



**HAL**  
open science

# Théorèmes de fluctuation détaillés pour les flux d'énergie dans les réseaux harmoniques

Mayssa Hammami

► **To cite this version:**

Mayssa Hammami. Théorèmes de fluctuation détaillés pour les flux d'énergie dans les réseaux harmoniques. Théorie des représentations [math.RT]. Université de Toulon; Université de Sfax (Tunisie), 2021. Français. NNT : 2021TOUL0014 . tel-04560906

**HAL Id: tel-04560906**

**<https://theses.hal.science/tel-04560906>**

Submitted on 26 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

# Théorèmes de Fluctuation détaillés pour les flux d'énergie dans les réseaux harmoniques

Thèse de doctorat de  
l'Université de Toulon

et

Faculté des sciences de Sfax

présentée

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur en Mathématiques**

(mention Mathématiques )

par

**Mayssa HAMMAMI**

## Table des matières

<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Résumé</b>	<b>6</b>
<b>Aperçu sur le contenu et l'organisation de ce document</b>	<b>6</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2 Théorie de grandes déviations</b>	<b>12</b>
2.1 Historique et motivation . . . . .	12
2.1.1 Introduction générale . . . . .	12
2.1.2 Quelques exemples . . . . .	13
2.2 Théorie des grandes déviations . . . . .	17
2.2.1 Principe de grandes déviations et fonction de taux	18
2.2.1.1 Définitions et notations . . . . .	18
2.2.1.2 Principe de grandes déviations . . . . .	19
2.2.2 Théorème de Gärtner-Ellis . . . . .	22
2.2.3 Théorème de Cramér . . . . .	27
2.2.4 Théorème de Varadhan . . . . .	28
2.2.5 Principe de contraction . . . . .	28
<b>3 Contrôle des systèmes dynamiques</b>	<b>30</b>
3.1 Systèmes dynamiques . . . . .	30

---

3.1.1	Définitions . . . . .	30
3.1.2	Classification des systèmes dynamiques . . . . .	32
3.1.3	Systèmes dynamiques stochastiques . . . . .	33
3.1.3.1	Intégrale stochastique . . . . .	34
3.1.3.2	Formule d'Itô . . . . .	35
3.2	Théorie du contrôle . . . . .	37
3.2.1	Histoire et applications . . . . .	37
3.2.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension finie . . . . .	39
3.3	Théorie de base de l'équation algébrique de Riccati . . . . .	45
3.3.1	Équations quadratiques de Riccati . . . . .	46
3.3.2	Existence et unicité des solutions auto-adjointes . . . . .	49
3.3.3	Solutions extrêmes . . . . .	50
3.3.4	Le gap . . . . .	53
3.3.5	Equations de Riccati réelle et solutions réelles . . . . .	54
<b>4</b>	<b>PGD et relations de fluctuations détaillés</b>	<b>56</b>
4.1	Modèle physique . . . . .	56
4.1.1	Configuration . . . . .	56
4.1.2	Analogie : Production d'entropie et flux de chaleur . . . . .	59
4.2	Résultats . . . . .	62
4.2.1	Principe de grandes déviations pour les flux de chaleur . . . . .	62
4.2.1.1	Fonction génératrice des cumulants . . . . .	62
4.2.1.2	Fluctuations des quantités conservées . . . . .	82
4.2.1.3	Principe de grande déviation local . . . . .	83
4.2.1.4	Principe de grande déviation global . . . . .	84
4.3	Discussion . . . . .	86
4.4	Exemples . . . . .	87
4.4.1	Le réseau Lozenge . . . . .	87
4.4.2	Le réseau triangulaire . . . . .	88
4.4.3	Le réseau pompe de chaleur . . . . .	91
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

---

## Abstract

*This thesis focuses on the non-equilibrium statistical mechanics of harmonic oscillator networks, and more particularly on the statistics of fluctuations of energy fluxes in these networks. It is an original work that is related to the mathematical theory of transport on networks of mechanical systems. These models play an important role in the current developments of non-equilibrium statistical mechanics, both in theory and in experiments. Indeed, unlike the statistical mechanics of equilibrium, which is a discipline well established on universally accepted bases, the statistical mechanics of non-equilibrium systems, is a nascent theory whose theoretical bases are still fragile. One of the most significant advance in its development during the recent decades is the discovery of universal fluctuation relationships for the production of entropy and their implications for linear response theory. This work consists in implementing the axiomatic approach of the fluctuation relationships of classical dynamic systems in the case of harmonic networks. It presents a continuation of [56], where a Large Deviation Principles and Fluctuation Relations were demonstrated for the entropy production. We aim for statistics of the fluctuations of heat fluxes of these oscillator networks. In a first step, we describe a condition of controllability of the oscillator system to obtain a local Large Deviation Principle and associated Fluctuation Relations. Then, we develop our discussion and derive a global Large Deviation Principle by imposing some condition on the network.*

## Résumé

*Cette thèse porte sur la mécanique statistique hors équilibre des réseaux d'oscillateurs harmoniques, et plus particulièrement sur la statistique des fluctuations des flux d'énergie dans ces réseaux. C'est un travail original qui s'intéresse à la théorie mathématique du transport sur des réseaux de systèmes mécaniques. Ces modèles jouent un rôle important dans les développements actuels de la mécanique statistique hors équilibre, aussi bien, au niveau de la théorie que des expériences. En effet, contrairement à la mécanique statistique de l'équilibre qui est une discipline bien établie sur des bases universellement acceptées, la mécanique statistique des systèmes hors équilibre est une théorie naissante dont les bases théoriques sont encore fragiles. Une des avancées les plus marquantes dans son développement durant les dernières décennies est la découverte de relations de fluctuations universelles pour la production d'entropie et de leurs implications pour la théorie de la réponse linéaire. Ce travail consiste à mettre en oeuvre l'approche axiomatique des relations de fluctuations des systèmes dynamiques classiques dans le cas des réseaux harmoniques. Il présente une poursuite des travaux de [56], où des Principes de Grandes Déviations et des Relations de fluctuations ont été démontrés pour la production d'entropie. Nous visons les statistiques des fluctuations des flux de chaleurs de ces réseaux d'oscillateurs. En une première étape, nous décrivons une condition de contrôlabilité du système d'oscillateurs pour un Principe de Grandes Déviations local et les Relations de fluctuations associées.*

---

*Ensuite, nous étalons notre discussion et nous dérivons un Principe de Grandes Déviations global en imposant certaines conditions sur le réseau.*

## Motivation Physique

Les propriétés d'un système physique hors de l'équilibre thermique sont généralement décrites en terme de concepts phénoménologiques tels que l'état stationnaire, la production d'entropie et le flux de chaleurs. Le lien entre ces différentes notions est assuré par les lois de la thermodynamiques. Les Relations de Fluctuation (RF) décrivent les caractéristiques universelles des propriétés statistiques des systèmes physiques. Le premier exemple d'une telle relation remonte à 1905 et aux célèbres travaux d'Einstein sur le Mouvement Brownien. Malgré quelques apparitions dans la littérature, ce n'est qu'après les travaux [33, 35, 44, 45] que les RF sont devenues une direction de recherche majeure, voir par exemple, [16, 17, 48, 62, 63] du coté théorique et [12, 13] du coté expérimental.

Dans ce travail, nous adhérons à la perspective quelque peu restrictive mais mathématiquement précise préconisée par Gallavotti et Cohen dans [44, 45]. Nous appelons RF une propriété de symétrie universelle - c'est-à-dire indépendante du modèle - de la fonction de taux décrivant les grandes déviations de certains observables distingués d'un système physique dans un état stable dans la limite en grand temps. Comme expliqué dans [33, 43, 62, 55], de tels RF fournissent des extensions des relations bien connues de Green - Kubo et Onsager de la théorie de la réponse linéaire au régime de non-équilibre. Alors que les RF dans les systèmes dynamiques chaotiques réguliers sur un espace de phase

compact sont maintenant assez bien comprises, leur statut est plus problématique en présence de singularités et pour des systèmes dynamiques déterministes ou stochastiques généraux avec espace des phases non compact. Comme observé à travers l'étude de modèles spécifiques, les RF peuvent n'avoir qu'un domaine de validité limité et/ou acquérir des caractéristiques non universelles dans de telles circonstances, voir [38, 81, 74].

- ◇ Du point de vue physique, il y a des problèmes liés au bon choix de l'observable pertinente, comme indiqué dans [56]. Alors que la plupart des études concernent la production d'entropie, le travail et le transfert de chaleur dans des protocoles dépendant du temps impliquant un seul réservoir de chaleur, il y a également des intérêts dans l'étude des flux de chaleur individuels dans des systèmes à plusieurs réservoirs.
- ◇ Du point de vue mathématique, les problèmes sont souvent liés à l'échec des approches standard pour la dérivation d'un principe des grandes déviations (voir les séries [49]–[52] et [66]), ou en raison des difficultés techniques rencontrées en appliquant le principe de contraction, comme dans [9, Section 3.4].

Afin de parvenir à une meilleure compréhension des RF, nous devons étudier davantage des modèles simples qui permettent un traitement mathématique propre. Les réseaux d'oscillateurs [37, 65] sont parmi les candidats les plus simples. Bien que certains progrès aient été réalisés dans notre compréhension de la dynamique de non-équilibre des réseaux d'oscillateurs anharmoniques (voir, par exemple, les travaux récents [14, 15]), une image complète des RF pour ces systèmes semble encore hors de portée des techniques actuellement disponibles, à notre connaissance, les seuls résultats partiels peuvent être trouvés dans [74] pour les chaînes d'oscillateurs. Les circonstances sont beaucoup plus favorables aux réseaux d'oscillateurs harmoniques [13, 58]. Bien que très spéciaux, ces derniers fournissent des modèles efficaces pour un large éventail de systèmes et de processus, des circuits électriques macroscopiques [12, 46] à la dynamique microscopique des pro-

téines [47, 2], en passant par le mouvement des particules colloïdales mésoscopiques [81, 54].

## Formulation du problème

Une nouvelle approche théorique du contrôle des réseaux harmoniques pilotés stochastiquement a été développée dans [56]. Ainsi, des RF ont été obtenues pour diverses grandeurs liées à l'entropie produite par un réseau harmonique général sorti de l'équilibre par forçage thermique (voir l'équation (4.1.12) ci-dessous pour un résultat typique).

Dans la présente thèse nous poursuivons les recherches par la même stratégie théorique du contrôle, tout en se concentrant sur les courants d'énergie individuels circulant entre le réseau et son environnement.

Ces recherches portent sur la *mécanique statistique hors équilibre des réseaux d'oscillateurs harmoniques*, et plus particulièrement *sur la statistique des fluctuations des flux d'énergie* dans ces réseaux. C'est un travail original qui s'intéresse à la théorie mathématique du transport sur les réseaux de systèmes mécaniques. Ces modèles jouent un rôle important dans les développements actuels de la mécanique statistique hors équilibre, aussi bien, au niveau de la théorie que des expériences. Décrivons brièvement les paramètres que nous utiliserons par la suite. Nous nous concentrons sur une collection, indexée par un ensemble fini  $\mathcal{I}$ , d'oscillateurs harmoniques unidimensionnels de coordonnées :

- Position  $q = (q_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ,
- Impulsion  $p = (p_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .

L'espace de configuration  $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$  est doté de sa structure euclidienne et l'espace de phase  $\Gamma = \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \oplus \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$  est équipé de sa structure symplectique canonique.

L'Hamiltonien de ce système est la forme quadratique

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}|\kappa q|^2,$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne et  $\kappa$  un automorphisme de  $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ . Outre les forces harmoniques conservatrices qui dérivent de cet Hamiltonien, un sous-ensemble des oscillateurs, indexé par  $\partial\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ , est relié à

des réservoirs thermiques. L'action de ces réservoirs sur les oscillateurs associés sont décrites par les forces de Langevin

$$f_i(p, q) = (2\gamma_i\vartheta_i)^{\frac{1}{2}}\dot{w}_i - \gamma_i p_i, \quad (i \in \partial\mathcal{I})$$

où :

- $\vartheta_i > 0$  température du  $i^{\text{ème}}$  réservoirs,
- $\gamma_i > 0$  la taux de dissipation de l'énergie dans ce réservoir,
- $\dot{w}_i$  bruit blanc standard.

On interprète le travail effectué par la force de Langevin  $f_i$  durant un intervalle de temps  $[0, t]$  comme étant la quantité de chaleur injectée par le  $i^{\text{ème}}$  réservoir durant cette période et on le définit sous la forme intégrale d'Itô

$$\Phi_i(t) = \int_0^t \left[ (2\gamma_i\vartheta_i)^{\frac{1}{2}} p_i(s) \dot{w}_i(s) + \gamma_i (\vartheta_i - p_i(s)^2) \right] ds \quad (1.0.1)$$

## Résultats

Les résultats principaux de cette thèse visent les statistiques du processus  $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\Xi = \mathbb{R}^{\partial\mathcal{I}}$  et induit par le processus de Markov stationnaire généré par le système d'équations différentielles stochastiques (EDS)

$$\dot{q} = \nabla_p H(q, p), \quad \dot{p} = -\nabla_q H(q, p) + f,$$

sous des conditions initiales bien appropriées.

Plus précisément, en exigeant des conditions assurant l'existence et l'unicité de la mesure invariante de ce processus de Markov :

1. Nous identifions un sous-espace  $\mathcal{L} \subset \Xi$  caractérisé par le fait que pour  $\xi \in \mathcal{L}$  on a

$$\langle \xi, \Phi(t) \rangle = \mathcal{Q}_\xi(q(t), p(t)) - \mathcal{Q}_\xi(q(0), p(0)) \quad (1.0.2)$$

où  $\mathcal{Q}_\xi$  est une forme quadratique qui est une première intégrale du réseau harmonique. L'application d'un résultat général de [10]

nous permet de décrire le comportement asymptotique de l'équation (1.0.2) quand  $t \rightarrow \infty$ . Outre un Principe de Grande Déviation (PGD) pour les fluctuations d'ordre  $t$  de cette quantité, nous obtenons également la forme explicite de sa distribution limite, qui a un support complet. Ceci est en contraste frappant avec ce qui se passerait si  $\mathcal{Q}_\xi$  était une fonction bornée sur l'espace des phases : le côté droit de l'équation (1.0.2), n'aurait pas de fluctuations d'ordre  $t$  et sa loi limite aurait un support compact.

2. Nous nous intéressons ensuite à la composante  $\Phi(t)^\perp$  du flux thermique orthogonal à  $\mathcal{L}$ . Nous montrons que ses fluctuations d'ordre  $t$  satisfont un PGD local dont la fonction de taux  $I$  est la transformée de Legendre d'une fonction analytique réelle  $g$  pour laquelle nous fournissons plusieurs représentations explicites. En particulier, nous connectons  $g$  aux propriétés spectrales d'une matrice de dimension finie et le domaine de validité du PGD à une équation algébrique de Riccati associée. Les deux fonctions  $g$  et  $I$  satisfont une RF.
3. Nous dérivons une simple condition suffisante, en termes de solutions à l'équation de Riccati précédemment citée, qui garantit que notre PGD et les RF associées sont valables globalement. Nous fournissons également plusieurs exemples qui remplissent cette condition. Ceci montre qu'il existe un régime où les composantes du flux thermique le long du sous-espace  $\mathcal{L}$  sont responsables de l'échec de la RF globale pour la production d'entropie observée dans [56]. Nos exemples montrent cependant que notre condition suffisante ne résiste pas à un fort forçage thermique.
4. Dans les cas où le PGD pour  $\Phi(t)^\perp$  est globalement valable sans que notre condition suffisante ne soit satisfaite, nous montrons que la fonction de taux ne satisfait la RF universelle que sur un sous-ensemble propre de  $\Xi$  qui est à nouveau décrit en termes des solutions de l'équation de Riccati.

## Plan de la thèse

De prime abord, cette thèse pourrait paraître en quelque sorte hétérogène : divers thèmes y sont traités, qui, a priori, ne sont pas en rapport les uns avec les autres :

- **La théorie de grandes déviations** (TGD), comme étant une théorie mathématique.
- **Les Relations de Fluctuations** (RF), provenant de la mécanique statistique et qui décrivent les caractéristiques universelles des propriétés statistiques des systèmes physiques.
- **La théorie du contrôle**, théorie mathématique qui étudie le comportement des systèmes dynamiques : le contrôle de ces systèmes dans les processus et les machines techniques.

Néanmoins, la bonne formulation mathématique et la résolution des problèmes soulevés assurent une harmonie manifeste de ce travail qui comporte quatre chapitres.

Outre une assez longue introduction, le deuxième chapitre est totalement consacré à la Théorie des Grandes Déviations (TGD). Nous entamons le chapitre par un aperçu sur l'historique et les applications de la TGD ainsi qu'une motivation. Dans le même chapitre nous introduisons les différents théorèmes et résultats principaux de cette théorie en passant par le fameux théorème de Gärtner-Ellis qui est l'approche principale pour un PGD. On finit par exprimer le lien entre la TGD, la théorie de probabilité et les applications en physique statistique.

Le troisième chapitre, en plus de la description des différents types de systèmes dynamiques, traitera de la théorie du contrôle : sa bibliographie, ses applications contemporaines et notamment le contrôle des systèmes linéaires pour finir avec l'étude de la théorie de base des équations algébriques de Riccati.

Dans le quatrième chapitre, nous faisons un aperçu sur le modèle physique qui est à la base de notre travail. Nous introduisons une classe de réseaux harmoniques reliés à des réservoirs de chaleur hors l'équilibre thermique. Nous décrivons les processus stochastiques générés par

leur dynamique de non-équilibre et, dans ce cadre probabiliste, nous identifions les flux d'énergie circulant entre le réseau et les réservoirs de chaleur. Ensuite, nous rappelons brièvement quelques résultats de [56] sur les fluctuations de l'entropie produites par les réseaux en régime stationnaire hors équilibre : un PGD et les RF associées ont été démontrés dans ce contexte. Nous décrivons par la suite les principaux résultats sur les fluctuations des flux de chaleurs hors équilibre du réseau d'oscillateurs. En effet, sous une hypothèse de contrôlabilité, nous fournissons une formule explicite pour l'asymptotique en grand temps de la fonction génératrice des cumulants de ces flux. Ensuite, nous décrivons le PGD *local* résultant pour les fluctuations des flux thermiques et les RF associées. Encore, sous une hypothèse supplémentaire sur le réseau, nous fournissons un PGD *global* avec ses RF associées. Pour terminer, nous fournissons quelques exemples spécifiques auxquels nos résultats s'appliquent.

## Théorie de grandes déviations

### 2.1 Historique et motivation

#### 2.1.1 Introduction générale

La théorie des grandes déviations a été initiée par Cramér [18] à la fin des années 30, comme théorie mathématique et puis développée par Donsker et Varadhan [23, 24, 25, 26] et par Freidlin et Wentzell [41] dans les années 70-80. Bien que cette théorie n'est pas couramment étudiée en physique, on pourrait faire valoir, sans être paradoxal, que les physiciens utilisent cette théorie depuis plus d'une centaine d'années, et que le premier résultat de grandes déviations a été établi en physique (voir par exemple [27, 28, 29]). Une théorie de grande déviation est à l'oeuvre, chaque fois que les physiciens calculent une fonction d'entropie ou une fonction d'énergie libre. En fait, ce formalisme de grandes déviations [21, 22], a été adapté en mécanique statistique quantique depuis les années 80 [1]. Egaleme nt, ces sujets ont été discutés pour les modèles dynamiques des fluctuations à l'équilibre [69] et dans l'étude des propriétés des systèmes à plusieurs particules, qu'ils soient à l'équilibre ou non. La question qui se pose ici, est : *quels sont des grandes déviations ? Et quelle théorie étudie-t-elle ces déviations ?* La réponse de cette question varie, non seulement selon la personne à qui on la pose que ce soit un mathématicien ou un physicien, mais aussi du même point de vue mathématique ou physique on peut distinguer plusieurs attitudes. Un physicien qui ne connaît pas trop le concept des grandes

déviations, vraisemblablement considère cette théorie comme :

- Une généralisation de la théorie des fluctuations d'Einstein.
- Une collection de techniques pour calculer les entropies et les énergies libres.
- Une expression rigoureuse des approximations de points de selle souvent utilisées en mécanique statistique.
- Une formulation rigoureuse de la mécanique statistique.

En revanche, vu que les lois limites de la théorie de la probabilité, qui incluent les lois des grands nombres et les théorèmes des limites centrales, résument le comportement d'un système stochastique en fonction de quelques paramètres tels que la moyenne et la variance, on peut également considérer la théorie des grandes déviations comme l'extension de ces lois. Un mathématicien peut également voir la théorie de grandes déviations comme étant une théorie qui traite la décroissance exponentielle des probabilités dans certains systèmes aléatoires. Elle a été appliqué à un large éventail de problèmes nécessitant des informations détaillées sur des événements rares et il s'intéresse souvent non seulement à la probabilité d'événements rares, mais aussi au comportement caractéristique du système lorsque l'événement rare se produit. Pour mieux cerner le sens à donner à l'expression "événement rare" dans ce contexte, considérons une suite  $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de loi de probabilité convergeant faiblement vers une masse ponctuelle. Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(A) = 0$$

si  $A \ni a$ , la question du comportement asymptotique de  $\mathbb{P}_n(A) = 0$  est naturelle. Lorsqu'il est possible de caractériser ce comportement par une suite  $r_n \rightarrow \infty$  et un taux  $I(A)$  tels que

$$\mathbb{P}_n(A) \approx e^{-r_n I(A)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

on dira que les grandes déviations de la suite  $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont gouvernées dans l'échelle  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par le taux  $I$ . Nous précisons plus tard les termes de cette caractérisation.

Ces réponses semblent n'avoir presque rien en commun, n'empêche qu'elles sont en réalité toutes fondamentalement liées. L'existante différence entre ces réponses se pose compte tenu qu'elles renvoient à deux vues différentes de la même théorie : l'une dirigée vers ses applications mathématiques, l'autre dirigée vers ses applications physiques

### 2.1.2 Quelques exemples

Avant d'approfondir cette théorie, il est utile d'élaborer quelques exemples concernant des sommes de variables aléatoires indépendantes pour avoir une idée de ce que sont les grandes déviations et du contexte dans lequel ces déviations se produisent. Ces exemples sont intentionnellement abstraits, mais quand même simples. En les introduisant, nous visons à introduire quelques notions et notations mathématiques de base qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

**Exemple 2.1.1.** (*Bits aléatoires*) [78]

Considérons une suite  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de bits aléatoires indépendants prenant les valeurs 0 ou 1 avec probabilités égales, et définissons

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \quad (2.1.1)$$

la fraction des 1 contenus dans  $b$ . Nous nous intéressons à trouver la probabilité  $\mathbb{P}(R_n = r)$  que  $R_n$  prenne l'une des valeurs rationnelles  $r \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ . Sachant que les bits sont indépendants et identiquement distribués,  $R_n$  est de loi binomiale de paramètres  $(n, \frac{1}{2})$

$$\mathbb{P}(R_n = r) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{(rn)![(1-r)n]!}. \quad (2.1.2)$$

En utilisant l'approximation de Stirling,  $n! \approx n^n e^{-n}$ , on peut extraire de ce résultat une contribution dominante de la forme

$$\mathbb{P}(R_n = r) \approx e^{-nI(r)}, \quad I(r) = \log 2 + r \log r + (1-r) \log(1-r) \quad (2.1.3)$$

pour  $n$  grand. La fonction  $I(r)$  (Figure 2.1) dans l'exponentielle est positive et convexe pour  $r \in [0, 1]$  et s'annule uniquement au point

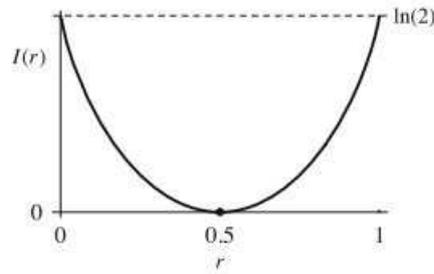


FIGURE 2.1 – Fonction de taux  $I(r)$  de Exemple 2.1.1

$r = \frac{1}{2}$ . L'approximation montrée dans l'équation (2.1.3) est un exemple d'approximation de grandes déviations. La décroissance exponentielle de cette approximation pour  $n \rightarrow \infty$ , associée à l'expression de la fonction taux  $I(r)$ , montre que les suites non équilibrées de  $n$  bits qui contiennent plus 0 que de 1 ou vice versa, sont peu susceptibles d'être observées quand  $n$  devient grand, car  $\mathbb{P}(R_n = r)$  décroît exponentiellement selon  $n$  pour  $R_n \neq \frac{1}{2}$ . Seulement les suites équilibrées de telle sorte que  $R_n \approx \frac{1}{2}$  ont une probabilité non-négligeable à être observés quand  $n$  est grand. La fonction taux permet de quantifier cette tendance qui est déjà exprimée par la loi des grands nombres

Un deuxième exemple est le suivant :

**Exemple 2.1.2.** (Moyenne empirique gaussienne)[78]

La variable aléatoire  $R_n$ , définie dans l'exemple précédent comme une somme de  $n$  variables aléatoires mise à l'échelle par  $n$ , est dite une moyenne empirique. Dans le présent exemple, nous considérons une moyenne empirique similaire, donnée par

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.1.4)$$

en supposant que les variables aléatoires  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suivant la densité de probabilité gaussienne :

$$p(X_i = x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.1.5)$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  désignent respectivement la moyenne et la variance des  $X_i$ .

La densité de probabilité de  $S_n$  peut être écrite en tant que l'intégrale

$$\begin{aligned} p(S_n = s) &= \int_{x \in \mathbb{R}^n: S_n(x)=s} p(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(S_n(x) - s) p(x) dx \\ &= \langle \delta(S_n - s) \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  est le vecteur de variables aléatoires, et

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2) \cdots p(x_n) \quad (2.1.7)$$

leur densité-produit. La solution de cette intégrale est,

$$p(S_n = s) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n(s - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.1.8)$$

étant donné qu'une somme de variables aléatoires gaussiennes est de même distribuée exactement de manière gaussienne. En négligeant le terme  $\sqrt{n}$ , une approximation de grande déviation est obtenue à partir de ce résultat exact, qui est sous-dominante par rapport à l'exponentielle décroissante. On obtient ainsi :

$$p(S_n = s) \approx e^{-nJ(s)}, \quad J(s) = \frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.1.9)$$

La fonction de taux  $J(s)$  est similaire à la fonction de taux  $I(r)$  de l'exemple 2.1.1 : elle est convexe et possède un seul minimum et un seul zéro. Aussi, comme il est le cas pour  $I(r)$ , le minimum de  $J(s)$  entraîne également que, pour  $n$  grand,  $p(S_n = s)$  devient de plus en plus concentré autour de la moyenne  $\mu$ , comme elle est le seul point pour lequel  $J(s) = 0$ , et donc pour lequel la densité  $p(S_n = s)$  ne décroît pas exponentiellement. Cette propriété de concentration de la masse peut se quantifier de la manière suivante

$$\mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \delta) \approx e^{-nI(\mu \pm \delta)} = e^{-n\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$

pour tout  $\delta > 0$ . Il s'agit clairement d'un raffinement de la loi faible des grands nombres qui stipule que  $S_n \rightarrow \mu$  en probabilité.

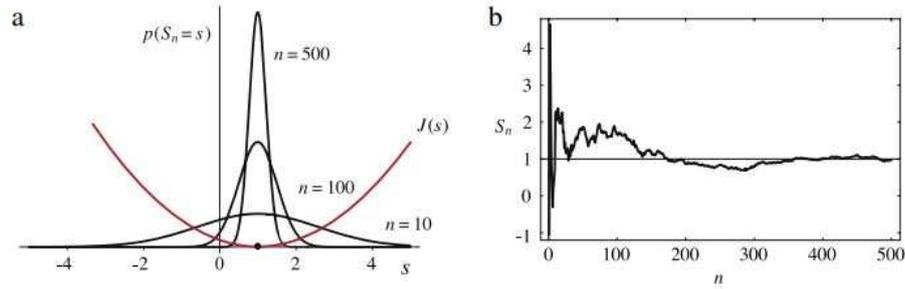


FIGURE 2.2 – Moyenne empirique gaussienne avec  $\mu = \sigma = 1$ .(a) Densité de probabilité  $p(S_n = s)$  pour des valeurs croissantes de  $n$  avec sa fonction de taux correspondante (ligne rouge).(b) Réalisation typique de  $S_n$  convergeant vers sa moyenne.

Un dernier exemple important, qu'on en parle dans cette section est le suivant :

**Exemple 2.1.3.** (*Moyenne empirique exponentielle*)[78]

Considérons la moyenne empirique  $S_n$  définie précédemment, mais en supposant cette fois que les variables aléatoires *i.i.d.*  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont distribués suivant la densité de probabilité exponentielle

$$p(X_i = x_i) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i}{\mu}} \quad (2.1.10)$$

Pour cette distribution, on peut montrer que  $S_n$  admet une densité tel que

$$p(S_n = s) \approx e^{-nJ(s)}, \quad J(s) = \frac{s}{\mu} - 1 - \log \frac{s}{\mu}, \quad s > 0. \quad (2.1.11)$$

Comme dans les exemples précédents, l'interprétation de l'approximation ci-dessus est que l'exponentielle décroissante en  $n$  est le terme dominant de  $p(S_n = s)$  pour  $n$  très grand. Notons que dans ce cas la fonction de taux est différente de la fonction de taux de la moyenne empirique gaussienne, bien qu'elle reste toujours positive, convexe et qu'elle a toujours un seul minimum et zéro en  $s = \mu$ , ce qui donne la valeur typique -ou en d'autres termes- la plus probable de  $S_n$  quand  $n \rightarrow \infty$  (voir Figure 2.3(b)).

L'avantage d'exprimer  $p(S_n = s)$  sous la forme d'une grande déviation est que la fonction de taux  $J(s)$  donne une idée directe et détaillée

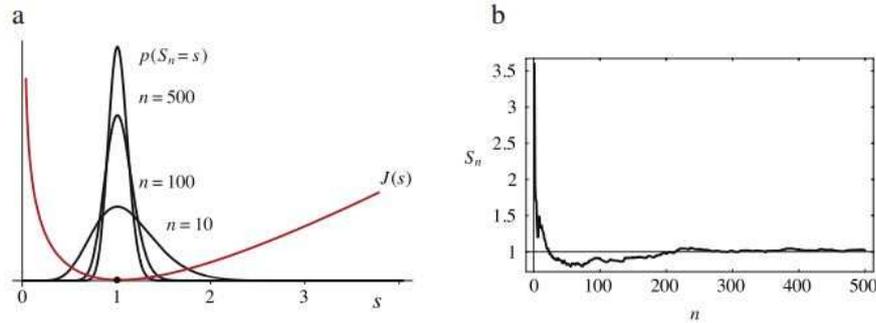


FIGURE 2.3 – Moyenne empirique exponentielle avec  $\mu = 1$ .(a) Densité de probabilité  $p(S_n = s)$  pour des valeurs croissantes de  $n$  avec sa fonction de taux correspondante  $J(s)$ (ligne rouge).(b) Réalisation typique de  $S_n$  convergeant vers sa moyenne.

des déviations ou fluctuations de  $S_n$  autour de sa valeur typique. Pour la moyenne empirique gaussienne, par exemple,  $J(s)$  est une parabole car les fluctuations de  $S_n$  autour de la moyenne  $\mu$  sont de distribution gaussienne. Par contre, pour la moyenne empirique exponentielle,  $J(s)$  a la forme d'une parabole seulement autour de la moyenne  $\mu$ , de sorte que seules les petites fluctuations de  $S_n$  qui sont proches de sa valeur typique sont de distributions gaussiennes. C'est le contenu du théorème limite central. On peut le dériver formellement de l'équation (2.1.11) en notant que

$$\begin{aligned}
 p(S_n = \mu + \frac{s}{\sqrt{n}}) &\approx e^{-nJ(\mu + \frac{s}{\sqrt{n}})} \\
 &\approx e^{-n(J(\mu) + J'(\mu)\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}J''(\mu)\frac{s^2}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}}))} \\
 &\approx e^{-J''(\mu)\frac{s^2}{2}} \\
 &= e^{-\frac{s^2}{2\mu^2}}
 \end{aligned}$$

pour  $n \rightarrow \infty$ , puisque  $J(\mu) = J'(\mu) = 0$  et  $J''(\mu) = \frac{1}{\mu^2}$ . Les petites fluctuations d'ordre  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  autour de  $\mu$  sont gaussiennes de variances  $\mu^2$ . Les grandes fluctuations de  $S_n$  d'ordre 1 autour de sa valeur typique ne sont pas gaussiennes ; en fait, la forme de  $J(s)$  montre que ces fluctuations sont distribuées de manière exponentielle car  $J(s)$  est asymptotiquement linéaire quand  $s \rightarrow \infty$ . Cette distinction entre les petites et les grandes fluctuations explique le terme "grandes" dans "Théorie

*des Grandes Déviations" (TGD).*

## 2.2 Théorie des grandes déviations

La TGD est basée sur l'asymptotique exponentielle aperçue dans les exemples précédents. Cette approximation apparaît souvent dans les problèmes impliquant une suite de variables aléatoires et en particulier celles étudiées en mécanique statistique (limite thermodynamique). On la nomme : *Principe des Grandes Déviations*. L'objectif de cette section est de poser les bases de la TGD tout d'abord en définissant soigneusement le principe des grandes déviations, puis en dérivant un certain nombre de conséquences importantes de ce principe. Ainsi, nous verrons que le principe des grandes déviations est similaire aux lois de la thermodynamique : c'est que au lieu de quelques principes, un seul principe dans ce cas peut être utilisé pour obtenir de nombreux résultats de grande importance.

Sur le plan pratique, la théorie des grandes déviations peut être décrite en tant qu'une collection de méthodes développées et rassemblées afin de résoudre deux problèmes [22] :

- a) Établir qu'il existe un Principe de Grandes Déviations pour une suite de lois de probabilité donnée.
- b) Dérivée l'expression de la fonction de taux associée.

Ces deux problèmes peuvent être résolus, comme nous l'avons fait dans les exemples de la section précédente, en calculant directement la distribution de probabilité d'une variable aléatoire, et en dérivant de cette distribution une approximation à grande déviation en utilisant l'approximation de Stirling ou d'autres formules asymptotiques.

### 2.2.1 Principe de grandes déviations et fonction de taux

Dans ce paragraphe, pour la commodité du lecteur, nous allons explorer le principe de grandes déviations de façon constructive : Particulièrement (à titre exceptionnel), nous parlerons du particulier pour arriver à un énoncé généralisé de ce principe.

### 2.2.1.1 Définitions et notations

Commençons par quelques définitions.

**Définition 2.2.1.** Soit  $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction sur l'espace métrique complet séparable  $\mathcal{X}$ .

- i)  $I$  est dite une fonction de taux si elle semi-continue inférieurement, c'est-à-dire, si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , l'ensemble  $\{x \in \mathcal{X} \mid I(x) \leq \alpha\}$ , dit ensemble de niveau, est un fermé de  $\mathcal{X}$ .
- ii) Une telle fonction est dite bonne fonction taux si de plus tous les ensembles de niveau  $\{x \in \mathcal{X} \mid I(x) \leq \alpha\}$  sont des compacts de  $\mathcal{X}$ .
- iii) Le domaine effectif de  $I$ , qu'on le note par  $\mathcal{D}_I$ , est donné par l'ensemble des points dans  $\mathbb{R}^d$  de taux fini, c'est-à-dire,  $\mathcal{D}_I := \{x \in \mathbb{R}^d \mid I(x) < \infty\}$ .

**Remarque 2.2.2.** La semi-continuité et la compacité des ensembles de niveau d'une bonne fonction taux garantit que sur tout ensemble fermé, elle atteint son minimum.

### 2.2.1.2 Principe de grandes déviations

Soient  $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de lois de probabilité sur un espace mesurable  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ ,  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  et  $I$  une fonction de taux sur  $\mathcal{X}$ . Pour tout  $A \subset \mathcal{X}$  on notera

$$I(A) = \inf_{x \in A} I(x),$$

et on écrive

$$\mathbb{P}(A) \approx e^{-r_n I(A)}$$

lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(A) = -I(A). \quad (2.2.1)$$

Clairement, la suite des  $r_n$  décrit l'échelle asymptotique par exemple si  $r_n = n$  on se focalise sur une échelle exponentielle et  $I(A)$  est le taux

de décroissance exponentielle. Si  $r_n = \log n$ , l'échelle est algébrique et  $-I(A)$  est l'exposant de décroissance.

Lorsque l'égalité définie dans (2.2.1) est vérifiée pour tout  $A \in \mathcal{X}$  on dira que la suite  $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un Principe de Grandes Déviations d'échelle  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec la fonction taux  $I$ .

Dans l'exemple 2.1.1, avec  $\mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(S_n \in A)$  et  $r_n = n$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n([a, b]) &= \sum_{r \in [a, b] \cap E_n} 2^{-n} \frac{n!}{(rn)!((1-r)n)!} \quad (0 \leq a < b \leq 1) \\ &\approx \sum_{r \in [a, b] \cap E_n} e^{-nI(r)} \quad (E_n = \{\frac{k}{n} | k \in \{0, \dots, n\}\}) \\ &\approx \int_a^b e^{-nI(r)} dr \\ &\approx e^{-nI([a, b])} \end{aligned}$$

où on a utilisé, outre l'asymptotique de Stirling, la convergence des sommes de Riemann et le lemme de Laplace :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nF(x)} dx \approx e^{-n \inf_x F(x)}.$$

On a donc bien un Principe de Grandes Déviations. On a des résultats similaires des exemples 2.1.2 et 2.1.3 pour les moyennes empiriques gaussiennes et exponentielles, bien que pour celles-ci nous avons travaillé avec des densités de probabilité plutôt que des distributions de probabilités, le lemme de Laplace s'applique et permet d'obtenir un Principe de Grandes Déviations.

La limite 2.2.1 dans notre définition du Principe de Grandes Déviations peut cependant ne pas exister.

**Définition 2.2.3.** (*Principe de Grandes Déviations*)

Soient  $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'espaces de probabilités,  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de variables aléatoires  $X_n; \Omega_n \rightarrow \mathcal{X}$  où  $\mathcal{X}$  un espace métrique complet séparable, et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle tel que  $r_n \rightarrow \infty$ . La suite  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un Principe de Grandes Déviations global relativement à l'échelle  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  avec une fonction taux  $I; \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$  si les propriétés suivantes sont satisfaites

(i) (Borne supérieure) Pour tout ouvert  $O \subset \mathcal{X}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}(X_n \in O) \leq -I(O).$$

(ii) (Borne inférieure) Pour tout fermé  $F \subset \mathcal{X}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}(X_n \in F) \geq -I(F).$$

Si la borne inférieure n'a lieu que pour  $F \subset \mathcal{X}_0$ , pour un sous ensemble  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ , on dira que  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un Principe de Grandes Déviations local, sur  $\mathcal{X}_0$ , relativement à l'échelle  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  avec une fonction taux  $I$ .

**Notation 2.2.4.** Si  $\{X_n\}$  satisfait un Principe de Grandes Déviations relativement à l'échelle  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  avec la fonction taix  $I$ , on écrira

$$\mathbb{P}(X_n \in A) \asymp e^{-nI(A)}.$$

A partir de cette définition, nous pouvons explorer plusieurs conséquences. Un concept de base dans la TGD est le *principe de Laplace*<sup>1</sup>, et qui peut être dérivé de la formule de grande déviation  $\mathbb{P}_n(X_n \in A) \approx e^{-nI(A)}$ . Pour toute fonction  $f$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  on s'attend à que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{E}[e^{r_n f(X_n)}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \int_{\mathbb{R}} e^{r_n f(a)} \mathbb{P}(X_n \in A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} e^{r_n f(a)} e^{-r_n I(a)} da \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \{f(a) - I(a)\}. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne provient en observant que le comportement asymptotique de l'intégrale dans la deuxième ligne qui est déterminée par la valeur la plus grande de l'intégrand (le lemme de Laplace).

**Remarque 2.2.5.** Le calcul qu'on vient de mentionner ci dessus expose le fait que le principe de Laplace est une "conséquence" du principe de grande déviation.

---

1. Connu aussi sous le nom "méthode de Darwin-Fowler" [39] utilisée en mécanique statistique.

L'approximation de Laplace sert essentiellement à l'estimation asymptotique de certaines intégrales exponentielles. Elle est utilisée surtout dans les applications, comme il est le cas pour la mécanique statistique où elle permet de déterminer le comportement asymptotique de la fonction de partition. Le concept général du principe de Laplace est défini comme suit :

**Définition 2.2.6.** (*Principe de Laplace*)

Soient  $\{(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}$  une suite d'espaces de probabilité,  $\mathcal{X}$  un espace métrique séparable et complet,  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoires tel que  $X_n : \Omega_n \mapsto \mathcal{X}$  et  $I$  une fonction de taux sur  $\mathcal{X}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle tel que  $r_n \rightarrow \infty$ . Alors,  $\{X_n\}$  satisfait un principe de Laplace sur  $\mathcal{X}$  avec une fonction de taux  $I$  si pour toute les fonctions continues et bornées  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}^n} [e^{r_n f(X_n)}] = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{f(x) - I(x)\},$$

avec  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^n} [e^{r_n f(X_n)}] = \int_{\Omega_n} e^{r_n f(x)} d\mathbb{P}_n$  est l'espérance mathématique associée à  $\mathbb{P}_n$ .

Il est intéressant de noter qu'en plus de la simple implication montrée dans Remarque 2.2.5, le principe des grandes déviations et le principe de Laplace sont équivalents :

**Théorème 2.2.7.** *Ellis [32]*

$X_n$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X}$  avec une fonction de taux  $I$  si et seulement si  $X_n$  satisfait un principe de Laplace sur  $\mathcal{X}$  avec une fonction de taux  $I$ .

Ce résultat d'équivalence est utile dans la mesure de montrer l'unicité de la fonction de taux pour le principe de grandes déviations énoncée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.8.** *Ellis [32]*

Si  $X_n$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X}$  d'une fonction de taux  $I$  et d'une fonction de taux  $J$ , alors  $I(x) = J(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ .

**Remarque 2.2.9.** *Pour démontrer ce théorème, nous nous servons du principe de Laplace (Définition 2.2.6). Par Théorème 2.2.7, il suffit de montrer que si  $X_n$  satisfait le principe équivalent de Laplace de fonction de taux  $I$  et de fonction de taux  $J$ , alors  $I(x) = J(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . On réfère le lecteur à [32] pour une preuve détaillée.*

Comme conséquence, l'existence de la limite de grandes déviations est assurée par le résultat suivant :

**Corollaire 2.2.10.** *Ellis [32]*

*Supposons que  $X_n$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X}$  de fonction de taux  $I$ . Soit  $A$  un espace de Borel de  $\mathcal{X}$  d'adhérence  $\bar{A}$  et d'intérieur  $\dot{A}$  et satisfaisant  $I(\bar{A}) = I(\dot{A})$ . Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(X_n \in A) = -I(A).$$

*Démonstration.* On évalue les bornes inférieure et supérieure de grande déviation, respectivement pour  $O = \dot{A}$  et  $F = \bar{A}$ . Comme  $\dot{A} \subset A \subset \bar{A}$ , il s'en suit que  $I(\dot{A}) \geq I(A) \geq I(\bar{A})$  et

$$\begin{aligned} -I(\bar{A}) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(X_n \in \bar{A}) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(X_n \in A) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(X_n \in A) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(X_n \in \dot{A}) \\ &\geq -I(\dot{A}). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse, on obtient  $I(A) = I(\bar{A}) = I(\dot{A})$  et d'où on obtient le résultat désiré.  $\square$

Les différentes méthodes et approches de la théorie de grandes déviations se rassemblent dans l'objectif d'établir l'existence d'un principe de grandes déviations pour une série de variables aléatoires et de dériver la fonction de taux qui lui est associée. Dans de nombreux cas, et comme nous avons déjà explicité dans les exemples mentionnés au

début de ce chapitre, ces deux problèmes peuvent être résolus par un calcul direct de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire et en utilisant certaines approximations asymptotiques. En général, cependant, il peut être difficile, voire impossible, de dériver des principes de grandes déviations par ce chemin de calcul direct. Les méthodes combinatoires basées sur l'approximation de Stirling<sup>2</sup> ne peuvent pas être utilisées, par exemple, pour des variables aléatoires continues, et deviennent très impliquées dans le traitement de sommes de variables aléatoires discrètes qui ne sont pas i.i.d. . Pour ces cas, un chemin de calcul plus général est fourni par un résultat fondamental de la théorie des grandes déviations connu sous le nom de théorème de Gärtner-Ellis [29, 42].

### 2.2.2 Théorème de Gärtner-Ellis

Cette section est consacrée à l'approche de Gärtner-Ellis qui est l'une des théorèmes principaux de la TGD. C'est un résultat découvert par Gärtner [42] et qui, après, a été généralisé par Ellis [29].

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires. Nous commençons par énoncer les définitions suivantes qui seront utiles de suite :

**Définition 2.2.11.** *Soit  $I : \mathbb{R}^d \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction convexe. L'ensemble  $\mathcal{D} = \{x \mid I(x) < +\infty\}$  désigne le domaine de  $I$ . La fonction  $I$  est dite essentiellement lisse si :*

- \* *L'intérieur de  $\mathcal{D}$  est non vide.*
- \*  *$I$  est différentiable sur l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .*
- \* *Pour toute suite  $(x_n)$  dans l'intérieur de  $\mathcal{D}$  qui converge vers un point de sa frontière,  $\|\nabla I(x_n)\|$  converge vers  $+\infty$ .*

**Définitions 2.2.12.** 1. *On définit la fonction génératrice des cumulants de  $X_n$  par :*

$$g_n(k) = \log \mathbb{E}[e^{nkX_n}], \quad (2.2.2)$$

---

2. La formule de Stirling donne un équivalent de  $n!$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Dans le cadre de la thermodynamique statistique (distribution de Boltzmann) [5] il est commode de considérer le logarithme népérien de  $n!$  en faisant l'approximation de Stirling. L'approximation consiste à assimiler la somme à une intégrale quand  $n$  est suffisamment grand.

où  $k \in \mathbb{R}$ .

2. On définit la fonction génératrice des cumulants échelonnée (dite aussi fonction génératrice logarithmique) de  $X_n$  par la limite

$$\lambda(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} g_n(k), \quad (2.2.3)$$

Le théorème de Gärtner Ellis déclare que :

**Théorème 2.2.13.** [78]

Si  $\lambda(k)$  existe et est dérivable pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $(X_n)$  satisfait un Principe de Grandes Déviations, c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(X_n \in A) \asymp e^{-nI(A)}, \quad (2.2.4)$$

avec une fonction de taux donnée par

$$I(a) = \sup_{k \in \mathbb{R}} (ka - \lambda(k)). \quad (2.2.5)$$

La transformation définie par la borne supérieure est une extension de la transformée de Legendre dénommée Legendre-Fenchel [72]. Le théorème de Gärtner Ellis énonce donc que, lorsque la fonction génératrice des cumulants  $\lambda$  est différentiable, alors  $X_n$  obéit à un Principe de Grandes Déviations d'une fonction de taux  $I$  donnée par la transformée de Legendre-Fenchel de  $\lambda$ .

**Remarque 2.2.14.** *Le théorème de Gärtner-Ellis est une approche très utile pour le calcul des fonctions de taux. Cependant, pas toutes les fonctions de taux peuvent être calculées avec ce théorème (voir [78]).*

Avant de passer, il est indispensable de noter une généralisation du théorème de Gärtner-Ellis en se restreignant au cas discret, sans oublier que ces résultats seront toujours valables dans le cas des suites de variables aléatoires continues.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On admet les notations suivantes :

- $\mathbb{R}^d$  est muni du produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

- $g_n(\lambda) = \log \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, X_n \rangle})$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  est la suite des fonctions génératrices des cumulants.

**Hypothèse 2.2.15.** *Supposons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ ,  $\frac{1}{r_n}g_n(r_n\lambda) \rightarrow g(\lambda)$  et que l'origine est dans l'intérieur de  $\mathcal{D}_g = \{\lambda \in \mathbb{R}^d \mid g(\lambda) < +\infty\}$  le domaine effectif de  $g$ .*

La transformée de Fenchel-Legendre de  $g$  est donnée par

$$\begin{aligned} g^* : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{\langle \lambda, x \rangle - g(\lambda)\}. \end{aligned}$$

Elle sert à écrire la fonction de taux en terme de  $g(\lambda)$ . La transformée de Fenchel-Legendre est une conséquence naturelle de l'approximation de Laplace.

**Définition 2.2.16.**  $y \in \mathbb{R}^d$  est un point exposant de  $g^*$  si pour  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  et tout  $x \neq y$ ,

$$\langle \lambda, y \rangle - g^*(y) > \langle \lambda, x \rangle - g^*(x). \quad (2.2.6)$$

$\lambda$  dans l'équation (2.2.6) est dit un hyperplan exposant.

**Définition 2.2.17.** Une fonction  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est dite essentiellement lisse si :

- (1) L'ensemble  $\dot{\mathcal{D}}_g$  est non vide.
- (2)  $g(\cdot)$  est différentiable dans  $\dot{\mathcal{D}}_g$ .
- (3)  $g(\cdot)$  est raide, c-à-d,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla g(\lambda_n)| = \infty$$

chaque fois que  $\{\lambda_n\}$  est une suite dans  $\dot{\mathcal{D}}_g$  convergeant vers un point de la frontière de  $\dot{\mathcal{D}}_g$ .

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. C'est la version qu'on aura besoin pour nos travaux démontrés dans Chapitre 4.

**Théorème 2.2.18.** (PGD local) *Supposons que Hypthèse 2.2.15 est vérifiée.*

1. Pour tout fermé  $F$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(F) \leq - \inf_{x \in F} g^*(x).$$

2. Pour tout ouvert  $O$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log \mathbb{P}_n(O) \geq - \inf_{x \in O \cap \mathcal{F}} g^*(x),$$

où  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des points exposés de  $g^*$  dont l'hyperplan d'exposition appartient à  $\dot{\mathcal{D}}_g$ .

3. Si  $g$  est une fonction semi continue inférieure essentiellement lisse, alors le PGD est satisfait avec la bonne fonction de taux  $g^*$ .

En prenant le cadre de la définition 2.2.6, un théorème de Gärtner-Ellis peut être énoncé de la manière suivante :

**Théorème 2.2.19.** (*Gärtner-Ellis généralisé*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soient  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$  un espace de probabilité et  $X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  une variable aléatoire. On suppose que la limite

$$g(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}[e^{n\langle \lambda, X_n \rangle}]$$

existe et est finie pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , on définit

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{\langle \lambda, x \rangle - g(\lambda)\}.$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

a)  $I$  est une fonction de taux. De plus,  $I$  est convexe et semi-continue inférieurement.

b) La borne supérieure de grande déviation est valide. C'est-à-dire, pour tout ensemble fermé  $F$  de  $\mathbb{R}^d$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[X_n \in F] \leq -I(F),$$

et en particulier, pour  $F = \bar{A}$ ,  $A$  borélien de  $\mathbb{R}^d$ .

c) Supposons qu'en plus,  $g(\lambda)$  est différentiable pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Alors la borne inférieure de grande déviation est vérifiée. C'est-à-dire, pour tout ensemble ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}^d$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[X_n \in O] \geq -I(O),$$

Ee en particulier, pour  $O = \dot{A}$ ,  $A$  borélien de  $\mathbb{R}^d$

D'où, si  $g(\lambda)$  est différentiable pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ , alors  $X_n$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}^d$  de fonction de taux  $I$ .

**Remarques 2.2.20.** 1. La convexité de  $I$  est une conséquence de la transformée de Legendre-Fenchel.

2. Un problème très intéressant à investiguer est la validité du PGD si on viole l'hypothèse de différentiabilité de  $g(\lambda)$ . Malheureusement, dans ce cas, la situation se complique et une théorie générale n'est pas encore découverte. Nous allons voir dans Exemple 2.2.21 que l'hypothèse de différentiabilité n'est pas valide et la fonction de taux n'est plus donnée par la transformée de Legendre-Fenchel.

On prend l'exemple d'un cas extrême de variables aléatoires dépendantes :

**Exemple 2.2.21.** On définit une variable aléatoire  $X_1$  par la distribution de probabilité  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . Pour tout entier  $j \geq 2$  on définit les variables aléatoires  $X_j = X_1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

Essayons tout d'abord d'appliquer le théorème de Gärtner-Ellis à la suite  $Y_n$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$  nous calculons

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[e^{n\lambda Y_n}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{1}{2} [e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}] \right) \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

et

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - g(\lambda)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ \infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Puisque  $g(\lambda) = |\lambda|$  n'est pas différentiable en  $\lambda = 0$ , le théorème de Gärtner-Ellis n'est pas applicable. En effet,  $Y_n$  satisfait un PGD sur  $\mathbb{R}$  de fonction de taux

$$J(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ \infty & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Ceci peut être facilement vérifié comme  $Y_n$  a la distribution  $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$ . La fonction  $I$  est la plus grande fonction convexe inférieure ou égale à la fonction de taux  $J$ . On peut vérifier facilement que  $I = J^{**}$ .

### 2.2.3 Théorème de Cramér

Le théorème de Cramér est un parmi les théorèmes principaux de la théorie des grandes déviations. Son résultat donne les conditions dans lesquelles la moyenne empirique des vecteurs aléatoires i.i.d. satisfont un principe de grandes déviations. Autrement dit, c'est l'application du théorème de Gärtner-Ellis à la moyenne empirique. Pour cela on reprend la suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  de vecteurs aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et de distribution commune  $\mu$ . soit  $\widehat{S}_n = \frac{1}{n} S_n$  la moyenne empirique, avec  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Soit  $\mu_n$  la distribution de  $S_n$ , une mesure de probabilité définie par  $\mu_n(B) = \mathbb{P}[\widehat{S}_n \in B]$  pour  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$ . Le théorème de Cramer est énoncé comme suit :

**Théorème 2.2.22.** (*Théorème de Cramer*)

Soit  $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$  une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et satisfaisant  $\mathbb{E}[e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}] < \infty$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . On définit  $g(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}]$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Alors on a les assertions suivantes :

- a) La suite des moyennes empiriques  $\frac{1}{n} S_n$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}^d$  avec une fonction de taux  $I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{\langle \lambda, x \rangle - g(\lambda)\}$ .

b)  $I$  est une fonction convexe et semi-continue inférieurement sur  $\mathbb{R}^d$ , et elle atteint son infimum de 0 en un point unique  $x_0 = \mathbb{E}(X_1)$  qui est la moyenne du premier vecteur aléatoire  $X_1$ .

**Remarque 2.2.23.**

On n'a pas besoin de vérifier la condition de différentiabilité imposé dans le Théorème de Gärtner-Ellis pour les moyennes empiriques i.i.d. car la fonction génératrice ou la transformée de Laplace  $\mathbb{E}[e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}]$  d'une variable aléatoire  $X_1$  est toujours analytique réelle lorsqu'elle existe pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

On reprend un des exemples mentionnés précédemment.

**Exemple 2.2.24.** (Moyenne empirique gaussienne) Nous reprenons la moyenne empirique gaussienne (Equation (2.1.4) considérée dans l'exemple ??). Pour les densités gaussiennes de l'équation (2.1.5),  $g(\lambda)$  est facilement évaluée à être

$$g(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] = \mu\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme prévu,  $g(\lambda)$  est partout différentiable, de sorte que  $\mathbb{P}(S_n \in ds) \asymp e^{-nI(s)}$  avec

$$I(s) = \sup_{\lambda} \{\lambda s - g(\lambda)\}.$$

Ceci recouvre le Théorème de Cramér. Le suprémum dans la transformée de Legendre-Fenchel est résolu directement par un calcul ordinaire. Le résultat que nous obtenons est :

$$I(s) = \lambda(s)s - g(\lambda(s)) = \frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}, \quad s \in \mathbb{R},$$

où,  $\lambda(s)$  est l'unique point de  $\lambda s - g(\lambda)$  qui satisfait  $g'(\lambda) = s$ . Ceci recouvre le résultat de l'exemple ?? sachant que  $\mathbb{P}(S_n \in ds) = p(S_n = s)ds$ .

### 2.2.4 Théorème de Varadhan

Le concept de principe de grandes déviations jette un pont entre l'estimation d'une probabilité asymptotique et le calcul variationnel de

maximisation d'une fonction  $I$ , facilement calculable dans les bons cas. Varadhan [23, 24, 25, 26] a utilisé ces principes de grandes déviations pour fournir des approximations de la valeur attendue de certaines fonctions continues. *L'approche de Varadhan* suggère de séparer le problème des grandes déviations en deux questions successives en commençant par l'existence abstraite d'une fonction de taux  $I$ , pour terminer avec une expression de  $I$ . Cette approche pourrait en fait être utilisée comme un point de départ pour développer le paradigme des grandes déviations. C'est une méthode très utile dans de nombreuses applications de grandes déviations. Par exemple, les asymptotiques de la fonction de partition en mécanique statistique peuvent être dérivées en utilisant ce théorème.

Sur le plan pratique, le *théorème de Varadhan* pour les principes de grandes déviations est une extension naturelle du principe de Laplace aux espaces de dimensions infinies.

Dans ce paragraphe, on considère une famille de variables aléatoires  $(Y_t)$  prenant valeurs dans un espace topologique régulier  $\mathcal{X}$ , et  $(\mu_t)$  désignent les mesures de probabilité associées à  $(Y_t)$ . L'approche de Varadhan est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.25.** (*Varadhan*)

*Supposons que la famille  $(Y_t)_t$  satisfait un principe de grandes déviations d'une bonne fonction de taux  $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$  et soit  $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons la condition de moment pour  $\gamma > 1$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}[e^{\frac{1}{t}\gamma\phi(Y_t)}] < \infty.$$

*Alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}[e^{\frac{1}{t}\phi(Y_t)}] = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{\phi(x) - I(x)\}.$$

### 2.2.5 Principe de contraction

Jusqu'ici, on a découvert deux types basiques de résultats de la théorie de grandes déviations. Le premier est le Théorème de Gärtner-Ellis (Section 2.2.2), qui importe l'existence du principe de grandes déviations et le calcul de la fonction de taux à partir de la fonction génératrice

logarithmique des cumulants. Et inversement, le deuxième résultat est le théorème de Varadhan (Section 2.2.4), qui sert à calculer la fonction génératrice logarithmique des cumulants à partir de la fonction de taux. Dans ce paragraphe, nous allons introduire un autre outil de calcul et un résultat marquant de la théorie des grandes déviations qui est le *principe de contraction*. Ce résultat est utilisé dans le but de calculer une fonction de taux à partir d'une autre fonction de taux.

**Théorème 2.2.26.** *Supposons que  $\mathbf{X}_n$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X}$  de fonction de taux  $I$  et que  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une fonction continue avec  $\mathcal{Y}$  espace métrique complet. Alors,  $\varphi(X_n)$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{Y}$  de fonction de taux*

$$\begin{aligned} J(y) &= \inf\{I(x) \mid x \in \mathcal{X}, \varphi(x) = y\} \\ &= \inf\{I(x) \mid x \in \varphi^{-1}(\mathcal{Y})\}. \end{aligned}$$

## Contrôle des systèmes dynamiques

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de la théorie du contrôle des systèmes dynamiques et à comprendre quelques unes de ces étapes mathématiques. Pour ce faire, nous commençons tout d'abord par rappeler c'est quoi exactement un système dynamique. Dans une deuxième partie, nous abordons la théorie du contrôle et nous explorons ses origines et quelques-unes des principales réalisations mathématiques ainsi que les domaines principaux des sciences et technologies où la théorie du contrôle apparaît et s'applique. A ce propos, dans [40], les auteurs ont fait la distinction entre les deux principales approches théoriques du contrôle, la contrôlabilité et le contrôle optimal, en discutant des avantages et des inconvénients de chacune d'elles.

### 3.1 Systèmes dynamiques

#### 3.1.1 Définitions

En mathématiques, en physique théorique, en économie et en ingénierie, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi qui décrit l'évolution de ce système. C'est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- déterministe, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à

l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- Si le système évolue continument dans le temps, on parle de *système dynamique continu*. Son évolution est représentée par une équation différentielle ordinaire. C'est a priori la plus naturelle physiquement.
- Bien au contraire, on parle de *système à temps discret*, lorsque le système évolue par étapes ; c'est que son nombre d'états est dénombrable. Ce cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler a priori moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

**Remarque 3.1.1.** *Un autre aspect, a priori contradictoire, est l'introduction d'aléas : prévoir le temps qu'il fera demain ou dans quatre jours relève de la dynamique des fluides, l'air en l'occurrence, et la connaissance de tous les paramètres à intégrer dans le système n'est jamais exhaustif, d'où une part d'incertitude (on s'en aperçoit souvent...).*

**Définition 3.1.2.** *(Espace des phases)*

L'espace des phases (aussi appelé l'espace des états) est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Autrement dit, l'état du système dynamique étant décrit par un certain nombre de quantités dépendantes du temps :  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , au lieu d'étudier séparément ces variables, il est préférable de représenter le système par un point unique dans un espace à  $n$  dimensions.

Un espace de phase peut être un espace vectoriel, une variété différentielle ou un fibré vectoriel, un espace mesurable... Pour un système possédant  $n$  degrés de liberté, par exemple, l'espace des phases  $\Gamma$  du

système possède  $n$  dimensions, de telle sorte que l'état complet  $x(t) \in \Gamma$  du système à l'instant  $t$  est en général un vecteur à  $n$  composantes.

Un système dynamique discret est généralement défini par une application bijective  $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  de l'espace des phases sur lui-même. Elle opère de la façon suivante : étant donnée une condition initiale  $x_0$  de l'état du système, le premier état suivant est :

$$x_1 = \phi(x_0).$$

Le second état, qui le suit immédiatement est :

$x_2 = \phi(x_1) = \phi(\phi(x_0)) = (\phi \circ \phi)(x_0) = \phi^2(x_0)$  et ainsi de suite, de telle sorte que le  $n$ -ième état est donné par :

$$x_n = \phi(x_{n-1}) = \dots = \phi^n(x_0).$$

Pour remonter dans le passé, il suffit d'inverser la fonction  $\phi$ , ce qui est toujours possible dans ce cas.

Par la suite nous évoquerons les dynamiques continues. On désigne par  $T \subset \mathbb{R}_+$  la plage de variation du temps  $t$ . L'intervalle  $T$  peut être égal à  $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+, \dots$ . Un système dynamique est la donnée d'un triplet  $(\Gamma, X, \phi)$  où :

- $\Gamma$  est l'espace des phases : espace de Hilbert, espace de Banach, variété différentielle ...
- $X(t)$  un vecteur de  $\Gamma$ , objet de l'étude qui caractérise l'état du système à l'instant  $t$ .
- $\phi : T \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  une application vérifiant  $X(t) = \phi(t, X_0)$ , où  $X_0$  est l'état initial du système. Les coordonnées de  $X_0$  décrivent la connaissance du système au temps initial d'étude  $t = t_0$ .

Une notion importante est celle de *système dynamique réversible* pour lequel on peut également décrire un état passé du système à partir de son présent et de son futur. Autrement dit, en renversant la flèche du temps, on a encore un système dynamique. Dans ce cas on a  $T \subset \mathbb{R}$ ,  $T = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$  par exemple. L'étude d'un système évoluant dans le temps induit la notion de vitesse comme fonction dérivée et d'accélération

comme fonction dérivée seconde, ce qui conduit à résoudre des systèmes différentiels dont la difficile résolution est aidée aujourd'hui par les algorithmes informatiques et la puissance des ordinateurs moderne.

### 3.1.2 Classification des systèmes dynamiques

On distingue plusieurs types de dynamiques en fonction de la nature mathématique de l'espace des phases :

- a) Lorsque  $\Gamma$  est un espace topologique et l'application  $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un homéomorphisme, on parle de dynamique topologique.
- b) Lorsque  $\Gamma$  est une variété différentielle et l'application  $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un difféomorphisme, on parle de dynamique différentielle.
- c) Lorsque  $\Gamma$  est une variété analytique complexe et l'application  $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  est holomorphe, on parle de dynamique holomorphe ou dynamique complexe.
- d) Lorsque  $\Gamma$  est un espace mesuré et  $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  une application qui préserve la mesure, on parle de système dynamique mesuré.

Nous distinguons aussi, les systèmes dynamiques linéaires des systèmes dynamiques non linéaires. Dans les premiers, le membre de droite de l'équation est une fonction dépendant linéairement de  $x$ . Un exemple simple est le suivant :

**Exemple 3.1.3.** *Si on prend les équations du type*

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \quad \text{et} \quad x'(t) + ax(t) = b(t),$$

*on a l'équation  $tx'(t) - 2x(t) = t^3$  est linéaire. Par contre l'équation  $x'(t) = t + \cos(x(t))$  n'est pas linéaire.*

Par le principe de superposition, la somme de deux solutions d'un système linéaire est également solution. Le fait que les solutions d'une équation linéaire forment un espace vectoriel nous permet d'utiliser l'algèbre linéaire et de simplifier considérablement l'analyse. Pour les systèmes à temps continu, la transformée de Laplace permet de transformer les équations différentielles en des équations algébriques.

### 3.1.3 Systèmes dynamiques stochastiques

On s'est habitué à la résolution des systèmes déterministe : soit des équations différentielles linéaires du type

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad a, x_0 \in \mathbb{R},$$

ou plus généralement, les équations du type

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad \text{où } f \text{ fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Kiyoshi Itô a mis en place une théorie et un lemme qui portent son nom et qui ont permis de relier le calcul stochastique et les équations aux dérivées partielles (EDP) faisant ainsi le lien entre analyse et probabilités. C'est ce qui a permis d'aborder un autre type de systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Pour clarifier, nous considérons l'exemple suivant :

**Exemple 3.1.4.** (*Circuit électrique*)

*Prenons un circuit électrique. On désigne par  $Q(t)$  la charge à l'instant  $t$ . Alors  $Q(t)$  satisfait l'équation différentielle*

$$\begin{cases} L.Q''(t) + R.Q'(t) + \frac{1}{C}.Q(t) = F(t) \\ Q(0) = Q_0 \\ Q'(0) = I_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $L$ ,  $R$ ,  $C$  et  $F(t)$  désignent respectivement l'inductance, la résistance, la capacité et le potentiel à l'instant  $t$ . Si nous supposons la situation où une partie du coefficient  $F(t)$  n'est pas déterministe, mais s'écrit de la forme

$$F(t) = G(t) + \text{"bruit"}. \quad (3.1.2)$$

*Comment résoudre l'équation (3.1.1) dans ce cas ?*

Plus généralement, l'équation que nous avons obtenu en permettant un caractère aléatoire aux coefficients de l'équation différentielle est appelée *Equation différentielle stochastique* (EDS). Nous verrons par la suite une approche de résolutions de ce type de systèmes. Pour ce faire, commençons d'abord par fournir les définitions et outils nécessaires.

**Définition 3.1.5.** (*Processus stochastique*)

Soit  $E$  un espace de probabilité.

- Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \geq 0}$  définies sur le même espace de probabilité.
- À un processus stochastique on associe sa filtration naturelle  $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$  (c'est une famille croissante de sous tribus  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_s^X, \forall t \leq s$ ).

Dans toute la suite nous considérons l'espace de probabilité  $E$  muni de sa filtration naturelle  $\mathcal{F}$  et de la mesure de probabilité  $\mu$ , noté  $(E, \mathcal{F}, \mu)$ .

**Définition 3.1.6.** (*Mouvement brownien*)

On appelle mouvement brownien un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles et tel que les accroissements  $X_t - X_s, t > s \geq 0$  sont :

- indépendants :  $(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_t, 0 \leq t \leq s), \forall t > s \geq 0,$
- stationnaires :  $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall t > s \geq 0,$
- de trajectoires continues :  $\mu\{w \in E : t \rightarrow X_t(w) \text{ est continu}\} = 1.$
- gaussiens : Si  $t > s \geq 0$ , alors  $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$

Un mouvement brownien est dit standard si :  $X_0 = 0 \mu$  p.s.  $\mathbb{E}(X_t) = 0, \mathbb{E}(X_t^2) = t$

Pour de tels processus, donner la loi de  $X_{t-s}$  ainsi que de  $X_0$  suffit à caractériser entièrement le processus. Une approche détaillée de la construction des Mouvements browniens est donnée dans [61, 64]

**3.1.3.1 Intégrale stochastique**

Soit  $B$  un mouvement brownien et  $H = (H_s)_{s \geq 0}$  un processus continu. L'intégrale stochastique de  $H$  par rapport à  $B$  est définie par

$\int_0^t H_s dB_s$ . On peut sûrement penser à l'écrire comme une intégrale classique de Riemann

$$\int_0^t H_s dB_s = \int_0^t H_s \frac{dB_s}{ds} ds,$$

sauf que, puisque les trajectoire d'un mouvement brownien ne sont pas dérivables,  $\frac{dB_s}{ds}$  n'existe pas. Cette non-différentiabilité se transmet dans l'intégrale stochastique elle même. De ce fait qu'on aura besoin d'une nouvelle règle de calcul différentiel et intégrale autre que les règles classiques. C'est exactement ici où a intervenu Itô. Itô a généralisé de façon stochastique l'intégrale de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f dg,$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f, g$  fonctions bornées, et ce, en remplaçant les fonctions  $f$  et  $g$  par deux processus stochastiques  $H = (H_s)$  et  $B = (B_s)$  en imposant la condition :

$$\mathbb{P} \left[ \int_0^t H_s^2 ds, t \geq 0 \right] = 1.$$

**Définition 3.1.7.** (*Intégrale d'Itô*)

Soient  $H = (H_s)_{s \geq 0}$  et  $B = (B_s)_{s \geq 0}$  deux processus stochastiques vérifiant  $\mathbb{P}[\int_0^t H_s^2 ds, t \geq 0] = 1$ . On définit l'intégrale de Itô :

$$I(t) := \int_0^t H_s dB_s, \quad (0 \leq s \leq t).$$

On a  $I(0) = 0$ .

Cette définition donne naissance au processus d'Itô. Pour une discussion complète de l'intégrale d'Itô, on réfère le lecteur à [61, 64].

**Définition 3.1.8.** (*Processus d'Itô*)

Un processus d'Itô est un processus à temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  qui peut s'écrire de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

où  $H$  et  $K$  sont deux processus à trajectoires continues.

Dans cette dernière écriture de  $X_t$ , on retrouve :

- Une partie déterministe :  $D_t = X_0 + \int_0^t K_s ds$ . Sa dérivée  $\frac{dD_t}{dt} = K_t$  existe.
- Une partie stochastique :  $S_t = \int_0^t H_s dB_s$ . Comme on a vu précédemment, les trajectoires de  $S_t$  ne sont pas dérivables.

### 3.1.3.2 Formule d'Itô

Commençons par rappeler la dérivation de la composition de deux fonctions :

- Soit  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions continûment dérivables. Rappelons que la règle classique de la dérivation de la composée de  $f$  et  $g$  est :  $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)).g'(t)$  et de manière équivalente, nous avons la forme intégrale

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

Pour les processus stochastique, lorsqu'on remplace  $g$  par une trajectoire du mouvement brownien  $B$ , le problème se pose car  $\frac{dB_t}{dt}$  n'existe pas. C'est ici, où une nouvelle règle du calcul, nommée "*formule d'Itô*", est introduite :

- Soit  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable par rapport à  $t$  et deux fois continûment dérivable par rapport à  $x$ . Soient  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien et  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  le processus défini par  $X_t = f(t, B_t)$  pour  $t \geq 0$ , la relation suivante est vraie

$$\begin{aligned} X_t - X_0 &= f(t, B_t) - f(0, B_0) \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, B_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, B_s) ds. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le processus  $X$  est un processus d'Itô :  $X_t = D_t + S_t$  avec

\*  $D_t = X_0 + \int_0^t (\frac{\partial}{\partial t} f(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, B_s)) ds$  : Partie déterministe (dite aussi régulière).

\*  $S_t = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, B_s) dB_s$  : Partie stochastique.

On peut énoncer la formule d'Itô sous sa forme généralisé :

**Théorème 3.1.9.** (Formule d'Itô)

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable par rapport à  $t$  et deux fois continûment dérivable par rapport à  $x$ . Soient  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien et  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus.

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s) dX_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

On peut écrire la formule d'Itô sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, X_t) \right] dt \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} f(t, X_t) dX_t. \end{aligned}$$

En remplaçant  $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$  dans l'équation précédente, et comme  $dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = dt \cdot dt = 0$  et  $dB_t \cdot dB_t = dt$  on obtient :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(t, X_t) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, X_t) K_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, X_t) \right] dt \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} f(t, X_t) H_t dB_t. \end{aligned}$$

**Exemple 3.1.10.** Un exemple d'une EDS linéaire est l'équation  $dX(t) = AX(t)dt + \sqrt{2}dB_t$ , avec  $B_t$  est un mouvement brownien. La solution de cette équation est

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t \sqrt{2} e^{t-s} dB_s.$$

**Exemple 3.1.11.** *L'EDS linéaire de fokker-Planck (FP) est de la forme :*

$$dX(t) = AX(t)dt + QdB_t,$$

avec  $B_t$  est un mouvement brownien et  $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Soit  $f$  suffisamment régulière. Par la formule d'Itô, on a

$$df(t, X(t)) = [A.X(t)\nabla f + \frac{1}{2}\nabla.QQ^*\nabla f]dt + \nabla f.QdB_t.$$

Les systèmes dynamiques avec excitation stochastique sont souvent utilisés en physiques statistiques, en mécanique quantique, économie, génétique... Pour suffisamment de détails, nous pouvons nous référer à [7, 36, 57, 61, 68, 73, 80]...

## 3.2 Théorie du contrôle

### 3.2.1 Histoire et applications

A l'origine, le mot "contrôle" possède un sens double :

- Le premier est : "contrôler" un système peut se comprendre simplement comme tester ou vérifier que son comportement est satisfaisant.
- Dans un sens plus profond, contrôler c'est aussi agir, mettre des choses afin de garantir que le système se comporte comme on le souhaite.

S. Bennet dans le chapitre 3 de [6] a cité la phrase suivante, de la monographie "La politique" de Aristote

*"Si chaque instrument pouvait accomplir son propre travail obéissant ou anticipant la volonté des autres... Si la navette trassait et la pioche touchait la lyre sans une main pour les guider, les ouvriers principaux n'auraient pas besoin de serviteurs, ni de maîtres esclaves.. "*

Cette phrase d'Aristote décrit de manière assez transparente l'objectif directeur de la théorie du contrôle : La nécessité d'automatiser les

processus pour permettre à l'être humain de gagner en liberté, l'indépendance et la qualité de vie. A présent, les problèmes de contrôle peuvent être énoncés en termes mathématiques. En bref, pour fixer les idées supposons que, par exemple, on veut obtenir un bon comportement d'un système dynamique physique régi de la forme suivante

$$A(y) = f(v), \tag{3.2.1}$$

avec

- $y$  est l'état du système :  $y$  appartient à l'espace vectoriel  $Y$ .
- $v$  est le contrôle du système : appartient à l'ensemble des contrôles admissibles que nous notons  $U_{ad}$ .

$y$  est l'inconnu du système qu'on va contrôler et  $v$  est la variable qu'on peut choisir librement dans  $U_{ad}$  pour agir sur le système.

Supposons que

$$A : D(A) \subset Y \rightarrow Y \quad \text{et} \quad f : U_{ad} \rightarrow Y$$

sont deux applications données (linéaires ou non linéaires). Ici,

- L'opérateur  $A$  détermine l'équation qui doit être satisfaite par la variable d'état  $y$  selon les lois de la physique.
- La fonction  $f$  indique la manière dont le contrôle  $v$  agit sur le système régissant.

Afin de rendre les choses plus simples, supposons que, pour chaque  $v \in U_{ad}$ , l'équation d'état (3.2.1) possède exactement une solution  $y = y(v)$  dans  $Y$ . D'une manière générale, contrôler l'équation (3.2.1) consiste à trouver  $v \in U_{ad}$  tel que la solution de cette équation se rapproche de l'état prescrit souhaité. Le meilleur parmi tous les contrôles existants permettant d'atteindre l'objectif souhaité est souvent dit *contrôle optimal*.

Cette formulation mathématique peut sembler sophistiquée ou même obscure pour les lecteurs qui ne connaissent pas ce sujet. Cependant, elle est désormais standard et elle est née naturellement le long de l'histoire de cette riche discipline. L'un des avantages principaux d'un tel

cadre général est que de nombreux problèmes de natures très différentes peuvent y convenir. On se réfère à [40] pour plus de détails.

Comme beaucoup d'autres domaines d'activités humaines, la discipline du contrôle existait bien avant qu'elle ne reçoive ce nom. En effet, dans le monde des espèces vivantes, les organismes sont dotés de mécanismes sophistiqués qui régulent les différentes tâches qu'ils développent. Ceci est fait pour garantir que les variables essentielles sont maintenues dans des régimes optimaux pour maintenir les espèces en vie leurs permettant de grandir, de se développer et de se reproduire. Ainsi, bien que la formulation mathématique des problèmes de contrôle soit intrinsèquement complexe, les idées clés de la théorie du contrôle se trouvent dans la nature dans l'évolution et le comportement des êtres vivants.

Fernandez et al. dans [40] ont rappelé quelques résultats classiques et bien connus qui ont dans une certaine mesure influencé plusieurs faits de point de vue qu'ils ont été pertinents pour les récentes réalisations de la théorie du contrôle. Ils sont revenus aux origines de l'ingénierie du contrôle et de la théorie du contrôle et ont décrit le rôle que cette discipline a joué dans l'histoire. En remontant le temps on trouve que les romains ont utilisé certains éléments de la théorie du contrôle dans leurs aqueducs. En effet, des systèmes ingénieux de vannes de régulation ont été utilisés dans ces constructions afin de maintenir le niveau d'eau constant. Certains prétendent que dans l'ancienne Mésopotamie, plus de 2000 ans avant JC, le contrôle des systèmes d'irrigation était également un art bien connu. Et plusieurs d'autres exemples (tout au long des siècles) qu'au fil du temps..

Dans les années 30, des progrès importants ont été réalisés en matière de contrôle automatique et de techniques de conception et d'analyse. Le nombre d'application a augmenté en couvrant les amplificateurs dans les systèmes téléphoniques. Les systèmes de distributions dans les usines électriques, le système abilitations des avions, les mécanismes électriques dans la production de papiers, la chimie, l'industrie pétrolière et sidérurgiques, ect... Deux méthodes ou approches émergentes et clairement différentes sont disponibles : une première méthode basée

sur l'utilisation d'équations différentielles, et une deuxième, de nature fréquentielle, basée sur l'analyse des amplitudes et des phases des entrées et des sorties. En conséquence, la théorie du contrôle peut être examinée aujourd'hui de deux points de vue différents et complémentaires : comme un support théorique à l'ingénierie de contrôle (une partie de l'ingénierie du système) et aussi en tant qu'une discipline mathématique. En pratique, les frontières entre ces deux sous-mondes sont extrêmement vagues. En fait, la théorie du contrôle est l'un des domaines les plus interdisciplinés de la science de nos jours, où l'ingénierie et les mathématiques se fusionnent parfaitement et s'enrichissent mutuellement. Les mathématiques jouent actuellement un rôle progressif dans la théorie du contrôle. En effet, le degré de sophistication des systèmes auxquels la théorie du contrôle doit faire face à l'augmentation en permanence et cela produit également une grande demande des mathématiques dans le domaine.

R. Kalman, l'un des plus grands protagonistes de la théorie du contrôle moderne, a déclaré en 1974 qu'à l'avenir les progrès principaux dans le contrôle et l'optimisation des systèmes proviendraient davantage du progrès mathématique que du développement technologique.

### 3.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension finie

Précédemment, nous avons considéré les types de systèmes donnée par l'équation (3.2.1). L'objectif principal de la théorie du contrôle est de trouver le contrôle  $v$  conduisant les états associés  $y(v)$ , c'est-à-dire, les solutions des systèmes contrôlés à une situation souhaitée. La théorie du contrôle est pleine de résultats mathématiques intéressants qui ont eu un impact énorme dans le monde des applications. La plupart de ces résultats sont trop complexes pour être reproduits dans cette thèse. L'un de ces résultats importants, simple à la fois, est un théorème de R.E. Kalman qui caractérise les systèmes linéaires contrôlables. Dans la suite de ce chapitre, ce qui nous intéresse est la contrôlabilité des équations différentielles ordinaires.

Dans ce qui suit,  $\mathcal{X}, \mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$  désigneront des espaces de Hilbert réels

ou complexes de dimension finie. Un système linéaire d'espace d'état  $\mathcal{X}$ , d'espace d'entrée  $\mathcal{U}$  et d'espace de sortie  $\mathcal{Y}$  est décrit par le système linéaire non-homogène d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.2.2)$$

avec  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , la fonction  $u : I \mapsto \mathcal{U}$  est continue sur un intervalle fermé  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in \mathcal{X}$ . L'équation (3.2.2) décrit de manière unique les fonctions :

- $x : I \rightarrow \mathcal{X}$  décrit l'évolution temporelle de l'état interne du système sous l'influence du contrôle externe ou la fonction d'entrée  $u$ .
- $y : I \rightarrow \mathcal{Y}$  décrit la partie observable du système et on l'appelle fonction de sortie.

Sans perte de généralité, on suppose que  $t_0 = 0 \in I$ . Les notations suivantes seront utiles par la suite :

**Notation 3.2.1.** a) L'application  $X_t : \mathcal{X} \oplus C([0, t], \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{X}$  partant de l'état initial  $x_0$  et la fonction de contrôle  $u$  vers l'état  $x(t)$ ,

$$X_t(x_0, u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.2.3)$$

b) L'application  $Y_t : \mathcal{X} \oplus C([0, t], \mathcal{U}) \rightarrow C([0, t], \mathcal{Y})$  partant de l'état initial  $x_0$  et la fonction de contrôle  $u$  vers la fonction de sortie  $y$ ,

$$Y_t(x_0, u)(s) = Ce^{sA}x_0 + \int_0^s Ce^{(s-\tau)A}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.2.4)$$

Aussi, on aura besoin des définitions suivantes :

**Définition 3.2.2.** a) Le système (3.2.2) est contrôlable si, pour tout  $t > 0$  et tout  $x_0 \in \mathcal{X}$  l'application

$$C([0, t], \mathcal{U}) \ni u \mapsto X_t(x_0, u) \in \mathcal{X},$$

est surjective.

b) Le système (3.2.2) est observable si, pour tout  $t > 0$  et tout  $u \in C([0, t], \mathcal{U})$  l'application

$$\mathcal{X} \ni x_0 \mapsto Y_t(x_0, u) \in C([0, t], \mathcal{Y}),$$

est injective.

D'une manière générale, le système est *contrôlable* s'il peut être dirigé à partir d'un état interne arbitraire  $x_0$  vers un autre état interne  $x_1$  dans un temps arbitraire  $t > 0$  par un choix approprié du contrôle  $u$ . Le système est *observable* si pour un contrôle arbitraire  $u$ , son état interne est uniquement déterminé par sa fonction de sortie.

Dans ce qui suit, nous étudierons de près la contrôlabilité et l'observabilité du système. Nous verrons qu'elles sont fortement liées aux propriétés algébriques suivantes :

**Définition 3.2.3.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ .

a) Le sous espace contrôlable du couple  $(A, B)$  est le plus petit sous espace  $A$ -invariant de  $\mathcal{X}$  contenant  $\text{Ran } B$ . On le note par  $\mathcal{C}(A, B)$ . Si  $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{X}$ , alors le couple  $(A, B)$  est dit contrôlable.

b) Le sous espace observable du couple  $(C, A)$  est le plus grand sous espace  $A$ -invariant de  $\mathcal{X}$  contenu dans  $\text{Ker}(C)$ . On le note par  $\mathcal{O}(C, A)$ . Si  $\mathcal{O}(C, A) = \{0\}$ , alors le couple  $(C, A)$  est dit observable.

Un résultat fondamental de la contrôlabilité et l'observabilité est le suivant :

**Théorème 3.2.4.** (1) Pour tout  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  et  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, B) &= \bigcup_{k=0}^{\dim(\mathcal{X})-1} \text{Ran}(A^k B) \\ &= \text{Ran Vect}(B, AB, A^2 B, \dots, A^{\dim(\mathcal{X})-1} B) \end{aligned}$$

(2) Pour tout  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  et  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , on a

$$\mathcal{O}(C, A) = \bigcap_{k=0}^{\dim(\mathcal{X})-1} \text{Ker}(CA^k) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\dim(\mathcal{X})-1} \end{bmatrix}.$$

(3)  $\mathcal{O}(C, A)^\perp = \mathcal{C}(A^*, C^*)$ .

*Démonstration.* (1) Soit  $n = \dim(\mathcal{X})$  et

$$\mathcal{D} = \text{Ran Vect}(B, AB, A^2B, \dots, A^{\dim(\mathcal{X})-1}B).$$

(i) Par le théorème de Cayley-Hamilton, il existe des scalaires

$$a_0, \dots, a_{n-1} \text{ tel que } A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k \text{ et donc}$$

$$A\mathcal{D} = \text{Ran Vect}(AB, A^2B, \dots, A^n B) \subset \mathcal{D}.$$

D'où  $\mathcal{D}$  est un sous espace  $A$ -invariant contenant  $\text{Ran}(B)$ . La minimalité de  $\mathcal{C}(A, B)$  implique que  $\mathcal{C}(A, B) \subset \mathcal{D}$ .

(ii) Afin de prouver l'inclusion inverse il suffit de noter que

$$\text{Ran}(B) \subset \mathcal{C}(A, B) \text{ et } A\mathcal{C}(A, B) \subset \mathcal{C}(A, B).$$

Ce qui implique que pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\text{Ran}(A^k B) = A^k \text{Ran}(B) \subset A^k \mathcal{C}(A, B) \subset \mathcal{C}(A, B)$$

Comme  $\mathcal{C}(A, B)$  est un sous espace, il provient que

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} \text{Ran}(A^k B) = \mathcal{D} \subset \mathcal{C}(A, B).$$

(2) Soit  $\mathcal{N} = \text{Ker}(C) \cap \text{ker}(CA) \cap \dots \cap \text{Ker}(CA^{n-1})$ .

(i) Par le théorème de Cayley-Hamilton,  $x$  appartient au sous espace  $\mathcal{N}$  si et seulement si  $CA^k x = 0$  pour tout  $k \geq 0$ . D'où  $\mathcal{N} \subset \text{Ker}(C)$  est  $A$ -invariant. Par la maximalité de  $\mathcal{O}(C, A)$ , on conclut que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}(C, A)$ .

- (ii) Afin de montrer l'inclusion inverse, on note que si  $x \in \mathcal{O}(C, A)$ , on doit avoir  $A^k x \in \mathcal{O}(C, A) \subset \text{Ker}(C)$  pour  $k = 0, \dots, n-1$ , et donc  $x \in \mathcal{N}$ .

(3) Cette assertion provient de (1) et (2) puisque

$$\left( \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}(CA^k) \right)^\perp = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Ker}(CA^k)^\perp = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Ran}(A^{*k}C^*).$$

□

**Notation 3.2.5.** Pour  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  et  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$  on définit l'opérateur

$$T_t(A, D) = \int_0^t e^{\tau A} D D^* e^{\tau A^*} d\tau.$$

**Lemme 3.2.6.** Pour tout  $t > 0$  on a

$$T_t(A, D) \geq 0 \text{ et } \text{Ran}(T_t(A, D)) = \mathcal{C}(A, D).$$

*Démonstration.* Il est clair que  $T_t(A, D) \geq 0$  et  $T_t(A, D)x = 0$  si et seulement si  $D^* e^{sA^*} x = 0$  pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . La différenciation par rapport à  $s$  et le développement en série entière de  $e^{sA^*}$  donne

$$\text{Ker}(T_t(A, D)) = \bigcap_{k \geq 0} \text{Ker}(D^* A^{*k}) = \left( \sum_{k \geq 0} \text{Ran}(A^k D) \right)^\perp.$$

□

Par la suite, nous désignerons par  $T_t(A, D)^{-1}$  la réciproque de la restriction de  $T_t(A, D)$  à son image  $\mathcal{C}(A, D)$ .

**Proposition 3.2.7.** Pour tout  $t > 0$  et tout  $x_0 \in \mathcal{X}$  on a :

(1)

$$\mathcal{C}(A, B) = \{X_t(x_0, u) - e^{tA} x_0 \mid u \in C([0, t], \mathcal{U})\}. \quad (3.2.5)$$

De plus, si  $x_1 \in e^{tA} x_0 + \mathcal{C}(A, B)$ , alors  $x_1 = X_t(x_0, u)$  est obtenu par la fonction de contrôle

$$u(s) = B^* e^{(t-s)A^*} T_t(A, B)^{-1} (x_1 - e^{tA} x_0).$$

(2)

$$\mathcal{O}(C, A) = \{x \in \mathcal{X} \mid Y_t(x_0 + x, u) = Y_t(x_0, u) \text{ pour tout } u \in C([0, t], \mathcal{U})\}. \quad (3.2.6)$$

De plus, si on désigne par  $P$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{O}(C, A)^\perp$ , alors

$$Px_0 = T_t(A^*, C^*)^{-1}P \int_0^t e^{\tau A^*} (C^* Y_t(x_0, u)(\tau) - T_{t-\tau}(A^*, C^*)Bu(\tau))d\tau. \quad (3.2.7)$$

*Démonstration.* (1) (i) Par l'équation (3.2.3), le coté droit de l'équation (3.2.5) peut être écrit comme

$$\mathcal{C}' = \left\{ \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds \mid c \in C([0, t], \mathcal{U}) \right\}.$$

Il découle du théorème de Cayley-Hamilton que pour certaines fonctions analytiques entières  $p_k$  on a :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\dim(\mathcal{X})-1} p_k(t)A^k.$$

D'où, pour  $u \in C([0, t], \mathcal{U})$  on a

$$\begin{cases} u_k = \int_0^t p_k(t-s)u(s)ds \in \mathcal{U}, \text{ et} \\ \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds = \sum_{k=0}^{\dim(\mathcal{X})-1} A^k Bu_k \in \mathcal{C}(A, B) \end{cases}$$

Ce qui montre que  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}(A, B)$ .

(ii) Pour montrer l'inclusion inverse, on invoque Lemme 3.2.2 qui implique que, pour tout  $x \in \mathcal{C}(A, B)$ , il existe  $y \in \mathcal{C}(A, B)$  tel que la fonction  $s \mapsto u(s) = B^*e^{(t-s)A^*}y$  appartient à  $C([0, t], \mathcal{U})$  et

$$x = T_t(A, B)y = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds \in \mathcal{C}'.$$

(2) A partir de l'équation (3.2.4), on déduit que

$$Y_t(x_0 + x, u)(s) - Y_t(x_0, u)(s) = 0 \text{ pour tout } s \in [0, t]$$

si et seulement si  $x \in \mathcal{O}(C, A)$ . Ce qui prouve l'équation (3.2.6).  
 A partir de l'équation (3.2.4), on déduit également que

$$\begin{aligned} T_t(A^*, C^*)x_0 &= \int_0^t e^{sA^*} C^* C e^{sA} x_0 ds \\ &= \int_0^t e^{sA^*} C^* \left( Y_t(x_0, u)(s) - \int_0^s C e^{(s-\tau)A} B u(\tau) d\tau \right) ds, \end{aligned}$$

et un simple calcul conduit à l'équation (3.2.7)

□

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente :

**Théorème 3.2.8.** (1) *Le système (3.2.2) est contrôlable si et seulement si le couple  $(A, B)$  est contrôlable. Plus généralement, pour tout  $t > 0$  et tout  $x_0 \in \mathcal{X}$ , on a*

$$\{X_t(x_0, u) | u \in C([0, t], \mathcal{U})\} = e^{tA}(x_0 + \mathcal{C}(A, B)).$$

(2) *Le système (3.2.2) est observable si et seulement si le couple  $(C, A)$  est observable. Plus généralement, pour tout  $t > 0$  et tout  $x_0 \in \mathcal{X}$ , on a*

$$\begin{aligned} \{x \in \mathcal{X} | Y_t(x, u) = Y_t(x_0, u) \text{ pour tout } u \in C([0, t], \mathcal{U})\} \\ = x_0 + \mathcal{O}(C, A). \end{aligned}$$

**Notation 3.2.9.** *Pour  $Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , on désigne par  $Y \oplus Z$  l'élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$  défini par  $(Y \oplus Z)x = Yx \oplus Zx$ . Dans la notation de matrice par blocs,*

$$Y \oplus Z = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (Y \oplus Z)^* = \begin{bmatrix} Y^* & Z^* \end{bmatrix}.$$

Les règles simples suivantes sont souvent utiles pour réduire les questions de contrôlabilité et d'observabilité.

**Proposition 3.2.10.** (1) *Si  $\lambda, \mu$  sont des scalaires non nuls, alors  $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{C}(\lambda A, \mu B)$  pour tout  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ .*

(2) *Pour tout  $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  on a  $\mathcal{C}(A + BC, B) = \mathcal{C}(A, B)$ .*

(3) On suppose que  $\mathcal{X}$  est réel et notons par  $A_{\mathbb{C}}$  l'extension  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  à l'espace vectoriel complexifié  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}} = \mathcal{X} \oplus i\mathcal{X}$ . Alors  $\mathcal{C}(A_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}) = \mathcal{C}(A, B) \oplus i\mathcal{C}(A, B)$  et en particulier  $(A, B)$  est contrôlable si et seulement si  $(A_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}})$  est contrôlable.

*Démonstration.* (1) Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nuls alors

$$\text{Ran}((\lambda A)^n \mu B) = \text{Ran}(A^n B)$$

est vérifiée pour tous les entiers  $n \geq 0$ .

(2) Notons que pour tout sous espace  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  on a

$$\text{Ran}(B) + (A + BC)\mathcal{V} = \text{Ran}(B) + A\mathcal{V}.$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &= \sum_{n=0}^k (A + BC)^n \text{Ran}(B) \\ &= \text{Ran}(B) + (A + BC)\mathcal{V}_{k-1} \\ &= \text{Ran}(B) + A\mathcal{V}_{k-1}, \end{aligned}$$

et  $n = \dim(\mathcal{X})$  donc

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A + BC, B) &= \mathcal{V}_{n-1} \\ &= \text{Ran}(B) + A\mathcal{V}_{n-2} \\ &= \text{Ran}(B) + A(\text{Ran}(B) + A\mathcal{V}_{n-3}) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k \text{Ran}(B) = \mathcal{C}(A, B). \end{aligned}$$

(3) Sur l'espace vectoriel complexifié  $\mathcal{X} \oplus i\mathcal{X}$  on a

$$\begin{cases} A_{\mathbb{C}} = A \oplus iA, \\ B_{\mathbb{C}} = B \oplus iB, \end{cases}$$

de sorte que

$$A_{\mathbb{C}}^k B_{\mathbb{C}} = A^k B \oplus iA^k B.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{C}(A_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}) = \mathcal{C}(A, B) \oplus i\mathcal{C}(A, B).$$

□

### 3.3 Théorie de base de l'équation algébrique de Riccati

Dans cette section, on expose quelques résultats de base sur l'équation algébrique de Riccati qu'on va utiliser dans la suite de cette thèse. On renvoie le lecteur à [3, 60, 76] pour des expositions détaillées et des preuves.

#### 3.3.1 Équations quadratiques de Riccati

Dans ce paragraphe, nous admettrons les notations suivantes :

**Notation 3.3.1.** *Supposons que  $\mathcal{X}$  est un espace de Hilbert complexe de dimension finie  $n$ .*

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit intérieur de  $\mathcal{X}$ .
- $\mathcal{X}$  est équipé d'une conjugaison distinguée  $x \mapsto \bar{x}$
- Pour  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , on définit  $\bar{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  par  $\bar{A}x = A\bar{x}$ .
- $A$  est réel si  $A = \bar{A}$ .
- On équipe l'espace vectoriel  $\Xi = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$  de la structure hilbertienne induite par  $\mathcal{X}$  et la forme symplectique

$$\omega(x \oplus y, x' \oplus y') = (x \oplus y, J(x' \oplus y')) = (x, y') - (y, x'). \quad (3.3.1)$$

- Le complément symplectique de  $\nu \subset \Xi$  est le sous espace

$$\nu^\omega = \{v \mid \omega(u, v) = 0 \text{ pour tout } u \in \nu\}.$$

Soit  $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $B \geq 0$ ,  $C = C^*$ . On définit sur  $\Xi = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ , les opérateurs suivants,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -C & A^* \\ A & B \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}.$$

**Notation 3.3.2.** Pour  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , on utilise la notation standard suivante

$$\begin{cases} \operatorname{Re} X = \frac{1}{2}(X + X^*) \\ \text{et} \\ \operatorname{Im} X = \frac{1}{2i}(X - X^*). \end{cases}$$

Par la suite on aura besoin des définitions suivantes :

**Définition 3.3.3.** Soit  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$  un sous espace  $K$ -invariant. On dit que :

- a)  $\mathcal{K}$  est  $K$ -stable si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tK}x = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{K}$  et on désigne par  $\mathcal{H}_s$  le sous espace  $K$ -stable maximal, c.à.d. le sous espace spectral de  $\mathcal{K}$  associé à  $\operatorname{Sp}(K) \cap \mathbb{C}_-$  où  $\mathbb{C}_-$  désigne le demi plan gauche.
- b)  $\mathcal{K}$  est  $K$ -instable si  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tK}x = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{K}$  et on désigne par  $\mathcal{H}_{ins}$  le sous espace  $K$ -instable maximal, c.à.d. le sous espace spectral de  $\mathcal{K}$  associé à  $\operatorname{Sp}(K) \cap \mathbb{C}_+$  où  $\mathbb{C}_+$  désigne le demi plan droit.

**Remarque 3.3.4.** On rappelle qu'un opérateur  $E \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$  est dit stable (resp. instable) chaque fois que  $\operatorname{sp}(E) \subset \mathbb{C}_-$  (resp.  $\operatorname{sp}(E) \subset \mathbb{C}_+$ ).

**Définition 3.3.5.** Soient  $E$  et  $F$  deux opérateurs sur  $\Xi = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$

- a) On dit que  $E$  est  $F$ -isotropique, si  $\langle u|Fv \rangle = 0$  pour tout  $u, v \in \Xi$ .
- b) On dit que  $E$  est  $F$ -skew-adjoint, si  $FE + E^*F = 0$ .

**Proposition 3.3.6.** (1) Le spectre de  $K$ , y compris les multiplicités, est symétrique par rapport à l'axe des imaginaires.

- (2) Soit  $\mathcal{H}_\Sigma$  le sous espace spectral de  $K$  correspondant à  $\Sigma \subset \operatorname{Sp}(K)$ . Si  $(-\bar{\Sigma}) \cap \Sigma = \emptyset$  alors  $\mathcal{H}_\Sigma$  est  $G$ -isotropique et  $H$ -isotropique, c.à.d.  $\langle u|Gv \rangle = \langle u|Hv \rangle = 0$  pour tout  $u, v \in \mathcal{H}_\Sigma$ .

(3) Si  $C \geq 0$ ,  $(A, B)$  est contrôlable et  $(C, A)$  est observable, alors  $K$  n'a aucune valeur propre sur l'axe des imaginaires.

*Démonstration.* (1) On vérifie explicitement que  $K$  est  $G$ -skew-adjoint ainsi que  $H$ -skew-adjoint. Cela implique clairement l'assertion (1).

(2) La même relation précédente implique également que la projection spectrale sur  $\mathcal{H}_\Sigma$  donnée par

$$P_\Sigma = \oint_{\Gamma_\Sigma} (z - K)^{-1} \frac{1}{2\pi i} dz,$$

satisfait

$$\begin{aligned} GP_\Sigma &= \oint_{\Gamma_\Sigma} (z + K^*)^{-1} G \frac{1}{2\pi i} dz \\ &= \left[ \oint_{\Gamma_{-\bar{\Sigma}}} (z - K)^{-1} \frac{1}{2\pi i} dz \right]^* G \\ &= P_{-\bar{\Sigma}}^* G, \end{aligned}$$

où  $\Gamma_\Sigma$  désigne une courbe de Jordan orientée positivement et encerclant  $\Sigma$  et aucune autre partie du  $Sp(K)$ . Et donc on a

$$P_\Sigma^* P_{-\bar{\Sigma}}^* G = P_{\Sigma \cap (-\bar{\Sigma})}^* G = 0$$

à condition que  $\Sigma \cap (-\bar{\Sigma}) = \emptyset$ . Sous la même condition, le même argument montre que  $P_\Sigma^* H P_\Sigma = 0$ .

(3) Afin de montrer l'assertion (3), notons que si,  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors

$$\operatorname{Re} J(K - i\lambda) = C \oplus B \geq 0.$$

Ainsi,  $(K - i\lambda)u = 0$  implique  $(C \oplus B)u = 0$ , et donc  $(A \oplus (-A^*))u = i\lambda u$ . Il suit que pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$(C \oplus B)(A \oplus (-A^*))^n u = (i\lambda)^n (C \oplus B)u = 0.$$

Si  $u \neq 0$ , c.à.d. si  $i\lambda \in Sp(K)$ , alors  $\mathcal{O}(C, A) \oplus \mathcal{O}(A^*, B) \neq \{0\}$ . Ce qui contredit soit l'observabilité de  $(C, A)$  soit la contrôlabilité de  $(A, B)$ .

□

**Définition 3.3.7.** Soit  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . On définit le graphe de  $X$  par

$$\mathcal{G} = \text{Ran } G_X, \quad G_X = I \oplus X.$$

En d'autres termes

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ Xx \end{bmatrix} \mid x \in \mathcal{X} \right\}.$$

**Lemme 3.3.8.** [56] Un sous espace  $\nu \subset \Xi$  est un graphe si et seulement si  $\nu \cap (\{0\} \oplus \mathcal{X}) = \{0 \oplus 0\}$ .

Le théorème suivant rassemble les principaux résultats du contrôle linéaire sous sa forme algébrique :

**Théorème 3.3.9.** [60]

(1) L'opérateur  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est une solution de l'équation de Riccati (3.3.2)

$$XBX + XA + A^*X - C = 0 \quad (3.3.2)$$

si et seulement si  $\mathcal{G}(X)$  est un sous espace invariant de  $K$ , c.à.d.  $K\mathcal{G}(X) \subset \mathcal{G}(X)$ .

(2) Une solution  $X$  de l'équation (3.3.2) est autoadjointe si et seulement si son graphe est  $G$ -isotropique.

(3) Supposons que  $C \geq 0$  et  $(A, B)$  est contrôlable. Alors,

(a) Si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$  est  $K$ -instable, alors il existe un sous espace  $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$  et  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$  tel que  $\mathcal{K} = \mathcal{G}(x)$ . De plus, on a

- $\langle w | (X + X^*)w \rangle \geq 0$  pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .
- $\mathcal{W}$  est  $(A + BX)$ -invariant.
- $Sp(K|_{\mathcal{K}}) = Sp(A + BX)|_{\mathcal{W}}$ .
- l'équation (3.3.2) est satisfaite sur  $\mathcal{W}$ , c.à.d.

$$(X(A + BX) + A^*X - C)w = 0,$$

est valable pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .

(b)  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$  est  $K$ -stable, alors il existe un sous espace  $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$  et  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$  tel que  $\mathcal{K} = \mathcal{G}(x)$ . De plus, on a

- $\langle w|(X + X^*)w \rangle \leq 0$  pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .
- $\mathcal{W}$  est  $(A + BX)$ -invariant.
- $Sp(K|_{\mathcal{K}}) = Sp(A + BX)|_{\mathcal{W}}$ .
- l'équation (3.3.2) est satisfaite sur  $\mathcal{W}$ , c.à.d.

$$(X(A + BX) + A^*X - C)w = 0,$$

est valable pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .

(4) Soit  $n = \dim(\mathcal{X})$  et supposons que le couple  $(A, B)$  est contrôlable. Si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$  est un sous espace  $H$ -isotropique et  $K$ -isotropique de dimension  $n$ , alors il est un graphe, c.à.d. il correspond à une solution de l'équation (3.3.2).

(5) Supposons que  $(C, A)$  est observable et ou bien  $C \geq 0$  ou bien  $C \leq 0$ . Si  $X$  est une solution auto-adjointe de (3.3.2), alors elle est régulière.

*Démonstration.* □

**Notation 3.3.10.** L'équation algébrique de Riccati associée au triplet  $(A, B, C)$  d'éléments de  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  est l'équation quadratique de l'auto-adjoint non connu  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  :

$$\mathcal{R}(X) = XBX - XA - A^*X - C = 0. \quad (3.3.3)$$

Par la suite, nous admettrons que  $C$  est auto-adjoint, que  $B \geq 0$  et le couple  $(A, B)$  est contrôlable. On désigne par  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  l'ensemble des éléments auto-adjoints de  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  satisfaisant (3.3.3) qu'on peut l'écrire aussi :

$$\mathcal{R}(X) = G_X^* L G_X = 0, \quad L = \begin{bmatrix} C & A^* \\ A & -B^* \end{bmatrix}$$

### 3.3.2 Existence et unicité des solutions auto-adjointes

La matrice hamiltonienne  $K$  associée à l'équation algébrique de Riccati (3.3.3) est l'élément unique de  $\mathcal{L}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$  tel que

$$\langle u, Lv \rangle = \omega(u, Kv) \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{H}.$$

La forme  $\omega$  est précédemment définie par l'équation (3.3.1). Il est simple

à vérifier que  $K = \begin{bmatrix} -A & B \\ C & A^* \end{bmatrix}$ .

Notons que, étant donné  $L = L^*$ ,  $K$  est l'adjoint asymétrique par rapport à  $\omega$  c.à.d.

$$\begin{aligned} \omega(u, Kv) + \omega(Ku, v) &= \omega(u, Kv) - \omega(v, Ku) \\ &= \langle u, Lv \rangle - \langle v, Lu \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Nous commençons en premier lieu par énoncer un théorème qui fournit une caractérisation de l'ensemble  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  (Théorème 7.2.4 [60]) et on le fait suivre d'un énoncé des propriétés géométriques symplectiques élémentaires des projections :

**Théorème 3.3.11.** [60] *L'application  $X \mapsto \mathcal{G}_X$  est une bijection de  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  sur l'ensemble des sous espaces Lagrangien  $K$ -invariant de  $\Xi$ .*

Avant de passer à la preuve du Théorème 3.3.11, on a besoin du lemme suivant

**Lemme 3.3.12.** [56]

- (1) *L'image d'une projection  $P \in \mathcal{L}(\Xi)$  est isotropique si et seulement si  $P^*JP = 0$ , et est lagrangien si et seulement si  $I - P = J^*P^*J$*
- (2) *On désigne par  $P_{\kappa}$  la projection spectrale de  $K$  pour  $\kappa \in Sp(K)$ . Alors,  $JP_{\kappa}J^* = P_{-\bar{\kappa}}^*$  et en particulier  $P_{\kappa}$  est isotropique si et seulement si  $\kappa \notin i\mathbb{R}$ .*
- (3) *Soit  $\Sigma \subset Sp(K)$  tel que  $\Sigma \cap (-\bar{\Sigma}) = \emptyset$ . Alors le sous espace spectral de  $K$  pour  $\Sigma$  est isotropique.*

*Démonstration.* Notons que  $JK + K^*J = 0$ , ce qui implique que le spectre de  $K$ , y compris les multiplicités est symétrique par rapport à l'axe des imaginaires. Si  $Sp(K) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ , alors les sous espace de  $K$  pour  $\Sigma = Sp(K) \cap \mathbb{C}_+$  est de dimension  $D$  et donc à partir du lemme précédent (3) est lagrangien. D'où provient Théorème 3.3.11 (voir Théorèmes 7.4.2 et 7.5.1 [60])  $\square$

On déduit le résultat suivant :

**Corollaire 3.3.13.** *Si  $Sp(K) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ , alors  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C) \neq \emptyset$ .*

**Remarque 3.3.14.** *Dans les cas où  $Sp(K) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ , et sous l'hypothèse de contrôlabilité, une condition nécessaire et suffisante de l'existence de la solution auto-adjointe est que tous les blocs de Jordan de  $K$  correspondants à des valeurs propres dans  $i\mathbb{R}$  sont de dimensions paires.*

Un autre critère puissant pour l'existence des solutions auto-adjointes est le suivant :

**Théorème 3.3.15** (Théorème 9.11 [60]). *S'il existe  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  auto-adjoint tel que  $\mathcal{R}(X) \leq 0$ , alors  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C) \neq \emptyset$ .*

### 3.3.3 Solutions extrêmes

L'ensemble  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  hérite l'ordre partiel de  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Une solution minimale (resp. maximale) de l'équation (3.3.3) est un élément minimal (resp. maximal) de  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ .

**Théorème 3.3.16.** *Supposons que  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C) \neq \emptyset$*

- (1)  *$S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  contient un élément minimal  $X_-$  et un élément maximal  $X_+$ . Par la suite, on pose  $D_{\mp} = A - BX_{\mp}$ .*
- (2)  *$X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  est solution maximale si et seulement si  $Sp(A + Bx) \subset \bar{\mathbb{C}}_+$ .*
- (3)  *$X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  est solution minimale si et seulement si  $Sp(A + Bx) \subset \bar{\mathbb{C}}_-$ .*

$$(4) S_{\mathcal{R}}(A, B, C) = X_- + S_{\mathcal{R}}(D_-, B, 0) = X_+ - S_{\mathcal{R}}(D_+, B, 0).$$

(5)  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  est compacte.

*Démonstration.* (1) i) Soit  $X$  une solution de l'équation (3.3.3). Soit  $\tilde{A} = A + BX$  et

$$U(t) = -T_t(\tilde{A}, B) = - \int_0^t e^{-\tau\tilde{A}} B e^{-\tau\tilde{A}^*} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme  $(A, B)$  est contrôlable, alors  $(\tilde{A}, B)$  l'est aussi. Alors Lemme 3.2.2 est applicable ici et on a

$$\begin{cases} U(t) \text{ définie positive pour } t < 0 \\ U(t) \text{ définie négative pour } t > 0. \end{cases}$$

Alors  $U(t_1) \leq U(t_2)$  pour  $t_1 \geq t_2$  et d'où  $U(t_1)^{-1} \geq U(t_2)^{-1}$  pour  $0 > t_1 \geq t_2$ . Il provient que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)$  existe. En effet cette limite peut être déterminé de façon unique par

$$\left\langle \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)^{-1} x, x \right\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle U(t)^{-1} x, x \rangle, \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}^n$$

où l'existence de la limite dans le coté est assurée par Lemme 3.2.2. De plus,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)^{-1}$  est demi définie positive. Pour tout  $T > 0$  et  $t < T$ , on définit

$$X_T(t) = X + (U(t - T))^{-1}.$$

Comme  $X_T(t) = [XU(t - T) + I]U(t - T)^{-1}$ , il provient que  $X_T(t)$  est inversible pour  $t \in [T - \delta, T]$  où  $\delta > 0$  petit. Et comme  $U(0) = 0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow T} X_T(t)^{-1} = 0$ . Un calcul simple nous donne, en utilisant le fait que  $X = X^*$  est solution de l'équation (3.3.3) et que  $U(t)$  satisfait l'équation différentielle

$$U(t)' = -\tilde{A}U(t) - U(t)\tilde{A} = 0, \quad (3.3.5)$$

on peut facilement vérifier que  $X_T(t)$  satisfait l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$X_T(t)' + C - X_T(t)A - A^*X_T(t) - X_T(t)BX_T(t) = 0, \quad t < T. \quad (3.3.6)$$

L'équation (3.3.6) avec la condition aux limites  $\lim_{t \rightarrow T} X_T(t)^{-1} = 0$ , détermine  $X_T(t)$  d'une façon unique comme une quantité indépendante du choix de la solution  $X$  de l'équation (3.3.3). En effet, soit  $V_T(t) = X_T(t)^{-1}$ . Alors, par la différenciation de l'équation

$$X_T(t).X_T(t)^{-1} = I,$$

on trouve que

$$V_T(t)' = -V_T(t) - X_T(t)'V_T(t)$$

et en utilisant l'équation (3.3.6),  $V_T(t)$  satisfait l'équation différentielle

$$-V_T(t)' + V_T(t)CV_T(t) - AV_T(t) - V_T(t)A^* - B = 0,$$

pour  $T - \delta < t < T$  (c'est l'intervalle où l'inversibilité de  $X_T(t)$  est garantie). Alors  $V_T(t)$  satisfait la condition initiale  $\lim_{t \rightarrow T} V_T(t) = 0$ . D'où par le théorème d'unicité des solutions du problème avec valeur initiale on trouve que  $V_T(t)$  et donc  $X_T(t)$  sont déterminés de façon unique et indépendantes du choix de  $X$ , pour  $T - \delta < \delta_0 < t < T$ . Ici  $\delta_0 \leq \delta$  est un entier positif. Mais donc, sans perte de généralité,  $X_T(t)$  est déterminée de façon unique pour tout  $t < T$  (par l'équation de  $X_T(t)$ ). Quand  $T \rightarrow \infty$ , la fonction matricielle  $X_T(t)$  converge uniformément sur des intervalles compacte vers la matrice constante

$$X_+ = X + \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)^{-1}. \quad (3.3.7)$$

$X_+$  est bien sûr indépendante du choix de  $X$ . L'équation (3.3.7) implique que  $X_+ = X_+^*$  et que  $X \leq X_+$ . En plus,

$$\begin{aligned} X_T'(t) &= \frac{d(U(t-T))^{-1}}{dt} \\ &= -U(t-T)^{-1} \cdot \frac{dU(t-T)}{dt} (U(t-T))^{-1} \\ &= U(t-T)^{-1} [\tilde{A}U(t-T) + U(t-T)\tilde{A}^* + B]U(t-T)^{-1} \\ &= U(t-T)^{-1} \tilde{A} + \tilde{A}U(t-T)^{-1} + U(t-T)^{-1}BU(t-T)^{-1} \end{aligned}$$

possède une limite quand  $T \rightarrow \infty$ , avec  $t$  fixé. Comme la fonction  $U(t - T)^{-1}$  possède une limite quand  $T \rightarrow \infty$  (et  $t$  fixé), alors il provient que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} X'_T(t) = 0.$$

Pour  $t$  fixé, passant à la limite quand  $T \rightarrow \infty$  de l'équation (3.3.6), on trouve que  $X \leq X_+$  pour tout  $X$  solution de l'équation (3.3.3), alors  $X_+$  est maximale.

ii) On raisonne de la même manière pour la solution minimale.

- (2) Soit  $X$  et  $Y$  deux solutions de l'équation (3.3.3) tel que  $\text{sp}(A + BX) \subset \mathbb{C}_+$ . Il provient que  $Z = X - Y$  satisfait l'équation

$$ZBZ = Z(A + BX) + (A + BX)^*Z,$$

et d'où on a

$$\frac{d}{dt} e^{t(A+BX)^*} Z e^{t(A+BX)} = e^{t(A+BX)^*} ZBZ e^{t(A+BX)}.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{t(A+BX)} = 0$ , on peut conclure que

$$Z = \int_{-\infty}^0 e^{t(A+BX)^*} ZBZ e^{t(A+BX)} dt \geq 0.$$

Si  $A, B, C$  sont réels, alors  $\bar{X}$  est aussi solution auto adjointe de l'équation (3.3.3) et on a  $\bar{X} \leq X$ . Il provient que  $X \leq \bar{X}$  et donc  $X = \bar{X}$ .

- (3) On raisonne de la même manière que l'assertion précédente.  
 (4) Découle de certaines propriétés algébriques.  
 (5) Comme  $X \mapsto \mathcal{R}(X)$  est continue,  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  est fermé. Ses limites proviennent de partie (4) et le fait que

$$\|X - X_-\| = \text{tr}(X - X_-) \leq \text{tr}(X_+ - X_-),$$

pour tout  $X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ . Le théorème de Heine-Borel nous donne donc le résultat.

□

### 3.3.4 Le gap

Dans la suite, nous supposons que  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C) \neq \emptyset$  et nous utiliserons les notations introduites dans le Théorème 3.3.3.

**Définition 3.3.17.** *Nous désignons par le gap associé à une équation de Riccati, l'élément non négatif égal à la différence entre ses éléments maximal et minimal.*

Le gap de l'équation (3.3.3) est l'élément non négatif de  $L(\mathcal{X})$  défini par  $Y = X_+ - X_-$ . On pose  $\mathcal{K} = \ker(Y)$  et nous obtenons  $\mathcal{K}^\perp = \text{Ran } Y$ . Pour  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , on définit

$$D_X = A - BX.$$

**Théorème 3.3.18.** [60]

- (1) *Pour  $X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ ,  $\mathcal{K}$  est le sous espace spectral de  $D_X$  pour  $Sp(D_X) \cap i\mathbb{R}$  et  $\mathcal{K}^\perp$  est le sous espace spectral de  $D_X^*$  pour  $Sp(D_X^*) \setminus i\mathbb{R}$ . De plus,  $D_{X \setminus \mathcal{K}}$  est indépendant de  $X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ .*
- (2) *L'application  $X \mapsto \text{Ker } X$  est une bijection de  $\mathcal{R}(D_-, B, 0)$  sur l'ensemble de tous les sous espaces  $D$ -invariants, contenant le sous espace spectral de  $D_-$  associé à la partie de son spectre dans  $i\mathbb{R}$ . De plus  $X \leq X'$  si et seulement si  $\text{Ker } X' \subset \text{Ker } X$ .*
- (3) *Si  $\mathcal{R}(X) \leq 0$  pour  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  auto-adjoint, alors  $X_- \leq X \leq X_+$ .*
- (4) *Si  $\mathcal{R}(X) < 0$  pour  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  auto-adjoint, alors  $Sp(K) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ .*

*Démonstration.* (1) La première et dernière assertions sont celle du théorèmes 7.5.3 dans [60]. La deuxième assertion est similaire à la première.

(2) C'est un cas spécial du Théorème 1 dans [76]

(3) Théorème 14(b) dans [76].

(4) La première assertion dans Théorèmes 9.1.3 de [60].

□

**Remarque 3.3.19.** Notons que Théorème 3.3.11 implique que pour  $X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ , on a :

$$-KG_X = G_X D_X,$$

de sorte que  $Sp(D_X) = Sp(-K|_{\mathcal{G}(X)})$ . Chaque fois que  $Sp(K) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ , il provient que  $Sp(D_X) \cap i\mathbb{R} = i\mathbb{R} = \emptyset$  et donc  $\mathcal{K} = \{0\}$  et  $Y > 0$ . Par partie (3) du Théorème 3.3.3, on a  $Sp(D_+) \subset \mathbb{C}_-$  de sorte que  $G_{X_+}$  est le sous espace spectral de  $K$  de la partie de son spectre dans  $\mathbb{C}_-$ .

### 3.3.5 Equations de Riccati réelle et solutions réelles

Dans cette section, on suppose que  $h$  est un espace de Hilbert de dimension  $d$  et  $(A, B, C)$  un triplet d'éléments de  $L(h)$  tel que  $(A, B)$  contrôlable,  $B > 0$  et  $C$  auto-adjoint. On désigne par  $\mathcal{H} = \mathbb{C}h$  la complexification de  $h$  équipée de sa structure Hilbertienne naturelle. Les extensions  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $A$ ,  $B$  et  $C$  et qu'on note par les mêmes symboles sont de sorte que  $(A, B)$  est contrôlable,  $B \geq 0$  et  $C$  auto-adjoint sur  $h$ . Soit  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  l'ensemble des solutions auto-adjointes de (3.3.3), interprétée comme équation de Riccati dans  $L(\mathcal{X})$  et on définit

$$S_{\mathcal{R}}^{\mathbb{R}}(A, B, C) = \{X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C) | X = \bar{X}\}.$$

Il est clair que  $S_{\mathcal{R}}^{\mathbb{R}}(A, B, C)$  est l'ensemble des solutions auto-adjointes réelles de l'équation (3.3.3), vue en tant que équation de Riccati sur  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ .

**Théorème 3.3.20.** (1) Si  $S_{\mathcal{R}}(A, B, C) \neq \emptyset$  alors son élément minimal/maximal est réel et donc coïncide avec l'élément minimal/maximal de  $S_{\mathcal{R}}^{\mathbb{R}}(A, B, C)$ . ;

(2) Sous la même hypothèse, le gap  $Y = X_+ - X_-$  est réel et donc de même pour  $\mathcal{K} = \text{Ker} Y$ . ;

(3) Pour  $X \in S_{\mathcal{R}}^{\mathbb{R}}(A, B, C)$ ,  $\mathcal{K}$  est le sous espace spectral de  $D_X$  pour  $Sp(D_X) \cap i\mathbb{R}$  et  $\mathcal{K}^{\perp}$  est le sous espace spectral de  $D_X^*$  pour  $Sp(D_X^*) \setminus i\mathbb{R}$ . De plus,  $D_X|_{\mathcal{K}}$  est indépendant de  $X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ .

*Démonstration.* Afin de prouver la partie (1), notons que  $\bar{X} \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  quand  $X \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$ . En particulier, on a  $\bar{X}_+ \in S_{\mathcal{R}}(A, B, C)$  et donc  $X_+ - \bar{X}_+ \geq 0$ . Il en suit que

$$\|X_+ - \bar{X}_+\| = \text{tr}(X_+ - \bar{X}_+) = \text{tr}(X_+ - X_+^*) = 0.$$

Les assertions restantes sont des conséquences simples des réalités de  $X_{\pm}$ . □

Les résultats et les propriétés mentionnés tout au long de ce chapitre seront utiles et à la base du travail principal de cette thèse.

## PGD et relations de fluctuations détaillés

Ce chapitre rassemble tous les résultats principaux de cette thèse. C'est une version révisée du travail présenté dans [19]. Nous nous servons des différents outils et résultats de la théorie des grandes déviations et de la théorie du contrôle, convenablement exposés dans Chapitre 2 et Chapitre 3. Nous entamons ce chapitre par une description de notre système physique.

### 4.1 Modèle physique

#### 4.1.1 Configuration

Nous nous intéressons à une collection, indexée par un ensemble fini  $\mathcal{I}$ , d'oscillateurs harmoniques unidimensionnels de coordonnées :

- Position  $q = (q_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ,
- Impulsion  $p = (p_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .

L'espace de configuration  $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$  est doté de sa structure euclidienne et l'espace de phase  $\Gamma = \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \oplus \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$  est équipé de sa structure symplectique canonique.

Le Hamiltonian de ce système est de la forme quadratique

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}|\kappa q|^2,$$

avec  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne et  $\kappa$  un automorphisme de  $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ .

Outre les forces harmoniques conservatrices qui dérivent de cet Hamiltonien, un sous-ensemble des oscillateurs, indexé par  $\partial\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ , est relié à des réservoirs thermiques. L'action de ces réservoirs sur les oscillateurs associés sont décrites par les forces de Langevin

$$f_i(p, q) = (2\gamma_i\vartheta_i)^{\frac{1}{2}}\dot{w}_i - \gamma_i p_i, \quad (i \in \partial\mathcal{I}) \quad (4.1.1)$$

où :

- $\vartheta_i > 0$  température du  $i^{\text{ème}}$  réservoirs,
- $\gamma_i > 0$  la taux de dissipation d'énergie,
- $\dot{w}_i$  bruit blanc standard.

On interprète le travail effectué par la force de Langevin  $f_i$  durant un intervalle de temps  $[0, t]$  comme étant la quantité de chaleur injectée par le  $i^{\text{ème}}$  réservoir durant cette période et on le définit sous la forme intégrale d'Itô

$$\Phi_i(t) = \int_0^t \left[ (2\gamma_i\vartheta_i)^{\frac{1}{2}} p_i(s) \dot{w}_i(s) + \gamma_i (\vartheta_i - p_i(s)^2) \right] ds \quad (4.1.2)$$

Nous conviendrons les notations suivantes :

**Notation 4.1.1.** •  $\Xi = \mathbb{R}^{\partial\mathcal{I}}$  est l'espace vectoriel dans lequel les flux de chaleur  $\Phi(t) = (\Phi_i(t))_{i \in \partial\mathcal{I}}$  prennent valeurs.

- On associe à  $\Xi$  le produit scalaire euclidien défini par

$$\langle \xi, \Phi \rangle = \sum_{i \in \partial\mathcal{I}} \xi_i \Phi_i, \quad \xi \in \Xi$$

Introduisons l'application linéaire  $\iota \in L(\mathbb{R}^{\partial\mathcal{I}}, \mathbb{R}^{\mathcal{I}})$  définie par

$$\iota : (u_i)_{i \in \partial\mathcal{I}} \mapsto (\sqrt{2\gamma_i} u_i)_{i \in \partial\mathcal{I}} \oplus 0_{\mathbb{R}^{\mathcal{I} \setminus \partial\mathcal{I}}},$$

et l'application linéaire  $\vartheta \in L(\mathbb{R}^{\partial\mathcal{I}}, \mathbb{R}^{\partial\mathcal{I}})$  définie par

$$\vartheta : (u_i)_{i \in \partial\mathcal{I}} \mapsto (\vartheta_i u_i)_{i \in \partial\mathcal{I}}.$$

On pose

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \kappa q \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\iota^* & -\kappa^* \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \iota \\ 0 \end{bmatrix} \vartheta^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1.3)$$

L'énergie interne du réseau est alors écrite  $h(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ . On rappelle que sa dynamique est décrite par le système d'équations différentielles Stochastiques d'Itô (EDS d'Itô) :

$$dx(t) = Ax(t)dt + Qdw(t), \quad (4.1.4)$$

où  $w$  désigne un processus de Wiener standard à valeurs dans  $\Xi$ .

La solution du problème de Cauchy associé à l'équation (4.1.4), à la condition initiale  $x(0) = x_0$ , peut être écrite explicitement comme

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Qdw(s). \quad (4.1.5)$$

Cette relation définit une famille de processus de Markov à valeurs dans  $\Gamma$ , indexés par la condition initiale  $x_0 \in \Gamma$ . Le générateur de ce processus de diffusion dégénérée est donné par

$$L = \frac{1}{2}\nabla \cdot B\nabla + Ax \cdot \nabla, \quad (4.1.6)$$

où  $B = QQ^*$ . On admettra les notation suivantes :

**Notation 4.1.2.** • *On note  $\mathbb{P}_{x_0}$  la mesure de probabilité induite sur l'espace de chemin  $C([0, \infty[, \Gamma)$  et  $\mathbb{E}_{x_0}$  l'espérance fonctionnelle correspondante.*

- *Pour  $\nu$  mesure de probabilité sur  $\Gamma$ , nous définissons  $\mathbb{P}_\nu = \int \mathbb{P}_x \nu(dx)$  et similairement  $\mathbb{E}_\nu$ .*

Notre système physique est un système dynamique mesuré avec excitation stochastique. On se retrouve dans le domaine ergodique et par la suite nous pourrons nous servir des propriétés de continuités.

Les relations structurelles suivantes seront utiles ultérieurement :

**Notation 4.1.3.** • *Nous avons*

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A - A^*) &= \{0\}, & A + A^* &= -Q\vartheta^{-1}Q^*, \\ Q^*Q &> 0, & [\vartheta, Q^*Q] &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

- En notant  $\theta$  l'involution par inversion du temps  $(p, q) \mapsto (-p, q)$  de  $\Gamma$ , nous avons

$$\theta = \theta^* = \theta^{-1}, \quad \theta Q = -Q, \quad \theta A \theta = A^*. \quad (4.1.8)$$

- Soit

$$\Omega = \frac{1}{2}(A - A^*),$$

Nous avons également

$$\theta B \theta = B^* = B, \quad \theta \Omega \theta = \Omega^* = -\Omega. \quad (4.1.9)$$

Dans la suite, nous supposons la contrôlabilité du système (4.1.4) :

**Hypothèse 4.1.4.** (*Condition de Kalman*)

*Le couple  $(A, Q)$  est contrôlable.*

**Remarque 4.1.5.** *Sous cette hypothèse, le processus (4.1.5) admet une mesure invariante unique qui est la mesure gaussienne centrée sur  $\Gamma$  avec covariance*

$$M = \int_0^\infty e^{sA} B e^{sA^*} ds, \quad (4.1.10)$$

*qui se caractérise également par la solution unique de l'équation de Lyapunov  $AM + MA^* + B = 0$ .*

**Remarque 4.1.6.** *Si l'environnement est en équilibre thermique à la température  $T_0 > 0$ , c'est-à-dire si  $\vartheta = T_0 I_\Xi$ , alors  $M = T_0 I_\Gamma$  et  $\mu$  est la mesure de Gibbs  $\mu(dx) \propto e^{-h(x)/T_0} dx$ .*

#### 4.1.2 Analogie : Production d'entropie et flux de chaleur

Les résultats de cette thèse présentent une poursuite des travaux établis dans [56]. Nous allons interpréter le travail défini dans l'équation (4.1.2), effectué par la force de Langevin pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$  comme la quantité de chaleur injectée dans le réseau par le  $i^{\text{ème}}$  réservoir pendant cette période. Jaksic et al. dans [56], ont montré un PGD et des relations de fluctuation étendues pour la quantité totale

d'entropie dissipée dans les réservoirs, c'est-à-dire l'entropie produite par le réseau

$$\mathfrak{S}(t) = -\langle \vartheta^{-1}, \Phi(t) \rangle.$$

Rappelons brièvement ces résultats. En supposant la condition de Kalman donnée par Hypothèse 4.1.4, la famille  $\{\mathfrak{S}(t)\}_{t \geq 0}$  satisfait un PGD global avec une bonne fonction taux  $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ , c'est-à-dire que pour tout ensemble de Borel  $S \subset \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} -\inf_{s \in \dot{S}} I(s) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1} \mathfrak{S}(t) \in S] \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1} \mathfrak{S}(t) \in S] \\ &\leq -\inf_{s \in \bar{S}} I(s) \end{aligned}$$

où  $\dot{S}$  et  $\bar{S}$  désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de  $S$ . Le taux de production moyenne d'entropie

$$\text{ep} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}_\mu[\mathfrak{S}(t)] \quad (4.1.11)$$

existe et est non négative. Chaque fois que  $\text{ep} > 0$ , la fonction de taux satisfait la relation de fluctuation

$$I(-s) - I(s) = s \quad (4.1.12)$$

pour  $|s| \leq \text{ep}$ . Cependant, cette relation universelle échoue pour  $|s| > \text{ep}$ . plus précisément, une relation de fluctuation étendue dépendant du modèle est vérifiée (voir [JPS, section 3.7]). Notre objectif ici est de dériver un PGD et des RF pour les flux de chaleur individuels  $\Phi(t) = (\Phi_i(t))_{i \in \partial \mathcal{I}}$ . Afin de motiver notre approche, nous esquissons un argument naïf qui conduit aux résultats souhaités. Nous allons nous servir du théorème de Gärtner-Ellis (Section 2.2.2) qui est une voie d'accès bien connue au PGD. Pour suivre le théorème de Gärtner-Ellis, il faut montrer l'existence et certaines propriétés de régularité de la limite dans un grand temps

$$e(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g_t(\xi) \quad (4.1.13)$$

de la fonction génératrice de cumulant

$$g_t(\xi) = \log \mathbb{E}_\mu \left[ e^{\langle \xi, \Phi(t) \rangle} \right]. \quad (4.1.14)$$

Nous calculons

$$\langle \xi, \Phi \rangle = \sum_{i \in \partial \mathcal{I}} \xi_i \Phi_i, \quad \xi \in \Xi,$$

avec  $\Phi_i$  est donnée par l'équation (4.1.2) : en utilisant l'équation (4.1.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \xi, \Phi(t) \rangle &= \frac{t}{2} \operatorname{tr}(Q\xi Q^*) \\ &+ \int_0^t \left[ x(s) \cdot Q\xi dw(s) - \frac{1}{2} x(s) \cdot Q\vartheta^{-1/2} \xi \vartheta^{-1/2} Q^* x(s) ds \right]. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} d(e^{\langle \xi, \Phi(t) \rangle} f(x(t))) &= e^{\langle \xi, \Phi(t) \rangle} [(L_\xi f)(x(t)) dt \\ &+ \langle \xi Q^* x(t) f(x(t)) + Q^* \nabla f(x(t)), dw(t) \rangle], \end{aligned}$$

où

$$L_\xi = \frac{1}{2} \nabla \cdot B \nabla + A_\xi x \cdot \nabla - \frac{1}{2} x \cdot C_\xi x + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Q\xi Q^*),$$

est une déformation linéaire du générateur de Markov (4.1.6), les matrices  $A_\xi$  et  $C_\xi$  étant données par

$$A_\xi = A + Q\xi Q^*, \quad C_\xi = Q\xi(\vartheta^{-1} - \xi)Q^*. \quad (4.1.15)$$

Une application de la formule de Girsanov donne :

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{\langle \xi, \Phi(t) \rangle} f(x(t)) \right] = (e^{tL_\xi} f)(x),$$

et en particulier

$$\mathbb{E}_\mu \left[ e^{\langle \xi, \Phi(t) \rangle} \right] = (e^{tL_\xi} 1)(x) \mu(dx)$$

et donc

$$g_t(\xi) = \log \int (e^{tL_\xi} 1)(x) \mu(dx).$$

Étant donné la forme spécifique de  $L_\xi$  et le fait qu'il génère un semi-groupe qui préserve la positivité, il devient naturel de rechercher un vecteur propre  $\Psi_\xi$  à sa valeur propre dominante  $\lambda_\xi = \max_{\lambda \in \text{sp}(L_\xi)} \text{Re } \lambda$  de la forme gaussienne

$$\Psi_\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x \cdot X_\xi x}.$$

Un simple calcul montre que le problème des valeurs propres se réduit en l'équation algébrique de Riccati suivante pour une matrice symétrique  $X$ ,

$$\mathcal{R}_\xi(X) \equiv XBX - XA_\xi - A_\xi^*X - C_\xi = 0, \quad (4.1.16)$$

et la relation

$$\lambda_\xi = \frac{1}{2} \text{tr}(Q\xi Q^* - BX_\xi)$$

où  $X_\xi$  désigne la solution maximale de (4.1.16). A partir des relations structurelles (4.1.7)–(4.1.9) et du fait que  $[\xi, \vartheta] = 0$  on peut déduire facilement que l'adjoint formel  $L_\xi^*$  de  $L_\xi$  est donné par

$$L_\xi^* = \Theta L_{\vartheta^{-1}-\xi} \Theta, \quad (4.1.17)$$

où  $\Theta$  est défini par  $\Theta f = f \circ \theta$ . Supposons que  $L_\xi$  ait un spectre non-vide. Dans ce cas, on obtient

$$\int (e^{tL_\xi} 1)(x) \mu(dx) = e^{t\lambda_\xi} (d_\xi + o(1))$$

comme  $t \rightarrow \infty$ , et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g_t(\xi) = \lambda_\xi,$$

à condition que le pré-facteur

$$\begin{aligned} d_\xi &= \frac{\int \Psi_{\vartheta^{-1}}(\theta x) \Psi_{\vartheta^{-1}-\xi}(\theta y) \Psi_\xi(x) dx dy}{\int \Psi_{\vartheta^{-1}}(\theta x) \Psi_{\vartheta^{-1}-\xi}(\theta y) \Psi_\xi(y) dx dy} \\ &= \frac{\det(X_{\vartheta^{-1}})^{1/2} \det(X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}-\xi} \theta)^{1/2}}{\det(X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}} \theta)^{1/2} \det(X_{\vartheta^{-1}-\xi})^{1/2}} \end{aligned}$$

est fini et positif. A partir de l'équation (4.1.17), découle la RF

$$\lambda_{\vartheta^{-1}-\xi} = \lambda_\xi \quad (4.1.18)$$

En supposant que la fonction génératrice de cumulant limite  $\xi \mapsto \lambda_\xi$  définie soit partout différentiable sur  $\Xi$ , le théorème de Gärtner-Ellis donne le PGD

$$\begin{aligned} - \inf_{\varphi \in \dot{F}} I(\varphi) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1}\Phi(t) \in F] \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1}\Phi(t) \in F] \\ &\leq - \inf_{\varphi \in \bar{F}} I(\varphi), \end{aligned}$$

où  $\dot{F}/\bar{F}$  désigne, respectivement, l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble de Borel  $F \subset \Xi$ , la fonction de taux étant donnée par la transformation de Legendre suivante

$$I(\varphi) = \sup_{\xi \in \Xi} (\langle \xi, \varphi \rangle - \lambda_\xi).$$

Ainsi, la relation (4.1.18) se traduit en une RF

$$I(-\varphi) - I(\varphi) = -\langle \vartheta^{-1}, \varphi \rangle, \quad (4.1.19)$$

où nous reconnaissons, à droite, le taux de production d'entropie correspondant au flux de chaleur  $\varphi$ .

La dérivation formelle ci-dessus pose plusieurs problèmes. En particulier, nous ne pouvons pas nous attendre à ce que les relation de fluctuation (4.1.19) et (4.1.18)) soient valables pour toutes les valeurs de  $\varphi \in \Xi$  (resp. pour toutes les valeurs de  $\xi \in \Xi$ ). Voilà pourquoi : selon le principe de contraction, la validité de l'équation (4.1.19) pour tout  $\varphi \in \Xi$  entraînerait la validité de l'équation (4.1.12) pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , ce qui est en contradiction avec le résultat évoqué dans [56].

La contribution principale de cette thèse est de fournir une preuve rigoureuse d'un PGD pour les flux de chaleur, une formule explicite pour la fonction de taux  $I$  et une description du domaine de validité de la relation universelle (4.1.19).

## 4.2 Résultats

### 4.2.1 Principe de grandes déviations pour les flux de chaleur

#### 4.2.1.1 Fonction génératrice des cumulants

Dans ce paragraphe, nous formulons d'abord la relation balance détaillée généralisée (voir [34, Section 4.3] et [9, Section 2.2]) qui joue un rôle central dans notre analyse. Ensuite nous énonçons notre résultat principal sur l'asymptotique dans le temps de la fonction génératrice des cumulants (4.1.14).

**Proposition 4.2.1.** *Etant donné  $\xi \in \Xi$ , nous écrivons  $\tilde{\xi} \triangleright \xi$  chaque fois que  $\tilde{\xi} \in L(\Gamma)$  auto-adjoint et satisfait*

$$\tilde{\xi}Q = Q\xi, \quad \theta\tilde{\xi}\theta = \tilde{\xi}. \quad (4.2.1)$$

A un tel  $\tilde{\xi}$ , on associe la forme quadratique

$$Q_{\tilde{\xi}}(x) = \frac{1}{2}x \cdot \tilde{\xi}x,$$

et

$$\sigma_{\tilde{\xi}}(x) = \frac{1}{2}x \cdot \Sigma_{\tilde{\xi}}x, \quad \Sigma_{\tilde{\xi}} = [\Omega, \tilde{\xi}],$$

et la mesure  $\mu_{\tilde{\xi}}$  on  $\Gamma$  définie par

$$\frac{d\mu_{\tilde{\xi}}}{dx}(x) = e^{-Q_{\tilde{\xi}}(x)}.$$

Ensuite, les assertions suivantes sont vérifiées :

(1)  $\mu_{\tilde{\xi}}$  et  $\sigma_{\tilde{\xi}}$  satisfait

$$\mu_{\tilde{\xi}} \circ \theta = \mu_{\tilde{\xi}}, \quad \sigma_{\tilde{\xi}} \circ \theta = -\sigma_{\tilde{\xi}}.$$

(2) Soit  $L^{\tilde{\xi}}$  l'adjoint formel du générateur de Markov (4.1.6) par rapport au produit scalaire de l'espace de Hilbert  $L^2(\Gamma, \mu_{\tilde{\xi}})$ . Alors la relation de balance détaillée généralisée

$$\Theta L^{\tilde{\xi}} \Theta = L + \sigma_{\tilde{\xi}}$$

reste vraie.

(3) Il existe  $\tilde{\xi} \in L(\Gamma)$  satisfaisant (4.2.1) et tel que  $\Sigma_{\tilde{\xi}} = 0$  si et seulement si

$$e^{-\mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x)} L_{\eta} e^{\mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x)} = L_{\eta+\xi}$$

est valable pour tout  $\eta \in \Xi$ . De plus, sous Hypothèse 4.1.4 un tel  $\tilde{\xi}$ , s'il existe, est unique et satisfait

$$\text{sp}(\tilde{\xi}) = \text{sp}(\xi).$$

(4) La fonctionnelle donnée par (??) peut s'écrire comme

$$\langle \xi, \Phi(t) \rangle = \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x(t)) - \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x(0)) + \int_0^t \sigma_{\tilde{\xi}}(x(s)) ds.$$

Etant donné la structure de l'application  $Q$  et la nature diagonale de  $\xi$ , l'existence de  $\tilde{\xi} \in L(\Gamma)$  satisfaisant (4.2.1) est évidente. Outre la partie (3), la preuve de la proposition précédente est identique à la preuve élémentaire de Proposition 3.5 dans [56] et nous l'admettons. La première assertions de (3) résulte d'un calcul explicite. On vérifie facilement que  $\Sigma_{\tilde{\xi}} = 0$  est équivalente à  $[A, \tilde{\xi}] = 0$ , ce qui implique que  $\tilde{\xi} A^n Q = A^n Q \xi$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi, Hypothèse 4.1.4 donne immédiatement l'unicité de  $\tilde{\xi}$ . De même, on déduit de la relation  $(\tilde{\xi} - z)^{-1} A^n Q = Q A^n (\xi - z)^{-1}$ , évidemment valable pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , que  $\tilde{\xi}$  et  $\xi$  ont le même spectre.

**Théorème 4.2.2.** *Sous l'hypothèse de kalman 4.1.4, on a*

(1) Pour  $\xi \in \Xi$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ , l'opérateur

$$E_{\xi}(\omega) = Q^*(A^* - i\omega)^{-1} \Sigma_{\tilde{\xi}} (A + i\omega)^{-1} Q \quad (4.2.2)$$

est auto-adjoint sur la complexification de  $\Xi$  et ne dépend pas du choix de  $\tilde{\xi} \triangleright \xi$ . De plus, l'application  $\mathbb{R} \times \Xi \ni (\omega, \xi) \mapsto E_{\xi}(\omega)$  est continue.

(2) L'ensemble

$$\mathcal{D} = \bigcap_{\omega \in \mathbb{R}} \{\xi \in \Xi \mid I - E_{\xi}(\omega) > 0\}$$

est ouvert, convexe, symétrique centralement autour du point  $(2\vartheta)^{-1}$  et contient

$$\mathcal{D}_0 = \{\xi \in \Xi \mid 0 < \xi < \vartheta^{-1}\}.$$

L'espace de linéarité est donné par

$$\mathcal{L} = \bigcap_{\omega \in \mathbb{R}} \{\xi \in \Xi \mid E_\xi(\omega) = 0\} \quad (4.2.3)$$

$$= \{\xi \in \Xi \mid \Sigma_{\tilde{\xi}} = 0 \text{ pour certains } \tilde{\xi} \triangleright \xi\}, \quad (4.2.4)$$

et en particulier  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{L}$ .

(3) La fonction

$$g(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \log \det(I - E_\xi(\omega)) \frac{d\omega}{4\pi},$$

est convexe et réelle analytique sur  $\mathcal{D}$ . Elle est centralement symétrique par rapport au point  $(2\vartheta)^{-1}$  et invariante par translation dans la direction  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire,

$$g(\vartheta^{-1} - \xi) = g(\xi) = g(\xi + \eta) \quad (4.2.5)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{D}$  et  $\eta \in \mathcal{L}$ . En particulier,  $g(0) = g(\vartheta^{-1}) = 0$ .

(4) On a

$$\mathcal{L} = \nabla g(\mathcal{D})^\perp,$$

et l'alternative suivante reste vraie : Soit  $\mathcal{D} = \mathcal{L} = \Xi$  et  $g$  est identiquement nulle, ou bien  $\mathcal{L}^\perp \neq \{0\}$  et  $g$  est strictement convexe sur la section  $\mathcal{S} = \mathcal{D} \cap \mathcal{L}^\perp$ , la fermeture de  $\mathcal{S}$  étant un sous-ensemble convexe compact de  $\mathcal{L}^\perp$ .

(5) Pour  $\xi \in \Xi$ , on définit

$$K_\xi = \begin{bmatrix} -A_\xi & QQ^* \\ C_\xi & A_\xi^* \end{bmatrix}, \quad (4.2.6)$$

où  $A_\xi$  et  $C_\xi$  sont donnés par (4.1.15). Alors  $\mathcal{D}$  est la composante connexe du point  $\xi = 0$  dans l'ensemble

$$\{\xi \in \Xi \mid \text{sp}(K_\xi) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}.$$

De plus, pour tout  $(\omega, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}$  on a

$$\det(K_\xi - i\omega) = |\det(A + i\omega)|^2 \det(I - E_\xi(\omega)).$$

(6) La fonction  $g$  admet une extension continue bornée à l'ensemble fermé  $\overline{\mathcal{D}}$  qui est donnée par

$$g(\xi) = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(Q\vartheta^{-1}Q^*) - \frac{1}{4} \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(K_\xi)} |\operatorname{Re} \lambda| m_\lambda, \quad (4.2.7)$$

où  $m_\lambda$  désigne la multiplicité algébrique de  $\lambda \in \operatorname{sp}(K_\xi)$ .

(7) pour tout  $\xi_0 \in \partial\mathcal{D}$  fini, on a

$$\lim_{\mathcal{D} \ni \xi \rightarrow \xi_0} |\nabla g(\xi)| = \infty.$$

D'où, en posant  $g(\xi) = +\infty$  pour  $\xi \in \Xi \setminus \overline{\mathcal{D}}$  on obtient une fonction essentiellement régulière, essentiellement strictement convexe, fermée, convexe appropriée  $g : \Xi \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ .

(8) Pour tout  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$  l'équation de Riccati (4.1.16) admet une solution maximale auto-adjointe  $X_\xi$ . L'application  $\xi \mapsto X_\xi$  est continue et concave sur  $\overline{\mathcal{D}}$ , et

$$g(\xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Q^*(X_\xi - \tilde{\xi})Q). \quad (4.2.8)$$

De plus, en posant  $D_\xi = A_\xi - BX_\xi$ , le couple  $(D_\xi, Q)$  est contrôlable et  $\operatorname{sp}(D_\xi) = \operatorname{sp}(K_\xi) \cap \overline{\mathbb{C}_-}$ .

*Démonstration.* Pour la preuve du Théorème, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 4.2.3.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert de dimension finie et  $\mathbb{C} = V_- \cup \ell \cup V_+$  une partition du plan en deux demi-plans ouverts  $V_\pm$  et une ligne séparante  $\ell$ . Supposons que  $(\operatorname{sp}(A) \cup \operatorname{sp}(B)) \cap \ell = \emptyset$  et que  $A$  et  $B$  ont le même nombre de valeurs propres répétées dans  $V_+$ . On désigne par  $A_\pm$  et  $B_\pm$  les parties de  $A$  et  $B$  correspondantes à leurs spectres dans  $V_\pm$ . Soit  $K$  un ensemble compact tel que  $(\operatorname{sp}(A) \cup \operatorname{sp}(B)) \cap V_+ \subset K \subset V_+$ . Alors on a les assertions suivantes :

1. La fonction  $f(z) = \log \det ((z - A)^{-1}(z - B))$  est analytique sur  $V_+ \setminus K$ .
2. Pour toute courbe de Jordan  $\gamma$  dans  $V_+ \setminus K$  "englobant"  $K$

$$\oint_{\gamma} f(z) \frac{dz}{2\pi i} = - \oint_{\gamma} z f'(z) \frac{dz}{2\pi i} = \text{tr}(A_+ - B_+). \quad (4.2.9)$$

### Preuve du Lemme 4.2.3

1. par hypothèse, on peut énumérer les valeurs propres répétées de  $A$  et  $B$  de telle sorte que

$$\begin{cases} \text{sp}(A) = \{\lambda_j^+ \mid j \in J\} \cup \{\lambda_i^- \mid i \in I\}, \\ \text{sp}(B) = \{\mu_j^+ \mid j \in J\} \cup \{\mu_i^- \mid i \in I\} \end{cases}$$

avec

$$\lambda_j^+, \mu_j^+ \in K \subset V_+, \quad \lambda_j^-, \mu_j^- \in V_-.$$

En terme de ces valeurs propres, on a

$$\det ((z - A)^{-1}(z - B)) = \left( \prod_{j \in J} \frac{z - \mu_j^+}{z - \lambda_j^+} \right) \left( \prod_{i \in I} \frac{z - \mu_i^-}{z - \lambda_i^-} \right).$$

La transformation de Möbius  $z \mapsto \frac{z-b}{z-a}$  mappe l'intérieur du complément de tout voisinage ouvert du segment de ligne joignant  $a$  à  $b$  à un sous-ensemble ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Il s'ensuit que la fonction  $\log \frac{z-b}{z-a}$  est analytique sur le complément de tout voisinage du segment joignant  $a$  à  $b$ . Ainsi, les fonctions  $z \mapsto \log \frac{z-\mu_j^+}{z-\lambda_j^+}$  et  $z \mapsto \log \frac{z-\mu_i^-}{z-\lambda_i^-}$  sont analytiques sur  $V_+ \setminus K$  et l'est donc  $f(z)$  aussi.

2. La première identité de l'équation (4.2.9) découle d'une intégration par partie. Enfin, notant que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{j \in J} \left( \frac{1}{z - \mu_j^+} - \frac{1}{z - \lambda_j^+} \right) + \sum_{i \in I} \left( \frac{1}{z - \mu_i^-} - \frac{1}{z - \lambda_i^-} \right) \\ &= \text{tr}(z - B)^{-1} - \text{tr}(z - A)^{-1}, \end{aligned}$$

la seconde identité provient de la formule de Riesz

$$\begin{aligned}
 - \oint_{\gamma} z f'(z) \frac{dz}{2\pi i} &= - \operatorname{tr} \left( \oint_{\gamma} z(z - B)^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \right) \\
 &+ \operatorname{tr} \left( \oint_{\gamma} z(z - A)^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \right) \\
 &= \operatorname{tr}(A_+) - \operatorname{tr}(B_+).
 \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.2.4.** *Soient  $A$  et  $B$  définis comme dans Lemme 4.2.3, en prenant  $\ell$  l'axe des imaginaires et  $V_+$  le demi-plan droit. Alors*

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \log \det \left( (i\omega - A)^{-1}(i\omega - B) \right) \frac{d\omega}{4\pi} \\
 &= \frac{1}{4} (\operatorname{tr}(B_+ - B_-) - \operatorname{tr}(A_+ - A_-)).
 \end{aligned}$$

*En particulier, si les spectres de  $A$  et  $B$  sont symétriques par rapport à  $\ell$ , alors  $\operatorname{tr}(A_-) = -\operatorname{tr}(A_+)$  et similairement pour  $B$ , donc*

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \log \det \left( (i\omega - A)^{-1}(i\omega - B) \right) \frac{d\omega}{4\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(B_+ - A_+)) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(B)} |\operatorname{Re}(\lambda)| m_{\lambda} - \frac{1}{4} \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(A)} |\operatorname{Re}(\lambda)| m_{\lambda},
 \end{aligned}$$

où  $m_{\lambda}$  désigne la multiplicité algébriques de la valeur propre  $\lambda$ .

**Preuve du Lemme 4.2.4** On désigne par  $\gamma_R$  la limite orientée positivement de l'intersection du disque de rayon  $R$  centré à 0 avec le demi-plan droit. En appliquant le lemme précédent et en observant que  $f$  est analytique dans un voisinage de  $\ell$  on obtient, pour  $R$  assez grand,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(A_+) - \operatorname{tr}(B_+) &= \oint_{\gamma_R} f(z) \frac{dz}{2\pi i} \\
 &= - \int_{-R}^R f(i\omega) \frac{d\omega}{2\pi} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Pour évaluer la deuxième intégrale du côté droit, nous notons que, comme  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{Re^{i\varphi} - b}{Re^{i\varphi} - a} &= (1 - bR^{-1}e^{-i\varphi})(1 + aR^{-1}e^{-i\varphi} + O(R^{-2})) \\ &= 1 + (a - b)R^{-1}e^{-i\varphi} + O(R^{-2}) \end{aligned}$$

ainsi

$$\log \frac{Re^{i\varphi} - a}{Re^{i\varphi} - b} = (a - b)R^{-1}e^{-i\varphi} + O(R^{-2}),$$

et

$$f(Re^{i\varphi}) = R^{-1}e^{-i\varphi} \operatorname{tr}(A - B) + O(R^{-2}).$$

Il provient que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A - B),$$

et on conclut que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \log \det ((i\omega - A)^{-1}(i\omega - B)) \frac{d\omega}{4\pi} \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tr}(A - B) - \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A_+) - \operatorname{tr}(B_+)) \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{tr}(A_+) + \frac{1}{4} \operatorname{tr}(A_-) + \frac{1}{4} \operatorname{tr}(B_+) - \frac{1}{4} \operatorname{tr}(B_-). \end{aligned}$$

Les deux derniers énoncés découlent de calculs élémentaires.  $\square$

Revenons maintenant à la preuve de Théorème 4.2.2

- (1) Posons  $R(\omega) = \vartheta^{-1}Q^*(A + i\omega)^{-1}Q$ . Hypothèse 4.1.4 implique que  $A$  est stable (voir l'équation (4.1.7)) de sorte que l'application  $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto R(\omega) \in L(\Xi)$  est continue. En utilisant les identités

$$\Omega = A + \frac{1}{2}Q\vartheta^{-1}Q^* = -A^* - \frac{1}{2}Q\vartheta^{-1}Q^*$$

un calcul simple implique que pour tout  $\tilde{\xi} \triangleright \xi \in \Xi$  on a

$$E_{\xi}(\omega) = Q^*(A^* - i\omega)^{-1}[\Omega, \tilde{\xi}](A + i\omega)^{-1}Q \quad (4.2.10)$$

$$= -\zeta R(\omega) - R(\omega)^*\zeta - R(\omega)^*\zeta R(\omega), \quad (4.2.11)$$

avec  $\zeta = \vartheta^{1/2}\xi\vartheta^{1/2}$ . Toutes les propriétés indiquées suivent immédiatement.

- (2) Il sera pratique d'introduire  $U(\omega) = I + R(\omega)$  et de redimensionner  $\xi$  en posant  $\zeta = (\xi_i \vartheta_i)_{i \in \partial \mathcal{I}}$ . Avec ce changement de variable, nous avons

$$I - E_\xi(\omega) = I - F_\zeta(\omega) = I - \zeta + U(\omega)^* \zeta U(\omega),$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \bigcap_{\omega \in \mathbb{R}} \{\zeta \in \Xi \mid I - F_\zeta(\omega) > 0\}, \\ \mathcal{D}_0 &= \{\zeta \in \Xi \mid 0 < \zeta_i < 1, i \in \partial \mathcal{I}\}. \end{aligned}$$

Il découle immédiatement  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ . De plus, comme  $I - F_\zeta(\omega)$  est une fonction affine de  $\zeta$ ,  $\mathcal{D}$  est convexe.

En utilisant (4.1.7), des calculs élémentaires (voir [56, Section 5.5]) montre que, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$U(\omega)^{-1} = U(-\omega) \quad \text{et} \quad |\det(U(\omega))| = 1.$$

La première relation nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} I - F_\zeta(\omega) &= U(\omega)^*(U(-\omega)^*(I - \zeta)U(-\omega) \\ &\quad - (I - \zeta) + I)U(\omega) \\ &= U(\omega)^*(I - F_{I-\zeta}(-\omega))U(\omega), \end{aligned}$$

et la seconde donne  $\zeta \in \mathcal{D} \iff I - \zeta \in \mathcal{D}$ , ce qui montre que  $\mathcal{D}$  admet une symétrie centrale autour du point  $I/2$ . Afin de montrer qu'il est ouvert, on garantit que son complément  $\mathcal{D}^c$  est fermé. Effectivement,  $\xi \in \mathcal{D}^c$  si et seulement s'il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que  $E_\xi(\omega)$  admet une valeur propre  $\lambda \geq 1$ . d'où, si  $\xi_n$  est une suite dans  $\mathcal{D}^c$  qui converge vers  $\xi$ , il existe  $\omega_n \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_n \geq 1$  et des vecteurs unités  $u_n$  tel que  $E_{\xi_n}(\omega_n)u_n = \lambda_n u_n$ . Étant donné le fait que

$$1 \leq \lambda_n \leq \|E_{\xi_n}(\omega_n)\| \leq C(1 + |\omega_n|)^{-2} \leq C < \infty$$

on conclut que

$$|\omega_n| \leq C^{1/2} - 1 \quad \text{et} \quad \lambda_n \in [1, C].$$

Donc la suite  $(\xi_n, \omega_n, \lambda_n, u_n)$  admet une sous suite convergente de limite  $(\xi, \omega, \lambda, u)$  satisfaisant

$E_\xi(\omega)u = \lambda u$ ,  $\lambda \geq 1$  et  $u \neq 0$ . D'où,  $\xi \in \mathcal{D}^c$  et par conséquence  $\mathcal{D}^c$  est fermé.

Si l'application  $\omega \mapsto E_\eta(\omega)$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$ , alors il provient de l'identité  $I - E_{\xi+\lambda\eta}(\omega) = I - E_\xi(\omega)$  que  $\mathcal{D} + \lambda\eta \subset \mathcal{D}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Réciproquement, si la dernière condition est vérifiée, alors pour tout  $\xi \in \mathcal{D}$  et tout  $\lambda > 0$ , on a

$$-\frac{1}{\lambda}(I - E_\xi(\omega)) < E_\eta(\omega) < \frac{1}{\lambda}(I - E_\xi(\omega)).$$

En tendant  $\lambda \rightarrow \infty$  on déduit que  $E_\eta(\omega)$  est identiquement nulle. Notons qu cette dernière condition est satisfaite pour tout  $\eta$  tel qu'il existe  $\tilde{\eta} \triangleright \eta$  with  $\Sigma_{\tilde{\eta}} = 0$ . Il est en particulier le cas pour  $\eta = \mathbf{1}$  et  $\tilde{\eta} = I_\Gamma$ . Réciproquement, comme il suit de l'hypothèse 4.1.4 que l'ensemble  $\{(A + i\omega)^{-1}Qu \mid \omega \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}^{\partial\mathcal{I}}\}$  est totalement dans  $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ , on conclut que  $E_\xi(\omega) = 0$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  implique que  $\Sigma_{\tilde{\xi}} = 0$  pour tout  $\tilde{\xi} \triangleright \xi$ .

(3) Regardons d'abord

$$\mathcal{D} \ni \eta \mapsto -\log \det(I - F_\eta(\omega)) \text{ pour } \omega \in \mathbb{R} \text{ fixée.}$$

La discussion précédente implique clairement qu'il est réel analytique. Sa convexité découle d'un calcul élémentaire qui donne que

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j \in \partial\mathcal{I}} \bar{z}_i \frac{\partial^2 \log \det(I - F_\eta(\omega))}{\partial \eta_i \partial \eta_j} z_j \\ &= \text{tr} \left( (I - F_\eta(\omega))^{-1/2} F_z(\omega)^* (I - F_\eta(\omega))^{-1} F_z(\omega) (I - F_\eta(\omega))^{-1/2} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

pour  $\eta \in \mathcal{D}$  et  $z \in \mathbb{C}^{\partial\mathcal{I}}$ . A partir de (4.2.11) on déduit encore que  $F_\eta(\omega) = O(\omega^{-2})$  quand  $|\omega| \rightarrow \infty$ , localement uniformément dans

$\eta \in \mathcal{D}$ . Il découle que

$$f(\eta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \log \det(I - F_{\eta}(\omega)) \frac{d\omega}{4\pi} = g(\xi)$$

est convexe et réelle analytique sur  $\mathcal{D}$ . L'identité (4.2.12) mène à

$$\det(I - F_{\eta}(\omega)) = \det(I - F_{1-\eta}(-\omega)),$$

et en particulier  $\det(I - F_1(\omega)) = 1$ . Ce qui prouve la première égalité dans (4.2.5). La seconde égalité provient de (4.2.4) et la linéarité de l'application  $\eta \mapsto F_{\eta}$ .

- (4) La deuxième égalité dans (4.2.5) implique que  $\eta \cdot \nabla g(\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in \mathcal{D}$  et tout  $\eta \in \mathcal{L}$ . Afin d'établir la propriété réciproque, il est à noter que comme  $\mathcal{D}$  est ouvert, pour tout  $\xi \in \mathcal{D}$  et tout  $\eta \in \nabla g(\mathcal{D})^{\perp}$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\xi + \alpha\eta \in \mathcal{D}$  pour  $|\alpha| < \epsilon$ . Il en suit que la fonction  $\alpha \mapsto g(\xi + \alpha\eta)$  est constante en un voisinage réel de 0 et donc s'étend par analyticité à la fonction constante sur la ligne  $\xi + \mathbb{R}\eta$ . Puisque, Par la partie (7),  $g$  est singulière sur  $\partial\mathcal{D}$ , il provient que  $\xi + \mathbb{R}\eta \subset \mathcal{D}$ , c.à.d. que  $\eta \in \mathcal{L}$ . Par conséquence,  $g$  est identiquement nulle chaque fois que  $\mathcal{L} = \Xi$ .

Dans le cas opposé, le calcul dans la Partie (3) donne que la Hessienne de  $g$  satisfait

$$\begin{aligned} & \eta \cdot g''(\xi)\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left( \left[ (I - E_{\xi}(\omega))^{-1/2} E_{\eta}(\omega) (I - E_{\xi}(\omega))^{-1/2} \right]^2 \right) \frac{d\omega}{4\pi} \\ &= > 0 \end{aligned}$$

pour  $\eta \notin \mathcal{L}$  non nul. Il en suit que la restriction de  $g''(\xi)$  à  $\mathcal{L}^{\perp}$  est positive définie ce qui implique que la restriction de  $g$  à  $\mathcal{S}$  est strictement convexe. Afin de montrer que la fermeture de  $\mathcal{S}$  est compacte, supposons que  $\mathcal{S}$  est non-borné. Puisque  $\mathcal{S}$  est convexe et symétrique centralement par rapport à la projection orthogonale  $\xi_0$  de  $(2\vartheta)^{-1}$  sur  $\mathcal{L}^{\perp}$ , il en suit que pour  $\xi \in \mathcal{L}^{\perp}$  non nul, on a  $\xi_0 + \lambda\xi \in \mathcal{S}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , c.à.d.,

$$-\frac{1}{|\lambda|}(I - E_{\xi_0}(\omega)) \leq E_{\xi}(\omega) \leq \frac{1}{|\lambda|}(I - E_{\xi_0}(\omega))$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . Posant  $|\lambda| \rightarrow \infty$  implique que  $\xi \in \mathcal{L}$  ce qui contredit le fait que  $0 \neq \xi \in \mathcal{L}^\perp$ .

- (5) On commence par quelques conséquences simples de l'hypothèse 4.1.4 de contrôlabilité. Les outils élémentaires de calculs sont présentés dans Chapitre 3 (aussi on réfère le lecteur à [60, Section 4]). Puisque  $A_\xi = A + Q\xi Q^*$ , le couple  $(A_\xi, Q)$  est contrôlable pour tout  $\xi$ . La relation  $A_\xi^* = -A_{\vartheta^{-1}-\xi}$  montre que de même pour le couple  $(A_\xi^*, Q)$ . Donc, on a

$$\bigcap_{n \geq 0} \text{Ker}(Q^* A_\xi^n) = \bigcap_{n \geq 0} \text{Ker}(Q^* A_\xi^{*n}) = \{0\}$$

pour tout  $\xi$ . Ceci implique que  $Q^*u = 0$  et  $(A_\xi - z)u = 0$  ou bien  $(A_\xi^* - z)u = 0$ , alors  $u = 0$ , c.à.d., aucun vecteur propre de  $A_\xi$  ou  $A_\xi^*$  n'est dans  $\text{Ker } Q^*$ . Supposons que  $z \in \text{sp}(A_\xi)$  et soit  $u \neq 0$  un vecteur propre correspondant. Comme

$$A_\xi + A_\xi^* = 2Q(\xi - (2\vartheta)^{-1})Q^*,$$

en prenant la partie réelle de  $\langle u, (A_\xi - z)u \rangle = 0$  on en déduit

$$\langle Q^*u, (\xi - (2\vartheta)^{-1})Q^*u \rangle = \text{Re}(z)|u|^2.$$

Par suite, la contrôlabilité de  $(A_\xi, Q)$  implique que pour  $\pm(\xi - (2\vartheta)^{-1}) > 0$  on a  $\text{sp}(A_\xi) \subset \mathbb{C}_\pm$  et en particulier  $\text{sp}(A_\xi) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ . D'où, pour  $\xi > (2\vartheta)^{-1}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ , la formule de complément de Schur implique

$$\det(K_\xi - i\omega) = |\det(A_\xi + i\omega)|^2 \det(I + r_\xi(\omega)^* \xi (\vartheta^{-1} - \xi) r_\xi(\omega)) \quad (4.2.12)$$

où on a posé

$$r_\xi(\omega) = Q^*(A_\xi + i\omega)^{-1}Q.$$

Nous vérifions que  $r_\xi(\omega) = r_0(\omega)(I + \xi r_0(\omega))^{-1}$  dont un simple calcul donne

$$\begin{aligned} & I + r_\xi(\omega)^* \xi (\vartheta^{-1} - \xi) r_\xi(\omega) \\ &= (I + r_0(\omega)^* \xi)^{-1} (I - E_\xi(\omega)) (I + \xi r_0(\omega))^{-1}. \end{aligned}$$

En insérant la dernière identité dans le coté droit de (4.2.12) et en utilisant le fait que

$$\det(A_\xi + i\omega) = \det(A + i\omega) \det(I + \xi r_0(\omega)),$$

nous obtenons

$$\det(K_\xi - i\omega) = |\det(A + i\omega)|^2 \det(I - E_\xi(\omega)). \quad (4.2.13)$$

Les deux côtés de cette identité étant polynômiales en  $\xi$ , ils s'étendent à tous les  $\xi \in \Xi$ . Il s'ensuit que

$$\bigcap_{\omega \in \mathbb{R}} \{\xi \in \Xi \mid 1 \notin \text{sp}(E_\xi(\omega))\} = \{\xi \in \Xi \mid \text{sp}(K_\xi) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}.$$

Par la continuité de la fonction  $\xi \mapsto \min_{\omega \in \mathbb{R}} \det(I - E_\xi(\omega))$ ,  $\mathcal{D}$  est la composante connexe du point  $\xi = 0$  dans le coté gauche de cette identité.

- (6) Pour  $\xi \in \Xi$ ,  $K_\xi$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur l'espace vectoriel réel  $\Gamma \oplus \Gamma$ . Ainsi, son spectre est symétrique par rapport à l'axe réel. En observant que  $JK_\xi + K_\xi^*J = 0$ , où  $J$  est l'opérateur linéaire

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

on conclut que le spectre de  $K_\xi$  est aussi symétrique par rapport à l'axe des imaginaires. Supposons maintenant que  $\xi \in \mathcal{D}$ . Puisque les valeurs propres de  $K_\xi$  sont des fonctions continues de  $\xi$ ,  $K_\xi$  et  $K_0$  ont le même nombre de valeurs propres répétées dans le demi-plan gauche/droit. À partir de (4.2.13) on déduit

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \log \det((i\omega - K_\xi)^{-1}(i\omega - K_0)) \frac{d\omega}{4\pi},$$

et le Lemme 4.2.4 nous permet de conclure que

$$g(\xi) = \frac{1}{4} \sum_{\lambda \in \text{sp}(K_0)} |\text{Re}(\lambda)| m_\lambda - \frac{1}{4} \sum_{\lambda \in \text{sp}(K_\xi)} |\text{Re}(\lambda)| m_\lambda.$$

Puisque  $\text{sp}(K_0) = \overline{\text{sp}(A)} \cup \text{sp}(-A)$  et  $A$  est stable, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \text{sp}(K_0)} |\text{Re}(\lambda)| m_\lambda &= -2 \sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \text{Re}(\lambda) m_\lambda \\ &= -2 \text{Re tr}(A) \\ &= \text{tr}(Q\vartheta^{-1}Q^*), \end{aligned}$$

et l'équation (4.2.7) provient de  $\xi \in \mathcal{D}$ . Comme les valeurs propres de  $K_\xi$  sont des fonctions continues de  $\xi \in \Xi$ , cette relation s'étend à  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$ . La borne de cette extension découle de l'invariance de la translation tout au long de  $\mathcal{L}$  et de la précompactité de  $\mathcal{S}$ .

- (7) L'idée de la preuve est que  $\xi_0 \in \partial\mathcal{D}$  si et seulement si au moins une valeur propre de  $E_{\xi_0}(\omega)$  atteint son maximum global 1 en certain  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Comme  $E_{\xi_0}(\omega)$  est une fonction analytique réelle de  $\omega$ , la fonction  $\text{tr}((1 - E_{\xi_0}(\omega))^{-1})$  a un pôle en  $\omega = \omega_0$ , et puisque cette fonction est non-négative l'ordre de ce pôle doit être pair. Par conséquence,

$$\int_{\omega_0 - \epsilon}^{\omega_0 + \epsilon} \text{tr}((1 - E_{\xi_0}(\omega))^{-1}) d\omega = +\infty.$$

Pour  $\xi \in \mathcal{D}$ , un calcul simple et l'inégalité de Cauchy–Schwarz impliquent

$$\begin{aligned} |\nabla g(\xi)| &\geq \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \nabla g(\xi) \\ &= \frac{1}{|\xi|} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}((I - E_\xi(\omega))^{-1} E_\xi(\omega)) \frac{d\omega}{4\pi}. \end{aligned}$$

Puisque  $0 \notin \partial\mathcal{D}$ , il suffit de montrer que l'intégrale sur le coté droit diverge vers  $+\infty$  quand  $\xi \rightarrow \xi_0 \in \partial\mathcal{D}$ . Fixons  $\xi_0 \in \partial\mathcal{D}$  et posons  $V_\delta = \{\xi \in \mathcal{D} \mid |\xi - \xi_0| < \delta\}$ . Des considérations élémentaires montrent que pour  $\delta > 0$  suffisamment petit  $M > 0$  and suffisamment grand, il existe une constante  $C$  tel que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}((I - E_\xi(\omega))^{-1} E_\xi(\omega)) \frac{d\omega}{4\pi} \\ &\geq C \left( -1 + \int_{-M}^M \text{tr}((I - E_\xi(\omega))^{-1}) d\omega \right) \end{aligned}$$

pour tout  $\xi \in V_\delta$ . On prend le  $\delta$  de sorte qu'il soit plus petit et  $M$  plus grand si nécessaire, on peut supposer que

$$J_\xi(\omega) = (I - E_{\xi - \xi_0}(\omega))^{-1/2}$$

satisfait  $1/\sqrt{2} \leq J_\xi(\omega) \leq \sqrt{2}$  pour  $(\omega, \xi) \in [-M, M] \times V_\delta$ . En écrivant

$$(I - E_\xi(\omega))^{-1} = J_\xi(\omega)(I - J_\xi(\omega)E_{\xi_0}(\omega)J_\xi(\omega))^{-1}J_\xi(\omega)$$

et en observant que ça implique, en particulier, que

$$I - J_\xi(\omega)E_{\xi_0}(\omega)J_\xi(\omega) > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((I - E_\xi(\omega))^{-1}) &\geq \frac{1}{2} \operatorname{tr}((I - J_\xi(\omega)E_{\xi_0}(\omega)J_\xi(\omega))^{-1}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Par le lemme de Fatou

$$\begin{aligned} &\liminf_{\mathcal{D} \ni \xi \rightarrow \xi_0} \int_{-M}^M \operatorname{tr}((I - E_\xi(\omega))^{-1}) d\omega \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{-M}^M \operatorname{tr}((I - E_{\xi_0}(\omega))^{-1}) d\omega \end{aligned}$$

et par l'argument ci-dessus, la dernière intégrale est  $+\infty$ .

- (8) L'existence et l'unicité des solutions maximales de l'équation (4.1.16) ainsi que les propriétés indiquées de  $D_\xi$  proviennent du Chapitre 3 (aussi [60, Theorems 7.3.7 et 7.5.1]), l'assertion (5) et la relation  $D_\xi = A + Q(\xi Q^* - Q^* X_\xi)$ . En outre, il découle de l'équation (4.2.7) et les symétries de  $\operatorname{sp}(K_\xi)$  discutées dans la preuve de Partie (5) que

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{4} \operatorname{tr}(Q\vartheta^{-1}Q^*) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(D_\xi) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(D_\xi - D_0) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Q^*(X_\xi - \tilde{\xi})Q). \end{aligned}$$

La preuve de Théorème 4.2.2 est complète.

□

Le sous-espace de linéarité  $\mathcal{L}$  est lié aux lois de conservation du réseau harmonique. En effet, sous sa dynamique hamiltonienne, le réseau évolue selon  $x_t = e^{t\Omega}x_0$  et donc

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x_t) = \sigma_{\tilde{\xi}}(x_t) = 0$$

pour  $\xi \in \mathcal{L}$ . Il en résulte que, pour tout  $\xi \in \mathcal{L}$ , la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}$  est la première intégrale du flux Hamiltonien. en particulier la direction  $\mathbf{1} \in \mathcal{L}$  et l'invariance  $g(\xi + \lambda \mathbf{1}) = g(\xi)$  sont liées à conservation de l'énergie totale du réseau,  $h = \mathcal{Q}_I$ . Cette symétrie de la fonction génératrice des cumulants des courants a déjà été décrite, dans la configuration quantique, dans [4]. Nous pouvons nous référer aussi à [11] pour une discussion détaillée.

IL résulte de [56, Theorem 3.13] que le taux de production d'entropie du réseau (4.1.11) est liée à la fonction  $g$  par

$$\text{ep} = -\vartheta^{-1} \cdot \nabla g(0).$$

Ainsi, quand l'alternative  $\mathcal{L} = \Xi$  dans l'assertion (4) de Théorème 4.2.2 est vérifiée, il découle que  $\text{ep} = 0$ .

Par la suite nous éviterons les banalités en supposant, sans autre préavis, que  $\text{ep} > 0$  et donc  $\mathcal{L}^\perp \neq \{0\}$  et

$$\mathcal{D} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{L}$$

avec  $\mathcal{S} = \mathcal{D} \cap \mathcal{L}^\perp$ . Par Théorème 4.2.2 (8) les fonctions

$$\Lambda_-(\xi) = -\min \text{sp}(X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta}), \quad \Lambda_+(\xi) = \min \text{sp}(X_{\vartheta^{-1}-\xi}),$$

sont continues et respectivement convexe/concave sur  $\overline{\mathcal{D}}$ .

**Remarque 4.2.5.** *Rappelons que nous avons déjà rassemblé dans Chapitre 3 une collection de résultats et propriétés générales visant d'une part le contrôle des systèmes dynamiques linéaires et d'autres part, les équations algébrique de Riccati, leurs solutions auto adjointes et en particulier, les solutions extrêmes de ce type d'équations. Notamment, de surcroît, nous fournissons dans la proposition suivante autres propriétés importantes des équations algébriques de Riccati  $\mathcal{R}_\xi(X)$ . Ce résultat est une généralisation de [56, Proposition 5.5].*

**Proposition 4.2.6.** *Supposons que Hypothèse 4.1.4 est toujours vérifiée.*

- (1) *Pour  $\xi \in \mathcal{D}$  l'équation de Riccati (4.1.12) admet une unique solution maximale  $X_\xi$  et une unique solution minimale  $-\theta X_{\vartheta^{-1}-\xi}\theta$ . De plus, la matrice*

$$D_\xi = A_\xi - BX_\xi$$

*est stable et satisfait*

$$Y_\xi = X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}-\xi}\theta > 0.$$

- (2) *Si  $\xi_0 \in \partial\mathcal{D}$  est fini, alors la limite non-tangentielle*

$$X_{\xi_0} = \lim_{\mathcal{D} \ni \xi \rightarrow \xi_0} X_\xi$$

*existe et est la solution maximale de l'équation de Riccati limite correspondante  $\mathcal{R}_{\xi_0}(X) = 0$ .*

- (3) *La fonction  $\mathcal{D} \ni \xi \mapsto X_\xi \in L(\Gamma)$  est analytique réelle et concave. De plus,  $X_\xi < 0$  pour  $\xi < 0$ ,  $X_\xi > 0$  pour  $\xi$  dans l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\mathcal{D}_0 \cup \{\xi \in \mathcal{D} \mid \xi > \vartheta^{-1}\}$ ,  $X_0 = 0$  et  $X_{\vartheta^{-1}} = \theta M^{-1}\theta$ .*

- (4) *Pour tout  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$  et  $\eta \in \mathcal{L}$  on a*

$$X_{\xi+\eta} = X_\xi + \tilde{\eta}.$$

- (5) *Pour  $t > 0$ , posons*

$$M_{\xi,t} = \int_0^t e^{sD_\xi} B e^{sD_\xi^*} ds > 0.$$

*Alors, pour tout  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$  on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{\xi,t}^{-1} = \inf_{t > 0} M_{\xi,t}^{-1} = Y_\xi \geq 0,$$

*et  $\ker(Y_\xi)$  est le sous espace spectral de  $D_\xi$  correspondant à ses valeurs propres imaginaires.*

(6) Posons  $\Delta_{\xi,t} = M_{\xi,t}^{-1} - Y_\xi$ . Pour tout  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$ , on a

$$e^{tD_\xi^*} M_{\xi,t}^{-1} e^{tD_\xi} = \theta \Delta_{\vartheta^{-1}-\xi,t} \theta, \quad (4.2.14)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \det(\Delta_{\xi,t}) = 4g(\xi) - \text{tr}(Q\vartheta^{-1}Q^*).$$

En particulier, pour  $\xi \in \mathcal{D}$ ,  $\Delta_{\xi,t} \rightarrow 0$  exponentiellement rapide quand  $t \rightarrow \infty$ .

(7) Soit  $\tilde{D}_\xi = \theta D_{\vartheta^{-1}-\xi} \theta$ . Alors

$$Y_\xi e^{t\tilde{D}_\xi^*} = e^{tD_\xi^*} Y_\xi$$

pour tout  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

(8) pour  $\xi \in \mathcal{D}$  et  $\eta \in \Xi$

$$\eta \cdot \nabla g(\xi) = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \Sigma_{\tilde{\eta}} Y_\xi^{-1} \right)$$

*Démonstration.* Nous nous référons à [60] et Chapitre 3 pour une introduction détaillée aux équations algébriques de Riccati. Notre preuve est similaire à celle de [56, Proposition 5.5]. La matrice Hamiltonienne  $K_\xi$  associée à l'équation de Riccati (4.1.16) est donnée par l'équation (4.2.6). Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe  $\mathbb{C}\Xi \oplus \mathbb{C}\Xi$  sur le quel agit la matrice  $K_\xi$ . L'opérateur

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$$

agit de façon unitaire sur  $\mathcal{H}$ . On a déjà observé dans la preuve de Théorème 4.2.2 (6) que pour  $\xi \in \Xi$ , le spectre de  $K_\xi$  est symétrique par rapport à l'axe des réels et l'axe des imaginaires. Les relations de covariance à inversion du temps

$$\begin{cases} \theta A_\xi \theta = A_\xi^* = -A_{\vartheta^{-1}-\xi}, \\ \theta B \theta = B^* = B, \\ \theta C_\xi \theta = C_\xi^* = C_\xi = C_{\vartheta^{-1}-\xi}, \end{cases} \quad (4.2.15)$$

qui découlent facilement des définitions des opérateurs  $A_\xi$ ,  $B$ ,  $C_\xi$ , encore plus donnent  $\Theta K_\xi - K_{\vartheta^{-1}-\xi} \Theta = 0$  qui implique

$$\text{sp}(K_\xi) = \text{sp}(K_{\vartheta^{-1}-\xi}). \quad (4.2.16)$$

Soit  $\mathcal{H}_-(K_\xi)$  un sous espace spectrale  $K_\xi$  dans les parties de son spectre dans le demi plan gauche  $\mathbb{C}_-$ .

- (1) Par Théorème 4.2.2 (5),  $\text{sp}(K_\xi) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$  pour  $\xi \in \mathcal{D}$  et l'existence et unicité solutions maximale et minimale de l'équation de Riccati 4.1.16 provient de [60, Theorems 7.3.7 et 7.5.1]. La relation entre les solutions minimales et maximale est une conséquence des Relations (4.2.15) ce qui implique que

$$\mathcal{R}_\xi(\theta X \theta) = \theta \mathcal{R}_{\vartheta^{-1}-\xi}(-X) \theta.$$

Par [60, Theorem 7.5.1], la solution maximale  $X_\xi$  est relié au sous espace spectral  $\mathcal{H}_-(K_\xi)$  par

$$\mathcal{H}_-(K_\xi) = \text{Ran} \begin{bmatrix} I \\ X_\xi \end{bmatrix},$$

et de plus,  $\text{sp}(D_\xi) = \text{sp}(K_\xi) \cap \mathbb{C}_-$ .

$Y_\xi = X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}-\xi} \theta$  est dit le gap de Eq. (4.1.16). De même que la différence entre ses solutions maximale et minimale, il est évidemment non négatif. En outre, il possède la propriété remarquable que pour toute solution  $X$ ,  $\ker(Y_\xi)$  est le sous espace spectral de  $A_\xi - BX$  pour la partie de son spectre dans  $i\mathbb{R}$  [60, Theorem 7.5.3]. Comme  $\text{sp}(D_\xi) \subset \mathbb{C}_-$ , on doit avoir  $Y_\xi > 0$ .

- (2) soit  $\xi_0 \in \partial\mathcal{D}$  fini et  $\eta \neq 0$  non tangentiel à  $\partial\mathcal{D}$  en  $\xi_0$ . posons  $\xi_t = \xi_0 - t\eta$ . Sans perte de généralités on peut supposer que  $\xi_1 \in \mathcal{D}$ . La fonction

$$]0, 1] \ni t \mapsto Z_t = X_{\xi_t} + tX'_{\xi_1}[\eta]$$

est concave et sa première dérivé s'annule en  $t = 1$ . D'où, elle est monotone non-décroissante. On affirme que l'ensemble  $\{X_\xi \mid \xi \in$

$\mathcal{D}, |\xi| < r\}$  est borné sur  $L(\Gamma)$  pour tout  $r$  fini. Il s'ensuit donc que

$$X = \lim_{t \downarrow 0} X_{\xi_t} = \lim_{t \downarrow 0} Z_t = \inf_{t \in ]0,1]} Z_t$$

existe. par continuité, on a  $\mathcal{R}_{\xi_0}(X) = 0$  et  $\text{sp}(A_{\xi_0} - BX) \subset \overline{\mathbb{C}}_-$ , et il provient de [60, Theorem 7.5.1] que  $X$  est la solution maximale de l'équation de Riccati limite. En particulier, la limite non-tangentielle existe (c.à.d., ne dépend pas de la direction).

Afin de prouver notre affirmation, on dérive tout d'abord une borne sur  $\hat{X}_\xi = Q^* X_\xi Q$ . En utilisant

$$(Q^* X_\xi Q)^2 \leq \|Q\|^2 Q^* X_\xi^2 Q,$$

on déduit facilement à partir de(4.1.16) l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{X}_\xi^2) &\leq \|Q\|^2 \text{tr}(Q^* X_\xi^2 Q) \\ &= \|Q\|^2 \left( \text{tr}(C_\xi) + 2 \text{tr}(\hat{X}_\xi(\xi - (2\vartheta)^{-1})) \right) \\ &\leq b_\xi + a_\xi \text{tr}(\hat{X}_\xi^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $a_\xi$  et  $b_\xi$  sont des fonctions localement bornées de  $\xi$ . La résolution de l'inégalité quadratique résultante donne  $\text{tr}(\hat{X}_\xi^2)$ , et donc  $\text{tr}(Q^* X_\xi^2 Q)$  sont localement bornés en tant que fonctions de  $\xi$ . En écrivant (4.1.16) en tant qu'une équation de Lyapunov

$$X_\xi A + A^* X_\xi = F_\xi \equiv X_\xi B X_\xi - X_\xi Q \xi Q^* - Q \xi Q^* X_\xi - C_\xi,$$

et en utilisant le fait que  $A$  est stable, on obtient

$$X_\xi = - \int_0^\infty e^{tA^*} F_\xi e^{tA} dt.$$

Il provient que pour tout  $T \in L(\Gamma)$

$$|\text{tr}(T X_\xi)| \leq \int_0^\infty |\text{tr}(e^{tA} T e^{tA^*} F_\xi)| dt,$$

à partir duquel on peut conclure que  $\|X_\xi\|$  est localement borné.

- (3) La projection spectrale de  $K_\xi$  pour la partie de son spectre dans  $\mathbb{C}_+$  peut s'écrire

$$P_\xi = \begin{bmatrix} I \\ X_\xi \end{bmatrix} Y_\xi^{-1} \begin{bmatrix} \theta X_{\vartheta^{-1}-\xi} \theta & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - Y_\xi^{-1} X_\xi & Y_\xi^{-1} \\ X_\xi (I - Y_\xi^{-1} X_\xi) & X_\xi Y_\xi^{-1} \end{bmatrix}.$$

Comme  $\mathcal{D} \ni \xi \mapsto P_\xi$  est analytique réelle, par la théorie des perturbations régulière,  $Y_\xi^{-1}$  et  $X_\xi Y_\xi^{-1}$  sont des fonctions analytiques réelles de  $\xi \in \mathcal{D}$ . il est de même pour  $Y_\xi$  et  $X_\xi = X_\xi Y_\xi^{-1} Y_\xi$ .

En invoquant le théorème de fonction implicite et en utilisant la stabilité de  $D_\xi$ , on calcule facilement les dérivées de l'application  $\mathcal{D} \ni \xi \mapsto X_\xi$ . La première dérivée est l'application linéaire

$$\Xi \ni \eta \mapsto X'_\xi[\eta] = \tilde{\eta} - \int_0^\infty e^{tD_\xi^*} \Sigma_{\tilde{\eta}} e^{tD_\xi} dt, \quad (4.2.17)$$

où, généralement, on identifie  $\eta \in \Xi$  avec la matrice diagonale correspondante dans  $L(\Xi)$  et  $\tilde{\eta} \triangleright \eta$ . La dérivée seconde est la forme quadratique

$$\Xi \ni \eta \mapsto X''_\xi[\eta] = -2 \int_0^\infty e^{tD_\xi^*} (X'_\xi[\eta] - \tilde{\eta}) B (X'_\xi[\eta] - \tilde{\eta}) e^{tD_\xi} dt,$$

et la concavité résulte du fait évident que  $X''_\xi[\eta] \leq 0$ .

Afin de prouver les inégalités, réécrivons l'équation de Riccati (4.1.16) en tant qu'une équation de Lyapunov

$$X_\xi A_\xi + A_\xi^* X_\xi = X_\xi B X_\xi - C_\xi,$$

et rappelons que, comme établi dans la preuve de Théorème 4.2.2 (5),  $\mp A_\xi$  est stable pour  $\pm(\xi - (2\vartheta)^{-1}) > 0$ . D'où, on a

$$\begin{aligned} \mp X_\xi &= - \int_0^\infty e^{\mp t A_\xi^*} (X_\xi B X_\xi - C_\xi) e^{\mp t A_\xi} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{\mp t A_\xi^*} C_\xi e^{\mp t A_\xi} dt, \end{aligned}$$

et puisque  $C_\xi \leq 0$  pour  $|\xi - (2\vartheta)^{-1}| \geq (2\vartheta)^{-1}$ , on conclut que  $X_\xi \leq 0$  pour  $\xi < 0$  et  $X_\xi \geq 0$  pour  $\xi > \vartheta^{-1}$ . La contrôlabilité

de  $(\mp A_\xi, Q)$  donne que ces inégalités sont strictes pour  $X_\xi$ . En écrivant (4.1.16) comme

$$X_\xi D_\xi + D_\xi^* X_\xi = -X_\xi B X_\xi - C_\xi,$$

la stabilité de  $D_\xi$  donne

$$X_\xi = \int_0^\infty e^{tD_\xi^*} (X_\xi B X_\xi + C_\xi) e^{tD_\xi} dt \geq \int_0^\infty e^{tD_\xi^*} C_\xi e^{tD_\xi} dt,$$

et comme  $C_\xi \geq 0$  pour  $\xi \in \mathcal{D}_0$ , on peut conclure que  $X_\xi \geq 0$  for such  $\xi$ . Encore la contrôlabilité de  $(D_\xi, Q)$  donne l'inégalité stricte. la concavité  $\xi \mapsto X_\xi$  implique que le sous ensemble de tous les  $\xi \in \mathcal{D}$  tel que  $X_\xi > 0$  est convexe, de sorte qu'il contient l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_0 \cup \{\xi \in \mathcal{D} \mid \xi > \vartheta^{-1}\}$ .

A partir de

$$X_0 = \lim_{0 > \xi \rightarrow 0} X_\xi \leq 0, \quad X_0 = \lim_{\mathcal{D}_0 \ni \xi \rightarrow 0} X_\xi \geq 0,$$

on conclut que  $X_0 = 0$ . Afin de prouver les dernières assertions, en partant de Eq. (4.1.16) et en appelant les Relations (4.2.15) on montre que  $\widehat{M} = \theta X_{\vartheta^{-1}}^{-1} \theta$  satisfait l'équation de Lyapunov

$$A\widehat{M} + \widehat{M}A^* + B = 0.$$

Comme  $A$  est stable, cette équation admet une solution unique donnée par (4.1.10), d'où  $\widehat{M} = M$ .

(4) Un calcul simple donne

$$\mathcal{R}_{\xi+\eta}(X + \tilde{\eta}) = \mathcal{R}_\xi(X) + \Sigma_{\tilde{\eta}}$$

pour tout  $X \in L(\Gamma)$  et  $\xi, \eta \in \Xi$ . Donc,

$$\mathcal{R}_{\xi+\eta}(X_\xi + \tilde{\eta}) = \Sigma_{\tilde{\eta}}$$

et comme  $A_{\xi+\eta} - B(X_\xi + \tilde{\eta}) = D_\xi$ , on conclut que lorsque  $\Sigma_{\tilde{\eta}} = 0$  on a  $X_{\xi+\eta} = X_\xi + \tilde{\eta}$ .

(5)-(7) La preuve est analogue à celle des parties correspondantes de [56, Proposition 5.5].

(8) Lors de la différenciation de Eq. (4.2.8) on obtient

$$\eta \cdot \nabla g(\xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} (Q^*(X'_\xi[\eta] - \tilde{\eta})Q).$$

De plus, en utilisant (4.2.17) on obtient

$$\eta \cdot \nabla g(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \operatorname{tr} (\Sigma_{\tilde{\eta}} e^{tD_\xi} B e^{tD_\xi^*}) dt,$$

et le résultat provient maintenant de Partie (5). □

La fonction  $g$  de Théorème 4.2.2 est liée à la fonction génératrice des cumulants limite (4.1.13) par ce qui suit :

**Proposition 4.2.7.** *Sous Hypothèse 4.1.4 on a*

$$e(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g_t(\xi) = \begin{cases} g(\xi) & \text{for } \xi \in \mathcal{D}_\infty \\ +\infty & \text{for } \xi \in \Xi \setminus \overline{\mathcal{D}_\infty}, \end{cases} \quad (4.2.18)$$

où (comparé avec le côté droit de (4.1.18))

$$\mathcal{D}_\infty = \{\xi \in \mathcal{D} \mid \Lambda_-(\xi) < 0 < \Lambda_+(\xi)\}$$

est un sous ensemble borné, ouvert, convexe de  $\mathcal{D}$  tel que

$$\overline{\mathcal{D}_0} \setminus \{\vartheta^{-1}\} \subset \mathcal{D}_\infty.$$

En particulier,  $\mathcal{D}_\infty$  contient un voisinage de 0.

*Démonstration.* Par Proposition 4.2.6, pour  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$ , on a  $A = D_\xi + QQ^*(X_\xi - \tilde{\xi})$  avec  $\tilde{\xi} \triangleright \xi$ , et on peut écrire l'équation du mouvement (4.1.4) comme

$$dx(t) = D_\xi x(t)dt + Qdw_\xi(t), \quad (4.2.19)$$

où

$$w_\xi(t) = w(t) - \int_0^t Q^*(\tilde{\xi} - X_\xi)x(s)ds.$$

Soit  $Z_\xi(t)$  l'exponentielle stochastique de la martingale locale

$$\eta_\xi(t) = \int_0^t Q^*(\tilde{\xi} - X_\xi)x(s) \cdot dw(s).$$

Combinant Eq. (??) avec les relations  $\tilde{\xi}QQ^* = QQ^*\tilde{\xi} = Q\xi Q^*$  et  $\tilde{\xi}QQ^*\tilde{\xi} = Q\xi^2Q^*$ , on obtient

$$\frac{1}{2}|Q^*(\tilde{\xi} - X_\xi)x|^2 = -\sigma_{\tilde{\xi}}(x) - (\tilde{\xi} - X_\xi)x \cdot Ax,$$

et on peut écrire la variation quadratique de  $\eta_\xi$  comme

$$\frac{1}{2}[\eta_\xi](t) = - \int_0^t \sigma_{\tilde{\xi}}(x(s))ds - \int_0^t (\tilde{\xi} - X_\xi)x(s) \cdot Ax(s)ds.$$

Le calcul d'Itô et la Proposition 4.2.1 (4) donne

$$\log Z_\xi(t) = \eta_\xi(t) - \frac{1}{2}[\eta_\xi](t) = \xi \cdot W(t) - \chi_\xi(x(t)) + \chi_\xi(x(0)) - t\lambda_\xi,$$

avec

$$\chi_\xi(x) = \frac{1}{2}x \cdot X_\xi x.$$

et en prenant (4.2.8) en considération,

$$\lambda_\xi = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Q^*(X_\xi - \tilde{\xi})Q) = g(\xi).$$

La preuve du lemme suivant est identique à celle du [56, Lemma 5.7], et on l'omet.

**Lemme 4.2.8.** *Pour  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$ , le processus*

$$Z_\xi(t) = e^{-tg(\xi) + \langle \xi, \Phi(t) \rangle - \chi_\xi(x(t)) + \chi_\xi(x(0))} \quad (4.2.20)$$

*est une  $\mathbb{P}_x$ -martingale pour tout  $x \in \Gamma$ .*

En appliquant le théorème de Girsanov, on conclut que  $\{w_\xi(t)\}_{t \in [0, \tau]}$  est un processus de Wiener standard sous la loi  $\mathbb{Q}_{\xi, \mu}^\tau[\cdot] = \mathbb{E}_\mu[Z_\xi(\tau) \cdot]$ . Il provient que la fonction génératrice des cumulants en temps fini peut être écrite comme

$$\begin{aligned} g_t(\xi) &= tg(\xi) + \log \mathbb{E}_\mu \left[ Z_\xi(t) e^{\chi_\xi(x(t)) - \chi_\xi(x(0))} \right] \\ &= tg(\xi) + \log \mathbb{Q}_{\xi, \mu}^t \left[ e^{\chi_\xi(x(t)) - \chi_\xi(x(0))} \right] \end{aligned}$$

for  $\xi \in \overline{\mathcal{D}}$ , i.e.,

$$g_t(\xi) = tg(\xi) + \log d_t(\xi), \quad d_t(\xi) = \langle \eta_\xi^1, Q_\xi^t \eta_\xi^2 \rangle, \quad (4.2.21)$$

où

$$\eta_\xi^1(x) = \det(2\pi M)^{-\frac{1}{2}} e^{-\chi_\xi(x) - \frac{1}{2}|M^{-\frac{1}{2}}x|^2}, \quad \eta_\xi^2(x) = e^{\chi_\xi(x)},$$

et  $Q_\xi^t$  est le semi-groupe de Markov associé à la EDS (4.2.19). A partir de la solution explicite

$$x(t) = e^{tD_\xi}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)D_\xi}Qdw_\xi(s)$$

à cette EDS, on obtient facilement la représentation

$$(Q_\xi^t f)(x) = \det(2\pi M_{\xi,t})^{-\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{1}{2}|M_{\xi,t}^{-\frac{1}{2}}(y-e^{tD_\xi}x)|^2} f(y)dy.$$

En posant

$$N_{\xi,t} = \begin{bmatrix} X_\xi + \theta X_{\vartheta-1}\theta + e^{tD_\xi^*}M_{\xi,t}^{-1}e^{tD_\xi} & -e^{tD_\xi^*}M_{\xi,t}^{-1} \\ -M_{\xi,t}^{-1}e^{tD_\xi} & M_{\xi,t}^{-1} - X_\xi \end{bmatrix},$$

et  $\mathcal{D}_t = \{\xi \in \mathcal{D} \mid N_{\xi,t} > 0\}$ , un calcul élémentaire mène à

$$\begin{aligned} d_t(\xi) &= \det(2\pi M_{\xi,t})^{-\frac{1}{2}} \det(2\pi M)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{1}{2}z \cdot N_{\xi,t} z} dz \\ &= \begin{cases} \det(M_{\xi,t}^{-1})^{\frac{1}{2}} \det(M^{-1})^{\frac{1}{2}} \det(N_{\xi,t})^{-\frac{1}{2}} & \text{for } \xi \in \mathcal{D}_t; \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La formule du complément de Schur et Proposition 4.2.6 (5–6) mène à la factorisation

$$\det(N_{\xi,t}) = d_t^-(\xi)d_t^+(\xi)$$

où

$$\begin{cases} d_t^-(\xi) = \det(X_\xi + \theta X_{\vartheta-1}\theta - \tilde{\Delta}_{\xi,t}), \\ d_t^+(\xi) = \det(X_{\vartheta-1-\xi} + \theta \Delta_{\xi,t}\theta), \end{cases}$$

où le facteur  $\Delta_{\xi,t}$  défini dans Proposition 4.2.6 (6) et

$$\tilde{\Delta}_{\xi,t} = e^{tD_\xi^*}(X_\xi + X_\xi(\theta X_{\vartheta-1-\xi}\theta + \Delta_{\xi,t})^{-1}X_\xi)e^{tD_\xi}$$

sont strictement positives pour  $t > 0$  et s'annule exponentiellement  $t \rightarrow \infty$ . D'où, pour  $\xi \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{cases} d^-(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} d_t^-(\xi) = \det(X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta}), \\ d^+(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} d_t^+(\xi) = \det(X_{\vartheta^{-1}-\xi}), \end{cases}$$

et en posant

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^- = \{\xi \in \mathcal{D} \mid X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta} > \tilde{\Delta}_{\xi,t}\}, \\ \mathcal{D}^- = \{\xi \in \mathcal{D} \mid X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta} > 0\}, \\ \mathcal{D}_t^+ = \{\xi \in \mathcal{D} \mid \theta X_{\vartheta^{-1}-\xi} > -\Delta_{\xi,t}\}, \\ \mathcal{D}^+ = \{\xi \in \mathcal{D} \mid X_{\vartheta^{-1}-\xi} > 0\}, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\infty &= \mathcal{D}^- \cap \mathcal{D}^+ \\ &\subset \bigcup_{t>0} \bigcap_{s \geq t} (\mathcal{D}_s^- \cap \mathcal{D}_s^+). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tout  $\xi \in \mathcal{D}_\infty$ , la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_t(\xi) = \frac{\det(Y_\xi)^{1/2} \det(X_{\vartheta^{-1}})^{1/2}}{d^-(\xi)^{1/2} d^+(\xi)^{1/2}}$$

est finie et positive, ce qui implique la première partie de (4.2.18). Afin de traiter de la deuxième partie, on note que quand  $\xi \in \Xi \setminus \overline{\mathcal{D}_\infty}$ , alors ou bien  $\xi \in \Xi \setminus \overline{\mathcal{D}}$  ou bien  $\xi \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \overline{\mathcal{D}_\infty}$ . Dans le dernier cas, ou bien  $X_\xi + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta}$  ou bien  $X_{\vartheta^{-1}-\xi}$  admet une valeur propre négative et la matrice  $N_{\xi,t}$  perd sa positivité quand  $t \rightarrow \infty$ . Il provient que  $d_t(\xi) = +\infty$  et d'où  $g_t(\xi) = +\infty$  pour  $t$  suffisamment grand. Pour  $\xi \in \Xi \setminus \overline{\mathcal{D}}$ , l'application de [56, Lemma 5.8] aux fonctions  $f_t(\alpha) = g_t(\alpha\xi)$  donne les résultats souhaités.

Finalement, on note que la continuité et la concavité de l'application  $\mathcal{D} \ni \xi \mapsto X_\xi$  implique que  $\mathcal{D}_\infty$  est un ensemble ouvert convexe de  $\mathcal{D}$ . La positivité de  $N_\xi$  pour  $\xi \in \overline{\mathcal{D}_0} \setminus \{\vartheta^{-1}\}$  est une conséquence de sa continuité et montre bien la dernière affirmation, en concluant la preuve de Proposition 4.2.7.  $\square$

#### 4.2.1.2 Fluctuations des quantités conservées

Comme mentionné ci-dessus, chaque  $\xi \in \mathcal{L}$  est associé à une première intégrale  $\mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}$  sur le réseau harmonique. Dans cette section, nous nous concentrons brièvement sur ces quantités conservées. Puisque  $\xi_\lambda = \xi + \lambda \mathbf{1} \in \mathcal{L}$  et  $\tilde{\xi}_\lambda = \tilde{\xi} + \lambda I > 0$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  suffisamment large, il n'y a aucune perte de généralité en supposant que  $\mathcal{Q}_{\tilde{\xi}} \geq 0$ . Il découle de la Proposition 4.2.1 (4) et [10, Proposition 2.2] que la loi de

$$\langle \xi, \Phi(t) \rangle = \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x(t)) - \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}}(x(0))$$

sous  $\mathbb{P}_\mu$  converge vers une distribution *variance-gamma*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu[\langle \xi, \Phi(t) \rangle \in S] = \int_S f_{\text{vg}}(q) dq,$$

de densité

$$f_{\text{vg}}(q) = |q|^{(m-1)/2} \int_{S^{m-1}} K_{(m-1)/2} \left( \frac{|q|}{|Nk|} \right) \frac{d\sigma(k)}{(2\pi|Nk|)^{(m+1)/2}},$$

où  $m = 2|\mathcal{I}|$ ,  $N = \tilde{\xi}^{1/2} M \tilde{\xi}^{1/2}$ ,  $\sigma$  est la mesure de Lebesgue sur la sphere unité  $S^{m-1}$  de  $\Gamma$ , et  $K$  désigne une fonction de Bessel modifiée [82]. Comme mentionné dans la Section ?? la distribution variance-gamma comme support complet sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la convergence ci-dessus est accompagnée par un PGD : pour tout ensemble ouvert  $O \subset \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1} \langle \xi, \Phi(t) \rangle \in O] = - \inf_{q \in O} I(q)$$

avec la fonction taux

$$I(q) = \frac{|q|}{\max \text{sp}(N)}.$$

Cela s'applique, en particulier, aux fluctuations de l'énergie locale qui constituaient la préoccupation principale de [10].

#### 4.2.1.3 Principe de grande déviation local

Bien que les résultats de la section précédente quantifient des écarts aux lois de conservation, les résultats principaux de ce travail portent

sur la composante des fluctuations des courants de chaleur qui ne violent pas ces lois de conservation.

Rappelons que  $\mathcal{S} = \mathcal{D} \cap \mathcal{L}^\perp$  est la base précompacte, convexe du cylindre  $\mathcal{D} \subset \Xi$ . En notant par  $\Pi \in L(\Xi)$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{L}^\perp$ , en posant  $\mathcal{S}_\infty = \Pi\mathcal{D}_\infty$  et en définissant la fonction  $I : \mathcal{L}^\perp \rightarrow [0, +\infty[$  par

$$I(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}_\infty} (\langle \xi, \varphi \rangle - g(\xi)),$$

une application directe du théorème de Gärtner-Ellis donne les résultats suivants

**Théorème 4.2.9.** *Supposons que l'hypothèse 4.2.10 soit vérifiée. Alors, sous la loi  $\mathbb{P}_\mu$ , la famille  $\{\Pi\Phi(t)\}_{t \geq 0}$  satisfait un PGD local avec une bonne fonction taux  $I$ , c'est-à-dire, pour tout ensemble de Borel  $F \subset \mathcal{L}^\perp$ , on a*

$$\begin{aligned} -\inf_{\varphi \in \mathring{F} \cap \mathcal{F}} I(\varphi) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1}\Pi\Phi(t) \in F] \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1}\Pi\Phi(t) \in F] \\ &\leq -\inf_{\varphi \in \bar{F}} I(\varphi), \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

où  $\mathring{F}$  et  $\bar{F}$  désignent, respectivement, l'intérieur et l'adhérence de  $F$  et

$$\mathcal{F} = \nabla g(\mathcal{S}_\infty).$$

De plus, pour  $\varphi \in \mathcal{F}_0 = \{\nabla g(\xi) \mid \xi \in \mathcal{S}_\infty \text{ et } \vartheta^{-1} - \xi \in \mathcal{S}_\infty\} \supset \nabla g(\mathcal{D}_0)$ , la relation de fluctuation

$$I(-\varphi) = I(\varphi) - \vartheta^{-1} \cdot \varphi,$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Puisque  $X_0 = 0$  et  $X_{\vartheta^{-1}} = \theta M^{-1}\theta > 0$ , il provient de la continuité de l'application  $\bar{\mathcal{D}} \ni \xi \mapsto X_\xi$  que l'ensemble ouvert  $\mathcal{D}_\infty$  contient 0. Par Proposition 4.2.7,  $\mathcal{D}_\infty$  est l'intérieur du domaine essentiel de la fonction génératrice des cumulants (4.2.18). Donc théorème de Gärtner-Ellis implique que la limite supérieure du PGD dans (4.2.22) est valable pour tout ensemble borélien  $F \subset \mathcal{L}^\perp$ , avec la fonction taux

$$I(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathcal{D}_\infty} (\xi \cdot \varphi - g(\xi)) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}_\infty} (\xi \cdot \varphi - g(\xi)).$$

De plus, la limite inférieure correspondante est valable pour tout sous-ensemble  $F$  de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points exposés de cette fonction. Posons  $\mathcal{E} = \nabla g(\mathcal{S}_\infty)$ . On doit montrer que  $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ .

Par Théorème 4.2.2 (3+4+6), pour tout  $\varphi \in \mathcal{L}^\perp$  on a

$$0 \leq J(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}} (\xi \cdot \varphi - g(\xi)) < \infty.$$

Il résulte de Théorème 4.2.2 (4+7) et [72, Theorem 26.5] que, en tant qu'une fonction sur  $\mathcal{L}^\perp$ ,  $J$  est le conjugué de Legendre de la restriction de  $g$  à  $\mathcal{S}$ . En particulier, il est strictement convexe et différentiable sur  $\mathcal{L}^\perp$ . De plus,  $\nabla g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}^\perp$  est homéomorphisme dont l'inverse est  $\nabla J : \mathcal{L}^\perp \rightarrow \mathcal{S}$ . Comme  $\mathcal{D}_\infty$  est ouvert et convexe, alors de même pour  $\mathcal{S}_\infty$ , et son image  $\nabla g(\mathcal{S}_\infty) = \nabla g(\mathcal{D}_\infty) = \mathcal{E}$  est ouvert et connexe. On note que

$$I(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}_\infty} (\xi \cdot \varphi - g(\xi)) \leq J(\varphi)$$

pour  $\varphi \in \mathcal{L}^\perp$ . Pour  $\varphi = \nabla g(\xi) \in \mathcal{E}$  on a

$$J(\varphi) = \xi \cdot \nabla g(\xi) - g(\xi) = I(\varphi),$$

c.à.d.,  $I$  et  $J$  coïncident sur  $\mathcal{E}$ . En particulier,  $I$  est strictement convexe sur tout sous ensemble convexe de  $\mathcal{E}$ . Supposons que  $\varphi \in \mathcal{E}$  n'est pas un point exposé de  $I$ . Comme  $\varphi = \nabla g(\xi)$  avec  $\xi \in \mathcal{S}_\infty$ , il existe  $\psi \in \mathcal{L}^\perp$  tel que  $\psi \neq \varphi$  et  $I(\psi) = I(\varphi) + \xi \cdot (\psi - \varphi)$ . En invoquant la convexité, on montre que  $I(\psi_\lambda) = I(\varphi) + \xi \cdot (\psi_\lambda - \varphi)$  avec  $\psi_\lambda = \lambda\psi + (1 - \lambda)\varphi$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , ce qui contredit la convexité stricte de  $I$  dans un voisinage convexe de  $\varphi$ .

Chaque fois que  $\pm\varphi \in \mathcal{E}$ , on a

$$\varphi = \nabla g(\xi) \quad \text{et} \quad -\varphi = \nabla g(\vartheta^{-1} - \xi)$$

avec  $\xi \in \mathcal{S}_\infty$  et  $\vartheta^{-1} - \xi \in \mathcal{S}_\infty$ , et donc,

$$\begin{aligned} I(-\varphi) &= I(\nabla g(\vartheta^{-1} - \xi)) = (\vartheta^{-1} - \xi) \cdot \nabla g(\vartheta^{-1} - \xi) - g(\vartheta^{-1} - \xi) \\ &= -(\vartheta^{-1} - \xi) \cdot \nabla g(\xi) - g(\xi) \\ &= I(\nabla g(\xi)) - \vartheta^{-1} \cdot \nabla g(\xi) \\ &= I(\varphi) - \vartheta^{-1} \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Finalement, on note que  $\mathcal{F}_0 = \{\nabla g(\xi) \mid \xi \in \mathcal{D}_\infty \text{ et } \vartheta^{-1} - \xi \in \mathcal{D}_\infty\}$ . Proposition 4.2.6 (3) implique que  $X_\xi > 0$  et  $X_{\vartheta^{-1}-\xi} > 0$  pour  $\xi \in \mathcal{D}_0$ , et par conséquent que  $\nabla g(\mathcal{D}_0) \subset \mathcal{F}_0$ .

□

#### 4.2.1.4 Principe de grande déviation global

Pour améliorer le théorème 4.2.9 et obtenir un PGD global sur  $\mathcal{L}^\perp$ , on impose une condition supplémentaire sur le réseau :

**Hypothèse 4.2.10.** (*Condition Réseau*)

$$\min_{\xi \in \partial \mathcal{S}} (\Lambda_+(\xi) - \Lambda_-(\xi)) > 0.$$

Comme  $\Lambda_+ - \Lambda_-$  est une fonction concave de  $\xi$  sur  $\mathcal{S}$ , Hypothèse 4.2.10 assure qu'elle est positive sur  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 4.2.11.** *Supposons que les Hypothèses 4.1.4 et 4.2.10 sont vérifiées. Alors, sous la loi  $\mathbb{P}_\mu$ , la famille  $\{\Pi W(t)\}_{t \geq 0}$  satisfait un PGD global avec une bonne fonction taux  $I$ , c'est-à-dire, pour tout ensemble de Borel  $F \subset \mathcal{L}^\perp$ , on a :*

$$\begin{aligned} -\inf_{\varphi \in \dot{F}} I(\varphi) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1} \Pi W(t) \in F] \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\mu[t^{-1} \Pi W(t) \in F] \\ &\leq -\inf_{\varphi \in \bar{F}} I(\varphi) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

où  $\dot{F}$  et  $\bar{F}$  désignent, respectivement, l'intérieur et l'adhérence de  $F$ . De plus, la relation de fluctuation

$$I(-\varphi) = I(\varphi) - \vartheta^{-1} \cdot \varphi, \quad (4.2.24)$$

est valable pour tout  $\varphi \in \mathcal{L}^\perp$ .

*Démonstration.* Par Théorème 4.2.9, il suffit de montrer que, sous Hypothèse 4.2.10, on a  $\nabla g(\mathcal{S}_\infty) = \mathcal{L}^\perp$ . Par Proposition 4.2.6 (4), pour tout  $\xi \in \mathcal{S}$  et tout  $\eta \in \mathcal{L}$  on a

$$X_{\vartheta^{-1}-\xi-\eta} = X_{\vartheta^{-1}-\xi} - \tilde{\eta}$$

de sorte que

$$\mathcal{D}^+ = \{\xi \oplus \eta \mid \xi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{L}, \tilde{\eta} < X_{\vartheta^{-1}-\xi}\}.$$

Similairement, à partir de

$$X_{\xi+\eta} + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta} = X_{\xi} + \theta X_{\vartheta^{-1}\theta} + \tilde{\eta},$$

on déduit que

$$\mathcal{D}^- = \{\xi \oplus \eta \mid \xi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{L}, \tilde{\eta} > -X_{\xi} - \theta X_{\vartheta^{-1}\theta}\}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{D}_{\infty} = \{\xi \oplus \eta \mid \xi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{L}, -X_{\xi} - \theta X_{\vartheta^{-1}\theta} < \tilde{\eta} < X_{\vartheta^{-1}-\xi}\},$$

et donc

$$\mathcal{S}_{\infty} = \{\xi \in \mathcal{S} \mid \text{there exists } \eta \in \mathcal{L} \text{ such that } -X_{\xi} - \theta X_{\vartheta^{-1}\theta} < \tilde{\eta} < X_{\vartheta^{-1}-\xi}\}.$$

Ainsi, Sous Hypothèse 4.2.10,  $\nabla g(\mathcal{S}_{\infty}) = \nabla g(\mathcal{S}) = \nabla g(\mathcal{D}) = \mathcal{L}^{\perp}$ .  $\square$

**Remarque 4.2.12.** *On insiste sur le fait que Théorème 4.2.11 ne fournit que des conditions suffisantes pour la validité globale du PGD. Nous supposons que la Hypothèse 4.1.4, seule suffit pour que (4.2.23) soit valable pour tous les ensembles de Borel  $F \subset \mathcal{L}^{\perp}$ . Cependant, nous n'avons pas été en mesure de prouver cette affirmation et, en particulier, nous ne sommes au courant d'aucun résultat général dans la théorie des grandes déviations qui l'impliquerait. Nous partons de cette conjecture en tant que problème ouvert intéressant.*

### 4.3 Discussion

1. La quantité  $-\langle \vartheta^{-1}, \varphi \rangle$  est le taux de production d'entropie associé à un courant de chaleur donné  $\varphi \in \mathcal{L}^{\perp}$  (comparer avec (4.1.2)). Ainsi, la RF (4.2.24) implique que les fluctuations actuelles  $\varphi$  avec un taux de production d'entropie négatif sont supprimées de façon exponentielle, quand  $t \rightarrow \infty$ , par rapport à la fluctuation opposée  $-\varphi$  (qui a un taux de production d'entropie positif).

2. Nous notons que, selon les résultats de [56], la production d'entropie (4.1.2) ne satisfait jamais globalement la RF (4.1.12) (c'est-à-dire pour tous les  $s \in \mathbb{R}$ ). Ceci contraste fortement avec la composante du flux de chaleur le long de  $\mathcal{L}^\perp$ . En effet, nous verrons dans la section suivante qu'une RF globale est possible dans ce cas.
3. Supposons que, compte tenu de la conjecture ci-dessus, Hypothèse 4.2.10 étant violée, le PGD (4.2.23) est valable pour tous les ensembles de Borel  $F \subset \mathcal{L}^\perp$ . Il s'ensuit que le RF (4.2.24) n'est pas valable pour tous les  $\varphi \in \mathcal{L}^\perp$  mais est remplacé par une RF étendue, c'est-à-dire non universelle, sur l'ensemble non borné

$$\{\varphi \in \mathcal{L}^\perp \mid \text{soit } \varphi \notin \nabla g(\mathcal{S}_\infty) \text{ ou } -\varphi/ \notin \nabla g(\mathcal{S}_\infty)\},$$

comme illustré à la figure 3 ci-dessous. Le graphique de la fonction de taux dans la région  $\mathcal{L}^\perp \setminus \nabla g(\mathcal{S}_\infty)$  a la forme particulière d'une surface réglée. Plus précisément, pour  $\zeta \in \partial \mathcal{S}_\infty$  soit  $\varphi_0 = \nabla g(\zeta)$  et notons  $\nu$  la normale extérieure à  $\mathcal{S}_\infty$  en  $\zeta$ . Alors, on a  $I(\varphi_0 + \lambda \nu) = I(\varphi_0) + \lambda \nu \cdot \zeta$  pour tout  $\lambda > 0$ . Ce comportement généralise au cas multivarié le caractère affine de la fonction de vitesse des observables scalaires (chaleur, production d'entropie...) trouvé dans [38, 56, 71, 81]. Dans ces circonstances, la fonction de taux est convexe sur  $\mathcal{L}^\perp$  mais ne parvient pas à être strictement convexe sur le complément de  $\nabla g(\mathcal{S}_\infty)$ . Comme dans les cas scalaires mentionnés ci-dessus, la conséquence quelque peu frappante de ces RF étendues est une augmentation du rapport de probabilité des fluctuations actuelles avec un taux de production d'entropie négatif à positif.

4. D'un point de vue mathématique, les écarts par rapport à la RF (4.2.24) sont dus au manque de régularité essentielle de la limite de la fonction génératrice des cumulants (4.2.18). Dans le cadre du présent travail, cela peut être retracé à la divergence d'un facteur pré-exponentiel dans l'expansion asymptotique de la fonction génératrice cumulative (le terme  $dt$  dans (4.2.21) ci-dessous).

L'analyse de [67, 70] suggère que ce phénomène peut rester pertinent au-delà du cadre harmonique/gaussien, cependant nous ne connaissons aucun résultat rigoureux dans cette direction.

5. D'un point de vue physique, les circonstances qui ont conduit à l'échec de la RF mondiale (4.2.24) ne sont toujours pas bien comprises. Cependant, les exemples ci-dessous tendent à indiquer que la force de l'entraînement thermique (et donc des courants importants) est un facteur déterminant.

## 4.4 Exemples

On observe que Eq. (4.2.2) implique que la matrice  $E_\xi(\omega)$  et de là la fonction  $g(\xi)$  sont invariantes sous le **redimensionnement simultané**

$$\vartheta_i \mapsto \lambda \vartheta_i, \quad \xi_i \mapsto \lambda^{-1} \xi_i$$

avec  $\lambda > 0$ . De plus, on peut vérifier facilement que sous le même redimensionnement, la solution maximale de l'équation algébrique de Riccati (4.1.16) obéit  $X_\xi \mapsto \lambda X_\xi$ , de sorte que  $\Lambda_\pm(\xi) \mapsto \lambda \Lambda_\pm(\xi)$ . Par conséquence, sans perte de généralité, on doit fixer la température moyenne selon

$$\frac{1}{|\partial\mathcal{I}|} \sum_{i \in \partial\mathcal{I}} \vartheta_i^{-1} = 1$$

dans tous nos exemples, en désignant les rapports des températures par  $[\vartheta_1 : \vartheta_2 : \dots]$ . Pour les systèmes hors l'équilibre thermique, on utilisera également un système spécial de coordonnées cartésiennes sur l'espace  $\mathcal{L}^\perp$  : on fixe son origine à la projection orthogonale du centre de symétrie  $((2\vartheta_i)^{-1})_{i \in \partial\mathcal{I}}$  sur  $\mathcal{L}^\perp$ , et choisi le premier vecteur de base dans la même direction. Enfin, nous notons que dans tous les exemples ci-dessous, il est simple de vérifier que Hypothèse 4.1.4 est satisfaite et que  $\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathbf{1}$ . On concentrera donc nos discussions sur la validité de la Hypothèse 4.2.10.

### 4.4.1 Le réseau Losange

Comme un premier exemple d’exploitation numérique de notre **programme**, nous étudions certaines propriétés du réseau Losange de la figure 4.1. Avec  $|\mathcal{I}| = 4$  et  $|\partial\mathcal{I}| = 3$ , les paramètres du modèles sont donnés par

$$\kappa^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.$$

Considérons tout d’abord le cas de l’équilibre thermique :  $[1 : 1 : 1]$ . Les flux de chaleur moyens disparaissent,  $\bar{\varphi} = 0$ . Dans le volet droit de la figure 4.1, qui montre les fonctions  $\mathcal{S} \ni \xi \rightarrow \Lambda_{\pm}(\xi)$ , on en déduit que Hypothèse 4.2.10 est vérifiée de sorte que, par Théorème 4.2.11, le PGD (4.2.23) global est valable avec une fonction  $I$  satisfaisant laRF (4.1.19) sur  $\mathcal{L}^{\perp}$ .

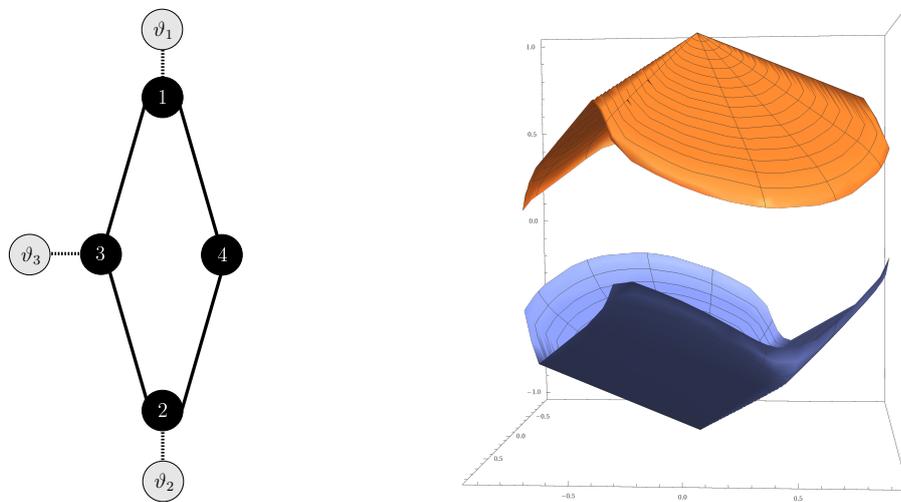


FIGURE 4.1 – Le réseau Losange (gauche) et un tracé (droite) des fonctions  $\mathcal{S} \ni \xi \mapsto \Lambda_{\pm}(\xi)$  en équilibre thermique (dans le but de cette représentation, l’ensemble  $\mathcal{S}$  a été mis en correspondance avec le disque de l’unité ouverte).

Par continuité, Hypothèse 4.2.10 persiste suffisamment près de l’équilibre thermique pour que les mêmes conclusions s’y maintiennent. La figure 4.2 montre le “gap spectral”  $\Lambda_+ - \Lambda_-$  à la frontière de l’ensemble

$\mathcal{S}$  pour différents rapports de température. Il semble que ce gap se ferme finalement (c.à.d. qu'il prend des valeurs non positives) lorsque les différences de température deviennent importantes. On conclut que laRF (4.1.19) se décompose dans ce régime. Ceci est illustré sur Figure 4.3 où la fonction de taux  $I$  et la fonction de fluctuation anormale  $\Delta(\varphi) = I(\varphi) - I(-\varphi) - \vartheta^{-1} \cdot \varphi$  sont tracées pour les rapports de température [1 : 2 : 64].

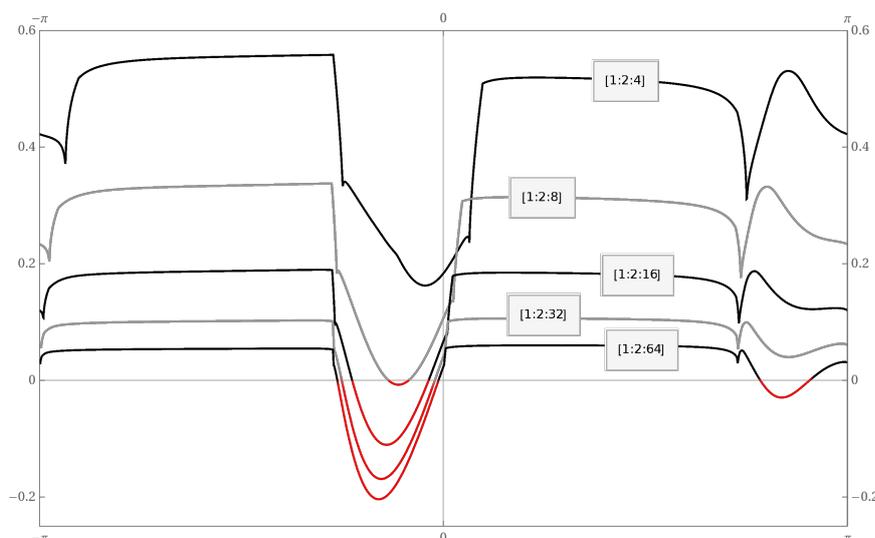


FIGURE 4.2 – Tracé du gap spectral  $\partial\mathcal{S} \ni \xi \mapsto \Lambda_+(\xi) - \Lambda_-(\xi)$  du réseau Losange pour différents rapports de température (ici, l'ensemble  $\partial\mathcal{S}$  a été tracé sur un cercle et l'angle polaire 0 correspond à la direction  $\vartheta^{-1}$ ).

#### 4.4.2 Le réseau triangulaire

Notre deuxième exemple est le réseau triangulaire déjà considéré dans [56] et illustré sur le volet gauche de la Figure 4.4. Ici on a  $|\mathcal{I}| = 6$ ,  $|\partial\mathcal{I}| = 3$  et les paramètres sont

$$\kappa^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ a & 1/2 & a & b & 0 & b \\ 0 & a & 1/2 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 1/2 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/2 & a \\ a & b & 0 & b & a & 1/2 \end{bmatrix},$$

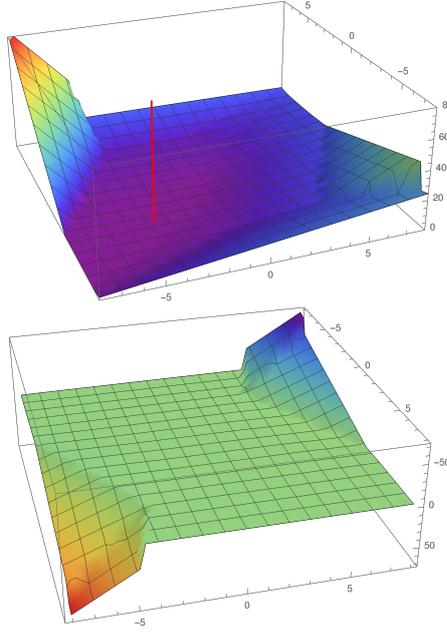


FIGURE 4.3 – La fonction taux  $I$  (gauche, la ligne verticale désigne la position du courant moyen  $\bar{\varphi}$ ) et la fonction de fluctuation  $\Delta$  (gauche) pour le réseau Losange (voir le texte principal pour plus de détails).

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 = 1.$$

En équilibre thermique, on constate que  $\mathcal{S}$  est le disque de rayon  $\sqrt{3}/2$  centré en 0 sur  $\mathcal{L}^\perp$ . Le gap spectral  $\Lambda_+ - \Lambda_-$  est ouvert, comme on le voit sur le volet droit de la figure 4.4. Par conséquent, là encore, le théorème 4.2.11 s'applique : le PGD global (4.2.23) et la RF (4.1.19) sont valables sur  $\mathcal{L}^\perp$  près de l'équilibre. Le gap spectral sur la frontière  $\partial\mathcal{S}$  est tracé dans la Figure 4.5 pour des rapports de températures variés  $[\vartheta_1 : \vartheta_2 : \vartheta_3]$ . On observe un comportement similaire à celui de notre premier exemple.

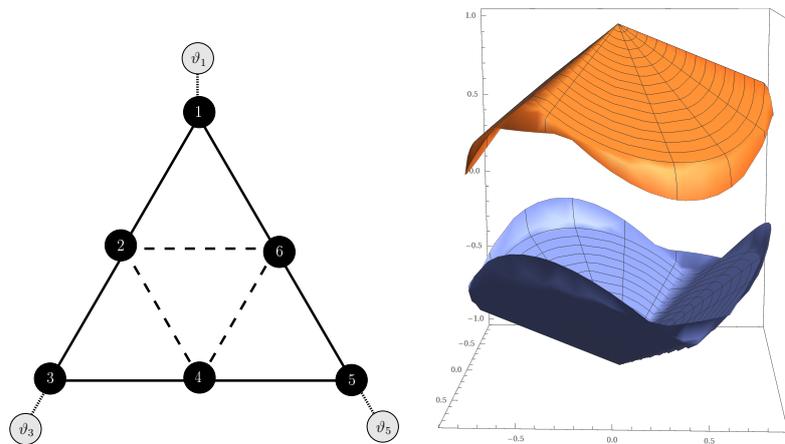


FIGURE 4.4 – Réseau triangulaire (gauche) et un tracé (droit) des fonctions  $\mathcal{S} \ni \xi \mapsto \Lambda_+ \pm (\xi)$  en équilibre thermique.

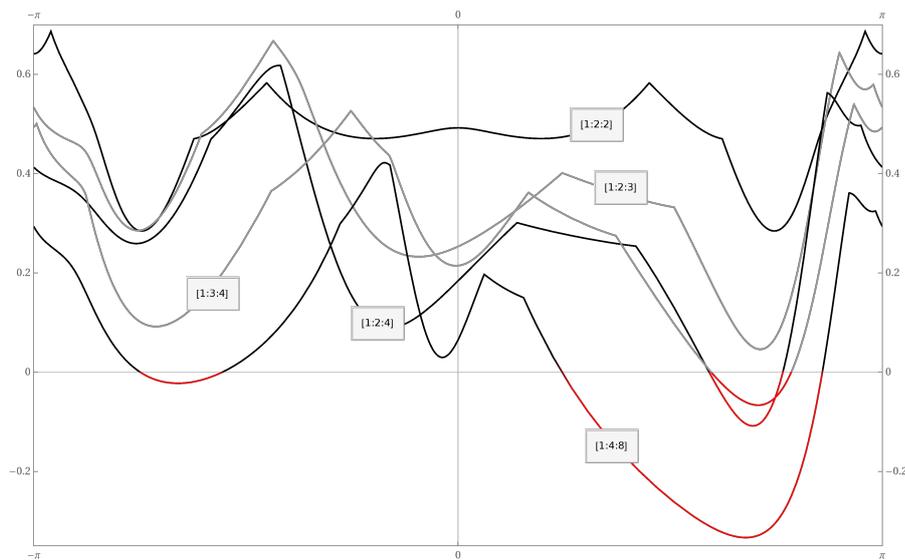


FIGURE 4.5 – Le gap spectral  $\Lambda_+ - \Lambda_-$  du réseau triangulaire sur la frontière  $\partial\mathcal{S}$  pour des rapports de températures différents.

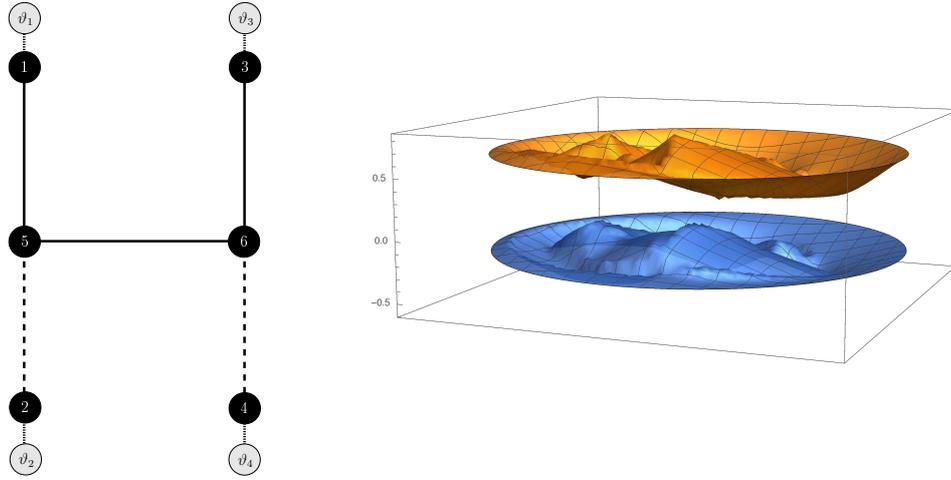


FIGURE 4.6 – The heat pump network (left) and a plot of the functions  $\partial\mathcal{S} \ni \xi \mapsto \Lambda_{\pm}(\xi)$  for the temperature ratios  $[10 : 3.6 : 7 : 6.8]$ .

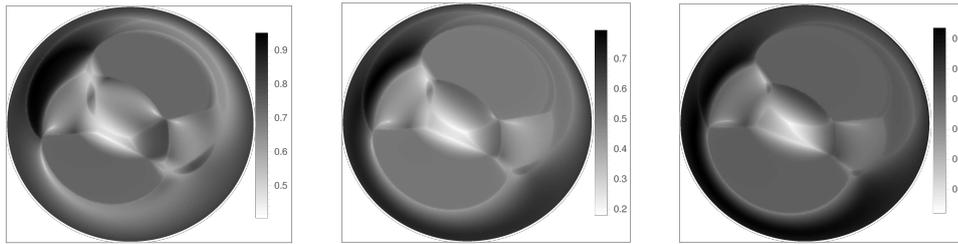


FIGURE 4.7 – Tracés de la densité du gap spectral  $\Lambda_+ - \Lambda_-$  en tant que fonction de  $\xi \in \partial\mathcal{S}$  pour les rapports de températures  $[10 : 3.6 : 7 : 6.8]$ ,  $[20 : 3.6 : 7 : 6.8]$  et  $[40 : 3.6 : 7 : 6.8]$ .

### 4.4.3 Le réseau pompe de chaleur

Notre dernier exemple est le réseau "Pompe de chaleur" de [37], voir la Figure 4.6. Avec  $|\mathcal{I}| = 6$  et  $|\partial\mathcal{I}| = 4$ , les paramètres :

$$\kappa^2 = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-b & 0 & b \\ a & b & 0 & 0 & 1-2a-b & b \\ 0 & 0 & a & b & a & 1-2a-b \end{bmatrix}$$

$$a = -40, \quad b = -20,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1,$$

$$\vartheta_1 = 10, \quad \vartheta_2 = 3.6, \quad \vartheta_3 = 7, \quad \vartheta_4 = 6.8,$$

ont été choisis dans [37] de telle sorte que le courant thermique constant moyen entre les sommets 5 et 6 disparaisse tandis que la chaleur circule du réservoir chaud au froid du côté gauche, et du froid au chaud du côté droit. Ainsi, le côté droit de l'appareil agit comme une pompe à chaleur. Le volet droit de la Figure 4.6 on trace les deux fonctions  $\Lambda_{\pm}$  sur la frontière  $\partial\mathcal{S}$ .<sup>1</sup> La Hypothèse 4.2.10 est satisfaite, de sorte que le principe de grande déviation (4.2.23) et la RF (4.1.19) sont valables sur  $\mathcal{L}^{\perp}$  près de ce régime de pompe à chaleur hors équilibre. Comme montré dans la Figure 4.7, ici encore, le gap spectral se ferme lorsque la différence entre les températures augmente.

---

1. Dans les figures 4.6 et 4.7 l'ensemble  $\partial\mathcal{S}$  est tracé sur le disque unitaire fermé en traçant d'abord  $\partial\mathcal{S}$  sur la sphère unitaire, puis en traçant le point avec les coordonnées sphériques  $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  sur cette sphère jusqu'au point  $\frac{\theta}{\pi}(\cos \varphi, \sin \varphi)$  du plan

## Bibliographie

- [1] Aza N.J.B., Bru J-B., Pedra de Siqueira W., and Müssnich C.P.A.M., Large Deviations in weakly Interacting Fermions I - Generating Functions as Gaussian Berezing Integrals and Bounds on Large Pfaffians, p 10,13,16,33,36,37,39,45,52,69,85,88,90,92,98,99,101,104,127,129,133,147,149 e 151, (2017).
- [2] Atilgan, A.R., Durrell, S.R., Jernigan, R.L., Demirel, M.C., Keskin, O., and Bahar, I. : Anisotropy of fluctuation dynamics of proteins with an elastic network model. *Biophys. J.* **80**, 505–515 (2001).
- [3] Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V., and Jank, G. : *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Birkhäuser, Basel, (2003).
- [4] Andrieux, D., Gaspard, P., Monnai, T., and Tasaki, S. : The fluctuation theorem for currents in open quantum systems. *New J. Phys.* 11, 043014 (2009).
- [5] Bach, A. : Boltzmann's Probability Distribution of 1877. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 41, no. 1, pp. 1–40. JSTOR (1990).

- [6] Bennet, S. : A History of Control Engineering. IEE Control Engineering Series 8, Peter Peregrinus Ltd., London (1979)
- [7] Bakry D. Gentil I. Ledoux M. : Analysis and geometry of Markov diffusion operators Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, (2014)
- [8] Bochkov, G.N., and Kuzovlev, Yu.E. : General theory of thermal fluctuations in nonlinear systems. Sov. Phys. JETP **45**, 125–130 (1977).
- [9] Bodineau, T., and Lefevre, R. : Large deviations of lattice Hamiltonian dynamics coupled to stochastic thermostats. J. Stat. Phys. **133**, 1–27 (2008).
- [10] Benoist, T., Jakšić, V., and Pillet, C.-A. : Energy statistics in open harmonic networks. J. Stat. Phys. **168**, 1016–1030 (2017).
- [11] Benoist, T., Panati, A., and Pautrat, Y. : Heat conservation and fluctuations for open quantum systems in the Two-Time Measurement picture. Preprint arXiv :1810.09999.
- [12] van Zon, R., Ciliberto, S., and Cohen, E.G.D. : Power and heat fluctuation theorems for electric circuits. Phys. Rev. Lett. **92**, 130601 (2004).
- [13] Douarche, F., Joubaud, S., Garnier, N.B., Petrosyan, A. and Ciliberto, S. : Work fluctuation theorems for harmonic oscillators. Phys. Rev. Lett. **97**, 140603 (2006).
- [14] Cuneo, N., and Eckmann, J.-P. : Controlling general polynomial networks. Commun. Math. Phys. **328**, 1255–1274 (2014).
- [15] Cuneo, N., Eckmann, J.-P., Hairer, M., and Rey-Bellet, L. : Non-equilibrium steady states for networks of oscillators. Electronic J. Proba. **23**, 1–28 (2018).
- [16] Chetrite, R., and Gawędzki, K. : Fluctuation relations for diffusion processes. Commun. Math. Phys. **282**, 469–518 (2008).

- [17] Crooks, G.E. : Nonequilibrium measurements of free energy differences for microscopically reversible Markovian systems. *J. Stat. Phys.* 90, 1481–1487 (1998).
- [18] Cramér, H. : Sur un nouveau théorème limite dans la théorie des probabilités Colloque consacré à la théorie des probabilités, vol. 3, Hermann, Paris, pp. 2 ?23 (1938).
- [19] Damak M., Hammami M. and Pillet, C.-A. : A detailed fluctuation theorem for heat fluxes in harmonic networks out of thermal equilibrium. *J Stat Phys* 180, 263 ?296 (2020).
- [20] den Hollander, F. : *Large Deviations*. Fields Institute Monographs, AMS, Providence, Rhodes Island, (2000).
- [21] Deuschel, J.-D., and Strook, D.W. : *Large Deviations*. Vol. 137, Academic press Boston, p69 (1989).
- [22] Dembo, A., and Zeitouni, O. : *Large Deviations. Techniques and Applications*. Springer, Berlin, (1998).
- [23] Donsker, M.D. , and Varadhan, S.R.S. : *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I* *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 1 ?47(1975).
- [24] Donsker, M.D. , and Varadhan, S.R.S. : *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. II* *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 279 ?301(1975).
- [25] Donsker, M.D. , and Varadhan, S.R.S. : *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III* *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (4), 389 ?461 (1976).
- [26] Donsker, M.D. , and Varadhan, S.R.S. : *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. IV* *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (2), 183 ?212 (1983).
- [27] Ellis, R. : *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. 2006th ed., Classics in Mathematics (Springer, 2006).

- [28] Ellis, R.S : *The theory of large deviations : From Boltzmann ?s 1877 calculation to equilibrium macrostates in 2D turbulence.* Physica D 133, 106 ?136, (1999).
- [29] Ellis, R.S : *Large deviations for a general class of random vectors* Ann. Probab. 12 (1), 1 ?12,(1984).
- [30] Ellis, R.S : *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics* Springer, New York, (1985).
- [31] Ellis, R.S : *An overview of the theory of large deviations and applications to statistical mechanics* Scand. Actuar. J. 1 97 ?142 (1995).
- [32] Ellis, R.S : *The theory of large deviations and applications to statistical mechanics.* Lectures for the International Seminar on Extreme Events in Complex Dynamics, (2006).
- [33] Evans, D.J., Cohen, E.G.D., and Morriss, G.P. : Probability of second law violation in shearing steady flows. Phys. Rev. Lett. **71**, 2401–2404 (1993).
- [34] Eckmann, J.-P., Pillet, C.-A., and Rey-Bellet, L. : Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures. Commun. Math. Phys. **201**, 657–697 (1999).
- [35] Evans, D.J., and Searles, D.J. : Equilibrium microstates which generate second law violating steady states. Phys Rev. E **50**, 1645–1648 (1994).
- [36] Evans LC. : An introduction to stochastic differential equations. Cours version 1.2.
- [37] Eckmann, J.-P., and Zabey, E. : Strange heat flux in (an)harmonic networks. J. Stat. Phys. **114** 515–523 (2004).
- [38] Farago, J. : Injected power fluctuations in Langevin equation. J. Stat. Phys. **107**, 781–803 (2002).

- [39] Fowler, R.H. : *Statistical Mechanics*. 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (1966).
- [40] Fernández-Cara, E and Zuazua, E. : *Control Theory, Mathematical Achievements and Perspectives*. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* **26**, 79-140 (2003).
- [41] Freidlin, M.I. and Wentzell, A.D. : *Random Perturbations of Dynamical Systems*. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 260, SpringerVerlag, New York, (1984).
- [42] Gärtner, J. : *On large deviations from the invariant measure*. *Theory Probab. Appl.* **22**, 24-39, (1977).
- [43] Gallavotti, G. : *Extension of Onsager's reciprocity to large fields and the chaotic hypothesis*. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4334-4337 (1996).
- [44] Gallavotti, G., and Cohen, E.G.D. : *Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics*. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2694-2697 (1995).
- [45] Gallavotti, G., and Cohen, E.G.D. : *Dynamical ensembles in stationary states*. *J. Stat. Phys.* **80**, 931-970 (1995).
- [46] Granger, L., Mehlis, J., Roldán, É., Ciliberto, S., and Kantz, H. : *Fluctuation theorem between non-equilibrium states in an RC circuit*. *New J. Phys.* **17**, 065005 (2015)
- [47] Haliloglu, T.B., and Erman, B. : *Gaussian dynamics of folded proteins*. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3090-3093 (1997).
- [48] Jarzynski, C. : *A nonequilibrium equality for free energy differences*. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2690-2693 (1997).
- [49] Jakšić, V., Nersesyan, V., Pillet, C.-A., and Shirikyan, A. : *Large deviations from a stationary measure for a class of dissipative PDEs with random kicks* *Commun. Pure Appl. Math.* **68**, 2108-43 (2015).

- [50] Jakšić, V., Nersesyan, V., Pillet, C.-A., and Shirikyan, A. : Large deviations and mixing for dissipative PDEs with unbounded random kicks. *Nonlinearity* **31**, 540–596 (2018).
- [51] Jakšić, V., Nersesyan, V., Pillet, C.-A., and Shirikyan, A. : Large deviations and Gallavotti-Cohen principle for dissipative PDEs with rough noise. *Commun. Math. Phys.* **336**, 131–170 (2015).
- [52] Jakšić, V., Nersesyan, V., Pillet, C.-A., and Shirikyan, A. : Large deviations and entropy production in viscous fluid flows. Preprint arXiv :1902.03278.
- [53] Jakšić, V., Ogata, Y., Pautrat, Y., and Pillet, C.-A. : Entropic fluctuations in quantum statistical mechanics—an introduction. In *Quantum Theory from Small to Large Scales*. J. Fröhlich, M. Salmhofer, V. Mastropietro, W. De Roeck and L.F. Cugliandolo editors. Oxford University Press, Oxford, 2012.
- [54] Jop, P., Petrosyan, A., and Ciliberto, S. : Work and dissipation fluctuations near the stochastic resonance of a colloidal particle. *EPL* **81**, 50005 (2008).
- [55] Jakšić, V., Pillet, C.-A., and Rey-Bellet, L. : Entropic fluctuations in statistical mechanics I. Classical dynamical systems. *Nonlinearity* **24**, 699–763 (2011).
- [56] Jakšić, V., Pillet, C.-A., and Shirikyan, A. : Entropic fluctuations in thermally driven harmonic networks. *J. Stat. Phys.* **166**, 926–1015 (2017).
- [57] Khasminski, R. : stochastic stability of differential equations. Springer, Second edition (1980).
- [58] Kundu, A., Sabhapandit, S., and Dhar, A. : Large deviations of heat flow in harmonic chains. *J. Stat. Mech.* P03007 (2011).
- [59] Lévêque, O. : Introduction au calcul stochastique et aux mathématiques financières. (2004-2005).

- [60] Lancaster, P., and Rodman, L. : *The Algebraic Riccati Equation*. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [61] Lipster, R.S., and Shiriyayev, A.N. : *Statistics of Random Processes : I. General Theory*. Springer, Science+Meridia LLC (1977).
- [62] Lebowitz, J.L., and Spohn, H. : A Gallavotti–Cohen-type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics. *J. Stat. Phys.* **95**, 333–365 (1999).
- [63] Maes, C. : The fluctuation theorem as a Gibbs property. *J. Stat. Phys.* **95**, 367–392 (1999).
- [64] McKean, H.P. : *Stochastic Integrals*. Academic Press NewYork and london (1969).
- [65] Maes, C., Netočný, K., and Verschuere, M. : Heat conduction networks. *J. Stat. Phys.* **111**, 1219–1244 (2003).
- [66] Nersesyan, V. : Large deviations for the Navier-Stokes equations driven by a white-in-time noise. To appear in *Ann. H. Lebesgue*, (2019).
- [67] Nickelsen, D., Engel, A. : Asymptotics of work distributions : the pre-exponential factor. *Eur. Phys. J. B* **82**, 207–218 (2011)
- [68] Oksendal B. : *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag Heidelberg New York, Fifth Edition (2000).
- [69] Onsager L., Machlup S. : Fluctuations and irreversible processes *Phys. Rev.* **91** (6) 1505–1512 (1953).
- [70] Rákos, A., Harris, R.J. : On the range of validity of the fluctuation theorem for stochastic Markovian dynamics. *J. Stat. Mech.* 2011, P05005 (2008).
- [71] Rondoni, L., and Mejía-Monasterio, C. : Fluctuations in non-equilibrium statistical mechanics : models, mathematical theory, physical mechanisms. *Nonlinearity* **20**, 1–37 (2007).

- [72] Rockafellar, R.T. : *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1970).
- [73] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics* 4. Academic, New York, (1978).
- [74] Rey-Bellet, L., and Thomas, L.E. : Fluctuations of the entropy production in anharmonic chains. *Ann. Henri Poincaré* **3**, 483–502 (2002).
- [75] Ruelle, D. : *Statistical Mechanics : Rigorous Results (3<sup>rd</sup> edition)*. Mathematical Physics Monograph Series. Benjamin, Reading, MA, 1977.
- [76] Scherer, C. : The solution set of the algebraic Riccati equation and the algebraic Riccati inequality. *Lin. Algebra Appl.* 153, 99–122 (1991).
- [77] Seifert, U. : Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines. *Rep. Prog. Phys.* **75**, 126001 (2012).
- [78] Touchette, H. *The large deviation approach to statistical mechanics*. *Phys. Rep.* 478, 1 (2009)
- [79] Chetrite R., Touchette H. *Nonequilibrium microcanonical and canonical ensembles and their equivalence*. *Phys. Rev. Lett.* 111, 120601 (2013)
- [80] Varadhan S. R. S. *Lectures on diffusion problems and partial differential equations*. Springer, New York, 1980.
- [81] Visco, P. : Work fluctuations for a Brownian particle between two thermostats. *J. Stat. Mech.* P06006, (2006).
- [82] Watson, G.N. : *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge (1966).