and J in the latter sum. Taking the half sum of the first sum and the latter, we obtain :

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} v_{iJ} a_{iJ}^n \varrho_J^n = \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{K \in \mathbb{Z}^d} D_i W_J^K (v_{iJ} - v_{iK}) \varrho_J^n \varrho_K^n.$$

Summing over $i = 1, \dots, d$ concludes the proof. \square

It is also natural to consider, instead of the explicit discretization of the Laplacian, an implicit discretization :

$$\begin{aligned} \varrho_J^{n+1} &= \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left((a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n - (a_{iJ-e_i}^n)^+ \varrho_{J-e_i}^n + (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n \right) \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \left(\varrho_{J+e_i}^{n+1} - 2\varrho_J^{n+1} + \varrho_{J-e_i}^{n+1} \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

However, for the sake of simplicity, we only provide the proof of our convergence estimate for the explicit scheme (3.41), although our method would also works for the implicit discretization (3.43) but the computations are a bit more involved. Naturally, both schemes are asymptotic-preserving since they degenerate towards the upwind-type scheme of [43] when ε goes to 0.

One could also consider the θ -scheme, for $\theta \in [0, 1]$, defined by :

$$\begin{aligned} \varrho_J^{n+1} &= \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left((a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{iJ+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n - (a_{iJ-e_i}^n)^+ \varrho_{J-e_i}^n + (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n \right) \\ &+ \varepsilon(1-\theta) \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \left(\varrho_{J+e_i}^n - 2\varrho_J^n + \varrho_{J-e_i}^n \right) + \varepsilon\theta \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \left(\varrho_{J+e_i}^{n+1} - 2\varrho_J^{n+1} + \varrho_{J-e_i}^{n+1} \right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

The point of defining such as scheme comes from the fact that, for the heat equation $\partial_t \varrho = \varepsilon \Delta \varrho$, under a parabolic CFL condition $\varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ if $\theta \in [0, 1/2)$ and unconditionally if $\theta \in [1/2, 1]$, the θ -scheme is known to be convergent in L^2 norm at rate $O(\Delta t + \Delta x^2)$. Moreover, for $\theta = 1/2$, one obtains the so-called Crank-Nicolson scheme, which is convergent at rate $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. However, the convergence order of the θ -scheme (3.44) for the aggregation-diffusion equation (3.10a) will anyway be limited by the order of the upwind scheme. Also, the positivity of the density can only be guaranteed if the more restrictive parabolic CFL condition $a_\infty \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + 2\varepsilon(1-\theta) \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \leq 1$ holds. Preserving a hyperbolic CFL condition thus imposes taking $\theta = 1$, which corresponds to the implicit scheme (3.43).

Proposition 3.5. *Assume W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3) and let $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ be the unique measure solution to the aggregation equation (3.11) with initial data $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ as given by Theorem 3.3. Assume in addition that the following strict CFL condition holds :*

$$\sum_{i=1}^d \left(a_\infty \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + 2\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \right) < \frac{1}{2}. \quad (3.45)$$

Denote also the reconstruction :

$$\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n} := \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \varrho_J^n \delta_{x, J}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

where $(\varrho_J^n)_{J \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{N}}$ is defined through the explicit discretization (3.40)–(3.41)–(3.42). Then, there exists a constant $C > 0$, depending only on λ , a_∞ and d , such that, for all $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_2(\varrho_{t^n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}) \leq C \sqrt{\frac{1 - e^{-4\lambda t^n}}{\lambda}} \sqrt{\Delta x + \varepsilon} + e^{-2\lambda t^n} \Delta x. \quad (3.46)$$

Remarque 3.10. In estimate (3.46), the $\sqrt{\Delta x + \varepsilon}$ term corresponds to the error induced by the scheme (3.41) and the Δx term corresponds to the finite volume discretization of the initial data (3.40). As in [43], one can also improve the prefactor in the exponentials to get the slightly better estimate :

$$W_2(\varrho_{t^n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}) \leq C \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda t^n}}{\lambda}} \sqrt{\Delta x + \varepsilon} + e^{-\lambda t^n} \Delta x.$$

which is similar to the estimates of the continuous setting, for instance (3.21), when Δt is small.

In the above proposition as in the whole paper, we do as if our discrete reconstructions $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$ depended only on Δx . Rigorously speaking, they also depend on Δt , but under the CFL condition (3.45) Δt goes to 0 as Δx goes to 0. Setting Δt to be an adequate function of Δx , we can therefore consider $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$ as sequence labeled by Δx only.

Théorème 3.7. Assume W satisfies assumptions (A0)–(A1)–(A2)–(A3). Let $\varrho \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ be the unique measure solution to the aggregation equation (3.11) with initial data $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ as given by Theorem 3.3 and let $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ be the sequence of weak solutions to (3.10) with initial data $\varrho_0^\varepsilon = \varrho^{ini}$.

Then, there exists a constant $C > 0$, depending only on λ , a_∞ and d , such that, for all $t > 0$ the following estimate holds :

$$W_2(\varrho_t^\varepsilon, \varrho_t) \leq C \sqrt{\frac{1 - e^{-4\lambda t}}{\lambda}} \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.47)$$

Remarque 3.11. The estimate above is slightly worse than the estimate (3.39) that we obtain using gradient flow arguments. Although, as in the previous remark, the exponential factor can be improved to $e^{-2\lambda t}$ a bit more technical computations, we do not manage to obtain the same constant $C = \sqrt{d}$.

Properties of the scheme

Lemme 3.11. As in the continuous setting, our discretization (3.41) preserves

(1) total mass :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \varrho_J^n = 1; \quad (3.48)$$

(2) positivity of the density and the bound on the velocity field :

$$\forall (n, J) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, \forall i = 1, \dots, d, \quad \varrho_J^n \geq 0, \quad |a_{i, J}^n| \leq a_\infty,$$

under the CFL condition :

$$\sum_{i=1}^d \left(a_\infty \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + 2\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \leq 1; \quad (3.49)$$

(3) the center of mass :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^n = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^0.$$

Démonstration. The first item comes from summing equation (3.41) over $J \in \mathbb{Z}^d$. Moreover, using the following rewriting of ϱ_J^{n+1} as a positive combination of ϱ_J and $\varrho_{J \pm e_i}$, $i = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned} \varrho_J^{n+1} &= \varrho_J^n \left[1 - \sum_{i=1}^d \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_i} |a_{iJ}^n| + \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \right] + \sum_{i=1}^d \varrho_{J+e_i}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_i} (a_{iJ+e_i}^n)^- + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \varrho_{J-e_i}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_i} (a_{iJ-e_i}^n)^+ + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

it is classical to prove the second item by induction on $n \in \mathbb{N}$, under the CFL condition (3.49).

Using the discretization (3.41) together with a discrete integration by parts, we have :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^{n+1} &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^n - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left((a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n (x_J - x_{J+e_i}) - (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n (x_{J-e_i} - x_J) \right) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (x_{J-e_i} - x_J) (\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n). \end{aligned}$$

By definition of x_J , we have $x_{J-e_i} - x_J = -\Delta x_i$. Hence, we deduce :

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^{n+1} = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^n + \Delta t \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} a_{iJ}^n \varrho_J^{n-\varepsilon} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \varrho_J^n + \Delta t \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} a_{iJ}^n \varrho_J^n.$$

Applying the symmetrization Lemma 3.10 to the constant vector field given by $v_J = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ for all $J \in \mathbb{Z}^d$, we have $\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} a_{iJ}^n \varrho_J^n = 0$ for all $i = 1, \dots, d$, hence the result. \square

The following lemma ensures that $M_2(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n})$ remains bounded over finite time. It turns out necessary for the proof of convergence of the scheme by compactness, in order to extract a converging subsequence.

Lemme 3.12 (Bound on the second moment). *For all $n \in \mathbb{N}^*$, the following estimate holds :*

$$M_{2, \Delta x}^n := \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^n \leq e^{-4\lambda t^n} \left(M_{2, \Delta x}^0 + a_\infty t^n \sum_{i=1}^d \Delta x_i + 2d\varepsilon t^n \right).$$

Démonstration. Using (3.41) and a discrete integration by parts, one can write :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^{n+1} &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^n \\ &\quad - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left[(a_{iJ}^n)^+ \varrho_J^n (|x_J|^2 - |x_{J+e_i}|^2) - (a_{iJ}^n)^- \varrho_J^n (|x_{J-e_i}|^2 - |x_J|^2) \right] \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (|x_{J-e_i}|^2 - |x_J|^2) (\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n). \end{aligned}$$

By definition of x_J , $|x_J|^2 - |x_{J+e_i}|^2 = -2J_i \Delta x_i^2 - \Delta x_i^2$ and $|x_{J-e_i}|^2 - |x_J|^2 = -2J_i \Delta x_i^2 + \Delta x_i^2$. Therefore, we get :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^{n+1} &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^n + 2\Delta t \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} J_i \Delta x_i a_{iJ}^n \varrho_J^n + \Delta t \sum_{i=1}^d \Delta x_i \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \varrho_J^n |a_{iJ}^n| \\ &\quad + \varepsilon \Delta t \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (-2J_i + 1) \Delta x_i (\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n). \end{aligned}$$

As a consequence of Lemma 3.11, we have $|a_{iJ}^n| \leq a_\infty$. Using, in addition, the mass conservation, we deduce that the penultimate term is bounded by $a_\infty \Delta t \sum_{i=1}^d \Delta x_i$. As for the last term, another integration by parts shows that the last term equals $2d\varepsilon \Delta t$. Finally, Lemma 3.10 applied to the discrete vector field given by $v_J = x_J$ yields :

$$\begin{aligned} 2\Delta t \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} J_i \Delta x_i a_{iJ}^n \varrho_J^n &= 2\Delta t \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} x_J \cdot a_J^n \varrho_J^n = -\Delta t \sum_{J, K \in \mathbb{Z}^d} DW_J^K \cdot (x_J - x_K) \varrho_J^n \varrho_K^n \\ &\leq -\lambda \Delta t \sum_{J, K \in \mathbb{Z}^d} |x_J - x_K|^2 \varrho_J^n \varrho_K^n \\ &\leq -4\lambda \Delta t \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^n, \end{aligned}$$

where we used the λ -convexity of W and the inequality $|x_J - x_K|^2 \leq 2(|x_J|^2 + |x_K|^2)$ along with the fact that λ is nonpositive. We obtain

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^{n+1} \leq (1 - 4\lambda \Delta t) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |x_J|^2 \varrho_J^n + a_\infty \Delta t \sum_{i=1}^d \Delta x_i + 2d\varepsilon \Delta t.$$

We conclude the proof using a discrete version of Grönwall's lemma. \square

Proof of Proposition 3.5

Before going through the proof of Proposition 3.5, let us introduce, for $J \in \mathbb{Z}^d$ and $y \in \mathbb{R}^d$ the following coefficients :

$$\alpha_J(y) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^d \left(\frac{|\langle y - x_J, e_i \rangle|}{\Delta x_i} - \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) & \text{when } y \in C_J, \\ \frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_{J-e_i}, e_i \rangle)^+ + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} & \text{when } y \in C_{J-e_i}, \text{ for } i = 1, \dots, d, \\ \frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_{J+e_i}, e_i \rangle)^- + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} & \text{when } y \in C_{J+e_i}, \text{ for } i = 1, \dots, d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.51)$$

It then holds that, for any $J, L \in \mathbb{Z}^d$,

$$\alpha_J(x_L + \Delta t a_L^n) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^d \left(|a_{iJ}^n| \frac{\Delta t}{\Delta x_i} - \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) & \text{when } L = J, \\ \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (a_{iJ-e_i}^n)^+ + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} & \text{when } L = J - e_i, \text{ for } i = 1, \dots, d, \\ \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (a_{iJ+e_i}^n)^- + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} & \text{when } L = J + e_i, \text{ for } i = 1, \dots, d, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.52)$$

so that we have the key identity :

$$\forall J \in \mathbb{Z}^d, \quad \varrho_J^{n+1} = \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} \varrho_L^n \alpha_J(x_L + \Delta t a_L^n), \quad (3.53)$$

Lemme 3.13. *For any $y \in \mathbb{R}^d$, we have*

$$\sum_{L \in \mathbb{Z}^d} \alpha_L(y) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} x_L \alpha_L(y) = y.$$

Démonstration. Let $J \in \mathbb{Z}^d$ such that $y \in C_J$. To prove the first claim, we just use the definition of $\alpha_L(y)$:

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} \alpha_L(y) &= \alpha_J(y) + \sum_{i=1}^d (\alpha_{J+e_i}(y) + \alpha_{J-e_i}(y)) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^d \left(\frac{|\langle y - x_L, e_i \rangle|}{\Delta x_i} - \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) + \sum_{i=1}^d \frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_J, e_i \rangle)^+ + (\langle y - x_J, e_i \rangle)^- + 2 \sum_{i=1}^d \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} = 1. \end{aligned}$$

As for the preservation of the barycenter, we once again using the definition of the coefficients $\alpha_L(y)$:

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} x_L \alpha_L(y) &= x_J \alpha_J(y) + \sum_{i=1}^d x_{J+e_i} \alpha_{J+e_i}(y) + \sum_{i=1}^d x_{J-e_i} \alpha_{J-e_i}(y) \\ &= x_J \left[1 - \sum_{i=1}^d \left(\frac{|\langle y - x_J, e_i \rangle|}{\Delta x_i} - \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \right] + \sum_{i=1}^d x_J \left(\frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_J, e_i \rangle)^+ + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d x_J \left(\frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_J, e_i \rangle)^- + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \\ &= x_J \left[1 + \sum_{i=1}^d \left(-\frac{|\langle y - x_J, e_i \rangle|}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_J, e_i \rangle)^+ + \frac{1}{\Delta x_i} (\langle y - x_J, e_i \rangle)^- \right) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^d e_i \left((\langle y - x_J, e_i \rangle)^+ - (\langle y - x_J, e_i \rangle)^- \right) \\ &= x_J + \sum_{i=1}^d \langle y - x_J, e_i \rangle e_i \\ &= y. \end{aligned}$$

□

We now turn to the proof of Proposition 3.5.

For $n \in \mathbb{N}^*$, we denote $D_n := W_2(\varrho_{t^n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n})$. The point is, roughly speaking, to obtain an estimate of the type $D_{n+1}^2 \leq D_n^2 + C \Delta t (\Delta t + \Delta x + \varepsilon)$ and then use a discrete Grönwall lemma to obtain estimate (3.46).

Let γ be an optimal transport plan between ϱ_{t^n} and $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}$, so that $D_n^2 = \iint |x - y|^2 \gamma(dx, dy)$. We also let $a_{\Delta x}^n$ be any continuous reconstruction of the velocity, for instance piecewise affine, such that $a_{\Delta x}^n(x_J) = a_J^n$ for all $J \in \mathbb{Z}^d$.

To construct an adequate coupling $\gamma' \in \Gamma(\varrho_{t^{n+1}}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n+1})$, recall that Theorem 3.3 gives $\varrho_{t^{n+1}} = Z(t^{n+1}, t^n, \cdot) \# \varrho_{t^n}$, where Z is the Filippov characteristic flow associated to $\hat{a}[\varrho]$ given by Theorem 3.3, except that here the second variable of Z denotes the time of the Cauchy data (which is the third variable) whereas in Theorem 3.3 it was omitted as it was 0. If the discrete measure $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n+1}$ was a pushforward measure of $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}$, we would also define γ' as a pushforward of γ , but it is not the case. Instead, if we denote by ν the kernel on $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ given by :

$$\forall (y, B) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \nu(y, B) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \alpha_J(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \delta_{x_J}(B),$$

we have the kernel representation :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n+1}(B) = \int \nu(y, B) \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}(dy).$$

The pushforward $\varrho_{t^{n+1}} = Z(t^{n+1}, t^n, \cdot) \# \varrho_{t^n}$ can also be seen as a kernel representation. Indeed, setting $\mu(x, A) = \delta_{Z(t^{n+1}, t^n, x)}(A)$ for $(x, A) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, we have :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \varrho_{t^{n+1}}(A) = \int \mathbf{1}_A(Z(t^{n+1}, t^n, x)) \varrho_{t^n}(dx) = \int \delta_{Z(t^{n+1}, t^n, x)}(A) \varrho_{t^n}(dx) = \int \mu(x, A) \varrho_{t^n}(dx).$$

We now define the product kernel \mathcal{K} on $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ by :

$$\mathcal{K}((x, y), A \times B) = \mu(x, A) \nu(y, B) = \delta_{Z(t^{n+1}, t^n, x)}(A) \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \delta_{x_L}(B)$$

and then set $\gamma'(A \times B) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathcal{K}((x, y), A \times B) \gamma(dx, dy)$. Equivalently, for any $\theta \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$,

we have :

$$\begin{aligned} \iint \theta(x, y) \gamma'(dx, dy) &= \iiint \theta(x', y') \mu(x, dx') \nu(y, dy') \gamma(dx, dy) \\ &= \iint \left[\sum_{L \in \mathbb{Z}^d} \theta(Z(t^{n+1}; t^n, x), x_L) \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \right] \gamma(dx, dy). \end{aligned}$$

One can show as in [43] that the marginals of γ' are $\varrho_{t^{n+1}}$ and $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n+1}$. In particular, we have :

$$D_{n+1}^2 \leq \iint |x - y|^2 \gamma'(dx, dy).$$

Using the definition of γ' , we get :

$$D_{n+1}^2 \leq \iint \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} |Z(t^{n+1}; t^n, x) - x_L|^2 \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \gamma(dx, dy). \quad (3.54)$$

Writing $Z(t^{n+1}; t^n, x) - x_L = Z(t^{n+1}; t^n, x) - (y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) - (x_L - (y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)))$ and expanding the square, we obtain :

$$\begin{aligned} &\sum_{L \in \mathbb{Z}^d} |Z(t^{n+1}; t^n, x) - x_L|^2 \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \\ &= |Z(t^{n+1}; t^n, x) - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 + \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} |x_L - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \\ &\quad - 2 \left(Z(t^{n+1}; t^n, x) - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y) \right) \cdot \left(\sum_{L \in \mathbb{Z}^d} (x_L - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Now, the last term in scalar product vanishes as we have, using Lemma 3.13,

$$\sum_{L \in \mathbb{Z}^d} (x_L - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) = y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y) - (y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) = 0.$$

Plugging (3.55) into (3.54), we therefore deduce, using the fact that $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}$ is the second marginal of γ :

$$\begin{aligned} D_{n+1}^2 &\leq \iint |Z(t^{n+1}; t^n, x) - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 \gamma(dx, dy) \\ &\quad + \int \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} |x_L - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}(dy), \end{aligned} \quad (3.56)$$

Let us deal with the last term in the above inequality. We have $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}(y) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \varrho_J^n \delta_{x_J}(y)$, therefore :

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} \int |x_L - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 \alpha_L(y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)) \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}(dy) \\ = \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} |x_L - x_J - \Delta t a_J^n|^2 \alpha_L(x_J + \Delta t a_J^n) \varrho_J^n. \end{aligned}$$

Moreover, using the definition of α_L in (3.51), we compute :

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathbb{Z}^d} |x_L - x_J - \Delta t a_J^n|^2 \alpha_L(x_J + \Delta t a_J^n) &= \Delta t^2 |a_J^n|^2 \left(1 - \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} |a_{iJ}^n| - \sum_{i=1}^d \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \\ + \sum_{i=1}^d \left(|\Delta x_i e_i - \Delta t a_J^n|^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_i} (a_{iJ}^n)^+ + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) + |\Delta x_i e_i + \Delta t a_J^n|^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_i} (a_{iJ}^n)^- + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \right) \\ &\leq C \Delta t (\Delta t + \Delta x + \varepsilon), \end{aligned}$$

where we used, for the last inequality, the CFL condition (3.45) and the fact that the velocity a_J^n is uniformly bounded. Multiplying by ϱ_J^n , summing over $J \in \mathbb{Z}^d$, and injecting into (3.56) yields :

$$D_{n+1}^2 \leq \iint |Z(t^{n+1}; t^n, x) - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 \gamma(dx, dy) + C \Delta t (\Delta t + \Delta x + \varepsilon). \quad (3.57)$$

Dealing with the first term amounts to estimating the distance between the exact characteristics $Z(t^{n+1}; t^n, x)$ and the forward Euler discretization $y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y)$. To this end, we write, on the one hand, using the definition of the Filippov characteristics [58, 105] :

$$\begin{aligned} Z(t^{n+1}; t^n, x) &= x + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \widehat{a}_\varrho(s, Z(s; t^n, x)) ds \\ &= x - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int \widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) \varrho_{t^n}(d\xi) ds. \end{aligned}$$

On the other hand, we have, whenever y is a node of the mesh,

$$y + \Delta t a_{\Delta x}^n(y) = y - \Delta t \int \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \varrho_{\Delta x}^n(d\zeta).$$

Thus, still for y a node of the mesh, we have :

$$\begin{aligned} |Z(t^{n+1}; t^n, x) - y - \Delta t a_{\Delta x}^n(y)|^2 &\leq |x - y|^2 \\ - 2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint (x - y) \cdot \left(\widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) - \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \right) \varrho_{t^n}(d\xi) \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}(d\zeta) &+ C \Delta t^2. \end{aligned}$$

Since $\gamma \in \Gamma(\varrho_{t^n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n})$ and since the above integral can be decoupled using the linearity of the scalar product, we also have :

$$\begin{aligned} \iint (x - y) \cdot \left(\widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) - \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \right) \varrho_{t^n}(d\xi) \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}(d\zeta) \\ = \iint (x - y) \cdot \left(\widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) - \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \right) \gamma(d\xi, d\zeta). \end{aligned}$$

Injecting into (3.57), we get :

$$\begin{aligned} D_{n+1}^2 &\leq D_n^2 + C \Delta t (\Delta t + \Delta x + \varepsilon) \\ &\quad - 2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iiint (x - y) \cdot \left(\widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) - \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \right) \gamma(d\xi, d\zeta) \gamma(dx, dy). \end{aligned}$$

Decomposing $x - y = x - Z(s; t^n, x) + Z(s; t^n, x) - y$ and using the fact that $|Z(s; t^n, x) - x| \leq a_\infty |s - t^n|$, we get :

$$D_{n+1}^2 \leq D_n^2 + C\Delta t(\Delta t + \Delta x + \varepsilon) - 2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iiint (Z(s; t^n, x) - y) \cdot \left(\widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) - \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \right) \gamma(d\xi, d\zeta) \gamma(dx, dy).$$

Using the fact that W is even to symmetrize the last term as in Lemma 3.6, we obtain :

$$D_{n+1}^2 \leq D_n^2 + C\Delta t(\Delta t + \Delta x + \varepsilon) - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iiint (Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi) - y + \zeta) \cdot \left(\widehat{\nabla W}(Z(s; t^n, x) - Z(s; t^n, \xi)) - \widehat{\nabla W}(y - \zeta) \right) \gamma(d\xi, d\zeta) \gamma(dx, dy).$$

The λ -convexity of W then yields :

$$D_{n+1}^2 \leq D_n^2 + C\Delta t(\Delta t + \Delta x + \varepsilon) - \lambda \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iiint |Z(s; t^n, x) - y - Z(s; t^n, \xi) + \zeta|^2 \gamma(d\xi, d\zeta) \gamma(dx, dy).$$

Expanding the last term gives :

$$D_{n+1}^2 \leq D_n^2 + C\Delta t(\Delta t + \Delta x + \varepsilon) - 2\lambda \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint |Z(s; t^n, x) - y|^2 \gamma(dx, dy) + 2\lambda \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left| \iint (Z(s; t^n, x) - y) \gamma(dx, dy) \right|^2. \quad (3.58)$$

Now, since $\lambda \leq 0$, the last term above is nonpositive. It remains to estimate the penultimate term. Writing :

$$|Z(s; t^n, x) - y| \leq |Z(s; t^n, x) - x| + |x - y| \leq a_\infty |s - t^n| + |x - y|,$$

we deduce :

$$|Z(s; t^n, x) - y|^2 \leq 2(a_\infty^2 |s - t^n|^2 + |x - y|^2) \leq 2a_\infty^2 \Delta t^2 + 2|x - y|^2,$$

whenever $s \in [t^n, t^{n+1}]$. Integrating in space with respect to $\gamma(dx, dy)$ and integrating over $s \in [t^n, t^{n+1}]$, we obtain :

$$-2\lambda \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint |Z(s; t^n, x) - y|^2 \gamma(dx, dy) \leq -4\lambda a_\infty^2 \Delta t^3 - 4\lambda \Delta t D_n^2.$$

Together with (3.58), this yields :

$$D_{n+1}^2 \leq (1 - 4\lambda \Delta t) D_n^2 + C\Delta t(\Delta t + \Delta x + \varepsilon).$$

Using a discrete Grönwall lemma, we finally get :

$$D_n^2 \leq e^{-4\lambda t^n} D_0^2 + C \frac{1 - e^{-4\lambda t^n}}{4\lambda} (\Delta t + \Delta x + \varepsilon).$$

Now, one can easily prove that $D_0^2 = W_2^2(\varrho^{ini}, \varrho_{\Delta x}^0) \leq \Delta x^2$. This, along with the CFL condition (3.45), which implies that $\Delta t \leq C\Delta x$, gives the desired result.

Proof of Theorem 3.6

We are now in position to prove Theorem 3.6 using estimate (3.46) and passing to the limit $\Delta x \rightarrow 0$. To do so, we must verify that, for a given $\varepsilon > 0$, the approximate solutions given by the numerical scheme (3.41)–(3.40) converge, say uniformly in time (over a finite horizon) and weakly, in the sense of measures, in space, towards the solution ϱ^ε to the aggregation-diffusion problem (3.10) with initial datum ϱ^{ini} , as $\Delta x \rightarrow 0$. In all this section, ε is a fixed positive real number.

Let $T > 0$ and let $N \in \mathbb{N}$ be such that $N\Delta t = T$ where Δt satisfies the CFL condition. We consider the following piecewise affine reconstruction in time, defined for $t \in [0, T]$ by

$$\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon := \sum_{n=0}^N \left(\frac{t^{n+1} - t}{\Delta t} \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n} + \frac{t - t^n}{\Delta t} \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n+1} \right) \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}[}(t), \quad (3.59a)$$

$$\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n} := \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \varrho_J^n \delta_{x_J}, \quad n = 0, \dots, N, \quad (3.59b)$$

where, once again, $(\varrho_J^n)_{J \in \mathbb{Z}^d}^{n=0, \dots, N}$ is given by the explicit discretization (3.41)–(3.40) (it actually depends on ε but we drop this dependence for convenience). Lemmas 3.11 and 3.12 show that, for all $n \in \{0, \dots, N\}$, $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, hence $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$ is a collection, indexed by Δx , of curves in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$ (they are actually curves on $\mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d)$ but compactness arguments require to work in a smaller space).

Outline of the proof. We begin with assuming that $\varrho^{ini} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Then, from $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$, we shall extract a subsequence, that we still denote $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$, converging in the $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$ topology towards a limit $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$. To do so, we apply the Ascoli-Arzelà Theorem : the relative compactness assumption follows quite directly from the uniform bound on $M_2(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)$ that we proved in Lemma 3.12; the equicontinuity assumption, however, is more involved and requires discrete H^1 estimates (Lemma 3.14) in order to control the diffusive term. Then, using classical discrete integration by parts, we show that ϱ solves the aggregation-diffusion initial value problem, the solution of which is unique, hence the whole sequence actually converges. Passing to the limit $\Delta x \rightarrow 0$ in estimate (3.46) will give us the desired estimate (3.47) for $L^2(\mathbb{R}^d)$ initial datum, and it will only remain to use a regularization argument to conclude in the case of arbitrary $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ initial datum.

Lemme 3.14. *For all $m \in \{0, \dots, N\}$, we have :*

$$\Delta t \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \left| \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i} \right|^2 \leq C(a_\infty, d, \varepsilon, T) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^0)^2}{2},$$

with $C(a_\infty, d, \varepsilon, T) = \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{8dT a_\infty^2}{\varepsilon} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \exp \left(\frac{4(1+d)T a_\infty^2}{\varepsilon} \right) \right)$.

Démonstration. The idea is to perform a discrete version of the following rationale. If ϱ^ε solves (3.10) with $L^2(\mathbb{R}^d)$ initial data, we have :

$$\frac{d}{dt} \int \frac{(\varrho_t^\varepsilon)^2}{2} = - \int \nabla \varrho_t^\varepsilon \cdot (\nabla W * \varrho_t^\varepsilon) \varrho_t^\varepsilon - \varepsilon \int |\nabla \varrho_t^\varepsilon|^2. \quad (3.60)$$

First, using an adequate Young inequality on the first term along with the fact that ∇W is bounded allows to absorb the $|\nabla \varrho_t^\varepsilon|^2$ term into the last one, getting :

$$\frac{d}{dt} \int \frac{(\varrho_t^\varepsilon)^2}{2} \leq -\frac{\varepsilon}{2} \int |\nabla \varrho_t^\varepsilon|^2 + \frac{a_\infty^2}{\varepsilon} \int \frac{(\varrho_t^\varepsilon)^2}{2} \leq \frac{a_\infty^2}{\varepsilon} \int \frac{(\varrho_t^\varepsilon)^2}{2}.$$

A Grönwall Lemma then ensures that $\int \frac{(\varrho_t^\varepsilon)^2}{2}$ remains bounded over finite time, where the bound depends on ε , but ε is fixed. Second, plugging back this bound into the above estimate gives a bound on $\int_0^T |\nabla \varrho_t^\varepsilon|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 dt$. Let us reproduce these computations in the discrete setting.

Step 1 : bound on $\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2}$.

For the sake of compactness, let us note $F_{J+\frac{e_i}{2}}^n = (a_{i,J}^n)^+ \varrho_J^n - (a_{i,J+e_i}^n)^- \varrho_{J+e_i}^n$. Using twice the definition of the explicit scheme (3.41), we have :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^{n+1})^2 - (\varrho_J^n)^2}{2} &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{\varrho_J^{n+1} + \varrho_J^n}{2} (\varrho_J^{n+1} - \varrho_J^n) \\ &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{\varrho_J^{n+1} + \varrho_J^n}{2} \left(- \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{J+\frac{e_i}{2}}^n - F_{J-\frac{e_i}{2}}^n) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} (\varrho_{J+e_i}^n - 2\varrho_J^n + \varrho_{J-e_i}^n) \right) \\ &= - \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{J+\frac{e_i}{2}}^n - F_{J-\frac{e_i}{2}}^n) \varrho_J^n + \varepsilon \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} (\varrho_{J+e_i}^n - 2\varrho_J^n + \varrho_{J-e_i}^n) \varrho_J^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left(- \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{J+\frac{e_i}{2}}^n - F_{J-\frac{e_i}{2}}^n) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} (\varrho_{J+e_i}^n - 2\varrho_J^n + \varrho_{J-e_i}^n) \right)^2 \\ &:= S_1^n + S_2^n. \end{aligned}$$

Performing discrete integrations by parts and using Young's inequality $|ab| \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$ with $a = F_{J+\frac{e_i}{2}}^n$ and $b = \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i}$, we can estimate S_1^n as follows :

$$\begin{aligned} S_1^n &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} F_{J+\frac{e_i}{2}}^n (\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n) - \varepsilon \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} |\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n|^2 \\ &\leq \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \Delta t \left(\frac{(F_{J+\frac{e_i}{2}}^n)^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i} \right|^2 \right) - \varepsilon \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} |\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n|^2 \\ &\leq \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \Delta t \frac{(F_{J+\frac{e_i}{2}}^n)^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} |\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n|^2 \end{aligned}$$

As for S_2^n , straightforward computations and the repeated use of $(a \pm b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ lead to :

$$S_2^n \leq \sum_{i=1}^d \frac{4d\Delta t^2}{\Delta x_i^2} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (F_{J+\frac{e_i}{2}}^n)^2 + \sum_{i=1}^d 4d \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right)^2 \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} |\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n|^2.$$

Using the fact that :

$$\left(F_{J+\frac{e_i}{2}}^n \right)^2 \leq (a_\infty \varrho_J^n + a_\infty \varrho_{J+e_i}^n)^2 \leq 2a_\infty^2 \left((\varrho_J^n)^2 + (\varrho_{J+e_i}^n)^2 \right)$$

we deduce that $\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left(F_{J+\frac{e_i}{2}}^n \right)^2 \leq 4a_\infty^2 \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (\varrho_J^n)^2$. Reporting in both estimates we found on

S_1^n and S_2^n , and summing both, we obtain :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^{n+1})^2 - (\varrho_J^n)^2}{2} &\leq \left(\frac{4d\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} + \sum_{i=1}^d \frac{32da_\infty^2 \Delta t^2}{\Delta x_i^2} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2} \\ &+ \sum_{i=1}^d \left(-\frac{\varepsilon \Delta t}{2\Delta x_i^2} + 4d \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right)^2 \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left| \varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n \right|^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Under the Courant-Friedrichs-Lewy condition

$$\varepsilon d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \leq \frac{1}{8} \quad \text{for any } i,$$

the last term in the above estimate is nonpositive, thus we get

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^{n+1})^2 - (\varrho_J^n)^2}{2} &\leq \frac{4d\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} \left(1 + \sum_{i=1}^d \frac{8\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2} \\ &\leq \frac{4d\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{d} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2} = \frac{4\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} (1+d) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2}. \end{aligned}$$

Using a discrete Grönwall Lemma, we deduce the following bound on the discrete L^2 norm of $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon, n}$:

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2} \leq \exp \left(\frac{4(1+d)t^n a_\infty^2}{\varepsilon} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^0)^2}{2}.$$

Step 2 : discrete H^1 bound.

Assume a stricter CFL condition : there exists δ such that

$$\varepsilon d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \leq \delta < \frac{1}{8} \quad \text{for any } i. \quad (3.62)$$

Then, for any i ,

$$4d \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} \right)^2 - \frac{\varepsilon \Delta t}{2\Delta x_i^2} = \frac{\varepsilon \Delta t}{2\Delta x_i^2} \left(8d \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i^2} - 1 \right) \leq \frac{\delta}{d} (8\delta - 1) < 0.$$

Thus, thanks to 3.61,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left| \varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n \right|^2 \\ &\leq \frac{d}{\delta(1-8\delta)} \left(\left(\frac{4d\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} + \sum_{i=1}^d \frac{32da_\infty^2 \Delta t^2}{\Delta x_i^2} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2} - \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^{n+1})^2 - (\varrho_J^n)^2}{2} \right) \\ &\leq \frac{d}{\delta(1-8\delta)} \left(\left(\frac{4d\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} + \sum_{i=1}^d \frac{4a_\infty^2 \Delta t}{\varepsilon} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^n)^2}{2} - \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^{n+1})^2 - (\varrho_J^n)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

which implies, thanks to the L^2 estimate,

$$\sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left| \varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n \right|^2 \leq \frac{d}{\delta(1-8\delta)} \left(\frac{8d\Delta t a_\infty^2}{\varepsilon} \exp \left(\frac{4(1+d)t^n a_\infty^2}{\varepsilon} \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^0)^2}{2} - \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^{n+1})^2 - (\varrho_J^n)^2}{2} \right)$$

Summing over $n = 0, \dots, m-1$ yields

$$\sum_{n=0}^{m-1} \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left| \varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n \right|^2 \leq \frac{d}{\delta(1-8\delta)} \left(\frac{8dT a_\infty^2}{\varepsilon} \exp\left(\frac{4(1+d)T a_\infty^2}{\varepsilon}\right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^0)^2}{2} - \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^m)^2}{2} + \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^0)^2}{2} \right).$$

Finally

$$\sum_{n=0}^{m-1} \sum_{i=1}^d \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left| \varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n \right|^2 \leq \frac{d}{\delta(1-8\delta)} \left(1 + \frac{8dT a_\infty^2}{\varepsilon} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \exp\left(\frac{4(1+d)T a_\infty^2}{\varepsilon}\right) \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\varrho_J^0)^2}{2}.$$

This is the desired result choosing $\delta = 1/16$. \square

We now resume the proof of Theorem 3.7. From now on, we always assume condition (3.62) to hold.

Step 1 : Ascoli-Arzelà Theorem. Let us denote, for $K \subset \mathbb{R}^d$ any compact set, $Lip_K := \mathcal{C}_c(K) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ the space of Lipschitz continuous functions supported in K and $\|\cdot\|_{Lip}$ the Lipschitz seminorm. We then introduce the pseudo-distance defined in duality with $\|\cdot\|_{Lip}$ by :

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d), \quad W_{1,K}(\mu, \nu) := \sup_{\phi \in Lip_K, \|\phi\|_{Lip} \leq 1} \int \phi d(\mu - \nu),$$

For $0 \leq s < t \leq T$, we have, thanks to the Cauchy-Schwarz inequality :

$$W_{1,K}(\varrho_{\Delta x,t}^\varepsilon, \varrho_{\Delta x,s}^\varepsilon) = \int_s^t |(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'| d\tau \leq \sqrt{t-s} \sqrt{\int_s^t |(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'|^2 d\tau}. \quad (3.63)$$

Here, the metric derivative is the one associated to the pseudo-distance $W_{1,K}$. Since we chose $\varrho_{\Delta x}^\varepsilon$ to be the piecewise affine reconstruction of the $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n}$ for $n = 0, \dots, N$, we have, for $\tau \in [t^n, t^{n+1}[$, $|(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'| = \frac{1}{\Delta t} W_{1,K}(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n+1})$. Indeed, $\varrho_{\Delta x}^\varepsilon$ is a constant-speed geodesic in $\mathbb{W}_1(K)$ from $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n}$ to $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n+1}$, hence its length on $[t^n, t^{n+1}[$ equals $\Delta t |(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'|$ by definition and $W_{1,K}(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n+1})$ by the Benamou-Brenier formula. Therefore :

$$\int_s^t |(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'|^2 d\tau \leq \int_0^T |(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'|^2 d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t^k}^{t^{k+1}} |(\varrho_{\Delta x,\tau}^\varepsilon)'|^2 d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{W_{1,K}^2(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,k}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,k+1})}{\Delta t}. \quad (3.64)$$

Now, let $\phi \in Lip_K$ such that $\|\phi\|_{Lip} \leq 1$. We have, denoting $\phi_J = \phi(x_J)$ and using the definition of the scheme (3.41) along with discrete integrations by parts in space :

$$\begin{aligned} \int \phi d(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n+1} - \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n}) &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \phi_J (\varrho_J^{n+1} - \varrho_J^n) \\ &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i} F_{J+e_i}^n (\phi_{J+e_i} - \phi_J) - \varepsilon \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} (\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n) (\phi_{J+e_i} - \phi_J) \\ &\leq 2da_\infty \Delta t + \varepsilon \Delta t \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \left| \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i} \right|. \end{aligned}$$

Taking the supremum over ϕ and using $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, we get :

$$\begin{aligned} W_{1,K}^2(\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n}, \varrho_{\Delta x}^{\varepsilon,n+1}) &\leq 8d^2 a_\infty^2 \Delta t^2 + 2\varepsilon^2 \Delta t^2 \left(\sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \left| \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i} \right| \right)^2 \\ &\leq 8d^2 a_\infty^2 \Delta t^2 + 2\varepsilon^2 \Delta t^2 \frac{d \text{Leb}(K)}{\prod_{i=1}^d \Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \left| \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i} \right|^2, \end{aligned}$$

where we used a discrete Cauchy-Schwarz inequality so as to use the discrete H^1 estimate we proved in Lemma 3.14 : indeed, summing for $n = 0, \dots, N-1$ and plugging into (3.64), we obtain, using the aforementioned Lemma :

$$\begin{aligned} \int_s^t |(\varrho_{\Delta x, \tau}^\varepsilon)'|^2 d\tau &\leq 8d^2 a_\infty^2 T + 2d\varepsilon^2 \frac{Leb(K)}{\prod_{i=1}^d \Delta x_i} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^d \left| \frac{\varrho_{J+e_i}^n - \varrho_J^n}{\Delta x_i} \right|^2 \\ &\leq C(a_\infty, d, \varepsilon, T, K) \left(1 + \frac{1}{\prod_{i=1}^d \Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (\varrho_J^0)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Now, since we assumed that $\varrho^{ini} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, the term $\frac{1}{\prod_{i=1}^d \Delta x_i} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (\varrho_J^0)^2$ is bounded with respect to Δx . Indeed, a Cauchy-Schwarz inequality along with our initialization of the scheme (3.40) yield :

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} (\varrho_J^0)^2 &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{C_J} \varrho^{ini} \right)^2 \\ &\leq \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} Leb(C_J) \int_{C_J} (\varrho^{ini})^2 = \left(\prod_{i=1}^d \Delta x_i \right) \sum_{J \in \mathbb{Z}^d} \int_{C_J} (\varrho^{ini})^2 = \left(\prod_{i=1}^d \Delta x_i \right) \|\varrho^{ini}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Reporting into (3.65), we obtain a bound on $\int_s^t |(\varrho_{\Delta x, \tau}^\varepsilon)'|^2 d\tau$ that is uniform with respect to s, t and Δx . Combining with (3.63), we deduce that $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$ is equi- $\frac{1}{2}$ -Hölder and in particular, equicontinuous in $\mathcal{C}([0, T], (Lip_K)')$. Lemma 3.12 ensures, in addition, that $M_2(\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon)$ is uniformly bounded with respect to $t \in [0, T]$ and $\Delta x > 0$. Using Lemma 3.4, we deduce that $(\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$ lies in a relatively compact set for all $t \in [0, T]$ and $\Delta x > 0$. We can therefore apply the Ascoli-Arzelà Theorem along with a diagonal extraction to extract a subsequence, that we still denote $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$, converging in $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$ topology towards some ϱ^ε . The uniform bound on $M_2(\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon)$ combined with Lemma 3.4 ensures that ϱ^ε actually belongs to $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$.

Step 2 : ϱ^ε solves (3.10).

Using discrete integrations by parts as in [36, 90], we can prove that $\varrho_{\Delta x}^\varepsilon$ satisfies the following approximate weak form of (3.10), for any $\phi \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int \partial_t \phi(t, x) \varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon(dx) dt + \int_0^t \int \hat{a}[\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon] \cdot \nabla \phi(t, x) \varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon(dx) dt + \int \phi(0, x) \varrho^{ini}(dx) \\ = \varepsilon \int_0^T \int \Delta \phi(t, x) \varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon(dx) + O(\Delta x + \Delta t). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Passing to the limit $\Delta x \rightarrow 0$ in (3.66) is straightforward for the linear terms since $\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{*} \varrho_t^\varepsilon$ uniformly in time. For the nonlinear term, this convergence also ensures that $\varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon \otimes \varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{*} \varrho_t^\varepsilon \otimes \varrho_t^\varepsilon$. Then, passing to the limit is done using a symmetrization argument as in equations (3.31)-(3.32)-(3.33) using the fact that W is Lipschitz and even.

We deduce that ϱ^ε solves in the sense of distributions the aggregation-diffusion problem (3.10) with initial datum $\varrho_0^\varepsilon = \varrho^{ini}$. Since such a solution is unique (see Theorem 3.4), we deduce that the whole initial sequence $(\varrho_{\Delta x}^\varepsilon)_{\Delta x > 0}$ actually converges towards ϱ^ε .

Step 3 : passing to the limit in (3.46) and relaxing the assumption $\varrho^{ini} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Now, let $t > 0$ and let $n \in \{0, \dots, N\}$ such that $t \in [t^n, t^{n+1}[$. Estimate (3.46) gives :

$$W_2(\varrho_t, \varrho_{\Delta x, t}^\varepsilon) \leq C \sqrt{\frac{1 - e^{-4\lambda t}}{\lambda}} \sqrt{\Delta x + \varepsilon} + e^{-2\lambda t} \Delta x.$$

Passing to the limit $\Delta x \rightarrow 0$ in the above estimate using the semicontinuity of W_2 then gives the desired estimate (3.47), hence proving Theorem 3.7 in case of $L^2(\mathbb{R}^d)$ initial datum.

Remarque 3.12. As a byproduct of this proof, we obtain uniform in time convergence in W_1 distance in space of the numerical scheme (3.41)–(3.40) towards the $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ distributional solution to the aggregation-diffusion initial value problem, in case of $L^2(\mathbb{R}^d)$ initial datum, and under 1/6-CFL condition. In fact, we expect this convergence result to hold for arbitrary $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ initial datum and under the standard CFL condition :

$$\sum_{i=1}^d \left(a_\infty \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + 2\varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x_i^2} \right) \leq \frac{1}{6}.$$

3.2.4 Convergence for repulsive potentials such that $\Delta W \leq 0$ and $\nabla^2 W \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$

For any Lipschitz potential satisfying assumptions (A0)-(A1)-(A2), Theorem 3.5 guarantees the convergence of ϱ^ε towards a solution ϱ to the aggregation equation up to a subsequence if the initial data satisfies the assumptions (3.25). Then, Corollary 3.1 extended this result to arbitrary initial data by an approximation procedure, and using λ -convexity to estimate the distance between two solutions. The goal of this section is to proceed similarly in the case of repulsive potentials, typically $W(x) = -|x|$, where λ -convexity will be replaced by some intergability of the Hessian. More precisely, we focus on initial data equal to ϱ^{ini} , for which we only assume finiteness of moments.

The outline of the proof is the same as that of Corollary 3.1. However, we can no more use the λ -convexity of W but, using the additional assumption $\nabla^2 W \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ for a suitable p_0 , we still manage to estimate the distance between ϱ_t^ε and a sequence of viscous solutions associated with smoothed out initial data. More precisely, we obtain the following result :

Théorème 3.8. *Let W be an interaction potential satisfying assumptions (A0)-(A1)-(A2) along with the additional assumption :*

$$(A5) : \quad \Delta W \leq 0 \quad \text{and} \quad \nabla^2 W \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \quad \text{for some } p_0 > \max\left(\frac{d}{2}, 1\right),$$

and let ϱ^{ini} be an initial datum belonging to $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. Denote $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ the sequence of weak solutions to (3.10) where the initial data is set to $\varrho_0^\varepsilon := \varrho^{ini}$ for all $\varepsilon > 0$.

Then, for all $T > 0$, the sequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$, up to an extraction, towards a solution $\varrho \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ to equation (3.11) with the velocity field $a[\varrho]$ being replaced by $\hat{a}[\varrho]$ as defined in (3.12).

If, in addition, $\varrho^{ini} \in L^{p'_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{\frac{p_0}{p_0-p}}(\mathbb{R}^d)$, then there exists a unique solution in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty([0, T], L^{p'_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{\frac{p_0}{p_0-p}}(\mathbb{R}^d))$ to (3.11) and the whole sequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ actually converges.

Remarque 3.13.

- (1) For $W(x) = -|x|$, this result cannot be applied in dimension $d = 1$, since $\nabla^2 W = -\delta_0$ is not integrable. When $d > 1$, we have $\nabla^2 W(x) = \frac{\frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|} - I_d}{|x|} \sim \frac{1}{|x|}$, hence $\nabla^2 W \in L^{p_0}$ if and only if $p_0 < d$ (up to cutting off the potential at infinity) and therefore we can find $p_0 \in \left(\frac{d}{2}, d\right)$ so as to apply our result.
- (2) In dimension $d = 1$, for $W(x) = -|x|$, Proposition 3.4 shows that the whole sequence $(\varrho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converges in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}))$ towards a solution to the aggregation equation that can be obtained as the derivative of the entropy solution to a Burgers-type equation since entropy solutions and viscosity solutions coincide for scalar conservation laws.
- (3) As a byproduct of our result, one obtains existence of a solution in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ to the aggregation problem (3.11) for potentials satisfying (A0)-(A1)-(A2)-(A5).

Démonstration. Let $T > 0$. As in the proof of Corollary 3.1, for $\varepsilon > 0$, we introduce $\mu^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d))$ solution to (3.10) with smoothed out initial data μ_0^ε , that we now assume to satisfy assumptions (3.26) for some $\alpha \in (-1, 0)$. In particular, $(\mu_0^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ satisfies assumptions (3.25) and Theorem 3.5 applies to $(\mu^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ and guarantees convergence of a subsequence, in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_1(\mathbb{R}^d))$, towards a solution to the aggregation equation (3.11). As for Corollary 3.1, the key ingredient is now to prove that the distance $W_p(\varrho_t^\varepsilon, \mu_t^\varepsilon)$ goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$, for some $p > 1$ that will be specified later.

For the sake of clarity, let us drop the superscripts ε for the remaining of this section.

Denoting (φ_t, ψ_t) a pair of Kantorovitch potentials from ϱ_t to μ_t for the cost $\frac{1}{p}|x - y|^p$, we can formally write (see Theorem 5.24 in [112] or Theorem 8.4.7. in [1])

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} W_p^p(\varrho_t, \mu_t) = \int \nabla \varphi_t \cdot a[\varrho_t] d\varrho_t + \int \nabla \psi_t \cdot a[\mu_t] d\mu_t - \varepsilon \int \left(\nabla \varphi_t \cdot \nabla \varrho_t + \nabla \psi_t \cdot \nabla \mu_t \right) dx.$$

The last term above is nonnegative thanks to the so-called five (actually four) gradients inequality proven in [28] for the W_p case with $p > 1$. Actually, [28] proves the inequality in a compact setting and a full treatment of this last term would require a suitable approximation procedure. Yet, the inequality we need, i.e.

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} W_p^p(\varrho_t, \mu_t) \leq \int \nabla \varphi_t \cdot a[\varrho_t] d\varrho_t + \int \nabla \psi_t \cdot a[\mu_t] d\mu_t$$

can also be justified in many different ways, for instance by the stochastic interpretation of ϱ_t and μ_t as laws of the solutions of suitable SDE where the choice of a common Brownian motion would allow to get rid of the term coming from diffusion (see, for instance, [14]); since the diffusion effect of the Laplacian in the equation could also be handled using convolution with the heat kernel, another possible way to prove the same inequality would be to approximate the solutions by a splitting method, alternating convolutions (which decrease the W_p distance) and transport (which lets the other term appear).

We thus get, using a triangle inequality along with the fact that $\nabla \varphi_t(x) = |x - T_t(x)|^{p-1} (x - \widehat{T_t}(x)) = -\nabla \psi_t(x)$, where T_t is the optimal transport map from ϱ_t to μ_t (which exists since $\varrho_t \ll \text{Leb}$ whenever $\varepsilon > 0$) :

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} W_p^p(\varrho_t, \mu_t) \leq |I_1| + |I_2|, \quad (3.67a)$$

$$I_1 = \int |x - T_t(x)|^{p-1} (x - \widehat{T_t}(x)) \cdot (a[\varrho_t](x) - a[\varrho_t] \circ T_t(x)) \varrho_t(dx), \quad (3.67b)$$

$$I_2 = \int |x - T_t(x)|^{p-1} (x - \widehat{T_t}(x)) \cdot (a[\varrho_t] \circ T_t(x) - a[\mu_t] \circ T_t(x)) \varrho_t(dx). \quad (3.67c)$$

To estimate I_1 , we use the following bound on the Lipschitz constant of $a[\varrho_t]$:

$$\text{Lip}(a[\varrho_t]) = \|\nabla^2 W * \varrho_t\|_{L^\infty} \leq \|\nabla^2 W\|_{L^{p_0}} \|\varrho_t\|_{L^{p'_0}}.$$

We deduce :

$$|I_1| \leq \text{Lip}(a[\varrho_t]) \int |x - T_t(x)|^p \varrho_t(dx) \leq \|\nabla^2 W\|_{L^{p_0}} \|\varrho_t\|_{L^{p'_0}} W_p^p(\varrho_t, \mu_t).$$

To estimate I_2 , we first apply a Hölder inequality w.r.t the measure $\varrho_t(dx)$ and with the exponents (p', p) . We get, since $p'(p-1) = p$:

$$|I_2| \leq \left(\int |x - T_t(x)|^p \varrho_t(dx) \right)^{1/p'} \left(\int |a[\varrho_t] \circ T_t(x) - a[\mu_t] \circ T_t(x)|^p \varrho_t(dx) \right)^{1/p}. \quad (3.68)$$

We recognize that the first factor equals $W_p^{p-1}(\varrho_t, \mu_t)$ since $\frac{p}{p'} = p - 1$.

Let us deal with the second one. We consider $\nu_s := ((1-s)\text{id} + sT_t)_{\#} \varrho_t$ the constant-speed geodesic from ϱ_t to μ_t . Note that this curve implicitly depends on t . We also denote by $b_s \in L^p(\nu_s)$ the velocity field associated with $\nu \in AC([0, 1], \mathbb{W}_p(\mathbb{R}^d))$, as given by Theorem 3.2. We have as a consequence of the Benamou-Brenier formula $\partial_s \nu_s + \nabla \cdot (b_s \nu_s) = 0$ and $\|b_s\|_{L^p(\nu_s)} = |(\nu_s)'| = W_p(\varrho_t, \mu_t)$ for a.e. $s \in [0, 1]$. Therefore, for any $y \in \mathbb{R}^d$, one has :

$$\begin{aligned} a[\varrho_t](y) - a[\mu_t](y) &= - \int \nabla W(y - z)(\varrho_t(z) - \mu_t(z)) dz \\ &= - \int_0^1 \int \nabla W(y - z) \partial_s \nu_s(z) dz ds \\ &= \int_0^1 \int \nabla W(y - z) \nabla \cdot (b_s(z) \nu_s(z)) dz ds \\ &= \int_0^1 \int \nabla^2 W(y - z) b_s(z) \nu_s(dz) ds, \end{aligned}$$

so that the inequality (3.68) rewrites :

$$|I_2| \leq W_p^{p-1}(\varrho_t, \mu_t) \left(\int \left| \int_0^1 ds \int \nabla^2 W(T_t(x) - z) b_s(z) \nu_s(dz) ds \right|^p \varrho_t(dx) \right)^{1/p}.$$

Besides, using a Jensen inequality w.r.t the measure $\nu_s(dz) ds$ for the convex function $|\cdot|^p$, we have :

$$\begin{aligned} \int \left| \int_0^1 ds \int \nabla^2 W(T_t(x) - z) b_s(z) \nu_s(dz) ds \right|^p \varrho_t(dx) &\leq \int \int_0^1 \int |\nabla^2 W(T_t(x) - z)|^p |b_s(z)|^p \nu_s(dz) ds \varrho_t(dx) \\ &\leq \int_0^1 \int |b_s(z)|^p \int |\nabla^2 W(T_t(x) - z)|^p \varrho_t(dx) \nu_s(dz) ds \end{aligned}$$

Now, since $\mu_t = T_{t\#} \varrho_t$, we have $\int |\nabla^2 W(T_t(x) - z)|^p \varrho_t(dx) = \int |\nabla^2 W(y - z)|^p \mu_t(y) dy$. Applying a Hölder inequality w.r.t dy and the exponents (q, q') , where we will specify q right afterwards, we get :

$$\int |\nabla^2 W(y - z)|^p d\mu(y) \leq \left(\int |\nabla^2 W(y - z)|^{pq'} dy \right)^{1/q'} \left(\int |\mu_t(y)|^q dy \right)^{1/q} = \|\nabla^2 W\|_{L^{pq'}}^p \|\mu_t\|_{L^q}.$$

We therefore have to take q such that $pq' = p_0$, so that $\|\nabla^2 W\|_{L^{pq'}}$ remains finite. This requires that we choose p such that $p \leq p_0$, which imposes $p_0 > 1$ since we also needed $p > 1$. We also need to choose p such that $\varrho^{ini} \in \mathcal{P}_p$, which means $p \leq 2$. Using $\int_0^1 \int |b_s(z)|^p \nu_s(dz) ds = W_p^p(\varrho_t, \mu_t)$, we finally obtain :

$$|I_2| \leq \|\nabla^2 W\|_{L^{p_0}} \|\mu_t\|_{L^q}^{1/p} W_p^p(\varrho_t, \mu_t), \quad \text{for } q = \frac{p_0}{p_0 - p},$$

where the value of q is computed so that we have $q' = \frac{p_0}{p}$. We therefore have the following Grönwall inequality on $W_p^p(\varrho_t, \mu_t)$:

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} W_p^p(\varrho_t, \mu_t) \leq \|\nabla^2 W\|_{L^{p_0}} \left(\|\varrho_t\|_{L^{p_0}} + \|\mu_t\|_{L^q}^{1/p} \right) W_p^p(\varrho_t, \mu_t), \quad (3.69)$$

Now, we need a bound on $\|\varrho_t\|_{L^r}$. The following lemma implies that, if the interaction potential W satisfies $\Delta W \leq 0$, then the bound on ϱ_t is not worse than the one we would obtain if ϱ solved the sole heat equation and does not depend on the initial datum.

Lemme 3.15. *Let $p \in (1, +\infty)$, $\varepsilon > 0$ and let ϱ solve the following Fokker-Planck equation on the whole space \mathbb{R}^d :*

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \nabla V) = \varepsilon \Delta \varrho, \quad (3.70)$$

where the potential V might depend on ϱ and satisfies $\Delta V \geq 0$. Assume that ϱ_t is smooth for any $t > 0$, and that it has unit total mass. Then one has :

$$\|\varrho_t\|_{L^p} \leq C(\varepsilon t)^{-d/2p'},$$

for a positive constant $C = C(p, d)$ depending on p only and not on the initial datum ϱ_0 .

Démonstration. In the following, $C(p)$ stands for any positive constant depending only on p . For $t > 0$, testing equation (3.70) against ϱ_t^{p-1} and integrating by parts yields :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{p} \int \varrho_t^p = -\frac{p-1}{p} \int \varrho_t^p \Delta V - 4\varepsilon \frac{p-1}{p^2} \int |\nabla \varrho_t^{p/2}|^2 \leq -4\varepsilon \frac{p-1}{p^2} \int |\nabla \varrho_t^{p/2}|^2,$$

since $\Delta V \geq 0$. Using the following Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequality [59, 102] :

$$\int \varrho^{p+\frac{2}{d}} \leq C(p) \int |\nabla \varrho^{p/2}|^2,$$

and interpolating the L^p norm between the L^1 and $L^{p+\frac{2}{d}}$ norms, we deduce that $y_t := \int \varrho_t^p$ verifies the following nonlinear Grönwall inequality :

$$y' - \varepsilon C(p) y^{1+\frac{2}{d(p-1)}} \leq 0.$$

Integrating this inequality on $[s, t]$ for $0 < s < t$, we get :

$$y_t^{-2/d(p-1)} \geq y_s^{-2/d(p-1)} + \varepsilon C(p) \geq \varepsilon C(p),$$

and therefore $\|\varrho_t\|_{L^p} = y_t^{1/p} \leq C(p)(\varepsilon t)^{-d(p-1)/2} = (\varepsilon t)^{-d/2p'}$. This is the bound one would obtain using a $L^p \times L^1$ convolution inequality if ϱ solved the sole heat equation on the whole space, that is, if we had $\varrho_t = G_{\varepsilon t} * \varrho_0$ where G_t denotes the heat kernel. \square

Using Lemma 3.15 with the potential $V = -W * \varrho$ which has a positive Laplacian under the assumption $\Delta W \leq 0$, we get $\|\varrho_t\|_{L^{p'_0}} + \|\mu_t\|_{L^q}^{1/p} \leq C(d, p_0)(\varepsilon t)^{-d/2p_0}$ which, in turn, yields the Grönwall inequality :

$$\frac{d}{dt} W_p^p(\varrho_t, \mu_t) \leq C(\varepsilon t)^{-d/2p_0} W_p^p(\varrho_t, \mu_t),$$

where C is a positive constant that depends on p, p_0 and $\|\nabla^2 W\|_{L^{p_0}}$ only. We deduce :

$$W_p^p(\varrho_t, \mu_t) \leq W_p^p(\varrho_0, \mu_0) e^{\int_0^t C(\varepsilon \tau)^{-d/2p_0} d\tau},$$

provided $p_0 > \frac{d}{2}$ so that $\tau^{-d/2p_0}$ is integrable on $(0, t]$. Under this assumption, using Lemma 3.8 along with the fact that $\varrho_0 = \varrho^{ini}$, we get, for some constant $C > 0$ depending on d, p, p_0 and $\|\nabla^2 W\|_{L^{p_0}}$ only :

$$\forall t \in [0, T], \quad W_p^p(\varrho_t, \mu_t) \leq C e^{-C(\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{-d/2p_0})} e^{Ct^{1-d/2p_0}} \leq C e^{-C(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{-d/2p_0})} e^{CT^{1-d/2p_0}},$$

which goes to 0 uniformly in $t \in [0, T]$, as $\varepsilon \rightarrow 0$, provided $\alpha < -d/2p_0$. Since $-d/2p_0 > -1$, it is possible to make such a choice while guaranteeing $\alpha \in (-1, 0)$. To finish, we conclude the proof as in that of Corollary 3.1.

Now, note that $\Delta W \leq 0$ ensures that any L^p norm of solutions to (3.11) is nonincreasing in time. Therefore, when the initial datum belongs to $L^{p'_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{\frac{p_0}{p_0-p}}(\mathbb{R}^d)$, estimate (3.69) still holds for $\varepsilon = 0$ between any two solutions to (3.11) and gives uniqueness of the solution among the class of $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{W}_2(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty([0, T], L^{p'_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{\frac{p_0}{p_0-p}}(\mathbb{R}^d))$ solutions. \square

3.2.5 Higher convergence rate for steady states under assumptions (A0)-(A1)-(A4-p)

In this section, we compare stationary solutions to the aggregation-diffusion equation (3.10a) for a given $\varepsilon > 0$ with stationary solutions to the aggregation equation (3.11). We discard, in this section, the assumptions of λ -convexity and Lipschitz continuity on W but still assume that assumptions (A0) and (A1) hold. In addition, we require the potential to satisfy assumption (A4-p), that is, to be at least as attractive as $|x|^p$, for some $p \in [1, \infty)$.

The question we address here is linked to the commutation of limits $\varepsilon \rightarrow 0$ and $t \rightarrow +\infty$ for solutions to aggregation-diffusion equations (see the following diagram). The blue arrows are tackled in this paper and consist in novel contributions : in the previous section, we treated the convergence of ϱ_t^ε towards ϱ_t as $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformly in time in Wasserstein distance, essentially for W Lipschitz continuous. The convergence of the viscous steady states $\varrho_\infty^\varepsilon$ towards the steady state of the inviscid equation, that is the Dirac mass δ_{x_0} up to translations, is investigated in the present section. The red arrow, that is the convergence of [finir](#)

$$\begin{array}{ccc}
 \varrho_t^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & \varrho_t \\
 \downarrow t \rightarrow +\infty & & \downarrow t \rightarrow +\infty \\
 \varrho_\infty^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & \delta_{x_0}
 \end{array}$$

Note that assumption (A4-p) along with (A0) implies $W(x) \geq C \frac{|x|^p}{p}$ for all $x \in \mathbb{R}^d$. If, in addition, W satisfies assumption (A1) then W is l.s.c on \mathbb{R}^d and this implies that \mathcal{W} is l.s.c for the weak convergence thanks to Lemma 3.1.

Also, without loss of generality, we only consider measures with 0 center of mass, that is, measures $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ verifying :

$$\int x \varrho(dx) = 0.$$

We define steady states for the aggregation-diffusion equation in the spirit of [78] :

Définition 3.2. *Let $\varepsilon \geq 0$. A steady state for the aggregation-diffusion equation (3.10a) is a probability measure $\varrho \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ such that :*

$$\text{if } \varepsilon = 0, \quad \widehat{\nabla W} * \varrho = 0, \quad \text{on } \text{supp}(\varrho),$$

and, if $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} \nabla W * \varrho + \varepsilon \frac{\nabla \varrho}{\varrho} = 0 & \text{on } \mathbb{R}^d, \\ \varrho > 0 & \text{on } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

One can prove that this definition is equivalent to that of stationary solutions, in the sense of distributions, to equation (3.10). Besides, if $\varepsilon > 0$, one can show that a distributional solution to the elliptic problem $-\nabla \cdot (\nabla W * \varrho) \varrho = \varepsilon \Delta \varrho$ is necessarily regular and positive on \mathbb{R}^d (see Theorem 3.4).

The following lemma justifies why we compare steady states for the aggregation equation to the Dirac mass.

Lemme 3.16. *Under assumptions (A0)-(A1)-(A4-p) for $p \geq 1$, the unique steady state for the aggregation equation (4.2a) is, up to a translation, the Dirac mass δ_0 .*

Démonstration. Let ϱ be a steady state for (3.11) and assume that ϱ is centered. Since $\widehat{\nabla W} * \varrho = 0$ on the support of ϱ , testing against ϱx and using Lemma 3.6 with the odd vector field $\widehat{\nabla W}$ yields :

$$\iint \widehat{\nabla W}(x-y) \cdot (x-y) \varrho(dx) \varrho(dy) = 0.$$

Under assumption (A4-p), we therefore have $\iint |x-y|^p \varrho(dx) \varrho(dy) = 0$. In particular $\varrho \otimes \varrho$ is concentrated on the diagonal. Now, if ϱ is not a Dirac mass, then there exists disjoint Borel sets A et B with $\varrho(A) > 0$ and $\varrho(B) > 0$. Then we have, since $A \times B$ is disjoint from the diagonal

$$0 = \varrho \otimes \varrho(A \times B) = \varrho(A) \varrho(B) > 0,$$

and this contradiction concludes the proof. \square

Note that the Dirac mass is actually the only minimizer of the interaction energy \mathcal{W} under these assumptions. Conversely, Proposition 7.20 in [112] ensures that minimizers of the energy F^ε are actually steady states. This provides a way to prove existence of steady states for (3.10a) when $\varepsilon > 0$.

Existence of minimizers of F^ε for $\varepsilon > 0$

Proposition 3.6. *Assume that W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A4-p) for some $p \geq 1$ and let $\varepsilon \geq 0$ be fixed. The functional $F^\varepsilon = \mathcal{W} + \varepsilon \mathcal{U}$ admits a minimizer over $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ that actually has finite p -th order moment.*

Remarque 3.14. We were not able to prove uniqueness of the minimizer under such assumptions on W but it is likely to hold. Moreover, numerical illustrations will show that, if we remove assumption (A4-p), multiple steady states can coexist even though $\varepsilon > 0$ (in case $\varepsilon = 0$, it is easy to build explicit counterexamples).

To prove this proposition, we will use that under assumptions (A0) and (A4-p), controlling $\mathcal{W}(\varrho)$ gives control on $\iint |x-y|^p \varrho(dx) \varrho(dy)$, and this latter quantity is equivalent to $M_p(\varrho)$ whenever ϱ is centered, thanks to the following lemma :

Lemme 3.17. *Let $p \in [1, \infty)$ and $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Assume that the center of mass of ϱ is 0. Then :*

$$M_p(\varrho) \leq \iint |x-y|^p \varrho(dx) \varrho(dy) \leq 2^{p-1} M_p(\varrho).$$

Démonstration. Let $u(x) = \int |x-y|^p \varrho(dy)$. Since $p \geq 1$, u is a convex function and therefore, using a Jensen inequality, we get :

$$M_p(\varrho) = u(0) = u\left(\int x \varrho(dx)\right) \leq \int u(x) \varrho(dx).$$

In other terms, $M_p(\varrho) \leq \iint |x-y|^p \varrho(dx) \varrho(dy)$. The upper bound comes from the inequality $|x-y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$. \square

Démonstration. Let $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of probability measures that minimize F^ε . We can assume that these measures are centered because F^ε is invariant under translation. Up to an extraction, we can assume that $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges weakly towards some $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$. To ensure that $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, we need to prove tightness of $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$. To do so, let us find a bound on $M_p(\varrho_n)$.

Since $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a minimizing sequence, $F^\varepsilon(\varrho_n) = \mathcal{W}(\varrho_n) + \varepsilon \mathcal{U}(\varrho_n)$ is bounded from above by some constant that we still denote $C > 0$. Moreover, using assumption (A0) and (A4- p) and Lemma 3.17, since ϱ_n is centered, we have :

$$\mathcal{W}(\varrho_n) \geq \frac{C}{2p} \iint |x - y|^p \varrho_n(dx) \varrho_n(dy) \geq \frac{C}{2p} M_p(\varrho_n).$$

In order to get a lower bound involving $M_p(\varrho_n)$ on the entropy term, recall that, using a Legendre transform, $y \ln y + e^{z-1} \geq yz$ for all $y \geq 0$ and $z \in \mathbb{R}$. Setting, for $x \in \mathbb{R}^d$, $y = \varrho_n(x)$ and $z = -|x|^{\alpha p}$ for some exponent $\alpha > 0$ to be specified later, and integrating over $x \in \mathbb{R}^d$, we get :

$$\int \varrho_n \ln \varrho_n \geq - \int (|x|^p)^\alpha \varrho_n(dx) + \int e^{-|x|^{\alpha p} - 1} dx$$

Choosing $\alpha \in (0, 1)$ so that $x \mapsto |x|^\alpha$ is concave, and using a Jensen inequality, we deduce $\mathcal{U}(\varrho_n) \geq -M_p(\varrho_n)^\alpha + C(p, \alpha)$, where $C(p, \alpha)$ depends on α and p only. Finally, we obtain :

$$\frac{C}{2p} M_p(\varrho_n) - \varepsilon M_p(\varrho_n)^\alpha + \varepsilon C(p, \alpha) \leq C,$$

which implies, since $\alpha < 1$, that $M_p(\varrho_n)$ is uniformly bounded with respect to n .

On the one hand, this implies that $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is tight, hence $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Since M_p is l.s.c on $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ and $\varrho_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} \varrho$, we also get $\varrho \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. On the other hand, the uniform bound on $M_p(\varrho_n)$ along with Lemma 3.3 ensures that $M_q(\varrho_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M_q(\varrho)$ for any $q \in (0, p)$. Lemma 3.2 then gives $\mathcal{U}(\varrho) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\varrho_n)$, and, since \mathcal{W} is l.s.c for the weak convergence, we get $F^\varepsilon(\varrho) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F^\varepsilon(\varrho_n)$. This proves that ϱ minimizes F^ε since $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a minimizing sequence. \square

$O(\varepsilon)$ convergence rate in W_p for potentials such that $\nabla W(x) \cdot x \geq C|x|$

In this section, we focus on assumption (A4-1) under which the potential is “really pointy” and the aggregation compensates the diffusion so that convergence occurs at rate $O(\varepsilon)$:

Théorème 3.9. *Assume that W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A4-1). There exists a constant $C > 0$ depending on d , such that for any $\varepsilon > 0$ and ϱ^ε steady state for (3.10a) which center of mass is 0, the following estimate holds :*

$$W_1(\varrho^\varepsilon, \delta_0) \leq C\varepsilon. \quad (3.71)$$

Proof of Theorem 3.9. Let $\varepsilon > 0$ and let ϱ^ε be a steady state for (3.10), that is :

$$\nabla W * \varrho^\varepsilon + \varepsilon \frac{\nabla \varrho^\varepsilon}{\varrho^\varepsilon} = 0. \quad (3.72)$$

Testing the above equation against $\varrho^\varepsilon x$ we obtain :

$$\int \varrho^\varepsilon x \cdot \nabla W * \varrho^\varepsilon dx + \varepsilon \int x \cdot \nabla \varrho^\varepsilon dx = 0$$

Integrating by parts and using Lemma 3.6 with the odd vector field ∇W yields :

$$\frac{1}{2} \iint \nabla W(x - y) \cdot (x - y) \varrho^\varepsilon(dx) \varrho^\varepsilon(dy) = \varepsilon d.$$

The desired result then follows from assumption (A4-1) and Lemma 3.17 with $p = 1$, since $W_1(\varrho^\varepsilon, \delta_0) = M_1(\varrho^\varepsilon)$. \square

Note that, from equation (3.72), one has $\varrho^\varepsilon = C(\varepsilon)e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon}$. The value of the constant $C(\varepsilon)$ can be computed by imposing a total mass 1, so that we get $\varrho^\varepsilon = \frac{e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon}}{\int e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon}}$. Using this equality along with estimate (3.71), we obtain a bound in W_p distance for $p \in [1, \infty)$ provided W is also Lipschitz continuous :

Théorème 3.10. *Assume that W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A4-1). There exists a constant $C > 0$ depending on d and a_∞ , such that for any $p \in [1, \infty)$, $\varepsilon > 0$ and ϱ^ε steady state for (3.10a) which center of mass is 0, the following estimate holds :*

$$W_p(\varrho^\varepsilon, \delta_0) \leq C\varepsilon. \quad (3.73)$$

Remarque 3.15. At least in dimension one, this result is optimal. Indeed, we can take for W the Newtonian potential $W(x) = |x|$, for which, using the correspondence with Burgers' equation, ϱ^ε can be written as $\varrho^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, where $\varrho(x) = \frac{1 - \tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4}$, and a scaling argument then gives $W_p^p(\varrho^\varepsilon, \delta_0) = \varepsilon^p M_p(\varrho)$.

Démonstration. Since

$$\varrho^\varepsilon = \frac{e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon}}{\int e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon}},$$

we have :

$$W_p^p(\varrho^\varepsilon, \delta_0) = \frac{\int |x|^p e^{-W * \varrho^\varepsilon(x) / \varepsilon} dx}{\int e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon}},$$

Now, since W is Lipschitz continuous, one has

$$|W * \varrho^\varepsilon - W * \delta_0| \leq a_\infty \sup_{Lip(\varphi) \leq 1} \int \varphi d(\varrho^\varepsilon - \delta_0) = a_\infty W_1(\varrho^\varepsilon, \delta_0) \leq C\varepsilon,$$

because of Theorem 3.9. Thus, $-W * \varrho^\varepsilon \leq C\varepsilon - W$ and therefore :

$$\int |x|^p e^{-W * \varrho^\varepsilon(x) / \varepsilon} dx \leq C \int |x|^p e^{-W(x) / \varepsilon} dx \leq C\varepsilon^{p+d} \int |y|^p e^{-W(\varepsilon y) / \varepsilon} dy,$$

using the change of variables $x = \varepsilon y$. Recall that Assumption (A4-1) ensures $W(x) \geq C|x|$ for all $x \in \mathbb{R}^d$. This allows us to bound $\int |y|^p e^{-W(\varepsilon y) / \varepsilon} dy$ uniformly with respect to ε .

On the other hand, since W is a_∞ -Lipschitz continuous, we have $W(x) \leq a_\infty|x| + W(0) = a_\infty|x|$. Integrating with respect to $\varrho^\varepsilon(dx)$, we deduce $W * \varrho^\varepsilon(0) \leq a_\infty W_1(\varrho^\varepsilon, \delta_0)$. Besides, $W * \varrho^\varepsilon$ is also a_∞ -Lipschitz continuous. Hence,

$$W * \varrho^\varepsilon(x) \leq W * \varrho^\varepsilon(0) + a_\infty|x| \leq a_\infty W_1(\varrho^\varepsilon, \delta_0) + a_\infty|x| \leq C\varepsilon + a_\infty|x|,$$

thanks again to estimate (3.71). After another rescaling, we deduce :

$$\int e^{-W * \varrho^\varepsilon / \varepsilon} \geq C\varepsilon^d,$$

thus getting $W_p^p(\varrho^\varepsilon, \delta_0) \leq C \frac{\varepsilon^{p+d}}{\varepsilon^d} = C\varepsilon^p$, which concludes the proof. \square

$O(\varepsilon^{1/p})$ convergence rate in W_p for potentials such that $\nabla W(x) \cdot x \geq C|x|^p$

Assume W satisfies assumptions (A0), (A1) and (A4- p) for some $p \in [1, \infty)$. Under this assumption, a straightforward adaptation of the proof of Theorem 3.9 provides an estimate on $W_p(\varrho^\varepsilon, \delta_0)$:

Théorème 3.11. *Assume that W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A4-p) for some $p \in [1, \infty)$. There exists a constant $C > 0$ depending on d , such that for any $\varepsilon > 0$ and ϱ^ε steady state for (3.10a) which is centered, the following estimate holds :*

$$W_p(\varrho^\varepsilon, \delta_0) \leq C\varepsilon^{1/p}. \quad (3.74)$$

Remarque 3.16. It is possible to prove optimality of this rate for $p = 2$. Let us consider the quadratic potential $W(x) = |x|^2$, that satisfies assumption (A4-2). Recall that $\varrho^\varepsilon = \frac{e^{-W*\varrho^\varepsilon/\varepsilon}}{\int e^{-W*\varrho^\varepsilon/\varepsilon}}$. Expanding $W(x-y) = |x-y|^2$ and using both facts that the total mass of ϱ is 1 and that ϱ^ε is centered, one has :

$$\begin{aligned} e^{-W*\varrho^\varepsilon/\varepsilon} &= \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left(\int |x|^2 \varrho^\varepsilon(y) dy - 2x \cdot \int y \varrho^\varepsilon(y) dy + \int |y|^2 \varrho^\varepsilon(y) dy \right) \right\} \\ &= e^{-|x|^2/\varepsilon} e^{-W_2^2(\varrho^\varepsilon, \delta_0)/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Hence, $\varrho^\varepsilon(x) = \frac{e^{-|x|^2/\varepsilon}}{\int e^{-|x|^2/\varepsilon} dx}$, which in turn yields :

$$W_2^2(\varrho^\varepsilon, \delta_0) = \frac{\int |x|^2 e^{-|x|^2/\varepsilon} dx}{\int e^{-|x|^2/\varepsilon} dx}.$$

A change of variables in both integrals then gives $W_2^2(\varrho^\varepsilon, \delta_0) = C\varepsilon$.

3.2.6 Numerical illustrations

This sections aims to illustrate our convergence results both in the evolutive case and in the stationary case. The implementation of the schemes has been done in Python and the code is available at github.com/strantien/aggregation. Tests are conducted on $[-1, 1]$, with $2J + 1$ cells, and the velocity field is always discretized by (3.42). Wasserstein distances between two arbitrary probability measures are computed using the POT package.

Evolutionary solutions

We begin with the convergence rate in Wasserstein distance of the viscous solutions ϱ^ε associated with a fixed initial datum ϱ^{ini} (not depending on ε). In this subsection $\varrho_{\Delta x}^\varepsilon$ is computed using the implicit discretization (3.43), for which the CFL condition is less restrictive than the parabolic CFL condition of the explicit scheme. We also implemented no-flux boundary conditions so as to preserve total mass. In the absence of a reference solution, the convergence rate w.r.t ε is estimated taking Δx small enough so that $\varrho_{\Delta x}^\varepsilon$ approximates ϱ^ε , and computing $W_p(\varrho_{\Delta x, T}^{\varepsilon_{i+1}}, \varrho_{\Delta x, T}^{\varepsilon_i})$.

In Theorems 3.6 and 3.7, when W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A3), we proved convergence at rate $O(\varepsilon^{1/2})$ in W_2 distance, which is what we recover when W is smooth, as shows Figure 3.1. In practice, for this test case, we observe $O(\varepsilon^{1/2})$ convergence rate in W_p distance for any $p \in [1, +\infty[$. However, in case W has a Lipschitz discontinuity at the origin (Figure 3.2) we observe convergence at order 1 in W_1 distance. This is the superconvergence phenomenon investigated by Tang, Teng and Zhang [119, 121] in the framework of scalar conservation laws. In terms of aggregation, the interpretation is that, when W is singular, the concentration is strong enough to compensate part of the diffusion. In other W_p distances, converges seems to occur at order 1 when ε is not too small, and then degenerates quite clearly towards order $1/p$ for any $p \in [1, +\infty[$ (see Figure 3.3 for $p = 3$). Note that, in every case, the convergence order is robust with respect to the test case (be it for smooth or singular initial data, e.g. Dirac masses).

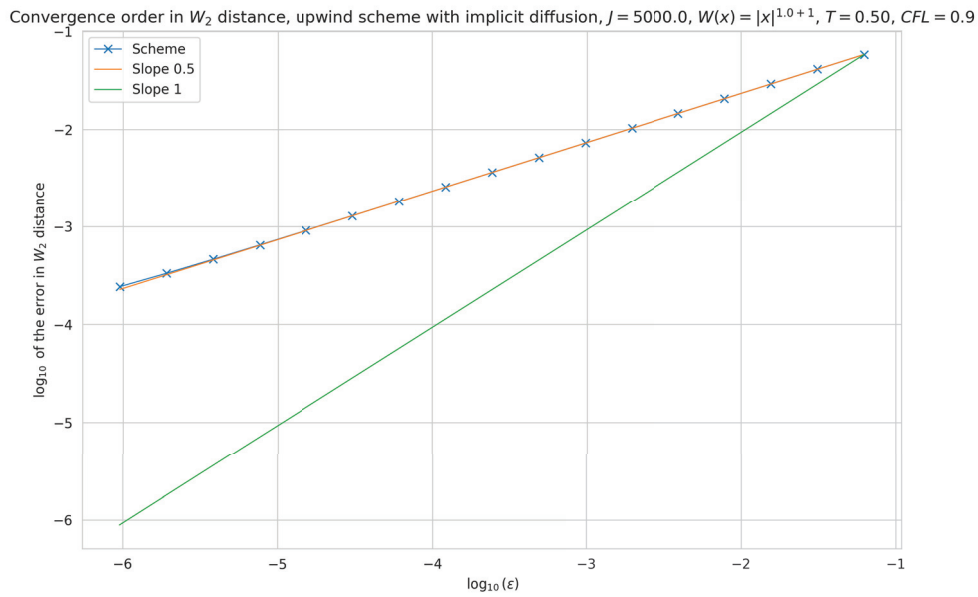


FIGURE 3.1 – Order 1/2 convergence in W_2 distance of ϱ_T^ε towards ϱ_T for $\varrho^{ini}(x) = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$, $W(x) = |x|^2$.

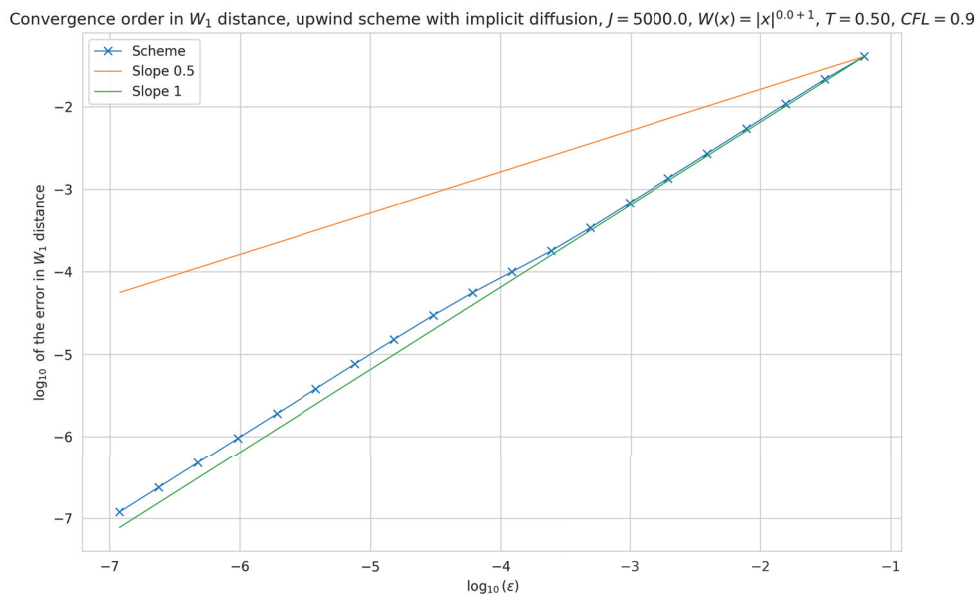


FIGURE 3.2 – Order 1 convergence in W_1 distance of ϱ_T^ε towards ϱ_T for $\varrho^{ini}(x) = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$, $W(x) = |x|$.

Steady states

In order to simulate the steady states for $\varepsilon > 0$, recall that they are characterized, over the whole space, by the following equation :

$$\varrho^\varepsilon = \frac{e^{-W*\varrho^\varepsilon/\varepsilon}}{\int e^{-W*\varrho^\varepsilon/\varepsilon}}. \quad (3.75)$$

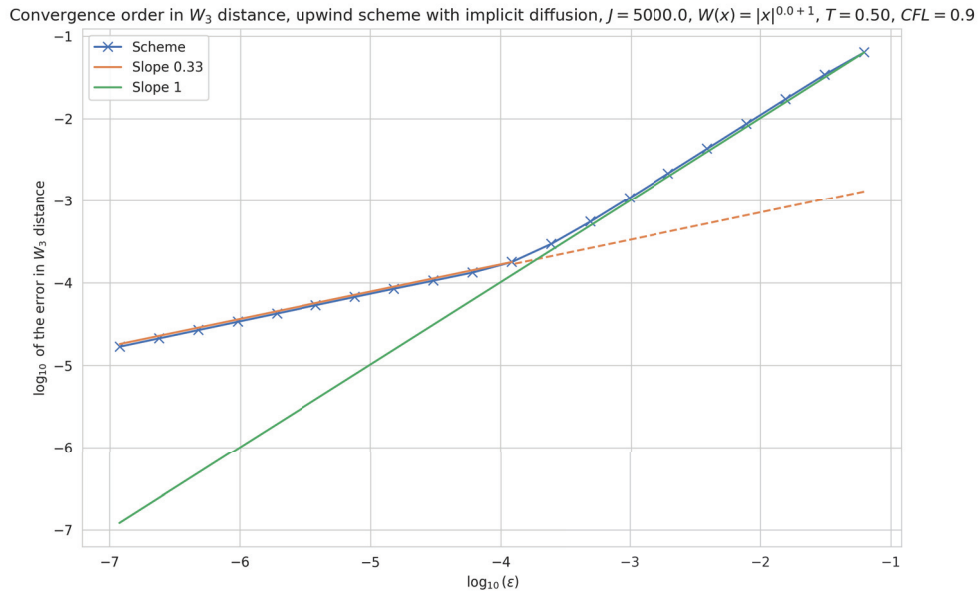


FIGURE 3.3 – Order 1/3 convergence in W_3 distance, for small ϵ , of ϱ_T^ϵ towards ϱ_T for $\varrho^{ini}(x) = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$, $W(x) = |x|$.

We therefore use a fixed-point method on equation (3.75), which stops as soon as the W_p distance between two iterations exceeds some tolerance. Numerically, we observe that this method turns two symmetric Gaussian bumps almost immediately (after the first iteration) into a centered Gaussian whenever W is attractive and Lipschitz.

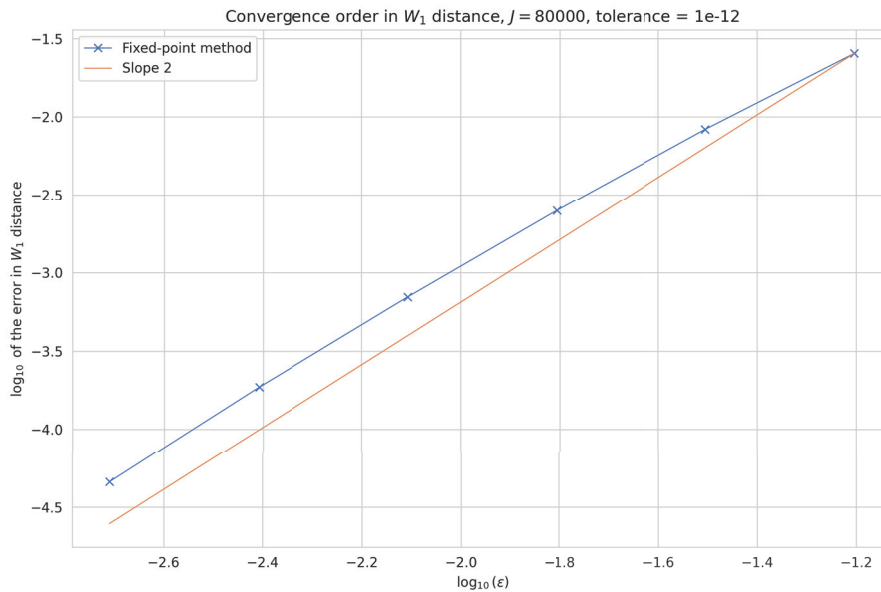


FIGURE 3.4 – Order of convergence in W_1 distance of ϱ^ϵ towards δ_0 , for the non-Lipschitz potential $W(x) = \sqrt{|x|} + |x|$. The initial density is the centered Gaussian $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$.

We first investigate the convergence rate towards the Dirac mass, for centered steady states. The

error is estimated computing the integral $\int |x|^p \varrho(dx) = W_p^p(\varrho, \delta_0)$. When W satisfies assumptions (A0)-(A1)-(A4-1), we proved $O(\varepsilon)$ convergence rate in W_1 distance, which we do recover in Table 3.1 for $W(x) = |x|$. We also explore the case when W verifies (A0)-(A1)-(A4-1) but is not Lipschitz continuous, which is the case of $W(x) = \sqrt{|x|} + |x|$. For this potential, we obtain, in Figure 3.4 convergence at order 1.82264413 which is slightly less than 2, in W_1 distance. This can be linked to the fact that W satisfies a sort of assumption (A4- $\frac{1}{2}$) when $|x| \leq 1$. Under assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A4-3), we observe convergence at rate $1/3$ in W_3 distance as we proved in (3.74), as shows Figure 3.5. More generally, under assumptions (A0)-(A1)-(A2)-(A4- p), convergence at

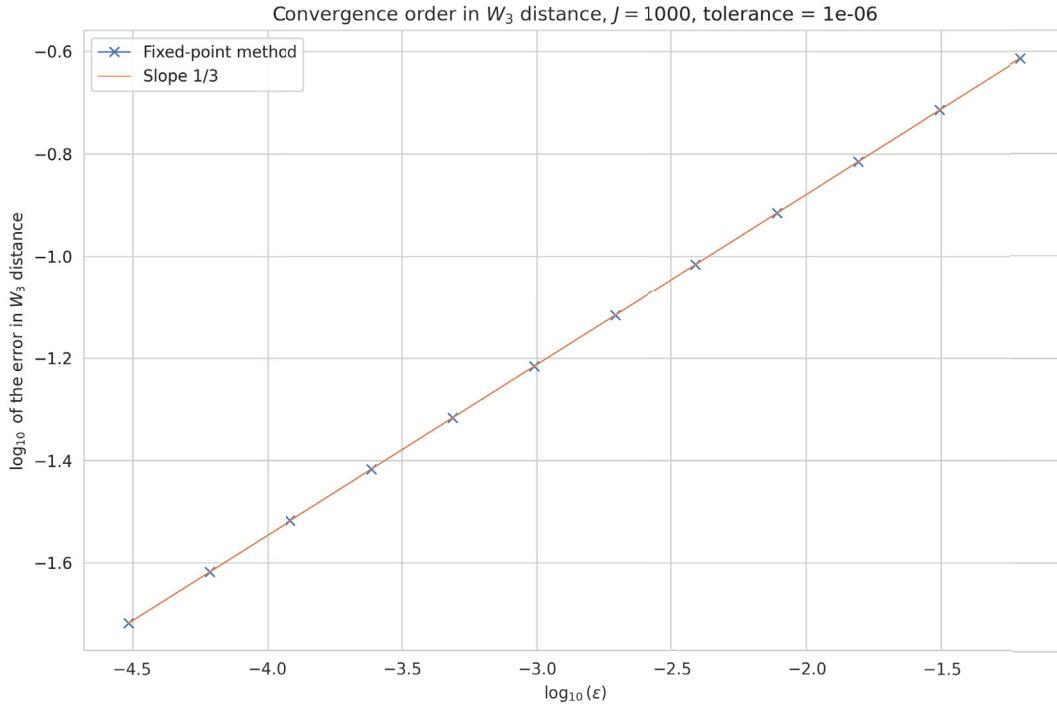


FIGURE 3.5 – $O(\varepsilon^{1/3})$ convergence in W_3 distance of ϱ^ε towards δ_0 , $W(x) = |x|^3$. The initial density is the centered Gaussian $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$.

rate $1/p$ seems to occur in any W_q distance, $q \in [1, +\infty[$, which is what we proved in for $p = 1$ or for $p = q$. To illustrate this latter case, we compute the convergence order in W_p distance for $W(x) = |x|^p$, which seems indeed to be $1/p$, see Table 3.1 (when $p = 1$, since the potential is pointy, one has to refine the mesh so as to observe proper convergence at order 1).

p	Order	J
1	1.00205259	50000
2	0.49999997	2000
3	0.33333333	2000
4	0.25000000	2000
5	0.20000000	2000

TABLE 3.1 – Convergence order $\simeq \frac{1}{p}$ of ϱ^ε towards δ_0 for $W(x) = |x|^p$, $tol = 10^{-6}$, $\varepsilon_i = 2^{-i}$, $i = 4, \dots, 16$, initial density $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$

The study of steady states is closely linked to the long-time asymptotics of the equation. We give some properties concerning the long-time asymptotics for the aggregation equation (3.11),

which have a lot to do with the contraction property 1.4.

Chapitre 4

Approximation par relaxation

Résumé. Dans ce travail en collaboration avec Benoît Fabrèges, Frédéric Lagoutière et Nicolas Vauchelet, nous étudions une approximation par relaxation pour l'équation d'agrégation avec potentiel pointu, dans l'esprit des travaux Jin et Xin pour les lois de conservation, en une dimension d'espace. On étudie la convergence de cette approximation lorsque le paramètre de relaxation tend vers 0, en particulier l'approximation rigoureuse des solutions à valeurs mesurées de l'équation d'agrégation telles que définies dans [36]. On fournit une estimation de la vitesse de convergence pour le potentiel Newtonien $W(x) = |x|$ en dimension 1, et on étudie l'approximation numérique du système de relaxation par des schémas qui préservent l'asymptotique. Ces travaux ont donné lieu à une publication dans le journal *Axioms*, MDPI, sous le titre *Relaxation Limit of the Aggregation Equation with Pointy Potential* et la version qui suit en est une version augmentée par mes soins.

4.1 Introduction

The so-called aggregation equation has been widely used to model the dynamics of a population of individuals in interaction. Let $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sufficiently smooth, be the interaction potential governing the population. Then, in one dimension in space, the dynamics of the density of individuals, denoted by ϱ , is governed by the following equation, for $t > 0$ and $x \in \mathbf{R}$:

$$\partial_t \varrho + \partial_x (a[\varrho] \varrho) = 0, \quad \text{with} \quad a[\varrho] = -W' * \varrho. \quad (4.1)$$

Such equations appear in many applications in population dynamics : for instance, in the description of collective migration of cells by swarming, of bacterial motion by chemotaxis, crowd motion, flocking of birds, or fishes school, see, e.g., [95, 27, 125, 124, 45, 73]. From a mathematical point of view, these equations have been widely studied. When the potential W is not smooth enough, it is known that weak solutions may blow up in finite time [6, 7]. Thus, the existence of weak (measure) solutions has been investigated in, e.g., [31, 36]. Global in time well-posedness has been established for so-called pointy potentials, that are potentials which are Lipschitz continuous, smooth except at the origin where they have a Lipschitz discontinuity, even and λ -convex for some $\lambda \leq 0$.

In this paper, we consider a relaxation limit in the spirit of Jin–Xin [76] of the aggregation equation in one space dimension on \mathbf{R} . For a given $c > \|a\|_\infty$, where $\|a\|_\infty$ denotes a Lipschitz constant of W , we introduce the system :

$$\partial_t \varrho + \partial_x \sigma = 0, \quad (4.2a)$$

$$\partial_t \sigma + c^2 \partial_x \varrho = \frac{1}{\varepsilon} (a[\varrho] \varrho - \sigma) \quad (4.2b)$$

$$a[\varrho] = -W' * \varrho \quad (4.2c)$$

This system is complemented with initial data ϱ_0 and $\sigma_0 := a[\varrho_0]\varrho_0$. It is clear, at least formally, that when $\varepsilon \rightarrow 0$, the solution ϱ of system (4.2) converges to the one of the aggregation equation (4.1) (and it is actually true only if $c > \|a\|_\infty$). We mention that the aggregation equation may also be derived thanks to a hydrodynamical limit of kinetic equations [45, 73, 71].

The aim of this work is to study the convergence as $\varepsilon \rightarrow 0$ of the relaxation system (4.2) towards the aggregation equation. More precisely, we establish a precise estimate of the speed of convergence, and we also illustrate with some numerical simulations. These estimates are obtained only in the case of the Newtonian potential in one dimension $W(x) = \frac{1}{2}|x|$. Indeed, in this particular case, we may link the aggregation equation to a scalar conservation law [16, 70]. The same link holds for the relaxation system (4.2)—denoting :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x \varrho(t, dy), \quad v(t, x) = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x \sigma(t, dy),$$

where the notation $\int \varrho(t, dy)$ stands for the integral with respect to the probability measure $\varrho(t)$, then we verify easily that :

$$u = -W' * \varrho, \quad \varrho = -\partial_x u,$$

so that $a[\varrho] = u$. Then, integrating (4.2), we deduce that (u, v) is a solution to :

$$\partial_t u + \partial_x v = 0 \tag{4.3a}$$

$$\partial_t v + c^2 \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} u^2 - v \right), \tag{4.3b}$$

which is complemented with the initial data $u_0 = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x \varrho_0(dy)$, and $v_0 = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x \sigma_0(dy)$. System (4.3) is exactly the Jin-Xin relaxation system for the Burgers equation (see [76]). Formally, as $\varepsilon \rightarrow 0$, we expect that the solution to the above system converges towards the solution to the Burgers equation :

$$\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x u^2 = 0.$$

Introducing the quantities $a = v - cu$ and $b = v + cu$, the system (4.3) on (u, v) is equivalent to the diagonalized system on (a, b) :

$$\partial_t a - c \partial_x a = \frac{1}{\varepsilon} G(a, b) \tag{4.4a}$$

$$\partial_t b + c \partial_x b = \frac{1}{\varepsilon} G(a, b). \tag{4.4b}$$

where the source term is given by $G(a, b) = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2c} \right)^2 - \frac{a+b}{2}$. Such a system is called weakly coupled system of conservation laws with source term. We refer to [97, 98] for general properties of such systems – local well-posedness in L^∞ , continuation theorem, comparison principle when the right-hand side is monotone, etc.

Based on that diagonalization, we will adapt the techniques developed by Katsoulakis and Tzavaras to obtain convergence estimates for our system. In [80], the authors adapt the seminal work of Kuznetsov [86] to the relaxation system for hyperbolic conservation laws with several variables of space, using Bouchut and Perthame's reformulation of Kuznetsov's method (see [18, 20]). They obtain $O(\sqrt{\varepsilon})$ convergence rate in L^1 norm. Previously, L^1_{loc} convergence in space had been obtained by Natalini in [96] using compactness methods. About convergence rates, we may also mention the results of Kurganov and Tadmor [85] who obtained $O(\varepsilon)$ convergence rate in W_1 distance (then called Lip' distance) and those of Teng [122] who proved $O(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon)$ rate in L^1 distance for piecewise smooth solutions with finitely many discontinuities, when the flux is convex, which is the case here. In some cases, this result can be improved in $O(\varepsilon)$ and is to be linked with the superconvergence results known for the viscous approximation of scalar conservation laws with convex flux [121, 119].

In this work, our contribution is to adapt the method of [80] to the unbounded Burgers flux $f(u) = \frac{u^2}{2}$ which do not fit directly into the framework of [80]. For the Burgers flux, computations and bounds can be made explicit, and we translate the convergence result towards scalar conservation laws to the aggregation equation (4.1).

More precisely, for the relaxation approximation (4.2) of the aggregation equation, our main convergence result is the following :

Théorème 4.3. *Let $\varrho_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, $c > 1/2$ and set $\sigma_0 = a[\varrho_0]\varrho_0$. There exists a constant $C > 0$ such that, for any $\varepsilon > 0$, denoting $(\varrho^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ the solution to (4.2) with initial data (ϱ_0, σ_0) , one has :*

$$\forall T > 0, \quad W_1(\varrho(T), \varrho^\varepsilon(T)) \leq C(\sqrt{\varepsilon T} + \varepsilon),$$

where $\varrho \in C([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ is the unique solution to (4.1) with initial datum ϱ_0 .

In order to illustrate this convergence result, numerical discretizations of the relaxation system (4.2) are investigated. The schemes we propose are such that they are uniform with respect to ε , that is, they satisfy the so-called asymptotic preserving (AP) property [75]. Therefore, such schemes in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ must be consistent with the aggregation equation. The numerical simulations of solutions to the aggregation equation for pointy potentials have been studied by several authors, see, e.g., [71, 36, 64, 34, 54, 32]. In particular, some authors pay attention to recover the correct behavior of the numerical solutions after the blow-up time. To do so, particular attention must be paid to the definition of the product $a[\varrho]\varrho$ when ϱ is a measure.

In this article, we propose two discretizations of the relaxation system which satisfy the AP property. In a first approach, we propose a simple splitting algorithm where we split the transport part and the right hand side in system (4.2). It results in a numerical scheme which is very simple to implement and for which we easily verify the AP property. The second approach relies on a well-balanced discretization in the spirit of [63, 64]. This scheme is more expensive to implement than the first scheme, but its numerical solution has less diffusion, as it is illustrated by our numerical results.

The outline of the paper is the following. In Section 4.2, after recalling some useful notations, we prove our main result : an estimation of the speed of convergence in the Wasserstein W_1 distance with respect to ε of the solutions to the relaxation system (4.2) towards the solution to the aggregation equation (4.1) in the case $W(x) = \frac{1}{2}|x|$. The numerical discretization is investigated in Section 4.3. Two numerical schemes verifying the AP property are proposed. The first scheme is based on a splitting algorithm, whereas the second scheme relies on a well-balanced discretization. Numerical results and comparisons are provided in Section 4.4.

4.2 Convergence Result

4.2.1 Notations

Before stating and proving our main results, we first recall some useful notations and results. Since we are dealing with conservation laws (in which the total mass is conserved), we will work in some space of probability measures, namely the Wasserstein space of order $p \in [1, +\infty[$, which is the space of probability measures with a finite order p moment :

$$\mathcal{P}_p(\mathbf{R}) = \left\{ \mu \text{ nonnegative Borel measure, } \mu(\mathbf{R}) = 1, \int |x|^p \mu(dx) < \infty \right\}.$$

This space is endowed with the Wasserstein distance defined by (see, e.g., [128, 112])

$$W_p(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \left\{ \int |y - x|^p \gamma(dx, dy) \right\}^{1/p},$$

where $\Gamma(\mu, \nu)$ is the set of measures on \mathbf{R}^2 with marginals μ and ν , meaning that :

$$\Gamma(\mu, \nu) = \left\{ \gamma \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^2); \forall \xi \in C_0(\mathbf{R}), \int_{\mathbf{R}^2} \xi(y_0) \gamma(dy_0, dy_1) = \int_{\mathbf{R}} \xi(y_0) \mu(dy_0), \right. \\ \left. \int_{\mathbf{R}^2} \xi(y_1) \gamma(dy_0, dy_1) = \int_{\mathbf{R}} \xi(y_1) \nu(dy_1) \right\},$$

with $C_0(\mathbf{R})$, the set of continuous functions on \mathbf{R} that vanish at infinity. From a simple minimization argument, we know that in the definition of W_p , the infimum is actually a minimum. A map that realizes the minimum is called an optimal transport plan, the set of which is denoted by $\Gamma_0(\mu, \nu)$.

In the one-dimensional framework, we can make use of additional representations to the Wasserstein distances. Indeed, any probability measure μ on the real line \mathbf{R} can be described in terms of its cumulative distribution function $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x))$, which is a right-continuous and non-decreasing function with $F_\mu(-\infty) = 0$ and $F_\mu(+\infty) = 1$. Then, we can define the generalized inverse F_μ^{-1} of F_μ (or monotone rearrangement of μ) by $F_\mu^{-1}(z) := \inf\{x \in \mathbf{R} / F_\mu(x) > z\}$, it is a right-continuous and non-decreasing function as well, defined on $[0, 1]$. We have for every non-negative Borel map ξ :

$$\int_{\mathbf{R}} \xi(x) \mu(dx) = \int_0^1 \xi(F_\mu^{-1}(z)) dz.$$

In particular, $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R})$ if and only if $F_\mu^{-1} \in L^p(0, 1)$. Moreover, in the one-dimensional setting, there exists a unique optimal transport plan realizing the minimum in the definition of W_p . More precisely, if μ and ν belong to $\mathcal{P}_p(\mathbf{R})$, with monotone rearrangements F_μ^{-1} and F_ν^{-1} , then $\Gamma_0(\mu, \nu) = \{(F_\mu^{-1}, F_\nu^{-1})_\# \mathbb{L}_{(0,1)}\}$ where $\mathbb{L}_{(0,1)}$ is the restriction of the Lebesgue measure on $(0, 1)$. Thus, we have the explicit expression of the Wasserstein distance (see [126, 128]) :

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\int_0^1 |F_\mu^{-1}(z) - F_\nu^{-1}(z)|^p dz \right)^{1/p}, \quad (4.5)$$

and the map $\mu \mapsto F_\mu^{-1}$ is an isometry between $\mathcal{P}_p(\mathbf{R})$ and the convex subset of (essentially) non-decreasing functions of $L^p(0, 1)$.

4.2.2 Convergence Estimates

Before investigating the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in the relaxation system on (u, v) , we first state an existence theorem due to Natalini and Hanouzet for general weakly coupled systems of hyperbolic conservation laws :

Théorème 4.1. [Natalini and Hanouzet [98] Theorems 3.1 and 3.2] *Let $\varepsilon > 0, c \in \mathbf{R}$, and $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be locally Lipschitz continuous. Then, the system :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + c^2 \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v), \end{cases}$$

is equivalent to the following so-called weakly coupled system, by setting $(a, b) = (v - cu, v + cu)$:

$$\begin{cases} \partial_t a - c \partial_x a = \frac{1}{\varepsilon} G(a, b) \\ \partial_t b + c \partial_x b = \frac{1}{\varepsilon} G(a, b), \end{cases}$$

where $G(a, b) = f\left(\frac{b-a}{2c}\right) - \frac{a+b}{2}$. For any initial data $(a_0, b_0) \in L^\infty(\mathbf{R})^2$, there exists $T > 0$ such that the Cauchy problem associated to the above system admits a unique entropy solution on $(0, T) \times \mathbf{R}$, and this solution (a, b) belongs to $\mathcal{C}([0, T], L^1_{loc}(\mathbf{R})^2)$.

Moreover, we have the following alternative : either $(a, b) \in L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})^2$ for all $T > 0$, or there exists $T^* < +\infty$ such that, for any $T < T^*$, we have $(a, b) \in L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})^2$ and $\lim_{T \rightarrow T^*} \|(a, b)\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})^2} = +\infty$.

Remarque 4.1. The system on (a, b) is called weakly coupled because the left-hand side is in diagonal form. The coupling, that is the source term G , do not depend on any derivatives.

This local existence and uniqueness and continuation result do not depend on the fact that the transport part is linear. It also works in case of a nonlinear weakly coupled system :

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_x g(a) = \frac{1}{\varepsilon} G(a, b) \\ \partial_t b + \partial_x h(b) = \frac{1}{\varepsilon} G(a, b), \end{cases}$$

with g, h being locally Lipschitz fluxes.

We now consider the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ for the system (4.3). Compactness methods were used in [96] to get L^1_{loc} convergence in space. However, in order to pass to the aggregation equation, one may want global L^1 convergence, which we prove in the following theorem, along the lines of the work of Katsoulakis and Tzavaras [80].

Théorème 4.2. *Let $u_0 \in L^\infty \cap BV(\mathbf{R})$, $c > \|u_0\|_{L^\infty}$ and set $v_0 = \frac{u_0^2}{2}$. There exists a constant $C > 0$ such that, for any $\varepsilon > 0$, denoting by $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ the solution to (4.3) with initial data (u_0, v_0) , the following estimate holds :*

$$\forall T > 0, \quad \|u(T) - u^\varepsilon(T)\|_{L^1} \leq CTV(u_0)(\sqrt{\varepsilon T} + \varepsilon),$$

where u is the entropy solution to the Burgers equation with initial datum u_0 .

Before going through the proof of this theorem, we state some preliminary lemmas on the source term G .

Lemme 4.1. *Let $\omega \in [0, c[$ and denote $m = \omega\left(\frac{\omega}{2} - c\right)$ and $M = \omega\left(\frac{\omega}{2} + c\right)$. There exists a function $h : [m, M] \rightarrow [m, M]$ such that, for all $a \in [m, M]$, $G(a, h(a)) = 0$. This function is of class \mathcal{C}^1 on $[m, M]$, decreasing, and verifies $h(m) = M$ and $h(M) = m$.*

Proof. First of all, the bound $\omega < c$ implies that $m > -\frac{c^2}{2}$ and $M < \frac{3c^2}{2}$. Now, for a given $a \in \mathbf{R}$, $G(a, b)$ is a second-order polynomial in b with discriminant $\Delta(a) = 16c^2(c^2 + 2a)$, which is nonnegative provided $a \geq -\frac{c^2}{2}$, which the case for $a \in [m, M]$.

Denote $r_\pm(a) := a + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2a}$ the real roots of $G(a, \cdot)$. Whenever $a \geq 0$, we have $r_+(a) \geq 2c^2 > M$ hence $r_+(a) \notin [m, M]$. However, since $m > -\frac{c^2}{2}$, one has for all $a \in [m, M]$, $c^2 + 2a > 0$, and therefore $r_-(a) = a + 2c^2 - 2c\sqrt{c^2 + 2a}$ is of class \mathcal{C}^1 on $[m, M]$. Differentiating, we can show that $r'_-(a) < 0 \Leftrightarrow a < \frac{3c^2}{2}$ which holds true for $a \in [m, M]$. Hence, r_- is decreasing on $[m, M]$. In addition :

$$\begin{aligned} r_-(m) &= \omega\left(\frac{\omega}{2} - c\right) + 2c^2 - 2c\sqrt{c^2 - 2c\omega + \omega^2}, \\ &= \frac{\omega^2}{2} - c\omega + 2c^2 - 2c(c - \omega), \\ &= \frac{\omega^2}{2} + c\omega = M. \end{aligned}$$

A similar computation gives $r_-(M) = m$. Therefore, for all $a \in [m, M]$, $r_-(a)$ remains in $[m, M]$ so setting $h(a) := r_-(a) = a + 2c^2 - 2c\sqrt{c^2 + 2a}$ satisfies the required properties. \square

Note that, by construction, for $b \in [m, M]$, $G(a, b) = 0$ imposes $b = h(a)$ since $h(a)$ is the unique zero of $G(a, \cdot)$ in $[m, M]$.

Lemme 4.2. *Let $\omega \in [0, c[$ and denote $m = \omega\left(\frac{\omega}{2} - c\right)$ and $M = \omega\left(\frac{\omega}{2} + c\right)$ and let $h : [m, M] \rightarrow [m, M]$ as in Lemma 4.1. There exists a constant $C > 0$ such that, for all $a, b \in [m, M]$, one has $|h(a) - b| \leq C|G(a, b)|$.*

Démonstration. Thanks to Lemma 4.1, the desired estimate rewrites as a slope inequality :

$$\forall a, b \in [m, M], \quad \left| \frac{G(a, h(a)) - G(a, b)}{h(a) - b} \right| \geq \frac{1}{C}.$$

Let $a \in [m, M]$ and denote $G(a, \cdot) = G_a$. Then the second-order polynomial G_a attains its minimum at $a + 2c^2$, which is greater than M since $a + 2c^2 \geq m + 2c^2$ and $M - m = 2c\omega < 2c^2$.

Therefore, denoting $p(x, y) = \left| \frac{G_a(x) - G_a(y)}{x - y} \right|$, we have by strict convexity of G_a :

$$\forall b \in [m, M], \quad p(h(a), b) \leq p(M, b) \leq p(a + 2c^2, b) \leq p(a + 2c^2, M) < G'_a(a + 2c^2) = 0.$$

We thus set $C = -\frac{1}{\sup_{a \in [m, M]} p(a + 2c^2, M)} > 0$ and we have as expected :

$$\left| \frac{G(a, h(a)) - G(a, b)}{h(a) - b} \right| = -p(h(a), b) \geq \frac{1}{C}.$$

□

We now dive into the proof of Theorem 4.2.

Proof of Theorem 4.2.

Outline of the proof. Let us denote by u the entropy solution to the Burgers equation with initial datum u_0 and $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ the solution to (4.3) with initial data (u_0, v_0) where $v_0 = \frac{u_0^2}{2}$. We also denote by f the Burgers flux given by $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

The main idea is to obtain Kruzkov-type inequalities on u^ε , that read like :

$$\partial_t |u^\varepsilon - \kappa| + \partial_x \operatorname{sgn}(u^\varepsilon - \kappa) (f(u^\varepsilon) - f(\kappa)) \leq R^\varepsilon, \quad (4.6)$$

where the source term R^ε will eventually have a contribution in $O(\sqrt{\varepsilon})$. Inequality (4.6) must also hold true for any $\kappa \in [-\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_0\|_{L^\infty}]$, so as to replace κ by u and, *in fine*, compare u to u^ε . We will indeed use a doubling of variables technique *à la* Kruzkov, where the first Kruzkov inequality will be (4.6) and the second will be the entropy inequalities for u :

$$\partial_t |u - \kappa| + \partial_x \operatorname{sgn}(u - \kappa) (f(u) - f(\kappa)) \leq 0. \quad (4.7)$$

Note that combining (4.6) and (4.7) requires that the fluxes correspond. However, we will see that (4.6) can only be established if we replace f by a modified flux \tilde{f} . But actually, we show in a first step that with this modified flux, we have $\tilde{f}(u^\varepsilon) = \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} = f(u^\varepsilon)$ and $\tilde{f}(\kappa) = \frac{\kappa^2}{2} = f(\kappa)$ for u^ε and κ in an adequate range, and therefore combining Kruzkov inequalities (4.6) and (4.7) will be possible.

In a second step, we consider entropy inequalities on u^ε . For technical reasons, it is easier to prove entropy inequalities on the auxiliary function $w^\varepsilon := \frac{h(a^\varepsilon) - a^\varepsilon}{2c}$. The last step consists in using Kuznetsov's doubling of variables technique to estimate $\|w^\varepsilon - u\|_{L^1}$. The desired estimate follows from a triangle inequality and Lemma 4.2, as $G(a^\varepsilon(t), b^\varepsilon(t))$ is actually of size $O(\varepsilon)$ in L^1 norm.

Step 1 : Maximum principle and entropy¹ inequalities on $(a^\varepsilon, b^\varepsilon)$.

We begin with obtaining Kruzkov-type inequalities on the solutions $(a^\varepsilon, b^\varepsilon)$ to the diagonalized system (4.4). To do so, we need monotonicity properties on G . From the identities :

$$\partial_a G(a, b) = -\frac{1}{2c} f' \left(\frac{b - a}{2c} \right) - \frac{1}{2}, \quad \partial_b G(a, b) = -\frac{1}{2c} f' \left(\frac{b - a}{2c} \right) - \frac{1}{2}, \quad \text{and } u^\varepsilon = \frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{2c},$$

1. Whenever we speak about entropy inequalities, we have in mind Kruzkov-type inequalities like (4.6) or (4.7).

we deduce that if $|f'(u^\varepsilon)| < c$, then $G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)$ is decreasing with respect to both a^ε and b^ε . To ensure that this condition holds true, one might want to invoke a maximum principle for u^ε along with the subcharacteristic condition $\|u_0\|_{L^\infty} < c$, since $f' = \text{Id}$.

However, the maximum principle is actually a consequence of the entropy inequalities on $(a^\varepsilon, b^\varepsilon)$. Therefore, we slightly modify the flux f into a flux \tilde{f} such that the condition $|\tilde{f}'(u^\varepsilon)| < c$ holds whatever the value of u^ε , so that $\tilde{G}(a, b) := \frac{1}{2}\tilde{f}\left(\frac{b-a}{2c}\right) - \frac{a+b}{2}$ is decreasing with respect to a and b . More precisely, we set :

$$\tilde{f}(u) := \begin{cases} -u\|u_0\|_{L^\infty} - \frac{\|u_0\|_{L^\infty}^2}{2}, & \text{if } u \leq -\|u_0\|_{L^\infty}, \\ \frac{u^2}{2}, & \text{if } -\|u_0\|_{L^\infty} \leq u \leq \|u_0\|_{L^\infty}, \\ u\|u_0\|_{L^\infty} - \frac{\|u_0\|_{L^\infty}^2}{2}, & \text{if } \|u_0\|_{L^\infty} \leq u. \end{cases} \quad (4.8)$$

Note that $|\tilde{f}'(z)| < c$ for all $z \in \mathbf{R}$ and $\tilde{f}(z) = f(z)$ for $|z| \leq \|u_0\|_{L^\infty}$. This allows to prove entropy

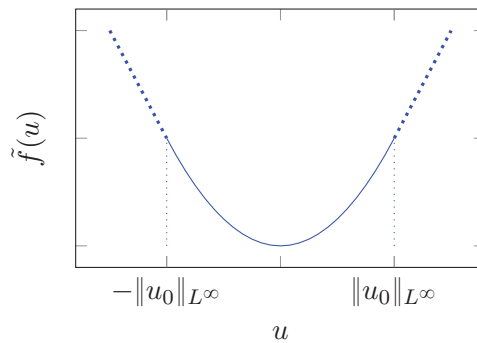


FIGURE 4.1 – The modified flux \tilde{f}

inequalities and a maximum principle for the solutions associated to \tilde{f} and to prove, *a posteriori*, that they are equal to the original solutions (those associated to f) since the subcharacteristic condition holds. As a byproduct, we will obtain that $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ is a global-in-time solution to (4.3).

Until the end of Step 1, when referring to system (4.3) (resp. (4.4)), we will assume that f is replaced by \tilde{f} and we denote $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon)$ (resp. $(\tilde{a}^\varepsilon, \tilde{b}^\varepsilon)$) the corresponding solution. We also let T^* be the maximal time of existence of $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon)$ given by Theorem 4.1.

Now, obtaining entropy inequalities on $(\tilde{a}^\varepsilon, \tilde{b}^\varepsilon)$ consists of making a comparison with constant state solutions to (4.4). Namely, letting $m = \|u_0\|_{L^\infty} \left(\frac{\|u_0\|_{L^\infty}}{2} - c \right)$, $M = \|u_0\|_{L^\infty} \left(\frac{\|u_0\|_{L^\infty}}{2} + c \right)$ and considering $h : [m, M] \rightarrow [m, M]$ given by Lemma 4.1, we have for all $k \in [m, M]$, $\tilde{G}(k, h(k)) = G(k, h(k)) = 0$ and therefore $(k, h(k))$ is a solution to (4.4). Thus, the following system holds :

$$\partial_t(\tilde{a}^\varepsilon - k) - c\partial_x(\tilde{a}^\varepsilon - k) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\tilde{G}(\tilde{a}^\varepsilon, \tilde{b}^\varepsilon) - \tilde{G}(k, h(k)) \right), \quad (4.9a)$$

$$\partial_t(\tilde{b}^\varepsilon - h(k)) + c\partial_x(\tilde{b}^\varepsilon - h(k)) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\tilde{G}(\tilde{a}^\varepsilon, \tilde{b}^\varepsilon) - \tilde{G}(k, h(k)) \right). \quad (4.9b)$$

Multiplying (4.9a) by $\text{sgn}(\tilde{a}^\varepsilon - k)$, (4.9b) by $\text{sgn}(\tilde{b}^\varepsilon - h(k))$ and summing yields :

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(|\tilde{a}^\varepsilon - k| + |\tilde{b}^\varepsilon - h(k)| \right) - c\partial_x \left(|\tilde{a}^\varepsilon - k| - |\tilde{b}^\varepsilon - h(k)| \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\text{sgn}(\tilde{a}^\varepsilon - k) + \text{sgn}(\tilde{b}^\varepsilon - h(k)) \right) \left(\tilde{G}(\tilde{a}^\varepsilon, \tilde{b}^\varepsilon) - \tilde{G}(k, h(k)) \right). \end{aligned}$$

Hence, using the monotonicity of \tilde{G} , we obtain the following entropy inequalities on $(\tilde{a}^\varepsilon, \tilde{b}^\varepsilon)$:

$$\partial_t \left(|\tilde{a}^\varepsilon - k| + |\tilde{b}^\varepsilon - h(k)| \right) - c\partial_x \left(|\tilde{a}^\varepsilon - k| - |\tilde{b}^\varepsilon - h(k)| \right) \leq 0. \quad (4.10)$$

We now show that the maximum principle holds and that modifying the flux did not affect the solutions. Subtracting (4.9b) to (4.9a), we get :

$$\partial_t \left(\tilde{a}^\varepsilon - k - (\tilde{b}^\varepsilon - h(k)) \right) - c \partial_x \left(\tilde{a}^\varepsilon - k + \tilde{b}^\varepsilon - h(k) \right) = 0.$$

Then, summing with (4.10) :

$$\partial_t \left((\tilde{a}^\varepsilon - k)^+ + (\tilde{b}^\varepsilon - h(k))^- \right) - c \partial_x \left((\tilde{a}^\varepsilon - k)^+ - (\tilde{b}^\varepsilon - h(k))^- \right) \leq 0,$$

and integrating in time and space, we obtain for any $t > 0$:

$$\int_{\mathbf{R}} \left((\tilde{a}^\varepsilon(t) - k)^+ + (\tilde{b}^\varepsilon(t) - h(k))^- \right) \leq \int_{\mathbf{R}} \left((\tilde{a}_0^\varepsilon - k)^+ + (\tilde{b}_0^\varepsilon - h(k))^- \right).$$

Taking $(k, h(k)) = (M, h(M))$ and then $(k, h(k)) = (h^{-1}(m), m)$ and switching the roles of \tilde{a}^ε and \tilde{b}^ε , we deduce that for all $t \in [0, T^*[, \tilde{a}^\varepsilon(t), \tilde{b}^\varepsilon(t) \in [m, M]$, which implies that $|\tilde{u}^\varepsilon(t)| \leq \|u_0\|_{L^\infty}$. According to Theorem 4.1, we deduce that $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon)$ is a global in time solution to (4.3), that is $T^* = +\infty$.

Hence, for all $t > 0$, the bound $|\tilde{u}^\varepsilon(t)| \leq \|u_0\|_{L^\infty}$ holds and therefore $\tilde{f}(\tilde{u}^\varepsilon(t)) = f(\tilde{u}^\varepsilon(t))$. As a consequence, $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon)$ solves system (4.3) with the original Burgers flux f . By uniqueness of the solution to the Cauchy problem (see Theorem 4.1), we deduce that $(\tilde{u}^\varepsilon(t), \tilde{v}^\varepsilon(t)) = (u^\varepsilon(t), v^\varepsilon(t))$ for all $t > 0$ and that the subcharacteristic condition on u^ε holds globally in time.

Step 2 : entropy inequalities on w^ε and L^1 bound on $G(a^\varepsilon(t), b^\varepsilon(t))$.

We now turn to entropy inequalities to be combined with Kruzkov inequalities on u (4.7). Lemma 4.2 gives the existence of a constant $C > 0$ such that, for all $a, b \in [m, M]$, one has $|h(a) - b| \leq C|G(a, b)|$. Besides, the source term $G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)$ will turn out to be of size $O(\varepsilon)$ in L^1 norm. We therefore work on the auxiliary function $w^\varepsilon = \frac{h(a^\varepsilon) - a^\varepsilon}{2c}$ instead of u^ε . For $\kappa \in [-\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_0\|_{L^\infty}]$, Lemma 4.1 ensures that there exists $k \in [m, M]$ such that $\kappa = \frac{h(k) - k}{2c}$. We then have :

$$|w^\varepsilon - \kappa| = \frac{1}{2c} \left(|h(a^\varepsilon) - h(k)| + |a^\varepsilon - k| \right) = \frac{1}{2c} \left(|a^\varepsilon - k| + |b^\varepsilon - h(k)| + r_1^\varepsilon \right), \quad (4.11)$$

where $r_1^\varepsilon = |h(a^\varepsilon) - h(k)| - |b^\varepsilon - h(k)|$ verifies $|r_1^\varepsilon| \leq |h(a^\varepsilon) - b^\varepsilon| \leq C|G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)|$. Thus, we are left to control $|G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)|$. To do so, we formally differentiate this quantity and use (4.4) :

$$\begin{aligned} \partial_t |G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)| &= \left(\partial_t a^\varepsilon \partial_a G(a^\varepsilon, b^\varepsilon) + \partial_t b^\varepsilon \partial_b G(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \right) \operatorname{sgn}(G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)), \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_a G(a^\varepsilon, b^\varepsilon) + \partial_b G(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \right) |G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)| \\ &\quad - c \operatorname{sgn}(G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)) \left(\partial_x a^\varepsilon \partial_a G(a^\varepsilon, b^\varepsilon) + \partial_x b^\varepsilon \partial_b G(a^\varepsilon, b^\varepsilon) \right), \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{[m, M]^2} \left(\partial_a G + \partial_b G \right) |G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)| + c \sup_{[m, M]^2} \left(|\partial_a G| + |\partial_b G| \right) \left(|\partial_x a^\varepsilon| + |\partial_x b^\varepsilon| \right). \end{aligned}$$

Integrating in space gives :

$$\frac{d}{dt} \|G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)\|_{L^1} \leq -\frac{A}{\varepsilon} \|G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)\|_{L^1} + B \left(TV(a_0) + TV(b_0) \right),$$

where $A = -\sup_{[m, M]^2} (\partial_a G + \partial_b G)$ and $B = c \sup_{[m, M]^2} (|\partial_a G| + |\partial_b G|)$ are positive constants which do not depend on ε nor on time. A Grönwall lemma then gives :

$$\|G(a^\varepsilon(t), b^\varepsilon(t))\|_{L^1} \leq C \left(TV(a_0) + TV(b_0) \right) \varepsilon, \quad (4.12)$$

where we still denote $C = B/A$ as a constant independent of time and of ε .

In addition, since, $G(a, h(a)) = 0$, one has $\frac{1}{2} \left(\frac{h(a)-a}{2c} \right)^2 = \frac{1}{2}(h(a) + a)$ and therefore :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(w^\varepsilon - \kappa) \left(\frac{(w^\varepsilon)^2}{2} - \frac{\kappa^2}{2} \right) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(h(a^\varepsilon) - h(k) - (a^\varepsilon - k) \right) \left(h(a^\varepsilon) + a^\varepsilon - (h(k) + k) \right), \\ &= \frac{1}{2} \left(|h(a^\varepsilon) - h(k)| - |a^\varepsilon - k| \right), \\ &= \frac{1}{2} \left(|b - h(k)| - |a^\varepsilon - k| + r_2^\varepsilon \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

with $|r_2^\varepsilon| \leq C|G(a^\varepsilon, b^\varepsilon)|$. Differentiating (4.11) in time and (4.13) in space, and using (4.10) thus yields :

$$\partial_t |w^\varepsilon - \kappa| + \partial_x \operatorname{sgn}(w^\varepsilon - \kappa) \left(\frac{(w^\varepsilon)^2}{2} - \frac{\kappa^2}{2} \right) \leq \frac{1}{2c} \left(\partial_t r_1^\varepsilon + c \partial_x r_2^\varepsilon \right). \quad (4.14)$$

Step 3 : estimating $\|u(t) - w^\varepsilon(t)\|_{L^1}$.

Then, we estimate $\|u(t) - w^\varepsilon(t)\|_{L^1}$ using Kuznetsov's doubling of variables technique (see, e.g., [114] for scalar conservation laws with viscosity and the work of Bouchut et Perthame [20]) in order to combine (4.14) with Kruzkov inequalities on the entropy solution u , that read :

$$\partial_t |u - \kappa| + \partial_x \operatorname{sgn}(u - \kappa) (f(u) - f(\kappa)) \leq 0. \quad (4.15)$$

Writing, respectively, (4.15) at point (s, x) for $\kappa = w^\varepsilon(t, y)$ and (4.14) at point (t, y) for $\kappa = u(s, x)$, we obtain :

$$\partial_s |u(s, x) - w^\varepsilon(t, y)| + \partial_x \operatorname{sgn}(u(s, x) - w^\varepsilon(t, y)) \left(\frac{u(s, x)^2}{2} - \frac{(w^\varepsilon(t, y))^2}{2} \right) \leq 0, \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t |w^\varepsilon(t, y) - u(s, x)| + \partial_y \operatorname{sgn}(w^\varepsilon(t, y) - u(s, x)) \left(\frac{(w^\varepsilon(t, y))^2}{2} - \frac{u(s, x)^2}{2} \right) \\ \leq \frac{1}{2c} \left(\partial_t r_1^\varepsilon(t, y) + c \partial_y r_2^\varepsilon(t, y) \right). \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Now, let $\omega_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \omega\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ and $\Omega_\beta(x) = \frac{1}{\beta} \Omega\left(\frac{x}{\beta}\right)$ be two mollifying kernels. Setting $g(s, t, x, y) = \omega_\alpha(s - t) \Omega_\beta(x - y)$ and testing (4.16a) and (4.16b) against $g(\cdot, t, \cdot, y) \mathbb{1}_{[0, T]}$ and $g(s, \cdot, x, \cdot) \mathbb{1}_{[0, T]}$, respectively, and integrating over $[0, T] \times \mathbf{R}$, we obtain on the one hand :

$$\begin{aligned} & \iiint \partial_s g(s, t, x, y) |u(s, x) - w^\varepsilon(t, y)| \, ds \, dx \, dt \, dy \\ & + \iiint \partial_x g(s, t, x, y) \operatorname{sgn}(u(s, x) - w^\varepsilon(t, y)) \left(\frac{u(s, x)^2}{2} - \frac{(w^\varepsilon(t, y))^2}{2} \right) \, ds \, dx \, dt \, dy \\ & - \iiint g(T, t, x, y) |u(T, x) - w^\varepsilon(t, y)| \, dx \, dt \, dy \\ & + \iiint g(0, t, x, y) |u(0, x) - w^\varepsilon(t, y)| \, dx \, dt \, dy \geq 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

and on the other hand :

$$\begin{aligned}
& \iiint \partial_t g(s, t, x, y) |w^\varepsilon(t, y) - u(s, x)| \, ds \, dx \, dt \, dy \\
& + \iiint \partial_y g(s, t, x, y) \operatorname{sgn}(w^\varepsilon(t, y) - u(s, x)) \left(\frac{(w^\varepsilon(t, y))^2}{2} - \frac{u(s, x)^2}{2} \right) \, ds \, dx \, dt \, dy \\
& - \iint g(s, T, x, y) |w^\varepsilon(T, y) - u(s, x)| \, ds \, dx \, dy + \iint g(s, 0, x, y) |w^\varepsilon(0, y) - u(s, x)| \, ds \, dx \, dy \quad (4.18) \\
& \geq \frac{1}{2c} \left(\iiint \partial_t g(s, t, x, y) r_1^\varepsilon(t, y) \, ds \, dx \, dt \, dy + c \iiint \partial_y g(s, t, x, y) r_2^\varepsilon(t, y) \, ds \, dx \, dt \, dy \right. \\
& \left. - \iint g(s, T, x, y) r_1^\varepsilon(T, y) \, ds \, dx \, dy + \iint g(s, 0, x, y) r_1^\varepsilon(0, y) \, ds \, dx \, dy \right) =: \text{RHS}.
\end{aligned}$$

Now, since $|\cdot|$ is even, and $\partial_s g = -\partial_t g$ and $\partial_x g = -\partial_y g$, we deduce by adding (4.17) and (4.18) :

$$\begin{aligned}
& - \iiint g(T, t, x, y) |u(T, x) - w^\varepsilon(t, y)| \, dx \, dt \, dy \\
& + \iiint g(0, t, x, y) |u(0, x) - w^\varepsilon(t, y)| \, dx \, dt \, dy \quad (4.19) \\
& - \iiint g(s, T, x, y) |u(s, x) - w^\varepsilon(T, y)| \, ds \, dx \, dy \\
& + \iiint g(s, 0, x, y) |u(s, x) - w^\varepsilon(0, y)| \, ds \, dx \, dy \geq \text{RHS}.
\end{aligned}$$

Then, we write :

$$\begin{aligned}
\|u(T) - w^\varepsilon(T)\|_{L^1} &= \iiint \omega_\alpha(T-t) \Omega_\beta(x-y) |u(T, y) - w^\varepsilon(T, y)| \, dx \, dt \, dy \\
&+ \iiint \omega_\alpha(s-T) \Omega_\beta(x-y) |u(T, y) - w^\varepsilon(T, y)| \, ds \, dx \, dy, \quad (4.20) \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

A triangle inequality gives for I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \iiint \omega_\alpha(T-t) \Omega_\beta(x-y) |u(T, y) - u(T, x)| \, dx \, dt \, dy \\
&+ \iiint \omega_\alpha(T-t) \Omega_\beta(x-y) |u(T, x) - w^\varepsilon(t, y)| \, dx \, dt \, dy \\
&+ \iiint \omega_\alpha(T-t) \Omega_\beta(x-y) |w^\varepsilon(t, y) - w^\varepsilon(T, y)| \, dx \, dt \, dy \\
&=: T_1 + T_2 + T_3.
\end{aligned}$$

with $T_1 \leq C\beta \cdot TV(u_0)$, the second term T_2 appearing in (4.19) and for the last one we write :

$$T_3 \leq \int_{\mathbf{R}} \Omega_\beta(x-y) \int_0^T \omega_\alpha(T-t) \int_{\mathbf{R}} |w^\varepsilon(t, y) - w^\varepsilon(T, y)| \, dy \, dt \, dx,$$

and then we use the fact that w^ε is uniformly Lipschitz in $L^1(\mathbf{R})$ with respect to ε . Indeed, one has $\partial_t w^\varepsilon = \frac{\partial_t a^\varepsilon (h'(a^\varepsilon) - 1)}{2c}$ with $h'(a^\varepsilon) - 1$ being uniformly bounded with respect to ε as a^ε stays in the compact set $[m, M]$ for all time. In addition, estimating $\|\partial_t a^\varepsilon(t)\|_{L^1}$ can be done reusing (4.4) and (4.12) :

$$\|\partial_t a^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq c \|\partial_x a^\varepsilon(t)\|_{L^1} + \frac{1}{\varepsilon} \|G(a^\varepsilon(t), b^\varepsilon(t))\|_{L^1} \leq C(TV(a_0) + TV(b_0)).$$

with $C > 0$ still independent of time and of ε . Hence, $\|\partial_t w^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq C(TV(a_0) + TV(b_0))$ and $T_3 \leq \alpha C(TV(a_0) + TV(b_0))$. All in all, we get for I_1 :

$$I_1 \leq \iiint \omega_\alpha(T-t)\Omega_\beta(x-y)|u(T,x) - w^\varepsilon(t,y)| dx dt dy + C\beta \cdot TV(u_0) \\ + \alpha C(TV(a_0) + TV(b_0)).$$

Moreover, similarly, for I_2 :

$$I_2 \leq \iiint \omega_\alpha(s-T)\Omega_\beta(x-y)|u(s,x) - w^\varepsilon(T,y)| ds dx dy + C(\alpha + \beta)TV(u_0).$$

Returning to (4.20), we obtain :

$$\|u(T) - w^\varepsilon(T)\|_{L^1} \leq \iiint \omega_\alpha(t)\Omega_\beta(x-y)|u(0,x) - w^\varepsilon(t,y)| dx dt dy \quad (4.21)$$

$$+ \iiint \omega_\alpha(s)\Omega_\beta(x-y)|u(s,x) - w^\varepsilon(0,y)| ds dx dy - RHS \quad (4.22)$$

$$+ \alpha C(TV(a_0) + TV(b_0)) + C(\alpha + \beta)TV(u_0). \quad (4.23)$$

However, using a triangle inequality, one can show that :

$$\iiint \omega_\alpha(t)\Omega_\beta(x-y)|u_0(x) - w^\varepsilon(t,y)| dx dt dy \leq C\beta \cdot TV(u_0) + \alpha C(TV(a_0) + TV(b_0)),$$

and similarly :

$$\iiint \omega_\alpha(s)\Omega_\beta(x-y)|u(s,x) - w^\varepsilon(0,y)| ds dx dy \leq C(\alpha + \beta)TV(u_0).$$

We then bound from above the term RHS using inequality $\|r_i^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq C(TV(a_0) + TV(b_0))\varepsilon$ for $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} |\text{RHS}| &= \frac{1}{2c} \left| \frac{1}{\alpha} \iiint \omega' \left(\frac{s-t}{\alpha} \right) \Omega_\beta(x-y) r_1^\varepsilon(t,y) ds dx dt dy \right. \\ &\quad + \frac{c}{\beta} \iiint \omega_\alpha(s-t)\Omega'(x-y) r_2^\varepsilon(t,y) ds dx dt dy \\ &\quad - \iiint \omega_\alpha(s-T)\Omega_\beta(x-y) r_1^\varepsilon(T,y) ds dx dy \\ &\quad \left. + \iiint \omega_\alpha(s)\Omega_\beta(x-y) r_1^\varepsilon(0,y) ds dx dy \right| \\ &\leq C \left(\frac{T}{\alpha} + \frac{T}{\beta} + 1 \right) \cdot (TV(a_0) + TV(b_0)) \varepsilon. \end{aligned}$$

Finally, we obtain :

$$\|u(T) - w^\varepsilon(T)\|_{L^1} \leq C \left(\frac{T}{\alpha} + \frac{T}{\beta} + 1 \right) (TV(a_0) + TV(b_0)) \varepsilon \\ + C(\alpha + \beta)TV(u_0) + \alpha C(TV(a_0) + TV(b_0)),$$

which, after optimizing the values of α and β and noticing that $TV(a_0), TV(b_0) \leq C \cdot TV(u_0)$, gives :

$$\|u(T) - w^\varepsilon(T)\|_{L^1} \leq CTV(u_0)(\sqrt{\varepsilon T} + \varepsilon),$$

and this inequality, along with $|h(a) - b| \leq C|G(a, b)|$ and (4.12) gives in turn the result. \square

Denoting $\varrho = -\partial_x u$, the convergence of $u^\varepsilon(t)$ towards $u(t)$ in $L^1(\mathbf{R})$ ensures that $\varrho(t)$ is a probability measure. Indeed, since for all $\varepsilon > 0$, $\varrho^\varepsilon = -\partial_x u^\varepsilon$ is a non-negative distribution, so is ϱ . The Riesz–Markov theorem then ensures that ϱ can be represented by a non-negative Borel measure. In addition, almost everywhere, for $t \geq 0$, $u^\varepsilon(t)$ is a non-increasing function taking values in $[0, 1]$ and hence converges to a certain limit when x goes to $+\infty$. The same holds true for the limit function $u(t)$. However, since $u^\varepsilon(t) - u(t) \in L^1(\mathbf{R})$, then $u^\varepsilon(t, x) - u(t, x)$ must vanish as x goes to $+\infty$. Therefore, the total mass of $\varrho(t)$ is 1, and $\varrho(t)$ is a probability measure.

Then, passing to the relaxation system (4.2) for the aggregation Equation (4.1) can be done using (4.5) with $p = 1$. As a consequence, Theorem 4.2 translates as follows for the aggregation.

Théorème 4.3. *Let $\varrho_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, $c > 1/2$ and set $\sigma_0 = a[\varrho_0]\varrho_0$. There exists a constant $C > 0$ such that, for any $\varepsilon > 0$, denoting $(\varrho^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ the solution to (4.2) with initial data (ϱ_0, σ_0) , one has :*

$$\forall T > 0, \quad W_1(\varrho(T), \varrho^\varepsilon(T)) \leq C(\sqrt{\varepsilon T} + \varepsilon),$$

where $\varrho \in C([0, +\infty), \mathbb{W}_2(\mathbf{R}))$ is the unique solution to (4.1) with initial datum ϱ_0 .

4.3 Numerical Discretization

Hereafter, we denote Δt the time step and we introduce a Cartesian mesh of size Δx . We denote $t^n = n\Delta t$ for $n \in \mathbf{N}$ and $x_j = j\Delta x$ for $j \in \mathbf{Z}$. In this section, we extend our framework and consider the aggregation Equation (4.1) with arbitrary pointy potentials W , which satisfy the following conditions :

- (i) W is even and $W(0) = 0$;
- (ii) $W \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R} \setminus \{0\})$;
- (iii) W is λ -convex, i.e., there exists $\lambda \leq 0$ such that $W(x) - \lambda \frac{|x|^2}{2}$ is convex;
- (iv) W is a_∞ -lipschitz continuous for some $a_\infty \geq 0$.

In this framework, the convergence of ϱ^ε towards ϱ for a slightly different problem has also been studied in [73]. Adapting the argument, the convergence still holds provided the sub-characteristic condition $c > a_\infty$ is verified. However, for such general potentials, the authors were not able to obtain the estimates of the speed of convergence as stated in Theorem 4.3.

In this section, we propose some numerical schemes able to capture the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, thus satisfying the so-called asymptotic preserving (AP) property. We consider two approaches, the first one based on a splitting algorithm, and the second one based on a well-balanced discretization.

4.3.1 A Splitting Algorithm

A first simple approach to discretize the system (4.2) is to use a splitting method. Such a method is known to be convergent and easy to implement but introduces numerical diffusion.

Notice that the system (4.2) rewrites, with $\mu = \sigma - c\varrho$, $\nu = \sigma + c\varrho$, as

$$\partial_t \mu - c\partial_x \mu = \frac{1}{\varepsilon} \left(a \left[\frac{\nu - \mu}{2c} \right] \left(\frac{\nu - \mu}{2c} \right) - \frac{\mu + \nu}{2} \right) \quad (4.24a)$$

$$\partial_t \nu + c\partial_x \nu = \frac{1}{\varepsilon} \left(a \left[\frac{\nu - \mu}{2c} \right] \left(\frac{\nu - \mu}{2c} \right) - \frac{\mu + \nu}{2} \right). \quad (4.24b)$$

The idea of the method is to solve in a first step on $(t^n, t^n + \Delta t)$ the system :

$$\begin{aligned} \partial_t \mu &= \frac{1}{\varepsilon} \left(a \left[\frac{\nu - \mu}{2c} \right] \left(\frac{\nu - \mu}{2c} \right) - \frac{\mu + \nu}{2} \right) \\ \partial_t \nu &= \frac{1}{\varepsilon} \left(a \left[\frac{\nu - \mu}{2c} \right] \left(\frac{\nu - \mu}{2c} \right) - \frac{\mu + \nu}{2} \right), \end{aligned}$$

with initial data $(\mu(t^n), \nu(t^n)) = (\mu^n, \nu^n)$. We obtain $\mu_j^{n+\frac{1}{2}} = \mu(t^n + \Delta t, x_j)$ and $\nu_j^{n+\frac{1}{2}} = \nu(t^n + \Delta t, x_j)$. Notice that this system may be solved explicitly. Indeed, by adding and subtracting the two equations, we deduce after an integration :

$$\nu_j^{n+\frac{1}{2}} - \mu_j^{n+\frac{1}{2}} = \nu_j^n - \mu_j^n \quad (4.25a)$$

$$\mu_j^{n+\frac{1}{2}} + \nu_j^{n+\frac{1}{2}} = (\mu_j^n + \nu_j^n)e^{-\Delta t/\varepsilon} + a \left[\frac{\nu^n - \mu^n}{2c} \right] \left(\frac{\nu^n - \mu^n}{2c} \right) (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}). \quad (4.25b)$$

Then, in a second step, we discretize by a classical finite volume upwind scheme the system :

$$\partial_t \mu - c \partial_x \mu = 0, \quad \partial_t \nu + c \partial_x \nu = 0.$$

That is :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^{n+\frac{1}{2}} + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mu_j^{n+\frac{1}{2}}), \quad (4.26a)$$

$$\nu_j^{n+1} = \nu_j^{n+\frac{1}{2}} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nu_j^{n+\frac{1}{2}} - \nu_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}). \quad (4.26b)$$

Coming back to the variables ϱ and σ , we obtain :

$$\nu_j^{n+\frac{1}{2}} = c \varrho_j^n + \sigma_j^n e^{-\Delta x/\varepsilon} + a_j^n \varrho_j^n (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}),$$

$$\mu_j^{n+\frac{1}{2}} = -c \varrho_j^n + \sigma_j^n e^{-\Delta x/\varepsilon} + a_j^n \varrho_j^n (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}),$$

with $a_j^n = - \sum_{k \neq j} W'(x_j - x_k) \varrho_k^n$. Then, the splitting algorithm reads :

$$\begin{aligned} \varrho_j^{n+1} &= \varrho_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \nu_j^{n+\frac{1}{2}} - \mu_j^{n+\frac{1}{2}} - \nu_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \varrho_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\sigma_{j+1}^n - \sigma_{j-1}^n) e^{-\Delta t/\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}) (a_{j+1}^n \varrho_{j+1}^n - a_{j-1}^n \varrho_{j-1}^n) - c (\varrho_{j+1}^n - 2\varrho_j^n + \varrho_{j-1}^n) \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

and :

$$\begin{aligned} \sigma_j^{n+1} &= \sigma_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\sigma_{j+1}^n - 2\sigma_j^n + \sigma_{j-1}^n) e^{-\Delta t/\varepsilon} \\ &\quad + \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((a_{j+1}^n \varrho_{j+1}^n - 2a_j^n \varrho_j^n + a_{j-1}^n \varrho_{j-1}^n) (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}) - c (\varrho_{j+1}^n - \varrho_{j-1}^n) \right) \\ &= \sigma_j^n e^{-\Delta t/\varepsilon} + a_j^n \varrho_j^n (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}) + \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\sigma_{j+1}^n - 2\sigma_j^n + \sigma_{j-1}^n) e^{-\Delta t/\varepsilon} \\ &\quad + \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((a_{j+1}^n \varrho_{j+1}^n - 2a_j^n \varrho_j^n + a_{j-1}^n \varrho_{j-1}^n) (1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}) - c (\varrho_{j+1}^n - \varrho_{j-1}^n) \right). \end{aligned}$$

Lemma 4.3. *For any $\varepsilon > 0$, if both the CFL condition $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ and the subcharacteristic condition $c \geq a_\infty$ hold, then the splitting scheme (4.25) and (4.26) is L^1 -stable :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^{n+1}| + |\nu_j^{n+1}| \right) \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^n| + |\nu_j^n| \right).$$

Proof. We have :

$$\begin{aligned} \mu_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(e^{-\Delta t/\varepsilon} \left(1 + \frac{a_j^n}{c} \right) + 1 - \frac{a_j^n}{c} \right) \mu_j^n - \frac{1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}}{2} \left(1 - \frac{a_j^n}{c} \right) \nu_j^n, \\ \nu_j^{n+\frac{1}{2}} &= -\frac{1 - e^{-\Delta t/\varepsilon}}{2} \left(1 + \frac{a_j^n}{c} \right) \mu_j^n + \frac{1}{2} \left(e^{-\Delta t/\varepsilon} \left(1 - \frac{a_j^n}{c} \right) + 1 + \frac{a_j^n}{c} \right) \nu_j^n. \end{aligned}$$

Under the condition $c \geq a_\infty$, in the expression of $\mu_j^{n+\frac{1}{2}}$, the coefficient in front of μ_j^n is non-negative and the one in front of ν_j^n is non-positive. Similarly, in $\nu_j^{n+\frac{1}{2}}$, the coefficient of μ_j^n is non-positive and the one in front of ν_j^n is non-negative. Taking the absolute value and adding up therefore yields :

$$\left| \mu_j^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \nu_j^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \left| \mu_j^n \right| + \left| \nu_j^n \right|.$$

It remains to remark that, provided the CFL condition $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ is verified, (4.26) gives :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(\left| \mu_j^{n+1} \right| + \left| \nu_j^{n+1} \right| \right) &\leq \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(\left| \mu_j^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \nu_j^{n+\frac{1}{2}} \right| \right) \\ &\quad + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \mu_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \nu_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right|, \\ &\leq \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(\left| \mu_j^n \right| + \left| \nu_j^n \right| \right) + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \mu_j^{n+\frac{1}{2}} \right| + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \nu_j^{n+\frac{1}{2}} \right|, \\ &\leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(\left| \mu_j^n \right| + \left| \nu_j^n \right| \right). \end{aligned}$$

□

Note that similar schemes have also been studied in [92] and proved convergent at a rate of $\sqrt{\Delta x}$.

Let us now verify the AP property. When $\varepsilon \rightarrow 0$, we verify that the equation on ϱ (4.27) converges to the following Rusanov discretization of (4.1) (see [54] for numerical simulations using the Rusanov scheme) :

$$\varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(a_{j+1}^n \varrho_{j+1}^n - a_{j-1}^n \varrho_{j-1}^n \right) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \left(\varrho_{j+1}^n - 2\varrho_j^n + \varrho_{j-1}^n \right), \quad (4.28a)$$

$$a_j^n = - \sum_{k \neq j} W'(x_j - x_k) \varrho_k^n. \quad (4.28b)$$

This limiting scheme provides a consistent discretization of (4.1). Indeed, a similar scheme has been extensively studied in [36] using compactness arguments and the following convergence result was proven :

Lemme 4.4. *Assume $\varrho_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ and that the stability conditions $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ and $c \geq a_\infty$ are satisfied. Let $T > 0$ and suppose we initialize the scheme (4.28) with $\varrho_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \varrho_0(C_j)$ where $C_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$. Then, denoting $\varrho_{\Delta x}$ the reconstruction given by the scheme (4.28), that is :*

$$\varrho_{\Delta x}(t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \varrho_j^n \mathbb{1}_{[t^n, t^{n+1})}(t) \delta_{x_j},$$

then $\varrho_{\Delta x}$ converges weakly in the sense of measures on $[0, T] \times \mathbf{R}$ towards the solution ϱ of Equation (4.1), as Δx goes to 0.

It has been also proven in [43] that the scheme (4.28) converges at a rate of $\sqrt{\Delta x}$.

4.3.2 Well-Balanced Discretization

Although the splitting method provides a simple way to obtain an AP discretization, the resulting scheme has strong numerical diffusion and may not have a good large time behavior. Then, well-balanced schemes have been introduced. A scheme is said to be well-balanced when

it preserves equilibria. The method proposed in this section comes from [64]. For a survey of asymptotic-preserving and well-balanced schemes in the general framework of chemotaxis models, we refer to [108].

Let us assume that, for some $n \in \mathbf{N}$, the approximation $(\mu_j^n, \nu_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$ of $(\mu(t^n, x_j), \nu(t^n, x_j))_{j \in \mathbf{Z}}$ solution to (4.24) is known. We construct an approximation at time t^{n+1} using a finite volume upwind discretization of (4.24), with the discretization of the source terms $H_{\mu,j}^n, H_{\nu,j}^n$ to be prescribed right afterwards :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_{j+1}^n - \mu_j^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} H_{\mu,j}^n \quad (4.29a)$$

$$\nu_j^{n+1} = \nu_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nu_j^n - \nu_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} H_{\nu,j}^n. \quad (4.29b)$$

In order to preserve equilibria, we set :

$$H_{\mu,j}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} H(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) dx, \quad H(\mu, \nu) = a \left[\frac{\nu - \mu}{2c} \right] \left(\frac{\nu - \mu}{2c} \right) - \frac{\mu + \nu}{2},$$

where $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ is the solution to the stationary system on (x_j, x_{j+1}) :

$$-c \partial_x \tilde{\mu} = \frac{1}{\varepsilon} H(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \quad (4.30a)$$

$$c \partial_x \tilde{\nu} = \frac{1}{\varepsilon} H(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \quad (4.30b)$$

$$\tilde{\mu}(x_{j+1}) = \mu_{j+1}^n, \quad \tilde{\nu}(x_j) = \nu_j^n. \quad (4.30c)$$

In addition, in the same fashion, $H_{\nu,j}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1}}^{x_j} H(\bar{\mu}, \bar{\nu}) dx$, where $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ solve the stationary system with incoming boundary conditions, on (x_{j-1}, x_j) :

$$-c \partial_x \bar{\mu} = \frac{1}{\varepsilon} H(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \quad (4.31a)$$

$$c \partial_x \bar{\nu} = \frac{1}{\varepsilon} H(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \quad (4.31b)$$

$$\bar{\mu}(x_j) = \mu_j^n, \quad \bar{\nu}(x_{j-1}) = \nu_{j-1}^n. \quad (4.31c)$$

Reporting Equations (4.30a) and (4.31b) into the discretization of the source term, we obtain $H_{\nu,j}^n = \frac{c\varepsilon}{\Delta x} (\bar{\nu}(x_j) - \nu_{j-1}^n)$ and $H_{\mu,j}^n = -\frac{c\varepsilon}{\Delta x} (\mu_j^n - \tilde{\mu}(x_j))$. Hence, one may rewrite the scheme (4.29) as

$$\begin{aligned} \mu_j^{n+1} &= \mu_j^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mu}(x_j) - \mu_j^n) \\ \nu_j^{n+1} &= \nu_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nu_j^n - \bar{\nu}(x_j)). \end{aligned}$$

Remark that the stationary system :

$$-c \partial_x \mu = \frac{1}{\varepsilon} H(\mu, \nu), \quad c \partial_x \nu = \frac{1}{\varepsilon} H(\mu, \nu),$$

is equivalent to :

$$\partial_x \sigma = 0, \quad c^2 \partial_x \varrho = \frac{1}{\varepsilon} (a[\varrho] \varrho - \sigma).$$

Therefore, denoting $\sigma_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\nu}}{2}$ and $\sigma_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\nu}}{2}$, which are constant, respectively, on (x_j, x_{j+1}) and (x_{j-1}, x_j) , one has :

$$\tilde{\mu}(x_j) = 2\sigma_{j+\frac{1}{2}} - \nu_j^n, \quad \bar{\nu}(x_j) = 2\sigma_{j-\frac{1}{2}} - \mu_j^n.$$

Thus, it turns out that the scheme can be rewritten only in terms of the discretized unknowns and of $\sigma_{j\pm\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}\mu_j^{n+1} &= \mu_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_j^n + \nu_j^n) + \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \sigma_{j+\frac{1}{2}}, \\ \nu_j^{n+1} &= \nu_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_j^n + \nu_j^n) + \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \sigma_{j-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Or equivalently :

$$\varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\sigma_{j+\frac{1}{2}} - \sigma_{j-\frac{1}{2}}), \quad (4.32a)$$

$$\sigma_j^{n+1} = \sigma_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (2\sigma_j^n - \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \sigma_{j-\frac{1}{2}}). \quad (4.32b)$$

However, solving the stationary systems (4.31) and (4.30) involves the resolution of a nonlinear and nonlocal ODE. Instead, we propose an approximation in the spirit of [64].

We replace the nonlinear term in (4.31a)–(4.31b) by $a_{j-\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\bar{\nu}-\bar{\mu}}{2c}$, where $a_{j-\frac{1}{2}}^n$ stands for a fixed and consistent discretization of $a \left[\frac{\bar{\nu}-\bar{\mu}}{2c} \right]$ on the interval (x_{j-1}, x_j) , to be specified afterwards. Similarly, we will replace the nonlinear term in (4.30a)–(4.30b) by $a_{j+\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\bar{\nu}-\bar{\mu}}{2c}$ with $a_{j+\frac{1}{2}}^n$ defined accordingly. In the following, we detail the construction for the problem (4.31a)–(4.31b) on (x_{j-1}, x_j) .

Obviously, the definition of $a_{j-\frac{1}{2}}^n$ should be taken with care (see [64, 36]). In [43], the authors showed that, when discretizing the product $a[\varrho]\varrho$, if $a[\varrho]$ and ϱ were not evaluated at the same point, then the resulting scheme produces the wrong dynamics. To take this into account, we will split ϱ into one contribution coming from the left and one contribution coming from the right, i.e., we set $\bar{\varrho} = \varrho_L + \varrho_R$ and $\bar{\sigma} = \sigma_L + \sigma_R$ where $\varrho_L(\Delta x) = 0$ and $\varrho_R(0) = 0$. This implies that $\bar{\varrho}(\Delta x) = \varrho_R(\Delta x)$ and $\bar{\varrho}(0) = \varrho_L(0)$.

More precisely, we solve the two following boundary value problem, on $(0, \Delta x)$:

$$\varepsilon c^2 \frac{d}{dx} \varrho_L = a_{j-\frac{1}{2},L}^n \varrho_L - \sigma_L, \quad \varrho_L(\Delta x) = 0, \quad (4.33a)$$

$$\varepsilon c^2 \frac{d}{dx} \varrho_R = a_{j-\frac{1}{2},R}^n \varrho_R - \sigma_R, \quad \varrho_R(0) = 0, \quad (4.33b)$$

We may explicitly solve these linear systems, and since $\varrho_L(0) = \bar{\varrho}(0)$ and $\varrho_R(\Delta x) = \bar{\varrho}(\Delta x)$, we obtain the relations :

$$\sigma_L = \bar{\varrho}(0) \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n, \quad \sigma_R = \bar{\varrho}(\Delta x) \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n. \quad (4.34)$$

with :

$$\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n = \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n}{1 - \exp(-a_{j-\frac{1}{2},L}^n \Delta x / (\varepsilon c^2))}, \quad \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n = \frac{a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{1 - \exp(a_{j-\frac{1}{2},R}^n \Delta x / (\varepsilon c^2))}. \quad (4.35)$$

Notice that we have :

$$\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n \rightarrow (a_{j-\frac{1}{2},L}^n)_+, \quad \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n \rightarrow -(a_{j-\frac{1}{2},R}^n)_-, \quad \text{when } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.36)$$

Using the boundary conditions in (4.31), we have :

$$\bar{\varrho}(0) = \frac{\nu_{j-1}^n - \bar{\mu}(0)}{2c}, \quad \bar{\varrho}(\Delta x) = \frac{\bar{\nu}(\Delta x) - \mu_j^n}{2c}. \quad (4.37)$$

with (4.34) and the fact that $\bar{\sigma} = \sigma_L + \sigma_R$ is constant on $[0, \Delta x]$, we obtain the following 2×2 system on the unknowns $\bar{\mu}(0), \bar{\nu}(\Delta x)$:

$$\begin{aligned}\mu_j^n + \bar{\nu}(\Delta x) &= \bar{\mu}(0) + \nu_{j-1}^n, \\ \mu_j^n + \bar{\nu}(\Delta x) &= \frac{\nu_{j-1}^n - \bar{\mu}(0)}{2c} \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n + \frac{\bar{\nu}(\Delta x) - \mu_j^n}{2c} \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n\end{aligned}$$

Solving this system yields :

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(0) &= -\nu_{j-1}^n \frac{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n - \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} - \mu_j^n \frac{\kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}, \\ \bar{\nu}(\Delta x) &= \nu_{j-1}^n \frac{\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} - \mu_j^n \frac{c + \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}.\end{aligned}$$

From which we deduce with (4.37) :

$$\begin{aligned}\varrho_{j-\frac{1}{2},L}^n &:= \bar{\varrho}(0) = \frac{1}{c} \left(\frac{(c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n) \nu_{j-1}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n \mu_j^n}{c + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n} \right) \\ \varrho_{j-\frac{1}{2},R}^n &:= \bar{\varrho}(\Delta x) = \frac{1}{c} \left(\frac{\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n \nu_{j-1}^n - (c + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n) \mu_j^n}{c + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n} \right)\end{aligned}$$

and with (4.34) :

$$\bar{\sigma}_{j-\frac{1}{2}} := \sigma_L + \sigma_R = \varrho_{j-\frac{1}{2},L}^n \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n + \varrho_{j-\frac{1}{2},R}^n \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n = \frac{\nu_{j-1}^n \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n - \mu_j^n \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}, \quad (4.38)$$

(the above quantities are well-defined since $\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n \geq 0$ and $\kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n \leq 0$). Injecting into (4.32), it gives the following scheme :

$$\mu_j^{n+1} = \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \mu_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \frac{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n - \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} \nu_j^n - \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \frac{\kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} \mu_{j+1}^n, \quad (4.39a)$$

$$\nu_j^{n+1} = \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \nu_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \frac{c + \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} \mu_j^n + \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \frac{\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} \nu_{j-1}^n, \quad (4.39b)$$

where the coefficients $\kappa_{j-\frac{1}{2},L/R}^n$ are defined in (4.35). Equivalently, for the variable (ϱ, σ) , the scheme reads :

$$\varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\nu_j^n \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n - \mu_{j+1}^n \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} - \frac{\nu_{j-1}^n \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n - \mu_j^n \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} \right) \quad (4.40a)$$

$$\sigma_j^{n+1} = \sigma_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2\sigma_j^n - \frac{\nu_j^n \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n - \mu_{j+1}^n \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} - \frac{\nu_{j-1}^n \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n - \mu_j^n \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} \right), \quad (4.40b)$$

where we recall that $\mu_j^n = \sigma_j^n - c\varrho_j^n$ and $\nu_j^n = \sigma_j^n + c\varrho_j^n$.

It remains to define the velocities $a_{j-\frac{1}{2},L/R}^n$ used in (4.33) and in (4.35). We take :

$$a_{j-\frac{1}{2},L/R}^n = - \sum_{k \neq j} W'(x_j - x_k) \varrho_{k-\frac{1}{2},L/R}^n.$$

However, this discretization implies the resolution of a nonlinear problem, since the quantities $\varrho_{k-\frac{1}{2},L/R}^n$ depends nonlinearly on $a_{j-\frac{1}{2},L/R}^n$.

Then, we implement a fixed point method initialized with $a_{j-\frac{1}{2},L}^{n,(0)} := a_{j-1}^n$ and $a_{j-\frac{1}{2},R}^{n,(0)} := a_j^n$. Solving, on each cell (x_{j-1}, x_j) , the system of ODEs (4.33) with these values for the velocities gives two sequences, $(\varrho_{j-\frac{1}{2},L}^{(1)})_{j \in \mathbf{Z}}$ and $(\varrho_{j-\frac{1}{2},R}^{(1)})_{j \in \mathbf{Z}}$. Then, we assign the next value of the velocity to $a_{j-\frac{1}{2},L/R}^{n,(1)} := - \sum_{k \neq j} W'(x_j - x_k) \varrho_{k-\frac{1}{2},L/R}^{(1)}$, which allows us to compute new values for the left and right densities, $(\varrho_{j-\frac{1}{2},L}^{(2)})_{j \in \mathbf{Z}}$ and $(\varrho_{j-\frac{1}{2},R}^{(2)})_{j \in \mathbf{Z}}$, through (4.33). We iterate until $W_2(\varrho_L^{(i)}, \varrho_L^{(i+1)})$ and $W_2(\varrho_R^{(i)}, \varrho_R^{(i+1)})$ pass below a certain threshold. Notice that the velocities $a_{j-\frac{1}{2},L/R}^{n,(i)}$ always remain bounded by a_∞ . In practice, only a few iterations are needed.

The resulting scheme is consistent for any $\varepsilon > 0$ and stable under standard stability conditions, as shown by the following lemmas.

Lemma 4.5 (L^1 stability). *Under the CFL condition $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ and the subcharacteristic condition $c \geq a_\infty$, there holds that the sequence $(\mu_j^n, \nu_j^n)_{j,n}$ defined by the scheme (4.39), verifies the following L^1 stability property :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^{n+1}| + |\nu_j^{n+1}| \right) \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^n| + |\nu_j^n| \right).$$

Proof. In each combination of (4.39), the first coefficient is non-negative under the CFL condition $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, and so is the last one since $\kappa_{j \pm \frac{1}{2},L}^n \geq 0$ and $\kappa_{j \pm \frac{1}{2},R}^n \leq 0$. Moreover, under the subcharacteristic condition $c \geq a_\infty$, it holds that $-c \leq \kappa_{j \pm \frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j \pm \frac{1}{2},L}^n \leq c$ so the remaining coefficient is non-positive. Thus, applying the triangle inequality and re-indexing the sums appropriately :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^{n+1}| + |\nu_j^{n+1}| \right) &\leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) |\mu_j^n| + \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{c\Delta t}{\Delta x} \frac{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n - \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} |\nu_j^n| \\ &\quad - \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \frac{\kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} |\mu_{j+1}^n| + \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) |\nu_j^n| \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{c\Delta t}{\Delta x} \frac{c + \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} |\mu_{j+1}^n| + \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \frac{\kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j+\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j+\frac{1}{2},L}^n} |\nu_j^n|, \\ &\leq \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^n| + |\nu_j^n| \right) + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\mu_{j+1}^n| + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\nu_j^n|, \\ &\leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left(|\mu_j^n| + |\nu_j^n| \right). \end{aligned}$$

This concludes the proof. \square

Lemma 4.6 (Consistency for smooth solutions). *Assume that, for all $j \in \mathbf{Z}$, we have $a_{j-\frac{1}{2},L/R}^n = - \sum_{k \neq j} W'(x_j - x_k) \varrho_{k-\frac{1}{2},L/R}$. Then, for any $\varepsilon > 0$, the scheme (4.32) is consistent with (4.2) provided that the solutions are smooth enough.*

Proof. For $j \in \mathbf{Z}$, one has, using the Taylor expansions as $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\varepsilon c^2} \left(c - \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} \right) \Delta x + O(\Delta x^2), \\ \frac{\kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n}{c - \kappa_{j-\frac{1}{2},R}^n + \kappa_{j-\frac{1}{2},L}^n} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon c^2} \left(c + \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} \right) \Delta x + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Thus :

$$\begin{aligned} \sigma_{j-\frac{1}{2}} = & \frac{\sigma_{j-1}^n + \sigma_j^n}{2} + c \frac{\varrho_{j-1}^n - \varrho_j^n}{2} - \frac{1}{4\epsilon c^2} \left(\left(c - \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} \right) (\sigma_{j-1}^n + c\varrho_{j-1}^n) \right. \\ & \left. + \left(c + \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} \right) (\sigma_j^n - c\varrho_j^n) \right) \Delta x + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

In particular, $\sigma_{j-\frac{1}{2}}$ is clearly consistent with $\sigma(t^n, x_{j-\frac{1}{2}})$ as long as the solution (ϱ, σ) is smooth enough to perform standard consistency analysis for finite differences. This shows that (4.32a) is consistent with $\partial_t \varrho + \partial_x \sigma = 0$. As for the consistency of (4.32b) with $\partial_t \sigma + c^2 \partial_x \varrho = \frac{1}{\epsilon} (a[\varrho] \varrho - \sigma)$, we write :

$$\begin{aligned} \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \sigma_{j-\frac{1}{2}} - 2\sigma_j^n = & \frac{\sigma_{j+1}^n - 2\sigma_j^n + \sigma_{j-1}^n}{2} + c \frac{\varrho_{j-1}^n - \varrho_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta x}{4\epsilon c^2} \left[c(\sigma_{j-1}^n + 2\sigma_j^n + \sigma_{j+1}^n) \right. \\ & + \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} (\sigma_j^n - \sigma_{j-1}^n) + \frac{a_{j+\frac{1}{2},L}^n + a_{j+\frac{1}{2},R}^n}{2} (\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n) + c^2 (\varrho_{j-1}^n - \varrho_{j+1}^n) \\ & \left. - c \left(\frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} \varrho_{j-1}^n + \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n + a_{j+\frac{1}{2},L}^n + a_{j+\frac{1}{2},R}^n}{2} \varrho_j^n + \frac{a_{j+\frac{1}{2},L}^n + a_{j+\frac{1}{2},R}^n}{2} \varrho_{j+1}^n \right) \right] \\ & + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Using Taylor expansions, we have, for smooth solutions $\sigma(t^n, x_{j+1}) - 2\sigma(t^n, x_j) + \sigma(t^n, x_{j-1}) = O(\Delta x^2)$, $\varrho(t^n, x_{j-1}) - \varrho(t^n, x_{j+1}) = O(\Delta x)$, $\sigma(t^n, x_j) - \sigma(t^n, x_{j-1}) = O(\Delta x)$ and $\sigma(t^n, x_{j+1}) - \sigma(t^n, x_j) = O(\Delta x)$. Along with the bound $|a_{j\pm\frac{1}{2},L/R}^n| \leq a_\infty$, this implies :

$$\begin{aligned} \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \sigma_{j-\frac{1}{2}} - 2\sigma_j^n = & c \frac{\varrho_{j-1}^n - \varrho_{j+1}^n}{2} - \frac{1}{4\epsilon c^2} \left[c(\sigma_{j-1}^n + 2\sigma_j^n + \sigma_{j+1}^n) \right. \\ & - c \left(\frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n}{2} \varrho_{j-1}^n + \frac{a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n + a_{j+\frac{1}{2},L}^n + a_{j+\frac{1}{2},R}^n}{2} \varrho_j^n \right. \\ & \left. \left. + \frac{a_{j+\frac{1}{2},L}^n + a_{j+\frac{1}{2},R}^n}{2} \varrho_{j+1}^n \right) \right] \Delta x + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Clearly, $c \frac{\varrho_{j-1}^n - \varrho_{j+1}^n}{2}$ and $c(\sigma_{j-1}^n + 2\sigma_j^n + \sigma_{j+1}^n)$ are consistent with an accuracy of $O(\Delta x^2)$ and $O(\Delta x)$, respectively, with $-c\partial_x \varrho(t^n, x_j)$ and $4c\sigma(t^n, x_j)$. For the remaining terms, let us recall that, with the notations of (4.37) :

$$\varrho_{j-\frac{1}{2},L} = \frac{\nu_{j-1}^n - \bar{\mu}(0)}{2c} = \frac{\nu_{j-1}^n - \sigma_{j-\frac{1}{2}}}{c}, \quad \varrho_{j-\frac{1}{2},R} = \frac{\bar{\nu}(\Delta x) - \mu_j^n}{2c} = \frac{\sigma_{j-\frac{1}{2}} - \mu_j}{c}.$$

Hence, $\varrho_{j-\frac{1}{2},L} + \varrho_{j-\frac{1}{2},R} = \frac{\nu_{j-1}^n - \mu_j^n}{c} = \frac{\sigma_{j-1}^n - \sigma_j^n}{c} + \varrho_{j-1}^n + \varrho_j^n$. Since $\sigma(t^n, x_{j-1}) - \sigma(t^n, x_j) = O(\Delta x)$, and assuming that :

$$a_{j-\frac{1}{2},L/R}^n = - \sum_{k \neq j} W'(x_j - x_k) \varrho_{k-\frac{1}{2},L/R}$$

we deduce that $a_{j-\frac{1}{2},L}^n + a_{j-\frac{1}{2},R}^n$ is consistent with $a[\varrho(t^n)](x_{j-1}) + a[\varrho(t^n)](x_j)$ with accuracy $O(\Delta x)$. It follows that $\sigma_{j+\frac{1}{2}} + \sigma_{j-\frac{1}{2}} - 2\sigma_j^n$ is consistent with $-\partial_x \varrho(t^n, x_j) - \frac{1}{\epsilon} (\sigma(t^n, x_j) - a[\varrho(t^n)](x_j) \varrho(t^n, x_j))$, again with accuracy $O(\Delta x)$, and this concludes the proof. \square

The stability conditions in Lemma 4.5 being independent on ε , we recover in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, using (4.36), the scheme of [64] :

$$\varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\nu_j^n (a_{j+\frac{1}{2},L}^n)_+ + \mu_{j+1}^n (a_{j+\frac{1}{2},R}^n)_-}{c + (a_{j+\frac{1}{2},R}^n)_- + (a_{j+\frac{1}{2},L}^n)_+} - \frac{\nu_{j-1}^n (a_{j-\frac{1}{2},L}^n)_+ + \mu_j^n (a_{j-\frac{1}{2},R}^n)_-}{c + (a_{j-\frac{1}{2},R}^n)_- + (a_{j-\frac{1}{2},L}^n)_+} \right) \quad (4.41a)$$

$$\sigma_j^{n+1} = \sigma_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2\sigma_j^n - \frac{\nu_j^n (a_{j+\frac{1}{2},L}^n)_+ + \mu_{j+1}^n (a_{j+\frac{1}{2},R}^n)_-}{c + (a_{j+\frac{1}{2},R}^n)_- + (a_{j+\frac{1}{2},L}^n)_+} - \frac{\nu_{j-1}^n (a_{j-\frac{1}{2},L}^n)_+ + \mu_j^n (a_{j-\frac{1}{2},R}^n)_-}{c + (a_{j-\frac{1}{2},R}^n)_- + (a_{j-\frac{1}{2},L}^n)_+} \right), \quad (4.41b)$$

which is stable under the conditions $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ and $c \geq a_\infty$. Notice that with the notation in (4.38), Equation (4.41a) may be rewritten as the following upwind-type scheme :

$$\varrho_j^{n+1} = \varrho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\varrho_{j+\frac{1}{2},L}^n (a_{j+\frac{1}{2},L}^n)_+ - \varrho_{j+\frac{1}{2},R}^n (a_{j+\frac{1}{2},R}^n)_- - \varrho_{j-\frac{1}{2},L}^n (a_{j-\frac{1}{2},L}^n)_+ + \varrho_{j-\frac{1}{2},R}^n (a_{j-\frac{1}{2},R}^n)_- \right).$$

4.4 Numerical Experiments

We present some numerical illustrations for the two schemes described in the previous section. In addition to the potential $W(x) = \frac{|x|}{2}$, we also consider the smooth potential $W(x) = \frac{x^2}{2}$.

Numerical tests are conducted on the domain $[-1, 1]$ and both schemes are initialized with :

$$\varrho_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \varrho_0(C_j), \quad \sigma_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \sigma_0(C_j).$$

4.4.1 Accuracy of the Numerical Schemes

In this subsection, schemes are initialized with the initial data $\varrho_0 = \frac{1}{2}\delta_{-0.5} + \frac{1}{2}\delta_{0.5}$, $\sigma_0 = a[\varrho_0]\varrho_0$.

Figure 4.2 shows that both schemes recover the correct dynamics in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$: for the potential $W(x) = \frac{|x|}{2}$, one can compute the exact velocity of both Dirac masses for the aggregation Equation (4.1) and see that they should be located, respectively, in $x = -0.2$ and $x = 0.2$ in final time $T = 1.2$.

This test is set up with $\varepsilon = 10^{-7}$, on a Cartesian mesh of $[-1, 1]$ with 1500 cells, $c = 1$ and the CFL $c \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.9$. Both schemes (4.28) and (4.41) display the correct velocity for the Dirac masses, but one can notice that the Rusanov scheme (4.28) shows more numerical diffusion. Note that both schemes are written in conservation form, they preserve the total mass of ϱ , which is also verified numerically.

We then investigated the order of convergence when Δx goes to 0 with ε fixed, in Wasserstein distance W_1 (the numerical results are the same for W_2).

After performing tests for several values of ε , it appears that the convergence order with respect to Δx does not depend on the size of ε . Therefore, as an example, we propose simulations in final time $T = 0.5$, with the same initial data and stability parameters as above, and with $\varepsilon = 2 \times 10^{-6}$ for Figure 4.3 and with $\varepsilon = 10^{-2}$ for Figure 4.4 :

For a fixed value of ε , both schemes seem to converge with order 1/2 with respect to Δx for the smooth potential $W(x) = \frac{x^2}{2}$ (see Figure 4.3) whereas they seem to be of order 1 for the potential $W(x) = \frac{|x|}{2}$ (see Figure 4.4). This can be explained as both schemes possess some numerical diffusion which is somehow counterbalanced by the aggregation phenomenon in the case of a pointy potential, as already observed in [54]. Due to the link with the Burgers equation, this superconvergence phenomenon is directly linked to the results of Després [44], which should

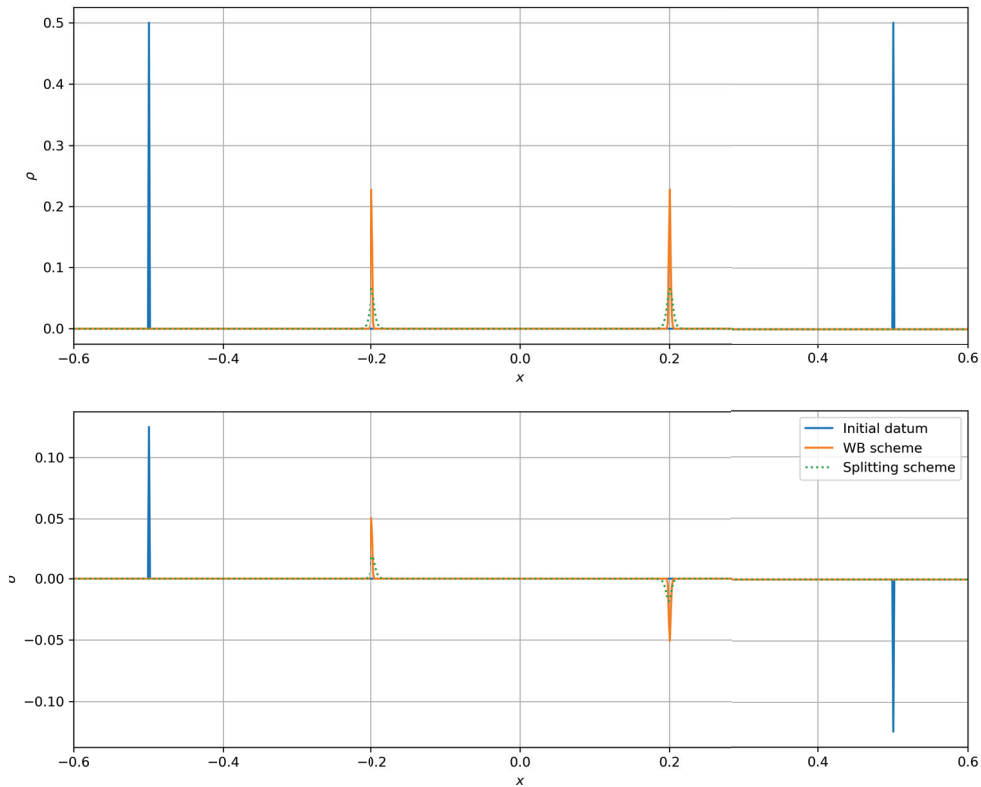


FIGURE 4.2 – Dynamics of two Dirac masses for the potential $W(x) = \frac{|x|}{2}$ in time $T = 1.2$.

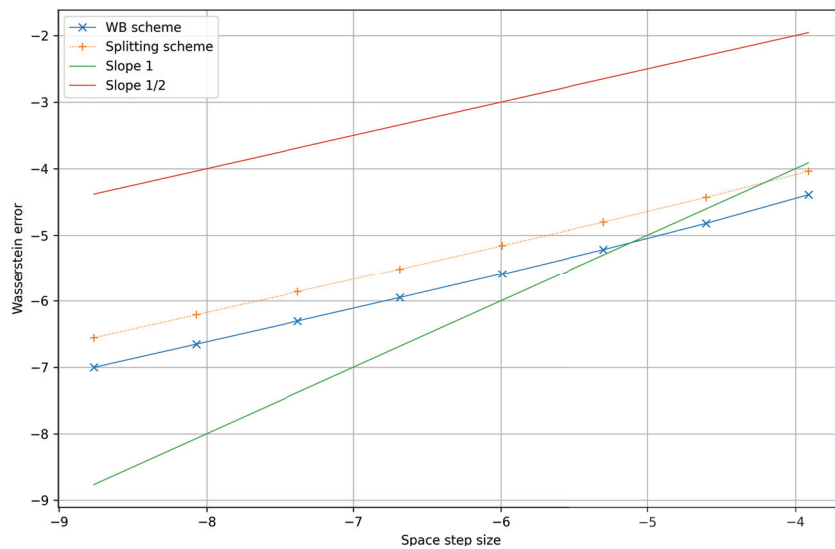


FIGURE 4.3 – Order of convergence of the splitting scheme and the well-balanced scheme for the smooth potential $W(x) = \frac{x^2}{2}$.

be rigorously extended to our case (the mere extension to the upwind scheme of [36] for the aggregation is not straightforward).

Finally, we also verified the well-balanced property of the scheme (4.40). In order to obtain a reference solution to system (4.2) when $\varepsilon > 0$, note that it can be proven that system (4.3) admits traveling waves solutions given by :

$$u(t, x) = \bar{u}(\varepsilon(x - \sigma t)), \quad v(t, x) = \bar{v}(\varepsilon(x - \sigma t)),$$

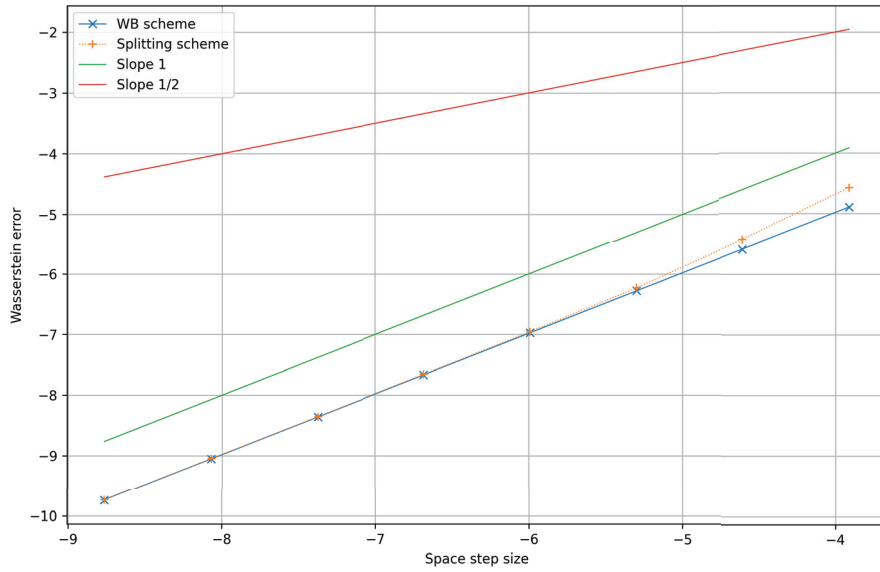


FIGURE 4.4 – Order of convergence of the splitting scheme and the well-balanced scheme for the pointy potential $W(x) = \frac{|x|}{2}$.

where :

$$\bar{u}(\xi) = \frac{u_g + u_d \exp\left(\frac{u_g - u_d}{2(c^2 - \sigma^2)}(\xi - \xi_0)\right)}{1 + \exp\left(\frac{u_g - u_d}{2(c^2 - \sigma^2)}(\xi - \xi_0)\right)}, \quad \bar{v}(\xi) = \sigma(\bar{u}(\xi) - u_g) + \frac{u_g^2}{2},$$

and with $\sigma = \frac{u_g + u_d}{2}$, $\xi = \frac{1}{\varepsilon}(x - \sigma t)$ and $\xi_0 \in \mathbf{R}$ is a parameter. In our case, $u(t, x) = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x \varrho(t, dy)$, hence $u_g = 1/2 = -u_d$ and therefore traveling wave solutions are stationary. Setting $\xi_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$, we deduce :

$$u(t, x) = -\frac{1}{2} \tanh \frac{x}{4\varepsilon c^2}, \quad v(t, x) = \frac{1}{8}.$$

Differentiating in space, these solutions give particular solutions (ϱ, σ) , that are stationary, to system (4.2) :

$$\varrho(t, x) = \frac{1}{8\varepsilon c^2} \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{x}{4\varepsilon c^2} \right) \right), \quad \sigma(t, x) = 0.$$

In Figure 4.5, we compute the W_1 distance between the approximated solution at time $T = 0.5$ and the above stationary solution ϱ . The test is conducted with $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$, with the exact boundary conditions given by the above formula, and for several values of Δx . The scheme (4.40) preserves well the above equilibrium for any Δx (even though we replaced the resolution of the systems (4.31) and (4.30) with linear systems, see (4.33)), while for the splitting scheme, we recover the linear convergence towards ϱ which is, in this case, the exact solution.

4.4.2 Illustration of Theorem 4.3

We finish by illustrating the convergence rate we obtained in the continuous setting. In Theorem 4.3, we obtained convergence at rate $\sqrt{\varepsilon T} + \varepsilon = O(\sqrt{\varepsilon})$ of ϱ_T^ε towards ϱ_T the solution to the aggregation equation, at any final time $T > 0$ in W_1 distance, where $(\varrho^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ is the solution to (4.2) for any initial data (ϱ_0, σ_0) with $\varrho_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, provided $c > 1/2$ and $\sigma_0 = a[\varrho_0]\varrho_0$.

Under these conditions, we illustrate this convergence rate by computing the distance between $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon_i}$ and $\varrho_{\Delta x}^{\varepsilon_{i+1}}$ (what is called error in the following figures) for $\varepsilon_i = 1/2^i$, $i = 4, \dots, 18$ and for a fixed Δx small enough so as to consider that our discretizations approximate well the continuous solutions (whether or not $\varepsilon > 0$ since we proved our schemes to be AP).

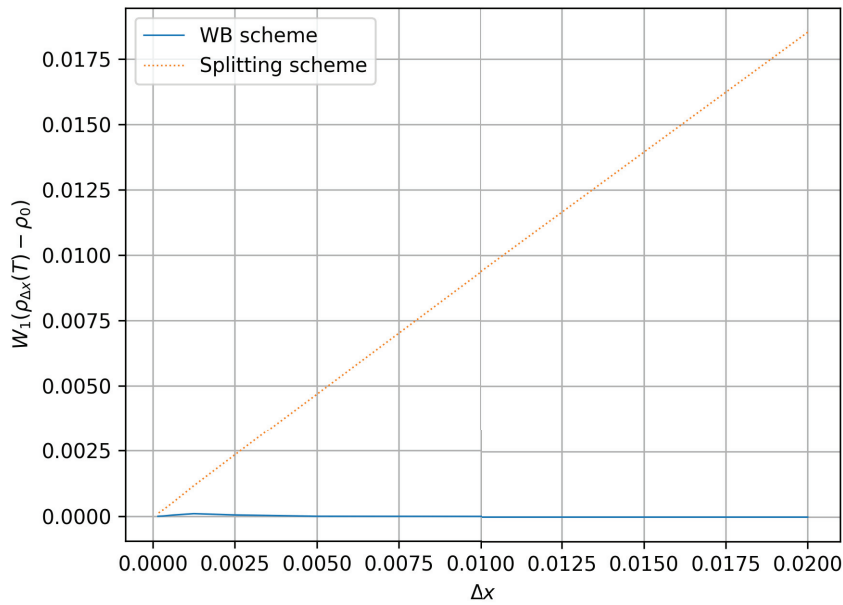


FIGURE 4.5 – Distance to the equilibrium for the splitting scheme and the well-balanced scheme and for the pointy potential $W(x) = \frac{|x|}{2}$.

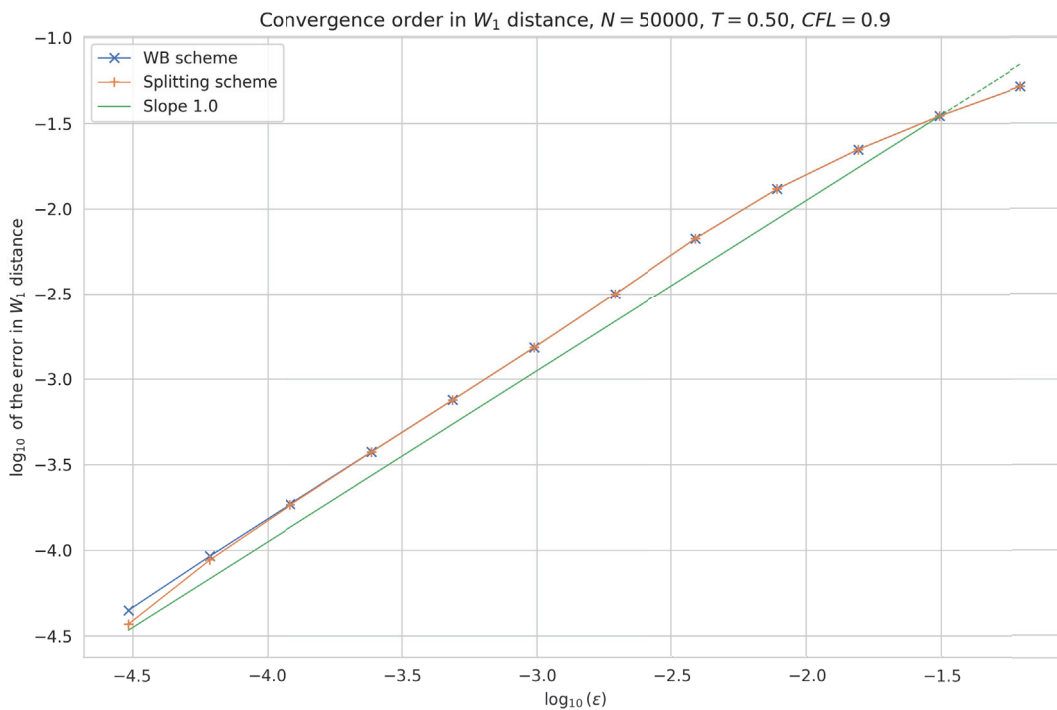


FIGURE 4.6 – Convergence rate w.r.t ϵ in W_1 distance, $W(x) = \frac{|x|}{2}$, 50000 cells. Initial datum is one Gaussian bump $\varrho_0(x) = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$.

For $W(x) = \frac{|x|}{2}$, the superconvergence phenomenon seems to occur once again as we observe in Figure 4.6 : convergence with respect to ϵ is observed at order 1 in distance W_1 , provided $\epsilon \lesssim 10^{-2}$ (the first three points do not seem to show order 1). Quite surprisingly, order 1 convergence seems to occur in any W_p distance, $p \in [1, +\infty[$ (see table 4.1). Intuitively, one might have wanted to

use the inequality $W_p(\varrho^\varepsilon, \varrho) \leq W_1^{\frac{1}{p}}(\varrho^\varepsilon, \varrho) \text{diam}(\Omega)^{1-\frac{1}{p}}$ on a bounded domain Ω to pass from $O(\varepsilon)$ convergence in W_1 distance to $O(\varepsilon^{1/p})$ convergence in W_p distance, but apparently this is not optimal.

p	Well-balanced scheme	Splitting scheme
1	0.99627054	1.02607252
2	0.98349175	1.02358042
3	0.97402616	1.03216978
4	0.95475130	1.02633710
5	0.97151212	0.98096040
6	0.96196499	0.95627928

TABLE 4.1 – Order of convergence w.r.t ε in W_p distance, using either scheme to approximate the continuous solutions, for $W(x) = \frac{|x|}{2}$, 45000 cells, $T = 0.5$. The error is estimated as the mean slope in log-log scale. Initial datum is one Gaussian bump $\varrho_0(x) = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$.

We finish with the case of the smooth potential $W(x) = \frac{x^2}{2}$ for which we expect a $O(\sqrt{\varepsilon})$ convergence rate. We observe numerically in Figure 4.7 a behaviour very similar to that of Figure 4.6, and this suggest that our convergence rate is not optimal. Perhaps the relaxation approximation allows to gain regularity for the solutions, which might help obtaining a sharper convergence rate in $O(\varepsilon)$ in W_1 distance.

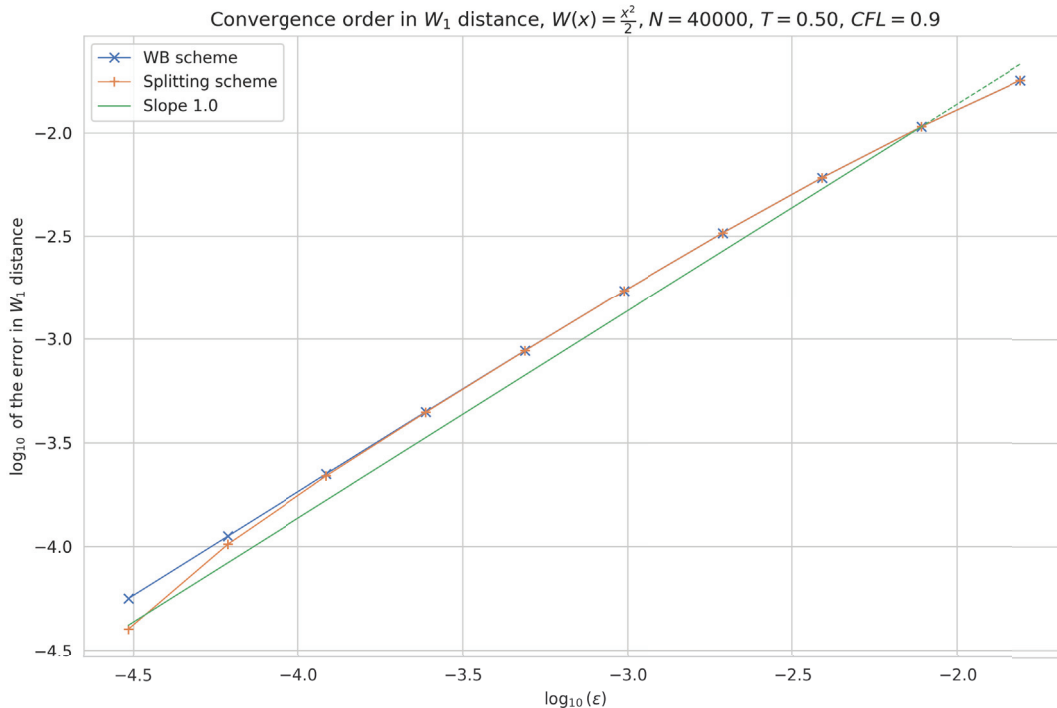


FIGURE 4.7 – Convergence rate w.r.t ε in W_1 distance, $W(x) = \frac{|x|^2}{2}$, 40000 cells. Initial datum is one Gaussian bump $\varrho_0(x) = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-20x^2}$.

Note that both schemes allow to recover convergence at the seemingly optimal order for the continuous solutions, although the splitting scheme seems to be more than geometrically convergent for the last two ε_i . This is actually not the case since refining the mesh would allow use to get a

straight line also for the splitting scheme. In fact, one could interpret this as the splitting scheme being less accurate in capturing the aggregation phenomenon than the well-balanced scheme, since, when ε is very small, solutions behave like Dirac masses. This gives another argument to discard the splitting scheme in favour of the well-balanced scheme.

Annexe A

Annexe

A.1 Quelques rappels de probabilités et théorie de la mesure

A.1.1 Mesures de probabilité

L'étude d'équations d'agrégation en dimension 1 amène fréquemment [55, 70, 16, 107, 5, 57, 56] à considérer les inverses généralisés de fonctions de répartition, dont on rappelle la définition ici.

Définition A.1. *On suppose ici $d = 1$. Soit $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. On appelle fonction de répartition de ϱ (cumulative distribution function) la fonction $F : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ donnée par :*

$$F(x) = \mu([-\infty, x]), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Toute fonction de répartition est croissante, continue à droite en tout point, et de limites respectives 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

En tant que fonction croissante majorée, elle admet une limite à gauche en tout point. Puisqu'elle est aussi continue en tout point, c'est ce que l'on appelle une fonction càdlàg (continue à droite, limite à gauche).

On peut définir l'inverse généralisé de F (encore appelé pseudo-inverse ou fonction quantile) par :

$$\forall y \in [0, 1], \quad F^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geq y\}.$$

Si F est strictement croissante, alors F^{-1} correspond à l'inverse standard de F .

A.1.2 Convergence des mesures (pas forcément de probabilité)

Lorsque l'on parle de convergence faible d'une suite de mesures vers une autre mesure, se pose la question de l'ensemble des fonctions tests que l'on prend. On rappelle que l'on note $\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des mesures finies ou bornées sur (les boréliens de) \mathbf{R}^d .

Définition A.2 (Convergence étroite, convergence faible-*, convergence vague). *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$. On dit que (ϱ_n) converge étroitement (resp. faiblement-*, vaguement) vers $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$ si elle converge en dualité contre $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^d)$ (resp. $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^d)$), c'est-à-dire que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}^d) \text{ (resp. } \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^d), \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^d)), \quad \int \varphi d\varrho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int \varphi d\varrho.$$

Proposition A.1. *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$ et $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$.*

(ϱ_n) converge étroitement vers ϱ si et seulement si (ϱ_n) converge vaguement vers ϱ et $\varrho_n(\mathbf{R}^d) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varrho(\mathbf{R}^d)$. En particulier, si les ϱ_n et ϱ sont des mesures de probabilité, la convergence étroite équivaut à la convergence vague, et donc à la convergence faible- (parfois appelée « convergence faible au sens des mesures »).*

La convergence en loi d'une suite de variables aléatoires est définie à partir de la convergence étroite des mesures de probabilité associées, et peut-être caractérisée par leur convergence vague d'après la proposition ci-dessus.

Plusieurs de nos méthodes (Γ -convergence, compacité à la Lax-Wendroff) nécessitent d'extraire d'une suite de mesures (en général de probabilité) une sous-suite convergente vers une autre mesure finie.

Proposition A.2. *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$ de mesure totale bornée uniformément par rapport à $n \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire $\varrho_n(\mathbf{R}^d) \leq C$ indépendant de $n \in \mathbf{N}$. C'est en particulier le cas si (ϱ_n) est une suite de mesures de probabilité.*

Alors il existe une sous-suite de (ϱ_n) qui converge faible- vers $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$.*

Néanmoins, la limite ϱ n'est a priori pas une mesure de probabilité même si les ϱ_n le sont toutes (prendre par exemple $\varrho_n = \delta_n$ dont la limite faible-* est la mesure nulle). Assurer que la limite soit une mesure de probabilité repose sur la notion de tension de la suite :

Définition A.3 (Suite tendue). *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$. On dit que (ϱ_n) est tendue si $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varrho_n(B_R^c) = 0$ uniformément en $n \in \mathbf{N}$. Plus précisément, cela signifie que :*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbf{N}} \varrho_n(B_R^c) = 0.$$

La tension est parfois énoncée de la façon équivalente suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact}, \forall n \in \mathbf{N}, \varrho_n(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon.$$

La tension d'une suite de mesures implique que (ϱ_n) ne peut pas « envoyer de masse à l'infini », la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est, par exemple, pas tendue. En pratique, la tension provient souvent d'une des conditions suivantes.

Proposition A.3 (Conditions suffisantes de tension). *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (1) *Il existe $p \geq 1$ tel que $M_p(\varrho_n)$ soit borné uniformément en $n \in \mathbf{N}$,*
- (2) *(ϱ_n) converge étroitement vers une mesure bornée,*

Alors la suite (ϱ_n) est tendue.

Démonstration. (1) Il suffit d'écrire :

$$R^p \varrho_n(B_R^c) \leq \int_{B_R^c} |x|^p \varrho_n(dx) \leq \int_{\mathbf{R}^d} |x|^p \varrho_n(dx) \leq C,$$

si bien que $\varrho_n(B_R^c) \leq C/R^p$ tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$ uniformément en n . □

La tension est également une condition suffisante pour que la convergence vague revienne à la convergence étroite :

Proposition A.4. *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$ et $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$. La convergence étroite de (ϱ_n) vers ϱ est équivalente à ce que (ϱ_n) soit tendue et que (ϱ_n) converge vaguement vers ϱ .*

On est alors en mesure de compléter la proposition A.2 :

Proposition A.5. *Soit $(\varrho_n) \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)^{\mathbf{N}}$ de mesure totale uniformément bornée par rapport à $n \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire que $\varrho_n(\mathbf{R}^d) \leq C$ indépendant de $n \in \mathbf{N}$. On suppose de plus que (ϱ_n) est tendue.*

Alors il existe une sous-suite de (ϱ_n) qui converge étroitement vers un certain $\varrho \in \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d)$. En particulier, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varrho_n(\mathbf{R}^d)$ existe et vaut $\varrho(\mathbf{R}^d)$.

Remarque A.1. En particulier, si (ϱ_n) est une suite de mesures de probabilité tendue, il existe une sous-suite qui converge étroitement/faible-*/vaguement vers une mesure de probabilité ϱ .

C'est typiquement ce qui se passe quand on utilise un théorème de type Lax-Wendroff : on montre, a priori, que l'approximation préserve la positivité et est conservative, de sorte à ce que $(\varrho_{\Delta x}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit une suite de mesures de probabilité, et également que l'un de leur moments est uniformément borné, c'est-à-dire $M_p(\varrho_n) \leq C$ pour un certain $p \geq 1$, de sorte à ce que la suite $(\varrho_{\Delta x}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit tendue. Immédiatement, on peut en déduire qu'une sous-suite de $(\varrho_{\Delta x}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faible-* vers une mesure de probabilité $\varrho \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$.

A.2 Quelques rappels d'analyse

Proposition A.6 (Inégalité de Young pour la convolution). *Pour $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, et $(f, g) \in L^p(\mathbf{R}^d) \times L^q(\mathbf{R}^d)$,*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

De cette inégalité, on peut déduire les trois cas particuliers suivants :

(1) (Convolution $L^1 \times L^1$)

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

(2) (Convolution $L^1 \times L^p$)

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p},$$

(3) (Convolution $L^p \times L^{p'}$)

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Proposition A.7 (Interpolation des espaces L^p). *Soit $p, q, r \in [1, \infty]$ avec $p \leq r \leq q$. Soit $u \in L^p(\mathbf{R}^d) \cap L^q(\mathbf{R}^d)$. Alors $u \in L^r(\mathbf{R}^d)$ et on a les inégalités d'interpolation suivantes :*

(1) $\|u\|_{L^r}^r \leq \|u\|_{L^p}^{\theta p} \|u\|_{L^q}^{(1-\theta)q}$ où $r = \theta p + (1-\theta)q$.

(2) $\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^\nu \|u\|_{L^q}^{1-\nu}$ où $\frac{1}{r} = \frac{\nu}{p} + \frac{1-\nu}{q}$.

Lemme A.1 (Lemmes de type Grönwall). *Soit $a < b$ des réels et $y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable*

(1) *S'il existe $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continues avec α positive sur $[a, b]$, telles que $y(t) \leq \beta(t) + \int_a^t \alpha(\tau) y(\tau) d\tau$ pour tout $t \in [a, b]$, alors :*

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \beta(t) + \int_a^t \alpha(\tau) \beta(\tau) e^{\int_\tau^t \alpha(s) ds} d\tau.$$

(2) *S'il existe $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue et positive sur $[a, b]$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que $y(t) \leq c + \int_a^t \alpha(\tau) y(\tau) d\tau$ pour tout $t \in [a, b]$, alors :*

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \alpha(\tau) d\tau\right).$$

(3) *S'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ tels que $|y'| \leq \beta + \alpha|y|$ sur $[a, b]$, alors :*

$$\forall t \in [a, b], \quad |y(t)| \leq |y(a)| e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-a)} - 1).$$

(4) *S'il existe $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue (mais pas nécessairement positive) telle que $y' \leq \alpha y$ sur $[a, b]$, alors :*

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq y(a) \exp\left(\int_a^t \alpha(\tau) d\tau\right).$$

- (5) S'il existe $\alpha > 0$ avec $\alpha \neq 1$ et $c \in \mathbf{R}^*$, positif si $\alpha > 1$ et négatif si $\alpha < 1$, tels que $y' + cy^\alpha \leq 0$ sur $[a, b]$, et si y est positive sur $[a, b]$ dans le cas où $\alpha > 1$, alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq (y(a)^{1-\alpha} + c(\alpha - 1)(t - a))^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

Et pour $\alpha = 1$ s'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $y' + cy \leq 0$ sur $[a, b]$, alors on a :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq y(a)e^{-c(t-a)}.$$

- (6) S'il existe $\alpha \in]0, 1[$ et $C_1, C_2, C_3 \geq 0$ tels que $y' \leq C_1 + C_2y^\alpha + C_3y$ sur $[a, b]$, et si y est positive sur $[a, b]$, alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq y(a)e^{(C_3 + \alpha C_2)(t-a)} + \frac{C_1 + C_2(1-\alpha)}{C_3 + \alpha C_2} \left(e^{(C_3 + \alpha C_2)(t-a)} - 1 \right).$$

Remarque A.2.

- Pour le point (5), dans le cas $\alpha > 1$, on en déduit une estimation en temps sur $y(t)$ sans savoir rien d'autre sur $y(a)$ que $y(a) \geq 0$. En effet, on a alors $y(a)^{1-\alpha} + c(\alpha - 1)(t - a) \geq c(\alpha - 1)(t - a)$, or $\frac{1}{1-\alpha} < 0$, donc en élevant à cette puissance, on obtient $y(t) \leq (y(a)^{1-\alpha} + c(\alpha - 1)(t - a))^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq (c(\alpha - 1)(t - a))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

On peut utiliser ceci, par exemple, pour obtenir une estimation en temps des normes L^p d'une solution de l'équation de la chaleur.

- L'estimation du point (5) est optimale car on n'effectue que des intégrations exactes, tandis que celle du point (6) ne l'est pas, mais suffit par exemple à majorer y en temps borné. On peut essayer d'affiner les choses, pour retrouver par exemple une croissance quadratique en t qu'offre le point (5) lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour ce faire, on écrit plutôt l'inégalité de Young pour $u = \varepsilon y^\alpha$ et $v = \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui donne après calculs :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq y(a)e^{(C_3 + \alpha C_2 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})(t-a)} + \frac{C_1 + \frac{C_2(1-\alpha)}{\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{C_3 + \alpha C_2 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} \left(e^{(C_3 + \alpha C_2 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})(t-a)} - 1 \right).$$

Pour se débarrasser du facteur exponentiel, c'est-à-dire choisir $\varepsilon > 0$ tel que $(C_3 + \alpha C_2 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})(t - a) = 1$ par exemple, il faut en particulier que $\frac{1}{t-a} - C_3 \geq 0$, c'est-à-dire que $t \leq \frac{1}{C_3} + a$, donc que l'on soit en temps borné par les paramètres. Améliorer le facteur exponentiel en un facteur polynomial en t n'a donc pas d'intérêt, sauf si $C_3 = 0$. Dans ce cas, on retrouve la croissance en $t^{\frac{1}{1-\alpha}}$ du point (5).

Démonstration. On ne prouve que les points (5) et (6), moins classiques mais tout aussi utiles.

- (5) En intégrant sur $[a, t]$ l'inégalité $\frac{y'}{y^\alpha} + c \leq 0$ on obtient :

$$\left[\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^t + c(t-a) \leq 0.$$

Si $\alpha < 1$, on en déduit $y(t)^{1-\alpha} \leq y(a)^{1-\alpha} + c(\alpha - 1)(t - a)$, d'où le résultat en élevant à la puissance $\frac{1}{1-\alpha} > 0$. Si $\alpha > 1$, l'inégalité change deux fois de sens (la deuxième fois car on a également $y(t) \geq 0$) donc le résultat reste le même. Pour $\alpha = 1$, on peut effectuer le même calcul en intégrant y'/y en $\ln y$. On peut d'ailleurs vérifier que le résultat précédente dégénère bien en $y(t) \leq y(a)e^{-c(t-a)}$ en effectuant un développement limité quand $\alpha \rightarrow 1$.

- (6) On se ramène à un lemme de Grönwall linéaire en utilisant une inégalité de Young, ce qui est faisable seulement parce que $\alpha \in]0, 1[$ (si $\alpha = 1$ ça marche aussi mais cela n'a pas d'intérêt).

On pose $p = \frac{1}{\alpha}$. On a alors $p' = \frac{1}{1-\alpha}$, et pour $u, v \in \mathbf{R}_+$:

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^{p'}}{p'}.$$

Pour $u = y^\alpha$ et $v = 1$, on obtient :

$$y^\alpha \leq 1 - \alpha + \alpha y,$$

si bien que l'on a :

$$y' \leq C_1 + C_2(1 - \alpha) + (C_3 + \alpha C_2)y,$$

et le résultat s'ensuit par application du point (3). □

Lemme A.2 (Lemmes de Grönwall discrets, linéaires). *Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $N \in \mathbf{N}^*$.*

- (1) *S'il existe $a > 0$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs tels que :*

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad e_{n+1} \leq a e_n + \alpha_n.$$

Alors :

$$\forall n = 1, \dots, N, \quad e_n \leq a^n e_0 + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \alpha_m.$$

Application à l'analyse de convergence de schémas : soit $\Delta t, \Delta x > 0$, $p \in \mathbf{R}_+^$ ayant vocation à être un ordre de convergence. On note, pour $n \in \mathbf{N}$, $t^n = n \Delta t$.*

- (2) *S'il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que :*

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad e_{n+1} \leq (1 + C_1 \Delta t) e_n + C_2 \Delta t \Delta x^p.$$

Alors on a :

$$\forall n = 1, \dots, N, \quad e_n \leq e^{C_1 t^n} e_0 + \begin{cases} \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 t^n} \Delta x^p, \\ C_2 t^n e^{C_1 t^n} \Delta x^p, \\ \frac{C_2}{C_1} (e^{C_1 t^n} - 1) \Delta x^p. \end{cases}$$

- (3) *S'il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que :*

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad e_{n+1} \leq (1 - C_1 \Delta t) e_n + C_2 \Delta t \Delta x^p,$$

avec $C_1 \Delta t < 1$ (ce qui n'est pas restrictif), alors on a :

$$\forall n = 1, \dots, N, \quad e_n \leq e_0 + \frac{C_2}{C_1} \Delta x^p$$

- (4) *S'il existe $C > 0$ tel que :*

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad e_{n+1} \leq e_n + C \Delta t \Delta x^p.$$

Alors :

$$\forall n = 1, \dots, N, \quad e_n \leq e_0 + C t^n \Delta x^p$$

Remarque A.3.

- Le plus souvent, e_n représente l'erreur dans une certaine norme entre la solution exacte et l'approximation numérique. Le terme en $C\Delta t\Delta x^p$ peut provenir par exemple de l'erreur de consistance, le plus souvent bornée en norme uniforme par $C\Delta t\Delta x^p$ pour un schéma consistant à l'ordre p [116].
- Le deuxième point est le plus couramment utilisé, par exemple pour des schémas aux différences finies stables au sens où une estimée du type $\|u_n\| \leq (1 + C\Delta t)\|u_{n-1}\|$ est vérifiée. L'estimée en « Ce^{Ct^n} » est celle généralement donnée, mais on donne quand même la deuxième qui est parfois utilisée et a le mérite d'être meilleure en temps petit. En réalité, autant utiliser la troisième en « $C(e^{Ct^n} - 1)$ » qui est la meilleure en temps grand (en e^{Ct^n}) et en temps petit (linéaire en t^n , c'est-à-dire nulle quand $n = 0\dots$)
- Le troisième point, un peu moins fréquent, permet d'avoir une constante indépendante du temps, ce qui est intéressant en temps long.
- Le dernier point, classique, est une récurrence directe et s'observe par exemple pour les schémas vérifiant le principe du maximum fort.

Démonstration.

(1) Récurrence directe.

(2) Le point précédent donne :

$$\begin{aligned}
 e^n &\leq (1 + C_1\Delta t)^n e_0 + C_2\Delta t\Delta x^p \sum_{m=0}^{n-1} (1 + C_1\Delta t)^{n-1-m} \\
 &= \underbrace{(1 + C_1\Delta t)^n}_{\leq e^{C_1t^n}} e_0 + \frac{C_2}{C_1} \underbrace{((1 + C_1\Delta t)^n - 1)}_{\leq (1+C_1\Delta t)^n \leq e^{C_1t^n}} \Delta x^p, \\
 &\leq e^{C_1t^n} e_0 + \frac{C_2}{C_1} e^{C_1t^n} \Delta x^p,
 \end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité. Pour la deuxième inégalité, on écrit plutôt :

$$e^n \leq \underbrace{(1 + C_1\Delta t)^n}_{\leq e^{C_1t^n}} e_0 + C_2\Delta t\Delta x^p \sum_{m=0}^{n-1} \underbrace{(1 + C_1\Delta t)^{n-1-m}}_{\leq e^{C_1t^n}} \leq e^{C_1t^n} e_0 + C_2t^n e^{C_1t^n}.$$

(3) On peut toujours appliquer le premier point pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 e^n &\leq (1 - C_1\Delta t)^n e_0 + C_2\Delta t\Delta x^p \sum_{m=0}^{n-1} (1 - C_1\Delta t)^{n-1-m} \\
 &= \underbrace{(1 - C_1\Delta t)^n}_{\leq 1} e_0 + \frac{C_2}{C_1} \underbrace{(1 - (1 - C_1\Delta t)^n)}_{\leq 1} \Delta x^p.
 \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [1] L. AMBROSIO, Nicola GIGLI et Giuseppe SAVARE. *Gradient Flows : In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. 2^e éd. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 2008.
- [2] Jean-Pierre AUBIN et Arrigo CELLINA. *Differential Inclusions : Set-Valued Maps and Viability Theory*. Réd. par M. ARTIN et al. T. 264. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg : Springer, 1984.
- [3] Nathalie AYI et al. “On a structure-preserving numerical method for fractional Fokker-Planck equations”. Juill. 2021.
- [4] Rafael BAILO, Jose A. CARRILLO et Jingwei HU. “Fully Discrete Positivity-Preserving and Energy-Dissipating Schemes for Aggregation-Diffusion Equations with a Gradient Flow Structure”. In : *Communications in Mathematical Sciences* 18.5 (2020), p. 1259-1303.
- [5] D. BALAGUE et al. *Nonlocal interactions by repulsive-attractive potentials : radial ins/stability*. 24 sept. 2011. arXiv : 1109.5258[math].
- [6] Andrea BERTOZZI et Jeremy BRANDMAN. “Finite-time blow-up of Linfty-weak solutions of an aggregation equation”. In : *Communications in Mathematical Sciences - COMMUN MATH SCI* 8 (1^{er} mars 2010).
- [7] Andrea L. BERTOZZI, José A. CARRILLO et Thomas LAURENT. “Blow-up in multidimensional aggregation equations with mildly singular interaction kernels”. In : *Nonlinearity* 22.3 (fév. 2009). Publisher : IOP Publishing, p. 683-710.
- [8] Andrea L. BERTOZZI, John B. GARNETT et Thomas LAURENT. “Characterization of radially symmetric finite time blowup in multidimensional aggregation equations,” in : *arXiv :1204.1095 [math]* (4 avr. 2012). arXiv : 1204.1095.
- [9] Andrea L. BERTOZZI, Thomas LAURENT et Jesús ROSADO. “Lp theory for the multidimensional aggregation equation”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 64.1 (2011). _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.20334>, p. 45-83.
- [10] Piotr BILER, Grzegorz KARCH et Philippe LAURENÇOT. “Blowup of solutions to a diffusive aggregation model”. In : *Nonlinearity* 22.7 (1^{er} juill. 2009), p. 1559-1568.
- [11] Piotr BILER et al. “Concentration phenomena in a diffusive aggregation model”. In : *arXiv :2001.06218 [math]* (17 jan. 2020). arXiv : 2001.06218.
- [12] Adrien BLANCHET, Jean DOLBEAULT et Benoit PERTHAME. “Two-dimensional Keller-Segel model : Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions, in "Electron". In : *Electronic Journal of Differential Equations* 44 (6 avr. 2006).
- [13] Adrien BLANCHET et al. “A hybrid variational principle for the Keller–Segel system in \mathbb{R}^2 ”. In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 49.6 (1^{er} nov. 2015), p. 1553-1576.
- [14] François BOLLEY, Ivan GENTIL et Arnaud GUILLIN. “Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations”. In : *Behavioural Brain Research* 222.1 (sept. 2011), p. 1-9.

- [15] Giovanni A. BONASCHI. “Three topics regarding gradient flows”. Thèse de doct. 2015.
- [16] Giovanni A. BONASCHI et al. “Equivalence of gradient flows and entropy solutions for singular nonlocal interaction equations in 1D”. In : *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 21.2 (1^{er} avr. 2015), p. 414-441.
- [17] F. BOUCHUT et F. JAMES. “One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients”. In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 32.7 (1^{er} juin 1998), p. 891-933.
- [18] François BOUCHUT. “Un formalisme pour les estimations de type Kružkov pour les lois de conservation scalaires”. In : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1996), p. 1-12.
- [19] François BOUCHUT et François JAMES. “Solutions en dualité pour les gaz sans pression”. In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 326.9 (1^{er} mai 1998), p. 1073-1078.
- [20] François BOUCHUT et Benoit PERTHAME. “Kruzkov’s estimates for scalar conservation laws revisited”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 350 (1^{er} juill. 1998), p. 2847-2870.
- [21] Nikolaos BOURNAVEAS et Vincent CALVEZ. “The one-dimensional Keller-Segel model with fractional diffusion of cells”. Juin 2009.
- [22] Benjamin BOUTIN et Jean-François COULOMBEL. “Stability of finite difference schemes for hyperbolic initial boundary value problems : numerical boundary layers”. In : *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications* 10.3 (juin 2017), p. 489-519.
- [23] Benjamin BOUTIN et al. “High order numerical schemes for transport equations on bounded domains”. In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 70 (2021), p. 84-106.
- [24] Malcolm BOWLES et Martial AGUEH. “Weak solutions to a fractional Fokker–Planck equation via splitting and Wasserstein gradient flow”. In : *Applied Mathematics Letters* 42 (1^{er} avr. 2015), p. 30-35.
- [25] Gabriella BRETTI, Roberto NATALINI et Magali RIBOT. “A hyperbolic model of chemotaxis on a network : a numerical study”. In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48.1 (2014), p. 231.
- [26] Jan BURCZAK et Rafael GRANERO-BELINCHÓN. “Critical Keller-Segel meets Burgers on \mathbb{S}^1 : large-time smooth solutions”. In : *Nonlinearity* 29.12 (1^{er} déc. 2016), p. 3810-3836.
- [27] Martin BURGER, Vincenzo CAPASSO et Daniela MORALE. “On an aggregation model with long and short range interactions”. In : *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 8.3 (1^{er} juill. 2007), p. 939-958.
- [28] Thibault CAILLET. *The five gradients inequality for non quadratic costs*. 13 oct. 2022.
- [29] Vincent CALVEZ, Jose Antonio CARRILLO et Franca HOFFMANN. “Uniqueness of stationary states for singular Keller-Segel type models”. In : *arXiv :1905.07788 [math]* (15 juin 2020). arXiv : 1905.07788.
- [30] Vincent CALVEZ et Mohsen SHARIFITABAR. “Modified Keller-Segel system and critical mass for the log interaction kernel”. In : *Contemp. Math.* 429 (26 août 2010).
- [31] J. A. CARRILLO et al. “Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations”. In : *Duke Mathematical Journal* 156.2 (1^{er} fév. 2011). Publisher : Duke University Press, p. 229-271.
- [32] José CARRILLO, Ulrik FJORDHOLM et Susanne SOLEM. “A second-order numerical method for the aggregation equations”. In : *Mathematics of Computation* 90.327 (jan. 2021), p. 103-139.

- [33] Jose A. CARRILLO, Katy CRAIG et Yao YAO. “Aggregation-diffusion equations : dynamics, asymptotics, and singular limits”. In : *arXiv :1810.03634 [math]* (8 oct. 2018). arXiv : 1810.03634.
- [34] José A. CARRILLO, Alina CHERTOCK et Yanghong HUANG. “A Finite-Volume Method for Nonlinear Nonlocal Equations with a Gradient Flow Structure”. In : *Communications in Computational Physics* 17.1 (jan. 2015), p. 233-258.
- [35] José A. CARRILLO et al. “Asymptotic simplification of Aggregation-Diffusion equations towards the heat kernel”. In : *arXiv :2105.13323 [math]* (27 mai 2021). arXiv : 2105.13323.
- [36] José Antonio CARRILLO et al. “The Filippov characteristic flow for the aggregation equation with mildly singular potentials”. In : *Journal of Differential Equations* 260.1 (2016). Publisher : Elsevier, p. 304-338.
- [37] Jean-François COULOMBEL. “Equations hyperboliques non-linéaires”. In : (23 sept. 2009), p. 66.
- [38] Jean-François COULOMBEL. “Stability of finite difference schemes for hyperbolic initial boundary value problems”. In : (22 août 2011), p. 99.
- [39] Jean-François COULOMBEL et Grégory FAYE. “Generalized gaussian bounds for discrete convolution powers”. In : *Revista Matemática Iberoamericana* (2022).
- [40] Jean-François COULOMBEL et Frédéric LAGOUTIÈRE. “The Neumann numerical boundary condition for transport equations”. In : *Kinetic and Related Models* 13.1 (fév. 2020), p. 1-32.
- [41] Elaine COZZI, Gung-Min GIE et James P. KELLIHER. *The aggregation equation with Newtonian potential*. 3 août 2016.
- [42] François DELARUE, Frédéric LAGOUTIÈRE et Nicolas VAUCHELET. “Convergence order of upwind type schemes for transport equations with discontinuous coefficients”. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2017). Publisher : Elsevier.
- [43] François DELARUE, Frédéric LAGOUTIÈRE et Nicolas VAUCHELET. “Convergence analysis of upwind type schemes for the aggregation equation with pointy potential”. In : *Annales Henri Lebesgue* (2019).
- [44] Bruno DESPRÉS. “Discrete compressive solutions of scalar conservation laws”. In : *Journal of Hyperbolic Differential Equations* 01.3 (1^{er} sept. 2004). Publisher : World Scientific Publishing Co., p. 493-520.
- [45] Y. DOLAK et C. SCHMEISER. “Kinetic models for chemotaxis : Hydrodynamic limits and spatio-temporal mechanisms”. In : *Journal of Mathematical Biology* 51.6 (1^{er} déc. 2005), p. 595-615.
- [46] Jean DOLBEAULT et Benoît PERTHAME. “Optimal critical mass in the two dimensional Keller–Segel model in \mathbb{R}^2 ”. In : *Comptes Rendus Mathématique* 339.9 (1^{er} nov. 2004), p. 611-616.
- [47] Jérôme DRONIOU. *A beginner’s course in finite volume approximation of scalar conservation laws*. 2008.
- [48] Manh Hong DUONG et Yulong LU. *An operator splitting scheme for the fractional kinetic Fokker-Planck equation*. 15 juin 2018.
- [49] Matthias ERBAR. “Gradient flows of the entropy for jump processes”. In : *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 50.3 (août 2014), p. 920-945.
- [50] Carlos ESCUDERO. “Chemotactic collapse and mesenchymal morphogenesis”. In : *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 72.2 (août 2005), p. 022903.
- [51] Carlos ESCUDERO. “The fractional Keller–Segel model”. In : *Nonlinearity* 19.12 (nov. 2006), p. 2909-2918.

- [52] Lawrence C. EVANS. *Partial Differential Equations*. Google-Books-ID : 5Pv4LVB_m8AC. American Mathematical Society, 1998. 692 p.
- [53] Robert EYMARD, Thierry GALLOUËT et Raphaële HERBIN. “Finite Volume Methods”. In : *Solution of Equation in R^n (Part 3), Techniques of Scientific Computing (Part 3)*. Sous la dir. de J. L. LIONS et Philippe CIARLET. T. 7. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 2000, p. 713-1020.
- [54] Benoît FABRÈGES et al. “Numerical schemes for the aggregation equation with pointy potentials”. In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 65 (2019). Publisher : EDP Sciences, p. 384-400.
- [55] Benoît FABRÈGES et al. “Relaxation Limit of the Aggregation Equation with Pointy Potential”. In : *Axioms* 10.2 (juin 2021), p. 108.
- [56] Klemens FELLNER et Gaël RAOUL. “Stability of stationary states of non-local equations with singular interaction potentials”. In : *Mathematical and Computer Modelling. Mathematical Methods and Modelling of Biophysical Phenomena* 53.7 (1^{er} avr. 2011), p. 1436-1450.
- [57] Klemens FELLNER et Gaël RAOUL. “Stable stationary states of non-local interaction equations”. In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20 (1^{er} déc. 2010), p. 2267-2291.
- [58] A. F. FILIPPOV. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides : Control Systems*. Sous la dir. de F. M. ARSCOTT. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1988.
- [59] Emilio GAGLIARDO. *Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili - OPAC - Biblioteca nazionale di Firenze*. 1959. URL : <https://opac.bncf.firenze.sbn.it/bncf-prod/resource?uri=SBL0243017&v=1> (visité le 25/10/2022).
- [60] Gerard GALLICE. “Approximation numérique de Systèmes Hyperboliques Non-linéaires Conservatifs ou Non-conservatifs”. thesis. Université de Bordeaux I, 11 juin 2002.
- [61] Thomas GALLOUËT, Maxime LABORDE et Léonard MONSAINGEON. *An unbalanced Optimal Transport splitting scheme for general advection-reaction-diffusion problems*. 14 avr. 2017.
- [62] Thomas GALLOUËT et Léonard MONSAINGEON. *A JKO splitting scheme for Kantorovich-Fisher-Rao gradient flows*. 7 mai 2018.
- [63] Laurent GOSSE. *Computing Qualitatively Correct Approximations of Balance Laws : Exponential-Fit, Well-Balanced and Asymptotic-Preserving*. Softcover reprint of the original 1st ed. 2013 édition. Springer, 23 août 2016. 364 p.
- [64] Laurent GOSSE et Nicolas VAUCHELET. “Numerical High-Field Limits in Two-Stream Kinetic Models and 1D Aggregation Equations”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 38.1 (1^{er} jan. 2016), A412-A434.
- [65] Rafael GRANERO BELINCHÓN. “On Keller-Segel systems with fractional diffusion”. In : *Proceedings of the XXVI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. XVI Congreso de Matemática Aplicada* (2021).
- [66] Francesca Romana GUARGUAGLINI et al. “Stability of constant states and qualitative behavior of solutions to a one dimensional hyperbolic model of chemotaxis”. In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B - DISCRETE CONTIN DYN SYS-SER B* 12 (1^{er} juill. 2009), p. 39-76.
- [67] M. A. HERRERO, E. MEDINA et J. J. L. VELÁZQUEZ. “Finite-time aggregation into a single point in a reaction - diffusion system”. In : *Nonlinearity* 10.6 (nov. 1997), p. 1739.

- [68] Thomas HILLEN et Alex POTAPOV. “The one-dimensional chemotaxis model : global existence and asymptotic profile”. In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 27.15 (2004), p. 1783-1801.
- [69] W. JAGER et S. LUCKHAUS. “On Explosions of Solutions to a System of Partial Differential Equations Modelling Chemotaxis”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 329.2 (1992). Publisher : American Mathematical Society, p. 819-824.
- [70] Francois JAMES et Nicolas VAUCHELET. “Equivalence between duality and gradient flow solutions for one-dimensional aggregation equations”. In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A* 36.3 (2016). Publisher : American Institute of Mathematical Sciences, p. 1355-1382.
- [71] Francois JAMES et Nicolas VAUCHELET. “Numerical methods for one-dimensional aggregation equations”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 53.2 (2015), p. 895-916.
- [72] Francois JAMES et Nicolas VAUCHELET. “One-dimensional aggregation equation after blow up : existence, uniqueness and numerical simulation”. In : *CoToCoLa*. Besançon, France, jan. 2015.
- [73] François JAMES et Nicolas VAUCHELET. “Chemotaxis : from kinetic equations to aggregate dynamics”. In : *Nonlinear Differential Equations and Applications* 20.1 (2013), p. 101-127.
- [74] Wonhee JANG et Richard H GOMER. “Combining experiments and modelling to understand size regulation in *Dictyostelium discoideum*”. In : *Journal of The Royal Society Interface* 5 (suppl_1 15 avr. 2008), S49-S58.
- [75] Shi JIN. “Efficient Asymptotic-Preserving (AP) Schemes For Some Multiscale Kinetic Equations”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 21.2 (jan. 1999), p. 441-454.
- [76] Shi JIN et Zhouping XIN. “The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 48.3 (1995), p. 235-276.
- [77] Richard JORDAN, David KINDERLEHRER et Felix OTTO. “The Variational Formulation of the Fokker–Planck Equation”. In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 29.1 (jan. 1998), p. 1-17.
- [78] Kyungkeun KANG et al. *Uniqueness and characterization of local minimizers for the interaction energy with mildly repulsive potentials*. 2 août 2019.
- [79] Grzegorz KARCH et Kanako SUZUKI. “Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equations”. In : *Applicationes Mathematicae* 38.3 (2011), p. 243-258.
- [80] Markos A. KATSOUKAKIS et Athanasios E. TZAVARAS. “Contractive relaxation systems and the scalar multidimensional conservation law”. In : *Communications in Partial Differential Equations* 22.1 (1^{er} jan. 1997), p. 225-267.
- [81] E. F. KELLER et L. A. SEGEL. “Traveling bands of chemotactic bacteria : a theoretical analysis”. In : *Journal of Theoretical Biology* 30.2 (fév. 1971), p. 235-248.
- [82] Evelyn F. KELLER et Lee A. SEGEL. “Model for chemotaxis”. In : *Journal of Theoretical Biology* 30.2 (1^{er} fév. 1971), p. 225-234.
- [83] Richard KESSIN. “Cell motility - Making streams”. In : *Nature* 422 (1^{er} mai 2003), p. 481-2.
- [84] S. N. KRUIZKOV. “First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables”. In : *Sbornik : Mathematics* 10 (1^{er} fév. 1970), p. 217-243.
- [85] A. KURGANOV et E. TADMOR. “Stiff Systems of Hyperbolic Conservation Laws : Convergence and Error Estimates”. In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 28.6 (1^{er} nov. 1997). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 1446-1456.

- [86] N. N. KUZNETSOV. “Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equation”. In : *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 16.6 (1^{er} jan. 1976), p. 105-119.
- [87] Laurent LAFLECHE et Samir SALEM. “Fractional Keller-Segel Equation : Global Well-posedness and Finite Time Blow-up”. Sept. 2018.
- [88] Frédéric LAGOUTIÈRE. *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations, notes de cours de M2*. 2018.
- [89] Frédéric LAGOUTIÈRE, Filippo SANTAMBROGIO et Sébastien TRAN TIEN. “Vanishing viscosity limit for aggregation-diffusion equations”. In : *To be submitted* (2023).
- [90] Frédéric LAGOUTIÈRE et Nicolas VAUCHELET. “Analysis and simulation of nonlinear and nonlocal transport equations”. Août 2016.
- [91] Thomas LAURENT. “Local and Global Existence for an Aggregation Equation”. In : *Communications in Partial Differential Equations* 32.12 (5 déc. 2007), p. 1941-1964.
- [92] Hailiang LIU et Gerald WARNECKE. “Convergence Rates for Relaxation Schemes Approximating Conservation Laws”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 37.4 (2000), p. 1316-1337.
- [93] Hongxia LIU et Tao PAN. “Interaction of elementary waves for scalar conservation laws on a bounded domain”. In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 26.7 (2003).
_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/mma.370>, p. 619-632.
- [94] C. L. MALLOWS. “A Note on Asymptotic Joint Normality”. In : *The Annals of Mathematical Statistics* 43.2 (1972). Publisher : Institute of Mathematical Statistics, p. 508-515.
- [95] Daniela MORALE, Vincenzo CAPASSO et Karl OELSCHLÄGER. “An interacting particle system modelling aggregation behavior : from individuals to populations”. In : *Journal of Mathematical Biology* 50.1 (1^{er} jan. 2005), p. 49-66.
- [96] Roberto NATALINI. “Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 49.8 (1996), p. 795-823.
- [97] Roberto NATALINI. *Recent Mathematical Results on Hyperbolic Relaxation Problems*. 1998.
- [98] Roberto NATALINI et Bernard HANOZET. “Weakly coupled systems of quasilinear hyperbolic equations”. In : *Differential and Integral Equations* 9.6 (1996). Publisher : Khayyam Publishing, Inc., p. 1279-1292.
- [99] Roberto NATALINI et Magali RIBOT. “Asymptotic high order mass-preserving schemes for a hyperbolic model of chemotaxis”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50.2 (2012), p. 883.
- [100] J. NECAS et al. *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs*. Google-Books-ID : w9KpDwAAQBAJ. CRC Press, 16 août 2019. 177 p.
- [101] Haim NESSYAHU et Eitan TADMOR. “The Convergence Rate of Approximate Solutions for Nonlinear Scalar Conservation Laws”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29.6 (1992). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 1505-1519.
- [102] L. NIRENBERG. “On elliptic partial differential equations”. In : *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche* 13.2 (1959), p. 115-162.
- [103] Sebastian NOELLE et Michael WESTDICKENBERG. “Convergence of Approximate Solutions of Conservation Laws”. In : *Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Sous la dir. de Stefan HILDEBRANDT et Hermann KARCHER. Berlin, Heidelberg : Springer, 2003, p. 417-430.

- [104] Stanley OSHER et Eitan TADMOR. “On the Convergence of Difference Approximations to Scalar Conservation Laws”. In : *Mathematics of Computation* 50.181 (1988), p. 19-51.
- [105] F. POUPAUD et M. RASCLE. “Measure solutions to the linear multi-dimensional transport equation with non-smooth coefficients”. In : *Communications in Partial Differential Equations* 22.1 (1^{er} jan. 1997), p. 225-267.
- [106] Frederic POUPAUD. “Diagonal Defect Measures, Adhesion Dynamics and Euler Equation”. In : *Methods and Applications of Analysis* 9.4 (déc. 2002), p. 533-562.
- [107] Gaël RAOUL. “Non-local interaction equations : Stationary states and stability analysis”. In : *Differential and Integral Equations* 25 (1^{er} mai 2012).
- [108] Magali RIBOT. “A SURVEY ON WELL-BALANCED AND ASYMPTOTIC PRESERVING SCHEMES FOR HYPERBOLIC MODELS FOR CHEMOTAXIS”. In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 61 (2018), p. 68.
- [109] Etienne SANDIER et Sylvia SERFATY. “Gamma-convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 57.12 (2004), p. 1627-1672.
- [110] Filippo SANTAMBROGIO. “{ Euclidean, Metric, and Wasserstein } Gradient Flows : an overview”. In : *arXiv :1609.03890 [math]* (13 sept. 2016). version : 1. arXiv : 1609.03890.
- [111] Filippo SANTAMBROGIO. “Dealing with moment measures via entropy and optimal transport”. In : *Journal of Functional Analysis* 271.2 (15 juill. 2016), p. 418-436.
- [112] Filippo SANTAMBROGIO. *Optimal Transport for Applied Mathematicians : Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Basel, 2015.
- [113] Sylvia SERFATY. “Gamma-convergence of gradient flows on Hilbert and metric spaces and applications”. In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 31.4 (31 août 2011), p. 1427-1451.
- [114] Denis SERRE. *Systems of Conservation Laws 1 : Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves : Volume undefined : Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*. Trad. par I. N. SNEDDON. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [115] Galen R. SHORACK et Jon A. WELLNER. *Empirical Processes with Applications to Statistics*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1^{er} jan. 2009. 991 p.
- [116] John C. STRIKWERDA. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1^{er} jan. 2004. 439 p.
- [117] Tao TANG. “Error Estimates of Approximate Solutions for Nonlinear Scalar Conservation Laws”. In : *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*. Sous la dir. d’Heinrich FREISTÜHLER et Gerald WARNECKE. ISNM International Series of Numerical Mathematics. Basel : Birkhäuser, 2001, p. 873-882.
- [118] Tao TANG et Zhen-Huan TENG. “The sharpness of Kuznetsov’s $O(\Delta x)$ L^1 -error estimate for monotone difference schemes”. In : *Mathematics of Computation* 64.210 (1^{er} avr. 1995), p. 581-589.
- [119] Tao TANG et Zhen-Huan TENG. “Viscosity Methods for Piecewise Smooth Solutions to Scalar Conservation Laws”. In : *Mathematics of Computation* 66.218 (1997). Publisher : American Mathematical Society, p. 495-526.
- [120] Tao TANG et Zhen-huan TENG. “Superconvergence of monotone difference schemes for piecewise smooth solutions of convex conservation laws”. In : *Hokkaido Mathematical Journal* 36.4 (nov. 2007), p. 849-874.

- [121] Z. TENG et Pingwen ZHANG. “Optimal L¹-Rate of Convergence for The Viscosity Method and Monotone Scheme to Piecewise Constant Solutions with Shocks”. In : (1997).
- [122] Zhen-Huan TENG. “First-order L¹-convergence for relaxation approximations to conservation laws”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 51.8 (1998). _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/%28SICI%291097-0312%28199808%2951%3A8%3C857%3E3.0.CO%3B2-4>, p. 857-895.
- [123] Vidar THOMÉE. “Stability of difference schemes in the maximum-norm”. In : *Journal of Differential Equations* 1.3 (1^{er} juill. 1965), p. 273-292.
- [124] Chad M. TOPAZ et Andrea L. BERTOZZI. “Swarming Patterns in a Two-Dimensional Kinematic Model for Biological Groups”. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 65.1 (2004), p. 152-174.
- [125] Chad M. TOPAZ, Andrea L. BERTOZZI et Mark A. LEWIS. “A Nonlocal Continuum Model for Biological Aggregation”. In : *Bulletin of Mathematical Biology* 68.7 (1^{er} oct. 2006), p. 1601-1623.
- [126] S. S. VALLENDER. “Calculation of the Wasserstein Distance Between Probability Distributions on the Line”. In : *Theory of Probability & Its Applications* 18.4 (1^{er} sept. 1974). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 784-786.
- [127] Douwe M. VELTMAN et Peter J. M. van HAASTERT. “The role of cGMP and the rear of the cell in Dictyostelium chemotaxis and cell streaming”. In : *Journal of Cell Science* 121 (Pt 1 1^{er} jan. 2008), p. 120-127.
- [128] Cedric VILLANI. *Topics in Optimal Transportation*. Providence, RI : American Mathematical Society, 15 mars 2003. 370 p.

Résumé : Dans cette thèse nous étudions les équations d'agrégation-diffusion, qui apparaissent dans la modélisation de mouvement collectifs. Nous nous intéressons aux solutions mesures de ces équations, qui sont connues pour développer des singularités en temps fini en l'absence de diffusion. Dans ce cadre, l'étude de l'existence globale de solutions est délicate et requiert une définition précise du champ de vitesse. La construction et l'analyse de schémas numériques doivent aussi prendre en compte la présence possible de masses de Dirac.

Dans le cadre non diffusif, nous donnons un cadre général à l'analyse de convergence de schémas de type volumes finis pour les solutions mesures. Nous montrons que des estimations de convergence peuvent être obtenues dans certains cas en passant par l'équation de Burgers.

Nous nous intéressons ensuite à la limite de diffusion en dimension quelconque. Avec des arguments de transport optimal, nous montrons la convergence des solutions diffusives vers la solution de l'équation d'agrégation avec le bon champ de vitesse lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0 ainsi que la convergence des états stationnaires vers le Dirac. Dans les deux cas, nous donnons des estimations de convergence en distance de Wasserstein.

Enfin, nous étudions un système de relaxation à la Jin-Xin pour l'équation d'agrégation unidimensionnelle pour lequel nous prouvons également des estimations de convergence lorsque le paramètre de relaxation tend vers 0. Nous proposons également deux schémas numériques dont nous montrons qu'ils préservent cette asymptotique.

Mots clés : Équation d'agrégation-diffusion ; Schémas volumes finis ; Transport optimal ; Relaxation.

Aggregation-Diffusion Equations : Asymptotics and Approximations

Abstract : In this thesis we study aggregation-diffusion equations arising from collective dynamics. We are interested in measure solutions to these equations, which are known to develop singularities in finite-time in the absence of diffusion. In this framework, studying the global existence of solutions is involved and requires a specific definition of the velocity field. Designing and analysing numerical schemes also requires to take into account the possible presence of Dirac masses.

In the inviscid case, we give a general framework to the convergence analysis of finite-volumes schemes for measure solutions. We show that convergence estimates can be obtained in some cases using the Burgers equation.

We then focus on the diffusion limit in any dimension. Using optimal transport arguments, we show convergence of diffusive solutions to the solution of the aggregation equation with the right velocity field when the diffusion coefficient vanishes. We also show convergence of the steady states towards the Dirac mass. In both cases, we give convergence estimates in Wasserstein distance.

We finally study a relaxation system *à la* Jin-Xin for the aggregation equation in one dimension, for which we also prove convergence estimates when the relaxation parameter vanishes. We propose, in addition, two numerical schemes that are shown to preserve this asymptotic.

Keywords : Aggregation-diffusion equations ; Finite volume schemes ; Optimal Transport ; Relaxation.

