



HAL
open science

États de Hadamard pour des champs de Dirac en espace-temps courbe

Théo Stoskopf

► **To cite this version:**

Théo Stoskopf. États de Hadamard pour des champs de Dirac en espace-temps courbe. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT: 2024UPASM006 . tel-04562647

HAL Id: tel-04562647

<https://theses.hal.science/tel-04562647>

Submitted on 29 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

États de Hadamard pour des champs de Dirac en espace-temps courbe

Hadamard states for Dirac fields on curved spacetime

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 574 : mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales
Graduate School : Mathématiques, Référent : Faculté des sciences
d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **Laboratoire de mathématiques d'Orsay**
(**Université Paris-Saclay, CNRS**), sous la direction de **Christian GÉRARD**, Professeur

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 21 mars 2024, par

Théo STOSKOPF

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Dietrich HÄFNER Professeur, Université Grenoble Alpes	Président
Nicolas PINAMONTI Professeur, University of Genova	Rapporteur & Examineur
Rainer VERCH Professeur, University of Leipzig	Rapporteur & Examineur
Nadine GROBE Professeur, University of Freiburg	Examinatrice
Andrei MOROIANU Directeur de recherche, CNRS, Université Paris-Saclay	Examineur

Titre : États de Hadamard pour des champs de Dirac en espace-temps courbe

Mots clés : États de Hadamard, Condition du spectre microlocal, Calcul pseudo-différentiel, Équation de Dirac, Théorie quantique des champs

Résumé : Le sujet de la thèse consiste à appliquer des techniques d'analyse microlocale à la construction d'états de Hadamard pour des champs de Dirac, pour des espaces-temps généraux sous des hypothèses faibles sur leur comportement à l'infini. Dans une deuxième partie il s'agira, pour des espaces temps asymptotiquement statiques, de construire les états de vide entrants et sortants et de montrer leur propriété de Hadamard.

Title : Hadamard states for Dirac fields on curved spacetime

Keywords : Hadamard states, Microlocal spectrum condition, Pseudo-differential calculus, Dirac equation, Quantum field theory

Abstract : This thesis is about applying microlocal techniques to the construction of Hadamard states for Dirac fields on curved spacetimes with weak conditions on their asymptotical behaviors. In the latter part we will focus on the construction of in and out vacuum states and prove their Hadamard property.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse pour son soutien, sa patience et son enthousiasme. Ses explications éclairées, ses conseils avisés, et sa bienveillance ont été des piliers essentiels à la réalisation de ce travail. C'est un honneur d'avoir été son étudiant durant cette thèse ; ces années auront été très importantes pour moi. Je lui suis également reconnaissant pour ses relectures minutieuses.

Je remercie Nicola Pinamonti et Rainer Verch d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, pour leurs relectures attentives et les commentaires qu'ils m'ont adressés. Je suis reconnaissant envers Dietrich Häfner, Nadine Große, et Andrei Moroianu d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Un grand merci à Stéphane Nonnenmacher pour son aide à des moments clés de ma thèse, pour son investissement au service de la réussite de tous.

Je suis reconnaissant envers tous les enseignants et professeurs qui ont aiguisé et nourri ma curiosité, à tous ces espaces de réflexions et de libertés qu'ils m'ont permis de découvrir. Je remercie également Rémi Leclercq pour qui j'ai eu le plaisir de dispenser des séances de TD.

Je désire remercier mes amis de thèse : Nicolas Camps, Brice Flamencourt, Louise Gassot, et Dorian Ni. Nos moments de partage, qu'ils soient d'ordre scientifique ou personnel, ont été pour moi une source inestimable d'inspiration et de plaisir. Entre les débats passionnés, et les pauses thé qui s'étiraient sans doute un peu trop, vous avez contribué à rendre ces années heureuses. Plus généralement, j'ai eu, au LMO, le plaisir de partager des conversations au détour d'une pause, d'un retour en RER, ou d'une sortie sportive avec de nombreuses personnes. Je suis reconnaissant pour tous ces échanges.

Je remercie également les équipes de l'EDMH, et plus particulièrement Clotilde d'Epenoux et Séverine Simon, qui m'ont permis de surmonter les nombreuses démarches administratives durant ces années de thèse.

Hors des murs du laboratoire, mes pensées vont à mes amis Pierre et Doriann. Merci pour tous les moments que nous avons partagés et ceux qui nous attendent encore.

Je souhaite plus largement témoigner toute ma reconnaissance envers mes amis, vous avez su me faire sortir de mon petit monde quand cela était nécessaire. Votre présence a été une véritable respiration. Une mention spéciale pour Loulou et toutes tes défaites amèrement acceptées.

À ma famille, à ma famille bretonne, votre soutien m'a été des plus précieux. Je remercie Ju pour nos déambulations et nos découvertes.

Enfin, je remercie mon amour, Xuan, pour son soutien et son exigence, et mon chat, Oméga, pour ses interventions imprévisibles durant de nombreux rendez-vous virtuels.

CONTENTS

Chapitre 1. Introduction	8
1. Opérateur de Dirac et champs de Dirac en espace-temps plat	9
1.1. Notation	9
1.2. Espace-temps de Minkowski	9
1.3. Groupe de Lorentz	10
1.4. Représentations	10
1.5. Opérateur de Dirac	11
2. Quantification et états quasi-libres	14
2.1. Quantification de Fock	14
2.2. Algèbre CAR	15
2.3. Construction GNS	16
3. Espace-temps courbe	18
3.1. Espace-temps	18
3.2. Structure spin	24
3.3. Fibrés associés	24
3.4. Connexion spinorielle	25
3.5. Structure spin sur un cylindre	25
3.6. Variété à géométrie bornée	26
4. Analyse micro-locale sur les variétés	31
4.1. Distribution sur les variétés	31
4.2. Front d'onde d'une distribution	33
4.3. Opération sur les ensembles coniques	34
4.4. Opération sur les distributions	34
4.5. Opérateurs linéaires	34
4.6. Parametrix remarquables	35
4.7. Parametrix distinguées d'opérateurs normalement hyperboliques	36
4.8. Parametrix distinguées d'opérateurs pré-normalement hyperboliques	37
5. Champs de Dirac	39
5.1. Opérateur de Dirac en espace-temps courbes	39
5.2. Champs classiques	40
5.3. Champs quantiques	41
6. États de Hadamard	43
6.1. État de Hadamard	43
6.2. Inverse de Feynman	43
7. Calcul pseudo-différentiel	44
7.1. Calcul pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^n	44
7.2. Calcul pseudo-différentiel sur une variété	47
7.3. Calcul pseudo-différentiel sur les variétés à géométrie bornée	49
8. États de Hadamard pour des champs de Dirac sur des variétés à géométrie bornée	52
8.1. Cadre géométrique	52
8.2. Préparation de l'opérateur de Dirac	54
8.3. Construction des projecteurs spectraux déformés	55
8.4. État de Hadamard	56
9. Champs de Dirac sur des espace-temps asymptotiquement plats	58
9.1. Cadre géométrique	58
9.2. Réduction de l'opérateur de Dirac	60
9.3. Construction des projecteurs spectraux déformés	62
Chapitre 2. Hadamard states for quantized Dirac fields on Lorentzian manifolds of bounded geometry	65

10.	Introduction	66
10.1.	Quantum fields on curved spacetimes	66
10.2.	Hadamard states for Dirac fields	66
10.3.	Content of this paper	67
10.4.	Plan of the paper	68
10.5.	Notations	69
11.	Spin structures and Dirac operators on Lorentzian spacetimes	69
11.1.	Background	69
11.2.	Embedding of \mathbb{R}^d into $\mathbb{R}^{1,d}$	70
11.3.	Lorentzian manifolds	71
11.4.	Spin structures	72
11.5.	Spinor bundle	72
11.6.	Spin structures on cartesian products	74
11.7.	Dirac operators	74
12.	Quantization of the Dirac equation on curved spacetimes	76
12.1.	CAR*-algebras and quasi-free states	76
12.2.	Quantization of the Dirac equation	77
12.3.	Hadamard states for Dirac fields	78
12.4.	Hadamard condition for Cauchy surface covariances	80
12.5.	Conformal transformations	80
13.	Dirac operators on spacetimes of bounded geometry	81
13.1.	Manifolds of bounded geometry	81
13.2.	Lorentzian manifolds of bounded geometry	83
13.3.	Cauchy surfaces of bounded geometry	83
13.4.	Spin structures on manifolds of bounded geometry	84
13.5.	Hypotheses	84
14.	Pseudodifferential calculus on manifolds of bounded geometry	85
14.1.	Symbol classes	86
14.2.	Pseudodifferential operators	86
14.3.	Functional calculus	89
15.	Pure Hadamard states for Dirac fields	91
15.1.	Reduction of Dirac operators on cartesian products	91
15.2.	Model case	93
15.3.	Some preparations	95
15.4.	Construction of some projections	96
15.5.	Pure Hadamard states	98
15.6.	Spacetime covariances and Feynman inverses	98
16.	Hadamard states on arbitrary spacetimes	99
16.1.	The vacuum state associated to a Killing field	99
16.2.	Deformation of Dirac operators	100
16.3.	Existence of Hadamard states	101
	Appendices	102
	A.	102
	A.1.	102
	A.2.	103
Chapitre 3.	Hadamard property of the in and out states for Dirac fields on asymptotically static spacetimes	105
17.	Introduction	106
17.1.	<i>In/out</i> vacuum states	106
17.2.	Results	106
17.3.	Outline of the proof	108
17.4.	Plan of the paper	109

17.5. Notation	109
18. Quantization of Dirac equations on curved spacetimes	110
18.1. Dirac equations on curved spacetimes	110
18.2. Conformal transformations	113
18.3. Quantization of Dirac equation on curved spacetimes	113
18.4. The vacuum state for Dirac fields on static spacetimes	116
19. Dirac operators on asymptotically static spacetimes	118
19.1. Asymptotically static spacetimes	118
19.2. Spin structures	120
19.3. Dirac operators	121
20. Pseudodifferential calculus	121
20.1. Notations	121
20.2. Time-dependent pseudodifferential operators	122
20.3. Functional calculus	123
21. The in/out vacuum states	125
21.1. Reduction of the Dirac operator	125
21.2. Some preparations	128
21.3. Construction of some projections	130
21.4. The in/out vacua for D	132
Bibliographie	136

CHAPITRE 1

Introduction

La théorie quantique des champs (QFT) permet de combiner les principes de la mécanique quantique (QM) et ceux de la relativité restreinte. La première étant basée sur l'équation de Schrödinger, celle-ci n'est pas invariante sous les transformations de Lorentz, la rendant incompatible avec la relativité restreinte. En outre, les phénomènes de création et d'annihilation de particules ne sont pas autorisés en mécanique quantique.

En mécanique quantique, les objets étudiés sont les *états*, représentés par des vecteurs dans un espace de Hilbert séparable, et les *observables*, qui sont des opérateurs auto-adjoints agissant sur cet espace de Hilbert. En revanche, en QFT, les objets principaux sont les champs, qui sont des distributions à valeurs dans des opérateurs hilbertiens. Plus précisément, dans le contexte de la QFT sur une variété M , un champ ϕ est une distribution $\phi : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, où \mathcal{H} est un espace de Hilbert décrivant les états des systèmes à plusieurs particules.

Pour définir ces objets, il faut appliquer la seconde quantification à une équation décrivant des champs classiques, tels que l'équation de Klein-Gordon, Maxwell ou Dirac. Pour cela il faut d'abord déterminer un état de vide, c'est-à-dire un état du champ quantique sans particules. Dans le cadre de l'espace de Minkowski, il existe un état de vide naturel, invariant sous l'action du groupe de Poincaré. Cependant, sur un espace-temps courbe général, il n'existe pas d'état de vide canonique.

La QFT en espace-temps courbe permet de décrire des champs quantiques soumis à un champ gravitationnel, représenté par une métrique lorentzienne. Ce cadre est adapté pour étudier les phénomènes quantiques soumis à des contraintes gravitationnelles, tout en négligeant l'influence du système étudié sur le champ gravitationnel.

Pour résoudre le problème de l'absence d'un état de vide canonique en espace-temps courbe, une approche classique consiste à effectuer une *quantification algébrique*. Pour une théorie de champs libres, il est nécessaire de définir d'abord un espace des phases approprié. Dans le cas des champs bosoniques, on introduit une structure *symplectique*, tandis que pour les champs fermioniques, on cherche une structure *euclidienne*. Ensuite, on définit l'algèbre des relations de commutation canonique (CCR) pour les bosons et l'algèbre des relations d'anticommutation (CAR) pour les fermions. L'objectif est de représenter ces algèbres abstraites en tant qu'algèbres d'observables agissant sur un espace de Hilbert concret. Pour ce faire, il faut définir des *états*, c'est-à-dire des formes linéaires positives qui agissent sur ces algèbres abstraites. Comme mentionné précédemment, il n'existe pas d'état de vide canonique en espace-temps courbe. Cependant, on peut définir une famille d'états qui se comporte localement, en un certain sens, comme l'état de vide de Minkowski. Ces états sont appelés *états de Hadamard* et ont été initialement définis par une condition sur le développement asymptotique de leurs fonctions à deux points. Une caractérisation plus précise a été découverte par Radzikowski [R1], qui se base uniquement sur le front d'onde des fonctions à deux points associées.

Dans cette thèse, nous nous intéressons uniquement au cas de l'équation de Dirac, qui décrit des champs *fermioniques*.

1. OPÉRATEUR DE DIRAC ET CHAMPS DE DIRAC EN ESPACE-TEMPS PLAT

Dans cette section, nous présentons l'opérateur de Dirac, qui est un opérateur différentiel utilisé pour décrire des particules de spin 1/2 en physique des particules. Nous présentons également sa quantification dans le cas de l'espace de Minkowski.

L'opérateur de Dirac sans masse est obtenu en cherchant une racine carrée de l'opérateur de Klein-Gordon sans masse. Pour cela, on cherche des matrices γ_i satisfaisant les relations suivantes :

$$(-\gamma_0 \partial_t + \sum \gamma_i \partial_{x_i})^2 = -\partial_t^2 + \Delta.$$

où ∂_t et ∂_i sont les dérivées partielles par rapport au temps et à la i ème coordonnée spatiale, respectivement, et Δ est l'opérateur laplacien. Le signe moins devant γ_0 sert à obtenir des notations cohérentes entre l'équation de Dirac sur l'espace de Minkowski, et celle en espace-temps courbe. En regardant coefficient par coefficient, en notant δ_{ij} les symboles de Kronecker, on obtient les relations suivantes pour les matrices γ_i :

$$\begin{cases} \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{i,j} \mathbb{1} & \text{si } i, j \geq 1, \\ \gamma_0 \gamma_j + \gamma_j \gamma_0 = -2\delta_{0,j} \mathbb{1} & \text{pour tout } j. \end{cases}$$

Obtenir de telles matrices γ_i revient à chercher une représentation de l'algèbre abstraite engendrée par les relations ainsi obtenues. Plus précisément, on cherche une représentation de l'algèbre de Clifford associée à l'espace de Minkowski. Une fois que l'on a trouvé une représentation de l'*algèbre de Clifford*, on peut construire l'opérateur de Dirac comme une somme pondérée de dérivées partielles, où les poids sont donnés par les matrices γ_i . En ajoutant un terme de masse, l'opérateur de Dirac s'écrit alors

$$(-i\gamma_0 \partial_t + \sum i\gamma_i \partial_{x_i} - m)\psi = 0,$$

où ψ est une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel associé à la représentation de l'algèbre de Clifford, appelé encore *espace des spineurs*, γ_μ sont les matrices de Dirac, m est la masse de la particule et ∂_μ désigne la dérivée covariante par rapport à la métrique de Minkowski. Les champs de Dirac classiques sont alors les fonctions à valeurs dans l'espace des spineurs qui satisfont l'équation de Dirac. Ils sont utilisés pour décrire les particules de spin 1/2, comme les électrons et les neutrinos. Les champs de Dirac peuvent être quantifiés en utilisant la méthode de la seconde quantification, qui consiste à considérer les champs comme des opérateurs agissant sur un espace de Fock construit à partir d'un espace de Hilbert pour une particule.

1.1. Notation. On rassemble ici les notations utilisées dans cette partie.

1.1.1. Espace vectoriel. Dans cette section les espaces vectoriels seront la plupart du temps notés V . Lorsqu'ils seront munis d'une forme quadratique, celle-ci sera noté q .

1.1.2. Algèbre tensorielle. Soit V un espace vectoriel, on notera $\otimes V$ l'algèbre tensorielle associée à V .

1.2. Espace-temps de Minkowski. Dans cette section, nous allons introduire l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$.

Définition 1.1. *L'espace temps de Minkowski, noté $\mathbb{R}^{1,d}$, est l'espace vectoriel \mathbb{R}^{1+d} munit de la forme bilinéaire η donnée par*

$$x \cdot \eta x = (t, x) \cdot \eta(t, x) = -t^2 + x^2,$$

en notant $x = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{1,d}$.

Définition 1.2. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^{1,d}$ est dit de type temps lorsque $x \cdot \eta x < 0$, de type nul lorsque $x \cdot \eta x = 0$, de type causal si $x \cdot \eta x \leq 0$, et de type espace si $x \cdot \eta x > 0$.

$C_{\pm} := \{x \in \mathbb{R}^{1,d} : x \cdot \eta x < 0, \pm t > 0\}$, respectivement $\overline{C}_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^{1,d} : x \cdot \eta x \leq 0, \pm t > 0\}$ sont appelés cônes de lumière ouverts dirigés vers le futur/passé respectivement cônes de lumière fermés dirigés vers le futur/passé.

$N := \{x \in \mathbb{R}^{1,d} : x \cdot \eta x = 0\}$, respectivement $N_{\pm} := \{x \in \mathbb{R}^{1,d} : x \cdot \eta x = 0\} \cap \{\pm t > 0\}$ sont appelés cône nul respectivement cône nul dirigé vers le futur/passé.

On peut alors étendre ces définitions aux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{1,d}$, plus tard on étendra également ces définitions au cas des variétés lorentziennes.

Définition 1.3. Un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^{1,d}$ est de type temps lorsqu'il contient des vecteurs de type temps et de type espace, de type nul s'il est tangent au cône N , et de type espace s'il ne contient que des vecteurs de type espace.

Définition 1.4. Soit $K \subset \mathbb{R}^{1,d}$, on pose $I_{\pm}(K) := K + C_{\pm}$, respectivement $J_{\pm}(K) := K + \overline{C}_{\pm}$, est appelé le futur/passé de type temps, respectivement de type causal de K , et $J(K) := J_{+}(K) \cup J_{-}(K)$ l'ombre causale de K .

Deux ensembles K_1, K_2 sont appelés causalement disjoints si $K_1 \cap J(K_2) = \emptyset$, ou de façon équivalente si $J(K_1) \cap K_2 = \emptyset$.

Une fonction f de \mathbb{R}^n est appelé compacte en espace, respectivement compacte en espace dans le futur/passé, si $\text{supp} f \subset J(K)$, respectivement $\text{supp} f \subset J_{\pm}(K)$ pour un certain ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$. On note dans la suite l'ensemble des tels fonction lisses $C_{sc}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, respectivement $C_{\pm,sc}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

1.3. Groupe de Lorentz.

Définition 1.5. Le groupe orthogonal $O(\mathbb{R}^{1+d}, \eta)$ est noté $O(1, d)$ et est appelé groupe de Lorentz.

Le groupe spécial orthogonal $SO(1, d)$ est le sous-groupe des éléments $L \in O(1, d)$ tels que $\det L = 1$.

Soit $L \in O(1, d)$, alors $L(J_{+}) = J_{+}$ ou $L(J_{+}) = J_{-}$. Dans le premier cas on dit que L est orthochrone, et dans le deuxième que L est anti-orthochrone.

Le sous-groupe des éléments orthochrones de $SO(1, d)$ est noté $SO^{\uparrow}(1, d)$. $SO^{\uparrow}(1, d)$ correspond également à la composante connexe de l'identité de $SO(1, d)$.

1.4. Représentations.

1.4.1. *Algèbre de Clifford.* Dans cette section, nous allons introduire les algèbres de Clifford, nécessaires à la définition de l'opérateur de Dirac.

Définition 1.6. L'algèbre de Clifford associée à (V, q) est définie par :

$$\text{Cl}(V, q) = \otimes V / \mathcal{I}_q,$$

où \mathcal{I}_q l'idéal de $\otimes V$ engendré par les éléments $u \otimes u - q(u)\mathbb{1}$.

Définition 1.7. On note α l'extension de $V \ni v \mapsto -v$ à $\text{Cl}(V, q)$. On peut alors écrire

$$\text{Cl}(V, q) = \text{Cl}^0(V, q) \oplus \text{Cl}^1(V, q),$$

où $\text{Cl}^i(V, q) = \{\varphi \in \text{Cl}(V, q) | \alpha(\varphi) = (-1)^i \varphi\}$. On dit qu'un élément de $\text{Cl}(V, q)$ est pair lorsqu'il appartient à $\text{Cl}^0(V, q)$.

On peut alors définir les groupes Pin et Spin, comme sous-groupes du groupe formé par les éléments inversibles de $\text{Cl}(V, q)$, noté $\text{Cl}^{\times}(V, q)$.

Définition 1.8. On pose Pin(V, q) le sous-groupe de $\text{Cl}^{\times}(V, q)$ engendré par les $v \in V$ tels que $q(v) = \pm 1$. On note sa partie paire Spin(V, q) = Pin(V, q) \cap Cl⁰(V, q).

Dans la remarque suivante, on note $\text{Spin}^\uparrow(V, q)$, respectivement $\text{SO}^\uparrow(V, q)$, la composante connexe contenant l'identité de $\text{Spin}(V, q)$, respectivement $\text{SO}(V, q)$.

Remarque 1.9. *Le groupe $\text{Spin}^\uparrow(V, q)$ est le revêtement universel de $\text{SO}^\uparrow(V, q)$, l'application associée à ce revêtement est*

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}} : \quad & \text{Spin}^\uparrow(V, q) \rightarrow \text{SO}^\uparrow(V, q) \\ & \varphi \mapsto (x \mapsto \alpha(\varphi)x\varphi^{-1}). \end{aligned}$$

On a le résultat suivant sur les représentations de $\text{Cl}(V, q)$.

Proposition 1.10. *Si V est de dimension paire $2n$ alors $\text{Cl}(V, q)$ admet une représentation irréductible fidèle sur \mathbb{C}^{2^n} , unique à équivalence près.*

On a également l'existence d'un produit scalaire hermitien dans le cas où (V, q) est un espace euclidien.

Proposition 1.11. *Soit (V, q) un espace vectoriel munit d'une forme quadratique q , soit γ une représentation associée à valeurs dans $\text{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$, alors il existe un produit scalaire hilbertien λ sur V tel que*

$$s_1 \cdot \lambda s_2 = (\gamma(x) \cdot s_1) \cdot \lambda (\gamma(x) \cdot s_2), \text{ pour tout } x \in V, q(x, x) = 1, s_1, s_2 \in V,$$

de plus ce produit scalaire est unique à une constante positive près.

On peut alors en déduire une forme hermitienne dans le cas d'un espace-temps de type Minkowski avec une condition de positivité en temps.

Proposition 1.12. *Soit $\mathbb{R}^{1,d}$ un espace-temps de Minkowski de dimension paire $1 + d = 2n$, soit γ une représentation spinorielle à valeurs dans $\text{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice hermitienne β telle que*

$$\gamma(x)^* \beta = -\beta \gamma(x), x \in \mathbb{R}^{1,d}, i\beta \gamma(e) > 0,$$

pour tout vecteur de type temps dirigé vers le futur $e \in \mathbb{R}^{1,d}$.

De plus, en utilisant la propriété d'équivalence des représentations irréductibles en dimension paire, on obtient également le résultat suivant

Proposition 1.13. *Soit $\mathbb{R}^{1,d}$ un espace-temps de Minkowski de dimension paire $1 + d = 2n$, tel que $n \in \{1, 2\} \pmod{4}$, soit γ une représentation spinorielle associée à $\mathbb{R}^{1,d}$. Alors il existe une matrice réelle κ telle que*

$$\kappa^2 = \mathbb{1}, \kappa \gamma(x) = \gamma(x) \kappa, x \in \mathbb{R}^{1,d}$$

1.5. Opérateur de Dirac. Dans cette sous-section, on considère l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$, et on suppose que $1 + d = 2n$ est pair. Par la proposition 1.10 cela implique l'existence d'une unique, à équivalence près, représentation irréductible γ de l'algèbre de Clifford associée à $\mathbb{R}^{1,d}$.

On note β une forme hermitienne positive en temps donnée par la Proposition 1.12.

1.5.1. *Définition.* On peut alors définir l'opérateur de Dirac.

Définition 1.14. *L'opérateur de Dirac sans masse, noté D , est l'opérateur défini par*

$$D = -\gamma_0 \partial_t + \sum_{i \geq 1} \gamma_i \partial_{x_i},$$

où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{1,d}$, ∂_t la dérivée partielle associée à e_0 , ∂_{x_i} les dérivées partielles associées aux e_i , et $\gamma_i = \gamma(e_i)$.

D'après la section précédente, les γ_i sont des matrices d'ordre $2^{n/2} \times 2^{n/2}$ qui satisfont les relations d'anti-commutation suivantes :

$$[\gamma_i, \gamma_j]_+ := \gamma_i \cdot \gamma_j + \gamma_j \cdot \gamma_i = 2\gamma_i \cdot \eta \gamma_j$$

où η est la métrique de Minkowski.

L'opérateur de Dirac sans masse D est donc un opérateur différentiel d'ordre 1, agissant sur les spineurs de Dirac, qui sont des vecteurs associés aux représentations de l'algèbre de Clifford.

Définition 1.15. On définit une forme hermitienne $(\psi_1 | \psi_2)_{\mathbb{R}^{1,d}}$ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d}; \mathbb{C}^{2^{n/2}})$ par

$$(\psi_1 | \psi_2)_{\mathbb{R}^{1,d}} := \int_{\mathbb{R}^{1,d}} \bar{\psi}_1 \cdot \beta \psi_2 dx,$$

où $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1,d})$.

L'opérateur de Dirac est formellement auto-adjoint pour cette forme hermitienne.

1.5.2. *Inverses retardés/avancés.* On rappelle que $D^2 = -\partial_t^2 + \Delta$. Or l'opérateur de Klein-Gordon admet des inverses retardés/avancés $\tilde{G}_{\text{ret/adv}}$ tels que

$$\begin{cases} D^2 \tilde{G}_{\text{ret/adv}} = \tilde{G}_{\text{ret/adv}} D^2 = \mathbb{1}, \\ \text{supp } \tilde{G}_{\text{ret/adv}} u \subset J_\pm(\text{supp } u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1}; S) \end{cases}$$

Ce résultat s'étend à l'opérateur de Dirac, en posant $G_{\text{ret/adv}} = D \tilde{G}_{\text{ret/adv}}$.

Le propagateur *causal* G est défini comme la différence $G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$. Il satisfait

$$G = -G^*, \text{supp } Gv \subset J(\text{supp } v),$$

où l'adjoint est considéré pour la forme hermitienne $(\cdot | \cdot)_{\mathbb{R}^{d+1}}$.

1.5.3. *Problème de Cauchy.* On fixe $s \in \mathbb{R}$, et on considère l'hypersurface $\Sigma_s = \{t = s\}$ de l'espace-temps de Minkowski, $f \in C_0^\infty(\Sigma_s; \mathbb{C}^{2^{n/2}})$ on cherche une solution u de l'opérateur de Dirac D qui satisfait le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Du = 0, \\ u|_{\Sigma_s} = f. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy est globalement bien posé, on note son unique solution $U_s f$, qui satisfait

$$U_s f(x) = - \int_{\Sigma_s} G(x, y) \gamma_0 f(y) dy.$$

1.5.4. *Espaces pré-hilbertiens.* Pour quantifier l'équation de Dirac il nous faut définir une structure pré-hilbertienne sur l'espace des solutions. Nous allons en fait définir trois espaces pré-hilbertiens équivalents, qui vont donner trois quantifications identiques.

On note $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ l'espace des solutions compactes en espace de l'équation de Dirac.

Soient $\psi_1, \psi_2 \in \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$, on pose

$$\bar{\psi}_1 \cdot \nu_s \psi_2 := i \int_{\mathbb{R}^d} \psi_1(s, x) \cdot \beta \gamma_0 \psi_2(s, x) dx.$$

En calculant $\partial_s(\bar{\psi}_1 \cdot \nu_s \psi_2)$ on obtient que cette forme hermitienne est indépendante de s , que l'on note dorénavant ν , de plus ν est positive car β est une forme hermitienne positive en temps.

En posant ρ_s l'application de restriction à Σ_s on obtient

$$\rho_s : (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) \rightarrow (C_0^\infty(\mathbb{R}^d), i(\cdot | \beta \gamma_0 \cdot)_{\mathbb{R}^d}).$$

ρ_s est unitaire d'inverse U_Σ . On a également $G : C_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1}; \mathbb{C}^{2^{n/2}}) \rightarrow \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ est surjective de noyau $DC_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1})$, et

$$G : (C_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1}, S)/DC_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1}), i(\cdot|G\cdot)) \rightarrow (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$$

G est également unitaire. On obtient ainsi trois espaces pré-hilbertiens unitairement équivalents :

(1.1)

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1}, S)/DC_0^\infty(\mathbb{R}^{d,1}), i(\cdot|G\cdot)) \xrightarrow{G} (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) \xrightarrow{\pi_s} (C_0^\infty(\mathbb{R}^d), i(\cdot|\beta\gamma_0\cdot)_{\mathbb{R}^d})$$

2. QUANTIFICATION ET ÉTATS QUASI-LIBRES

2.1. Quantification de Fock. Nous allons d'abord donner la procédure de quantification abstraite dans le cas d'un espace-temps plat. Cet espace doit tenir compte du phénomène de création et de destruction de particule. La nature fermionique de l'équation de Dirac amène à considérer l'algèbre de Fock fermionique.

On part d'un espace hilbertien \mathfrak{h} qui décrit les états d'une particule, et on réplique cet espace pour obtenir une description d'un système constitué d'un nombre arbitraire de particules.

Définition 2.1. Soit \mathfrak{h} un espace hilbertien, on définit l'algèbre tensorielle construite à partir de \mathfrak{h} par

$$\overset{Al}{\otimes} \mathfrak{h} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n \mathfrak{h}.$$

On note $\overset{Al}{\otimes} \mathfrak{h}$ l'espace complété à partir de $\overset{Al}{\otimes} \mathfrak{h}$. Cet espace est appelé espace de Fock complet.

Afin de tenir compte de la nature fermionique du système, il nous faut rendre antisymétrique l'espace de Fock. Dans la suite, on note \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de degré n .

Définition 2.2. On peut faire agir les éléments de \mathfrak{S}_n sur $\otimes^n \mathfrak{h}$, on note ainsi l'opérateur associé $\Theta(\sigma)$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On pose alors

$$\Theta_a^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \Theta(\sigma).$$

Puis on peut définir un projecteur sur $\overset{Al}{\otimes} \mathfrak{h}$ par

$$\Theta_a = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Theta_a^n,$$

que l'on peut étendre de façon unique à $\overset{Al}{\otimes} \mathfrak{h}$.

On note

$$\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n = \Theta_a(\Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_n).$$

2.1.1. Espace de Fock fermionique. Enfin on peut rendre antisymétrique l'espace des états en appliquant cet opérateur.

Définition 2.3. On définit

$$\Gamma_a(\mathfrak{h}) = \Theta_a(\overset{Al}{\otimes} \mathfrak{h}),$$

$\Gamma_a(\mathfrak{h})$ est appelé espace de Fock fermionique.

2.1.2. Opérateurs de création/annihilation. On peut alors définir les opérateurs de création et d'annihilation.

Définition 2.4. Soient $h \in \mathfrak{h}$ et $(\Psi_1, \dots, \Psi_n) \in \mathfrak{h}^n$ on définit

$$a(h)(\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n) = \sqrt{n} \sum_i (-1)^i (h | \Psi_i) (\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\Psi}_i \wedge \cdots \wedge \Psi_n).$$

On obtient alors que l'adjoint $a^*(h)$ vérifie :

$$a^*(h)(\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n) = \sqrt{n+1} (h \wedge \Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n).$$

On obtient les relations d'anti-commutations suivantes.

Proposition 2.5. Soient $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$, les opérateurs $a^*(h_i), a(h_j)$ vérifient

$$\begin{aligned} [a^*(h_1), a^*(h_2)]_+ &= 0, \\ [a(h_1), a(h_2)]_+ &= 0, \\ [a(h_1), a^*(h_2)]_+ &= (h_1 | h_2) \mathbb{1}, \end{aligned}$$

où $[A, B]_+ = AB + BA$.

Définition 2.6. On note $\Omega = 1 \in \mathbb{C} \subset \Gamma_a(\mathfrak{h})$, appelé état de vide de $\Gamma_a(\mathfrak{h})$.

Proposition 2.7. L'état de vide vérifie

$$\begin{aligned} a^*(h)\Omega &= h, \\ a(h)\Omega &= 0. \end{aligned}$$

On peut également chercher à comprendre comment les opérateurs sur \mathfrak{h} s'étendent sur $\Gamma_a(\mathfrak{h})$.

Définition 2.8. Soit p un opérateur de \mathfrak{h} , on définit alors $\Gamma(p)$ par

$$\Gamma(p)(\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n) = p(\Psi_1) \wedge \cdots \wedge p(\Psi_n)$$

sur $\Theta_a(\otimes \text{Dom } p)$, et $d\Gamma(p)$ par

$$d\Gamma(p)(\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n) = \sum_i \Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_{i-1} \wedge p(\Psi_i) \wedge \Psi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \Psi_n$$

sur $\Theta_a(\otimes \text{Dom } p)$.

2.1.3. Représentation de Fock. Dans la suite on considère $\bar{\mathfrak{h}}$ l'espace de Hilbert conjugué à \mathfrak{h} , c'est-à-dire équipé de la structure complexe $-i$ et du produit scalaire $(\bar{u}|\bar{v})_{\bar{\mathfrak{h}}} := (v|u)_{\mathfrak{h}}$.

On introduit l'espace $\mathcal{Y} = \text{Re}(\mathfrak{h} \oplus \bar{\mathfrak{h}})$, que l'on munit des structures

$$\begin{aligned} j \cdot (z, \bar{z}) &:= (iz, \bar{iz}) \\ (z, \bar{z}) \cdot \nu(w, \bar{w}) &:= \text{Re}(z|w) \end{aligned}$$

On introduit alors l'opérateur de champs

Définition 2.9. Soit $y = (z_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{C}\mathcal{Y}$, on pose

$$\psi(z_1, \bar{z}_2) := a^*(z_1) + a(z_2)$$

appelé opérateur de champ.

Théorème 2.10. On définit une représentation irréductible de $\text{CAR}(\mathcal{Y})$

$$\mathcal{Y} \ni (z, \bar{z}) \mapsto \psi(z, \bar{z}) \in B_{\mathfrak{h}}(\Gamma_a(\mathfrak{h})),$$

appelée représentation de Fock.

2.2. Algèbre CAR. Dans cette sous-partie, nous allons chercher des représentations de l'algèbre engendrée par les relations vérifiées par les champs donnés par la quantification dans le cas précédent.

Définition 2.11. Soit (\mathcal{Y}, ν) un espace pré-hilbertien. L'algèbre CAR engendrée par (\mathcal{Y}, ν) , notée $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$, est l'algèbre complexe, involutive, d'involution notée $*$, et unitaire engendrée par les $\psi(y), \psi^*(y)$, où $y \in \mathcal{Y}$ avec les relations

$$\begin{aligned} \psi(y_1 + \lambda y_2) &= \psi(y_1) + \bar{\lambda}\psi(y_2), \\ \psi^*(y_1 + \lambda y_2) &= \psi^*(y_1) + \lambda\psi^*(y_2), \\ [\psi(y_1), \psi(y_2)]_+ &= 0, \\ [\psi^*(y_1), \psi^*(y_2)]_+ &= 0, \\ [\psi(y_1), \psi^*(y_2)]_+ &= y_1 \cdot \nu y_2 \mathbb{1}, \\ (\psi(y))^* &= \psi^*(y), \end{aligned}$$

où $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}, \lambda \in \mathbb{C}$.

La dernière relation assure la compatibilité entre l'involution associée à l'algèbre CAR, et les symboles $\psi(y), \psi^*(y)$.

Maintenant que nous avons une algèbre d'observables, il s'agit de la réaliser comme une algèbre d'opérateurs. Il n'y a pas de façon unique de réaliser cette opération.

On se fixe dans la suite une algèbre $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ engendrée à partir d'un espace pré-hilbertien (\mathcal{Y}, ν) . En pratique (\mathcal{Y}, ν) correspond au complété d'un des trois espaces pré-hilbertiens donnés par 1.1.

Définition 2.12. *Un état ω sur $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ est une forme linéaire normalisée et positive, c'est-à-dire $\omega(\mathbb{1}) = 1$ et $\omega(A^*A) \geq 0$ pour $A \in \text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$.*

L'ensemble des états est convexe, un état est dit *pur* lorsqu'il est extrémal.

Définition 2.13. *Soit ω un état sur $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$, on définit les covariances λ^\pm par*

$$\begin{aligned}\overline{y_1} \cdot \lambda^+ y_2 &= \omega(\psi(y_1)\psi^*(y_2)), \\ \overline{y_1} \cdot \lambda^- y_2 &= \omega(\psi^*(y_1)\psi(y_2)).\end{aligned}$$

Parmi l'ensemble des états sur l'algèbre d'observables que l'on s'est fixé, il en existe une famille remarquable. Ce sont les états qui sont uniquement déterminés par leurs covariances.

Définition 2.14. *Un état ω sur $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ est dit invariant de jauge et quasi-libre lorsque*

$$\begin{aligned}\omega\left(\prod_{i=1}^n \psi^*(y_i) \prod_{j=1}^m \psi(y'_j)\right) &= 0 \text{ si } n \neq m \\ \omega\left(\prod_{i=1}^n \psi^*(y_i) \prod_{j=1}^n \psi(y'_j)\right) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \omega(\psi^*(y_i)\psi(y'_{\sigma(i)}))\end{aligned}$$

Ces états sont caractérisés par la propriété suivante.

Proposition 2.15. *Soient λ^\pm deux formes hermitiennes sur (\mathcal{Y}, ν) , les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) λ^\pm sont les covariances d'un état invariant par jauge et quasi-libre.
- (2) $\lambda^\pm \geq 0$ et $\lambda^+ + \lambda^- = \nu$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que (\mathcal{Y}, ν) est un espace de Hilbert. On peut caractériser les états purs parmi les états quasi-libres.

Proposition 2.16. *Un état ω invariant par jauge et quasi-libre est pur si et seulement s'il existe des projections $c^\pm \in L(\mathcal{Y})$ telles que*

$$\begin{aligned}\lambda^\pm &= \nu \circ c^\pm, \\ c^+ + c^- &= \mathbb{1}.\end{aligned}$$

2.3. Construction GNS.

2.3.1. *Définition.* On se fixe dorénavant un état ω sur $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$, on veut construire un espace de Hilbert à partir de ω . Pour cela on considère l'idéal $\mathcal{J}_\omega = \{A \in \text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu) : \omega(A^*A) = 0\}$. On considère alors le produit scalaire $(\cdot|\cdot)_\omega$ défini sur $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)/\mathcal{J}_\omega$ par

$$([A]|[B])_\omega = \omega(A^*B),$$

$(\cdot|\cdot)_\omega$ est bien défini positif car ω est positif et \mathcal{J}_ω correspond au noyau de cette forme bilinéaire. On note \mathfrak{h}_ω le complété de $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)/\mathcal{J}_\omega$ pour $(\cdot|\cdot)_\omega$. On peut alors définir l'opérateur

$$\pi_\omega(A) : [B] \mapsto [AB].$$

bien défini sur $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)/\mathcal{J}_\omega$. On pose alors $\Omega_\omega = [\mathbb{1}]$, on a donc

$$\omega(A) = (\Omega_\omega | \pi_\omega(A)\Omega_\omega)_\omega.$$

Le triplet $(\mathfrak{h}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ est appelé le triplet *GNS* associé à ω . Les vecteurs dans \mathfrak{h}_ω sont interprétés comme des perturbations de l'état fondamental Ω_ω .

2.3.2. Algèbre de Fock. Il y a un lien étroit entre l'algèbre de Fock et la construction GNS. En effet, pour un état invariant par jauge, quasi-libre, et pur, il est possible d'identifier le triplet GNS $(\mathfrak{h}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ à un espace de Fock fermionique où Ω_ω correspond à l'état de vide. En d'autres termes, l'algèbre de Fock peut être construite à partir de la représentation GNS d'un état pur invariant par jauge et quasi-libre.

Proposition 2.17. *Soit ω un état invariant par jauge, quasi-libre, et pur. Alors le triplet GNS $(\mathfrak{h}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ peut être identifié à un espace de Fock fermionique où Ω_ω correspond à l'état de vide. Dans ce cas π_ω est la représentation de Fock avec $\mathfrak{h} = \mathcal{Y}$ munit d'une certaine structure complexe.*

3. ESPACE-TEMPS COURBE

3.1. Espace-temps. Lorsque l'on veut généraliser l'algèbre de Clifford et donc l'opérateur de Dirac en espace-temps courbe, il est nécessaire d'introduire la notion de *fibré* sur les espace-temps. Un fibré est une généralisation du concept de produit cartésien aux variétés. Un fibré est un espace topologique qui est construit à partir de deux espaces : une base et une fibre. La fibre est un espace qui est attaché à chaque point de la base.

3.1.1. Fibré.

Définition 3.1. Un fibré de E sur B de fibre F , où E , B , et F sont des variétés, est la donnée de $\pi : E \mapsto B$ une surjection lisse tel qu'il existe une trivialisatation locale, c'est-à-dire telle qu'il existe un recouvrement par des ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ de B vérifiant :

Pour tout U_i , il existe $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \mapsto U_i \times F$ lisse telle que $\pi_B \circ \phi_i = \pi$ sur $\pi^{-1}(U_i)$

À un fibré sont alors associées les fonctions de transitions $t_{ij} : U_i \cap U_j \mapsto \text{Aut}(F)$, lorsque $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, définies par :

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(b, f) = (b, t_{ij}(b)(f)),$$

et qui vérifient les relations, dites de co-cycle, suivantes :

$$\begin{aligned} t_{ii}(b) &= Id, \\ t_{ji}(b) &= t_{ij}^{-1}(b), \\ t_{ik}(b) &= t_{ij}(b)t_{jk}(b). \end{aligned}$$

Définition 3.2. Soient $\pi : E \mapsto M$ et $\pi : F \mapsto N$ deux fibrés, $\varphi : E \mapsto F$ et $f : M \mapsto N$ deux applications continues forment un morphisme lorsque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Si $M = N$ on demande en plus que $f = Id$.

Définition 3.3. Un fibré $\pi : E \mapsto M$ de fibre F est dit trivialisable lorsqu'il est isomorphe au fibré trivial $M \times F$.

Définition 3.4. Une section d'un fibré $\pi : E \mapsto B$ de fibre F est une application continue $s : B \mapsto E$ telle que

$$\pi \circ s = Id.$$

On peut munir les fibrés d'une structure supplémentaire.

Définition 3.5. Soit $\pi : E \mapsto M$ un fibré de fibre F , s'il existe un groupe de Lie G qui agit fidèlement et de façon lisse sur F . En notant t_{ij} les fonctions de transition de E , on pose $\tilde{t}_{ij}(b) \cdot f = t_{ij}(b)(f)$, où $b \in M$, $f \in F$. G est alors appelé le groupe de structure du fibré, et on appelle le fibré munit de cette nouvelle structure un G -fibré. Lorsque l'on a un morphisme ϕ entre G -fibrés, on demande en plus de l'équivariance de ϕ , c'est-à-dire

$$\phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x)$$

Définition 3.6. Un fibré de E sur B de fibre \mathbb{K}^n est un fibré vectoriel de rang n lorsque les fibres de E sont munies d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel tel que pour tout $b \in B$

$$\phi_i(b, \cdot) = \pi_F \circ \phi_i|_{E_b} : E_b \mapsto \mathbb{K}^n, b \in U_i$$

est une application linéaire. Avec les notations précédentes on obtient que les t_{ij} sont à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$.

On a alors plusieurs exemples de fibré vectoriel. On rappelle rapidement la définition d'un espace tangent, et on en déduit la structure de fibré vectoriel.

Définition 3.7. Soit M une variété, on appelle fibré tangent TM le fibré construit à partir des espaces tangents au-dessus de chaque point, i.e. les classes d'équivalences de courbes lisses pour la relation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \text{il existe une carte } \Phi \text{ telle que } \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma_2)|_{t=0}.$$

On pose alors

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M.$$

Et en prenant pour applications, à partir des cartes (U_i, ϕ_i) de M

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &\mapsto U_i \times \mathbb{R}^n \\ \Phi_i : (x, \gamma) &\mapsto (\gamma(0), \frac{d}{dt}(\Phi_i \circ \gamma)|_{t=0}) \end{aligned}$$

Définition 3.8. Soient V un espace vectoriel de dimension n , et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une a -densité sur V est une application

$$\lambda : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

telle que pour toute application linéaire $L \in L(V)$

$$\lambda(LX_1, \dots, LX_n) = |\det L|^a \mu(X_1, \dots, X_n).$$

On note $\Omega^a(V)$ l'espace vectoriel des a -densités sur V .

Définition 3.9. Soit M une variété, on appelle fibré des a -densités le fibré défini par

$$\Omega^a(M) = \bigsqcup_{x \in M} \Omega^a(T_x M).$$

Et en prenant pour applications, à partir des cartes (U_i, ϕ_i) de M

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &\mapsto U_i \times \mathbb{C} \\ \Phi_i : (x, \lambda) &\mapsto (x, \lambda(\partial_1, \dots, \partial_n)) \end{aligned}$$

En notant ∂_i la classe d'équivalence de $t \rightarrow x_i(t)$ où (x_1, \dots, x_n) est le système de coordonnées associé à (U_i, ϕ_i) .

Définition 3.10. Un fibré vectoriel de E sur B de fibre \mathbb{K}^n est orienté lorsque les fibres sont orientés et les $\phi_i(b, \cdot)$ préservent ces orientations, c'est-à-dire lorsque les t_{ij} sont à valeurs dans $GL_n^+(\mathbb{K})$.

Définition 3.11. Un fibré vectoriel de E sur B de fibre \mathbb{R}^n est un fibré vectoriel métrique de signature (p, q) lorsque chaque fibre est munie d'un produit scalaire non-dégénéré de signature (p, q) , qui dépend de façon lisse du point de base, et tel que les t_{ij} sont à valeurs dans $O(\mathbb{R}^{q,p})$.

Définition 3.12. Si $\pi : E \mapsto B$ est un fibré vectoriel on définit $\pi : \text{End}(E) \mapsto B$ le fibré tel que

$$\text{End}(E) = \bigsqcup_{b \in B} \text{End}(E_b),$$

et en prenant pour applications, à partir des cartes (U_i, ϕ_i) de M

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &\mapsto U_i \times \text{End}(\mathbb{K}^n) \\ \Phi_i : (b, T) &\mapsto (b, \phi_{i,b} \circ T \circ \phi_{i,b}^{-1}) \end{aligned}$$

Définition 3.13. Si $\pi : E \mapsto B$ est un fibré vectoriel on définit $\pi : \text{PGL}(E) \mapsto B$ le $\text{GL}(\mathbb{K}^n)$ -fibré principal des repères, tel que

$$\text{PGL}(E) = \bigsqcup_{b \in B} \text{GL}(E_b),$$

et en prenant pour applications, à partir des cartes (U_i, ϕ_i) de M

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &\mapsto U_i \times \text{GL}(\mathbb{K}^n) \\ \Phi_i : (b, T) &\mapsto (b, \phi_{i,b} \circ T \circ \phi_{i,b}^{-1}) \end{aligned}$$

Lorsque E est orientable, on peut définir de façon analogue le fibré $\text{PGL}^+(E)$ le $\text{GL}^+(\mathbb{K}^n)$ -fibré des bases orientées.

Lorsque E est métrique, respectivement orientable et métrique, on peut également définir $\text{PO}(E)$, respectivement $\text{PSO}(E)$, le $O(\mathbb{K}^{q,p})$ -fibré principal des repères orthogonaux, respectivement le $\text{SO}(\mathbb{R}^{q,p})$ -fibré principal des repères orthogonaux orientés.

Lorsque E est métrique de signature $(q, 1)$, orienté et orienté en temps, on peut définir $\text{PSO}(E)$, respectivement $\text{PSO}^\uparrow(E)$, le $\text{SO}(\mathbb{R}^{1,q})$ -fibré principal des repères orthogonaux orientés, respectivement le $\text{SO}^\uparrow(\mathbb{R}^{1,q})$ -fibré principal des repères orthogonaux orientés et orientés en temps.

On peut également construire l'équivalent du produit tensoriel pour les fibrés.

Définition 3.14. Soient $\pi_1 : E_1 \mapsto B$, $\pi_2 : E_2 \mapsto B$ deux fibrés vectoriels au-dessus de B , de dimensions respectives n_1, n_2 . Soient (g_{ij}^1) , (g_{ij}^2) les fonctions de transitions associées à ces deux fibrés. On considère alors comme fonctions de transitions

$$g_{ij}^1 \otimes g_{ij}^2 : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(n_1 n_2).$$

On note alors $E_1 \otimes E_2$ le fibré construit à partir de ces fonctions de transitions.

De plus lorsque E est métrique, il existe une notion de vecteur normal à une hypersurface. On rappelle d'abord la définition d'une sous-variété.

Définition 3.15. Soit $S \subset E$ un sous-ensemble de E , alors on dit que S est une sous-variété de E de dimension k lorsque pour tout $p \in S$ il existe une carte (ϕ, U) avec $p \in U$, telle que

$$\phi(U \cap S) = \{x \in \phi(U) \mid x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$$

On rappelle ensuite les résultats suivants sur les sous-variétés.

Proposition 3.16. Soit S une sous-variété de M de dimension k . Alors pour la topologie induite, S admet une unique structure de variété telle que

- (1) S est une variété de dimension k .
- (2) l'injection de S dans M est une immersion.

Les cartes de S sont exactement les $(\psi, U \cap S)$ avec $\psi|_X^{-1} = \phi^{-1} \circ i$ où (ϕ, U) est une carte de M , et où i est l'injection de S dans M .

Proposition 3.17. Soit $f : M \mapsto N$ une immersion. Alors $f(M)$ est une sous-variété de N .

Enfin le fibré tangent se retrouve à partir de celui de M .

Proposition 3.18. Soit $S \subset N$ une sous-variété, $p \in S$, alors

$$T_p S = \{X_p \in T_p N \mid X_p(f) = 0 \text{ pour tout } f \in C^\infty(M) \text{ telle que } f|_S = 0\}.$$

De plus si $S = f(M)$ où $f : M \mapsto N$ est une immersion, alors pour tout $m \in M$

$$TM_{f(m)} = \text{Im}(df_m).$$

On peut alors définir le fibré normal.

Définition 3.19. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, et S une sous-variété de dimension k de M . Le fibré normal $\Lambda(S)$ est un fibré vectoriel au-dessus de M de dimension k défini par

$$\Lambda(S) = \bigsqcup_{x \in S} T_x S^\perp,$$

et en prenant pour fonctions de transitions les mêmes fonctions que celle de TM .

3.1.2. *Variété lorentzienne.* La généralisation de l'algèbre de Clifford et de l'opérateur de Dirac en espace-temps courbe nécessite la notion de variété lorentzienne. Une variété lorentzienne est une variété différentielle de dimension n munie d'une métrique lorentzienne, c'est-à-dire une métrique de signature $(-, +, \dots, +)$.

Définition 3.20. Une variété lorentzienne est une variété pseudo-riemannienne (M, g) où g est de signature $(1, q)$.

On se fixe dans la suite une variété lorentzienne (M, g) . On reprend les notations issues de la définition 1.2.

Définition 3.21. Soit $v \in T_x M$, on dit que v est de type temps lorsque $v \cdot g(x)v < 0$, de type lumière lorsque $v \cdot g(x)v = 0$, de type causal lorsque $v \cdot g(x)v \leq 0$, et de type espace lorsque $v \cdot g(x)v > 0$.

De la même façon, on dit qu'un champ v est d'un certain type lorsque $v(x)$ est de ce type en tout point $x \in M$. Pareillement, on dit qu'une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \in C^1$ est d'un certain type lorsque tous ses vecteurs tangents $\gamma'(x)$ sont de ce type.

On note $C(x) \subset T_x M$ le cône des vecteurs de type temps, $N(x) \subset T_x M$ le cône des vecteurs de type lumière.

Enfin soit $V \subset T_x M$, V est dit de type temps s'il contient des vecteurs de type temps et de type espace, de type lumière s'il est tangent au cône de lumière $N(x)$, de type espace s'il ne contient que des vecteurs de type espace.

On peut également définir la notion de champ de vecteur transverse à une hypersurface.

Proposition 3.22. Soit Σ une hypersurface de M une variété pseudo-riemannienne orientable, telle que pour tout $x \in \Sigma$, $(T_x \Sigma)^\perp$ n'est pas engendré par un vecteur de type lumière. Alors il existe un champ de vecteur transverse n , unique au signe près, normal et normalisé, c'est-à-dire

$$n(x) \cdot g(x)v = 0, |n(x) \cdot g(x)n(x)| = 1, \forall v \in T_x \Sigma, x \in \Sigma.$$

Sous ces hypothèses la métrique $h := i^*g$ induite sur Σ est non dégénérée et on obtient

$$\Omega_h = i_n^* \Omega_g, i_X^* \Omega_g = X^a n_a \Omega_h,$$

où Ω_h et Ω_g sont les formes volumes associées aux métriques de Σ et de M , X est un champ de vecteur de M et i^* est le produit intérieur.

Définition 3.23. (M, g) est dite orientée en temps lorsqu'il existe un champ de vecteurs v de type temps. Étant donné un tel champ de vecteurs, on peut alors définir en tout point $x \in M$ $C_{\pm}(x)$ les deux composantes connexes de $C(x)$ définies par $\pm v(x) \in C_{\pm}(x)$.

Les vecteurs dans $C_{\pm}(x)$ sont dits dirigés vers le futur/passé.

Définition 3.24. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ une courbe \mathcal{C}^1 .

- (1) γ est dit dirigé vers le futur/passé, lorsque tous ses vecteurs tangents le sont.
- (2) γ est dit inextensible lorsqu'il n'existe pas de reparamétrisation prolongeable par continuité en ses extrémités.

Définition 3.25. (1) Le futur/passé chronologique de $x \in M$ noté $I_{\pm}(x)$ des points appartenant à des courbes de type temps dirigé vers le futur/passé partant de x .

- (2) Le futur/passé causal de $x \in M$ noté $J_{\pm}(x)$ des points appartenant à des courbes de type causal dirigés vers le futur/passé partant de x .
- (3) Soit $K \subset M$, on note $I_{\pm}(K) = \cup_{x \in K} I_{\pm}(x)$ et $J_{\pm}(K) = \cup_{x \in K} J_{\pm}(x)$.
- (4) L'ombre causale, respectivement chronologique de $K \subset M$ est $I(K) = I_+(K) \cup I_-(K)$, respectivement $J(K) = J_+(K) \cup J_-(K)$.
- (5) Deux ensembles $K_1, K_2 \subset M$ sont dits causalement disjoints lorsque $J(K_1) \cap K_2 = \emptyset$. Cette condition est équivalente à $K_1 \cap J(K_2) = \emptyset$.
- (6) Un ensemble fermé $A \subset M$ est dit compact en espace, respectivement compact en espace dans le futur/passé lorsque $A \subset J(K)$, respectivement $A \subset J_{\pm}(K)$ où K est un ensemble compact.
- (7) Un ensemble fermé $A \subset M$ est dit compact en temps, respectivement compact en temps dans le futur/passé lorsque $A \cap J(K)$, respectivement $A \subset J_{\mp}(K)$ est compact pour tout ensemble compact K .

Si $U \subset M$ est un ouvert de M , alors si M est orientée en temps, U l'est également. Dans ce cas on note $J_{\pm}^U(K)$ et $J_{\pm}^M(K)$ les ensembles associées à ces deux variétés. On dit que $U \subset M$ respecte la causalité si $J_{\pm}^U(x) = J_{\pm}^M(x) \cap U$ pour tout $x \in U$. Cela est équivalent au fait que toute courbe causale dans M entre deux points de U est incluse dans U .

3.1.3. *Variété globalement hyperbolique.* Une variété globalement hyperbolique est une variété lorentzienne qui admet une surface de Cauchy. Cette condition assure l'existence globale de solution aux équations d'ondes.

Définition 3.26. Une surface de Cauchy S est un ensemble fermé $S \subset M$ qui intersecte une fois et une seule fois chaque courbe inextensible de type temps.

Définition 3.27. Une variété lorentzienne (M, g) est dite globalement hyperbolique lorsque M admet une surface de Cauchy.

Théorème 3.28. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Les deux conditions suivantes sont satisfaites :
 - (a) $J_+(x) \cap J_-(x')$ est compact pour tout $x, x' \in M$.
 - (b) M est causal, c'est-à-dire il n'existe pas de courbe fermée causale.
- (2) (M, g) est globalement hyperbolique,
- (3) M admet une surface de Cauchy S
- (4) Il existe un difféomorphisme isométrique

$$\chi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta(t, x)dt^2 + h_t(x)dx^2),$$

où Σ est une variété lisse de dimension $n - 1$, $\beta > 0$ une fonction lisse sur $\mathbb{R} \times \Sigma$, $t \mapsto h_t(x)dx^2$ est une famille lisse de métrique Riemannienne sur

Σ et $\{T\} \times \Sigma$ est une surface de Cauchy de type espace de $\mathbb{R} \times \Sigma$ pour tout $T \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.29. Soit $\Sigma \subset M$ une surface de Cauchy de type espace. Alors l'ensemble des voisinages de Σ causalement compatible forme une base des voisinages de Σ dans M .

Théorème 3.30. Soit (M, g) une variété globalement hyperbolique, K, K' deux ensembles compacts, alors $J_-(K) \cap J_+(K')$ est compact.

3.1.4. *Fibré principal.* Pour étendre la définition de l'opérateur de Dirac à une variété lorentzienne, il faut d'abord définir la notion de fibré de Clifford, qui vient généraliser l'algèbre de Clifford. Pour ce faire, on utilise la notion de fibré principal, qui correspond à un fibré dont la fibre est un groupe de Lie muni d'une structure supplémentaire de multiplication extérieure.

Définition 3.31. Un fibré G -principal est un G -fibré de E sur B de fibre F , avec G un groupe de Lie qui agit continument à droite sur E , qui préserve la fibre, et qui agit dessus librement et transitivement.

3.1.5. *Connexion.* Soit P un G -fibré principal. Soit $a \in P$, on note R_a l'action de multiplication à droite par a , i.e. $R_a u = u \cdot a$. On note $\mathfrak{g} := T_e G$ l'algèbre de Lie associée. On note Ad la représentation adjointe de G , i.e. $\text{Ad}(a)u = a \cdot u \cdot a^{-1}$

Définition 3.32. Soit $\xi \in \mathfrak{g}$, on note ξ^* le champ de vecteur fondamental associé, défini par

$$\xi^*_a = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(t\xi)}(a).$$

Définition 3.33. La représentation adjointe de l'algèbre de Lie (G) est définie par

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\mapsto \text{End}(\mathfrak{g}) \\ \text{ad} : \xi &\mapsto \text{ad}_\xi := \text{Ad}_{*|_e}(\xi) \end{aligned}$$

Définition 3.34. Une connexion est la donnée d'espaces horizontaux H_u en chaque point $u \in P$ tels que

- (1) $T_u P = H_u \oplus V_u$, où $V_u = \text{Ker}(\pi_*(u))$,
- (2) $H_{u \cdot a} = R_a^* H_u$ pour tout $u \in P$, $a \in G$,
- (3) H_u varie de façon lisse en fonction de u , c'est-à-dire que si l'on décompose une section de T_p selon les sommes directes $H_u \oplus V_u$, alors les composantes sont lisses.

Définition 3.35. Soit ω une 1-forme différentielle sur P à valeurs dans \mathfrak{g} , on dit que ω est une forme de connexion si

- (1) $\omega(\xi^*) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$,
- (2) $(R_a)^* \omega = \text{ad}(a^{-1})\omega$, pour tout $a \in G$.

On rappelle que la donnée d'une forme de connexion est équivalente à la donnée d'une connexion.

Théorème 3.36. Soit $\alpha : I \ni 0 \rightarrow M$, $p \in P$, il existe un unique relevé horizontal de α au point de base p . C'est-à-dire il existe une unique application lisse $\hat{\alpha} : I \rightarrow P$ telle que $\hat{\alpha}(0) = p$ et $\pi(\hat{\alpha}) = \alpha$.

Définition 3.37. Soit $\alpha : I \rightarrow M$, $Q \in P$, on définit $\tau_{\alpha(t)} Q := \hat{\alpha}(t)$, où $\hat{\alpha}$ est le relevé horizontal de α tel que $\hat{\alpha}(0) = Q$.

3.1.6. Fibrés associés.

Définition 3.38. Soit V un espace vectoriel tel que $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ est une représentation. On pose $P(V, \rho) := P \times_{\rho} V$ où $[P, v] = [P \cdot g, \rho(g)^{-1} \cdot v]$.

Définition 3.39. Soit $\alpha : I \rightarrow M$, $[Q, v] \in P(V, \rho)$, on définit le transport parallèle de $[Q, v]$ le long de α par $\hat{\tau}_{\alpha(t)}[Q, v] := [\tau_{\alpha(t)}Q, v]$.

Définition 3.40. Soit ω une forme de connexion sur P , on note ∇^{ω} la dérivée covariante de $P(V, \rho)$ induite par le transport parallèle issu de ω .

3.2. Structure spin. Dans le cadre de l'opérateur de Dirac, les structures spin sont utilisées pour définir toutes les structures associés à l'opérateur de Dirac : fibré de Clifford, fibré des spineurs, et dérivée covariante.

3.2.1. Définition. Dans la suite on note $\text{Spin}^{\uparrow}(1, d)$ la composante connexe de l'identité du groupe $\text{Spin}(1, d)$.

Définition 3.41. Soit (M, g) un espace-temps. Une structure spin sur (M, g) est un fibré $\text{Spin}^{\uparrow}(1, d)$ -principal au-dessus de M , noté $\text{PSpin}(M, g)$ tel qu'il existe un morphisme de fibré principal $\chi : \text{PSpin}(M, g) \rightarrow \text{PSO}^{\uparrow}(M, g)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spin}^{\uparrow}(1, d) & \longrightarrow & \text{PSpin}(M, g) \\ \downarrow \text{Ad} & & \downarrow \chi \\ \text{SO}^{\uparrow}(1, d) & \longrightarrow & \text{PSO}^{\uparrow}(M, g) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi' \\ \searrow \pi \\ M \end{array}$$

Cela revient à chercher un relèvement des fonctions de transitions du fibré $\text{PSO}^{\uparrow}(M, g)$ dans le groupe Spin à travers Ad qui préserve les conditions de cocycle.

Une variété lorentzienne admet une structure spin si et seulement si sa deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(TM)$ est triviale. Si $\dim M = 4$ cela est équivalent au fait que M est parallélisable. Cette structure est unique si en plus la première classe de Stiefel-Whitney $w_1(M)$ est triviale, ce qui est équivalent au fait que M est orientable, voir l'appendice A de [LM] pour un exposé détaillé.

Dans notre cas M est orientable, donc si la structure spin existe elle est unique. Si de plus (M, g) est globalement hyperbolique, alors il existe un difféomorphisme de M vers $\mathbb{R} \times \Sigma$ où Σ est une surface de Cauchy. L'orientation, et l'orientation en temps de M induisent une orientation sur Σ .

Ainsi, puisque toute variété orientable de dimension 3 est parallélisable, si (M, g) est globalement hyperbolique de dimension 4, alors M est parallélisable et admet donc une unique structure spin.

En effet, une variété parallélisable peut être munie de la structure spin triviale, c'est-à-dire la structure spin associée à l'application donnée dans la remarque 1.9 étendue sur les fibrés triviaux $M \times \text{Spin}^{\uparrow}(1, d)$ et $\text{PSO}^{\uparrow}(M, g) = M \times \text{SO}^{\uparrow}(1, d)$.

3.3. Fibrés associés. À partir de la structure spin, nous pouvons construire les fibrés associés qui vont servir à définir l'opérateur de Dirac. Dans le cas d'un espace-temps plat, il nous fallait plusieurs éléments pour définir cet opérateur : l'algèbre de Clifford, une représentation de cette algèbre dans l'espace vectoriel des spineurs, ainsi qu'une forme hermitienne pour laquelle l'opérateur de Dirac est symétrique.

3.3.1. *Fibré de Clifford.* L'algèbre de Clifford devient le fibré de Clifford, défini par $\text{Cl}(M, g) = \text{PSO}^\uparrow(M, g) \times_\alpha \text{Cl}(1, d)$ où α est le morphisme $\alpha : \text{SO}^\uparrow(M, g) \ni o \mapsto \hat{o} \in \text{Aut}(\text{Cl}(1, d))$.

3.3.2. *Fibré des spineurs.* L'espace des spineurs devient le fibré des spineurs, défini par $S(M) = \text{PSpin}(M, g) \times_{\gamma_0} \mathbb{C}^n$ avec γ_0 une représentation de $\text{Cl}(1, d)$.

3.3.3. *Action de $\text{Cl}(M, g)$ sur $S(M)$.* On définit un morphisme de fibré d'algèbres $\gamma : \text{Cl}(M, g) \rightarrow L(S(M))$ par

$$\gamma([\chi(P), a]) \cdot [P, v] = [P, \gamma_0(a) \cdot v].$$

3.3.4. *Structure hermitienne sur $S(M)$.* On définit une structure hermitienne $\beta \in C^\infty(M; L_h(S(M), S(M)^*))$ par

$$[P, u] \cdot \beta[P, v] = u \cdot \beta_0 v,$$

où β_0 est une forme hermitienne telle qu'introduite à la Proposition 1.12.

3.3.5. *Conjugaison de charge.* On définit une *conjugaison de charge* $\kappa \in C^\infty(M; L_h(S(M), \overline{S(M)}))$ par

$$\kappa[P, v] = [P, \kappa_0 v],$$

où κ_0 est une conjugaison de charge telle qu'introduite à la Proposition 1.13.

3.4. **Connexion spinorielle.** La notion de connexion spinorielle découle de la structure spin sur une variété lorentzienne. Pour un exposé plus détaillé voir le chapitre 2 de [KN].

Proposition 3.42. *Soit ω une forme de connexion sur $\text{PSO}^\uparrow(M, g)$, soit χ associée à (3.2), alors il existe un relèvement $\tilde{\omega}$ à travers χ . $\tilde{\omega}$ est une forme de connexion sur PSpin .*

Définition 3.43. *Soit ω la forme de connexion associée à la connexion de Levi-Civita sur $\text{PSO}^\uparrow(M, g)$, on obtient par la proposition 3.42 une forme de connexion sur $\text{PSpin}(M, g)$.*

On obtient ainsi une dérivée covariante sur le fibré des spineurs $S(M)$, on appelle cette dérivée la dérivée spinorielle, on la note ∇^S .

Proposition 3.44. *La forme hermitienne β , la conjugaison de charge κ , et le morphisme de fibré de Clifford γ satisfont*

- (1) $\nabla_X^S(\gamma(Y)\psi) = \gamma(\nabla_X Y)\psi + \gamma(Y)\nabla_X^S\psi,$
- (2) $X(\bar{\psi} \cdot \beta\psi) = \bar{\nabla}_X^S\bar{\psi} \cdot \beta\psi + \bar{\psi} \cdot \beta\nabla_X^S\psi,$
- (3) $\kappa\nabla_X^S\psi = \nabla_X^S\kappa\psi,$

pour tout $X, Y \in C^\infty(M; TM)$ et $\psi \in C^\infty(M; S(M))$.

3.5. Structure spin sur un cylindre.

3.5.1. *Injection de \mathbb{R}^d dans $\mathbb{R}^{1,d}$.* Soit \mathbb{R}^d l'espace euclidien muni du produit scalaire canonique. On note $\text{Cl}(d)$, $\text{SO}(d)$, $\text{Spin}(d)$ l'algèbre de Clifford, le groupe spécial orthogonal, et le groupe spin associés. On considère l'injection isométrique $i : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto (0, x) \in \mathbb{R}^{1,d}$. Ce morphisme induit une injection de $\text{Cl}(d)$ vers $\text{Cl}(1, d)$, et également un morphisme

$$\tilde{i} : \text{SO}(d) \ni o \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & o \end{pmatrix} \in \text{SO}^\uparrow(1, d)$$

on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(d) & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathrm{SO}^\uparrow(1, d) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ \mathrm{Cl}(d) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Cl}(1, d) \end{array}$$

où α correspond à l'action de $\mathrm{SO}(d)$, respectivement $\mathrm{SO}^\uparrow(1, d)$ sur $\mathrm{Cl}(d)$, respectivement $\mathrm{Cl}(1, d)$.

Lemme 3.45. *Soit $s \in \mathrm{Spin}(1, d)$, $Ad(s) \in \tilde{i}(\mathrm{SO}(d))$. Alors il existe un unique $\tilde{s} \in \mathrm{Spin}(d)$, tel que $s = i(\tilde{s})$.*

3.5.2. *Structure spin.* Soit $M = I_t \times \Sigma_x$ où $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et Σ une variété de dimension d orientable. On fixe une métrique lorentzienne sur M

$$g = -dt^2 + h(t, x)dx^2,$$

où $I \ni t \mapsto h(t, x)dx^2$ est une famille de métriques riemanniennes sur Σ . Soit $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de Σ , $\mathcal{F}_i = (e_{i,a})_{1 \leq a \leq d}$ une section du fibré des repères orthonormés de (Σ, h_0) au-dessus de V_i , et $o_{ij} : V_{ij} \rightarrow \mathrm{SO}(d)$ les fonctions de transition associées.

Soit $\mathcal{F}_i(t) = (e_{i,a}(t))_{1 \leq a \leq d}$ le repère orthonormé pour (Σ, h_t) au-dessus de V_i obtenu par transport parallèle de \mathcal{F}_i selon ∂_t pour la métrique g , et $o_{ij}(t) : V_{ij} \rightarrow \mathrm{SO}(d)$ les fonctions de transition associées. De plus, les $o_{ij}(t)$ ne dépendent pas de t car $e_{i,a}(t) \cdot h_t e_{j,b}(t) = e_{i,a}(t) \cdot g e_{j,b}(t)$. D'après le lemme 3.45 il existe $\tilde{s}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathrm{Spin}(d)$, indépendants de t , tel que $s_{ij} = i(\tilde{s}_{ij})$, on obtient alors une structure spin sur (Σ, h_t) pour $t \in I$. Réciproquement, si (Σ, h_0) est muni d'une structure spin avec des fonctions de transition $\tilde{s}_{ij} : V_{ij} \rightarrow \mathrm{Spin}(d)$, les fonctions de transition

$$s_{ij} = i(\tilde{s}_{ij}) : U_{ij} \rightarrow \mathrm{Spin}(1, d),$$

définissent une structure spin sur (M, g) , puisque $Ad(s_{ij}) = \tilde{i}(o_{ij})$.

En particulier, on peut supposer que les fonctions de transitions de la structure spin sur M sont indépendantes de t , et donc la restriction de $S(\Sigma)$ à $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ est indépendante de t pour tout temps t . On note $S(\Sigma)$ une telle restriction, de plus on définit β_t et γ_t comme étant les restrictions de β et γ à Σ_t .

3.6. Variété à géométrie bornée. On introduit dans cette section la notion de variété à géométrie bornée qui permet d'étendre des résultats de calcul pseudo-différentiel sans hypothèse de compacité aux variétés riemanniennes.

3.6.1. *Définition.* Nous définissons d'abord la notion de variété à géométrie bornée pour une variété riemannienne. Pour cela rappelons un certain nombre de notations sur les variétés riemanniennes.

Soit (M, \hat{g}) une variété riemannienne, on munit (M, \hat{g}) de la distance géodésique. On note $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ l'application exponentielle : $\exp_x v = \gamma(1)$ où $\gamma(t)$ est la géodésique (avec la paramétrisation canonique) telle que $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$. On supposera toujours que \exp_x est défini pour tout x , c'est-à-dire pour tout $x \in M$, $v \in T_x M$, la géodésique $\gamma(t)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in M$, il existe $r > 0$ tel que $\exp_x : B(x, r) \rightarrow M$ soit un difféomorphisme sur un voisinage $U_{x,r}$ de x . On note r_x le supremum des tels rayons r , puis on définit le rayon d'injectivité $r_{inj} = \inf_x r_x$.

On peut alors introduire les coordonnées *canoniques*, qui sont des coordonnées issues d'un choix de repère euclidien sur $T_x X$ et de l'application \exp_x .

On introduit également le tenseur de Riemann.

Définition 3.46. Soient u, v, w des champs de vecteurs sur M , on définit le tenseur de courbure de Riemann

$$R(u, v) \cdot w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w,$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita, et $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie.

Définition 3.47. Une variété riemannienne (M, \hat{g}) est dite à géométrie bornée si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- (1) $r_{inj} > 0$
- (2) pour tout k , $\nabla^k R$ est borné, c'est-à-dire pour tout k , il existe C_k tel que $|\nabla^k R|_g \leq C_k$.

Il existe également une définition équivalente, en terme de coordonnées locales ([GOW], Thm 2.2).

On note $B_n(0, 1)$ la boule unité de \mathbb{R}^n , δ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , et $BT_q^p(B_n(0, 1), \delta)$ l'espace des tenseurs d'ordre (q, p) sur $B_n(0, 1)$, qui sont bornés ainsi que toutes leurs dérivées. $BT_q^p(B_n(0, 1), \delta)$ est un espace de Fréchet, on peut donc définir la notion de famille bornée de tenseurs d'ordre (q, p) . Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert relativement compact, on note $C_b^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions lisses bornées ainsi que toutes leurs dérivées.

Proposition 3.48. (M, \hat{g}) est une variété à géométrie bornée si et seulement si pour chaque $x \in M$, il existe $U_x \subset M$ un voisinage ouvert de x , et un difféomorphisme $\psi_x : U_x \rightarrow B_n(0, 1)$ tel que $\psi_x(x) = 0$, et les métriques $\hat{g}_x := (\psi_x^{-1})^* \hat{g}$ satisfont

- (1) $(\hat{g}_x)_{x \in M}$ est bornée dans $BT_2^0(B_n(0, 1), \delta)$,
- (2) il existe $c > 0$ tel que

$$c^{-1} \delta \leq \hat{g}_x \leq c \delta, x \in M.$$

Un tel difféomorphisme est appelé carte bornée.

Définition 3.49. Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M est dit borné s'il existe N tel que

$$\bigcap_{i \in J} U_i = \emptyset \text{ si } \text{cardinal}(J) > N.$$

Définition 3.50. Un atlas qui est constitué de cartes bornées associées à un recouvrement borné est appelé atlas borné.

De tels atlas existent toujours sur les variétés à géométrie bornée ([Sh] Lemme 1.2 de l'appendice 1).

Le choix usuel pour les (U_i, ψ_i) est $(B^{\hat{g}}(x_i, r), \exp_{x_i}^{\hat{g}})$ avec $r < r_{inj}$, ainsi sans perte de généralité on peut supposer les ouverts U_i simplement connexes. À un atlas borné (U_i, ψ_i) , on peut associer une partition de l'unité

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i^2, \chi_i \in C_0^\infty(U_i)$$

telle que $\{(\psi_i^{-1})^* \chi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $C_b^\infty(B_n(0, 1))$, une telle partition est elle-même dite bornée.

On rappelle également un théorème ([GOW] Thm. 2.4).

Théorème 3.51. Soit (M, \hat{g}) une variété à géométrie bornée, soit ϵ assez petit, et soit la famille d'application

$$\chi_x := \psi_x \circ \exp_x^{\hat{g}} \circ e_x : B_n(0, \epsilon) \rightarrow \psi_x(B_M^{\hat{g}}(x, \epsilon)),$$

où e_x est une isométrie linéaire arbitraire.

Alors pour tout multi-indice α , la famille χ_x satisfait

$$\sup_{x \in M, y \in B_n(0, \epsilon)} \|D_y^\alpha \chi_x(y)\| + \sup_{x \in M, y \in \psi_x(B_M^g(x, \epsilon))} \|D_y^\alpha \chi_x^{-1}(y)\| < \infty.$$

Ce théorème assurera que la condition d'être borné sur une variété à géométrie bornée ne dépend pas de l'atlas borné que l'on a fixé.

3.6.2. Tenseurs bornés.

Définition 3.52. Soit (M, \hat{g}) une variété à géométrie bornée, on note $BT_q^p(M, \hat{g})$ l'espace des tenseurs T d'ordre (q, p) sur M tels que $T_x = \psi_x^* T$ est une famille bornée dans $BT_q^p(B_n(0, \epsilon), \delta)$, où $\{\psi_x\}$ est une famille de cartes bornées, et où ϵ est donné par le théorème 3.51. On équipe $BT_q^p(M, \hat{g})$ avec la topologie de Fréchet associée.

Le théorème 3.51 assure que la topologie de $BT_q^p(M, \hat{g})$ est indépendant du choix de la famille de cartes bornées $\{\psi_x\}$.

3.6.3. Opérateurs différentiels bornés. Soit $m \in \mathbb{N}$, on note $\text{Diff}^m(B_n(0, 1), \delta)$ l'espace des opérateurs différentiels d'ordre m sur $B_n(0, 1)$ dont les coefficients sont dans $C_b^\infty(B_n(0, 1))$, munit de sa topologie d'espace de Fréchet.

Définition 3.53. Soit (M, \hat{g}) une variété à géométrie bornée. On note $\text{Diff}^m(M, \hat{g})$ l'espace des opérateurs différentiels d'ordre m sur M tels que si $P_x = (\psi_x^{-1})^* P$ alors $\{P_x\}_{x \in M}$ est bornée dans $\text{Diff}^m(B_n(0, 1), \delta)$.

3.6.4. Fibré à géométrie bornée.

Définition 3.54. Soit (M, \hat{g}) une variété à géométrie bornée. Soit $E \rightarrow^\pi M$ un fibré vectoriel, soit t_{ij} les fonctions de transition de E associées à un recouvrement borné, alors E est dit à géométrie bornée si les t_{ij} sont bornées.

De la même façon, on définit les sections bornées, ainsi que les opérateurs différentiels bornés qui agissent sur les fibrés vectoriels à géométrie bornée.

3.6.5. Structure hilbertienne bornée.

Définition 3.55. Soit $E \rightarrow^\pi M$ un fibré vectoriel borné, soit β une forme hermitienne définie positive sur E , on dit que β est bornée si ses trivialisations locales β_i satisfont les conditions suivantes :

- (1) $\beta_i > 0$,
- (2) $\beta_i, (\beta_i)^{-1}$ sont bornées.

3.6.6. Espaces de Sobolev. On définit l'espace de Sobolev $H^s(M; E)$ en posant

$$\|u\|_s^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|T_i \circ \psi_i \chi_i u\|_s^2,$$

où $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un atlas borné, les T_i sont des trivialisations locales, et $1 = \sum \chi_i^2$ est une partition bornée subordonnées aux $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

La topologie de $H^s(M; E)$ ne dépend pas de ces choix.

3.6.7. Fibrés principaux à géométrie bornée.

Définition 3.56. Soit (M, \hat{g}) une variété à géométrie bornée, soit $P \rightarrow M$ un G -fibré principal, où $G \subset M_N(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie. P est dit à géométrie bornée, s'il existe un recouvrement borné $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M tel que les fonctions de transition $t_{ij} : U_{ij} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ soient bornées.

De même, soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel, soit t_{ij} les fonctions de transitions de E associée à un recouvrement borné, alors E est dit à géométrie bornée si les t_{ij} sont bornées.

En particulier, les fibrés vectoriels associés à un fibré principal borné sont également à géométrie bornée.

3.6.8. Repères bornés.

Définition 3.57. Soit $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas borné, $\mathcal{F}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de repères locaux de TM au-dessus de U_i est dit borné si en notant $\mathcal{F}_i = (f_{i,a})$ la famille $(f_{i,a})_{i \in \mathbb{N}, a \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est bornée.

On remarque, en passant par les coordonnées normales, qu'une variété à géométrie bornée admet toujours une famille de repères bornés.

3.6.9. *Variété lorentzienne à géométrie bornée.* On reprend la définition de variété lorentzienne à géométrie bornée donnée dans la section 3 de [GOW].

Définition 3.58. Soit M une variété équipée d'une métrique riemannienne de référence \hat{g} , telle que (M, \hat{g}) est une variété à géométrie bornée. Une métrique lorentzienne g sur M est dite à géométrie bornée si $g \in BT_2^0(M, \hat{g})$ et $g^{-1} \in BT_2^0(M, \hat{g})$.

3.6.10. Repères orthonormés bornés.

Proposition 3.59. Soit (M, g) une variété lorentzienne à géométrie bornée dont \hat{g} est la métrique riemannienne de référence. Alors (M, g) admet une famille bornée de repères locaux orthonormés, orienté, orientés en temps.

Pour une preuve, voir Prop. 18 dans [G-St].

3.6.11. Surfaces de Cauchy à géométrie bornée.

Définition 3.60. Soit (M, \hat{g}) une variété riemannienne à géométrie bornée de dimension n , Σ une variété de dimension $n - 1$. Un plongement $i : \Sigma \rightarrow M$ est dit à géométrie bornée, s'il existe un atlas borné (U_i, ψ_i) tel qu'en posant $\Sigma_i := \psi_i(i(\Sigma) \cap U_i)$ on ait

$$\Sigma_i = \{(v', v_n) \in B_n(0, 1), v_n = F_i(v')\},$$

où $\{F_i\}$ est une famille de fonctions bornées dans $C_b^\infty(B_{n-1})(0, 1)$.

On peut montrer que (Σ, i^*g) est à géométrie bornée (Lemme 2.9 [GOW]).

Définition 3.61. Soit (M, g) une variété lorentzienne à géométrie bornée dont \hat{g} est la métrique riemannienne de référence. On suppose que (M, g) est globalement hyperbolique, et que $\Sigma \subset M$ est une surface de Cauchy de type espace. Σ est une surface de Cauchy à géométrie bornée si

- (1) Le plongement $i : \Sigma \rightarrow M$ est à géométrie bornée pour \hat{g} ,
- (2) En notant $n(y)$ pour $y \in \Sigma$, le vecteur normal orienté vers le futur pour la métrique g , on a

$$\sup_{y \in \Sigma} n(y) \cdot \hat{g}(y)n(y) < \infty.$$

Enfin, si on a une variété lorentzienne qui admet une surface de Cauchy bornée, on obtient une décomposition locale de M en cylindre (Thm. 3.5 [GOW]).

Théorème 3.62. Soit (M, g) une variété lorentzienne à géométrie bornée, et Σ une surface de Cauchy à géométrie bornée, alors

- (1) Il existe $\delta > 0$ tel que le flot géodésique normal à Σ

$$\chi : \begin{aligned} &] - \delta, \delta[\times \Sigma \rightarrow M \\ & (s, y) \mapsto \exp_y^g(sn(y)) \end{aligned}$$

est bien défini, et est un difféomorphisme sur son image.

- (2) $\chi^*g = -ds^2 + h_s$, où $\{h_s\}_{s \in]-\delta, \delta[}$ est une famille lisse de métrique riemannienne sur Σ telle que
- (a) (Σ, h_0) est à géométrie bornée,
 - (b) $s \mapsto h_s \in C_b^\infty(]-\delta, \delta[, \text{BT}_2^0(\Sigma, h_0))$,
 - (c) $s \mapsto h_s^{-1} \in C_b^\infty(]-\delta, \delta[, \text{BT}_0^2(\Sigma, h_0))$.

3.6.12. Structures spin bornées.

Proposition 3.63. Soit $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ et $G' \rightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M$ deux fibrés principaux au-dessus de M de groupes de structure G, G' . Soit $\varphi : G' \rightarrow G$ un morphisme de groupe, et un difféomorphisme local propre, soit $\chi : P' \rightarrow P$ un morphisme de fibré et un difféomorphisme local. Supposons que le diagramme suivant est commutatif :

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & P' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \chi \\ G & \longrightarrow & P \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi' \\ \searrow \pi \end{array} \quad M$$

c'est-à-dire χ est un morphisme de fibré principal au-dessus M .

Alors à un isomorphisme près de G' -fibré principaux au-dessus de M , on peut supposer que G et G' sont localement trivialisable au-dessus d'un recouvrement commun $(U_i)_{i \in I}$ de M et que

$$t_{ij}(x) = \varphi(t'_{ij}(x)), \quad x \in U_i \cap U_j,$$

où $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, $t'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G'$ sont les fonctions de transitions de P, P' .

On renvoie à la proposition A.2 de [G-St].

On en déduit alors l'existence d'une structure spin bornée lorsque M est une variété lorentzienne à géométrie bornée qui admet une structure spin.

4. ANALYSE MICRO-LOCALE SUR LES VARIÉTÉS

4.1. Distribution sur les variétés. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne orientable, soit Ω_g la forme volume associée. On note $\mathcal{D}'(M, E)$ l'ensemble des distributions sur M à valeurs dans E . En notant E' le dual de E , on peut identifier le dual de $C_0^\infty(M; E)$ avec $\mathcal{D}'(M, E')$ en utilisant une densité (par exemple Ω_g).

On note $\mathcal{E}'(M, E)$ l'ensemble des distributions à support compact sur M à valeurs dans E . De plus, en utilisant la forme volume Ω_g , on peut plonger $C^\infty(M; E')$ dans $C_0^\infty(M; E)'$ par

$$\langle u, f \rangle := \int_M \langle u, f \rangle_x d\Omega_g,$$

où $u \in C^\infty(M; E')$ et $f \in C_0^\infty(M; E)$.

4.1.1. Opérateurs sur les variétés. On rappelle ici le théorème de Schwartz dans le cadre de fibrés vectoriels (voir [H], Thm 5.2.1).

Théorème 4.1. *Soient M, N deux variétés pseudo-riemannienne orientables, $\pi_E : E \rightarrow M$, $\pi_F : F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rang fini, si $A : C_0^\infty(M; E) \rightarrow \mathcal{D}'(M; F)$ est un opérateur linéaire continu, alors il existe une unique distribution $K \in \mathcal{D}'(N \times M, E' \otimes F)$ telle que*

$$\langle Au, v \rangle = \langle K, u \otimes v \rangle, \forall u \in C_0^\infty(M; E), \forall v \in C_0^\infty(M; F').$$

Réciproquement, si $K \in \mathcal{D}'(N \times M, E' \otimes F)$, l'égalité précédente définit un opérateur linéaire continu $A : C_0^\infty(M; E) \rightarrow \mathcal{D}'(M; F)$. L'opérateur transposé de A est l'opérateur $A^t : C_0^\infty(M; F') \rightarrow \mathcal{D}'(M; E')$ dont le noyau de Schwartz est donné par

$$K_{A^t} := \text{Exch} K_A \in \mathcal{D}'(M \times M, F' \otimes E)$$

où l'on note Exch l'opérateur qui échange les arguments de K_A

$$\langle \text{Exch} K, f \otimes g \rangle = \langle K, g \otimes f \rangle,$$

où $f \in C_0^\infty(M; F')$, $g \in C_0^\infty(M; E)$. On a également l'égalité

$$\langle g, Af \rangle = \langle A^t g, f \rangle.$$

De plus on peut étendre cette formule dans le cas où $f \in C^\infty(M, E)$, $g \in C^\infty(M, F')$ tels que $\text{supp } f \cap \text{supp } g$ est compact. De même, l'adjoint formel d'un opérateur A est l'opérateur $A^* : \mathcal{D}(M; \overline{F'}) \rightarrow \mathcal{D}'(M; \overline{E})$ dont le noyau de Schwartz est donné par

$$K_{A^*} := \text{Exch} \overline{K_A} \in \mathcal{D}'(M \times M, \overline{F'} \otimes \overline{E}).$$

On a la relation

$$\langle \overline{g}, Af \rangle = \langle \overline{A^*} g, f \rangle,$$

où $f \in C_0^\infty(M, E)$, $g \in C_0^\infty(M, \overline{F'})$.

Définition 4.2. *Soit A un opérateur linéaire continu $A : C_0^\infty(M; E) \rightarrow \mathcal{D}'(M; E)$, A est dit régularisant lorsque A^t est à valeur dans $C^\infty(M, E)$.*

Par dualité, on peut alors faire agir A sur les distributions à support compact par la relation

$$\langle Au, f \rangle := \langle u, A^t f \rangle,$$

où $u \in \mathcal{E}'(M, E)$, $f \in C_0^\infty(M, \overline{F'})$.

On peut également étendre le domaine de définition de A si l'on a des conditions supplémentaires sur le support A .

Définition 4.3. Soit A un opérateur linéaire continu $A : C_0^\infty(M; E) \rightarrow \mathcal{D}'(M; E)$, et $\pi_1, \pi_2 : M \times M \rightarrow M$ les projections canoniques de $M \times M$ sur M . A est dit à support propre si les projections π_1, π_2 restreintes au support du noyau de Schwartz K_A de A sont propres.

Si A est à support propre, alors A envoie $C_0^\infty(M; E)$ vers $\mathcal{E}'(M, E)$, et donc par dualité on peut étendre A de $C^\infty(M, E)$ vers $\mathcal{D}'(M; E)$.

4.1.2. Opérateurs différentiels.

Définition 4.4. Un opérateur différentiel P d'ordre m est un opérateur linéaire $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ qui s'écrit en coordonnées locales sous la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha,$$

où $a_\alpha \in C^\infty(M, \mathcal{L}(E))$. De plus, on définit le symbole principal $\sigma_P : T^*M \rightarrow \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire définie localement par

$$\sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

où $(x, \xi) \in T^*M$, et en notant $\xi^\alpha = \xi_0^{\alpha_0} \cdots \xi_d^{\alpha_d}$.

Soit P un opérateur différentiel sur E , alors $\text{supp } Pu \subset \text{supp } u$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(M, E)$. Ainsi le support du noyau de Schwartz de l'opérateur P est contenu dans la diagonale $\Delta_M = \{(x, x), x \in M\}$, donc P est proprement supporté. De plus P est continu de $C_0^\infty(M; E)$ dans $C_0^\infty(M; E)$, donc on peut l'étendre par dualité en un opérateur de $\mathcal{D}'(M; E)$ dans $\mathcal{D}'(M; E)$. De plus, en conservant les notations de la Définition 4.4, l'opérateur transposé tP s'écrit dans des coordonnées locales

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha^t(x) (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha.$$

4.1.3. *Opérateurs normalement hyperboliques.* Soit (M, g) une variété lorentzienne, soit E un fibré vectoriel de rang fini sur M . On introduit les opérateurs normalement hyperboliques, qui admettent des inverses retardés/avancés sur les espaces-temps globalement hyperboliques.

Définition 4.5. Soit $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel, P est dit normalement hyperbolique s'il s'écrit dans des coordonnées locales sous la forme

$$P = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbb{1}_E + R,$$

où R est un opérateur différentiel d'ordre 1. De façon équivalente, cette définition est équivalente à

$$\sigma_P(x, \xi) = \xi \cdot g^{-1}(x) \xi \mathbb{1}, (x, \xi) \in T^*M.$$

On peut également définir les opérateurs pré-normalement hyperboliques, dont l'opérateur de Dirac fait partie.

Définition 4.6. On dit qu'un opérateur $D : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ est pré-normalement hyperbolique s'il existe un opérateur différentiel \tilde{D} tel que $D\tilde{D}$ est normalement hyperbolique.

4.1.4. Propagateurs retardés et avancés.

Définition 4.7. Soit $D : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel. Soit $S_\pm : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ deux applications linéaires, on appelle S_+ , resp. S_- , un propagateur avancé resp. retardé de D si les conditions suivantes sont satisfaites

- (1) $DS_\pm f = f$,
- (2) $S_\pm Df = f$,
- (3) $\text{supp}(S_\pm f) \subset J_\pm(\text{supp } f)$, $f \in C_0^\infty(M, E)$

On renvoie au Théorème 3.3.1 dans [BGP].

Théorème 4.8. Soit (M, g) une variété globalement hyperbolique, P un opérateur normalement hyperbolique sur un fibré vectoriel E sur M , alors P admet une unique paire de propagateurs avancés et retardés.

Ce résultat s'étend aux opérateurs pré-normalement hyperboliques (voir [D] Thm. 2.1).

Proposition 4.9. Soit $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel qui admet des propagateurs retardés/avancés E_\pm . Alors P^t admet une unique paire de propagateurs retardés/avancés \tilde{E}_\pm , de plus $\tilde{E}_\pm = E_\pm^t$.

Théorème 4.10. Soit $D : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un opérateur pré-normalement hyperbolique, soit \tilde{D} un opérateur associé, et E_\pm les propagateurs avancés/retardés de $D\tilde{D}$, alors

$$S_\pm := \tilde{D}E_\pm$$

sont les uniques propagateurs avancés/retardés de D .

4.2. Front d'onde d'une distribution. On rappelle la définition du front d'onde d'une distribution.

Définition 4.11. Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n$, (x_0, ξ_0) n'appartient pas à $\text{WF}(u)$ si et seulement si il existe $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(x_0) \neq 0$ et un cône ouvert $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\xi_0 \in \Gamma$ et tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe C_N tel que

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-2N}, \forall \xi \in \Gamma.$$

Définition 4.12. Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n , Γ un cône fermé de $X \times \mathbb{R}^n \setminus 0$, on pose

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) = \{u \in \mathcal{D}'(X), \text{WF}(u) \subset \Gamma\}.$$

Pour étendre la notion de front d'onde aux variétés on a besoin du théorème suivant

Théorème 4.13. Soient X, Y des ouverts de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n , $f : X \rightarrow Y$ une fonction C^∞ . On note l'ensemble des normales associées à f par

$$N_f = \{(f(x), \eta) \in Y \times \mathbb{R}^n, D(f)(x)^T \cdot \eta = 0\}.$$

Soit Γ un cône fermé de $Y \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ tel que $\Gamma \cap N_f = \emptyset$, alors il existe une unique application continue $f^* : \mathcal{D}'_\Gamma(Y) \rightarrow \mathcal{D}'_{f^*\Gamma}(X)$ où

$$f^*\Gamma = \{(x, Df(x)^T \cdot \eta), (f(x), \eta) \in \Gamma\},$$

telle que $f^*u = u \circ f$ lorsque $u \in C^\infty(Y)$.

En particulier, si $u \in \mathcal{D}'(Y)$ telle que $N_f \cap \text{WF}(u) = \emptyset$ alors

$$\text{WF}(f^*u) \subset f^*\text{WF}(u).$$

On peut alors étendre la notion de front d'onde aux variétés.

Définition 4.14. Soit X une variété, $u \in \mathcal{D}'(X)$, κ un difféomorphisme de carte, on définit $WF(u) \subset T^*X \setminus 0$ par

$$WF(u) \cap T^*X|_{\kappa} = \kappa^*WF((\kappa^{-1})^*u).$$

Si $\pi : E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel, $u \in \mathcal{D}'(E)$ on définit localement $WF(u)$ par $\bigcup WF(u_i)$ où les (u_1, \dots, u_n) sont les composantes de u dans une trivialisatation locale.

4.3. Opération sur les ensembles coniques. Soit $\Gamma \subset T^*X_1 \times T^*X_2$, où $X_1 \subset \mathbb{R}^n$, $X_2 \subset \mathbb{R}^m$ sont deux ouverts. On note

$$\begin{aligned} \Gamma' &:= \{(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) : (x_1, \xi_1, x_2, -\xi_2) \in \Gamma\} \\ \text{Exch}(\Gamma) &:= \{(x_2, \xi_2, x_1, \xi_1) : (x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) \in \Gamma\} \\ X_1\Gamma &:= \{(x_1, \xi_1) : \exists x_2 \text{ tel que } (x_1, \xi_1, x_2, 0) \in \Gamma\} \\ \Gamma_{X_2} &:= \{(x_2, \xi_2) : \exists x_1 \text{ tel que } (x_1, 0, x_2, \xi_2) \in \Gamma\} \end{aligned}$$

4.4. Opération sur les distributions. De plus, lorsqu'on sera amené à étudier des propriétés sur le front d'onde d'un noyau de Schwartz, il est naturel de chercher à comprendre comment le front d'onde se comporte vis-à-vis du produit tensoriel.

Théorème 4.15. Soient $u \in \mathcal{D}'(X)$, $v \in \mathcal{D}'(Y)$ alors

$$WF(u \otimes v) \subset (WF(u) \times WF(v)) \cup (\text{supp } u \times \{0\}) \times WF(v) \cup (WF(u) \times (\text{supp } v \times \{0\})).$$

On peut alors définir le produit de deux distributions en tirant en arrière le produit tensoriel sur la diagonale.

Théorème 4.16. Soient $u, v \in \mathcal{D}'(X)$, telle que pour tout $(x, \xi) \in WF(u)$ $(x, -\xi) \notin WF(v)$. On peut alors définir uv comme $\delta^*(u \otimes v)$ où $\delta : x \rightarrow (x, x)$. Lorsque cette condition est vérifiée on a alors

$$WF(uv) \subset \{(x, \xi + \eta), (x, \xi) \in WF(u) \text{ ou } \xi = 0, (x, \eta) \in WF(v) \text{ ou } \eta = 0\}.$$

Théorème 4.17. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts, soit $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$. On note \mathcal{K} l'application de $C_0^\infty(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ associée à K . On a alors

$$WF(\mathcal{K}u) \subset \{(x, \xi), (x, y, \xi, 0) \in WF(K) \text{ avec } y \in \text{supp}(u)\}, u \in C_0^\infty(Y).$$

Théorème 4.18. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts, soit $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$. Soit l'application $\mathcal{K} : C_0^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ associée à K . Il existe une unique façon de définir $\mathcal{K}u \in \mathcal{D}'(X)$ pour tout $u \in \mathcal{E}'(Y)$ telle que $WF(u) \cap WF'(K)_Y = \emptyset$, et telle que l'application $\mathcal{E}'(K) \cap \mathcal{D}'_\Gamma \ni u \rightarrow \mathcal{K}u \in \mathcal{D}'(Y)$ est continue pour tout compact $K \subset Y$ et tout fermé conique Γ disjoint de $WF(K)'_Y$.

On a alors

$$WF(\mathcal{K}u) \subset WF(K)_X \cup WF(K)' \circ WF(u).$$

4.5. Opérateurs linéaires. On considère $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur une variété X . On note p_m son symbole principal.

On note o la section nulle de T^*X .

Définition 4.19. On définit l'ensemble caractéristique de P , noté $\text{Char}(P)$ par

$$\text{Char}(P) = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus o, p_m(x, \xi) = 0\}.$$

Théorème 4.20. Soit P un tel opérateur. Soit $u \in \mathcal{D}'(M)$, on a alors

$$WF(u) \subset \text{Char}(P) \cup WF(Pu).$$

Corollaire 4.21. *Si P est elliptique, c'est-à-dire si $\text{Char}(P) = \emptyset$, on a alors*

$$\text{WF}(u) = \text{WF}(Pu).$$

En particulier

$$\text{singsupp } u = \text{singsupp } Pu.$$

Retournons au cas de l'opérateur de Dirac D . On rappelle que le symbole principal p_1 vérifie

$$p_1(x, \xi) = \rho(g^{-1}(x)\xi).$$

De plus on a

$$p_1^2(x, \xi) = \xi \cdot g^{-1}(x)\xi Id.$$

Ainsi

$$\text{Char}(D) = \{(x, \xi) \in T^*M \setminus 0, \xi \cdot g^{-1}(x)\xi = 0\} = \mathcal{N}.$$

On note \mathcal{N}^\pm ses deux composantes connexes.

4.6. Parametrix remarquables. Définissons d'abord la notion de parametrix.

Définition 4.22. *Soit $P : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, F)$ un opérateur différentiel. Un opérateur linéaire $S : C_0^\infty(M, F) \rightarrow C_0^\infty(M, E)$ est appelé parametrix de P si*

$$SP = \mathbb{1} + W, PS = \mathbb{1} + \widetilde{W}$$

où W, \widetilde{W} sont deux opérateurs dont le noyau de Schwartz est lisse. On note également ces égalités

$$SP = \mathbb{1} \text{ mod } C^\infty, PS = \mathbb{1} \text{ mod } C^\infty.$$

Définition 4.23. *Soit $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel, et soit $\text{Char}(P)$ son ensemble caractéristique. Une courbe bicharactéristique de P est une courbe γ de $\text{Char}(P)$ générée par le flot Hamiltonien associé à l'Hamiltonien σ_P .*

*On note $B(X_0)$ l'unique bicharactéristique passant par $X_0 \in T^*M$.*

Définition 4.24. *Un opérateur différentiel $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ est dit de type principal réel si son symbole principal est réel et homogène, et s'il n'existe pas de bicharactéristique maximale dans P dont la projection sur M est inclus dans un compact.*

On peut définir une relation d'équivalence entre les éléments de $\text{Char}(P)$ avec

$$X_1 \sim X_2 \iff X_2 \in B(X_1)$$

On note $X_1 \succ X_2$, resp. $X_1 \prec X_2$, si $X_1 \sim X_2$ et si X_1 est antérieur à X_2 , resp. X_2 est postérieur à X_1 , sur la courbe bicharactéristique par rapport au paramètre naturel sur cette courbe.

Théorème 4.25. *Soit P un opérateur différentiel de type principal réel, et tel que $u \in \mathcal{D}'(M)$ satisfait $Pu \in C^\infty(M)$. Alors $\text{WF}(u) \subset \mathcal{N}$ et*

$$X \in \text{WF}(u) \implies B(X) \subset \text{WF}(u).$$

Définition 4.26. *Soit P un opérateur différentiel de type principal réel sur une variété M . On dit que M est pseudo-convexe relativement à P si pour tout compact $K \subset M$, il existe un autre compact $K' \subset M$ tel que K' contient toutes les bicharactéristiques dont les deux extrémités sont dans K .*

On reprend ici la section 3.3 de [W]. On définit l'ensemble des relations bicharactéristiques de P

$$\mathcal{C} := \{(X_1, X_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : X_1 \sim X_2\}.$$

On note $\Delta_{\mathcal{N}}$ la diagonale de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$

$$\Delta_{\mathcal{N}} := \{(X, X) : X \in \mathcal{N}\}.$$

On note $B(X)$ l'ensemble des bicharactéristiques passant par $X = (x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus o$. On observe que $\mathcal{N} \setminus \Delta_{\mathcal{N}}$ est l'union de deux ensembles ouverts

$$\mathcal{C}^+ := \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C}, \mathcal{X}_1 \succ X_2\}, \mathcal{C}^- := \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C}, \mathcal{X}_1 \prec X_2\},$$

qui satisfont $\text{Exch}(\mathcal{C}^+) = \mathcal{C}^-$.

Définition 4.27. Une orientation de \mathcal{C} est une partition de $\mathcal{C} \setminus \Delta_{\mathcal{N}} = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ en deux ouverts disjoints $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C} \setminus \Delta_{\mathcal{N}}$ tels que $\text{Exch}(\mathcal{C}^1) = \mathcal{C}^2$.

Pour $X \in T^*M$ on pose

$$\mathcal{C}^{\pm}(X) := \mathcal{C}^{\pm} \cap B(X) \times B(X)$$

Proposition 4.28. Soit \mathcal{C} une relation bicharactéristique.

(1) Soit $\mathcal{C} \setminus \Delta_{\mathcal{N}} = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ une orientation de \mathcal{C} . On pose

$$\mathcal{N}^i := \{X \in \mathcal{N}, \mathcal{C}^+(X) \subset \mathcal{C}^i\}, i = 1, 2$$

Alors \mathcal{N}^i sont des unions de composantes connexes de \mathcal{N} .

(2) Réciproquement, soit $\mathcal{N} = \mathcal{N}^1 \cup \mathcal{N}^2$ une partition de \mathcal{N} en deux ensembles ouverts et fermés de \mathcal{N} , alors

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}^1 &:= \bigcup_{X \in \mathcal{N}^1} \mathcal{C}^+(X) \cup \bigcup_{X \in \mathcal{N}^2} \mathcal{C}^-(X), \\ \mathcal{C}^2 &:= \bigcup_{X \in \mathcal{N}^2} \mathcal{C}^+(X) \cup \bigcup_{X \in \mathcal{N}^1} \mathcal{C}^-(X), \end{aligned}$$

alors $(\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2)$ est une orientation de \mathcal{C} .

Théorème 4.29. Soit $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel de type principal réel tel que M est pseudo-convexe par rapport à P , et soit $(\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2)$ une orientation de \mathcal{C} . Alors il existe des parametrix E^i de P , $i = 1, 2$ telle que

$$\text{WF}'(E^i) \subset \Delta^* \cup \mathcal{C}^i$$

où Δ^* est la diagonale de $T^*M \setminus o \times T^*M \setminus o$. Tout autre parametrix qui satisfait cette relation est égal à E^i modulo C^∞ .

4.7. Parametrix distinguées d'opérateurs normalement hyperboliques. Dans cette partie on applique le cadre précédent au cas d'un opérateur normalement hyperbolique.

Proposition 4.30. Soit (M, g) un espace-temps globalement hyperbolique, $-\square + m^2$ est de type principal réel sur M .

Proposition 4.31. Soit (M, g) un espace-temps globalement hyperbolique, M est pseudo convexe par rapport à $-\square + m^2$.

Commençons d'abord par décrire l'ensemble caractéristique de P :

$$\mathcal{N} = \{(x, \xi), \in T^*M \setminus o, \xi \cdot g(x)\xi = 0\}.$$

On rappelle qu'on note $N(x) \subset T_x M$ le cône de lumière en x , on note $N(x)_\pm$ les cônes de lumière dirigés vers le futur/passé.

On introduit alors

$$N(x)_\pm^* := \{\xi \in T_x^*M : \xi \cdot v > 0, \forall v \in N(x)_\pm, v \neq 0\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} X_1 \succ X_2 &\iff X_1 \sim X_2, x_1 \in J^\pm(x_2) \text{ si } \xi_1 \in N(x_1)_\pm^* \\ X_1 \prec X_2 &\iff X_1 \sim X_2, x_1 \in J^\mp(x_2) \text{ si } \xi_1 \in N(x_1)_\pm^* \end{aligned}$$

\mathcal{N} a deux composantes connexes invariantes par le flot bicaractéristique

$$\mathcal{N}^\pm := \{X \in \mathcal{N} : \xi \in V_{x_\pm}^*\},$$

ainsi on obtient 4 partitions de \mathcal{N} en deux ouverts disjoints, donc 4 orientations de \mathcal{C} , et donc P admet 4 parametrix distinguées. On en redonne ici la classification

- (1) Parametrix de Feynman: on prend la partition $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup \emptyset$, ce qui correspond à l'orientation $(\mathcal{C}_F^1, \mathcal{C}_F^2)$, où

$$\mathcal{C}_F^1 = \mathcal{C}^+ = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C}, X_1 \succ X_2\}, \mathcal{C}_F^2 = \mathcal{C}^- = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C}, X_1 \prec X_2\}.$$

La parametrix $E_F := E_F^1 = E_F^2$ est appelée la *parametrix de Feynman*.

- (2) Parametrix d'anti-Feynman: on prend la partition $\mathcal{N} = \emptyset \cup \mathcal{N}$, ce qui correspond à l'orientation $(\mathcal{C}_F^1, \mathcal{C}_F^2)$, où

$$\mathcal{C}_F^1 = \mathcal{C}^-, \mathcal{C}_F^2 = \mathcal{C}^+.$$

La parametrix $E_{\bar{F}} := E_{\bar{F}}^1 = E_{\bar{F}}^2$ est appelée la *parametrix d'anti-Feynman*.

- (3) Parametrix retardée: on prend la partition $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ \cup \mathcal{N}_-$, qui correspond à l'orientation $(\mathcal{C}_-^1, \mathcal{C}_-^2)$

$$\mathcal{C}_-^1 = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C}, x_1 \in J^+(x_2)\}, \mathcal{C}_-^2 = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C}, x_1 \in J^-(x_2)\}.$$

La parametrix $E_R := E_R^1 = E_R^2$ est appelée *parametrix retardée*.

- (4) Parametrix avancée: on prend la partition $\mathcal{N} = \mathcal{N}_- \cup \mathcal{N}_+$, qui correspond à l'orientation $(\mathcal{C}_A^1, \mathcal{C}_A^2)$

$$\mathcal{C}_A^1 = \mathcal{C}_-^2, \mathcal{C}_A^2 = \mathcal{C}_-^1.$$

La parametrix $E_A := E_A^1 = E_A^2$ est appelée *parametrix avancée*.

Proposition 4.32. *Soit $E_{A/R}$ les parametrix retardée/avancée de P , et soit E_\pm les solutions fondamentales de P , alors*

$$E_A = E_+ \text{ mod } C^\infty, E_R = E_- \text{ mod } C^\infty.$$

Par le théorème de propagation des singularités, on obtient également les formules suivantes.

Proposition 4.33. *On a les égalités suivantes*

$$\begin{aligned} \text{WF}'(E_R - E_A) &= \mathcal{C}, \\ \text{WF}'(E_R - E_F) &= \mathcal{C} \cap \mathcal{N}_- \times \mathcal{N}_-, \\ \text{WF}'(E_A - E_F) &= \mathcal{C} \cap \mathcal{N}_+ \times \mathcal{N}_+. \end{aligned}$$

4.8. Parametrix distinguées d'opérateurs pré-normalement hyperboliques.

Soit D un opérateur pré-normalement hyperbolique, \tilde{D} un opérateur tel que $P = D\tilde{D}$ est normalement hyperbolique. Soit $E_{F/\bar{F}}, E_{A/R}$ les parametrix distingués de P , on pose alors

$$S_{F/\bar{F}} = \tilde{D}E_{F/\bar{F}},$$

qui sont des parametrix pour D . De plus on rappelle que

$$S_{A/R} = \tilde{D}E_{A/R}$$

sont les propagateurs avancé/retardé de D . En terme de front d'onde on a les relations

$$\text{WF}(S_{F/\bar{F}}) \subset \text{WF}(E_{F/\bar{F}}), \text{WF}(S_{A/R}) \subset \text{WF}(E_{A/R}).$$

Proposition 4.34. *On a les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}\mathrm{WF}'(S_R - S_A) &= \mathcal{C}, \\ \mathrm{WF}'(S_R - S_F) &= \mathcal{C} \cap \mathcal{N}_- \times \mathcal{N}_-, \\ \mathrm{WF}'(S_A - S_F) &= \mathcal{C} \cap \mathcal{N}_+ \times \mathcal{N}_+.\end{aligned}$$

5. CHAMPS DE DIRAC

5.1. Opérateur de Dirac en espace-temps courbes.

5.1.1. *Définition.* Rappelons d'abord tous les éléments nécessaires à la construction de l'opérateur de Dirac. Soit (M, g) une variété lorentzienne de dimension $1+d$ paire, admettant une structure spin $P\text{Spin}(M, g)$. Par la section 3.3, en partant de γ_0 une représentation de $\text{Cl}(1, d)$, β_0 une forme hermitienne positive en temps associée, on peut définir

- (1) le fibré de Clifford par $PSO(M, g) \times_{\alpha} \text{Cl}(1, d)$ où α est le morphisme $\alpha : \text{SO}(M, g) \ni o \mapsto \hat{o} \in \text{Aut}(\text{Cl}(1, d))$.
- (2) le fibré des spineurs par $S(M) = P\text{Spin}(M, g) \times_{\gamma_0} \mathbb{C}^n$ avec γ_0 une représentation de $\text{Cl}(1, d)$.
- (3) un morphisme de fibré d'algèbre $\gamma : \text{Cl}(M, g) \rightarrow L(S(M))$ par

$$\gamma([\chi(P), a]) \cdot [P, v] = [P, \gamma_0(a) \cdot v].$$

- (4) une structure hermitienne $\beta \in C^{\infty}(M; L_h(S(M), S(M)^*))$ par

$$[P, u] \cdot \beta[P, v] = u \cdot \beta_0 v,$$

De plus par la section 3.4, la connexion de Levi-Civita induit une connexion sur $P\text{Spin}(M, g)$ donc sur tous ses fibrés associés. On note ∇^S la connexion induite sur le fibré des spineurs. On a maintenant tous les éléments pour définir l'opérateur de Dirac qui agit sur le fibré des spineurs $S(M)$.

Définition 5.1. Soit U un ouvert de M , $(e_{\mu})_{\mu=1\dots n}$ une section locale du fibré des repères $PGL(TM)$ sur un ouvert U . On définit alors la restriction de D sur U par

$$D = g^{\mu\nu} \gamma(e_{\mu}) \nabla_{e_{\nu}} + m,$$

où $m \in C^{\infty}(M; L(S(M)))$ est une section telle que $m^* \beta = \beta m$.

On pose

$$\mathcal{D} = g^{\mu\nu} \gamma(e_{\mu}) \nabla_{e_{\nu}}.$$

Proposition 5.2. Le symbole principal de D est donné par

$$p_1(x, \xi) = \gamma(g^{-1}(x)\xi).$$

De plus on a également

$$p_1^2(x, \xi) = \xi \cdot g^{-1}(x) \xi \mathbb{1}.$$

Ainsi on a

$$\text{Char}(D) = \{(x, \chi) \in T^*M \setminus o \mid \xi \cdot g^{-1}(x)\xi = 0\} = \mathcal{N}.$$

5.1.2. *Courant conservé.*

Définition 5.3. Soient $\psi_1, \psi_2 \in C^{\infty}(M, S)$ on définit la 1-forme $J(\psi_1, \psi_2) \in C^{\infty}(M, T^*M)$ par

$$J(\psi_1, \psi_2) \cdot X = \overline{\psi_1} \cdot \beta \gamma(X) \psi_2,$$

où $X \in \Gamma(M; T^*M)$.

Proposition 5.4. Soient $\psi_1, \psi_2 \in C^{\infty}(M, S)$ on a

$$\nabla^{\mu} J_{\mu}(\psi_1, \psi_2) = -\overline{D\psi_1} \cdot \beta \psi_2 + \overline{\psi_1} \cdot \beta D\psi_2.$$

Proposition 5.5. L'opérateur de Dirac D est symétrique sur $C_0^{\infty}(M, S)$ muni de la forme hermitienne

$$(\psi_1 | \psi_2)_M := \int_M \psi_1 \cdot \beta \psi_2 d\text{Vol}_g.$$

5.1.3. *Transformation conforme.* Soit $\tilde{g} = e^{2u}g$, où $u \in C^\infty(M)$. On a l'isomorphisme naturel

$$G_u : \begin{aligned} & PSO^\uparrow(M, g) \rightarrow PSO^\uparrow(M, \tilde{g}) \\ & \mathcal{F} = (e_a)_{0 \leq a \leq d} \mapsto (e^{-u}e_a)_{0 \leq a \leq d} = e^{-u}\mathcal{F}. \end{aligned}$$

G_u induit un isomorphisme entre $Cl(M, g)$ et $Cl(M, \tilde{g})$:

$$G_u : \begin{aligned} & Cl(M, g) \rightarrow Cl(M, \tilde{g}) \\ & [\mathcal{F}, a] \mapsto [e^u\mathcal{F}, a]. \end{aligned}$$

On obtient une structure spin sur (M, \tilde{g}) à partir de celle de (M, g) par

$$\begin{array}{ccc} & PSpin(M, g) & \\ & \swarrow \chi & \downarrow \tilde{\chi} := G_u \circ \chi \\ PSO^\uparrow(M, g) & \xrightarrow{G_u} & PSO^\uparrow(M, \tilde{g}) \end{array}$$

on obtient le même fibré des spineurs $S(M)$. Soit $\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}$ obtenus en remplaçant g par \tilde{g} . On a alors clairement

$$\tilde{\beta} = \beta, \quad \tilde{\kappa} = \kappa.$$

On pose $\tilde{\gamma} : Cl(M, \tilde{g}) \rightarrow End(S(M))$, on obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} PSO^\uparrow(M, g) \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{G_u} & PSO^\uparrow(M, \tilde{g}) \times \mathbb{C}^N \\ & \searrow \rho & \downarrow \tilde{\gamma} \\ & & End(S(M)). \end{array}$$

Or TM peut être défini comme le fibré associé $TM = PSO(M, g) \times \mathbb{R}^n$ resp. $TM = PSO(M, \tilde{g}) \times \mathbb{R}^n$, on peut donc introduire les applications $TM \ni X \mapsto e^{-u}X \in TM$. Ainsi $\tilde{\gamma}(e^{-u}X) = \gamma(X)$:

$$\tilde{\gamma}(X) = e^u\gamma(X), \quad X \in TM.$$

En notant $\tilde{\nabla}^S$ la dérivée covariante sur le fibré des spineurs associée à \tilde{g} on a :

$$\tilde{\nabla}_X \psi = \nabla_X \psi + \frac{1}{2}\gamma(X)\gamma(\text{grad}(u)) \cdot \psi - \frac{1}{2}(X \cdot du)\psi.$$

L'opérateur de Dirac devient

$$(5.5) \quad \tilde{D} = e^{-\frac{n+1}{2}u} \not{D} e^{\frac{n-1}{2}u}.$$

En introduisant l'application

$$W : C_0^\infty(M; S(M)) \ni \psi \mapsto e^{\frac{n-1}{2}u}\psi,$$

on a

$$(\psi_1 | W \psi_2)_{(M, g)} = (W^* \psi_1 | \psi_2)_{(M, \tilde{g})}, \quad W^* \psi = e^{-\frac{n+1}{2}u}\psi,$$

Finalement on peut réécrire l'opérateur de Dirac

$$(5.6) \quad W^* DW = \tilde{D} + e^{-u}m.$$

5.2. Champs classiques.

5.2.1. *Inverse avancé/retardé.* Puisque (M, g) est globalement hyperbolique, D admet un unique inverse retardé/avancé $G_{\text{ret/adv}} : C_0^\infty(M; S(M)) \rightarrow C^\infty(M; S(M))$ tel que

$$\begin{cases} DG_{\text{ret/adv}} = G_{\text{ret/adv}}D = \mathbf{1}, \\ \text{supp } G_{\text{ret/adv}}u \subset J_\pm(\text{supp } u), u \in C_0^\infty(M; S(M)), \end{cases}$$

où $J_\pm(K)$ est l'ombre causale de $K \subset M$.

Par la Proposition 5.5 et l'unicité de $G_{\text{ret/adv}}$ on obtient

$$G_{\text{ret/adv}}^* = G_{\text{adv/ret}},$$

où l'adjoint est calculé par rapport à $(\cdot|\cdot)_M$. Ainsi le propagateur causal

$$G := G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$$

vérifie

$$\begin{cases} DG = GD = 0, \\ \text{supp } Gu \subset J(\text{supp } u), u \in C_0^\infty(M; S(M)), \\ G^* = -G, \end{cases}$$

où $J(K) = J_+(K) \cup J_-(K)$ est l'ombre causal de $K \subset M$.

5.2.2. *Problème de Cauchy.* Soit $\Sigma \subset M$ une surface de Cauchy de type espace, n le vecteur unité normal orienté vers le futur, et $S(\Sigma)$ la restriction du fibré des spineurs $S(M)$ à Σ , on a alors

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma : \text{Sol}_{\text{sc}}(D) &\longrightarrow C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)) \\ \varphi &\longrightarrow \varphi|_\Sigma \end{aligned}$$

est surjectif. De façon équivalente

$$\begin{cases} D\psi = 0 \\ \rho_\Sigma\psi = f, f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)) \end{cases}$$

est globalement bien posé, les solutions sont notés $\psi = U_\Sigma f$. On a :

$$(5.7) \quad U_\Sigma f = - \int_\Sigma G(x, y)n(y)f(y)dVol_h,$$

où h est la métrique riemannienne induite par g sur Σ . On équipe $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ de la forme hermitienne

$$(5.8) \quad (f_1|f_2)_\Sigma := \int_\Sigma \overline{f_1} \cdot \beta f_2 dVol_h.$$

Soit $u \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$, on définit $\rho_\Sigma^* u \in C^\infty(M; S(M))$ par

$$\int_M \overline{\rho_\Sigma^* u} \cdot \beta v dVol_g := \int_\Sigma \overline{u} \cdot \beta \rho_\Sigma v dVol_h, v \in C^\infty(\Sigma; S(\Sigma)),$$

L'égalité (5.7) peut être réécrite comme

$$U_\Sigma f = (\rho_\Sigma G)^* \gamma(n)f, f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)).$$

5.3. Champs quantiques.

5.3.1. *Espaces pré-hilbertiens.* Soit $\psi_1, \psi_2 \in \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ on pose

$$(5.9) \quad \overline{\psi_1} \cdot \nu \psi_2 = \int_{\Sigma} i J_{\mu}(\psi_1, \psi_2) n^{\mu} dVol_h = (\rho_{\Sigma} \psi_1 | i \gamma(n) \rho_{\Sigma} \psi_2)_{\Sigma}.$$

Or $\nabla^{\mu} J_{\mu}(\psi_1, \psi_2) = 0$, donc le membre de droite de (5.9) est indépendant du choix de Σ . De plus par unicité du problème de Cauchy, on obtient que ν est définie positive.

On pose

$$(5.10) \quad \overline{f_1} \cdot \nu_{\Sigma} f_2 := \int_{\Sigma} i \overline{f_1} \cdot \beta \gamma(n) f_2 dVol_h, \quad f_1, f_2 \in C_0^{\infty}(\Sigma, S(\Sigma)),$$

on obtient que

$$\rho_{\Sigma} : (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) \rightarrow (C_0^{\infty}(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_{\Sigma}),$$

est unitaire d'inverse U_{Σ} . On obtient également que $G : C_0^{\infty}(M; S(M)) \rightarrow \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ est surjectif de noyau $DC_0^{\infty}(M; S(M))$ et

$$G : (C_0^{\infty}(M; S(M))/DC_0^{\infty}(M; S(M)), i(\cdot|G\cdot)) \rightarrow (\text{Sol}_{\text{sc}}, \nu)$$

est unitaire. Finalement, on obtient les applications

$$(5.11) \quad (C_0^{\infty}(M; S(M))/DC_0^{\infty}(M; S(M)), i(\cdot|G\cdot)) \xrightarrow{G} (\text{Sol}_{\text{sc}}, \nu) \xrightarrow{\rho_{\Sigma}} (C^{\infty}(\Sigma, S(\Sigma)), \nu_{\Sigma}),$$

qui sont unitaires.

5.3.2. *États quasi-libres.* On note $\text{CAR}(D)$ la $*$ -algèbre $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ où (\mathcal{Y}, ν) est un des espaces pré hilbertiens équivalents (5.11). On utilise la forme hermitienne $(\cdot|\cdot)_M$ pour relier $C_0^{\infty}(M, S(M))$ à $\mathcal{D}'(M; S(M))$, et pour identifier les formes sesquiliéaire $C_0^{\infty}(M; S(M))$ avec les applications linéaires continues de $C_0^{\infty}(M; S(M))$ à $\mathcal{D}'(M; S(M))$. Un état quasi-libre ω sur $\text{CAR}(D)$ est défini par ses covariances Λ^{\pm} , qui satisfont

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \Lambda^{\pm} &: C_0^{\infty}(M, S(M)) \rightarrow \mathcal{D}'(M, S(M)) \text{ sont linéaires continues,} \\ \Lambda^{\pm} &\geq 0 \text{ pour } (\cdot|\cdot)_M, \\ \Lambda^+ + \Lambda^- &= iG, \\ D \circ \Lambda^{\pm} &= \Lambda^{\pm} \circ D = 0. \end{aligned}$$

On peut également définir ω par les *covariances de surface de Cauchy* λ_{Σ}^{\pm} , qui satisfont

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \lambda_{\Sigma}^{\pm} &: C_0^{\infty}(\Sigma, S(\Sigma)) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma, S(\Sigma)) \text{ sont linéaires continues,} \\ \lambda_{\Sigma}^{\pm} &\geq 0 \text{ pour } (\cdot|\cdot)_{\Sigma}, \\ \lambda_{\Sigma}^+ + \lambda_{\Sigma}^- &= i\gamma(n). \end{aligned}$$

On peut passer des unes aux autres par les formules suivantes :

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \Lambda^{\pm} &= (\rho_{\Sigma} G)^* \lambda_{\Sigma}^{\pm} (\rho_{\Sigma} G), \\ \lambda_{\Sigma}^{\pm} &= (\rho_{\Sigma}^* \gamma(n))^* \Lambda^{\pm} (\rho_{\Sigma}^* \gamma(n)). \end{aligned}$$

6. ÉTATS DE HADAMARD

Initialement, les états de Hadamard $\omega(x, y)$ était définie comme étant les états possédant le même comportement lorsque $x \rightarrow y$ qu'une famille de paramétrix particulière appelée paramétrix de Hadamard, voir section 3.3 de [KW].

Cette définition a été ré-exprimé comme une condition portant sur le front d'onde par Radzikowski [R1]. Pour un exposé dans le cas de l'opérateur de Klein-Gordon voir [R1], pour l'opérateur de Dirac voir [SV1] et [Ho].

6.1. État de Hadamard. On définit l'état de Hadamard par une condition sur le front d'onde de ses covariances.

Définition 6.1. Soient $\Lambda^\pm : C_0^\infty(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$ deux formes linéaire continues. On dit que Λ^\pm satisfont la condition de Hadamard (Had) si

$$\text{WF}(\Lambda^\pm) = \{(X, X') \in T^*M \times T^*M, X, X' \in \mathcal{N}^\pm, X \sim X'\}$$

Définition 6.2. Soit ω un état quasi-libre de $\text{CAR}(D)$, ω est un état de Hadamard si ces covariances en espace-temps satisfont la condition de Hadamard.

Sous la condition supplémentaire d'existence d'un conjugaison de charge sous laquelle l'état est invariant, la condition sur le front d'onde de l'une des covariances Λ^\pm implique celle sur Λ^\mp , car

$$\text{WF}(\Lambda^\pm) = \text{Exch}(\text{WF}(\Lambda^\mp)).$$

En reprenant les notations de la sous-section 4.7, pour $X = (x, \xi)$ on note $\xi \triangleright 0$ lorsque $\pm\xi \in V_{x+}^*$. On peut également considérer une condition plus faible que la condition de Hadamard

Définition 6.3. Soient $\Lambda^\pm : C_0^\infty(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$ deux formes linéaire continues. On définit un certain nombre de conditions sur celles-ci

- (genHad) $\text{WF}(\Lambda^\pm)' \subset \{X, \pm\xi \triangleright 0\} \times \{X, \pm\xi \triangleright 0\}$;
- (genHadloc) $\text{WF}(\Lambda^\pm)' \cap \Delta \subset \{(X, X), \pm\xi \triangleright 0\}$;
- (Pos) $\Lambda^\pm \geq 0$ modulo C^∞ ;
- (D) $D\Lambda^\pm = \Lambda^\pm D = 0$ modulo C^∞
- (CAR) $\Lambda^+ + \Lambda^- = iG$
- (Feynm) $i^{-1}\Lambda^+ + G_{\text{adv}}, i^{-1}\Lambda^- + G_{\text{ret}}$ sont des paramétrix de Feynman de D .

Théorème 6.4. Soit Λ^\pm deux formes linéaires continues. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) Λ^\pm satisfont les conditions (Had), (D), et (CAR).
- (2) Λ^\pm satisfont les conditions (genHad), (D), et (CAR).
- (3) Λ^\pm satisfont (Feynm).

6.2. Inverse de Feynman. Soit ω un état de Hadamard, dont les covariances en espace-temps sont Λ^\pm . Alors par le théorème 6.4 on obtient un inverse de Feynman pour D par les formules suivantes

$$G_F := i^{-1}\Lambda^+ + G_{\text{adv}} = i^{-1}\Lambda^- + G_{\text{ret}}.$$

7. CALCUL PSEUDO-DIFFÉRENTIEL

Dans ce chapitre on donne les définitions nécessaires à l'introduction d'un calcul pseudo-différentiel adapté à la construction d'état de Hadamard.

En effet, on cherche un calcul pseudo différentiel qui soit suffisamment grand pour que la résolvante $(H + i)^{-1}$ de tout opérateur elliptique H d'ordre 1 soit un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 .

On souhaite également que ce calcul pseudo-différentiel soit suffisamment petit pour être une algèbre étoilée.

Le calcul pseudo-différentiel introduit dans [Sh] satisfait ces deux propriétés.

7.1. Calcul pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^n .

7.1.1. Classe de symboles uniformes.

Définition 7.1. *Un symbole d'ordre m est une fonction $a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

On note $S^m := S^m(T^\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tous les tels symboles et $S^{-\infty} = \bigcap S^m$.*

On note S_h^m le sous-espace des symboles homogènes de S^m , c'est-à-dire les symboles $a \in S^m$ vérifiant

$$a(x, \lambda \xi) = \lambda^m a(x, \xi), \lambda \geq 1, |\xi| \geq 1.$$

On peut munir S^m de la topologie induite par les semi-normes donnant les plus petits $C_{\alpha, \beta}$, c'est-à-dire

$$\|a\|_{\alpha, \beta, m} = \sup_{x, \xi} \langle \xi \rangle^{-m+|\alpha|} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a|.$$

7.1.2. *Composition et décomposition.* Énonçons d'abord deux propriétés élémentaires.

Proposition 7.2. *Soient $a_1 \in S^{m_1}$, $a_2 \in S^{m_2}$, alors $a_1 a_2 \in S^{m_1+m_2}$. De plus l'application bilinéaire suivante est continue*

$$\begin{aligned} S^{m_1} \times S^{m_2} &\rightarrow S^{m_1+m_2} \\ (a, b) &\rightarrow ab \end{aligned}$$

Proposition 7.3. *Soit (a_j) une suite de symboles telle que $a_j \in S^{m_j}$. Supposons que $m_j \rightarrow -\infty$. On pose $m'_k = \max_{j \geq k} m_j$, alors il existe un symbole $a \in S^{m'_0}$ tel que $\text{supp}(a) \subset \bigcup \text{supp}(a_j)$ et pour tout k*

$$a - \sum_{j < k} a_j \in S^{m'_k}.$$

Le symbole a est unique modulo $S^{-\infty}$ et ne dépend pas de l'indexation de la suite (a_j) . On écrit alors

$$a \sim \sum a_j.$$

Définition 7.4. *Soit $a \in S^m$ un symbole tel que $a \sim \sum_{j \geq 0} a_{m-j}$, où $a_{m-j} \in S^{m-j}$. On dit que a est poly-homogène lorsque pour tout j , $a_j \in S_h^j$. On note S_{ph}^m l'ensemble des tels symboles.*

Les symboles poly-homogènes permettent d'étendre la notion de symbole principal.

Définition 7.5. *Soit $a \in S_{ph}^m$ un symbole poly-homogène tel que $a \sim \sum a_j$. On appelle a_0 son symbole principal, il correspond au terme de plus haut degré dans le développement de a .*

7.1.3. Opérateur pseudo-différentiel.

Définition 7.6. Soit $a \in S^m$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit

$$Op(a)u(x) = a(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

On a $a(x, D)u(x) \in \mathcal{S}$, de plus l'application bilinéaire $(a, u) \mapsto a(x, D)u$ est continue. $Op(a) = a(x, D)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m .

On peut alors écrire le noyau de $Op(a)$ comme une intégrale oscillante K vérifiant

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) d\xi.$$

Réciproquement, on obtient par la formule d'inversion de Fourier

$$a(x, \xi) = \int K(x, x-y) e^{-i\langle y, \xi \rangle} dy$$

7.1.4. Adjoint et composition. De plus, si on munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire

$$(u|v) = \int \bar{u}v dx.$$

Le noyau K^* de $Op(a)^*$ est alors donné par

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)} = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \overline{a(y, \xi)} d\xi.$$

On peut donc écrire $Op(a)^* = Op(b)$ où b est le symbole donné par

$$\begin{aligned} b(x, \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\langle y, \eta - \xi \rangle} \overline{a(x-y, \eta)} dy d\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\langle y, \eta \rangle} \overline{a(x-y, \xi - \eta)} dy d\eta \end{aligned}$$

En se servant du lemme suivant

Lemme 7.7. Soit A une matrice symétrique inversible réelle, on considère la fonction de \mathcal{S}'

$$x \mapsto \exp\left(\frac{i}{2} \langle Ax, x \rangle\right).$$

Sa transformée de Fourier est alors donnée par

$$\xi \rightarrow \frac{e^{i\pi \operatorname{sgn}(A)/4}}{|\det(A)|^{1/2}} e^{-\frac{i}{2} \langle A^{-1}\xi, \xi \rangle}.$$

On applique alors ce lemme à $y, \eta \mapsto e^{i\langle y, \eta \rangle}$ et on obtient

$$b(x, \xi) = e^{i\langle D_x, D_\xi \rangle} \bar{a}(x, \xi),$$

où $e^{i\langle D_x, D_\xi \rangle}$ est l'opérateur de multiplication de Fourier par $e^{i\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle}$, en notant $\hat{x}, \hat{\xi}$ les variables duales en Fourier de x, ξ .

On veut tenter de donner un sens à cette expression en terme de développement formel du symbole.

Théorème 7.8. Soit $a \in S^m$, $b(x, \xi) = e^{i\langle D_x, D_\xi \rangle} \bar{a}(x, \xi)$ le symbole de son adjoint. Alors $b \in S^m$, de plus b admet le développement suivant

$$b(x, \xi) \sim \sum (i\langle D_x, D_\xi \rangle)^k \bar{a}(x, \xi) / k!$$

On peut alors étendre $Op(a)$ sur \mathcal{S}' en passant par son adjoint $Op(b)$.

Théorème 7.9. Soient $a_1 \in S^{m_1}, a_2 \in S^{m_2}$, alors

$$Op(a_1) \circ Op(a_2) = Op(b),$$

avec $b \in S^{m_1+m_2}$ donné par

$$b(x, \xi) = (e^{i\langle D_y, D_\eta \rangle} a_1(x, \eta) a_2(y, \xi))|_{\eta=\xi, y=x}.$$

De plus b admet le développement

$$b(x, \xi) \sim \sum ((i \langle D_y, D_\eta \rangle)^k a_1(x, \eta) a_2(y, \xi))_{\eta=\xi, y=x} / k!.$$

7.1.5. *Symbole elliptique.* On peut maintenant essayer d'inverser ces opérateurs.

Définition 7.10. Soit $a \in S^m$, on dit que a est elliptique s'il existe $C > 0, R > 0$, tels que

$$|a(x, \xi)| \geq C \langle \xi \rangle^m, |\xi| \geq R.$$

Théorème 7.11. Soient $a \in S^m, b \in S^{-m}$. Alors les conditions

$$Op(a) \circ Op(b) - I \in Op(S^{-\infty}),$$

$$Op(b) \circ Op(a) - I \in Op(S^{-\infty}),$$

sont équivalentes, et a détermine b modulo $S^{-\infty}$. Elles impliquent

$$a(x, \xi) b(x, \xi) - 1 \in S^{-1},$$

qui implique elle-même le caractère elliptique de a . De plus si cette condition est vérifiée, il existe $b \in S^{-m}$ tel que les conditions précédentes sont vérifiées.

7.1.6. *Espace de Sobolev.* On note $H^s(\mathbb{R}^n)$ les espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^n , on pose alors

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n),$$

$$H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 7.12. Soit $a \in S^0$, alors $Op(a)$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 7.13. Soit $a \in S^m$, alors $Op(a)$ est un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout s .

En particulier on a les deux cas suivants :

$$Op(a) : H^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$Op(a) : H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

7.1.7. *Symbole et difféomorphisme.* On s'intéresse maintenant à l'invariance des symboles par difféomorphisme.

Théorème 7.14. Soit X, X_κ deux ouverts de \mathbb{R}^n , $\kappa : X \rightarrow X_\kappa$ un difféomorphisme. Soit $a \in S^m$ tel que son noyau K soit à support compact dans $X \times X$, alors

$$a_\kappa(\kappa(x), \eta) = e^{-i\langle \kappa(x), \eta \rangle} Op(a) e^{i\langle \kappa(x), \eta \rangle}.$$

Puis en posant $a_\kappa(y, \xi) = 0$ si $y \notin X_\kappa$, obtient que a_κ est un symbole dans S^m tel que le noyau de $Op(a_\kappa)$ est à support compact dans $X_\kappa \times X_\kappa$ et

$$\kappa^*(Op(a_\kappa)u) = Op(a)(\kappa^*u), u \in \mathcal{S}'.$$

De plus, a_κ admet le développement

$$a_\kappa(\kappa(x), \eta) \sim \sum \partial_\eta^\alpha a(x, D\kappa^t(x)\eta) D_y^\alpha e^{i\langle \rho_x(y), \eta \rangle} / \alpha!|_{y=x},$$

où $\rho_x(y) = \kappa(y) - \kappa(x) - D\kappa(x)(y - x)$.

On a en particulier que

$$a_\kappa(\kappa(x), \eta) - a(x, D\kappa^t(x)\eta) \in S^{m-1}.$$

D'où si a est un symbole poly-homogène de symbole principal a^0 , alors a_κ est un symbole poly-homogène de symbole principal a_κ^0 tel que

$$a_\kappa^0(\kappa(x), \eta) = a^0(x, (D\kappa')^t(x) \cdot \eta).$$

Ainsi le symbole principal est covariant, on peut donc le définir sur le fibré cotangent.

7.2. Calcul pseudo-différentiel sur une variété. On souhaite maintenant étendre le calcul pseudo-différentiel sur une variété.

7.2.1. Classe de symboles. Regardons d'abord le cas où les distributions sont à valeurs scalaires. On doit donc localiser le symbole sur un ouvert, puis regarder comment cela se comporte vis-à-vis des changements de carte. Cette fois-ci on s'autorise en plus de définir nos symboles sur un ensemble plus petit que le fibré cotangent entier. Dans la suite on note M une variété.

Définition 7.15. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un ouvert conique, on définit $S^m(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\Gamma)$ tel que pour tout compact $K \subset \Gamma$ on ait l'estimée

$$|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} \langle \xi \rangle^{m-\alpha},$$

pour tout $(x, \xi) \in \{(x, t\xi), (x, \xi) \in K, t \geq 1\}$.

Lemme 7.16. Soient X_1, X_2 deux ouverts de \mathbb{R}^n , $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ et $\Phi : X_1 \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ des fonctions C^∞ . Si $\Gamma_1 \subset X_1 \times \mathbb{R}^n$ et $\Gamma_2 \subset X_2 \times \mathbb{R}^n$ sont ouverts et coniques, $(\phi(x), \Phi(x)\xi) \in \Gamma_2$ quand $(x, \xi) \in \Gamma_1$ alors

$$a_1(x, \xi) = a_2(\phi(x), \Phi(x)\xi),$$

est dans $S^m(\Gamma_1)$ pour tout $a_2 \in S^m(\Gamma_2)$.

7.2.2. Opérateur pseudo-différentiel.

Proposition 7.17. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $A : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ linéaire continue et tel que pour tout $\phi, \psi \in C_0^\infty(X)$ l'opérateur

$$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \phi A \psi u$$

est dans $Op(S^m)$, alors il existe $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ tel que

$$A = Op(a) + A_0,$$

où le noyau de A_0 est dans $C^\infty(X \times X)$. a est unique modulo $S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Définition 7.18. Un opérateur pseudo-différentiel sur une variété M est une application linéaire continue $A : C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ telle que pour tout système de coordonnée $\kappa : M_\kappa \rightarrow U_\kappa$, et tout $\phi, \Psi \in C_0(U_\kappa)$ l'application

$$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \phi(\kappa^{-1})^* A \kappa^*(\psi u)$$

est dans $Op(S^m)$. On écrit alors $A \in \Psi^m(M)$, A s'étend alors en une application $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{D}'$. Lorsque l'application est dans $Op(S_{ph}^m)$ on notera $A \in \Psi_{ph}^m(M)$.

Lorsque X est un ouvert de \mathbb{R}^n , $\Psi^m(X)$ coïncide exactement avec les opérateurs de la forme $Op(a) + A_0$ où A_0 admet un noyau C^∞ .

On souhaite maintenant définir le symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété.

Pour cela introduisons d'abord $S^m(T^*M)$ l'ensemble des sections de T^*M tel que le tiré en arrière dans toute carte $\kappa : M_\kappa \rightarrow U_\kappa$ de la section soit dans $S^m(U_\kappa \times \mathbb{R}^n)$.

Par le lemme 7.16 il suffit de le vérifier sur un atlas. Si $A \in \Psi^m(M)$ alors la restriction de A à M_κ identifié à \tilde{M}_κ définit un symbole dans $S^m(T^*M)/S^\infty(T^*M)$ par la proposition précédente. On considère alors $a_\kappa \in S^m(T^*(M_\kappa)), a_{\kappa'} \in S^m(T^*(M_{\kappa'}))$ deux tirés en arrière du représentant. Alors par le théorème précédent $a_\kappa - a_{\kappa'} \in S^{m-1}(T^*(M_\kappa \cap M_{\kappa'}))$. En considérant une partition de l'unité ϕ_i on peut alors poser

$$a = \sum \phi_i a_{\kappa_i}.$$

Et alors pour tout κ , $a - a_\kappa \in S^{m-1}(M_\kappa)$. Cela détermine donc a modulo S^{m-1} , on appelle a le symbole principal de A . On peut alors identifier

$$\Psi^m(M)/\Psi^{m-1}(M) \simeq S^m(T^*M)/S^{m-1}(T^*M).$$

Dans la suite on se restreindra à l'étude de $\Psi_{ph}^m(M)$. De plus, on introduit l'ensemble $\Psi_c^m(M)$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m proprement supportés.

Proposition 7.19. *Soit $A \in \Psi^m(M)$, alors on peut écrire $A = A_0 + A_1$ où A_0 est supporté proprement, et A_1 admet un noyau régularisant.*

Puisque les développements asymptotiques d'opérateurs pseudo-différentiels se font modulo $\Psi^{-\infty}(M)$, on travaille en réalité avec $\Psi^m(M)/\Psi^{-\infty}(M)$. Donc la propriété précédente nous assure que l'hypothèse d'être proprement supporté n'est pas contraignante.

7.2.3. *Composition et adjoint.*

Théorème 7.20. *Soient $A_1 \in \Psi_c^{m_1}(M)$, $A_2 \in \Psi_c^{m_2}(M)$, alors $A_1 \circ A_2 \in \Psi_c^{m_1+m_2}(M)$.*

7.2.4. *Ellipticité.* On peut étendre le résultat sur les inverses sans changer la preuve.

Théorème 7.21. *Soit $A \in \Psi_c^m(M)$ elliptique, c'est-à-dire tel que son symbole principal $a \in S^m(T^*M)/S^{m-1}(T^*M)$ admet un inverse dans $S^{-m}(T^*M)/S^{-m-1}(T^*M)$. Alors il existe $B \in \Psi_c^{-m}(M)$ tel que*

$$BA - I \in \Psi^{-\infty}, AB - I \in \Psi^{-\infty}.$$

7.2.5. *Front d'onde et opérateur pseudo-différentiel.*

Définition 7.22. *Soit $a \in S^m(T^*M)$ un représentant du symbole principal de $A \in \Psi^m(M)$. A est dit non caractéristique en $(x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus o$ si $a(x_0, \xi_0) \neq 0$. L'ensemble des points caractéristiques est appelé ensemble caractéristique, et est noté $Char(A)$.*

La définition est indépendante du représentant choisi.

Définition 7.23. *Soient $A \in \Psi^m$, $k < m$, on dit que A est dans Ψ^k , ou d'ordre k , en $(x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus o$ si le symbole a de A restreint dans un voisinage conique de (x_0, ξ_0) est dans S^k .*

La définition est indépendante du représentant choisi.

Proposition 7.24. *Soit $A \in \Psi^m(M)$, et Γ un fermé conique de $T^*M \setminus o$, alors, en notant \mathcal{A} le noyau de A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) A est d'ordre $-\infty$ dans $(T^*M \setminus o) \setminus \Gamma$.
- (2) $WF(\mathcal{A})' \subset \{(p, p), p \in \Gamma\}$.
- (3) $WF(Au) \subset \Gamma \cap WF(u), u \in \mathcal{E}'(M)$.

Théorème 7.25. *Soit $A \in \Psi_c^m$ et $(x_0, \xi_0) \notin Char(A)$, alors il existe $B \in \Psi_c^{-m}$ tel que $(x_0, \xi_0) \notin WF(BA - I)$ et $(x_0, \xi_0) \notin WF(AB - I)$. Ces conditions sont équivalentes.*

Théorème 7.26. Soit $u \in \mathcal{D}'(M)$, alors pour tout $m \in \mathbb{R}$

$$WF(u) = \bigcap_{A \in \Psi_c^m(M), Au \in C^\infty(M)} Char(A).$$

Théorème 7.27. Soit $A \in \Psi_c^m(M)$ et $u \in \mathcal{D}'(M)$ alors

$$WF(u) \subset WF(Au) \cup Char(A).$$

7.2.6. *Opérateur pseudo-différentiel vectoriel.* Enfin on peut étendre la définition des opérateurs pseudo-différentiels au cas des fibrés vectoriels.

Définition 7.28. Soient $\pi_E : M \rightarrow E$, $\pi_F : M \rightarrow F$ deux fibrés vectoriels de rang fini. Un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m est une application continue linéaire

$$A : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F),$$

telle que pour tout ouvert $Y \subset M$, et pour toute trivialisatation associée,

$$\phi_E : E|_Y \rightarrow Y \times \mathbb{C}^q, \phi_F : F|_Y \rightarrow Y \times \mathbb{C}^p,$$

il existe une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels $A_{ij} \in \Psi^m(Y)^{p \times q}$ telle que

$$(\phi_F \circ (Au))_i = \sum_j A_{ij}(\phi_E \circ u)_j, u \in C_0^\infty(Y, E).$$

On écrit alors $A \in \Psi^m(M; E, F)$.

Le symbole principal de A est alors bien défini comme un élément de

$$S^m(T^*M; Hom(E, F)) / S^{m-1}(T^*M; Hom(E, F)).$$

7.3. Calcul pseudo-différentiel sur les variétés à géométrie bornée. Soit (M, \hat{g}) une variété à géométrie bornée.

7.3.1. *Classes de symboles.* Soit $(U_i, \Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas borné.

Définition 7.29. On note $BS_{ph}^m(T^*M)$ l'ensemble des symboles $a \in C^\infty(T^*M)$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i := (\Psi_i^{-1})^* a \in S_{ph}^m(T^*B(0, 1))$ et la famille $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $S_{ph}^m(T^*B(0, 1))$. On munit $BS_{ph}^m(T^*M)$ d'une famille de semi-normes

$$\|a\|_{m,j,p,\alpha,\beta} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|a_i\|_{m,j,p,\alpha,\beta},$$

où $\|a\|_{m,j,p,\alpha,\beta}$ sont les semi-normes introduites dans la sous-section 7.1.

La topologie ainsi introduite ne dépend pas de l'atlas borné choisi. On pose

$$BS_{ph}^\infty(T^*M) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} BS_{ph}^m(T^*M).$$

Définition 7.30. Soit $a \in BS_{ph}^m(T^*M)$, on dit que a est uniformément elliptique s'il existe $C, R > 0$ tels que

$$|a_i(y, \eta)| \geq C|\eta|^m, \forall i \in \mathbb{N}, (y, \eta) \in T^*B(0, 1).$$

7.3.2. *Opérateur de quantification borné.* Soit $(U_i, \Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas borné, soit $(\chi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition de l'unité bornée qui lui est subordonnée. On pose

$$m_i dx := (\Psi_i^{-1})^* dVol_g,$$

la famille $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $C^\infty(B(0, 1))$. De plus, on pose

$$T_i : L^2(U_i, dVol_g) \rightarrow L^2(B(0, 1), dx),$$

$$u \mapsto m_i^{\frac{1}{2}} (\Psi_i^{-1})^* u,$$

ainsi $T_i : L^2(U_i, dVol_g) \rightarrow L^2(B(0, 1), dx)$ est unitaire.

Définition 7.31. Soit $a \in BS_{ph}^m(T^*M)$, on pose

$$\text{Op}(a) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i T_i^* \circ \text{Op}(Ea_i) \circ T_i \chi_i,$$

où $a_i = (\Psi_i^{-1})^* a$, et $E : S_{ph}^m(T^*B(0,1)) \rightarrow S_{ph}^m(T^*\mathbb{R}^n)$ est une application d'extension.

On obtient ainsi pour chaque quadruplet $(\{U_i, \Psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \chi_i, E)$, un opérateur de quantification, que l'on appelle *opérateur de quantification borné*. Si $a \in BS_{ph}^\infty(T^*M)$, alors le noyau de $\text{Op}(a)$ est à support dans

$$\{(x, y) \in M \times M : d(x, y) \leq C\},$$

pour une certaine constante $C > 0$, en notant d la distance géodésique sur M . En particulier $\text{Op}(a) \in \Psi_c^\infty(M)$, de plus on remarque que cette condition sur le support n'est pas stable par multiplication, donc $\text{Op}(S_{ph}^\infty(T^*M))$ n'est pas stable par composition. Pour obtenir une algèbre d'opérateur, il faut ajouter à $\text{Op}(S_{ph}^\infty(T^*M))$ un idéal d'opérateurs régularisants.

Définition 7.32. On pose

$$\mathcal{W}^{-\infty}(M) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B(H^{-m}(M), H^m(M))$$

munit de la topologie induite par la famille de semi-normes

$$\|a\|_m = \|(-\Delta_g + 1)^{m/2} A (-\Delta_g + 1)^{m/2}\|_{B(L^2(M))}.$$

De plus, on a également le résultat suivant,

Proposition 7.33. Soit Op' un autre opérateur de quantification, alors

$$\text{Op} - \text{Op}' : BS_{ph}^\infty(T^*M) \rightarrow \mathcal{W}^{-\infty}(M)$$

est continue.

Définition 7.34. Soit $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on pose

$$\Psi_b^m(M) := \text{Op}(BS_{ph}^m(T^*M)) + \mathcal{W}^{-\infty}.$$

Proposition 7.35. On a les inclusions suivantes

$$\Psi_c^m(M) \subset \Psi_b^m(M) \subset \Psi^m(M).$$

De plus

$$\Psi_b^m : H^s(M) \rightarrow H^{s-m}(M),$$

est continue pour tout $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Toutes ces définitions s'étendent naturellement au cas des fibrés vectoriels.

7.3.3. Théorème de Seeley. Dans cette section on rappelle le théorème de Seeley.

Pour obtenir le théorème de Seeley, on a besoin de deux éléments : l'invariance spectrale et l'existence de parametrix pour les opérateurs uniformément elliptiques.

L'invariance spectrale est la propriété suivante

Lemme 7.36. Soit $R_{-\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}(M, L(E))$ telle que $\mathbb{1} - R_{-\infty}$ est inversible dans $B(L^2(M; E))$. Alors

$$(\mathbb{1} - R_{-\infty})^{-1} = \mathbb{1} - R_{1, -\infty} \text{ pour } R_{1, -\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}(M, L(E)).$$

De plus on a

Proposition 7.37. Soit $A \in \Psi_b^m(M, L(E))$ uniformément elliptique. Alors il existe $B \in \Psi_b^{-m}(M, L(E))$ tel que $\mathbb{1} - AB, \mathbb{1} - BA \in \mathcal{W}^{-\infty}$.

On peut alors montrer la proposition suivante

Proposition 7.38. *Soit $A \in \Psi_b^m(M, L(E))$, $m \geq 0$, elliptique. Alors on a*

- (1) *A est fermable, et $\text{Dom } A^{cl} = H^m(M, L(E))$.*
- (2) *Si $0 \notin \sigma(A^{cl})$, alors $A^{-1} \in \Psi_b^{-m}(M, L(E))$, de plus*

$$\sigma_{pr}(A^{-1}) = (\sigma_{pr}(A))^{-1}.$$

Voir la sous-section 5.2.5 de [G-St] pour les preuves détaillées.

8. ÉTATS DE HADAMARD POUR DES CHAMPS DE DIRAC SUR DES VARIÉTÉS À GÉOMÉTRIE BORNÉE

Dans cette partie on décrit comment construire des états de Hadamard pour des champs de Dirac par des méthodes de calcul pseudo différentiel.

Cette section reprend de manière plus informelle l'article [G-St]. L'idée de départ vient du cas d'une variété cylindrique muni d'une métrique ultra statique. Supposons que $M = I \times \Sigma$ et que $g = -v(x)dt^2 + h(x)dx^2$. Alors, quitte à multiplier l'opérateur de Dirac par $\gamma(e_0)$ on peut ramener l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger :

$$-\partial_t \psi + iH\psi = 0,$$

où H est indépendant du temps par hypothèse sur la métrique g . On peut alors introduire les projecteurs

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(H), \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(H) = \mathbb{1} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(H).$$

Puis en posant $\lambda^\pm = (\cdot | \mathbb{1}_{\mathbb{R}_\pm} \cdot)$ on obtient des formes hermitiennes qui satisfont la Proposition 2.16. Ces formes hermitiennes sont donc associées à un état quasi-libre. De plus, on peut montrer que ces formes linéaires satisfont la condition de Hadamard ([W], Prop. 4.3.4) lorsque $0 \notin \sigma(H)$, en notant $\sigma(H)$ le spectre de H .

En revanche, lorsque l'on rajoute une dépendance en temps à la métrique, H devient $H(t)$ et la condition de Hadamard n'est pas maintenue. Pour surmonter cet obstacle, on cherchera à obtenir une égalité de type

$$(8.15) \quad U(t, s)P^\pm(s) = P^\pm(t)U(t, s),$$

pour préserver la condition de Hadamard, où $U(t, s)$ désigne le propagateur de s à t .

Pour cela on cherche des projecteurs déformés \tilde{P}^\pm construit à partir des projecteurs P^\pm par des méthodes de calcul pseudo différentiel. Plus précisément, on cherche $t \rightarrow R(t)$ un symbole d'ordre -1 tel que $\tilde{P}^\pm(t) = e^{-iR(t)}P^\pm(t)e^{iR(t)}$ satisfasse l'égalité (8.15). Ainsi en développant $e^{iR(t)} = 1 + iR(t) + \dots$ à l'ordre 0 on obtient l'égalité $\tilde{P}^\pm(t) = P^\pm(t)$, de plus $e^{-iR(t)}$ et $e^{iR(t)}$ correspondent à des transformations unitaires.

Dans la première sous-section, on rassemble les éléments des sections précédentes pour introduire l'opérateur de Dirac dans le cas du cylindre, ainsi que le calcul pseudo-différentiel que nous utiliserons.

Dans la deuxième sous-section on explicite comment passer de l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger, ainsi que les préparatifs pour définir les projecteurs déformés.

Dans la troisième sous-section on construit les projecteurs déformés à partir d'outils de calcul pseudo-différentiel.

Enfin, on montre que les états associés à ces projecteurs déformés satisfont la condition de Hadamard.

On se fixe (M, g) une variété lorentzienne globalement hyperbolique à géométrie bornée de dimension paire.

8.1. Cadre géométrique. On rassemble dans cette sous-section les objets introduits dans les sections précédentes.

8.1.1. Variété globalement hyperbolique à géométrie bornée. Soit (M, g) une variété globalement hyperbolique de dimension paire qui admet une surface de Cauchy de type espace Σ , telle qu'il existe

- (1) un voisinage U de Σ dans M ,
- (2) une métrique lorentzienne \tilde{g} sur M ,

(3) une fonction $\tilde{u} \in C^\infty(M; \mathbb{R})$,

tels que

- (H1) $(M, e^{2\tilde{u}}\tilde{g})$ est globalement hyperbolique, $Id : (U, g) \rightarrow (M, e^{2\tilde{u}}\tilde{g})$ est causalement compatible, c'est-à-dire $I_M^{\pm, g}(V) = I_M^{\pm, e^{2\tilde{u}}\tilde{g}}(V)$ pour tout $V \subset U$,
- (H2) \tilde{g} est à géométrie bornée pour une certaine métrique riemannienne de référence \hat{g} , Σ est une surface de Cauchy à géométrie bornée dans (M, \tilde{g}) ,
- (H3) $d\tilde{u}$ appartient à $BT_1^0(M, \hat{g})$,

Alors on a (voir [GOW], Prop. 3.7)

Proposition 8.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe*

- (1) un intervalle ouvert I , tel que $0 \in I$, un difféomorphisme $\chi : I \times \Sigma \rightarrow U$,
- (2) une famille lisse $\{h_t\}_{t \in I}$ de métrique riemannienne sur Σ telle que
 - (a) (Σ, h_0) est à géométrie bornée,
 - (b) $t \in I \rightarrow h_t \in C_b^\infty(I; BT_2^0(\Sigma, h_0))$,
 - (c) $t \in I \rightarrow h_t^{-1} \in C_b^\infty(I; BT_0^2(\Sigma, h_0))$,
- (3) une fonction $u \in C^\infty(I \times \Sigma)$, $du \in BT_1^0(I \times \Sigma, dt^2 + h_0)$

telles que

$$\chi^*g = e^{2u(t,y)}(-dt^2 + h_t(y)dy^2) \text{ sur } I \times \Sigma.$$

Après transformation conforme, on peut donc supposer que $M = I \times \Sigma$ et $g = -dt^2 + h_t(y)dy^2$.

8.1.2. *Opérateur de Dirac sur un cylindre.* On rappelle ici les résultats sur les variétés cylindriques énoncés dans la sous-section 3.5.

Puisque (M, g) est globalement hyperbolique on sait que M admet une structure spin (voir la sous-section 3.2).

On rappelle que l'on peut supposer que les fonctions de transitions de la structure spin sur M sont indépendantes de t . Ainsi la restriction du fibré des spineurs $S(M)$ à $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ est indépendante de t , on note $S(\Sigma)$ une telle restriction. Ainsi l'opérateur de Dirac D est un opérateur dépendant du temps qui agit sur le fibré $S(\Sigma)$.

De plus on définit β_t la restriction de la forme hermitienne β à Σ et γ_t comme étant les restrictions de $\gamma : Cl(M, g) \rightarrow S(M)$ à Σ_t . On cherchera dans la suite à réécrire l'opérateur de Dirac en fonction de γ_t en utilisant le transport parallèle le long de ∂_t .

Enfin, soit $m \in C^\infty(M, L(S(M)))$ une fonction de masse sur M , alors sous les hypothèses (H1)-(H3), si en plus

$$e^{-\tilde{u}}m \text{ appartient à } BT_0^0(M, L(S(M))),$$

alors

$$e^{-u}m \circ \chi^{-1} \in C_b^\infty(I; BT_0^0(\Sigma, h_0)),$$

cette condition permettra de nous assurer que l'opérateur de Dirac massif est un opérateur différentiel borné.

8.1.3. *Calcul pseudo-différentiel.* Dans cette sous-section on introduit le calcul différentiel à paramètre. En effet, on souhaite définir une famille à 1-paramètre de projecteurs $t \rightarrow \tilde{P}(t)$ à partir d'un certain opérateur $H(t)$ par des méthodes de calcul pseudo-différentiel.

Pour cela on considère l'ensemble $C_b^\infty(I; BS^m(T^*M; L(E)))$ où $BS^m(T^*M; L(E))$ est l'espace des symboles défini en sous-section 7.3.1. On obtient alors un analogue du théorème de Seeley à partir des résultats obtenus en section 7.3 dans le cas du calcul pseudo-différentiel borné. On rappelle que l'on note $\sigma(H)$ le spectre d'un opérateur H .

Proposition 8.2. Soit $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi_b^m(M; L(E)))$, $m \geq 0$ uniformément elliptique. Alors

- (1) $H(t)$ est fermable sur $C_0^\infty(M; E)$ de domaine $H^m(M; L(E))$,
- (2) s'il existe $\delta > 0$ tel que $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H^{cl}(t)) = \emptyset$ pour $t \in I$, alors $H^{-1}(t) \in C_b^\infty(I; \Psi_b^{-m}(M; L(E)))$ et

$$\sigma_{pr}(H^{-1})(t) = (\sigma_{pr}(H))^{-1}(t).$$

De plus, on sera également amené à considérer les projecteurs spectraux comme des opérateurs pseudo-différentiels. Pour cela, l'idée est d'écrire les projecteurs spectraux en terme de calcul fonctionnel

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} \pm \frac{H}{|H|} \right),$$

et d'utiliser un résultat analogue à la proposition 8.2. On renvoie le lecteur à la proposition 5.10 de [G-St] pour plus de détail.

Proposition 8.3. Soit $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi_b^1(M; L(E)))$, $m \geq 0$ un opérateur uniformément elliptique, symétrique sur $C_0^\infty(M; E)$, et notons $H(t)^{cl}$ sa fermeture. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H^{cl}(t)) = \emptyset$ pour $t \in I$. Alors les projecteurs spectraux $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$ appartient à $C_b^\infty(I; \Psi_b^0(M; L(E)))$ et

$$\sigma_{pr}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\sigma_{pr}(H(t))).$$

8.2. Préparation de l'opérateur de Dirac. Dans cette partie on suppose que $M = I \times \Sigma$ et $g = -dt^2 + h_t(y)dy^2$. On souhaite ramener l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger de la forme $\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0$ avec comme condition supplémentaire $0 \notin \sigma(H(t))$ pour tout $t \in I$.

8.2.1. Réduction de l'équation. Dans la suite on note D l'opérateur de Dirac sur M associé à la métrique g . Ramenons nous à l'équation de Schrödinger en utilisant le transport parallèle le long de ∂_t par la connexion spinorielle.

Soit $f \in C^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma))$, on note $\mathcal{T}(s)f = \psi$ la solution à

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_t}^S \psi = 0 \text{ sur } I \times \Sigma \\ \psi|_{\Sigma_s} = f, \end{cases}$$

et on pose

$$\mathcal{T}(t, s)f = \mathcal{T}(s)f|_{\Sigma_t}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : & C^\infty(I; C^\infty(\Sigma, S(\Sigma))) \rightarrow C^\infty(M; S(M)) \\ & \psi(t) \mapsto (\mathcal{T}\psi)(t) := |h_t|^{-\frac{1}{4}} |h_0|^{\frac{1}{4}} \mathcal{T}(t, 0)\psi(t). \end{aligned}$$

On obtient alors

Lemme 8.4. L'application \mathcal{T} satisfait

- (1) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_0)\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_0)$, $t, s \in I$,
- (2) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_a(t))\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_a(s))$, $t, s \in I$,
- (3) $\mathcal{T}(s, t)^*\beta_t\mathcal{T}(t, s) = \beta_s$, $t, s \in I$.

Et finalement, on peut réduire l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger.

Proposition 8.5. On pose

$$\mathcal{D} := \mathcal{T}^{-1}(\gamma(e_0)D)\mathcal{T},$$

et

$$\tilde{\psi}_0 \cdot \tilde{\nu} \tilde{\psi}_1 := i \int_{\Sigma} \tilde{\psi} \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) \tilde{\psi}_1 |h_0|^{\frac{1}{2}} dx,$$

Alors

(1) *L'application*

$$\mathcal{T} : (\text{Sol}_{\text{sc}}(\mathcal{D}), \tilde{\nu}) \rightarrow (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$$

est unitaire

(2) *On a*

$$\mathcal{D} = \partial_t - iH(t),$$

où $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi_b^1(\Sigma, S(\Sigma)))$, et :

$$\sigma_{pr}(H(t))(x, k) = -\gamma_0(e_0)\gamma_0(h_t(x)^{-1}k)$$

et $H(t)$ est symétrique pour le produit scalaire $\tilde{\nu}$.

8.2.2. *Trou spectral.* Dans la section précédente on a réduit l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0.$$

On munit l'espace $C_0^\infty(I \times \Sigma; S(\Sigma))$ du produit scalaire

$$\overline{\psi}_0 \cdot \nu \psi_1 := \int_{I \times \Sigma} \overline{\psi} \cdot \beta_0 \psi_1 dt |h_0|^{\frac{1}{2}} dx,$$

de même on munit l'espace $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ du produit scalaire

$$\overline{\psi}_0 \cdot \nu \psi_1 := \int_{\Sigma} \overline{\psi} \cdot \beta_0 \psi_1 |h_0|^{\frac{1}{2}} dx.$$

On se fixe comme espace de Hilbert de base

$$\mathcal{H} = L^2(\Sigma, S(\Sigma)),$$

qui est le complété de $C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma))$ pour ν .

Par la Proposition 8.2, $H(t)$ a pour domaine $H^1(\Sigma, S(\Sigma))$ et est auto-adjoint sur E . De plus on a besoin d'une condition sur le spectre de $H(t)$ pour pouvoir considérer les projecteurs spectraux comme des opérateurs pseudo-différentiels.

Pour cela on montre que quitte à ajouter un opérateur régularisant, on peut supposer que le spectre de $H(t)$ ne rencontre pas $[-1, 1]$.

Lemme 8.6. *Il existe $R_{-\infty} \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma)))$ tel que*

$$\sigma(H(t) + R_{-\infty}) \cap [-1, 1] = \emptyset, t \in I.$$

8.3. Construction des projecteurs spectraux déformés. Dans cette section on décrit la construction des projecteurs spectraux déformés pour définir les états de Hadamard.

8.3.1. *Équations récursives.* Pour définir les projecteurs spectraux on sera ramené à résoudre une équation récursive sur $R(t)$. Dans cette section on donne un cadre général pour résoudre ce genre d'équations.

On définit d'abord des applications contractantes sur les espaces de symboles

Définition 8.7. *Soit $p \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{F}_{-p} l'ensemble des applications*

$$F : C_b^\infty(I; \Psi_b^{-1}(\Sigma; S(\Sigma))) \rightarrow C_b^\infty(I; \Psi_b^{-p}(\Sigma; S(\Sigma))),$$

telles que

$$F(R_1) - F(R_2) \in C_b^\infty(I; \Psi_b^{-p-j}(\Sigma; S(\Sigma))),$$

lorsque $R_1 - R_2 \in C_b^\infty(I; \Psi_b^{-1-j}(\Sigma; S(\Sigma)))$.

On peut alors montrer un résultat général de résolution d'équations récursives.

Proposition 8.8. *Soit $A \in C_b^\infty(I; \Psi_b^{-1}(\Sigma; S(\Sigma)))$ et $F_{-2} \in \mathcal{F}_{-2}$. Alors il existe une solution $R \in C_b^\infty(I; \Psi_b^{-1}(\Sigma; S(\Sigma)))$, unique modulo $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma)))$, de l'équation*

$$R = A + F_{-2}(R).$$

8.3.2. *Construction.* Dans cette sous-section on explique la construction des projecteurs spectraux déformés à partir d'une équation récursive. On suppose que l'on se ramène à une équation de la forme

$$\partial_t \Psi - iH(t)\Psi = 0,$$

à partir de la Proposition 8.5.

De plus on peut supposer, quitte à ajouter un terme régularisant à $H(t)$, que

$$\sigma(H(t)) \cap [-1, 1] = \emptyset, t \in I,$$

par le lemme 8.6.

Dans la suite on note $U(t, s)$ le propagateur de s à t associé à $t \rightarrow H(t)$. On cherche des projecteurs $\tilde{P}^\pm(t)$ sous la forme $\tilde{P}^\pm(t) = e^{-iR(t)}P^\pm(t)e^{iR(t)}$ qui satisfont

$$U(t, s)\tilde{P}^\pm(s) = \tilde{P}^\pm(t)U(t, s).$$

Pour cela on part de l'équation

$$\tilde{U}(t, s)P^\pm(s) = P^\pm(t)\tilde{U}(t, s),$$

où $\tilde{U}(t, s) = e^{iR(t)}U(t, s)e^{-iR(s)}$. On peut montrer que cette équation est équivalente à l'équation

$$\partial_t P^\pm(t) + [P^\pm(t), i\tilde{H}(t)] = 0,$$

où $\tilde{H}(t)$ est le générateur du groupe unitaire associé au propagateur \tilde{U} . On peut alors réécrire cette équation sous forme d'une équation récursive, ce qui permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 8.9. *Il existe des projections $\tilde{P}^\pm \in C_b^\infty(I; \Psi_b^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ telles que*

- (1) $\tilde{P}^\pm(t) = \tilde{P}^\pm(t)^*$, $\tilde{P}^+ + \tilde{P}^- = \mathbb{1}$,
- (2) $U(t, s)\tilde{P}^\pm(s) = \tilde{P}^\pm(t)U(t, s) + R_{-\infty}(t, s)$, où $R_{-\infty} \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$,
- (3) $\text{WF}(U(\cdot, s)\tilde{P}^\pm(s))' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma$, pour $\mathcal{F} = \{k = 0\} \subset T^*M$.

8.4. **État de Hadamard.** Dans cette section on construit des états de Hadamard à partir des projecteurs spectraux déformés introduits à la section précédente.

8.4.1. *Construction des états de Hadamard.* On considère (M, g) un espace-temps globalement hyperbolique à géométrie bornée de dimension paire, qui satisfait les hypothèses (H1)-(H3), (M). On a montré que l'on pouvait se ramener à une variété de la forme $I \times \Sigma$.

Ainsi on peut se placer dans le cadre de la section 8.3.2 et considérer $\tilde{P}^\pm(t)$ les projecteurs donnés par la proposition 8.9, puis on pose

$$c^\pm := e^{\frac{1-n}{2}u} \tilde{P}^\pm(0) e^{\frac{n-1}{2}u}.$$

On obtient alors le résultat suivant

Théorème 8.10. *Les applications*

$$\lambda_\Sigma^\pm = i\gamma(n)c^\pm$$

sont les covariances de surface de Cauchy d'un état pur de Hadamard ω pour l'opérateur de Dirac D sur M .

8.4.2. *Inverse de Feynman.* De plus, à partir d'un état de Hadamard on peut construire un inverse de Feynman, cf sous-section 6.2.

Proposition 8.11. *Les covariances en espace-temps Λ^\pm , et l'inverse de Feynman G_F associés à l'état ω donné par le théorème 8.10, satisfont*

$$\Lambda^\pm v(t) = \int_I \Lambda^\pm(t, s)v(s)ds,$$

$$G_F v(t) = \int_I G_F(t, s)v(s)ds, v \in C_0^\infty(I; C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))),$$

où

- (1) $\Lambda^\pm(t, s) = iU(t, 0)c^\pm U(0, s)\gamma(e_0)$,
- (2) $G_F(t, s) = U(t, 0)(\theta(t - s)c^+ - \theta(s - t)c^-)U(0, s)\gamma(e_0)$,

en notant $\theta = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ la fonction de Heaviside.

9. CHAMPS DE DIRAC SUR DES ESPACE-TEMPS ASYMPTOTIQUEMENT PLATS

Dans cette partie on souhaite définir des états de Hadamard à partir d'états de vides asymptotiques. Cette section reprend de manière plus informelle l'article [G-St2]. On souhaite construire des états de Hadamard à partir de conditions à l'infini sur la variété.

On se donne une variété $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ munit d'une métrique $g = -dt^2 + h_t dx^2$ telle que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h_t = h_{\text{out/in}}$ dans un sens que l'on définira plus précisément. Quitte à multiplier l'opérateur de Dirac par $\gamma(e_0)$ on peut ramener l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger :

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0,$$

de plus, avec les bonnes conditions de convergences sur la métrique, on peut montrer que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H(t) = H_{\text{out/in}}$ existent.

Or par hypothèse sur g , les métriques asymptotiques $g_{\text{out/in}} := -dt^2 + h_{\text{out/in}} dx^2$ sont statiques, ainsi il existe des états de vide associés aux projecteurs spectraux $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_{\text{out/in}})$ (voir [W], Prop. 4.3.4).

On souhaite définir des projecteurs sur (M, g) à partir des projecteurs spectraux $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_{\text{out/in}})$ en posant

$$P_{\text{out/in}}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_{\text{out/in}}) U(t, 0).$$

Pour cela, en s'inspirant des méthodes utilisées dans la section précédente, on cherche un symbole R d'ordre -1 tel que pour les projecteurs $\tilde{P}^\pm(t) := e^{-iR(t)} P^\pm e^{iR(t)}$ on ait

$$U(t, 0) \tilde{P}^\pm(0) = \tilde{P}^\pm(t) U(t, 0) + R_{-\infty}(t),$$

où $R_{-\infty}(t)$ est un terme régularisant négligeable. Alors en reprenant la définition précédente de $P_{\text{out/in}}^\pm$, et en notant $\tilde{U}(t, 0) := e^{iR(t)} U(t, 0) e^{-iR(t)}$ où $U(t, 0)$ est le propagateur de 0 à t associé à $t \rightarrow H(t)$, on obtient

$$P_{\text{out/in}}^\pm = \tilde{P}^\pm(0) \pm \int_0^{\pm\infty} \tilde{U}(0, t) R_{-\infty}(t) \tilde{U}(t, 0) dt = \tilde{P}^\pm(0) + R_{\pm\infty}.$$

Ainsi les projecteurs spectraux $P_{\text{out/in}}^\pm$ sont associés à un état de Hadamard car les projecteurs $\tilde{P}^\pm(0)$ le sont. On obtient alors des états de vide associés aux variétés entrantes et sortantes.

Dans la première sous-section, on donne le cadre géométrique dans lequel on résout ce problème, puis on explicite le calcul pseudo-différentiel que l'on utilisera pour construire les projecteurs déformés. Dans la deuxième sous-section on réduit l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger et on traduit les conditions géométriques en des conditions de convergences sur l'opérateur de Dirac. Dans la troisième sous-section on construit les projecteurs déformés à partir d'outils de calcul pseudo-différentiel, afin de construire des états de vide entrants et sortants.

9.1. Cadre géométrique. On rassemble dans cette sous-section les objets introduits dans les sections précédentes. On se fixe (M, g) une variété lorentzienne globalement hyperbolique à géométrie bornée de dimension paire, telle que $M = \mathbb{R} \times \Sigma$.

9.1.1. Calcul pseudo-différentiel. Commençons d'abord par définir une famille d'espace de Fréchet qui serviront pour définir un calcul pseudo différentiel à paramètre. En effet, on souhaite définir une famille à 1-paramètre d'opérateur $t \rightarrow R(t)$ qui satisfont des égalités de la forme

$$P_{\text{out/in}}^\pm = \tilde{P}^\pm(0) \pm \int_0^{\pm\infty} \tilde{U}(0, t) R_{-\infty}(t) \tilde{U}(t, 0) dt = \tilde{P}^\pm(0) + R_{\pm\infty}.$$

Ainsi pour obtenir une convergence du terme $\int_0^{\pm\infty} \tilde{U}(0,t)R_{-\infty}(t)\tilde{U}(t,0)dt$ il est nécessaire d'introduire une décroissance en temps.

Soit \mathcal{F} un espace de Fréchet munit d'une topologie issue de semi-normes $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{N}$. Soit $\delta \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions lisses $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$ telles que

$$\sup_{\mathbb{R}} \langle t \rangle^{k-\delta} \|\partial_t^k f(t)\|_p < \infty, \forall k, p \in \mathbb{N}.$$

On obtient alors un espace de Fréchet. On peut ainsi définir l'espace des symboles à décroissance en temps $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}, BS^m(T^*M, L(E)))$, et donc après quantification on peut considérer $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}, \Psi_b^m(\Sigma, L(E)))$.

De plus, on définit $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}, \mathcal{W}^{-\infty}(L(E)))$ à partir des semi-normes introduites à la définition 7.32.

Soit $A(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}, \Psi_b^m(\Sigma, L(E)))$, on dit que A est *uniformément elliptique* si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sigma_{pr}(A)(t, x, \xi)$ est inversible et

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in T^*\Sigma, |\xi|} \|\sigma_{pr}(A)^{-1}(t, x, \xi)\| < \infty,$$

en notant $\|\cdot\|$ une structure hilbertienne bornée arbitraire sur les fibres de E .

Proposition 9.1. *Soit $H(t) \in \mathcal{S}^\epsilon(\mathbb{R}; \Psi_b^m(\Sigma; L(E)))$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$ uniformément elliptique. Alors on a*

- (1) $H(t)$ est fermable sur $C_0^\infty(M; E)$ de domaine $H^m(M; L(E))$,
- (2) s'il existe $\delta > 0$ tel que $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H^{cl}(t)) = \emptyset$ pour $t \in \mathbb{R}$, alors $H^{-1}(t) \in \mathcal{S}^\epsilon(\mathbb{R}; \Psi_b^{-m}(M; L(E)))$ et

$$\sigma_{pr}(H^{-1})(t) = (\sigma_{pr}(H))^{-1}(t).$$

De plus, on sera également amené à considérer les projecteurs spectraux comme des opérateurs pseudo-différentiels. De même qu'en section 8.1.3, on écrit

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} \pm \frac{H}{|H|} \right).$$

On peut alors montrer la proposition suivante

Proposition 9.2. *Soit $H(t) \in \mathcal{S}^\epsilon(\mathbb{R}; \Psi_b^1(M; L(E)))$, un opérateur uniformément elliptique, symétrique sur $C_0^\infty(M; E)$, et notons $H(t)^{cl}$ sa fermeture. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H^{cl}(t)) = \emptyset$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

Supposons de plus qu'il existe $H_\infty \in \Psi^1(\Sigma; L(E))$, uniformément elliptique, symétrique, sur $C_0^\infty(M; E)$, tel que $0 \notin \sigma(H_\infty)$ et

$$H(t) - H_\infty \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E))).$$

Alors

- (1) les projecteurs spectraux $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$ sont des éléments de $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(E)))$ qui satisfont

$$\sigma_{pr}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\sigma_{pr}(H(t))).$$

De plus $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t)) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_\infty)$ appartient à $\mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(E)))$.

- (2) $S(t) = (H^2(t) + 1)^{\frac{1}{2}}$ appartient à $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E)))$ et

$$\sigma_{pr}(S(t)) = |\sigma_{pr}(H(t))|.$$

De plus $S(t) - S_\infty$ appartient à $\mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E)))$, en notant $S_\infty = (H_\infty^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

9.1.2. *Métriques asymptotiques.* On suppose que (M, g) est une variété lorentzienne de dimension paire telle que $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, et

$$g = -c^2(x)dt^2 + (dx^i + b^i(x))h_{ij}(x)(dx^j + b^j(x)dt),$$

en notant $x = (t, \mathbf{x}) \in M$, $c \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ une fonction strictement positive, $b \in C^\infty(M; T\Sigma)$ et $h \in C^\infty(M; \otimes_s^2 T^*\Sigma)$ est une famille lisse de métriques riemanniennes sur Σ . On suppose de plus que g converge vers des métriques statiques

$$g_{\text{out/in}} := -c_{\text{out/in}}(x)dt^2 + h_{\text{out/in}}(x)dx^2.$$

On suppose d'abord

$$(H1) \quad h_{\text{out/in}} \in BT_2^0(\Sigma, k), \quad h_{\text{out/in}}^{-1} \in BT_0^2(\Sigma, k), \quad c_{\pm\infty}, c_{\pm\infty}^{-1} \in BT_0^0(\Sigma, k).$$

De plus, précisons le sens que l'on donne à la convergence de g vers ces métriques asymptotiques. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que

$$(H2) \quad \begin{aligned} h(x) - h_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; {}_2^0(\Sigma, k)), \\ b(x) &\in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; BT_0^1(\Sigma, k)), \\ c(x) - c_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; BT_0^0(\Sigma, k)), \end{aligned}$$

Puis on considère une fonction de masse $m \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, et $m_{\pm\infty} \in C^\infty(\Sigma; \mathbb{R})$ telle que

$$(H3) \quad m(x) - m_{\pm\infty}(x) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; BT_0^0(\Sigma, k)).$$

On peut alors montrer (voir Lemme 3.1 de [G-St2]) que l'on peut, après transformation isométrique, se ramener à une métrique g de la forme

$$g = -c^2(t, \mathbf{x})dt^2 + h(t, \mathbf{x})dx^2,$$

telle que

$$\begin{aligned} h(x) - h_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; BT_2^0(\Sigma, k)), \\ c - c_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; BT_0^0(\Sigma, k)), \\ m - m_{\pm\infty} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; BT_0^0(\Sigma, k)), \\ h_{\text{out/in}} &\in BT_2^0(\Sigma, k), \quad h_{\text{out/in}}^{-1} \in BT_0^2(\Sigma, k) \\ c_{\text{out/in}}, c_{\text{out/in}}^{-1} &\in BT_0^0(\Sigma, k) \end{aligned}$$

Enfin, après une transformation conforme, on se ramène à une métrique de la forme

$$\tilde{g} = -dt^2 + \tilde{h}(t, \mathbf{x})dx^2,$$

telle que

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{out/in}} &:= c_{\text{out/in}}^{-2} \in BT_2^0(\Sigma, k), \quad \tilde{h}_{\text{out/in}}^{-1} \in BT_0^2(\Sigma, k), \\ \tilde{h}(x) - \tilde{h}_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; BT_2^0(\Sigma, k)). \end{aligned}$$

9.2. Réduction de l'opérateur de Dirac. Dans cette sous-section on réduit l'équation de Dirac à une équation de type Schrödinger et on traduit les conditions géométriques en des conditions de convergences sur l'opérateur de Dirac.

9.2.1. *Opérateur de Dirac.* On reprend ici les notations de la section 8.1.2.

Puisque (M, g) est globalement hyperbolique on sait que M admet une structure spin (voir la sous-section 3.2).

On rappelle que l'on peut supposer que les fonctions de transition de la structure spin sur M sont indépendantes de t . Ainsi la restriction du fibré des spineurs $S(M)$ à $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ est indépendante de t , on note $S(\Sigma)$ une telle restriction. Finalement l'opérateur de Dirac D est un opérateur dépendant du temps qui agit sur le fibré $S(\Sigma)$.

De plus on définit β_t la restriction de la forme hermitienne β à Σ et γ_t comme étant les restrictions de $\gamma : \text{Cl}(M, g) \rightarrow S(M)$ à Σ_t . On cherchera dans la suite à réécrire l'opérateur de Dirac en fonction de γ_t en utilisant le transport parallèle le long de ∂_t .

9.2.2. *Convergence.* On souhaite donner un sens aux opérateurs asymptotiques associés à la convergence de \tilde{h} vers $\tilde{h}_{\text{out/in}}$.

Lemme 9.3. *Soit $(V_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas de (Σ, \tilde{h}_0) .*

Soit $\mathcal{F}_i = (e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ un repère orthonormé orienté en temps de \tilde{h}_0 au-dessus de V_i tel que $e_{i,j}$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$ forme une famille bornée dans $\text{BT}_0^1(V_i, k)$. Soit $\mathcal{F}_i(t) = (e_{i,j}(t))_{1 \leq j \leq d}$ un repère orienté en temps \tilde{h}_t au-dessus V_i obtenu par transport parallèle de \mathcal{F}_i en suivant ∂_t pour la métrique \tilde{g} . Alors :

- (1) $e_{i,j}(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e_{i,j}(t)$ existe et la famille $e_{i,j}(\pm\infty)$ pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$ est bornée dans $\text{BT}_0^1(V_i, k)$.
- (2) $\mathbb{R}^\pm \ni t \mapsto e_{i,j}(t) - e_{i,j}(\pm\infty)$ forme une famille bornée dans $\mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}, \text{BT}_0^0(V_i, k))$.

On se fixe $e_0 = \partial_t$ et $(e_j(t))_{1 \leq j \leq d}$ un repère orthonormé orienté en temps issu du lemme 9.3. On peut alors montrer le résultat suivant de convergence :

Proposition 9.4.

- i) $\gamma_t(e_0) - \gamma_{\pm\infty}(e_0) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma))))$,
- ii) $\gamma_t(e_j(t)) - \gamma_{\pm\infty}(e_j(\pm\infty)) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma))))$,
- iii) $\beta_t - \beta_{\pm\infty} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma), S(\Sigma)^*)))$,
- iv) $\nabla_{e_0}^S - \nabla_{e_0}^{S_{\pm\infty}} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma)))$,
- v) $\nabla_{e_j(t)}^S - \nabla_{e_j(\pm\infty)}^{S_{\pm\infty}} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma)))$.

9.2.3. *Équation de Schrödinger.* On reprend les résultats de la section 8.2.1 en réadaptant les résultats de convergence issus de la proposition 9.4.

Ramenons nous à l'équation de Schrödinger en utilisant le transport parallèle le long de ∂_t par la connexion spinorielle.

Soit $f \in C^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma))$, on note $\mathcal{T}(s)f = \psi$ la solution à

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_t}^S \psi = 0 \text{ sur } I \times \Sigma \\ \psi|_{\Sigma_s} = f, \end{cases}$$

et on pose

$$\mathcal{T}(t, s)f = \mathcal{T}(s)f|_{\Sigma_t}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : & C^\infty(I; C^\infty(\Sigma, S(\Sigma)) \rightarrow C^\infty(M; S(M))) \\ & \psi(t) \mapsto (\mathcal{T}\psi)(t) := |h_t|^{-\frac{1}{4}} |h_0|^{\frac{1}{4}} \mathcal{T}(t, 0)\psi(t). \end{aligned}$$

Lemme 9.5. (1) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_0)\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_0)$, $t, s \in I$,

(2) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_j(t))\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_j(s))$, $t, s \in I$,

(3) $\mathcal{T}(t, s)^*\beta_t\mathcal{T}(t, s) = \beta_s$, $t, s \in I$.

Proposition 9.6. *Soit*

$$D := \mathcal{T}^{-1}D\mathcal{T}.$$

Alors

(1) *l'application*

$$\mathcal{T} : (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu_0) \xrightarrow{\sim} (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu_0)$$

est unitaire.

(2) *On a*

$$D = -\gamma_0(e_0)\partial_t + i\gamma_0(e_0)H(t),$$

où $H(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}, \Psi^1(\Sigma, S(\Sigma)))$ satisfait:

$$(2i) \quad \sigma_{\text{pr}}(H(t))(x, k) = -\gamma_0(e_0)\gamma_0(h_t(x))^{-1}k.$$

(2ii) il existe $H_{\pm\infty} \in \Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))$ uniformément elliptique, symétrique par rapport à ν_0 tels que

$$H(t) - H_{\pm\infty} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; \Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))).$$

$H_{\pm\infty}$ est auto-adjoint de domaine $H^1(\Sigma; S(\Sigma))$ et $0 \notin \sigma(H_{\pm\infty})$.

(2iii) $H(t)$ est symétrique par rapport à ν_0 et auto-adjoint de domaine $H^1(\Sigma; S(\Sigma))$.

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire

$$(H4) \quad 0 \notin \sigma(H_{\pm\infty}),$$

on peut montrer le lemme suivant en reprenant les idées du lemme 8.6.

Lemme 9.7. *Il existe $R_{-\infty} \in C_0^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma)))$ tel que*

$$\sigma(H(t) + R_{-\infty}) \cap [-1, 1] = \emptyset, t \in I.$$

9.3. Construction des projecteurs spectraux déformés. Dans cette section on décrit la construction des projecteurs spectraux déformés pour définir les états de Hadamard.

9.3.1. Équations récurrentes. Pour définir les projecteurs spectraux on sera ramené à résoudre une équation récurrente sur $R(t)$. Dans cette section on donne un cadre général pour résoudre ce genre d'équations.

On définit d'abord des applications contractantes sur les espaces de symboles. Pour simplifier les notations on note $\mathcal{S}^{\delta, m}$ l'ensemble $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(S(\Sigma))))$. De plus, on pose $\mathcal{S}^{\infty, \infty} = \bigcup_{\delta, m \in \mathbb{R}} \mathcal{S}^{\delta, m}$.

Définition 9.8. *Soit $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}_{-\delta, -p}$ l'ensemble des applications $F : \mathcal{S}^{0, 0} \rightarrow \mathcal{S}^{\infty, \infty}$ telles que*

$$F : \mathcal{S}^{-\mu, -1} \rightarrow \mathcal{S}^{-\mu - \delta(\mu), -p}, \quad \forall \mu > 0,$$

et:

$$R_1 - R_2 \in \mathcal{S}^{-\mu - \epsilon, -1 - j} \Rightarrow F(R_1) - F(R_2) \in \mathcal{S}^{-\mu - \delta(\mu) - \epsilon, -p - j}, \quad \forall \epsilon > 0, j \in \mathbb{N}.$$

On peut alors montrer un résultat général de résolution d'équations récurrentes.

Proposition 9.9. *Soit $A \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -1}$, $\mu_1 > 0$ et $F_{0, -2} \in \mathcal{F}_{0, -2}$. Alors il existe une solution $R \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -1}$, unique modulo $\mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}$ à l'équation:*

$$R = A + F_{0, -2}(R) \text{ mod } \mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}.$$

9.3.2. *Construction.* Dans cette sous-section on explique la construction des projecteurs spectraux déformés à partir d'une équation récursive. On suppose que l'on se ramène à une équation de la forme

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0,$$

où H satisfait les conditions de la proposition 9.2. On cherche des projecteurs $\tilde{P}^\pm(t)$ sous la forme $\tilde{P}^\pm(t) = e^{-iR(t)}P^\pm(t)e^{iR(t)}$ qui satisfont

$$U(t, s)\tilde{P}^\pm(s) = \tilde{P}^\pm(t)U(t, s),$$

où $U(t, s)$ désigne le propagateur de s à t associé au générateur infinitésimal $H(t)$. Pour cela on part plutôt de l'équation

$$\tilde{U}(t, s)P^\pm(s) = P^\pm(t)\tilde{U}(t, s),$$

où $\tilde{U}(t, s) = e^{iR(t)}U(t, s)e^{-iR(s)}$ en notant $U(t, s)$ le propagateur de s à t associé à $t \rightarrow H(t)$. On peut montrer que cette équation est équivalente à l'équation

$$\partial_t P^\pm(t) + [P^\pm(t), i\tilde{H}(t)] = 0,$$

où $\tilde{H}(t)$ est le générateur du groupe unitaire associé au propagateur \tilde{U} . On peut alors réécrire cette équation sous forme d'une équation récursive, ce qui permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 9.10. *Il existe une famille à 1-paramètre de projecteurs*

$$P^\pm(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$$

ainsi qu'une famille à 1-paramètre d'opérateurs

$$R(t) \in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^{-1}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$$

telles que

- (1) $P^\pm(t) = P^\pm(t)^*$, $P^+(t) + P^-(t) = \mathbb{1}$;
- (2) $P^\pm(t) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$;
- (3) $R(t) = R^*(t)$;
- (4) $\partial_t P^\pm(t) + [P^\pm(t), i\tilde{H}(t)] \in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^{-\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ où

$$\tilde{H}(t) = e^{iR(t)}\mathbf{H}(t)e^{-iR(t)} + i^{-1}\partial_t e^{iR(t)}e^{-iR(t)};$$

- (5)

$$\text{WF}(U(\cdot, 0)e^{-iR(0)}P^\pm(0)e^{iR(0)})' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma,$$

for $\mathcal{F} = \{k = 0\} \subset T^*M$.

On en déduit alors un analogue de la proposition 8.9 avec la condition de décroissance en temps.

Proposition 9.11. *Sous les hypothèses (Hi), $1 \leq i \leq 4$, on a*

- (1) *la limite en norme*

$$\tilde{P}_{\text{out/in}}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{U}(0, t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\tilde{H}_{\pm\infty})\tilde{U}(t, 0) \text{ existe.}$$

- (2) $\tilde{P}_{\text{out/in}}^\pm$ *sont des projecteurs auto-adjoints pour le produit scalaire $\tilde{\nu}_0$ qui satisfont $\tilde{P}_{\text{out/in}}^+ + \tilde{P}_{\text{out/in}}^- = \mathbb{1}$.*

- (3)

$$\text{WF}(\tilde{U}(\cdot, 0)\tilde{P}_{\text{out/in}}^\pm)' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma.$$

9.3.3. *État de Hadamard.* Finalement on obtient un état de Hadamard à partir des projecteurs spectraux précédemment définis.

Théorème 9.12. *Sous les hypothèses (Hi), $1 \leq i \leq 4$, on a*

(1) *la limite en norme*

$$P_{\text{out/in}}^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{out/in}}) U(t, 0) \text{ existe.}$$

(2) *si*

$$\lambda_{\text{out/in}}^{\pm} = i\gamma(n) P_{\text{out/in}}^{\pm}$$

$\lambda_{\text{out/in}}^{\pm}$ sont les covariances de surface de Cauchy d'un état de Hadamard pur $\omega_{\text{out/in}}$ pour l'opérateur D appelés états de vide sortant/entrant.

CHAPITRE 2

**Hadamard states for quantized Dirac fields on
Lorentzian manifolds of bounded geometry**

Le présent chapitre retranscrit un article co-écrit avec Christian Gérard, et paru dans *Reviews In Mathematical Physics*, **34**, (2022).

10. INTRODUCTION

10.1. Quantum fields on curved spacetimes. In many situations of physical interest, for example the study of the early stages of the universe or of stellar collapse, one is naturally led to the problem of constructing quantum field theories on a curved spacetime.

The symmetries of the Minkowski spacetime, which play such a fundamental role, are absent in curved spacetimes, except in some simple situations, like *stationary* or *static* spacetimes. Therefore, the traditional approach to quantum field theory has to be modified: one has first to perform an *algebraic quantization*, which for free theories amounts to introducing an appropriate *phase space*, which is either a *symplectic* or an *Euclidean* space, in the *bosonic* or *fermionic* case. From such a phase space one can construct CCR or CAR **-algebras*, and actually *nets* of **-algebras*, each associated to a region of spacetime.

The second step consists in singling out, among the many states on these **-algebras*, the physically meaningful ones, which should resemble the Minkowski vacuum, at least in the vicinity of any point of the spacetime. This leads to the notion of *Hadamard states*, which were originally defined by requiring that their two-point functions have a specific asymptotic expansion near the diagonal, called the *Hadamard expansion*.

A very important progress was made by Radzikowski, [R1, R2], who introduced the characterization of Hadamard states by the *wavefront set* of their two-point functions. Numerous papers have been devoted to the study of linear scalar fields, on curved spacetimes, but much less has been done for fields with higher spin, in particular for *Dirac fields*, to which the present paper is devoted.

10.2. Hadamard states for Dirac fields. Let (M, g) a spacetime, ie an orientable and time orientable Lorentzian manifold. We will always assume that $\dim M$ is even. If (M, g) admits a spin structure, one can canonically define *Dirac operators*

$$D = g^{\mu\nu} \gamma(e_\mu) \nabla_{e_\nu}^S + m$$

acting on sections of the spinor bundle $S(M)$. Here $(e_\mu)_{0 \leq \mu \leq d}$ is a local frame of TM , $g^{\mu\nu}$ is the inverse metric, $\gamma(e_\mu)$ the Clifford multiplication and ∇^S the spin connection. The mass of the Dirac field is described by a real function $m : M \rightarrow \mathbb{R}$ or more generally by a map $m : M \rightarrow L(S(M))$ which is selfadjoint for the spinor scalar product.

If (M, g) is globally hyperbolic, one can define the *retarded/advanced inverses* $G_{\text{ret/adv}}$ of D and the *causal propagator* $G = G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$. Using the causal propagator one can, by the classic paper of Dimock [D], construct the CAR **-algebra* $\text{CAR}(D)$, which describes a free quantum Dirac field on M .

A *state* ω on $\text{CAR}(D)$ (more precisely a gauge invariant quasi-free state), is completely specified by fixing a pair of linear continuous maps

$$\Lambda^\pm : C_0^\infty(M; S(M)) \rightarrow \mathcal{D}'(M; S(M))$$

called the *covariances* of ω which satisfy:

$$\begin{aligned} \Lambda^\pm &\geq 0 \text{ for } (\cdot|\cdot)_M, \\ \Lambda^+ + \Lambda^- &= iG, \\ D \circ \Lambda^\pm &= \Lambda^\pm \circ D = 0. \end{aligned}$$

Hadamard states for Dirac fields were originally defined in [Kö, V], by specifying the short distance behavior of Λ^\pm near the diagonal, in an analogous way to the case of Klein-Gordon fields. The microlocal definition of Hadamard states for Dirac fields was first introduced by Hollands in [Ho].

The microlocal definition of Hadamard states is analogous to the case of scalar fields, although a more refined description of the microlocal singularities of Λ^\pm , based on the notion of the *polarization set* due to Dencker [De], was given in [Ho]. The equivalence of the two definitions, which for scalar fields was one of the important results of Radzikowski, was proved in [Ho], see also the work of Kratzert [Kr].

These results were extended to more general hyperbolic equations acting on sections of vector bundles by Sahlman and Verch [SV1]. Later on Sanders described Dirac fields on four dimensional spacetimes as a locally covariant quantum field theory using the language of category theory. He also filled several gaps in the existing litterature.

Another approach to Hadamard states has been advocated by Finster, called the *fermionic projector method*, see eg [FR1, FR2]. Its scope seems for the moment limited to rather special classes of spacetimes. Nevertheless its relationship with the pseudodifferential approach that we will use in this paper is an interesting problem that deserves to be investigated.

The litterature devoted to Hadamard states for Dirac fields on curved spacetimes is much less numerous than the one for scalar fields. In particular there seems to be rather few results on *existence* of Hadamard states for Dirac fields.

To our knowledge the first paper proving existence of Hadamard states for Dirac fields in the general case is the recent paper by Murro and Volpe [MV]. It relies on the construction of an isomorphism between solutions of the Dirac equation on (M, g) and on (M, g_{us}) respectively, where g_{us} is an ultrastatic metric having a Cauchy surface in common with (M, g) . This construction is related to the familiar deformation argument of Fulling, Narcowich and Wald [FNW] for bosonic scalar fields.

Sahlmann and Verch [SV2] have proved that on *stationary spacetimes* ground and thermal states are Hadamard, in a general framework which applies in particular to the Dirac case. Pulling back the ground state for the Dirac operator D_{us} on (M, g_{us}) by the above isomorphism, one obtains a state for the Dirac operator D on (M, g) , which can be proved to be a Hadamard state, see [MV, Thm. 4.12].

Note that the deformation argument was already used by d'Antoni and Hollands, see [DHo, Sect. V] to prove the split property of Hadamard states for Dirac fields.

Another recent construction of Hadamard states for Dirac fields is due to Islam and Strohmaier [IS], where Feynman propagators are studied in details for normally hyperbolic operators acting on sections of vector bundles, following the classic approach by Duistermaat and Hörmander [DH].

10.3. Content of this paper. The goal of this paper is to give an explicit construction of *pure* Hadamard states for Dirac fields on a rather large class of spacetimes. Various spacetimes of physical interest like for example the Kerr or Kerr-de Sitter exterior spacetimes, or the Kerr-Kruskal spacetime describing blackholes fall into the class of spacetimes that we consider.

We will construct Hadamard states by working on a fixed Cauchy surface Σ of M , using global *pseudodifferential calculus* on Σ .

To this end we will use the global calculus introduced by Shubin [Sh], which relies on the notion of *bounded geometry*. Let us note that the framework of bounded geometry is often used for global spectral analysis on non compact manifolds, see among many others the papers [AG, AGV].

In the context of quantum fields on curved spacetimes, Shubin's calculus was first used in [GOW] to construct pure Hadamard states for Klein-Gordon fields on Lorentzian manifolds of bounded geometry.

An important fact, probably known to experts, is that on a Lorentzian manifold of bounded geometry possessing a spin structure, the spin bundle and hence its associated spinor bundle can, modulo a bundle equivalence, be assumed to be bundles of bounded geometry.

This implies that the Dirac operator is itself a differential operator of bounded geometry, and allows to use freely the Shubin's calculus in later steps.

As in [GOW] the first step consists, after fixing a Cauchy surface Σ with good properties, to reduce ourselves using the normal geodesic flow to a product situation where $M = I \times \Sigma$, I some time interval, with the metric g of the form $-dt^2 + h(t, x)dx^2$, where $h(t, x)dx^2$ is a time dependent Riemannian metric on Σ .

The Dirac equation $D\psi = 0$ can then be reduced to a time dependent Schroedinger equation

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0,$$

where $H(t)$ is a time dependent first order elliptic operator on Σ . In [GOW] a similar reduction was done by writing the Klein-Gordon equation as a first order system. If $U(t, s)$ denotes the associated Cauchy evolution, one obtains a pure Hadamard state ω by constructing a pair of selfadjoint projections $P^\pm(t)$ with $P^+(t) + P^-(t) = \mathbb{1}$, such that

- i) $U(t, s)P^\pm(s) - P^\pm(t)U(t, s)$ is smoothing,
- ii) $\text{WF}(U(\cdot, s)P^\pm(s)f) \subset \mathcal{N}^\pm$, $\forall f \in \mathcal{E}'(\Sigma, S(\Sigma))$,

where $S(\Sigma)$ is the restriction of the spinor bundle $S(M)$ to Σ , $\text{WF}(u) \subset T^*M \setminus o$ is the *wavefront set* of a distribution u , and \mathcal{N}^\pm are the two connected components of the characteristic manifold \mathcal{N} of the Dirac operator arising in the microlocal definition of Hadamard states.

In [GOW], the projections $P^\pm(t)$ were deduced from a diagonalization of the Cauchy evolution $U(t, s)$ modulo smooth errors, which in turn followed from a factorization of the Klein-Gordon operator. Here the projections are constructed directly by an inductive argument, starting from the spectral projections $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$. Our construction is actually analogous to the construction of *adiabatic projections* in linear adiabatic theory, see for example the construction given by Sjöstrand [Sj] in the semiclassical case.

From these projections, one can also obtain an explicit expression for the *Feynman propagator* associated to the Hadamard state ω .

We conclude our paper by giving two proofs of the existence of Hadamard states for Dirac fields on arbitrary globally hyperbolic spacetimes. The first is by the usual deformation argument of Fulling, Narcowich and Wald [FNW], the second using a partition of unity on a Cauchy surface is due to [GW1] for Klein-Gordon fields.

10.4. Plan of the paper. In Section 11 we recall some background on spin structures and Dirac operators on Lorentzian manifolds. Section 12 is devoted to the quantization of Dirac fields on curved spacetimes and to the definition of Hadamard states.

In Section 13 we recall various definitions related with bounded geometry, in particular the notion of Lorentzian manifolds and Cauchy surfaces of bounded geometry, introduced in [GOW].

In Section 14 we consider the pseudodifferential calculus on manifolds of bounded geometry. We extend several results in [GOW] to pseudodifferential operators acting on sections of bounded vector bundles.

Section 15 contains the proof of the main result of the paper, Theorem 15.9, namely the construction of pure Hadamard states for Dirac operators on Lorentzian manifolds of bounded geometry. Finally in Section 16 we give two constructions of

Hadamard states for Dirac fields on arbitrary globally hyperbolic spacetimes. The first construction is similar in spirit to the one in [MV], relying on the deformation argument, but working systematically with Cauchy data and Cauchy evolutions.

The second is by a partition of unity argument first used in [GW1] for scalar bosonic fields.

10.5. Notations.

10.5.1. *Lorentzian manifolds.* We use the mostly + signature convention for Lorentzian metrics. All Lorentzian manifolds considered in this paper will be *orientable* and connected.

If $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a covering of a manifold M , for example associated to a bundle atlas of some bundle $E \xrightarrow{\pi} M$, we set $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

10.5.2. *Bundles.* If $E \xrightarrow{\pi} M$ is a bundle we denote by $C^\infty(M; E)$ resp. $C_0^\infty(M; E)$ the set of smooth resp. smooth and compactly supported sections of E .

If $E \xrightarrow{\pi} M$ is a vector bundle of finite rank, we denote by $\mathcal{D}'(M; E)$ resp. $\mathcal{E}'(M; E)$ the space of distributional resp. compactly supported distributional sections of E .

10.5.3. *Matrices.* Since we will often use frames of vector bundles we will denote by \mathbf{M} a matrix in $M_n(\mathbb{R})$ or $M_N(\mathbb{C})$ and by M the associated endomorphism.

10.5.4. *Frames and frame indices.* We use the letters $0 \leq a \leq d$ for frame indices on TM or T^*M , and $1 \leq a \leq d$ for frame indices on $T\Sigma$ or $T^*\Sigma$, if $\Sigma \subset M$ is a space like hypersurface. If g is a metric on M and $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ is a local frame of TM we set $g_{ab} = e_a \cdot g e_b$ and $g^{ab} = e^a \cdot g^{-1} e^b$, where $(e^a)_{0 \leq a \leq d}$ is the dual frame.

We use capital letters $1 \leq A \leq N$ for frame indices of the spinor bundle $S(M)$.

If \mathcal{F} is for example a local frame of TM we denote by $\mathcal{F}\mathbf{t}$ the frame obtained by the right action of $\mathbf{t} \in M_n(\mathbb{R})$ on \mathcal{F} .

10.5.5. *Vector spaces.* if \mathcal{X} is a real or complex vector space, we denote by \mathcal{X}' its dual. If \mathcal{X} is a complex vector space we denote by \mathcal{X}^* its anti-dual, ie the space of anti-linear forms on \mathcal{X} and by $\overline{\mathcal{X}}$ its conjugate, ie \mathcal{X} equipped with the complex structure $-i$.

A linear map $a \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ is a bilinear form on \mathcal{X} , whose action on pairs of vectors is denoted by $x_1 \cdot a x_2$. Similarly a linear map $a \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ is a sesquilinear form on \mathcal{X} , whose action is denoted by $\overline{x}_1 \cdot a x_2$. We denote by a' , resp. a^* the transposed resp. adjoint of a . The space of symmetric resp. Hermitian forms on \mathcal{X} is denoted by $L_s(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ resp. $L_h(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$.

10.5.6. *Maps.* We write $f : A \xrightarrow{\sim} B$ if $f : A \rightarrow B$ is a bijection. We use the same notation if A, B are topological spaces resp. smooth manifolds, replacing bijection by homeomorphism, resp. diffeomorphism.

11. SPIN STRUCTURES AND DIRAC OPERATORS ON LORENTZIAN SPACETIMES

We recall some definitions about spin structures and Dirac operators, see [LM, chap. I, chap. II sects 1,3,4, 5]. Another nice exposition is found in trautman [T].

11.1. **Background.** We denote by $\mathbb{R}^{1,d}$ the Minkowski spacetime, ie \mathbb{R}^{1+d} equipped with the bilinear form $x \cdot \eta x = -t^2 + x^2$, $x = (t, \mathbf{x})$. We will always assume that $n = 1 + d$ is *even*. We denote by $\text{SO}^\uparrow(1, d) \subset \text{SO}(1, d) \subset \text{O}(1, d)$ the restricted Lorentz group.

11.1.1. *Clifford algebras.* The *Clifford algebra* $\text{Cl}(1, d)$ is the real algebra generated by elements $\mathbb{1}, \gamma(x), x \in \mathbb{R}^{1, d}$ with relations

$$(11.1) \quad \gamma(x)\gamma(x') + \gamma(x')\gamma(x) = 2x \cdot \eta x' \mathbb{1}.$$

For $r \in \text{O}(1, d)$ one sets $\hat{r}(\gamma(x)) = \gamma(rx)$ $x \in \mathbb{R}^{1, d}$. The map \hat{r} extends uniquely as an automorphism of $\text{Cl}(1, d)$. We set

$$(11.2) \quad \alpha : \text{O}(1, d) \ni r \mapsto \hat{r} \in \text{Aut}(\text{Cl}(1, d))$$

which is a group morphism.

11.1.2. *Spin groups.* The *Spin group* $\text{Spin}(1, d) \subset \text{Cl}(1, d)$ is

$$\text{Spin}(1, d) = \{\gamma(x_1) \cdots \gamma(x_{2p}) : x_i \cdot \eta x_i = \pm 1, p \in \mathbb{N}\}$$

and the *restricted Spin group* $\text{Spin}^\uparrow(1, d)$ is the connected component of $\mathbb{1}$ in $\text{Spin}(1, d)$. One can show that $\gamma(x_1) \cdots \gamma(x_{2p})$ belongs to $\text{Spin}^\uparrow(1, d)$ iff the number of indices i with $x_i \cdot \eta x_i = -1$ is even.

The map $\text{Ad} : \text{Spin}^\uparrow(1, d) \rightarrow \text{SO}^\uparrow(1, d)$ defined by

$$a\gamma(x)a^{-1} =: \gamma(\text{Ad}(a)x), \quad a \in \text{Spin}^\uparrow(1, d)$$

is a two-sheeted covering and one has $\text{Ad}^{-1}(\{r\}) = \{a, -a\}$ for $\text{Ad}(a) = r$.

11.1.3. *Representations.* Since n is even, there exist a (unique up to isomorphism) faithful and irreducible representation

$$(11.3) \quad \rho_0 : \text{Cl}(1, d) \rightarrow M_N(\mathbb{C}), \quad N = 2^{\frac{d}{2}}.$$

We equip $\mathbb{R}^{1, d}$ and \mathbb{C}^N with their canonical bases $(u_a)_{0 \leq a < d}$, $(v_A)_{1 \leq A \leq N}$ and tacitly identify $\text{SO}^\uparrow(1, d)$, $\text{Cl}(1, d)$ and $\text{Spin}^\uparrow(1, d)$ with their images in $M_n(\mathbb{R})$ or $M_N(\mathbb{C})$.

We denote hence by $\gamma_a \in M_N(\mathbb{C})$ the matrix of $\rho_0(\gamma(u_a))$ and set

$$\gamma(v) = \gamma_a v^a, \quad v = v^a e_a \in \mathbb{R}^{1, d}.$$

There exists a Hermitian matrix $\beta \in M_N(\mathbb{C})$ such that

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \gamma(v)^* \beta &= -\beta \gamma(v), \quad v \in \mathbb{R}^{1, d}, \\ i\beta \gamma(v) &> 0 \text{ if } v \text{ is time-like future directed.} \end{aligned}$$

If $n \in \{2, 4\} \bmod 8$ there exists a real matrix $\kappa \in M_N(\mathbb{C})$ such that

$$\kappa^2 = \mathbb{1}, \quad \kappa \gamma(v) = \gamma(v) \kappa, \quad v \in \mathbb{R}^{1, d}.$$

One can show that $\text{Spin}^\uparrow(1, d)$ is the set of $\mathbf{a} \in M_N(\mathbb{C})$ such that

$$(11.5) \quad \begin{aligned} (i) \quad \mathbf{a}^* \beta \mathbf{a} &= \beta, \quad \mathbf{a} \kappa = \kappa \bar{\mathbf{a}}, \\ (ii) \quad \mathbf{a} \gamma(v) \mathbf{a}^{-1} &= \gamma(\text{Ad}(\mathbf{a})v), \quad v \in \mathbb{R}^{1, d}. \end{aligned}$$

11.2. **Embedding of \mathbb{R}^d into $\mathbb{R}^{1, d}$.** Let \mathbb{R}^d be the Euclidean space, equipped with the bilinear form $\mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^2$. We denote by $\text{Cl}(d)$, $\text{SO}(d)$, $\text{Spin}(d)$ the analogous Clifford algebra, special orthogonal group and spin group with η replaced by δ .

We consider the isometric embedding $i : \mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto (0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1, d}$. Note that it is different from the one considered in [BGM, Sect. 2] since the range of i is space-like in our case. It induces a morphism from $\text{Cl}(d)$ to $\text{Cl}(1, d)$, still denoted by i for simplicity of notation. It is easy to see that this morphism is injective.

In fact setting $\mathbf{E}_I = \prod_{i \in I} \gamma_i$ for $I \subset \{0, \dots, d\}$, then $\{\mathbf{E}_I\}_{I \subset \{0, \dots, d\}}$ is a basis of $\text{Cl}(1, d)$ while $\{\mathbf{E}_I\}_{I \subset \{1, \dots, d\}}$ is a basis of $\text{Cl}(d)$ and $i\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_I$ for $I \subset \{1, \dots, d\}$ which proves the injectivity of i .

Using the characterization of $\text{Spin}^\uparrow(1, d)$ in 11.1.2 and the same characterization of $\text{Spin}(d)$ we obtain that $i : \text{Spin}(d) \rightarrow \text{Spin}^\uparrow(1, d)$.

Note that we have also an injective morphism

$$(11.6) \quad \tilde{\mathbf{i}} : \mathrm{SO}(d) \ni \mathbf{o} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{o} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}^\uparrow(1, d)$$

with a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(d) & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{i}}} & \mathrm{SO}^\uparrow(1, d) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ \mathrm{Cl}(d) & \xrightarrow{\mathbf{i}} & \mathrm{Cl}(1, d) \end{array}$$

where α denotes the action of $\mathrm{SO}(d)$, resp. $\mathrm{SO}(1, d)$ on $\mathrm{Cl}(d)$, resp. $\mathrm{Cl}(1, d)$.

Lemma 11.1. *Let $\mathbf{s} \in \mathrm{Spin}^\uparrow(1, d)$ with $\mathrm{Ad}(\mathbf{s}) \in \tilde{\mathbf{i}}(\mathrm{SO}(d))$. Then there exists a unique $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathrm{Spin}(d)$ such that $\mathbf{s} = \mathbf{i}(\tilde{\mathbf{s}})$.*

Proof. We write $\mathbf{s} = \sum_{I \subset \{1, \dots, d\}} (\lambda_I \gamma_0 + \mu_I) \mathbf{E}_I$. Since $\mathrm{Ad}(\mathbf{s})e_0 = e_0$ we have $\mathbf{s}\gamma_0 = \gamma_0\mathbf{s}$, which using the Clifford relations implies that $\lambda_I = 0$ for all I and hence $\mathbf{s} \in \mathbf{i}(\mathrm{Spin}(d))$. \square

11.3. Lorentzian manifolds.

11.3.1. *Spacetimes.* We recall that a spacetime (M, g) is an orientable and time-orientable Lorentzian manifold. We will always assume that M is connected.

11.3.2. *The bundle $\mathrm{PSO}^\uparrow(M, g)$.* Let M be a spacetime. It is well-known that TM admits local oriented and time oriented orthonormal frames. For completeness let us sketch the proof of this fact:

let $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a family of local frames of TM over $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, with $\mathcal{F}_i = (f_{i,a})_{0 \leq a \leq d}$, and $\mathbf{g}_{i,ab} = f_{i,a} \cdot \mathbf{g} f_{i,b}$. Without loss of generality we can assume that \mathcal{F}_i is direct and $f_{i,0}$ is future directed. We choose a neighborhood V_0 of $\boldsymbol{\eta}$ as in Lemma A.1 such that $\mathcal{F}_i \mathbf{t}$ is direct and $\mathbf{t} f_{i,0}$ is future directed for all $\mathbf{t} \in U_0 = F(V_0)$, where the map F is constructed in Lemma A.1.

We set then $\mathbf{t}_i := F(\mathbf{g}_i)$, $\mathcal{E}_i := \mathcal{F}_i \mathbf{t}_i$ and $(\mathcal{E}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a family of local orthonormal oriented and time oriented frames of TM .

We denote by $\mathrm{PSO}^\uparrow(M, g)$ the $\mathrm{SO}^\uparrow(1, d)$ -principal bundle over M of local oriented and time oriented orthonormal frames of TM .

Equivalently one can define $\mathrm{PSO}^\uparrow(M, g)$ as the $\mathrm{SO}^\uparrow(1, d)$ -principal bundle over M with transition functions

$$(11.7) \quad \mathbf{o}_{ij} = \mathbf{t}_j^{-1} \circ \mathbf{t}_i : U_{ij} \rightarrow \mathrm{SO}^\uparrow(1, d).$$

11.3.3. *The bundle $\mathrm{Cl}(M, g)$.* From the bundle $\mathrm{PSO}^\uparrow(M, g)$ and the map introduced in (11.2) we obtain by the associated bundle construction the *Clifford bundle* $\mathrm{Cl}(M, g) = \mathrm{PSO}^\uparrow(M, g) \times_\alpha \mathrm{Cl}(1, d)$, which is a bundle of algebras with typical fiber $\mathrm{Cl}(1, d)$. Equivalently one can define $\mathrm{Cl}(M, g)$ by the transition maps

$$\hat{\mathbf{o}}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}(1, d)),$$

for \mathbf{o}_{ij} defined in (11.7).

11.4. Spin structures.

Définition 11.2. Let (M, g) be a spacetime. A spin structure on (M, g) is a $\text{Spin}^\uparrow(1, d)$ -principal bundle over M denoted $P\text{Spin}(M, g)$ such that there exists a morphism of principal bundles $\chi : P\text{Spin}(M, g) \rightarrow P\text{SO}^\uparrow(M, g)$ such that the following diagram commutes:

$$(11.8) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spin}^\uparrow(1, d) & \longrightarrow & P\text{Spin}(M, g) \\ \downarrow \text{Ad} & & \downarrow \chi \\ \text{SO}^\uparrow(1, d) & \longrightarrow & P\text{SO}^\uparrow(M, g) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi' \\ \searrow \pi \\ M \end{array}$$

11.4.1. *Existence and uniqueness of spin structures.* For the reader's convenience, let us recall well-known results on the existence and uniqueness of spin structures.

A Lorentzian manifold admits a spin structure if and only if its second Stiefel–Whitney class $w_2(TM)$ is trivial, see [Mi, Na]. If $\dim M = 4$ this is also equivalent to the fact that M is parallelizable, see [Ger1, Ger2]. It admits a *unique* spin structure if in addition its first Stiefel–Whitney class $w_1(M)$ is trivial, which is equivalent to the fact that M is orientable, see e.g. [Na].

In our situation, M is orientable hence spin structures on (M, g) are unique if they exist. If (M, g) is globally hyperbolic, then M is diffeomorphic to $\mathbb{R} \times \Sigma$, where Σ is a smooth Cauchy surface. The orientation and time orientation of M induce an orientation of Σ , hence Σ is orientable.

Since any orientable 3-manifold is parallelizable, this implies that if (M, g) is globally hyperbolic and $n = 4$, M is parallelizable and by the above facts it admits a *unique* spin structure.

11.5. **Spinor bundle.** From the bundle $P\text{Spin}(M, g)$ and the map (11.3) we obtain by the associated bundle construction the *spinor bundle* $S(M) = P\text{Spin}(M, g) \times_{\rho_0} \mathbb{C}^N$ which is a vector bundle with typical fiber \mathbb{C}^N and the same transition maps

$$\mathbf{s}_{ij} : U_{ij} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

as $P\text{Spin}(M, g)$.

The spinor bundle $S(M)$ inherits a lot of extra structures which we now recall.

11.5.1. *Action of $\text{Cl}(M, g)$ on $S(M)$.* We can define a morphism of bundles of algebras $\rho : \text{Cl}(M, g) \rightarrow L(S(M))$ as follows

$$\rho([\chi(P), a]) \cdot [P, v] = [P, \rho_0(a) \cdot v],$$

where $P \in P\text{Spin}(M, g)$, $a \in \text{Cl}(1, d)$, and $v \in \mathbb{C}^N$.

We could also define it directly from transition maps. From (11.5) (ii) we obtain that if \mathbf{s}_{ij} are the transition maps of $S(M)$ and $\text{Ad}(\mathbf{s}_{ij}) =: \mathbf{o}_{ij}$, then

$$\mathbf{s}_{ij} \boldsymbol{\gamma}(v) \mathbf{s}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{o}_{ij} v) = \alpha(\mathbf{o}_{ij}) \boldsymbol{\gamma}(v), \quad v \in \mathbb{R}^{1, d}.$$

Therefore the morphism $\rho_0 : \text{Cl}(1, d) \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ induces a morphism of bundles of algebras:

$$\rho : \text{Cl}(M, g) \rightarrow L(S(M))$$

For $v \in C^\infty(M; TM)$ we set

$$(11.9) \quad \boldsymbol{\gamma}(v) := \rho(v), \quad \text{where } v \in C^\infty(M; TM) \subset C^\infty(M; \text{Cl}(M, g)).$$

The map $\boldsymbol{\gamma}(v)$ is usually called the Clifford multiplication by v and often denoted by $v \cdot$.

11.5.2. *Time positive Hermitian structure.* We can define a Hermitian structure $\beta \in C^\infty(M; L_h(S(M), S(M)^*))$ by

$$[P, u] \cdot \beta[P, v] = u \cdot \beta v,$$

where $P \in P\text{Spin}(M, g)$, $u, v \in \mathbb{C}^N$ and β is in (11.4).

Equivalently using (11.5) and denoting by $T_i : S(M) \cap \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^N$ the local trivializations of $S(M)$, we can define β by:

$$\beta = T_i^* \beta T_i \text{ over } U_i.$$

11.5.3. *Charge conjugation.* Similarly we can define a charge conjugation κ belonging to $C^\infty(M; L(S(M), \overline{S(M)}))$ by

$$\kappa[P, v] = [P, \kappa v]$$

where $P \in P\text{Spin}(M, g)$, $v \in \mathbb{C}^N$ and κ is in (11.5).

Equivalently using (11.5) we can define κ by

$$\kappa = T_i^{-1} \kappa T_i \text{ over } U_i,$$

where above we still denote by κ the anti-linear map $\mathbb{C}^N \ni z \mapsto \kappa \bar{z}$.

11.5.4. *Properties.* Using (11.4), (11.5) we obtain

$$\begin{aligned} \gamma(v)^* \beta &= -\beta \gamma(v), \quad v \in C^\infty(M; TM), \\ \kappa \gamma(v) &= \gamma(v) \kappa, \quad v \in C^\infty(M; TM) \\ \beta \gamma(e) &> 0 \text{ if } e \in C^\infty(M; TM) \text{ is future directed.} \end{aligned} \tag{11.10}$$

11.5.5. *Local frame of $S(M)$ associated to a local frame of TM .* Let $U \subset M$ a chart open set and $\mathcal{F} = (e_a)_{0 \leq a \leq d}$ an orthonormal oriented and time oriented local frame of TM over U , ie a local section of $PSO^\uparrow(M, g)$. If S is a local section of $P\text{Spin}^\uparrow(M, g)$ such that $Ad(S) = \mathcal{F}$, then using the concrete representation ρ_0 and the canonical basis $(v_A)_{1 \leq A \leq N}$ of \mathbb{C}^N we obtain a local frame $\mathcal{B} = (E^A)_{1 \leq A \leq N}$ of $S(M)$ over U .

The spin frame \mathcal{B} is said *associated* to the vector frame \mathcal{F} .

Modulo a bundle isomorphism of $S(M)$ over U we can assume that the matrices of β , resp. κ , $\gamma(e_a)$ in the frame $(E^A)_{1 \leq A \leq N}$ are given by β resp. κ , γ_a .

11.5.6. *Spin connection.* The Levi-Civita connection on $PSO^\uparrow(M, g)$ lifts through χ in (11.8) to a connection on $P\text{Spin}(M, g)$ and hence on $S(M)$ called the *spin connection*.

Denoting by ∇ , resp. ∇^S the associated covariant derivatives, we have:

$$\begin{aligned} i) \quad \nabla_X^S (\gamma(Y)\psi) &= \gamma(\nabla_X Y)\psi + \gamma(Y)\nabla_X^S \psi, \\ ii) \quad X(\bar{\psi} \cdot \beta \psi) &= \overline{\nabla_X^S \psi} \cdot \beta \psi + \bar{\psi} \cdot \beta \nabla_X^S \psi, \\ iii) \quad \kappa \nabla_X^S \psi &= \nabla_X^S \kappa \psi, \end{aligned} \tag{11.11}$$

for all $X, Y \in C^\infty(M; TM)$ and $\psi \in C^\infty(M; S(M))$.

A concrete expression for the spin covariant derivative ∇^S is as follows:

let $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ an orthonormal oriented and time oriented local frame of TM over U and $(e^a)_{0 \leq a \leq d}$ the dual frame. We set

$$\nabla_b := \nabla_{e_b}, \quad \Gamma_{ba}^c := \nabla_b e_a \cdot e^c$$

hence

$$\nabla_a v = u^b (\partial_b v^a + \Gamma_{bc}^a v^c) e_a.$$

where we denote

$$u^a := u \cdot e^a, \quad \partial_b f := e_b \cdot df \text{ for } u \in C^\infty(U, TM), f \in C^\infty(U).$$

If $(E_A)_{1 \leq A \leq N}$ is the associated spin frame and $(E^A)_{1 \leq A \leq N}$ the dual frame, we set

$$\psi^A := \psi \cdot E^A, \quad M_B^A := E^A \cdot M E_B \text{ for } \psi \in C^\infty(U; S(M)); \quad M \in C^\infty(U, L(S(M))).$$

Then we have:

$$(11.12) \quad \nabla_u^S \psi := u^b (\partial_b \psi^A + \sigma_{bC}^A \psi^C) E_A,$$

where

$$\sigma_b := \frac{1}{4} \Gamma_{bc}^a \gamma_a \gamma^c, \quad \gamma_a = \gamma(e_a), \quad \gamma^b = \eta^{ab} \gamma_a.$$

11.6. Spin structures on cartesian products. Let $M = I_t \times \Sigma_x$ where $I \subset \mathbb{R}$ is an open interval and Σ an orientable d -dimensional manifold. We fix the Lorentzian metric on M :

$$g = -dt^2 + h(t, x) dx^2,$$

where $I \ni t \mapsto h(t, x) dx^2$ is a family of Riemannian metrics on Σ , and equip M with the natural orientation and time orientation obtained from the orientation of Σ . Let us set $h_t(x) dx^2 = h(t, x) dx^2$.

Let $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ an open covering of Σ , $\mathcal{F}_i = (e_{i,a})_{1 \leq a \leq d}$ local oriented orthonormal frames for h_0 over V_i and $\mathbf{o}_{ij} : V_{ij} \rightarrow \text{SO}(d)$ the associated transition functions. Let $\mathcal{F}_i(t) = (e_{i,a}(t))_{1 \leq a \leq d}$ the oriented orthonormal frames for h_t over V_i obtained by parallel transport of \mathcal{F}_i with respect to ∂_t for the metric g , and $\mathbf{o}_{ij}(t) : V_{ij} \rightarrow \text{SO}(d)$ the associated transition functions. Since the entries of $\mathbf{o}_{ij}(t)$ are given by $e_{i,a}(t) \cdot h_t e_{j,b}(t) = e_{i,a}(t) \cdot g e_{j,b}(t)$ we obtain that $\mathbf{o}_{ij}(t) = \mathbf{o}_{ij}$ is independent on t .

Note also that $\tilde{i}(\mathbf{o}_{ij}) : \mathbb{R} \times V_{ij} \rightarrow \text{SO}^\uparrow(1, d)$ are the transition functions of $\text{PSO}^\uparrow(M, g)$, since if we set $e_0 = \partial_t$, then $\mathcal{E}_i = (e_{i,a}(\cdot))_{0 \leq a \leq d}$ are local oriented and time oriented orthonormal frames for g over $U_i = I \times V_i$.

11.6.1. Spin structures. We use the notation in Subsect. 11.2. Assume that (M, g) has a spin structure, which is then unique since M is orientable. By Prop. A.2 we can assume that the associated transition maps $\mathbf{s}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Spin}^\uparrow(1, d)$ satisfy $\text{Ad}(\mathbf{s}_{ij}) = \tilde{i}(\mathbf{o}_{ij})$, and are hence independent on t .

By Lemma 11.1 there exists unique $\tilde{\mathbf{s}}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Spin}(d)$, independent on t , such that $\mathbf{s}_{ij} = i(\tilde{\mathbf{s}}_{ij})$ and hence we obtain a spin structure on (Σ, h_t) for $t \in I$.

Conversely if (Σ, h_0) has a spin structure with transition functions $\tilde{\mathbf{s}}_{ij} : V_{ij} \rightarrow \text{Spin}(d)$, the transition functions

$$\mathbf{s}_{ij} = i(\tilde{\mathbf{s}}_{ij}) : U_{ij} \rightarrow \text{Spin}^\uparrow(1, d),$$

define a spin structure on (M, g) , since $\text{Ad}(\mathbf{s}_{ij}) = \tilde{i}(\mathbf{o}_{ij})$.

11.6.2. Spinor bundles. Let $S(M)$ the spinor bundle on (M, g) and $S_t(\Sigma)$ its restriction to $\{t\} \times \Sigma$. Since the transition maps \mathbf{s}_{ij} are independent on t , $S_t(\Sigma)$ is independent on t and will hence be denoted by $S(\Sigma)$.

11.7. Dirac operators.

Définition 11.3. Let (M, g) a spacetime with a spin structure and $S(M)$ the associated spinor bundle. A Dirac operator on M is a differential operator D acting on $C^\infty(M; S(M))$ such that if $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ is a local frame over $U \subset M$ then

$$D = g^{ab} \gamma(e_a) \nabla_{e_b}^S + m \text{ over } U$$

where $m \in C^\infty(M, L(S(M)))$ is a section such that $m^* \beta = \beta m$.

We set

$$\not{D} := g^{ab} \gamma(e_a) \nabla_{e_b}^S.$$

11.7.1. *Selfadjointness of Dirac operator.* Let $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(M; S(M))$. One defines the 1-form $J(\psi_1, \psi_2) \in C^\infty(M; T^*M)$ by

$$J(\psi_1, \psi_2) \cdot X := \overline{\psi_1} \cdot \beta \gamma(X) \psi_2, X \in C^\infty(M; TM),$$

and checks using (11.11) that

$$\nabla^\mu J_\mu(\psi_1, \psi_2) = -\overline{D\psi_1} \cdot \beta \psi_2 + \overline{\psi_1} \cdot \beta D\psi_2, \psi_i \in C^\infty(M; S(M)).$$

This implies easily the following proposition.

Proposition 11.4. *The Dirac operator D is formally self-adjoint on $C_0^\infty(M; S(M))$ with respect to the Hermitian form:*

$$(11.13) \quad (\psi_1 | \psi_2)_M := \int_M \psi_1 \cdot \beta \psi_2 dVol_g.$$

11.7.2. *Conformal transformations.* We recall the well-known covariance of Dirac equations under conformal transformations see [LM, Lemma 5.27] or [Hi]. If $\tilde{g} = e^{2u}g$ for $u \in C^\infty(M)$, we then have the natural isomorphism

$$G_u : \begin{aligned} & PSO^\uparrow(M, g) \rightarrow PSO^\uparrow(M, \tilde{g}) \\ & \mathcal{F} = (e_a)_{0 \leq a \leq d} \mapsto (e^{-u} e_a)_{0 \leq a \leq d} = e^{-u} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

G_u induces an isomorphism still denoted by G_u between $Cl(M, g)$ and $Cl(M, \tilde{g})$:

$$G_u : \begin{aligned} & Cl(M, g) \rightarrow Cl(M, \tilde{g}) \\ & [\mathcal{F}, a] \mapsto [e^{-u} \mathcal{F}, a]. \end{aligned}$$

We obtain a spin structure on (M, \tilde{g}) from the one on (M, g) by

$$\begin{array}{ccc} & PSpin(M, g) & \\ & \swarrow \chi & \downarrow \tilde{\chi} := G_u \circ \chi \\ PSO^\uparrow(M, g) & \xrightarrow{G_u} & PSO^\uparrow(M, \tilde{g}) \end{array}$$

which leads to the same spinor bundles $S(M)$. Let $\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}$ be as in Subsect. 11.5 with g replaced by \tilde{g} . Clearly we have

$$\tilde{\beta} = \beta, \tilde{\kappa} = \kappa.$$

We define $\tilde{\rho} : Cl(M, \tilde{g}) \rightarrow End(S(M))$ such that the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} PSO^\uparrow(M, g) \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{G_u} & PSO^\uparrow(M, \tilde{g}) \times \mathbb{C}^N \\ & \searrow \rho & \downarrow \tilde{\rho} \\ & & End(S(M)). \end{array}$$

Considering TM as the associated bundle $TM = PSO(M, g) \times \mathbb{R}^n$ resp. $TM = PSO(M, \tilde{g}) \times \mathbb{R}^n$ leads to the map $TM \ni X \mapsto e^{-u} X \in TM$. This leads to $\tilde{\gamma}(e^{-u} X) = \gamma(X)$ hence:

$$\tilde{\gamma}(X) = e^u \gamma(X), X \in TM.$$

If $\tilde{\nabla}^S$ is the spinorial covariant derivative for \tilde{g} we have see eg [Hi, Prop. 4.2.1]:

$$\tilde{\nabla}_X \psi = \nabla_X \psi + \frac{1}{2} \gamma(X) \gamma(\text{grad}(u)) \cdot \psi - \frac{1}{2} (X \cdot du) \psi.$$

(The change of sign in the second term in the rhs in comparison with [Hi, Prop. 4.2.1] comes from our convention for $Cl(1, d)$).

Concerning the Dirac operators we have:

$$(11.14) \quad \tilde{D} = e^{-\frac{n+1}{2}u} \not{D} e^{\frac{n-1}{2}u}.$$

If we introduce the map

$$W : \psi \in C_0^\infty(M; S(M)) \mapsto e^{\frac{n-1}{2}u} \psi,$$

we have

$$(\psi_1 | W \psi_2)_{(M,g)} = (W^* \psi_1 | \psi_2)_{(M,\tilde{g})}, \quad W^* \psi = e^{-\frac{n+1}{2}u} \psi,$$

where we denote by $(\cdot | \cdot)_{(M,g)}$ resp. $(\cdot | \cdot)_{(M,\tilde{g})}$ the scalar product in (11.13) for g, β resp. $\tilde{g}, \tilde{\beta}$. It follows that (11.14) can be rewritten as

$$(11.15) \quad W^* D W = \tilde{D} + e^{-u} m.$$

12. QUANTIZATION OF THE DIRAC EQUATION ON CURVED SPACETIMES

In this section we recall the algebraic quantization of the Dirac equation on curved spacetimes, due to Dimock [D]. It is useful to start with a rather general framework see eg [DG, Sects 12.5 and 17.2]).

12.1. CAR*-algebras and quasi-free states.

Définition 12.1. *Let (\mathcal{Y}, ν) be a (complex) pre-Hilbert space. The CAR *-algebra over (\mathcal{Y}, ν) , denoted by $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$, is the unital complex *-algebra generated by elements $\psi(y), \psi^*(y)$, $y \in \mathcal{Y}$ with the relations*

$$\begin{aligned} \psi(y_1 + \lambda y_2) &= \psi(y_1) + \bar{\lambda} \psi(y_2), \\ \psi(y_1 + \lambda y_2) &= \psi(y_1) + \bar{\lambda} \psi(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y}, \lambda \in \mathbb{C} \\ \psi^*(y_1 + \lambda y_2) &= \psi^*(y_1) + \lambda \psi^*(y_2), \\ [\psi(y_1), \psi(y_2)]_+ &= [\psi^*(y_1), \psi^*(y_2)]_+ = 0, \\ [\psi(y_1), \psi^*(y_2)]_+ &= \overline{y_1} \cdot \nu y_2 \mathbf{1}, \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y} \\ \psi(y)^* &= \psi^*(y), \quad y \in \mathcal{Y}, \end{aligned}$$

where $[A, B]_+ = AB + BA$ is the anti-commutator.

12.1.1. Pure quasi-free states.

Définition 12.2. *A state on a *-algebra \mathfrak{A} is a linear map $\omega : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ which is normalized, i.e. $\omega(\mathbf{1}) = 1$, and positive, i.e. $\omega(A^*A) \geq 0$ for $A \in \mathfrak{A}$. The set of states on \mathfrak{A} is a convex set. Its extreme points are called pure states.*

Définition 12.3. *A state ω on $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ is a gauge invariant quasi-free state if*

$$\begin{aligned} \omega\left(\prod_{i=1}^n \psi^*(y_i) \prod_{j=1}^m \psi(y_j)\right) &= 0, \text{ for } n \neq m \\ \omega\left(\prod_{i=1}^n \psi^*(y_i) \prod_{j=1}^n \psi(y_j)\right) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \omega(\psi^*(y_i) \psi(y_{\sigma(i)})) \end{aligned}$$

A quasi-free state is characterized by its covariances $\lambda^\pm \in L_h(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*)$ defined by

$$\omega(\psi(y_1) \psi^*(y_2)) =: \overline{y_1} \cdot \lambda^+ y_2, \quad \omega(\psi^*(y_1) \psi(y_2)) =: \overline{y_1} \cdot \lambda^- y_2, \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$$

The following two results are well-known, see eg [DG, Sect. 17.2.2].

Proposition 12.4. *Let $\lambda^\pm \in L_h(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*)$. Then the following statements are equivalent :*

- (1) λ^\pm are the covariances of a gauge invariant quasi-free state on $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$,

(2) $\lambda^\pm \geq 0$ and $\lambda^+ + \lambda^- = \nu$.

Proposition 12.5. *A quasi-free state ω on $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ is pure if and only if there exist projections $c^\pm \in L(\mathcal{Y})$ such that*

$$\lambda^\pm = \nu \circ c^\pm, c^+ + c^- = \mathbf{1}$$

12.2. Quantization of the Dirac equation. Assume now that (M, g) is a globally hyperbolic spacetime with a spin structure. We denote by $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ the space of smooth, space compact solutions of the Dirac equation

$$D\psi = 0.$$

12.2.1. Retarded/advances inverses. Since (M, g) is globally hyperbolic, D admits unique retarded/advanced inverses $G_{\text{ret}/\text{adv}} : C_0^\infty(M; S(M)) \rightarrow C^\infty(M; S(M))$ such that

$$\begin{cases} DG_{\text{ret}/\text{adv}} = G_{\text{ret}/\text{adv}}D = \mathbf{1}, \\ \text{supp } G_{\text{ret}/\text{adv}}u \subset J_\pm(\text{supp } u), u \in C_0^\infty(M; S(M)), \end{cases}$$

where $J_\pm(K)$ is the future/past causal shadow of $K \subset M$.

Using Prop. 11.4 and the uniqueness of $G_{\text{ret}/\text{adv}}$ we obtain that

$$G_{\text{ret}/\text{adv}}^* = G_{\text{adv}/\text{ret}}$$

where the adjoint is computed with respect to $(\cdot|\cdot)_M$. Therefore, the causal propagator

$$G := G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$$

satisfies

$$\begin{cases} DG = GD = 0, \\ \text{supp } Gu \subset J(\text{supp } u), u \in C_0^\infty(M; S(M)), \\ G^* = -G, \end{cases}$$

where $J(K) = J_+(K) \cup J_-(K)$ is the causal shadow of $K \subset M$.

12.2.2. Cauchy problem. Let $\Sigma \subset M$ be a smooth, space-like Cauchy surface, n its future directed unit normal and $S(\Sigma)$ the restriction of the spinor bundle $S(M)$ to Σ . Then

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma : \text{Sol}_{\text{sc}}(D) &\longrightarrow C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma)) \\ \varphi &\longrightarrow \varphi|_\Sigma \end{aligned}$$

is surjective. Equivalently the Cauchy problem

$$\begin{cases} D\psi = 0 \\ \rho_\Sigma \psi = f, f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)) \end{cases}$$

is globally well-posed, the solution being denoted by $\psi = U_\Sigma f$. We have:

$$(12.1) \quad U_\Sigma f = - \int_\Sigma G(x, y) \gamma(n(y)) f(y) dVol_h,$$

where h is the Riemannian metric induced by g on Σ . We equip $C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma))$ with the Hermitian form

$$(12.2) \quad (f_1|f_2)_\Sigma := \int_\Sigma \overline{f_1} \cdot \beta f_2 dVol_h.$$

For $u \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$, we define $\rho_\Sigma^* u \in \mathcal{D}'(M; S(M))$ by

$$\int_M \overline{\rho_\Sigma^* u} \cdot \beta v dVol_g := \int_\Sigma \overline{u} \cdot \beta \rho_\Sigma v dVol_h, v \in C^\infty(\Sigma; S(\Sigma)),$$

The identity (12.1) can be rewritten as

$$U_\Sigma f = (\rho_\Sigma G)^* \gamma(n) f, f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)).$$

12.2.3. *Quantization of the Dirac equation.* For $\psi_1, \psi_2 \in \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ we set

$$(12.3) \quad \psi_1 \cdot \nu \psi_2 = \int_\Sigma i J_\mu(\psi_1, \psi_2) n^\mu dVol_h = (\rho_\Sigma \psi_1 | i\gamma(n) \rho_\Sigma \psi_2)_\Sigma.$$

Since $\nabla^\mu J_\mu(\psi_1, \psi_2) = 0$, the right-hand side of 12.2 is independent of the choice of Σ . From (11.10) and the uniqueness of the Cauchy problem, we obtain that ν is positive definite.

Setting

$$(12.4) \quad \bar{f}_1 \cdot \nu_\Sigma f_2 := \int_\Sigma i \bar{f}_1 \cdot \beta \gamma(n) f_2 dVol_h, f_1, f_2 \in C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma))$$

we obtain that

$$\rho_\Sigma : (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) \rightarrow (C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_\Sigma),$$

is unitary, with inverse U_Σ . We also get, see eg [D], that $G : C_0^\infty(M; S(M)) \rightarrow \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ is surjective with kernel $DC_0^\infty(M; S(M))$ and

$$G : (C_0^\infty(M; S(M))/DC_0^\infty(M; S(M)), i(\cdot|G\cdot)) \rightarrow (\text{Sol}_{\text{sc}}, \nu)$$

is unitary. Summarizing, the maps

$$(12.5) \quad (C_0^\infty(M; S(M))/DC_0^\infty(M; S(M)), i(\cdot|G\cdot)) \xrightarrow{G} (\text{Sol}_{\text{sc}}, \nu) \xrightarrow{\rho_\Sigma} (C^\infty(\Sigma, S(\Sigma)), \nu_\Sigma),$$

are unitary.

12.3. **Hadamard states for Dirac fields.** We denote by $\text{CAR}(D)$ the $*$ -algebra $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ with (\mathcal{Y}, ν) being one of the equivalent pre-Hilbert spaces in (12.5). We use the Hermitian form $(\cdot|\cdot)_M$ to pair $C_0^\infty(M, S(M))$ with $\mathcal{D}'(M; S(M))$, and to identify continuous sesquilinear forms on $C_0^\infty(M; S(M))$ with continuous linear maps from $C_0^\infty(M; S(M))$ to $\mathcal{D}'(M; S(M))$. A quasi-free state ω on $\text{CAR}(D)$ is defined by its *spacetime covariances* Λ^\pm , which satisfy

$$(12.6) \quad \begin{aligned} \Lambda^\pm : C_0^\infty(M, S(M)) &\rightarrow \mathcal{D}'(M, S(M)) \text{ are linear continuous,} \\ \Lambda^\pm &\geq 0 \text{ for } (\cdot|\cdot)_M, \\ \Lambda^+ + \Lambda^- &= iG, \\ D \circ \Lambda^\pm &= \Lambda^\pm \circ D = 0. \end{aligned}$$

Alternatively, one can define ω by its *Cauchy surface covariances* λ_Σ^\pm , which satisfy

$$(12.7) \quad \begin{aligned} \lambda_\Sigma^\pm : C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma)) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma, S(\Sigma)) \text{ are linear continuous,} \\ \lambda_\Sigma^\pm &\geq 0 \text{ for } (\cdot|\cdot)_\Sigma, \\ \lambda_\Sigma^+ + \lambda_\Sigma^- &= i\gamma(n). \end{aligned}$$

One can go from one to the other, using the following identities which are easy to prove:

$$(12.8) \quad \begin{aligned} \Lambda^\pm &= (\rho_\Sigma G)^* \lambda_\Sigma^\pm (\rho_\Sigma G), \\ \lambda_\Sigma^\pm &= (\rho_\Sigma^* \gamma(n))^* \Lambda^\pm (\rho_\Sigma^* \gamma(n)). \end{aligned}$$

By the Schwartz kernel theorem, we can identify Λ^\pm with distributional sections in $\mathcal{D}'(M \times M; S(M) \boxtimes S(M))$, still denoted by Λ^\pm .

12.3.1. *Characteristic manifold.* The principal symbol $d(x, \xi)$ of D is given by

$$d(x, \xi) = \gamma(g^{-1}(x)\xi), \quad (x, \xi) \in T^*M.$$

The characteristic manifold is $\mathcal{N} := \{(x, \xi) \in T^*M \setminus o : d(x, \xi) \text{ invertible}\}$. Since $d(x, \xi)^2 = \xi \cdot g^{-1}(x)\xi \mathbb{1}$, we have

$$\mathcal{N} = \{(x, \xi) \in T^*M \setminus o : \xi \cdot g^{-1}(x)\xi = 0\},$$

so the characteristic manifold of D is the same as the one of scalar Klein-Gordon operators.

The following notions are well-known and originate from [DH].

If $\Gamma \subset T^*M \times T^*M$ is a conic set, then one sets

$$\Gamma' = \{((x_1, \xi_1), (x_2, -\xi_2)) : ((x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2)) \in \Gamma\}.$$

The two connected components of \mathcal{N} are the *positive/negative energy shells*:

$$\mathcal{N}^\pm := \{(x, \xi) \in \mathcal{N} : \pm \xi \cdot v > 0 \text{ for } v \in T_x M \text{ future directed}\}.$$

We set

$$\mathcal{C} = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : X_1 \sim X_2\} \subset T^*M \times T^*M,$$

where we write $X_1 \sim X_2$ if $X_1, X_2 \in \mathcal{N}$ and X_1 and X_2 lie on the same integral curve of the Hamiltonian vector field H_p associated to $p(x, \xi) = \xi \cdot g^{-1}(x)\xi$.

For $X_1 \sim X_2$, we write $X_1 \succ X_2$, resp. $X_2 \prec X_1$ if X_1 comes strictly after, resp. before X_2 with respect to the natural parameter on the integral curve of H_p through X_1 and X_2 . We introduce the following subsets of \mathcal{C}

$$\mathcal{C}_F = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C} : X_1 \prec X_2\}$$

$$\mathcal{C}_{\bar{F}} = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C} : X_1 \succ X_2\}$$

$$\mathcal{C}^\pm = \{(X_1, X_2) \in \mathcal{C} : X_1 \in \mathcal{N}^\pm\}.$$

Définition 12.6. ω is a Hadamard state if

$$WF(\Lambda^\pm)' \subset \mathcal{C}^\pm.$$

The following lemma is certainly well-known.

Lemme 12.7. ω is a Hadamard state iff

$$(12.9) \quad WF(\Lambda^\pm)' \subset \mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm.$$

Proof. Let $P = D^2$, which has a scalar principal symbol equal to $\xi \cdot g^{-1}(x)\xi \mathbb{1}$, and let $E_{\text{ret/adv}}$ its retarded/advanced inverses, $E = E_{\text{ret}} - E_{\text{adv}}$. The arguments of [DH] extend to show that

$$WF(E)' \subset \{(X_1, X_2) : X_1 \sim X_2\}.$$

By uniqueness of $G_{\text{ret/adv}}$ we have $G = DE$ hence (see eg [Sa, Prop. A.7]):

$$WF(G)' \subset \{(X_1, X_2) : X_1 \sim X_2\}.$$

Since $\Lambda^+ + \Lambda^- = iG$ this implies the lemma. \square

12.3.2. *Feynman inverse.* Let ω a Hadamard state with spacetime covariances Λ^\pm . Then

$$G_F := i^{-1}\Lambda^+ + G_{\text{adv}} = i^{-1}\Lambda^- + G_{\text{ret}}$$

is a Feynman inverse of D , meaning that

$$DG_F = G_FD = \mathbb{1}, \quad WF(G_F)' = \Delta \cup \mathcal{C}_F,$$

where $\Delta = \{(X, X) : X \in T^*M \setminus o\}$ is the diagonal.

12.4. Hadamard condition for Cauchy surface covariances. The following proposition gives a sufficient condition for the Cauchy surface covariances λ_{Σ}^{\pm} to define a Hadamard state.

Proposition 12.8. *Let*

$$\lambda_{\Sigma}^{\pm} =: i\gamma(n)c^{\pm}$$

be the Cauchy surface covariances of a quasi-free state ω . Assume that c^{\pm} are continuous from $C_0^{\infty}(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$ to $C^{\infty}(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$ and from $\mathcal{E}'(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$ to $\mathcal{D}'(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$, and that for some neighborhood U of Σ in M we have

$$(12.10) \quad \text{WF}(U_{\Sigma} \circ c^{\pm})' \subset (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma, \text{ over } U \times \Sigma,$$

*where $\mathcal{F} \subset T^*M$ is a conic set with $\mathcal{F} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Then ω is a Hadamard state.*

Proof. Let Λ^{\pm} be the spacetime covariances of ω . By (12.8) $\Lambda^{\pm} = \pm i^{-1}U_{\Sigma}c^{\pm} \circ (\varrho_{\Sigma}G)$. Note that we are allowed to compose the kernels $U_{\Sigma}c^{\pm}$ and $\varrho_{\Sigma}G$ since $\varrho_{\Sigma}G : C_0^{\infty}(M; S(M)) \rightarrow C_0^{\infty}(\Sigma; S(\Sigma))$.

We have seen above that $\text{WF}(G)' \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Using also (12.10) and [H, Thm. 8.2.14] we obtain

$$(12.11) \quad \text{WF}(\Lambda^{\pm})' \subset (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times \mathcal{N} \cup (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times o \text{ over } U \times M,$$

where we recall that $o \subset T^*M$ is the zero section. Since $\Lambda^{\pm*} = \Lambda^{\pm}$ for the scalar product (11.13) we obtain that $(X, X') \in \text{WF}(\Lambda^{\pm})'$ iff $(X', X) \in \text{WF}(\Lambda^{\pm})'$. Using that $\mathcal{F} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, we then deduce from (12.11) that

$$\text{WF}(\Lambda^{\pm})' \subset \mathcal{N}^{\pm} \times \mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{N}^{\pm} \times o \cup o \times \mathcal{N}^{\pm} \text{ over } U \times M.$$

Since $\Lambda^+ - \Lambda^- = iG$ and using once more that $\text{WF}(G)' \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ and the hypothesis $\mathcal{F} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ this implies that

$$\text{WF}(\Lambda^{\pm})' \cap (\mathcal{N}^{\pm} \times o \cup o \times \mathcal{N}^{\pm}) = \emptyset,$$

which proves (12.9) over $U \times M$. To extend (12.9) to $M \times M$ we use that $D\Lambda^{\pm} = 0$ and argue as in [DH, Lemma 6.5.5]. \square

12.5. Conformal transformations. From (11.15) we get

$$G = W\tilde{G}W^*,$$

and setting

$$U : f \in C_0^{\infty}(\Sigma, S(M)_{\Sigma}) \mapsto e^{\frac{1-n}{2}u}f,$$

we obtain the following commutative diagram, with all arrows unitary :

$$\begin{array}{ccccc} (C_0^{\infty}(M; S(M))/DC_0^{\infty}(M; S(M)), i(\cdot|G\cdot)) & \xrightarrow{G} & (\text{Sol}_{\text{sc}}, \nu) & \xrightarrow{\rho_{\Sigma}} & (C^{\infty}(\Sigma, S(\Sigma)), \nu_{\Sigma}) \\ \downarrow W^* & & \downarrow W^{-1} & & \downarrow U \\ (C_0^{\infty}(M; S(M))/\tilde{D}C_0^{\infty}(M; S(M)), i(\cdot|\tilde{G}\cdot)) & \xrightarrow{\tilde{G}} & (\text{Sol}_{\text{sc}}, \tilde{\nu}) & \xrightarrow{\rho_{\Sigma}} & (C^{\infty}(\Sigma, S(\Sigma)), \tilde{\nu}_{\Sigma}) \end{array}$$

Let Λ^{\pm} be the spacetime covariances of a quasi-free state ω for D . Then

$$\tilde{\Lambda}^{\pm} = e^{-\frac{n-1}{2}u}\Lambda^{\pm}e^{\frac{n+1}{2}u}$$

are the spacetime covariances of a quasi-free state $\tilde{\omega}$ for \tilde{D} , and

$$\tilde{\lambda}_{\Sigma}^{\pm} = (U^*)^{-1}\lambda_{\Sigma}^{\pm}U^{-1},$$

are the Cauchy surface covariances of a quasi-free state $\tilde{\omega}$, if λ_{Σ}^{\pm} are the Cauchy surface covariances of a quasi-free state ω .

Clearly the Hadamard condition is preserved by conformal transformations.

13. DIRAC OPERATORS ON SPACETIMES OF BOUNDED GEOMETRY

In this section we study Dirac operators on spacetimes of bounded geometry. We first recall some definitions about Riemannian manifolds of bounded geometry and their extensions to the Lorentzian case. A useful result that we will prove is the fact that if a spacetime of bounded geometry admits a spin structure, then the spin and spinor bundles can be assumed to be of bounded geometry too.

13.1. Manifolds of bounded geometry.

13.1.1. *Riemannian manifolds of bounded geometry.* We recall that a Riemannian manifold (M, \hat{g}) is of *bounded geometry* if its injectivity radius $r_{\hat{g}}$ is strictly positive and $\nabla^k R$ are bounded tensors where R is the Riemann curvature tensor and ∇ the covariant derivative associated to \hat{g} , see eg [Sh, Appendix 1].

Since we are interested in Lorentzian manifolds (M, g) the role of a Riemannian metric \hat{g} of bounded geometry will simply be to define various function spaces, like spaces of bounded tensors, Sobolev spaces etc.

An equivalent definition (see eg [GOW, Thm. 2.2]) is as follows: let us denote by $B_n(0, 1)$ the unit ball in \mathbb{R}^n , by δ the flat metric on \mathbb{R}^n and by $\text{BT}_q^p(B_n(0, 1), \delta)$ the space of (q, p) tensors on $B_n(0, 1)$ which are bounded on $B_n(0, 1)$ together with all their derivatives.

$\text{BT}_q^p(B_n(0, 1), \delta)$ is a Fréchet space and one can hence define a bounded family of (q, p) tensors in $\text{BT}_q^p(B_n(0, 1), \delta)$. For example a family $(f_i)_{i \in I}$ of functions on $B_n(0, 1)$ is bounded if $\sup_{i \in I, x \in B_n(0, 1)} |\partial_x^\alpha f_i(x)| < \infty$ for all $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Proposition 13.1. *(M, \hat{g}) is of bounded geometry if and only if for each $x \in M$ there exists $U_x \subset M$ open neighborhood of x and*

$$\psi_x : U_x \xrightarrow{\sim} B_n(0, 1)$$

a diffeomorphism with $\psi_x(x) = 0$ such that if $\hat{g}_x := (\psi_x^{-1})^ \hat{g}$ then:*

- (1) *the family $\{\hat{g}_x\}_{x \in M}$ is bounded in $\text{BT}_2^0(B_n(0, 1), \delta)$,*
- (2) *there exists $c > 0$ such that:*

$$c^{-1} \delta \leq \hat{g}_x \leq c \delta, \quad x \in M.$$

It is known that one can find a sequence $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of points in M such that if $(U_i, \psi_i) := (U_{x_i}, \psi_{x_i})$ then $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is an atlas of M with the additional property that there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\bigcap_{i \in J} U_i = \emptyset$ if $\#J > N$. Such atlases are called *bounded atlases* of M .

The standard choice for (U_i, ψ_i) is $(B^{\hat{g}}(x_i, r), \exp_{x_i}^{\hat{g}})$ for $0 < r < r_{\hat{g}}$ ie the geodesic ball and exponential map at x_i . It follows that without loss of generality we can assume that the U_i are simply connected.

One can associate to a bounded atlas $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a partition of unity

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i^2, \quad \chi_i \in C_0^\infty(U_i),$$

such that $\{(\psi_i^{-1})^* \chi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded sequence in $C_b^\infty(B_n(0, 1))$. Such a partition of unity is called a *bounded partition of unity*.

13.1.2. *Bounded tensors, bounded differential operators, Sobolev spaces.* We recall now several definitions due to Shubin [Sh], see also [GOW, Subsect. 2.3].

If (M, \hat{g}) is a Riemannian manifold of bounded geometry, we denote by $\text{BT}_q^p(M, \hat{g})$ the space of *bounded* (q, p) tensors on M .

If $I \subset \mathbb{R}$ is an interval and \mathcal{F} is a Fréchet space whose topology is defined by the seminorms $\|\cdot\|_n$ $n \in \mathbb{N}$, we denote by $C_b^\infty(I, \mathcal{F})$ the space of maps $f : I \rightarrow \mathcal{F}$ such

that $\sup_{t \in I} \|\partial_t^p f(t)\|_n < \infty$ for all $n, p \in \mathbb{N}$. Equipped with the obvious seminorms it is itself a Fréchet space.

We will use this convention to define the spaces $C_b^\infty(I, \text{BT}_q^p(M, \hat{g}))$.

The space $\text{Diff}(M, \hat{g})$ is the space of bounded differential operators on M , i.e. differential operators which form a bounded family of differential operators on $B_n(0, 1)$ when expressed in a bounded atlas of M .

Finally we denote by $H^s(M, \hat{g})$ the Sobolev space of order $s \in \mathbb{R}$.

13.1.3. Vector bundles of bounded geometry. Let (M, g) be a Riemannian manifold of bounded geometry. We recall the definition of vector bundles of bounded geometry, see [Sh].

A vector bundle $E \xrightarrow{\pi} M$ of rank N is of *bounded geometry* if there exists a bounded covering $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of M which form a bundle atlas of E such that the transition maps $t_{ij} : U_{ij} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ are a bounded family of matrices.

The space of bounded sections of E (analog to the spaces of bounded tensors) is denoted by $C_b^\infty(M; E)$. Concretely if u is a section of E , we denote by $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^N$ its local trivializations over U_i and $u \in C_b^\infty(M; E)$ iff the family $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is bounded in $C_b^\infty(U_i; \mathbb{C}^N)$.

The notion of bounded differential operators acting on smooth sections of E is now defined as before, as is the notion of bounded Hermitian forms on (the fibers of) E .

13.1.4. Bounded Hilbert space structures. Using a partition of unity one can equip a vector bundle $E \xrightarrow{\pi} M$ of bounded geometry with a positive definite bounded Hermitian form β , (i.e. a Hilbert space structure on the fibers of E). This means that if $\beta_i : U_i \rightarrow L_h(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N*})$ are its local trivializations, then $\beta_i > 0$ and the families $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(\beta_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ are bounded in $C_b^\infty(U_i; L_h(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N*}))$ and $C_b^\infty(U_i; L_h(\mathbb{C}^{N*}, \mathbb{C}^N))$.

Any two of these bounded Hilbert space structures are equivalent, in the sense of the bounded geometry.

13.1.5. Sobolev spaces. One defines the Sobolev spaces $H^s(M; E)$ in the natural way, for example using the norm

$$\|u\|_s^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|T_i \circ \psi_i \chi_i u\|_s^2,$$

where $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded atlas, $T_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^N$ are local trivializations, $1 = \sum \chi_i^2$ is a bounded partition of unity subordinate to $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $\|\cdot\|_s$ is the usual Sobolev norm on \mathbb{R}^n .

The topology of $H^s(M; E)$ is independent of the above choices.

13.1.6. Principal bundles of bounded geometry. Similarly one can define principal bundles of bounded geometry.

Définition 13.2. Let $G \subset M_N(\mathbb{C})$ be a matrix Lie group. A G -principal bundle $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ is of bounded geometry if there exists a bounded covering $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of M which form a bundle atlas of P such that the transition maps $t_{ij} : U_{ij} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ are a bounded family of matrices.

Clearly if $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ is a principal bundle of bounded geometry and $\rho : G \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ is a matrix representation of G then the associated bundle $P \times_\rho \mathbb{C}^N$ is a vector bundle of bounded geometry.

13.1.7. Bounded frames.

Définition 13.3. If $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded atlas, a family of local frames $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of TM over U_i is called a bounded family of frames if $\mathcal{F}_i = (f_{i,a})_{0 \leq a \leq d}$ and the families $(f_{i,a})_{i \in \mathbb{N}}$ are bounded.

Of course a manifold of bounded geometry admits bounded families of frames, for example the frames associated to local normal coordinates for the reference metric \hat{g} .

13.2. Lorentzian manifolds of bounded geometry. We now recall the notion of a Lorentzian manifold (M, g) of bounded geometry, with respect to a reference Riemannian metric \hat{g} , see [GOW, Sect. 3].

Définition 13.4. Let M a manifold equipped with a reference Riemannian metric \hat{g} of bounded geometry. A Lorentzian metric g on M is of bounded geometry if $g \in \text{BT}_2^0(M, \hat{g})$ and $g^{-1} \in \text{BT}_0^2(M, \hat{g})$.

13.2.1. Bounded orthonormal frames.

Proposition 13.5. Let (M, g) a spacetime of bounded geometry, with respect to the reference Riemannian metric \hat{g} . Then (M, g) admits a bounded family of local orthonormal oriented and time oriented frames.

Proof. Let $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a bounded family of frames, $\mathcal{F}_i = (f_{i,a})_{0 \leq a \leq d}$, and $\mathbf{g}_{i,ab} = f_{i,a} g f_{i,b}$. Without loss of generality we can assume that $f_{i,0}$ is future directed. The family of matrices $(\mathbf{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is bounded.

We choose a neighborhood V_0 of η as in Lemma A.1 small enough such that $\mathbf{t} f_{i,0}$ is future directed for all $\mathbf{t} \in U_0 = F(V_0)$. We also choose $U_i = B^g(x_i, r)$ for $0 < r \ll 1$ such that $\mathbf{g}_i \in V_0$.

We set then $\mathbf{t}_i := F(\mathbf{g}_i)$, which is a bounded family of matrices, $\mathcal{E}_i := \mathcal{F}_i \mathbf{t}_i$ and $(\mathcal{E}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is then a bounded family of orthonormal oriented and time oriented frames. \square

13.3. Cauchy surfaces of bounded geometry. Let (M, g) a spacetime of bounded geometry, with respect to a reference Riemannian metric \hat{g} . If (M, g) is globally hyperbolic, then M admits Cauchy surfaces. We recall the notion of *Cauchy surfaces of bounded geometry* introduced in [GOW].

Définition 13.6. Let (M, g) be a Lorentzian manifold of bounded geometry with respect to the reference Riemannian metric \hat{g} . Assume that (M, g) is globally hyperbolic and let $\Sigma \subset M$ a smooth spacelike Cauchy hypersurface. Then Σ is called a bounded geometry Cauchy hypersurface if:

- (1) the embedding $i : \Sigma \rightarrow M$ is of bounded geometry for \hat{g} ,
- (2) if $n(y)$ for $y \in \Sigma$ is the future directed unit normal for g to Σ one has:

$$\sup_{y \in \Sigma} n(y) \cdot \hat{g}(y) n(y) < \infty.$$

We refer to [GOW, Def. 2.8] for the notion of an embedding of bounded geometry, due to [El].

If Σ is a spacelike Cauchy surface of bounded geometry, then the Gaussian normal coordinates to Σ are well adapted to the bounded geometry framework. We recall a result in this direction, see [GOW, Thm. 3.5].

Théorème 13.7. Let (M, g) a Lorentzian manifold of bounded geometry and Σ a bounded geometry Cauchy hypersurface. Then the following holds:

(1) there exists $\delta > 0$ such that the normal geodesic flow to Σ :

$$\chi :] - \delta, \delta[\times \Sigma \rightarrow M \\ (s, y) \mapsto \exp_y^g(sn(y))$$

is well defined and is a smooth diffeomorphism on its image;

(2) $\chi^*g = -ds^2 + h_s$, where $\{h_s\}_{s \in] - \delta, \delta[}$ is a smooth family of Riemannian metrics on Σ with

- i) (Σ, h_0) is of bounded geometry,
- ii) $s \mapsto h_s \in C_b^\infty(] - \delta, \delta[, \text{BT}_2^0(\Sigma, h_0))$,
- iii) $s \mapsto h_s^{-1} \in C_b^\infty(] - \delta, \delta[, \text{BT}_0^2(\Sigma, h_0))$.

We recall that the spaces $C_b^\infty(I, \text{BT}_q^p(M, \hat{g}))$ are defined in 13.1.2.

13.4. Spin structures on manifolds of bounded geometry. Let (M, g) a spacetime of bounded geometry with respect to a reference Riemannian metric \hat{g} . By Prop. 13.5 we know that the principal bundle $PSO^\uparrow(M, g)$ is of bounded geometry. Therefore the associated Clifford bundle $\text{Cl}(M, g)$ is of bounded geometry.

Assume that (M, g) admits a spin structure and let $P\text{Spin}(M, g)$ the spin bundle over M . By Prop. A.2 if $\mathbf{o}_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{SO}^\uparrow(1, d)$ are the transition maps of $PSO^\uparrow(M, g)$, we can assume that the transition maps \mathbf{s}_{ij} of $P\text{Spin}(M, g)$ satisfy $Ad(\mathbf{s}_{ij}) = \mathbf{o}_{ij}$.

Since $Ad : \text{Spin}^\uparrow(1, d) \rightarrow \text{SO}^\uparrow(1, d)$ is a two sheeted covering, the transition maps \mathbf{s}_{ij} form a bounded family of matrices and hence $P\text{Spin}(M, g)$ is a principal bundle of bounded geometry.

The associated bundle $S(M)$ is then a vector bundle of bounded geometry. If the section $m \in C^\infty(M; L(S(M)))$ is a bounded section, then the Dirac operator D defined in Def. 11.3 is a bounded differential operator.

13.4.1. The case of cartesian products. We now precise the results of Subsect. 11.6 in the bounded geometry case.

Let hence $I =] - \delta, \delta[$, (Σ, k) be a Riemannian manifold of bounded geometry and $M = I \times \Sigma$. Then setting $\hat{g} = dt^2 + k$, (M, \hat{g}) is of bounded geometry. If $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded covering for (Σ, k) and $U_i = I \times V_i$ then $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded covering for (M, \hat{g}) .

Let

$$g = -dt^2 + h_t(x)dx^2$$

be such that g is of bounded geometry with respect to \hat{g} , or equivalently that $I \ni t \mapsto h_t$ satisfies the properties in (2) of Thm. 13.7, (with h_0 replaced by k).

Since h_0 and k are equivalent as Riemannian metrics of bounded geometry (see [GOW, Subsect. 2.5] for the terminology), we can assume that $k = h_0$.

The induced spin structure on (Σ, h_0) is of bounded geometry and the restriction $S_t(\Sigma) = S(\Sigma)$ of $S(M)$ to $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ is a vector bundle of bounded geometry.

13.5. Hypotheses. In this subsection we describe the geometric framework introduced in [GOW, Sect. 3.3] that we will use in Sect. 15 to construct Hadamard states. Roughly speaking we consider spacetimes of bounded geometry with a bounded geometry Cauchy surface.

Because of the covariance of the Dirac equation under conformal transformations, our construction applies actually to a wider class of spacetimes. Let us now describe more precisely our framework.

If (M_i, g_i) , $i = 1, 2$ are two spacetimes, a *spacetime embedding* $i : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ is an isometric embedding preserving the orientation and time-orientation.

In addition, if (M_i, g_i) are globally hyperbolic, one says that i is *causally compatible* if:

$$I_{M_1}^{\pm, g_1}(U) = i^{-1}(I_{M_2}^{\pm, g_2}(i(U))), \quad \forall U \subset M_1,$$

where $I_M^{\pm, g}(K)$ denote the future/past causal shadows of $K \subset M$ for the metric g .

We fix an even dimensional globally hyperbolic spacetime (M, g) admitting a spin structure, a smooth space-like Cauchy hypersurface Σ , and a function $m \in C^\infty(M; L(S(M)))$. We assume that there exist:

- (1) a neighborhood U of Σ in M ,
- (2) a Lorentzian metric \tilde{g} on M ,
- (3) a function $\tilde{u} \in C^\infty(M; \mathbb{R})$,

such that:

(H1) $(M, e^{2\tilde{u}}\tilde{g})$ is globally hyperbolic, $Id : (U, g) \rightarrow (M, e^{2\tilde{u}}\tilde{g})$ is causally compatible,

(H2) \tilde{g} is of bounded geometry for some reference Riemannian metric \hat{g} , Σ is a Cauchy hypersurface of bounded geometry in (M, \tilde{g}) ,

(H3) $d\tilde{u}$ belongs to $BT_1^0(M, \hat{g})$,

(M) $e^{-\tilde{u}}m$ belongs to $BT_0^0(M, L(S(M)))$.

The following result is proved in [GOW, Prop. 3.7].

Proposition 13.8. *Assume hypotheses (H). Then there exist:*

- (1) an open interval I with $0 \in I$, a diffeomorphism $\chi : I \times \Sigma \rightarrow U$,
- (2) a smooth family $\{h_t\}_{t \in I}$ of Riemannian metrics on Σ with (Σ, h_0) is of bounded geometry, $t \in I \rightarrow h_t \in C_b^\infty(I; BT_2^0(\Sigma, h_0))$, $t \in I \rightarrow h_t^{-1} \in C_b^\infty(I; BT_0^2(\Sigma, h_0))$
- (3) a function $u \in C^\infty(I \times \Sigma)$, $du \in BT_1^0(I \times \Sigma, dt^2 + h_0)$,

such that

$$\chi^*g = e^{2u(t,y)}(-dt^2 + h_t(y)dy^2) \text{ on } I \times \Sigma.$$

If moreover hypothesis (M) holds then

$$e^{-u}m \circ \chi^{-1} \in C_b^\infty(I; BT_0^0(\Sigma, h_0)).$$

13.5.1. *Examples.* Many spacetimes of physical interest satisfy hypotheses (H), see [GOW, Sect. 4] for more details. For example cosmological spacetimes, Kerr and Kerr-de Sitter exterior regions, the Kerr-Kruskal extension, and double cones, wedges, and future past lightcones in Minkowski spacetime satisfy (H). In all these examples a constant mass term m satisfy hypothesis (M).

All the examples above are parallelizable, hence admit a unique spin structure.

14. PSEUDODIFFERENTIAL CALCULUS ON MANIFOLDS OF BOUNDED GEOMETRY

We refer the reader to [Sh], [Ko]. We fix a manifold M equipped with a reference Riemannian metric \hat{g} of bounded geometry and a complex vector bundle $E \xrightarrow{\pi} M$ of bounded geometry. The Shubin's calculus, introduced in [Sh], is a global pseudodifferential calculus on M , adapted to the bounded geometry defined by \hat{g} . It generalizes both the pseudodifferential calculus on a compact manifold and the uniform pseudodifferential calculus on \mathbb{R}^n .

An important result is *Seeley's theorem* proved in [ALNV], which states that if A is an elliptic, positive selfadjoint pseudodifferential operator of order m on M , then its complex powers A^z form a holomorphic family of pseudodifferential operators of order $m\text{Re}z$.

The framework generalizes easily to 'matrix valued' pseudodifferential operators, acting on sections of a bounded vector bundle. Many results go through without

changes, but some of them need more care and will be treated in some details in this section.

We will also consider *time dependent* pseudodifferential operators $A = A(t)$ depending on $t \in I$ an open interval. The framework of [ALNV] is general enough to accomodate this extension without much additional work.

14.1. Symbol classes.

14.1.1. *Symbol classes on \mathbb{R}^n .* If $U \subset \mathbb{R}^n$ is an open set, we denote by $S^m(T^*U; L(\mathbb{C}^N))$ the set of functions $a \in C^\infty(T^*U; L(\mathbb{C}^N))$ such that

$$\sup_{(x,\xi) \in T^*U} |\langle \xi \rangle^{-m+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

equipped with its Fréchet space topology.

We denote by E a continuous extension

$$E : S^m(T^*B(0, 1); L(\mathbb{C}^N)) \rightarrow S^m(T^*\mathbb{R}^n; L(\mathbb{C}^N)).$$

14.1.2. *Symbol classes on M .* We fix $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a bounded atlas of M , $t_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^N$ local trivialisations of E and $1 = \sum \chi_i^2$ a bounded partition of unity subordinate to $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

If $u \in C^\infty(U_i; E)$ resp. $a \in C^\infty(T^*U_i; L(E))$ we denote by $T_i u \in C^\infty(B(0, 1); \mathbb{C}^N)$ resp. $\tilde{T}_i a \in C^\infty(T^*B_n(0, 1); L(\mathbb{C}^N))$ the pushforward of u , resp. a obtained from ψ_i and t_i .

Définition 14.1. For $m \in \mathbb{R}$ we denote by $S^m(T^*M; L(E))$ the set of sections $a \in C^\infty(T^*M; \text{End}(E))$ such that $\{\tilde{T}_i a\}_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded family in $S^m(T^*B(0, 1); L(\mathbb{C}^N))$.

We denote by $S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))$ the subspace of poly-homogeneous symbols, which is defined as in the scalar case, see eg [GOW, Subsect. 5.2]. The space of homogeneous symbols of order m is denoted by $S_{\text{h}}^m(T^*M; L(E))$.

The spaces $S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))$ are equipped with Fréchet space topologies (although the topology of $S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))$ deserves some care, see [ALNV] or [GOW, 5.2.1]).

To ease notation these spaces will often be simply denoted by $S^m(T^*M)$, $S_{\text{ph}}^m(T^*M)$, or even S^m , S_{ph}^m .

14.1.3. *Time dependent symbols.* The notation $C_b^\infty(I; \mathcal{F})$ for I an interval and \mathcal{F} a Fréchet space was defined in 13.1.2. We use this notation to define the spaces $C_b^\infty(I; S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E)))$. For example $C_b^\infty(I; S^m(T^*\mathbb{R}^n))$ is the space of smooth functions $a : I \times T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\sup_{I \times T^*\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-m+|\beta|} |\partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t, x, \xi)| < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

14.2. **Pseudodifferential operators.** Let us fix a bounded Hilbertian structure $(\cdot | \cdot)_E$ on the fibers of E and define the scalar product

$$(u | v) = \int_M (u(x) | v(x))_E d\text{Vol}_g, \quad u, v \in C_0^\infty(M; E).$$

We denote by $L^2(M; E)$ the completion of $C_0^\infty(M; E)$ for the induced norm. Different bounded Hilbertian structures produce equivalent norms.

14.2.1. *Quantization map.* If $a \in S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))$ we set

$$\text{Op}(a)u := \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i T_i^{-1} \circ \text{Op}(E \tilde{T}_i a) \circ T_i \chi_i u, \quad u \in C_0^\infty(M; E),$$

where the maps T_i, \tilde{T}_i were defined in Subsect. 14.1, $1 = \sum_i \chi_i^2$ is a bounded partition of unity subordinate to $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and the map Op is the usual Kohn-Nirenberg quantization:

$$\text{Op}(a)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi,$$

for $a \in S^m(T^*\mathbb{R}^n; L(\mathbb{C}^N))$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$.

We use the same definition for $a(t) \in C_b^\infty(I; S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E)))$.

14.2.2. *Ideals of smoothing operators.* The quantization map Op depends of course of the choice of the atlas $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, local trivializations t_i , cutoff functions χ_i and the extension map E . If we denote by Op' another quantization map for a different choice of the above data, one has

$$\text{Op}(a) - \text{Op}'(a) \in \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E)),$$

where

$$\mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E)) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B(H^{-m}(M; E), H^m(M; E)),$$

equipped with the topology given by the seminorms

$$\|A\|_m = \|(-\Delta_{\hat{g}} + 1)^{m/2} A (-\Delta_{\hat{g}} + 1)^{m/2}\|_{B(L^2(M; E))},$$

$-\Delta_{\hat{g}}$ being the (scalar) Laplace-Beltrami operator on $(M; \hat{g})$. We will often denote $\mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$ simply by $\mathcal{W}^{-\infty}(M)$ or even $\mathcal{W}^{-\infty}$.

For time dependent symbols we have similarly

$$\text{Op}(a(t)) - \text{Op}'(a(t)) \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))),$$

where the later space is equipped with the topology given by the seminorms

$$\|A\|_{m,p} = \sup_{t \in I, k \leq p} \|\partial_t^k A(t)\|_m.$$

An important property of $\mathcal{W}^{-\infty}$ and $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty})$ is the so-called *spectral invariance* property introduced in [ALNV]. It allows to 'close' the pseudodifferential calculus with respect to the operation of taking inverses. For completeness we state this property. Its proof is exactly the same as in the scalar case, see [GOW, Lemma 5.5].

Lemma 14.2. *Let $R_{-\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$ such that $\mathbb{1} - R_{-\infty}$ is invertible in $B(L^2(M; E))$. Then*

$$(\mathbb{1} - R_{-\infty})^{-1} = \mathbb{1} - R_{1,-\infty} \text{ for } R_{1,-\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E)).$$

The same result holds replacing $\mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$ by $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E)))$ and $L^2(M; E)$ by $L^2(I; L^2(M; E))$.

Lemma 14.3. *Let $R_{-\infty} \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E)))$ such that $\mathbb{1} - R_{-\infty}$ is invertible in $B(L^2(I; L^2(M; E)))$. Then*

$$(\mathbb{1} - R_{-\infty})^{-1} = \mathbb{1} - R_{1,-\infty} \text{ for } R_{1,-\infty} \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))).$$

14.2.3. *Pseudodifferential operators.* We equip $\text{Op}(S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E)))$ by the Fréchet space topology inherited from $S_{\text{ph}}^m(M; L(E))$.

Note that $\text{Op}(S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E)))$ is not stable under composition. To obtain an algebra of operators, one has to add the ideal $\mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$.

Définition 14.4. For $m \in \mathbb{R}$ we set

$$\Psi^m(M; L(E)) := \text{Op}(S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))) + \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E)),$$

We equip $\Psi^m(M; L(E))$ with the Fréchet space topology obtained from those of $\text{Op}(S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E)))$ and $\mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$, the decomposition of $A \in \Psi^m$ as $A = \text{Op}(a) + R_{-\infty}$ being unique, once the quantization map is fixed.

We define similarly the spaces of time dependent pseudodifferential operators:

$$C_b^\infty(I; \Psi^m(M; L(E))) := C_b^\infty(I; \text{Op}(S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E)))) + C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))).$$

14.2.4. *Principal symbol.*

Définition 14.5. Let $A = \text{Op}(a) + R_{-\infty} \in \Psi^m(M; L(E))$. We denote by $\sigma_{\text{pr}}(A)$ the principal symbol of A defined as

$$\sigma_{\text{pr}}(A) := [a] \in S_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))/S_{\text{ph}}^{m-1}(T^*M; L(E)).$$

$\sigma_{\text{pr}}(A)$ is independent on the decomposition of A as $\text{Op}(a) + R_{-\infty}$ and on the choice of the good quantization map Op .

We use the analogous definition for $A \in C_b^\infty(I; \Psi^m(M, L(E)))$, the principal symbol $\sigma_{\text{pr}}(A)$ being now in $C_b^\infty(I; S_{\text{h}}^m(T^*M; L(E)))$.

As usual we choose a representative of $\sigma_{\text{pr}}(A)$ which is homogeneous of order m on the fibers of T^*M so we can assume that $\sigma_{\text{pr}}(A) \in S_{\text{h}}^m(T^*M; L(E))$.

14.2.5. *Ellipticity.*

Définition 14.6. An operator $A \in \Psi^m(M; L(E))$ is elliptic if $\sigma_{\text{pr}}(A)(x, \xi)$ is invertible for all $(x, \xi) \in T^*M$ and

$$(14.1) \quad \sup_{(x, \xi) \in T^*M, |\xi|=1} \|\sigma_{\text{pr}}(A)^{-1}(x, \xi)\| < \infty.$$

To define the norm in (14.1) we choose a bounded Hilbertian structure on the fibers of E , the definition being independent on its choice.

We use the same definition for time dependent operators $A \in C_b^\infty(I; \Psi^m(M; L(E)))$, requiring also uniformity w.r.t. $t \in I$ in (14.1).

An elliptic operator $A \in \Psi^m(M; L(E))$ has a parametrix $B \in \Psi^{-m}(M; L(E))$, unique modulo $\mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$ such that $AB - \mathbb{1}, BA - \mathbb{1} \in \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$. A parametrix of A will be denoted by $A^{(-1)}$.

The following result is well-known in the scalar case, using the existence of a parametrix, see [Ko].

Proposition 14.7. Let $A \in \Psi^m(M; L(E))$, $m \geq 0$ elliptic. Then the following holds:

- (1) A is closeable on $C_0^\infty(M; E)$ with $\text{Dom } A^{\text{cl}} = H^m(M; L(E))$.
- (2) if $0 \notin \sigma(A^{\text{cl}})$, then $A^{-1} \in \Psi^{-m}(M; L(E))$ and

$$\sigma_{\text{pr}}(A^{-1}) = (\sigma_{\text{pr}}(A))^{-1}.$$

Proof. (1) follows easily from the existence of a parametrix $A^{(-1)}$. To prove (2) we first reduce ourselves to the case $m = 0$. In fact if $Q = (-\Delta_{\hat{g}} + 1)^{-m/2}$, we know that $Q \in \Psi^{-m}$ since Prop. 14.7 is true in the scalar case (see for example [Ko]), and $QP \in \Psi^0$ is invertible.

If $P \in \Psi^0$ is invertible, we choose a sequence f_n of polynomials such that $f_n(\lambda) \rightarrow \lambda^{-1}$, uniformly on $[a, b]$ where $\sigma(P^*P) \subset [a, b]$. Then $Q_n = f_n(P^*P)P^* \in \Psi^0$ and $Q_n \rightarrow P^{-1}$ in $B(L^2(M; E))$.

Let $Q \in \Psi^0$ a parametrix of P such that $PQ - \mathbb{1} = R_{-\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}$. $P^{-1} = Q - P^{-1}R_{-\infty}$ is invertible in $B(L^2(M; E))$, hence there exists $n \gg 1$ such that $Q' = Q - Q_n R_{-\infty}$ is invertible. We have $PQ' = \mathbb{1} + R_{-\infty} - PQ_n R_{-\infty} = \mathbb{1} + R'_{-\infty}$. Since $P, Q_n \in \Psi^0$ and hence preserve Sobolev spaces, we obtain that $PQ_n R_{-\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}$ hence $R'_{-\infty} \in \mathcal{W}^{-\infty}$. Since $\mathbb{1} + R'_{-\infty} = PQ'$, $\mathbb{1} + R'_{-\infty}$ is invertible in $B(L^2(M; E))$, hence by spectral invariance we have $(\mathbb{1} + R'_{-\infty})^{-1} \in \mathcal{W}^{-\infty}$ and $P^{-1} = Q'(\mathbb{1} + R'_{-\infty})^{-1} \in \Psi^0$. The statement about principal symbols is easy since $\sigma_{\text{pr}}(P^{-1}) = \sigma_{\text{pr}}(Q') = (\sigma_{\text{pr}}(P))^{-1}$. \square

The same result is true in the time dependent case, with a similar proof.

Proposition 14.8. *Let $A(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^m(M; L(E)))$, $m \geq 0$ elliptic. Then the following holds:*

- (1) $A(t)$ is closeable on $C_0^\infty(M; E)$ with $\text{Dom } A^{\text{cl}}(t) = H^m(M; L(E))$.
- (2) if there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(A^{\text{cl}}(t)) = \emptyset$ for $t \in I$, then $A^{-1}(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^{-m}(M; L(E)))$ and

$$\sigma_{\text{pr}}(A^{-1})(t) = (\sigma_{\text{pr}}(A))^{-1}(t).$$

14.3. Functional calculus.

14.3.1. *Elliptic selfadjoint operators.* As in Subsect. 14.2 we fix a bounded Hilbertian structure $(\cdot|\cdot)_E$ on the fibers of E and define the scalar product

$$(u|v) = \int_M (u(x)|v(x))_E d\text{Vol}_g, \quad u, v \in C_0^\infty(M; E).$$

Let $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^m(M; L(E)))$ be elliptic, symmetric on $C_0^\infty(M; E)$. Using Prop. 14.7 one easily shows that its closure is selfadjoint with domain $H^m(M; E)$. Note also that its principal symbol $\sigma_{\text{pr}}(H)(t, x, \xi)$ is selfadjoint for the Hilbertian scalar product on E_x .

We now discuss some results on the functional calculus for selfadjoint pseudodifferential operators. As usual the functional calculus starts with the resolvent $(z - H)^{-1}$ and the properties of $z \mapsto (z - H)^{-1}$ can be obtained by considering pseudodifferential operators depending on some large parameter.

14.3.2. *Pseudodifferential operators with parameters.* Let (M, \hat{g}) be of bounded geometry and $E \xrightarrow{\pi} M$ a vector bundle over M of bounded geometry. We first discuss pseudodifferential operators on M depending on some large parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

We denote by $\tilde{S}^m(T^*M; L(E))$ the space of symbols $b \in C^\infty(\mathbb{R} \times T^*M; L(E))$ such that if $b_i(\lambda) = T_i b(\lambda)$ are the pushforwards of $b(\lambda)$ associated to a covering $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (see 14.1.2), we have:

$$\partial_\lambda^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_i(\lambda, x, \xi) \in O(\langle \xi \rangle + \langle \lambda \rangle)^{m - |\beta| - \gamma}, \quad (\lambda, x, \xi) \in \mathbb{R} \times T^*B(0, 1)$$

uniformly with respect to $i \in \mathbb{N}$. We denote by $\tilde{S}_h^m(T^*M; L(E))$ the subspace of such symbols which are homogeneous w.r.t. (λ, ξ) and by $\tilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))$ the subspace of polyhomogeneous symbols.

We define $\text{Op}(b)u$ for $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_\lambda \times M; E)$ by:

$$\text{Op}(b)u(\lambda) := \text{Op}(b(\lambda))u(\lambda).$$

We define $\tilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(M; L(E))$ as the set of smooth functions $b : \mathbb{R} \times \lambda \mapsto b(\lambda) \in \mathcal{W}^{-\infty}(M; L(E))$ such that

$$\|\partial_\lambda^\gamma b(\lambda)\|_{B(H^{-m}(\Sigma), H^m(\Sigma))} \in O(\langle \lambda \rangle^{-n}), \quad \forall, m, n, \gamma \in \mathbb{N},$$

and set

$$\widetilde{\Psi}^m(M; L(E)) := \text{Op}(\widetilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))) + \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(M; L(E)).$$

We also define the time dependent versions of the above spaces:

$$C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))), C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(M; L(E))), C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^m(M; L(E))).$$

We define the *principal symbol* of $A(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^m(M; L(E)))$ as in 14.2.4, using the polyhomogeneity.

An operator $A(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^m(M; L(E)))$ is *elliptic* if $\sigma_{\text{pr}}(A)(t)$ is invertible for $t \in I$ and $\sigma_{\text{pr}}(A)^{-1}(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{S}_{\text{ph}}^{-m}(M; L(E)))$.

Proposition 14.9. *Let $H(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; \Psi^1(M; L(E)))$ elliptic and formally selfadjoint. Let us still denote by $H(t)$ its closure, which is selfadjoint on $H^1(M; E)$ by Prop. 14.8. Assume that there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H(t)) = \emptyset$ for $t \in I$.*

Then $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto (H(t) + i\lambda)^{-1}$ belongs to $C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^{-1}(M; L(E)))$ with principal symbol $(\sigma_{\text{pr}}(H(t)) + i\lambda)^{-1}$.

Proof. We will use arguments similar to those used in [GW2, Appendix A.1], reducing ourselves to the situation without parameters.

Step 1. we introduce a variable l dual to λ and equip $\widetilde{M} = \mathbb{R}_l \times M$ with the metric $\widetilde{g} = dl^2 + \hat{g}$. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ is of bounded geometry, so we can define the spaces $S_{\text{ph}}^m(T^*\widetilde{M}; L(E))$.

As bounded atlas of \widetilde{M} we can take $\widetilde{U}_i = \mathbb{R} \times U_i$, $\widetilde{\psi}_i(l, x) = (l, \psi_i(x))$ for $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a bounded atlas of M , and as bounded partition of unity on \widetilde{M} a bounded partition of unity on M .

This implies that the quantization map $\widetilde{\text{Op}}$ obtained from such choices is the usual quantization on \mathbb{R} in the variables (l, s) , tensorized with the quantization map Op on M .

The appropriate ideal of smoothing operators, dictated by the definition of $\widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(M; L(E))$ is now

$$\widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\widetilde{M}; L(E)) = \{A : \text{ad}_l^n A \in B(H^{-m}(\widetilde{M}), H^m(\widetilde{M})), \forall m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Note that this ideal is smaller than the one defined in 14.2.2 (with M replaced by \widetilde{M}) because of the additional control on the multicommutators $\text{ad}_l^n A$.

We define then

$$\widetilde{\Psi}^m(\widetilde{M}, L(E)) = \widetilde{\text{Op}}(S_{\text{ph}}^m(T^*\widetilde{M}; L(E))) + \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\widetilde{M}; L(E)).$$

As is now usual we introduce also the time dependent versions $C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^m(\widetilde{M}, L(E)))$ etc.

Step 2. we study the link between $C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^m(\widetilde{M}; L(E)))$ and $C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{\Psi}^m(M; L(E)))$. We note first that

$$C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))) = \{b(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; S_{\text{ph}}^m(T^*\widetilde{M}; L(E))) : \partial_l b(t) = 0\},$$

and denoting by T_l the group of translations in l , we have:

$$[T_l, \widetilde{\text{Op}}(b)(t)] = 0 \forall l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*M; L(E))).$$

Equivalently, if $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, dl) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, d\lambda)$ is the unitary Fourier transform in l , we have

(14.2)

$$\begin{aligned} & b(t) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; S_{\text{ph}}^m(T^*\widetilde{M}; L(E))), [T_l, \widetilde{\text{Op}}(b)(t)] = 0 \forall l \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{F}\widetilde{\text{Op}}(b)(t)\mathcal{F}^{-1} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \text{Op}(b(t, \lambda))d\lambda, \text{ for } b(t, \cdot) \in C_{\text{b}}^{\infty}(I; \widetilde{S}^m(T^*M; L(E))). \end{aligned}$$

As in [GW2, Appendix A.1] we prove similarly that

$$(14.3) \quad \begin{aligned} w(t) &\in C_b^\infty(I; \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\widetilde{M}; L(E))), [w(t), T_\lambda] = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{F}w(t)\mathcal{F}^{-1} &= \int_{\mathbb{R}}^\oplus w(t, \lambda) d\lambda \text{ for } w(t, \cdot) \in C_b^\infty(I; \widetilde{\mathcal{W}}(M; E)). \end{aligned}$$

Step 3. conjuguating by \mathcal{F} , we consider the operator $A(t) = H(t) + iD_t$, which is elliptic in $C_b^\infty(I; \Psi^1(\widetilde{M}; L(E)))$. Its closure is a normal operator with domain $H^1(\widetilde{M}; E)$ and by assumption there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(A(t)) = \emptyset$.

We check the spectral invariance of the ideal $C_b^\infty(I; \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\widetilde{M}; L(E)))$ as in [GW2, Appendix A.1]. We can hence apply the abstract results in [ALNV]. We obtain that $A(t)^{-1} \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1}(\widetilde{M}; L(E)))$ with principal symbol $(\sigma_{\text{pr}}(H(t)) + i\lambda)^{-1}$. Moreover since $[A(t), T_t] = 0$ we also obtain that $[A(t)^{-1}, T_t] = 0$. We have

$$\mathcal{F}A(t)\mathcal{F}^{-1} = \int_{\mathbb{R}}^\oplus (H(t) + i\lambda) d\lambda,$$

and hence

$$\mathcal{F}A(t)^{-1}\mathcal{F}^{-1} = \int_{\mathbb{R}}^\oplus (H(t) + i\lambda)^{-1} d\lambda.$$

By Step 2 we obtain that $\lambda \mapsto (H(t) + i\lambda)^{-1}$ belongs to $C_b^\infty(I; \widetilde{\Psi}^{-1}(M; L(E)))$, with principal symbol $(\sigma_{\text{pr}}(H(t)) + i\lambda)^{-1}$. \square

Let us now prove a useful consequence of Prop. 14.9.

Proposition 14.10. *Let $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^1(M; L(E)))$ be elliptic, symmetric on $C_0^\infty(M; E)$, and let us denote still by $H(t)$ its closure. Assume that there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H(t)) = \emptyset$ for $t \in I$. Then the spectral projections $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$ belong to $C_b^\infty(I; \Psi^0(M; L(E)))$ and*

$$\sigma_{\text{pr}}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\sigma_{\text{pr}}(H(t))).$$

Proof. Since $(H^2 + \lambda^2)^{-1} = (H + i\lambda)^{-1}(H - i\lambda)^{-1}$, we obtain from Prop. 14.9 that $\lambda \mapsto (H^2(t) + \lambda^2)^{-1}$ belongs to $C_b^\infty(I; \widetilde{\Psi}^{-2}(M; L(E)))$, with principal symbol $(\sigma_{\text{pr}}H(t)^2 + \lambda^2)^{-1}$. Using

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (a + s^2)^{-1} ds, \quad a > 0$$

we obtain that $|H(t)|^{-1} \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1}(M; L(E)))$ with principal symbol $|\sigma_{\text{pr}}(H)(t)|^{-1}$. We write then $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \frac{H}{|H|})$ to obtain the proposition. \square

15. PURE HADAMARD STATES FOR DIRAC FIELDS

In this section we prove the main result of this paper, namely the construction of pure Hadamard states for Dirac fields on globally hyperbolic spacetimes of bounded geometry. We will work in the framework described in Subsect. 13.5.

15.1. Reduction of Dirac operators on cartesian products. Let D be a Dirac operator on the spacetime (M, g) considered in 13.4.1, ie $M = I \times \Sigma$ and $g = -dt^2 + h_t(x)dx^2$.

We will denote by (x, k) local coordinates on $T^*\Sigma$, and by $(x, \xi) = ((t, x), (\tau, k))$ local coordinates on T^*M .

We recall that the restriction $S_t(\Sigma)$ of the spinor bundle $S(M)$ to Σ_t is independent on t and denoted by $S(\Sigma)$.

We recall also that $S(M)$ is equipped by a Hermitian form β , see 11.5.2 and we denote by β_t its restriction to $S(\Sigma)$. Also we denote by $\gamma_t : T_{\Sigma_t}M \rightarrow L(S(\Sigma))$ the restrictions of γ to $S(\Sigma)$.

We first simplify the Dirac operator D using parallel transport by ∂_t for the spin connection.

For $f \in C^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma))$ we denote by $\mathcal{T}(s)f = \psi$ the solution of

$$(15.1) \quad \begin{cases} \nabla_{\partial_t}^S \psi = 0 \text{ in } I \times \Sigma \\ \psi|_{\Sigma_s} = f, \end{cases}$$

and set

$$(15.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}(t, s)f &= \mathcal{T}(s)f|_{\Sigma_t}, \\ \mathcal{T} : C^\infty(I; C^\infty(\Sigma, S(\Sigma))) &\rightarrow C^\infty(M; S(M)) \\ \psi(t) &\mapsto (\mathcal{T}\psi)(t) = |h_t|^{-\frac{1}{4}}|h_0|^{\frac{1}{4}}\mathcal{T}(t, 0)\psi(t), \end{aligned}$$

Lemma 15.1. *One has*

- (1) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_0)\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_0)$, $t, s \in I$.
- (2) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_a(t))\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_a(s))$, $t, s \in I$.
- (3) $\mathcal{T}(t, s)^*\beta_t\mathcal{T}(t, s) = \beta_s$, $t, s \in I$.

Proof. Since $\nabla_{e_0}e_a = 0$, we obtain using (11.11) *i*) that

$$\nabla_{e_0}^S \gamma(e_a)\mathcal{T}(s)f = \gamma(e_a)\nabla_{e_0}^S \mathcal{T}(s)f = 0,$$

hence

$$\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_0)\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_0), \quad \mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_a(t))\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_a(s))$$

as claimed. Similarly using (11.11) *ii*) we have

$$\partial_t(\overline{\mathcal{T}(t, s)f}) \cdot \beta_t \mathcal{T}(t, s)f = \overline{\nabla_{e_0}^S \mathcal{T}(s)f} \cdot \mathcal{T}(s)f + \overline{\mathcal{T}(t, s)f} \cdot \beta_t \nabla_{e_0}^S \mathcal{T}(t, s)f = 0,$$

which proves (3). \square

Proposition 15.2. *Let*

$$\mathcal{D} := \mathcal{T}^{-1}(\gamma(e_0)D)\mathcal{T},$$

and

$$\overline{\tilde{\psi}} \cdot \tilde{\nu} \tilde{\psi} := i \int_{\Sigma} \overline{\tilde{\psi}} \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) \tilde{\psi} |h_0|^{\frac{1}{2}} dx$$

Then

- (1) *the map*

$$\mathcal{T} : (\text{Sol}_{\text{sc}}(\mathcal{D}), \tilde{\nu}) \xrightarrow{\sim} (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$$

is unitary.

- (2) *We have*

$$\mathcal{D} = \partial_t - iH(t),$$

where $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^1(\Sigma, S(\Sigma)))$,

$$(15.3) \quad \sigma_{\text{pr}}(H(t))(x, k) = -\gamma_0(e_0)\gamma_0(h_t(x)^{-1}k)$$

and $H(t)$ is formally selfadjoint for the scalar product

$$\overline{f} \cdot \tilde{\nu} f := i \int_{\Sigma} \overline{f} \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) f |h_0|^{\frac{1}{2}} dx.$$

Proof. (1) is obvious since $\mathcal{T}(0, 0) = \mathbb{1}$. Let us now prove (2). From (15.1) we obtain

$$(15.4) \quad \mathcal{T}\partial_t\mathcal{T}^{-1} = \nabla_{e_0}^S - \frac{1}{4}\partial_t|h_t||h_t|^{-1}.$$

If we fix a local oriented and time oriented orthonormal frame $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ over some open set $U = I \times V$, we have

$$D = -\gamma(e_0)\nabla_{e_0}^S + \gamma(e_a)\nabla_{e_a}^S + m,$$

(where we sum only for $1 \leq a \leq d$), and

$$(15.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}\gamma(e_0)D\mathcal{T} &= \partial_t - iH(t), \\ H(t) &= i\mathcal{T}^{-1}(\gamma_t(e_0)\gamma_t(e_a(t))\nabla_{e_a(t)}^S + \gamma_t(e_0)m)\mathcal{T} + \frac{1}{4}\partial_t|h_t||h_t|^{-1}. \end{aligned}$$

Let us now prove the properties of $H(t)$ stated in (2). Let us first consider the operator

$$\tilde{H}(t) = i\gamma_t(e_0)\gamma_t(e_a(t))\nabla_{e_a(t)}^S + i\gamma_t(e_0)m$$

appearing in (15.5).

We fix a bounded atlas $(V_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of (Σ, h_0) and set $U_i = I \times V_i$. We use the local frames $\mathcal{E}_i = (e_{i,a})_{0 \leq a \leq d}$ as in Subsect. 11.6, and the spin frames $\mathcal{B}_i = (E_{i,A})_{1 \leq A \leq N}$ associated to the frames \mathcal{E}_i over U_i . The family $(\mathcal{E}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ resp. $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a bounded family of frames of TM , resp. $S(M)$ over U_i .

An easy computation shows that $\Gamma_{ab}^c = \nabla_{e_a} e_b \cdot e^c$ belongs to $C_b^\infty(I \times V)$, and if we reintroduce the index i and set $V = V_i$, then the seminorms of Γ_{ab}^c in $C_b^\infty(I \times V)$ are uniform with respect to $i \in \mathbb{N}$. Using the expression (11.12) of ∇^S in the spin frames \mathcal{B}_i we obtain that $\tilde{H}(t) \in C_b^\infty(I; \text{Diff}^1(\Sigma_t; L(S(\Sigma))))$.

Let us now consider the maps $\mathcal{T}(t, s)$. Let us again forget the index i and denote by $\psi \in \mathbb{C}^N$ the components of ψ in the frame \mathcal{B} . Then from (11.12), we have:

$$\nabla_{e_0}^S \psi = \partial_t \psi + \frac{1}{4} \Gamma_{0b}^a \gamma_a \gamma^b \psi.$$

Using elementary bounds on solutions of linear differential equations, we conclude that $I^2 \ni (t, s) \mapsto \mathcal{T}(t, s) \in L(S(\Sigma_s), S(\Sigma))$ belongs to $C_b^\infty(I^2; L(S(\Sigma), S(\Sigma)))$.

This implies that $H(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^1(\Sigma, S(\Sigma)))$. Its principal symbol is clearly given by (15.3).

We know that if $D\psi = 0$ then

$$\int_{\Sigma} \bar{\psi}(t) \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) \psi(t) |h_t|^{\frac{1}{2}} dx$$

is independent on t , hence if $\tilde{\psi} = \mathcal{T}^{-1}\psi$ we obtain using Lemma 15.1 that

$$\int_{\Sigma} \bar{\tilde{\psi}}(t) \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) \tilde{\psi}(t) |h_0|^{\frac{1}{2}} dx$$

is independent on t . This implies that $H(t) = H^*(t)$ on $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ for the scalar product $\tilde{\nu}$. \square

15.2. Model case. In the previous section we have reduced the Dirac equation to the equation:

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0,$$

for $H(t)$ as in Prop. 15.2. The space $C_0^\infty(I \times \Sigma; S(\Sigma))$ is equipped with the Hilbertian scalar product

$$\bar{\psi} \cdot \nu \psi = \int_{I \times \Sigma} \bar{\psi} \cdot \beta_0 \psi dt |h_0|^{\frac{1}{2}} dx,$$

while $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ is equipped with

$$\bar{f} \cdot \nu f = \int_{\Sigma} \bar{f} \cdot \beta_0 f |h_0|^{\frac{1}{2}} dx.$$

Adjoints of operators will always be computed with respect to these scalar products. Our reference Hilbert space is

$$\mathcal{H} = L^2(\Sigma; S(\Sigma)),$$

equal to the completion of $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ for ν . As in 14.3.1 $H(t)$ with domain $H^1(\Sigma, S(\Sigma))$ is selfadjoint on \mathcal{H} .

We will need later to consider the spectral projections $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$, which can be singular if $0 \in \sigma(H(t))$. In the next lemma we show how to modify $H(t)$ by a time-dependent smoothing operator to avoid this problem.

Lemma 15.3. *There exists $R_{-\infty} \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma)))$ with $R_{-\infty}(t) = R_{-\infty}(t)^*$ such that*

$$\sigma(H(t) + R_{-\infty}(t)) \cap [-1, 1] = \emptyset, \quad t \in I.$$

Proof. Let us forget the parameter t to ease notation. Using the principal symbol of $H(t)$ and the Clifford relations we obtain that $H^*H = h_2 + R_1$, where $h_2 \in \Psi^2(\Sigma, S(\Sigma))$ is a scalar selfadjoint operator with principal symbol $k \cdot h_t(x)k$ and $R_1 \in \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma))$.

Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ a cutoff function equal to 1 near 0 and $\chi_\lambda = \chi(\lambda^{-2}h_2)$. If $H_\lambda = H + i\lambda\chi_\lambda\gamma_0$, then $H_\lambda^* = H_\lambda$ and

$$\begin{aligned} H_\lambda^*H_\lambda &= H^*H + \lambda^2\chi_\lambda^2 + i\lambda(\chi_\lambda\gamma_0H + H\chi_\lambda\gamma_0) \\ &= H^*H + \lambda^2\chi_\lambda^2 + \lambda[H, \chi_\lambda]\gamma_0 + \chi_\lambda(H\gamma_0 + \gamma_0H). \end{aligned}$$

Since χ_λ is scalar, $[H, \chi_\lambda] \in \Psi^0$ with $\|[H, \chi_\lambda]\| \in O(1)$ uniformly for $\lambda \gg 1$ and using the Clifford relations $H\gamma_0 + \gamma_0H \in \Psi^0$. Therefore we have

$$H_\lambda^*H_\lambda = h_2 + \lambda^2\chi(\lambda^{-2}h_2) + R_1 + \lambda R_0(\lambda),$$

where $R_1 \in \Psi^1$ and $\|R_0(\lambda)\| \in O(1)$. For λ large enough we have $h_2 + \lambda^2\chi^2(\lambda^{-2}h_2) \geq \frac{1}{2}(h_2 + \lambda^2)$. Since $R_1 \geq -\epsilon h_2 - C\epsilon^{-1}$ for all $\epsilon > 0$ can pick λ large enough so that $H_\lambda^*H_\lambda \geq 2$ and hence $[-1, 1] \cap \sigma(H_\lambda) = \emptyset$. To finish the proof we note that $\chi_\lambda\gamma_0 \in \mathcal{W}^{-\infty}$. \square

15.2.1. *Unitary group.* Let us denote by $\mathcal{U}(t, s)$, $s, t \in I$ the unitary evolution generated by $H(t)$, ie the solution of

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}(t, s) = iH(t)\mathcal{U}(t, s), \\ \partial_s \mathcal{U}(t, s) = -i\mathcal{U}(t, s)H(s), \\ \mathcal{U}(s, s) = \mathbb{1}. \end{cases}$$

The properties of $H(t)$ imply that $\mathcal{U}(t, s)$ is well-defined by a classical result of Kato, see for example [SG]. For later use, let us first prove an easy result.

Lemma 15.4. *$\mathcal{U}(t, s)$ are uniformly bounded in $B(H^m(\Sigma; S(\Sigma)))$ for $t, s \in I$, $m \in \mathbb{R}$.*

Proof. Let $\epsilon = (-\Delta_{h_0} + 1)^{\frac{1}{2}}$. For $u \in \epsilon^m C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ we set $f(t) = \|\mathcal{U}(s, t)\epsilon^m \mathcal{U}(t, s)\epsilon^{-m}u\|$, which is finite since $\mathcal{U}(t, s)$ preserves $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$. We have

$$\begin{aligned} |f'(t)| &\leq \|\mathcal{U}(s, t)[H(t), i\epsilon^m]\mathcal{U}(t, s)\epsilon^{-m}u\| \\ &\leq \|\mathcal{U}(s, t)[H(t), i\epsilon^m]\epsilon^{-m}\mathcal{U}(t, s)\|f(t) \leq Cf(t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

By Gronwall's inequality we obtain that $f(t) \leq Cf(s)$ for $t, s \in I$ hence

$$\|\mathcal{U}(s, t)\epsilon^m \mathcal{U}(t, s)\epsilon^{-m}u\| \leq C\|u\|, \quad u \in \epsilon^m C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)),$$

which proves the lemma since $\epsilon^m C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ is dense in $L^2(\Sigma; S(\Sigma))$. \square

15.3. Some preparations. We start by describing a concise framework to solve recursive equations that are often encountered in symbolic calculus. A similar method was used in [GW1, Lemma A.1].

Définition 15.5. For $p \in \mathbb{N}$ we denote by \mathcal{F}_{-p} the set of maps

$$F : C_b^\infty(I; \Psi^{-1}(\Sigma; S(\Sigma))) \rightarrow C_b^\infty(I; \Psi^{-p}(\Sigma; S(\Sigma))) \text{ such that}$$

$$F(R_1) - F(R_2) \in C_b^\infty(I; \Psi^{-p-j}(\Sigma; S(\Sigma))) \text{ if } R_1 - R_2 \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1-j}(\Sigma; S(\Sigma))).$$

One can call an element of \mathcal{F}_{-p} a *symbolic contraction* of order p . The following proposition is proved exactly as [GW1, Lemma A.1].

Proposition 15.6. Let $A \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1}(\Sigma; S(\Sigma)))$ and $F_{-2} \in \mathcal{F}_{-2}$. Then there exists a solution $R \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1}(\Sigma; S(\Sigma)))$, unique modulo $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma)))$ of the equation:

$$R = A + F_{-2}(R) \text{ mod } C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma))).$$

Proof. Let us denote F_{-2} simply by F and $C_b^\infty(I; \Psi^p(\Sigma; S(\Sigma)))$ simply by Ψ^p . We set $S_0 = A$, $S_n = A + F(S_{n-1})$ for $n \geq 1$. We have $S_1 - S_0 = F(A)$ and $S_n - S_{n-1} = F(S_{n-1}) - F(S_{n-2})$. Since $F \in \mathcal{F}_{-2}$ we obtain by induction that $S_n - S_{n-1} \in \Psi^{-(n+1)}$. We take $R \in \Psi^{-1}$ such that $R \sim S_0 + \sum_0^\infty S_n - S_{n-1}$ which solves the equation modulo $\Psi^{-\infty}$. If R_1, R_2 are two solutions then $R_1 - F_2 = F(R_1) - F(R_2)$ modulo $\Psi^{-\infty}$ hence using that $F \in \mathcal{F}_{-2}$ we obtain by induction on n that $R_1 - R_2 \in \Psi^{-n}$ for all $n \in \mathbb{N}$ which proves uniqueness modulo $\Psi^{-\infty}$. \square

An element of \mathcal{F}_{-p} will be denoted by F_{-p} . Let us collect some easy properties.

Lemme 15.7. (1) If $A \in C_b^\infty(I; \Psi^k(\Sigma; S(\Sigma)))$ and $F_{-p} \in \mathcal{F}_{-p}$ then the maps

$$AF_{-p} : R \mapsto AF_{-p}(R)$$

$$F_{-p}A : R \mapsto F_{-p}(R)A$$

belong to \mathcal{F}_{-p+k} for $k \leq p$.

(2) If $F_{-p_i} \in \mathcal{F}_{-p_i}$ then the map

$$F_{-p_1}F_{-p_2} : R \mapsto F_{-p_1}(R)F_{-p_2}(R)$$

belongs to $\mathcal{F}_{-p_1-p_2}$.

(3) the map $R \rightarrow R^p$ belongs to \mathcal{F}_{-p} for $p \in \mathbb{N}$.

(4) the map $R \mapsto e^R$ belongs to \mathcal{F}_0 .

(5) one has $e^R = 1 + R + F_{-2}(R)$, where $F_{-2} \in \mathcal{F}_{-2}$.

Proof. (1) and (2) are easy. Since the identity map belongs to \mathcal{F}_{-1} , (3) follows from (2). If $R \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1})$ then $e^R = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} R^n$ as a norm convergent series. Since $R^n \in C_b^\infty(I; \Psi^{-n})$, we obtain that $e^R \in C_b^\infty(I; \Psi^{-0})$. Next we write

$$e^{R_1} - e^{R_2} = \int_0^1 e^{\theta R_1} (R_1 - R_2) e^{(1-\theta)R_2} d\theta.$$

This implies that $e^{R_1} - e^{R_2} \in C_b^\infty(I; \Psi^{-j})$ if $R_1 - R_2 \in C_b^\infty(I; \Psi^{-j})$ and proves (4). We have also

$$e^R = \mathbb{1} + R + \int_0^1 (1-\theta)R^2 e^{\theta R} d\theta.$$

By (3) the map $R \mapsto R^2$ belongs to \mathcal{F}_{-2} and by (4) the map $R \mapsto e^{\theta R}$ belongs to \mathcal{F}_0 . This implies (5), using (2). \square

15.4. Construction of some projections.

Proposition 15.8. *There exists time-dependent projections $\tilde{P}^\pm \in C_b^\infty(I; \Psi^0(\Sigma, L(S(\Sigma))))$ such that:*

- (1) $\tilde{P}^\pm(t) = \tilde{P}^\pm(t)^*, \tilde{P}^+(t) + \tilde{P}^-(t) = \mathbb{1}$;
- (2) $\mathcal{U}(t, s)\tilde{P}^\pm(s) = \tilde{P}^\pm(t)\mathcal{U}(t, s) + R_{-\infty}^\pm(t, s)$,
where $R_{-\infty}^\pm(t, s) \in C_b^\infty(I^2; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$;
- (3) $\text{WF}(\mathcal{U}(\cdot, s)\tilde{P}^\pm(s))' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma$, for $\mathcal{F} = \{k = 0\} \subset T^*M$.

Proof. The construction of \tilde{P}^\pm is divided in several steps.

Step 1. In the first step we replace $H(t)$ by $\tilde{H}(t) = H(t) + R_{-\infty}(t)$ so that $[-1, 1] \cap \sigma(\tilde{H}(t)) = \emptyset$, using Lemma 15.3. Let $\tilde{\mathcal{U}}(t, s)$ the unitary group with generator $\tilde{H}(t)$. From Lemma 15.4 and Duhamel's formula we obtain easily that $\tilde{\mathcal{U}}(t, s) - \mathcal{U}(t, s) \in C_b^\infty(I^2; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$, so denoting $\tilde{H}(t)$ again by $H(t)$ we can assume without loss of generality that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H(t)) = \emptyset$ for $t \in \mathbb{R}$.

By Prop. 14.10 the projections

$$P^\pm(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$$

are well defined, selfadjoint with $P^\pm(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ and

$$(15.6) \quad \sigma_{\text{pr}}(P^\pm)(t, x, k) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\sigma_{\text{pr}}(H)(t, x, k)).$$

Since $\sigma_{\text{pr}}(H(t, x, k)) = -\gamma_0\gamma(h_t^{-1}(x)k)$, we obtain using the Clifford relations that:

$$\sigma_{\text{pr}}(P^\pm)(t, x, k)\sigma_{\text{pr}}(H(t, x, k)) = \pm\epsilon(t, x, k)\sigma_{\text{pr}}(P^\pm)(t, x, k),$$

for $\epsilon(t, x, k) = (k \cdot h_t^{-1}(x)k)^{\frac{1}{2}}$. By symbolic calculus this implies that

$$(15.7) \quad P^\pm(t)H(t) = \pm\epsilon(t, x, D_x)P^\pm(t) + R_0^\pm(t),$$

where $R_0^\pm(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$.

Of course $\mathcal{U}(t, s)P^\pm(s) \neq P^\pm(t)\mathcal{U}(t, s)$ but we can try to modify $P^\pm(t)$ so that the equality holds, at least up to a smooth error term.

Step 2. In the second step, we modify $P^\pm(t)$. To this end let $R(t) \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ with $R(t) = R^*(t)$ and let us set

$$\tilde{\mathcal{U}}(t, s) := e^{iR(t)}\mathcal{U}(t, s)e^{-iR(s)}.$$

This is a strongly continuous unitary group with generator:

$$\tilde{H}(t) = e^{iR(t)}H(t)e^{-iR(t)} + i^{-1}\partial_t e^{iR(t)}e^{-iR(t)}.$$

The equation

$$\tilde{\mathcal{U}}(t, s)P^\pm(s) = P^\pm(t)\tilde{\mathcal{U}}(t, s)$$

is equivalent to

$$(15.8) \quad \partial_t P^\pm(t) + [P^\pm(t), i\tilde{H}(t)] = 0,$$

and implies that if

$$(15.9) \quad \tilde{P}^\pm(t) = e^{-iR(t)}P^\pm(t)e^{iR(t)}$$

one has

$$(15.10) \quad \tilde{P}^\pm(t) = \tilde{P}^\pm(t)^*, \mathcal{U}(t, s)\tilde{P}^\pm(s) = \tilde{P}^\pm(t)\mathcal{U}(t, s), t, s \in I.$$

Step 3. In the third step we solve equation (15.8) for R , modulo a smoothing error. For ease of notation we denote simply by A a time-dependent pseudodifferential operator $A(t)$.

Let $R \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1})$. By Lemma 15.7 (5) we have $\partial_t e^{iR} = i\partial_t R + F_{-2}(R)$, $e^{-iR} = \mathbb{1} + F_{-1}(R)$ hence

$$i^{-1}\partial_t(e^{iR})e^{-iR} = \partial_t R + F_{-2}(R) = F_{-1}(R).$$

Using again Lemma 15.7 (5) we also obtain

$$e^{iR}He^{-iR} = H + [R, iH] + F_{-1}(R)$$

and hence

$$(15.11) \quad \tilde{H} = H + [R, iH] + F_{-1}(R).$$

We will look for R of the form

$$(15.12) \quad R = T(S) = P^+SP^- + P^-S^*P^+, \quad S \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1}).$$

Note that if $F_{-p} \in \mathcal{F}_{-p}$ then the map $S \mapsto F_{-p}(T(S))$ belongs also to \mathcal{F}_{-p} (note that the map $S \mapsto S^*$ belongs to \mathcal{F}_{-1}).

We can now solve the equation (15.8) modulo a smoothing error. Since P^\pm are projections we have

$$\begin{aligned} & \partial_t P^\pm + [P^\pm, i\tilde{H}] \\ &= P^+(\partial_t P^\pm + [P^\pm, i\tilde{H}])P^- + P^-(\partial_t P^\pm + [P^\pm, i\tilde{H}])P^+. \end{aligned}$$

Since the second term in the rhs above is the adjoint of the first, and since (15.8) for P^+ implies (15.8) for P^- , it suffices to solve

$$(15.13) \quad P^+(\partial_t P^+ + [P^+, i\tilde{H}])P^- = 0,$$

a modulo smoothing error. Using (15.11) we obtain since $[P^\pm, H] = 0$:

$$\begin{aligned} & P^+ \left(\partial_t P^+ + [P^+, i\tilde{H}] \right) P^- \\ &= P^+ \left(\partial_t P^+ + P^+HP^+S - SP^-HP^- + F_{-1}(S) \right) P^- \end{aligned}$$

We use now (15.7) denoting the scalar operator $\epsilon(t, x, D_x)$ simply by ϵ and obtain:

$$\begin{aligned} & P^+HP^+S - SP^-HP^- = \epsilon S + S\epsilon + R_0^+S - SR_0^- \\ &= 2\epsilon S + [S, \epsilon] + R_0^+S - SR_0^-. \end{aligned}$$

The maps $S \mapsto R_0^+S$, $S \mapsto SR_0^-$ belong to \mathcal{F}_{-1} by Lemma 15.7, as the map $S \mapsto [\epsilon, S]$, since ϵ is scalar.

Therefore the equation (15.13) can be rewritten as

$$\partial_t P^+ + 2\epsilon S + F_{-1}(S) = 0,$$

or equivalently as

$$(15.14) \quad S = -(2\epsilon)^{-1}\partial_t P^+ + F_{-2}(S),$$

where $F_{-2} : S \mapsto -(2\epsilon)^{-1}F_{-1}(S)$ belongs to \mathcal{F}_{-2} . We apply Prop. 15.6 to solve (15.14). We find $S \in C_b^\infty(I; \Psi^{-1})$, unique modulo $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty})$ such that

$$\partial_t P^+ + 2\epsilon S + F_{-1}(S) \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}),$$

and hence

$$\partial_t P^+ + [P^+, i\tilde{H}] = R_{-\infty} \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}).$$

Differentiating $\tilde{U}(s, t)P^+(t)\tilde{U}(t, s)$ w.r.t. t and using again Lemma 15.4 we obtain that $\tilde{U}(t, s)P^\pm(s) - P^\pm(t)\tilde{U}(t, s) \in C_b^\infty(I^2; \mathcal{W}^{-\infty})$ and hence if $\tilde{P}^\pm(t) = e^{-iR(t)}P^\pm(t)e^{iR(t)}$ we have:

$$\mathcal{U}(t, s)\tilde{P}^\pm(s) - \tilde{P}^\pm(t)\mathcal{U}(t, s) \in C_b^\infty(I^2; \mathcal{W}^{-\infty}).$$

Clearly $\tilde{P}^+(t) + \tilde{P}^-(t) = \mathbb{1}$ and since $R(t) = R^*(t)$, $e^{iR(t)}$ is unitary and hence \tilde{P}^\pm are selfadjoint, so we have proved (1) and (2) of the proposition.

It remains to check (3). We set $Q_\pm(t, x, \partial_t, \partial_x) = \partial_t \mp i\epsilon(t) + R_0^\pm(t)$, considered as an operator acting on $M \times \Sigma$ and denote by $A(t, x, x') \in \mathcal{D}'(M \times \Sigma; L(S(\Sigma)))$ the distributional kernel of $\mathcal{U}(\cdot, s)\tilde{P}^\pm(s)$. Then $Q_\pm A \in C^\infty(M \times \Sigma; L(S(\Sigma)))$. Since Q_\pm is not a classical pseudodifferential operator on $M \times \Sigma$, we cannot directly apply the

microlocal regularity to obtain (3). Instead we use an argument from [DH, Lemma 6.5.5]. We fix a scalar pseudodifferential operator $Q_0 \in \Psi_{\text{ph}}^0(M \times \Sigma)$ with principal symbol $\chi(\frac{|\tau|+|k'|}{|k|})$, where $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ is equal to 1 on $[-C, C]$. Then $Q_0 Q_\pm$ is a classical pseudodifferential operator of order 1 on $M \times \Sigma$, with principal symbol

$$i\chi\left(\frac{|\tau|+|k'|}{|k|}\right)(\tau \mp (k \cdot h^{-1}(t, \mathbf{x})k)^{\frac{1}{2}}).$$

Since $Q_0 Q_\pm A$ is smooth and $Q_0 Q_\pm$ is elliptic in $\{|\tau| + |k'| \leq C|k|, \tau \mp (k \cdot h^{-1}(t, \mathbf{x})k)^{\frac{1}{2}} \neq 0\}$ we obtain taking C arbitrarily large that

$$\text{WF}(A)' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma,$$

as claimed. \square

15.5. Pure Hadamard states. We consider now a spacetime (M, g) and a Dirac operator D satisfying the hypotheses (H), (M) in Subsect. 13.5.

We will set

$$c^\pm := e^{\frac{1-n}{2}u} \tilde{P}^\pm(0) e^{\frac{n-1}{2}u},$$

where the projections $\tilde{P}^\pm(t)$ are constructed in Prop. 15.8. We recall that we identified $\Sigma_0 = \{0\} \times \Sigma$ with Σ and that we use the Hermitian forms

$$(\psi|\psi)_M = \int_M \bar{\psi} \cdot \beta \psi dVol_g, \quad (f|f)_\Sigma = \int_\Sigma \bar{f} \cdot \beta f dVol_h$$

to identify sesquilinear forms with linear operators. We recall also that ρ_t is the trace on Σ_t , $U_\Sigma f$ is the unique solution of the Cauchy problem:

$$\begin{cases} D\psi = 0, \\ \rho_0\psi = f \end{cases}, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma)),$$

and $U(t, s)$ the Cauchy evolution operator for D , ie

$$(15.15) \quad U(t, s)f := \rho_t\psi, \quad \text{where } \begin{cases} D\psi = 0, \\ \rho_s\psi = f. \end{cases}, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma_s, S(\Sigma)).$$

Théorème 15.9. *The maps*

$$\lambda_\Sigma^\pm = i\gamma(n)c^\pm$$

are the Cauchy surface covariances of a pure Hadamard state ω for D on M .

Proof. We combine the results recalled in Subsect. 12.5 on conformal transformations with Prop. 15.8 and Prop. 12.8. We obtain that λ^\pm are the Cauchy surface covariances of a pure Hadamard state for D . \square

15.6. Spacetime covariances and Feynman inverses. We now describe the 'time kernels' of the spacetime covariances Λ^\pm and Feynman inverse G_F associated to the Hadamard state ω constructed in Thm. 15.9. For simplicity we assume that we are in the model case considered in Subsect. 15.1. Formulas in the general case can easily be obtained from the identities in Subsect. 12.5.

We recall that in the model case we have $c^\pm = \tilde{P}^\pm(0)$.

Proposition 15.10. *The spacetime covariances Λ^\pm and Feynman inverse G_F of the state ω in Thm. 15.9 are given by:*

$$\begin{aligned} \Lambda^\pm v(t) &= \int_I \Lambda^\pm(t, s)v(s)ds, \\ G_F v(t) &= \int_I G_F(t, s)v(s)ds, \quad v \in C_0^\infty(I; C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))), \end{aligned}$$

for

$$(15.16) \quad \begin{aligned} i) \quad \Lambda^\pm(t, s) &= iU(t, 0)c^\pm U(0, s)\gamma(e_0), \\ ii) \quad G_F(t, s) &= U(t, 0)(\theta(t-s)c^+ - \theta(s-t)c^-)U(0, s)\gamma(e_0). \end{aligned}$$

Proof. We have:

$$\Lambda^\pm = (\rho_0 G)^* i\gamma(e_0) c^\pm \rho_0 G = iU_\Sigma c^\pm \rho_0 G.$$

The retarded/advanced inverses $\mathcal{G}_{\text{ret/adv}}$ for $\mathcal{D} = \partial_t - iH(t)$ are given by

$$\mathcal{G}_{\text{ret/adv}} v(t) = \int_I \mathcal{G}_{\text{ret/adv}}(t, s) v(s) ds,$$

for

$$\mathcal{G}_{\text{ret/adv}}(t, s) : \pm\theta(\pm(t-s))\mathcal{U}(t, s),$$

$\theta = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ being the Heaviside function. From (15.2) we obtain that

$$(15.17) \quad U(t, s) = |h_t|^{-\frac{1}{4}} |h_0|^{\frac{1}{4}} \mathcal{T}(t, 0) \mathcal{U}(t, s) \mathcal{T}(0, s) |h_s|^{\frac{1}{4}} |h_0|^{-\frac{1}{4}}.$$

It follows that the retarded/advanced inverses for D are given by

$$G_{\text{ret/adv}} v(t) = \int_I G_{\text{ret/adv}}(t, s) v(s) ds,$$

for

$$(15.18) \quad G_{\text{ret/adv}}(t, s) : \pm\theta(\pm(t-s))U(t, s)\gamma(e_0),$$

hence the 'time kernel' $G(t, s)$ of $G = G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$ equals

$$G(t, s) = U(t, s)\gamma(e_0),$$

which implies the first statement in (15.16). The second follows then from

$$G_{\text{F}} = i\Lambda^+ + G_{\text{ret}} = -i\Lambda^- + G_{\text{adv}},$$

and (15.18). \square

16. HADAMARD STATES ON ARBITRARY SPACETIMES

In this section we give two proofs of existence of Hadamard states for Dirac fields on general globally hyperbolic spacetimes with a spin structure. The first is by the usual deformation argument and is related to the one given in [MV]. The second uses a partition of unity and is due to [GW1] for Klein-Gordon fields.

16.1. The vacuum state associated to a Killing field. We first recall the definition of the vacuum state for Dirac fields associated to a Killing vector field, due to [DHo]. On a Lorentzian manifold with a spin structure, the Lie derivative of a spinor field is defined as (see [K]) :

$$(16.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_X \psi &= \nabla_X^S \psi + \frac{1}{8} ((\nabla_a X)_b - (\nabla_b X)_a) \gamma^a \gamma^b \psi, \\ \psi &\in C^\infty(M; S(M)), \quad X \in C^\infty(M; TM). \end{aligned}$$

The Lie derivative extends in the obvious way to $C^\infty(M; L(S(M)))$ by setting

$$\mathcal{L}_X A \psi =: (\mathcal{L}_X A) \psi + A \mathcal{L}_X \psi.$$

If X is a complete Killing vector field and the mass term m in Def. 11.3 satisfies $\mathcal{L}_X m = 0$, then $[D, \mathcal{L}_X] = 0$. It follows that the flow ϕ_s generated by \mathcal{L}_X preserves $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$. One can easily show using 11.11 that ϕ_s preserves the Hilbertian scalar product ν defined in 12.3.

It hence defines a unique strongly continuous unitary group $(e^{isH})_{s \in \mathbb{R}}$ on the completion of $(\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$ whose generator H is by Nelson's invariant domain theorem equal to the closure of $i^{-1}\mathcal{L}_X$ on $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$.

Alternatively we can unitarily identify (the completions of) $(\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$ and $(C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_\Sigma)$ by ρ_Σ as in (12.5). The image of H by this identification is denoted by H_Σ acting on $L^2(\Sigma; S(\Sigma))$. It is essentially selfadjoint on $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$.

Définition 16.1. *Let (M, g) be globally hyperbolic spacetime with a complete Killing field X and $D = \not{D} + m$ a Dirac operator on (M, g) with $\mathcal{L}_X m = 0$. Assume moreover that*

$$(16.2) \quad \text{Ker } H_\Sigma = \{0\}.$$

Then the vacuum state ω^{vac} associated to X is the quasi-free state defined by the Cauchy surface covariances:

$$\lambda^{\pm \text{vac}} := i\gamma(n)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_\Sigma).$$

Unlike the bosonic case, X does not need to be time-like in order to be able to define the associated vacuum state.

Let us now compute H_Σ in the ultrastatic case, ie if $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, $g = -dt^2 + h(x)dx^2$ and the mass term m in Def. 11.3 is a constant scalar. The restriction of the spinor bundle $S(M)$ to $\{t\} \times \Sigma$ is then independent on t and denoted by $S(\Sigma)$. The flow ϕ_s associated to \mathcal{L}_{∂_t} is simply the time translations $\phi_s \psi(t, \cdot) = \psi(t - s, \cdot)$, and setting $\gamma_0 = \gamma(\partial_t)$ we have

$$D = -\gamma_0(\partial_t - iH_\Sigma),$$

and

$$H_\Sigma = i\gamma_0(\gamma(e_a)\nabla_{e_a}^S + m) =: H_{0\Sigma} + i\gamma_0 m,$$

where $(e_a)_{1 \leq a \leq d}$ is a local orthonormal frame of $T\Sigma$ for h . Since $H_{0\Sigma}\gamma_0 = -\gamma_0 H_{0\Sigma}$ we obtain $H_\Sigma^2 = H_{0\Sigma}^2 + m^2$, hence $\text{Ker } H_\Sigma = \{0\}$ if $m > 0$.

By [SV2, Thm. 5.1] we know that the vacuum state ω^{vac} is a Hadamard state. Let us sketch a direct proof using pseudodifferential calculus. Let $\Psi_c^m(\Sigma; S(\Sigma))$ the space of properly supported supported classical pseudodifferential operators on Σ and $\Psi^m(\Sigma; S(\Sigma)) = \Psi_c^m(\Sigma; S(\Sigma)) + W_{-\infty}$, where $W_{-\infty}$ is the space of smoothing operators acting on $S(\Sigma)$.

Since H_Σ is elliptic in $\Psi^1(\Sigma; S(\Sigma))$, selfadjoint with $0 \notin \sigma(H_\Sigma)$, we obtain by the same arguments as in the proof of Prop. 14.10 that $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_\Sigma) \in \Psi^0(\Sigma; S(\Sigma))$. From Clifford relations we obtain that $\sigma_{\text{pr}}(H_\Sigma)^2(x, k) = k \cdot h^{-1}(x)k \mathbb{1}$, which implies that

$$H_\Sigma \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_\Sigma) = (\pm \epsilon(x, D_x) + R_0^\pm(x, D_x)) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_\Sigma),$$

where $R_0^\pm \in \Psi^0$ and ϵ is a scalar pseudodifferential operator in $\Psi^1(\Sigma; S(\Sigma))$ with principal symbol $(k \cdot h^{-1}(x)k)^{\frac{1}{2}}$.

Since $U_\Sigma f(t, \cdot) = e^{itH_\Sigma} f(\cdot)$, we obtain that $(\partial_t \mp i\epsilon + R_0^\pm)U_\Sigma c^{\pm \text{vac}} = 0$. We argue then as in the proof of Prop. 15.8 (3) to obtain that

$$\text{WF}(U_\Sigma c^{\pm \text{vac}})' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma, \quad \mathcal{F} = \{\xi = 0\} \subset T^*M.$$

By Prop. 12.8 this implies that ω_{vac} is a Hadamard state.

16.2. Deformation of Dirac operators. Let (M, g) be a globally hyperbolic spacetime and Σ a smooth space-like Cauchy surface. By the Bernal-Sanchez theorem [BS1, BS2] we can assume that

$$M = \mathbb{R}_t \times \Sigma_x, \quad g = -c^2(t, x)dt^2 + h(t, x)dx^2,$$

where $c \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $c > 0$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto h(t, x)dx^2$ is a family of Riemannian metrics on Σ and

$$\Sigma_s = \{s\} \times \Sigma$$

are Cauchy surfaces for g .

After a conformal transformation we can assume that $c \equiv 1$. We fix some complete Riemannian metric $h_{\text{us}}(x)dx^2$ on Σ and an interpolating time dependent metric

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto h_{\text{int}}(t, x)dx^2$$

such that

$$h_{\text{int}}(t, x)dx^2 = \begin{cases} h(t, x)dx^2 & \text{for } t > 1, \\ h_{\text{us}}(x)dx^2 & \text{for } t < -1. \end{cases}$$

We set

$$g_{\text{int}} = -dt^2 + h_{\text{int}}(t, x)dx^2, \quad g_{\text{us}} = -dt^2 + h_{\text{us}}(x)dx^2.$$

Let us now assume that (M, g) has a spin structure. Since M is orientable, this spin structure is unique.

We saw in Subsect. 11.6 that it induces a spin structure $P\text{Spin}(\Sigma, h_0)$ on Σ . From this spin structure on (Σ, h_0) we obtain as in Subsect. 11.6 a spin structure on (M, g_{int}) . We also saw that if $S(M)$ is the associated spinor bundle, its restriction to $\{t\} \times \Sigma$ is independent on t and denoted by $S(\Sigma)$. Over $\{t > 1\}$ this spin structure coincide with the original spin structure on (M, g) . The same is true for the associated spinor bundles.

Let now $D = \not{D} + m$ a Dirac operator on (M, g) as in Subsect. 11.7. We fix a strictly positive constant $m_{\text{us}} > 0$ and an interpolating mass m_{int} such that

$$m_{\text{int}}(t, x) = \begin{cases} m(t, x) & \text{for } t > 1, \\ m_{\text{us}}\mathbb{1} & \text{for } t < -1. \end{cases}$$

We denote by $D_{\text{int}} = \not{D} + m_{\text{int}}$, resp. $D_{\text{us}} = \not{D} + m_{\text{us}}$ the Dirac operator obtained from the spin structure on (M, g_{int}) resp. on (M, g_{us}) . We have

$$D_{\text{int}} = \begin{cases} D & \text{for } t > 1, \\ D_{\text{us}} & \text{for } t < -1. \end{cases}$$

We denote by $U_{\text{int}}(t, s)$ the Cauchy evolution operator for D_{int} see (15.15).

16.3. Existence of Hadamard states. The existence of Hadamard states for bosonic fields on arbitrary globally hyperbolic spacetime has been addressed in [FNW] using a deformation argument. This approach was then adapted to the case of the Dirac equation in [FV2]. The existence of a globally hyperbolic metric interpolating between two given ones was originally taken for obvious. It was realized in [M] and [Sa] that this is not the case, and this small gap was filled in these papers.

Théorème 16.2. *Let (M, g) an even dimensional globally hyperbolic spacetime with a spin structure and D a Dirac operator on (M, g) . Then there exist pure Hadamard states for D .*

Proof. The proof is completely analogous to the case of scalar bosonic fields. We reduce ourselves to the situation at the beginning of Subsect. 16.2 by the Bernal-Sanchez theorem and a conformal transformation. Let $\lambda^{\pm\text{vac}}$ be the Cauchy surface covariances of the vacuum state ω^{vac} for D_{us} , on the Cauchy surface Σ_{-2} . Since $D_{\text{int}} = D_{\text{us}}$ in $\{t < -1\}$, $\lambda^{\pm\text{vac}}$ satisfy (12.10) in Prop. 12.8 for D_{int} over $\{t < -1\}$. By propagation of singularities, (see the end of the proof of Prop. 12.8 for the precise argument), we obtain that $U_{\text{int}}(-2, 2)^* \lambda^{\pm\text{vac}} U_{\text{int}}(-2, 2)$ satisfy (12.10) near Σ_2 for D_{int} and hence for D . Therefore $U_{\text{int}}(-2, 2)^* \lambda^{\pm\text{vac}} U_{\text{int}}(-2, 2)$ are the Cauchy surface covariances on Σ_2 of a Hadamard state ω for D . Since ω^{vac} is a pure state, we see that ω is pure, by Prop. 12.5. \square

16.3.1. An alternative construction. Let us finally give an alternative construction of Hadamard states on general spacetimes, analogous to a construction in [GW1] for Klein-Gordon fields. Unlike the previous construction it does not produce pure states.

We fix a smooth spacelike Cauchy surface Σ in (M, g) and we can assume that $M = \mathbb{R} \times \Sigma$. We identify Σ with $\{0\} \times \Sigma$. We fix a causally compatible neighborhood

U of Σ in M , an atlas $(\tilde{V}_i, \chi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of Σ with $\chi_i : \tilde{V}_i \xrightarrow{\sim} B_d(0, 1)$ and \tilde{V}_i precompact, open sets $V_i \subset \tilde{V}_i$ and constants $\delta_i > 0$ such that

$$(16.3) \quad \begin{aligned} i) \quad & \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i = \Sigma, \\ ii) \quad & x \in U, J(x) \cap V_i \neq \emptyset \Rightarrow y \in]-\delta_i, \delta_i[\times \tilde{V}_i =: U_i. \end{aligned}$$

We transport by $\phi_i : (t, x) \mapsto (t, \chi_i(x))$ the metric, spin structure and the Dirac operator D over U_i to $\phi_i(U_i)$. We can extend the spin structure over $\phi_i(U_i)$ to \mathbb{R}^{1+d} and obtain a Dirac operator D_i on \mathbb{R}^{1+d} for a metric and spin structure which are of bounded geometry for the 'uniform' reference metric $dt^2 + dx^2$.

By Sect. 15 we can construct a Hadamard state ω_i for D_i . Let λ_i^\pm its Cauchy surface covariances on Σ and $1 = \sum_i u_i^2$ a partition of unity on Σ subordinate to the covering $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$. We set

$$\lambda^\pm = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i^* \circ (\varphi_i^{-1})^* \lambda_i^\pm \circ u_i.$$

Since $\nu_\Sigma = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i^* \circ \nu_\Sigma \circ u_i$ the conditions (12.7) and (12.10) are clearly satisfied by λ^\pm . Therefore we obtain a Hadamard state for D on (M, g) .

Appendices

A.

A.1. Let $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ the Minkowski metric on $\mathbb{R}^{1,d}$, $n = 1 + d$. We set

$$\begin{aligned} T_n^< &:= \{\mathbf{t} \in M_n(\mathbb{R}) : \mathbf{t}_{ij} = 0, j > i\}, \\ T_n^> &:= \{\mathbf{t} \in M_n(\mathbb{R}) : \mathbf{t}_{ij} = 0, j < i\}, \\ S_n &:= \{\mathbf{s} \in M_n(\mathbb{R}) : \mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_{ji}\}, \end{aligned}$$

which are \mathbb{R} -vector spaces of dimension $n(n+1)/2$.

Lemma A.1. *There exists V_0 neighborhood of $\boldsymbol{\eta}$ in S_n and U_0 neighborhood of $\mathbb{1}_n$ in $T_n^>$ and $F : V_0 \rightarrow U_0$ a smooth diffeomorphism such that*

$$F(\mathbf{g})\mathbf{g}^t F(\mathbf{g}) = \boldsymbol{\eta}, \quad \forall \mathbf{g} \in V_0.$$

Proof. Let $H : T_n^< \ni \mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}\boldsymbol{\eta}\mathbf{t} \in S_n$. The differential of H at $\mathbb{1}_n$ is

$$DH_{\mathbb{1}} : \mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{t}.$$

The equation $\mathbf{t}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{t} = \mathbf{s}$ for $\mathbf{s} \in S_n$ is written as

$$\mathbf{t}_{ij}\boldsymbol{\eta}_{jj} + \boldsymbol{\eta}_{ii}\mathbf{t}_{ji} = \mathbf{s}_{ij}, \quad \boldsymbol{\eta}_{11} = -1, \quad \boldsymbol{\eta}_{ii} = 1 \quad j > 1,$$

which is solved by

$$\mathbf{t}_{ij} = \boldsymbol{\eta}_{jj}^{-1}\mathbf{s}_{ij}, \quad \text{for } j < i, \quad \mathbf{t}_{ii} = (2\boldsymbol{\eta}_{ii})^{-1}\mathbf{s}_{ii}, \quad \mathbf{t}_{ij} = 0 \quad \text{for } j > i.$$

It follows that $DH_{\mathbb{1}} : T_n^< \rightarrow S_n$ is surjective hence bijective. By the local inversion theorem, there exists W_0 neighborhood of $\mathbb{1}_n$ in $T_n^<$, V_0 neighborhood of $\boldsymbol{\eta}$ in S_n such that $H : W_0 \xrightarrow{\sim} V_0$ is a smooth diffeomorphism. We compose H with the smooth diffeomorphism $W_0 \ni \mathbf{g} \mapsto \mathbf{g}^{-1} \in U_0$, where U_0 is a neighborhood of $\mathbb{1}_n$ in $T_n^>$ to obtain the lemma. \square

A.2.

Proposition A.2. *Let $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ and $G' \rightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M$ two principal bundles over M with structure groups G, G' . Let $\varphi : G' \rightarrow G$ a group morphism and a local proper diffeomorphism and $\chi : P' \rightarrow P$ a bundle morphism and a local diffeomorphism. Assume that the following diagram commute:*

$$(A.4) \quad \begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & P' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \chi \\ G & \longrightarrow & P \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi' \\ \searrow \pi \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ M \end{array}$$

ie χ is a morphism of principal bundles over M .

Then modulo an isomorphism of G' -principal bundles over M one can assume G and G' are locally trivialized over a common covering $(U_i)_{i \in I}$ of M and that

$$t_{ij}(x) = \varphi(t'_{ij}(x)), \quad x \in U_i \cap U_j,$$

where $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, $t'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G'$ are the transition maps of P, P' .

Proof. Let $(U_i^{(\prime)})_{i \in I^{(\prime)}}$ a bundle atlas for $P^{(\prime)}$, $\Psi_i^{(\prime)} : (\pi^{(\prime)})^{-1}(U_i^{(\prime)}) \rightarrow U_i^{(\prime)} \rightarrow G^{(\prime)}$ the local trivializations of $P^{(\prime)}$, $\Phi_i^{(\prime)} = (\Psi_i^{(\prime)})^{-1}$. Without loss of generality we can assume that $U_i^{(\prime)}$ are simply connected.

If we set $m_i^{(\prime)}(x) = \Phi_i^{(\prime)}(x, e^{(\prime)})$, where e' is the identity in $G^{(\prime)}$, then since $G^{(\prime)}$ acts transitively on the fibers of $P^{(\prime)}$, we have

$$(A.5) \quad \Phi_i^{(\prime)}(x, g^{(\prime)}) = m_i^{(\prime)}(x) \cdot g^{(\prime)}, \quad x \in U_i^{(\prime)}, \quad g^{(\prime)} \in G^{(\prime)}.$$

Since U_i is simply connected, there exists $\tilde{m}'_i : U_i \rightarrow \pi'^{-1}(U_i)$ such that $m_i = \chi \circ \tilde{m}'_i$, ie a lift of m_i through χ . Since G' acts transitively on the fibers of P' , we can define:

$$(A.6) \quad \tilde{\Phi}'_i : U_i \times G' \ni (x, g') \mapsto \tilde{m}'_i(x) \cdot g' \in \pi'^{-1}(U_i)$$

Let us study some properties of $\tilde{\Phi}'_i$. First

$$\begin{aligned} \pi' \circ \tilde{\Phi}'_i(x, g') &= \pi'(\tilde{m}'_i(x) \cdot g') = \pi' \circ \tilde{m}'_i(x) \\ &= \pi \circ \chi \circ \tilde{m}'_i(x) = \pi \circ m_i(x) = x. \end{aligned}$$

Next

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \chi(\tilde{\Phi}'_i(x, g')) &= \chi(\tilde{m}'_i(x) \cdot g') = \chi(\tilde{m}'_i(x)) \cdot \varphi(g') = m_i(x) \cdot \varphi(g') \\ &= \Phi_i(x, e) \cdot \varphi(g') = \Phi_i(x, \varphi(g')). \end{aligned}$$

Let us set $\tilde{\Psi}'_i = \tilde{\Phi}'_i{}^{-1} : \pi'^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times G'$. The family of trivialisations $(\tilde{\Psi}'_i)_{i \in I}$, together with the right action of G' on P' and the base projection $\pi' : P' \rightarrow M$ define hence a G' -principal bundle $G \rightarrow \tilde{P}' \xrightarrow{\pi'} M$, (equal to P' as a set). If $\tilde{t}'_{ij} : U_{ij} \rightarrow G'$ are the associated transition maps we have

$$(A.8) \quad \begin{aligned} (x, t_{ij}(x) \cdot \varphi(g')) &= \Psi_i \circ \Phi_j(x, \varphi(g')) = \Psi_i \circ \chi \circ \tilde{\Phi}'_j(x, g') \\ &= \Psi_i \circ \chi \circ \tilde{\Phi}'_i(x, \tilde{t}'_{ij}(x)g') = (x, \varphi(\tilde{t}'_{ij}(x))\varphi(g')), \end{aligned}$$

hence $t_{ij} = \varphi(\tilde{t}'_{ij})$. Let now $G' \rightarrow \tilde{P}' \xrightarrow{\pi'} M$ the G' -principal bundle associated with base projection π' and trivialisations $\tilde{\Psi}'_i = (\tilde{\Phi}'_i)^{-1} : (\pi')^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G'$.

It remains to prove that \tilde{P}' and P' are isomorphic as G' -principal bundles. For $\mathbf{i} = (i, i') \in \mathbf{I} = I \times I'$ we set $U_{\mathbf{i}} = U_i \cap U_{i'}$, so that $(U_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ is a common bundle atlas for P' and \tilde{P}' .

Since G' acts transitively on the fibers of P' and \tilde{P}' we can find maps $\chi_{\mathbf{i}} : U_{\mathbf{i}} \rightarrow G'$ such that

$$m'_i(x) = \tilde{m}'_{i'}(x) \cdot \chi_{\mathbf{i}}(x), x \in U_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} = (i, i'),$$

which by (A.5), (A.6) implies that $\Phi'_{i'}(x, g') = \tilde{\Phi}'_i(x, g') \cdot \chi_{\mathbf{i}}(x)$, $x \in U_{\mathbf{i}}$ and hence that \tilde{P}' and P' are isomorphic. \square

CHAPITRE 3

Hadamard property of the in and out states for Dirac fields on asymptotically static spacetimes

Le présent chapitre retranscrit un article co-écrit avec Christian Gérard, et paru dans *Letters In Mathematical Physics*, **112**, (2022).

17. INTRODUCTION

17.1. In/out vacuum states. The construction of a *distinguished quantum state* for a quantized field on a curved background has been studied extensively in various contexts in Quantum Field Theory.

If the background spacetime has no global symmetries but only asymptotic ones, one can try to specify a distinguished quantum state by its asymptotic behavior, for example at early or late times.

An often studied situation arises when the background spacetime (M, g) has a product structure $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ and the metric g becomes asymptotic to *static* metrics when $t \rightarrow \pm\infty$. One can then at least heuristically consider *asymptotic vacua*, the so-called *in* and *out* states, which look like vacuum states for the asymptotic static metrics when $t \rightarrow \mp\infty$.

Let us mention for example the wave and Klein-Gordon fields on Minkowski space, in external electromagnetic potentials [Is, Ru, Se], or on curved spacetimes with special asymptotic symmetries, [Wa1, DK1, DK2, DK3].

Besides the existence of the *in* and *out* states, an important question is to ensure that they satisfy the *Hadamard condition* [KW].

Nowadays regarded as an indispensable ingredient in the perturbative construction of interacting fields (see e.g. the recent reviews [HW, FV1]), this property accounts for the correct short-distance behaviour of two-point functions. It can be conveniently formulated as a condition on the *wave front set* of the state's two-point functions [R1].

The above questions were solved in [GW2] for *massive Klein-Gordon fields*, using a combination of scattering theory arguments and global pseudodifferential calculus.

In this paper we consider this problem for *massive Dirac fields*, using similar methods. Let us now describe in more details the results of this paper.

17.2. Results.

17.2.1. Asymptotically static spacetimes. We will consider a spacetime of *even dimension* n of the form $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, where Σ is a d -dimensional manifold, equipped with a metric

$$g = -c^2(x)dt^2 + (dx^i + b^i(x)dt)h_{ij}(x)(dx^j + b^j(x)dt),$$

where $x = (t, \mathbf{x}) \in M$, $c \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ is a strictly positive function, $b \in C^\infty(M; T\Sigma)$ and $h \in C^\infty(M; \otimes_s^2 T^*\Sigma)$ is a t -dependent Riemannian metric on Σ . We will assume that when $t \rightarrow \pm\infty$ the metric g converges to *static metrics*

$$g_{\text{out/in}} = -c_{\text{out/in}}(x)dt^2 + h_{\text{out/in}}(x)dx^2.$$

The convergence of g to $g_{\text{out/in}}$ is assumed to be uniform in the space variable \mathbf{x} . More precisely, one assumes that there exists $\mu > 0$ such that

$$(17.1) \quad \begin{aligned} \partial_t^k \partial_x^\alpha (h(x) - h_{\text{out/in}}(\mathbf{x})) &\in O(\langle t \rangle^{-\mu-k}), \\ \partial_t^k \partial_x^\alpha b(x) &\in O(\langle t \rangle^{-1-\mu-k}), & k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d, \\ \partial_t^k \partial_x^\alpha (c(x) - c_{\text{out/in}}(\mathbf{x})) &\in O(\langle t \rangle^{-\mu-k}), \end{aligned}$$

in an appropriate uniform sense in $\mathbf{x} \in \Sigma$, using the notion of Riemannian manifolds of *bounded geometry*, see hypotheses (H1), (H2) in 19.1.3 for the precise formulation.

Note that the existence of the in/out state is usually deduced from a result of existence and completeness of *Möller operators* for classical fields which typically requires a short-range condition $\mu > 1$ in (17.1). As was the case in [GW2], only the weaker condition $\mu > 0$ is needed in our paper.

17.2.2. *Dirac operators.* We consider a Dirac operator

$$D = \not{D} + m$$

and assume that $m(t, x)$ converges to $m_{\text{out/in}}(x)$ when $t \rightarrow \pm\infty$ in a similar uniform way, see hypothesis (H3) in 19.1.3 for the precise formulation.

It follows that D converges when $t \rightarrow \pm\infty$ to *asymptotic Dirac operators* $D_{\text{out/in}}$, which are associated to the static metrics $g_{\text{out/in}}$.

The vector field ∂_t is Killing for the static metrics $g_{\text{out/in}}$, which implies that one can define the *vacuum states* $\omega_{\text{out/in}}^{\text{vac}}$ for $D_{\text{out/in}}$, see Subsect. 18.4, using the projections

$$c_{\text{out/in}}^{\pm\text{vac}} := \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_{\text{out/in}}),$$

where $H_{\text{out/in}}$ are selfadjoint operators on $L^2(\Sigma; S(\Sigma))$, for the canonical Hilbertian scalar product on $S(\Sigma)$. The operators $H_{\text{out/in}}$ are the *generators* of the unitary group induced by the spinorial Lie derivative \mathcal{L}_{∂_t} on solutions of $D_{\text{out/in}}\psi = 0$, see Subsect. 18.4.

To define the vacuum states $\omega_{\text{out/in}}^{\text{vac}}$ in an unambiguous way, one needs to assume that

$$(17.2) \quad \text{Ker } H_{\text{out/in}} = \{0\},$$

ie the absence of *zero modes*. If (17.2) is violated, then in physics language one needs to decide if zero modes are considered as particles or as anti-particles.

In this paper, we strengthen (17.2) by requiring that

$$0 \notin \sigma(H_{\text{out/in}}),$$

see hypothesis (H4), ie that the asymptotic Dirac operators $D_{\text{out/in}}$ are *massive* in the terminology of 18.4.3.

17.2.3. *Existence of the in/out states.* Let us now explain the definition of the *in/out* states for D . We set $\Sigma_s = \{s\} \times \Sigma$ and fix the reference time $t = 0$.

Denoting by $U(t, s) : C_0^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma_s)) \rightarrow C_0^\infty(\Sigma_t; S(\Sigma_t))$ the *Cauchy evolution* for the Dirac operator D one expects that the limits

$$(17.3) \quad c_{\text{out/in}}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t)c_{\text{out/in}}^{\pm\text{vac}}U(t, 0)$$

exist in an appropriate sense. The $c_{\text{out/in}}^\pm$ are supplementary projections acting on the space of Cauchy data at time $t = 0$, which are selfadjoint for the canonical Hilbertian scalar product. Therefore one can associate to $c_{\text{out/in}}^\pm$ quasi-free states for the free Dirac field on M . Concretely one considers pairs of operators

$$\Lambda_{\text{out/in}}^\pm : C_0^\infty(M; S(M)) \rightarrow C^\infty(M; S(M))$$

defined by

$$(17.4) \quad \Lambda_{\text{out/in}}^\pm(t, s) = U(t, 0)i\gamma(n)c_{\text{out/in}}^\pm U(0, s),$$

where we write $\Lambda_{\text{out/in}}^\pm$ as operator-valued Schwartz kernels in the time variable, ie we use the formal identity

$$Au(t) = \int_{\mathbb{R}} A(t, s)u(s)ds,$$

to define the 'time kernel' of some operator A acting on M . In (17.4) n is the future directed unit normal to Σ_0 and γ are the 'gamma matrices' (or Clifford multiplications) obtained from the spin structure on (M, g) .

The operators $\Lambda_{\text{out/in}}^{\pm}$ satisfy:

- (i) $\Lambda_{\text{out/in}}^{\pm} \geq 0$,
- (ii) $\Lambda_{\text{out/in}}^{+} + \Lambda_{\text{out/in}}^{-} = iG$,
- (iii) $D \circ \Lambda_{\text{out/in}}^{\pm} = \Lambda_{\text{out/in}}^{\pm} \circ D = 0$,

where $G = G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$ is the causal propagator for D and the positivity in (i) is formulated with respect to the canonical indefinite Hermitian form on $C_0^{\infty}(M; S(M))$ for which D is formally selfadjoint. It follows that $\Lambda_{\text{out/in}}^{\pm}$ are *two-point functions* of the sought after *in/out* states $\omega_{\text{out/in}}$ for D .

17.2.4. Hadamard property of the in/out states. As explained above, the Hadamard condition allows to select among the plethora of states the physically meaningful ones, which should resemble the Minkowski vacuum, at least in the vicinity of any point of M .

The microlocal definition of Hadamard states for Dirac fields was first introduced by Hollands [Ho], who also proved its equivalence with the older characterization by the short distance asymptotics of its two-point functions. Hadamard states for Dirac fields were further studied in [Kö, Kr, SV1, Sa].

To our knowledge the first paper proving existence of Hadamard states for Dirac fields in the general case is the recent paper by Islam and Strohmaier [IS], although the construction of Hadamard states by the deformation argument of Fulling, Narcowich and Wald [FNW] was quite probably known to experts.

Another construction of Hadamard states on spacetimes of bounded geometry was given in [G-St] using global pseudodifferential calculus on a Cauchy surface. The methods used in the present paper are to a large extent an adaptation of the strategy in [G-St] to a scattering situation.

Let us now state the main result of this work, referring the reader to Subsect. 19.1 for hypotheses (H).

Théorème 17.1. *Assume hypotheses (Hi), $1 \leq i \leq 4$. Then*

- (1) *The norm limits (17.3) exist and define by (17.4) pure quasi-free states $\omega_{\text{out/in}}$ called the in/out vacuum states.*
- (2) *$\omega_{\text{out/in}}$ is a Hadamard state, ie*

$$\text{WF}(\Lambda_{\text{out/in}}^{\pm}) \subset \mathcal{N}^{\pm} \times \mathcal{N}^{\pm}$$

*where \mathcal{N}^{\pm} are the two connected components of the characteristic set $\mathcal{N} = \{(x, \xi) \in T^*M \setminus o : \xi \cdot g^{-1}(x)\xi = 0\}$ of D .*

17.3. Outline of the proof. Let us now briefly explain the main ingredients in the proof of Thm. 17.1, which follows the general strategy in [G-St]. The first step consists in reducing the metric to the simpler form

$$g = -dt^2 + h(t, x)dx^2,$$

where the time-dependent Riemannian metric $h(t, x)dx^2$ on Σ converges to Riemannian metrics $h_{\text{out/in}}(x)dx^2$ when $t \rightarrow \pm\infty$. This is done in the usual way, by combining a conformal transformation and the well-known argument using the flow of the vector field ∇t .

One can use the covariance of Dirac operators and two-point functions under conformal transformations, see Subsect. 18.2 and 18.3.7, to reduce ourselves to this simple situation.

In a second step, one uses parallel transport with respect to the vector field ∂_t to identify the spinor bundles at different times, and to reduce the Dirac equation

$D\psi = 0$ to a time-dependent Schroedinger equation:

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0,$$

where $H(t) = H(t, x, \partial_x)$ is a first order elliptic differential operator on Σ .

The third step is analogous to [G-St], where Hadamard states for Dirac fields are constructed using pseudodifferential calculus, with the difference that in our case we need to control the behavior of various operators when $t \rightarrow \pm\infty$.

We construct time-dependent projections $P^\pm(t)$ such that

- (1) $P^\pm(t) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_{\text{out/in}}) \in O(t^{-\mu})$ when $t \rightarrow \pm\infty$,
- (2) $\partial_t U(0, t)P^\pm(t)U(t, 0) \in O(t^{-1-\mu})\Psi^{-\infty}$,

where $\Psi^{-\infty}$ is some ideal of smoothing operators on Σ . (1) implies that to prove the existence of the limits (17.3), it suffices to consider instead

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t)P^\pm(t)U(t, 0)$$

which exists by (2) and the Cook argument. This proves the existence of the *in/out* states $\omega_{\text{out/in}}$ for D . Integrating (2) from 0 to $\pm\infty$, we also obtain that

$$c_{\text{out/in}}^\pm - P^\pm(0) \text{ are smoothing operators on } \Sigma.$$

It is shown in [G-St] that $P^\pm(0)$ are projections which generate a Hadamard state, which, since $c_{\text{out/in}}^\pm - P^\pm(0)$ are smoothing, proves the Hadamard property of $\omega_{\text{out/in}}$.

17.4. Plan of the paper. Let us now discuss the plan of this paper.

In Sect. 18 we recall the quantization of Dirac fields on curved spacetimes. In Sect. 19 we describe the geometric framework of asymptotically static spacetimes and the spin structures and Dirac operators on such spacetimes.

In Sect. 20 we give a brief overview of Shubin's pseudodifferential calculus on manifolds of bounded geometry and of its time-dependent version that we will use in this paper. Finally Sect. 21 contains the proof of Thm. 17.1 and the various reduction procedures that are used.

17.5. Notation.

17.5.1. Lorentzian manifolds. We use the mostly + signature convention for Lorentzian metrics. All Lorentzian manifolds considered in this paper will be *orientable* and connected.

17.5.2. Bundles. If $E \xrightarrow{\pi} M$ is a bundle we denote by $C^\infty(M; E)$ resp. $C_0^\infty(M; E)$ the set of smooth resp. smooth and compactly supported sections of E .

If $E \xrightarrow{\pi} M$ is a vector bundle we denote by $\mathcal{D}'(M; E)$ resp. $\mathcal{E}'(M; E)$ the space of distributional resp. compactly supported distributional sections of E .

17.5.3. Matrices. Since we will often use frames of vector bundles we will denote by \mathbf{M} a matrix in $M_n(\mathbb{R})$ or $M_N(\mathbb{C})$ and by M the associated endomorphism.

17.5.4. Frames and frame indices. We use the letters $0 \leq a \leq d$ for frame indices on TM or T^*M , and $1 \leq a \leq d$ for frame indices on $T\Sigma$ or $T^*\Sigma$, if $\Sigma \subset M$ is a space like hypersurface. If g is a metric on M and $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ is a local frame of TM we set $g_{ab} = e_a \cdot g e_b$ and $g^{ab} = e^a \cdot g^{-1} e^b$, where $(e^a)_{0 \leq a \leq d}$ is the dual frame.

We use capital letters $1 \leq A \leq N$ for frame indices of the spinor bundle $S(M)$.

If \mathcal{F} is for example a local frame of TM we denote by $\mathcal{F}\mathbf{t}$ the frame obtained by the right action of $\mathbf{t} \in M_n(\mathbb{R})$ on \mathcal{F} .

We use capital letters $1 \leq A \leq N$ for frame indices of the spinor bundle $S(M)$.

17.5.5. *Vector spaces.* If \mathcal{X} is a real or complex vector space, we denote by \mathcal{X}' its dual. If \mathcal{X} is a complex vector space we denote by \mathcal{X}^* its anti-dual, ie the space of anti-linear forms on \mathcal{X} and by $\overline{\mathcal{X}}$ its conjugate, ie \mathcal{X} equipped with the complex structure $-i$.

A linear map $a \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ is a bilinear form on \mathcal{X} , whose action on pairs of vectors is denoted by $x_1 \cdot a x_2$. Similarly a linear map $a \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ is a sesquilinear form on \mathcal{X} , whose action is denoted by $\overline{x}_1 \cdot a x_2$. We denote by a' , resp. a^* the transposed resp. adjoint of a . The space of symmetric resp. hermitian forms on \mathcal{X} is denoted by $L_s(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ resp. $L_h(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$.

17.5.6. *Maps.* We write $f : A \xrightarrow{\sim} B$ if $f : A \rightarrow B$ is a bijection. We use the same notation if A, B are topological spaces resp. smooth manifolds, replacing bijection by homeomorphism, resp. diffeomorphism.

18. QUANTIZATION OF DIRAC EQUATIONS ON CURVED SPACETIMES

In this section we recall well-known facts, see eg [D, LM, Ho, T] about Dirac equations and Dirac quantum fields on curved spacetimes.

18.1. **Dirac equations on curved spacetimes.** Let us denote by $SO^\uparrow(1, d)$ and $Spin^\uparrow(1, d)$ the restricted Lorentz and Spin groups (ie the connected component of Id in $O(1, d)$ and $Pin(1, d)$) and $Ad : Spin^\uparrow(1, d) \rightarrow SO^\uparrow(1, d)$ the double sheeted covering.

We recall that a *spacetime* is an oriented and time oriented Lorentzian manifold.

18.1.1. *Spin structures.* Let (M, g) a spacetime of even dimension $n = 1 + d$ and let $PSO^\uparrow(M, g)$ the $SO^\uparrow(1, d)$ -principal bundle of oriented and time oriented orthonormal frames of TM .

We recall that a *spin structure* on (M, g) is given by a $Spin^\uparrow(1, d)$ -principal bundle $PSpin(M, g)$ with a bundle morphism $\chi : PSpin(M, g) \rightarrow PSO^\uparrow(M, g)$ such that the following diagram commutes:

$$(18.1) \quad \begin{array}{ccc} Spin^\uparrow(1, d) & \longrightarrow & PSpin(M, g) \\ \downarrow Ad & & \downarrow \chi \\ SO^\uparrow(1, d) & \longrightarrow & PSO^\uparrow(M, g) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi' \\ \searrow \pi \\ M \end{array}$$

We assume that (M, g) has a spin structure $PSpin(M, g)$. Let us recall that a Lorentzian manifold admits a spin structure if and only if its second Stiefel–Whitney class $w_2(TM)$ is trivial, see [Mi, Na]. It admits a *unique* spin structure if in addition its first Stiefel–Whitney class $w_1(M)$ is trivial, which is equivalent to the fact that M is orientable, see e.g. [Na]. In our situation, M is orientable hence spin structures on (M, g) are unique if they exist. If $n = 4$ and (M, g) is globally hyperbolic it admits a (unique) spin structure, see [Ger1, Ger2].

We denote by $Cl(M, g)$, $S(M)$ the associated Clifford and spinor bundles.

The map $TM \rightarrow End(S(M))$ obtained from the embedding $TM \rightarrow Cl(M, g)$ and the canonical map $Cl(M, g) \rightarrow End(S(M))$ will be denoted by

$$(18.2) \quad TM \ni u \mapsto \gamma(u) \in End(S(M)),$$

and is often called the *Clifford multiplication*. The spin connection will be denoted by ∇^S .

It is well known see eg [T], [G, Sect. 17.6] that there exists a (unique up to multiplication by strictly positive constants) non degenerate Hermitian form β acting on the fibers of $S(M)$ such that

$$(18.3) \quad \begin{aligned} \gamma^*(u)\beta &= -\beta\gamma(u), \quad u \in TM, \\ i\beta\gamma(e) &> 0, \text{ for all } e \in TM \text{ time-like and future directed,} \\ u \cdot \bar{\psi} \cdot \beta\psi &= \overline{\nabla_u^S \psi} \cdot \beta\psi + \bar{\psi} \cdot \beta \nabla_u^S \psi, \quad \forall u \in C^\infty(M; TM), \psi \in C^\infty(M; S(M)). \end{aligned}$$

For later use we summarize the properties of ∇^S , γ and β that we will need. We have:

$$(18.4) \quad \begin{aligned} \nabla_u^S \gamma(v)\psi &= \gamma(v)\nabla_u \psi + \gamma(\nabla_u v)\psi, \\ u \cdot \bar{\psi} \cdot \beta\psi &= \overline{\nabla_u^S \psi} \cdot \beta\psi + \bar{\psi} \cdot \beta \nabla_u^S \psi, \\ u, v &\in C^\infty(M; TM), \psi \in C^\infty(M; S(M)), \end{aligned}$$

where ∇ is the metric connection on (M, g)

18.1.2. *Dirac operators.* Fixing a smooth section $m \in C^\infty(M; L(S(M)))$ with $m^*\beta = \beta m$, we consider a Dirac operator

$$(18.5) \quad D = \not{D} + m,$$

where \not{D} is locally expressed (on an open set $U \subset M$ over which $S(M)$ and TM are trivialized) as

$$\not{D} = g^{ab}\gamma(e_a)\nabla_{e_b}^S,$$

where $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ is a local frame over U .

18.1.3. *Selfadjointness.* For $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(M; S(M))$ one defines the 1-form $J(\psi_1, \psi_2) \in C^\infty(M; T^*M)$ by

$$J(\psi_1, \psi_2) \cdot u := \bar{\psi}_1 \cdot \beta\gamma(u)\psi_2, \quad u \in C^\infty(M; TM),$$

and one deduces from (18.4) that

$$\nabla^\mu J_\mu(\psi_1, \psi_2) = -\overline{D\psi_1} \cdot \beta\psi_2 + \bar{\psi}_1 \cdot \beta D\psi_2, \quad \psi_i \in C^\infty(M; S(M)).$$

Using then Stokes formula this implies that the Dirac operator D is formally self-adjoint on $C_0^\infty(M; S(M))$ with respect to the indefinite Hermitian form

$$(18.6) \quad (\psi_1 | \psi_2)_M := \int_M \bar{\psi}_1 \cdot \beta\psi_2 \, d\text{Vol}_g.$$

18.1.4. *Characteristic manifold.* The *principal symbol* $\sigma_{\text{pr}}(D)$ equals

$$\sigma_{\text{pr}}(D)(x, \xi) = \gamma(g^{-1}(x)\xi), \quad (x, \xi) \in T^*M \setminus o,$$

where $o = X \times \{0\}$ is the zero section in T^*M .

The *characteristic manifold* of D is

$$\text{Char}(D) := \{(x, \xi) \in T^*M \setminus o : \sigma_{\text{pr}}(D)(x, \xi) \text{ not invertible}\},$$

equal to

$$\text{Char}(D) = \{(x, \xi) \in T^*M \setminus o : \xi \cdot g^{-1}(x)\xi = 0\} =: \mathcal{N},$$

by the Clifford relations. We denote as usual by \mathcal{N}^\pm the two connected components of \mathcal{N} , where

$$(18.7) \quad \mathcal{N}^\pm := \{(x, \xi) \in \mathcal{N} : \pm \xi \cdot v > 0 \text{ for } v \in T_x M \text{ future directed}\}.$$

18.1.5. *Retarded/advanced inverses.* Let us assume in addition that (M, g) is globally hyperbolic. Then, (see [D] for Dirac operators in 4 dimensions, or [M] for more general prenormally hyperbolic operators), D admits unique *retarded/advanced inverses* $G_{\text{ret/adv}} : C_0^\infty(M; S(M)) \rightarrow C_{\text{sc}}^\infty(M; S(M))$ such that:

$$\begin{cases} DG_{\text{ret/adv}} = G_{\text{ret/adv}}D = \mathbb{1}, \\ \text{supp } G_{\text{ret/adv}}u \subset J_\pm(\text{supp } u), \quad u \in C_0^\infty(M; S(M)), \end{cases}$$

where $J_\pm(K)$ are the future/past causal shadows of $K \Subset M$.

Using the fact that D is formally selfadjoint with respect to $(\cdot|\cdot)_M$ and the uniqueness of $G_{\text{ret/adv}}$ we obtain that

$$G_{\text{ret/adv}}^* = G_{\text{adv/ret}},$$

where the adjoint is computed with respect to $(\cdot|\cdot)_M$. One defines then the *causal propagator*

$$G := G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$$

which satisfies

$$(18.8) \quad \begin{cases} DG = GD = 0, \\ \text{supp } Gu \subset J(\text{supp } u), \quad u \in C_0^\infty(M; S(M)), \\ G^* = -G, \end{cases}$$

where $J(K) = J_-(K) \cup J_+(K)$ is the causal shadow of $K \Subset M$.

18.1.6. *The Cauchy problem.* Let $\Sigma \subset M$ be a smooth, space-like Cauchy surface and denote by n its future directed unit normal and by $S(\Sigma)$ the restriction of the spinor bundle $S(M)$ to Σ and

$$\varrho_\Sigma : C^\infty(M; S(M)) \ni \psi \mapsto \psi|_\Sigma \in C^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$$

the restriction to Σ . The Cauchy problem

$$\begin{cases} D\psi = 0, \\ \varrho_\Sigma \psi = f, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \end{cases}$$

is globally well-posed, see eg [M], the solution being denoted by $\psi = U_\Sigma f$. We have, see eg [DG, Thm. 19.63]:

$$(18.9) \quad U_\Sigma f(x) = - \int_\Sigma G(x, y) \gamma(n(y)) f(y) d\text{Vol}_h,$$

where h is the Riemannian metric induced by g on Σ .

We equip $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ with the indefinite Hermitian form

$$(18.10) \quad (f_1|f_2)_\Sigma := \int_\Sigma \bar{f}_1 \cdot \beta f_2 d\text{Vol}_h.$$

For $g \in \mathcal{E}'(\Sigma; S(\Sigma))$, we define $\varrho_\Sigma^* g \in \mathcal{D}'(M; S(M))$ by

$$\int_M \overline{\varrho_\Sigma^* g} \cdot \beta u d\text{Vol}_g := \int_\Sigma \bar{g} \cdot \beta \varrho_\Sigma u d\text{Vol}_h, \quad u \in C^\infty(\Sigma; S(\Sigma)),$$

i.e. ϱ_Σ^* is the adjoint of ϱ_Σ with respect to the scalar products $(\cdot|\cdot)_M$ and $(\cdot|\cdot)_\Sigma$. We can rewrite (18.9) as

$$(18.11) \quad U_\Sigma f = (\varrho_\Sigma G)^* \gamma(n) f, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)).$$

18.1.7. *Cauchy evolution.* Let us assume that M is foliated by a family $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ of space-like smooth Cauchy surfaces, for example the level sets of a *Cauchy time function*, see Subsect. 19.1 for the definition.

Denoting the restriction of $S(M)$ to Σ_t by $S(\Sigma_t)$ and ϱ_{Σ_t} by ϱ_t , one can introduce the *Cauchy evolution*

$$U(t, s) : C_0^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma_s)) \rightarrow C_0^\infty(\Sigma_t; S(\Sigma_t)), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

defined by

$$U(t, s)f = \varrho_t U_{\Sigma_s} f \quad f \in C_0^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma_s)).$$

18.2. **Conformal transformations.** We briefly discuss conformal transformations, and refer to [G-St, 2.7.2] or [G, Sect. 17.13] for details.

Let $c \in C^\infty(M)$ with $c(x) > 0$ and $\tilde{g} = c^{-2}g$. Then the spin and spinor bundles for (M, \tilde{g}) are identical to those for (M, g) . One has:

$$(18.12) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}(X) &= c^{-1}\gamma(X), \quad \tilde{\beta} = c\beta, \\ \tilde{\nabla}_C^S &= \nabla_C^S - \frac{1}{2}c^{-1}\gamma(X)\gamma(\nabla c) + \frac{1}{2}c^{-1}X \cdot dc, \\ \tilde{\not{D}} &= c^{\frac{n+1}{2}} \not{D} c^{\frac{1-n}{2}}, \\ \tilde{D} &:= \tilde{\not{D}} + \tilde{m} = c^{\frac{n+1}{2}} D c^{\frac{1-n}{2}} \quad \text{for } \tilde{m} = cm. \end{aligned}$$

18.3. **Quantization of Dirac equation on curved spacetimes.** We now recall the algebraic quantization of Dirac equations, due to Dimock [D].

18.3.1. *CAR *-algebras.* Let (\mathcal{Y}, ν) be a pre-Hilbert space. The *CAR *-algebra* over (\mathcal{Y}, ν) , denoted by $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$, is the unital complex *-algebra generated by elements $\psi(y)$, $\psi^*(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, with the relations

$$(18.13) \quad \begin{aligned} \psi(y_1 + \lambda y_2) &= \psi(y_1) + \lambda \psi(y_2), \\ \psi^*(y_1 + \lambda y_2) &= \psi^*(y_1) + \lambda \psi^*(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y}, \lambda \in \mathbb{C}, \\ [\psi(y_1), \psi(y_2)]_+ &= [\psi^*(y_1), \psi^*(y_2)]_+ = 0, \\ [\psi(y_1), \psi^*(y_2)]_+ &= \bar{y}_1 \cdot \nu y_2 \mathbb{1}, \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y}, \\ \psi(y)^* &= \psi^*(y), \quad y \in \mathcal{Y}, \end{aligned}$$

where $[A, B]_+ = AB + BA$ is the anti-commutator.

18.3.2. *Quasi-free states.* As usual a *state* on $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ is a linear map $\omega : \text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu) \rightarrow \mathbb{C}$ which is positive and normalized, ie

$$\omega(A^*A) \geq 0, \quad \omega(\mathbb{1}) = 1, \quad A \in \text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu).$$

– a state ω is *quasi-free* if:

$$\begin{aligned} \omega(\prod_{i=1}^n \psi^*(y_i) \prod_{j=1}^m \psi(y'_j)) &= 0, \quad \text{if } n \neq m, \\ \omega(\prod_{i=1}^n \psi^*(y_i) \prod_{j=1}^n \psi(y'_j)) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \omega(\psi^*(y_i) \psi(y'_{\sigma(i)})), \end{aligned}$$

where S_n is the set of permutations of $\{1, \dots, n\}$.

– a quasi-free state is uniquely determined by its *covariances* $\lambda^\pm \in L_h(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*)$, defined by

$$\omega(\psi(y_1)\psi^*(y_2)) =: \bar{y}_1 \cdot \lambda^+ y_2, \quad \omega(\psi^*(y_2)\psi(y_1)) =: \bar{y}_1 \cdot \lambda^- y_2, \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y}.$$

The following two results are well-known, see eg [DG, Sect. 17.2.2].

Proposition 18.1. *Let $\lambda^\pm \in L_h(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*)$. Then the following statements are equivalent :*

- (1) λ^\pm are the covariances of a gauge invariant quasi-free state on $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$;

(2) $\lambda^\pm \geq 0$ and $\lambda^+ + \lambda^- = \nu$.

Proposition 18.2. *A quasi-free state ω on $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ is pure if and only if there exist projections $c^\pm \in L(\mathcal{Y})$ such that*

$$\lambda^\pm = \nu \circ c^\pm, c^+ + c^- = \mathbb{1}.$$

18.3.3. *Pre-Hilbert spaces.* We now recall several equivalent pre-Hilbert spaces appearing in the quantization of the Dirac equation.

Let us denote by $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ the space of smooth, space compact solutions of the Dirac equation

$$D\psi = 0.$$

For $\psi_1, \psi_2 \in \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ we set

$$(18.14) \quad \bar{\psi}_1 \cdot \nu \psi_2 := \int_{\Sigma} i J_{\mu}(\psi_1, \psi_2) n^{\mu} d\text{Vol}_h = (\varrho_{\Sigma} \psi_1 | i\gamma(n) \varrho_{\Sigma} \psi_2)_{\Sigma},$$

where Σ is a smooth space-like Cauchy surface.

Using that $\nabla^{\mu} J_{\mu}(\psi_1, \psi_2) = 0$ the rhs in (18.14) is independent on the choice of Σ . Moreover by (18.3) ν is a positive definite scalar product on $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$.

Setting:

$$(18.15) \quad \bar{f}_1 \cdot \nu_{\Sigma} f_2 := i \int_{\Sigma} \bar{f}_1 \cdot \beta \gamma(n) f_2 d\text{Vol}_h,$$

we obtain that

$$\varrho_{\Sigma} : (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) \rightarrow (C_0^{\infty}(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_{\Sigma})$$

is unitary, with inverse U_{Σ} .

It is also well-known, see eg [D], that $G : C_0^{\infty}(M; S(M)) \rightarrow \text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ is surjective with kernel $DC_0^{\infty}(M; S(M))$ and that

$$G : \left(\frac{C_0^{\infty}(M; S(M))}{DC_0^{\infty}(M; S(M))}, i(\cdot | G \cdot)_M \right) \rightarrow (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$$

is unitary. Summarizing, the maps

$$(18.16) \quad \left(\frac{C_0^{\infty}(M; S(M))}{DC_0^{\infty}(M; S(M))}, i(\cdot | G \cdot)_M \right) \xrightarrow{G} (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) \xrightarrow{\varrho_{\Sigma}} (C_0^{\infty}(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_{\Sigma})$$

are unitary maps between pre-Hilbert spaces.

18.3.4. *CAR*-algebra for Dirac fields.* We denote by $\text{CAR}(D)$ the $*$ -algebra $\text{CAR}(\mathcal{Y}, \nu)$ for (\mathcal{Y}, ν) one of the equivalent pre-Hilbert spaces in (18.16).

We use the Hermitian form $(\cdot | \cdot)_M$ in (18.6) to pair $C_0^{\infty}(M; S(M))$ with $\mathcal{D}'(M; S(M))$ and to identify continuous sesquilinear forms on $C_0^{\infty}(M; S(M))$ with continuous linear maps from $C_0^{\infty}(M; S(M))$ to $\mathcal{D}'(M; S(M))$.

We use the Hermitian form $(\cdot | \cdot)_{\Sigma}$ in (18.10) in the same way on the Cauchy surface Σ .

It is natural to require a weak continuity of the *spacetime covariances* Λ^{\pm} of a state ω on $\text{CAR}(D)$ defined by:

$$(u | \Lambda^+ u)_M := \omega(\psi(u)\psi^*(u)), \quad (u | \Lambda^- u)_M := \omega(\psi^*(u)\psi(u)), \quad u \in C_0^{\infty}(M; S(M)).$$

Therefore one considers states on $\text{CAR}(D)$ whose spacetime covariances satisfy:

$$(18.17) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad \Lambda^{\pm} : C_0^{\infty}(M; S(M)) \rightarrow \mathcal{D}'(M; S(M)) \text{ are linear continuous,} \\ & \text{(ii)} \quad \Lambda^{\pm} \geq 0 \text{ with respect to } (\cdot | \cdot)_M, \\ & \text{(iii)} \quad \Lambda^+ + \Lambda^- = iG, \\ & \text{(iv)} \quad D \circ \Lambda^{\pm} = \Lambda^{\pm} \circ D = 0. \end{aligned}$$

Alternatively, one can define ω by its *Cauchy surface covariances* λ_{Σ}^{\pm} , which satisfy

$$(18.18) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad \lambda_{\Sigma}^{\pm} : C_0^{\infty}(\Sigma; S(\Sigma)) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma; S(\Sigma)) \text{ are linear continuous,} \\ & \text{(ii)} \quad \lambda_{\Sigma}^{\pm} \geq 0 \text{ for } (\cdot|\cdot)_{\Sigma}, \\ & \text{(iii)} \quad \lambda_{\Sigma}^{+} + \lambda_{\Sigma}^{-} = i\gamma(n). \end{aligned}$$

Using (18.11) one can show by the same arguments as for Klein-Gordon fields, see [GOW, Prop. 7.5] that

$$(18.19) \quad \begin{aligned} \Lambda^{\pm} &= (\varrho_{\Sigma} G)^* \lambda_{\Sigma}^{\pm} (\varrho_{\Sigma} G), \\ \lambda_{\Sigma}^{\pm} &= (\varrho_{\Sigma}^* \gamma(n))^* \Lambda^{\pm} (\varrho_{\Sigma}^* \gamma(n)). \end{aligned}$$

We recall that $S(M) \boxtimes S(M) \xrightarrow{\pi \times \pi} M \times M$ is the vector bundle whose fiber over (x, x') is $\text{End}(S_x(M), S_{x'}(M))$, with transition maps naturally inherited from those of $S(M)$.

By the Schwartz kernel theorem, we can identify Λ^{\pm} with distributional sections in $\mathcal{D}'(M \times M; S(M) \boxtimes S(M))$, still denoted by Λ^{\pm} .

18.3.5. *The role of the Cauchy evolution.* Recall from 18.1.7 that we denoted by $U(t, s)$ the Cauchy evolution associated to a foliation by the Cauchy surfaces $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

If ω is a quasi-free state on $\text{CAR}(D)$, then denoting by $\lambda^{\pm}(t)$ its Cauchy surface covariances on Σ_t one has obviously

$$(18.20) \quad \lambda^{\pm}(t) = U(s, t)^* \lambda^{\pm}(s) U(s, t), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

18.3.6. *Hadamard states.* The *wavefront set* of $A \in \mathcal{D}'(M \times M; S(M) \boxtimes S(M))$ is defined in the natural way: introducing local trivializations of $S(M)$ one can assume that $A \in \mathcal{D}'(M \times M; M_N(\mathbb{C}))$ where $N = \text{rank} S(M)$ and the wavefront set of a matrix valued distribution is simply the union of the wavefront sets of its entries.

We will identify $T^*(M \times M)$ with $T^*M \times T^*M$. If $\Gamma \subset T^*M \times T^*M$ then one sets

$$\Gamma' := \{((x, \xi), (x', \xi')) : ((x, \xi), (x', -\xi')) \in \Gamma\}.$$

For example $\text{WF}(\delta(x - x')) = \Delta$, where $\Delta \subset T^*M \times T^*M$ is the diagonal.

We recall that \mathcal{N}^{\pm} are the two connected components of \mathcal{N} , see (18.7).

The following definition of Hadamard states is due to Hollands [Ho].

Définition 18.3. ω is a Hadamard state if

$$\text{WF}(\Lambda^{\pm})' \subset \mathcal{N}^{\pm} \times \mathcal{N}^{\pm}.$$

The following proposition, see [G-St, Prop. 3.8] gives a sufficient condition for the Cauchy surface covariances λ_{Σ}^{\pm} to generate a Hadamard state.

Proposition 18.4. *Let*

$$\lambda_{\Sigma}^{\pm} =: i\gamma(n)c^{\pm}$$

be the Cauchy surface covariances of a quasi-free state ω . Assume that c^{\pm} are continuous from $C_0^{\infty}(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$ to $C^{\infty}(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$ and from $\mathcal{E}'(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$ to $\mathcal{D}'(\Sigma; \mathcal{S}_{\Sigma})$, and that for some neighborhood U of Σ in M we have

$$(18.21) \quad \text{WF}(U_{\Sigma} \circ c^{\pm})' \subset (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma, \text{ over } U \times \Sigma,$$

*where $\mathcal{F} \subset T^*M$ is a conic set with $\mathcal{F} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Then ω is a Hadamard state.*

18.3.7. *Action of conformal transformations.* Let us now study the action of the conformal transformations recalled in Subsect. 18.2. If \tilde{D} is the Dirac operator for \tilde{g} , its causal propagator is

$$\tilde{G} = c^{\frac{n-1}{2}} G c^{-\frac{n+1}{2}}.$$

If we set

$$\begin{aligned} W\tilde{\psi} &= c^{\frac{1-n}{2}} \tilde{\psi}, \quad \tilde{\psi} \in C_0^\infty(M; S(M)), \\ W^*\psi &= c^{\frac{n+1}{2}} \psi, \quad \psi \in C_0^\infty(M; S(M)), \\ Uf &= c^{\frac{n-1}{2}} f, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \end{aligned}$$

then a routine computation gives the following proposition.

Proposition 18.5. *The following diagram is commutative, with all arrows unitary:*

$$\begin{array}{ccccc} \left(\frac{C_0^\infty(M; S(M))}{DC_0^\infty(M; S(M))}, (\cdot | iG \cdot)_M \right) & \xrightarrow{G} & (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu) & \xrightarrow{\varrho_\Sigma} & (C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_\Sigma) \\ \downarrow W^* & & \downarrow W^{-1} & & \downarrow U \\ \left(\frac{C_0^\infty(\tilde{M}; S(M))}{\tilde{D}C_0^\infty(\tilde{M}; S(M))}, (\cdot | i\tilde{G} \cdot)_{\tilde{M}} \right) & \xrightarrow{\tilde{G}} & (\text{Sol}_{\text{sc}}(\tilde{D}), \tilde{\nu}) & \xrightarrow{\tilde{\varrho}_\Sigma} & (C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \tilde{\nu}_\Sigma) \end{array}$$

Let us now consider the action of conformal transformations on quasi-free states.

Let Λ^\pm be the spacetime covariances of a quasi-free state ω for D . Then

$$(18.22) \quad \tilde{\Lambda}^\pm = c^{\frac{n-1}{2}} \Lambda^\pm c^{-\frac{n+1}{2}}$$

are the spacetime covariances of a quasi-free state $\tilde{\omega}$ for \tilde{D} , and

$$\tilde{\lambda}_\Sigma^\pm = (U^*)^{-1} \lambda_\Sigma^\pm U^{-1} = c^{\frac{n-1}{2}} \lambda_\Sigma^\pm c^{\frac{1-n}{2}},$$

if λ_Σ^\pm , resp. $\tilde{\lambda}_\Sigma^\pm$ are the Cauchy surface covariances of ω , resp. $\tilde{\omega}$.

Clearly ω is a Hadamard state iff $\tilde{\omega}$ is.

18.4. The vacuum state for Dirac fields on static spacetimes. The basic example of a state for Dirac fields is the *vacuum state* on static spacetimes. Let us recall its definition, following [DHo].

18.4.1. *Vacuum state associated to a Killing field.* Let (M, g) a globally hyperbolic spacetime with a spin structure. The *Lie derivative* of a spinor field is defined as (see [K]) :

$$(18.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_X \psi &= \nabla_X^S \psi + \frac{1}{8} ((\nabla_a X)_b - (\nabla_b X)_a) \gamma^a \gamma^b \psi, \\ \psi &\in C^\infty(M; S(M)), \quad X \in C^\infty(M; TM). \end{aligned}$$

If X is a complete Killing vector field, and the mass m in (18.5) satisfies $X \cdot dm = 0$, then $[D, \mathcal{L}_X] = 0$, see eg [GHW, Appendix A]. It follows that the flow ϕ_s generated by \mathcal{L}_X preserves $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$ and one can easily show, using (18.4) and (18.23) that it preserves the Hilbertian scalar product ν .

It hence defines a unique strongly continuous unitary group $(e^{isH})_{s \in \mathbb{R}}$ on the completion of $(\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu)$, whose generator H is, by Nelson's invariant domain theorem, the closure of $i^{-1} \mathcal{L}_X$ on $\text{Sol}_{\text{sc}}(D)$.

If Σ is a smooth space-like Cauchy surface, we denote by H_Σ the corresponding generator on the completion of $(C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \nu_\Sigma)$.

The following definition is taken from [DHo].

Définition 18.6. *Assume that*

$$(18.24) \quad \text{Ker } H_\Sigma = \{0\}.$$

The vacuum state ω^{vac} associated to the complete Killing field X is the quasi-free state defined by the Cauchy surface covariances:

$$\lambda^{\pm \text{vac}} := i\gamma(n)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\Sigma}).$$

Unlike the bosonic case, X does not need to be time-like in order to be able to define the associated vacuum state.

18.4.2. *Vacuum state on static spacetimes.* We now discuss the vacuum state on static spacetimes. We will assume that $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ is equipped with the static metric $g = -c^2(x)dt^2 + h(x)dx^2$, where $c \in C^{\infty}(\Sigma; \mathbb{R})$ with $c(x) > 0$ and h is a Riemannian metric on Σ . We set

$$\tilde{g} = c^{-2}g = -dt^2 + \tilde{h}(x)dx^2,$$

which is ultra static. The restriction of $S(M)$ to Σ_t is independent on t and denoted by $S(\Sigma)$, see [G-St, Subsect. 7.1].

We consider a *static Dirac operator*

$$D = \not{D} + m,$$

where $m \in C^{\infty}(\Sigma; \mathbb{R})$ is *independent on t* .

The corresponding Dirac operator on (M, \tilde{g}) is

$$\tilde{D} = \tilde{\not{D}} + \tilde{m}, \quad \tilde{m} = cm.$$

If $(\tilde{e}_j)_{1 \leq j \leq d}$ is a local orthonormal frame for \tilde{h} and $\tilde{e}_0 = \partial_t$, we have setting $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}(\tilde{e}_0)$:

$$\tilde{D} = -\tilde{\gamma}_0(\partial_t - i\tilde{H}_{\Sigma})$$

for

$$(18.25) \quad \tilde{H}_{\Sigma} = i\tilde{\gamma}_0(\tilde{\gamma}(\tilde{e}_j)\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_j}^{\Sigma} + \tilde{m}) =: \tilde{H}_{0\Sigma} + i\tilde{\gamma}_0\tilde{m}.$$

From (18.23), we obtain that $\mathcal{L}_{\tilde{e}_0} = \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_0}^{\Sigma} = \partial_t$ and hence the generator of the Lie derivative w.r.t. the Killing vector field ∂_t equals \tilde{H}_{Σ} on $C_0^{\infty}(\Sigma; S(\Sigma))$. We still denote by \tilde{H}_{Σ} its closure for the Hilbertian scalar product $\tilde{\nu}_{\Sigma}$.

Let us now consider the original Dirac operator D . Using (18.12) one checks that

$$(18.26) \quad D = -c^{-1}\gamma(e_0)(\partial_t - iH_{\Sigma}),$$

$$(18.27) \quad H_{\Sigma} := c^{\frac{1-n}{2}}\tilde{H}_{\Sigma}c^{\frac{n-1}{2}},$$

where $e_a = c^{-1}\tilde{e}_a$. By Prop. 18.5 we know that H_{Σ} with domain $c^{\frac{1-n}{2}}\text{Dom } \tilde{H}_{\Sigma}$ is selfadjoint for the scalar product ν_{Σ} . It equals the generator of the unitary group associated to \mathcal{L}_{∂_t} considered in 18.4.1.

Applying the discussion in 18.3.7 we can define:

Définition 18.7. *Assume that $\text{Ker } H_{\Sigma} = \{0\}$. Then the vacuum state ω^{vac} for D is the quasi-free state with Cauchy surface covariances*

$$\lambda^{\pm \text{vac}} = i\gamma(e_0)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\Sigma}).$$

18.4.3. Massive Dirac operators.

Définition 18.8. *The static Dirac operator D is called massive if*

$$(18.28) \quad 0 \notin \sigma(H_\Sigma).$$

It is a standard fact that if (18.28) holds, then ω^{vac} is a Hadamard state, see eg. [SV2, Thm. 5.1]. Another proof is given in [G-St, Subsect. 7.1]. If $0 \in \sigma(H_\Sigma)$ but $\text{Ker } H_\Sigma = \{0\}$, then one can encounter infrared problems.

Let us give a simple sufficient condition for (18.28). Using the Clifford relations and (18.4) we obtain that

$$\tilde{H}_\Sigma^2 = \tilde{H}_{0\Sigma}^2 + \tilde{\gamma}(\tilde{h}^{-1}d\tilde{m}) + \tilde{m}^2.$$

Since $A = \tilde{\gamma}(\tilde{h}^{-1}d\tilde{m})$ is selfadjoint for $\tilde{\nu}_\Sigma$ with $A^2 = d\tilde{m} \cdot \tilde{h}^{-1}d\tilde{m}$, we obtain that if

$$(18.29) \quad \inf_{\Sigma} \tilde{m}^2 - d\tilde{m} \cdot \tilde{h}^{-1}d\tilde{m} > 0$$

Then $0 \notin \sigma(\tilde{H})$. In terms of c, m (18.29) becomes:

$$(18.30) \quad \inf_{\Sigma} (c^2 m^2 - d(cm) \cdot h^{-1}d(cm)) > 0,$$

Note that (18.30) holds if $c \equiv 1$ and $m(x) \equiv m_0 \neq 0$.

19. DIRAC OPERATORS ON ASYMPTOTICALLY STATIC SPACETIMES

19.1. Asymptotically static spacetimes. We fix an orientable d -dimensional manifold Σ equipped with a reference Riemannian metric k such that (Σ, k) is of bounded geometry, and consider $M = \mathbb{R}_t \times \Sigma_x$, setting $x = (t, x)$, $n = 1 + d$ is even.

19.1.1. Bounded geometry. Roughly speaking a Riemannian manifold (Σ, k) is of bounded geometry if its radius of injectivity is strictly positive and if the metric and all its derivatives, expressed in normal coordinates at a point x , satisfy estimates which are *uniform* with respect to the point x .

The two basic examples are compact Riemannian manifolds and \mathbb{R}^d with the flat metric, but many other non compact Riemannian manifolds are of bounded geometry, like for example asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds.

After fixing a background Riemannian metric, one can define in a canonical way various global spaces, like spaces of bounded tensors, Sobolev spaces, bounded differential operators.

Roughly speaking an object is bounded, if, when expressed in normal coordinates at a base point x , the object and all its derivatives satisfy estimates which are uniform with respect to x .

The main interest for us is that on a Riemannian manifold of bounded geometry one can define a global pseudodifferential calculus, the *Shubin calculus*, which shares several important properties with the pseudodifferential calculus on compact manifolds or the uniform pseudodifferential calculus on \mathbb{R}^d .

19.1.2. Lorentzian metric. We equip M with a Lorentzian metric g of the form

$$(19.1) \quad g = -c^2(x)dt^2 + (dx^i + b^i(x)dt)h_{ij}(x)(dx^j + b^j(x)dt),$$

where $c \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, $c(x) > 0$, $b \in C^\infty(M; T\Sigma)$ and $h \in C^\infty(M; \otimes_s^2 T^*\Sigma)$ is a t -dependent Riemannian metric on Σ .

We recall that $\tilde{t} \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ is called a *time function* if $\nabla \tilde{t}$ is a timelike vector field. It is called a *Cauchy time function* if in addition its level sets are Cauchy hypersurfaces.

By [CC, Thm. 2.1] we know that (M, g) is globally hyperbolic and t is a Cauchy time function.

19.1.3. *Asymptotically static spacetimes.* We consider also two static metrics on M :

$$g_{\text{out/in}} = -c_{\text{out/in}}^2(x)dt^2 + h_{\text{out/in}}(x)dx^2,$$

where $h_{\text{out/in}}$, resp. $c_{\text{out/in}}$ are two Riemannian metrics, resp. smooth functions on Σ such that:

$$(H1) \quad h_{\text{out/in}} \in \text{BT}_2^0(\Sigma, k), \quad h_{\text{out/in}}^{-1} \in \text{BT}_0^2(\Sigma, k), \quad c_{\pm\infty}, c_{\pm\infty}^{-1} \in \text{BT}_0^0(\Sigma, k).$$

Concerning the asymptotic behavior of g when $t \rightarrow \pm\infty$ we assume that

$$(H2) \quad \begin{aligned} h(x) - h_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \text{BT}_2^0(\Sigma, k)), \\ b(x) &\in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; \text{BT}_0^1(\Sigma, k)), \\ c(x) - c_{\text{out/in}}(x) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \text{BT}_0^0(\Sigma, k)), \end{aligned}$$

for some $\mu > 0$, where $\text{BT}_q^p(\Sigma, k)$ is the Fréchet space of bounded q, p -tensors, see eg [Sh] or [G-St, Subsect. 4.1], and the space $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ for \mathcal{F} a Fréchet space is defined in Subsect. 20.2.

In other words the metric g is asymptotic to the static metrics $g_{\text{out/in}}$ when $t \rightarrow \pm\infty$.

For later use we also fix $m \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, representing a variable mass and $m_{\pm\infty} \in C^\infty(\Sigma; \mathbb{R})$ such that

$$(H3) \quad m(x) - m_{\pm\infty}(x) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \text{BT}_0^0(\Sigma, k)).$$

19.1.4. *Orthogonal decomposition.* We recall now the well-known orthogonal decomposition of g associated to the Cauchy time function t . We set

$$v := \frac{g^{-1}dt}{dt \cdot g^{-1}dt} = \partial_t + b^i \partial_{x^i},$$

which using (H1), (H2) is a complete vector field on M . Denoting its flow by ϕ_t we have:

$$\phi_t(0, y) = (t, x(t, 0, y)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \Sigma,$$

where $x(t, s, \cdot)$ is the flow of the time-dependent vector field b on Σ . We also set

$$(19.2) \quad \chi : \mathbb{R} \times \Sigma \ni (t, y) \mapsto (t, x(t, 0, y)) \in \mathbb{R} \times \Sigma.$$

The following lemma is proved in [GW2, Appendix A.4]. Bounded diffeomorphisms on a manifold of bounded geometry are defined for example in [GW2, Def. 3.3].

Lemma 19.1. *Assume (H1), (H2). Then*

$$(19.3) \quad \hat{g} := \chi^* g = -\hat{c}^2(t, y)dt^2 + \hat{h}(t, y)dy^2,$$

for $\hat{c} \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$, $\hat{h} \in C^\infty(\mathbb{R}; T_2^0(\Sigma))$. Moreover there exist bounded diffeomorphisms $x_{\text{out/in}}$ of (Σ, k) such that if:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\text{out/in}} &:= x_{\text{out/in}}^* h_{\text{out/in}}, \\ \hat{c}_{\text{out/in}} &:= x_{\text{out/in}}^* c_{\text{out/in}}, \end{aligned}$$

then:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\text{out/in}} &\in \text{BT}_2^0(\Sigma, k), \quad \hat{h}_{\text{out/in}}^{-1} \in \text{BT}_0^2(\Sigma, k), \\ \hat{c}_{\text{out/in}}, \hat{c}_{\text{out/in}}^{-1} &\in \text{BT}_0^0(\Sigma, k), \end{aligned}$$

and furthermore,

$$\begin{aligned} \hat{h} - \hat{h}_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_2^0(\Sigma, k)), \\ \hat{c} - \hat{c}_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_0^0(\Sigma, k)), \\ \chi^* m - m_{\pm\infty} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_0^0(\Sigma, k)). \end{aligned}$$

After applying the isometry $\chi : (M, \tilde{g}) \xrightarrow{\sim} (M, g)$ in Lemma 19.1, removing the hats to simplify notation and denoting y again by x , we can assume that

$$g = -c^2(t, x)dt^2 + h(t, x)dx^2,$$

with

$$(19.4) \quad \begin{aligned} h - h_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_2^0(\Sigma, k)), \\ c - c_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_0^0(\Sigma, k)), \\ m - m_{\pm\infty} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_0^0(\Sigma, k)), \\ h_{\text{out/in}} &\in \text{BT}_2^0(\Sigma, k), \quad h_{\text{out/in}}^{-1} \text{BT}_0^2(\Sigma, k), \\ c_{\text{out/in}}, c_{\text{out/in}}^{-1} &\in \text{BT}_0^0(\Sigma, k). \end{aligned}$$

19.1.5. *Conformal transformation.* We set

$$\tilde{g} := c^{-2}g = -dt^2 + \tilde{h}(t, x)dx^2$$

and obtain that

$$(19.5) \quad \begin{aligned} \tilde{h} - \tilde{h}_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_2^0(\Sigma, k)), \quad \text{with} \\ \tilde{h}_{\text{out/in}} &= c_{\text{out/in}}^{-2} h_{\text{out/in}} \in \text{BT}_2^0(\Sigma, k), \quad \tilde{h}_{\text{out/in}}^{-1} \text{BT}_0^2(\Sigma, k). \end{aligned}$$

19.2. **Spin structures.** Let us assume that (M, g) admits a spin structure $P\text{Spin}(M, g)$. We denote by $\text{Cl}(M, g)$, $S(M)$ the Clifford and spinor bundles over (M, g) .

By well-known results on conformal transformations of spin structures, see eg [LM, Lemma 5.27], [Hi][G-St, 2.7.2] (M, \tilde{g}) also admits a spin structure and the spinor bundle for (M, \tilde{g}) is equal to $S(M)$.

Before further discussing the spin structure on (M, g) or (M, \tilde{g}) we prove a lemma. We set $\tilde{h}_t = \tilde{h}(t, \cdot)$.

Lemma 19.2. *Let us fix a bounded atlas $(V_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ for (Σ, \tilde{h}_0) .*

Let $\mathcal{F}_i = (e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ oriented orthonormal frames for \tilde{h}_0 over V_i such that $e_{i,j}$ for $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$ are a bounded family in $\text{BT}_0^1(V_i, k)$. Let $\mathcal{F}_i(t) = (e_{i,j}(t))_{1 \leq j \leq d}$ the oriented orthonormal frames for \tilde{h}_t over V_i obtained by parallel transport with respect to ∂_t of \mathcal{F}_i for the metric \tilde{g} . Then:

- (1) $e_{i,j}(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e_{i,j}(t)$ exist and the family $e_{i,j}(\pm\infty)$ for $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$ is bounded in $\text{BT}_0^1(V_i, k)$.
- (2) $\mathbb{R}^\pm \ni t \mapsto e_{i,j}(t) - e_{i,j}(\pm\infty)$ form a bounded family in $\mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}, \text{BT}_0^0(V_i, k))$.

Proof. Let us forget the index i for the moment. Let x^α , $1 \leq \alpha \leq d$ be local coordinates on V obtained from $\psi : V \rightarrow B_d(0, 1)$ and let $x^0 = t$. Denoting by $\Gamma_{0\nu}^\mu$ the Christoffel symbols for g in the local coordinates $(x^\mu)_{0 \leq \mu \leq d}$ over $U = \mathbb{R} \times V$, we have $\Gamma_{0\nu}^\mu = \frac{1}{2}h^{\mu e} \partial_t h_{e\nu}$.

Putting back the index i we see from (19.5) that $\mathbb{R} \in t \mapsto \Gamma_{i,0\nu}^\mu(t)$ form a bounded family in $\mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}, \text{BT}_0^0(V_i))$. Denoting $e_{i,j}(t)$ simply by $u(t)$ and setting $u = u^\alpha \partial_{x^\alpha}$ over V , we obtain that $u(t)$ solves:

$$\begin{cases} \partial_t u^\alpha(t) + \Gamma_{0\beta}^\alpha(t) u^\beta(t) = 0, \\ u^\alpha(0) = e_{i,j}^\alpha. \end{cases}$$

From the above estimates on $\Gamma_{i,0\nu}^\mu(t)$ and standard estimates on solutions of linear differential equations, we obtain (1). It follows that $u(t)$ also solves

$$\begin{cases} \partial_t u^\alpha(t) + \Gamma_{0\beta}^\alpha(t) u^\beta(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u^\alpha(t) = u^\alpha(\pm\infty). \end{cases}$$

Again the same estimates (integrating now from $t = \pm\infty$ instead of from $t = 0$) prove (2) and complete the proof of the lemma. \square

19.2.1. *Spin structures.* Since M is a cartesian product and from the form of \tilde{g} , further simplifications occur, see eg [BGM] or [G-St, Subsect. 2.6].

Let us set $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ and set $\tilde{h}_{\text{in/out}} = \tilde{h}_{\mp\infty}$ for coherence of notation.

We can use the local frames $\mathcal{F}_i(t)$ over V_i to obtain local trivialisations of $P\text{SO}(\Sigma, \tilde{h}_t)$ for $t \in \overline{\mathbb{R}}$. The associated transition functions are independent on t . By the arguments in [G-St, Subsect. 2.6], we obtain unique spin structures on (Σ, \tilde{h}_t) for $t \in \overline{\mathbb{R}}$.

The transition functions of $P\text{Spin}(M, \tilde{g})$ are independent on t and induce a spin structure on (Σ, \tilde{h}_t) whose transition functions are also independent on t . If $S_t(\Sigma)$ denotes the restriction of $S(M)$ to Σ_t , then $S_t(\Sigma)$ is independent on t and denoted by $S(\Sigma)$.

Conversely the spin structure on $(\Sigma, \tilde{h}_{\pm\infty})$ induces a spin structure on $(\Sigma, \tilde{g}_{\pm\infty})$ for $\tilde{g}_{\pm\infty} = -dt^2 + \tilde{h}_{\pm\infty}(x)dx^2$ and by conformal invariance a spin structure on $(M, g_{\text{out/in}})$. The associated spinor bundle is again equal to $S(M)$.

19.3. **Dirac operators.** We consider the Dirac operator locally given by

$$(19.6) \quad D := \not{D} + m, \quad \not{D} = g^{ab}\gamma(e_a)\nabla_{e_b}^S$$

where $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ is some local frame of TM and ∇^S is the spin connection.

19.3.1. *Conformal transformation.* By Subsect. 18.2 we obtain that

$$(19.7) \quad D = c^{-\frac{n+1}{2}} \tilde{D} c^{\frac{n-1}{2}} \text{ for } \tilde{D} = \not{D} + \tilde{m}, \quad \tilde{m} = cm,$$

with

$$(19.8) \quad \begin{aligned} \tilde{m} - \tilde{m}_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \text{BT}_0^0(\Sigma, k)), \\ \tilde{m}_{\text{out/in}} &= c_{\text{out/in}} m_{\text{out/in}}, \quad \tilde{m}_{\text{out/in}}, \tilde{m}_{\text{out/in}}^{-1} \in \text{BT}_0^0(\Sigma, k). \end{aligned}$$

19.3.2. *Asymptotic Dirac operators.* Let

$$D_{\text{out/in}} = \not{D}_{\text{out/in}} + m_{\text{out/in}}$$

the asymptotic Dirac operators obtained from the spin structures $P\text{Spin}(M, g_{\text{out/in}})$.

We will assume

$$(H4) \quad D_{\text{out/in}} \text{ are massive ie } 0 \notin \sigma(H_{\text{out/in}}),$$

see 18.4.3. A sufficient condition for (H4) is given in (18.30).

20. PSEUDODIFFERENTIAL CALCULUS

In this section we will recall Shubin's global pseudodifferential calculus on manifolds of bounded geometry and its time-dependent versions. We refer the reader to [Sh, Ko] for the original exposition and to [GOW] for a more recent one. We are interested in pseudodifferential operators acting on sections of spinor bundles, which are considered in [G-St].

20.1. **Notations.** Let (Σ, k) a Riemannian manifold of bounded geometry see [CG, Ro] or [GOW, Thm. 2.2] for an equivalent definition. We refer the reader to [G-St, Subsect. 4.1] for the definitions below.

We denote by $\text{BT}_q^p(\Sigma, k)$ the space of bounded (q, p) tensors on Σ . Let also $E \xrightarrow{\pi} \Sigma$ a vector bundle of bounded geometry.

We denote by $S_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E))$ the space of $L(E)$ -valued polyhomogenous symbols of order m on Σ , see eg [G-St, Sect. 4.1].

The ideal of smoothing operators is denoted by $\mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(E))$, and one sets

$$\Psi^m(\Sigma; L(E)) = \text{Op}(S_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E))) + \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(E)),$$

for some quantization map Op obtained from a bounded atlas and bounded partition of unity of (Σ, k) .

20.2. Time-dependent pseudodifferential operators. We will also consider time-dependent pseudodifferential operators, adapted to the geometric situation considered in Subsect. 19.2.

We first introduce some notation.

Let \mathcal{F} a Fréchet space whose topology is defined by the seminorms $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{N}$ and $\delta \in \mathbb{R}$. We denote by $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ the space of smooth functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$ such that $\sup_{\mathbb{R}} \langle t \rangle^{k-\delta} \|\partial_t^k f(t)\|_p < \infty$ for all $k, p \in \mathbb{N}$. Equipped with the obvious seminorms, it is itself a Fréchet space.

Note that $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{F}) = \langle t \rangle^\delta \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ so we can always reduce ourselves to $\delta = 0$.

Similarly we denote by $C_b^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ the space of smooth functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$ such that $\sup_{\mathbb{R}} \|\partial_t^k f(t)\|_p < \infty$ for all $k, p \in \mathbb{N}$, with the analogous Fréchet space topology.

We use this notation to define the spaces $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; S_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E)))$, $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(E)))$ and $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(E)))$.

For example if (Σ, k) equals \mathbb{R}^n equipped with the flat metric, then $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; S_{\text{ph}}^m(T^*\mathbb{R}^n))$ is the space of smooth functions $a : \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ such that there exist for $j \in \mathbb{N}$ functions $a_{m-j} : \mathbb{R} \times T^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, homogeneous of degree $m-j$ in ξ with

$$\sup_{\mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^n \setminus \emptyset} \langle t \rangle^{-\delta+k} \langle \xi \rangle^{-m+j+|\beta|} |\partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_{m-j}(t, x, \xi)| < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

and for any $N \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^n \setminus \emptyset} \langle t \rangle^{-\delta+k} \langle \xi \rangle^{-m+N+1+|\beta|} |\partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a - \sum_{j=0}^N a_{m-j}(t, x, \xi))| < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Similarly $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{W}^{-\infty}(\mathbb{R}^n))$ is the space of smooth functions $a : \mathbb{R} \rightarrow B(L^2(\mathbb{R}^n))$ such that

$$\sup_{\mathbb{R}} \langle t \rangle^{-\delta+k} \|\partial_t^k a(t)\|_{B(H^{-m}(\mathbb{R}^n), H^m(\mathbb{R}^n))} < \infty, \quad k, m \in \mathbb{N},$$

where $H^m(\mathbb{R}^n)$ are the usual Sobolev spaces.

For simplicity of notation $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; S_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E)))$ or $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(E)))$ will often simply be denoted by $\mathcal{S}^{\delta, m}$, $\Psi^{\delta, m}$.

20.2.1. Principal symbol. If $A(t) = \text{Op}(a(t)) + R_{-\infty}(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(E)))$ its principal symbol is

$$\sigma_{\text{pr}}(A)(t) := [a](t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; S_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E))) / \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; S_{\text{ph}}^{m-1}(T^*\Sigma; L(E))).$$

$\sigma_{\text{pr}}(A)(t)$ is independent on the decomposition of $A(t)$ as $\text{Op}(a)(t) + R_{-\infty}(t)$ and on the choice of the good quantization map Op . As usual we choose a representative of $\sigma_{\text{pr}}(A)(t)$ which is homogeneous of order m on the fibers of $T^*\Sigma$.

20.2.2. Ellipticity. An operator $A(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(E)))$ is *elliptic* if $\sigma_{\text{pr}}(A)(t, x, \xi)$ is invertible for all $t \in \mathbb{R}$ and

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in T^*\Sigma, |\xi|=1} \|\sigma_{\text{pr}}(A)^{-1}(t, x, \xi)\| < \infty.$$

To define the norm above, one chooses a bounded Hilbert space structure on the fibers of E , the definition being independent on its choice.

Proposition 20.1. *Let $A(t) \in \mathcal{S}^\epsilon(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(E)))$, $\epsilon \in \mathbb{R}, m \geq 0$ elliptic. Then the following holds:*

- (1) $A(t)$ is closeable on $C_0^\infty(\Sigma; E)$ with $\text{Dom } A^{\text{cl}}(t) = H^m(\Sigma; L(E))$.

(2) if there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(A^{\text{cl}}(t)) = \emptyset$ for $t \in \mathbb{R}$, then $A^{-1}(t) \in \mathcal{S}^{-\epsilon}(\mathbb{R}; \Psi^{-m}(\Sigma; L(E)))$ and

$$\sigma_{\text{pr}}(A^{-1})(t) = (\sigma_{\text{pr}}(A))^{-1}(t).$$

Proof. the same result is proved in [G-St, Prop. 5.8], with $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m)$ replaced by $C_b^\infty(\mathbb{R}; \Psi^m)$, where $C_b^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ is defined at the beginning of Subsect. 20.2. Note that $a(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ iff $\langle t \rangle^{-\delta-n} \partial_t^n a(t) \in C_b^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{F})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Using that $\partial_t A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \partial_t A(t) A^{-1}(t)$ and similar identities for higher derivatives of $A^{-1}(t)$ combined with the above remark we obtain the proposition. \square

20.3. Functional calculus.

20.3.1. *Elliptic selfadjoint operators.* Let us fix a bounded Hilbertian structure $(\cdot|\cdot)_E$ on the fibers of E and define the scalar product

$$(u|v) = \int_{\Sigma} (u(x)|v(x))_E dVol_g, \quad u, v \in C_0^\infty(\Sigma; E).$$

Let $H(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(E)))$ be elliptic, symmetric on $C_0^\infty(\Sigma; E)$. Using Prop. 20.1 one easily shows that its closure is selfadjoint with domain $H^m(\Sigma; E)$. Note also that its principal symbol $\sigma_{\text{pr}}(H)(t, x, \xi)$ is selfadjoint for the Hilbertian scalar product on E_x .

20.3.2. *Functional calculus.* We now extend some results in [G-St] on functional calculus for selfadjoint pseudodifferential operators to our situation. We first recall some definitions from [G-St, Subsect. 5.3] about pseudodifferential operators with parameters.

One denotes by $\tilde{S}^m(\Sigma; L(E))$ the space of symbols $b \in C^\infty(\mathbb{R}_\lambda \times T^*\Sigma; L(E))$ such that if $b(\lambda) = b(\lambda, \cdot) \in C^\infty(T^*\Sigma; L(E))$ and $T_i b(\lambda)$ are the pushforwards of $b(\lambda)$ associated to a covering $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of Σ , we have:

$$\partial_\lambda^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_i(\lambda, x, \xi) \in O(\langle \xi \rangle + \langle \lambda \rangle)^{m-|\beta|-\gamma}, \quad (\lambda, x, \xi) \in \mathbb{R} \times T^*B(0, 1)$$

uniformly with respect to $i \in \mathbb{N}$. One denotes by $\tilde{S}_h^m(T^*\Sigma; L(E))$ the subspace of such symbols which are homogeneous w.r.t. (λ, ξ) and by $\tilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E))$ the subspace of polyhomogeneous symbols.

One also defines the ideal $\widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\Sigma; L(E))$ as the set of smooth functions $b : \mathbb{R} \rightarrow \lambda \mapsto b(\lambda) \in \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(E))$ such that

$$\|\partial_\lambda^\gamma b(\lambda)\|_{B(H^{-m}(\Sigma), H^m(\Sigma))} \in O(\langle \lambda \rangle^{-n}), \quad \forall, m, n, \gamma \in \mathbb{N},$$

and set

$$\widetilde{\Psi}^m(\Sigma; L(E)) := \text{Op}(\tilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E))) + \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\Sigma; L(E)).$$

As usual one defines the time-dependent versions of the above spaces:

$$\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \tilde{S}_{\text{ph}}^m(T^*\Sigma; L(E))), \quad \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \widetilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\Sigma; L(E))), \quad \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \widetilde{\Psi}^m(\Sigma; L(E))).$$

We define the *principal symbol* of $A(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \widetilde{\Psi}^m(\Sigma; L(E)))$ as in 20.2.1, using the polyhomogeneity.

Proposition 20.2. *Let $H(t) \in \mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E)))$ elliptic and formally selfadjoint. Let us still denote by $H(t)$ its closure, which is selfadjoint on $H^1(\Sigma; E)$ by Prop. 20.1. Assume that there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H(t)) = \emptyset$ for $t \in I$.*

Then $\lambda \mapsto (H(t) + i\lambda)^{-1}$ belongs to $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \widetilde{\Psi}^{-1}(\Sigma; L(E)))$ with principal symbol $(\sigma_{\text{pr}}(H(t)) + i\lambda)^{-1}$.

Proof. The C_b^∞ version of the proposition is proved in [G-St, Prop. 5.9]. We use the same remark as in the proof of Prop. 20.1 to extend it to the \mathcal{S}^δ case. Details are left to the reader. \square

Proposition 20.3. *Let $H(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E)))$ be elliptic, symmetric on $C_0^\infty(\Sigma; E)$, and let us denote still by $H(t)$ its selfadjoint closure. Assume that there exists $\delta > 0$ such that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(H(t)) = \emptyset$ for $t \in \mathbb{R}$.*

Assume in addition that there exist $H_\infty \in \Psi^1(\Sigma; L(E))$, elliptic symmetric on $C_0^\infty(\Sigma; E)$ with $0 \notin \sigma(H_\infty)$ such that

$$H(t) - H_\infty \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E))).$$

Then

(1) *the spectral projections $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))$ belong to $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(E)))$ and*

$$\sigma_{\text{pr}}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t))) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\sigma_{\text{pr}}(H(t))).$$

Moreover $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H(t)) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_\infty)$ belongs to $\mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(E)))$.

(2) *$S(t) = (H^2(t) + 1)^{\frac{1}{2}}$ belongs to $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E)))$ and*

$$\sigma_{\text{pr}}(S(t)) = |\sigma_{\text{pr}}(H(t))|.$$

Moreover $S(t) - S_\infty$ belongs to $\mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; L(E)))$ for $S_\infty = (H_\infty^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Proof. By Prop. 20.2 we have

$$(20.1) \quad (i\lambda - H(t))^{-1} = \text{Op}(a(t, \lambda)) + R_{-\infty}(t, \lambda),$$

where $a(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \tilde{\mathcal{S}}^{-1}(T^*\Sigma; L(E)))$ and $R_{-\infty}(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \tilde{\mathcal{W}}^{-\infty}(\Sigma; L(E)))$ satisfies:

$$\langle t \rangle^p \|\partial_\lambda^n \partial_t^p R_{-\infty}(t, \lambda)\|_{B(H^{-m}(\Sigma), H^m(\Sigma))} \in O(\langle \lambda \rangle)^{-m}, \quad \forall p, m, n \in \mathbb{N},$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

The principal symbol of $a(t)$ is $(i\lambda - \sigma_{\text{pr}}(H))^{-1}$, which means that

$$(20.2) \quad \text{Op}(a(t, \lambda)) - \text{Op}((i\lambda - \sigma_{\text{pr}}(H)(t))^{-1}) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \tilde{\Psi}^{-2}(\Sigma; L(E))).$$

For $a \neq 0$ we have

$$(20.3) \quad |a|^{-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (a + i\lambda)^{-1} (a - i\lambda)^{-1} d\lambda,$$

hence

$$(20.4) \quad |H(t)|^{-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (H(t) + i\lambda)^{-1} (H(t) - i\lambda)^{-1} d\lambda.$$

From Prop. 20.2 we obtain that $|H(t)|^{-1} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^{-1}(\Sigma; L(E)))$. We also deduce from (20.4) using the second resolvent formula that $|H(t)|^{-1} - |H_\infty|^{-1} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^{-1}(\Sigma; L(E)))$. This implies that $\text{sgn}(H(t)) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^{-0}(\Sigma; L(E)))$ and $\text{sgn}(H(t)) - \text{sgn}(H_\infty) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(E)))$.

Moreover since the principal symbol of $(H(t) + i\lambda)^{-1}$ equals $(\sigma_{\text{pr}}(H(t)) + i\lambda)^{-1}$, applying once more (20.3) we obtain that $\sigma_{\text{pr}}(\text{sgn}(H(t)))$ equals $\text{sgn}(\sigma_{\text{pr}}(H(t)))$.

Writing $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \text{sgn}(\lambda))$ this implies (1). To prove (2) we deduce from (20.3) that

$$(20.5) \quad (a + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (a + s^2 + 1)^{-1} ds = \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} (a + \lambda^2)^{-1} \lambda(\lambda^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} d\lambda,$$

hence

$$(20.6) \quad (H^2(t) + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} (H(t) + i\lambda)^{-1} (H(t) - i\lambda)^{-1} \lambda(\lambda^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} d\lambda.$$

we obtain that $(H^2(t) + 1)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^{-1}(\Sigma; L(E)))$. We also deduce from (20.6) that $(H^2(t) + 1)^{-\frac{1}{2}} - (H_\infty^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^{-1}(\Sigma; L(E)))$. We write then $(H^2(t) + 1)^{\frac{1}{2}} = (H^2 + 1)(H^2(t) + 1)^{-\frac{1}{2}}$ and obtain (2). \square

21. THE IN/OUT VACUUM STATES

In this section we prove Thm. 17.1.

21.1. Reduction of the Dirac operator. In this subsection we consider the Dirac operator \tilde{D} obtained from D by conformal transformation, see 19.1.5, 19.3.1. In order not to overburden the notation, we remove the tildes and denote \tilde{g} , \tilde{D} etc simply by g , D .

We recall that the restriction $S_t(\Sigma)$ of the spinor bundle $S(M)$ to Σ_t is independent of t , and denoted by $S(\Sigma)$.

We recall also that $S(M)$ is equipped by a time positive Hermitian form β see (18.3) and we denote by β_t its restriction to $S(\Sigma)$. Also we denote by $\gamma_t : T_{\Sigma_t}M \rightarrow L(S_t(\Sigma))$ the restrictions of γ to $S(\Sigma_t)$.

We will denote by (x, k) local coordinates on $T^*\Sigma$ and by (t, x, τ, k) local coordinates on T^*M .

The first step consists in reducing the Dirac equation $\tilde{D}\psi = 0$ to a time-dependent Schroedinger equation

$$\partial_t \psi - iH(t)\psi = 0,$$

where $H(t)$ is some time-dependent selfadjoint operator. To this end it is necessary to identify the elements of spinor bundles at different times by parallel transport. We recall that $e_0 = \partial_t$ and $(e_j)_{1 \leq j \leq d}$ are the local frames constructed in Lemma 19.2. We start by an easy proposition.

Proposition 21.1.

- i*) $\gamma_t(e_0) - \gamma_{\pm\infty}(e_0) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma))))$,
- ii*) $\gamma_t(e_j(t)) - \gamma_{\pm\infty}(e_j(\pm\infty)) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma))))$,
- iii*) $\beta_t - \beta_{\pm\infty} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma), S(\Sigma)^*)))$,
- iv*) $\nabla_{e_0}^S - \nabla_{e_0}^{S_{\pm\infty}} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma)))$,
- v*) $\nabla_{e_j(t)}^S - \nabla_{e_j(\pm\infty)}^{S_{\pm\infty}} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma)))$.

Proof. We fix a bounded atlas $(V_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of (Σ, h_0) and set $U_i = \mathbb{R} \times V_i$. We fix a bounded family $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of oriented orthonormal frames for h_0 over V_i and denote by $\mathcal{F}_i(t) = (e_{i,j}(t))_{1 \leq j \leq d}$ the orthonormal frames obtained by parallel transport as in Lemma 19.2. Since $e_0 = \partial_t$, $\mathcal{E}_i = (e_{i,a})_{0 \leq a \leq d}$ are then oriented, time-oriented orthonormal frames for g over $U_i = \mathbb{R} \times V_i$.

We use the spin frames $\mathcal{B}_i(t) = (E_{i,A}(t))_{1 \leq A \leq N}$ of $S(\Sigma)$ associated to the frames $\mathcal{E}_i(t) = (e_{i,a}(t))_{0 \leq a \leq d}$ over $\{t\} \times V_i$. From the estimates in Lemma 19.2, we obtain that $\mathcal{B}_i(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{B}_i(t)$ exist and that

$$(21.1) \quad \begin{aligned} E_{i,A}(\pm\infty) &\in C_b^\infty(V_i, S(\Sigma)), \\ E_{i,A}(t) - E_{i,A}(\pm\infty) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V_i, S(\Sigma))) \text{ uniformly w.r.t. } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

We recall from 19.2.1 that from the transition functions $\mathbf{o}_{ij}(\pm\infty) : V_{ij} \rightarrow \text{SO}(d)$ one obtains the spin structures $P\text{Spin}(\Sigma; h_{\pm\infty})$ introduced above. The frames $\mathcal{B}_i(\pm\infty)$ are the frames associated to the $\mathcal{E}_i(\pm\infty)$ for this spin structure.

Let us now forget the index i and denote by $(\psi^A)_{1 \leq A \leq N} \in \mathbb{C}^N$ the components of ψ in the frame \mathcal{B} . The dual frames are as usual denoted by $(e^a)_{0 \leq a \leq d}$, $(E^A)_{1 \leq A \leq N}$ so for example $\psi^A = \psi \cdot E^A$.

Denoting by $\gamma_t(u)$ the matrix of $\gamma_t(u)$ in the frame $\mathcal{B}(t)$, we have also

$$(21.2) \quad \gamma_t(u) = \gamma_a u^a(t), \quad u^a(t) := u \cdot e^a(t).$$

where $\gamma_a \in M_N(\mathbb{C})$ for $0 \leq a \leq d$ are the usual gamma matrices. Using Lemma 19.2 and (21.1) we obtain that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_t(e_a(t)) \in L(S(\Sigma))$ exist and that

$$(21.3) \quad \gamma_t(e_a(t)) - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_t(e_a(t)) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma))))).$$

If we reintroduce the index i and set $V = V_i$, then the seminorms in (21.3) are uniform with respect to $i \in \mathbb{N}$. Because of (21.2), the limits $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_t(e_a(t))$ are equal to $\gamma_{\pm\infty}(e_a(\pm\infty))$. This proves *ii*). *i*) is proved similarly.

Let us now denote by β_t the matrix of β_t in the frame $\mathcal{B}(t)$. We have

$$\beta_t = \beta$$

where $\beta \in M_N(\mathbb{C})$ is a Hermitian matrix such that

$$\beta \gamma_a = -\gamma_a^* \beta, \quad i\beta \gamma_0 > 0.$$

This implies as above that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta_t$ exist and

$$(21.4) \quad \beta_t - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta_t \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V; L(S(\Sigma), S(\Sigma)^*))).$$

Again because of (21.2) the limits $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta_t$ are equal to $\beta_{\pm\infty}$, which proves *iii*).

Finally, see eg [G-St, 2.5.6] we have:

$$(21.5) \quad \nabla_{e_a}^S \psi^A = \partial_a \psi^A + \sigma_{aC}^A \psi^C,$$

where

$$\partial_a f = e_a \cdot df, \quad \sigma_{aC}^A = E^A \cdot \sigma_a E_C, \quad \sigma_a = \frac{1}{4} \Gamma_{ab}^c \gamma(e_c) g^{bd} \gamma(e_d), \quad \Gamma_{ab}^c = \nabla_{e_a} e_b \cdot e^c.$$

Using (19.5) and the properties of $(e_j(t))_{1 \leq j \leq d}$ in Lemma 19.2 we obtain by a routine computation that

$$(21.6) \quad \begin{aligned} \Gamma_{0b}^0(t) = \Gamma_{00}^c(t) = 0, \quad \Gamma_{ab}^0(t), \quad \Gamma_{0b}^a(t) &\in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; C_b^\infty(V)), \\ \Gamma_{ab}^c(t) - \Gamma_{ab}^c(\pm\infty) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; C_b^\infty(V)) \text{ if } a, b, c \neq 0. \end{aligned}$$

If we reintroduce the index i and set $V = V_i$, then the seminorms in (21.6) are uniform with respect to $i \in \mathbb{N}$. Therefore the limits $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \nabla_{e_j(t)}^S$ exist and

$$\nabla_{e_j(t)}^S - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \nabla_{e_j(t)}^S \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma))).$$

Using (21.5) we obtain also that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \nabla_{e_j(t)}^S = \nabla^{S\pm\infty}(e_j(\pm\infty))$, which proves *v*). The proof of *iv*) is similar. \square

21.1.1. *Identification by parallel transport.* For $f \in C^\infty(\Sigma_s; S(\Sigma_s))$ we denote by $\mathcal{T}(s)f = \psi$ the solution of

$$(21.7) \quad \begin{cases} \nabla_{\partial_t}^S \psi = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \Sigma, \\ \psi|_{\Sigma_s} = f, \end{cases}$$

and set

$$\mathcal{T}(t, s)f = \mathcal{T}(s)f|_{\Sigma_t},$$

$$(21.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{T} : C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(\Sigma, S(\Sigma))) &\rightarrow C^\infty(M; S(M)) \\ \psi(t) &\mapsto (\mathcal{T}\psi)(t) = |h_t|^{-\frac{1}{4}} |h_0|^{\frac{1}{4}} \mathcal{T}(t, 0)\psi(t), \end{aligned}$$

We denote by ν_0 the Hilbertian scalar product

$$\bar{f} \cdot \nu_0 f := i \int_{\Sigma} \bar{f} \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) f |h_0|^{\frac{1}{2}} dx, \quad f \in C_0^\infty(\Sigma, S(\Sigma)).$$

Using (18.4) we obtain the following lemma, see [G-St, Lemma 6.1].

Lemma 21.2. *One has*

- (1) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_0)\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_0)$, $t, s \in I$,
- (2) $\mathcal{T}(s, t)\gamma_t(e_j(t))\mathcal{T}(t, s) = \gamma_s(e_j(s))$, $t, s \in I$,
- (3) $\mathcal{T}(t, s)^*\beta_t\mathcal{T}(t, s) = \beta_s$, $t, s \in I$.

21.1.2. *Reduction of the Dirac operator.*

Proposition 21.3. *Let*

$$D := \mathcal{T}^{-1}D\mathcal{T}.$$

Then

- (1) *the map*

$$\mathcal{T} : (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu_0) \xrightarrow{\sim} (\text{Sol}_{\text{sc}}(D), \nu_0)$$

is unitary.

- (2) *We have*

$$D = -\gamma_0(e_0)\partial_t + i\gamma_0(e_0)H(t),$$

where $H(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}, \Psi^1(\Sigma, S(\Sigma)))$ has the following properties:

$$(2i) \quad \sigma_{\text{pr}}(H(t))(x, k) = -\gamma_0(e_0)\gamma_0(h_t(x)^{-1}k).$$

(2ii) there exist $H_{\pm\infty} \in \Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))$ elliptic, formally selfadjoint for ν_0 such that

$$H(t) - H_{\pm\infty} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; \Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))).$$

$H_{\pm\infty}$ is selfadjoint with domain $H^1(\Sigma; S(\Sigma))$ and $0 \notin \sigma(H_{\pm\infty})$.

(2iii) $H(t)$ is formally selfadjoint for ν_0 and selfadjoint with domain $H^1(\Sigma; S(\Sigma))$.

Proof. (1) is obvious since $\mathcal{T}(0, 0) = \mathbb{1}$. We have $\mathcal{T}^{-1}\gamma(e_0)\mathcal{T} = \gamma_0(e_0)$ by Lemma 21.2 and

$$(21.9) \quad \mathcal{T}\partial_t\mathcal{T}^{-1} = \nabla_{e_0}^S - \frac{1}{4}\partial_t|h_t||h_t|^{-1}.$$

If we fix over some open set $U = \mathbb{R} \times V$, a local oriented and time oriented orthonormal frame $(e_a)_{0 \leq a \leq d}$ as in Lemma 19.2, we have

$$(21.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}D\mathcal{T} &= -\gamma_0(e_0)\partial_t + i\gamma_0(e_0)H(t), \\ H(t) &= \mathcal{T}^{-1}H(t)\mathcal{T} + \frac{1}{4}\partial_t|h_t||h_t|^{-1}, \text{ for} \\ H(t) &:= i\gamma_t(e_0)\gamma_t(e_j(t))\nabla_{e_j(t)}^S + i\gamma_t(e_0)m, \end{aligned}$$

where in the second line we sum only over $1 \leq j \leq d$.

Let us now prove the properties of $H(t)$ stated in (2). By Prop. 21.1 we obtain that

$$(21.11) \quad H(t) - H_{\pm\infty} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; \Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))),$$

for

$$(21.12) \quad H_{\text{out/in}} = i\gamma_{\infty}(e_0)(\gamma_{\infty}(e_j(\text{out/in}))\nabla_{e_j(\text{out/in})}^{\text{out/in}} + m_{\text{out/in}}).$$

Let us now consider the maps $\mathcal{T}(t, s)$. We have

$$\nabla_{e_0}^S \psi = \partial_t \psi + \frac{1}{4}\Gamma_{0b}^a \gamma_a \gamma^b \psi = \partial_t \psi,$$

since $\nabla_{e_0} e_a = 0$. It follows that the matrix of $\mathcal{T}(t, s)$ in the bases $\mathcal{B}(s)$ and $\mathcal{B}(t)$ equals the identity matrix. Using then (21.1) we obtain that the limits $\mathcal{T}(\pm\infty, 0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{T}(t, 0) \in C_b^{\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma)))$ exist and that

$$(21.13) \quad \mathcal{T}(t, 0) - \mathcal{T}(\pm\infty, 0) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^{\pm}; C_b^{\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma)))).$$

Combining (21.11) and (21.13), we obtain that

$$(21.14) \quad H_{\text{out/in}} := \mathcal{T}(0, \pm\infty)|h_{\text{out/in}}|^{\frac{1}{4}}|h_0|^{-\frac{1}{4}}H_{\pm\infty}|h_0|^{\frac{1}{4}}|h_{\text{out/in}}|^{-\frac{1}{4}}\mathcal{T}(\pm\infty, 0)$$

belongs to $\Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))$ and

$$(21.15) \quad \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_{\text{out/in}} \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; L(S(\Sigma)))).$$

The principal symbol of $\mathbf{H}(t)$ is clearly equal to $-\gamma_0(e_0)\gamma_0(h_t(x)^{-1}k)$, which proves (2i).

Let us now prove the remaining parts of (2ii). From (18.25) we obtain that $\mathbf{H}_{\pm\infty}$ is the spatial part of the Dirac operator for the static metric $g_{\pm\infty}$. Using hypothesis (H4) (and remembering that we removed the tildes) we obtain that $0 \notin \sigma(H_{\pm\infty})$. The selfadjointness of $\mathbf{H}_{\text{out/in}}$ on $H^1(\Sigma; S(\Sigma))$ follows by the usual ellipticity argument.

Finally we know that if $D\psi = 0$ then

$$\int_{\Sigma} \bar{\psi}(t, \cdot) \cdot \beta_t \gamma_t(e_0) \psi(t, \cdot) |h_t|^{\frac{1}{2}} dx$$

is independent on t , hence if $\tilde{\psi} = \mathcal{T}^{-1}\psi$ we obtain using

$$\mathcal{T} \partial_t \mathcal{T}^{-1} = \nabla_{e_0}^S - \frac{1}{4} \partial_t |h_t| |h_t|^{-1}$$

that

$$\int_{\Sigma} \bar{\tilde{\psi}}(t, \cdot) \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) \tilde{\psi}(t, \cdot) |h_0|^{\frac{1}{2}} dx$$

is independent on t . Since $\partial_t \tilde{\psi} = i\mathbf{H}(t)\tilde{\psi}$ this implies that $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}^*(t)$ on $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ for ν_0 . The fact that (the closure of) $\mathbf{H}(t)$ is then selfadjoint on $H^1(\Sigma; S(\Sigma))$ follows from the standard argument, using the ellipticity of $\mathbf{H}(t)$. \square

21.2. Some preparations. The space $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma; S(\Sigma))$ is equipped with the Hilbertian scalar product

$$\bar{\psi} \cdot \nu \psi = \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} \bar{\psi} \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) \psi dt |h_0|^{\frac{1}{2}} dx,$$

while $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ is equipped with

$$(21.16) \quad \bar{f} \cdot \nu_0 f = \int_{\Sigma} \bar{f} \cdot \beta_0 \gamma_0(e_0) f |h_0|^{\frac{1}{2}} dx.$$

Adjoints of operators will always be computed with respect to these scalar products. Our reference Hilbert space is

$$\mathcal{H} = L^2(\Sigma; S(\Sigma)),$$

equal to the completion of $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ for ν_0 .

The following lemma is the analog of [G-St, Lemma 6.3].

Lemma 21.4. *There exists $R_{-\infty} \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; S(\Sigma)))$ with $R_{-\infty}(t) = R_{-\infty}(t)^*$ and $\delta > 0$ such that*

$$\sigma(\mathbf{H}(t) + R_{-\infty}(t)) \cap [-\delta, \delta] = \emptyset.$$

Proof. we follow the proof in [G-St, Lemma 6.3]. By Prop. 21.3 (2), we know that there exists $\delta > 0$ such that $\sigma(\mathbf{H}(t)) \cap [-\delta, \delta] = \emptyset$ for $|t| \gg 1$, so the modification $R_{-\infty}(t)$ can be taken compactly supported in t . \square

21.2.1. *Unitary group.* Let us denote by $U(t, s)$, $s, t \in I$ the unitary evolution generated by $H(t)$, ie the solution of

$$\begin{cases} \partial_t U(t, s) = iH(t)U(t, s), \\ \partial_s U(t, s) = -iU(t, s)H(s), \\ U(s, s) = \mathbb{1}. \end{cases}$$

The properties of $H(t)$ imply that $U(t, s)$ is well-defined by a classical result of Kato, see eg [SG].

Lemma 21.5. $U(t, s)$ are uniformly bounded in $B(H^m(\Sigma; S(\Sigma)))$ for $t, s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

Proof. Let us set

$$S(t) := (H^2(t) + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad S_{\text{out/in}} := (H_{\text{out/in}}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

By Prop. 20.3 we obtain that

$$(21.17) \quad \begin{aligned} S(t) &\in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma))), \\ S(t) - S_{\text{out/in}} &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^1(\Sigma; S(\Sigma))), \end{aligned}$$

and $\sigma_{\text{pr}}(S(t))(x, k) = (k \cdot h_t^{-1}(x)k)^{\frac{1}{2}}$. This implies that

$$C_m^{-1} \|S^m(t)u\|_0 \leq \|u\|_m \leq C_m \|S^m(t)u\|_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

where we denote by $\|\cdot\|_m$ the norm in $H^m(\Sigma; S(\Sigma))$.

For $u \in S^m(s)C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ we set

$$f(t) = \|U(s, t)S^m(t)U(t, s)S^{-m}(s)u\|_0,$$

which is finite since $U(t, s)$ preserves $C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$. We have

$$\begin{aligned} |f'(t)| &\leq \|U(s, t)\partial_t S^m(t)U(t, s)S^{-m}(s)u\|_0 \\ &= \|U(s, t)\partial_t S^m(t)S^{-m}(t)U(t, s)U(s, t)S^m(t)U(t, s)S^{-m}(s)u\|_0 \\ &\leq \|U(s, t)\partial_t S^m(t)S^{-m}(t)U(t, s)\|_{B(\mathcal{H})} f(t) \leq Ct^{-1-\mu} f(t), \end{aligned}$$

where we use (21.17) in the last inequality. By Gronwall's inequality we obtain that $f(t) \leq Cf(s)$ for $t, s \in \mathbb{R}$ hence

$$\begin{aligned} &\|S^m(t)U(t, s)S^{-m}(s)u\| \\ &= \|U(s, t)S^m(t)U(t, s)S^{-m}(s)u\| \leq C\|u\|, \quad u \in S^m(s)C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma)), \end{aligned}$$

which proves the lemma since $S^m(s)C_0^\infty(\Sigma; S(\Sigma))$ is dense in $L^2(\Sigma; S(\Sigma))$. \square

21.2.2. *Some preparations.* We next introduce some classes of maps between pseudodifferential operators. These classes are similar to the ones considered in [G-St, Subsect. 6.3], with the behavior for large times taken into account.

We will use the short hand notation introduced in Subsect. 20.2 and denote $\mathcal{S}^\delta(\mathbb{R}; \Psi^m(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ simply by $\mathcal{S}^{\delta, m}$. We set $\mathcal{S}^{\infty, \infty} = \bigcup_{\delta, m \in \mathbb{R}} \mathcal{S}^{\delta, m}$.

Définition 21.6. Let $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $p \in \mathbb{R}$. We denote by $\mathcal{F}_{-\delta, -p}$ the set of maps $F : \mathcal{S}^{0, 0} \rightarrow \mathcal{S}^{\infty, \infty}$ such that

$$F : \mathcal{S}^{-\mu, -1} \rightarrow \mathcal{S}^{-\mu - \delta(\mu), -p}, \quad \forall \mu > 0,$$

and:

$$R_1 - R_2 \in \mathcal{S}^{-\mu - \epsilon, -1 - j} \Rightarrow F(R_1) - F(R_2) \in \mathcal{S}^{-\mu - \delta(\mu) - \epsilon, -p - j}, \quad \forall \epsilon > 0, j \in \mathbb{N}.$$

An element of $\mathcal{F}_{-\delta, -p}$ will be denoted by $F_{-\delta, -p}$. The following proposition is the analog of [GW1, Lemma A.1], [G-St, Prop. 6.6]. It is an abstract formulation of an ubiquitous argument in pseudodifferential calculus, consisting in solving recursive equations to determine successive terms in the symbolic expansion of a pseudodifferential operators.

Proposition 21.7. *Let $A \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -1}$, $\mu_1 > 0$ and $F_{0, -2} \in \mathcal{F}_{0, -2}$. Then there exists a solution $R \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -1}$, unique modulo $\mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}$ of the equation:*

$$R = A + F_{0, -2}(R) \text{ mod } \mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}.$$

Proof. Let us denote $F_{0, -2}$ simply by F . We set $S_0 = A$, $S_n = A + F(S_{n-1})$ for $n \geq 1$. We have $S_1 - S_0 = F(A)$ and $S_n - S_{n-1} = F(S_{n-1}) - F(S_{n-2})$. Since $F \in \mathcal{F}_{0, -2}$ we obtain by induction that $S_n - S_{n-1} \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -(n+1)}$. We take $R \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -1}$ such that $R \sim S_0 + \sum_0^\infty S_n - S_{n-1}$ which solves the equation modulo $\mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}$. If R_1, R_2 are two solutions then $R_1 - R_2 = F(R_1) - F(R_2)$ modulo $\mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}$ hence using that $F \in \mathcal{F}_{0, -2}$ we obtain by induction on n that $R_1 - R_2 \in \mathcal{S}^{-\mu_1, -n}$ for all $n \in \mathbb{N}$ which proves uniqueness modulo $\mathcal{S}^{-\mu_1, -\infty}$. \square

We now collect some useful properties of the sets $\mathcal{F}_{-\delta, -p}$.

Lemma 21.8. (1) *If $A \in \mathcal{S}^{-\rho, k}$ and $F_{-\delta, -p} \in \mathcal{F}_{-\delta, -p}$, then the maps*

$$AF_{-\delta, -p} : R \mapsto AF_{-\delta, -p}(R),$$

$$F_{-\delta, -p}A : R \mapsto F_{-\delta, -p}(R)A$$

belong to $\mathcal{F}_{-\delta-\rho, -p+k}$ for $k \leq p$.

(2) *If $F_{-\delta_i, -p_i} \in \mathcal{F}_{-\delta_i, -p_i}$ then the map*

$$F_{-\delta_1, -p_1}F_{-\delta_2, -p_2} : R \mapsto F_{-\delta_1, -p_1}(R)F_{-\delta_2, -p_2}(R)$$

belongs to $\mathcal{F}_{-\delta_1-\delta_2-\mu, -p_1-p_2}$, where μ is the map $\mu \mapsto \mu$.

(3) *the map $R \rightarrow R^p$ belongs to $\mathcal{F}_{-(p-1)\mu, -p}$ for $p \in \mathbb{N}^*$.*

(4) *the map $R \mapsto e^R$ belongs to $\mathcal{F}_{0, 0}$.*

(5) *one has $e^R = 1 + R + F_{-\mu, -2}(R)$, where $F_{-\mu, -2} \in \mathcal{F}_{-\mu, -2}$.*

Proof. (1) and (2) are easy. We check that $R \mapsto R$ belongs to $\mathcal{F}_{0, -1}$ and use then (2) to obtain (3). To prove (4) we write $e^R = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} R^n$ and obtain that $e^R \in \mathcal{S}^{0, 0}$ if $R \in \mathcal{S}^{-\mu, -1}$. We have

$$e^{R_1} - e^{R_2} = \int_0^1 e^{\theta R_1} (R_1 - R_2) e^{(1-\theta)R_2} d\theta$$

and obtain that $e^{R_1} - e^{R_2} \in \mathcal{S}^{-\mu-\epsilon, -1-j}$ if $R_1 - R_2 \in \mathcal{S}^{-\mu-\epsilon, -1-j}$, which completes the proof of (4). To prove (5) we write

$$e^R = \mathbb{1} + R + \int_0^1 (1-\theta)R^2 e^{\theta R} d\theta =: 1 + R + F(R)$$

and obtain by (2), (3) and (4) that $F \in \mathcal{F}_{\mu, -2}$. \square

21.3. Construction of some projections. We now follow the constructions in [G-St, Subsect. 6.4], adapting the results to our framework.

Proposition 21.9. *There exist time-dependent projections*

$$P^\pm(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$$

and time-dependent operators

$$R(t) \in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^{-1}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$$

such that

- (1) $P^\pm(t) = P^\pm(t)^*$, $P^+(t) + P^-(t) = \mathbb{1}$;
- (2) $P^\pm(t) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm, \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma))))$;
- (3) $R(t) = R^*(t)$;
- (4) $\partial_t P^\pm(t) + [P^\pm(t), i\tilde{\mathbf{H}}(t)] \in \mathcal{S}^{-1-\mu}(\mathbb{R}; \Psi^{-\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ for

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = e^{iR(t)}\mathbf{H}(t)e^{-iR(t)} + i^{-1}\partial_t e^{iR(t)}e^{-iR(t)}$$

(5)

$$WF(\mathbf{U}(\cdot, 0)e^{-iR(0)}P^\pm(0)e^{iR(0)})' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma,$$

for $\mathcal{F} = \{k = 0\} \subset T^*M$.

Proof. we follow the proof of [G-St, Prop.6.8], taking into account the time decay of the various operators.

Step 1. In Step 1 we replace $\mathbf{H}(t)$ by $\hat{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{H}(t) + R_{-\infty}(t)$ as in Lemma 21.4. Let $\hat{\mathbf{U}}(t, s)$ the unitary group with generator $\hat{\mathbf{H}}(t)$. From Lemma 21.5 and Duhamel's formula we obtain that $\mathbf{U}(t, s) - \hat{\mathbf{U}}(t, s) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma; L(S(\Sigma))))$ so we can replace $\mathbf{H}(t)$ by $\hat{\mathbf{H}}(t)$. Denoting $\hat{\mathbf{H}}(t)$ again by $\mathbf{H}(t)$ we can assume without loss of generality that $[-\delta, \delta] \cap \sigma(\mathbf{H}(t)) = \emptyset$ for $t \in \mathbb{R}$.

By Prop. 20.3 the projections

$$P^\pm(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}(t))$$

are well defined, selfadjoint with

$$(21.18) \quad \begin{aligned} P^\pm(t) &\in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma)))) \\ P^\pm(t) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) &\in \mathcal{S}^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; \Psi^0(\Sigma; L(S(\Sigma)))) \end{aligned}$$

so properties (1) and (2) are satisfied. We have also

$$(21.19) \quad \sigma_{\text{pr}}(P^\pm)(t, x, k) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\sigma_{\text{pr}}(\mathbf{H})(t, x, k)).$$

Since $\sigma_{\text{pr}}(\mathbf{H}(t, x, k)) = -\gamma_0\gamma(h_t^{-1}(x)k)$, we obtain using the Clifford relations that:

$$\sigma_{\text{pr}}(P^\pm)(t, x, k)\sigma_{\text{pr}}(\mathbf{H})(t, x, k) = \pm\epsilon(t, x, k)\sigma_{\text{pr}}(P^\pm)(t, x, k),$$

for $\epsilon(t, x, k) = (k \cdot h_t^{-1}(x)k)^{\frac{1}{2}}$. By symbolic calculus this implies that

$$(21.20) \quad P^\pm(t)\mathbf{H}(t) = \pm\epsilon(t, x, D_x)P^\pm(t) + R_0^\pm(t),$$

where $R_0^\pm(t) \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}; \Psi^0(\Sigma; S(\Sigma)))$.

Step 2. In Step 2 we find $R(t)$ such that (4) is satisfied. For ease of notation we denote simply by A a time-dependent pseudodifferential operator $A(t)$. By Lemma 21.8 we obtain easily that for $\hat{\mathbf{H}}(t)$ defined in (4) we have:

$$(21.21) \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + [R, i\mathbf{H}] + F_{-\mu, -1}(R).$$

We will look for R of the form

$$(21.22) \quad R = T(S) = P^+SP^+ + P^-S^*P^-, \quad S \in \mathcal{S}^{0, -1}.$$

Note that if $F_{-\delta, -p} \in \mathcal{F}_{-\delta, -p}$ then the map $S \mapsto F_{-\delta, -p}(T(S))$ belongs also to $\mathcal{F}_{-\delta, -p}$ (note that the map $S \mapsto S^*$ belongs to $\mathcal{F}_{0, -1}$).

Since P^\pm are projections we have

$$\begin{aligned} &\partial_t P^\pm + [P^\pm, i\tilde{\mathbf{H}}] \\ &= P^+(\partial_t P^\pm + [P^\pm, i\tilde{\mathbf{H}}])P^- + P^-(\partial_t P^\pm + [P^\pm, i\tilde{\mathbf{H}}])P^+. \end{aligned}$$

Since the second term in the rhs above is the adjoint of the first, it suffices to find S such that

$$(21.23) \quad P^+(\partial_t P^+ + [P^+, i\tilde{\mathbf{H}}])P^- \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -\infty}.$$

Using (21.21) we obtain since $[P^\pm, \mathbf{H}] = 0$:

$$\begin{aligned} & P^+ \left(\partial_t P^+ + [P^+, i\tilde{\mathbf{H}}] \right) P^- \\ &= P^+ (\partial_t P^+ + P^+ \mathbf{H} P^+ S - S P^- \mathbf{H} P^- + F_{-\mu, -1}(S)) P^- \end{aligned}$$

We use now (21.20) denoting the scalar operator $\epsilon(t, x, D_x) + m^2$ for $m \gg 1$ simply by ϵ and obtain:

$$\begin{aligned} & P^+ \mathbf{H} P^+ S - S P^- \mathbf{H} P^- = \epsilon S + S \epsilon + R_0^+ S - S R_0^- \\ &= 2\epsilon S + [S, \epsilon] + R_0^+ S - S R_0^-. \end{aligned}$$

The maps $S \mapsto R_0^+ S$, $S \mapsto S R_0^-$ belong to $\mathcal{F}_{0, -1}$ by Lemma 21.8, as the map $S \mapsto [\epsilon, S]$, since ϵ is scalar.

Therefore the equation (21.23) can be rewritten as

$$\partial_t P^+ + 2\epsilon S + F_{0, -1}(S) \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -\infty},$$

or equivalently as

$$(21.24) \quad S + (2\epsilon)^{-1} \partial_t P^+ + -F_{0, -2}(S) \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -\infty}.$$

where $F_{0, -2} : S \mapsto -(2\epsilon)^{-1} F_{0, -1}(S)$ belongs to $\mathcal{F}_{0, -2}$. We apply Prop. 21.7 to solve (21.24). We note that $-(2\epsilon)^{-1} \partial_t P^+ \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -1}$ and we find $S \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -1}$ such that

$$\partial_t P^+ + 2\epsilon S + F_{0, -1}(S) \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -\infty}$$

and hence

$$\partial_t P^+ + [P^+, i\tilde{\mathbf{H}}] = R_{-\infty} \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -\infty}.$$

We have hence proved (4). Finally (5) is proved exactly as in [G-St, Prop. 6.8]. \square

21.4. The in/out vacua for D . In this subsection we denote again by \tilde{g} , \tilde{D} etc the objects obtained from g , D by conformal transformation. For example the scalar product in (21.16) is now denoted $\tilde{\nu}_0$.

We recall also from 18.1.7 that $U(t, s)$ is the Cauchy evolution for D associated to the foliation $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. We denote by $L^2(\Sigma_t; S(\Sigma))$ the completion of $C_0^\infty(\Sigma_t; S(\Sigma))$ for the scalar product

$$\bar{f} \cdot \nu_t f = i \int_{\Sigma_t} \bar{f} \cdot \beta \gamma(n) dVol_{h_t}.$$

By the facts recalled in (18.3.3) $U(t, s) : L^2(\Sigma_s; S(\Sigma)) \rightarrow L^2(\Sigma_t; S(\Sigma))$ is unitary. We denote by $\tilde{U}(t, s)$ the analogous Cauchy evolution for \tilde{D} . By (18.12) we have:

$$(21.25) \quad U(t, s) = c^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(t, s) c^{\frac{n-1}{2}}.$$

From the definition (21.12) of $\tilde{H}_{\pm\infty}$ we obtain that the asymptotic Dirac operator $\tilde{D}_{\text{out/in}}$ associated to the ultrastatic metric $\tilde{g}_{\text{out/in}}$ equals

$$\tilde{D}_{\text{out/in}} = -\tilde{\gamma}_{\text{out/in}}(\tilde{e}_0)(\partial_t - i\tilde{H}_{\text{out/in}}).$$

Recalling that $D_{\text{out/in}}$ are the asymptotic Dirac operators associated to $g_{\text{out/in}}$ we have as in Subsect. 18.4:

$$D_{\text{out/in}} = -c_{\text{out/in}}^{-1} \gamma_{\pm\infty}(e_0)(\partial_t - iH_{\text{out/in}}),$$

and

$$(21.26) \quad H_{\text{out/in}} = c_{\text{out/in}}^{\frac{1-n}{2}} \tilde{H}_{\text{out/in}} c_{\text{out/in}}^{\frac{n-1}{2}}.$$

We first consider the operator D in 21.1.2.

Proposition 21.10. *Assume hypotheses (Hi), $1 \leq i \leq 4$. Then:*

(1) *the norm limits:*

$$P_{\text{out/in}}^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{out/in}}) U(t, 0) \text{ exist.}$$

(2) $P_{\text{out/in}}^{\pm}$ are selfadjoint projections for $\tilde{\nu}_0$ with $P_{\text{out/in}}^{+} + P_{\text{out/in}}^{-} = \mathbb{1}$.

(3)

$$\text{WF}(U(\cdot, 0) P_{\text{out/in}}^{\pm})' \subset (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times T^* \Sigma$$

for $\mathcal{F} = \{k = 0\} \subset T^* M$.

Proof. Let $P^{\pm}(t), R(t)$ be the operators constructed in Prop. 21.9. Setting

$$\tilde{P}^{\pm}(t) := e^{-iR(t)} P^{\pm}(t) e^{iR(t)}, \quad \tilde{U}(t, s) := e^{iR(t)} U(t, s) e^{-iR(s)},$$

we see that $\tilde{U}(t, s)$ is a strongly continuous unitary group with generator

$$\tilde{H}(t) = e^{iR(t)} H(t) e^{-iR(t)} + i^{-1} \partial_t e^{iR(t)} e^{-iR(t)}.$$

Since $P^{\pm}(t) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{out/in}})$ and $R(t)$ are $O(t^{-\mu})$ in norm we have $\tilde{P}^{\pm}(t) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{out/in}}) \in O(t^{-\mu})$ and hence

$$(21.27) \quad U(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{out/in}}) U(t, 0) = U(0, t) \tilde{P}^{\pm}(t) U(t, 0) + O(t^{-\mu}).$$

Next

$$\begin{aligned} U(0, t) \tilde{P}^{\pm}(t) U(t, 0) &= e^{-iR(0)} \tilde{U}(0, t) e^{iR(t)} \tilde{P}^{\pm}(t) e^{-iR(t)} \tilde{U}(t, 0) e^{iR(0)} \\ &= e^{-iR(0)} \tilde{U}(0, t) P^{\pm}(t) \tilde{U}(t, 0) e^{iR(0)}, \end{aligned}$$

and

$$(21.28) \quad \begin{aligned} &\partial_t \left(\tilde{U}(0, t) P^{\pm}(t) \tilde{U}(t, 0) \right) \\ &= \tilde{U}(0, t) \left(\partial_t P^{\pm}(t) + [P^{\pm}(t), i\tilde{H}(t)] \right) \tilde{U}(t, 0) = \tilde{U}(0, t) R_{-\infty}(t) \tilde{U}(t, 0), \end{aligned}$$

where $R_{-\infty}(t) \in \mathcal{S}^{-1-\mu, -\infty}$, by Prop. 21.9. Therefore by (21.27), (21.28) the limit

$$P_{\text{out/in}}^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{out/in}}) U(t, 0) \text{ exists}$$

and

$$P_{\text{out/in}}^{\pm} = \tilde{P}^{\pm}(0) \pm \int_0^{\pm\infty} \tilde{U}(0, t) R_{-\infty}(t) \tilde{U}(t, 0) dt = \tilde{P}^{\pm}(0) + R_{\pm\infty},$$

where $R_{\pm\infty} \in \Psi^{-\infty}$, using the uniform estimates in Lemma 21.5. $P_{\text{out/in}}^{\pm}$ are clearly selfadjoint projections for $\tilde{\nu}_0$ with $P_{\text{out/in}}^{+}(0) + P_{\text{out/in}}^{-}(0) = \mathbb{1}$.

From Prop. 21.9 (5) and the fact that $P_{\text{out/in}}^{\pm} - \tilde{P}^{\pm}(0)$ is a smoothing operator we obtain that $\text{WF}(U(\cdot, 0) P_{\text{out/in}}^{\pm})' \subset (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times T^* \Sigma$. \square

Next we consider the Dirac operator \tilde{D} .

Proposition 21.11. *Assume hypotheses (Hi), $1 \leq i \leq 4$. Then*

(1) *the norm limits*

$$\tilde{P}_{\text{out/in}}^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(\tilde{H}_{\pm\infty}) \tilde{U}(t, 0) \text{ exist.}$$

(2) $\tilde{P}_{\text{out/in}}^{\pm}$ are selfadjoint projections for the scalar product $\tilde{\nu}_0$ with $\tilde{P}_{\text{out/in}}^{+} + \tilde{P}_{\text{out/in}}^{-} = \mathbb{1}$.

(3)

$$\text{WF}(\tilde{U}(\cdot, 0) \tilde{P}_{\text{out/in}}^{\pm})' \subset (\mathcal{N}^{\pm} \cup \mathcal{F}) \times T^* \Sigma.$$

Proof. We obtain easily from (21.8) that

$$(21.29) \quad \mathbf{U}(t, s) = \mathcal{T}(0, t) |\tilde{h}|_0^{-\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_t^{\frac{1}{4}} \tilde{U}(t, s) |\tilde{h}|_0^{\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_s^{-\frac{1}{4}} \mathcal{T}(s, 0).$$

This implies that

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathbf{U}(t, 0) \\ &= \tilde{U}(0, t) |\tilde{h}|_0^{\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_t^{-\frac{1}{4}} \mathcal{T}(t, 0) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathcal{T}(0, t) |\tilde{h}|_0^{-\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_t^{\frac{1}{4}} \tilde{U}(t, 0). \end{aligned}$$

By (21.13) $\mathcal{T}(0, t) - \mathcal{T}(0, \pm\infty) \in O(t^{-\mu})$ in norm and $|h|_t - |h|_{\text{out/in}} \in O(t^{-\mu})$, hence

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathbf{U}(t, 0) \\ &= \tilde{U}(0, t) |\tilde{h}|_0^{\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_{\text{out/in}}^{-\frac{1}{4}} \mathcal{T}(\pm\infty, 0) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathcal{T}(0, \pm\infty) |\tilde{h}|_0^{-\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_{\text{out/in}}^{\frac{1}{4}} \tilde{U}(t, 0) + O(t^{-\mu}) \\ &= \tilde{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\tilde{\mathbf{H}}_{\text{out/in}}) \tilde{U}(t, 0) + O(t^{-\mu}). \end{aligned}$$

where in the last line we use (21.14) and the fact that $\mathcal{T}(0, \pm\infty) |\tilde{h}|_0^{-\frac{1}{4}} |\tilde{h}|_{\text{out/in}}^{\frac{1}{4}}$ is unitary for the scalar products $\tilde{\nu}_{\text{out/in}}$ and $\tilde{\nu}_0$.

Therefore the norm limit in (1) exist and equal the projections $P_{\text{out/in}}^\pm$ in Prop. 21.10. This also implies (2). (3) follows from (21.29) and the analogous statement in Prop. 21.10. \square

Finally we prove the main result of this paper.

Théorème 21.12. *Assume hypotheses (Hi), $1 \leq i \leq 4$. Then:*

(1) *the norm limits*

$$P_{\text{out/in}}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathbf{U}(t, 0) \text{ exist.}$$

(2) *if*

$$\lambda_{\text{out/in}}^\pm = i\gamma(n) P_{\text{out/in}}^\pm$$

$\lambda_{\text{out/in}}^\pm$ are the Cauchy surface covariances of a pure Hadamard state for D $\omega_{\text{out/in}}$ called the out/in vacuum state.

Proof. Let us denote by c_t the restriction of the conformal factor c to Σ_t . From (18.12) we obtain that

$$U(t, s) = c_t^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(t, s) c_s^{\frac{n-1}{2}}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

and hence

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathbf{U}(t, 0) \\ &= c_0^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(0, t) c_t^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) c_t^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(t, 0) c_0^{\frac{n-1}{2}} \\ &= c_0^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(0, t) c_{\text{out/in}}^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) c_{\text{out/in}}^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(t, 0) c_0^{\frac{n-1}{2}} + O(t^{-\mu}) \\ &= c_0^{\frac{1-n}{2}} \tilde{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\tilde{\mathbf{H}}_{\text{out/in}}) \tilde{U}(t, 0) c_0^{\frac{n-1}{2}} + O(t^{-\mu}) \end{aligned}$$

since $H_{\text{out/in}} = c_{\text{out/in}}^{\frac{1-n}{2}} \tilde{H}_{\text{out/in}} c_{\text{out/in}}^{\frac{n-1}{2}}$. By Prop. 21.11 we obtain that

$$(21.30) \quad P_{\text{out/in}}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{U}(0, t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\mathbf{H}_{\text{out/in}}) \mathbf{U}(t, 0) = c_0^{\frac{1-n}{2}} \tilde{P}_{\text{out/in}}^\pm c_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

By Prop. 18.5 we obtain that $(c_0^{\frac{n-1}{2}})^* \tilde{\nu}_0 c_0^{\frac{n-1}{2}} = \nu_0$. By Prop. 21.11 $P_{\text{out/in}}^\pm$ are hence selfadjoint projections for ν_0 with $P_{\text{out/in}}^+ + P_{\text{out/in}}^- = \mathbb{1}$. Therefore $\lambda_{\text{out/in}}^\pm$ are the Cauchy surface covariances of pure Hadamard states $\omega_{\text{out/in}}$ for D .

Finally (21.30) and Prop. 21.11 (3) imply that $\text{WF}(U(\cdot, 0)P_{\text{out/in}}^\pm)' \subset (\mathcal{N}^\pm \cup \mathcal{F}) \times T^*\Sigma$. Since $\mathcal{F} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ we obtain by Prop. 18.4 that $\omega_{\text{out/in}}$ are Hadamard states. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [AG] Ammann, B., Grosse N.: L^p -spectrum of the Dirac operator on products of hyperbolic spaces, *Calc. Var. and P.D.E.* **55** (2016).
- [AGV] Ammann, B., Grosse N., Nistor, V.: Analysis and boundary value problems on singular domains: An approach via bounded geometry, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **357** (2019), 487-493.
- [ALNV] Ammann, B., Lauter, R., Nistor, V., Vasy, A.: *Complex powers and non-compact manifolds*, *Comm. in PDE* **29** (2004), 671-705.
- [BHM] Bourguignon, J.-P., Hijiza O., Milhorat, J.-L., Moroianu, Andrei, Moroianu, Sergiu, A.: *Spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*, European Mathematical Society (2015).
- [BGM] Bär, C., Gauduchon, P., Moroianu, A.: Generalized cylinders in semi-Riemannian and spin geometry, *Mathematische Zeitschrift* (2005), 545-580.
- [BGP] Bär, C., Ginoux, N., Pfäffle, F.: *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*, *ESI Lectures in Mathematics and Physics*, EMS (2007).
- [BS1] Bernal, A., Sanchez, M.: On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem, *Comm. Math. Phys.* **243** (2003), 461-470.
- [BS2] Bernal, A., Sanchez, M.: Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes, *Comm. Math. Phys.* **257** (2005), 43-50.
- [CC] Y. Choquet-Bruhat, Y. Cotsakis, *Global hyperbolicity and completeness*, *J. Geom. and Phys.* **43**, (2002), 345-350.
- [CG] Cheeger, J., Gromov, M.: *Bounds on the von Neumann dimension of L^2 -cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, *J. Diff. Geom.* **21** (1985), 1-34.
- [De] Dencker, N.: On the propagation of polarisation sets for systems of real principal type, *J. Funct. Anal.* **46** (1982), 351-372.
- [DG] Dereziński, J., Gérard, C.: *Mathematics of Quantization and Quantum Fields*, Cambridge University Press.
- [DHo] d' Antoni, C., Hollands, S.: Nuclearity, Local Quasiequivalence and Split Property for Dirac Quantum Fields in Curved Spacetime, *Comm. Math. Phys.* **261** (2006) 133-159.
- [DH] Duistermaat, J.J.; Hörmander, L.: Fourier integral operators. II, *Acta Math.* **128** (1972), 183-269.
- [D] Dimock, J.: Dirac quantum fields on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982) , 133-147.
- [DK1] J. Dimock, B.S. Kay, *Classical wave operators and asymptotic quantum field operators on curved space-times*, *Annales de l'I.H.P. A* 37 no. 2, (1982), 93-114.
- [DK2] J. Dimock, B.S. Kay, *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric. I*, *Ann. Phys.* 175 (2), (1987), 366-426.
- [DK3] J. Dimock, B.S. Kay, *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric. II*, *J. Math. Phys.* 27, (1986), 2520.
- [El] Eldering, J.: Persistence of non compact normally hyperbolic invariant manifolds in bounded geometry, PhD thesis Utrecht University, 2012.
- [FR1] Finster F., Reintjes M.: A non-perturbative construction of the fermionic projector on globally hyperbolic manifolds i - space-times of finite lifetime, *Adv. Theor. Math. Phys.* **19** (2015), 761-803.
- [FR2] Finster F., Reintjes M.: A non-perturbative construction of the fermionic projector on globally hyperbolic manifolds i - space-times of infinite lifetime, *Adv. Theor. Math. Phys.* **20** (2016), 1007-1048.
- [FV1] C.J. Fewster, R. Verch, *Algebraic quantum field theory in curved spacetimes*, in: *Advances in Algebraic Quantum Field Theory*, Springer (2015).
- [FV2] C.J. Fewster, R. Verch, *A quantum weak energy inequality for dirac fields in curved space-time*, in: *Communications in Mathematical Physics*, Springer (2002).
- [FNW] Fulling, S.A., Narcowich, F.J., Wald, R.M.: Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime, II, *Annals of Physics*, **136** (1981), 243-272.
- [G] Gérard, C.: *Microlocal Analysis of Quantum Fields on Curved Spacetimes*, *ESI Lectures in Mathematics and Physics*, EMS (2019).
- [GHW] Gérard, C., Häfner, D., Wrochna, M.: The Unruh state for massless fermions on Kerr spacetime and its Hadamard property, *ArXiv preprint* (2020) arXiv:2008.10995.
- [GOW] Gérard, C., Oulghazi, O., Wrochna, M.: Hadamard states for the Klein-Gordon equation on Lorentzian manifolds of bounded geometry, *Comm. Math. Phys.* **352** (2017), 519-583.
- [GW1] Gérard, C., Wrochna, M.: *Construction of Hadamard states by pseudo-differential calculus*, *Comm. Math. Phys.* **325** (2) (2014), 713-755.

- [GW2] Gérard, C., Wrochna, M.: Hadamard property of the in and out states for Klein-Gordon fields on asymptotically static spacetimes, *Ann. Henri Poincaré*, **18** (2017), 2715-2756.
- [G-St] Gérard, C., Stoskopf T.: Hadamard states for quantized dirac fields on Lorentzian manifolds of bounded geometry. *Reviews In Mathematical Physics*. **34** (2022)
- [G-St2] Gérard, C., Stoskopf T.: Hadamard property of the in and out states for dirac fields on asymptotically static spacetimes. *Letters In Mathematical Physics*. **112** (2022)
- [Ger1] Geroch, R.: *Spinor structure of space-times in General Relativity. I*, *J. Math. Phys.* **9** (1968), 1739.
- [Ger2] Geroch, R.: *Spinor structure of space-times in General Relativity. II*, *J. Math. Phys.* **11**, (1970) 343.
- [H] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1985).
- [Hi] Hijazi, O.: A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors, *Comm. math. Phys.* **104** (1986), 151-162.
- [Ho] Hollands, S.: The Hadamard condition for Dirac fields and adiabatic states on Robertson-Walker spacetimes, *Comm. Math. Phys.* **216** (2001), 635-661.
- [HW] S. Hollands, R.M. Wald, *Quantum fields in curved spacetime*, in: *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*, Cambridge University Press (2015).
- [I] Isham, C.J.: *Spinor fields in four dimensional space-time*, *Proc. R. Soc. Lond. A* **364**, (1978), 591-599.
- [IS] Islam, O., Strohmaier, A.: On microlocalization and the construction of Feynman propagators for normally hyperbolic operators, preprint arXiv:2012.09767 (2020).
- [Is] Isozaki, H.: *QFT for scalar particles in external fields on Riemannian manifolds*, *Rev. Math. Phys.* **13**, No. 6 (2001), 767-798.
- [KN] Kobayashi, S., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry*, Volume I, Interscience Publishers (1963).
- [Kö] Köhler, M.: The stress-energy tensor of a locally supersymmetric quantum field on a curved space-time. PhD thesis, Hamburg, (1995).
- [Ko] Kordyukov, Y.: L^p -theory of elliptic differential operators on manifolds of bounded geometry, *Acta Appl. Math.* **23** (1991), 223-260.
- [K] Kosmann, Y.: Dérivées de Lie des spineurs, *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, **91** (1971) 317-395.
- [Kr] Kratzert, K.: Singularity structure of the two point function of the free Dirac field on a globally hyperbolic spacetime, *Ann. Phys.* **8** (2000), 475-498.
- [Ky] Kay, B.: Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields, I, *Comm. Math. Phys.* **62** (1978), 55-70.
- [KW] B.S. Kay, R.M. Wald, *Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate Killing horizon*, *Phys. Rep.* **207**, 49 (1991)
- [LM] Lawson, Jr., Michelsohn, M.: *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, 38, Princeton University Press, Princeton, NJ (1989).
- [M] Mühlhoff, R.: *Cauchy problem and Green's functions for first order differential operators and algebraic quantization*, *J. Math. Phys.*, **52**, 022303 (2011).
- [Mi] Milnor, J.: Spin structures on manifolds, *Ens. Math.* **9** (1963), 198-203.
- [MV] Murro, S., Volpe D.: Intertwining operators for symmetric hyperbolic systems on globally hyperbolic manifolds, *Annals. of Global An. and Geom.* **59** (2021), 1-25.
- [Na] Nakahara, M.: *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, IOP Publishing, Bristol (1990).
- [R1] Radzikowski, M.: Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved spacetime, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 529-553.
- [R2] Radzikowski, M.: A local-to-global singularity theorem for quantum field theory on curved spacetime, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), 1-22.
- [Ro] Roe, J.: *An index theorem on open manifolds I*, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), 87-113.
- [Ru] S.N.M. Ruijsenaars, *Charged particles in external fields I. Classical theory*, *J. Math. Phys.* **18** (4), (1977), 720-737.
- [S] Sanchez, M.: On the geometry of static spacetimes, *Nonlinear Anal.* **63** (2005), 455-463.
- [SV1] Sahlmann, H., Verch, R.: Microlocal spectrum condition and Hadamard form for vector-valued quantum fields in curved spacetime, *Rev. Math. Phys.* **13** (10), (2001), 1203-1246.
- [SV2] Sahlmann, H., Verch, R.: Passivity and microlocal spectrum condition, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 705-731.
- [Sa] Sanders, K.: The locally covariant Dirac field, *Rev. Math. Phys.* **22** (2010), 381-430.
- [SG] Schmid, J. , Griesemer, M.: Kato theorem on the integration of non-autonomous linear evolution equations, *Math. Phys. Anal. Geom.* **17** (2014) 265-271.

- [Se] R. Seiler, *Quantum theory of particles with spin zero and one half in external fields*, Comm. Math. Phys. 25, (1972), 127-151.
- [Sh] Shubin, M.A.: Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds, Astérisque 207 (1992), 37-108.
- [Sj] Sjöstrand, J.: Projecteurs adiabatiques du point de vue pseudodifférentiel, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **317** (1993), 217-220.
- [T] Trautman A.: Connections and the Dirac operators on spinor bundles, J. Geom. and Phys. **58** (2008), 238-252.
- [V] Verch,R.: Scaling analysis and ultraviolet behaviour of Quantum Field Theories in curved spacetimes. PhD thesis, Hamburg University 1996.
- [Wa1] R.M. Wald, *Existence of the S-matrix in quantum field theory in curved space-time*, Ann. Phys. (N. Y.), t. 118, (1979), 490-510.
- [W] Wrochna, M.: Singularities of two-point functions in quantum field theory. PhD thesis, University of Göttingen (2013).