



HAL
open science

Modélisation hybride modale-éléments finis pour le contrôle ultrasonore d'une plaque élastique. Traitement des intégrales oscillantes de la méthode HSM

Amond Allouko

► **To cite this version:**

Amond Allouko. Modélisation hybride modale-éléments finis pour le contrôle ultrasonore d'une plaque élastique. Traitement des intégrales oscillantes de la méthode HSM. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPAST023 . tel-04573662

HAL Id: tel-04573662

<https://theses.hal.science/tel-04573662v1>

Submitted on 13 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation hybride modale - éléments finis pour le contrôle ultrasonore d'une plaque élastique. Traitement des intégrales oscillantes de la méthode HSM.

*Hybrid modal - finite elements modeling for ultrasonic testing of an
elastic plate. Treatment of oscillating integrals of the HSM method.*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 575, electrical, optical, bio : physics and engineering (EOBE)

Spécialité de doctorat : Physique

Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes

Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche Institut LIST (Université Paris-Saclay, CEA),
sous la direction de **Alain LHÉMERY**, Directeur de Recherche, la co-direction de
Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Directrice de Recherche, le co-encadrement de
Vahan BARONIAN, Ingénieur de Recherche

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 12 mars 2024, par

Amond ALLOUKO

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Fabien TREYSSÈDE Directeur de Recherche, Université Gustave Eiffel	Président
Raphaël ASSIER Professeur, Université de Manchester	Rapporteur & Examineur
Simon FÉLIX Directeur de Recherche, Le Mans Université	Rapporteur & Examineur
Bing TIE Chargée de Recherche, Université Paris Saclay	Examinatrice
Antoine TONNOIR Maitre de conférences, INSA Rouen	Examineur

Titre : Modélisation hybride modale - éléments finis pour le contrôle ultrasonore d'une plaque élastique. / Traitement des intégrales oscillantes de la méthode HSM.

Mots clés : Contrôle non destructif, Ondes guidées, Élastodynamique, Éléments finis, Intégrales oscillantes

Résumé : Cette thèse porte sur la méthode Half-Space Matching (HSM) pour la résolution de problèmes de diffraction dans une plaque élastique non-bornée, en vue de la simulation du contrôle non-destructif de plaques composites. La méthode HSM est une approche hybride qui couple un calcul éléments finis dans une boîte contenant les défauts, avec des représentations semi-analytiques dans quatre demi-plaques qui recouvrent la partie saine de la plaque. Les représentations semi-analytiques de demi-plaques font intervenir des tenseurs de Green, exprimés à l'aide d'intégrales de Fourier et de séries modales. Or ces expressions peuvent être délicates à évaluer en pratique (coût et précision), rendant la méthode HSM inexploitable industriellement. Les difficultés sont d'abord analysées dans un cas scalaire bidimensionnel (acoustique). Deux méthodes sont proposées pour une évaluation efficace des intégrales de Fourier : la première exploite une approximation de type champ lointain et la seconde repose sur une déformation du chemin d'intégration dans le plan complexe (méthode de la complexification). Ces deux méthodes sont validées dans les cas scalaires isotrope et anisotrope où l'on dispose des valeurs exactes des intégrales de Fourier exprimées à l'aide de fonctions de Hankel.

Elles sont ensuite généralisées au cas tridimensionnel de la plaque élastique. Dans ce cas, la formule de

représentation est obtenue en faisant une transformée de Fourier suivant une direction parallèle à la plaque, puis, pour chaque valeur de la variable de Fourier ξ , une décomposition modale dans l'épaisseur. Les modes mis en jeu, appelés ξ -modes, sont étudiés en détail et comparés aux modes classiques (Lamb et SH dans le cas isotrope). Afin d'exploiter la bi-orthogonalité des ξ -modes, la formule de demi-plaque requiert la connaissance à la fois du déplacement et de la contrainte normale sur la frontière. Dans le cas isotrope, les propriétés d'analyticité des ξ -modes permettent de justifier et d'étendre la méthode de la complexification, y compris en présence de modes inverses. Ceci réduit les effets de couplage modal parasite induits par la discrétisation des intégrales de Fourier.

La méthode de la complexification est ensuite utilisée pour le calcul des opérateurs intervenant dans la méthode HSM, qui dérivent tous de la formule de demi-plaque. Différentes validations de la méthode HSM sont ainsi effectuées dans le cas isotrope. Des résultats préliminaires encourageants sont également obtenus pour une plaque orthotrope. Les améliorations réalisées ont permis à la fois de réduire significativement le temps de calcul et d'assurer une plus grande précision de la méthode HSM, permettant d'envisager son exploitation systématique dans un cadre de simulation industrielle.

Title : Hybrid modal - finite elements modeling for ultrasonic testing of an elastic plate. Treatment of oscillating integrals of the HSM method.

Keywords : Non-Destructif Testing, Guided waves, Elastodynamics, Finite elements, Oscillatory integrals

Abstract : This thesis focuses on the Half-Space Matching (HSM) method for solving scattering problems in an unbounded elastic plate to simulate non-destructive testing of composite plates. The HSM method is a hybrid approach that couples a finite element calculation in a box containing the defects with semi-analytical representations in four half-plates covering the plate's healthy part. Semi-analytical half-plate representations involve Green tensors, expressed with Fourier integrals and modal series. However, these expressions can be challenging to evaluate in practice (cost and accuracy), making the HSM method unusable industrially. The difficulties are first analyzed in a two-dimensional scalar (acoustic) case. Two methods are proposed for an efficient evaluation of Fourier integrals : the first one uses a far-field type approximation, and the second one is based on a deformation of the integration path in the complex plane (complexification method). These two methods are validated in the isotropic and anisotropic scalar cases, where we have the exact values of the Fourier integrals expressed using Hankel functions. They are then generalized to the three-dimensional case of the elastic plate. In this case, the representation formula is obtained by performing a

Fourier transform in a direction parallel to the plate, and then, for each value of the Fourier variable ξ , a modal decomposition in the thickness. The modes involved called ξ -modes, are studied in detail and compared to classical modes (Lamb and SH in the isotropic case). In order to exploit the bi-orthogonality of the ξ modes, the half-plate formula requires the knowledge of both the displacement and the normal stress on the boundary. In the isotropic case, the analytic properties of the ξ -modes make it possible to justify and extend the complexification method, including in the presence of inverse modes. This reduces the spurious effects of modal coupling induced by the discretization of Fourier integrals. The complexification method is then used to calculate the operators involved in the HSM method, which derive from the half-plate formula. Different validations of the HSM method are thus carried out in the isotropic case. Encouraging preliminary results are also obtained for an orthotropic plate. The improvements significantly reduce the calculation time and ensure higher accuracy of the HSM method, making it possible to consider its systematic exploitation in an industrial simulation framework.

Ce projet a reçu un financement du programme de recherche et d'innovation Horizon 2020 de l'Union européenne ENHAnCE dans le cadre de l'accord de subvention Marie Skłodowska-Curie numéro 859957.



Elle a été co-encadrée respectivement par l'**Institut LIST** (Université Paris-Saclay, CEA) et le laboratoire **POEMS** (Institut Polytechnique de Paris, ENSTA).



*Je dédie ce mémoire de thèse à ma belle-mère Zirimba Patricia, qui nous a quittés quelques mois avant la soutenance. À
Jamais dans mon coeur.*

Remerciements

La conclusion d'une expérience scientifique pleine d'apprentissages. Je souhaite exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Alain Lhémy, ainsi que Vahan Baronian, pour leur dévouement tout au long de cette thèse. Cette aventure a débuté lors de mon stage de Master 2, où vous m'avez accordé votre confiance et encouragé à donner le meilleur de moi-même. De manière plus personnelle, je tiens à remercier Vahan pour son soutien concernant les aspects numériques qui m'ont permis de surmonter de nombreux obstacles. Merci pour nos échanges informels dans ton bureau. Un grand merci également à Alain pour sa disponibilité et son écoute; sans lui, ce projet n'aurait pas pu voir le jour. En effet, il a exercé une pression sur l'administration du CEA pour que je puisse commencer 6 jours avant que le financement ne soit perdu. Je garde également en mémoire ton geste remarquable lorsque tu t'es porté volontaire pour venir me chercher à l'arrêt de bus chaque matin lorsque j'avais les béquilles. Cela témoigne d'une gentillesse impressionnante. Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Anne-Sophie pour sa présence constante tout au long de cette thèse. De bout en bout, tu as fait preuve d'une rigueur et d'une détermination à bien faire les choses, même pour les aspects du projet Européen où tu n'étais pas directement impliquée. Sans toi, je n'aurais pas pu arriver jusque là, car tu m'as apporté un soutien immense sur les plans professionnel et personnel. Pour moi, tu es bien plus qu'une amie, je te considère comme une figure maternelle en France. En dehors du fait d'aujourd'hui être titulaire d'un doctorat, ma plus grande source de fierté a été de voir la fierté dans vos yeux lors de ma soutenance.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mes rapporteurs, Simon Félix et Raphaël Assier, pour avoir accepté d'évaluer cette thèse. Malgré les nombreuses difficultés rencontrées au cours de cette période, qui m'ont conduit à reporter à plusieurs reprises la date d'envoi, votre détermination à rapporter cette thèse n'a jamais faibli. Vos rapports attestent de l'attention minutieuse avec laquelle vous avez examiné le manuscrit. Je souhaite également remercier Fabien Treysède et Antoine Tonnoir pour leur accompagnement au sein du comité de suivi au cours de ces trois années. Les échanges qui ont suivi ont été très bénéfiques pour maintenir le cap sur les objectifs de la thèse. Les questions posées lors de la soutenance ont révélé que vous avez pleinement assimilé le sujet, ce que j'ai grandement apprécié. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers Bing TIE, qui, malgré sa découverte récente de la méthode de HSM par rapport aux autres membres du jury, a posé des questions témoignant d'une compréhension approfondie de celle-ci. Cette analyse minutieuse du manuscrit m'a profondément impressionné. En résumé, je considère avoir eu la chance d'avoir un jury de thèse exceptionnel et j'espère vivement que nous pourrions collaborer à nouveau à l'avenir.

J'ai eu la chance de faire partie de deux équipes de recherche. Au CEA List, je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Edouard Demaldent, le chef du service LSMA. Toujours présent et doté des mots justes pour encourager, son soutien a été précieux. Je souhaite exprimer ma gratitude à mon premier co-bureau, Guillaume Cousin (qui a fait le voyage de Metz à Paris). Merci pour nos échanges enrichissants dans le bureau, portant sur des sujets de toutes sortes. Tu as toujours été attentif et aimable. Je tiens également à remercier ma deuxième co-bureau, Nouhayla Khaled (la madame amitié CDI). Je pense que nous avons dépassé le stade de simples collègues, notamment lorsque j'ai été accueilli au Maroc

par tes parents. Cela témoigne du lien que nous avons su développer. Je tiens également à remercier André, mon frère d'une autre origine. Depuis notre rencontre lors du Master, nous avons eu la chance tous les deux de participer à deux projets européens qui ont financé nos thèses au CEA LIST. Tu étais celui qui comprenait le mieux les contraintes liées à la thèse et au projet européen. Merci pour ta présence constante et ta bonne humeur. Je souhaite également exprimer ma gratitude envers ma promotion de thèse : André, Marie, Gérardo, Vivek, Victor et Célestine, pour nos échanges lors des pauses café. Je tiens à remercier Jordan Barras pour sa disponibilité et ses conseils en tant qu'ancien thésard d'Alain. Je n'oublie pas de remercier les permanents, Charau, Clément, Alexandre et Michel. Nos échanges ont toujours été très enrichissants et sans barrières.

Au laboratoire POEMS, je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Sonia Fliss et Christophe Hazard pour leur disponibilité tout au long de ces trois années. Leur soutien tant sur le plan professionnel que personnel a été précieux. Merci pour leur présence constante et leurs conseils précieux lors de la préparation de la soutenance. Je souhaite également exprimer ma gratitude envers Nicolas Kielbasiewicz et Eric Lunéville pour leur soutien dans le développement d'outils Xlife++ adaptés à mon contexte de thèse. Leur disponibilité pour m'aider dans mes codes a été d'une grande aide. Je tiens également à remercier les permanents de l'UMA qui n'ont jamais créé de barrières entre nous. Un grand merci à Elienne Becache pour nos échanges sur tous les sujets, en particulier l'appartement en Espagne. Enfin, je remercie Patrick Joly pour nos échanges sur le football. Je tiens à exprimer ma gratitude envers ma promotion de thèse : Laura, Alice, Clara, Pierre, Alex, Christian et Etienne. Avec chacun de vous, j'ai partagé des anecdotes fabuleuses. Je souhaite également remercier Louise, Sarah, Raphaël, Farah, Cédric, Antonin et Aurélien. Les discussions lors des pauses café et des afterworks ont été des moments que j'ai vraiment appréciés.

Je n'oublie pas également les personnes du projet Européen ENHAnCE 2020 à savoir Maria Megía, Manuel Chiachío, Rafael Nuñez, Shankar Galiana, Aravind Balaji, Tasdeeq Sofi, Morteza Moradi, Tianzhi Li, Javier Contreras, Wen Wu, Juan Fernández et Ali Saleh. J'ai eu ma plus belle expérience internationale avec vous. Nous avons eu l'opportunité de faire 6 pays ensemble et c'était toujours un plaisir de se retrouver.

Je veux adresser mes remerciements à mes amis, Yrvine Kadjou-Mami, Marie-Dominique Zabsonré, Wonsado Gomé et Franck Dingui, pour leur soutien inestimable au cours de ces années. Un grand merci également à Marie-Esther Kouaho, M'baye Badialo et Behia Gnadou, sans qui le pot de thèse n'aurait pas été possible. Votre dévouement témoigne de l'affection que vous avez pour moi.

Enfin, je souhaite exprimer ma reconnaissance envers ma famille. Mon père, qui a toujours cru en moi, ma sœur Hilary, ma mère Zouzou et ma copine Behia Gnadou. Vous avez tous supporté mes changements d'humeur. Merci d'avoir fait preuve de patience. Nous y sommes, je suis désormais Docteur ALLOUKO.

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Quelques éléments sur le contrôle non-destructif	13
1.1.1	Le CND pour l'industrie	13
1.1.2	Spécificité du CND par ultrasons	14
1.1.3	Simulation du CND par ondes ultrasonores de volume	14
1.2	Le CND par ondes ultrasonores guidées	15
1.2.1	Conditions pour qu'une structure supporte la propagation d'ondes guidées	15
1.2.2	Principales caractéristiques des ondes guidées élastiques	16
1.3	Simulation modale du CND par ondes guidées.	18
1.3.1	Méthode hybride modale-éléments finis pour les guides unidirectionnels	18
1.3.2	Méthode des pinceaux pour les plaques élastiques	19
1.3.3	Méthode HSM pour la diffraction dans une plaque.	21
1.4	Contenu de la thèse	24
2	Evaluation numérique des formules de représentation de demi-espace en 2D	27
2.1	Les formules de demi-espace pour l'équation de Helmholtz	28
2.1.1	Le cas isotrope	28
2.1.2	Le cas anisotrope	34
2.1.3	Aperçu d'autres formules	38
2.2	Les enjeux de l'évaluation numérique des formules de demi-espace	40
2.2.1	Discretisation	41
2.2.2	Illustrations et difficultés d'évaluation numérique.	42
2.3	Approximation de champ lointain	45
2.3.1	La méthode de la phase stationnaire	45
2.3.2	Application au cas isotrope	46
2.3.3	Application au cas anisotrope	48
2.3.4	Validations numériques	49

2.4	Déformation de contour dans le plan complexe	54
2.4.1	Le principe de la méthode dans le cas isotrope	54
2.4.2	Une règle heuristique pour le choix de l'angle de rotation	59
2.4.3	Généralisation au cas anisotrope	62
2.4.4	Validations numériques	62
2.5	Résumé du chapitre 2	66
3	Formule de représentation dans une demi-plaque élastique 3-D	69
3.1	Généralités sur les modes élastiques	70
3.1.1	Éléments de l'élastodynamique	70
3.1.2	Les modes dans une plaque élastique isotrope	73
3.1.3	Modes à incidence oblique	77
3.2	Les ξ -modes dans une plaque élastique	80
3.2.1	Motivation et définition	80
3.2.2	Classification des ξ -modes	81
3.2.3	Les ξ -modes pour ξ complexe.	84
3.2.4	Les ξ -modes dans le cas isotrope	85
3.3	Formule de reconstruction dans une demi-plaque élastique	90
3.3.1	Fonction de Green d'une plaque élastique	91
3.3.2	La formule de représentation intégrale	94
3.3.3	Le cas isotrope	95
4	Evaluation numérique de la formule de représentation dans une demi-plaque élastique	97
4.1	Validation de la formule de représentation dans le cas isotrope	98
4.1.1	Solution de référence	98
4.1.2	Description de la configuration	99
4.1.3	Validation numérique.	100
4.2	Amélioration de la formule de représentation dans le cas isotrope	102
4.2.1	Méthode de champ lointain.	103
4.2.2	Méthode de complexification.	107
4.3	Premiers éléments d'extension au cas anisotrope	112
4.3.1	Position du problème	112
4.3.2	Méthode de champ lointain.	115
4.3.3	Méthode de complexification.	115
4.4	Conclusion	116
5	La méthode HSM dans une plaque élastique	119
5.1	Introduction	119
5.2	Description de la méthode HSM	120
5.2.1	Méthode HSM avec opérateurs DtN	120
5.2.2	Introduction d'opérateurs DtR et utilisation de maillages conformes.	130
5.3	Résultats numériques	132
5.3.1	Problème de rayonnement dans une plaque isotrope	133

Table des matières	11
<hr/>	
5.3.2 Problème de diffraction dans une plaque isotrope	134
5.3.3 Problème de diffraction dans une plaque orthotrope	136
Conclusion et perspectives	139
Annexes :	141
A Compléments de démonstrations	141
A.1 Complément de preuve aux formules de champ lointain	141
A.2 La formule de bi-orthogonalité des ξ modes pour $\xi \in \mathbb{C}$	142
A.3 Démonstration de la proposition 4.3.1	145
B Compléments d'illustrations	147
B.1 Intégrales élastiques anisotropes du matériau Bar	147
B.1.1 Mode propagatif m=1	147
B.1.2 Mode propagatif m=2	148
B.1.3 Mode propagatif m=3	149
C Solution de référence dans une plaque isotrope.	151
C.1 Expression générale de la solution de référence.	151
C.2 Valeur de la formule de représentation mode par mode pour la solution de référence	155
Bibliographie	163

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Quelques éléments sur le contrôle non-destructif	13
1.1.1 Le CND pour l'industrie	13
1.1.2 Spécificité du CND par ultrasons	14
1.1.3 Simulation du CND par ondes ultrasonores de volume	14
1.2 Le CND par ondes ultrasonores guidées	15
1.2.1 Conditions pour qu'une structure supporte la propagation d'ondes guidées	15
1.2.2 Principales caractéristiques des ondes guidées élastiques	16
1.3 Simulation modale du CND par ondes guidées.	18
1.3.1 Méthode hybride modale-éléments finis pour les guides unidirectionnels	18
1.3.2 Méthode des pinceaux pour les plaques élastiques	19
1.3.3 Méthode HSM pour la diffraction dans une plaque.	21
1.4 Contenu de la thèse	24

1.1 Quelques éléments sur le contrôle non-destructif

1.1.1 Le CND pour l'industrie

Les méthodes de contrôle non-destructif (CND) des matériaux visent à détecter, localiser, identifier et dimensionner des défauts (fissures, inclusions, corrosion, délaminages, décohésions, pertes d'épaisseur, amas de bulles, microfissuration, etc. . .), dont la présence ou l'évolution dans une structure nuirait à sa tenue mécanique et pourrait conduire à sa défaillance. Différentes modalités d'utilisation des CND existent suivant les industries et les spécificités des structures à contrôler. Ces modalités conduisent à mettre en œuvre des contrôles périodiques ou ponctuels, mais également des contrôles permanents par des capteurs positionnés sur (voire intégrés à) la structure tout au long de son exploitation.

Les industries nucléaire, aéronautique, pétrochimique et du transport sont celles qui quantitativement ont les plus grands besoins de CND, car elles doivent assurer un haut niveau de sûreté de fonctionnement de leurs installations et de

leurs produits. En amont, les fournisseurs de matériaux (sidérurgie par exemple) effectuent également des contrôles de différents niveaux suivant les besoins de leurs clients. La nécessité de mener des recherches pour améliorer les méthodes de CND ou en développer de nouvelles est bien un enjeu important pour ces industries.

1.1.2 Spécificité du CND par ultrasons

Parmi les différentes méthodes de CND et de contrôle santé intégré (ou dans la terminologie anglo-saxonne structural health monitoring, SHM), les méthodes ultrasonores sont les plus utilisées. Le CND par ultrasons fait l'objet de R&D depuis des décennies. Ces travaux se poursuivent et même s'intensifient, pour mettre au point des méthodes plus quantitatives et qualitatives pour former des images plus faciles à interpréter, et pour contrôler des structures plus complexes de par leur géométrie ou leurs matériaux constitutifs.

Les ondes ultrasonores de volume sont historiquement les plus utilisées du fait **i)** qu'elles se propagent dans le volume de tout type de matériaux, **ii)** qu'elles se propagent généralement à des vitesses indépendantes de la fréquence, ce qui conduit à des relations simples entre temps de parcours et distance parcourue par une onde, donc simplifie l'exploitation des signaux temporels pour former des pseudo-images de l'intérieur de la pièce, **iii)** que l'on peut facilement en créer de hautes fréquences (de 1 à 15 MHz couramment) donc de petites longueur d'onde, pouvant interagir avec des petits défauts. On peut ainsi former des images de haute résolution spatiale.



FIGURE 1.1.1 – Principales industries utilisatrices de CND, et quelques exemples de contrôles ultrasonores associés.

1.1.3 Simulation du CND par ondes ultrasonores de volume

La capacité à simuler des contrôles par ondes de volume de configurations progressivement de plus en plus complexes a été décisive pour le développement du CND par ultrasons. Ces méthodes sont développées depuis trois décennies. Elles affichent un niveau de maturité qui fait qu'elles sont utilisées pour la simulation en industrie à travers le monde, par de nombreuses équipes mettant au point des méthodes de CND.

Simuler un contrôle revient à résoudre un problème direct : on décrit la configuration de contrôle par des paramètres définissant la pièce (géométrie, matériaux), les traducteurs émetteur et récepteur, la façon dont l'émetteur est excité, leurs positions relativement à la pièce au cours du contrôle, et les paramètres permettant de simuler la présence d'un ou de plusieurs défauts.

Le modèle développé (ou l'enchaînement de différents modèles) sur lequel repose la simulation doit rendre compte de l'ensemble des phénomènes entre l'excitation de l'émetteur et le signal en sortie du récepteur : transformation de l'excitation électrique en une source d'ultrasons, rayonnement par l'émetteur, propagation des ondes jusqu'aux défauts, interactions avec les défauts, propagation du champ diffracté par les défauts vers le récepteur, transformation de l'onde arrivant au récepteur en un signal mesurable. À l'issue de la simulation, les résultats calculés doivent être comparables aux résultats obtenus expérimentalement.

1.2 Le CND par ondes ultrasonores guidées

Parmi les méthodes ultrasonores de CND, celles reposant sur la propagation d'ondes guidées par la structure font l'objet de développements plus récents que celles reposant sur la propagation des ondes volumiques. Nous rappelons ci-dessous quelques éléments de base sur les ondes guidées, qui expliquent l'intérêt de ces ondes pour le CND.

1.2.1 Conditions pour qu'une structure supporte la propagation d'ondes guidées

Une structure supporte la propagation d'ondes guidées élastiques dans deux cas que l'on peut distinguer géométriquement. Le premier cas est celui de pièces dont la géométrie peut être générée par une translation suivant un axe x_1 d'une surface de contour $\partial\Sigma$, définie dans un plan orthogonal (x_2, x_3) qui sera la section de la pièce, comme le montre la figure 1.2.1. On parle alors de guide unidirectionnel. Cela peut être par exemple la géométrie d'un rail ou d'un tube droit.

Le second cas est celui d'une géométrie d'épaisseur constante e suivant l'axe x_3 qui s'étend dans toutes les directions du plan (x_1, x_2) comme le montre la figure 1.2.2. On peut alors parler de guide omnidirectionnel. Cela peut être la géométrie d'une tôle sortant d'un laminoir, d'un élément de voilure d'avion.

Lorsque l'épaisseur e est petite devant les longueurs d'onde transverses, il est courant d'utiliser des modèles asymptotiques comme le modèle de plaque Kirchhoff-Love [20]. Nous ne ferons pas cette hypothèse dans la présente thèse et parlerons néanmoins de plaque pour un guide omnidirectionnel.

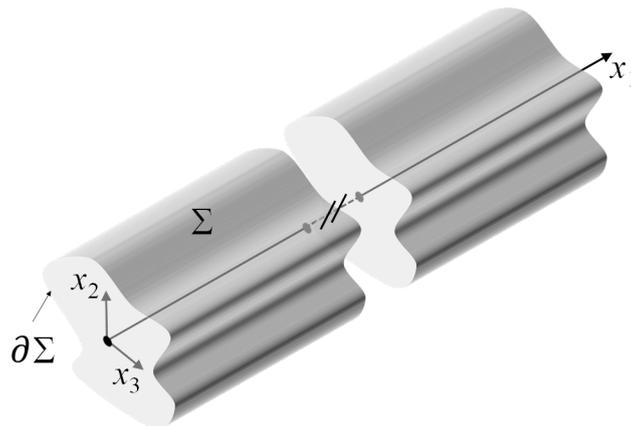


FIGURE 1.2.1 – Guide unidirectionnel dans la direction x_1 dont la section dans le plan (x_2, x_3) a pour contour $\partial\Sigma$.

Pour que ces géométries supportent la propagation d'ondes guidées, il faut en plus que les propriétés d'élasticité soient invariantes suivant l'axe de translation x_1 dans le premier cas, et suivant toute direction du plan (x_1, x_2) dans le second.

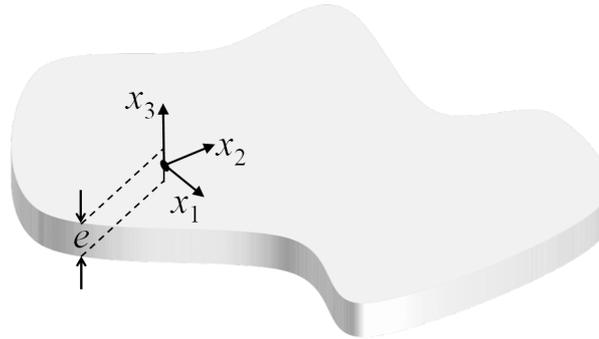


FIGURE 1.2.2 – Guide omnidirectionnel dans le plan (x_1, x_2) d'épaisseur e .

Remarque 1.2.1. Il est également possible de décrire la propagation d'ondes guidées dans des structures définies autrement que par des translations, mais dont la (les) surface(s) guidante(s) possède(nt) une ou deux courbures constantes (brin hélicoïdal d'un toron [58], coude d'une tubulure [29], coque sphérique d'un réservoir de gaz etc. . .).

1.2.2 Principales caractéristiques des ondes guidées élastiques

■ Propagation modale et mise en vibration de la section du guide

Toute onde élastique se propageant, à une fréquence donnée, dans une structure vérifiant les propriétés géométriques et d'élasticité décrites au paragraphe précédent, peut être décomposée sur une base de solutions propres à la géométrie et à l'élasticité de la structure appelées modes. Ces modes sont des solutions non-forcées de la propagation linéaire dans la structure. Ce sont des solutions particulières à variables séparées, produit d'un champ ne dépendant que des variables transverse $((x_2, x_3)$ pour le guide unidirectionnel et x_3 pour la plaque), et d'un propagateur analytique, caractérisé par une constante de propagation (cf. chapitre 3). Les modes peuvent être propagatifs si cette constante de propagation est réelle, ou évanescents si elle est complexe. La connaissance des constantes de propagation en fonction de la fréquence (courbes de dispersion) permet de savoir à quelles fréquences les ondes peuvent se propager dans le guide et à quelles vitesses elles s'y propagent.

Un mode propagatif fait généralement vibrer à son passage hors de leur position d'équilibre tous les points de la section du guide. À partir d'une certaine fréquence, pour un guide à bord libre, certains modes guidés ne font réellement vibrer de façon significative que des points situés sur les bords de la section en se propageant comme des ondes de surfaces.

■ Propagation à longue distance

En théorie, la propagation guidée se fait sans perte d'amplitude dans les matériaux parfaitement élastiques. En pratique, l'amplitude peut décroître si une part de leur énergie est dissipée par les matériaux du fait de leur viscoélasticité. Dans un guide unidirectionnel, les distances sur lesquelles on peut réaliser des inspections non-destructives par ondes guidées peuvent varier, suivant les fréquences et les dimensions de guides et les propriétés des matériaux constitutifs, de quelques dizaines de millimètres à des centaines de mètres [40, 49].

Dans une plaque parfaitement élastique, un mode est décrit par des ondes planes (d'extension infinie) qui se propagent dans toutes les directions possibles, et théoriquement également sans perte d'amplitude. Dans la réalité des contrôles, la taille finie des sources utilisées pour rayonner les ondes guidées fait qu'à partir d'une certaine distance, l'énergie rayonnée

se répartit dans toutes les directions possibles de propagation et décroît. Par exemple dans une plaque isotrope l'amplitude décroît en $r^{-1/2}$ où r représente la distance entre la source et le récepteur.

■ Les ondes guidées pour le CND : avantages et inconvénients

Utiliser des ondes guidées pour le CND présente plusieurs avantages comparativement aux ondes de volume. D'une part, leur capacité à se propager sur de longues distances tout en faisant vibrer l'ensemble de la section permet d'inspecter de grandes structures, en évitant le balayage par déplacement manuel ou robotisé de transducteurs, que nécessite l'inspection d'une même pièce par ondes de volume. D'autre part, le CND par ondes guidées permet d'inspecter des zones inaccessibles aux ondes de volumes, par exemple dans le cas de canalisations enterrées.

Cependant, deux caractéristiques intrinsèques à la propagation des ondes guidées rendent complexe l'utilisation de ces dernières en CND. D'une part, à une fréquence donnée, il existe plusieurs modes propagatifs. Le nombre de ces modes est d'autant plus grand que la fréquence est élevée. On parle du caractère multimodal des ondes guidées. De plus, les propriétés de propagation (vitesse de groupe et vitesse de phase) varient en fonction de la fréquence (et peuvent varier en fonction de la direction dans le cas de la plaque anisotrope). Ainsi, si un mode est émis sur une certaine largeur de bande fréquentielle, les différentes composantes fréquentielles se propagent à des vitesses différentes, le signal initial va se déformer au fur et à mesure de la propagation, d'autant plus que la propagation se fait sur une longue distance.

La figure 1.2.3 montre une composante du déplacement particulière après propagation dans une plaque, rayonné par une pastille piézoélectrique circulaire avec une largeur de bande passante relativement importante, figure extraite de la thèse de J. Barras [7]. Le signal mesurable à distance de la source est d'une grande complexité, du fait à la fois de la propagation de plusieurs modes simultanément, de la dispersion de ces modes et de la réflexion sur les bords de la plaque.

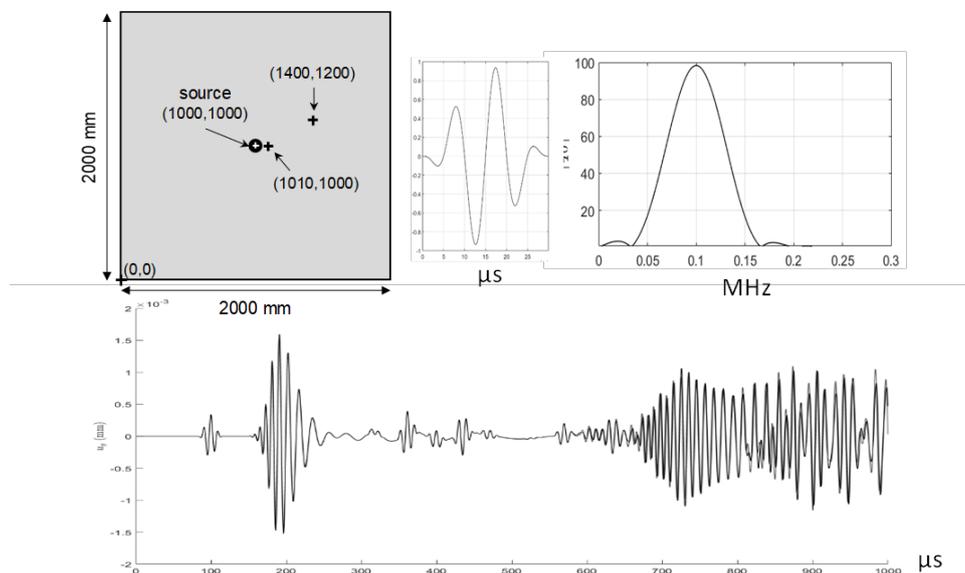


FIGURE 1.2.3 – Le transducteur rayonne au centre situé au point (1000 mm,1000 mm) de la plaque carrée de 2000 mm de côté, excité par le signal représenté (ainsi que son spectre). Le déplacement (composante u_y , dans le plan de la plaque) mesuré au point (1400 mm, 1200 mm) fait apparaître de nombreuses contributions (y compris des réflexions aux bords de la plaque), dont certaines ont subi une importante dispersion.

Mettre au point des méthodes de CND par ondes élastiques guidées consiste donc pour beaucoup, à trouver des

solutions pour que les signaux à analyser soient plus simples. Trois méthodes sont fréquemment mises en œuvre pour les simplifier. Elles peuvent l'être conjointement.

- i) On peut se placer à basses fréquences de façon à ce que peu de modes soient excités par l'émetteur. Bien souvent, on se place à des fréquences inférieures à la première fréquence de coupure en deçà de laquelle seuls les trois modes fondamentaux existent. Cependant, travailler à basses fréquences conduit à ce que les longueurs d'ondes soient grandes et donc à de faibles résolutions spatiales ce qui limite l'applicabilité du contrôle ; il est important de pouvoir la déterminer a priori avec précision.
- ii) On peut limiter la bande passante fréquentielle du signal exciteur de façon à ce que les modes excités soient peu sujet à la dispersion. Bien souvent, les signaux utilisés sont constitués d'un assez grand nombre de cycles d'un signal monofréquentiel modulés par une enveloppe (Gaussienne par exemple). Mais en conséquence, le signal est temporellement long ce qui conduit à une mauvaise résolution temporelle, la mesure d'un temps de parcours unique associé à un tel signal étant délicate (temps d'arrivée du maximum de l'enveloppe, mesure par intercorrélation etc.). Là aussi, il importe de savoir caractériser cette imprécision a priori avant de développer une méthode.
- iii) On peut concevoir un contrôle mettant en œuvre un traducteur qui émet de façon privilégiée un seul mode propagatif parmi ceux existant dans sa bande passante. Cette dernière méthode ne présente pas d'inconvénients particuliers, mais suppose d'être capable de concevoir un tel traducteur.

Ainsi, la capacité de simuler avec précision des configurations de CND exploitant les ondes guidées paraît indispensable pour faire progresser ces méthodes, simplifier les signaux ou interpréter les mesures obtenues.

1.3 Simulation modale du CND par ondes guidées.

Pour les raisons que l'on vient d'expliquer, il est intéressant de disposer d'outils permettant de simuler les expériences de CND par ondes ultrasonores guidées. Le CEA-List et le laboratoire POEMS (CNRS, INRIA, ENSTA Paris) travaillent en collaboration au développement de tels outils, en exploitant autant que possible la description modale du champ dans les parties uniformes (non perturbées) du guide considéré. Un module de simulation de contrôle par ondes guidées est disponible dans la version commerciale de la plate-forme CIVA depuis 2011 (module Contrôle par Ondes Guidées) et est progressivement enrichi. Dans ce qui suit, nous évoquons tout d'abord les travaux menés pour simuler le CND de guides unidirectionnels. Une approche hybride semi-analytique numérique a été développée, permettant de combiner l'intérêt de la connaissance modale des ondes guidées pour traiter la propagation dans un guide homogène à l'aide de propagateurs analytiques, à l'intérêt des méthodes numériques pures pour traiter la diffraction par une inhomogénéité localisée quelconque du guide.

Nous évoquons ensuite les travaux effectués afin de simuler le contrôle d'une plaque élastique suivant cette approche hybride. Un premier ingrédient développé est un propagateur semi-analytique modal dit méthode des pinceaux, pour la propagation des ondes guidées dans une plaque sans défaut. Le second ingrédient est une méthode basée sur les éléments finis (EF) pour simuler la diffraction par un défaut localisé appelée méthode Half-Space Matching (HSM). Les travaux de cette thèse concernent le développement de ce second ingrédient.

1.3.1 Méthode hybride modale-éléments finis pour les guides unidirectionnels

■ **Formalisme modal pour la simulation du contrôle d'un guide unidirectionnel (thèses de K. Jezzine [36], V. Baronian [5] et L. Taupin [55])**

Une formulation a été proposée dans les travaux de K. Jezzine et al [36, 35] traitant du cas des guides unidirectionnels homogènes et isotropes. Cette formulation permet d'écrire de façon modale le résultat d'un contrôle avec prise en compte des effets de diffraction par la source et par le récepteur. Les défauts considérés dans ses travaux sont de type simple fissure supposée verticale. Une formule est obtenue pour l'amplitude du signal reçu dans le domaine fréquentiel. Une synthèse de Fourier est ensuite effectuée pour prédire les signaux temporels.

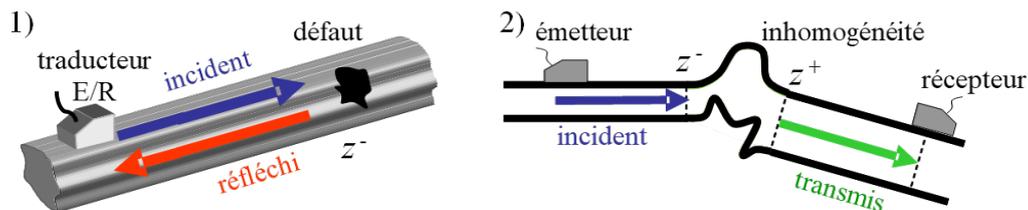


FIGURE 1.3.1 – Les deux configurations de CND considérées 1) échographique, 2) en émission / réception séparées.

L'étape suivante a consisté à traiter le cas de la diffraction par une "discontinuité" quelconque du guide unidirectionnel (fissure quelconque, inhomogénéité, déformation de la surface, jonction entre plusieurs guides unidirectionnels,...). Comme le problème de diffraction par de tels éléments diffractants ne possède en général pas de solution analytique, il est traité numériquement par éléments finis (EF). Hors de la zone éléments finis, le champ est représenté sous forme d'une décomposition modale. Les travaux de thèse de V. Baronian [4, 5] ont abouti au développement de conditions de transmission exactes entre la zone de calcul EF et les guides semi-infinis uniformes. Ces conditions assurent la transparence des frontières (pas de réflexion parasite revenant de ces frontières dans la boîte EF) et permettent de calculer des coefficients de diffraction modaux ou coefficients de scattering.

Signalons que des approches hybrides similaires ont été développées pour de guides élastiques hélicoïdaux [59] ou périodiques dans la direction longitudinales [42].

L'approche précédente a été étendue au cas de la diffraction par un défaut linéique dans une plaque élastique. Le problème est alors 2-D à trois composantes. On peut prédire de façon modale la réflexion / transmission d'une onde guidée plane en incidence oblique sur le défaut linéique, par exemple un raidisseur sur un élément de voilure en composite. La thèse de L. Taupin [55] a permis de généraliser le calcul de frontières artificielles transparentes au cas de l'incidente oblique et au cas d'une plaque élastique anisotrope stratifiée.

Dans les travaux précédents, il s'agit de guides uniformes perturbés localement. On trouve également dans la littérature des travaux concernant le traitement modal de la propagation dans des guides non uniformes [46, 47]. A notre connaissance, seul le cas de matériaux isotropes a été traité.

1.3.2 Méthode des pincesaux pour les plaques élastiques

■ **Rayonnement modal par une source quelconque dans une plaque élastique [thèses de M. Stévenin [52], J. Barras [9] et G. Cousin [25]]**

La méthode dite de pinceau modal, s'inspirant de travaux antérieurs pour le calcul de champ d'ondes de volume [30], a été développée dans le cas des ondes guidées modales tout d'abord en considérant le cas d'une réflexion unique sur le

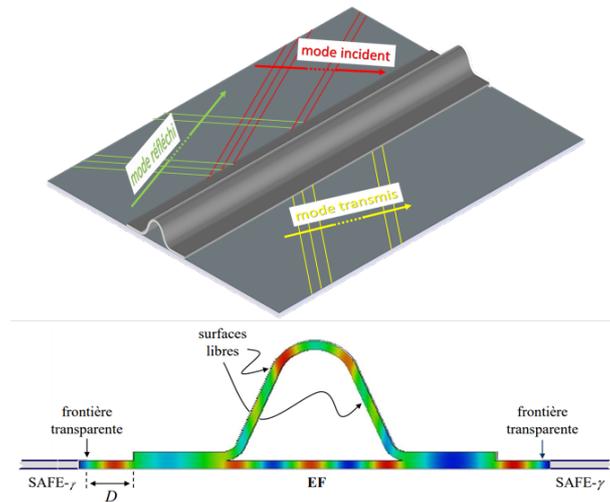


FIGURE 1.3.2 – Réflexion / transmission d'un mode guidé dans une plaque composite en incidence oblique, sur / à travers un raidisseur en composite (d'après [54]).

bord d'une demi-plaque infinie [52, 51], et généralisée par J. Barras [9] aux cas de plaques de taille finie (donc pouvant impliquer de multiples réflexions) isotrope [9] ou anisotrope [8].

Dans cette approche, le champ de déplacement particulaire rayonné en un point est obtenu sous la forme d'une intégrale de convolution spatiale des distributions surfaciques de source avec un noyau de Green tensoriel. Ce noyau de Green décrit la propagation guidée des différents modes et suivant les différents chemins de propagation entre un point courant de la source et le point où l'on veut calculer le champ rayonné. Plus précisément, le noyau de Green est décrit comme la somme de contributions appelées séquences modales. Ces séquences modales sont des ensembles de contributions modales regroupées suivant le nombre de réflexions impliquées et les conversions de modes qui se produisent dans les réflexions. Le noyau de Green est une solution approchée valable à distance de la source ; les phénomènes locaux aux points sous la source ou à proximité de celle-ci ne sont pas pris en compte et on fait l'hypothèse qu'ils ne viennent pas modifier la source elle-même. Il a été montré par comparaison avec des résultats calculés par éléments finis [9] qu'en des points situés à quelques longueurs d'ondes de la source, cette approximation conduit à des erreurs négligeables. Dans une plaque infinie (pas de réflexion sur des bords), la formulation approchée du tenseur de Green est identique à celle développée par Velichko et Wilcox [61]. Par rapport à cette formulation, le modèle de pinceau vient généraliser le calcul du noyau de Green au cas de propagations plus complexes rendant compte de la taille finie des pièces.

Une approximation supplémentaire pour calculer très efficacement l'intégrale de rayonnement (approximation mathématiquement comparable à celle classique en optique et en acoustique dite "de Fraunhofer") a été utilement développée dans la thèse de J. Barras et exploitée pour s'intéresser au rayonnement modal des patchs magnétostrictifs dans la thèse de G. Cousin [25].

Différentes validations de ce modèle de pinceau ont été menées, notamment par comparaison avec des résultats simulés par le code aux EF temporels développé au CEA. La figure ci-après montre comment le signal présenté Figure 1.2.3, très complexe, décomposé en séquences modales, peut être plus facilement interprété par exemple en effectuant des regroupements de certaines séquences modales entre elles. Ici, le signal est décomposé en six signaux, impliquant soit aucune, soit une ou soit deux réflexions sur les bords de la plaque d'une part, et regroupés par ailleurs en distinguant les contributions symétriques et les contributions antisymétriques.

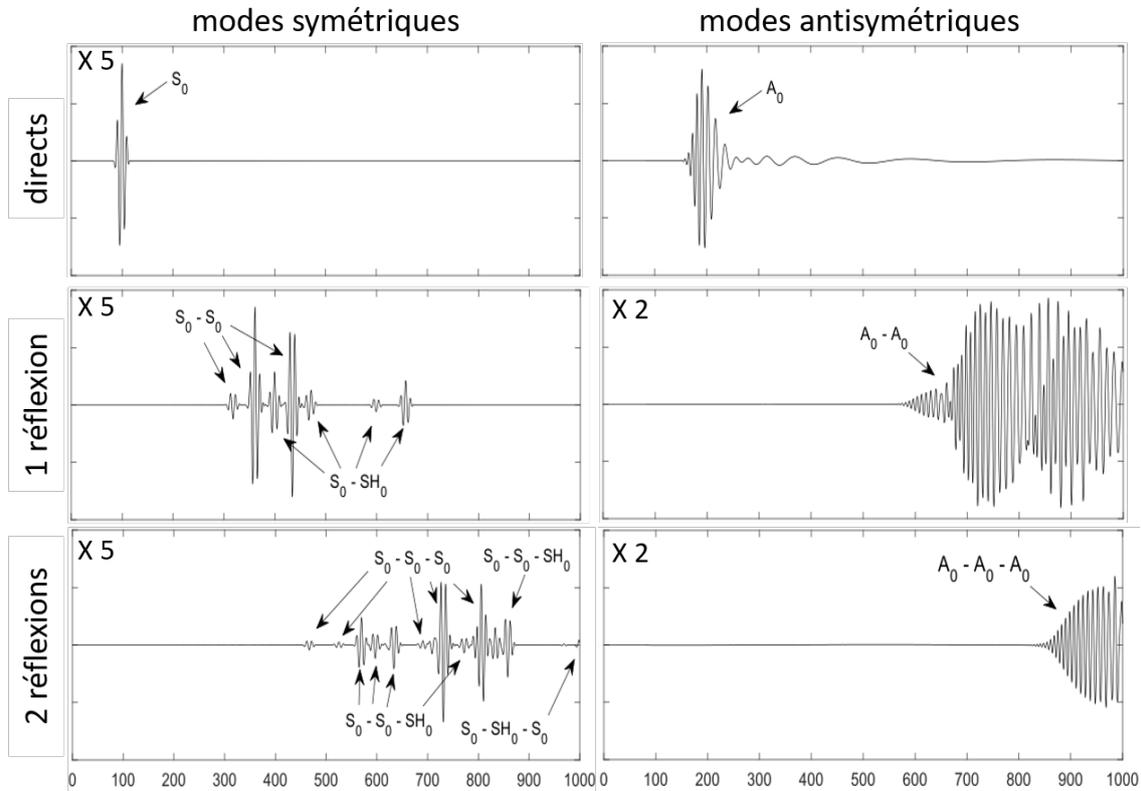


FIGURE 1.3.3 – Décomposition en modes symétriques / antisymétriques et suivant le nombre de réflexions (0, 1 ou 2) sur les bords de la composante u_y du champ donné en exemple Fig. 4 (d'après [9]). Les différents signaux sont tracés avec un facteur d'amplitude (indiqué dans le coin en haut à gauche) pour être bien visualisés.

1.3.3 Méthode HSM pour la diffraction dans une plaque.

■ Motivations

Seule une méthode numérique peut traiter les phénomènes d'interaction des ondes guidées avec des inhomogénéités localisées quelconques dans une plaque (au sens large, un défaut). L'idée de développer une approche modale hybride comme dans le cas unidirectionnel est évidemment séduisante. La diffraction par l'inhomogénéité est traitée de façon locale par éléments finis. La difficulté est de coupler avec un traitement semi-analytique de la propagation dans la partie de la plaque sans défaut.

Deux thèses ont été réalisées en collaboration entre le CEA-List et les laboratoires POEMS en vue du développement d'un tel modèle hybride.

Plus précisément, l'objectif est de calculer à fréquence donnée la diffraction par un défaut de taille finie dans une plaque homogène infinie. L'onde incidente est un mode propagatif de la plaque sans défaut. L'objectif est d'accéder aux coefficients de scattering du défaut : chaque coefficient fournit pour un mode propagatif incident et une direction d'incidence donnés, l'amplitude des modes propagatifs diffractés dans toutes les directions.

Comme dit plus haut, le défaut est traité par une méthode d'éléments finis, en raison de sa grande versatilité. La

difficulté est alors de borner le domaine de calcul sans générer de réflexions parasites. Cette question largement traitée pour des problèmes similaires, mais scalaires ou en espace libre [32], est délicate dans le cas qui nous intéresse ici. La difficulté provient du caractère tridimensionnel de la plaque, du caractère vectoriel des équations de l'élastodynamique et de la complexité des modes se propageant dans la plaque saine. Le problème est particulièrement difficile à traiter lorsque la plaque est anisotrope, mais nous tenons à souligner qu'il existe peu de résultat rigoureux, y compris pour une plaque isotrope. Comme approches que l'on peut qualifier d'exactes dans le cas isotrope, on trouve les travaux de Treysède [60] sur le rayonnement d'une source dans une plaque homogène, et les travaux de Diligent et al. [27] sur la diffraction par un trou cylindrique circulaire.

Pour traiter le cas général d'un défaut quelconque dans une plaque isotrope ou anisotrope, on peut envisager a priori deux types de méthodes.

La première catégorie consiste à entourer le domaine de calcul par une couche absorbante en espérant que cela modifie peu la solution dans le domaine intérieur. On peut pour cela utiliser des couches adiabatiques, l'absorption augmentant très lentement avec la distance au domaine physique afin de réduire les réflexions parasites. Mais pour que les ondes diffractées soient complètement absorbées, il faut alors des couches de grande taille, ce qui génère un coût de calcul prohibitif en 3-D. C'est pour cette raison qu'ont été développées depuis 30 ans les couches absorbantes parfaitement adaptées, ou PML en anglais (Perfectly Matched Layers) [12]. Malheureusement, les PMLs ne sont pas utilisables pour le problème qui nous intéresse. En effet, par construction, la méthode PML considère que le sens de propagation d'une onde est donnée par sa vitesse de phase, et non comme il le faudrait par sa vitesse de groupe. Or il est bien connu que les vitesses de phase et de groupe diffèrent dans un milieu anisotrope [11]. Plus grave encore, elle peuvent être dirigées dans des directions opposées dans un guide élastique, même s'il est isotrope [14] (c'est le cas des modes dit inverses que nous mentionnerons au chapitre 3).

C'est pourquoi nous nous tournons vers la seconde classe de méthodes qui consiste à coupler les éléments finis dans une boîte de calcul bornée avec une représentation analytique du champ dans l'extérieur de la boîte, comme pour les guides uniaxiaux. C'est ce qui est fait classiquement pour traiter la diffraction par un défaut dans un milieu infini dans toutes les directions (on parle souvent d'espace libre). Dans ce cas, il est courant de coupler des éléments finis avec une intégrale de la solution utilisant le tenseur de Green du milieu [13].

■ Développement de la méthode HSM [thèses A. Tonnoir [57] et de Y. Tjandrawidjaja [56]]

La méthode HSM (pour Half-Space Matching) sur laquelle porte cette thèse présente des liens étroits avec ce qui vient d'être présenté, puisqu'elle fait intervenir à la fois des représentations intégrales et des décompositions modales. La méthode HSM avait été tout d'abord développée pour des problèmes bidimensionnels, scalaires puis vectoriels, dans la thèse d'Antoine Tonnoir [57] (voir aussi [15]). Le cas élastique anisotrope 2D a été traité en détails dans [10]. La méthode a été complètement justifiée théoriquement pour des problèmes scalaires avec dissipation [15, 18] et partiellement dans le cas non dissipatif [16]. Signalons également qu'il est possible de combiner les idées de la HSM et des PML comme dans [17], mais cela n'est possible que si les PML elles-mêmes fonctionnent, ce qui n'est pas le cas pour le problème qui nous intéresse ici.

La méthode HSM a ensuite été étendue dans la thèse de Yohanes Tjandrawidjaja [56] au problème 3D qui nous intéresse ici, avec une première tentative de mise en oeuvre dans la plateforme XLiFE++ [38]. A ce stade, le coût important de la méthode n'avait pas permis de valider le code de façon satisfaisante. La présente thèse s'inscrit donc directement dans le prolongement de la thèse de Yohanes Tjandrawidjaja, et plus particulièrement du chapitre 3 de cette thèse, avec la volonté de proposer, de mettre en oeuvre et de valider une version améliorée, précise et efficace de la méthode HSM.

Nous donnons dans cette introduction une description rapide de la méthode HSM pour le problème d'élastodynamique dans une plaque élastique. Nous en donnerons plus de détails dans le chapitre 5.

L'idée de la méthode HSM est de coupler un calcul éléments finis dans un domaine de calcul borné contenant le défaut avec des représentations analytiques de la solution (le champ diffracté sortant) dans des *demi-espaces* sans défaut : dans le cas d'une plaque 3D d'épaisseur $2h$, le demi-espace est en fait une demi-plaque dont la définition dans un repère local est

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y \in \mathbb{R}, -h < z < h\}.$$

C'est le caractère homogène de la plaque sans défaut qui nous permet d'accéder aux représentations analytiques dans les demi-plaques. Plus précisément, à l'aide d'une transformée de Fourier en y (dans le repère local) puis d'une décomposition modale en z , on fournit une représentation intégrale du champ de déplacement dans la demi-plaque, en fonction de la donnée sur le bord des champs de déplacement et de contrainte normale. Le calcul efficace de cette représentation est le sujet central de cette thèse et fait l'objet du chapitre 4.

Pour résoudre le problème de diffraction global, on commence par recouvrir le domaine de propagation infini par 5 sous-domaines : un domaine parallélépipédique borné contenant le défaut et 4 demi-plaques, comme sur la figure 1.3.4.

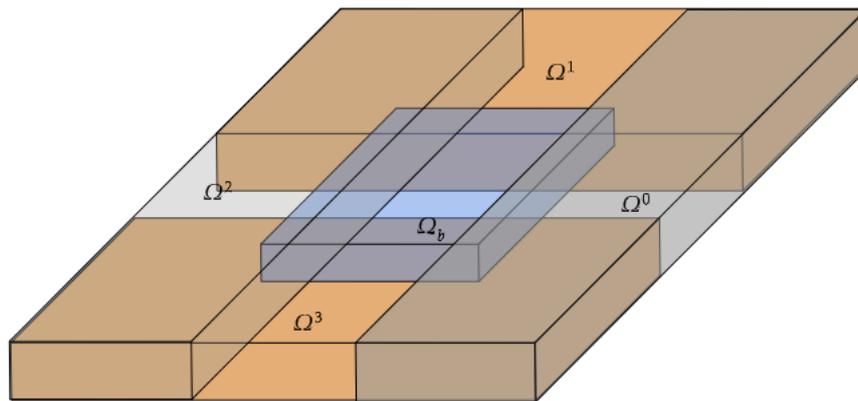


FIGURE 1.3.4

FIGURE 1.3.5 – Représentation des 5 sous-domaines de la méthode HSM.

Notons qu'il s'agit d'une décomposition de domaines *avec recouvrement* : il y a un recouvrement entre le domaine borné et chacune des demi-plaques, et chaque paire de demi-plaques voisines se recouvrent sur un quart de plaque. Les inconnues du problème sont

1. le champ de déplacement dans le domaine borné,
2. les traces des champs de déplacement et de contrainte normale sur les bords des 4 demi-plaques.

Le système d'équations reliant ces différentes inconnues est obtenu

- en écrivant une formulation variationnelle classique en déplacement dans le domaine borné, la contrainte normale au bord étant exprimée à l'aide des représentations analytiques de demi-plaques ;
- en assurant la compatibilité entre les différentes représentations, en particulier entre les représentations de demi-plaques dans les quarts de plaque où elles co-existent.

Autrement dit, les équations permettent d'assurer le raccord (d'où le terme Matching dans le nom de la méthode HSM) entre les différentes représentations de la solution. La formulation ainsi obtenue est ensuite discrétisée :

- le champ de déplacement dans le domaine borné est discrétisé à l'aide d'éléments finis de Lagrange 3D,
- les traces des champs de déplacement et de contrainte normale sur les bords des 4 demi-plaques sont discrétisées à l'aide d'éléments finis de Lagrange 2D.

On aboutit ainsi à un système linéaire de grande taille (toutes les inconnues sont des champs de vecteurs à 3 composantes) comportant une partie creuse et des blocs pleins, résultant des représentations intégrales.

La précision de la méthode dépend bien-sûr de la finesse de la discrétisation éléments finis mais aussi de la qualité de l'évaluation des formules analytiques de demi-plaque. On s'aperçoit en effet que le calcul de la matrice du système linéaire à inverser requiert l'évaluation de nombreuses intégrales de Fourier, dont l'intégrande peut être très oscillant et présenter des singularités. L'évaluation directe de ces intégrales par une formule de quadrature, tel que cela était fait jusqu'ici, est extrêmement coûteuse et pas adaptée. L'une des contributions importantes de cette thèse est de proposer des solutions permettant d'assurer à moindre coût la précision de la méthode.

1.4 Contenu de la thèse

La suite de cette thèse est organisée comme suit.

Dans le chapitre 2, nous établissons diverses formules intégrales permettant de reconstruire une solution de l'équation de Helmholtz (isotrope ou anisotrope) dans un demi-plan, en fonction de sa donnée de Dirichlet et/ou de Neumann sur le bord. Chacune de ces formules s'exprime comme une convolution avec un noyau, qui peut s'exprimer soit à l'aide de fonctions de Hankel, soit comme une intégrale de Fourier. Nous expliquons ensuite pourquoi l'évaluation numérique de ces intégrales de Fourier est délicate, en illustrant, pour diverses positions du point d'évaluation de la formule, le caractère oscillant et singulier des intégrandes. Deux approches sont proposées et testées pour y remédier. L'une dite approximation champ lointain exploite le théorème de la phase stationnaire. La seconde consiste à déplacer le chemin d'intégration dans le plan complexe dit méthode de la complexification.

Le chapitre 3 est destiné à établir une formule de représentation du champ élastodynamique dans une demi-plaque élastique en fonction de ses données de "Dirichlet" et "Neumann" sur le bord de la demi-plaque, c'est-à-dire des données du déplacement et de la contrainte normale. Cette formule est déjà présentée dans la thèse de Y. Tjandrawidjaja [56]. L'approche que nous avons adoptée ici est légèrement différente et conduit à déterminer les tenseurs de Green de la plaque infinie. Ces noyaux sont obtenus en effectuant une transformée de Fourier dans une direction infinie de la plaque, puis, pour chaque valeur de la variable de Fourier ξ , une décomposition modale dans l'épaisseur. Les modes qui apparaissent naturellement dans cette démarche sont appelés ξ -modes et font l'objet d'une étude détaillée dans le chapitre. Pour le cas particulier de la plaque isotrope, on parvient à décrire complètement les propriétés d'analyticité des ξ -modes (pour $\xi \in \mathbb{C}$) qui seront utilisées au chapitre suivant. On obtient également dans ce cas une forme semi-analytique des noyaux, faisant intervenir modes de Lamb et fonctions de Hankel.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à l'évaluation numérique de la formule de représentation du champ élastodynamique dans une demi-plaque élastique, sous forme générale avec intégrales de Fourier et série modale. La discrétisation de ces intégrales de Fourier conduit à pré-calculer les ξ -modes en chaque point de discrétisation. D'autres part, la série modale est tronquée. La formule ainsi obtenue est testée dans le cas isotrope avec une solution de référence qui est une onde cylindrique construite à l'aide du mode de Lamb S_0 . On retrouve les difficultés numériques étudiées dans le cas scalaire au chapitre 2. En outre et de façon inattendue, on observe des conversions modales parasites entre le mode S_0 et les autres modes conservés dans la série. On cherche ensuite à adapter les approches champ lointain et complexification développées

dans le cas scalaire aux noyaux élastiques pour améliorer la précision à moindre coût. L'approximation champ lointain ne pose pas de problèmes théoriques, mais nécessiterait, pour être précise dans les directions rasantes, de re-calculer les ξ -modes pour chaque point d'évaluation, ce qui n'est pas envisageable. La complexification quant à elle se généralise sans difficultés, à condition de traiter les modes inverses avec une déformation de chemin différente de celle des modes directs. En fin de chapitre, nous discutons de l'application de ces techniques au cas d'une plaque anisotrope.

Le chapitre 5 a pour objectif d'intégrer les développements précédents dans la méthode HSM. En début de chapitre, on rappelle la formulation HSM telle qu'elle a été présentée dans [56] et mise en oeuvre dans la plateforme XLiFE++. On présente tout d'abord une version remaniée de la formulation, visant une première réduction du coût d'exécution. Il s'agit d'une part d'éviter des inconnues redondantes sur des maillages non conformes (pour éviter les nombreuses interpolations qui en résultent), et d'autre part, de remplacer un opérateur Dirichlet-to-Neumann sur le bord de la boîte éléments finis, par un opérateur Dirichlet-to-Robin (pour éviter le mauvais conditionnement dû aux modes de boîte). Signalons également que par une démarche de test systématique, la cause du défaut de compatibilité observé sur les résultats de la thèse de Y. Tjandrawidjaja a pu être identifiée et corrigée. On montre ensuite que la méthode de complexification permet de réduire le nombre de points de discrétisation des intégrales de Fourier, et donc le temps de calcul global. La méthode est validée sur la solution de référence du chapitre 4. On teste ensuite le cas de la diffraction d'une onde de Lamb S_0 par un trou cylindrique : on vérifie en particulier que, comme attendu, la solution ne dépend pas de l'angle de d'incidence par rapport à l'orientation des demi-plaques. Enfin, un résultat de diffraction dans une plaque orthotrope est présenté.

Quelques compléments de démonstrations et d'illustrations sont présentés **en annexes**.

Enfin, quelques perspectives à court ou plus long terme sont discutées dans la **conclusion**.

Ce projet a reçu un financement du programme de recherche et d'innovation Horizon 2020 de l'Union européenne dans le cadre de l'accord de subvention Marie Skłodowska-Curie numéro 859957. A cet effet, des déplacements courants dans les laboratoires ou institutions de tous les pays membres du consortium ENHAnCE ont été organisés sous la forme de semaine de formation doctorale. Des livrables en collaboration avec les autres bénéficiaires du projet ont été réalisés au cours de ces trois années de thèse. Ces derniers ne figurent pas dans ce manuscrit, mais peuvent être consultés sur le site web du projet ENHAnCE. Une mobilité de 1 mois dans l'université Ku Leuven sur le campus de Ghent a été réalisée sous la supervision de l'équipe du Dr Dimitrios Chronolopoulos. Cette mobilité avait pour but de propager analytiquement d'un champ élastique à partir de données sur un bord plan générées sous le logiciel Abaqus.

En dehors des communications du projet européen, ces travaux ont été présentés lors de conférences internationales :

- WAVES 2022 — 15th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Palaiseau, France.
- AFPAC 2023 - Anglo-French Physical Acoustic Conference, Fréjus, France.

Cette dernière conférence a permis de soumettre un article avec peer review accepté et en cours de publication :

A. Allouko, A. -S Bonnet-Ben Dhia, A. Lhémy and V. Baronian, "Optimal computation of integrals in the Half-SpaceMatching method for modal simulation of SHM/NDE in 3D elastic plate". In : Journal of Physics : Conference Series, volume xxx (2024) page xx-xx.

Chapitre 2

Evaluation numérique des formules de représentation de demi-espace en 2D

Sommaire

2.1	Les formules de demi-espace pour l'équation de Helmholtz	28
2.1.1	Le cas isotrope	28
2.1.2	Le cas anisotrope	34
2.1.3	Aperçu d'autres formules	38
2.2	Les enjeux de l'évaluation numérique des formules de demi-espace	40
2.2.1	Discretisation	41
2.2.2	Illustrations et difficultés d'évaluation numérique.	42
2.3	Approximation de champ lointain	45
2.3.1	La méthode de la phase stationnaire	45
2.3.2	Application au cas isotrope	46
2.3.3	Application au cas anisotrope	48
2.3.4	Validations numériques	49
2.4	Déformation de contour dans le plan complexe	54
2.4.1	Le principe de la méthode dans le cas isotrope	54
2.4.2	Une règle heuristique pour le choix de l'angle de rotation	59
2.4.3	Généralisation au cas anisotrope	62
2.4.4	Validations numériques	62
2.5	Résumé du chapitre 2	66

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, l'ingrédient principal de la méthode HSM est la formule de représentation de demi-espace qui permet de reconstruire une solution de l'équation homogène dans un demi-espace, à partir de données sur le bord, par exemple à partir de la donnée de Dirichlet. Le demi-espace est un demi-plan dans le cas 2-D, ou une

demi-plaque dans le cas 3-D. Lorsque l'équation est à coefficients constants, une façon naturelle d'obtenir la formule de représentation de demi-espace repose sur l'utilisation d'une transformée de Fourier partielle dans la direction parallèle au bord du demi-espace. Comme on va le voir, la formule de demi-espace ainsi obtenue est équivalente à une représentation intégrale faisant intervenir un noyau de Green, ce noyau de Green étant exprimé sous la forme d'une intégrale dans la variable de Fourier.

Ce chapitre porte sur l'évaluation numérique de ce noyau. On verra que lorsque le point source et le point d'observation sont éloignés, les intégrales de Fourier deviennent difficiles à évaluer par une simple quadrature, en particulier du fait des oscillations de l'intégrande. Des solutions sont proposées pour obtenir une évaluation précise à moindre coût.

Pour des raisons pédagogiques, on se concentre dans ce chapitre sur un problème modèle scalaire : il s'agit de l'équation de Helmholtz isotrope ou anisotrope. On commence par établir les formules de représentation de demi-espaces dans les différents cas, suivant que l'on dispose de la donnée de Dirichlet sur le bord ou de la donnée de Neumann, ou des deux. Pour chaque cas, nous calculons les noyaux correspondants. Plus précisément, nous obtenons pour chaque noyau une expression sous la forme d'une intégrale de Fourier mais aussi une formule analytique, exprimée à l'aide de fonctions de Hankel. Nous pouvons ainsi valider les deux approches que nous proposons pour évaluer numériquement les intégrales de Fourier. La première approche valable en champ lointain consiste à exploiter la méthode de la phase stationnaire. La seconde approche consiste à déplacer le chemin d'intégration dans le plan complexe.

L'objectif est ensuite d'appliquer les méthodes développées dans ce chapitre au cas de la plaque élastique anisotrope 3-D, pour laquelle on ne dispose plus de formules analytiques pour les noyaux.

Signalons enfin un autre cas intéressant, largement traité dans la littérature, qui pourrait être considéré dans le prolongement de ce chapitre : il s'agit du demi-espace acoustique, avec condition d'impédance [23, 45].

2.1 Les formules de demi-espace pour l'équation de Helmholtz

2.1.1 Le cas isotrope

Dans la suite, on désigne par $\mathbf{r} = (x, y)$ le point courant de \mathbb{R}^2 . Supposons que la fonction

$$u : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}$$

vérifie d'une part

$$\Delta u + k^2 u = f \quad (\mathbb{R}^2) \tag{2.1.1}$$

où $k > 0$ est le nombre d'onde et $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est une fonction à support compact, et d'autre part la condition de rayonnement de Sommerfeld

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{r}) - iku(\mathbf{r}) = o(r^{-1/2}) \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow +\infty. \tag{2.1.2}$$

On dit que u est *sortante*. En effet si l'on rétablit une dépendance temporelle en posant

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, t) := \operatorname{Re}(u(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \tilde{f}(\mathbf{r}, t) := \operatorname{Re}(f(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \quad \text{avec } \omega > 0 \text{ et } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

où c désigne la vitesse des ondes, alors \tilde{u} est une solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{u} = \tilde{f}$$

qui se propage à partir du support de f vers l'infini.

On peut montrer que, si θ désigne l'argument de \mathbf{r} , il existe une fonction $\theta \mapsto A(\theta)$ (à valeurs complexes) telle que

$$u(\mathbf{r}) = A(\theta) \frac{e^{ikr}}{r^{1/2}} + o(r^{-3/2}) \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow +\infty. \quad (2.1.3)$$

On suppose de plus que $f(\mathbf{r}) = 0$ si $x > 0$. Notons alors φ la trace de Dirichlet de u sur la droite $x = 0$:

$$u(0, y) = \varphi(y) \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.4)$$

On s'intéresse aux formules qui permettent de reconstruire $u(\mathbf{r})$ en un point $\mathbf{r} = (x, y)$ du demi-espace

$$\Omega := \{\mathbf{r} = (x, y) \mid x > 0\}$$

à partir de la donnée de φ sur le bord du demi-espace

$$\Sigma := \partial\Omega = \{\mathbf{r} = (x, y) \mid x = 0\}.$$

■ La formule avec intégrale de Fourier

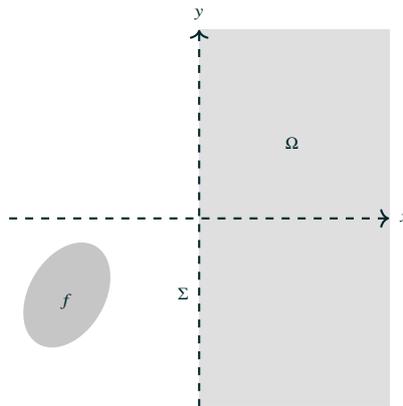


FIGURE 2.1.1 – Le demi-espace Ω

Une première façon d'obtenir une formule de représentation de u en fonction de φ dans le demi-espace Ω consiste à appliquer à l'équation (2.1.1) une transformée de Fourier dans la direction verticale y . En posant (on utilisera suivant le cas l'une des deux notations $\mathcal{F}(u)$ ou \widehat{u})

$$\mathcal{F}(u)(x, \xi) = \widehat{u}(x, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y) e^{-iy\xi} dy \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.1.5)$$

et en utilisant la propriété classique

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = i\xi \mathcal{F}(u),$$

on déduit de l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$ dans Ω que

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dx^2} + (k^2 - \xi^2) \widehat{u} = 0 \quad x > 0, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.1.6)$$

Pour chaque valeur de ξ , cette équation différentielle admet deux solutions linéairement indépendantes

$$e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x} \text{ et } e^{-i\sqrt{k^2 - \xi^2}x},$$

où l'on a posé

$$\sqrt{k^2 - \xi^2} := i\sqrt{\xi^2 - k^2} \text{ si } \xi^2 > k^2. \quad (2.1.7)$$

On sélectionne la solution exponentiellement décroissante lorsque $\xi^2 > k^2$ (régime des ondes évanescentes) et la solution sortante, qui se propage vers les $x > 0$, lorsque $\xi^2 < k^2$ (régime des ondes propagatives). En tenant compte de la donnée de Dirichlet en $x = 0$ (2.1.4), on obtient que

$$\widehat{u}(x, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x} \quad x > 0, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.1.8)$$

A l'aide de la transformée de Fourier inverse, qui n'est autre que la transformée de Fourier conjuguée, on obtient finalement la première formule de représentation de demi-espace suivante :

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x} e^{i\xi y} d\xi \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.9)$$

Cette représentation peut être interprétée comme une superposition d'ondes planes propagatives et d'ondes évanescentes. En effet, notons

$$\mathbf{k}(\xi) = \begin{pmatrix} \sqrt{k^2 - \xi^2} \\ \xi \end{pmatrix} \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.1.10)$$

Alors si $\xi^2 < k^2$, la fonction $(x, y) \mapsto e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)}$ est une onde plane propagative de vecteur d'onde $\mathbf{k}(\xi)$. Lorsque ξ varie de $-k$ à k , toutes les directions d'onde plane allant vers les $x > 0$ sont parcourues.

La représentation (2.1.9) comporte aussi des ondes qui oscillent en y mais sont évanescentes en x , lorsque $\xi^2 > k^2$. On peut récrire la formule (2.1.9) sous une forme plus condensée.

Soit u la solution de (2.1.1)-(2.1.2). Alors, si $f(\mathbf{r}) = 0$ lorsque $x > 0$, u admet la représentation suivante dans le demi-plan $\Omega = \{\mathbf{r} = (x, y) \mid x > 0\}$:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}} d\xi \quad \text{pour } \mathbf{r} \in \Omega, \quad (2.1.11)$$

où φ désigne la trace de u sur $\Sigma = \partial\Omega$, et $\mathbf{k}(\xi)$ est donné par (2.1.10).

■ La formule de représentation intégrale

Une seconde approche consiste à introduire la fonction de Green de Dirichlet du demi-espace Ω . Autrement dit, on

note $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pour $\mathbf{r} = (x, y)$ et $\mathbf{r}' = (x', y')$, avec $x > 0$ et $x' > 0$, la fonction qui vérifie

$$-\Delta_{\mathbf{r}'} G_D - k^2 G_D = \delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}') \quad (\Omega) \quad (2.1.12)$$

au sens des distributions, qui s'annule sur Σ

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad x > 0, x' = 0, \quad (2.1.13)$$

et qui est sortante, au sens où pour tout \mathbf{r}' ,

$$\frac{\partial G_D}{\partial r'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - ik G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = o((r')^{-1/2}) \quad r' = |\mathbf{r}'| \rightarrow +\infty.$$

$\delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}')$ est la distribution de Dirac.

On sait alors que pour tout ouvert $O \subset \Omega$ et tout $\mathbf{r} \in O$,

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial O} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial G_D}{\partial \nu_{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}')$$

où $\nu_{\mathbf{r}}$ désigne la normale unitaire extérieure à ∂O en \mathbf{r}' . En prenant pour O l'ouvert $\{\mathbf{r} \in \Omega \mid |\mathbf{r}| < R\}$ et en utilisant (2.1.13), on obtient que pour tout \mathbf{r} tel que $|\mathbf{r}| < R$,

$$u(\mathbf{r}) = \int_{-R}^{+R} \frac{\partial G_D}{\partial x'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(0, y') dy' + I(R)$$

où

$$I(R) = \int_{C_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial G_D}{\partial r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}'),$$

C_R désignant le demi-cercle $\{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{r}'| = R, x' > 0\}$. En remarquant que

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_{C_R} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{r}') - ik u(\mathbf{r}') \right) G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial G_D}{\partial r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - ik G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) u(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

on montre alors grâce à la condition de Sommerfeld satisfaite par u et par G_D que $I(R)$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini, d'où

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial G_D}{\partial x'}((x, y), (0, y')) \varphi(y') dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.14)$$

Enfin, la fonction de Green de Dirichlet du demi-espace peut s'exprimer simplement à l'aide de la fonction de Green de l'espace libre, grâce au principe des images. En effet, soit $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la fonction de Green de l'espace libre, c'est à dire la solution sortante au sens des distributions de

$$-\Delta_{\mathbf{r}'} G - k^2 G = \delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}') \quad (\mathbb{R}^2). \quad (2.1.15)$$

On sait que

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (2.1.16)$$

où $H_0^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. Alors on peut vérifier que

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (2.1.17)$$

où $\tilde{\mathbf{r}} = (-x, y)$ est le point symétrique de \mathbf{r} par rapport à la droite Σ . Et il est facile de montrer que

$$\frac{\partial G_D}{\partial x'}((x, y), (0, y')) = 2 \frac{\partial G}{\partial x'}((x, y), (0, y')) \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R},$$

soit encore

$$\frac{\partial G_D}{\partial x'}((x, y), (0, y)) = \frac{ikx}{2} \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - y')^2})}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2}} \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}.$$

On a donc finalement le résultat suivant.

Soit u la solution de (2.1.1)-(2.1.2). Alors, si $f(\mathbf{r}) = 0$ lorsque $x > 0$, u admet la représentation suivante

$$u(x, y) = \frac{ikx}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - y')^2})}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2}} \varphi(y') dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}. \quad (2.1.18)$$

où pour $y' \in \mathbb{R}$, $\varphi(y') = u(0, y')$.

■ Le lien entre les deux formules de représentation du champ acoustique isotrope

Nous disposons maintenant des deux formules (2.1.11) et (2.1.18) pour reconstruire u dans le demi-espace Ω en fonction de sa trace φ sur le bord Σ . Il est instructif de voir que l'on peut passer d'une formule à l'autre. Commençons par réécrire (2.1.11) en remplaçant $\widehat{\varphi}$ par sa définition (2.1.5) sous forme intégrale :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y') e^{-i\xi y'} dy' \right) e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} x} e^{i\xi y} d\xi \quad x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

En intervertissant l'ordre des deux intégrales, on obtient

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} x} e^{i\xi(y - y')} d\xi \right) dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.19)$$

Pour en déduire la formule (2.1.18), il nous reste alors à montrer que

$$\frac{\partial G}{\partial x'}((x, y), (0, y')) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} x} e^{i\xi(y - y')} d\xi \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R} \quad (2.1.20)$$

où $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est donnée par (2.1.16). On peut se référer à [24] mais il est facile (et instructif pour la suite) de refaire ce calcul. En appliquant la transformée de Fourier partielle en y' à l'équation (2.1.15), on montre que la fonction $\widehat{G}(\mathbf{r}, (x', \xi)) = \mathcal{F}(G(\mathbf{r}, (x', \cdot)))(\xi)$ vérifie

$$\frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial x'^2}(\mathbf{r}, (x', \xi)) + (k^2 - \xi^2) \widehat{G}(\mathbf{r}, (x', \xi)) = -\delta_x(x') \otimes \frac{e^{-i\xi y}}{\sqrt{2\pi}} \quad x' \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}.$$

On déduit tout d'abord de l'équation pour $x' \neq x$ que

$$\widehat{G}(\mathbf{r}, (x', \xi)) = A^\pm(\xi) e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}|x' - x|} \frac{e^{-i\xi y}}{\sqrt{2\pi}} \text{ pour } \pm(x' - x) > 0.$$

On montre ensuite que pour que l'équation soit vérifiée au sens des distributions, il faut que

$$A^+(\xi) = A^-(\xi) = \frac{-1}{2i\sqrt{k^2 - \xi^2}},$$

d'où finalement

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}|x' - x|} e^{-i\xi(y - y')} d\xi. \quad (2.1.21)$$

L'identité (2.1.20) s'en déduit en dérivant par rapport à x' en $x' = 0$ (et en faisant le changement de variable $\xi \rightarrow -\xi$ dans l'intégrale).

■ Illustrations numériques

Pour valider numériquement les formules précédentes, nous considérons que u est le champ acoustique créé par une source ponctuelle placée en $\mathbf{r}_S = (-2, 0)$. Autrement dit, on a

$$u(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$$

où G est donnée par (2.1.16). Si l'on veut être vraiment dans le cadre ci-dessus et que $u(\mathbf{r})$ soit solution de (2.1.1), avec au second membre une fonction f et non une masse de Dirac, il suffit de multiplier $u(\mathbf{r})$ par une fonction à support dans le demi-espace $x < 0$. Mais cela ne change rien à notre propos qui est de reconstruire $u(\mathbf{r})$ dans le demi-espace Ω à partir de sa trace sur la frontière Σ . La solution de référence et sa trace sont représentées sur la figure 2.1.2a.

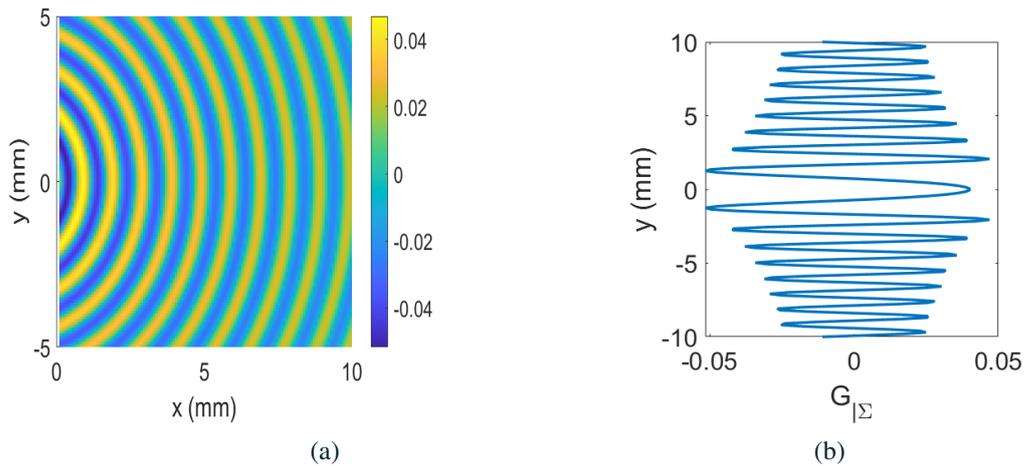
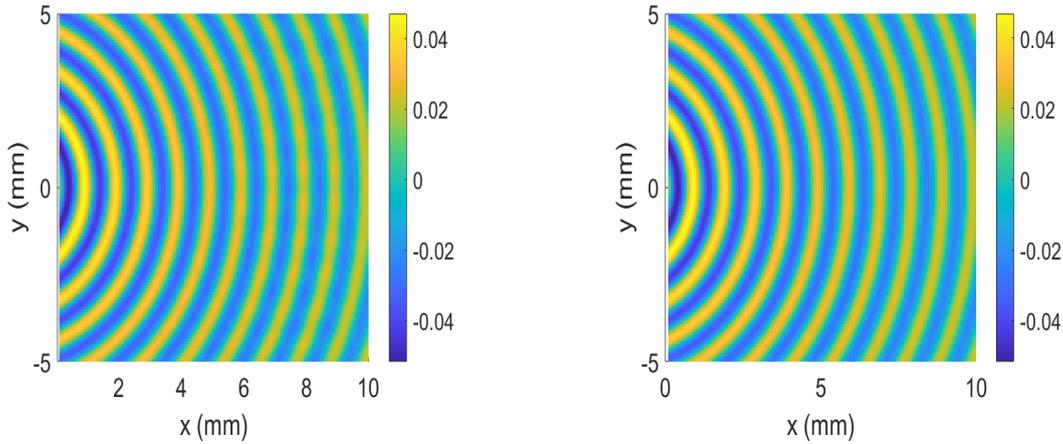


FIGURE 2.1.2 – Solution de référence $G(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ (2.1.16) pour une source localisée en $\mathbf{r}_S = (-2, 0)$ et un nombre d'onde $k = 2\pi$, représentée (a) sur le domaine Ω et (b) sa trace sur le segment Σ .

La figure 2.1.3 représente les résultats obtenus avec les deux méthodes de représentation : la méthode 1 utilisant la



(a) Formule avec intégrale de Fourier (méthode 1)

(b) Formule de représentation intégrale (méthode 2)

FIGURE 2.1.3 – Représentations du champ acoustique dans un domaine Ω à l'aide des deux formules de représentation.

formule avec intégrale de Fourier (2.1.18) et la méthode 2 utilisant la formule de représentation intégrale (2.1.19). Dans chaque cas, on a remplacé les intégrales sur \mathbb{R} par des intégrales sur un intervalle borné assez grand. On a ensuite approché ces intégrales par la méthode des trapèzes.

On remarque que la formule utilisant l'expression analytique de la dérivée de la fonction de Green semble plus précise que l'autre, qui nécessite l'évaluation numérique de l'intégrale de Fourier. On observe en effet des oscillations non désirées dans l'image obtenue par la méthode 1 à partir de $x = 6$ environ. Nous y reviendrons plus en détail dans la suite de ce chapitre.

2.1.2 Le cas anisotrope

Nous allons suivre la même démarche dans le cas d'une équation de Helmholtz anisotrope. On suppose cette fois que la fonction u est la solution sortante de

$$\operatorname{div}(A\nabla u) + \omega^2 u = f \quad (\mathbb{R}^2) \quad (2.1.22)$$

où $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice symétrique définie positive, $\omega > 0$ est la pulsation et la source f vérifie les mêmes hypothèses que précédemment. A nouveau, on s'intéresse aux formules qui permettent de reconstruire $u(\mathbf{r})$ en un point $\mathbf{r} = (x, y) \in \Omega$, à partir de la donnée de sa trace de Dirichlet φ sur Σ . Pour ce cas anisotrope, la condition de Sommerfeld prend la forme suivante (on pourra s'en convaincre au paragraphe 2.3.3) :

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r} - i\omega \frac{\sqrt{(A^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r})}}{\|\mathbf{r}\|} u(\mathbf{r}) = o(r^{-1/2}) \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow +\infty. \quad (2.1.23)$$

■ La formule avec intégrale de Fourier

On se propose cette fois d'établir la formule de représentation de u en la recherchant directement sous la forme

(2.1.11), avec un vecteur d'onde

$$\mathbf{k}(\xi) = \begin{pmatrix} \beta(\xi) \\ \xi \end{pmatrix} \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.1.24)$$

à déterminer. Il faut que la fonction $\mathbf{r} \mapsto e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}}$ soit solution de l'équation de Helmholtz anisotrope homogène, ce qui est vrai dès que la relation de dispersion suivante est vérifiée :

$$\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{k}(\xi) = \omega^2. \quad (2.1.25)$$

On va voir que tout comme dans le cas isotrope, l'onde $\mathbf{r} \mapsto e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}}$ est soit évanescente, soit propagative dans la direction x , suivant la valeur de ξ . Pour fixer les idées, supposons la matrice \mathbf{A} donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}$$

avec $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_1c_2 - c_3^2 > 0$. On peut sans perte de généralité et pour alléger les expressions supposer que $c_1c_2 - c_3^2 = 1$, de sorte que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} c_2 & -c_3 \\ -c_3 & c_1 \end{pmatrix}.$$

L'équation de dispersion s'écrit sous forme développée

$$c_1\beta(\xi)^2 + 2c_3\xi\beta(\xi) + c_2\xi^2 - \omega^2 = 0. \quad (2.1.26)$$

Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$, cette équation admet deux racines $\beta_+(\xi)$ et $\beta_-(\xi)$ données par

$$\beta_{\pm}(\xi) = \frac{-c_3\xi \pm \sqrt{k_A^2 - \xi^2}}{c_1} \quad (2.1.27)$$

où l'on a posé, par analogie au cas isotrope, $k_A = \omega\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{k_A^2 - \xi^2} := i\sqrt{\xi^2 - k_A^2}$ si $\xi^2 > k_A^2$.

On a donc affaire à des ondes évanescentes lorsque $\xi^2 > k_A^2$ et propagatives lorsque $\xi^2 < k_A^2$. Le choix entre $\beta_+(\xi)$ et $\beta_-(\xi)$ est simple pour les ondes évanescentes : on choisit $\beta_+(\xi)$ qui a une partie imaginaire positive, de sorte que l'onde décroît vers les x positifs.

C'est un peu plus délicat pour les ondes planes propagatives, c'est-à-dire lorsque $\xi^2 < k_A^2$. En effet, il est bien connu que la direction d'une onde plane dans un milieu anisotrope n'est pas donnée par le signe de sa vitesse de phase. On peut par exemple s'appuyer sur le calcul du flux d'énergie dans la direction x . Ainsi, le flux d'énergie d'une solution u de l'équation (2.1.22) à travers une ligne d'équation $x = \text{constante}$ (de la gauche vers la droite) est donné par l'intégrale le long de cette ligne de la partie imaginaire de la quantité $(\mathbf{A}\nabla u \cdot \mathbf{e}_x)u^*$, où u^* désigne le conjugué de u et

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier de l'onde plane $u(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}}$, on obtient que ce flux est positif si et seulement si

$$\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{e}_x > 0. \quad (2.1.28)$$

Or $\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{e}_x = c_1\beta_{\pm}(\xi) + c_3\xi = \pm\sqrt{k_A^2 - \xi^2}$, qui prend donc une valeur positive pour $\beta_+(\xi)$ et négative pour $\beta_-(\xi)$. On notera dans la suite

$$\kappa(\xi) := c_1\beta_+(\xi) + c_3\xi = \sqrt{k_A^2 - \xi^2}, \quad (2.1.29)$$

et on a donc

$$\kappa(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in]-k_A, k_A[.$$

En conclusion, on retient donc la racine $\beta_+(\xi)$ aussi bien pour les ondes évanescentes que pour les ondes propagatives. Cela est résumé ci-dessous.

Soit u la solution de (2.1.22)-(2.1.23). Alors, si $f(\mathbf{r}) = 0$ lorsque $x > 0$, u admet la représentation suivante dans le demi-plan $\Omega = \{\mathbf{r} = (x, y) \mid x > 0\}$:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}} d\xi \quad \text{avec } \mathbf{k}(\xi) = \begin{pmatrix} -c_3\xi + \kappa(\xi) \\ c_1 \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (2.1.30)$$

où φ désigne la trace de u sur $\Sigma = \partial\Omega$ et $\kappa(\xi)$ est donné par (2.1.29).

■ La formule de représentation intégrale

On peut également établir comme dans le cas isotrope une formule exploitant la fonction de Green de Dirichlet du demi-espace Ω . On note cette fois $G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la fonction qui vérifie

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{r}'}G_D^A) - \omega^2G_D^A = \delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}') \quad (\Omega) \quad (2.1.31)$$

au sens des distributions, qui s'annule sur Σ et qui est sortante, de sorte que pour tout ouvert $O \subset \Omega$ et tout $\mathbf{r} \in O$,

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial O} \left((\mathbf{A}\nabla u(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{r}}) G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{r}'}G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{r}}) u(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}').$$

On remarque que les dérivées normales qui apparaissent dans la formule pour le cas isotrope ont été naturellement remplacées par des dérivées (dites *co-normales*) faisant intervenir la matrice \mathbf{A} . Par une démonstration similaire à celle du cas isotrope, on en déduit la formule suivante :

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{r}'}G_D^A((x, y), (0, y')) \cdot \mathbf{e}_x) \varphi(y') dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}. \quad (2.1.32)$$

A première vue, il n'est pas évident d'aller plus loin et d'exprimer la fonction de Green de Dirichlet $G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à l'aide de la fonction de Green de l'espace libre $G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en faisant intervenir une source image, et encore moins à l'aide de fonctions de Hankel, comme dans le cas isotrope. C'est pourtant possible comme cela est montré dans [50]. Nous allons expliquer comment.

Fonction de Green de l'espace libre : Intéressons-nous tout d'abord à la fonction de Green $G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de l'espace libre anisotrope, qui est la solution sortante de

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{r}'}G^A) - \omega^2G^A = \delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}') \quad (\mathbb{R}^2). \quad (2.1.33)$$

En procédant comme dans le cas isotrope et en s'appuyant sur le paragraphe précédent, on vérifie que

$$G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{-1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{i\beta_+(\xi)(x'-x)} e^{-i\xi(y-y')} d\xi & \text{si } x' > x, \\ \frac{-1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{i\beta_-(\xi)(x'-x)} e^{-i\xi(y-y')} d\xi & \text{si } x' < x, \end{cases} \quad (2.1.34)$$

où l'on a utilisé que $\beta_+(\xi) - \beta_-(\xi) = 2\kappa(\xi)/c_1$. Ceci peut se récrire comme suit :

$$G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{-1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{i\kappa(\xi)(x'-x)/c_1} e^{-i\xi(y-y'+c_3(x'-x)/c_1)} d\xi & \text{si } x' > x, \\ \frac{-1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{-i\kappa(\xi)(x'-x)/c_1} e^{-i\xi(y-y'+c_3(x'-x)/c_1)} d\xi & \text{si } x' < x. \end{cases}$$

Par identification avec les formules (2.1.16) et (2.1.21), on en déduit que

$$G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k_A \sqrt{\left(\frac{x'-x}{c_1} \right)^2 + \left(\frac{c_3(x'-x)}{c_1} - (y'-y) \right)^2} \right) \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}', \quad (2.1.35)$$

qui s'écrit aussi

$$G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\omega \sqrt{\frac{(x'-x)^2}{c_1} + \frac{(c_3(x'-x) - c_1(y'-y))^2}{c_1}} \right) \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}', \quad (2.1.36)$$

ou encore (en se rappelant que $c_1 c_2 - c_3^2 = 1$)

$$G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\omega \sqrt{(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))} \right) \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'. \quad (2.1.37)$$

Fonction de Green de Dirichlet : On va maintenant par un procédé similaire déterminer la fonction de Green de Dirichlet $G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. On l'écrit comme la somme de la fonction de Green de l'espace libre et d'un terme correctif :

$$G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Compte tenu des équations vérifiées par $G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ doit vérifier pour tout $\mathbf{r} \in \Omega$,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{r}'}\tilde{G}^A) - \omega^2\tilde{G}^A = 0 & \mathbf{r}' \in \Omega, \\ \tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in \Gamma. \end{cases}$$

En appliquant la formule de représentation (2.1.30), on en déduit que

$$\tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{G}^A(\mathbf{r}, (0, \xi)) e^{i\beta_+(\xi)x'} e^{i\xi y'} d\xi \quad \mathbf{r}' \in \Omega, \mathbf{r} \in \Omega.$$

Or d'après (2.1.34), pour $x > x' = 0$,

$$\widehat{G}^A(\mathbf{r}, (0, \xi)) = \frac{-1}{2i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{-i\beta_-(\xi)x} e^{-i\xi y}.$$

On en déduit que

$$\tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{-i\beta_-(\xi)x} e^{-i\xi y} e^{i\beta_+(\xi)x'} e^{i\xi y'} d\xi \quad \mathbf{r}' \in \Omega,$$

que l'on peut récrire sous la forme suivante

$$\tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\kappa(\xi)} e^{i\beta_+(\xi)(x'+x)} e^{i\xi(y'-y+2(c_3/c_1)x)} d\xi \quad \mathbf{r}' \in \Omega,$$

de sorte que d'après (2.1.34), cette fois pour $x < x'$,

$$\tilde{G}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -G^A(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \quad \mathbf{r}' \in \Omega$$

où le point image est cette fois défini par $\tilde{\mathbf{r}} = (-x, y - 2(c_3/c_1)x)$. En rassemblant tout ce qui précède, on obtient finalement la formule suivante :

$$G_D^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G^A(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}') \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (2.1.38)$$

où $G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est donnée par (2.1.37).

On montre également que

$$A\nabla_{\mathbf{r}'} G_D^A((x, y), (0, y')) \cdot \mathbf{e}_x = 2A\nabla_{\mathbf{r}'} G^A((x, y), (0, y')) \cdot \mathbf{e}_x, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}, \quad (2.1.39)$$

or

$$A\nabla_{\mathbf{r}'} G^A((x, y), (0, y')) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{i\omega x}{4} \frac{H_1^{(1)}(\omega \sqrt{\frac{x^2}{c_1^2} + (y - y' - \frac{c_3}{c_1}x)^2})}{\sqrt{\frac{x^2}{c_1^2} + (y - y' - \frac{c_3}{c_1}x)^2}}. \quad (2.1.40)$$

Cela permet de déterminer la formule de représentation avec le noyau de Dirichlet analytique (2.1.32) comme suit :

Soit u la solution de (2.1.22)-(2.1.23). Alors, si $f(\mathbf{r}) = 0$ lorsque $x > 0$, u admet la représentation suivante

$$u(x, y) = \frac{i\omega x}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_1^{(1)}(\omega \sqrt{\frac{x^2}{c_1^2} + (y - y' - \frac{c_3}{c_1}x)^2})}{\sqrt{\frac{x^2}{c_1^2} + (y - y' - \frac{c_3}{c_1}x)^2}} \varphi(y') dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}. \quad (2.1.41)$$

où pour $y \in \mathbb{R}$, $\varphi(y) = u(0, y)$.

2.1.3 Aperçu d'autres formules

Dans ce qui précède, nous avons obtenu des formules permettant de reconstruire la solution sortante de l'équation de Helmholtz isotrope ou anisotrope en fonction de sa trace, autrement dit en fonction de la donnée de Dirichlet. Il est possible d'obtenir des formules similaires en fonction de la trace de Neumann, c'est-à-dire de la donnée de la dérivée normale ou de la dérivée co-normale (cas anisotrope) sur le bord du demi-espace. Nous donnons ci-dessous ces formules sans les justifier.

■ Formule avec donnée de Neumann pour le cas isotrope

Notons

$$\psi(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.42)$$

Alors on peut reconstruire u solution sortante de l'équation de Helmholtz (2.1.1) dans le demi-espace $x > 0$ à l'aide de l'une des deux formules équivalentes suivantes :

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x}}{i\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi y} d\xi \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.43)$$

ou

$$u(x, y) = \frac{-i}{2} \int_{\mathbb{R}} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - y')^2}) \psi(y') dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.44)$$

Ceci montre que l'on a la formule suivante donnant la transformée de Fourier du noyau intervenant dans (2.1.44) :

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x}}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi y} d\xi. \quad (2.1.45)$$

Signalons enfin que si l'on dispose à la fois des données de Dirichlet et de Neumann φ et ψ , on peut reconstruire u en utilisant seulement la fonction de Green de l'espace libre :

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}} \left(-\psi(y') G((0, y'), (x, y)) - \frac{\partial}{\partial x'} G((x', y'), (x, y))|_{x'=0} \varphi(y') \right) dy', \quad x > 0, y \in \mathbb{R},$$

soit encore

$$u(x, y) = \frac{ikx}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - y')^2})}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2}} \varphi(y') dy' + \frac{-i}{4} \int_{\mathbb{R}} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - y')^2}) \psi(y') dy', \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.46)$$

qui n'est autre que la demi-somme des formules (2.1.18) et (2.1.44).

■ Formule avec donnée de Neumann pour le cas anisotrope :

Dans le cas anisotrope, la donnée de Neumann est la dérivée co-normale

$$\psi(y) = A \nabla u(0, y) \cdot \mathbf{e}_x = c_1 \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} + c_3 \frac{\partial u(0, y)}{\partial y}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.47)$$

On peut alors reconstruire u solution sortante de l'équation anisotrope (2.1.22) en fonction de ψ à l'aide de deux formules de représentation équivalentes :

– La première représentation utilisant l'intégrale de Fourier donne :

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{i\kappa(\xi)} e^{i\beta_+(\xi)x} e^{i\xi y} d\xi, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, \quad (2.1.48)$$

qui se réécrit également

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i\kappa(\xi)} e^{i\beta_+(\xi)x} e^{i\xi(y-y')} d\xi \right) \psi(y') dy', \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1.49)$$

– La seconde représentation utilisant l'expression explicite des noyaux (forme Hankel) comme suit :

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} G^A((x, y), (0, y')) \psi(y') dy', \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, \quad (2.1.50)$$

avec G^A définie avec une fonction de Hankel (2.1.35).

2.2 Les enjeux de l'évaluation numérique des formules de demi-espace

Toutes les formules que nous avons établies dans la section précédente prennent la forme générale suivante (ou une somme de deux intégrales de cette forme)

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x, y - y') \zeta(y') dy' \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, \quad (2.2.1)$$

avec un noyau $\mathcal{N}(x, y)$ qui peut lui-même s'exprimer, soit analytiquement à l'aide de fonctions de Hankel, soit sous la forme d'une intégrale de Fourier :

$$\mathcal{N}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) e^{i\xi y} d\xi, \quad (2.2.2)$$

de sorte que

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) \widehat{\zeta}(\xi) e^{i\xi y} d\xi \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.2.3)$$

On récapitule ci-dessous les différentes expressions de $\widehat{\mathcal{N}}(x, \xi)$ selon que l'on se donne la trace de Dirichlet ($\zeta = \varphi$) ou de Neumann ($\zeta = \psi$), et selon que l'on se place dans le cas isotrope ou anisotrope.

Milieu \ Donnée sur Σ	Dirichlet φ	Neumann ψ
Isotrope	$\widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} x}$	$\widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} x}}{i\sqrt{k^2 - \xi^2}}$
Anisotrope	$\widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta_+(\xi)x}$	$\widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\beta_+(\xi)x}}{i\kappa(\xi)}$

TABLEAU 2.1 – Tableau donnant les noyaux de Fourier $\widehat{\mathcal{N}}$ isotrope et anisotrope pour la donnée de Dirichlet et de Neumann (les formules de $\beta_+(\xi)$ et de $\kappa(\xi)$ sont données par (2.1.27)).

2.2.1 Discrétisation

Pour illustrer les difficultés pratiques de l'évaluation de ces formules, on peut considérer que l'intégrale (2.2.1) est approchée par une méthode de quadrature, de sorte que $u(x, y)$ est approché par $u_{\mathbf{h}}(x, y)$:

$$u_{\mathbf{h}}(x, y) = \sum_{n=1}^N w_n \mathcal{N}(x, y - y'_n) \zeta(y'_n) \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (2.2.4)$$

Les réels $y'_1 < y'_2 < \dots < y'_N$ et w_1, w_2, \dots, w_N sont respectivement les noeuds et les poids de la quadrature. Ici l'indice \mathbf{h} fait donc référence à la formule de quadrature en y . Supposons alors que l'on veuille évaluer $u_{\mathbf{h}}$ en M points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_M$ du demi-espace Ω . On veut donc calculer

$$u_{\mathbf{h}}(x_m, y_m) = \sum_{n=1}^N w_n \mathcal{N}(x_m, y_m - y'_n) \zeta(y'_n) \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.2.5)$$

Ceci peut se mettre sous la forme matricielle suivante

$$U_{\mathbf{h}} = N_{\mathbf{h}} Z, \quad (2.2.6)$$

où $U_{\mathbf{h}}$ est un vecteur colonne de taille M formé des valeurs $u_{\mathbf{h}}(x_m, y_m)$, $m = 1, \dots, M$, Z un vecteur colonne de taille N formé des valeurs $\zeta(y'_n)$, $n = 1 \dots N$, et $N_{\mathbf{h}}$ est une matrice à M lignes et N colonnes, de coefficients $w_n \mathcal{N}(x_m, y_m - y'_n)$.

Dans ce qui suit, nous allons supposer que nous ne connaissons le noyau $\mathcal{N}(x, y)$ que sous la forme d'une intégrale de Fourier (2.2.2), car ce sera le cas pour le problème tridimensionnel anisotrope qui motive notre travail. Les expressions analytiques des noyaux à l'aide de fonctions de Hankel ne seront utilisées dans ce chapitre que pour valider les différentes approches.

Dans cet esprit, il est naturel de poursuivre en approchant à son tour l'intégrale de Fourier (2.2.2) par une formule de quadrature :

$$\mathcal{N}_{\hat{\mathbf{h}}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=1}^P \hat{w}_p \hat{\mathcal{N}}(x, \xi_p) e^{i\xi_p y} \quad (2.2.7)$$

où les réels $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_P$ et $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_P$ sont respectivement les noeuds et les poids de cette seconde quadrature. Ceci conduit à remplacer le système (2.2.6) par le système approché

$$U_{\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}} = N_{\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}} Z \quad (2.2.8)$$

où $U_{\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}}$ est un vecteur colonne de taille M formé des valeurs approchées $u_{\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}}(x_m, y_m)$, $m = 1, \dots, M$, et $N_{\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}}$ est une matrice à M lignes et N colonnes, dont le coefficient sur la ligne m et la colonne n est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{N}_{\hat{\mathbf{h}}}(x_m, y_m - y'_n),$$

ou encore

$$\frac{w_n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=1}^P \hat{w}_p \hat{\mathcal{N}}(x_m, \xi_p) e^{i\xi_p (y_m - y'_n)}.$$

Le calcul du produit matrice-vecteur (2.2.8) revient donc à effectuer pour chaque m une double somme sur n et p :

$$u_{\mathbf{h},\hat{\mathbf{h}}}(x_m, y_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P w_n \hat{w}_p \hat{\mathcal{N}}(x_m, \xi_p) e^{i\xi_p(y_m - y'_n)} \zeta(y'_n). \quad (2.2.9)$$

En permutant les deux sommes, ceci peut s'écrire comme suit

$$u_{\mathbf{h},\hat{\mathbf{h}}}(x_m, y_m) = \sum_{p=1}^P \hat{w}_p \hat{\mathcal{N}}(x_m, \xi_p) e^{i\xi_p y_m} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N w_n e^{-i\xi_p y'_n} \zeta(y'_n) \right), \quad (2.2.10)$$

ce qui revient à évaluer d'abord la transformée de Fourier de la donnée ζ aux points ξ_p , puis à évaluer l'intégrale en ξ , comme dans la formule (2.2.3). Du point de vue matriciel, cela revient à factoriser la matrice $N_{\mathbf{h},\hat{\mathbf{h}}}$ en l'écrivant comme produit d'une matrice $N_{\hat{\mathbf{h}}}$ à M lignes et P colonnes, par une matrice $F_{\mathbf{h}}$ à P lignes et N colonnes :

$$N_{\mathbf{h},\hat{\mathbf{h}}} = N_{\hat{\mathbf{h}}} F_{\mathbf{h}}. \quad (2.2.11)$$

Ceci peut être intéressant en termes de coût de calcul si $P \ll \min(N, M)$.

2.2.2 Illustrations et difficultés d'évaluation numérique.

Commençons par observer sur un cas test ce que donne la formule (2.2.9) dans le cas où l'on se donne la trace de Dirichlet et où l'on utilise comme formule de quadrature la formule des trapèzes. Dans les illustrations qui vont suivre, la fonction u que nous cherchons à reconstruire dans le demi-espace $x > 0$ est le champ acoustique créé par une source ponctuelle située en $(-2, 0)$. Autrement dit :

$$u(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \sqrt{(x+2)^2 + y^2}), \quad (2.2.12)$$

dans le cas isotrope et

$$u(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\omega \sqrt{\frac{(x+2)^2}{c_1} + \frac{(c_2(x+2) + c_1 y)^2}{c_1}} \right), \quad (2.2.13)$$

dans le cas anisotrope. Nous fixons $k = 2\pi$ dans le cas isotrope de sorte que la longueur d'onde est égale à 1, et $\omega = 2\pi$ dans le cas anisotrope. Sur la droite Σ , on place 10 points par longueur d'onde répartis dans l'intervalle $[-15, 15]$ (ce qui permet de fixer N). L'intégrale de Fourier est à nouveau tronquée, c'est-à-dire que l'on a remplacé l'intégrale pour $\xi \in \mathbb{R}$ par une intégrale sur l'intervalle borné $[-7, 7]$, puis on a calculé cette intégrale par la méthode des trapèzes. On a fait la reconstruction dans la zone $\{(x, y) \mid 0 < x < 10, -5 < y < 5\}$ (sans se limiter pour le nombre de points M) pour deux discrétisations différentes de l'intégrale de Fourier, correspondant respectivement à $P = 50$ et $P = 200$.

Sur les figures suivantes, on observe que si $P = 200$, les solutions isotrope et anisotrope sont bien reconstruites à proximité de Σ mais on voit apparaître des oscillations parasites lorsque l'on s'éloigne de Σ . Pour $P = 50$, ces oscillations parasites polluent la reconstruction dans toute la zone considérée. Pour écarter les effets liés à la troncature physique du domaine Σ , on a représenté pour les mêmes paramètres de discrétisation, les noyaux de Dirichlet évalués par discrétisation de l'intégrale de Fourier (2.2.2), avec les expressions de $\hat{\mathcal{N}}$ données dans le tableau 2.1. On retrouve les effets parasites observés précédemment. On conclut ainsi que les effets parasites sont dus à une mauvaise évaluation numérique des intégrales de Fourier.

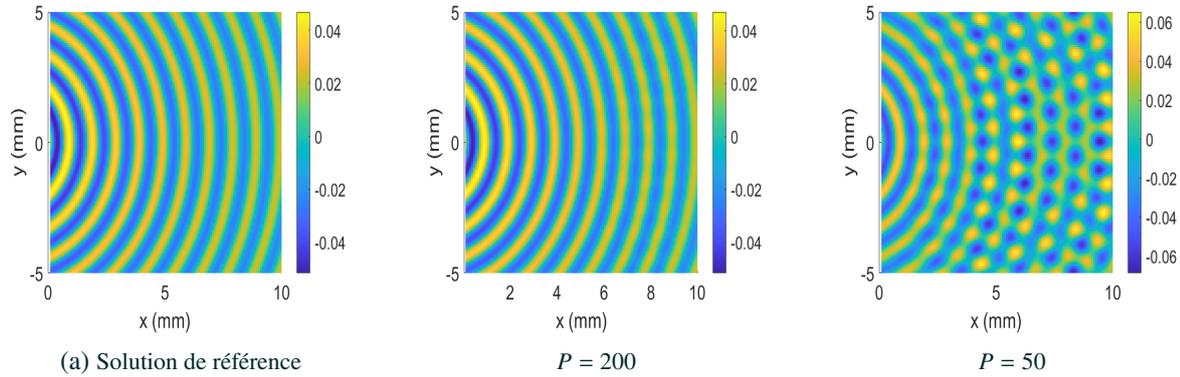


FIGURE 2.2.1 – (a) Représentation de la solution de référence isotrope et représentation du champ u reconstruit à partir la trace de Dirichlet sur la frontière Σ avec (b) $P = 200$ et (c) $P = 50$ points de discrétisation ξ_P sur l'intervalle $[-7, 7]$.

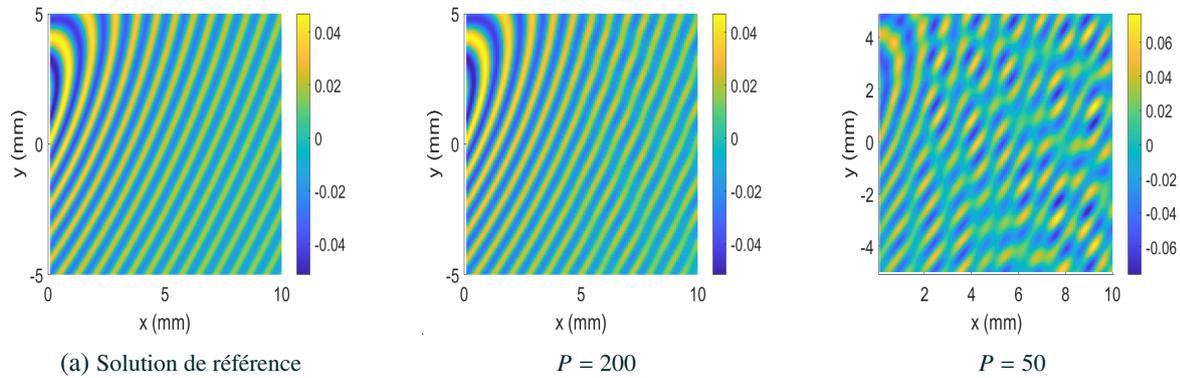


FIGURE 2.2.2 – Représentation (a) de la solution de référence anisotrope pour ($c_1 = c_3 = 1$ et $c_2 = 2$) et du champ u reconstruit à partir la trace de Dirichlet sur la frontière Σ avec (b) $P = 200$ et (c) $P = 50$ points de discrétisation ξ_P sur l'intervalle $[-7, 7]$.

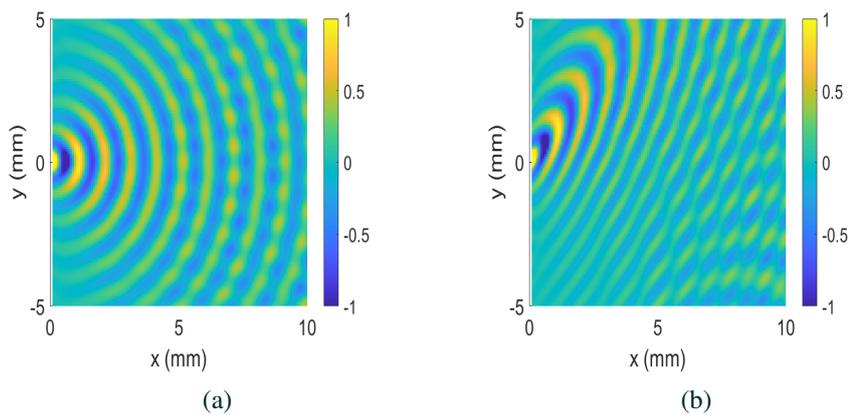


FIGURE 2.2.3 – Représentation du noyau de Dirichlet (a) isotrope et (b) anisotrope pour $P = 50$.

Pour comprendre l'origine de ces artéfacts, il est instructif d'observer l'allure des fonctions de la variable de Fourier ξ qui semblent difficile à intégrer numériquement. Pour une position $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixée, l'intégrande associé au noyau $\mathcal{N}(x, y)$ est défini par la fonction

$$K(x, y) : \xi \mapsto K(x, y; \xi) = \widehat{\mathcal{N}}(x, \xi) e^{i\xi y}.$$

On désigne par $K_D(x, y)$ et $K_N(x, y)$ (resp. $K_D^A(x, y)$ et $K_N^A(x, y)$) ces intégrandes pour la formule avec donnée de Dirichlet et de Neumann dans les cas isotrope (resp. anisotrope). La figure 2.2.4 représente $K_D^A(x, y)$ pour trois positions (x, y) dans le cas isotrope. On observe que pour les trois positions (x, y) , l'intégrande $K_D(x, y)$ est une fonction oscillante de

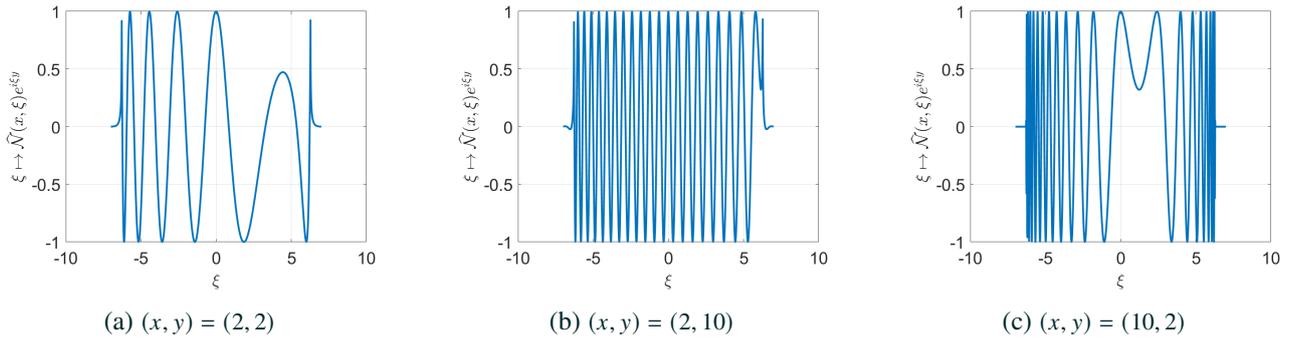


FIGURE 2.2.4 – Représentation de la fonction $K_D(x, y)$ pour différentes valeurs de (x, y) .

ξ dans la zone propagative $\xi \in] -k, k[$, puis tend très rapidement vers 0 dans la zone évanescente $|\xi| > k$. De plus, ces oscillations s'accroissent aux valeurs de coupure $\xi = k$ et $\xi = -k$ avec des périodes de plus en plus petites lorsque x devient grand. Cela entraîne des erreurs d'évaluation numérique lorsque la discrétisation de l'intégrale Fourier n'est pas suffisante, ce qui justifie les artéfacts observés sur la représentation du champ acoustique (Fig. 2.2.1).

Intéressons-nous maintenant au cas où l'on se donne la trace de Neumann de la solution. La situation est alors encore plus délicate car l'intégrande $K_N(x, y)$ prend des valeurs infinies en $\xi = \pm k$, à cause du terme $\frac{1}{\sqrt{k^2 - \xi^2}}$, comme illustré par la figure 2.2.5. Cette fois, l'intégrale (2.2.2) est dite faiblement singulière, et nécessite l'utilisation d'une formule de

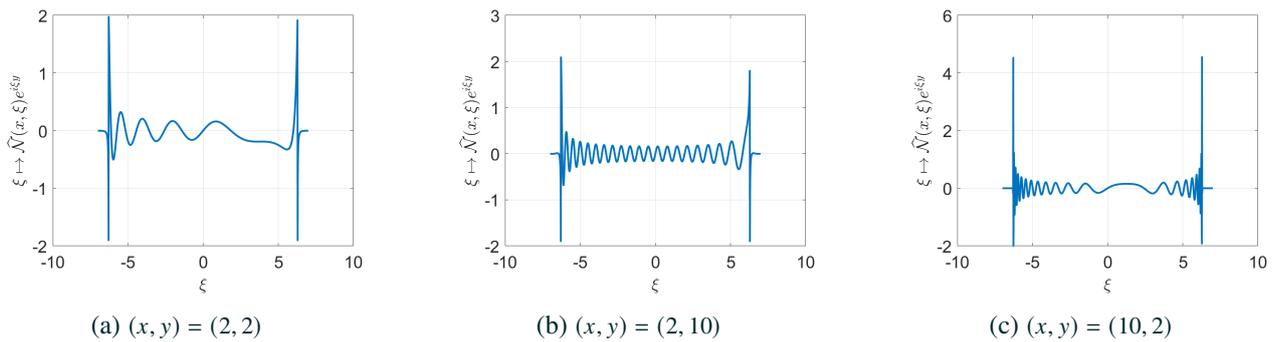


FIGURE 2.2.5 – Représentation de la fonction $K_N(x, y)$ pour différentes valeurs de (x, y) .

quadrature adaptée, comme par exemple la formule de Gauss-Chebyshev [33, 37]. Ce type de formule repose en particulier sur un choix de points de quadrature se densifiant au voisinage des singularités. Nous souhaitons éviter cela, en vue de

l'extension au 3D. En effet, nous verrons que pour la plaque 3D, les noyaux de Green présentent des singularités en plusieurs points, et dans le cas anisotrope, nous ne connaissons pas explicitement la nature de ces singularités.

Il nous faut donc trouver de nouvelles méthodes pour évaluer des intégrandes oscillants avec peu de points de discrétisation (problème de temps de calcul réglé) et qui évite l'évaluation des intégrandes à proximité des valeurs des coupures.

En remarquant que lorsque x est grand, les intégrandes sont certes oscillants, mais présentent une zone où la phase stationne, une approximation champ lointain peut être envisagée : ce sera l'objet de la section 2.3. Pour régler les problèmes liés aux coupures, une autre méthode consiste à déformer le chemin d'intégration dans le plan complexe. Ce sera l'objet de la section 2.4.

2.3 Approximation de champ lointain

Le calcul des intégrales dites oscillantes, c'est-à-dire d'intégrales paramétrées dont l'intégrande oscille de plus en plus lorsque le paramètre augmente, est un sujet bien connu (on pourra par exemple se référer à [26], chap. IV, §2). On comprend aisément que les effets de compensation, dûs aux oscillations de l'intégrande, puissent conduire à des effets importants et indésirables des erreurs d'arrondi. Heureusement, bien souvent, la méthode dite de la phase stationnaire permet de déterminer un équivalent asymptotique de l'intégrale, pour de grandes valeurs du paramètre. On évite ainsi d'avoir à discrétiser l'intégrale. Dans la suite de ce paragraphe, nous montrerons comment appliquer cette méthode au calcul des différents noyaux introduits dans la première partie de ce chapitre. Encore une fois, notre objectif est d'utiliser l'expression de ces noyaux sous forme d'une intégrale de Fourier, car c'est le type de formule qui restera à notre disposition pour le cas général de la plaque élastique 3D. On pourra néanmoins dans ce chapitre valider nos formules asymptotiques en utilisant les expressions des noyaux scalaires comme combinaison de fonctions de Hankel, et en s'appuyant sur les résultats connus sur le comportement asymptotique des fonctions de Hankel.

2.3.1 La méthode de la phase stationnaire

Rappelons les résultats essentiels dont nous aurons besoin dans la suite. On considère pour cela l'intégrale paramétrée suivante

$$I(r) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ir\phi(\xi)} d\xi, \quad (2.3.1)$$

où r est un réel strictement positif destiné à tendre vers $+\infty$, f est une fonction continue à valeurs réelles ou complexes, à support dans un intervalle borné, et ϕ est une fonction de classe C^2 à valeurs réelles. Par abus de notation, $\phi(\xi)$ est appelé la *phase* de l'intégrande. Si $\xi_S \in \mathbb{R}$ est tel que $\phi'(\xi_S) = 0$, on dit que la phase *stationne* en ξ_S . Le comportement de la quantité $I(r)$ pour r grand est essentiellement déterminé par le fait que la phase stationne en certains points ou ne stationne nulle part. Plus précisément, on peut démontrer le résultat suivant :

- Si ϕ' ne s'annule en aucun point, alors il existe une constante C indépendante de r telle que

$$|I(r)| \leq \frac{C}{r}.$$

Autrement dit, l'intégrale décroît au moins comme r^{-1} .

- S'il existe $\xi_S \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \phi'(\xi_S) = 0, \\ \phi'(\xi) \neq 0 \forall \xi \neq \xi_S, \\ \phi''(\xi_S) \neq 0, \end{cases}$$

alors

$$I(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{r|\phi''(\xi_S)|}} f(\xi_S) e^{ir\phi(\xi_S)} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}), \quad (2.3.2)$$

où σ est le signe de $\phi''(\xi_S)$. Autrement dit l'intégrale décroît en $r^{-1/2}$.

2.3.2 Application au cas isotrope

Rappelons que dans le cas isotrope, on cherche à évaluer les noyaux suivant

$$\mathcal{N}_D(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x} e^{i\xi y} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}x}}{i\sqrt{k^2 - \xi^2}} e^{i\xi y} d\xi \quad (2.3.3)$$

pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. La méthode de la phase stationnaire va nous permettre de donner un équivalent à $\mathcal{N}_D(x, y)$ et $\mathcal{N}_N(x, y)$ lorsque $\sqrt{x^2 + y^2}$ est grand. Plus précisément, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \hat{x} = \frac{x}{r}, \quad \hat{y} = \frac{y}{r}.$$

On a alors

$$\mathcal{N}_D(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir(\beta(\xi)\hat{x} + \xi\hat{y})} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ir(\beta(\xi)\hat{x} + \xi\hat{y})}}{i\beta(\xi)} d\xi,$$

où l'on rappelle que $\beta(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$. On considère dans la suite que $\hat{x} > 0$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}$ sont fixés. Ceci nous conduit à définir la phase comme suit (notons que c'est la même pour les deux noyaux) :

$$\phi(\xi) = \beta(\xi)\hat{x} + \xi\hat{y} \quad (2.3.4)$$

et considérer les deux intégrales suivantes :

$$\mathcal{I}_D(r) = \int_{\mathbb{R}} e^{ir\phi(\xi)} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_N(r) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ir\phi(\xi)}}{i\beta(\xi)} d\xi.$$

Mais on ne peut pas directement appliquer les résultats de phase stationnaire rappelés ci-dessus à ces deux intégrales. A première vue, les difficultés semblent nombreuses. D'une part, la phase $\phi(\xi)$ prend des valeurs complexes lorsque $|\xi| > k$, d'autre part $\phi(\xi)$ n'est pas dérivable en $\xi = -k$ et $\xi = k$, puisque $\beta(\xi)$ ne l'est pas. Enfin la fonction $f(\xi)$ de l'intégrale modèle est ici égale soit à la fonction constante égale à 1 pour $\mathcal{I}_D(r)$, soit à la fonction $\beta(\xi)^{-1}$ pour $\mathcal{I}_N(r)$. Dans les deux cas, elle n'est pas à support dans un intervalle borné, et dans le second cas elle n'est pas continue en $\xi = -k$ et $\xi = k$. La solution consiste à introduire une fonction de troncature qui va nous permettre d'écrire chacune de ces deux intégrales comme somme d'une intégrale où la phase stationne, et d'une intégrale qui décroît au moins comme r^{-1} .

Commençons par étudier la phase $\phi(\xi)$ dans l'intervalle $] -k, k[$ où elle prend des valeurs réelles. On a

$$\phi'(\xi) = \beta'(\xi)\hat{x} + \hat{y} \quad \text{et} \quad \phi''(\xi) = \beta''(\xi)\hat{x}. \quad (2.3.5)$$

Par ailleurs, $\beta(\xi)$ vérifie la relation de dispersion

$$\beta(\xi)^2 + \xi^2 = k^2$$

dont on déduit aisément les égalités suivantes :

$$\beta'(\xi) = -\frac{\xi}{\beta(\xi)} \quad \text{et} \quad \beta''(\xi) = -\frac{k^2}{\beta(\xi)^3}. \quad (2.3.6)$$

De 2.3.5 et 2.3.6, on déduit finalement les expressions suivantes des dérivées de la phase :

$$\phi'(\xi) = \frac{\beta(\xi)\hat{y} - \xi\hat{x}}{\beta(\xi)} \quad \text{et} \quad \phi''(\xi) = -\frac{k^2\hat{x}}{\beta(\xi)^3}. \quad (2.3.7)$$

Ceci nous permet de vérifier que la phase stationne en un et un seul point $\xi_S \in]-k, k[$ tel que

$$\xi_S = k\hat{y}, \quad \beta(\xi_S) = k\hat{x}, \quad \phi(\xi_S) = k \quad \text{et} \quad \phi''(\xi_S) = -\frac{1}{k\hat{x}^2}. \quad (2.3.8)$$

Remarque 2.3.1. Il est instructif d'interpréter géométriquement les calculs précédents. Si on reprend la notation $\mathbf{k}(\xi)$ pour le vecteur d'onde de l'onde plane $e^{i(\beta(\xi)x + \xi y)}$ donné par 2.1.10 et \mathbf{r} pour le vecteur de coordonnées (x, y) , (2.3.5) montre que la phase stationne lorsque $\mathbf{k}'(\xi) \cdot \mathbf{r} = 0$, c'est à dire lorsque \mathbf{r} est orthogonal à $\mathbf{k}'(\xi)$, et donc à la surface de lenteur. La relation (2.3.7) montre que dans le cas isotrope, ceci se produit lorsque $\mathbf{k}(\xi)$ est parallèle à \mathbf{r} .

L'idée est maintenant d'isoler le point de stationnarité ξ_S à l'aide d'une fonction de troncature. Soit donc $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction qui vaut 1 dans un voisinage de ξ_S et dont le support est strictement inclus dans $] -k, k[$. On pose alors

$$\mathcal{I}_D^{(1)}(r) = \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{ir\phi(\xi)} d\xi, \quad \mathcal{I}_D^{(2)}(r) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) e^{ir\phi(\xi)} d\xi,$$

et

$$\mathcal{I}_N^{(1)}(r) = \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) \frac{e^{ir\phi(\xi)}}{i\beta(\xi)} d\xi, \quad \mathcal{I}_N^{(2)}(r) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) \frac{e^{ir\phi(\xi)}}{i\beta(\xi)} d\xi.$$

On montre dans l'annexe A.1 que $\mathcal{I}_D^{(2)}(r)$ et $\mathcal{I}_N^{(2)}(r)$ se comportent en r^{-1} . On peut alors appliquer la formule (2.3.2) à $\mathcal{I}_D^{(1)}(r)$ et $\mathcal{I}_N^{(1)}(r)$ et on en déduit les comportements asymptotiques des intégrales $\mathcal{I}_D(r)$ et $\mathcal{I}_N(r)$:

$$\mathcal{I}_D(r) = \sqrt{2\pi k} \frac{\hat{x} e^{ikr}}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_N(r) = \sqrt{2\pi} \frac{e^{ikr}}{i\sqrt{kr}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}).$$

En revenant à la définition des noyaux, on déduit finalement le résultat suivant :

Soient $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les noyaux $\mathcal{N}_D(x, y)$ et $\mathcal{N}_N(x, y)$ définis par (2.3.3) admettent les comportements asymptotiques suivants pour r grand :

$$\mathcal{N}_D(x, y) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{x e^{ikr}}{\sqrt{r^3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikr}}{i\sqrt{kr}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}).$$

On peut remarquer que comme attendu, le noyau de Neumann qui n'est autre que la fonction de Green dans l'espace

libre se comporte de façon isotrope (l'équivalent asymptotique ne dépend que de la distance r et non de la direction), alors que l'équivalent asymptotique du noyau de Dirichlet dépend de r et de x , et a tendance à décroître plus vite dans les directions rasantes que dans les directions proches de la normale au bord du demi plan. Notons que le résultat ci-dessus n'est pas optimal, puisque l'on peut montrer en exploitant les résultats connus sur les comportements asymptotiques des fonctions de Hankel que le reste décroît en $r^{-3/2}$.

2.3.3 Application au cas anisotrope

On se place maintenant dans le cas anisotrope, avec les notations de la section 2.1.2, et on cherche à évaluer pour $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ grand les noyaux suivants

$$\mathcal{N}_D^A(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_N^A(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{r}}}{i\kappa(\xi)} d\xi, \quad (2.3.9)$$

où $\kappa(\xi)$ et $\mathbf{k}(\xi)$ sont donnés par (2.1.29) et (2.1.30). Avec les notations précédentes, on est conduit à étudier les intégrales suivantes :

$$\mathcal{I}_D^A(r) = \int_{\mathbb{R}} e^{ir\phi(\xi)} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_N^A(r) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ir\phi(\xi)}}{i\kappa(\xi)} d\xi.$$

où la phase, là encore la même pour les deux noyaux, est donnée par

$$\phi(\xi) = \mathbf{k}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \beta_+(\xi)\hat{x} + \xi\hat{y}, \quad (2.3.10)$$

où l'on a posé $\hat{\mathbf{r}} = r^{-1}\mathbf{r}$.

On s'intéresse aux points de stationnarité de la phase dans la zone propagative $\xi \in]-k_A, k_A[$. La phase stationne en ξ_S si $\phi'(\xi_S) = \mathbf{k}'(\xi_S) \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$. Or en dérivant (2.1.25), on obtient que

$$\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi) \cdot \mathbf{k}'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.3.11)$$

On en déduit en particulier que $\mathbf{k}'(\xi_S)$ est orthogonal à la fois à $\hat{\mathbf{r}}$ et à $\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi_S)$, ce qui n'est possible que si $\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi_S)$ est parallèle à $\hat{\mathbf{r}}$. Autrement dit, il existe $\alpha_S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi_S) = \alpha_S \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.3.12)$$

Et d'après (2.1.28), $\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi_S) \cdot \mathbf{e}_x = \alpha_S \hat{x} > 0$, donc $\alpha_S > 0$.

On trouve la valeur de α_S en déduisant de l'égalité (2.3.12) que d'une part,

$$\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi_S) \cdot \mathbf{k}(\xi_S) = \alpha_S \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k}(\xi_S) = \omega^2,$$

et d'autre part

$$\mathbf{k}(\xi_S) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \alpha_S \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

On a donc

$$\alpha_S^2 \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \omega^2,$$

d'où, puisque α_S est positif,

$$\alpha_S = \frac{\omega}{\sqrt{\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}}.$$

En revenant à (2.3.12), on a donc

$$\mathbf{k}(\xi_S) = \frac{\omega \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}}. \quad (2.3.13)$$

En particulier, d'après (2.1.30), on en déduit la valeur de l'unique point ξ_S où la phase stationne :

$$\xi_S = \frac{\omega(-c_3 \hat{x} + c_1 \hat{y})}{\sqrt{\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}}. \quad (2.3.14)$$

Pour appliquer la formule (2.3.2), il nous faut calculer la dérivée seconde de la phase et vérifier qu'elle ne s'annule pas en ξ_S . D'après (2.3.10), on a

$$\phi''(\xi) = \mathbf{k}''(\xi) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\kappa''(\xi)}{c_1} \hat{x} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On a alors exactement comme dans (2.3.5) :

$$\kappa''(\xi) = -\frac{k_A^2}{\kappa(\xi)^3} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Mais par ailleurs, en ξ_S , $\mathbf{A}\mathbf{k}(\xi_S) \cdot \mathbf{e}_x = \alpha_S \hat{x} = \kappa(\xi_S)$ d'où

$$\phi''(\xi_S) = -\frac{\sqrt{\mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}}{\omega \hat{x}^2}. \quad (2.3.15)$$

On est enfin en mesure de déterminer le comportement des noyaux en champ lointain.

Soient $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les noyaux $\mathcal{N}_D^A(x, y)$ et $\mathcal{N}_N^A(x, y)$ définis par (2.3.9) admettent les comportements asymptotiques suivants pour r grand :

$$\mathcal{N}_D^A(x, y) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{x e^{i\omega \sqrt{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}}{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_N^A(x, y) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi\omega}} \frac{e^{i\omega \sqrt{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}}{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O(r^{-1}).$$

Remarque 2.3.2. A nouveau, la phase stationne en un point ξ_S où \mathbf{r} est orthogonal à la courbe de lenteur. Mais contrairement au cas isotrope, \mathbf{r} n'est pas en général parallèle à $\mathbf{k}(\xi_S)$ (voir figure 2.3.1).

2.3.4 Validations numériques

Pour la validation numérique, on procède en deux étapes. Dans une première étape, on représente les équivalents asymptotiques des noyaux obtenus au paragraphe précédent (on parle alors de noyaux asymptotiques), et on les compare aux noyaux exacts. Cela nous permet de définir la zone de validité de cette approximation champ lointain. La zone de validité étant connue, dans une seconde étape, on utilise les noyaux asymptotiques dans la formule de représentation, on compare le résultat à la solution exacte et on discute de l'impact de cette approche sur la précision et le temps de simulation.

Remarque 2.3.3. Les fonctions de Hankel n'étant pas définies en 0, pour avoir une bonne analyse graphique dans la suite (précision, zone de validité, etc.), les représentations sont saturées dans une zone autour du centre de rayon égal à une longueur d'onde (mise à zéro des valeurs).

■ Première étape : validation des noyaux asymptotiques de Dirichlet et Neumann

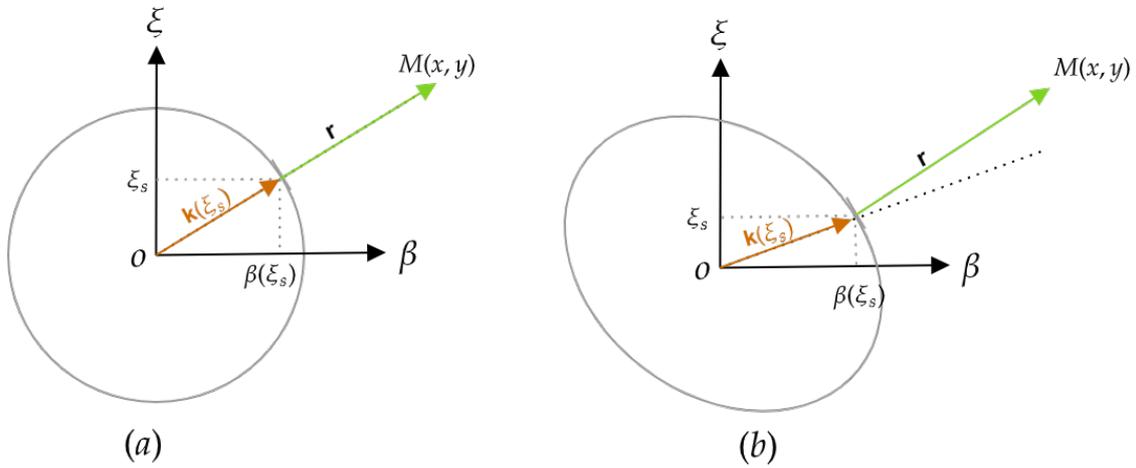


FIGURE 2.3.1 – direction de phase et direction de groupe pour (a) cas isotrope et (b) cas anisotrope.

Les figures 2.3.2 et 2.3.3 représentent les noyaux asymptotiques isotropes et anisotropes, ainsi que leurs différences avec les noyaux de référence (analytiques). On observe d’une part que les parasites (ou artéfacts) dans les noyaux initiaux (sans approximation) ont été éliminés. D’autre part, les noyaux asymptotiques convergent vers les noyaux de référence quand on s’éloigne du centre (0, 0). Suivant qu’on est dans le cas isotrope ou anisotrope, l’orientation peut avoir une importance sur la précision. Cela se voit graphiquement sur les courbes de différences, mais pour s’en convaincre, considérons un segment de points partant du centre (0, 0) et orienté dans une direction quelconque θ . On a représenté sur les figures 2.3.4 l’erreur relative sur ce segment pour différentes orientations θ . On observe que dans le cas isotrope, les noyaux convergent rapidement à mesure qu’on s’éloigne du centre (0, 0), et l’orientation n’a pas d’effets sur la précision du champ lointain. Contrairement au cas anisotrope où la convergence est meilleure, et atteinte plus rapidement à mesure qu’on se rapproche du petit axe des ellipses (direction oblique $-\pi/4$ dans ce cas).

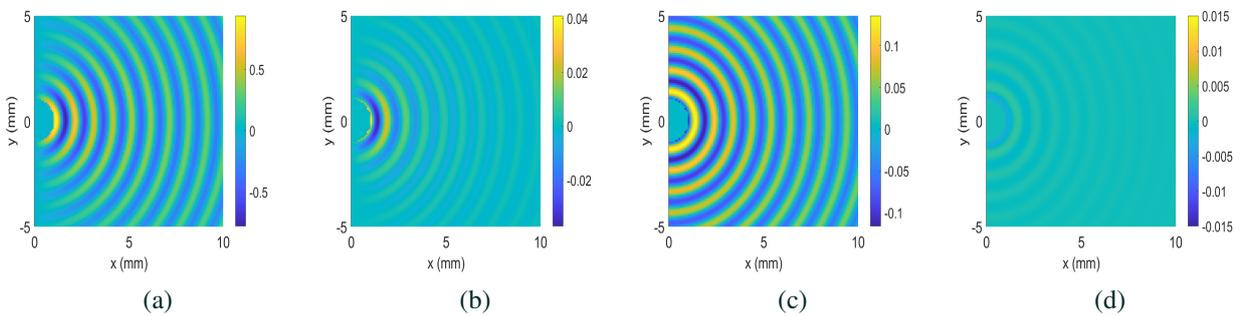


FIGURE 2.3.2 – Représentation du noyau asymptotique de (a) Dirichlet (resp (c) de Neumann) isotrope, et (b) de la différence absolue avec le noyau de analytique de Dirichlet (resp (d) de Neumann).

On observe pour le cas isotrope (Fig 2.3.4a et Fig 2.3.4b), que l’erreur relative est en dessous de 1% pour $r \geq 6$ mm

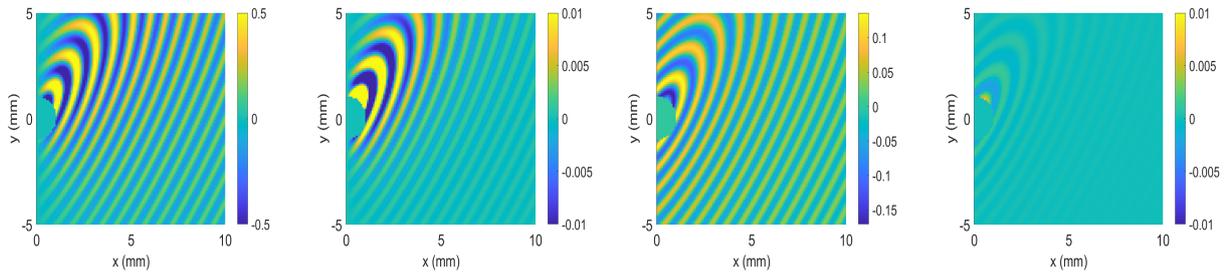


FIGURE 2.3.3 – Représentation du noyau asymptotique de (a) Dirichlet (resp (c) de Neumann) anisotrope, et (b) de la différence absolue avec le noyau de analytique de Dirichlet (resp (d) de Neumann).

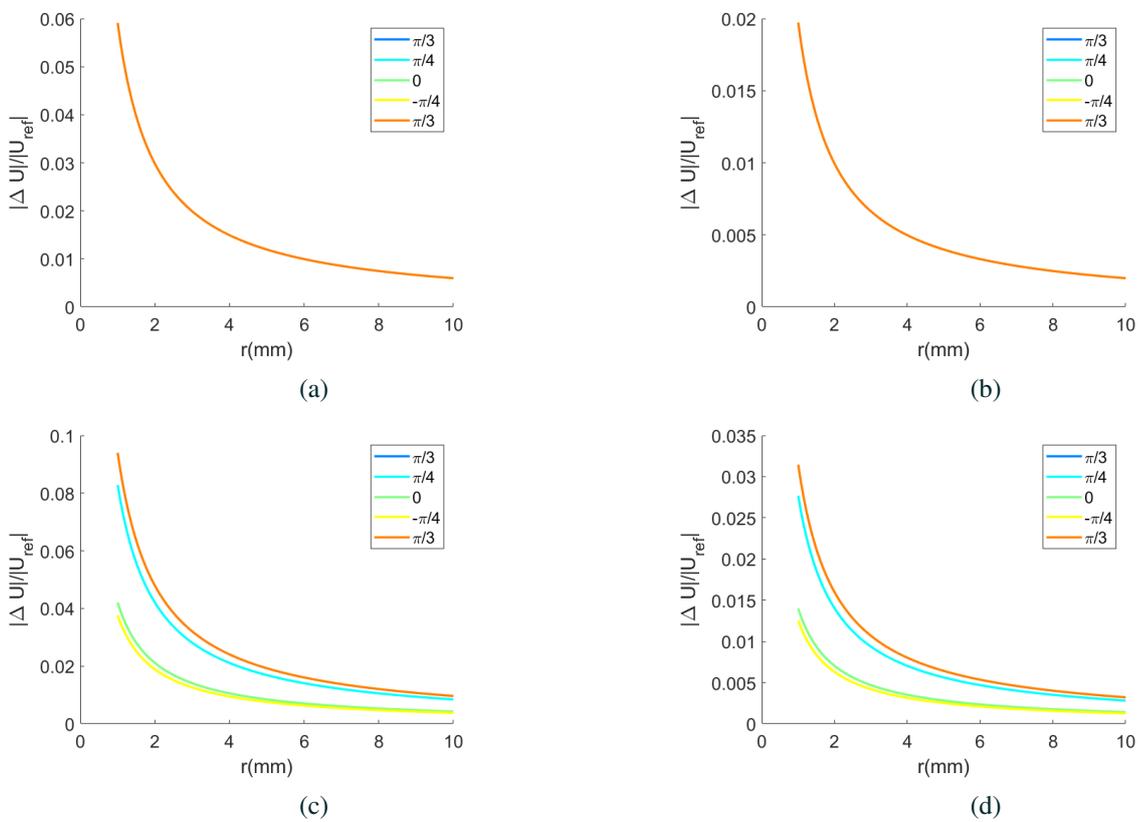


FIGURE 2.3.4 – Erreur relative pour le noyau (a) (Resp (c)) de Dirichlet et (b) (Resp (d)) de Neumann isotrope (Resp anisotrope), le long d'un rayon $r \geq 1$ mm pour différentes orientations d'angle θ .

pour le noyau asymptotique de Dirichlet, et $r \geq 2$ mm pour le noyau asymptotique de Neumann.

Dans l'optique de déterminer une règle de validité des expressions asymptotiques, on fixe un seuil de précision de 1% et on détermine la valeur suffisante minimum de r_{min} en fonction de la longueur d'onde pour atteindre cette précision. Pour cela, on trace les différentes valeurs $r = r_{min}$ à différentes fréquences.

La figure 2.3.5 montre que pour le noyau asymptotique de Dirichlet isotrope converge vers une précision en dessous de 1% à partir de $r_{min} = 2\lambda$. En effet, une simple régression linéaire du nuage de points montre que la dépendance de r en fonction de la longueur d'onde λ est donnée par l'équation $r \approx 6\lambda$. Une analyse similaire pour le noyau asymptotique

isotrope de Neumann montre que la dépendance est donnée par l'équation $r \approx 2\lambda$.

Une règle empirique de validité pour les noyaux asymptotiques anisotropes est difficile à établir dans la mesure où l'orientation θ joue un rôle important, du fait de l'anisotropie comme le montre la figure 2.3.5b. Il est toutefois possible de s'aligner sur l'orientation qui donne le pire des cas pour donner une règle empirique, qui ne serait pas optimum.

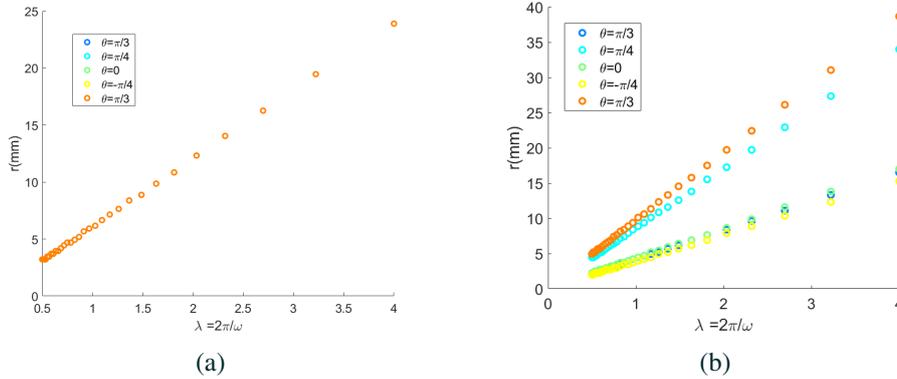


FIGURE 2.3.5 – Représentation en fonction de la longueur d'onde λ , de la distance r_{min} à partir de laquelle la précision est au moins de 1% , pour le noyau asymptotique de Dirichlet; Et pour plusieurs orientations θ ; (a) noyau asymptotique de Dirichlet isotrope et (b) noyau asymptotique de Dirichlet anisotrope.

■ Deuxième étape : utilisation des noyaux asymptotiques dans la formule de représentation de demi-espace

Pour cette validation, on va procéder d'une manière similaire à ce qui a été fait dans la section 2.2. Pour cela, on utilise les solutions de références isotrope (2.2.12) et anisotrope (2.2.13) comme données de Dirichlet sur la droite Σ . On représente ensuite le champ u dans le demi-espace $x > 0$, en utilisant les expressions asymptotiques des noyaux de Dirichlet isotrope \mathcal{N}_D et anisotrope \mathcal{N}_D^A . L'étude se généralise sans grandes difficultés aux noyaux asymptotiques de Neumann isotrope et anisotrope.

Les figures 2.3.6 et 2.3.7 illustrent pour chaque cas la solution reconstruite, ainsi que la différence 2D avec les solutions de références. On observe pour les deux cas que les artefacts dans les reconstructions (voir Fig 2.2.1 et Fig 2.2.2) initiales sont éliminés. La reconstruction utilisant le noyau asymptotique isotrope est d'autant plus précise qu'on s'éloigne du centre, indépendamment de la direction, contrairement à la reconstruction utilisant le noyau asymptotique anisotrope où la direction a une importance sur la précision. Néanmoins en $x = 0$, on n'observe pas seulement l'erreur due à l'évaluation numérique des noyaux asymptotiques. En effet, en utilisant les formules de reconstruction intégrale, il y a une erreur supplémentaire liée à l'intégration numérique de la donnée suivant la direction y . On observe que cette erreur diminue lorsqu'on s'éloigne de la droite Σ .

En conclusion, dans le cas isotrope comme dans le cas anisotrope, lorsqu'on les évalue en un point *lointain*, les noyaux de Dirichlet et de Neumann peuvent être approchés par une expression analytique qui évite la discrétisation de l'intégrale de Fourier. Ceci a un double avantage puisque c'est à la fois moins coûteux et plus précis. En effet, la méthode de la phase stationnaire permet de ne retenir que la partie de l'intégrande qui contribue au champ lointain, et permet d'oublier les parties très oscillantes de l'intégrand, qui n'y contribuent pas.

Si on reprend les notations de la section 2.2, supposons que tous les points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_M$ où l'on veut évaluer le noyau

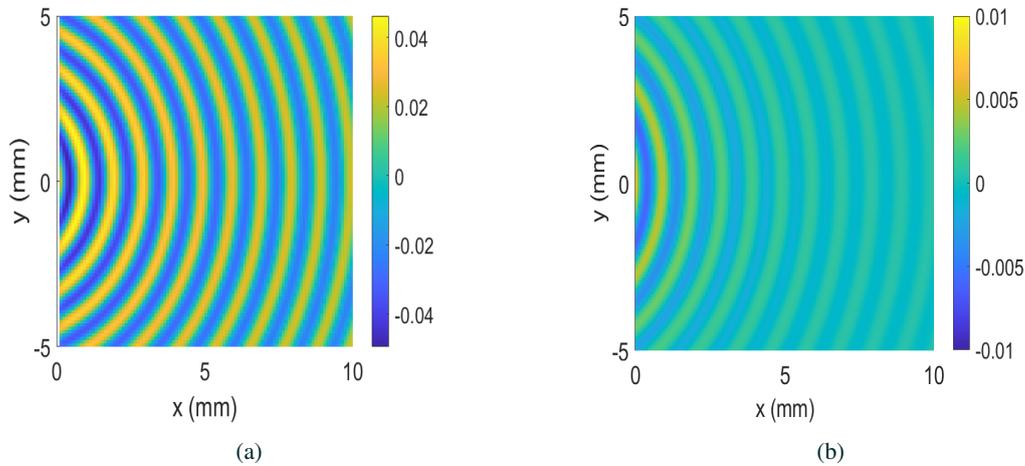


FIGURE 2.3.6 – Représentation dans le cas isotrope (a) du champ acoustique construit à partir du noyau asymptotique isotrope et (b) de la différence entre cette représentation et la solution de référence (2.2.12).

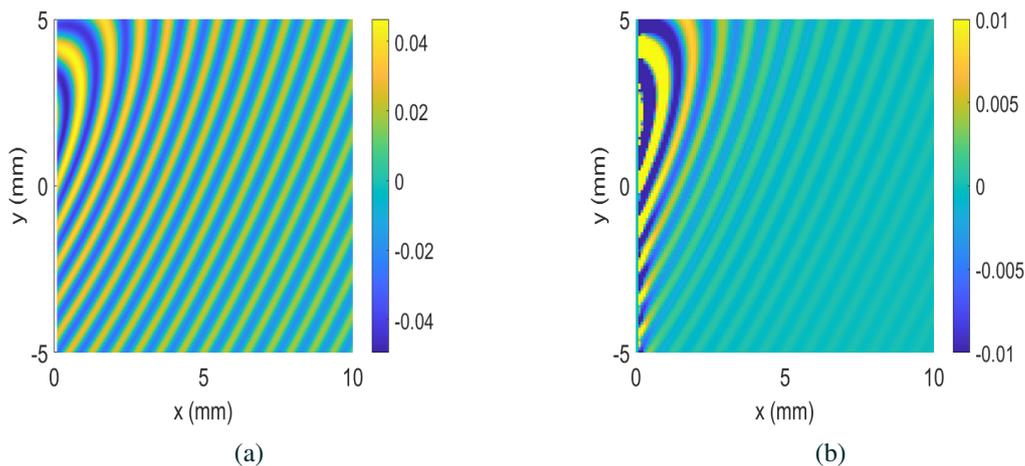


FIGURE 2.3.7 – Représentation dans le cas anisotrope (a) du champ acoustique construit à partir du noyau asymptotique anisotrope et (b) de la différence entre cette représentation et la solution de référence (2.2.13).

soient lointains, alors tout se passe comme si on pouvait prendre $P = 1$ dans la formule 2.2.7, mais avec \hat{w}_P et ξ_P qui dépend du point $\mathbf{r} = (x, y)$. Cette dernière remarque est importante : elle signifie que si l'on utilise une approximation en champ lointain, on ne peut plus factoriser la matrice $N_{\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}}$ comme on l'avait fait en (2.2.11).

On voit donc deux limitations à cette approche : d'une part, l'approximation champ lointain n'est par définition pas utilisable en champ proche, et la méthode HSM nécessite des évaluations des noyaux aussi bien en champ proche qu'en champ lointain. D'autre part, l'approximation champ lointain ne permet pas d'exploiter une factorisation des blocs pleins de la matrice HSM, dans l'esprit de [22].

C'est pourquoi nous proposons dans ce qui suit une approche alternative.

2.4 Déformation de contour dans le plan complexe

Comme on l'a dit plus haut, les difficultés rencontrées lors de l'évaluation des noyaux à l'aide d'intégrales de Fourier sont principalement dues au comportement des intégrandes, oscillants et parfois singuliers, au voisinage des valeurs de coupure (situées en $\xi = \pm k$ dans le cas isotrope et $\xi = \pm k_A$ dans le cas anisotrope). On se propose donc d'utiliser des résultats d'analyse complexe pour déformer le chemin d'intégration afin de s'éloigner de ces valeurs comme par exemple dans [34]. Signalons que la complexification de la variable de Fourier dans la formule de représentation de demi-espace avait déjà été introduite par Y. Tjandrawidjaja dans le chapitre 5 de sa thèse [56], mais pour un objectif différent du nôtre : il s'agissait pour lui de justifier le processus de dilatation analytique dans la variable d'espace y .

2.4.1 Le principe de la méthode dans le cas isotrope

On cherche à nouveau à évaluer les noyaux (2.3.3) pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme il est clair que ces deux noyaux sont pairs en y , on peut se contenter de regarder le cas $y \geq 0$.

Pour comprendre la méthode, commençons par nous intéresser à l'intégrale de Fourier suivante pour $x > 0$ et $y \geq 0$:

$$\mathcal{I}_D(x, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)} d\xi.$$

La première chose à faire est de déterminer le domaine d'analyticité en ξ de l'intégrande. La fonction $z \rightarrow e^z$ étant une fonction entière (c'est-à-dire analytique dans tout le plan complexe), cela revient à déterminer le domaine d'analyticité de la fonction $z \mapsto \sqrt{k^2 - z^2}$. Il convient d'abord de préciser quelle définition nous utilisons pour la racine carrée complexe. Cette définition, compatible avec (2.1.7), est la suivante :

$$\text{Si } z = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } 0 < \theta < 2\pi, \text{ alors } \sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}.$$

On voit que la racine carrée est définie pour tout nombre complexe z à l'exception des réels positifs, qui constituent ce que l'on appelle en analyse complexe la *coupure*, car la fonction \sqrt{z} ainsi définie est discontinue à travers \mathbb{R}^+ , mais analytique dans le plan complexe privé de cette coupure, c'est-à-dire dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Remarque 2.4.1. Attention aux deux usages différents du mot *coupure* : la coupure au sens de l'analyse complexe et la coupure au sens du *cut-off*, lorsqu'un paramètre fait passer un mode de propagatif à évanescent. Pour éviter la confusion, nous utiliserons dans ce paragraphe la terminologie de l'analyse complexe et nous dirons donc que les valeurs $\xi = \pm k$ sont des *points de branchement* de la fonction à intégrer.

Notons que cette définition de la racine carrée complexe n'est pas la définition usuelle. Son avantage pour nous est la propriété suivante :

$$\text{Im}(\sqrt{z}) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}^+. \quad (2.4.1)$$

Compte tenu de cette définition, on vérifie aisément que la fonction $z \rightarrow \sqrt{k^2 - z^2}$ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus C(k)$ où

$$C(k) = i\mathbb{R} \cup [-k, k].$$

C'est donc également le cas de la fonction

$$z \mapsto e^{i(\sqrt{k^2 - z^2}x + zy)}.$$

Une difficulté est que dans la définition de $I_D(x, y)$, on intègre cette fonction sur l'axe réel et donc en particulier sur l'intervalle $[-k, k]$ qui fait partie de la coupure. Il faut alors préciser de "quel côté de la coupure on se place". Plus précisément, pour $\xi \in [-k, k]$, la définition de $\sqrt{k^2 - \xi^2}$ utilisée jusqu'à maintenant est la définition classique de la racine carrée d'un nombre réel positif, qui est elle-même un nombre réel positif. D'autre part, pour $\xi \in [-k, k]$ et $\varepsilon \neq 0$, nous venons de définir $\sqrt{k^2 - (\xi + i\varepsilon)^2}$. Cette quantité a une limite quand ε tend vers 0 par valeurs positives et la limite opposée quand $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs négatives. En remarquant que pour ξ et ε réels,

$$\text{Im}(k^2 - (\xi + i\varepsilon)^2) = -2\xi\varepsilon,$$

on vérifie aisément que la limite de $\sqrt{k^2 - (\xi + i\varepsilon)^2}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs positives est positive (donc c'est la valeur recherchée) si $-k \leq \xi \leq 0$ et négative (donc opposée à la valeur recherchée) si $0 \leq \xi \leq k$. On peut donc conclure que le chemin d'intégration correspondant à l'intégrale que nous voulons calculer, passe au dessus de la coupure le long de l'intervalle $] -k, 0[$ et en dessous le long de l'intervalle $]0, k[$, comme indiqué sur la figure 2.4.1.

Nous avons maintenant toutes les informations nécessaires pour déformer le chemin d'intégration. Pour comprendre la méthode, commençons par nous intéresser à la demi intégrale de Fourier suivante pour $x > 0$ et $y \geq 0$:

$$I_D^-(x, y) = \int_{-\infty}^0 e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)} d\xi.$$

Pour $R > 0$ et $\alpha \in]0, \pi/2[$, on désigne par $C_{R,\alpha}$ le chemin constitué de la réunion de l'intervalle $[-R, 0]$, du segment complexe $[-Re^{-i\alpha}, 0]$ et de l'arc de cercle $\{-Re^{-i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \alpha\}$, comme représenté sur la figure 2.4.2.

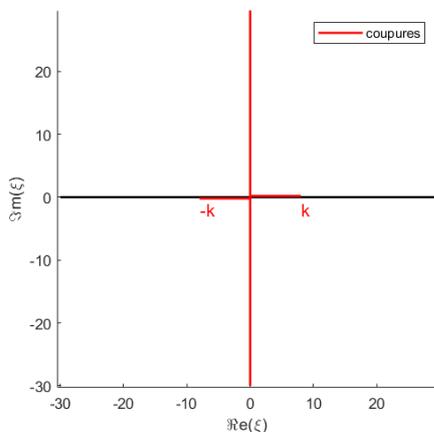


FIGURE 2.4.1 – Définition des coupures

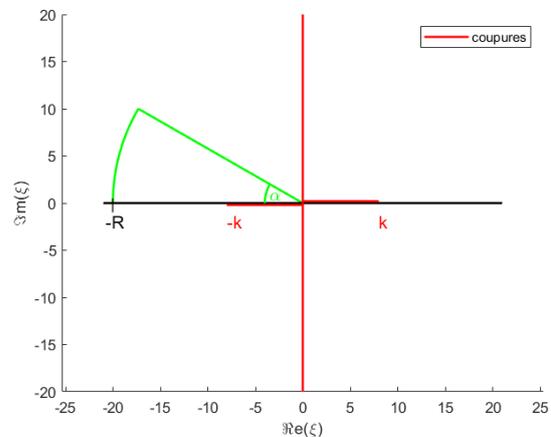


FIGURE 2.4.2 – Définition d'un chemin d'intégration pour $\xi < 0, x > 0$ et $y \geq 0$.

D'après le théorème de Cauchy et l'étude ci-dessus de l'analyticité de l'intégrande, on peut affirmer que

$$\int_{C_{R,\alpha}} e^{i(\sqrt{k^2 - z^2}x + zy)} dz = 0.$$

De plus, comme on a $x > 0$ et $y \geq 0$, d'après (2.4.1),

$$\text{Im}(\sqrt{k^2 - z^2}x + zy) = \text{Im}(\sqrt{k^2 - z^2})x + \text{Im}(z)y > 0$$

si $\text{Im}(z) > 0$. On en déduit que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On obtient ainsi que l'intégrale sur le demi-axe réel négatif est égal à l'intégrale sur le demi-axe $\{\eta e^{-i\alpha} \mid \eta \in \mathbb{R}^-\}$, autrement dit :

Pour $x > 0, y \geq 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$ on a

$$\mathcal{I}_D^-(x, y) = \int_{-\infty}^0 e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)} d\xi = e^{-i\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{i(\sqrt{k^2 - \eta^2}e^{-2i\alpha}x + \eta e^{-i\alpha}y)} d\eta. \quad (2.4.2)$$

La même démarche s'applique au noyau de Neumann, de sorte que :

Pour $x > 0, y \geq 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$ on a

$$\mathcal{I}_N^-(x, y) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)}}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi = e^{-i\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i(\sqrt{k^2 - \eta^2}e^{-2i\alpha}x + \eta e^{-i\alpha}y)}}{\sqrt{k^2 - \eta^2}e^{-2i\alpha}} d\eta. \quad (2.4.3)$$

Sur les figures 2.4.3 et 2.4.4, on reprend les intégrandes initiaux K_D (Fig 2.2.4) et K_N (Fig 2.2.5), et on les compare avec les intégrandes mixtes : pour $\xi < 0$, la complexification a été réalisée pour un angle $\alpha = \pi/6$ et pour $\xi > 0$, on garde les anciennes intégrandes. On observe que pour les ξ négatifs (après complexification), les oscillations sont supprimées, de même que les valeurs singulières aux points de coupures $\pm k$. Ainsi dans cette région, une discrétisation très fine n'est pas nécessaire car quelques points suffisent pour évaluer efficacement les intégrandes.

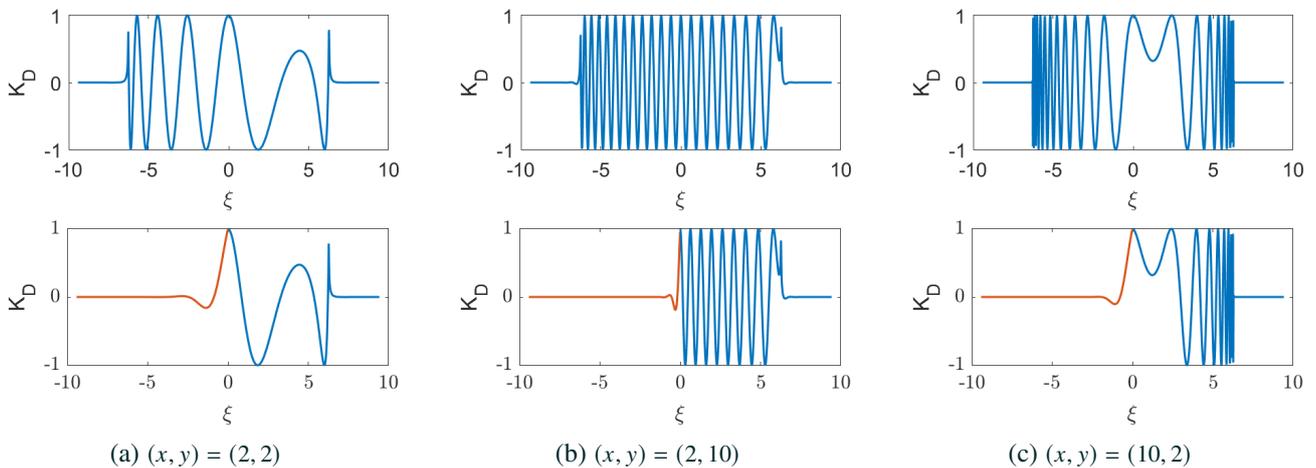


FIGURE 2.4.3 – Représentation de la fonction $K_D(x, y)$ pour différentes valeurs de (x, y) avant et après une complexification d'un angle de $\pi/6$ pour $\xi < 0$.

Il nous faut maintenant considérer l'autre partie de chaque intégrale, c'est-à-dire les intégrales pour $\xi > 0$:

$$\mathcal{I}_D^+(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_N^+(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)}}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi.$$

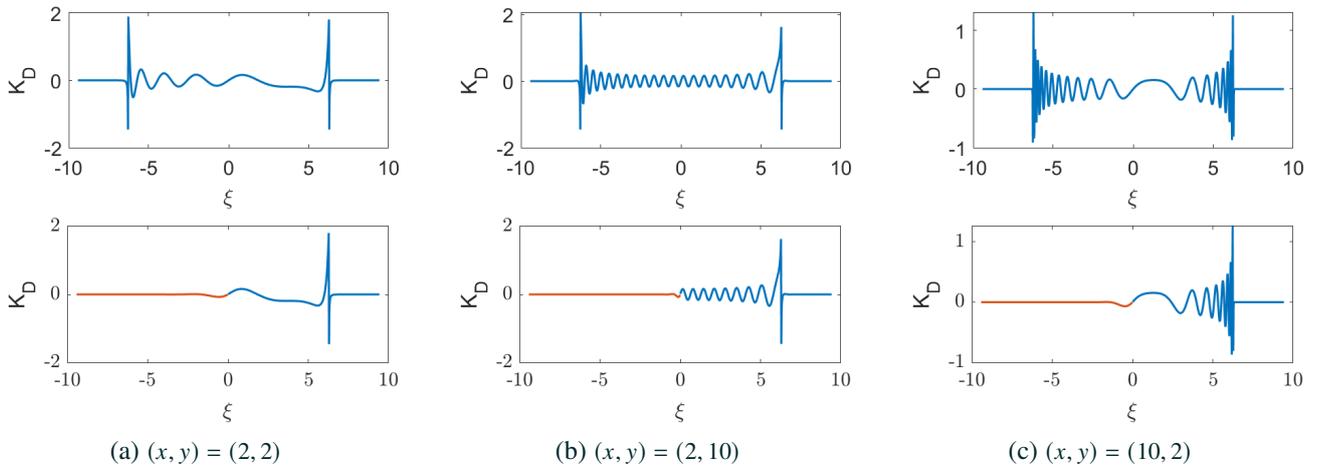


FIGURE 2.4.4 – Représentation de la fonction $K_N(x, y)$ pour différentes valeurs de (x, y) avant et après une complexification d'un angle de $\pi/6$ pour $\xi < 0$.

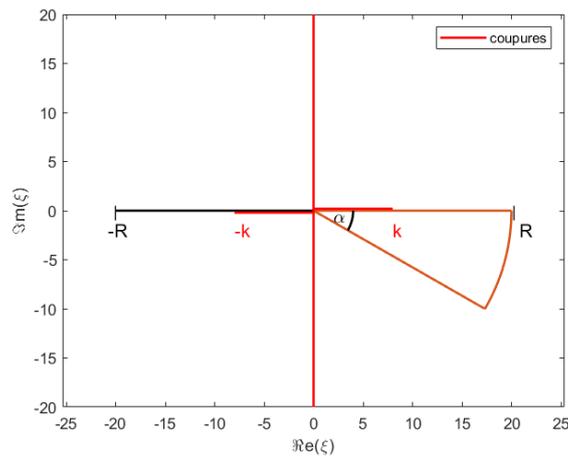


FIGURE 2.4.5 – Définition d'un chemin d'intégration pour $\xi > 0, 0 < x$ et $0 \leq y$.

Comme nous devons passer sous la coupure, il nous faut cette fois déplacer le chemin d'intégration dans le demi-plan complexe $\text{Im}(z) < 0$. On peut à nouveau appliquer le théorème de Cauchy en notant $C_{R,\alpha}$, pour $R > 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$, le chemin constitué de la réunion de l'intervalle $[0, R]$, du segment complexe $[0, Re^{-i\alpha}]$ et de l'arc de cercle $\{Re^{-i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \alpha\}$, comme représenté sur la figure 2.4.5. Mais la différence avec le cas précédent est qu'on ne peut pas toujours montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 quand R tend vers l'infini. En effet, comme on a

$$\text{Im}(\sqrt{k^2 - R^2 e^{-2i\alpha} x + R e^{-i\alpha} y}) \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} R(\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y),$$

l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$x > y \tan(\alpha). \tag{2.4.4}$$

Cette condition nous dit que l'angle α est limité par la position (x, y) , et à x fixé, plus y est grand, moins on est autorisé à tourner. On en déduit finalement le résultat suivant :

Soient $x > 0$, $y \geq 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$. Alors si $x > y \tan(\alpha)$,

$$\mathcal{I}_D^+(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)} d\xi = e^{-i\alpha} \int_0^{+\infty} e^{i(\sqrt{k^2 - \eta^2}e^{-2i\alpha}x + \eta e^{-i\alpha}y)} d\eta \quad (2.4.5)$$

et

$$\mathcal{I}_N^+(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\sqrt{k^2 - \xi^2}x + \xi y)}}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi = e^{-i\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\sqrt{k^2 - \eta^2}e^{-2i\alpha}x + \eta e^{-i\alpha}y)}}{\sqrt{k^2 - \eta^2}e^{-2i\alpha}} d\eta. \quad (2.4.6)$$

Mais contrairement au résultat pour \mathcal{I}_D^- et \mathcal{I}_N^- , ce résultat pour \mathcal{I}_D^+ et \mathcal{I}_N^+ n'est pas très satisfaisant en pratique (voir Fig 2.4.7 et Fig 2.4.8) pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, rappelons que notre objectif était d'éloigner le chemin d'intégration des points de branchement $\xi = \pm k$, or la condition sur α résulte de la définition du nouveau chemin d'intégration à l'infini, là où il n'y avait initialement aucune difficulté puisque les intégrandes sont exponentiellement décroissantes sur \mathbb{R} . De plus, en pratique, ces intégrales seront tronquées et on peut donc toujours considérer que l'on intègre sur une ligne brisée comme représenté sur la figure 2.4.6, auquel cas il n'y a plus de condition limitante sur α .

En revanche, nous devons examiner attentivement l'intégrande pour η variant de 0 à k , ou même à $2k$. En effet, comme la quantité

$$\text{Im}(\sqrt{k^2 - z^2}x + zy) = \text{Im}(\sqrt{k^2 - z^2})x + \text{Im}(z)y$$

peut prendre des valeurs négatives là où $\text{Im}(z) < 0$ (puisque par hypothèse, $y \geq 0$), l'exposant de l'exponentielle peut avoir le mauvais signe, et la fonction à intégrer prend des valeurs très grandes, posant à nouveau des difficultés numériques. Nous étudions cette difficulté dans le paragraphe suivant.

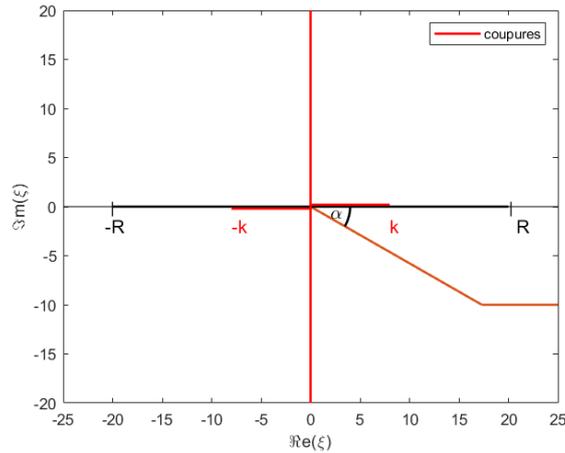


FIGURE 2.4.6 – Définition d'un chemin d'intégration pour $\xi > 0$, $0 < x$ et $0 \leq y$.

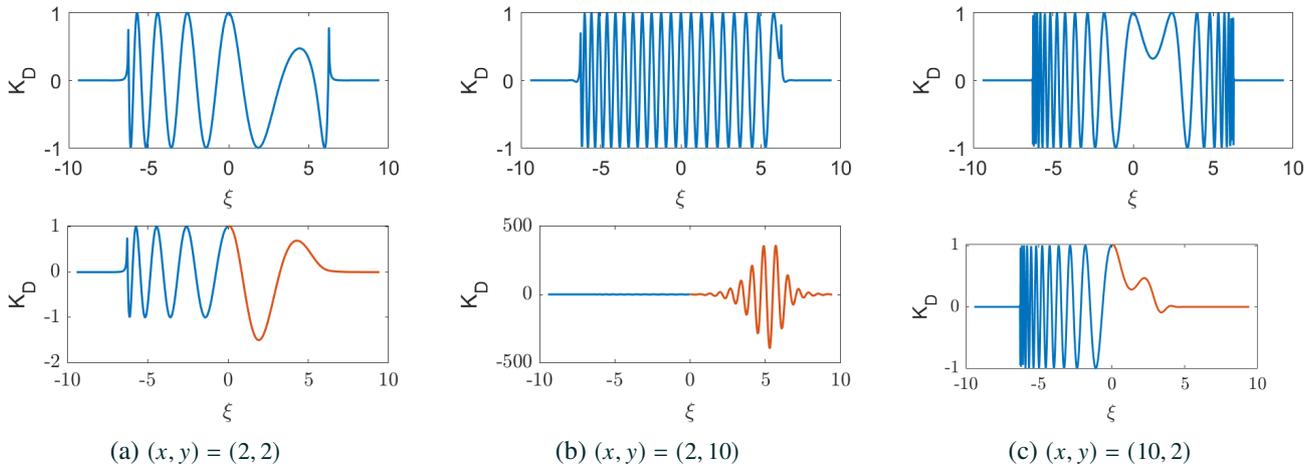


FIGURE 2.4.7 – Représentation de la fonction $K_D(x, y)$ pour différentes valeurs de (x, y) avant et après une complexification d'un angle de $\pi/20$ pour $\xi > 0$.

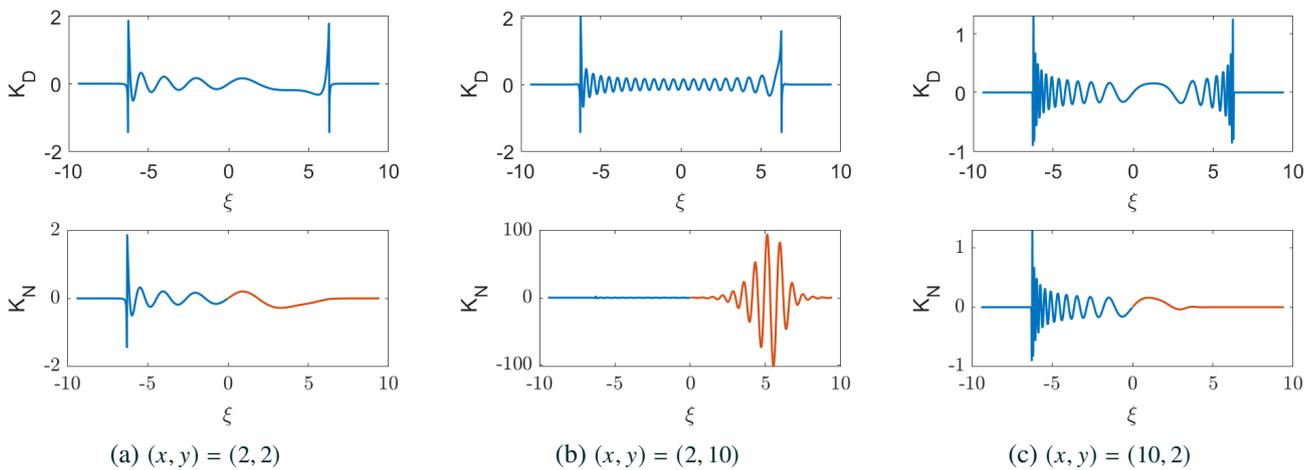


FIGURE 2.4.8 – Représentation de la fonction $K_N(x, y)$ pour différentes valeurs de (x, y) avant et après une complexification d'un angle de $\pi/20$ pour $\xi < 0$.

2.4.2 Une règle heuristique pour le choix de l'angle de rotation

La figure 2.4.9 représente la partie imaginaire de la fonction $\eta \mapsto \sqrt{k^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha x} + \eta e^{-i\alpha y}$ pour $0 < x, 0 < y$ et $0 < \eta$. On fait remarquer que lorsque cette partie imaginaire est négative, les noyaux complexifiés prennent des valeurs exponentiellement croissantes.

La représentation a été faite pour différentes valeurs de l'angle de déformation α . De manière générale, on constate que la partie imaginaire présente des valeurs faiblement négatives, avant de prendre des valeurs positives au-delà d'un seuil spécifique pour certains α . Ce seuil varie en fonction de la position (x, y) et de l'angle de déformation α . En effet :

- Pour $y \gg x$, pour certains angles α , la partie imaginaire reste toujours négative ou devient positive très loin (à l'infini). Plus l'angle α est petit et plus la remontée est rapide. Par contre quelque soit la valeur de α , elle ne se fait pas avant η proche de la coupure k .

- Pour $y \approx x$, on a les mêmes comportements sauf qu'ici, la remontée se fait avant k et est d'autant plus rapide que α est petit.
- Pour $y \ll x$, on est dans la meilleure configuration où le minimum de la fonction est très faible avec une faible dépendance à l'angle de déformation α . Néanmoins, on est d'autant mieux que l'angle α est petit.

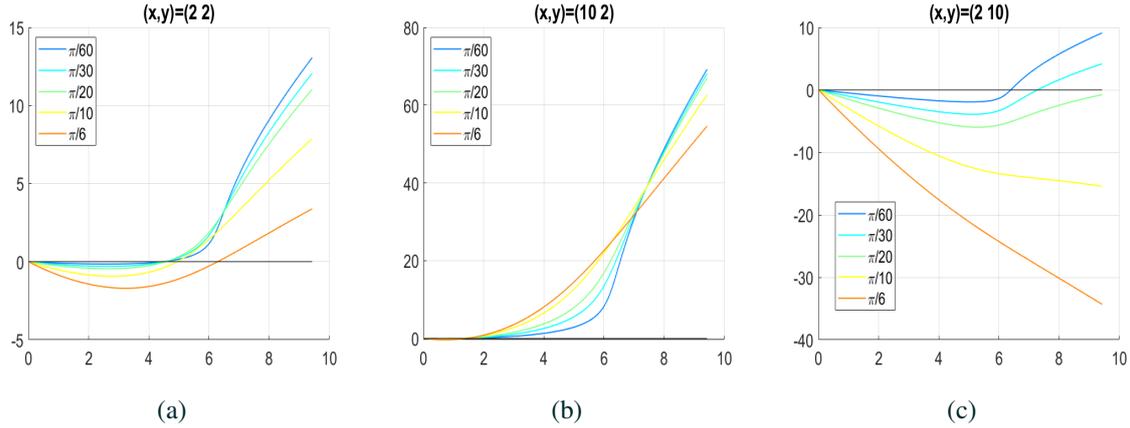


FIGURE 2.4.9 – Représentation de la partie imaginaire de la fonction $\eta \mapsto \sqrt{k^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha} x + \eta e^{-i\alpha} y$ pour différentes valeurs de (x, y) , et différents angles de déformation α .

Ainsi, on a intérêt à choisir une valeur de l'angle α la plus petite possible, mais pas trop pour pouvoir observer les effets de la déformation sur les intégrandes. Pour un petit angle positif α , il est possible de faire un développement limité pour donner le maximum de l'angle α , pour ne pas avoir des amplitudes supérieurs à un seuil.

Dans un souci de généralisation pour la suite, reprenons la notation $\beta(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$. Alors un développement limité nous dit que pour tout $\eta \in [-k, k]$,

$$\operatorname{Im} (\beta(\eta e^{-i\alpha})x + \eta e^{-i\alpha}y) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} -(\beta'(\eta)x + y)\eta \sin(\alpha), \quad (2.4.7)$$

où α tend vers 0 par valeurs positives pour être du bon côté de la coupure.

En particulier pour le cas isotrope étudié dans ce paragraphe, en utilisant (2.3.6), on obtient pour tout $\eta \in [-k, k]$:

$$\operatorname{Im} (\beta(\eta e^{-i\alpha})x + \eta e^{-i\alpha}y) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} (\beta(\eta)y - \eta x)\beta'(\eta) \sin(\alpha). \quad (2.4.8)$$

Il est intéressant de rapprocher la quantité $(\beta(\eta)y - \eta x)$ de l'expression (2.3.7) de la phase dans le paragraphe précédent. On en déduit ce qui suit. Si on note $\xi_S(x, y)$ le point où $\beta(\xi_S)y - \xi_S x = 0$, alors

- pour $\eta \in]0, \xi_S(x, y)[$, on a

$$\beta'(\eta) = -\frac{\eta}{\beta(\eta)} < 0 \text{ et } \beta(\eta)y - \eta x > 0,$$

donc

$$(\beta(\eta)y - \eta x)\beta'(\eta) \sin(\alpha) < 0.$$

C'est le mauvais cas : d'après (2.4.8), la partie imaginaire de la quantité qui nous intéresse devient négative dans cet intervalle.

- pour $\eta \in]\xi_S(x, y), k[$, on a

$$\beta'(\eta) = -\frac{\eta}{\beta(\eta)} < 0 \text{ et } \beta(\eta)y - \eta x < 0,$$

donc

$$(\beta(\eta)y - \eta x)\beta(\eta) \sin(\alpha) > 0.$$

C'est le bon cas : d'après (2.4.8), la partie imaginaire de la quantité qui nous intéresse devient positive dans cet intervalle. C'est intéressant de noter qu'elle tend même vers l'infini lorsque η se rapproche de k , puisque $\beta(\eta)$ tend vers 0 et $\beta'(\eta)$ vers $-\infty$. Donc tout se passe très bien à proximité du point de branchement.

Revenons au mauvais cas, lorsque $\eta \in]0, \xi_S(x, y)[$. On est dans la zone où la contribution négative de $\beta(\eta)y$ l'emporte sur la contribution positive de ηx . Si l'on se restreint à la zone $y \leq x$ (on verra plus loin pourquoi cela est possible dans la mise en oeuvre de la HSM), on peut vérifier que le minimum est atteint pour $y = x$, et décroît linéairement avec $kx \sin(\alpha)$. Plus précisément, pour $x \geq y$:

$$\min_{\eta \in [0, k]} (\beta(\eta)y - \eta x)\beta'(\eta) \sin(\alpha) \geq -\tau kx \sin(\alpha). \quad (2.4.9)$$

où

$$\tau = \max_{\eta \in [0, 1]} \eta \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right).$$

On trouve que

$$\tau \sim 0.2257.$$

Ceci nous fournit une règle pour le choix de l'angle α : ainsi par exemple, pour que l'exponentielle ne prenne pas des valeurs supérieures à 10 dans la zone $y \leq x \leq 6\lambda$, où $\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde, on choisit α tel que

$$\sin(\alpha) \leq \frac{0.2257 \times \ln(10)}{12\pi} = \frac{0.2257 \times 5,3019}{12 \times 3,14} = 0.0317.$$

En réalité, les expériences numériques semblent indiquer que ce résultat obtenu asymptotiquement pour α petit est pessimiste, et que l'intégrande se comporte bien (c'est-à-dire qu'il ne prend pas de trop grandes valeurs) pour un angle α plus grand que ce que la borne ci-dessus préconise.

Remarque 2.4.2. On pourrait juger intéressant de choisir un chemin d'intégration qui dépende de la position (x, y) , éventuellement en déplaçant la coupure (c'est-à-dire en modifiant la définition de la racine carrée complexe), afin que la fonction $z \mapsto \sqrt{k^2 - z^2}x + zy$ garde une partie imaginaire positive sur tout le chemin. C'est exactement ce que l'on fait lorsque l'on choisit le chemin dit de "steepest descent" [43, 31]. Cela serait certainement envisageable pour les problèmes scalaires simples que nous étudions dans ce chapitre, mais nous semble à proscrire pour le problème tridimensionnel qui motive cette thèse et que nous aborderons dans les chapitres suivants. D'une part, comme nous l'avons déjà mentionné pour l'approximation de type champ lointain, cela rend impossible une factorisation des blocs pleins de la matrice HSM du type (2.2.11). D'autre part, nous verrons au chapitre suivant que pour le cas de la plaque 3D, l'évaluation d'un intégrand à ξ fixé nécessite un calcul de modes dans l'épaisseur par la méthode SAFE. Donc l'évaluation d'une intégrale sur un chemin dans le plan complexe requière le calcul des modes pour chaque point de discrétisation de cette intégrale. Pour ces deux raisons, notre objectif est de définir un seul chemin (voire deux, on verra pourquoi dans le chapitre suivant) qui permette un calcul rapide des noyaux pour toutes les positions (x, y) .

2.4.3 Généralisation au cas anisotrope

Essayons d'appliquer une approche similaire aux noyaux (2.3.9) pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, et considérons par exemple l'intégrale

$$\mathcal{I}_D^A(x, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\beta_+(\xi)x + \xi y)} d\xi.$$

Par définition de $\beta_+(\xi)$, on a

$$\mathcal{I}_D^A(x, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{\kappa(\xi)x}{c_1} + \xi\left(\frac{-c_3x}{c_1} + y\right)\right)} d\xi.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{I}_D^A(x, y) = \mathcal{J}_D^A(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad \text{où} \quad \mathcal{J}_D^A(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\sqrt{k_A^2 - \xi^2} \tilde{x} + \xi \tilde{y}\right)} d\xi, \quad \tilde{x} = \frac{x}{c_1}, \quad \tilde{y} = \frac{-c_3}{c_1}x + y.$$

On peut alors appliquer à $\mathcal{J}_D^A(\tilde{x}, \tilde{y})$ les résultats obtenus pour le cas isotrope, et de même pour le noyau de Neumann. On obtient ainsi les résultats suivants.

Pour $x > 0$, $y \geq \frac{c_3}{c_1}x$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$ on a

$$\mathcal{I}_D^{A,-}(x, y) = \int_{-\infty}^0 e^{i(\beta_+(\xi)x + \xi y)} d\xi = e^{-i\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{i\left(\sqrt{k_A^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha} \frac{x}{c_1} + \eta e^{-i\alpha} \left(\frac{-c_3x}{c_1} + y\right)\right)} d\eta. \quad (2.4.10)$$

$$\mathcal{I}_N^{A,-}(x, y) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i(\beta_+(\xi)x + \xi y)}}{\kappa(\xi)} d\xi = e^{-i\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\left(\sqrt{k_A^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha} \frac{x}{c_1} + \eta e^{-i\alpha} \left(\frac{-c_3x}{c_1} + y\right)\right)}}{\sqrt{k_A^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha}} d\eta. \quad (2.4.11)$$

Soient $x > 0$, $y \geq \frac{c_3}{c_1}x$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$. Alors si $x > (c_1y - c_3x) \tan(\alpha)$,

$$\mathcal{I}_D^{A,+}(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{i(\beta_+(\xi)x + \xi y)} d\xi = e^{-i\alpha} \int_0^{+\infty} e^{i\left(\sqrt{k_A^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha} \frac{x}{c_1} + \eta e^{-i\alpha} \left(\frac{-c_3x}{c_1} + y\right)\right)} d\eta. \quad (2.4.12)$$

$$\mathcal{I}_N^{A,+}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\beta_+(\xi)x + \xi y)}}{\kappa(\xi)} d\xi = e^{-i\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\left(\sqrt{k_A^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha} \frac{x}{c_1} + \eta e^{-i\alpha} \left(\frac{-c_3x}{c_1} + y\right)\right)}}{\sqrt{k_A^2 - \eta^2} e^{-2i\alpha}} d\eta. \quad (2.4.13)$$

2.4.4 Validations numériques

Pour la validation numérique, on procède en deux étapes également (comme dans le champ lointain). Dans une première étape, on représente les noyaux complexifiés et on les compare aux noyaux exacts. Dans une seconde étape, on utilise les noyaux complexifiés dans la formule de représentation et on compare les champs reconstruits aux champs de référence.

■ Première étape : validation des noyaux complexifiés de Dirichlet et Neumann

Dans la suite la zone (en ξ), pour laquelle la complexification est possible pour toutes les valeurs d'angles $\alpha \in]0, \pi/2[$ est nommée *bonne zone*. Et inversement, on nomme *mauvaise zone*, là où il y a une limitation dans le choix de l'angle de déformation α .

Les figures 2.4.10 et 2.4.11 représentent les noyaux de Dirichlet et de Neumann après complexification (cas isotrope et anisotrope), et leurs différences par rapport aux noyaux analytiques. L'angle de complexification sur la bonne zone des valeurs de ξ est de $\pi/6$ et de $\pi/30$ sur la mauvaise zone. On observe graphiquement la zone de non validité de la méthode, qui dépend du choix de l'angle de complexification dans la mauvaise zone. En dehors de cette zone, la méthode permet d'éliminer les artefacts qui apparaissent dans les noyaux initiaux, pour la même discrétisation de l'intégrale de Fourier P (Fig 2.2.3).

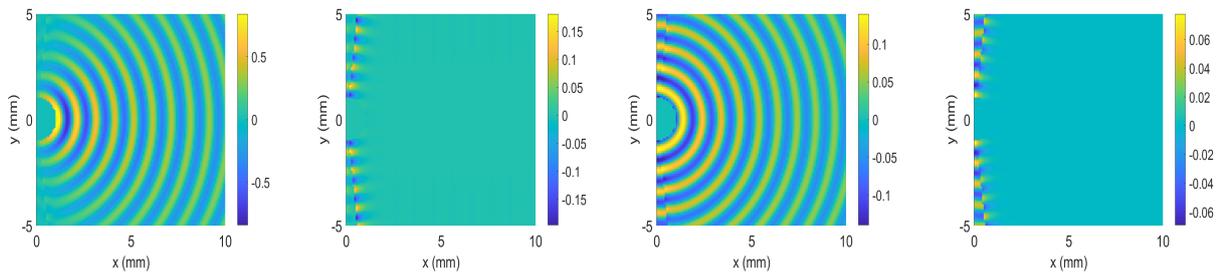


FIGURE 2.4.10 – Représentation du noyau complexifié de (a) Dirichlet (resp (c) de Neumann) isotrope, et (b) de la différence avec le noyau de analytique de Dirichlet (resp (d) de Neumann), pour $\alpha = \pi/6$ dans la bonne zone et $\alpha = \pi/30$ dans la mauvaise zone, pour $P = 50$.

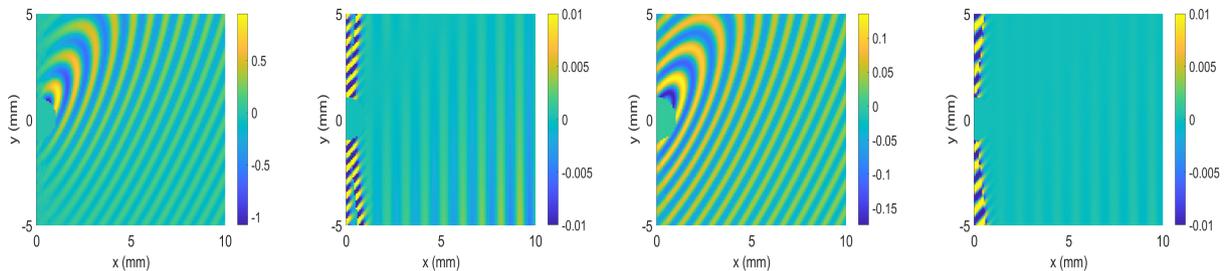


FIGURE 2.4.11 – Représentation du noyau complexifié de (a) Dirichlet (resp (c) de Neumann) anisotrope, et (b) de la différence absolue avec le noyau de analytique de Dirichlet (resp (d) de Neumann), pour $\alpha = \pi/6$ dans la bonne zone et $\alpha = \pi/30$ dans la mauvaise zone, pour $P = 100$.

Pour quantifier l'impact de la méthode de la complexification, on représente l'erreur relative sur un segment partant de l'origine et orienté dans une direction θ quelconque. L'erreur relative est comparée avec le cas sans la complexification, pour une discrétisation de Fourier $P = 50$ pour le cas isotrope et $P = 100$ pour le cas anisotrope. On présente les résultats obtenus avec les noyaux de Dirichlet isotrope et anisotrope. Un raisonnement analogue peut être fait avec les noyaux de Neumann.

Pour le cas isotrope (Fig 2.4.12), on observe une amélioration significative de la précision pour le noyau après complexification. Par contre l'erreur relative remonte quand r devient grand. Dans la mauvaise zone, bien que les pics soient atténués aux coupures, l'intégrande continue d'osciller, surtout avec l'augmentation de r . Cependant, pour la plage de valeurs de r considérée, l'erreur relative reste en dessous de 0.1%. Sans complexification, cette précision demanderait

d'augmenter de manière drastique la discrétisation P , augmentant considérablement le coût d'évaluation.

Dans le cas anisotrope (2.4.13), les mêmes effets sur l'erreur relative sont observés. Cependant, il est à noter que, selon la direction dans le cas anisotrope, les ordres de grandeur ne sont pas les mêmes (contrairement au cas isotrope où il existe une invariance par rotation).

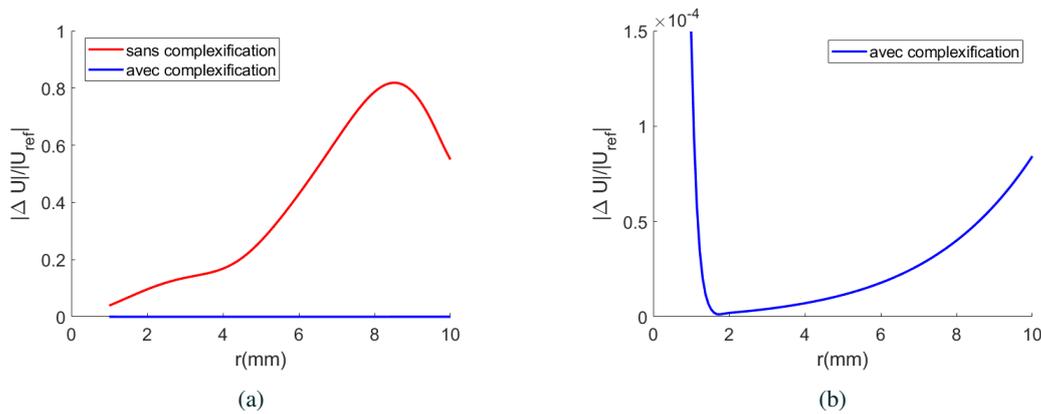


FIGURE 2.4.12 – Représentation de l'erreur relative sur la demi-droite $\{r \geq 1, \theta = \pi/4\}$ de l'évaluation du noyau de Dirichlet isotrope : (a) sans et avec une complexification de $\pi/6$ dans la bonne zone et $\pi/30$ dans la mauvaise zone, (b) zoom sur l'erreur relative avec la complexification uniquement.

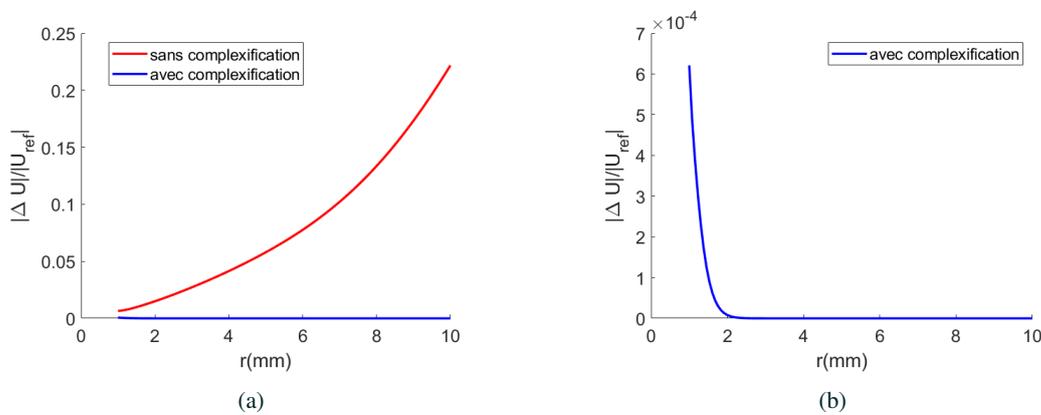


FIGURE 2.4.13 – Représentation de l'erreur relative sur la demi-droite $\{r \geq 1, \theta = \pi/4\}$ de l'évaluation du noyau de Dirichlet anisotrope : (a) sans et avec complexification de $\pi/6$ dans la bonne zone et $\pi/30$ dans la mauvaise zone, (b) zoom sur l'erreur relative avec la complexification uniquement.

■ Deuxième étape : utilisation des noyaux complexifiés dans la formule de représentation de demi-espace.

Pour cette validation, on va procéder d'une manière similaire à ce qui a été fait dans la section 2.2. Pour cela, on

utilise les solutions de référence isotrope (2.2.12) et anisotrope (2.2.13) comme données de Dirichlet sur la droite Σ . On représente ensuite le champ u dans le demi-espace $x > 0$, en utilisant les noyaux complexifiés de Dirichlet isotrope \mathcal{I}_D et anisotrope \mathcal{I}_D^A . L'étude se généralise sans grandes difficultés aux noyaux complexifiés de Neumann isotrope et anisotrope.

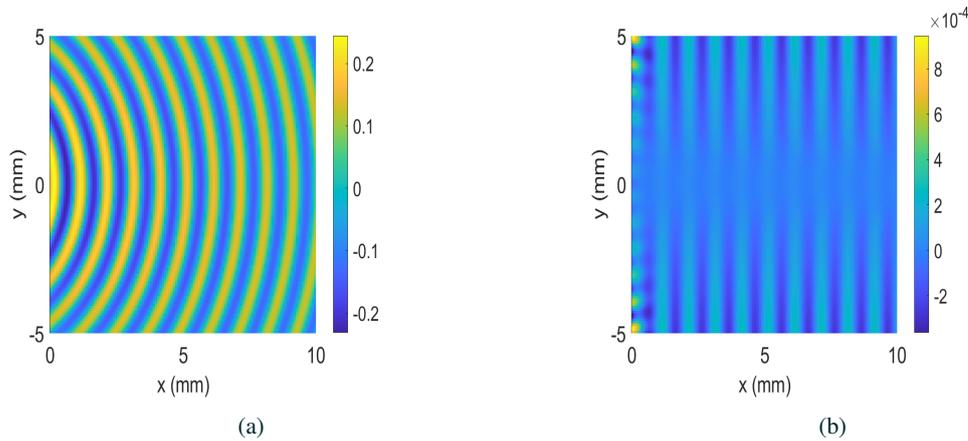


FIGURE 2.4.14 – Représentation dans le cas isotrope (a) du champ acoustique construit à partir du noyau complexifié de Dirichlet et (b) de la différence entre cette représentation et la solution de référence (2.2.12).

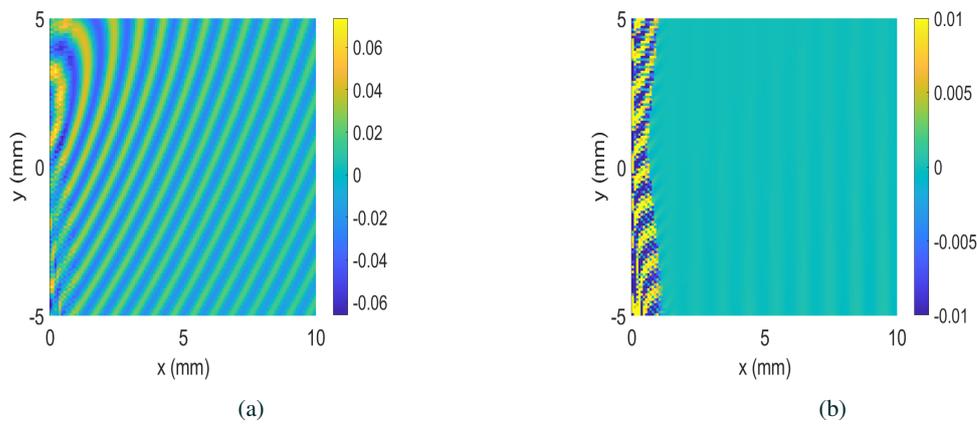


FIGURE 2.4.15 – Représentation dans le cas anisotrope (a) du champ acoustique construit à partir du noyau complexifié de Dirichlet et (b) de la différence entre cette représentation et la solution de référence (2.2.13).

La figure 2.4.14 et la figure 2.4.15 montrent que les champs obtenus avec les noyaux complexifiés ne présentent plus d'artefacts. Cela est vrai en dehors des zones de non validité de la complexification, comme on peut le voir sur les représentations. Pour quantifier l'impact de la complexification sur la représentation, on représente sur les figures 2.4.16 et 2.4.17 respectivement pour le cas isotrope et le cas anisotrope, l'erreur relative sur une partie du segment partant de l'origine et orienté d'un angle $\theta = \pi/4$.

L'introduction des noyaux complexifiés dans la formule de représentation Fourier permet d'améliorer la représentation d'une part, mais aussi de rendre l'évaluation plus efficace d'autre part. En effet avec beaucoup moins de points de discrétisation, on a une évaluation plus précise des noyaux.

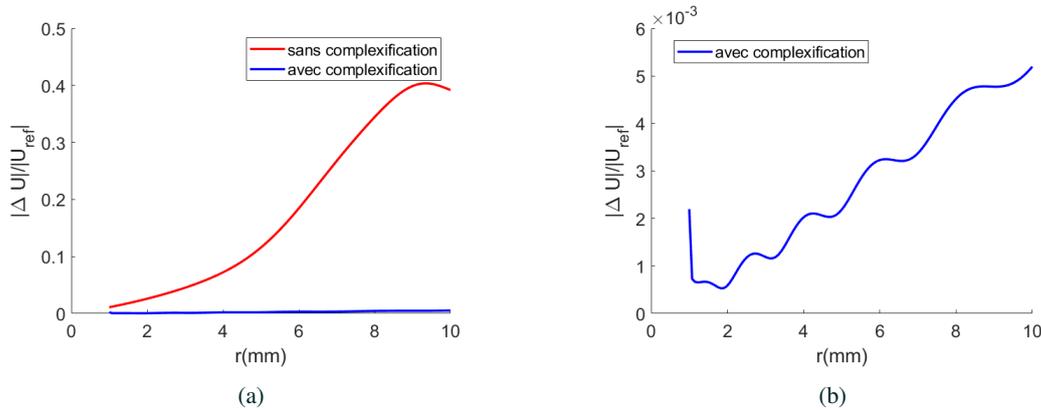


FIGURE 2.4.16 – Comparaison des erreurs relatives dans le cas isotrope sur la demi-droite $\{r \geq 1, \theta = \pi/4\}$ avec les noyaux de Fourier : (a) avec et sans complexification, (b) zoom avec complexification.

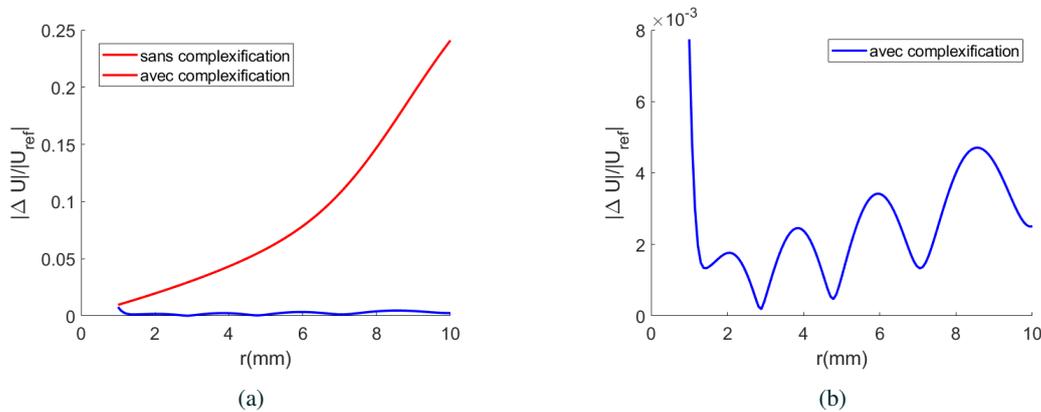


FIGURE 2.4.17 – Comparaison des erreurs relatives dans le cas anisotrope sur la demi-droite $\{r \geq 1, \theta = \pi/4\}$ avec les noyaux de Fourier : (a) avec et sans complexification, (b) zoom avec complexification.

2.5 Résumé du chapitre 2

Pour résumer ce chapitre, l'évaluation numérique de la formule de représentation conduit à des artefacts dans le champ reconstruit (voir Fig 2.2.1 et Fig 2.2.2). Dans le cas isotrope et anisotrope, la cause identifiée est la mauvaise évaluation numérique des intégrales de Fourier. Pour résoudre les problèmes évoqués deux méthodes ont été proposées : l'approximation champ lointain et la méthode de la complexification.

L'avantage de l'approximation champ lointain est qu'on remplace l'évaluation de l'intégrale par une formule asymptotique qui ne nécessite l'évaluation de l'intégrande qu'en un ξ (ce ξ dépend lui-même du point (x, y) où l'on évalue les noyaux). Cela entraîne un gain important dans le temps d'évaluation. La méthode asymptotique présente des zones de validité qui dépendent des noyaux impliqués et du milieu de l'étude (isotrope ou anisotrope). Pour le milieu isotrope, elle est valable à partir de 7 longueurs d'onde pour le noyau de Dirichlet, et à partir de 2 longueurs d'onde pour le noyau de Neumann. Pour le milieu anisotrope, l'orientation a un impact sur ces zones de validité.

La deuxième méthode introduite est la déformation du chemin dans le plan complexe que nous appelons *méthode de complexification*. Cette méthode se base sur des arguments d'analyse complexe pour déplacer dans le plan complexe le

chemin d'intégration de l'intégrale de Fourier, initialement situé sur l'axe réel. En le faisant, les intégrandes de départ très oscillants sont remplacés par des intégrandes équivalents moins oscillants. Il est alors possible avec moins de points de discrétisation, de les évaluer efficacement et de manière plus précise. Nous avons expliqué au paragraphe 2.2.1 qu'il était intéressant du point de vue algorithmique d'utiliser les mêmes points de discrétisation ξ de l'intégrale pour toutes les évaluations des noyaux. Ce sera encore plus vrai dans le cas 3D où l'évaluation de l'intégrande en une valeur de ξ requiert un calcul de valeurs propres. C'est pourquoi nous ne nous autorisons pas à optimiser le chemin d'intégration pour chaque évaluation du noyau. Au contraire, nous fixons un chemin obtenu par une simple rotation d'angle α de l'axe réel. Cet angle étant fixé, nous avons montré que la méthode de complexification permet de reconstruire efficacement la solution dans le demi-espace, sauf dans une zone proche du bord. Dans le cas isotrope, cette zone est constituée de deux secteurs d'angle α . Pour limiter cette zone d'invalidité, on choisira α assez petit en pratique.

Chapitre 3

Formule de représentation dans une demi-plaque élastique 3-D

Sommaire

3.1 Généralités sur les modes élastiques	70
3.1.1 Éléments de l'élastodynamique	70
3.1.2 Les modes dans une plaque élastique isotrope	73
3.1.3 Modes à incidence oblique	77
3.2 Les ξ-modes dans une plaque élastique	80
3.2.1 Motivation et définition	80
3.2.2 Classification des ξ -modes	81
3.2.3 Les ξ -modes pour ξ complexe.	84
3.2.4 Les ξ -modes dans le cas isotrope	85
3.3 Formule de reconstruction dans une demi-plaque élastique	90
3.3.1 Fonction de Green d'une plaque élastique	91
3.3.2 La formule de représentation intégrale	94
3.3.3 Le cas isotrope	95

Le but de ce chapitre est d'établir la formule de représentation du champ de déplacement dans une demi-plaque élastique, comme cela a été fait au chapitre précédent pour le cas scalaire acoustique dans un demi-plan. La formule de représentation 3-D fait intervenir des noyaux de Green qui sont des tenseurs d'ordre 2. Ces noyaux sont obtenus en combinant une transformée de Fourier, comme dans le cas scalaire, avec une décomposition modale dans l'épaisseur de la plaque. La nature vectorielle du problème élastique ainsi que l'exploitation du formalisme modal, rendent l'établissement et la manipulation de cette représentation beaucoup plus délicats que dans le cas scalaire.

Nous commencerons dans ce chapitre par présenter les caractéristiques des modes élastiques "classiques", dans le cas d'une plaque élastique isotrope et anisotrope. Ensuite, nous introduirons la notion de ξ -modes élastiques et discuterons de la différence de ces derniers avec les modes classiques. Quelques propriétés associées aux ξ -modes seront présentées

notamment la propriété de bi-orthogonalité pour des valeurs de ξ réelles. On montrera que la formule de bi-orthogonalité peut être généralisée pour des valeurs de ξ complexes. Pour finir, nous établirons les fonctions de Green élastique à l'aide des ξ -modes, ce qui permettra de déduire une formule intégrale pour la représentation du champ élastique (déplacement et contrainte normale).

3.1 Généralités sur les modes élastiques

Un milieu élastique dont une ou deux dimensions sont très grandes par rapport à la dernière dimension est un guide d'ondes élastique. En effet, la géométrie guide les ondes à travers de multiples réflexions sur les surfaces supérieure et inférieure.

Lorsqu'une plaque possède des propriétés de guide d'ondes avec des conditions aux limites constantes sur les faces supérieure et inférieure, il existe des modes de déplacement pour certaines plages de fréquences. Ces modes se propagent sur de longues distances sans atténuation (dans les matériaux non dissipatifs). Par conséquent, l'étude des ondes dans une telle plaque peut être abordée de manière modale.

Les modes élastiques sont dit dispersifs car leurs caractéristiques de propagation (longueur d'onde, vitesse de phase et de groupe, etc.) varient en fonction de la fréquence. On qualifiera ces modes de "modes classiques" dans la suite. La détermination de la formule de reconstruction du champ de déplacement dans une demi-plaque élastique nécessite l'introduction d'une nouvelle famille de modes qu'on désigne par ξ -modes. Les différences entre cette nouvelle famille de ξ -modes et les modes classiques seront présentées.

3.1.1 Éléments de l'élastodynamique

La propagation des ondes dans une plaque élastique en régime harmonique établi est régie par l'équation de l'élastodynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \rho\omega^2\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h < z < h\}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{e}_3 = 0 \text{ en } z = \pm h, \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

où $\omega \in \mathbb{R}^+$, ρ et \mathbf{e}_3 représente respectivement la pulsation, la masse volumique et la normale à la surface $z = \pm h$. Le terme $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ symbolise le tenseur des contraintes associées au déplacement \mathbf{u} . Dans le cas de l'élastodynamique linéaire (pour les petites déformations), la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ est liée à la déformation $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ par la loi de Hooke [21] :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \quad (3.1.2)$$

ou sous la forme indicielle suivante :

$$\sigma(\mathbf{u})_{ij} = \sum_{k,l \in \{1,2,3\}} C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \text{ avec } i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.1.3)$$

avec $\mathbf{C}=[C_{ijkl}]$ le tenseur de rigidité et $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ définie par :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \frac{\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1}{2} & \frac{\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1}{2} \\ \frac{\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1}{2} & \partial_2 u_2 & \frac{\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2}{2} \\ \frac{\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1}{2} & \frac{\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2}{2} & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1.4)$$

L'expression précédente peut être écrite en utilisant la notation indicielle comme suit

$$\epsilon(\mathbf{u})_{kl} = \frac{\partial_k u_l + \partial_l u_k}{2} \quad \text{avec } k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.1.5)$$

où $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial e_i}$ et les indices 1, 2 et 3 représentent les variables x , y et z de la base canonique \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 . On utilisera la convention d'Einstein afin de simplifier les notations. Selon cette convention si un indice apparaît deux fois, il y a sommation sur toutes les valeurs possibles de cet indice. Par exemple l'expression (3.1.3) se réécrit comme suit :

$$\sigma(\mathbf{u})_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \quad \text{avec } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1.6)$$

De même un vecteur \mathbf{u} s'écrit en fonction de ses composantes u_i comme suit :

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i \quad \text{avec } i = 1, 2, 3. \quad (3.1.7)$$

Les symétries du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes [21] induisent les symétries suivantes sur la matrice \mathbf{C} :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad \text{et} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}.$$

Elles conduisent à une réduction du nombre de termes de \mathbf{C} , passant de 81 à 21 coefficients indépendants. On représente \mathbf{C} sous la forme d'une matrice 6×6 comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des contraintes $\sigma(\mathbf{u})$ et le tenseur des déformations $\epsilon(\mathbf{u})$ peuvent s'écrire sous une forme réduite avec la convention de Voigt comme suit :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12})^t. \quad (3.1.8)$$

et

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{u}) = (\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad 2\epsilon_{23} \quad 2\epsilon_{13} \quad 2\epsilon_{12})^t. \quad (3.1.9)$$

La loi de Hooke (3.1.3) liant ces composantes réduites est donnée plus explicitement par :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{11} \\ \tilde{\epsilon}_{22} \\ \tilde{\epsilon}_{33} \\ 2\tilde{\epsilon}_{23} \\ 2\tilde{\epsilon}_{13} \\ 2\tilde{\epsilon}_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.1.10)$$

En contractant les indices du vecteur des contraintes et du vecteur des déformations par le biais d'une application bijective p définie explicitement par :

$$\begin{aligned} p(1, 1) &= 1, & p(2, 2) &= 2, & p(3, 3) &= 3 \\ p(1, 2) &= 6, & p(1, 3) &= 5, & p(2, 3) &= 4. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

La relation (3.1.10) devient :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_4 \\ \tilde{\sigma}_5 \\ \tilde{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_1 \\ \tilde{\epsilon}_2 \\ \tilde{\epsilon}_3 \\ 2\tilde{\epsilon}_4 \\ 2\tilde{\epsilon}_5 \\ 2\tilde{\epsilon}_6 \end{pmatrix}. \quad (3.1.12)$$

Dans le cas des matériaux isotropes [41], du fait de symétries supplémentaires, la matrice de rigidité s'écrit comme suit :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

avec

$$c_{11} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = \lambda, \quad \text{et} \quad c_{44} = \mu,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau. Ces coefficients sont liés au module d'Young E et au coefficient de Poisson ν du matériau par les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Les opérateurs $\tilde{\sigma}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{div}(\tilde{\sigma}(\mathbf{u}))$ peuvent s'exprimer explicitement en fonction du déplacement \mathbf{u} comme suit :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + 2\mu\partial_1 u_1 \\ \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + 2\mu\partial_2 u_2 \\ \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + 2\mu\partial_3 u_3 \\ \mu(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) \\ \mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) \\ \mu(\partial_1 u_2 + \partial_3 u_3) \end{pmatrix}, \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{div}(\tilde{\sigma}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \mu(\partial_{11} u_1 + \partial_{22} u_1 + \partial_{33} u_1) + (\lambda + \mu)\partial_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) \\ \mu(\partial_{11} u_2 + \partial_{22} u_2 + \partial_{33} u_2) + (\lambda + \mu)\partial_2(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) \\ \mu(\partial_{11} u_3 + \partial_{22} u_3 + \partial_{33} u_3) + (\lambda + \mu)\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) \end{pmatrix}. \quad (3.1.14)$$

3.1.2 Les modes dans une plaque élastique isotrope

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions importantes associées à l'étude de la propagation dans une plaque élastique isotrope. Soit une plaque homogène $\Omega := \mathbb{R}^2 \times [-h, h]$, bornée dans la direction de l'épaisseur telle que représentée ci-dessous.



FIGURE 3.1.1 – Configuration pour une plaque homogène.

Les modes élastiques sont des solutions particulières de l'équation de l'élastodynamique (3.1.1). Le matériau étant homogène et isotrope, et le milieu invariant selon la direction y , l'étude se fait sans perte de généralité en recherchant des solutions de (3.1.1) indépendantes de la variable y sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}(x, z) = \mathbf{U}(z)e^{i\beta x}, \quad (3.1.15)$$

Plus précisément, on va rechercher $\beta \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{U} \neq 0$ tels que \mathbf{U} donné par (3.1.15) soit solution de (3.1.1). En injectant (3.1.15) dans (3.1.1), on a :

$$\begin{cases} \mathbf{div}^{[\beta]}(\sigma^{[\beta]}(\mathbf{U})) + \rho\omega^2\mathbf{U} = 0 & \text{dans } L := [-h, h], \\ \sigma^{[\beta]}(\mathbf{U})\mathbf{e}_3 = 0 & \text{en } z = \pm h, \end{cases} \quad (3.1.16)$$

L'exposant $[\beta]$ indique que la dérivée partielle par rapport à la variable x est remplacée par $i\beta$. En multipliant par un champ test $\tilde{\mathbf{U}}$ et en intégrant selon l'épaisseur z , on montre que le problème revient à chercher β et \mathbf{U} tel que :

$$\forall \tilde{\mathbf{U}} \quad a(\beta; \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = 0,$$

où la forme bilinéaire $a(\beta; \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})$ est définie de la manière suivante :

$$a(\beta; \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = \int_L \sigma^{[\beta]}(\mathbf{U}) : \epsilon^{[\beta]}(\tilde{\mathbf{U}}) - \rho\omega^2 \int_L \mathbf{U} \tilde{\mathbf{U}}.$$

Cette forme bilinéaire dépend quadratiquement de β et se décompose sous la forme suivante :

$$a(\beta; \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = a_0(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) + \beta a_1(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) + \beta^2 a_2(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}).$$

La discrétisation de ce problème selon l'épaisseur de la plaque (coordonnée z) nous conduit à résoudre un problème aux valeurs propres quadratique :

$$[\mathbf{A}_0 + \beta\mathbf{A}_1 + \beta^2\mathbf{A}_2] \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} \neq 0, \quad (3.1.17)$$

où les A_i représentent des matrices, indépendantes de β , issues de la discrétisation.

Ce système peut être résolu analytiquement dans le cas d'un matériau homogène isotrope, ou à l'aide d'une méthode variationnelle pour des configurations matérielles plus complexes (anisotropie, stratification selon l'épaisseur, etc.). En pratique, nous utiliserons la méthode numérique SAFE (Semi Analytical Finite Element) [63, 28] pour calculer les différents types de modes dans une plaque élastique. On obtient ainsi un ensemble de couples (β, \mathbf{U}) solutions du problème aux valeurs propres (3.1.17).

■ Modes propagatifs et évanescents

Les couples solutions (β, \mathbf{U}) peuvent être classés selon deux catégories :

- Si $\beta \in \mathbb{R}$, le mode \mathbf{U} correspond à une onde plane propagative de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (\beta, 0)^T$. Il existe un nombre fini de modes propagatifs N_ω . Ces modes ont la caractéristique de se propager sans atténuation de l'amplitude.
- Si $\beta \in \mathbb{C}$, le mode \mathbf{U} correspond à une onde plane évanescente. L'amplitude de ce mode décroît ou croît exponentiellement selon la direction de propagation x .

On observe que le nombre de modes propagatifs N_ω augmente avec ω . Il y a des fréquences particulières à partir desquelles de nouveaux modes propagatifs apparaissent. Autrement dit ces derniers étaient évanescents en-dessous de ces fréquences particulières et sont propagatifs au-dessus. On les appelle les fréquences de coupure du matériau.

La figure 3.1.2 représente le spectre des valeurs de β obtenues pour une plaque en aluminium à 2 fréquences différentes. On observe une symétrie du spectre en β selon les axes réel et imaginaire (qui peut être vue comme un cas particulier de la proposition 3.2.1).

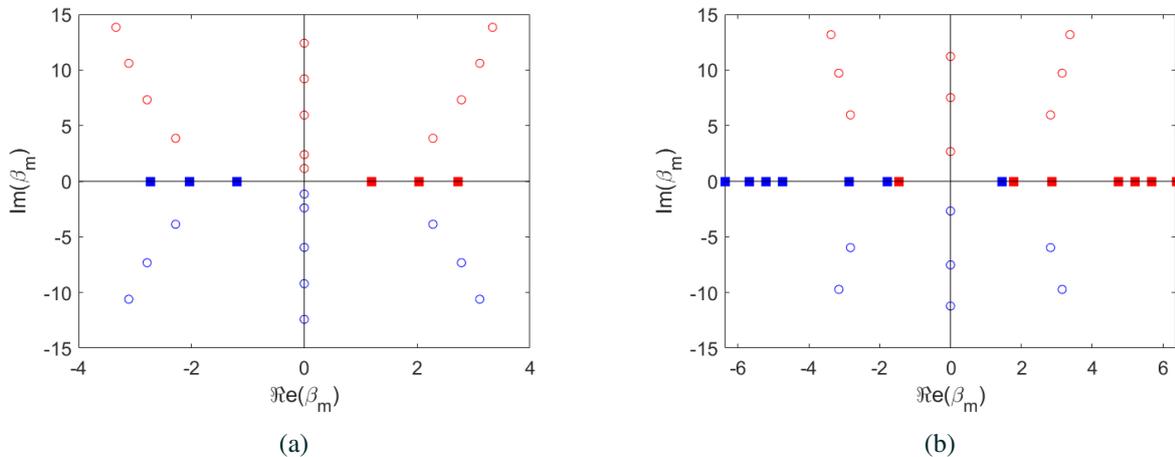


FIGURE 3.1.2 – Représentation de quelques valeurs du spectre d'une plaque d'aluminium (cf. tableau 3.1) de 1 mm d'épaisseur à la fréquence (a) $f = 1$ MHz et (b) $f = 2,82$ MHz.

■ Polarisation d'un mode

Compte tenu de l'invariance du milieu selon y , on peut montrer que le système (3.1.16) admet un découplage entre les équations associées aux composantes (u_x, u_z) et l'équation associée à la composante u_y du champ de déplacement. La condition de surface libre en $z = \pm h$ préservant également ce découplage, on peut alors chercher séparément des solutions telles que $u_x = u_z = 0$ et des solutions telles que $u_y = 0$.

- Les modes SH (shear horizontal) : il s'agit des ondes de cisaillement dont la polarisation $(0, u_y, 0)$ est perpendiculaire au plan de propagation (x, z) .
- Les modes de Lamb [53] ou modes P-SV (pression-shear vertical) : il s'agit des modes de la forme $(u_x, 0, u_z)$, dont la polarisation est contenue dans le plan de propagation (x, z) . Ces modes résultent d'un couplage entre les ondes P et la composante verticale SV de l'onde de cisaillement S.

■ Modes symétriques et antisymétriques

Les modes de Lamb et les modes SH se déclinent en deux familles :

- Un mode SH sera symétrique (resp. antisymétrique) si sa composante u_y est symétrique (resp. antisymétrique) par rapport à l'épaisseur de la plaque.
- Un mode de Lamb sera symétrique (resp. antisymétrique) si sa composante u_x est symétrique (resp. antisymétrique) et sa composante u_z est antisymétrique (resp. symétrique) par rapport à l'épaisseur de la plaque.

Dans la suite, les modes de Lamb symétriques et antisymétriques seront désignés respectivement par S_n et A_n où n désigne l'ordre d'apparition du mode. Les modes SH symétriques et antisymétriques sont désignés respectivement par SH_n et SH_m où n pair et m impair. Les modes A_0 , SH_0 et S_0 sont appelés modes fondamentaux car ils existent à toutes les fréquences. On dit qu'ils ne présentent pas de fréquences de coupure (cut-off).

Les déformées associées aux trois modes fondamentaux sont représentés (Fig 3.1.3). Les composantes du champ de déplacement $(u_x, u_y$ et $u_z)$ sont représentés (Fig 3.1.5) pour les modes fondamentaux d'une part et les trois premiers modes évanescents d'autre part.

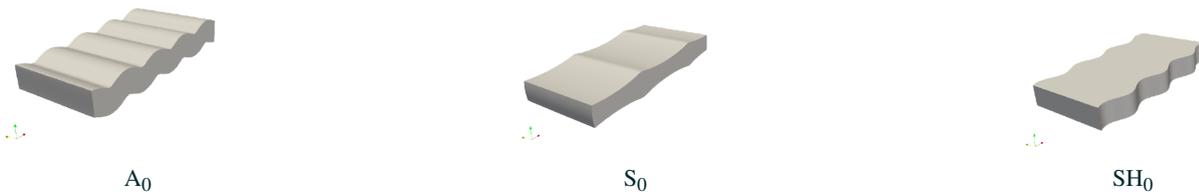
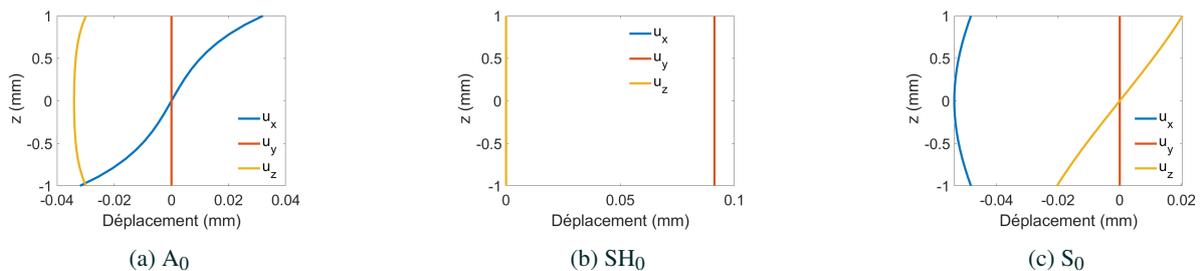


FIGURE 3.1.3 – Déformées de la plaque associées aux trois modes fondamentaux. (d'après [56]).



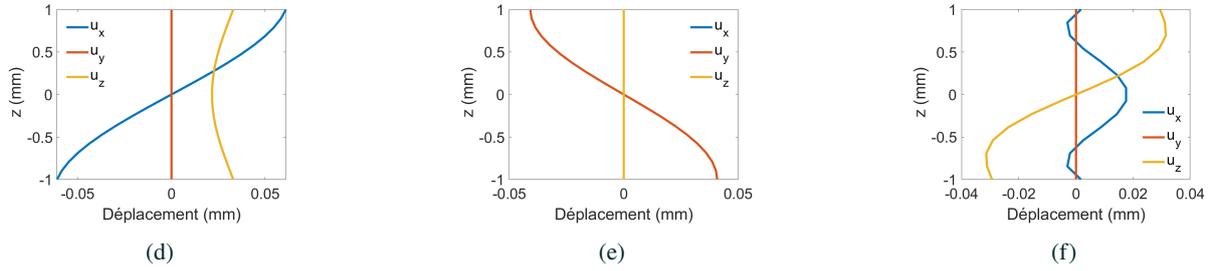


FIGURE 3.1.5 – Déformées modales \mathbf{U} des trois premiers modes propagatifs ((a), (b) et (c)) et évanescents ((d), (e) et (f)) pour une plaque d'aluminium d'épaisseur 1 mm à $f = 1$ MHz.

■ Vitesse de phase et vitesse de groupe

Les modes de Lamb et les modes SH ont des caractéristiques de propagation qui varient en fonction de la fréquence. On dit qu'ils ont un caractère multimodal (à une fréquence donnée, il existe plusieurs modes) et dispersif (les constantes de propagation varient en fonction de la fréquence).

Concernant les modes propagatifs, il existe deux types de vitesses : la vitesse de phase et la vitesse de groupe. On les définit comme suit.

Supposons qu'il existe à ω fixé, N_ω modes propagatifs de constantes de propagation $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \beta_{N_\omega}$. La vitesse de phase associée à un mode $(\beta_m, \hat{\mathbf{U}}_m)$ où $m \in [1, \dots, N_\omega]$ est donnée par :

$$V_\phi^m = \frac{\omega}{\beta_m}. \quad (3.1.18)$$

La vitesse de groupe associée à un mode $(\beta_m, \hat{\mathbf{U}}_m)$ où $m \in [1, \dots, N_\omega]$ est quant à elle donnée par :

$$V_g^m = \left[\frac{\partial \beta_m}{\partial \omega} \right]^{-1}. \quad (3.1.19)$$

C'est la vitesse de groupe qui indique le sens de propagation de l'énergie : si $V_g^m > 0$, l'énergie se propage vers les $x > 0$ (on dit alors que le mode se propage vers $x > 0$), et inversement si $V_g^m < 0$.

Pour les modes SH, les vitesses de phase et de groupe ont toujours le même signe. Mais ce n'est pas toujours le cas pour les modes de Lamb. A certaines fréquences, il existe des modes dits *inverses* tels que les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés.

Sur la figure 3.1.2, les modes qui se propagent ou décroissent vers la droite sont représentés en rouge, et ceux qui se propagent ou décroissent vers la gauche en bleu. On observe l'existence d'un mode inverse à la fréquence 2,8 MHz.

■ Complétude des modes

Une question mathématique difficile qui n'a été complètement résolue que récemment est celle de la complétude des modes de Lamb dans une plaque isotrope [2, 39]. Comme reformulé dans le théorème 2.7 de [19], ce résultat montre que hors de certaines fréquences critiques, on peut approcher n'importe quel couple de champs déplacement-contrainte dans la section par une combinaison linéaire de modes de Lamb. On verra dans la suite de cette thèse qu'on aura besoin de ce type de résultats dans des situations plus générales. Leurs preuves mathématiques sortent du cadre de cette thèse.

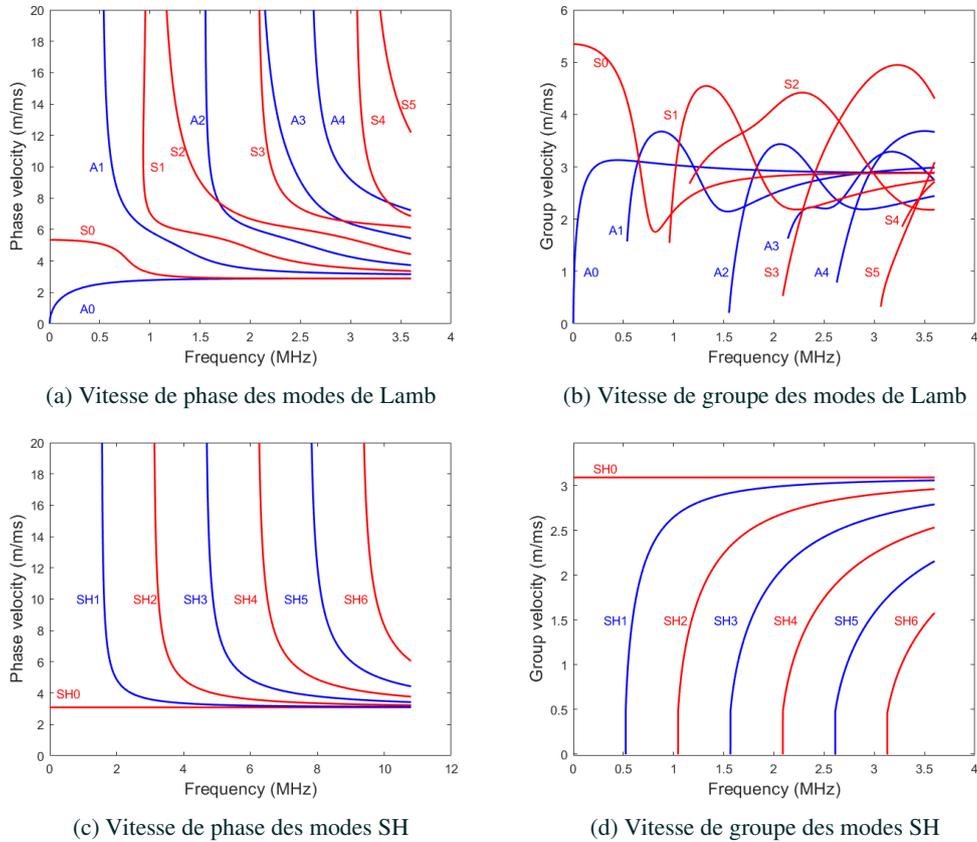


FIGURE 3.1.6 – Courbes de dispersion représentant la vitesse de phase (a) (resp (c)) et la vitesse de groupe (b) (resp (d)) associées aux modes de Lamb (resp modes SH).

	Désignation	Densité ρ (g/cm ³)	Paramètres du tenseur de rigidité C (GPa)
Isotrope	aluminium	2,71	$\lambda = 50,35$ $\mu = 25,94$
Orthotrope	Bar [56]	5,3	$C(1,1) = 23,9$; $C(1,2) = 10,4$; $C(1,3) = 5$; $C(2,2) = 24,7$; $C(2,3) = 5,2$; $C(3,3) = 13,5$; $C(4,4) = 6,5$; $C(5,5) = 6,6$; $C(6,6) = 7,6$;

TABLEAU 3.1 – Propriétés des matériaux utilisés.

3.1.3 Modes à incidence oblique

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté les notions principales concernant la propagation guidée des ondes de Lamb dans une plaque élastique isotrope. En particulier, l'invariance du milieu dans le plan (x, y) de la plaque nous a permis, sans perte de généralité, de ramener l'étude de la propagation dans le plan (x, z) . Bien entendu, dans le cas anisotrope, il est nécessaire de déterminer les modes pour chaque direction de propagation dans le plan de la plaque.

Dans cette section, nous reprenons donc la démarche précédente pour le cas d'une direction de propagation quelconque dans le plan (x, y) de la plaque. Pour un angle $\gamma \in [0, 2\pi]$, cela nous conduit à rechercher les solutions modales de la forme :

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{U}(z)e^{i\beta(x \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \quad (3.1.20)$$

où β représente le nombre d'onde du mode dans la direction d'angle γ .

Cette approche permet de traiter aussi bien le cas isotrope que le cas anisotrope. Nous considérons maintenant le cas général d'un matériau anisotrope, et précisons les simplifications qui apparaissent lorsque le matériau est isotrope.

En injectant l'expression des modes (3.1.20) dans le système (3.1.1), pour un angle γ fixé, on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} \mathbf{div}^{[\beta, \gamma]}(\sigma^{[\beta, \gamma]}(\mathbf{U})) + \rho\omega^2\mathbf{U} = 0 & \text{dans } L = [-h, h], \\ \sigma^{[\beta, \gamma]}(\mathbf{U})\mathbf{e}_3 = 0 & \text{en } z = \pm h, \end{cases} \quad (3.1.21)$$

L'exposant $[\beta, \gamma]$ indique que les dérivées partielles par rapport à x et y sont remplacées par $i\beta \cos \gamma$ et $i\beta \sin \gamma$. En utilisant la méthode variationnelle SAFE, nous obtenons de nouveau un problème aux valeurs propres quadratique, qui après discrétisation est de la forme :

$$[\mathbf{A}_0 + \beta\mathbf{A}_1(\gamma) + \beta^2\mathbf{A}_2(\gamma)]\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} \neq 0, \quad (3.1.22)$$

où les matrices $\mathbf{A}_j(\gamma)$ sont indépendantes de β . A γ fixé, la résolution de ce problème de valeurs propres quadratique permet de déterminer les modes $(\beta(\gamma), \mathbf{U}(\gamma, z))$. Encore une fois, on obtient un nombre fini N_ω de modes propagatifs ($\beta \in \mathbb{R}$) et une infinité de modes évanescents ($\beta \in \mathbb{C}$), indépendamment de la nature du matériau. On peut montrer que le nombre de modes propagatifs N_ω est indépendant de l'angle γ .

Concernant les modes propagatifs, il est intéressant de représenter les surfaces de lenteur qui sont le lieu des extrémités du vecteur $\mathbf{k}(\gamma)/\omega$, où $\mathbf{k}(\gamma) = (\beta(\gamma) \cos \gamma, \beta(\gamma) \sin \gamma)$ désigne le vecteur d'onde dans le plan de la plaque en fonction de l'angle γ (la norme du vecteur $\mathbf{k}(\gamma)/\omega$ correspond à l'inverse de la vitesse de phase).

Les figures 3.1.7 représentent les courbes de lenteur pour deux plaques d'épaisseur $2h = 1$ mm, respectivement en aluminium (matériau isotrope) et en matériau **Bar** (matériau orthotrope) à la fréquence de 250 kHz. Les caractéristiques sont données dans le tableau 3.1.

Le nombre de modes propagatifs dans la direction d'angle γ est le nombre de points d'intersection entre la droite orientée d'un angle γ et les courbes de lenteur. Il est constant, indépendant de γ .

■ Cas d'un matériau isotrope

Dans le cas du matériau isotrope (ou isotrope transverse), le spectre des valeurs de β est indépendant de l'angle γ (Fig 3.1.7a). En effet, la symétrie du matériau rend invariants par rotation les caractéristiques de propagation des modes. Les courbes de lenteur associées à chaque mode sont des cercles.

En particulier, les spectres des modes calculés pour $\gamma = 0$ (3.1.15) et $\gamma \neq 0$ sont identiques (modes propagatifs et évanescents). Toutefois, il faut souligner que les composantes de la déformée modale sont différentes d'un cas à l'autre. On comprend aisément que la déformée modale $\mathbf{U}(\gamma, z)$ pour $\gamma \neq 0$ peut être obtenue en appliquant à la déformée modale

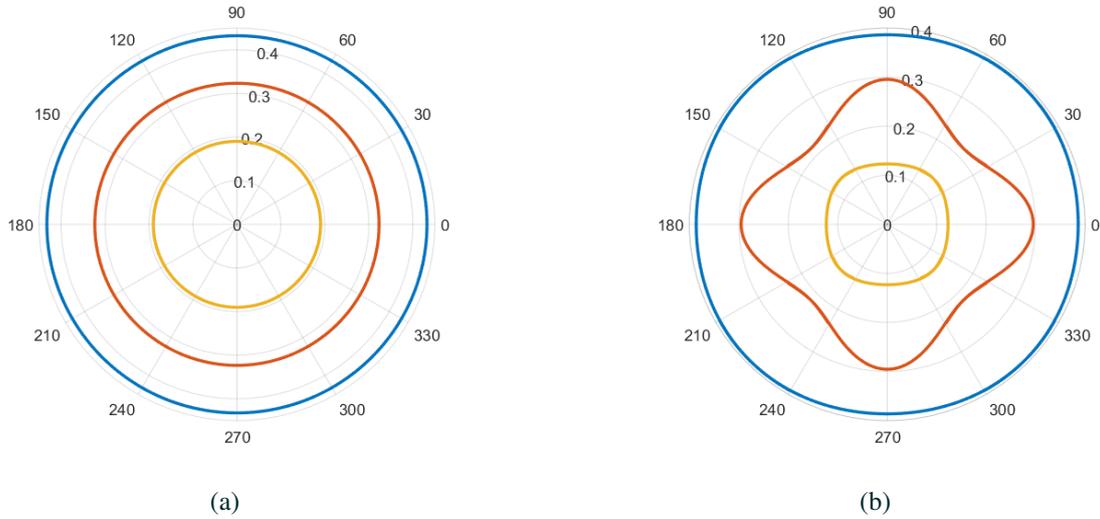


FIGURE 3.1.7 – Courbes de lenteur d’une plaque d’épaisseur $2h = 1$ mm en (a) aluminium à la fréquence de 1 MHz et en (b) matériau Bar à la fréquence de 250 kHz.

$\mathbf{U}(0, z)$ une rotation d’angle γ autour de l’axe Oz :

$$\mathbf{U}(\gamma, z) = \mathcal{R}(\gamma) \mathbf{U}(0, z), \tag{3.1.23}$$

où

$$\mathcal{R}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soulignons le fait que cette formule est valable aussi bien pour les modes propagatifs que pour les modes évanescents.

Remarque 3.1.1. Pour $\gamma = 0$, les modes obtenus correspondent exactement aux modes de Lamb et modes SH étudiés à la partie 3.1.2. Pour $\gamma \neq 0$, le découplage entre modes SH et modes de Lamb ne se produit évidemment plus dans un repère fixe mais se retrouve dans le repère obtenu après la rotation d’angle γ .

■ **Cas d’un matériau anisotrope**

La courbe de lenteur du matériau orthotrope (Fig.3.1.7b) permet de mettre en évidence la dépendance du nombre d’onde β par rapport à l’angle γ pour les matériaux anisotropes. En effet, bien que le matériau orthotrope considéré ait une anisotropie douce (avec 9 coefficients indépendants au sein de la matrice de rigidité C), on observe que β varie significativement en fonction de γ . Il n’est donc pas possible de déterminer le spectre de β pour un angle γ à partir de la rotation du spectre en $\gamma = 0$, comme dans le cas isotrope.

Dans le cas des matériaux dont l’anisotropie est quelconque, les modes élastiques présentent une polarisation quelconque car les équations de l’élastodynamique (3.1.21) ne sont plus découplées. Néanmoins, il est possible de classer les modes selon leur tendance de polarisation. En effet, lorsque la composante dominante du vecteur de polarisation d’un mode est suivant la direction de propagation, on le qualifie de mode de Lamb quasi-longitudinal. Lorsque la composante

dominante du vecteur de polarisation d'un mode est transverse verticale, on le qualifie de mode de Lamb quasi-transversal. Enfin, on qualifie un mode de quasi-horizontal SH lorsque la composante dominante est suivant l'horizontale. Lorsque la stratification du milieu est symétrique par rapport à l'épaisseur de la plaque on retrouve les propriétés de symétrie et d'anti-symétrie des profils des modes [65].

Dans le cas anisotrope contrairement au cas isotrope, les vecteurs vitesses de phase et de groupe ne sont en général pas colinéaires. En effet, le vecteur vitesse de groupe est normal à la courbe de lenteur comme on le verra dans les approximations de type champ lointain dans la suite. A nouveau il peut exister des modes inverses caractérisés par le fait que le produit scalaire des deux vecteurs vitesses est négatif.

3.2 Les ξ -modes dans une plaque élastique

3.2.1 Motivation et définition

L'introduction de cette nouvelle famille de modes est motivée par la suite de notre travail, à savoir l'application de la méthode HSM aux plaques élastiques. Comme on l'a déjà mentionné dans l'introduction, un ingrédient essentiel de la méthode est une formule de représentation du champ élastodynamique dans une demi-plaque en fonction des traces du déplacement et de la contrainte normale sur son bord. La formule de représentation dans une demi-plaque est obtenue (comme dans le cas acoustique) en réalisant une transformée de Fourier le long de la frontière qui borne la demi-plaque, puis une décomposition modale dans l'épaisseur, pour chaque valeur de la variable de Fourier ξ . Ceci nous conduit à introduire un nouveau type de modes que l'on nomme les ξ -modes. A $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, ce sont les solutions de (3.1.1) de la forme suivante :

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \hat{\mathbf{U}}(z)e^{i(\beta x + \xi y)} \quad (3.2.1)$$

où la notation $(\hat{\cdot})$ est choisie ici pour rappeler le lien des ξ -modes avec la transformée de Fourier.

Plus précisément, à $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on cherche $\beta \in \mathbb{C}$ et $\hat{\mathbf{U}} \neq 0$ tels que \mathbf{U} donné par (3.2.1) soit solution de (3.1.1). On peut déjà remarquer que si $\beta \in \mathbb{R}$, le ξ -mode coïncide avec un mode propagatif à incidence oblique d'angle γ tel que

$$\tan(\gamma) = \frac{\xi}{\beta}.$$

En revanche, si $\beta \notin \mathbb{R}$, le ξ -mode ne correspond à aucun mode vu précédemment, puisqu'il oscille en y mais décroît en x .

En injectant la forme (3.2.1) dans les équations (3.1.1), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \mathbf{div}^{\beta, \xi}(\sigma^{\beta, \xi}(\hat{\mathbf{U}})) + \rho\omega^2\hat{\mathbf{U}} = 0 & \text{en } L := (-h, h), \\ \sigma^{\beta, \xi}(\hat{\mathbf{U}})\mathbf{e}_3 = 0 & \text{en } z = \pm h. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Les indices β et ξ indiquent que les dérivées par rapport aux variables x et y sont remplacées par une multiplication par $i\beta$ et $i\xi$ respectivement. Il sera utile de noter que si $(\hat{\mathbf{U}}, \beta)$ est un ξ -mode, alors la fonction

$$\hat{\mathbf{U}}(x, \xi, z) = \hat{\mathbf{U}}(\xi, z)e^{i\beta x}, \quad (3.2.3)$$

satisfait les équations

$$\begin{cases} \mathbf{div}^{\xi}(\sigma^{\xi}(\hat{\mathbf{U}})) + \rho\omega^2\hat{\mathbf{U}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times [-h, h], \\ \sigma^{\xi}(\hat{\mathbf{U}})\mathbf{e}_3 = 0 & \text{en } z = \pm h. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

où l'exposant ξ indique que la dérivée par rapport à y est remplacée par la multiplication par $i\xi$.

En utilisant la méthode variationnelle et après discrétisation, le problème des ξ -modes prend la forme suivante

$$[\mathbf{A}_0 + i\xi\mathbf{A}_1 + i\beta\mathbf{A}_2 + \beta\xi\mathbf{A}_3 + \xi^2\mathbf{A}_4 + \beta^2\mathbf{A}_5] \hat{\mathbf{U}}(\xi; z) = 0, \quad \hat{\mathbf{U}} \neq 0, \quad (3.2.5)$$

où les \mathbf{A}_j sont des matrices indépendantes de β et de ξ . Pour ξ fixé, le problème (3.2.5) est donc un problème aux valeurs propres quadratique en β .

Selon que β est réel ou complexe, les ξ -modes sont propagatifs ou évanescents. A nouveau, pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, il existe un nombre fini de modes propagatifs et une infinité de modes évanescents. Les figures 3.2.2 représentent les spectres tronqués aux 30 premières valeurs propres de la plaque d'aluminium calculées pour $\xi = 0$ et $\xi = 2$.

On remarque que pour $\xi = 0$, il y a 6 modes propagatifs, tandis que pour $\xi = 2$, il n'y en a que 4. Cela s'explique en examinant les courbes de lenteur du matériau présentées dans la figure 3.2.1. Le nombre $N_\omega(\xi)$ de ξ -modes propagatifs est déterminé en comptant les intersections entre les courbes de lenteur dans un plan (X, Y) et la droite $Y = \xi$. Par comparaison, rappelons que pour un angle γ fixé, le nombre de modes propagatifs est donné par le nombre d'intersections entre les courbes de lenteur et la demi-droite passant par l'origine et faisant un angle γ avec l'axe des X . Ce nombre est indépendant de γ alors que $N_\omega(\xi)$ dépend de ξ et devient nul pour $|\xi|$ assez grand.

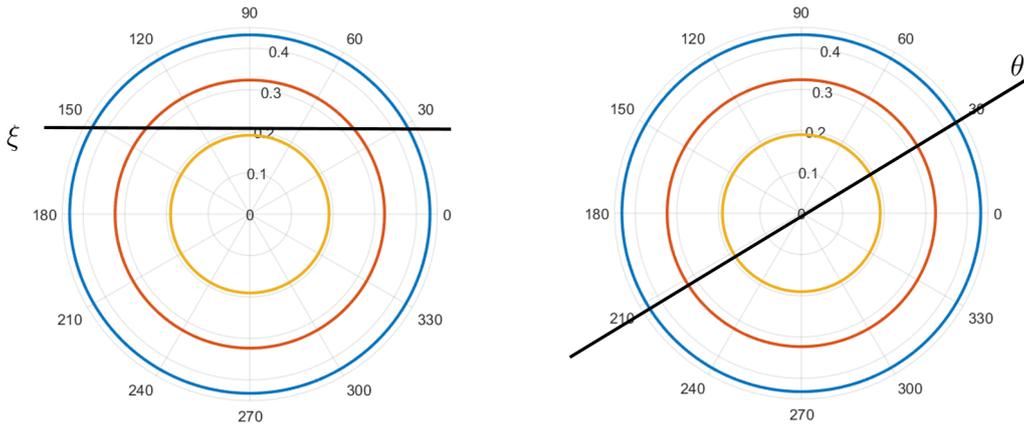


FIGURE 3.2.1 – Détermination du nombre de modes propagatifs pour les ξ -modes (à gauche) et les modes à incidence oblique (à droite).

Remarque 3.2.1. Les ξ -modes élastiques peuvent également être classés selon leur polarisation en des modes de Lamb et des modes SH pour un matériau isotrope ou des quasi-modes de Lamb et des quasi-modes SH pour les matériaux anisotropes.

3.2.2 Classification des ξ -modes

La formule de représentation du champ de déplacement sortant dans une demi-plaque requiert l'utilisation des **ξ -modes sortants**, c'est à dire qui se propagent depuis le bord de la plaque vers l'infini.

L'objectif maintenant est de classer les ξ -modes entre ceux qui se propagent vers la gauche $x < 0$ (rentrant) et ceux qui se propagent vers la droite $x > 0$ (sortant). L'analyse du spectre de valeurs propres va nous permettre de réaliser cette

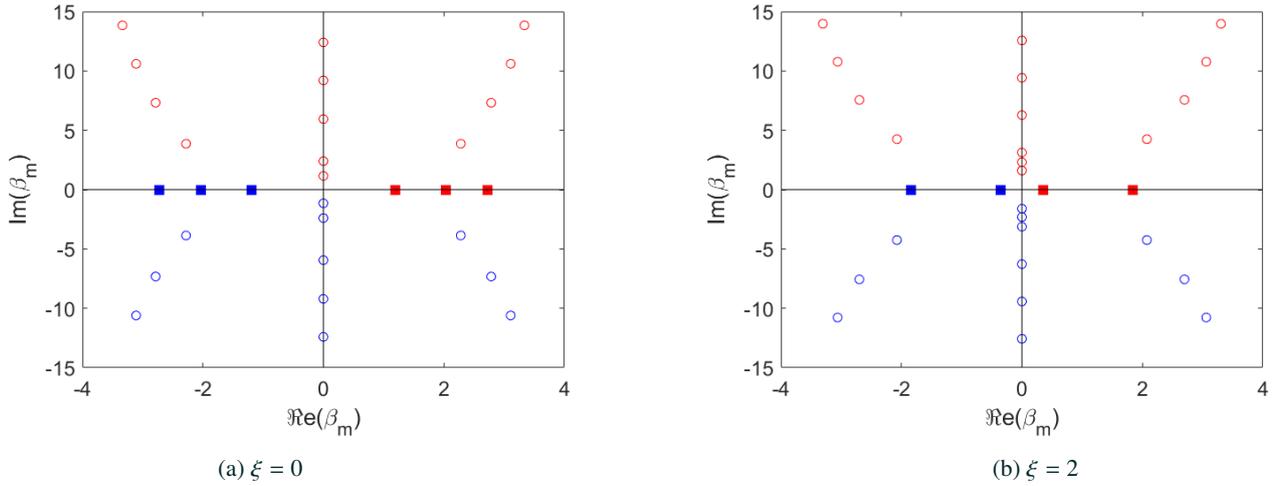


FIGURE 3.2.2 – Spectres associés aux ξ -modes de la plaque d'aluminium calculés à $f = 1$ MHz.

distinction. Les critères pour déterminer le sens de propagation d'un mode sont de même nature quelle que soit l'approche choisie pour les calculer (approche ξ ou γ) :

- un mode évanescent ($\beta \in \mathbb{C}$) se propage vers les $x > 0$ (resp. $x < 0$) si $\text{Im}(\beta) > 0$ (resp. $\text{Im}(\beta) < 0$) ;
- un mode propagatif ($\beta \in \mathbb{R}$) se propage vers les $x > 0$ si

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega}(\xi) > 0,$$

et vers les $x < 0$ sinon.

On dira qu'un ξ -mode propagatif est direct si

$$\beta(\xi) \frac{\partial \beta}{\partial \omega}(\xi) > 0,$$

et inverse dans le cas contraire.

De façon équivalente, on peut utiliser le flux de l'énergie pour déterminer le sens de propagation d'un ξ -mode propagatif. Pour cela, on introduit la contrainte d'un ξ -mode propagatif ($\beta(\xi)$, $\hat{\mathbf{U}}(\xi, z)$) dans la direction \mathbf{e}_1 définie par

$$\hat{\mathcal{T}}(\xi, z) := \sigma^{\beta(\xi), \xi}(\hat{\mathbf{U}}) \mathbf{e}_1 \quad (3.2.6)$$

puis le flux d'énergie du ξ -mode dans la direction \mathbf{e}_1 :

$$\mathcal{P}(\xi) = \text{Im} \left(\int_L \hat{\mathcal{T}}(\xi, z) \cdot \overline{\hat{\mathbf{U}}(\xi, z)} dz \right). \quad (3.2.7)$$

Ainsi si $\mathcal{P}(\xi) < 0$, le mode se propage vers la gauche et si $\mathcal{P}(\xi) > 0$, le mode se propage vers la droite.

Dans ma suite, on notera ($\beta_m^-(\xi)$, $\hat{\mathbf{U}}_m^-(\xi, z)$) la famille de modes se propageant vers la gauche et ($\beta_m^+(\xi)$, $\hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z)$) la famille de modes se propageant vers la droite.

Nous allons rappeler quelques propriétés de symétrie importantes satisfaites par le spectre des valeurs de β des

ξ -modes et des $-\xi$ -modes (voir la Proposition 3.2.1 de [56] pour la démonstration).

Proposition 3.2.1. *Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Si $(\beta, \hat{\mathbf{U}})$ est un ξ -mode, alors $(-\bar{\beta}, \overline{\hat{\mathbf{U}}})$ est un $(-\xi)$ -mode. De plus, il existe un vecteur $\hat{\mathbf{V}}$ tel que $(\bar{\beta}, \hat{\mathbf{V}})$ est un ξ -mode et $(-\beta, \overline{\hat{\mathbf{V}}})$ est un $(-\xi)$ -mode.*

Remarque 3.2.2. On observe bien la symétrie attendue du spectre par rapport à l'axe réel sur la figure 3.2.2. La symétrie par rapport à l'axe imaginaire est quant à elle due au fait que le matériau considéré est isotrope, et pourrait être perdue dans le cas d'un matériau anisotrope arbitraire.

Considérons un ξ -mode $(\beta^+, \hat{\mathbf{U}}^+)$ évanescents vers la droite ($\text{Im}(\beta^+) > 0$), d'après la proposition ci-dessus il existe un ξ -mode associé $(\bar{\beta}^+, \hat{\mathbf{V}})$ qui décroît vers la gauche puisque $\text{Im}(\bar{\beta}^+) < 0$. De plus, il existe également un $-\xi$ -mode $(-\beta^+, \overline{\hat{\mathbf{V}}})$ qui décroît vers la gauche puisque $\text{Im}(-\beta^+) < 0$. On peut alors choisir la numérotation de sorte que, pour les modes évanescents :

$$\beta_k^- (\xi) = \overline{\beta_k^+ (\xi)} \quad \text{et} \quad \beta_k^- (-\xi) = -\beta_k^+ (\xi). \quad (3.2.8)$$

Dans le cas d'un ξ -mode $(\beta^+, \hat{\mathbf{U}}^+)$ propagatif qui se propage vers la droite ($P(\xi) > 0$), la proposition nous permet de déduire l'existence d'un $-\xi$ -mode propagatif $(-\beta^+, \hat{\mathbf{U}}^+)$ qui se propage vers la gauche. On peut là encore assurer que la numérotation des modes propagatifs soit telle que :

$$\beta_k^- (-\xi) = -\beta_k^+ (\xi) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{U}}_m^- (-\xi, z) = \overline{\hat{\mathbf{U}}_m^+ (\xi, z)}. \quad (3.2.9)$$

Compte tenu des propriétés de symétrie énoncées plus haut, les $-\xi$ -modes peuvent être déduits directement à partir du calcul des ξ -modes.

La figure 3.2.3 illustre dans une plaque isotrope les 4 modes d'indice m calculés pour $+\xi$ et $-\xi$, dans le cas d'un mode propagatif direct.

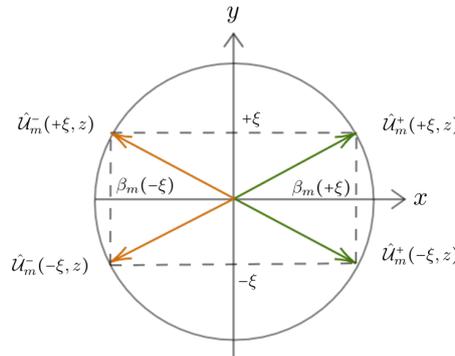


FIGURE 3.2.3 – Illustration des propriétés de symétrie des ξ -modes dans le cas d'un ξ -mode propagatif direct.

Les déplacements des modes élastiques ne forment pas une base orthogonale [39]. Ainsi un champ de déplacement élastique ne peut pas être décomposé directement en utilisant la base des modes de déplacement. Néanmoins, il existe en élasticité une relation de bi-orthogonalité qui va permettre de réaliser une décomposition modale du champ élastodynamique. Cette relation fait intervenir à la fois les déplacements et les contraintes normales associées. Cette relation adaptée au cas des ξ -modes a été démontrée dans [56] pour des valeurs de ξ réelles. Nous en rappelons la preuve dans l'annexe A.2.

Proposition 3.2.2. Relation de bi-orthogonalité des ξ -modes pour ξ réel.

Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on considère un ξ -mode $(\beta_m^+(\xi), \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z))$ qui décroît ou se propage vers la droite et un $-\xi$ -mode $(\beta_n^-(\xi), \hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi, z))$ qui décroît ou se propage vers la gauche. On désigne par $\hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z)$ et $\hat{\mathcal{T}}_n^-(\xi, z)$ respectivement leurs contraintes normales associées dans la direction \mathbf{e}_1 définies par (3.2.6). Alors, si

$$\beta_m^+(\xi) \neq -\beta_n^-(\xi) \quad (3.2.10)$$

les deux modes considérés vérifient la relation de bi-orthogonalité suivante :

$$\int_L \left(\hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_n^-(\xi, z) - \hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z) \right) dz = 0 \quad (3.2.11)$$

où $L := [-h, h]$

Remarque 3.2.3. Pour $\xi = 0$, on retrouve la relation de bi-orthogonalité classique des modes de plaque.

Ceci nous amène à poser

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, J_m(\xi) = \int_L \left(\hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_m^-(\xi, z) - \hat{\mathbf{U}}_m^-(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z) \right) dz. \quad (3.2.12)$$

Compte tenu de la numérotation que nous avons choisie, la condition (3.2.10) n'est pas vérifiée si $m = n$. En particulier, si le m -ième ξ -mode est propagatif, il résulte de ce qui précède que

$$J_m(\xi) = 2\mathcal{P}_m(\xi)$$

où $\mathcal{P}_m(\xi)$ est le flux d'énergie du ξ -mode dans la direction \mathbf{e}_1 défini par (3.2.7).

On va supposer dans la suite que la fréquence temporelle ω est telle que chaque fonction $J_m(\xi)$ ne s'annule que sur un ensemble discret de valeurs de ξ .

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 nous permettent alors de déduire (moyennant éventuellement une redéfinition des modes en cas de valeurs propres multiples) que :

$$\text{pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}, \int_L \left(\hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_n^-(\xi, z) - \hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z) \right) dz = 0 \text{ si } m \neq n. \quad (3.2.13)$$

Cette relation de bi-orthogonalité est un ingrédient essentiel pour obtenir l'expression de la solution élastodynamique dans la demi-plaque. Plus précisément, cela va nous permettre (en admettant un résultat de complétude généralisant [2] aux ξ -modes et au cas anisotrope) de décomposer la transformée de Fourier du champ sur les ξ -modes sortants.

3.2.3 Les ξ -modes pour ξ complexe.

La formule de reconstruction du champ dans la demi-plaque requiert la connaissance des ξ -modes pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, du fait de la transformation de Fourier en ξ . Cependant, nous avons vu dans le cas scalaire que l'évaluation numérique de l'intégrale de Fourier était très coûteuse et pouvait être améliorée en appliquant une déformation du contour d'intégration de Fourier dans le plan complexe. Dans l'optique d'appliquer cette méthode dans le cas élastique, nous nous intéressons dans ce paragraphe aux ξ -modes pour des valeurs de ξ complexes.

Leur détermination ne pose pas de difficultés supplémentaires par rapport au cas $\xi \in \mathbb{R}$. On peut remarquer que pour ξ complexe, la symétrie de β dans le plan complexe par rapport à l'axe réel ($\beta \rightarrow \bar{\beta}$) n'est plus respectée. On conserve

néanmoins certaines propriétés exprimées dans la proposition suivante (qui résulte à nouveau de la Proposition 3.2.1 de [56]) :

Proposition 3.2.3. *Soit $\xi \in \mathbb{C}$. Si $(\beta, \widehat{\mathbf{U}})$ est un ξ -mode, alors $(-\bar{\beta}, \overline{\widehat{\mathbf{U}}})$ est un $(-\bar{\xi})$ -mode. De plus, il existe un vecteur $\widehat{\mathbf{V}}$ tel que $(\bar{\beta}, \widehat{\mathbf{V}})$ est un $\bar{\xi}$ -mode et $(-\beta, \widehat{\mathbf{V}})$ est un $(-\xi)$ -mode.*

Grâce à cette proposition, on peut à nouveau garantir un choix de numérotation telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\beta_n^-(-\xi) = -\beta_n^+(\xi). \quad (3.2.14)$$

Remarquons que si $\xi \notin \mathbb{R}$, les modes sont généralement tous évanescents comme le montre la figure 3.2.4, donc le tri se fera en fonction du signe de la partie imaginaire de β . On observe aussi sur cette figure une symétrie du spectre par rapport à l'origine, qui est due au caractère isotrope du matériau.

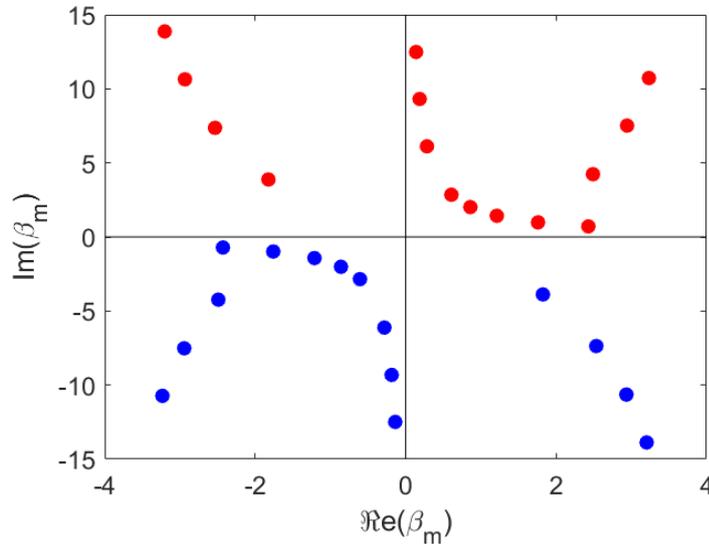


FIGURE 3.2.4 – Spectre des valeurs de β calculé pour $\xi = \eta e^{-i\alpha}$ avec $\eta = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$ pour l'aluminium à 1MHz.

Enfin, la relation de bi-orthogonalité (3.2.11) se généralise sans difficulté aux ξ -modes calculés pour des valeurs de ξ complexes (voir l'annexe A.2) :

Proposition 3.2.4. *Bi-orthogonalité des modes pour ξ complexes.*

Les résultats de la Proposition 3.2.2 restent valables pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

3.2.4 Les ξ -modes dans le cas isotrope

Nous allons montrer dans ce paragraphe que si la plaque est isotrope (ou simplement isotrope transverse), les ξ -modes pour $\xi \in \mathbb{C}$ quelconque peuvent se déduire par une formule simple des ξ -modes pour $\xi = 0$ (qui sont les modes classiques dont on a rappelé les principales propriétés dans le paragraphe 3.1.2). L'intérêt n'est pas seulement de diminuer le coût des calculs. Nous verrons que ce résultat jouera aussi un rôle essentiel lorsqu'on étendra au cas élastique les méthodes de champ lointain et de complexification vues dans le cas scalaire au chapitre précédent.

■ **Lien entre les ξ -modes et les 0-modes**

L'idée est similaire à celle mentionnée pour les modes à incidence oblique et qui était résumée dans la formule (3.1.23). Vu l'importance de ce résultat sur les ξ -modes dans la suite du manuscrit, nous allons le démontrer en détails.

Considérons donc un matériau isotrope et soit $(\beta(0), \hat{\mathbf{U}}(0, z))$ un ξ -mode pour $\xi = 0$ (autrement dit un 0-mode) tel que $\beta(0) \neq 0$. Pour $\xi \in \mathbb{C}$ et $\beta(\xi) \in \mathbb{C}$ tels que $\beta(\xi)^2 + \xi^2 = \beta(0)^2$, on définit la matrice suivante

$$\tilde{\mathcal{R}}(\xi) = \begin{pmatrix} \beta(\xi)/\beta(0) & -\xi/\beta(0) & 0 \\ \xi/\beta(0) & \beta(\xi)/\beta(0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Il est facile de voir que si $\beta(0)$, $\beta(\xi)$ et ξ sont des réels, alors $\tilde{\mathcal{R}}(\xi)$ est une rotation d'angle γ , où $\tan(\gamma) = \xi/\beta(\xi)$. Mais nous insistons sur le fait que le résultat suivant est valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.2.5. Soit $(\beta(0), \hat{\mathbf{U}}(0, z))$ un 0-mode tel que $\beta(0) \neq 0$. Pour $\xi \in \mathbb{C}$ et $\beta(\xi) \in \mathbb{C}$ tels que $\beta(\xi)^2 + \xi^2 = \beta(0)^2$, soit $\hat{\mathbf{U}}(\xi, z)$ défini par

$$\hat{\mathbf{U}}(\xi, z) = \tilde{\mathcal{R}}(\xi) \hat{\mathbf{U}}(0, z) \quad (3.2.16)$$

où la matrice $\tilde{\mathcal{R}}(\xi)$ est donnée par (3.2.15). Alors $(\beta(\xi), \hat{\mathbf{U}}(\xi, z))$ est un ξ -mode. Réciproquement, si $(\beta(\xi), \hat{\mathbf{U}}(\xi, z))$ est un ξ -mode, alors la formule précédente permet de construire un 0-mode.

Démonstration. D'après (3.1.14) et (3.2.2), on veut montrer que si $\hat{\mathbf{U}}(0)$ vérifie

$$(\omega^2 \rho - \beta(0)^2 \mu) \hat{\mathbf{U}}(0) + \mu \partial_{33} \hat{\mathbf{U}}(0) + (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} i\beta(0) \operatorname{div}^{\beta(0),0} \hat{\mathbf{U}}(0) \\ 0 \\ \partial_3 (\operatorname{div}^{\beta(0),0} \hat{\mathbf{U}}(0)) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.17)$$

alors $\hat{\mathbf{U}}(\xi)$ donné par (3.2.16) vérifie

$$(\omega^2 \rho - \beta(0)^2 \mu) \hat{\mathbf{U}}(\xi) + \mu \partial_{33} \hat{\mathbf{U}}(\xi) + (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} i\beta(\xi) \operatorname{div}^{\beta(\xi),\xi} \hat{\mathbf{U}}(\xi) \\ i\xi \operatorname{div}^{\beta(\xi),\xi} \hat{\mathbf{U}}(\xi) \\ \partial_3 (\operatorname{div}^{\beta(\xi),\xi} \hat{\mathbf{U}}(\xi)) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.18)$$

où

$$\operatorname{div}^{\beta(\xi),\xi} \hat{\mathbf{U}} = i\beta(\xi) \hat{\mathbf{U}}_1 + i\xi \hat{\mathbf{U}}_2 + \partial_3 \hat{\mathbf{U}}_3.$$

Or, en utilisant (3.2.16), on vérifie que

$$\operatorname{div}^{\beta(\xi),\xi} \hat{\mathbf{U}}(\xi) = \operatorname{div}^{\beta(0),0} \hat{\mathbf{U}}(0).$$

On conclut facilement en multipliant (3.2.17) par $\tilde{\mathcal{R}}(\xi)$, ce qui donne (3.2.18).

Par ailleurs, on a

$$\sigma^{\beta(\xi),\xi}(\hat{\mathbf{U}}(\xi)) \mathbf{e}_3 = \tilde{\mathcal{R}}(\xi) \left(\sigma^{\beta(0),0}(\hat{\mathbf{U}}(0)) \mathbf{e}_3 \right) = 0$$

en $z = \pm h$, ce qui termine la démonstration. \square

■ **Classification des ξ -modes pour $\xi \in \mathbb{R}$**

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on peut se demander si le mode $(\beta(\xi), \hat{\mathbf{U}}(\xi, z))$ construit à partir du mode $(\beta(0), \hat{\mathbf{U}}(0, z))$ à l'aide de la formule (3.2.16) est propagatif ou évanescent. Rappelons que par hypothèse,

$$\beta(\xi)^2 = \beta(0)^2 - \xi^2.$$

On en déduit que

- si le 0-mode est propagatif ($\beta(0)$ réel), alors les ξ -modes obtenus par la transformation (3.2.16) restent propagatifs si $\xi^2 \leq \beta^2(0)$, mais deviennent évanescents quand $\xi^2 \geq \beta^2(0)$. On retrouve ici le fait que le nombre de ξ -modes propagatifs dépend de ξ . Et comme on l'a dit plus haut, pour $\xi^2 \leq \beta^2(0)$, la transformation (3.2.16) correspond exactement à la rotation (3.1.23) réalisée pour les modes à incidence oblique.
- si le 0-mode est évanescent ($\beta(0) \notin \mathbb{R}$), les ξ -modes obtenus restent évanescents pour toutes les valeurs de $\xi \in \mathbb{R}$.

A ce stade, hors des valeurs de coupure où $\xi^2 = \beta(0)^2$, nous pouvons construire 2 ξ -modes à partir d'un 0-mode puisque nous n'avons fixé que le carré de $\beta(\xi)$. Nous allons maintenant préciser comment choisir $\beta(\xi)$ pour que le ξ -mode ainsi construit soit sortant.

- Si le 0-mode est évanescent ($\beta(0) \notin \mathbb{R}$), nous posons

$$\beta(\xi) = \sqrt{\beta(0)^2 - \xi^2}$$

où on utilise la définition de la racine complexe du paragraphe 2.4 de sorte que :

$$\text{Im}(\beta(\xi)) > 0,$$

ce qui nous donne bien un ξ -mode évanescent sortant.

- De même, si le 0-mode est propagatif ($\beta(0)$ réel) mais que le ξ -mode est évanescent ($\beta(0)^2 - \xi^2 < 0$), nous posons

$$\beta(\xi) = \sqrt{\beta(0)^2 - \xi^2} = i\sqrt{\xi^2 - \beta(0)^2}$$

où la première racine est celle du paragraphe 2.4 de sorte que :

$$\beta(\xi) \in i\mathbb{R}^+,$$

ce qui nous donne bien là aussi un ξ -mode évanescent sortant.

- Supposons enfin que le 0-mode est propagatif ($\beta(0)$ réel) et que $\beta(0)^2 - \xi^2 > 0$, et donc que le ξ -mode est lui aussi propagatif. Le choix dans ce cas entre les deux valeurs possibles $\pm\sqrt{\beta(0)^2 - \xi^2}$ est moins immédiat. En effet, on a déjà vu que le signe de $\beta(\xi)$ n'est pas le bon critère pour sélectionner un mode sortant, puisqu'il donne le signe de la vitesse de phase, et non de la vitesse de groupe. Rappelons nous pour un instant que toutes les quantités que nous manipulons dépendent de la fréquence ω en notant $\beta(\xi, \omega)$. On a donc

$$\beta(\xi, \omega)^2 + \xi^2 = \beta(0, \omega)^2.$$

En dérivant cette identité par rapport à ω , on obtient

$$\beta(\xi, \omega) \frac{\partial \beta}{\partial \omega}(\xi, \omega) = \beta(0, \omega) \frac{\partial \beta}{\partial \omega}(0, \omega). \quad (3.2.19)$$

Or le signe de chaque produit indique si le mode concerné est direct ou inverse. On peut donc en déduire que si le 0-mode est direct, alors le ξ -mode l'est également et on pose dans ce cas :

$$\beta(\xi) = \sqrt{\beta(0)^2 - \xi^2}$$

où la racine carrée est la racine classique d'un nombre positif, qui donne un nombre positif. Si au contraire le 0-mode est inverse, alors le ξ -mode l'est également et il faut poser :

$$\beta(\xi) = -\sqrt{\beta(0)^2 - \xi^2}.$$

■ Numérotation des ξ -modes

Supposons maintenant choisie une numérotation des 0-modes sortants $(\beta_n^+(0), \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z))$ telle que pour $n = 1, \dots, N_\omega^0$, le mode $(\beta_n^+(0), \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z))$ est propagatif, et pour $n > N_\omega^0$, il est évanescent. On numérote alors les modes entrants $(\beta_n^-(0), \hat{\mathbf{U}}_n^-(0, z))$ de sorte que $\beta_n^-(0) = -\beta_n^+(0)$.

Ceci nous fournit pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ une numérotation des ξ -modes sortants et entrants $(\beta_n^\pm(\xi), \hat{\mathbf{U}}_n^\pm(\xi, z))$ en posant :

$$\beta_n^+(\xi) = -\beta_n^-(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\beta_n^+(0)^2 - \xi^2} & \text{si le mode } (\beta_n^+(0), \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z)) \text{ est propagatif direct,} \\ -\sqrt{\beta_n^+(0)^2 - \xi^2} & \text{si le mode } (\beta_n^+(0), \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z)) \text{ est propagatif inverse,} \\ \sqrt{\beta_n^+(0)^2 - \xi^2} & \text{si le mode } (\beta_n^+(0), \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z)) \text{ est évanescent} \end{cases} \quad (3.2.20)$$

(où l'on utilise la définition de la racine complexe du paragraphe 2.4 dans la troisième ligne, et la définition classique de la racine carrée d'un nombre réel positif dans les deux premières lignes);

$$\hat{\mathbf{U}}_n^+(\xi, z) = \tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi) \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z) \text{ où } \tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_n^+(\xi)/\beta_n^+(0) & -\xi/\beta_n^+(0) & 0 \\ \xi/\beta_n^+(0) & \beta_n^+(\xi)/\beta_n^+(0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3.2.21)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi, z) = \tilde{\mathcal{R}}_n^-(\xi) \hat{\mathbf{U}}_n^-(0, z) \text{ où } \tilde{\mathcal{R}}_n^-(\xi) = \tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi)^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_n^-(\xi)/\beta_n^-(0) & -\xi/\beta_n^-(0) & 0 \\ \xi/\beta_n^-(0) & \beta_n^-(\xi)/\beta_n^-(0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.22)$$

Jusque là les propriétés telles que la relation de bi-orthogonalité (3.2.13) étaient indépendantes de la façon dont on numérotait les ξ -modes. En revanche, pour appliquer les améliorations telles que l'approximation champ lointain et la déformation du chemin dans le plan complexe, il sera indispensable d'avoir une numérotation qui suit continûment les modes lorsque ξ varie. Nous venons justement d'obtenir une telle numérotation.

En particulier, nous pouvons étendre cette numérotation aux valeurs de ξ complexes en posant

$$\forall \xi \in \mathbb{C} \setminus C_n \quad \beta_n^+(\xi) = \sqrt{\beta_n^+(0)^2 - \xi^2}, \quad (3.2.23)$$

toujours en utilisant la définition de la racine carrée complexe introduite dans le paragraphe 2.4. La fonction $\xi \mapsto \beta_n^+(\xi)$ est alors analytique dans le plan complexe privé de la coupure définie comme suit :

$$C_n = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \beta_n^+(0)^2 - \xi^2 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Il en est de même des fonctions $\xi \mapsto \beta_n^-(\xi)$, $\xi \mapsto \hat{\mathbf{U}}_n^\pm(\xi, z)$ et de la fonction $\xi \mapsto J_n(\xi)$ donnée par (3.2.12).

La seule difficulté concerne les modes propagatifs pour $n = 1, \dots, N_\omega^0$. En effet, comme on a dans ce cas $\beta_n^+(0) \in \mathbb{R}$, une partie de la coupure C_n se trouve sur l'axe réel, plus précisément sur le segment $[-|\beta_n^+(0)|, |\beta_n^+(0)|]$. Par ailleurs la définition (3.2.20) nous fournit la bonne valeur de $\beta_n^+(\xi)$. En procédant comme dans le paragraphe 2.4, on peut alors préciser de quel côté de la coupure cette valeur est obtenue. Si le 0-mode est direct, c'est comme dans le cas scalaire : on est au dessus de la coupure pour $[-\beta_n^+(0), 0]$ et en dessous pour $[0, \beta_n^+(0)]$. Mais c'est le contraire si le 0-mode est inverse : on est au dessous de la coupure pour $[-|\beta_n^+(0)|, 0]$ et en dessus pour $[0, |\beta_n^+(0)|]$. Il faudra y prendre garde dans le chapitre suivant.

Il est intéressant de noter que l'on peut donner une formule explicite simple des fonctions $J_n(\xi)$:

Proposition 3.2.6. *Avec les définitions (3.2.20), (3.2.21), (3.2.22) et (3.2.23), on a*

$$J_n(\xi) = J_n(0) \frac{\beta_n^+(\xi)}{\beta_n^+(0)} \quad \forall n \geq 1, \xi \in \mathbb{C}, \quad (3.2.24)$$

où $J_n(\xi)$ est donné par (3.2.12).

Démonstration. On a par définition :

$$\begin{aligned} J_n(\xi) &= \int_L \left(\tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi) \hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_n^-(\xi, z) - \tilde{\mathcal{R}}_n^-(\xi) \hat{\mathbf{U}}_n^-(0, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_n^+(\xi, z) \right) dz \\ &= \int_L \left(\hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z) \cdot \tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi) \hat{\mathcal{T}}_n^-(\xi, z) - \hat{\mathbf{U}}_n^-(0, z) \cdot \tilde{\mathcal{R}}_n^-(\xi) \hat{\mathcal{T}}_n^+(\xi, z) \right) dz. \end{aligned}$$

Or on peut vérifier que :

$$\tilde{\mathcal{R}}_n^-(\xi) \hat{\mathcal{T}}_n^+(\xi, z) = \sigma^{\beta_n^+(0), 0} (\hat{\mathbf{U}}_n^+(0, z)) \tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi) \mathbf{e}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{R}}_n^+(\xi) \hat{\mathcal{T}}_n^-(\xi, z) = \sigma^{\beta_n^-(0), 0} (\hat{\mathbf{U}}_n^-(0, z)) \tilde{\mathcal{R}}_n^-(\xi) \mathbf{e}_1.$$

Le résultat s'en déduit finalement en vérifiant que

$$\sigma^{\beta_n^\pm(0), 0} (\hat{\mathbf{U}}_n^\pm(0, z)) \mathbf{e}_2 = 0.$$

□

Le lemme précédent nous montre que si ω est une fréquence de coupure du n -ième 0-mode, c'est-à-dire que $J_n(0) = 0$, alors $J_n(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{C} \setminus C_n$. Et si au contraire, $J_n(0) \neq 0$, alors $J_n(\xi)$ ne s'annule qu'aux points de branchement $\xi = \beta_n^\pm(0)$.

Remarque 3.2.4. Dans le cas anisotrope, il n'est pas possible de déduire un ξ -mode à partir d'un 0-mode. Le calcul des modes doit donc se faire pour toutes les valeurs de ξ . Et la difficulté pour nous est qu'il n'est pas facile de numéroter les modes à ξ fixé de façon à assurer les continuités d'un mode d'indice n donné quand ξ varie. Plusieurs phénomènes peuvent se produire.

- Le problème de croisement des surfaces de lenteur illustré à la figure 3.2.5a. Il est probable que dans ce cas, numéroter les modes propagatifs en suivant l'ordre des valeurs de β introduise artificiellement des singularités aux points de croisement.
- Le problème des valeurs propres multiples : dès que les courbes de lenteur des modes ne sont plus convexes, la droite $Y = \xi$ peut intercepter une même courbe de lenteur en plus de deux points.

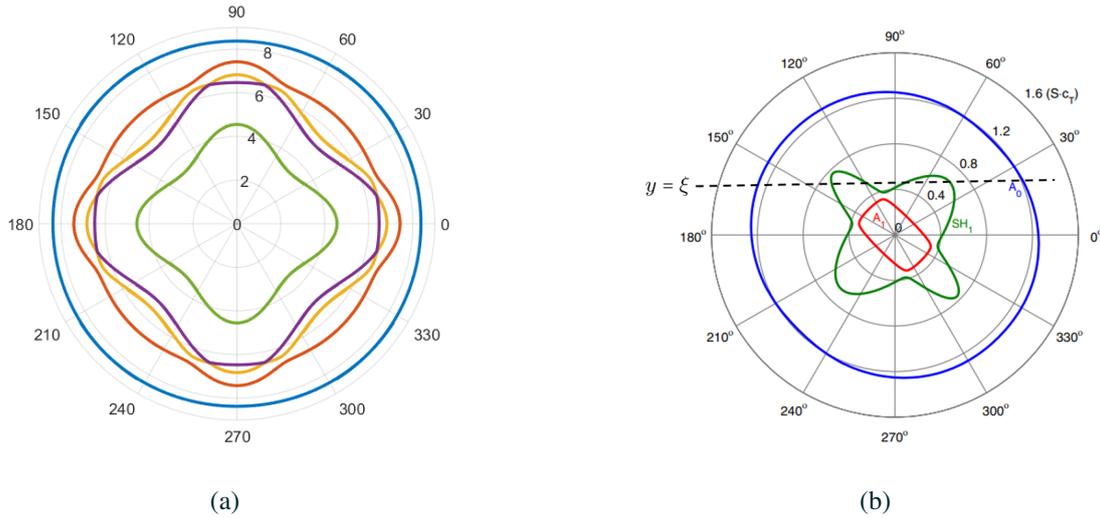


FIGURE 3.2.5 – Illustration des problèmes (a) de croisement des surfaces de lenteur et (b) de valeurs propres multiples dans la résolution du problème aux valeurs propres (d'après [65]).

3.3 Formule de reconstruction dans une demi-plaque élastique

Dans cette section, nous allons établir une formule intégrale permettant de reconstruire le champ élastodynamique dans une demi-plaque élastique homogène occupant le domaine

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h \leq z \leq h \text{ et } x > 0\}. \tag{3.3.1}$$

Il n'est pas possible d'obtenir cette formule en se donnant seulement le champ de déplacement sur le bord

$$\Sigma = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h \leq z \leq h\} \tag{3.3.2}$$

de la demi-plaque. Cela est lié au fait que, comme on l'a déjà dit, la famille des modes de déplacement élastique ne forme pas une base orthogonale de $L^2([-h, h])^3$. C'est pourquoi il faut disposer en plus de la donnée du champ de déplacement, de la donnée de la contrainte normale sur le bord, ce qui va nous permettre d'exploiter la formule de bi-orthogonalité (3.2.11).

Ainsi, on peut déterminer une formule de représentation du champ élastodynamique dans la demi-plaque, à partir de la donnée du déplacement \mathbf{d} et de la contrainte normale \mathbf{s} sur la frontière Σ de la demi-plaque. Cette formule se met sous la

forme usuelle ci-dessous :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{d}(\mathbf{r}') - \mathbf{G}_T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{s}(\mathbf{r}') d\Sigma(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (3.3.3)$$

où \mathbf{G}_D et \mathbf{G}_T sont des tenseurs de Green de la plaque élastique, dont on va établir une expression semi-analytique à l'aide des ξ -modes. Cette formule a déjà été obtenue par Y. Tjandrawidjaja dans sa thèse [56], mais nous avons choisi d'en donner ici une preuve légèrement différente.

Notons que la formule (3.3.3) est classique lorsque Σ est la surface d'un domaine borné dans un solide élastique infini : $\mathbf{G}_T(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ est le tenseur de Green de l'espace libre et $\mathbf{G}_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ sa contrainte normale sur Σ [13]. Une situation moins classique mais que l'on trouve dans la littérature est celle où Σ est le bord d'un demi-espace, en particulier pour des applications en sismique [22]. On peut également citer [48] pour le cas d'un demi-espace anisotrope. L'originalité et la difficulté du cas qui nous intéresse ici tient au fait que l'on s'intéresse à une plaque et non à l'espace libre, au fait que Σ est une tranche de la plaque (et donc une surface infinie) et au fait que le matériau peut être anisotrope. Des calculs de noyaux de Green très proches de ceux que nous allons développer ont été fait dans le cas d'une plaque isotrope transverse par F. Treyssède dans [60].

3.3.1 Fonction de Green d'une plaque élastique

On définit le tenseur de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [g_{ip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]$, où $g_{ip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la composante du déplacement dans la direction \mathbf{e}_i en un point \mathbf{r}' , produit par une force ponctuelle orientée dans la direction \mathbf{e}_p en un point \mathbf{r} , dans une plaque élastique homogène infinie occupant le domaine $\mathbb{R}^2 \times [-h, h]$ [64]. Autrement dit, la p -ième colonne du tenseur de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, que l'on note $\mathbf{g}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, est la solution sortante de l'équation de l'élastodynamique ci-dessous, où les dérivées sont des dérivées par rapport à \mathbf{r}' , ce qui est seulement indiqué par un ' dans les équations par un souci d'allègement :

$$\begin{cases} \sigma'_{ij,j}(\mathbf{g}_p) + \rho\omega^2 g_{ip} = -\delta_{ip} \delta_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}') & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [-h, h], \\ \sigma'_{i3}(\mathbf{g}_p) = 0, \quad z = \pm h, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Ici δ_{ip} est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = p$ et 0 sinon, et on utilise la convention d'Einstein sur les indices répétés. D'après (3.1.3), on a pour $i, p = 1, 2, 3$,

$$\sigma'_{ij,j}(\mathbf{g}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \text{div}'(\sigma'(\mathbf{g}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))\mathbf{e}_i) = C_{ijkl}\partial'_j\partial'_l g_{kp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Pour résoudre le système (3.3.4), on commence par appliquer une transformée de Fourier selon y' et on désigne par \hat{g}_{ip} la transformée de Fourier de g_{ip} :

$$\hat{g}_{ip}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_{ip}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) e^{-i\xi y'} dy', \quad (3.3.5)$$

où $\hat{\mathbf{r}}' = (x', \xi, z')$.

L'application de la transformée de Fourier à l'équation (3.3.4) donne pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\sigma'_{ij,j}(\hat{\mathbf{g}}_p) + \rho\omega^2 \hat{g}_{ip} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_{ip} \delta_x(x') \delta_z(z') e^{-i\xi y} \quad (3.3.6)$$

où de nouveau, l'exposant ξ indique que les dérivées par rapport à y' sont remplacées par une multiplication par $i\xi$ (comme dans le calcul des ξ -modes). La plaque étant invariante dans la direction x , on peut se contenter de calculer $\hat{\mathbf{g}}_p(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}')$ pour

$x = 0$, puis de translater la solution obtenue. De même, la plaque étant invariante dans la direction y , la dépendance en y de $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}')$ est simplement le facteur multiplicatif $e^{-i\xi y}$. On peut donc également se contenter de calculer $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}')$ pour $y = 0$ puis de multiplier par ce facteur.

D'après (3.3.6), pour $\mathbf{r} = (0, 0, z)$, $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}')$ est une solution de l'équation homogène des ξ -modes (3.2.4) de part et d'autre de la frontière $x' = 0$. On peut donc l'exprimer comme une combinaison linéaire des ξ -modes sortant vers la gauche (resp. vers la droite) à gauche (resp. à droite) de la frontière $x' = 0$. Ceci nous fournit des expressions de la forme suivante pour

$$p = 1, 2, 3, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{r} = (0, 0, z), \quad \hat{\mathbf{r}}' = (x', \xi, z') : \\ \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_m B_p^{m,+}(\xi, z) \hat{\mathcal{U}}_m^+(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)x'} \quad \text{si } x' \geq 0, \quad (3.3.7)$$

et

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_m B_p^{m,-}(\xi, z) \hat{\mathcal{U}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^-(\xi)x'} \quad \text{si } x' \leq 0, \quad (3.3.8)$$

où les fonctions $B_p^{m\pm}(\xi, z)$ restent à déterminer. On leur associe également les contraintes normales ci-dessous :

$$\hat{T}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}})(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_m B_p^{m,+}(\xi, z) \hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)x'} \quad \text{si } x' \geq 0, \quad (3.3.9)$$

et

$$\hat{T}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}})(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_m B_p^{m,-}(\xi, z) \hat{\mathcal{T}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^-(\xi)x'} \quad \text{si } x' \leq 0, \quad (3.3.10)$$

où

$$\hat{T}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}) = \sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}})\mathbf{e}_1. \quad (3.3.11)$$

A ce stade, il ne nous reste plus qu'à déterminer les coefficients $B_p^{m,-}(\xi, z)$ et $B_p^{m,+}(\xi, z)$. Pour le faire, on va se servir d'une formule de représentation intégrale à ξ fixé dans le domaine $\mathbb{R} \times [-h, h]$, et l'appliquer à des $-\xi$ -modes. On obtient ainsi les expressions suivantes :

Proposition 3.3.1. *Pour $p = 1, 2, 3$, $\xi \in \mathbb{R}$ et $-h < z < h$:*

$$B_p^{n,+}(\xi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}J_n(\xi)} \hat{\mathcal{U}}_{n,p}^-(\xi, z) \quad \text{et} \quad B_p^{n,-}(\xi, z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}J_n(-\xi)} \hat{\mathcal{U}}_{n,p}^+(\xi, z) \quad (3.3.12)$$

où $J_n(\xi)$ défini par (3.2.12).

Démonstration. Soit le domaine suivant

$$S_{\varepsilon} = \{(x, z) \mid -\varepsilon < x < \varepsilon \text{ et } -h < z < h\}.$$

Alors, par définition de $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$, on a pour toute solution $\hat{\mathbf{U}}(x, z)$ de (3.2.4), pour tout $z \in]-h, h[$ et pour $p = 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\mathbf{U}}(0, z) \cdot \mathbf{e}_p = \int_{x'=-\varepsilon}^{\varepsilon} (\sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}})\mathbf{e}_1) \hat{\mathbf{U}} - (\sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{U}})\mathbf{e}_1)\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} dz' \\ + \int_{x'=+\varepsilon}^{-\varepsilon} (\sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{U}})\mathbf{e}_1)\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} - (\sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}})\mathbf{e}_1) \hat{\mathbf{U}} dz'. \quad (3.3.13)$$

Dans les intégrales ci-dessus, $\hat{\mathbf{U}}$ et $\sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{U}})$ sont évalués en $(\pm\varepsilon, z')$ et $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$ et $\sigma'^{\xi}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}})$ en $(\hat{\mathbf{r}}', \mathbf{r})$ avec $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ et $\hat{\mathbf{r}}' = (\pm\varepsilon, \xi, z')$.

En appliquant la formule précédente à un $-\xi$ -mode

$$\hat{\mathbf{U}}(x, z) = \hat{\mathbf{U}}_n^-(-\xi, z) e^{i\beta_n^-(-\xi)x}, \quad (3.3.14)$$

en utilisant les expressions (3.3.7) à (3.3.11), et en notant $\hat{\mathbf{U}}_{n,p}^-(-\xi, z)$ la p -ième composante du mode $\hat{\mathbf{U}}_n^-(-\xi, z)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\mathbf{U}}_{n,p}^-(-\xi, z) \\ &= \sum_m B_p^{m,-}(\xi, z) e^{-i\varepsilon(\beta_m^-(\xi) + \beta_n^-(-\xi))} \int_{-h}^h \hat{\mathbf{u}}_n^-(-\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_m^-(\xi, z') - \hat{\mathbf{u}}_m^-(\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_n^-(-\xi, z') dz' \\ &+ \sum_m B_p^{m,+}(\xi, z) e^{i\varepsilon(\beta_m^+(\xi) + \beta_n^-(-\xi))} \int_{-h}^h \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_n^-(-\xi, z') - \hat{\mathbf{u}}_n^-(-\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_m^+(\xi, z') dz'. \end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\mathbf{U}}_{n,p}^-(-\xi, z) &= \sum_m B_p^{m,-}(\xi, z) \int_{-h}^h \hat{\mathbf{u}}_n^-(-\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_m^-(\xi, z') - \hat{\mathbf{u}}_m^-(\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_n^-(-\xi, z') dz' \\ &+ \sum_m B_p^{m,+}(\xi, z) \int_{-h}^h \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_n^-(-\xi, z') - \hat{\mathbf{u}}_n^-(-\xi, z') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_m^+(\xi, z') dz', \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

D'après la relation de bi-orthogonalité des ξ -modes (3.2.11), toutes les intégrales du second membre de (3.3.15) s'annulent, sauf celle pour $m = n$ dans la seconde ligne. En utilisant la définition (3.2.12) de $J_n(\xi)$, on obtient donc

$$B_p^{n,+}(\xi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} J_n(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_{n,p}^-(-\xi, z). \quad (3.3.16)$$

En appliquant la formule à

$$\hat{\mathbf{U}}(x, z) = \hat{\mathbf{U}}_n^+(-\xi, z) e^{i\beta_n^+(-\xi)x},$$

un raisonnement analogue permet d'avoir

$$B_p^{n,-}(\xi, z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} J_n(-\xi)} \hat{\mathbf{u}}_{n,p}^+(-\xi, z). \quad (3.3.17)$$

□

En résumé, d'après la proposition (3.3.1), les formules (3.3.7) et (3.3.8) deviennent

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}((0, 0, z), (x', \xi, z')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_{n,p}^-(-\xi, z) \hat{\mathbf{u}}_n^+(\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)x'}, \quad x' \geq 0, \quad (3.3.18)$$

et

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}((0, 0, z), (x', \xi, z')) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{1}{J_n(-\xi)} \hat{\mathbf{u}}_{n,p}^+(-\xi, z) \hat{\mathbf{u}}_n^-(\xi, z') e^{i\beta_n^-(\xi)x'}, \quad x' \leq 0. \quad (3.3.19)$$

On en déduit la formule générale pour x et y quelconques, et composante par composante :

$$\hat{g}_{ip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_{n,p}^-(-\xi, z) \hat{\mathbf{U}}_{n,i}^+(\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)(x'-x)} e^{-i\xi y}, \quad x' \geq x, \quad (3.3.20)$$

et

$$\hat{g}_{ip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{1}{J_n(-\xi)} \hat{\mathbf{U}}_{n,p}^+(-\xi, z) \hat{\mathbf{U}}_{n,i}^-(-\xi, z') e^{i\beta_n^-(\xi)(x'-x)} e^{-i\xi y}, \quad x' \leq x, \quad (3.3.21)$$

avec $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{r}' = (x', \xi, z')$.

La composante g_{ip} du tenseur de Green est déterminée en faisant la transformée de Fourier inverse par rapport à y' de la formule précédente d'où :

$$g_{ip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_{n,p}^-(-\xi, z) \hat{\mathbf{U}}_{n,i}^+(\xi, z') e^{i\beta_n^-(\xi)(x'-x)} e^{-i\xi(y-y')} d\xi \quad x' \geq x, \quad (3.3.22)$$

et

$$g_{ip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(-\xi)} \hat{\mathbf{U}}_{n,p}^+(-\xi, z) \hat{\mathbf{U}}_{n,i}^-(-\xi, z') e^{-i\beta_n^-(\xi)(x-x')} e^{-i\xi(y-y')} d\xi, \quad x' \leq x \quad (3.3.23)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

En faisant le changement de variable $\xi = -\xi$, en utilisant (3.2.14) et en adoptant une notation tensorielle, on obtient finalement l'expression suivante du tenseur de Green de la plaque élastique infinie :

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(-\xi)} \hat{\mathbf{U}}_n^+(-\xi, z') \otimes \hat{\mathbf{U}}_n^-(-\xi, z) e^{-i\beta_n^-(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \quad x' \geq x, \quad (3.3.24)$$

et

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_n^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_n^-(-\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \quad x' \leq x, \quad (3.3.25)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

3.3.2 La formule de représentation intégrale

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la formule (3.3.3) annoncée dans l'introduction de cette section. Pour cela, nous définissons, en plus du tenseur de Green $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ calculé dans le paragraphe précédent, sa contrainte normale sur le bord Σ de la demi-plaque défini en (3.3.2). Notons que dans la formule (3.3.3), $\mathbf{r}' \in \Sigma$ et $\mathbf{r} \in \Omega$, de sorte que $x' = 0 < x$. On utilise donc la formule (3.3.26) pour le tenseur de Green, et on dérive cette même formule pour obtenir le tenseur des contraintes normales sur Σ .

Plus précisément, nous adoptons les définitions suivantes.

Pour $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \Omega$ et $\mathbf{r}' = (0, y', z') \in \Sigma$,

$$\mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_n^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_n^-(-\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)x} e^{i\xi(y-y')} d\xi, \quad (3.3.26)$$

et

$$\mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_n^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{T}}_n^-(\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)x} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (3.3.27)$$

Par un raisonnement similaire au cas 2D acoustique, on montre alors que si \mathbf{u} est une solution sortante de

$$\left| \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) - \rho\omega^2\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u})\mathbf{e}_3 = 0 \text{ en } z = \pm h, \end{array} \right. \quad (3.3.28)$$

alors pour $\mathbf{r} \in \Omega$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}(\mathbf{r}') - \mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}(\mathbf{r}') d\Sigma(\mathbf{r}') \quad (3.3.29)$$

où

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = \mathbf{d} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{u}|_{\Sigma})\mathbf{e}_1 = \mathbf{s}. \quad (3.3.30)$$

A partir de (3.3.29) on peut également déduire une formule de reconstruction de la contrainte dans la direction normale à Σ comme suit :

$$\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{r}))\mathbf{e}_1 = \int_{\Sigma} \mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}(\mathbf{r}') d\Sigma(\mathbf{r}'), \quad (3.3.31)$$

avec avec

$$\mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{T}}_n^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \quad (x - x' \geq 0), \quad (3.3.32)$$

et

$$\mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{T}}_n^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{T}}_n^-(\xi, z') e^{i\beta_n^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \quad (x - x' \geq 0). \quad (3.3.33)$$

Les formules de représentation du déplacement (3.3.29) et de la contrainte normale (3.3.31) seront utilisées pour la construction des différents opérateurs de la méthode HSM au chapitre 5.

3.3.3 Le cas isotrope

Dans le cas d'un matériau isotrope, il est naturel d'exploiter la numérotation des ξ -modes introduite dans le paragraphe 3.2.4 et les définitions (3.2.20), (3.2.21) et (3.2.22). On peut alors intervertir la somme et l'intégrale dans l'expression de \mathbf{G}_D , ce qui donne en utilisant la formule (3.3.26) :

$$\mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\beta_m^+(0)}{J_m(0)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta_m^+(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (3.3.34)$$

En notant $\mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [g_{ip}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]$, on a donc pour $i, p = 1, 2, 3$:

$$g_{ip}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\beta_m^+(0)}{J_m(0)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta_m^+(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_{m,i}^+(\xi, z) \hat{\mathbf{U}}_{m,p}^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (3.3.35)$$

Nous allons montrer que, une fois les valeurs de $\beta_m^+(0) = -\beta_m^-(0)$, $J_m(0)$, $\hat{\mathbf{U}}_m^+(0)$ et $\hat{\mathbf{U}}_m^-(0)$ calculées, la valeur de $g_{ip}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ peut s'en déduire analytiquement en s'appuyant sur le chapitre 2. Ceci est très similaire à ce qui est fait dans [60].

Considérons par exemple le cas $i = p = 1$. Alors on déduit de (3.2.21) et (3.2.22) que

$$\begin{aligned} g_{11}^{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{-1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_m^+(0)J_m(0)} \hat{\mathcal{U}}_{m,1}^-(0, z') \hat{\mathcal{U}}_{m,1}^+(0, z) \int_{\mathbb{R}} \beta_m^+(\xi) e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_m^+(0)J_m(0)} \hat{\mathcal{U}}_{m,2}^-(0, z') \hat{\mathcal{U}}_{m,2}^+(0, z) \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{\beta_m^+(\xi)} e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_m^+(0)J_m(0)} \hat{\mathcal{U}}_{m,1}^-(0, z') \hat{\mathcal{U}}_{m,2}^+(0, z) \int_{\mathbb{R}} \xi e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_m^+(0)J_m(0)} \hat{\mathcal{U}}_{m,2}^-(0, z') \hat{\mathcal{U}}_{m,1}^+(0, z) \int_{\mathbb{R}} \xi e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi \end{aligned}$$

avec $\beta_m^+(\xi)$ défini par (3.2.20).

Or, d'après par exemple (2.1.45), si le m -ième 0-mode est évanescent ou propagatif direct,

$$H_0^{(1)}\left(\beta_m^+(0)\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta_m^+(\xi)} e^{i\beta_m^+(\xi)x} e^{i\xi y} d\xi.$$

On peut alors remplacer toutes les intégrales en ξ ci-dessus par des dérivées de fonctions de Hankel. Par exemple :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi = -\pi \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[H_0^{(1)}\left(\beta_m^+(0)\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\right) \right].$$

Si le m -ième 0-mode est propagatif inverse, il suffit de remplacer $H_0^{(1)}$ par $-H_0^{(2)}$.

Notre objectif étant de traiter une plaque anisotrope pour laquelle de telles formules semi-analytiques faisant intervenir des fonctions de Hankel ne sont pas disponibles, nous ne les exploiterons pas dans la suite. Autrement dit, nous exploiterons les expressions (3.3.26) et (3.3.27) des noyaux sous forme d'une intégrale de Fourier, et nous verrons dans le chapitre suivant comment optimiser l'évaluation numérique de ces intégrales.

Chapitre 4

Evaluation numérique de la formule de représentation dans une demi-plaque élastique

Sommaire

4.1	Validation de la formule de représentation dans le cas isotrope	98
4.1.1	Solution de référence	98
4.1.2	Description de la configuration	99
4.1.3	Validation numérique.	100
4.2	Amélioration de la formule de représentation dans le cas isotrope	102
4.2.1	Méthode de champ lointain.	103
4.2.2	Méthode de complexification.	107
4.3	Premiers éléments d'extension au cas anisotrope	112
4.3.1	Position du problème	112
4.3.2	Méthode de champ lointain.	115
4.3.3	Méthode de complexification.	115
4.4	Conclusion	116

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'évaluation numérique de la formule de représentation du champ élastique (3.3.29) dans une demi-plaque élastique, obtenue au chapitre précédent. Une grande partie de ce chapitre porte sur la validation et l'amélioration de l'évaluation de cette formule dans une demi-plaque élastique isotrope, à l'aide d'une solution de référence analytique.

En vue de pouvoir traiter le cas anisotrope, les noyaux \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D intervenant dans la formule sont exprimés sous forme d'intégrales de Fourier (et non sous forme semi-analytique à l'aide de fonctions de Hankel). Comme dans le cas scalaire, l'évaluation de ces intégrales présente des difficultés, liées aux oscillations et aux singularités des intégrandes.

Nous montrons qu'il est possible de généraliser à ces noyaux élastiques les méthodes d'approximation champ lointain et de complexification étudiées au chapitre 2.

Les spécificités du cas 3D élastique (aspect multi-modal, présence de modes inverses) seront l'objet d'une attention particulière.

Bien que ne disposant pas de solutions de référence dans le cas anisotrope, nous donnerons quelques éléments permettant de discuter des avantages attendus des méthodes d'approximation champ lointain et de complexification pour l'évaluation des noyaux dans certains cas d'anisotropie.

4.1 Validation de la formule de représentation dans le cas isotrope

4.1.1 Solution de référence

On considère dans la suite une plaque isotrope dans laquelle rayonne une source linéique située en $(x, y) = (x_S, 0)$ émettant uniquement sur l'harmonique fondamentale du mode de Lamb S_0 . Avec les notations de l'annexe C.1, le champ de déplacement émis par cette source est donné en coordonnées cylindriques par $(m, n = 0, B_{mn} = 0)$:

$$\begin{aligned} u_r^{\text{ref}}(x, y, z) &= V_0(z)(H_0^1)'(k_0\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}), \\ u_\theta^{\text{ref}}(x, y, z) &= 0, \\ u_z^{\text{ref}}(x, y, z) &= W_0(z)H_0^1(k_0\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

On se place dans une plaque en aluminium d'épaisseur $2h = 1$ mm à une fréquence $f = 1$ MHz pour laquelle il existe 3 modes propagatifs (les modes fondamentaux dits A_0 , SH_0 et S_0) dont les propriétés sont données dans le tableau ci-dessous :

	A_0	SH_0	S_0
Nombre d'onde β	2.72	2.03	1.19
Longueur d'onde λ	2.31	3.09	5.26

TABLEAU 4.1 – Caractéristiques des 3 modes propagatifs dans une plaque d'aluminium d'épaisseur $2h = 1$ mm à une fréquence $f = 1$ MHz.

Si les modes propagatifs sont numérotés par ordre croissant des valeurs de β (de sorte que le mode S_0 considéré ici corresponde à $m = 1$), on peut réécrire la formule 4.1.1 avec les notations du chapitre précédent en faisant intervenir les 0-modes. Cela revient à dire que :

$$k_0 = \beta_1^+(0), \quad V_0(z) = \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z) \quad \text{et} \quad W_0(z) = i\hat{\mathcal{U}}_{1,3}^+(0, z).$$

En coordonnées cartésiennes, la solution de référence devient

$$\begin{aligned} u_x^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z)(H_0^1)'(\beta_1^+(0)\sqrt{(x-x_S)^2+y^2})\frac{x-x_S}{\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}}, \\ u_y^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z)(H_0^1)'(\beta_1^+(0)\sqrt{(x-x_S)^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}}, \\ u_z^{\text{ref}}(x, y, z) &= i\hat{\mathcal{U}}_{1,3}^+(0, z)H_0^1(\beta_1^+(0)\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

La figure 4.1.1 représente les trois composantes du champ de déplacement de référence à l'extérieur d'un trou cylindrique de rayon $r = 0.5$ mm centré en $x_S = 0$.

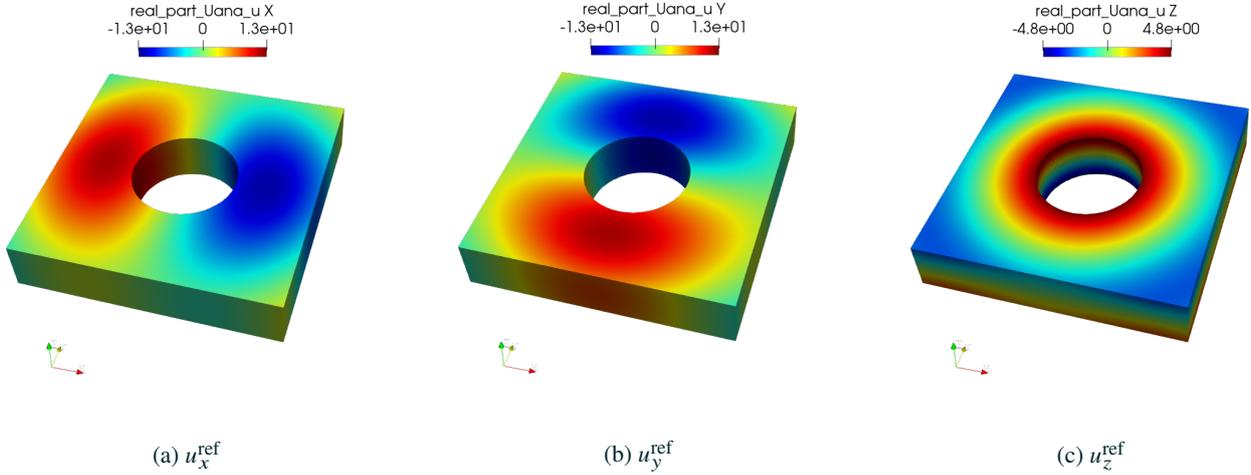


FIGURE 4.1.1 – Représentation de la partie réelle des trois composantes de la solution de référence construite à partir du mode S_0 analytique, à la fréquence $f=1$ MHz pour la plaque d'aluminium d'épaisseur $2h = 1$ mm.

4.1.2 Description de la configuration

On suppose que $x_S < 0$, de sorte que la solution de référence est une solution sortante des équations (3.3.28) dans la demi-plaque Ω (3.3.1) de frontière Σ (3.3.2).

Notre objectif est de valider la formule permettant de reconstruire u^{ref} dans Ω à partir du déplacement \mathbf{d}^{ref} et de la contrainte normale \mathbf{s}^{ref} données sur la frontière Σ :

$$\mathbf{u}^{\text{ref}}(r) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') - \mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') d\Sigma(\mathbf{r}'), \quad (4.1.3)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ désigne le point d'évaluation et $\mathbf{r}' = (0, y', z')$ un point de la bande Σ .

Les tenseurs de Green \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D sont définis respectivement par les équations (3.3.26) et (3.3.27) qui s'écrivent dans le cas de la plaque isotrope comme suit :

$$\mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{g}}_T^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') d\xi, \quad (4.1.4)$$

et

$$\mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{g}}_D^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') d\xi, \quad (4.1.5)$$

où $\hat{\mathbf{g}}_T^m$ et $\hat{\mathbf{g}}_D^m$ représentent les intégrandes modaux donnés par :

$$\hat{\mathbf{g}}_T^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')}, \quad (4.1.6)$$

et

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{D}}^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathcal{T}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')}. \quad (4.1.7)$$

La formule de représentation (4.1.3) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}^{\text{ref}}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{D}}^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') d\xi d\Sigma(\mathbf{r}'). \quad (4.1.8)$$

Dans le cas particulier de notre solution de référence (4.1.2), on peut montrer (voir l'annexe C.2) que

$$\int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{D}}^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^m(\xi; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') d\xi d\Sigma(\mathbf{r}') = 0, \quad m \neq 1, \quad (4.1.9)$$

et donc que

$$\mathbf{u}^{\text{ref}}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{D}}^1(\xi, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^1(\xi, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^{\text{ref}}(\mathbf{r}') d\xi d\Sigma(\mathbf{r}'). \quad (4.1.10)$$

Autrement dit, seul le mode $m = 1$ contribue dans la reconstruction de la solution de référence.

4.1.3 Validation numérique.

■ Description des paramètres numériques

Pour évaluer numériquement la formule (4.1.3), on commence par tronquer la frontière infinie Σ en la remplaçant par Σ_L , où

$$\Sigma_L = \{(0, y, z) \in \Sigma \mid |y| < L\},$$

puis on maille Σ_L à l'aide de triangles. Les paramètres du maillage sont fixés en s'appuyant sur les données du tableau 4.1. La troncature physique L le long de y est de 15 mm, équivalent à environ 3 fois la longueur d'onde maximum (celle du mode S_0). Le pas de discrétisation physique δ_y suivant l'axe y (sur le bord de Σ_L) est un septième de la plus petite longueur d'onde (ici celle du mode A_0) et on utilise 15 éléments dans l'épaisseur $2h = 1$ mm, ce qui fixe le pas de discrétisation physique δ_z (sur le bord de Σ_L). Les données analytiques interpolées \mathbf{d}^{ref} et \mathbf{s}^{ref} sont représentées sur la bande Σ_L à la figure 4.1.2.

Il faut ensuite tronquer et discrétiser les intégrales de Fourier. Comme tous les intégrandes sont exponentiellement décroissants pour $|\xi|$ supérieur à la plus grande des constantes β des modes propagatifs (celle du mode A_0), la troncature de l'intégrale de Fourier choisie dans toute la suite est de 3.26 rad.mm^{-1} (correspondant à 1.2 fois la constante du mode A_0).

Le paramètre le plus important est le pas de discrétisation des intégrales de Fourier. Pour ce premier test, le nombre d'intervalles de discrétisation de l'intégrale de Fourier est de 100. On utilise une méthode de quadrature numérique de type Gauss-Legendre à 3 points, ce qui correspond à un nombre de points de discrétisation $N_f = 300$. En chacun de ces

points de discrétisation, les ξ -modes sont pré-calculés par la méthode SAFE.

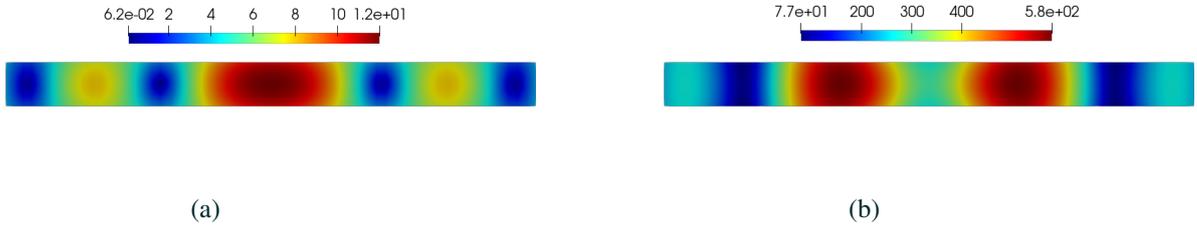


FIGURE 4.1.2 – Représentation du module (a) du déplacement \mathbf{d}^{ref} et (b) de la contrainte normale associée \mathbf{s}^{ref} sur la bande Σ_L .

■ Résultats numériques et discussions

Dans la suite, nous allons reconstruire numériquement $\mathbf{u}^{\text{ref}}(\mathbf{r})$ pour $\mathbf{r} \in S$ où

$$S := \{(\rho \cos \theta, \sin \theta, z) \mid l_{\min} < \rho < l_{\min} + c, -h < z < h\},$$

comme représenté sur la figure 4.1.3.

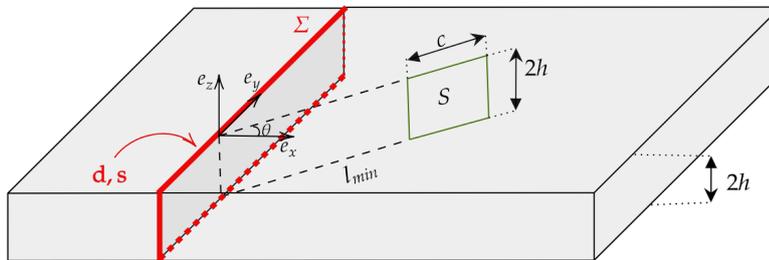


FIGURE 4.1.3 – Configuration pour la validation numérique.

Pour la validation numérique, nous utilisons dans un premier temps la formule avec un seul mode (4.1.10). Le champ de déplacement analytique dans la section S et sa reconstruction pour $l_{\min} = 10$ mm, $\theta = 0$ et $c = 2,31$ mm sont représentés sur les figures 4.1.4 et 4.1.5. L'erreur relative, en norme L^2 discrète, est de 0,48% pour $N_f = 300$. Cela permet de valider la formule de représentation (4.1.10).

Nous testons ensuite la formule générale utilisant toutes les contributions modales (4.1.8), où la somme infinie a été tronquée à 5, ce qui signifie que l'on a pris en compte, en plus des 3 ξ -modes propagatifs, 2 ξ -modes évanescents. Ceci augmente significativement l'erreur relative qui est alors de 6,98%. En particulier, on voit que l'identité (4.1.9) n'est pas vérifiée au niveau discret. Cette conversion modale parasite est un effet surprenant de la discrétisation des intégrales de Fourier. Plus précisément ici, la contribution du mode A_0 est bien nulle, après discrétisation, pour des raisons de

symétrie des profils transverses des modes dans l'épaisseur. En revanche, la discrétisation des intégrales de Fourier crée des couplages entre les modes SH_0 et S_0 .

La figure 4.1.6 permet d'illustrer l'effet du paramètre N_f sur l'erreur relative selon qu'on utilise la formule avec un seul ξ -mode (4.1.10) ou la formule avec les 5 ξ -modes (4.1.8). On observe que les deux courbes ont un pic important

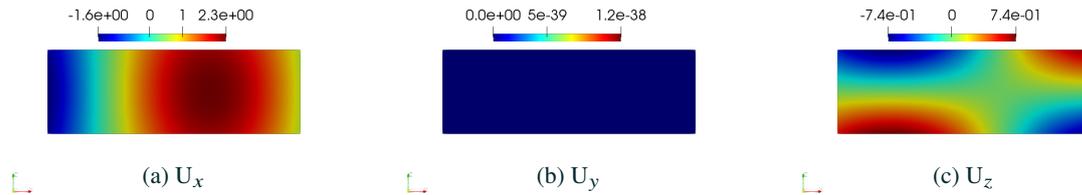


FIGURE 4.1.4 – Champ de déplacement analytique sur le domaine S pour $\theta = 0$ rad, $l_{min} = 10$ mm et la troncature physique $L = 15$ mm.

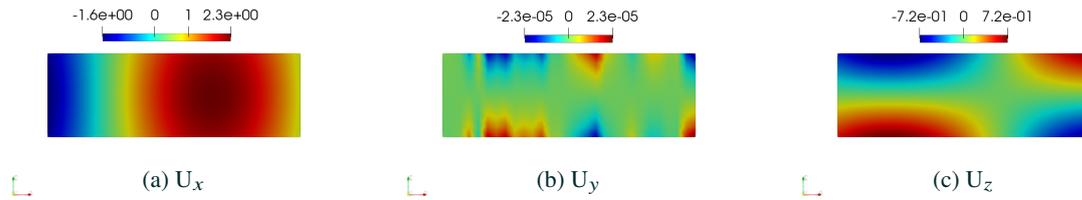


FIGURE 4.1.5 – Champ de déplacement reconstruit sur le domaine S pour $\theta = 0$ rad, $l_{min} = 10$ mm et la troncature physique $L = 15$ mm.

pour $N_f = 90$ et que la courbe rouge présente d'autres pics moins élevés pour des valeurs supérieures de N_f . Au delà de $N_f = 100$, on obtient une décroissance monotone de l'erreur relative avec la formule à un seul mode.

La représentation d'un terme des intégrandes de $\hat{\mathbf{g}}_T^m$ et $\hat{\mathbf{g}}_D^m$ des ξ -modes propagatifs permet d'expliquer l'impact de N_f . En effet, on observe que les intégrandes élastiques représentés sur les figures 4.1.7 ont des comportements similaires à ceux des noyaux de Dirichlet (Fig.2.2.4) et de Neumann acoustiques (Fig.2.2.5). Ils sont oscillants quand l'un des paramètres x et/ou y est grand. De plus, lorsque x est grand, les oscillations s'accroissent au niveau des coupures (ou singularités). Enfin, ils prennent parfois des valeurs infinies aux valeurs de coupure. C'est ce dernier aspect qui explique les pics qui apparaissent lorsqu'un point de quadrature est trop proche d'une valeur de coupure de l'un des modes. Il est donc important, voire indispensable, d'étendre au cas élastique 3D les méthodes de champ lointain et de complexification, conçues initialement pour le cas scalaire. Nous pourrions le justifier dans le cas élastique isotrope. Nous fournirons également les premiers éléments d'extension au cas de la plaque anisotrope.

4.2 Amélioration de la formule de représentation dans le cas isotrope

Le but de cette section est d'appliquer les méthodes de champ lointain et de complexification aux noyaux élastiques \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D , afin de résoudre les difficultés liées à l'évaluation numérique de ces derniers.

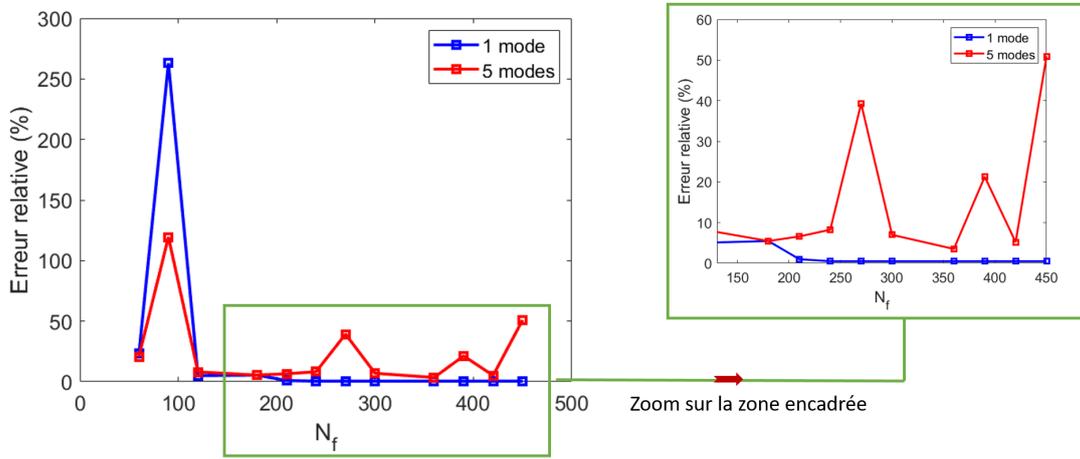


FIGURE 4.1.6 – Erreur relative en pourcentage de la reconstruction de la solution \mathbf{u}^{ref} sur le domaine S avec la formule utilisant 1 mode (4.1.10) et la formule à 5 ξ -modes (4.1.8), pour $l_{\min} = 10$ mm. Un zoom de la zone à partir de $N_f = 150$ a été réalisé.

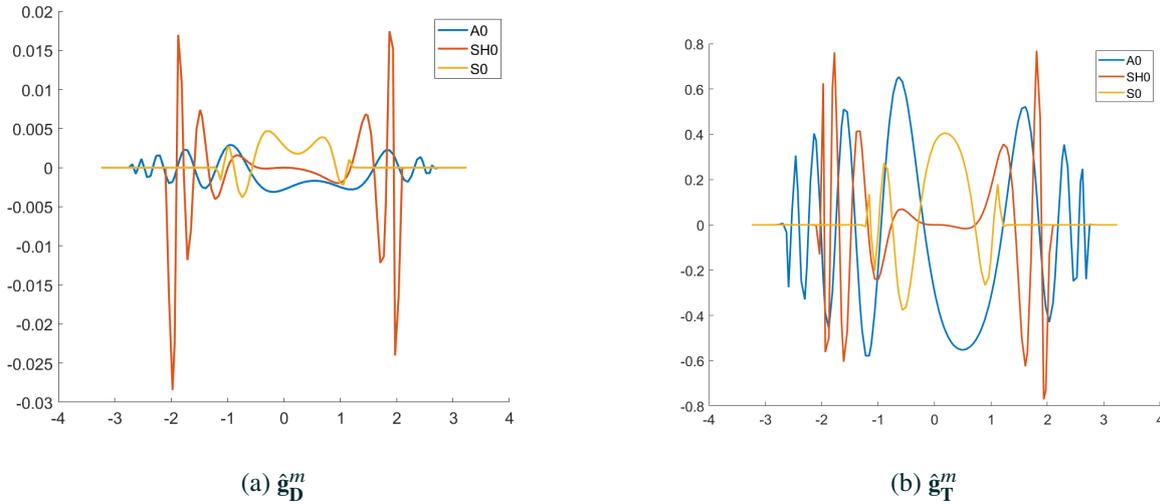


FIGURE 4.1.7 – Une composante des intégrandes tensoriels (a) $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{D}}^m$ et (b) $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^m$ pour les trois modes propagatifs $m = 1, 2, 3$, pour $(x - x', y - y') = (10, 2)$ et $z = z' = h$.

4.2.1 Méthode de champ lointain.

Pour faire le développement, on utilise le noyau $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}$. On déduira facilement l'expression asymptotique de $\mathbf{G}_{\mathbf{D}}$ de façon similaire. On rappelle l'expression du noyau $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_m \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi, \quad (4.2.1)$$

que l'on cherche à évaluer pour

$$x - x' > 0, y - y' \in \mathbb{R}, -h < z < h \text{ et } -h < z' < h.$$

L'expression (4.2.1) est valable aussi bien pour un matériau isotrope, que pour un matériau anisotrope. Comme nous nous intéressons ici au cas d'un matériau isotrope, nous utilisons la numérotation des ξ -modes introduite dans le paragraphe 3.2.4 et les définitions (3.2.20), (3.2.21) et (3.2.22). On peut alors intervertir la somme et l'intégrale dans l'expression de \mathbf{G}_T , ce qui va nous permettre de raisonner mode par mode :

$$\mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(-\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (4.2.2)$$

On distingue dans cette somme les contributions des modes d'indice $m = 1, \dots, N_\omega^0$, où N_ω^0 désigne le nombre de 0-modes propagatifs, et les contributions des ξ -modes d'indice $m > N_\omega^0$. En effet :

1. pour $m = 1, \dots, N_\omega^0$, on a vu que les ξ -modes sont propagatifs dans un intervalle de valeurs de ξ , $|\xi| < |\beta_m^+(0)|$ puis deviennent évanescents pour $|\xi| > |\beta_m^+(0)|$.
2. pour $m > N_\omega^0$, les ξ -modes sont évanescents, quelle que soit la valeur de $\xi \in \mathbb{R}$.

Lorsqu'on s'intéresse aux interactions lointaines, les ξ -modes évanescents ont des contributions qui sont négligeables devant celles des ξ -modes propagatifs. Ainsi la somme peut être tronquée aux N_ω^0 premiers ξ -modes. L'expression de (4.2.2) devient :

$$\mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{N_\omega^0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(-\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (4.2.3)$$

On peut alors appliquer le théorème de la phase stationnaire à chaque intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(-\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi, \quad m = 1, \dots, N_\omega^0,$$

comme en acoustique. Plus précisément, notons (r, θ) les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(x - x', y - y')$ et fixons z, z' et θ . On cherche alors une approximation asymptotique de chaque intégrale pour r grand.

Autrement dit, en reprenant les notations de (2.3.1), on cherche à évaluer pour $m = 1, \dots, N_\omega^0$ les intégrales suivantes

$$I_m(z, z', \theta; r) = \int_{\mathbb{R}} f_m(z, z'; \xi) e^{ir\phi_m(\theta; \xi)} d\xi \quad (4.2.4)$$

avec

$$f_m(\xi; z, z') = -\frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(-\xi, z') \text{ et } \phi_m(\theta; \xi) = \beta_m^+(\xi) \cos \theta + \xi \sin \theta.$$

Supposons que le m -ième 0-mode propagatif est direct, alors d'après (3.2.20),

$$\beta_m^+(0) > 0 \text{ et } \beta_m^+(\xi) = \sqrt{\beta_m^+(0)^2 - \xi^2}.$$

On peut alors reproduire les formules (2.3.8) du cas scalaire en remplaçant k par $\beta_m^+(0)$. Autrement dit, on trouve que la

phase stationne en une seule valeur de ξ , qui ne dépend que de la direction θ ,

$$\xi_m(\theta) = \beta_m^+(0) \sin \theta, \quad (4.2.5)$$

et l'on a

$$\phi_m(\theta; \xi_m(\theta)) = \beta_m^+(0) \text{ et } \phi_m''(\theta; \xi_m(\theta)) = -\frac{1}{\beta_m^+(0) \cos^2 \theta}. \quad (4.2.6)$$

Si le m -ième 0-mode propagatif est inverse, alors, toujours d'après (3.2.20),

$$\beta_m^+(0) < 0 \text{ et } \beta_m^+(\xi) = -\sqrt{\beta_m^+(0)^2 - \xi^2}.$$

On peut vérifier que les formules (4.2.5) et (4.2.6) restent vraies dans ce cas.

On en déduit donc finalement l'expression asymptotique de l'intégrale $I_m(z, z', \theta; r)$ pour r grand :

$$I_m(z, z', \theta; r) = \sqrt{\frac{1}{r|\phi_m''(\theta; \xi_m(\theta))|}} f_m(z, z'; \xi_m(\theta)) e^{i[\phi_m(\theta; \xi_m(\theta))r + \text{sg} \frac{\pi}{4}]} + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (4.2.7)$$

où sg est le signe de la dérivée seconde de la phase $\phi_m''(\theta; \xi_m(\theta))$. En utilisant (4.2.5) et (4.2.6), ceci se réécrit sous la forme suivante :

$$I_m(z, z', \theta; r) = -\sqrt{\frac{|\beta_m^+(0)|}{r}} \frac{\cos \theta}{J_m(\xi_m(\theta))} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi_m(\theta), z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(-\xi_m(\theta), z') e^{i[\beta_m^+(0)r - \text{sg}_m \frac{\pi}{4}]} + \mathcal{O}(r^{-1}),$$

où $\text{sg}_m = 1$ si le m -ième 0-mode propagatif est direct et $\text{sg}_m = -1$ s'il est inverse.

Enfin, d'après (3.2.24), on a

$$J_m(\xi_m(\theta)) = J_m(0) \frac{\beta_m^+(\xi_m(\theta))}{\beta_m^+(0)} = J_m(0) \cos(\theta).$$

On en déduit finalement un équivalent asymptotique du noyau \mathbf{G}_T et par un raisonnement identique, du noyau \mathbf{G}_D :

Si $x - x' = r \cos \theta$ et $y - y' = r \sin \theta$ avec $r > 0$ et $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, alors

$$\mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{N_\omega^0} \sqrt{\frac{|\beta_m^+(0)|}{r}} \frac{1}{J_m(0)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi_m(\theta), z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(-\xi_m(\theta), z') e^{i[\beta_m^+(0)r - \text{sg}_m \frac{\pi}{4}]} + \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (4.2.8)$$

$$\mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{N_\omega^0} \sqrt{\frac{|\beta_m^+(0)|}{r}} \frac{1}{J_m(0)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi_m(\theta), z) \otimes \hat{\mathbf{T}}_m^-(-\xi_m(\theta), z') e^{i[\beta_m^+(0)r - \text{sg}_m \frac{\pi}{4}]} + \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (4.2.9)$$

où $\xi_m(\theta)$ est donné par (4.2.5) et $\text{sg}_m = 1$ (resp. $\text{sg}_m = -1$) si le m -ième 0-mode propagatif est direct (resp. inverse).

■ Illustrations numériques

Pour la validation numérique, on considère à nouveau la configuration présentée à la figure 4.1.3, dont une vue de dessus est donnée à la figure 4.2.1. La solution de référence et les paramètres décrits dans le paragraphe 4.1.3 sont

également conservés.

L'idée est maintenant de reconstruire la solution dans S en remplaçant dans les formules (4.1.10) et (4.1.8) les noyaux \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D par leurs expressions asymptotiques valables en champ lointain (4.2.8) et (4.2.9).

On utilise dans un premier temps la formule avec un seul mode (4.1.10), puis la formule générale (4.1.8), en ne gardant que les trois modes propagatifs.

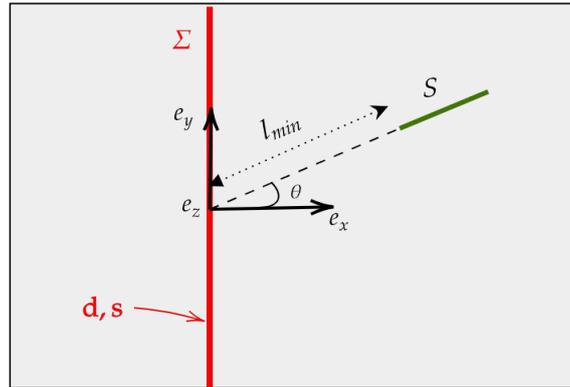


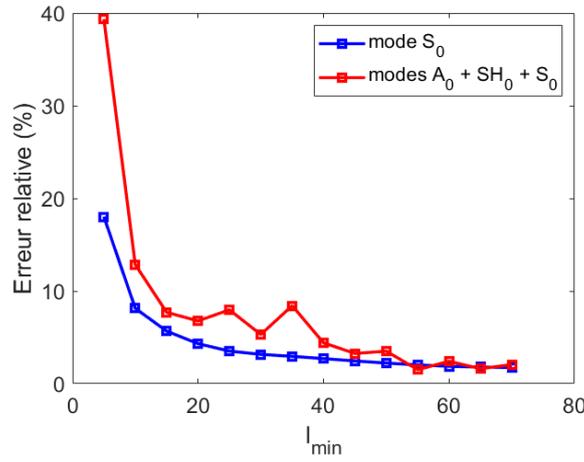
FIGURE 4.2.1 – Configuration pour la reconstruction avec l'approximation asymptotique de \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D .

Pour le paramètre $l_{min} = 50$ mm, qui correspond à une distance de 9,5 fois la longueur d'onde du mode S_0 , l'erreur relative obtenue est de 2,2% (resp. 3,5%) pour la reconstruction utilisant un seul mode (resp. les 3 modes propagatifs) avec les formes asymptotiques des noyaux \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D . A nouveau, on constate que bien que les modes $m \neq 1$ ne contribuent pas à l'expression exacte de la solution, les identités (4.1.9) ne sont plus valables lorsque l'on remplace les noyaux par leur expression champ lointain. Pour fixer les idées, avec la formule initiale avec discrétisation de l'intégrale de Fourier, pour $l_{min} = 50$ mm et $N_f = 300$, l'erreur relative est de 3.8 (resp. 10,1%) pour la reconstruction utilisant un seul mode (resp. les 3 modes propagatifs).

On représente sur la figure 4.2.2 l'erreur relative de la reconstruction sur le domaine S avec les noyaux asymptotiques en fonction de la distance l_{min} , suivant que l'on ne conserve qu'un mode ou les 3 modes propagatifs. De façon rassurante, l'erreur relative en utilisant les trois modes propagatifs rejoint celle obtenue avec un seul mode lorsque l_{min} augmente. On note que cette dernière (courbe bleue) décroît de façon monotone, contrairement à la première (courbe rouge) qui présente des oscillations.

Le temps d'évaluation numérique de la reconstruction avec les noyaux asymptotiques est considérablement plus rapide qu'avec les intégrales de Fourier : en effet, chaque évaluation du noyau n'utilise qu'un ξ -mode, contrairement à l'évaluation par discrétisation des intégrales de Fourier qui en utilise N_f , ce qui multiplie par N_f le temps de la reconstruction.

Malgré ses avantages, cette méthode de champ lointain ne répond pas de façon satisfaisante à nos besoins. En effet, elle ne peut être exploitée que pour reconstruire le champ dans une zone suffisamment éloignée du bord Σ . Or dans la méthode HSM qui fait l'objet du chapitre suivant, cette situation se présente rarement. De plus, dans le cas où on veut évaluer le champ en un nombre important de positions, l'utilisation des formules asymptotiques des noyaux interdit d'exploiter une factorisation de type (2.2.10), ou (2.2.11), du fait que dans les formules (4.2.8) et (4.2.9), le valeur du point stationnaire $\xi_m(\theta)$ dépend, via θ de \mathbf{r} et de \mathbf{r}' . Cela nous conduit à nous tourner vers la seconde approche, c'est-à-dire la méthode de complexification.

FIGURE 4.2.2 – Erreur relative de la reconstruction de S avec les noyaux asymptotiques en fonction l_{min}

4.2.2 Méthode de complexification.

À la section 2.4 (chapitre scalaire), on a introduit la méthode de la déformation du chemin d'intégration dans le plan complexe, ou méthode de complexification, pour améliorer l'évaluation numérique des intégrales de Fourier qui interviennent dans la définition des noyaux. On se propose ici d'utiliser cette méthode pour améliorer l'évaluation des noyaux élastiques \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D . A nouveau, on va expliquer la méthode pour le noyau \mathbf{G}_T , l'extension au noyau \mathbf{G}_D ne soulève pas de difficultés particulières.

Dans l'expression (4.2.2) du noyau \mathbf{G}_T , la contribution du m -ième mode est donnée par le terme :

$$\mathbf{G}_T^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (4.2.10)$$

L'évaluation de l'intégrale ci-dessus ne pose pas de réelle difficulté lorsque l'on considère un 0-mode évanescent, car dans ce cas les points de branchement de la fonction $\beta \mapsto \beta_m^+(\xi)$ ne sont pas sur l'axe réel. Notre objectif est donc d'appliquer la complexification aux indices $m = 1, \dots, N_\omega^0$ correspondant aux N_ω^0 0-modes propagatifs. Supposons donc que $1 \leq m \leq N_\omega^0$.

Nous avons obtenu dans le paragraphe 3.2.4 toutes les informations concernant l'analyticité de l'intégrande permettant de justifier la déformation du chemin d'intégration.

En effet, pour $x - x' > 0$, $y - y' \in \mathbb{R}$, $-h < z < h$ et $-h < z' < h$ fixés, nous savons que la fonction

$$\xi \mapsto \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')}$$

est analytique dans $\mathbb{C} \setminus C_m$ où

$$C_m = i\mathbb{R} \cup [-|\beta_m^+(0)|, |\beta_m^+(0)|].$$

Nous savons aussi que la valeur à retenir pour l'intégrande lorsque $\xi \in [-|\beta_m^+(0)|, |\beta_m^+(0)|]$ dépend du fait que le 0-mode est direct ou inverse.

Commençons par traiter le cas où le 0-mode est direct. Comme dans le cas scalaire, pour des raisons de symétrie, on

peut se contenter de considérer le cas $y - y' > 0$ et scinder l'intégrale (4.2.10) en deux termes comme suit :

$$\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{m,-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{m,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (4.2.11)$$

où

$$\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{m,-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi, \quad (4.2.12)$$

et

$$\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{m,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{J_m(\xi)} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\xi, z') e^{i\beta_m^+(\xi)(x-x')} e^{i\xi(y-y')} d\xi. \quad (4.2.13)$$

En procédant comme pour obtenir (2.4.2), on établit le résultat suivant.

Supposons que le m -ième 0-mode est propagatif direct. Alors, pour $x - x' > 0$, $y - y' \geq 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$,

$$\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{m,-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-i\alpha}}{J_m(\eta e^{-i\alpha})} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\eta e^{-i\alpha}, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\eta e^{-i\alpha}, z') e^{i[\beta_m^+(\eta e^{-i\alpha})(x-x') + \eta e^{-i\alpha}(y-y')]} d\eta \quad (4.2.14)$$

où on utilise les définitions (3.2.20), (3.2.21) et (3.2.22).

Pour cette première intégrale, le choix de l'angle α entre 0 et $\pi/2$ est libre. Cela permet de s'éloigner significativement des points de branchement et l'on peut donc espérer que la formule (4.2.14) puisse être évaluée avec une discrétisation en ξ beaucoup moins fine que la formule initiale.

Comme dans le cas scalaire, ce n'est plus le cas pour l'intégrale sur les ξ positifs, comme on le voit dans le résultat suivant :

Supposons que le m -ième 0-mode est propagatif direct et soient $x - x' > 0$, $y - y' \geq 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$ tels que

$$x - x' > (y - y') \tan \alpha, \quad (4.2.15)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{m,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha}}{J_m(\eta e^{-i\alpha})} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\eta e^{-i\alpha}, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\eta e^{-i\alpha}, z') e^{i[\beta_m^+(\eta e^{-i\alpha})(x-x') + \eta e^{-i\alpha}(y-y')]} d\eta \quad (4.2.16)$$

où on utilise les définitions (3.2.20), (3.2.21) et (3.2.22).

Un résultat similaire peut être établi dans le cas d'un mode inverse, mais il faut cette fois déformer le chemin d'intégration en tournant dans l'autre sens, pour être du "bon" côté de la coupure (voir Fig 4.2.3b).

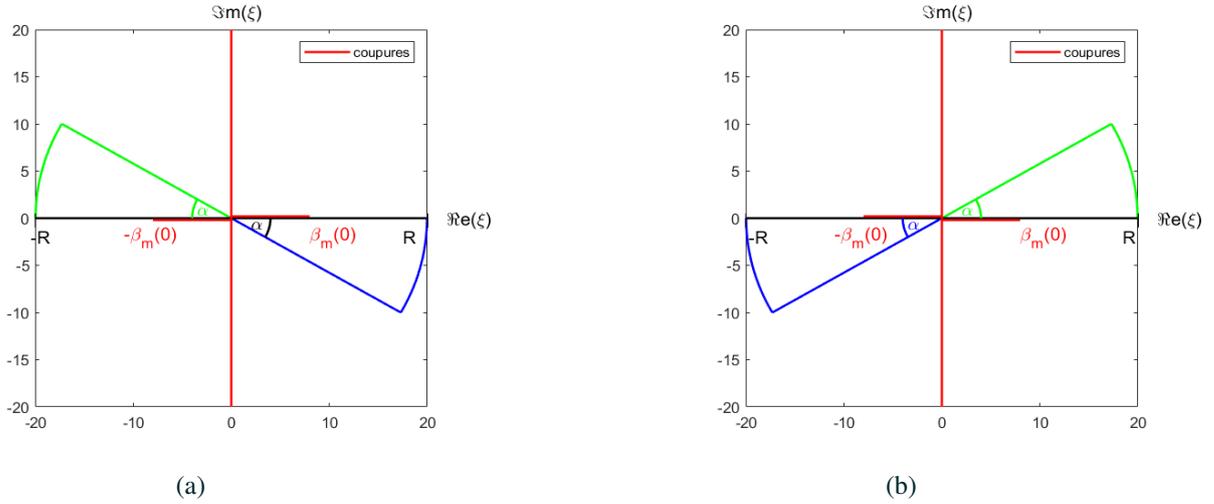


FIGURE 4.2.3 – Déformation du chemin d'intégration selon que le mode est (a) direct ou (b) inverse.

Supposons que le m -ième 0-mode est propagatif inverse. Alors, pour $x - x' > 0$, $y - y' \geq 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2[$,

$$\mathbf{G}_T^{m,-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\alpha}}{J_m(\eta e^{i\alpha})} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\eta e^{-i\alpha}, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\eta e^{-i\alpha}, z') e^{i[\beta_m^+(\eta e^{i\alpha})(x-x') + \eta e^{i\alpha}(y-y')]} d\eta \quad (4.2.17)$$

où on utilise les définitions (3.2.20), (3.2.21) et (3.2.22). Si de plus la condition (4.2.15) est satisfaite, alors

$$\mathbf{G}_T^{m,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha}}{J_m(\eta e^{-i\alpha})} \hat{\mathbf{U}}_m^+(\eta e^{-i\alpha}, z) \otimes \hat{\mathbf{U}}_m^-(\eta e^{-i\alpha}, z') e^{i[\beta_m^+(\eta e^{-i\alpha})(x-x') + \eta e^{-i\alpha}(y-y')]} d\eta \quad (4.2.18)$$

Par symétrie, on détermine les noyaux complexifiés quand $y - y' < 0$. La méthode se généralise aux autres ξ -modes ($m > 1$) naturellement.

La condition (4.2.15) fournit, pour un couple $(x - x', y - y')$ donné, une valeur maximum de l'angle α pour que les formules (4.2.16) et (4.2.18) soient valides. On peut donc envisager d'adapter la valeur de l'angle α au couple $(x - x', y - y')$. C'est envisageable dans le cas isotrope que nous considérons ici, puisque nous avons des formules analytiques des ξ -modes pour ξ complexe qui se déduisent par des calculs simples et peu coûteux des 0-modes.

En vue de l'application de la méthode à des matériaux anisotropes, il nous semble préférable de fixer une seule valeur de α puis de n'utiliser la complexification que pour $(x - x', y - y')$ dans la zone de validité. Ceci nous permet de calculer une fois pour toutes les ξ -modes nécessaires aux évaluations des différents noyaux.

Plus précisément, on calcule les ξ -modes pour $\xi = \eta_p e^{-i\alpha}$, où les η_p , $p = 1, \dots, P$, discrétisent un intervalle de \mathbb{R} suffisamment grand. On en déduit alors grâce à la proposition 3.2.1 les ξ -modes pour $\xi = \eta_p e^{i\alpha}$, $p = 1, \dots, P$, dont on a besoin en cas de mode inverse.

■ Validations numériques

Dans un premier temps, on va représenter l'impact de la complexification sur les intégrandes élastiques. Dans un

second temps, les noyaux complexifiés sont utilisés pour la reconstruction du champ élastique de référence sur le domaine S .

Pour les illustrations, on représente l'intégrande $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^1$ (4.1.6) associé au noyau $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^1$, où la numérotation des ξ -modes est telle que décrite dans la méthode précédente. Le ξ -mode $m = 1$ correspond donc au ξ -mode propagatif S_0 .

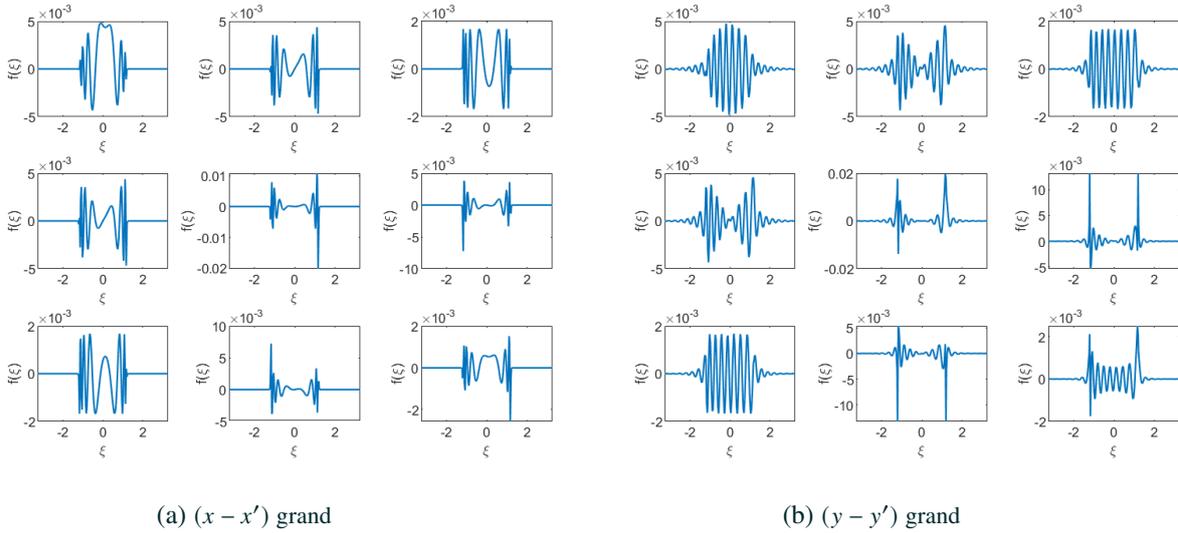


FIGURE 4.2.4 – Représentation des intégrandes du mode $m = 1$ avant complexification pour (a) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ et (b) $(x - x', y - y') = (2, 20)$ et $z = z' = h$.

La figure 4.2.4 représente les neuf (9) termes de l'intégrande $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^1$ (4.2.10) avant la complexification pour deux types d'interactions lointaines : un cas où $x - x'$ est grand et un cas où c'est $y - y'$ qui est grand, et positif.

Dans un premier temps, la complexification est réalisée pour les valeurs négatives de ξ ($\xi < 0$), ce qui correspond à introduire l'intégrande complexifié associé à $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{1,-}$, donné par (4.2.17). On a montré que cette déformation pouvait se faire pour toutes les valeurs de l'angle $\alpha \in]0, \pi/2[$. Mais un petit angle est suffisant pour obtenir une nette amélioration de l'intégrande. En effet sur la figure 4.2.5, on a fait une déformation d'un angle $\alpha = \pi/30$ et on observe que les valeurs singulières aux coupures ont été éliminées et les oscillations ont été réduites. La partie en orange représente les points où la complexification a été réalisée.

Il reste à améliorer la partie $\xi > 0$, ce qui correspond à introduire l'intégrande complexifié associé à $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}^{1,+}$, donné par (4.2.18). On sait, d'après (4.2.15), que cette complexification est possible à condition de respecter la zone de validité induite. Cette zone reste grande, si on choisit un petit angle $\alpha = \pi/30$, qui est suffisant pour observer les améliorations. La figure 4.2.6 illustre l'impact de la méthode dans la "mauvaise" zone ($\xi > 0$). On voit que dans cette zone, les valeurs singulières ont été supprimées. Même si, comme dans le cas acoustique, on a des amplitudes qui sont plus élevées, les intégrandes sont devenues plus faciles à intégrer.

Les améliorations sur les intégrandes élastiques après complexification sont identiques à celles observées sur les intégrandes acoustiques. De plus, la zone de validité (4.2.15) des noyaux complexifiés dans le "mauvais" domaine est indépendante du nombre d'onde du mode. Ainsi, les noyaux complexifiés $\mathbf{G}_{\mathbf{T}}$ et $\mathbf{G}_{\mathbf{D}}$ ont une unique zone de validité donnée par (4.2.15).

Pour la reconstruction, nous utiliserons d'abord la formule avec un seul mode (4.1.9), puis la formule générale utilisant

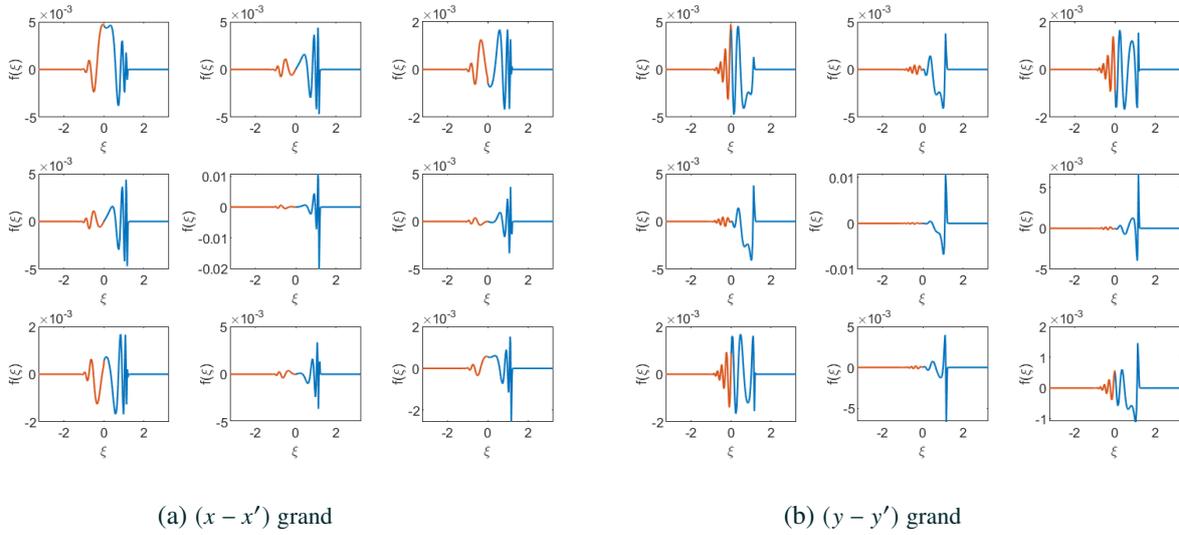


FIGURE 4.2.5 – Représentation des intégrandes du mode S_0 ($m = 1$) après complexification d'un angle $\alpha = \pi/30$ pour (a) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ et (b) $(x - x', y - y') = (2, 20)$ pour les valeurs négatives de ξ ($z = z' = h$).

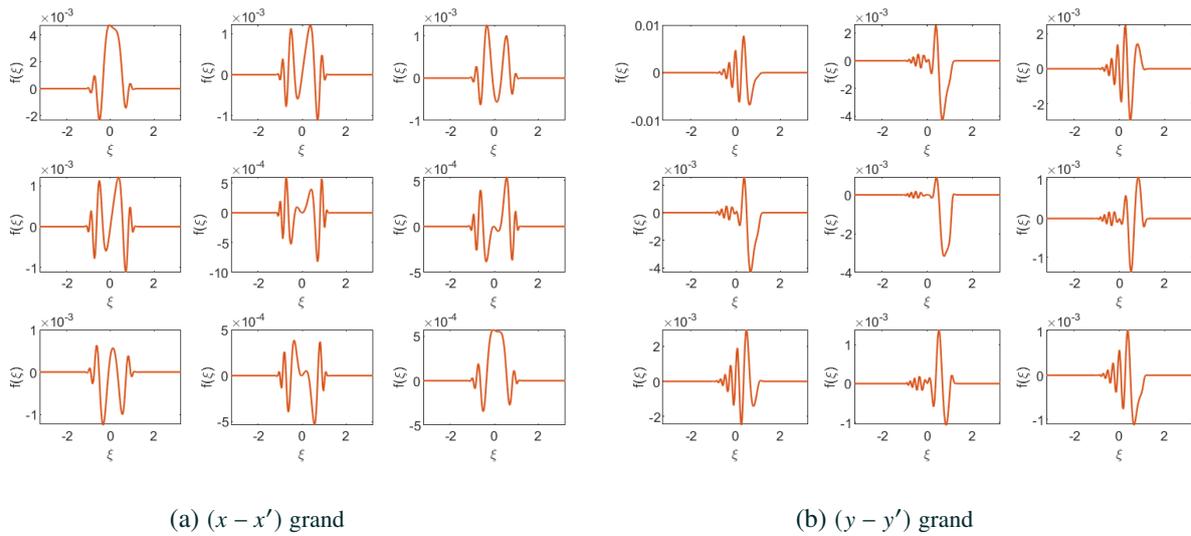


FIGURE 4.2.6 – Représentation des intégrandes du mode S_0 ($m = 1$) après complexification d'un angle $\alpha = \pi/30$ pour (a) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ et (b) $(x - x', y - y') = (2, 20)$ sur toutes les valeurs de ξ ($z = z' = h$).

les trois modes propagatifs et deux modes évanescents (4.1.8). La configuration utilisée pour la validation numérique de la méthode précédente sera conservée. Pour $l_{min} = 10$ mm, l'erreur relative obtenue est de 0.4% (resp. 1.0%) pour la reconstruction utilisant un seul mode (resp. les 5 modes), avec les formes complexifiées des noyaux \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D et $N_f = 120$ intervalles pour la discrétisation en η . A titre de comparaison, sans les noyaux complexifiés, l'erreur relative est de 5,1% (resp. 8,1%) pour la reconstruction utilisant un seul mode (resp. les 5 modes propagatifs), pour la même discrétisation $N_f = 120$. La figure 4.2.7 représente l'évolution de l'erreur relative de la reconstruction en fonction de N_f , selon qu'on utilise un mode ou les 5 modes (après complexification d'un angle $\alpha = \pi/30$). La complexification permet d'avoir une

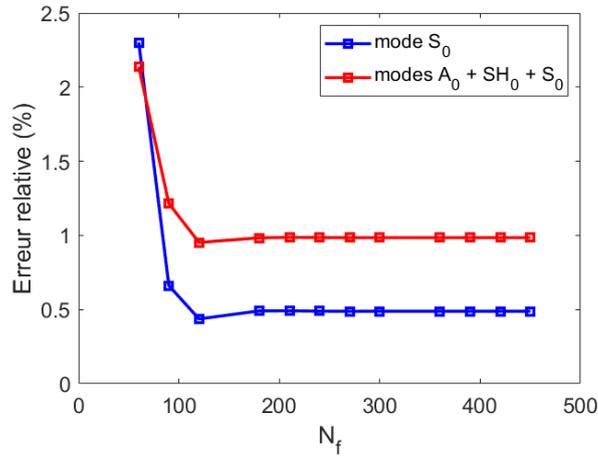


FIGURE 4.2.7 – Erreur relative de la reconstruction dans S avec les noyaux complexifiés en fonction de N_f , avec $l_{min} = 10$ mm, $\alpha = \pi/30$ pour $\xi > 0$ et $\xi < 0$.

convergence rapide et monotone de l'erreur relative en fonction de N_f . Les pics de la figure 4.1.6 ont disparu comme attendu. Et tout comme en acoustique, en utilisant cette méthode, une petite valeur de N_f est suffisante pour obtenir une précision intéressante.

4.3 Premiers éléments d'extension au cas anisotrope

4.3.1 Position du problème

Dans le cas d'une plaque élastique anisotrope, il n'existe plus de formules semi-analytiques des tenseurs de Green, telles que celles données dans le paragraphe 3.3.3. On est donc obligé d'exploiter les formules intégrales générales (3.3.26) et (3.3.27) des noyaux \mathbf{G}_D et \mathbf{G}_T .

Une difficulté majeure est qu'on ne dispose plus, dans le cas anisotrope, d'une numérotation des ξ -modes, telle que pour chaque m , le m -ième ξ -mode soit une fonction régulière, au moins continue, de ξ . On ne peut donc pas, a priori, inverser la somme sur m et l'intégrale en ξ , comme on l'a fait dans le cas isotrope.

Considérons par exemple le cas du matériau orthotrope **Bar** (voir Tableau 3.1). Les courbes de lentéur des modes propagatifs d'une plaque en matériau **Bar** d'épaisseur $2h = 1$ mm à la fréquence de 250 kHz sont représentées sur la figure 4.3.1. Ceci ne nous donne qu'une information très partielle sur les ξ -modes, puisqu'il ne s'agit que de 3 d'entre eux, et de plus dans la zone de ξ où ils sont propagatifs. Mais cette information partielle est plutôt encourageante, puisque l'on retrouve plusieurs aspects qualitatifs du cas isotrope :

1. les courbes de lentéur ne se croisent pas ;
2. une droite horizontale $Y = \xi$ ne croise chacune des trois courbes qu'en deux points au plus ;
3. si l'on désigne par $\beta_m^+(\xi)$ la constante de propagation réelle du m -ième mode, $m = 1, 2, 3$, on a

$$\xi \frac{\partial \beta_m^+}{\partial \xi}(\xi) < 0.$$

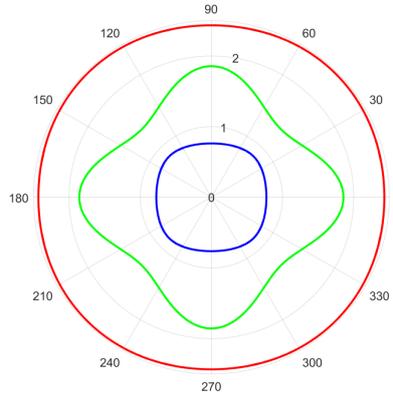


FIGURE 4.3.1 – Courbe de vitesse plaque orthotrope **Bar** d'épaisseur $2h = 1$ mm à la fréquence $f=250$ kHz.

La troisième propriété est intéressante pour la méthode de complexification : elle permet de reprendre l'analyse faite dans le paragraphe 2.4.2.

Remarque 4.3.1. C'est instructif de noter que ces propriétés dépendent de l'orientation de la transformée de Fourier par rapport au matériau. Par exemple, si on tourne le matériau de $\pi/4$, seul le premier item reste vrai.

On va supposer dans la suite qu'il existe trois fonctions $\xi \mapsto \beta_m^+(\xi)$ telles que pour chaque $m = 1, 2, 3$:

- $\xi \mapsto \beta_m^+(\xi)$ est continue sur \mathbb{R} ;
- il existe $k_m^* > 0$ tel que $\beta_m^+(\pm k_m^*) = 0$, et tel que $\beta_m^+(\xi) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|\xi| \leq k_m^*$. On peut remarquer que (du fait de la symétrie du matériau), on a

$$k_m^* = \beta_m^+(0).$$

■ Représentation des intégrandes anisotropes.

On veut maintenant représenter pour différentes positions $(x - x', y - y')$, le premier terme de l'intégrande anisotrope $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^m$, associé à chacun des trois modes propagatifs sur les figures 4.3.4, 4.3.3 et 4.3.2 (En annexe B.1 on donne tous les termes de $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}}^m$). La difficulté est ici d'extraire du calcul SAFE des ξ -modes les modes pertinents que l'on suppose correspondre à nos trois fonctions $\beta_m^+(\xi)$.

On observe que les intégrandes anisotropes ont des comportements assez similaires à ceux des noyaux isotropes, avec suivant la position, plus ou moins d'oscillations et des points de stationnarité. Certaines caractéristiques sont plus spécifiques au matériau anisotrope que nous considérons. Par exemple, l'intégrande pour $\xi > 0$ et $(x - x', y - y') = (20, 20)$ est très peu oscillant, du fait de l'existence de 3 points de stationnarité au lieu d'un seul dans le cas isotrope (correspondant aux 3 points où la normale à la courbe verte est parallèle à la direction $\theta = \pi/4$). On se place à nouveau dans le plan $(z = z' = h)$.

On constate sur les résultats des figures 4.3.3 et 4.3.2, (c), des comportements suspects au voisinage de $|\xi| \geq 5/2$ environ. L'examen des fonctions $\beta_m^+(\xi)$ semble indiquer que ceci est dû à la coalescence de deux modes évanescents. Autrement dit, ce que nous avons évité pour les modes propagatifs par un bon choix d'orientation du squelette HSM semble se produire malgré tout pour les modes évanescents.

Dans les sections suivantes, on donne des éléments d'extension des méthodes de champ lointain et de complexification à ce cas de la plaque anisotrope.

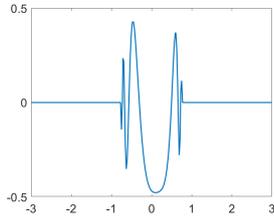
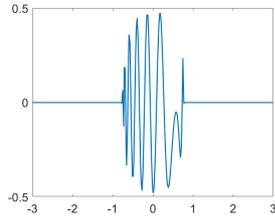
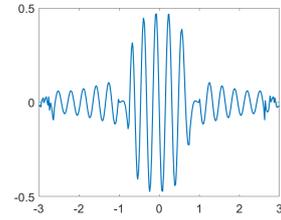
(a) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ (b) $(x - x', y - y') = (20, 20)$ (c) $(x - x', y - y') = (2, 20)$

FIGURE 4.3.2 – Intégrande mode propagatif 1 (en bleu).

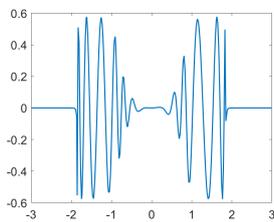
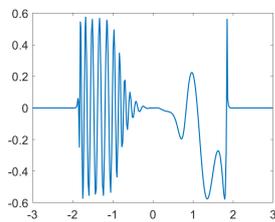
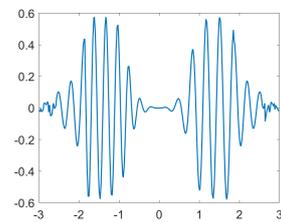
(a) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ (b) $(x - x', y - y') = (20, 20)$ (c) $(x - x', y - y') = (2, 20)$

FIGURE 4.3.3 – Intégrande mode propagatif 2 (en vert).

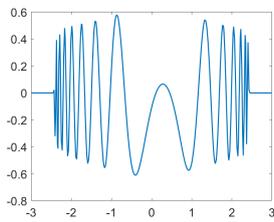
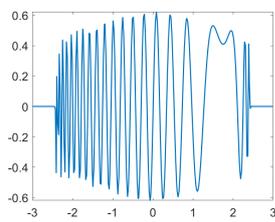
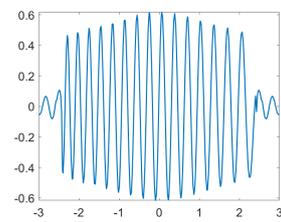
(a) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ (b) $(x - x', y - y') = (20, 20)$ (c) $(x - x', y - y') = (2, 20)$

FIGURE 4.3.4 – Intégrande mode propagatif 3 (en rouge).

4.3.2 Méthode de champ lointain.

Pour établir la forme asymptotique des noyaux \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D , on peut raisonner séparément sur chaque mode $m = 1, 2, 3$. Le calcul pour les modes $m = 1$ et $m = 3$ est proche du cas isotrope. En effet, comme les courbes de lenteur de ces modes sont convexes, il n'y a qu'un point de stationnarité et la forme asymptotique (4.2.7) reste valable (avec $sg_m = 1$ car ces modes sont directs).

La détermination du point stationnaire $\xi_m(\theta)$ se déduit du flux de Poynting P (3.2.7), en sortie du calcul des ξ -modes. Le terme manquant pour la détermination de la forme asymptotique 4.2.7 est la dérivée seconde de la phase $\phi_m''(\theta; \xi_m(\theta))$. On la donne sous la forme d'une proposition, qu'on démontre en annexe, comme suit :

Proposition 4.3.1. *Soit ξ_m et β_m les composantes du vecteur d'onde du m -ième ξ -mode où la phase $\phi_m(\xi) = \beta_m(\xi) \cos \theta + \xi \sin \theta$ stationne. La dérivée seconde de la phase $\phi_m''(\xi_m)$ est donnée par :*

$$\phi_m''(\xi_m) = -\frac{(1 + \tan^2(\gamma - \theta)) \cos \theta}{k_m A_{ma} (\sin \gamma \tan(\gamma - \theta) + \cos \gamma)^3}, \quad (4.3.1)$$

où $k_m = \sqrt{\beta_m^2(\xi_m) + \xi_m^2}$ est le nombre d'onde du mode et $\tan(\gamma) = \xi_m/k_m$. A_{ma} représente le facteur de Maaris qui est défini en fonction de la courbure de la surface de lenteur \mathcal{K} comme suit :

$$A_{ma} = (k_m^2 + (\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2)^{-1/2} \mathcal{K}^{-1}. \quad (4.3.2)$$

Remarque 4.3.2. Pour la plaque isotrope $\theta = \gamma$, la courbure $\mathcal{K} = k_m$, qui correspond au rayon de la courbe de lenteur. Le facteur de Maaris $A_{ma} = 1$, on retrouve la dérivée seconde de la phase des modes isotropes (4.2.6).

Les phénomènes sont plus complexes à décrire pour le mode $m = 2$. En dehors du voisinage de directions spécifiques, correspondant aux points d'inflexion de la courbe de lenteur, les formules précédentes se généralisent à condition de prendre en compte les contributions venant de plusieurs points de stationnarité.

4.3.3 Méthode de complexification.

Pour appliquer une méthode de complexification aux intégrales définissant les tenseurs \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D du milieu anisotrope, il nous faudrait connaître les propriétés d'analyticité des ξ -modes en ξ au voisinage de l'axe réel. Compte tenu des conjectures que nous avons formulées sur les 3 premiers ξ -modes, nous pouvons espérer que cela se passe comme dans le cas isotrope à proximité de la zone propagative. En revanche, le phénomène observé vers $\xi = \pm 5/2$ laisse penser que les fonctions présentent d'autres singularités que celles en $\xi = \pm \beta_m^+(0)$. Bien que n'ayant aucune base théorique pour justifier cela, nous avons représenté ci-dessous ce que deviennent les intégrandes lorsqu'on les évalue sur un chemin obtenu une rotation de l'axe réel d'un angle de $\pi/30$.

On compare une composante de l'intégrande associée au deuxième mode propagatif (courbe verte) du matériau orthotrope (voir Fig 4.3.1) avant et après la complexification d'un angle de $\pi/30$. La figure 4.3.6 permet d'observer les améliorations de l'intégrande, en particulier à proximité des coupures $\xi = \pm \beta_2^+(0)$. Ces intégrandes anisotropes complexifiés seraient donc plus faciles à évaluer avec moins de points de discrétisation.

On peut remarquer que pour $(x - x', y - y') = (20, 20)$, les valeurs de l'intégrande sont restées du même ordre qu'avant complexification, même dans la "mauvaise zone". Ceci peut s'expliquer en reprenant l'étude faite au paragraphe 2.4.2, et

en montrant que du fait de la présence des points d'inflexion dans la courbe de lenteur du mode considéré, la quantité

$$(\beta'_m(\eta)x + y)\eta \sin(\alpha)$$

change plusieurs fois de signe.

Enfin, on voit que pour $(x - x', y - y') = (2, 20)$, les oscillations observées avant complexification au voisinage de $\xi = \pm 5/2$ ont disparu. On note aussi qu'il faudrait augmenter l'intervalle en ξ car l'intégrande n'est pas encore revenu proche de 0 pour $\xi = 3$.

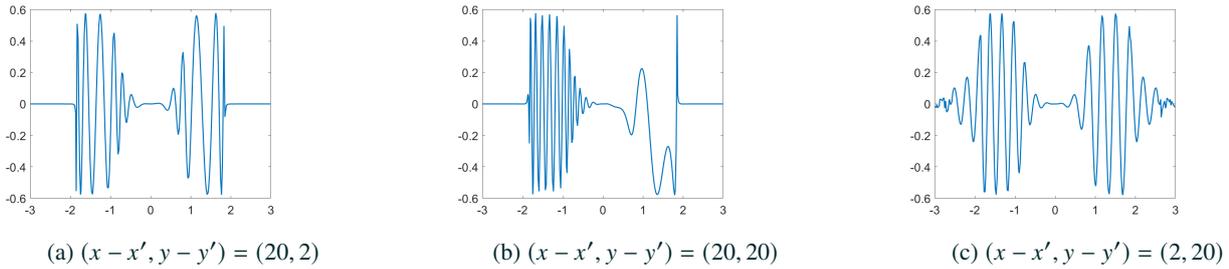


FIGURE 4.3.5 – Composante de l'intégrande du mode 2 avant la complexification.

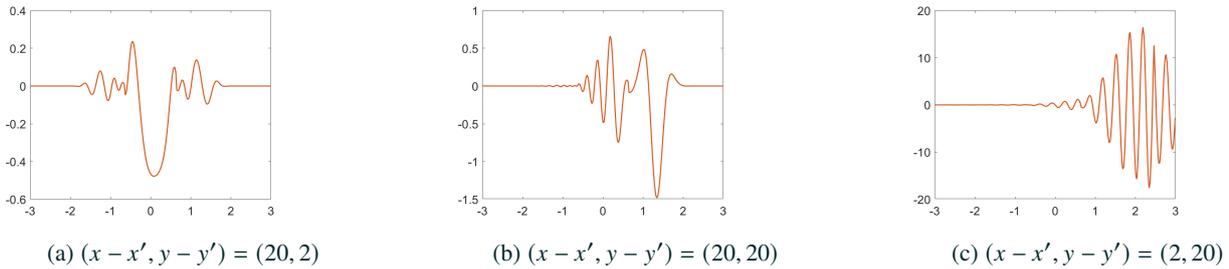


FIGURE 4.3.6 – Composante de l'intégrande mode 2 avec la complexification pour $\alpha = \pi/30$.

4.4 Conclusion

Pour résumer ce chapitre, en se servant de l'étude réalisée dans le cas scalaire isotrope et anisotrope, les méthodes de la phase stationnaire et de la complexification ont été étendues aux fonctions (noyaux) de Green \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D de la plaque isotrope et anisotrope.

Pour la plaque isotrope, la généralisation de ces méthodes, ne pose pas de difficultés particulières. Néanmoins, faut souligner que le choix de pré-calculer les ξ -modes élastiques, pour les utiliser dans la phase stationnaire induit un couplage parasite entre les modes. Car on fait une approximation du point stationnaire des différents ξ -modes propagatifs. Les effets de ce couplage parasite sont d'autant plus importants qu'on se rapproche des coupures. La méthode de la complexification permet de corriger cela en atténuant considérablement les valeurs aux coupures. Comme dans le cas acoustique scalaire, il existe une bonne zone pour la complexification où le choix de l'angle α peut être arbitraire dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, et une mauvaise zone où il faut prendre une petite valeur de complexification de α (zone de validité).

Pour la plaque anisotrope, la méthode de la phase stationnaire a été utilisée pour donner une expression asymptotique des noyaux anisotropes \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D . La longueur d'onde de chaque ξ -mode étant fonction de la direction de phase, la validité des expressions asymptotiques en dépend également, ce qui rend inopérante cette méthode pour des évaluations de noyaux entre des points pas très éloignés. Dans cette configuration, on introduit la méthode de la complexification pour les matériaux anisotropes. On a montré que cette méthode était applicable aux matériaux anisotropes pour des petits angles de complexification α . Cela permet d'améliorer les noyaux et par extension la formule de représentation du champ élastique dans une plaque anisotrope.

Chapitre 5

La méthode HSM dans une plaque élastique

Sommaire

5.1 Introduction	119
5.2 Description de la méthode HSM	120
5.2.1 Méthode HSM avec opérateurs DtN	120
5.2.2 Introduction d'opérateurs DtR et utilisation de maillages conformes.	130
5.3 Résultats numériques	132
5.3.1 Problème de rayonnement dans une plaque isotrope	133
5.3.2 Problème de diffraction dans une plaque isotrope	134
5.3.3 Problème de diffraction dans une plaque orthotrope	136

Dans ce chapitre, nous décrivons plus précisément la méthode HSM (*Half-Space Matching*) ou méthode des demi-espaces raccordés. Nous montrons en particulier comment les opérateurs qui interviennent dans la méthode HSM sont construits à partir des formules de représentation intégrale de demi-plaque établies au chapitre 4. Nous présentons ensuite les premières modifications que nous avons apportées à la mise en oeuvre de la méthode, par rapport à la version initiale développée par Y. Tjandrawidjaja. Dans un second temps, nous exploitons la méthode de complexification exposée dans le chapitre 3 pour l'évaluation des opérateurs HSM. Nous illustrons alors à travers plusieurs cas tests l'intérêt de ces différentes améliorations.

5.1 Introduction

La figure 5.1.1 représente un premier résultat de la HSM pour un problème de diffraction dans une plaque élastique isotrope (**chapitre 3** de [56]). Pour ce résultat, le nombre de points de discrétisation des intégrales de Fourier (identique pour les noyaux \mathbf{G}_T et \mathbf{G}_D) est $N_f = 750$, avec une méthode d'intégration numérique de type Gauss-Legendre d'ordre 3.

On constate sur les résultats présentés à la figure 5.1.1 une légère erreur de compatibilité entre les représentations (on reviendra sur la notion de compatibilité dans la section suivante). Graphiquement cela se traduit par des discontinuités au bord de la boîte éléments finis, qui sont particulièrement visibles sur la composante u_y du champ diffracté. Lors de la

thèse de Y. Tjandrawidjaja, le coût important d'exécution de la méthode n'avait pas permis d'identifier la cause de cette discontinuité.

Des tests systématiques réalisés aux cours de la présente thèse ont permis de corriger une erreur de signe dans les opérateurs DtN qui en était la cause.

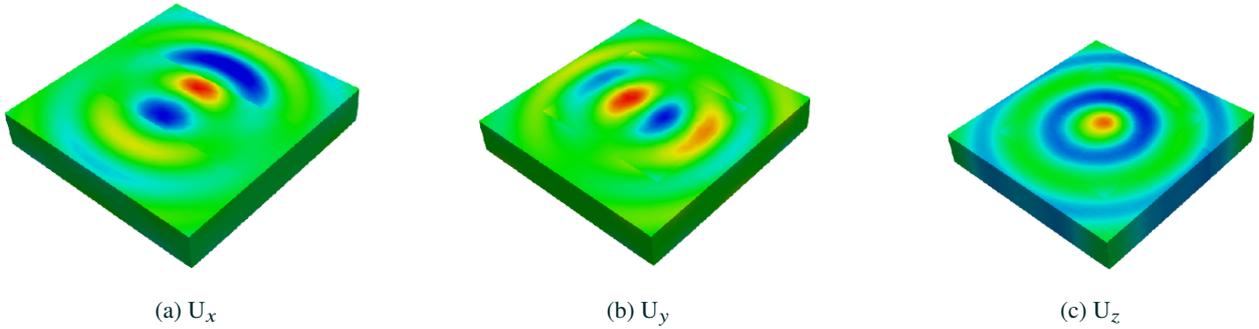


FIGURE 5.1.1 – Les composantes (a) u_x , (b) u_y et u_z du champ de déplacement produit par la diffraction d'une onde par un objet sphérique. (d'après chapitre 3 56)

5.2 Description de la méthode HSM

5.2.1 Méthode HSM avec opérateurs DtN

On considère une plaque élastique de taille infinie dans laquelle on veut résoudre la diffraction d'une onde élastique par un défaut à support borné. Pour fixer les idées, nous considérons le cas où le défaut est constitué par un trou dans la plaque occupant le domaine \mathcal{O} et une inclusion d'un matériau différent de celui de la plaque occupant le domaine \mathcal{O}' . Le déplacement \mathbf{u} du champ diffracté dans la plaque est alors solution d'un système de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{e}_3 = 0 \text{ sur } z = \pm h, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\mathcal{O} \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale unitaire à $\partial\mathcal{O}$ dirigée vers l'intérieur du domaine Ω , \mathbf{e}_3 le vecteur de la base canonique orientée suivant l'axe z , \mathbf{f} est un terme de source volumique à support dans \mathcal{O}' et \mathbf{g} est un terme de source surfacique sur la frontière du trou \mathcal{O} .

■ Configuration et notations.

Pour résoudre le problème (5.2.1) avec la méthode HSM, le domaine Ω est décomposé en 5 domaines élémentaires (voir fig 5.2.1) comme suit :

- quatre (4) demi-plaques Ω^j définies par

$$\Omega^j := \{x^j \geq a\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\} \times \{z^j \in [-h, h]\},$$

dont les frontières Σ_a^j sont définies par

$$\Sigma_a^j := \{x^j = a\} \times \{y^j \in \mathbb{R}\} \times \{z^j \in [-h, h]\}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{5.2.2}$$

- un (1) domaine $\Omega_b := (-b, b)^2 \setminus \mathcal{O}$ dont les frontières Σ_b^j sont définies par

$$\Sigma_b^j := \{x^j = b\} \times \{y^j \in (-b, b)\} \times \{z^j \in [-h, h]\},$$

où $b > a$ et $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

L'exposant (j) utilisé indique une définition par rapport au repère local qui correspond à une rotation d'un angle $\theta^j = j \frac{\pi}{2}$ ($j \in \{0, 1, 2, 3\}$) du repère global. Les coordonnées locales (x^j, y^j, z^j) sont obtenues à partir des coordonnées globales (x, y, z) par le changement de repère suivant :

$$\begin{bmatrix} x^j \\ y^j \\ z^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta^j) & \sin(\theta^j) & 0 \\ -\sin(\theta^j) & \cos(\theta^j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{5.2.3}$$

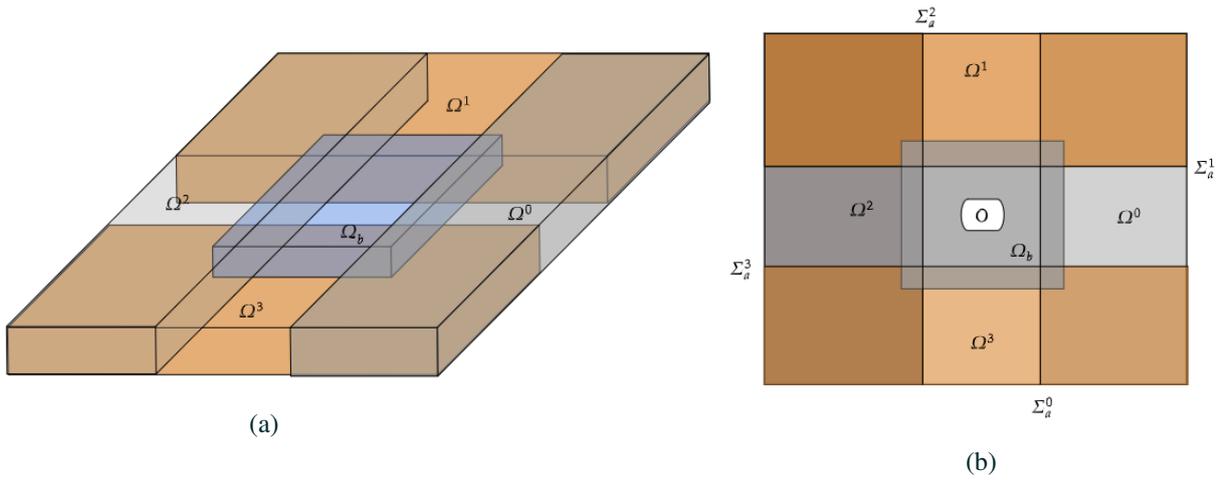


FIGURE 5.2.1 – Représentation des différents domaines dans la méthode HSM (a) vue 3-D et (b) vue de dessus.

■ Définition de sous-problèmes

Le principe de la méthode HSM consiste, comme dans les méthodes de décomposition de domaine, à résoudre des sous-problèmes dans chaque sous-domaine, puis à assurer le raccord entre les différentes solutions.

Soit \mathbf{u}_b (respectivement \mathbf{u}^j) la restriction de la solution \mathbf{u} au domaine Ω_b (respectivement au domaine Ω^j) :

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}|_{\Omega_b} \text{ et } \mathbf{u}^j = \mathbf{u}|_{\Omega^j},$$

et soient \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j les traces du déplacement et de la contrainte normale \mathbf{u}^j sur la frontière Σ_a^j .

Alors, si \mathbf{u} est la solution sortante du problème 5.2.1, \mathbf{u}_b est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{div}(\sigma(\mathbf{u}_b)) - \rho\omega^2\mathbf{u}_b = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_b \\ \sigma(\mathbf{u}_b)\mathbf{e}_3 = 0 \text{ sur } z = \pm h \\ \sigma(\mathbf{u}_b)\nu = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ \sigma(\mathbf{u}_b)n^j = \mathbf{t}^j \text{ sur } \Sigma_b^j, \end{array} \right. \quad (5.2.4)$$

où n^j représente la normale extérieure à la surface Σ_{bb}^j et \mathbf{t}^j est la contrainte normale de \mathbf{u} sur Σ_{bb}^j . De même, \mathbf{u}^j est solution de l'équation sans second membre dans la demi-plaque Ω^j suivante :

$$-\mathbf{div}(\sigma(\mathbf{u}^j)) - \rho\omega^2\mathbf{u}^j = 0 \text{ dans } \Omega^j. \quad (5.2.5)$$

D'après le chapitre 3, le champ élastique \mathbf{u}^j dans Ω^j peut donc se déterminer à l'aide de ses traces de déplacement \mathbf{d}^j et de contrainte normale \mathbf{s}^j sur sa frontière Σ_a^j . Autrement dit, dans la demi-plaque Ω^j , on a

$$\mathbf{u}^j = D^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j), \quad (5.2.6)$$

où

$$D^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_a^j} \mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^j(\mathbf{r}') - \mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz', \quad (5.2.7)$$

est la formule de reconstruction du champ de déplacement (3.3.29).

La méthode HSM consiste à reformuler le problème initial à l'aide des inconnues $(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$ dans les domaine Ω_b et Σ_a^j ($j \in \{0, 1, 2, 3\}$), comme décrit sur la figure 5.2.2.

L'inconnue \mathbf{u}_b sera déterminée à l'aide d'une résolution éléments finis, couplée à des représentations intégrales faisant intervenir les inconnues $(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$.

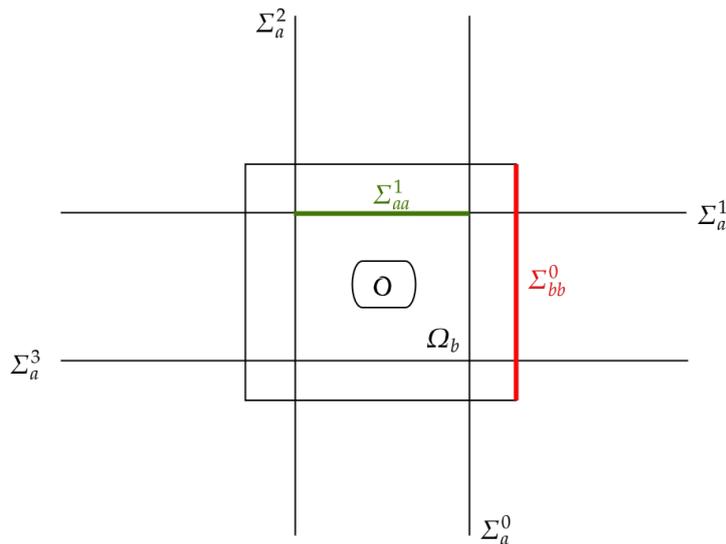


FIGURE 5.2.2 – Squelette de la méthode HSM vu de dessus.

■ Relations de compatibilité

Pour compléter le système d'équations en $(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$, on doit imposer que les champs \mathbf{u}_b et les \mathbf{u}^j coïncident dans les zones où ils coexistent.

En particulier, il faut que les représentations intégrales de \mathbf{u}^j coïncident dans les domaines où les demi-plaques Ω^j se chevauchent. Autrement dit, le champ \mathbf{u} dans un quart de plan $\Omega^j \cap \Omega^{j\pm 1}$ peut être reconstruit aussi bien à partir du couple d'inconnues $(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$ que du couple $(\mathbf{d}^{j\pm 1}, \mathbf{s}^{j\pm 1})$. L'égalité entre ces deux représentations est assurée en imposant le raccord en déplacement et contrainte normale sur $\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j$:

$$\mathbf{d}^{j\pm 1} = D^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j, \quad (5.2.8)$$

et

$$\mathbf{s}^{j\pm 1} = N^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j, \quad (5.2.9)$$

où l'on a posé

$$N^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_a^j} \mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^j(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz. \quad (5.2.10)$$

Les conditions de compatibilité précédentes se réécrivent comme suit :

$$\mathbf{d}^{j\pm 1} = D^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}^{j\pm 1} = N^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j), \quad (5.2.11)$$

où

$$D^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) = D^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)|_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j}$$

et

$$N^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) = N^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)|_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j}.$$

Remarque 5.2.1. Les noms $D^{j,j\pm 1}$ et $N^{j,j\pm 1}$ donnés aux opérateurs D^j et N^j dans les conditions de compatibilité et à l'opérateur de la condition transparente permettent d'identifier les domaines sur lesquels ces opérateurs s'appliquent. C'est un choix de convention pour rendre la formulation globale du système HSM plus compréhensible.

La figure 5.2.3 illustre, à titre indicatif, les relations de compatibilité sur les portions $\Sigma_a^1 \cap \Omega_a^0$ et $\Sigma_a^0 \cap \Omega_a^1$.

On veut également que \mathbf{u}_b coïncide avec \mathbf{u}^j dans $\Omega_b \cap \Omega_a^j$. Pour assurer cela, on commence par imposer que le champ de déplacement \mathbf{u}_b coïncide avec \mathbf{d}^j sur Σ_{aa}^j (voir Fig 5.2.4) :

$$\mathbf{d}^j = \mathbf{u}_b \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j. \quad (5.2.12)$$

Pour que le système soit fermé, il nous faut également une équation sur les contraintes normales \mathbf{s}^j sur Σ_{aa}^j . Pour cela, il existe plusieurs possibilités, on peut imposer

$$\mathbf{d}^j = K^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \quad (5.2.13)$$

ou

$$\mathbf{s}^j = \Gamma^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{aa}^j, \quad (5.2.14)$$

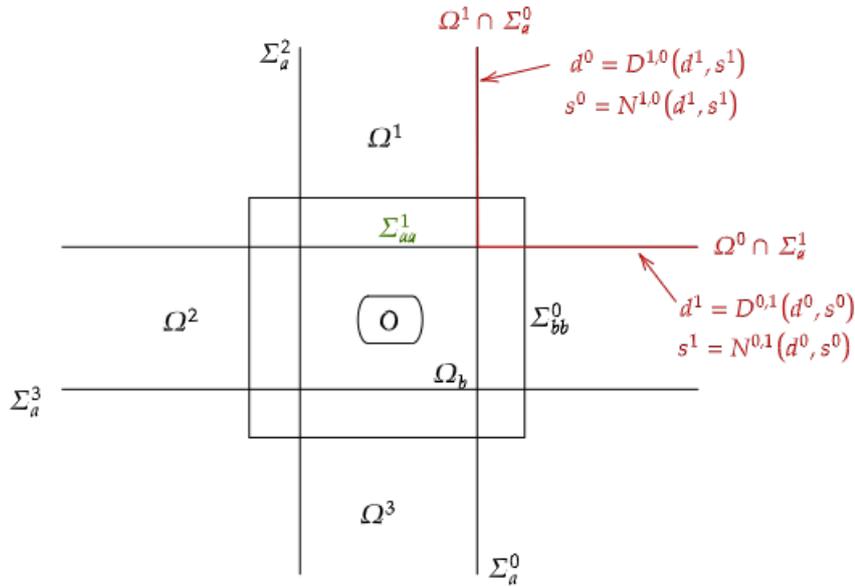


FIGURE 5.2.3 – Illustration des relations de compatibilité sur $\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j$ pour $j = 0$.

avec

$$K^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) = D^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)|_{\Sigma_{aa}^j} \quad \text{et} \quad \Gamma^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) = N^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)|_{\Sigma_{aa}^j}. \quad (5.2.15)$$

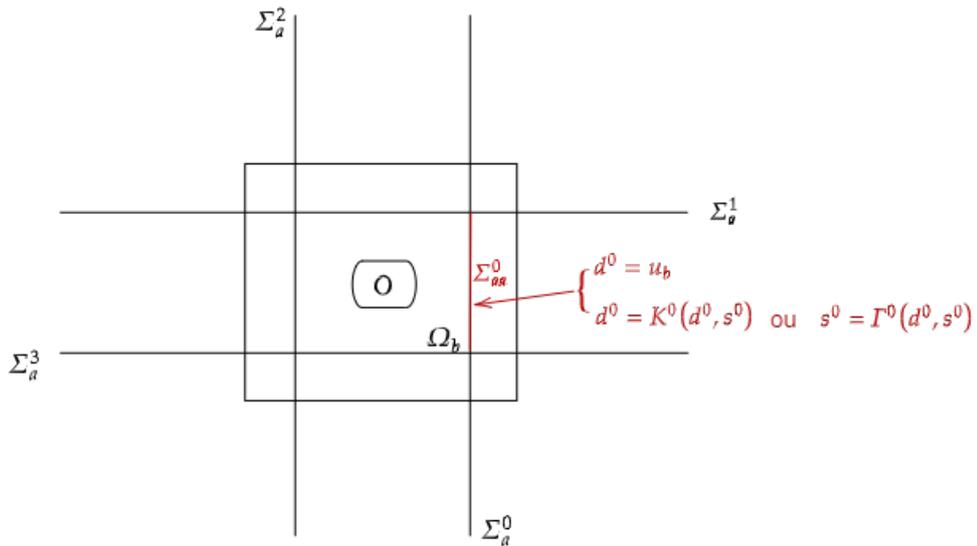


FIGURE 5.2.4 – Illustration des relations de compatibilité sur Σ_{aa}^0 .

■ Condition sur le bord de Ω_b

Les relations de compatibilité établies précédemment permettent de déterminer les inconnues traces $(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$ à condition de connaître l'inconnue éléments finis \mathbf{u}_b . Pour résoudre le système satisfait par \mathbf{u}_b dans Ω_b , il faut déterminer les conditions à imposer sur les bords Σ_{bb}^j , c'est-à-dire préciser ce que vaut \mathbf{t}^j dans le système (5.2.4). Pour cela, on se sert de l'opérateur de contrainte normale N^j . Ainsi en choisissant la contrainte normale \mathbf{t}^j sur le bord Σ_{bb}^j égale à la contrainte $N^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$, on assure une condition d'onde sortante. En résumé on a les conditions suivantes :

$$\sigma(\mathbf{u}_b)n^j = \Lambda^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j), \quad (5.2.16)$$

où

$$\Lambda^j = N^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)|_{\Sigma_{bb}^j}. \quad (5.2.17)$$

Cette dernière condition est appelée condition de type Dirichlet-to-Neumann (DtN), car elle impose une condition de contrainte normale au bord de Ω_b (trace de Neumann) construite à partir de la donnée de Dirichlet.

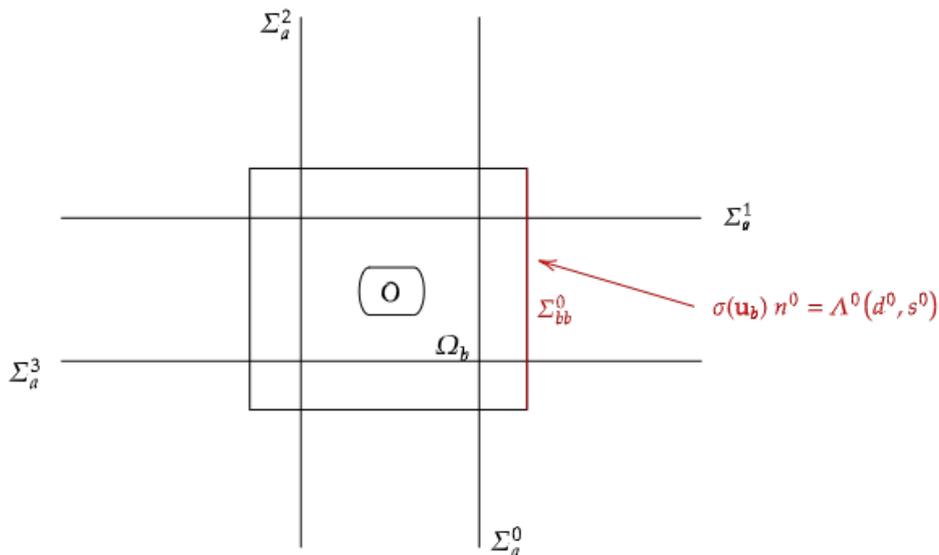


FIGURE 5.2.5 – Condition transparente sur la frontière Σ_{bb}^0 .

■ Formulation globale de la méthode HSM

Pour résumer, on vient de montrer que le système (5.2.1) à une inconnue \mathbf{u} posé dans la plaque infinie Ω est équivalent à un problème multi-inconnues formé par :

- une (1) inconnue éléments finis \mathbf{u}_b posée dans un domaine borné Ω_b , avec une condition transparente de type Dirichlet-to-Neumann (DtN) donnée par la relation (5.2.16),
- neuf (9) inconnues déplacements et contraintes normales $(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)$ sur les quatre bandes Σ_a^j reliées par des relations

de compatibilité.

D'après ce qui précède, le système HSM obtenu s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathbf{div}(\sigma(\mathbf{u}_b)) - \rho\omega^2\mathbf{u}_b = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_b \\ \sigma(\mathbf{u}_b)\mathbf{e}_3 = 0 & \text{pour } z = \pm h \\ \sigma(\mathbf{u}_b)\nu = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\mathcal{O} & \\ \sigma(\mathbf{u}_b)n^j = \Lambda^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) & \text{sur } \Sigma_{bb}^j, \\ \mathbf{d}^j = \mathbf{u}_b & \text{sur } \Sigma_{aa}^j, \\ \mathbf{d}^{j\pm 1} = D^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \\ \mathbf{s}^{j\pm 1} = N^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) & \text{sur } \Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j \end{array} \right. , \quad (5.2.18)$$

avec l'une des deux équations suivantes :

$$\mathbf{d}^j = K^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur } \Sigma_{aa}^j, \quad (5.2.19)$$

ou

$$\mathbf{s}^j = \Gamma^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur } \Sigma_{aa}^j. \quad (5.2.20)$$

On choisit pour la suite la condition (5.2.20) pour compléter le système (5.2.18). Le choix de (5.2.19) aboutit au même résultat.

■ Formulation variationnelle du système HSM

Pour résoudre le système HSM (5.2.18), on utilise une approche variationnelle. Pour cela, on définit les fonctions tests $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{d}}^j$ et $\tilde{\mathbf{s}}^j$ associées respectivement aux inconnues \mathbf{u}_b , \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j . En multipliant (5.2.4) par $\tilde{\mathbf{v}}$, suivi d'une intégration sur le domaine Ω_b , on obtient :

$$\int_{\Omega_b} \sigma(\mathbf{u}_b) : \epsilon(\tilde{\mathbf{v}}) - \rho\omega^2\mathbf{u}_b \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sum_{j=0}^3 \int_{\Sigma_{bb}^j} \sigma(\mathbf{u}_b)n^j \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (5.2.21)$$

D'après la condition DtN (5.2.16), la formulation variationnelle pour l'inconnue \mathbf{u}_b s'écrit :

$$\int_{\Omega_b} \sigma(\mathbf{u}_b) : \epsilon(\tilde{\mathbf{v}}) - \rho\omega^2\mathbf{u}_b \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sum_{j=0}^3 \int_{\Sigma_{bb}^j} \Lambda^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (5.2.22)$$

De même on déduit les formulations variationnelles associées aux inconnues \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j comme suit :

$$\int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{d}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} - D^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} = 0, \quad (5.2.23)$$

$$\int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{s}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} - N^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} = 0, \quad (5.2.24)$$

$$\int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{s}^j \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j - \Gamma^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j = 0, \quad (5.2.25)$$

avec $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Et enfin, on impose la condition essentielle :

$$\mathbf{d}^j = \mathbf{u}_b. \quad (5.2.26)$$

En résumé la formulation variationnelle associée à (5.2.18) est :

Trouver les inconnues \mathbf{u}_b , \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j ($j \in 0, 1, 2, 3$), satisfaisant la condition essentielle (5.2.26), telles que, pour toute fonction test $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{d}}^j$ et $\tilde{\mathbf{s}}^j$ ($j \in 0, 1, 2, 3$), on a :

$$\left| \begin{aligned} \int_{\Omega_b} \sigma(\mathbf{u}_b) : \epsilon(\tilde{\mathbf{v}}) - \rho\omega^2 \mathbf{u}_b \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sum_{j=0}^3 \int_{\Sigma_{bb}^j} \Lambda^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \int_{\partial O} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \\ \int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{d}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} - D^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} &= 0 \\ \int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{s}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} - N^{j,j\pm 1}(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} &= 0 \\ \int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{s}^j \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j - \Gamma^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j &= 0 \end{aligned} \right. \quad (5.2.27)$$

Dans les tableaux qui suivent, on donne la forme explicite des différents opérateurs pour le demi-espace $j = 0$. Dans cette configuration, le repère local correspond au repère global. Pour déterminer les opérateurs associés aux demi-espaces $j \neq 0$, il faut prendre en compte le changement de base tel que décrit en (5.2.3).

Opérateur	$D^{0,1}(\mathbf{d}^0, \mathbf{s}^0)(x, z) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_D^{0,1}((x, z), (y', z')) \mathbf{d}^0(y', z') - \mathbf{G}_T^{0,1}((x, z), (y', z')) \mathbf{s}^0(y', z') dy' dz'$
Noyaux	$\mathbf{G}_D^{0,1}((x, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{u}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{T}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\beta_n^{0,+}(\xi)(x-a)} e^{i\xi(a-y')} d\xi$ $\mathbf{G}_T^{0,1}((x, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{u}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\beta_n^{0,+}(\xi)(x-a)} e^{i\xi(a-y')} d\xi$

Opérateur	$N^{0,1}(\mathbf{d}^0, \mathbf{s}^0)(x, z) = \int_{\Sigma} \mathbf{T}_D^{0,1}((x, z), (y', z')) \mathbf{d}^0(y', z') - \mathbf{T}_T^{0,1}((x, z), (y', z')) \mathbf{s}^0(y', z') dy' dz'$
Noyaux	$\mathbf{T}_D^{0,1}((x, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{T}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{T}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\beta_n^{0,+}(\xi)(x-a)} e^{i\xi(a-y')} d\xi$ $\mathbf{T}_T^{0,1}((x, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathbf{T}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathbf{u}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\beta_n^{0,+}(\xi)(x-a)} e^{i\xi(a-y')} d\xi$

Opérateur	$\Lambda^0(\mathbf{d}^0, \mathbf{s}^0)(y, z) = \int_{\Sigma} \mathbf{T}_{\mathbf{D}}^0((y, z), (y', z')) \mathbf{d}^0(y', z') - \mathbf{T}_{\mathbf{T}}^0((y, z), (y', z')) \mathbf{s}^0(y', z') dy' dz'$
Noyaux	$\mathbf{K}_{\mathbf{N}}^0((y, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathcal{T}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathcal{T}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\beta_n^{0,+}(\xi)(b-a)} e^{i\xi(y-y')} d\xi$ $\mathbf{K}_{\mathbf{D}}^0((y, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathcal{T}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathcal{U}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\beta_n^{0,+}(\xi)(b-a)} e^{i\xi(y-y')} d\xi$

Opérateur	$\Gamma^0(\mathbf{d}^0, \mathbf{s}^0)(x, z) = \int_{\Sigma} \mathbf{T}_{\mathbf{D}}^0((y, z), (y', z')) \mathbf{d}^0(y', z') - \mathbf{T}_{\mathbf{T}}^0((y, z), (y', z')) \mathbf{s}^0(y', z') dy' dz'$
Noyaux	$\mathbf{T}_{\mathbf{N}}^0((y, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathcal{T}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathcal{T}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\xi(y-y')} d\xi$ $\mathbf{T}_{\mathbf{D}}^0((y, z), (y', z')) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{1}{J_n(\xi)} \hat{\mathcal{T}}^{n,+}(\xi, z) \otimes \hat{\mathcal{U}}^{n,-}(-\xi, z') e^{i\xi(y-y')} d\xi$

■ Discrétisation de la formulation variationnelle.

Pour résoudre numériquement le problème (5.2.18), on fait le choix des paramètres comme suit :

1. La bande infinie Σ_a^j est tronquée et remplacée par une bande de longueur finie $\Sigma_{a,L}^j$ définie par :

$$\Sigma_{a,L}^j := \{(x^j = a, y^j, z^j), -L \leq y^j \leq L, -h \leq z^j \leq h\}.$$

2. L'inconnue volumique \mathbf{u}_b est approchée par des fonctions éléments finis de type P2 Lagrange. Les inconnues traces \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j sont approchées par des fonctions éléments finis de type P1 Lagrange. La discrétisation physique utilisée est de 10 éléments pour la plus petite longueur d'onde.
3. Les intégrales de Fourier sont tronquées de sorte que $|\xi| \leq R$, où R est un paramètre choisi suffisamment grand pour inclure tous les ξ pour lesquels il existe des ξ -modes propagatifs. Plus précisément, R est pris égal à 1,2 fois la valeur minimale satisfaisant ce critère.
4. Le nombre de ξ -modes conservé dans les séries modales est fixé indépendamment de ξ , de façon à conserver pour tout ξ tous les modes propagatifs, ainsi que quelques ξ -modes évanescents.

■ Résultats numériques

Comme au chapitre 4, on considère une plaque en aluminium d'épaisseur $2h = 1$ mm. On se sert de la contrainte normale de l'harmonique fondamentale ($m = 0$) du mode de Lamb symétrique S_0 , dont les composantes sont données en

(4.1.2) comme condition \mathbf{g} sur le bord d'un trou cylindrique ∂O . On suppose qu'il n'y a pas de termes de source volumique ($\mathbf{f} = 0$). La fréquence est de 1 MHz, de sorte qu'il existe 3 modes propagatifs pour $\xi = 0$. La troncature physique des bandes Σ_a^j est $L = 12$ mm (2,5 fois la longueur d'onde maximum). Le diamètre du cylindre est $d = 1$ mm. Les paramètres du squelette HSM sont $a = 2$ mm et $b = 2,5$ mm. La troncature de l'intégrale Fourier est $R = 3,27$ rad.mm⁻¹ pour une discrétisation utilisant une quadrature de Gauss-Legendre à trois points avec 100 intervalles ($N_f = 300$). Avec les paramètres de discrétisation physique décrit précédemment, la taille du système linéaire HSM est de 47688. Ce dernier sera inversée avec une méthode de résolution directe.

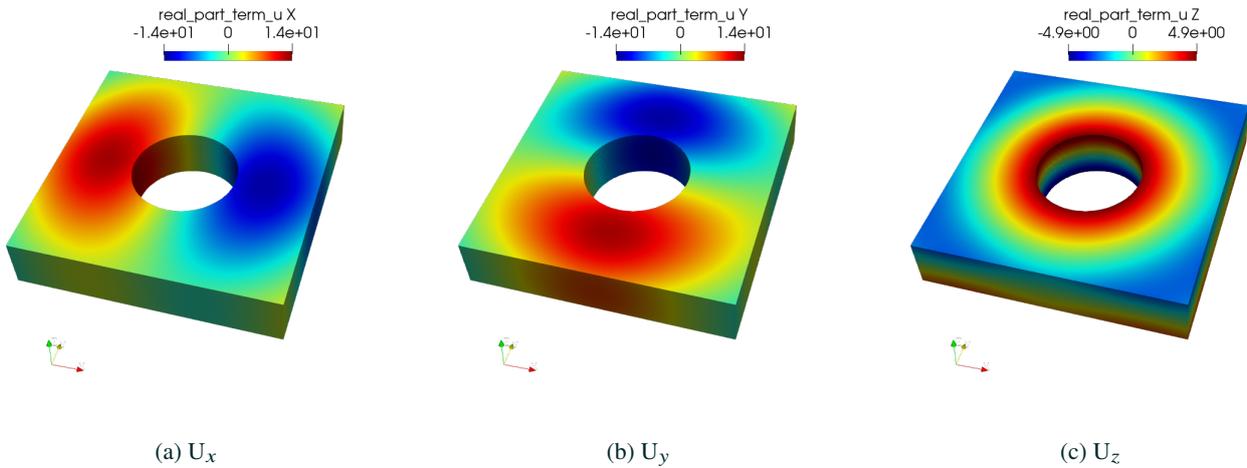


FIGURE 5.2.6 – Les composantes (a) u_x , (b) u_y et u_z du champ de déplacement \mathbf{u}_b , dans Ω_b , pour une discrétisation Fourier de $N_f = 300$.

La figure 5.2.6 représente le champ de déplacement déterminé avec la méthode HSM. Ces résultats peuvent être comparés graphiquement avec la solution de référence donnée à la figure 4.1.1. Les erreurs relatives sont respectivement de 3% et 6% pour l'inconnue \mathbf{u}_b et les traces de déplacement \mathbf{d}^j . Compte tenu du temps d'exécution qui est d'environ 14 heures sur le serveur *mauris* de l'ENSTA, il n'est pas envisageable d'augmenter les paramètres de discrétisation afin d'améliorer la précision. Par ailleurs, réduire le temps de calcul en diminuant N_f n'est pas envisageable : à titre d'exemple, une résolution HSM avec $N_f = 60$ donne une erreur relative de 18% et 24% respectivement pour l'inconnue \mathbf{u}_b et les traces de déplacement \mathbf{d}^j .

Ces résultats constituent la première validation de la méthode HSM pour un problème de type rayonnement dans une plaque élastique. Ils permettent de confirmer la dépendance de la méthode à la discrétisation N_f des intégrales de Fourier dans les opérateurs intégraux, ainsi que le coût d'évaluation élevé de l'exécution initiale avant nos travaux.

Dans l'optique de réduire ce temps d'exécution, tout en étant précis (un des objectifs de la thèse), on propose des améliorations à trois niveaux :

1. Mise en oeuvre algorithmique : utilisation de maillage conforme par la définition des inconnues \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j sur des supports disjoints.
2. Utilisation d'un opérateur Dirichlet-to-Robin (DtR) en lieu et place de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann pour la construction des conditions transparentes sur la frontière de Ω_b .

3. Utilisation de la méthode de la complexification comme solution pour une évaluation rapide et précise des intégrales de Fourier (cf chapitre 4).

Le rôle de l'étape 1 est juste d'améliorer la rapidité de la méthode. Aucun gain de précision n'est attendu à ce niveau, on va donc combiner l'étape 1 et l'étape 2 pour gagner à la fois en précision et en temps de calcul. L'étape 3 sera appliquée sur la version HSM améliorée (étape 1 + étape 2).

5.2.2 Introduction d'opérateurs DtR et utilisation de maillages conformes.

■ Position du problème

Le solveur XLIFE++ utilisé pour mettre en œuvre la méthode HSM est une bibliothèque spécialement conçue pour permettre une expérience utilisateur facilitée. Ceci peut conduire l'utilisateur à faire un choix de programmation d'apparence simple, avec un programme principal facile à lire, mais conduisant à une exécution plus lente que ce qu'aurait permis une écriture moins lisible du programme principal. Dans le cas de la résolution du système HSM, l'opération (5.2.26) peut être réalisée par la mise en place de conditions essentielles. Plus concrètement, en supposant que le système linéaire discrétisé de la méthode s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{d}^j \\ \mathbf{s}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}. \quad (5.2.28)$$

L'imposition de conditions essentielles avec la librairie implique la factorisation de la matrice (algorithme QR), suivie d'une modification du second membre afin de garantir les conditions (5.2.26) entre les différentes inconnues. Cette démarche, qui avait été privilégiée par Y. Tjandrawidjaja présente deux inconvénients :

- Les méthodes de types non-assemblée (ou résolution itérative) en résolution de systèmes linéaires ne peuvent pas être utilisées. En effet elles traitent le problème de manière locale, sans former explicitement la matrice du système global (comme avec les conditions essentielles).
- Lorsque les inconnues sont définies sur des maillages non compatibles, des interpolations dans la construction de ces conditions essentielles sont nécessaires. Ceci engendre des coûts supplémentaires dans la construction de la matrice du système HSM. Dans ce cas on qualifie les maillages utilisés de non-conformes.

Les améliorations qu'on propose dans la méthode consistent en l'élimination des conditions essentielles par une ré-définition des inconnues et l'utilisation de maillages conformes.

La définition de maillages conformes réduit les interpolations dans la résolution. En effet, en définissant les inconnues traces de déplacements \mathbf{d}^j sur des domaines disjoints $\Sigma_a^{j,+} \cup \Sigma_a^{j,-}$ tels que représenté sur la figure 5.2.7. Les conditions essentielles sont supprimées de formulation du système HSM (5.2.27). Toutefois cela implique d'utiliser la trace de l'inconnue élément finis \mathbf{u}_b sur Σ_{aa}^j , ce qui entraîne une modification des opérateurs D^j et N^j . Pour éviter d'alourdir la présentation, nous conservons les notations précédentes pour les opérateurs modifiés. On définit donc D^j le nouvel opérateur pour la reconstruction du déplacement comme suit :

$$D^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_a^{j,+} \cup \Sigma_a^{j,-}} \mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^j(\mathbf{r}') - \mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz' + \int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{G}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{G}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz'. \quad (5.2.29)$$

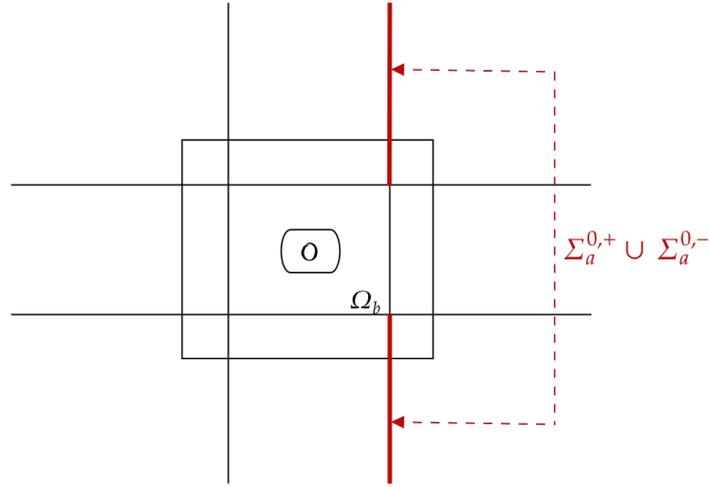


FIGURE 5.2.7 – Définition du domaine disjoint $\Sigma_a^{0,+} \cup \Sigma_a^{0,-}$ où l'inconnue \mathbf{d}^0 est définie.

De même on définit l'opérateur N^j , permettant de reconstruire la contrainte normale comme suit :

$$N^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_a^{j,+} \cup \Sigma_a^{j,-}} \mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^j(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz' + \int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz', \quad (5.2.30)$$

ainsi que le nouvel opérateur Λ^j comme suit :

$$\Lambda^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j)(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_a^{j,+} \cup \Sigma_a^{j,-}} \mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{d}^j(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz' + \int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{T}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_b - \mathbf{T}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{s}^j(\mathbf{r}') dy' dz'. \quad (5.2.31)$$

En se servant de ces nouveaux opérateurs pour construire les relations de compatibilités et les conditions transparentes autour du domaine Ω_b , on obtient sans difficultés la nouvelle formulation variationnelle du système HSM comme suit :

Trouver les inconnues $\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j$ et \mathbf{s}^j ($j \in 0, 1, 2, 3$) telles que, pour toute fonction test $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{d}}^j$ et $\tilde{\mathbf{s}}^j$ ($j \in 0, 1, 2, 3$) respectivement, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_b} \sigma(\mathbf{u}_b) : \epsilon(\tilde{\mathbf{v}}) - \rho \omega^2 \mathbf{u}_b \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sum_{j=0}^3 \int_{\Sigma_{bb}^j} \Lambda^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \int_{\partial O} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \\ \int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{d}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} - D^{j,j\pm 1}(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} = 0 \\ \int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{s}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} - N^{j,j\pm 1}(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} = 0 \\ \int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{s}^j \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j - \Gamma^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j = 0. \end{array} \right. , \quad (5.2.32)$$

La second amélioration consiste à remplacer les conditions transparentes construites avec l'opérateur DtN (5.2.16), par des conditions transparentes avec **des opérateurs Dirichlet-to-Robin (DtR)** :

$$\sigma(\mathbf{u}_b)n^j + i\zeta\mathbf{u}_b = R_\zeta^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{bb}^j, \quad (5.2.33)$$

où

$$R_\zeta^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) = \Lambda^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) + i\zeta D^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j), \quad (5.2.34)$$

avec $\zeta \in \mathbb{R}^+$. En effet, pour certaines valeurs de fréquences, l'utilisation d'opérateurs de type DtN rend le système (5.2.4) mal posé dans le domaine Ω_b , du fait de l'existence de *modes de boîte* dans la couronne $\Omega_b \setminus \Omega_a$. Cela conduit à l'apparition d'artefacts dans la solution. Une solution classique pour éviter ces effets est de remplacer l'opérateur DtN par un opérateur DtR [6].

La nouvelle formulation variationnelle associée à la méthode HSM, avec les opérateurs DtR (pour les conditions transparentes) et l'utilisation des maillages conformes (élimination des conditions essentielles) est la suivante :

Trouver les inconnues $\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j$ et \mathbf{s}^j ($j \in 0, 1, 2, 3$) telles que, pour toute fonction test $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{d}}^j$ et $\tilde{\mathbf{s}}^j$ ($j \in 0, 1, 2, 3$) respectivement, on a :

$$\left| \begin{aligned} \int_{\Omega_b} \sigma(\mathbf{u}_b) : \epsilon(\tilde{\mathbf{v}}) + (i\zeta - \rho\omega^2)\mathbf{u}_b \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sum_{j=0}^3 \int_{\Sigma_{bb}^j} R_\zeta^j(\mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \\ \int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{d}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} - D^{j,j\pm 1}(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{j\pm 1} &= 0 \\ \int_{\Sigma_a^{j\pm 1} \cap \Omega_a^j} \mathbf{s}^{j\pm 1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} - N^{j,j\pm 1}(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^{j\pm 1} &= 0 \\ \int_{\Sigma_{aa}^j} \mathbf{s}^j \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j - \Gamma^j(\mathbf{u}_b, \mathbf{d}^j, \mathbf{s}^j) \cdot \tilde{\mathbf{s}}^j &= 0 \end{aligned} \right. \quad (5.2.35)$$

La figure 5.2.8 représente les composantes du champ de déplacement obtenus avec le système HSM (5.2.35) pour une discrétisation des intégrales de Fourier $N_f = 60$. L'erreur relative avec la nouvelle résolution est respectivement de 6, 24% et 24% pour l'inconnue \mathbf{u}_b et les traces de déplacements \mathbf{d}^j . A titre de rappel, pour la même discrétisation $N_f = 60$, l'erreur relative était de 18% et 24% respectivement pour l'inconnue \mathbf{u}_b et les traces de déplacement \mathbf{d}^j avant les améliorations.

L'introduction de l'opérateur DtR permet d'avoir une précision sur l'inconnue \mathbf{u}_b , mais aucun gain sur les traces de déplacement et de contraintes normales. En effet les inconnues sur les traces \mathbf{d}^j et \mathbf{s}^j sont obtenues à l'aide des opérations de compatibilités, qui dépendent de la discrétisation des intégrales de Fourier N_f . On pourrait augmenter la discrétisation N_f pour être plus précis sur les inconnues traces, au risque d'avoir un temps d'exécution important.

Nous avons montré au chapitre 4 que l'utilisation de la méthode de la complexification permet une évaluation plus précise pour de petites valeurs de discrétisation N_f . On va ainsi l'introduire dans la méthode HSM. Cela revient à remplacer tous les opérateurs de (5.2.35) par leurs équivalents complexifiés. Les résultats sont donnés dans la section suivante.

5.3 Résultats numériques

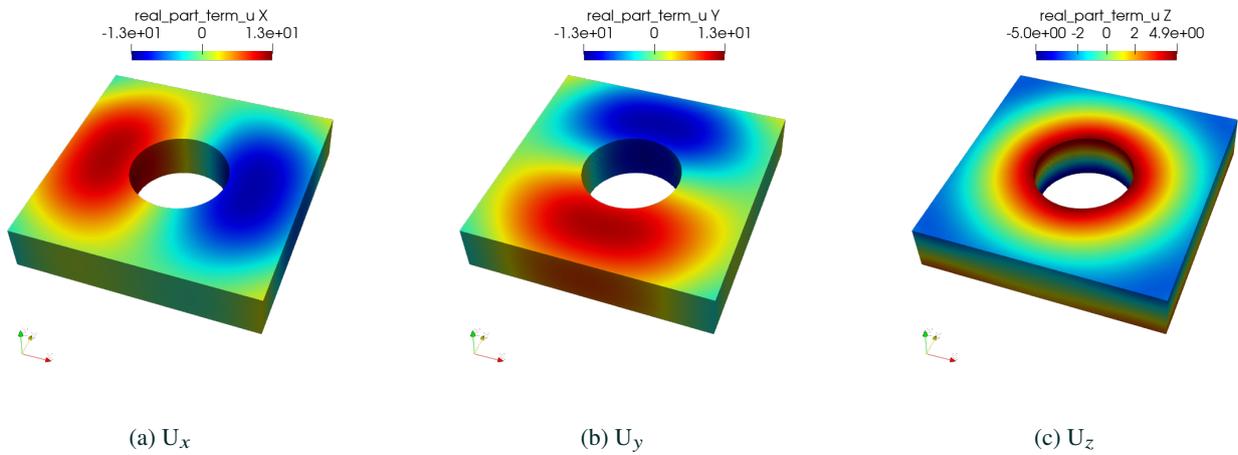


FIGURE 5.2.8 – Les composantes (a) u_x , (b) u_y et (c) u_z du champ de déplacement \mathbf{u}_b dans Ω_b pour une discrétisation Fourier de $N_f = 60$ avec le DtR pour $\zeta = 100$.

5.3.1 Problème de rayonnement dans une plaque isotrope

La figure 5.3.1 représente le résultat de la méthode HSM pour une discrétisation Fourier $N_f = 60$ et un angle de complexification $\alpha = \frac{\pi}{60}$. On rappelle que le chemin de la complexification est celui décrit à la figure 4.2.3a.

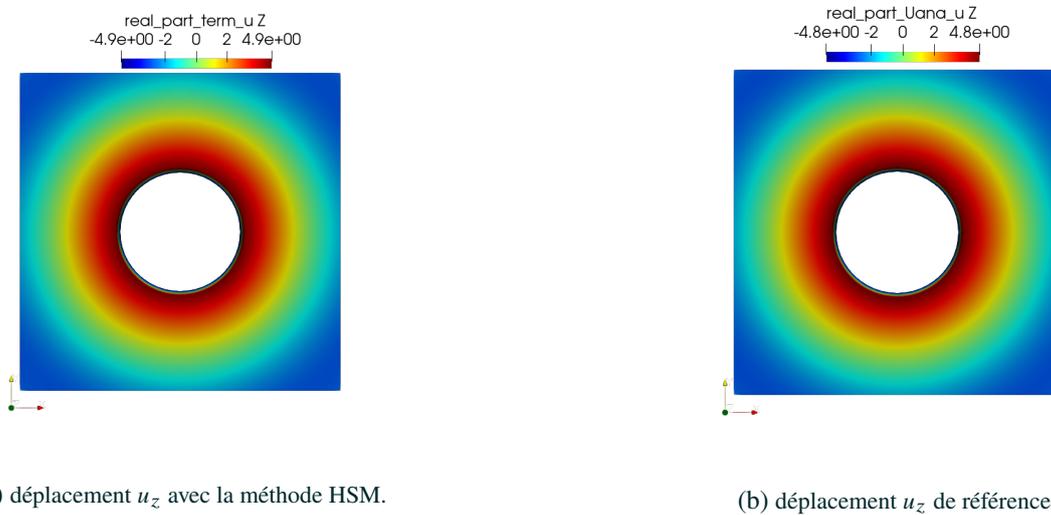


FIGURE 5.3.1 – Représentation de la composante u_z (a) du déplacement calculé avec la méthode HSM pour $N_f = 60$, $\zeta = 100$ et une complexification des opérateurs $\alpha = \pi/60$; (b) déplacement du champ de référence analytique.

Les erreurs relatives obtenues sont maintenant de 0.9% et 3% respectivement pour les inconnues \mathbf{u}_b et les traces de déplacement \mathbf{d}^j , respectivement, avec un temps d'exécution d'environ 1 heure 30. Il est important de souligner qu'avant les améliorations (DtR+complexification) et pour $N_f = 300$, le temps d'exécution était de 14 heures sans assurer une précision comparable (les erreurs relatives étaient de 3% et 6% pour l'inconnue \mathbf{u}_b et les traces de déplacement \mathbf{d}^j).

L'un des intérêts de la méthode HSM est que une fois le système HSM résolu, on peut reconstruire le champ \mathbf{u} dans toute la plaque en utilisant les formules de demi-plaque.

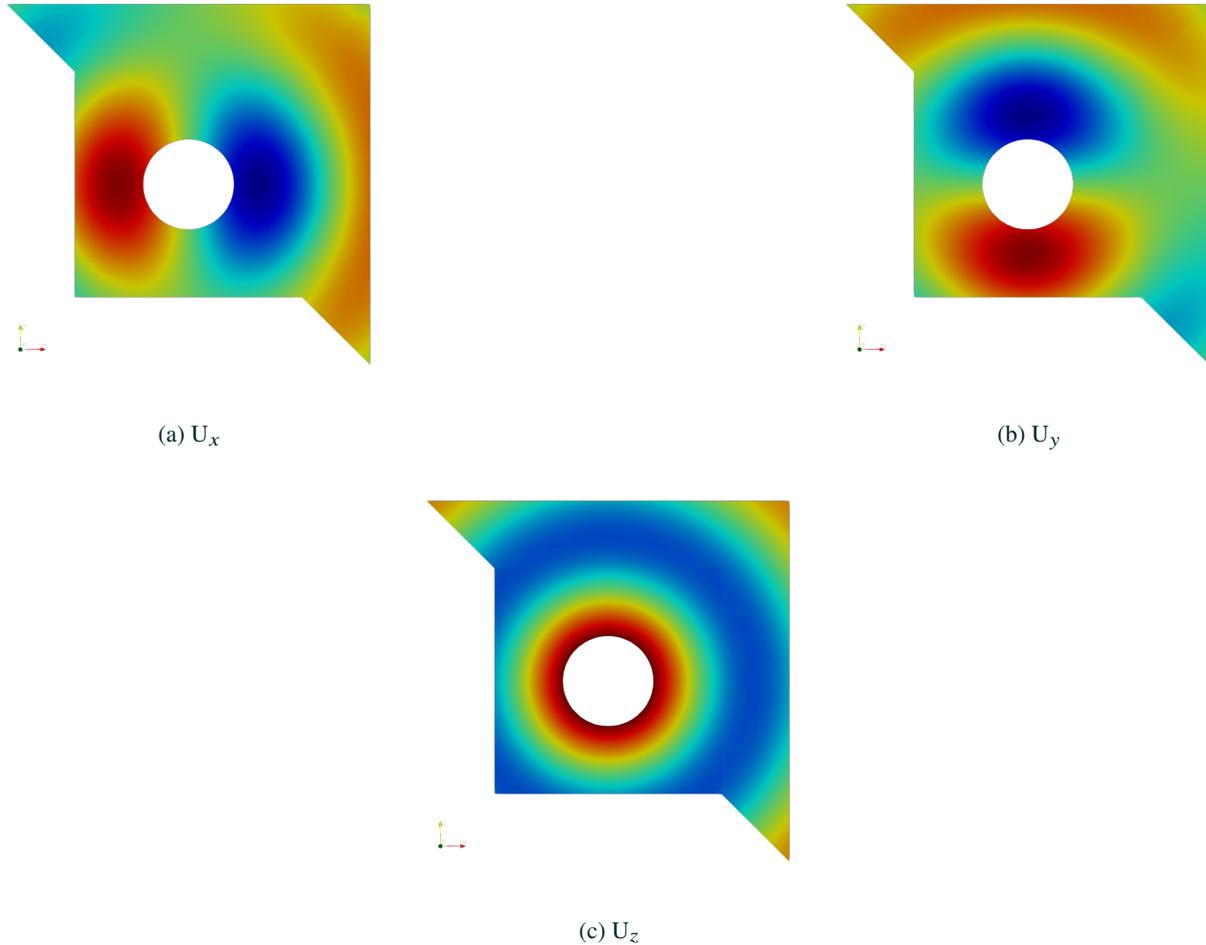


FIGURE 5.3.2 – Les composantes (a) u_x , (b) u_y et (c) u_z du champ de déplacement \mathbf{u} dans Ω_b et $\Omega^1 \cup \Omega^2$ pour une discrétisation Fourier de $N_f = 60$ avec le DtR pour $\zeta = 100$ et un angle de complexification $\alpha = \pi/60$.

La figure 5.3.2 représente la reconstruction du champ de déplacement dans les demi-plaques adjacentes Ω_a^1 et Ω_a^2 . Ces résultats permettent de valider les compatibilités des représentations dans les quarts de plan où les plaques coïncident. Cela permet de montrer que les corrections et améliorations introduites suppriment bien les artefacts dans les représentations de la méthode initiale (voir Fig 5.1.1).

5.3.2 Problème de diffraction dans une plaque isotrope

Dans cette partie, on résout le problème de diffraction d'une onde incidente plane S_0 par le trou cylindrique. La configuration utilisée est la même que celle décrite dans les simulations précédentes.

Soit le champ incident U_{inc} défini comme un ξ -mode propagatif :

$$U_{inc}(x, y, z) = \hat{\mathcal{U}}_m^+(\xi_{inc}, z) e^{i\beta_m^+(\xi_{inc})x + i\xi_{inc}y} = \hat{\mathcal{U}}(\theta, z) e^{i\beta_m(\theta)(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (5.3.1)$$

où l'angle d'incidence θ est tel que $\tan(\theta) = \xi_{inc}/\beta_m^+(\xi_{inc})$. Le problème à résoudre est le suivant :

$$\left| \begin{array}{l} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \rho\omega^2\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{e}_3 = 0 \text{ sur } z = \pm h \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\sigma}(U_{inc})\boldsymbol{\nu} \text{ sur } \partial\mathcal{O} \end{array} \right. . \quad (5.3.2)$$

Le système (5.3.2) est résolu par la méthode HSM optimisée (5.2.35), pour différents angles d'incidence, et la composante u_z de la solution est représentée sur la figure 5.3.3. En raison de la symétrie de la configuration du problème (plaque isotrope et trou cylindrique), la composante u_z de la solution exacte doit être invariante, à une rotation de l'angle d'incidence près, ce qui est bien vérifié visuellement.

Ce résultat est intéressant car contrairement à la configuration du problème à résoudre, le squelette de la méthode HSM introduit des directions privilégiées arbitraires qui pourraient se voir sur la solution calculée, si la formulation n'était pas correcte.

Pour $\theta = 0$ et $\theta = 90^\circ$, compte-tenu des symétries du squelette, la méthode doit fournir par construction les mêmes résultats (à une rotation de 90° près). En revanche, les résultats pour les angles d'incidence $\theta = 40^\circ$ et $\theta = 60^\circ$ confirment bien que le squelette de la méthode n'a pas d'effets sur le résultat. Cela confirme que la formulation HSM permet de construire des conditions transparentes.

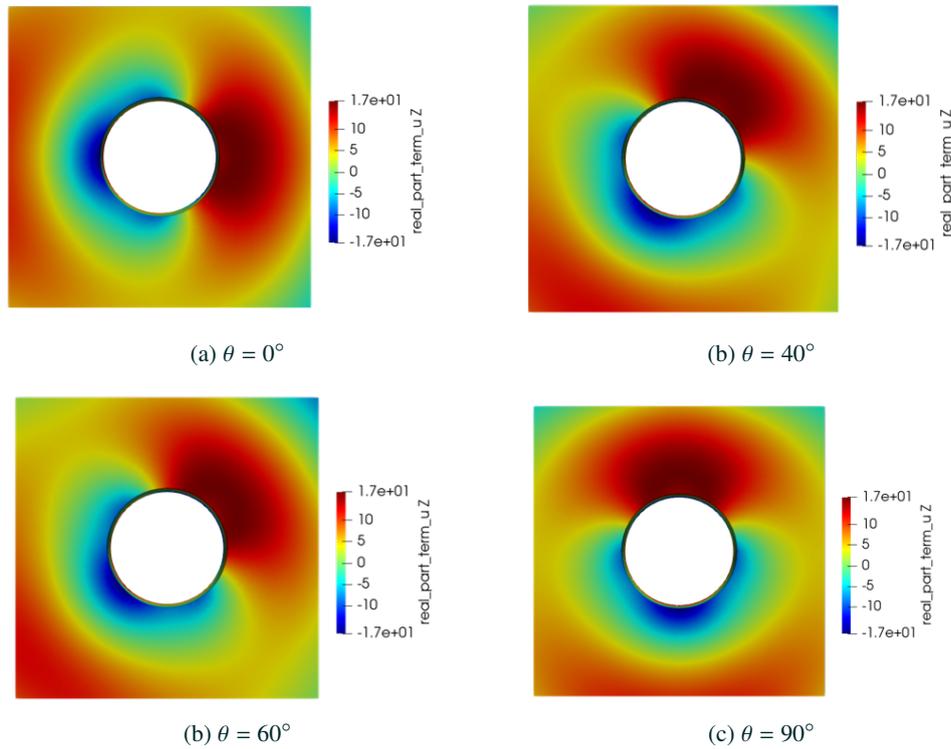


FIGURE 5.3.3 – Composante u_z du champ résultant de la diffraction d’une onde S_0 à travers un trou cylindrique, en fonction des angles d’incidence θ , pour une plaque en aluminium d’une épaisseur de $2h = 1$ mm à une fréquence de 1 MHz.

5.3.3 Problème de diffraction dans une plaque orthotrope

Le but de cette partie est de tester la méthode HSM dans un milieu anisotrope particulier. On se place dans le cas du matériau orthotrope **Bar** à la fréquence $f = 250$ kHz (voir Tab 3.1) étudié à la section 4.3.3 du chapitre 4, où on applique la méthode de complexification aux opérateurs HSM pour un angle de $\alpha = \pi/60$ (en s’appuyant sur les arguments développés dans le paragraphe 4.3.3).

La figure 5.3.4 représente la composante u_z du champ diffracté par un trou cylindrique, pour une onde incidente égale au troisième mode propagatif (voir la courbe en bleu sur la figure 4.3.1). Comme dans le cas précédent, les résultats sont donnés pour différents angles d’incidence. Bien que n’ayant pas suffisamment d’éléments pour pouvoir valider qualitativement ce résultat, on peut faire quelques commentaires. Contrairement au cas isotrope, il est naturel que la solution dépende de l’angle d’incidence, sauf les incidences $\theta = 0$ et $\theta = 90$ qui donnent un résultat identique à une rotation près. Cela est dû au fait que les courbes de lenteur de ce matériau (Fig 4.3.1) ont une symétrie verticale et une symétrie horizontale, tout comme le squelette de la méthode HSM.

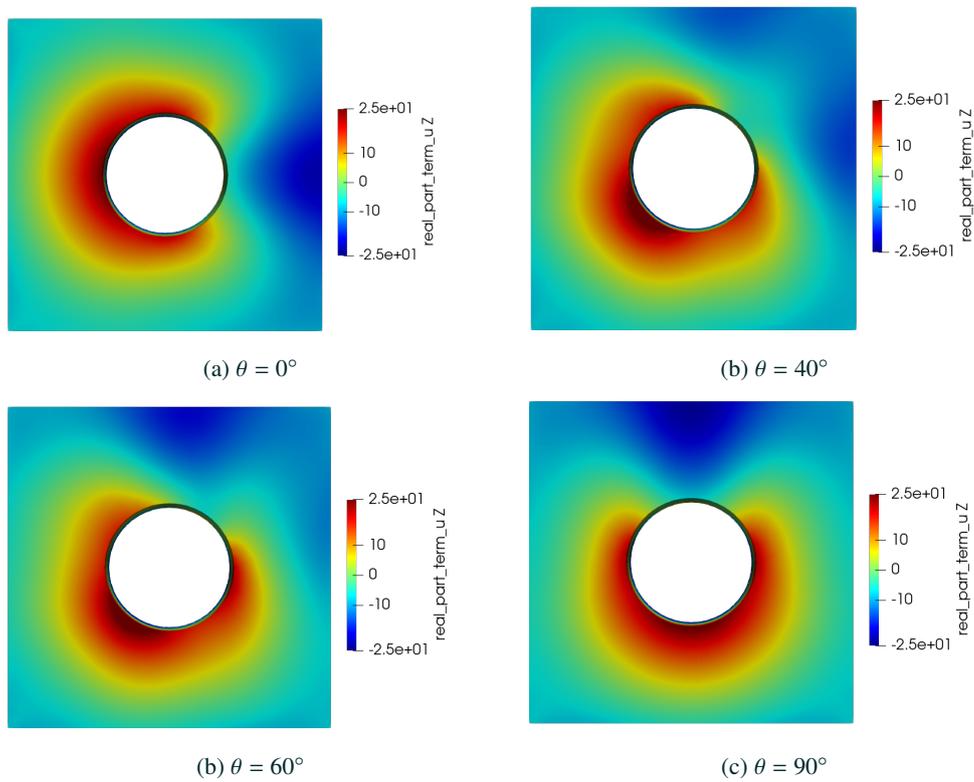


FIGURE 5.3.4 – Composante u_z du champ résultant de la diffraction d'une onde S_0 à travers un trou cylindrique, en fonction des angles d'incidence θ , pour le matériau **Bar** d'une épaisseur de $2h = 1$ mm à une fréquence de $f = 250$ kHz.

Perspectives

Au démarrage de cette thèse, nous disposions d'une première version de la méthode HSM pour les problèmes de diffraction dans une plaque élastique infinie, mise en oeuvre au sein de la plate-forme XLiFE++. Ce code écrit par Y. Tjandrawidjaja n'avait pas pu être validé de façon satisfaisante pendant la thèse de ce dernier, du fait d'un temps d'exécution élevé pour atteindre une précision acceptable (dépassant les 10 heures d'exécution). Les premiers résultats obtenus montraient de légers défauts de raccord entre la solution éléments finis et les représentations analytiques de demi-plaque.

Les travaux de la présente thèse ont permis à la fois de corriger le code initial et d'accélérer son exécution, permettant une validation systématique au moyen d'une solution de référence (dans le cas isotrope).

L'optimisation du code a été mise en oeuvre à deux niveaux. Tout d'abord, au niveau algorithmique, l'utilisation de maillages conformes pour l'inconnue volumique et les inconnues traces a permis d'éviter des inconnues redondantes, et surtout d'éviter le traitement coûteux des conditions essentielles qui en résultait. Cette démarche a permis de réduire le temps nécessaire à la construction des matrices du système HSM. De plus, l'introduction de conditions transparentes de type DtR a permis d'éliminer efficacement les effets parasites associés aux conditions transparentes de type DtN.

Pour le deuxième niveau d'optimisation, l'accent a été mis sur l'évaluation des opérateurs intégraux de la méthode HSM. Ces opérateurs s'expriment sous forme d'une convolution par des noyaux de Green, qui combinent une intégrale de Fourier et une décomposition modale. Il a été identifié que les intégrandes de ces noyaux sont singuliers aux valeurs de coupure et qu'ils deviennent très oscillants pour des points éloignés de quelques longueurs d'ondes. Cette difficulté a tout d'abord été étudiée pour des problèmes scalaires plus simples, conduisant à proposer deux méthodes pour résoudre ces difficultés : la méthode de la phase stationnaire pour les interactions lointaines et la méthode de la complexification du chemin d'intégration pour le cas général.

Ces méthodes ont été étendues et validées dans le cas d'une demi-plaque isotrope, y compris en présence de modes inverses. Des premiers éléments d'extension de ces méthodes ont été donnés pour le cas d'un matériau orthotrope.

Le chapitre 5 donne les illustrations de l'impact de la méthode de la complexification sur la méthode HSM dans le cas de la plaque isotrope. Une validation numérique pour un problème de rayonnement en milieu isotrope a permis de constater un gain de temps d'un facteur d'environ 11 pour une précision intéressante. La robustesse de la méthode HSM a ensuite été évaluée pour le cas d'un problème de diffraction par un trou cylindrique, en considérant diverses directions d'ondes incidentes, tant pour un matériau isotrope que pour un matériau orthotrope.

Nous allons présenter des extensions naturelles de nos travaux et des questions intéressantes qui n'ont pas pu être abordées :

- **Chapitre 2** : Il aurait été intéressant de tester les approches avec d'autres fonctions $\xi \mapsto \beta(\xi)$ explicites, différente du cas elliptique, et qualitativement proches des courbes de lenteur observées dans le cas élastique anisotrope (voir

Fig 4.3.1). En particulier, de telles expressions explicites permettraient de contrôler l'analyticité des intégrandes anisotropes, et ainsi de justifier la méthode de la complexification, y compris pour des angles de déformation plus importants que dans les exemples présentés.

- **Chapitre 3 et Chapitre 4** : On a observé que de nombreuses difficultés viennent de la mauvaise évaluation des noyaux de Green en incidente rasante, c'est-à-dire quand le vecteur reliant le point source et le point image est presque parallèle à la direction de la transformée de Fourier. Une idée simple mais qui n'a pas pu être testée faute de temps consisterait à choisir, suivant l'orientation de ce vecteur, une transformée de Fourier verticale ou horizontale, de façon à n'avoir que des angles d'incidence inférieurs à $\pi/4$.

Une difficulté importante soulevée dans ce chapitre concerne le suivi des ξ -modes dans le cas anisotrope, et au-delà leurs propriétés d'analyticité. L'observation des courbes de lenteurs des modes propagatifs permet déjà d'identifier certaines difficultés qui n'existaient pas dans le cas isotrope. D'une part, les courbes de lenteur peuvent se croiser. Quel est le bon suivi dans ce cas ? D'autre part, les courbes de lenteur peuvent être non convexes. Il est bien connu que ceci génère des effets nouveaux en champ lointain, tels que les caustiques. Pour la HSM, il est intéressant de souligner que l'orientation du squelette de la méthode par rapport aux orientations du matériau semble être importante. Pour mieux comprendre les propriétés d'analyticité qui nous intéressent, il serait probablement intéressant de considérer les modes comme fonctions des deux variables complexes β et ξ , dans l'esprit de [3].

L'absence de formes explicites des courbes de lenteurs, et le problème de suivi des ξ -modes dans le cas anisotrope n'a pas permis de valider la méthode de la complexification dans un cas plus complexe que le matériau orthotrope.

- **Chapitre 5** : La méthode de la HSM a été validée dans le cas isotrope à une fréquence pour laquelle il n'existe pas de modes inverses. Il serait intéressant de valider numériquement l'approche que nous proposons pour la prise en compte de modes inverses. La validation des coefficients de scattering en champ anisotrope pourrait être réalisée de façon expérimentale.

Pour conclure, une résolution itérative de la méthode HSM pourrait être faite pour un temps d'exécution encore plus rapide. En effet, les améliorations réalisées dans ces travaux avaient pour but d'accélérer la construction des de la matrice du système HSM. Le choix d'introduire les conditions transparentes de types DtR et l'utilisation d'une discrétisation Fourier commune à tous les points d'évaluation des termes de la matrice permet d'envisager une approche itérative de la résolution (à l'aide d'un algorithme de type GMRES), basée sur une factorisation des matrices telle que (2.2.11).

Annexe A

Compléments de démonstrations

A.1 Complément de preuve aux formules de champ lointain

On démontre dans cette annexe un résultat utilisé dans le paragraphe 2.3.2. Avec les notations du paragraphe 2.3.2, il s'agit de montrer que les intégrales

$$\mathcal{I}_D^{(2)}(r) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) e^{ir\phi(\xi)} d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_N^{(2)}(r) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) \frac{e^{ir\phi(\xi)}}{\beta(\xi)} d\xi$$

se comportent en r^{-1} à l'infini.

Remarquons d'abord que

$$\frac{d}{d\xi} \left(e^{ir\phi(\xi)} \right) = ir\phi'(\xi) e^{ir\phi(\xi)}.$$

Comme ϕ' ne s'annule jamais sur le support de la fonction $1 - \chi(\xi)$, on peut reformuler $\mathcal{I}_D^{(2)}(r)$ et $\mathcal{I}_N^{(2)}(r)$ comme suit :

$$\mathcal{I}_D^{(2)}(r) = \frac{1}{ir} \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(e^{ir\phi(\xi)} \right) d\xi \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_N^{(2)}(r) = \frac{1}{ir} \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)\beta(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(e^{ir\phi(\xi)} \right) d\xi$$

et il nous suffit de montrer que les deux intégrales restent bornées indépendamment de r . On veut intégrer par parties mais la difficulté vient du fait que la fonction présente une singularité à chaque point de branchement $\xi = -k$ et $\xi = k$. C'est pourquoi on commence par écrire par exemple pour la première intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(e^{ir\phi(\xi)} \right) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|\xi|-k|>\varepsilon} (1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(e^{ir\phi(\xi)} \right) d\xi$$

où ε tend vers 0 par valeurs positives. En intégrant par parties, on montre alors que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(e^{ir\phi(\xi)} \right) d\xi = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|\xi|-k|>\varepsilon} \frac{d}{d\xi} \left((1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)} \right) e^{ir\phi(\xi)} d\xi \quad (\text{A.1.1})$$

où l'on a utilisé que $|\phi'(\xi)|$ tend vers l'infini quand ξ tend vers $-k$ ou vers k , d'où la limite des termes de bord de

l'intégration par parties est nulle :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{ir\phi(\pm k + \varepsilon)}}{\phi'(\pm k + \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{ir\phi(\pm k - \varepsilon)}}{\phi'(\pm k - \varepsilon)} = 0.$$

Enfin, on vérifie qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de ξ telles que

$$\left| \frac{d}{d\xi} \left((1 - \chi(\xi)) \frac{1}{\phi'(\xi)} \right) \right| \leq C_1 + \frac{C_2}{|\beta(\xi)|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En injectant cette majoration dans (A.1.1), on déduit finalement que

$$|\mathcal{I}_D^{(2)}(r)| \leq \frac{1}{r} \left[\int_{-k}^k \left(C_1 + \frac{C_2}{|\beta(\xi)|} \right) d\xi + \int_{|\xi| > k} \left(C_1 + \frac{C_2}{|\beta(\xi)|} \right) e^{-r|\beta(\xi)|} d\xi \right]$$

qui fournit la décroissance attendue.

Une démonstration très similaire fonctionne pour $\mathcal{I}_N^{(2)}(r)$. Tout reste vrai en remplaçant $1 - \chi(\xi)$ par $(1 - \chi(\xi))/\beta(\xi)$.

A.2 La formule de bi-orthogonalité des ξ modes pour $\xi \in \mathbb{C}$.

Le but de cette partie est de démontrer la proposition 3.2.4 pour la bi-orthogonalité des ξ -modes à valeurs complexes. Pour $\xi \in \mathbb{C}$ fixé, on considère un ξ -mode $(\beta_m^+(\xi), \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi))$ et un $-\xi$ -mode $(\beta_n^-(\xi), \hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi))$ donnés explicitement par leurs expressions comme suit :

$$\hat{\mathbf{U}}_m^+(x, \xi, z) = \hat{\mathbf{U}}_m^+(\xi, z) e^{i\beta_m^+(\xi)x + i\xi y} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{U}}_n^-(x, -\xi, z) = \hat{\mathbf{U}}_n^-(\xi, z) e^{i\beta_n^-(\xi)x - i\xi y}$$

et

$$\hat{\mathbf{T}}_m^+(x, \xi, z) = \hat{\mathbf{T}}_m^+(\xi, z) e^{i\beta_m^+(\xi)x + i\xi y} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{T}}_n^-(x, -\xi, z) = \hat{\mathbf{T}}_n^-(\xi, z) e^{i\beta_n^-(\xi)x - i\xi y}.$$

Dans une bande de la plaque ($y = \text{constante}$) telle que représentée sur la figure A.2.1, ces modes satisfont respectivement les équations ci-dessous :

$$\mathbf{div}^\xi (\sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+)) + \rho\omega^2 \hat{\mathbf{U}}_m^+ = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{div}^{-\xi} (\sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-)) + \rho\omega^2 \hat{\mathbf{U}}_n^- = 0 \quad \text{dans } S, \quad (\text{A.2.1})$$

où S est une portion de la bande définie par $S := [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times L$ où $L = [-h, h]$. En multipliant la première équation de

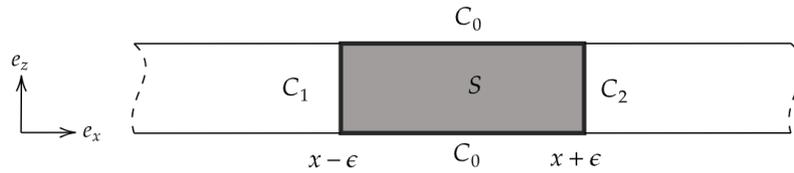


FIGURE A.2.1 – Configuration pour la démonstration.

(A.2.1) par $\hat{\mathbf{U}}_n^-$ et en intégrant sur S , on obtient

$$\int_S \mathbf{div}^\xi (\sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+)) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n - \rho \omega^2 \hat{\mathbf{U}}_m^+ \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^- dS = 0. \quad (\text{A.2.2})$$

On rappelle l'égalité de Green suivante :

$$\int_S \mathbf{div}(\sigma(u))v dS = \int_S \sigma(u) : \epsilon(v) - \int_{\partial S} (\sigma(u)\mathbf{n})v, \quad (\text{A.2.3})$$

où \mathbf{n} représente la normale à la frontière ∂S . L'application de l'égalité de Green (A.2.3) à l'équation (A.2.2) donne :

$$\int_S \sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) : \epsilon^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) dS - \int_{\partial S} (\sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^- dz + \rho \omega^2 \int_S \hat{\mathbf{U}}_m^+ \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^- dS = 0. \quad (\text{A.2.4})$$

En multipliant la deuxième équation de (A.2.1) par $\hat{\mathbf{U}}_m^+$, on obtient d'une manière analogue :

$$\int_S \sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) : \epsilon^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) dS - \int_{\partial S} (\sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+ dz + \rho \omega^2 \int_S \hat{\mathbf{U}}_n^- \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+ dS = 0. \quad (\text{A.2.5})$$

La soustraction (A.2.4)-(A.2.5) donne :

$$\int_S \sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) : \epsilon^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) - \sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) : \epsilon^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) dS - \int_{\partial S} (\sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^- (\sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+ dz = 0. \quad (\text{A.2.6})$$

La symétrie du tenseur des contraintes permet d'annuler le terme de gauche. En effet :

$$\int_S \sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) : \epsilon^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) = \int_S C : \epsilon^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) : \epsilon^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) \quad (\text{A.2.7})$$

$$= \int_S C : \epsilon^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) : \epsilon^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+) \quad (\text{A.2.8})$$

$$= \int_S \sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-) : \epsilon^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+). \quad (\text{A.2.9})$$

On rappelle que $\underline{C} : u : v = C_{ijkl}u_{ij}v_{kl} = C_{klij}v_{kl}u_{ij} = \underline{C} : v : u$.

La relation (A.2.6) devient :

$$\int_{\partial S} (\sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^- - (\sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+ dz = 0. \quad (\text{A.2.10})$$

Sachant que les contraintes normales sur les faces $z = \pm h$ sont nulles, on peut remplacer \mathbf{n} par \mathbf{e}_1 dans l'expression précédente, ce qui donne :

$$\int_{\partial S} (\sigma^\xi (\hat{\mathbf{U}}_m^+)\mathbf{e}_1) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^- - (\sigma^{-\xi} (\hat{\mathbf{U}}_n^-)\mathbf{e}_1) \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+ dz = 0. \quad (\text{A.2.11})$$

D'après la définition de la contrainte normale d'un ξ -mode (3.2.6), on a :

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \hat{\mathbf{T}}_m^+(x, \xi, z) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^-(x, -\xi, z) - \hat{\mathbf{T}}_n^-(x, -\xi, z) \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+(x, \xi, z) dz + \\ \int_{C_2} \hat{\mathbf{T}}_m^+(x, \xi, z) \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^-(x, -\xi, z) - \hat{\mathbf{T}}_n^-(x, -\xi, z) \cdot \hat{\mathbf{U}}_m^+(x, \xi, z) dz = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

En remplaçant $\hat{\mathbf{T}}_m^+(x, \xi, z)$ et $\hat{\mathbf{T}}_n^-(x, -\xi, z)$ par leurs expressions, on montre finalement que :

$$(e^{2i(\beta_m^+(\xi) + \beta_n^-(-\xi))\epsilon} - 1) \int_L \hat{\mathcal{U}}_m^+(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_n^-(-\xi, z) - \hat{\mathcal{U}}_n^-(-\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z) dz = 0. \quad (\text{A.2.13})$$

Si $\beta_m^+(\xi) \neq -\beta_n^-(-\xi)$, on obtient la relation de bi-orthogonalité recherchée suivante :

$$\int_L \hat{\mathcal{U}}_m^+(\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_n^-(-\xi, z) - \hat{\mathcal{U}}_n^-(-\xi, z) \cdot \hat{\mathcal{T}}_m^+(\xi, z) dz = 0. \quad (\text{A.2.14})$$

A.3 Démonstration de la proposition 4.3.1

Le but de cette section est de déterminer la dérivée seconde de la phase $\phi_m''(\xi_m)$ où le ξ -ème mode stationne. Cette dérivée est donnée à la proposition 4.3.1 pour la démonstration de la formule asymptotique dans le cas général.

En utilisant la définition de la phase $\phi_m(\xi) = \beta_m(\xi) \cos \theta + \xi_m \sin \theta$, la dérivée seconde de la phase est :

$$\Phi_m''(\xi) = \cos \theta \partial_{\xi}^2 \beta_m(\xi). \quad (\text{A.3.1})$$

Les composantes du vecteur d'onde ξ_m et β_m peuvent s'écrire en fonction du nombre d'onde $k_m(\gamma)$ et de la direction de phase γ comme suit :

$$\begin{cases} \xi(\gamma) &= k_m(\gamma) \cos \gamma \\ \beta_m(\gamma) &= k_m(\gamma) \sin \gamma \end{cases}, \quad (\text{A.3.2})$$

avec $k_m(\gamma) = \sqrt{\beta_m^2(\gamma) + \xi^2(\gamma)}$ le nombre d'onde du ξ -mode propagatif dans la direction γ .

La dérivée partielle $\frac{\partial \beta_m}{\partial \xi}$ peut se définir comme suit :

$$\frac{\partial \beta_m}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta_m}{\partial \gamma} \times \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \quad (\text{A.3.3})$$

$$= \frac{\partial \beta_m}{\partial \gamma} \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial \gamma} \right)^{-1} \quad (\text{A.3.4})$$

$$= \frac{\cos \gamma \frac{\partial k_m}{\partial \gamma} - k_m \sin \gamma}{\sin \gamma \frac{\partial k_m}{\partial \gamma} + k_m \cos \gamma}. \quad (\text{A.3.5})$$

En dérivant cette expression, après simplification on obtient :

$$\frac{\partial^2 \beta_m}{\partial \xi^2} = \frac{-(k_m^2 + 2(\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2 - k_m \frac{\partial^2 k_m}{\partial \gamma^2})}{(\sin \gamma \frac{\partial k_m}{\partial \gamma} + k_m \cos \gamma)^3}. \quad (\text{A.3.6})$$

En géométrie différentielle le facteur de courbure à une surface est donnée par l'expression :

$$\mathcal{K} = \frac{|k_m^2 + 2(\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2 - k_m \frac{\partial^2 k_m}{\partial \gamma^2}|}{(k_m^2 + (\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2)^{3/2}}. \quad (\text{A.3.7})$$

En introduisons le facteur de Maris [7] suivant :

$$A_{ma} = (k_m^2 + (\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2)^{-1/2} \mathcal{K}^{-1}. \quad (\text{A.3.8})$$

Il est possible d'exprimer l'équation (A.3.6) en fonction du facteur introduit comme suit :

$$\frac{\partial^2 \beta_m}{\partial \xi^2} = -\frac{\mathcal{K}(k_m^2 + (\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2)^{3/2}}{(\sin \gamma \frac{\partial k_m}{\partial \gamma} + k_m \cos \gamma)^3}, \quad (\text{A.3.9})$$

$$\frac{\partial^2 \beta_m}{\partial \xi^2} = -\frac{k_m^2 + (\frac{\partial k_m}{\partial \gamma})^2}{A_{ma}(\sin \gamma \frac{\partial k_m}{\partial \gamma} + k_m \cos \gamma)^3}. \quad (\text{A.3.10})$$

On peut montrer au point stationnaire que

$$\frac{\partial k_m}{\partial \gamma} = k_m \tan(\gamma - \theta). \quad (\text{A.3.11})$$

Ceci permet de déterminer la formule de la dérivée seconde de la phase (A.3.1) comme suit :

$$\phi_m''(\xi_m) = -\frac{(1 + \tan^2(\gamma - \theta)) \cos \theta}{k_m A_{ma} (\sin \gamma \tan(\gamma - \theta) + \cos \gamma)^3}. \quad (\text{A.3.12})$$

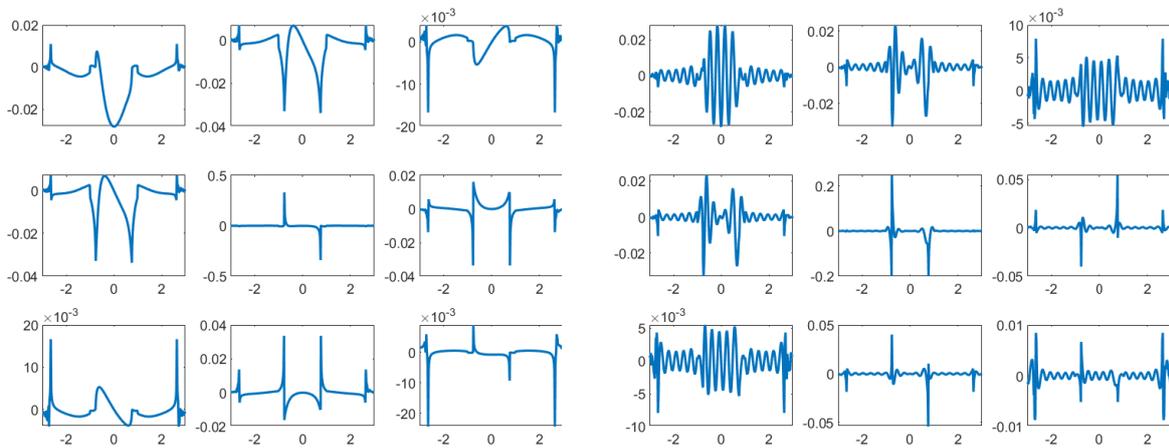
Annexe B

Compléments d'illustrations

B.1 Intégrandes élastiques anisotropes du matériau Bar.

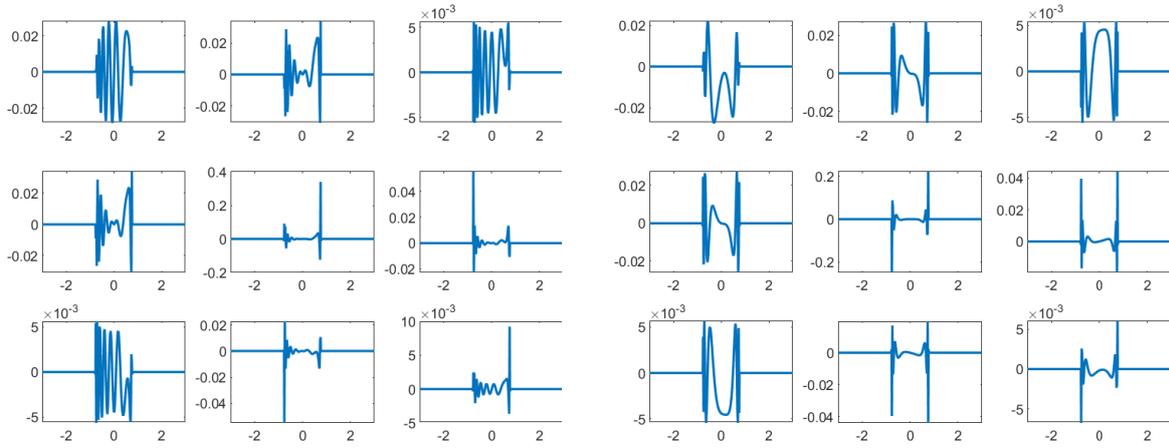
On représente toutes les composantes de l'intégrande $\hat{\mathbf{g}}_T^m$ des modes propagatifs du matériau **Bar**, pour quatre configurations de points $(x - x', y - y')$. La numérotation des modes propagatifs est faite dans l'ordre décroissant des nombres d'onde.

B.1.1 Mode propagatif m=1



(a) $(x - x', y - y') = (2, 2)$

(b) $(x - x', y - y') = (2, 20)$

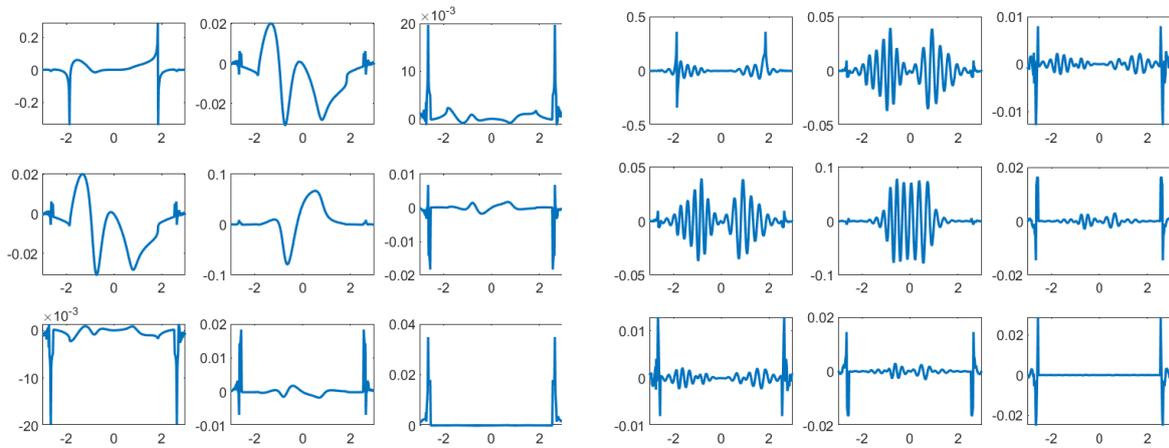


(c) $(x - x', y - y') = (20, 20)$

(d) $(x - x', y - y') = (20, 2)$

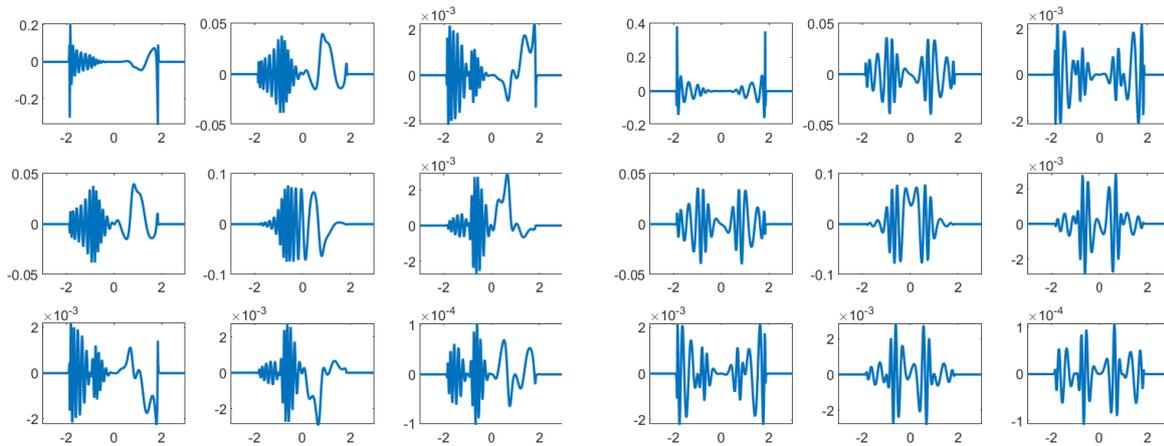
FIGURE B.1.2 – Représentation des intégrandes anisotropes \hat{g}_1^m du mode $m=1$ pour plusieurs configurations $(x - x', y - y')$.

B.1.2 Mode propagatif $m=2$



(a) $(x - x', y - y') = (2, 2)$

(b) $(x - x', y - y') = (2, 20)$

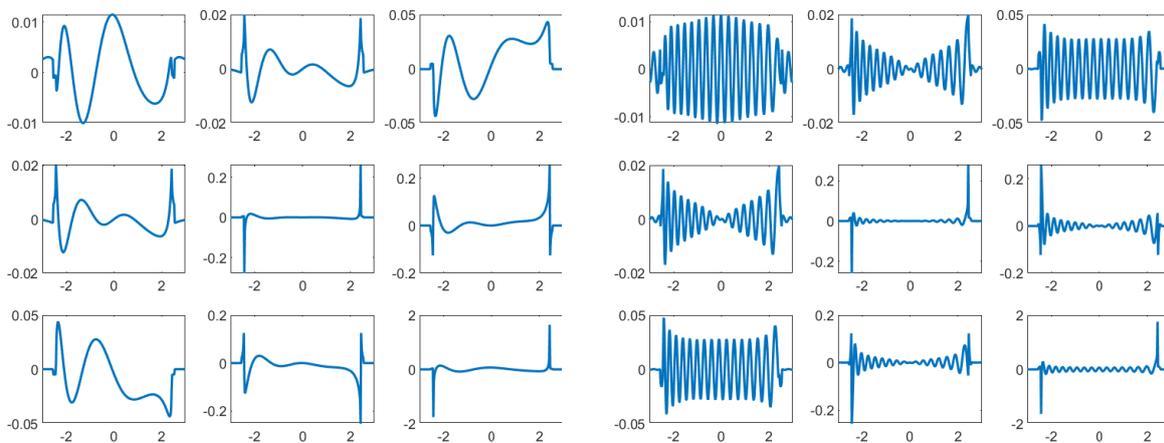


(c) $(x - x', y - y') = (20, 20)$

(d) $(x - x', y - y') = (20, 2)$

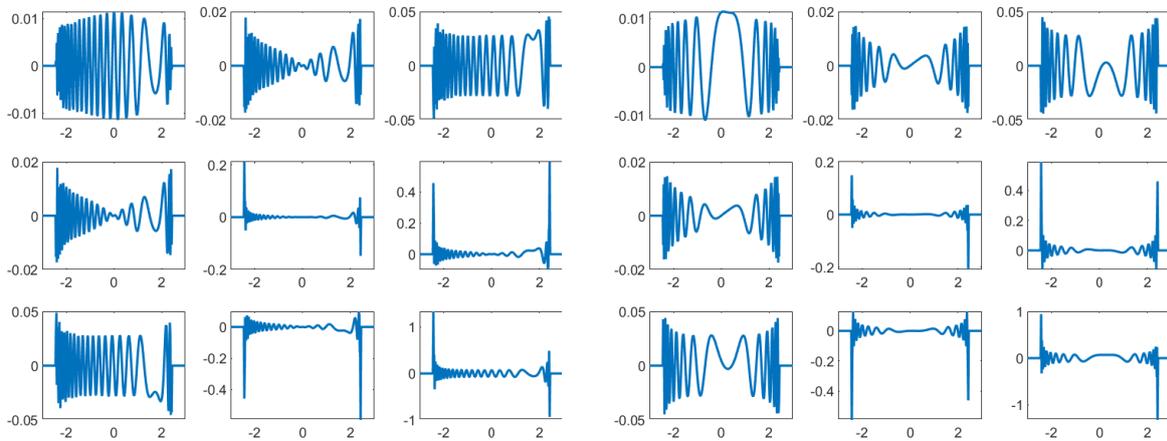
FIGURE B.1.4 – Représentation des intégrandes anisotropes \hat{g}_I^m du mode $m=2$ pour plusieurs configurations $(x - x', y - y')$.

B.1.3 Mode propagatif $m=3$



(a) $(x - x', y - y') = (2, 2)$

(b) $(x - x', y - y') = (2, 20)$

(c) $(x - x', y - y') = (20, 20)$ (d) $(x - x', y - y') = (20, 2)$ FIGURE B.1.6 – Représentation des intégrandes anisotropes \hat{g}_I^m du mode $m=3$ pour plusieurs configurations $(x - x', y - y')$.

Annexe C

Solution de référence dans une plaque isotrope.

C.1 Expression générale de la solution de référence.

Le but de cette annexe est de fournir des solutions de référence dans une plaque homogène isotrope. On utilisera de telles solutions à la fois pour valider les formules de représentation de demi-plaque, en se donnant sur la frontière les traces de déplacement \mathbf{d}^{ref} et de contrainte normale associée \mathbf{s}^{ref} dans la formule (3.3.29), et aussi pour valider la méthode HSM au chapitre 5.

Les solutions de référence couramment employées dans la littérature pour la validation des méthodes de diffraction des ondes dans les plaques élastiques sont basées sur des approximations. Parmi celles-ci, on trouve les approximations de type Kirchhoff et l'approximation de Mindlin, comme le mentionnent Norris et al. [44] et Vemula et al. [62]. Pour les plaques extrêmement minces, ces approximations consistent à décrire le déplacement en un point indépendamment de la variable d'épaisseur z . Cela sous-entend d'une part que les modes de Lamb ne sont pas pris en compte, et d'autre part que ces solutions ne sont valables qu'à très basses fréquences. Comme dans les problèmes qui nous intéressent, la longueur d'onde est de l'ordre de l'épaisseur, ces approximations ne sont pas valides et ne peuvent donc pas être utilisées comme des solutions de référence.

Achenbach et Xu [1] ont montré qu'un mode de Lamb se décompose en un déplacement dans l'épaisseur combiné avec une onde porteuse de façon analytique. L'onde porteuse caractérise l'évolution de l'onde dans la direction de propagation de la plaque. Elle peut être constituée par toute solution réduite de l'équation du mouvement d'une membrane. Le déplacement dans l'épaisseur, quant à lui, se détermine à l'aide de l'analyse usuelle de l'équation de Rayleigh-Lamb dans le domaine fréquentiel. Sur la base de ces développements analytiques, Diligent et al. [27] expriment la solution de la diffraction d'une onde plane symétrique par un trou cylindrique débouchant, comme une combinaison linéaire de modes de Lamb symétriques S_n et des modes SH_n symétriques, les modes anti-symétriques n'intervenant pas dans la solution. En utilisant la notation de l'article [27], on peut distinguer ce qui relèvera des modes de Lamb symétriques et des modes SH symétriques avant d'écrire formellement la décomposition proposée.

Pour ce qui relève des premiers (impliquant les modes de Lamb symétriques), on note :

$$u_r^n = \frac{1}{k_n} V_n(z) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta), \quad (\text{C.1.1})$$

$$u_\theta^n = \frac{1}{k_n} V_n(z) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta), \quad (\text{C.1.2})$$

$$u_z^n = W_n(z) \varphi(r, \theta), \quad (\text{C.1.3})$$

où k_n représente le nombre d'onde du mode symétrique S_n et le potentiel scalaire $\varphi(r, \theta)$ vérifie l'équation de Helmholtz, exprimée en coordonnées cylindriques ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k_n^2 \varphi = 0, \quad (\text{C.1.4})$$

avec k_n qui correspond à une racine de l'équation symétrique (relation de dispersion) de Rayleigh-Lamb :

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2}, \quad (\text{C.1.5})$$

où

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2, \quad p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2. \quad (\text{C.1.6})$$

Les fonctions $V_n(z)$ et $W_n(z)$ permettent de décrire le déplacement dans l'épaisseur du guide. Elles sont définies par :

$$V_n(z) = s_1 \cos(p_n z) + s_2 \cos(q_n z), \quad (\text{C.1.7})$$

$$W_n(z) = s_3 \sin(p_n z) + s_4 \sin(q_n z), \quad (\text{C.1.8})$$

où

$$s_1 = 2 \cos(q_n h), \quad (\text{C.1.9})$$

$$s_2 = -[(k_n^2 - q_n^2)/k_n^2] \cos(p_n h), \quad (\text{C.1.10})$$

$$s_3 = -2(p_n/k_n) \cos(q_n h), \quad (\text{C.1.11})$$

$$s_4 = -[(k_n^2 - q_n^2)/(k_n q_n)] \cos(p_n h). \quad (\text{C.1.12})$$

La grandeur h représente la demi-épaisseur du guide.

Pour ce qui relève des seconds (impliquant des modes SH), on note :

$$u_r^n = \frac{1}{l_n} \cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta), \quad (\text{C.1.13})$$

$$u_\theta^n = -\frac{1}{l_n} \cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \frac{1}{l_n} \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta), \quad (\text{C.1.14})$$

$$u_z^n = 0, \quad (\text{C.1.15})$$

où ψ satisfait également l'équation de Helmholtz exprimée en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + l_n^2 \psi = 0, \quad (\text{C.1.16})$$

avec l_n le nombre d'onde des modes symétriques SH_n qui se détermine analytiquement par :

$$l_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} \right)^2 - \frac{n\pi}{2h}, \quad n = 0, 2, \dots \quad (\text{C.1.17})$$

Remarque C.1.1. Le terme l_n représente le nombre d'onde transverse associé au problème de Helmholtz en acoustique. Il correspond à une valeur propre de l'opérateur Laplacien, dont le vecteur propre associé est la fonction $\cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right)$.

Avec les notations précédentes, un champ rayonnant à l'extérieur d'une ligne de source en $r = 0$, peut être décomposé sous la formes des combinaisons linéaires suivantes :

$$u_r^{\text{ref}} = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn} V_n(z) (H_m^1)'(k_n r) e^{im\theta} + \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} im B_{mn} \cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \frac{H_m^1(l_n r)}{l_n r} e^{im\theta}, \quad (\text{C.1.18})$$

$$u_\theta^{\text{ref}} = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} im A_{mn} V_n(z) \frac{H_m^1(k_n r)}{k_n r} e^{im\theta} - \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{mn} \cos\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) (H_m^1)'(l_n r) e^{im\theta}, \quad (\text{C.1.19})$$

$$u_z^{\text{ref}} = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn} W_n(z) H_m^1(k_n r) e^{im\theta}, \quad (\text{C.1.20})$$

où $l_n = \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2h} \right)^2$ correspond au nombre d'onde du mode SH_n . H_m^1 représente la fonction de Hankel du premier ordre. En effet, avec la convention en $e^{-i\omega t}$, seule la fonction de Hankel du premier ordre permet de satisfaire la condition d'ondes sortantes.

Les coefficients A_{mn} et B_{mn} représentent les amplitudes modales respectivement des modes de Lamb et des modes SH_n pour chacune des harmoniques d'ordre m .

Remarque C.1.2. Dans l'article de O. Diligent et al. [27], la contribution des modes symétriques SH_n (Eq. 31) est divisée par un facteur $\frac{1}{l_n r}$, ce qui est incorrect.

Au paragraphe 4.1.1, la solution de référence choisie a été construite à partir de l'harmonique fondamentale ($m = 0$) du mode S_0 , c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls sauf $A_{00} = 10$. Dans les illustrations qui suivent, on représente les composantes du champ de déplacement (C.1.18), (C.1.19) et (C.1.20) pour deux configurations. Dans la première, tous les coefficients sont nuls sauf ($m = 1, A_{10} = 10$). Dans la seconde, tous les coefficients sont nuls, sauf $B_{00} = 10$.

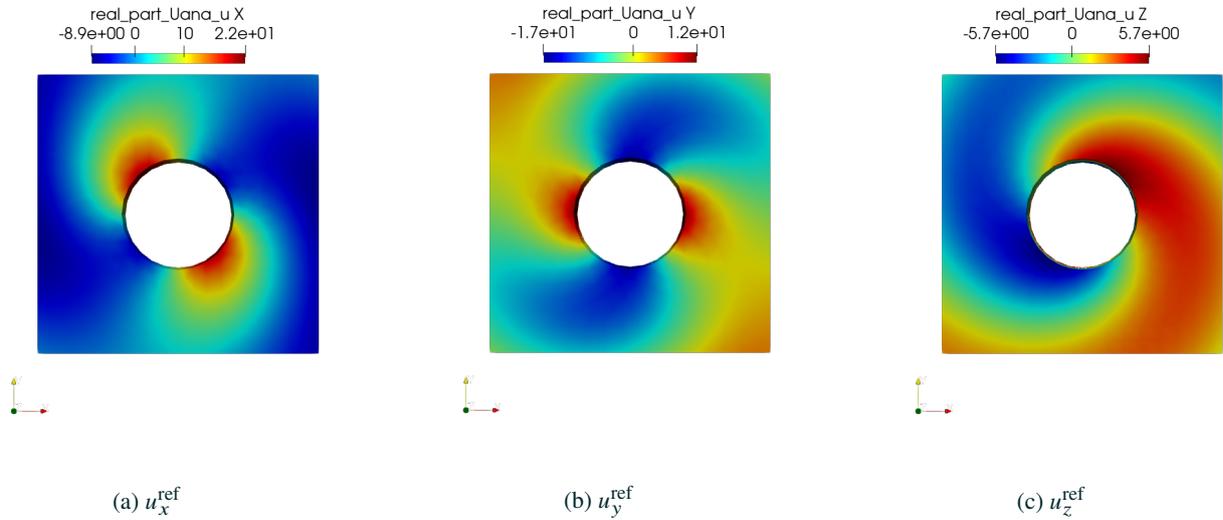


FIGURE C.1.1 – Représentation de la partie réelle des trois composantes de la solution de référence construite à partir du mode S_0 analytique ($m = 1, n = 0, B_{mn} = 0$), à la fréquence $f=1$ MHz pour la plaque d'aluminium d'épaisseur $2h = 1$ mm.

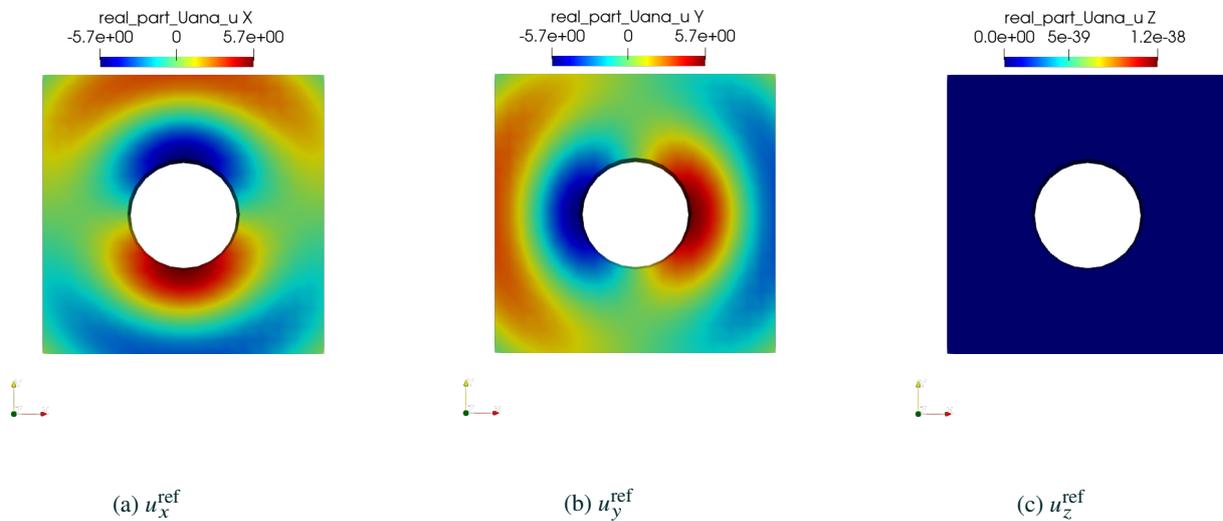


FIGURE C.1.2 – Représentation de la partie réelle des trois composantes de la solution de référence construite à partir du mode SH_0 analytique ($m = 0, n = 0, A_{mn} = 0$), à la fréquence $f=1$ MHz pour la plaque d'aluminium d'épaisseur $2h = 1$ mm.

C.2 Valeur de la formule de représentation mode par mode pour la solution de référence

La solution de référence avec les notations du manuscrit est donnée par (4.1.2), que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{aligned} u_x^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z) (H_0^1)'(\beta_1^+(0)) \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} \frac{x-x_S}{\sqrt{(x-x_S)^2 + y^2}}, \\ u_y^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z) (H_0^1)'(\beta_1^+(0)) \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(x-x_S)^2 + y^2}}, \\ u_z^{\text{ref}}(x, y, z) &= i \hat{\mathcal{U}}_{1,3}^+(0, z) H_0^1(\beta_1^+(0)) \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} \end{aligned}$$

pour $x - x_S \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$ et $-h < z < h$.

On a noté $\hat{\mathcal{U}}_{1,j}^+(0, z)$ la j -ième composante du premier 0-mode (ou ξ -mode pour $\xi = 0$), de constante de propagation $\beta_1^+(0) > 0$.

Pour prouver (4.1.10) et (4.1.9), commençons par calculer, pour $-h < z < h$, $x \geq 0 > x_S$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^{\text{ref}}(x, \xi, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_x^{\text{ref}}(x, y, z) e^{-iy\xi} d\xi, \\ \hat{u}_y^{\text{ref}}(x, \xi, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_y^{\text{ref}}(x, y, z) e^{-iy\xi} d\xi, \\ \hat{u}_z^{\text{ref}}(x, \xi, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_z^{\text{ref}}(x, y, z) e^{-iy\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Or on sait (voir (2.1.45)) que pour $x_S < 0$ et $x \geq 0$:

$$H_0^{(1)} \left(\beta_1^+(0) \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta_1^+(\xi)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} e^{i\xi y} d\xi.$$

En dérivant cette identité successivement par rapport à x et y , on obtient :

$$(H_0^{(1)})' \left(\beta_1^+(0) \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} \right) \frac{\beta_1^+(0)(x-x_S)}{\sqrt{(x-x_S)^2 + y^2}} = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} e^{i\xi y} d\xi$$

et

$$(H_0^{(1)})' \left(\beta_1^+(0) \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} \right) \frac{\beta_1^+(0)y}{\sqrt{(x-x_S)^2 + y^2}} = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi}{\beta_1^+(\xi)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} e^{i\xi y} d\xi.$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{aligned} u_x^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z) \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta_1^+(0)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} e^{i\xi y} d\xi \\ u_y^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,1}^+(0, z) \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi}{\beta_1^+(\xi)\beta_1^+(0)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} e^{i\xi y} d\xi \\ u_z^{\text{ref}}(x, y, z) &= \hat{\mathcal{U}}_{1,3}^+(0, z) \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta_1^+(\xi)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} e^{i\xi y} d\xi. \end{aligned} \tag{C.2.1}$$

On en déduit, par transformée de Fourier inverse, les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{u}_x^{\text{ref}}(x, \xi, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\beta_1^+(0)} \hat{\mathbf{u}}_{1,1}^+(0, z) e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)}, \\ \hat{u}_y^{\text{ref}}(x, \xi, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\beta_1^+(0)} \frac{\xi}{\beta_1^+(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_{1,1}^+(0, z) e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)}, \\ \hat{u}_z^{\text{ref}}(x, \xi, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\beta_1^+(\xi)} \hat{\mathbf{u}}_{1,3}^+(0, z) e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)}.\end{aligned}$$

On peut récrire cela sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x^{\text{ref}} \\ \hat{u}_y^{\text{ref}} \\ \hat{u}_z^{\text{ref}} \end{pmatrix}(x, \xi, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\beta_1^+(\xi)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^+(\xi)}{\beta_1^+(0)} \hat{\mathbf{u}}_{1,1}^+(0, z) \\ \frac{\xi}{\beta_1^+(0)} \hat{\mathbf{u}}_{1,1}^+(0, z) \\ \hat{\mathbf{u}}_{1,3}^+(0, z) \end{pmatrix}.$$

On reconnaît dans la dernière colonne l'application de la matrice $\tilde{\mathcal{R}}_1^+(\xi)$ au vecteur $\hat{\mathbf{u}}_1^+(0)$, d'où d'après (3.2.21) :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x^{\text{ref}} \\ \hat{u}_y^{\text{ref}} \\ \hat{u}_z^{\text{ref}} \end{pmatrix}(x, \xi, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\beta_1^+(\xi)} e^{i\beta_1^+(\xi)(x-x_S)} \hat{\mathbf{u}}_1^+(\xi, z). \quad (\text{C.2.2})$$

Autrement dit, pour chaque valeur de $\xi \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier en y de la solution de référence est exactement proportionnelle au premier ξ -mode $\hat{\mathbf{u}}_1^+(\xi)$. La relation de bi-orthogonalité permet d'en déduire facilement la relation (4.1.9), et donc (4.1.10).

Bibliographie

- [1] J. D. ACHENBACH et Y. XU. “Wave motion in an isotropic elastic layer generated by a time-harmonic point load of arbitrary direction”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 106.1 (1999), p. 83-90.
- [2] J.-L. AKIAN. “A proof of the completeness of Lamb modes”. In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 45.3 (2022), p. 1402-1419.
- [3] R. C. ASSIER, A. V. SHANIN et A. I. KOROLKOV. “A contribution to the mathematical theory of diffraction : a note on double fourier integrals”. In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 76.1 (2022), p. 1-47.
- [4] V. BARONIAN, A. BONNET-BEN DHIA et E. LUNÉVILLE. “Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234.6 (2010). Eighth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (Waves 2007), p. 1945-1952.
- [5] V. BARONIAN. “Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées : Application au Contrôle Non Destructif”. Theses. Ecole Polytechnique X, 2009.
- [6] V. BARONIAN, A.-S. BONNET-BEN DHIA, S. FLISS et A. TONNOIR. “Iterative methods for scattering problems in isotropic or anisotropic elastic waveguides”. In : *Wave Motion* (2016).
- [7] J. BARRAS. “Prédiction modale du rayonnement d’ondes élastiques guidées par une source quelconque dans une structure fine - application au contrôle non destructif”. Thèse de doct. Université Paris-Saclay, 2020.
- [8] J. BARRAS et A. LHÉMERY. “Modal pencil method for the radiation of guided wave fields in composite plates of finite size”. In : *NDT E International* 126 (2022), p. 102598.

-
- [9] J. BARRAS, A. LHÉMERY et A. IMPÉRIALE. “Modal pencil method for the radiation of guided wave fields in finite isotropic plates validated by a transient spectral finite element method”. In : *Ultrasonics* 103 (2020), p. 106078.
- [10] É. BÉCACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA, S. FLISS et A. TONNOIR. “The Half-Space Matching method for elastodynamic scattering problems in unbounded domains”. In : *Journal of Computational Physics* (2023), p. 112320.
- [11] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX et P. JOLY. “Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves.” In : *Journal of Computational Physics* 188.2 (2003), p. 399-433.
- [12] J.-P. BERENGER. “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”. In : *Journal of computational physics* 114.2 (1994), p. 185-200.
- [13] M. BONNET. *Boundary integral equations methods in solids and fluids*. John Wiley and sons, 1999, xx+391 pages.
- [14] A.-S. BONNET-BEN DHIA, C. CHAMBEYRON et G. LEGENDRE. “On the use of perfectly matched layers in the presence of long or backward propagating guided elastic waves”. In : *Wave Motion* 51.2 (2014), p. 266-283.
- [15] A.-S. BONNET-BEN DHIA, S. FLISS et A. TONNOIR. “The halfspace matching method : A new method to solve scattering problems in infinite media”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 338 (2018), p. 44-68.
- [16] A.-S. BONNET-BENDHIA, S. CHANDLER-WILDE et S. FLISS. “On the Half-Space Matching method for real wavenumbers”. In : *SIAM J. Appl. Math.* 82(4) (2022).
- [17] A.-S. BONNET-BENDHIA, S. CHANDLER-WILDE, S. FLISS, C. HAZARD, K.-M. PERFECT et Y. TJANDRAWIDJAJA. “The Complex-Scaled Half-Space Matching Method”. In : *SIAM J. Math. Anal.* 54 (2022), p. 512-557.
- [18] A.-S. BONNET-BENDHIA, S. FLISS et Y. TJANDRAWIDJAJA. “Numerical analysis of the Half-Space Matching method with Robin traces on a convex polygonal scatterer”. In : *Maxwell’s Equations : Analysis et Numerics*, 2019, p. 105-144.

-
- [19] E. BONNETIER, A. NICLAS et L. SEPPECHER. “Well-posedness of wave scattering in perturbed elastic waveguides and plates : application to an inverse problem of shape defect detection”. In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 479.2273 (2023), p. 20220646.
- [20] L. BOURGEOIS et A. RECOQUILLAY. “The Linear Sampling Method for Kirchhoff-Love infinite plates”. In : *Inverse Problems and Imaging* 14.2 (2020), p. 363-384.
- [21] T. BÖHLKE et C. BRÜGGEMANN. “Graphical representation of the generalized Hooke’s law”. In : *Technische Mechanik* 21 (2001).
- [22] S. CHAILLAT et M. BONNET. “A new Fast Multipole formulation for the elastodynamic half-space Green’s tensor”. In : *Journal of Computational Physics* 258 (2014), p. 787-808.
- [23] S. CHANDLER-WILDE et D. HOTHERSALL. “Efficient calculation of the green function for acoustic propagation above a homogeneous impedance plane”. In : *Journal of Sound and Vibration* 180.5 (1995), p. 705-724.
- [24] G. CINCOTTI, F. GORI, M. SANTARSIERO, F. FREZZA, F. FURNÓ et G. SCHETTINI. “Plane wave expansion of cylindrical functions”. In : *Optics Communications* 95.4 (1993), p. 192-198.
- [25] G. COUSIN. “Modélisation modale de la transduction de patch magnétostrictif pour le rayonnement d’ondes élastiques guidées en vue du contrôle de santé intégré de structures fines”. Theses. Université Polytechnique Hauts-de-France, 2021.
- [26] J. DIEUDONNÉ. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1980.
- [27] O. DILIGENT, T. GRAHN, A. BOSTRÖM, P. CAWLEY et M. J. S. LOWE. “The low-frequency reflection and scattering of the S0 Lamb mode from a circular through-thickness hole in a plate : Finite Element, analytical and experimental studies”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 112.6 (2002), p. 2589-2601.
- [28] S. B. DONG et R. B. NELSON. “On Natural Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Plates”. In : *Journal of Applied Mechanics* 39.3 (1972), p. 739-745.
- [29] M. EL-BAKKALI, A. LHÉMERY, V. BARONIAN et S. GRONDEL. “A modal formulation for the propagation of guided waves in straight and curved pipes and the scattering at their junction”. In : *Journal of Physics : Conference Series* 498.1 (2014), p. 012012.

-
- [30] N. GENGEMBRE et A. LHÉMERY. “Pencil method in elastodynamics : application to ultrasonic field computation”. In : *Ultrasonics* 38.1 (2000), p. 495-499.
- [31] A. GIBBS, D. HEWETT et D. HUYBRECHS. “Numerical evaluation of oscillatory integrals via automated steepest descent contour deformation”. In : *Journal of Computational Physics* 501 (2024), p. 112787.
- [32] D. GIVOLI. *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*. ISSN. Elsevier Science, 2013.
- [33] F. HILDEBRAND. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw, 1984.
- [34] D. HUYBRECHS et S. VANDEWALLE. “On the Evaluation of Highly Oscillatory Integrals by Analytic Continuation”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.3 (2006), p. 1026-1048.
- [35] K. JEZZINE et A. LHÉMERY. “Simulation of Guided Wave Inspection Based on the Reciprocity Principle and the Semi-Analytical Finite Element Method”. In : *AIP Conference Proceedings* 894.1 (2007), p. 39-46.
- [36] K. JEZZINE. “Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées”. Thèse de doctorat dirigée par Deschamps, Marc Sciences physiques et de l’ingénieur. Mécanique Bordeaux 1 2006. Thèse de doct. 2006, 1 vol. (174 p.)
- [37] H. KANEKO et Y. S. XU. “Gauss-type quadratures for weakly singular integrals and their application to fredholm integral- equations of the second kind”. In : *Mathematics of Computation* 62.206 (1994).
- [38] N. KIELBASIEWICZ et E. LUNÉVILLE. *XLiFE++ : an eXtended Library of Finite Elements in C++*. 2010. URL : <https://uma.ensta-paris.fr/soft/XLiFE++/doc/index.html>.
- [39] P. KIRRMANN. “On the completeness of Lamb modes”. In : *J Elasticity* 37.1 (1994), p. 39-69.
- [40] P. W. LOVEDAY, C. S. LONG et D. A. RAMATLO. “Ultrasonic guided wave monitoring of an operational rail track”. In : *Structural Health Monitoring* 19.6 (2020), p. 1666-1684.
- [41] L. E. MALVERN. *Constitutive Equations. In Introduction to the mechanics of a continuous medium*. [Nachdr.] Prentice-Hall series in engineering of the physical sciences. OCLC : 255165056. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 2007.

-
- [42] J.-M. MENCİK, M. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL. “Propagation multi-modale dans les systèmes périodiques couplés”. In : *7e colloque national en calcul des structures*. CSMA. Giens, France, 2005.
- [43] M. NETHERCOTE, R. ASSIER et I. ABRAHAMS. “Analytical methods for perfect wedge diffraction : A review”. In : *Wave Motion* 93 (2020), p. 102479.
- [44] A. N. NORRIS et C. VEMULA. “Scattering of flexural waves on thin plates”. In : *Journal of Sound and Vibration* 181.1 (1995), p. 115-125.
- [45] M. O’NEIL, L. GREENGARD et A. PATAKI. “On the efficient representation of the half-space impedance Green’s function for the Helmholtz equation”. In : *Wave Motion* 51.1 (2014), p. 1-13.
- [46] V. PAGNEUX et A. MAUREL. “Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides”. In : *Proc. R. Soc. Lond.* 458 (2002).
- [47] V. PAGNEUX et A. MAUREL. “Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness”. In : *Proc. R. Soc. Lond.* 462 (2006).
- [48] E. PAN. “Three-Dimensional Green’s Functions in an Anisotropic Half-Space With General Boundary Conditions”. In : *Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme - J APPL MECH* 70 (2003).
- [49] D. A. RAMATLO, C. S. LONG, P. W. LOVEDAY et D. N. WILKE. “A modelling framework for simulation of ultrasonic guided wave-based inspection of welded rail tracks”. In : *Ultrasonics* 108 (2020), p. 106215.
- [50] R. C. STEVENSON. “Green’s Function for the Helmholtz Equation of a Scalar Wave in an Anisotropic Halfspace”. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50.1 (1990), p. 199-215.
- [51] M. STÉVENIN, A. LHÉMERY et S. GRONDEL. “A model to predict modal radiation by finite-sized sources in semi-infinite isotropic plates”. In : *Journal of Physics : Conference Series* 797.1 (2017), p. 012005.
- [52] M. STÉVENIN. “Rayonnement des ondes ultrasonores guidées dans une structure mince et finie, métallique ou composite, en vue de son contrôle non-destructif”. Thèse de doct. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2016.
- [53] Z. SU, L. YE et Y. LU. “Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures : A review”. In : *Journal of Sound and Vibration* 295.3 (2006), p. 753-780.

-
- [54] L TAUPIN, A LHÉMERY, V BARONIAN et A. S. BONNET-BENDHIA. “Scattering of obliquely incident guided waves by a stiffener bonded to a plate”. In : *Journal of Physics : Conference Series* 353.1 (2012), p. 012011.
- [55] L. TAUPIN. “Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation.” Thèse de doct. Ecole Polytechnique X, 2011.
- [56] Y. TJANDRAWIDJAJA. “Some contributions to the analysis of the Half-Space Matching Method for scattering problems and extension to 3D elastic plates”. Thèse de doct. Université Paris Saclay (COMUE), 2019.
- [57] A. TONNOIR. “Conditions transparentes pour la diffraction d’ondes en milieu élastique anisotrope”. Theses. ENSTA ParisTech, 2015.
- [58] F. TREYSSÈDE. “Elastic waves in helical waveguides”. In : *Wave Motion* 45.4 (2008), p. 457-470.
- [59] F. TREYSSÈDE. “Mode propagation in curved waveguides and scattering by inhomogeneities : Application to the elastodynamics of helical structures”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.4 (2011), p. 1857-1868.
- [60] F. TREYSSÈDE. “Three-dimensional modeling of elastic guided waves excited by arbitrary sources in viscoelastic multilayered plates”. In : *Wave Motion* 52 (2015), p. 33-53.
- [61] A. VELICHKO et P. D. WILCOX. “Modeling the excitation of guided waves in generally anisotropic multilayered media”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 121.1 (2007), p. 60-69.
- [62] C. VEMULA et A. N. NORRIS. “Flexural wave propagation and scattering on thin plates using Mindlin theory”. In : *Wave Motion* 26.1 (1997), p. 1-12.
- [63] E. VIOLA, A. MARZANI et I. BARTOLI. “Numerical Evaluation of Semi-analytical Finite Element (SAFE) Method for Plates, Rods and Hollow Cylinders”. In : *Mechanical Vibration : Where do we Stand ?* Sous la dir. d’I. ELISHAKOFF. International Centre for Mechanical Sciences. Vienna : Springer, 2007, p. 123-138.
- [64] C.-Y. WANG, A. SAEZ et J. D. ACHENBACH. “3-D Elastodynamic Green’s Functions for BEM Applications to Anisotropic Solids”. In : *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics*. Sous la dir. de D. F. PARKER et A. H. ENGLAND. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht : Springer Netherlands, 1995, p. 307-320.

-
- [65] L. WANG et F. G. YUAN. “Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites : Modeling and experiments”. In : *Composites Science and Technology* 67.7 (2007), p. 1370-1384.