



**HAL**  
open science

# Méthode de décomposition de domaine mixte pour la simulation magnétostatique de machines électriques

Aurélia Ruda

► **To cite this version:**

Aurélia Ruda. Méthode de décomposition de domaine mixte pour la simulation magnétostatique de machines électriques. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. ⟨NNT : 2023UPAST205⟩. ⟨tel-04576886⟩

**HAL Id: tel-04576886**

**<https://theses.hal.science/tel-04576886v1>**

Submitted on 15 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Méthode de Décomposition de Domaine Mixte pour la Simulation Magnétostatique de Machines Électriques

*Domain decomposition method for  
magnetostatic simulation of  
electrical machines*

**Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay**

École doctorale n°579, Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et  
géosciences (SMEMAG)

Spécialité de doctorat : Mécanique des solides

Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes

Référent : ENS Paris-Saclay

Thèse préparée dans les unités de recherche  
LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay  
(Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS) et  
Laboratoire de Génie Électrique et Électronique de Paris  
(Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS),  
sous la direction de **François LOUF**, Professeur des Universités,  
le co-encadrement de **Pierre-Alain BOUCARD**, Professeur des Universités,  
et le co-encadrement de **Xavier MININGER**, Professeur des Universités.

**Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 4 décembre 2023, par**

**Aurélia RUDA**

## Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

<b>Jean-Charles PASSIEUX</b> Professeur des Universités, INSA Toulouse	Président
<b>Olivier CHADEBEC</b> Directeur de Recherche CNRS	Rapporteur
<b>Pierre GOSSELET</b> Directeur de Recherche CNRS, Université de Lille	Rapporteur
<b>Nicole SPILLANE</b> Chargée de Recherche CNRS, École Polytechnique	Examinatrice
<b>Ruth SABARIEGO</b> Professeure, KU Leuven	Examinatrice



**Titre :** Méthode de décomposition de domaine mixte pour la simulation magnétostatique de machines électriques

**Mots clés :** Décomposition de domaine, Magnétostatique, Éléments de Whitney, Parallèle

**Résumé :** L'industrie du transport terrestre se dirige depuis plusieurs années vers une électrification forte des chaînes de propulsion. Cette tendance impose la recherche de structures de machines électriques innovantes et leur optimisation. Ainsi, cette démarche de virtual testing reste très gourmande car le fonctionnement complexe de ces machines ne peut être modélisé qu'à partir de coûteuses simulations éléments finis 3D, incluant la prise en compte des mouvements de la partie rotorique. Cette contrainte de temps de calcul est incompatible avec la mise en œuvre d'une démarche d'optimisation de ces nouvelles topologies de machines puisque le processus d'optimisation peut conduire à de nombreuses évaluations du modèle numérique. C'est pourquoi de telles

méthodes d'optimisation ne sont actuellement mises en œuvre que pour des modèles relativement simples dans le milieu industriel. L'objectif de la thèse est alors de proposer une stratégie de calcul innovante permettant de réduire fortement le coût de ces simulations numériques. Pour cela, une technique de décomposition de domaine basée sur une écriture mixte des équations aux interfaces et adaptée aux particularités géométriques des machines tournantes sera développée. Cette stratégie s'appuie sur une discrétisation par les éléments de Whitney pour traiter les problèmes en magnétostatique 3D, une approche multi-échelle tirant partie des ordinateurs parallèles, ainsi qu'une gestion adaptée du mouvement rotorique.

**Title :** Domain decomposition method for magnetostatic simulation of electrical machines

**Keywords :** Domain decomposition, Magnetostatic, Whitney elements, Parallel

**Abstract :** The transport industry has been moving towards a strong electrification of propulsion chains for several years. This trend imposes the search for innovative electrical machine structures and their optimization. Thus, this virtual testing approach remains very demanding because the complex operation of these machines can only be modeled from expensive 3D finite element simulations, including the consideration of the rotor part movements. This computing time constraint is incompatible with the implementation of an optimization approach for these new machine topologies since the optimization process can lead to numerous evaluations of the numerical model. This is why such optimization methods

are currently only implemented for relatively simple models in the industrial environment. The objective of the thesis is then to propose an innovative computational strategy that allows to strongly reduce the cost of these numerical simulations. For this purpose, a domain decomposition technique based on a mixed writing of equations at interfaces and adapted to the geometrical particularities of rotating machines will be developed. This strategy is based on a discretization using Whitney elements to solve 3D magnetostatic problems, a multi-scale approach taking advantage of parallel computers, and an adapted management of the rotor motion.



---

# Remerciements

J'adresse tout d'abord mes remerciements à Olivier Chadebec et Pierre Gosselet d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et de m'avoir partagé leurs commentaires avisés lors de la relecture du manuscrit. Je remercie plus généralement Jean-Charles Passieux, Nicole Spillane et Ruth Sabariego d'avoir accepté de prendre part à mon jury. Merci pour votre disponibilité à tous et de l'attention que vous avez portée à l'égard de mon travail.

Je souhaite ensuite remercier mes trois encadrants de thèse François, PAB et Xavier. Vous avez constitué une équipe de choc à laquelle chacun apportait sa spécificité. Merci pour votre grande disponibilité et votre implication tout au long des 3 ans. Plus particulièrement, merci François de m'avoir fait confiance pour lancer ce nouveau projet passionnant. Merci à tous pour votre rigueur qui m'a permis de toujours chercher à m'améliorer. Cette thèse n'était pas facile tous les jours, surtout en commençant pendant le covid, mais jamais je n'ai eu l'impression d'avancer seule. Travailler avec vous était un réel plaisir!

Spéciale dédicace à la team ROMlab, merci Ronan de m'avoir mis le pied à l'étrier pendant mon stage, merci Thomas pour toute ton aide et tes développements très utiles, merci Daby pour avoir galéré en même temps que moi et bon courage Floriane et Alexis, prenez soin du petit!

Je tiens à remercier ceux grâce à qui ces dernières années au labo ont été bien agréables. Merci Daby d'être mon ami et mon voisin de bureau depuis le master! C'était un bonheur de vivre cette thèse avec toi. Merci Héloïse d'être si rayonnante. Merci à l'îlot du CDS : Floriane, Flavien, Victor, Quentin et Pierre-Eliot. Apprendre à vous connaître a rallongé les pauses cafés et c'était très sympa! Merci Mahmoud, Jason et Tom pour ces très longs dimanches de jeux avant d'entamer la semaine!

Je profite de cette occasion pour aussi remercier l'équipe pédagogique du DGM de m'avoir permis d'arriver jusque-là et d'avoir toujours été les vecteurs d'une bonne ambiance dans ce département.

Et plus généralement, merci à tous ceux que j'ai rencontrés durant ces 7 ans à l'ENS et qui ont rendu ces années épanouissantes. La liste est trop longue pour l'écrire ici, mais votre impact dans ma vie n'en est pas plus faible.

Enfin, merci Francis d'illuminer mon quotidien depuis de nombreuses années et d'être un pilier auquel se raccrocher dans les moments difficiles.



---

# Avant-propos

Ces travaux ont bénéficié du soutien financier du LabEx LaSIPS (ANR-10-LABX-0032-LaSIPS) géré par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du programme "Investissements d'avenir" (ANR-11-IDEX-0003).

\* \* \*

Ces travaux ont bénéficié des moyens de calcul du Mésocentre de CentraleSupélec, de l'École Normale Supérieure Paris-Saclay et de l'Université Paris-Saclay avec le soutien du CNRS et de la région Île-de-France (<https://mesocentre.universite-paris-saclay.fr/>).



---

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art des méthodes de décomposition de domaine</b>	<b>7</b>
1 Méthodes de Schwarz . . . . .	8
1.1 Méthode de Schwarz alternée . . . . .	8
1.2 Méthode de Schwarz parallèle . . . . .	8
1.3 Méthode de Schwarz sans recouvrement . . . . .	9
1.4 Méthodes de Schwarz discrètes . . . . .	11
2 Rappel - Problème EF 2D de magnétostatique . . . . .	11
2.1 Problème de référence en terme de potentiel vecteur . . . . .	12
2.2 Non-unicité de la solution . . . . .	14
2.3 Formulation discrète : limitations des éléments finis de Lagrange . . . . .	14
2.4 Formulation discrète d'un problème de magnétostatique 2D . . . . .	15
3 Prise en compte d'un corps en mouvement . . . . .	16
4 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement . . . . .	18
4.1 Décomposition d'un problème - notations . . . . .	18
4.2 Approche primale . . . . .	20
4.3 Approche duale . . . . .	21
5 Développements des méthodes de décomposition de domaine pour la magné- tostatique . . . . .	25
➤ Bilan . . . . .	27
<b>2 La méthode LATIN-DDM : cas d'application magnétostatique</b>	<b>29</b>
1 Introduction de la méthode LATIN . . . . .	30
1.1 Principes de la méthode . . . . .	30
1.2 Développements pour la mécanique . . . . .	31
2 La méthode LATIN pour la décomposition de domaine en magnétostatique . . . . .	32
2.1 Séparation des difficultés . . . . .	32

2.2	Algorithme itératif à deux étapes . . . . .	33
2.3	Convergence . . . . .	36
2.4	Choix des directions de recherche . . . . .	37
2.5	Conditions aux limites . . . . .	39
2.6	Initialisation . . . . .	40
2.7	Algorithme mono-échelle . . . . .	40
3	Première implémentation et limites des méthodes mono-échelles . . . . .	41
3.1	Validation sur un cas simple . . . . .	41
3.2	Limites des méthodes mono-échelle . . . . .	42
4	Extension à une approche multi-échelle . . . . .	44
4.1	Introduction des méthodes multi-échelles . . . . .	44
4.2	Approche multi-échelle : réécriture de l'étape linéaire . . . . .	47
4.3	Comparaison des approches . . . . .	53
➤	Bilan . . . . .	56
<b>3</b>	<b>La LATIN-DDM 3D basée sur les éléments de Whitney</b>	<b>59</b>
1	Introduction aux éléments de Whitney . . . . .	60
1.1	Les p-formes pour une meilleure représentation de la physique . . . . .	60
1.2	Les éléments de Whitney . . . . .	62
1.3	Propriétés des éléments de Whitney . . . . .	67
2	Simulation d'un problème de magnétostatique 3D . . . . .	73
2.1	Formulation du problème discret . . . . .	73
2.2	Traitement d'un problème sans unicité de la solution . . . . .	76
2.3	Construction d'un champ source compatible . . . . .	77
2.4	Validation de l'implémentation . . . . .	79
3	Extension de la méthode LATIN-DDM aux problèmes 3D . . . . .	82
3.1	Quantités échangées aux interfaces . . . . .	82
3.2	Modification de l'étape linéaire . . . . .	83
3.3	Validation numérique . . . . .	84
➤	Bilan . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Implémentation numérique et cas d'application</b>	<b>89</b>
1	Implémentations dans ROMlab . . . . .	90
1.1	Une plateforme collaborative . . . . .	90
1.2	Présentation générale du code . . . . .	91
1.3	Discrétisation du problème avec les éléments de Whitney . . . . .	93
2	Stratégie de calcul parallèle . . . . .	95
2.1	Mise en place des communications . . . . .	95
2.2	Limitation de MPI_SENDRECV . . . . .	99
2.3	Étude du speed-up sur un cas test . . . . .	101
3	Validation sur une machine 2D : Problème TEAM 24 . . . . .	104
3.1	Définition du cas de référence . . . . .	104
3.2	Vérification des grandeurs utiles . . . . .	107

3.3	Speed-up sur un cas d'échelle	109
4	Illustration sur un exemple 3D	110
➤	Bilan	113
<b>Conclusion</b>		<b>115</b>



---

# Table des figures

1	Émissions mondiales de CO2 par secteur du transport [IEA, 2022b]	1
2	Consommation d'énergie dans les transports par type de carburant [IEA, 2022a]	2
1.1	Décomposition de Schwarz	8
1.2	Décomposition de Schwarz sans recouvrement	10
1.3	Problème de référence	12
1.4	Représentation d'une bobine et de son image par une symétrie plane [JOURNEAUX, 2013]	15
1.5	Illustration de la méthode de la bande de mouvement et du remaillage local lors du mouvement du rotor par rapport au stator	17
1.6	Illustration de la méthode de l'interface glissante et de la modification des connexions entre les nœuds (en vert)	17
1.7	Exemple de décomposition en deux sous-domaines	18
2.1	Schéma itératif de la méthode LATIN	30
2.2	Problème sur un sous-domaine $\Omega_i$	35
2.3	Problème sur une interface $\Gamma_{ij}$	36
2.4	Représentation de l'indicateur de convergence $\eta^n$ dans le schéma itératif de la méthode LATIN	37
2.5	Définition d'un barreau avec entrefer, décomposition et champ $A$ obtenu	39
2.6	Impact de la direction de recherche sur la convergence	39
2.7	Définition du problème	41
2.8	Exemple de décomposition du barreau	41
2.9	Potentiel vecteur $A$ à convergence	41
2.10	Comparaison entre l'erreur exacte et l'indicateur de convergence	42
2.11	Évolution de l'indicateur de convergence selon le nombre de sous-domaines	43
2.12	Potentiel vecteur $A$ selon les itérations, pour des décompositions en 5, 10 ou 20 sous-domaines	44
2.13	Niveaux de discrétisation d'une méthode multi-grilles	45
2.14	Deux échelles de résolution	45
2.15	séparation micro / macro sur les interfaces	46

2.16 Schématisation du flux magnétique aux interfaces pour la première itération de l'algorithme LATIN (milieu ferromagnétique en gris) . . . . .	47
2.17 Représentation des modes macro sur une interface $\Gamma_{ij}$ . . . . .	48
2.18 Exemple d'une décomposition en 3 sous-domaines . . . . .	50
2.19 Illustration des étapes de construction de $\mathbf{K}_M$ : termes obtenus à partir du macro chargement de Neumann $\mathbf{k}_{21}^- \mathbb{W}_{12}^1$ . . . . .	52
2.20 Comparaison entre l'erreur exacte et l'indicateur de convergence . . . . .	55
2.21 Comparaison du nombre d'itérations nécessaire pour atteindre un même critère de convergence en mono et multi-échelle . . . . .	55
2.22 Comparaison du potentiel vecteur $A$ à la première itération, pour des décompositions en 5, 10 ou 20 sous-domaines . . . . .	56
3.1 Diagramme de Tonti pour la magnétostatique . . . . .	61
3.2 Représentation des degrés de liberté d'un élément de Whitney . . . . .	62
3.3 Représentation de la fonction d'interpolation 1-forme $\underline{N}_{2 \rightarrow 4}^2$ . . . . .	65
3.4 Représentation de la fonction d'interpolation 2-forme $\underline{N}_{124}^2$ . . . . .	66
3.5 Exemple d'interface entre deux sous-domaines . . . . .	68
3.6 Rappel des orientations choisies dans l'élément de référence . . . . .	71
3.7 Exemple de construction d'un arbre (arêtes en bleu) . . . . .	76
3.8 Exemple de circuit ferromagnétique 3D . . . . .	79
3.9 Évolution du résidu relatif pour les deux résolutions . . . . .	80
3.10 Densité de courant $\underline{j}$ imposée et induction magnétique $\underline{B}$ solution . . . . .	81
3.11 Comparaison du résultat en $\underline{B}$ avec une simulation <i>Comsol</i> . . . . .	81
3.12 Exemple de décomposition d'un problème 3D en deux sous-domaines . . . . .	82
3.13 Élément de référence 2D et orientations des arêtes . . . . .	84
3.14 Définition du problème et des conditions aux limites . . . . .	85
3.15 Décomposition du problème en 72 sous-domaines . . . . .	85
3.16 Évolution de l'indicateur de convergence . . . . .	86
3.17 Norme de l'induction magnétique $\underline{B}$ solution . . . . .	86
4.1 Développements des différents contributeurs et contributrices de ROMlab . . . . .	90
4.2 Architecture du code ROMlab . . . . .	92
4.3 Deux éléments . . . . .	93
4.4 Définition globale des arêtes . . . . .	94
4.5 Structure de données pour les éléments de Whitney . . . . .	95
4.6 Exemple de décomposition en trois sous-domaines et répartition sur trois processeurs . . . . .	96
4.7 Échange des quantités d'interfaces avant l'étape locale . . . . .	97
4.8 Calcul de l'indicateur de convergence sur tous les processeurs . . . . .	99
4.9 Exemple d'un barreau 2D décomposé en 20 sous-domaines . . . . .	99
4.10 Temps CPU par processeur pour l'étape de communication avec <b>MPI_SENDRECV</b> . . . . .	99
4.11 Principe de l'attente pendant l'étape de communication . . . . .	100
4.12 Temps CPU par processeur pour l'étape de communication avec <b>MPI_Neighbor_alltoallv</b> . . . . .	101
4.13 Illustration sur un cas test 2D . . . . .	101

4.14	Différentes décompositions selon un quadrillage . . . . .	102
4.15	Temps de calcul requis pour les différentes étapes en fonction du rang du processeur, pour la résolution multi-échelle du problème décomposé en 36 sous-domaines. . . . .	103
4.16	Comparaison des speed-up . . . . .	104
4.17	Définition de la géométrie du problème Team 24 . . . . .	105
4.18	Comportement magnétique du matériau EN9 . . . . .	105
4.19	Comparaison de l'induction magnétique $B_y$ au niveau de la sonde . . . . .	106
4.20	Décomposition du problème en 62 sous-domaines . . . . .	106
4.21	Potentiel vecteur $A$ sur l'interface circulaire entourant le rotor . . . . .	107
4.22	Évolution de l'indicateur de convergence selon l'approche LATIN-DDM utilisée . . . . .	108
4.23	Comparaison de la norme de l'induction magnétique obtenue . . . . .	108
4.24	Comparaison de la densité de force $f_t$ obtenue selon les deux méthodes pour la position rotorique $\theta = 22^\circ$ . . . . .	109
4.25	Comparaison du couple calculé . . . . .	110
4.26	Description du problème 3D . . . . .	111
4.27	Densité de courant $j$ dérivée du champ source compatible . . . . .	112
4.28	Évolution de l'indicateur de convergence . . . . .	112
4.29	Induction magnétique $\underline{B}$ . . . . .	113



---

# Liste des tableaux

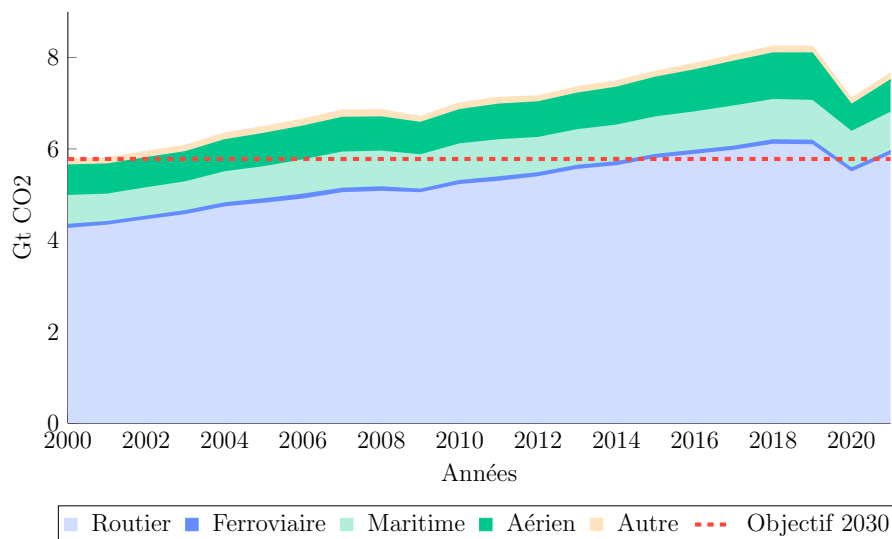
2.1	Paramètres du problème . . . . .	38
3.1	Expression des formes différentielles . . . . .	60
3.2	Les trois opérateurs et leurs domaines . . . . .	60
3.3	Les opérateurs duaux et leurs domaines . . . . .	61
3.4	Fonctions d'interpolations pour 0-forme . . . . .	64
3.5	Fonctions d'interpolation pour 1-forme . . . . .	66
3.6	Fonctions d'interpolation pour 2-forme . . . . .	67
3.7	Propriétés des éléments de Whitney . . . . .	70
3.8	Transformation des vecteurs et opérateurs dans les coordonnées de référence . . . . .	74
3.9	Rotationnel des fonctions d'interpolation pour 1-forme . . . . .	75
3.10	Paramètres du problème . . . . .	80
3.11	Fonctions d'interpolation 2D pour 1-forme . . . . .	84
3.12	Paramètres du problème . . . . .	85
4.1	Spécifications des CPUs du mésocentre <i>Ruche</i> . . . . .	102
4.2	Paramètres du problème linéaire . . . . .	106
4.3	Paramètres du problème linéaire . . . . .	110



---

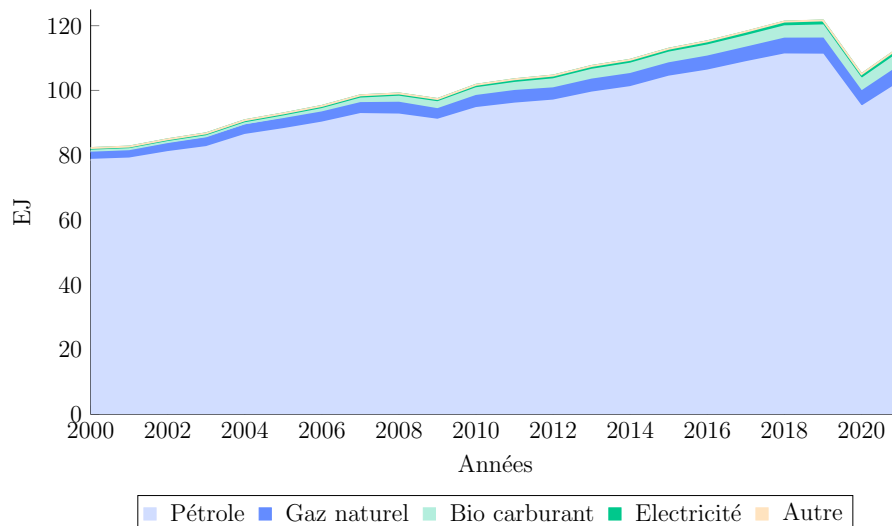
# Introduction

Un enjeu majeur de notre société contemporaine concerne la transition énergétique. Selon les experts du GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) [CHEN et al., 2021], atteindre la neutralité carbone d'ici 2050 est une condition indispensable pour limiter le réchauffement climatique à +1,5°C. Il est impératif de réduire drastiquement les émissions de gaz à effet de serre (GES), telles que les émissions de CO<sub>2</sub>, dans tous les secteurs concernés. En particulier, le secteur des transports représente près d'un tiers des émissions mondiales de GES. Le transport routier à lui seul contribue à hauteur de 75% des émissions de ce secteur (Figure 1). Ces observations justifient l'attention par-



**FIGURE 1** • Émissions mondiales de CO<sub>2</sub> par secteur du transport [IEA, 2022b]

ticulière accordée à la transition énergétique dans les transports. Le respect du scénario de zéro émission nette exige une diminution d'environ 20% des émissions du secteur des transports, pour les ramener à moins de 6Gt d'ici 2030. Aujourd'hui, les transports motorisés restent dépendants du pétrole et, plus généralement, des moteurs à combustion interne fonctionnant avec des liquides ou du gaz naturel (Figure 2). Ces modes de propulsion sont fortement émetteurs de CO<sub>2</sub>. Pour tenir l'objectif de 2030, en plus de réduire considérablement leur utilisation, il faudra compter sur l'électrification rapide de la motorisation des véhicules routiers. Notamment, d'ici 2030, l'électrification des véhicules permettrait d'évi-



**FIGURE 2 •** Consommation d'énergie dans les transports par type de carburant [IEA, 2022a]

ter la consommation de cinq millions de barils de pétrole par jour. A l'échelle de l'Europe, la vente de véhicules thermiques ne sera plus autorisée en 2035 pour atteindre une réduction de 100% des émissions de CO<sub>2</sub> sur les nouveaux véhicules. L'électrification des véhicules routiers est une voie prometteuse pour réduire les émissions de GES. Cependant, il est également important de souligner l'impact de la matière première et de la production (à la fois du véhicule et de l'énergie électrique) dans le bilan effectué, ce qui implique une réduction de l'utilisation des véhicules au même plan que leur électrification. Par exemple, étant donné la part d'émissions de CO<sub>2</sub> que représente le transport ferroviaire (Figure 1), il est judicieux de favoriser le transport de marchandises par rail plutôt que d'électrifier des camions.

Ainsi, l'actionnement électrique est devenu une préoccupation essentielle pour l'industrie automobile. Malgré la connaissance bien établie des machines tournantes conventionnelles, de nombreux projets ont été lancés ces dernières années pour adapter au mieux les solutions déjà présentes dans l'industrie au besoin de la mobilité électrique. Il est alors nécessaire de développer des machines spécifiques, avec des encombrements optimisés, maximisant la puissance massique, et des rendements les plus élevés possibles. Pour concevoir ces nouvelles machines tournantes, des investigations approfondies sont à mener, nécessitant le développement d'approches d'optimisation. La méthode des éléments finis est couramment utilisée pour simuler numériquement les machines tournantes en vue de leur optimisation, car elle fournit des résultats d'une grande précision et s'appuie généralement sur des hypothèses moins fortes que les approches analytiques ou par schémas réducteurs. Cependant, ces approches d'optimisation sont gourmandes en temps de calcul car elles exigent de nombreux appels de simulations numériques.

Par exemple, plusieurs optimisations suivant trois paramètres d'une section 2D d'une machine tournante avec 8128 degrés de liberté (ddl) sont comparées dans [BONTINCK et al., 2018]. Les temps de calculs atteignent 2300s pour un algorithme génétique ou même 10000s avec une méthode basée sur le gradient. Ce nombre élevé limite les possibilités d'optimisation pour les machines de topologie 3D, pour lesquelles une simulation numérique

---

peut demander plusieurs heures de calculs [KERANEN et al., 2015; TAKAHASHI et al., 2021]. À la lumière de cette constatation, deux domaines d'amélioration se dessinent : réduire le nombre d'appels de simulations numériques au cours du processus d'optimisation, et diminuer le temps de calcul de chaque simulation numérique 3D. C'est sur ce dernier aspect que se concentre le travail réalisé dans cette thèse.

Afin de simuler certaines machines tournantes, sans avoir à considérer d'hypothèses trop fortes, il est désormais essentiel d'opter pour une modélisation en 3D. En effet, les nouvelles géométries, de petite longueur active ou présentant un flux axial, ne peuvent être pleinement appréhendées avec une modélisation en 2D dans un plan de coupe. Une modélisation en 3D est alors indispensable pour prendre en compte tous les phénomènes impliqués. Les maillages construits pour étudier les machines, qui incluent également des zones d'air, conduisent à un grand nombre de degrés de liberté afin d'obtenir des résultats exploitables. De plus, les machines tournantes fonctionnent généralement proches d'un régime de saturation magnétique, ce qui signifie que les simulations numériques doivent prendre en compte les non-linéarités associées aux matériaux ferromagnétiques. Enfin, dans le cadre des études de performances, il est nécessaire de simuler plusieurs pas de rotation du rotor afin de calculer le couple moyen de la machine et ses variations (ondulations de couple). Tous ces éléments témoignent de la complexité et du coût élevé des calculs nécessaires pour la simulation d'une machine tournante.

Le traitement de ces problèmes de grande taille dépasse les moyens de calcul généralement mis à disposition, notamment en termes de mémoire. Bien que des outils de simulation numérique performants existent et permettent de résoudre des problèmes globaux en utilisant des techniques de parallélisme telles que les bibliothèques MUMPS [AMESTOY et al., 2001], cela n'est pas suffisant. Ces codes de calcul ont du mal à exploiter pleinement les ordinateurs à architecture parallèle dont la mémoire est distribuée. Afin de tirer pleinement parti des avantages offerts par ces nouvelles architectures, il est intéressant de s'appuyer sur les méthodes de décomposition de domaine (DDM). Ces méthodes reposent sur la division du problème à résoudre en un certain nombre de sous-problèmes plus petits, nécessitant ainsi moins de mémoire et de temps de calcul pour être traités. Ces sous-problèmes sont répartis sur différents processeurs, permettant une résolution en parallèle. Bien entendu, le défi réside dans le raccord entre les sous-domaines afin d'obtenir une solution globale correcte.

Depuis les années 80, différentes méthodes de décomposition de domaines ont été développées, en premier lieu avec les méthodes de Schwarz avec recouvrement [SCHWARZ, 1870]. Au fil des développements, ces méthodes ont gagné en performance et en robustesse. Cependant, elles restent limitées notamment dans leur capacité à prendre en compte les non-linéarités, nécessaires pour la simulation de machines tournantes. Notre objectif dans cette étude est alors d'adapter la méthode LATIN pour la simulation magnétostatique. Initialement proposée par [LADEVÈZE, 1999], cette méthode a été spécialement conçue pour résoudre des problèmes de mécanique non-linéaire impliquant un comportement complexe aux interfaces. Nous cherchons à nous appuyer sur les connaissances développées dans le domaine de la mécanique pour mettre en place une méthode de décomposition de domaine efficace en magnétostatique. Bien que nous ne traiterons dans cette première approche que le comportement ferromagnétique linéaire, nous choisissons la méthode LATIN pour nous

placer dès à présent dans un cadre de travail permettant sa généralisation à la résolution de problèmes tenant compte de la saturation magnétique.

Afin de présenter les travaux réalisés, ce manuscrit s'articule autour de quatre chapitres :

- Le premier chapitre présente un état de l'art des méthodes de décomposition de domaine utilisées pour la simulation de problèmes de magnétostatique. Nous nous concentrons sur les méthodes reposant sur une décomposition en sous-domaines sans recouvrement, telles que les méthodes de Schwarz sans recouvrement [LIONS, 1990], les approches primales via la méthode BDD [MANDEL, 1993], ou les approches duales avec notamment les méthodes FETI [FARHAT & ROUX, 1991]. Ce travail établit un lien entre les méthodes de décomposition de domaine développées pour la mécanique et leur application à la simulation magnétostatique. Dans un souci de clarté pour les deux communautés, nous détaillons la formulation retenue d'un problème de magnétostatique en termes de potentiel vecteur, ainsi que son écriture discrète jusqu'à sa décomposition en sous-domaines. Nous abordons les développements relatifs aux méthodes de décomposition de domaine et présentons des exemples de performances atteintes à ce jour en magnétostatique dans une dernière partie.
- Dans le deuxième chapitre nous détaillons la méthode LATIN [LADEVÈZE, 1999] dans le cadre de la décomposition de domaine. A travers le principe de séparation des équations de la méthode LATIN, les sous-domaines et les interfaces sont traités de manières distinctes via un algorithme de résolution à deux étapes. Une première étape permet de résoudre le sous-problème de chaque sous-domaine. Ensuite une étape vérifiant les conditions aux interfaces traduit les interactions entre les sous-domaines. Une spécificité de la méthode LATIN, qui permet de la qualifier de mixte, est que les inconnues intervenant sur les interfaces sont à la fois les inconnues primales et duales. Cette méthode peut être considérée comme une méthode de Schwarz optimisée (OMS) [GANDER, 2006] basée sur l'algorithme sans recouvrement où les conditions de transmission de Dirichlet de la méthode de Schwarz classique sont remplacées par des conditions de Robin. Une validation de l'implémentation est présentée sur un cas simple et mettra en évidence la propriété qu'ont toutes les méthodes de décomposition de domaine dites mono-échelles : leur non-extensibilité. Ainsi, nous détaillons l'adaptation d'une approche multi-échelle [OUMAZIZ et al., 2018] au cadre de la magnétostatique. Cette approche ajoute la résolution d'un problème macroscopique permettant de vérifier un comportement magnétique global sur le problème complet dès la première itération de l'algorithme. Une comparaison des performances sur un exemple simple est proposé pour mettre en évidence l'amélioration significative de la vitesse de convergence par cette approche.
- La résolution d'un problème de magnétostatique 3D fait l'objet du troisième chapitre. En effet, le passage au 3D implique certaines limitations qui ne permettent plus de résoudre de manière adéquate les problèmes avec les éléments finis de Lagrange. La discrétisation nodale des champs impose des continuités de grandeurs physiques qui ne sont pas nécessaires. De « nouveaux » éléments, les éléments de Whitney [BOSSAVIT, 1988a], sont introduits. Ils reposent sur une représentation des champs par des formes différentielles rendant mieux compte de la physique. Malgré cet effort mis dans la discrétisation du problème 3D, la non-unicité de la solution

---

recherchée constitue une difficulté qui persiste pour la résolution numérique. Des techniques existent pour imposer la recherche d'une solution, comme la méthode de l'arbre [DULAR, 1996] ou la résolution par les algorithmes de gradients conjugués qui permettent de converger vers une solution [REN, 1996]. Elle induit la résolution d'un problème préliminaire pour construire un second membre compatible. Cette méthode est celle choisie et est intégrée à l'algorithme de la LATIN étendue aux éléments de Whitney.

- Le quatrième chapitre présente l'implémentation et les performances de la méthode sur des exemples à grand nombre de degrés de liberté. L'implémentation est réalisée dans la plateforme de simulation ROMlab dans *Matlab* et les simulations sont exécutées sur le cluster *Ruche* du mésocentre Paris Saclay. Nous abordons dans une partie spécifique la gestion numérique de la rotation du rotor mise en place par la méthode de l'interface glissante [RODGER et al., 1990]. Enfin, la stratégie de résolution parallèle développée est détaillée, suivie de l'analyse des performances de la méthode par la simulation de cas académiques « extrêmes » via la quantification du *speed-up*. Une illustration des potentialités de la méthode est réalisée dans une dernière partie traitant de la simulation 3D d'une machine tournante à réluctance variable à flux axial.

Enfin, une conclusion rappellera les différents apports de la LATIN-DDM multi-échelle pour la simulation efficace de machines électriques 3D qui auront été présentés dans ce manuscrit, suivis de quelques perspectives.



## 1

---

# État de l'art des méthodes de décomposition de domaine

*Ce chapitre offre un aperçu de l'état de l'art des méthodes de décomposition de domaine utilisées pour la simulation magnétostatique des machines électriques. Un rappel de l'écriture d'un problème de magnétostatique est proposé, jusqu'à sa discrétisation par éléments finis. Différentes approches de décomposition de domaine sont abordées, avec les développements associés pour l'étude de machines tournantes.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Méthodes de Schwarz</b>	<b>8</b>
1.1	Méthode de Schwarz alternée	8
1.2	Méthode de Schwarz parallèle	8
1.3	Méthode de Schwarz sans recouvrement	9
1.4	Méthodes de Schwarz discrètes	11
<b>2</b>	<b>Rappel - Problème EF 2D de magnétostatique</b>	<b>11</b>
2.1	Problème de référence en terme de potentiel vecteur	12
2.2	Non-unicité de la solution	14
2.3	Formulation discrète : limitations des éléments finis de Lagrange	14
2.4	Formulation discrète d'un problème de magnétostatique 2D	15
<b>3</b>	<b>Prise en compte d'un corps en mouvement</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement</b>	<b>18</b>
4.1	Décomposition d'un problème - notations	18
4.2	Approche primale	20
4.3	Approche duale	21
<b>5</b>	<b>Développements des méthodes de décomposition de domaine pour la magnétostatique</b>	<b>25</b>
➤	<b>Bilan</b>	<b>27</b>

---

# 1 Méthodes de Schwarz

## 1.1 Méthode de Schwarz alternée

Les méthodes basées sur une décomposition de domaine ont été originellement introduites par Schwarz en 1870 [SCHWARZ, 1870]. Ces développements provenaient de la difficulté à résoudre un problème aux dérivées partielles sur un domaine non-trivial. Les solutions analytiques étant connues sur des domaines aux formes simples (disques et rectangles), il proposa de décomposer la géométrie du domaine non trivial en un certain nombre de sous-domaines élémentaires aux formes connues sur lesquels une solution peut être calculée. Un exemple de décomposition de Schwarz est donné Figure 1.1 pour lequel un domaine  $\Omega$  est divisé en deux sous-domaines  $\Omega_1$  (circulaire) et  $\Omega_2$  (rectangulaire) qui se recouvrent sur  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ . Nous définissons  $\Gamma_1$  la partie du bord de  $\Omega_1$  incluse dans  $\Omega_2$ , et  $\Gamma_2$  la partie du bord de  $\Omega_2$  incluse dans  $\Omega_1$ .

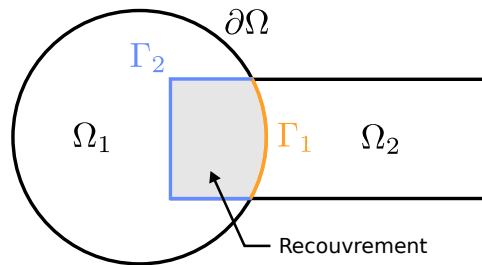


FIGURE 1.1 • Décomposition de Schwarz

Pour illustrer la méthode, nous nous donnons dans cette section un problème aux dérivées partielles à résoudre tel que :

Connaissant  $b$  sur  $\partial\Omega$ , trouver  $x$  sur  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0 & \text{sur } \Omega \\ x &= b & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dans un premier temps, le principe de la méthode de Schwarz est de chercher successivement une solution  $x_1$  sur  $\Omega_1$  puis  $x_2$  sur  $\Omega_2$ . Un algorithme de résolution, appelé algorithme de Schwarz alterné (Algorithme 1), est alors mis en place pour faire le lien entre les différentes solutions obtenues dans les sous-domaines. L'algorithme est initialisé en imposant  $x_2^0 = 0$ , puis deux problèmes sont résolus itérativement. Un premier problème sur  $\Omega_1$  : chercher  $x_1^n$  vérifiant les conditions aux limites  $x_1^n = b$  sur  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$  et  $x_1^n = x_2^{n-1}$  sur  $\Gamma_1$ . A partir de la solution obtenue sur  $\Omega_1$ , un second problème est résolu sur  $\Omega_2$  : chercher  $x_2^n$  vérifiant les conditions aux limites  $x_2^n = b$  sur  $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$  et  $x_2^n = x_1^n$  sur  $\Gamma_2$ .

## 1.2 Méthode de Schwarz parallèle

La méthode précédente présente l'inconvénient de ne pas permettre de résolution parallèle : il est nécessaire d'avoir résolu le problème sur un sous-domaine avant de résoudre sur

---

**Algorithme 1 :** Algorithme de Schwarz alterné

---

**Initialisation :**  $x_2^0 = 0$

**for**  $n = 1, 2, \dots$  **do**

    Trouver  $x_1^n$  tel que :

$$\begin{aligned} \Delta x_1^n &= 0 && \text{sur } \Omega_1 \\ x_1^n &= b && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ x_1^n &= x_2^{n-1} && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

    Trouver  $x_2^n$  tel que :

$$\begin{aligned} \Delta x_2^n &= 0 && \text{sur } \Omega_2 \\ x_2^n &= b && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ x_2^n &= x_1^n && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

**end**

---

le suivant. Avec l'avènement des ordinateurs à architecture parallèle, une version complètement parallélisée de l'algorithme a été proposée par [LIONS, 1988], par un simple glissement des indices depuis l'algorithme précédent. En effet, dans l'Algorithme 2, seules les solutions

---

**Algorithme 2 :** Algorithme de Schwarz parallèle

---

**Initialisation :**  $x_2^0 = 0$

**for**  $n = 1, 2, \dots$  **do**

    Trouver  $x_1^n$  et  $x_2^n$  tel que :

$$P_0 \begin{cases} \Delta x_1^n = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ x_1^n = b & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ x_1^n = x_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}, \quad P_1 \begin{cases} \Delta x_2^n = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ x_2^n = b & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ x_2^n = x_1^{n-1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

**end**

---

obtenues à l'itération précédente  $n - 1$ ,  $x_1^{n-1}$  et  $x_2^{n-1}$ , sont nécessaires pour calculer à la fois  $x_1^n$  et  $x_2^n$ . Ainsi, les calculs peuvent être réalisés en parallèle sur plusieurs CPU (deux CPU  $P_0$  et  $P_1$  dans cet exemple). Ce type de méthode parallèle permet d'accélérer le temps de calcul tant que le temps de transfert d'information entre CPU reste négligeable.

### 1.3 Méthode de Schwarz sans recouvrement

Ces méthodes peuvent être généralisées à plus de deux sous-domaines. Cependant, le principe de recouvrement des sous-domaines n'est pas toujours le plus approprié pour l'étude de structures industrielles complexes. Dans de tels cas, il est préférable de décomposer la géométrie en sous-domaines distincts et indépendants les uns des autres. Or, la convergence de ces méthodes dépend du recouvrement, ce qui a conduit au développement d'une nouvelle version sans recouvrement par [LIONS, 1990]. La Figure 1.2 illustre un exemple de

décomposition en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sans recouvrement. Seule une interface  $\Gamma$  de normale  $\underline{n}_\Gamma$  de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$  est commune aux deux sous-domaines.

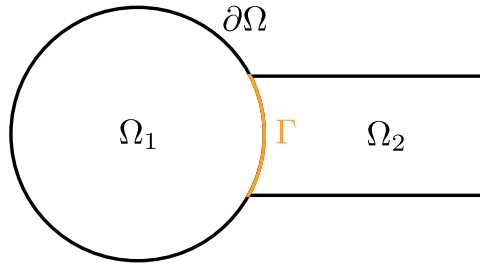


FIGURE 1.2 • Décomposition de Schwarz sans recouvrement

La difficulté réside dans la transmission d'informations entre les sous-domaines. Dans le cas avec recouvrement, imposer l'égalité de  $x$  sur une frontière intérieure à la zone de recouvrement implique aussi l'égalité de sa dérivée. Ainsi, la grandeur duale du champ recherché avec ces méthodes se retrouve imposée. Sans recouvrement, cette propriété disparaît. L'idée est alors d'ajouter une condition aux interfaces pour retrouver cette égalité : des conditions de Robin sont introduites pour imposer les quantités duales. L'Algorithme 3 décrit les itérations de la méthode sans recouvrement dans sa version alternée. Les constantes  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  sont les paramètres des conditions de Robin imposées sur l'interface  $\Gamma$  de normale  $n_\Gamma$  dirigée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ .

---

**Algorithme 3 :** Algorithme de Schwarz alterné sans recouvrement

---

**Initialisation :**  $x_2^0 = 0$

**for**  $n = 1, 2, \dots$  **do**

Trouver  $x_1^n$  tel que :

$$\begin{aligned} \Delta x_1^n &= 0 && \text{sur } \Omega_1 \\ x_1^n &= b && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ a_1 x_1^n + b_1 \frac{\partial x_1^n}{\partial n_\Gamma} &= a_1 x_2^{n-1} - b_1 \frac{\partial x_2^{n-1}}{\partial n_\Gamma} && \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (1.5)$$

Trouver  $x_2^n$  tel que :

$$\begin{aligned} \Delta x_2^n &= 0 && \text{sur } \Omega_2 \\ x_2^n &= b && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ a_2 x_2^n + b_2 \frac{\partial x_2^n}{\partial n_\Gamma} &= a_2 x_1^n - b_2 \frac{\partial x_1^n}{\partial n_\Gamma} && \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (1.6)$$

**end**

---

### Remarque

Comme les méthodes sans recouvrement, les méthodes de Schwarz dites optimisées, avec un choix optimal d'opérateurs [GANDER, 2006; 2008], reposent sur des conditions de Robin aux interfaces. Ces méthodes montrent des propriétés de convergence considérablement améliorées par rapport aux méthodes de Schwarz classiques avec recouvrement.

### 1.4 Méthodes de Schwarz discrètes

Les méthodes de Schwarz ont été adaptées aux méthodes des éléments finis pour des résolutions de problèmes discrets du type

$$\mathbf{K}X = B \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{K}$  l'opérateur discrétisé caractérisant l'équation du problème,  $X$  le vecteur solution discrétisé et  $B$  le vecteur second membre traduisant les conditions imposées. Pour se limiter à la construction de la solution seulement sur un sous-domaine  $\Omega_i$ , un opérateur de restriction est introduit permettant de ne traiter que les degrés de liberté concernés. Ensuite, les différentes méthodes proposées peuvent être vues comme les versions discrétisées des méthodes continues précédemment présentées. Notamment, la méthode de Schwarz multiplicative [CHAN & MATHEW, 1994] se rapproche d'une adaptation discrète de la méthode de Schwarz alternée et la méthode de Schwarz additive [DRYJA & WIDLUND, 1990] peut être vue comme la version discrète de la méthode de Schwarz parallèle.

### Remarque

Les méthodes de décomposition de domaine classiques ne sont pas extensibles : leur vitesse de convergence dépend fortement du nombre de sous-domaines. En effet, étant donné que chaque sous-domaine ne peut obtenir des informations que de ses voisins directs, à mesure que le nombre de sous-domaines augmente, certains sous-domaines se retrouvent de plus en plus éloignés des bords avec les conditions aux limites et des zones de chargements intérieurs. Cela entraîne une augmentation du nombre d'itérations pour que les informations soient transmises et prises en compte par l'ensemble des sous-domaines. L'ajout d'une correction grossière dans la résolution permet d'améliorer la convergence [NABBEN, 2003], comme nous le verrons aussi avec l'approche multi-échelle développée dans ces travaux.

## 2 Rappel - Problème EF 2D de magnétostatique

Avant d'exposer les développements des méthodes de décompositions de domaine réalisés dans le cadre de la simulation magnétostatique, il convient de rappeler la définition d'un problème de magnétostatique permettant de simuler le comportement de machines électriques. La formulation discrète du problème sera présentée dans un premier temps dans

un contexte 2D, tandis que la formulation en 3D fera l'objet d'un chapitre spécifique en raison des limitations inhérentes aux éléments finis de Lagrange. Cette partie s'appuie sur les travaux de [BIANCHI, 2005; BOSSAVIT, 1998; MEUNIER, 2008]. L'objectif ici n'est pas de donner une vision exhaustive des travaux existants en EF magnétostatique, mais de fournir les informations nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.

## 2.1 Problème de référence en terme de potentiel vecteur

Nous considérons un problème de magnétostatique de référence, représenté Figure 1.3. Le domaine  $\Omega$  étudié est composé d'une zone d'air  $\Omega_{air}$  dans laquelle sont intégrés différents milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (possiblement plus) associés à des matériaux magnétiques de perméabilités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement. Ces perméabilités caractérisent la faculté qu'a un maté-

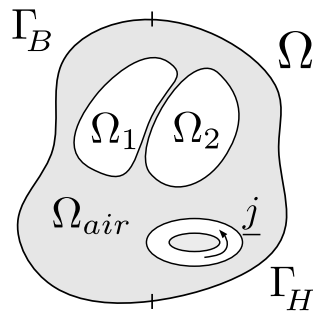


FIGURE 1.3 • Problème de référence

riau à canaliser le flux magnétique. Dans tout notre travail, les perméabilités des différents milieux seront considérées homogènes sur les domaines respectifs et ne dépendant pas de l'intensité du champ magnétique (matériaux linéaires). Ces considérations engendrent une résolution linéaire du problème. Il s'agit d'une limitation plutôt forte pour les problèmes de machines électriques, mais nécessaire pour une première approche de la stratégie de calcul parallèle présentée dans ce manuscrit. Cependant, la méthode développée pour la magnétostatique dispose d'un cadre de résolution qui pourra être étendu aux non-linéarités.

Les milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  peuvent être en contact et dans ce cas des conditions d'interfaces pourront être définies. Nous introduisons également une source de courant  $\underline{j}$  permettant de modéliser les bobinages de machines tournantes. Sur le contour du domaine  $\Omega$ , nous définissons des bords  $\Gamma_B$  et  $\Gamma_H$  sur lesquels des conditions aux limites sont imposées.

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques classiques est régi par les équations de Maxwell, constituant un système d'équations reliant les phénomènes magnétiques aux phénomènes électriques. Dans les milieux continus et dans un cadre statique, nous considérons seulement les équations de la magnétostatique suivantes :

$$\underline{\text{rot}}(\underline{H}) = \underline{j} \quad (1.8)$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{B}) = 0 \quad (1.9)$$

avec  $\underline{H}$  le champ magnétique (A/m),  $\underline{B}$  l'induction magnétique (T, i.e. Tesla), et  $\underline{j}$  la densité de courant (A/m<sup>2</sup>).

## 2. Rappel - Problème EF 2D de magnétostatique

Ces équations sont complétées par une loi de comportement représentant les interactions entre le champ et la matière telle que :

$$\underline{B} = \mu \underline{H}. \quad (1.10)$$

Nous définissons des conditions aux limites sur les bords du domaine  $\Omega$  telles que :

$$\underline{n} \wedge \underline{H} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_H, \quad (1.11)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{B} = 0 \text{ sur } \Gamma_B. \quad (1.12)$$

Ces conditions aux limites sur les champs correspondent à des conditions à l'infini (ou à des matériaux idéalisés) pour l'équation (1.11), ou à des conditions de symétrie (1.12).

Le problème posé de cette manière est en réalité mal posé [BOSSAVIT, 1998]. En particulier, la condition de divergence nulle sur l'induction magnétique  $\underline{B}$  suppose une régularité trop stricte pour ce champ. En effet, aux interfaces entre deux milieux de perméabilité différente, seule la composante normale de  $\underline{B}$  est continue, ce qui pose des difficultés par rapport à la définition même de la divergence. Une façon de résoudre ce problème serait de considérer  $\text{div}(\underline{B}) = 0$  là où  $\underline{B}$  est différentiable et le saut  $[\underline{B} \cdot \underline{n}] = 0$  sur certaines interfaces. Cependant, il est peu courant de traiter des conditions supplémentaires sur certaines interfaces d'un domaine. Une approche plus classique pour prendre en compte cette condition est, par exemple, de formuler le problème à l'aide d'un potentiel vecteur. Comme l'induction magnétique est à divergence nulle (Eq. 1.9), il est possible d'introduire un potentiel vecteur, noté  $\underline{A}$ , tel que :

$$\underline{B} = \text{rot}(\underline{A}) \quad (1.13)$$

### Remarque

Il est également possible de formuler le problème en terme de potentiel scalaire magnétique. Si  $\text{rot}(\underline{H}) = \underline{0}$ , il existe  $\phi$  tel que  $\underline{H} = \text{grad}(\phi)$ . Cette formulation présente l'avantage d'utiliser des degrés de liberté scalaires donc d'alléger la taille du problème discret à résoudre. Cependant, les sources de courant  $\underline{j}$  sont dans certains cas plus complexes à imposer : elles peuvent nécessiter l'introduction d'un potentiel scalaire partiel en dehors des conducteurs [DULAR, 1996].

Les conditions aux limites du problème sont reformulées en terme de potentiel vecteur  $\underline{A}$  :

$$\underline{n} \wedge \underline{A} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_B \quad (1.14)$$

$$\underline{n} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \text{rot}(\underline{A}) \right) = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.15)$$

Le potentiel vecteur recherché satisfait alors une des équations de Maxwell (Eq. 1.9) et les conditions aux limites du problème. Le champ ainsi obtenu est un champ admissible. Pour être la solution du problème, ce champ doit générer, via la loi de comportement, un second champ ( $\underline{H}$ ) qui doit satisfaire l'équation de Maxwell restante (Eq. 1.8). Le problème à

résoudre devient :

$$\begin{cases} \underline{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \underline{\text{rot}}(\underline{A})\right) = \underline{j} \\ \underline{n} \wedge \underline{A} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_B \\ \underline{n} \wedge \left(\frac{1}{\mu} \underline{\text{rot}}(\underline{A})\right) = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_H \end{cases} \quad (1.16)$$

Il est important de souligner que cette formulation du problème requiert néanmoins que seule la composante tangentielle du potentiel vecteur soit continue afin d'assurer la continuité normale de l'induction magnétique  $\underline{B}$  au passage de certaines interfaces. En conséquence, la discrétisation du problème va nécessiter une attention particulière. C'est ce qui est présenté dans la section 2.3.

## 2.2 Non-unicité de la solution

La solution du problème (1.16) n'est pas unique. En effet, le potentiel  $\underline{A}$  peut être défini à un gradient  $\underline{A}_0$  près tel que  $\underline{B} = \underline{\text{rot}}(\underline{A} + \underline{A}_0)$ , sans que le calcul de  $\underline{B}$  ne soit impacté. Pour rechercher une des solutions du problème, une condition de jauge doit alors être imposée. Le plus couramment, une jauge de Coulomb est considérée dans le cas 2D. Elle consiste à imposer

$$\text{div}(\underline{A}) = 0. \quad (1.17)$$

D'autres méthodes sont abordées dans le Chapitre 3 traitant des problèmes de magnétostatique 3D.

## 2.3 Formulation discrète : limitations des éléments finis de Lagrange

La discrétisation des champs en magnétostatique avec les éléments finis de Lagrange pose des difficultés en 3D. En effet, avec ces éléments, le potentiel vecteur  $A$  est continu aux nœuds, alors que seule sa continuité tangentielle est désirée.

De plus, la structure de  $\mathbb{R}^3$  est trop riche : les champs vérifiant les équations de Maxwell ne se comportent pas comme les vecteurs usuels [JOURNEAUX, 2013]. Par exemple, si l'on considère une bobine dans l'air et sa symétrie par rapport à un plan (Figure 1.4), la symétrie de l'induction magnétique  $\underline{B}$  est inversé par rapport à un vecteur classique de  $\mathbb{R}^3$ . Cette première considération laisse entendre qu'une représentation vectorielle des champs aux nœuds de discrétisation n'est pas idéale.

De par ces considérations, pour mieux représenter ces champs, il faut se ramener à leur sens physique. Les équations de Maxwell sont des équations aux dérivées partielles des modèles physiques. Mais les phénomènes mesurables apparaissent sous forme intégrée :

- le flux de l'induction magnétique

$$\iint_S \underline{B} \cdot \underline{n} \, dS = \phi \quad (1.18)$$

- la force magnétomotrice et le courant  $I$

$$\oint_{\partial S} \underline{H} \cdot \underline{dl} = \mu I \quad (1.19)$$

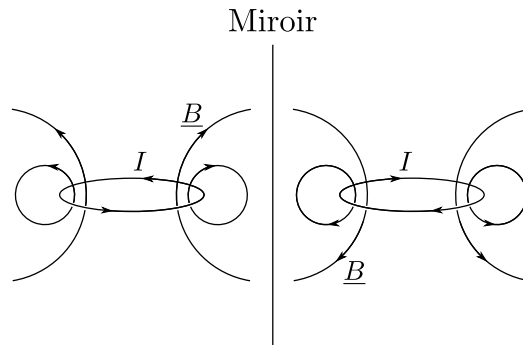


FIGURE 1.4 • Représentation d'une bobine et de son image par une symétrie plane [JOURNEAUX, 2013]

avec

$$I = \iint_S \underline{j} \cdot \underline{n} dS \quad (1.20)$$

Ces équations définissent des intégrales sur des domaines « macroscopiques », ce qui permet l'étude des systèmes à travers leurs grandeurs globales. Une approche proposée par [BOSSAVIT, 1988b] consiste à considérer ces grandeurs sur des géométries élémentaires, en utilisant les formes différentielles pour une meilleure représentation de la physique. En conséquence, sous une forme intégrale, le potentiel vecteur  $\underline{A}$  s'intègre sur une ligne et préserve naturellement la continuité tangentielle qui le caractérise.

#### Remarque

Dans le cas particulier d'un problème 2D dans un plan  $(\underline{x}, \underline{y})$ , le champ du potentiel vecteur et la densité de courant se réduisent à leurs seules composantes normales au plan d'étude  $A_z$  et  $j_z$ . La condition de jauge de Coulomb  $\text{div}(\underline{A}) = 0$  est automatiquement satisfaite, ce qui rend la solution unique, et la résolution du problème se résume à la recherche d'un scalaire qui satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta A_z = -\mu j_z \quad (1.21)$$

Ces considérations impliquent également la possibilité d'utiliser les éléments finis de Lagrange pour discrétiser un problème de magnétostatique 2D se résumant aux scalaires  $A_z$  et  $j_z$ . Il n'y a pas de continuité normale parasite.

Des éléments de discrétisation sont introduits par [BOSSAVIT, 1988b] pour modéliser des problèmes de magnétostatique 3D. Ces éléments, appelés les éléments de Whitney, sont décrits dans le chapitre 3 de ce manuscrit, consacré à la simulation 3D. Dans la section suivante, la discrétisation du problème 2D est introduite, elle servira de base pour illustrer la stratégie de décomposition de domaine mixte mise en place dans le Chapitre 2.

## 2.4 Formulation discrète d'un problème de magnétostatique 2D

Pour la simulation numérique 2D d'un problème de magnétostatique en potentiel vecteur  $\underline{A}$ , nous utilisons les éléments finis de Lagrange d'ordre 1 pour discrétiser les champs

considérés dans  $\Omega$ . A partir de l'expression de l'énergie magnétique

$$\Pi^A(\underline{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu^{-1} \underline{\text{rot}}(\underline{A}) \cdot \underline{\text{rot}}(\underline{A}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{A} \cdot \underline{j} \, d\Omega \quad (1.22)$$

nous obtenons par la minimisation de la fonctionnelle d'énergie puis discrétisation des grandeurs et du domaine un problème discret de la forme

$$\mathbf{K}A = J, \quad (1.23)$$

avec

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\underline{\text{rot}}(\underline{N}))^T \underline{\text{rot}}(\underline{N}) \, dV, \quad (1.24)$$

$$J = \int_{\Omega} \underline{N}^T j_z \, dV, \quad (1.25)$$

et  $N$  les fonctions de forme de premier ordre de Lagrange telles que

$$A_z = N^T A. \quad (1.26)$$

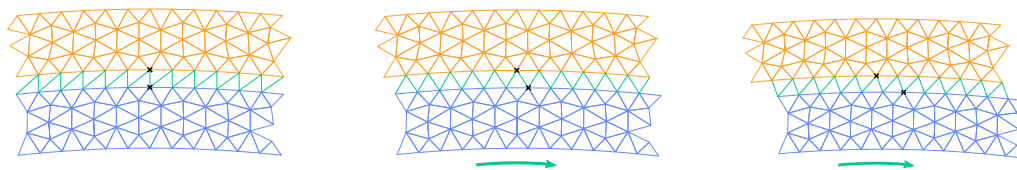
### 3 Prise en compte d'un corps en mouvement

La simulation numérique des machines tournantes présente une difficulté particulière liée à la prise en compte de la rotation du rotor par rapport au stator. À chaque pas de rotation considéré, la géométrie globale est modifiée. Une première approche radicale consisterait à remailler entièrement le domaine. Une deuxième approche consisterait à remailler uniquement la zone d'air après une rotation physique du rotor. Cependant, ces approches sont coûteuses en termes de temps de calcul, compliquent la dérivation temporelle (nécessitant une mémorisation entre deux pas de rotation impossible si le problème est remaillé), et modifient la structure de la matrice du problème à résoudre, ce qui rend la résolution numérique plus complexe. C'est pourquoi d'autres solutions sont recherchées.

Pour la simulation du mouvement rotor/stator, l'une des premières propositions a été l'utilisation d'un « macro-élément » pour modéliser l'entrefer d'une machine en 2D [ABDELRAZEK et al., 1982]. Cette méthode consiste à considérer l'entrefer comme un unique élément fini et à exprimer analytiquement le champ à l'intérieur de cet élément. De cette manière, le champ obtenu est précis dans l'entrefer, mais cela entraîne une perte de la sparsité de la matrice car tous les degrés de liberté de l'interface du macro-élément sont interconnectés, ce qui entraîne une largeur de bande locale importante. Cette méthode n'est pas idéale pour les résolutions 3D [RAPETTI, 2000].

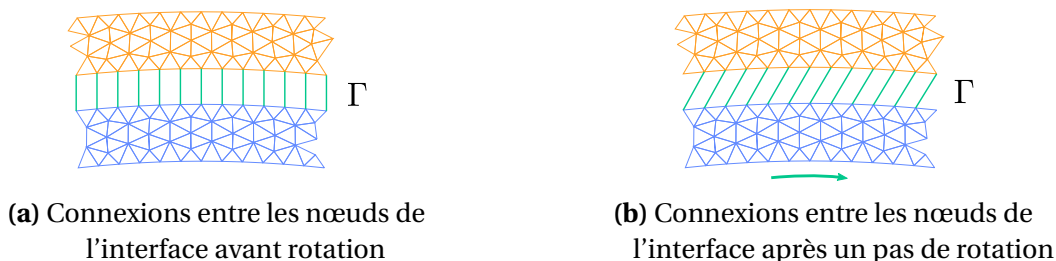
Par la suite, une méthode utilisant une bande de mouvement a été proposée [DAVAT et al., 1985]. Cette approche implique un remaillage local au niveau d'une bande d'éléments située dans la couche d'air (voir Figure 1.5). Une autre approche est celle du « pas bloqué » [PRESTON et al., 1988]. Dans cette méthode, le pas de discrétisation n'est pas choisi de manière arbitraire, mais dépend de l'angle de rotation d'un incrément ( $h = r\Delta\theta$ ), de sorte que les maillages coïncident à chaque incrément. Le pas de temps est fixé en fonction de  $h$  et de la vitesse  $v$  du rotor ( $\Delta t = h/v$ ). D'autres approches, telles que les méthodes d'interpola-

tion et les méthodes hybrides, ont également été développées pour simuler le mouvement [BOUILLAULT & RAZEK, 1988].



**FIGURE 1.5** • Illustration de la méthode de la bande de mouvement et du remaillage local lors du mouvement du rotor par rapport au stator

Une méthode basée sur l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange a également été développée [RODGER et al., 1990]. Dans cette méthode, une interface circulaire, notée  $\Gamma$ , est définie dans l'entrefer entre les deux maillages constituant les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir Figure 1.6). Lors de la rotation du rotor, les maillages restent inchangés, seuls les termes de



**FIGURE 1.6** • Illustration de la méthode de l'interface glissante et de la modification des connexions entre les nœuds (en vert)

couplage entre les deux maillages évoluent et sont recalculés à chaque incrément de rotation. Ces termes de couplage correspondent à des conditions de recollement nodal sur  $\Gamma$  et sont introduits par le biais de multiplicateurs de Lagrange. Seul l'opérateur de couplage nécessite d'être recalculé lors d'un incrément de rotation. Il est important de souligner que cette méthode permet également de gérer les incompatibilités de maillage de part et d'autre de l'interface  $\Gamma$ , ce qui permet de se libérer de la contrainte d'une relation fixe entre le pas de rotation et le pas de maillage.

Enfin, des méthodes « Overlapping » utilisant des éléments avec joints ont été proposées [RAPETTI, 2000; TSUKERMAN, 1992]. Au lieu de considérer une interface commune il s'agit d'une surface (pour une étude 2D) ou d'un volume (pour une étude 3D) en commun qui est pris en compte. L'idée est de superposer des éléments le long de l'interface glissante, car les deux frontières génèrent un maillage non conforme. Pour cela, on introduit des éléments fictifs qui sont composés de nœuds principaux issus du maillage et de nœuds fictifs qui sont la projection des nœuds principaux sur la surface opposée. Les inconnues aux nœuds fictifs sont ensuite reliées aux inconnues aux nœuds du maillage par une relation simple dépendant de la rotation.

Ce tour d'horizon, certainement non exhaustif, donne un aperçu des travaux menés sur ce sujet et montre également l'intérêt qu'il suscite.

## 4 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement, qui sont plus couramment utilisées dans l'étude des structures industrielles. Cette catégorie de méthodes offre notamment une meilleure gestion des problèmes hétérogènes. Cependant, elles nécessitent de vérifier à la fois la continuité des champs primaux et duaux aux interfaces pour converger.

### 4.1 Décomposition d'un problème - notations

Nous proposons Figure 1.7 un exemple de décomposition en deux sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , séparés par une interface  $\Gamma_{ij}$ . Le problème est discrétisé dans le cadre d'une résolution magnétostatique 2D en terme de potentiel vecteur  $A$  comme présenté dans la partie précédente. Les vecteurs et matrices sont construits séparément sur chaque sous-domaine. On

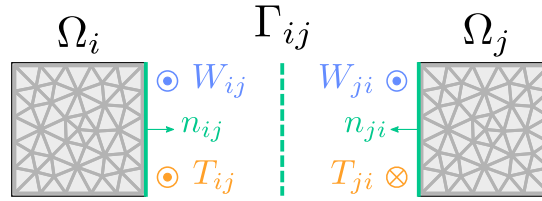


FIGURE 1.7 • Exemple de décomposition en deux sous-domaines

appelle alors  $A_i$  le potentiel vecteur dans  $\Omega_i$ ,  $\mathbf{K}_i$  et  $J_i$  les matrices et vecteur second membre du problème discret restreints au sous-domaine  $\Omega_i$ .

Sur l'interface  $\Gamma_{ij}$ , la continuité des quantités primale et duale doit être vérifiée pour garantir le lien entre les sous-domaines. Nous introduisons  $W_{ij}$  (resp.  $W_{ji}$ ) la restriction du potentiel vecteur  $A_i$  (resp.  $A_j$ ) sur  $\Gamma_{ij}$ . Sur un domaine  $\Omega_i$ , nous définissons un opérateur  $\mathbf{t}_{ij}$  permettant de faire cette restriction tel que

$$W_{ij} = \mathbf{t}_{ij} A_i. \quad (1.27)$$

Concernant le champ dual  $\underline{H}$ , seule sa composante tangentielle doit être imposée continue à travers une interface. Nous introduisons, pour simplifier les notations, un champ  $\underline{T}$  représentant la composante tangentielle de  $\underline{H}$  sur une interface de normale  $\underline{n}$  tel que

$$\underline{T} = T_z \underline{z} = \underline{n} \wedge \underline{H} \quad (1.28)$$

En 2D, ce vecteur  $\underline{T}$  n'a qu'une seule composante suivant  $\underline{z}$ , notée  $T_z$ . Elle est discrétisée avec les mêmes fonctions de forme que  $A_z$  (1.26), tel que :

$$T_z = N^T T, \quad (1.29)$$

Nous notons  $T_i$  le champ dans un sous-domaine  $\Omega_i$ . Comme pour le champ primal, nous introduisons la restriction sur une interface  $\Gamma_{ij}$  du champ dual sur  $\Omega_i$

$$T_{ij} = \mathbf{t}_{ij} T_i. \quad (1.30)$$

Les conditions de continuité entre deux sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  imposent alors sur une interface  $\Gamma_{ij}$

$$\begin{cases} W_{ij} - W_{ji} = 0 \\ T_{ij} + T_{ji} = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

Dans un cas général un sous-domaine possède un certain nombre d'interfaces. Pour simplifier les notations nous introduisons des vecteurs concaténés

$$W_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ W_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad T_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ T_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{t}_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad j \text{ parcourt les voisins.} \quad (1.32)$$

Suivant le même principe, nous introduisons des grandeurs blocs

$$W = \begin{pmatrix} \vdots \\ W_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \vdots \\ T_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{t}_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{K}_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \vdots \\ J_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

avec  $i$  qui parcourt tous les sous-domaines. Il est à noter que ces vecteurs et opérateurs concaténés ne sont jamais assemblés de cette manière dans les faits, il s'agit seulement de notations pour aider la compréhension des méthodes mises en place.

Nous introduisons également des opérateurs concaténés *somme* et *différence* sur les interfaces tels que

- $\mathbf{O}_s$  effectue la somme des vecteurs des deux côtés de chaque interface

$$(\mathbf{O}_s T)_{|\Gamma_{ij}} = T_{ij} + T_{ji} \quad (1.34)$$

- $\mathbf{O}_d$  effectue la différence des vecteurs des deux côtés de chaque interface

$$(\mathbf{O}_d W)_{|\Gamma_{ij}} = W_{ij} - W_{ji} \quad (1.35)$$

Suivant toutes ces notations, le problème décomposé en sous-domaines s'écrit finalement

$$\begin{cases} \mathbf{K} A = J + \mathbf{t}^T \tilde{T} \\ W = \mathbf{t} A \\ \mathbf{O}_d W = 0 \\ \mathbf{O}_s T = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$



Un terme  $\mathbf{t}^T \tilde{T}$  apparaît dans le second membre du problème. Il représente une nouvelle condition aux limites du sous-domaine provenant des interfaces vers des sous-domaines voisins. Il fait intervenir le champ dual d'interface généralisé tel que

$$\tilde{T} = \int_{\Gamma} \mathbf{N} \mathbf{N}^T T \, dS. \quad (1.37)$$

Différentes méthodes existent pour résoudre le problème une fois décomposé. Nous présentons dans la suite deux classes de méthodes : les approches primales et les approches duales.

## 4.2 Approche primale

Le principe de l'approche primale est de donner la priorité à la vérification de la continuité du champ primal aux interfaces lors de la résolution. Le champ primal est imposé continu et construit de façon à ce que le champ dual soit équilibré. Cette approche s'appuie sur des algorithmes de type Neumann-Neumann [DE ROECK & LE TALLEC, 1991; TALLEC et al., 1991]. En partant de l'écriture concaténée du problème (1.36), nous effectuons une renumérotation avantageuse des degrés de liberté en séparant les degrés de liberté sur le bord  $\Gamma$  de chaque sous-domaine (notés  $b$ ) et les degrés de liberté restant à l'intérieur des sous-domaines (notés  $r$ ). La première équation du problème peut alors s'écrire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rb} \\ \mathbf{K}_{br} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_r \\ J_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{T} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

La variable primale interne  $A_r$  est exprimée en fonction de celle du bord en inversant le problème

$$\mathbf{K}_{rr} A_r = -(\mathbf{K}_{rb} A_b - J_r). \quad (1.39)$$

En remplaçant  $A_r$  dans les trois autres équations du problème, nous obtenons un problème condensé aux interfaces faisant intervenir le complément de Schur primal  $\mathbf{S}_p$  et seulement les champs aux interfaces car  $A_b = W$

$$\begin{cases} \mathbf{S}_p W = b_p + \tilde{T} \\ \mathbf{O}_d W = 0 \\ \mathbf{O}_s T = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

avec

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{br} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rb} \quad (1.41)$$

et

$$b_p = J_b - \mathbf{K}_{rr}^{-1} J_r \quad (1.42)$$

le second membre généralisé condensé sur les interfaces.

Dans le système (1.40) le champ dual est éliminé avec la condition  $\mathbf{O}_s T = 0$ . La contrainte de continuité de la variable primale est elle prise en compte via une inconnue d'interface

unique  $W_b$  telle que  $W = \mathbf{O}_s^T W_b$ .

### Exemple

Sur une interface  $\Gamma_{ij}$ , la contrainte de continuité de la variable primale implique que  $W_{ij} = W_{ji}$ . Ainsi, l'inconnue d'interface  $W_b$  s'écrit :

$$W_b = W_{ij} = W_{ji} \quad (1.43)$$

Le problème à résoudre consiste à chercher  $W_b$  vérifiant le problème aux interfaces

$$\mathbf{O}_s \mathbf{S}_p \mathbf{O}_s^T W_b = \mathbf{O}_s b_p. \quad (1.44)$$

En pratique, l'opérateur  $\mathbf{O}_s \mathbf{S}_p \mathbf{O}_s^T$  n'est pas assemblé pour résoudre le problème. En effet, le complément de Schur  $\mathbf{S}_p$  est une matrice ayant une forte largeur de bande ne permettant pas de recourir à des factorisations directes du type Cholesky, LU... L'idée est alors d'utiliser des solveurs itératifs qui ne nécessitent pas le calcul explicite de  $\mathbf{S}_p$ . C'est le cas pour des algorithmes du type gradient conjugué.

Notamment, la méthode *Balancing Domain Decomposition* (BDD) [MANDEL, 1993; MANDEL & BREZINA, 1993] s'appuie sur l'approche primale et propose un algorithme de résolution utilisant un solveur gradient conjugué préconditionné. Le choix du préconditionneur doit permettre la meilleure approximation de l'inverse du complément de Schur global  $\underline{\mathbf{S}}_p = \mathbf{O}_s \mathbf{S}_p \mathbf{O}_s^T$ . Une façon optimale d'approximer l'inverse de cet opérateur global (qui est une somme de contributions locales), est de définir une somme pondérée des inverses des contributions locales

$$\underline{\mathbf{S}}_p^{-1} \approx \mathbf{W} \mathbf{O}_s \mathbf{S}_p^+ \mathbf{O}_s^T \mathbf{W}^T \quad (1.45)$$

avec  $\mathbf{W}$  une matrice diagonale de pondération [RIXEN & FARHAT, 1999] et  $\mathbf{S}_p^+ = \mathbf{S}_d$  le complément de Schur dual local par sous-domaine.

Il est à souligner que la méthode BDD intègre la résolution d'un problème grossier, s'inspirant des méthodes multi-grilles [MANDEL et al., 1987], pour propager l'information à travers tous les sous-domaines, ce qui accélère la convergence de l'algorithme. Le principe est de vérifier une condition d'optimalité entre le résidu  $r = b_p - \underline{\mathbf{S}}_p W_b$  et le noyau des compléments de Schur locaux  $\mathbf{G}$  telle que

$$\mathbf{G}^T r = 0. \quad (1.46)$$

Un projecteur grossier  $\mathbf{P}$  est introduit pour vérifier la condition (1.46) tel que :

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \underline{\mathbf{S}}_p \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}_p. \quad (1.47)$$

L'algorithme 4 présente les étapes de la résolution du problème (1.44).

## 4.3 Approche duale

L'approche duale a été introduite par [FARHAT et al., 1994; FARHAT & ROUX, 1991] dans le cadre de la méthode *Finite Element Tearing and Interconnecting* (FETI). Son principe est d'imposer la condition de continuité du champ primal via un multiplicateur de Lagrange

---

**Algorithme 4 :** Méthode BDD avec solveur gradient conjugué préconditionné

---

**Initialisation :**

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_p \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}_p \\ W_b^{(0)} &= \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_p \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T b_p \\ r^{(0)} &= \mathbf{P}^T (b_p - \mathbf{S}_p W_b^{(0)}) = \mathbf{P}^T b_p \\ z^{(0)} &= \tilde{\mathbf{S}}_p^{-1} r^{(0)} \text{ et } d^{(0)} = z^{(0)} \end{aligned}$$

**for**  $n = 0, 1, \dots$  **do**

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= \mathbf{S}_p \mathbf{P} d^{(n)} \\ \alpha^{(n)} &= \frac{r^{(n)T} d^{(n)}}{d^{(n)T} p^{(n)}} \\ W_b^{(n+1)} &= W_b^{(n)} + \alpha^{(n)} d^{(n)} \\ r^{(n+1)} &= r^{(n)} - \alpha^{(n)} p^{(n)} \\ z^{(n+1)} &= \tilde{\mathbf{S}}_p^{-1} r^{(n+1)} \\ \text{for } j &= 0 \text{ to } n \text{ do} \\ &\quad \left| \beta_j^{(n)} = -\frac{z^{(n+1)T} p^{(j)}}{d^{(j)T} p^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. \text{end} \right. \\ d^{(n+1)} &= z^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \beta_j^{(n)} d^{(j)} \end{aligned}$$

**end**

---

unique sur les interfaces, noté  $\lambda_b$ . Lors de la résolution, la priorité est alors donnée au respect de la condition d'équilibre du champ dual, la discontinuité du champ primal diminuant au court des itérations.

Comme pour l'approche primale, nous partons de l'écriture décomposée du problème (1.36) et nous condensons cette écriture sur les interfaces via une renumérotation des degrés de liberté amenant au système rappelé ici :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_p W = b_p + \tilde{T} \\ \mathbf{O}_d W = 0 \\ \mathbf{O}_s T = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

La première étape pour déterminer le problème aux interfaces avec l'inconnue duale est d'exprimer le champ primal  $W$  en fonction du champ dual en « inversant » le complément de Schur primal  $\mathbf{S}_p$  de la première équation. En pratique,  $\mathbf{S}_p$  n'est pas inversible, nous introduisons alors sa pseudo-inverse locale par sous-domaine, notée  $\mathbf{S}_p^+ = \mathbf{S}_d$ . Le champ primal aux interfaces s'écrit

$$W = \mathbf{S}_d (b_p + \tilde{T}) + \mathbf{R}\alpha. \quad (1.49)$$

Le terme  $\mathbf{R}\alpha$  provient de l'inversion du complément de Schur : il s'agit d'une solution qui appartient au noyau de  $\mathbf{S}_p$ . Cette expression doit être accompagnée d'une condition d'orthogonalité entre le noyau du complément de Schur  $\mathbf{R}$  et le second membre du système,

correspondant à l'équilibre du champ dual sur les sous-domaines, et qui s'écrit

$$\mathbf{R}^T(b_p + \tilde{T}) = 0. \quad (1.50)$$

Comme  $\mathbf{O}_s T = 0$ , il est possible d'exprimer  $T$  en fonction du multiplicateur  $\lambda_b$  tel que  $T = \mathbf{O}_d^T \lambda_b$ . De plus, en tenant compte de la condition de continuité du champ primal  $\mathbf{O}_d W = 0$ , le système devient

$$\begin{cases} (\mathbf{O}_d \mathbf{S}_d \mathbf{O}_d^T) \lambda_b = -\mathbf{O}_d \mathbf{S}_d b_p - \mathbf{O}_d \mathbf{R} \alpha \\ \mathbf{R}^T(b_p + \mathbf{O}_d^T \lambda_b) = 0 \end{cases}. \quad (1.51)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_d & \mathbf{G}_d \\ \mathbf{G}_d^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_b \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_d \\ -e \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}_d &= \mathbf{O}_d \mathbf{S}_d \mathbf{O}_d^T \\ \mathbf{G}_d &= \mathbf{O}_d \mathbf{R} \\ b_d &= \mathbf{O}_d \mathbf{S}_d b_p \\ e &= \mathbf{R}^T b_p \end{aligned} \quad (1.53)$$

Le problème une fois posé avec l'approche duale peut être résolu par un solveur itératif. La méthode FETI utilise un algorithme du type gradient conjugué projeté préconditionné. En effet, le problème aux interfaces est projeté à l'aide d'un opérateur  $\mathbf{P}$  de façon à vérifier à chaque itération la contrainte d'admissibilité

$$\mathbf{G}_d^T \lambda_b = -e \quad (1.54)$$

Le projecteur  $\mathbf{P}$  est de la forme

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T \quad (1.55)$$

avec  $\mathbf{Q}$  une matrice colonne de rang plein. Le multiplicateur de Lagrange recherché s'exprime alors tel que

$$\lambda_b = \lambda_b^{(0)} + \mathbf{P} \lambda_b^* \quad (1.56)$$

avec  $\lambda_b^{(0)}$  une estimation initiale de la solution qui vérifie la contrainte (1.54) et  $\mathbf{P} \lambda_b^*$  l'itéré construit par le solveur itératif.

$$\lambda_b^{(0)} = -\mathbf{Q} \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_d)^{-1} e \quad (1.57)$$

En utilisant le projecteur, le problème à résoudre devient

$$(\mathbf{P}^T \underline{\mathbf{S}}_d \mathbf{P}) \lambda_b^* = \mathbf{P}^T (-b_d - \underline{\mathbf{S}}_d \lambda_b^{(0)}) \quad (1.58)$$

Comme pour l'approche primale, un préconditionneur est choisi pour approximer l'inverse du complément de Schur dual par une somme d'inverses locaux

$$\underline{\mathbf{S}}_d^{-1} \approx \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{O}_d \mathbf{S}_d^+ \mathbf{O}_d^T \tilde{\mathbf{W}}^T \quad (1.59)$$

avec  $\tilde{\mathbf{W}}$  une matrice diagonale de pondération et  $\mathbf{S}_d^+ = \mathbf{S}_p$  le complément de Schur primal local par sous-domaine. L'algorithme 5 résume la méthode FETI présentée.

---

**Algorithme 5 :** Méthode FETI avec solveur gradient conjugué préconditionné

---

**Initialisation :**

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T \\ \lambda_b^{(0)} &= -\mathbf{G}_d (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} e \\ r^{(0)} &= \mathbf{P}^T (-b_d - \mathbf{S}_d \lambda_b^{(0)}) \\ z^{(0)} &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{S}}_d^{-1} r^{(0)} \text{ et } d^{(0)} = z^{(0)} \end{aligned}$$

**for**  $n = 0, 1 \dots m$  **do**

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{S}_d d^{(n)} \\ \alpha^{(n)} &= \frac{r^{(n)T} d^{(n)}}{d^{(n)T} p^{(n)}} \\ \lambda_b^{(n+1)} &= \lambda_b^{(n)} + \alpha^{(n)} d^{(n)} \\ r^{(n+1)} &= r^{(n)} - \alpha^{(n)} p^{(n)} \\ z^{(n+1)} &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{S}}_d^{-1} r^{(n+1)} \\ \text{for } j &= 0 \text{ to } n \text{ do} \\ &\quad \beta_j^{(n)} = -\frac{z^{(n+1)T} p^{(j)}}{d^{(j)T} p^{(j)}} \\ \text{end} \\ d^{(n+1)} &= z^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \beta_j^{(n)} d^{(j)} \end{aligned}$$

**end**

**Post-processing :**

$$\begin{aligned} \alpha_b &= (\mathbf{G}_d^T \mathbf{G}_d)^{-1} \mathbf{G}_d^T (-b_d - \mathbf{S}_d \lambda_b^{(m)}) \\ W_b &= \mathbf{S}_p^+ (b_p + \mathbf{O}_s^T \lambda_b^{(m)}) + \mathbf{R}_b \alpha \end{aligned}$$


---

D'autres versions de la méthode FETI ont été développées au cours des années :

- FETI-2 : contrairement à la version précédemment présentée qui peut être considérée comme ayant un seul niveau, la méthode FETI-2 [FARHAT et al., 1998; FARHAT & MANDEL, 1998] intègre des contraintes supplémentaires dans le problème grossier afin de traiter les structures en plaques, coques et les applications dynamiques de manière plus efficace.
- FETI-DP : une version duale-primale est proposée pour la méthode FETI [FARHAT et al., 2001]. Des conditions de Dirichlet aux nœuds « coins » sont également prises en compte à chaque itération du Gradient Conjugué, éliminant ainsi la nécessité de déterminer la solution appartenant au noyau du complément de Schur. Le système à résoudre devient inversible.
- FETI-DP hybride : pour un grand nombre de sous-domaines et de processeurs, l'élimination exacte des variables primales avec la méthode FETI-DP peut entraîner une

détérioration de la scalabilité parallèle des méthodes de décomposition de domaine [KLawonn & Rheinbach, 2010; Riha et al., 2017]. Une combinaison des méthodes FETI-1 et FETI-DP est utilisée. Les sous-domaines sont regroupés en clusters où les conditions de Dirichlet « coins » sont imposées. Ces clusters servent de base pour résoudre le problème grossier de la méthode FETI-1.

- FETI-DPH : une version de la méthode FETI-DP pour la résolution de problèmes acoustiques a été proposée par [Farhat et al., 2005].

## 5 Développements des méthodes de décomposition de domaine pour la magnéto-statique

Avec l'intérêt croissant de l'industrie pour le développement de nouvelles machines tournantes ou l'amélioration des existantes, une attention particulière a été accordée ces dernières décennies aux performances des simulations magnéto-statiques. Seuls les ordinateurs à architecture parallèle donnent les capacités nécessaires aux performances requises. Les méthodes de décomposition de domaine exploitent pleinement ces possibilités. Bien qu'elles ne soient pas les méthodes les plus couramment utilisées dans le domaine de la magnéto-statique, elles font l'objet de développements récents que nous présentons dans cette section.

Les approches basées sur une décomposition du problème sans recouvrement sont les plus couramment utilisées. Une formulation primale du problème condensé aux interfaces est employée par [Marsa & Kuczmann, 2015] pour analyser en 2D une machine tournante en prenant en compte le champ électromagnétique, le circuit externe et le mouvement du rotor. Dans une autre étude [Kanayama et al., 2013], une résolution à grande échelle a été réalisée en utilisant la méthode itérative *MINimal RESidual* (MINRES) qui montre une meilleure convergence. Une nouvelle technique de décomposition de domaine hiérarchique basée sur l'approche primale du problème est proposée par [Sugimoto et al., 2010] et permet une résolution efficace sur des ordinateurs à architecture massivement parallèle.

Lors du développement des méthodes de décomposition de domaine pour la simulation de machines, un défi majeur consiste à prendre en compte le mouvement relatif du rotor par rapport au stator. Différentes approches, discutées dans la section 3, ont été développées pour intégrer efficacement cet aspect. Afin de minimiser les coûts de communication entre les parties fixes et mobiles, une décomposition en sous-domaines distincts est réalisée entre le rotor et le stator [Takahashi et al., 2016].

Dans le cas de la simulation des machines tournantes prenant en compte les courants de Foucault, le problème est formulé en termes à la fois du potentiel vecteur  $\underline{A}$  et du potentiel scalaire électrique  $\phi$ . En 3D, ces quantités ne sont pas discrétisées sur les mêmes types de degrés de liberté :  $\underline{A}$  est exprimé le long d'arêtes des éléments du maillage,  $\phi$  est exprimé aux nœuds. Des éléments avec recouvrement sont ajoutés aux frontières des sous-domaines afin de permettre la communication des potentiels sur les arêtes et les nœuds entre les sous-domaines voisins [Nakano et al., 2010; Nakano et al., 2012; Takahashi et al., 2016].

Dans le contexte de simulations de moteurs à aimant permanent intérieur (IPM) alimentés par des onduleurs à modulation de largeur d'impulsion (PWM), il est nécessaire de prendre en compte simultanément un grand nombre d'inconnues et une taille de pas de

temps suffisamment petite. Afin de réduire le coût de calcul des analyses par pas de temps, certaines méthodes d'intégration parallèle dans le temps (PinT) ont été proposées [SCHOPS et al., 2018]. Des travaux ont été réalisés pour combiner une DDM standard avec la méthode de correction d'erreur explicite périodique en temps (TP-EEC) parallèle [TAKAHASHI et al., 2019; 2021]. Cette méthode de décomposition espace-temps s'avère très efficace tant qu'un équilibre est maintenu entre le nombre de sous-domaines en espace et en temps.

Les méthodes FETI-DP ont été principalement appliquées dans le contexte des problèmes acoustiques et électromagnétiques [FARHAT et al., 2005; Y.-J. LI & JIN, 2007; 2009; LU & JIN, 2014]. Plus récemment, elles ont été adoptées pour la simulation des machines tournantes par [YAO et al., 2012; 2013] et ont démontré une bonne extensibilité numérique. Par la suite, une extension de la méthode FETI-DP a été proposée par [YAO et al., 2014] afin de traiter les matériaux non linéaires en utilisant la méthode de Newton-Raphson. En linéarisant le problème non linéaire d'origine, la méthode de Newton-Raphson permet d'appliquer la méthode FETI-DP à chaque itération, ce qui permet de réduire le temps de calcul global grâce à l'utilisation de techniques de calcul parallèle. Cette stratégie a le désavantage de ne pas tirer parti de la décomposition de domaine pour résoudre le problème non-linéaire, mais seulement pour résoudre le problème tangent. Une autre façon de procéder consiste à décomposer le problème non-linéaire global en sous-problèmes non-linéaires tangents condensés sur les interfaces. Ces deux façons de procéder sont comparées par [GHENAI et al., 2023].

Ces dernières années, de nouvelles méthodes ont été développées pour améliorer les performances numériques, même dans les cas où une grande précision est nécessaire et où la taille du problème étudié est augmentée. Ces méthodes explorent des approches très différentes afin de relever ces défis. Dans l'étude de [LEHIKONEN et al., 2017], une méthode de décomposition de domaine de type maître/esclave est utilisée. Les encoches esclaves sont modélisées par une réponse impulsionnelle pré-calculée, et elles sont ensuite couplées au reste du domaine maître au niveau de la frontière. Cette approche est également étendue pour inclure une décomposition en temps.

Plus récemment, les travaux de [J. LI et al., 2020; LIU & DINAVAH, 2018] proposent une méthode de décomposition de domaine massivement parallélisable tirant parti des nouvelles technologies des calculateurs multi-cœurs. Le domaine d'étude est divisé en un grand nombre de sous-domaines ne contenant qu'une seule inconnue d'arête chacun. La résolution peut être massivement parallélisée, et le schéma de communication élimine la nécessité d'assembler la matrice globale des éléments finis. Cependant un très large nombre de processeurs est nécessaire, ce qui limite l'utilisation de cette méthode.

\* \* \*

### > Bilan

La simulation des problèmes de magnétostatique avec un grand nombre de degrés de liberté constitue un défi en matière de calcul numérique. Pour obtenir des performances satisfaisantes dans l'industrie, nous pouvons exploiter les ordinateurs à architecture parallèle en utilisant des méthodes de résolution basées sur la décomposition de domaine. Le principe de ces méthodes a été introduit par Schwarz, avec ou sans recouvrement lors de la décomposition, et s'adapte à la résolution par éléments finis avec l'évolution des ordinateurs.

Dans une première approche, le problème de magnétostatique 2D est discrétisé à l'aide des éléments finis de Lagrange. Pour la résolution de problèmes 3D, un traitement particulier de la non-unicité de la solution est à opérer, ainsi qu'une meilleure considération de la physique grâce aux éléments de Whitney. Ces aspects sont abordés dans le Chapitre 3.

Le problème discrétisé est ensuite décomposé en plusieurs sous-domaines afin de réduire la taille des sous-problèmes résolus par les processeurs. Grâce à une réorganisation astucieuse des degrés de liberté du problème, il est possible de condenser le problème aux interfaces en introduisant le complément de Schur. Différentes approches sont ensuite développées, proposant des algorithmes itératifs qui convergent vers la solution du problème global. Les approches primales se concentrent sur la vérification exacte de la continuité du champ primal aux interfaces à chaque itération, tout en cherchant à satisfaire l'équilibre du champ dual à la convergence. D'autre part, les approches duales se basent sur la vérification de l'équilibre du champ dual aux interfaces (qui satisfait également un équilibre global), puis vérifient la continuité du champ primal au cours des itérations. Ces méthodes ont connu des développements spécifiques pour la résolution de problèmes de magnétostatique dans le contexte des machines tournantes, offrant des performances prometteuses.

Des approches mixtes ont été développées pour traiter de manière équitable à la fois le champ primal et le champ dual aux interfaces. L'une de ces méthodes, appelée méthode LATIN, est l'objet des développements présentés dans les chapitres suivants.



## 2

---

# La méthode LATIN-DDM : cas d'application magnétostatique

*La méthode LATIN appliquée au cadre de la décomposition de domaine est introduite dans ce chapitre. La première section se concentre sur l'adaptation de cette méthode au cadre de la magnétostatique. Classiquement, l'implémentation mono-échelle met en évidence son manque d'extensibilité, ce qui conduit à l'introduction de sa version multi-échelle dans la dernière section.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction de la méthode LATIN</b> . . . . .	<b>30</b>
1.1	Principes de la méthode . . . . .	30
1.2	Développements pour la mécanique . . . . .	31
<b>2</b>	<b>La méthode LATIN pour la décomposition de domaine en magnétostatique</b> <b>32</b>	
2.1	Séparation des difficultés . . . . .	32
2.2	Algorithme itératif à deux étapes . . . . .	33
2.3	Convergence . . . . .	36
2.4	Choix des directions de recherche . . . . .	37
2.5	Conditions aux limites . . . . .	39
2.6	Initialisation . . . . .	40
2.7	Algorithme mono-échelle . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Première implémentation et limites des méthodes mono-échelles</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Validation sur un cas simple . . . . .	41
3.2	Limites des méthodes mono-échelle . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Extension à une approche multi-échelle</b> . . . . .	<b>44</b>
4.1	Introduction des méthodes multi-échelles . . . . .	44

4.2	Approche multi-échelle : réécriture de l'étape linéaire . . . . .	47
4.3	Comparaison des approches . . . . .	53
>	Bilan . . . . .	56

# 1 Introduction de la méthode LATIN

## 1.1 Principes de la méthode

La méthode LATIN, pour Large Time INcrement method, est une méthode de résolution de problèmes non-linéaires sur tout l'espace et tout l'intervalle de temps, initialement développée par [LADEVÈZE, 1985; LADEVÈZE, 1999]. Contrairement aux méthodes classiques de résolution par un algorithme de Newton-Raphson, dans lesquelles la solution est construite de manière incrémentale (pas de temps par pas de temps), la méthode LATIN est itérative mais non incrémentale. A chaque itération, une meilleure approximation de la solution est construite pour l'ensemble de l'espace et de l'intervalle de temps.

La méthode LATIN repose sur trois principes :

- 1. Séparation des difficultés.** Les équations qui composent le problème sont séparées en deux groupes. Le premier groupe est composé des équations linéaires et éventuellement globales. Le second rassemble les équations locales et éventuellement non-linéaires. Deux groupes de solutions partielles du problème sont alors introduits. Les solutions des équations linéaires sont définies dans un espace  $\mathcal{A}_d$  et sont notées  $s$ . De la même manière, l'espace  $\Gamma$  rassemble les solutions des équations locales, notées  $\hat{s}$  pour les différencier des précédentes.
- 2. Schéma itératif à deux étapes.** Les solutions partielles  $s$  et  $\hat{s}$  sont construites de manière successive dans chaque groupe. En divisant les équations en deux groupes distincts, chaque sous-problème devient maintenant mal posé. Des directions de recherche  $E^-$  et  $E^+$  sont alors introduites pour passer d'un groupe à l'autre :  $E^-$  doit être choisie pour vérifier le caractère linéaire du problème à résoudre, tandis que  $E^+$  doit permettre de conserver l'aspect local. La solution du problème se situe à l'intersection des deux groupes  $\mathcal{A}_d$  et  $\Gamma$ , lorsque toutes les équations du problème sont satisfaites. Ce schéma itératif est illustré Figure 2.1.

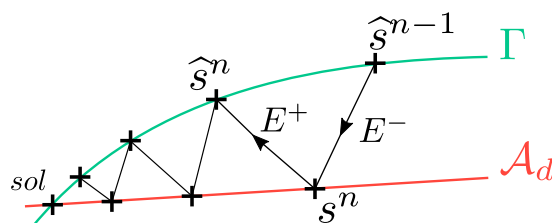


FIGURE 2.1 • Schéma itératif de la méthode LATIN

- 3. Représentation adaptée des inconnues.** La séparation des solutions est propice à l'écriture décomposée de la solution linéaire  $s$  en une somme de produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps. Cette caractéristique ouvre la voie à une

intégration naturelle de méthodes de réduction de modèle dans l'algorithme de résolution.

### Remarque

Le dernier principe de la méthode LATIN ne sera pas utilisé dans le cadre de ces travaux. Les problèmes abordés seront linéaires et indépendants du temps, et peuvent se traiter efficacement sans une représentation spécifique de l'espace-temps.

## 1.2 Développements pour la mécanique

La stratégie de calcul proposée par la méthode LATIN s'est montrée efficace dans de nombreux aspects de la simulation de structures mécaniques. Dans de premières approches, cette méthode non incrémentale a permis d'aborder les problèmes d'élasto-plasticité, de visco-plasticité, et les phénomènes cycliques [BOISSE et al., 1991; J.-Y. COGNARD & LADEVÈZE, 1991; LADEVÈZE, 1985; LADEVÈZE, 1999]. Des études ont été menées dans le cadre des grandes déformations [P.-A. BOUCARD et al., 1997; VAUCHEZ, 1991], ou des couplages thermo-mécaniques [J. Y. COGNARD et al., 1999]. Les phénomènes d'endommagement ont été introduits par [ALLIX & LADEVÈZE, 1992] pour les composites et ensuite étendus aux non-linéarités géométriques par [SAAVEDRA, 2012], les travaux de [BHATTACHARYYA et al., 2019; VITSE et al., 2019] traitent de l'endommagement pour des structures en béton. On pourra trouver dans [SCANFF et al., 2021] une revue exhaustive des problèmes traités avec la méthode LATIN.

En plus d'être une méthode adaptée à la résolution de problèmes non-linéaires, le principe de la méthode LATIN qui consiste à séparer les équations en deux groupes offre la possibilité de traiter des problèmes dans lesquels on souhaite dissocier certains comportements ou des couplages. Dans de tels cas, il s'agit par exemple de traiter des problèmes multi-physiques ou des approches du type décomposition de domaine. Dans le second cas, l'idée est d'introduire des sous-domaines et des interfaces comme des entités à part entière, respectant le principe de séparation des équations : les équations linéaires de  $\mathcal{A}_d$  sont définies dans les sous-domaines, tandis que les équations locales de  $\Gamma$  sont définies sur les interfaces. Chaque interface possède sa propre discrétisation et porte à la fois les champs de déplacements et d'efforts. Ces considérations ont été introduites pour la décomposition de domaine par [LORONG, 1994], puis étendues aux implémentations parallèles par [DUREISSEIX, 1997]. Au delà de la mise en place de stratégies de décomposition de domaine, cette séparation sous-domaines/interfaces permet le traitement spécifique des équations locales, ouvrant la voie à des études intégrant des comportements de contact complexes [CHAMPANEY et al., 1999; LADEVÈZE et al., 2002; ROULET, 2011]. Il est aussi possible de traiter des problèmes multi-physiques [DUREISSEIX et al., 2003; NÉRON & DUREISSEIX, 2008; WURTZER et al., 2023] en découplant les physiques les unes des autres au sein de l'étape linéaire, les équations de couplages étant traitées lors de l'étape locale via des « interfaces entre physiques ». Cette approche de la méthode LATIN a permis l'étude de comportements de contacts pour les assemblages [BLANZÉ et al., 2000; CHAMPANEY, 1996], des comportements inter-plis pour les composites [KERFRIDEN et al., 2009; SAAVEDRA et al., 2012], de la fissuration in-

tégrant des méthodes XFEM [GUIDAULT et al., 2008], ou encore du contact frottant pour les assemblages [OUMAZIZ et al., 2018]. La séparation des équations offre également une stratégie de résolution pour les études multi-paramétriques. L'espace linéaire  $\mathcal{A}_d$  est défini indépendamment des paramètres, ce qui signifie qu'une solution de cet espace peut être utilisée comme initialisation d'une étude pour un paramètre différent, ce qui accélère la résolution [P. A. BOUCARD & CHAMPANEY, 2003; ODIÈVRE, 2009; ROULET, 2011].

Enfin, le troisième principe de la méthode LATIN, basé sur sa nature non-incrémentale et la séparation des équations en deux groupes, offre la possibilité de mettre en œuvre des stratégies de séparation temps/espace dans la formulation des inconnues recherchées. Cette formulation est propice à l'implémentation de méthodes de réduction de modèle [J.-Y. COGNARD & LADEVÈZE, 1993; LADEVÈZE, 1985]. En effet, la linéarité des équations du groupe  $\mathcal{A}_d$  permet la recherche d'une solution sous la forme de modes à variables séparées, ce qui réduit la taille du problème. Ces dernières années, différentes applications ont été développées, notamment pour la (visco)-plasticité [LADEVÈZE et al., 2010; PASSIEUX et al., 2010; RELUN et al., 2013], pour l'endommagement [ALAMEDDIN et al., 2017; VITSE et al., 2019], ou pour la dynamique non-linéaire [DABY-SEESARAM et al., 2023] avec une implémentation hybride temps-fréquence pour la simulation de structures sous chargement sismique.

Cette liste, non exhaustive, de travaux réalisés autour de la méthode LATIN et leur diversité illustre l'intérêt croissant qu'elle suscite dans le domaine de la simulation des structures mécaniques. Les développements effectués démontrent des performances intéressantes. Cependant, la méthode LATIN présente encore l'inconvénient d'être fortement intrusive dans sa forme classique, ce qui limite sa transférabilité vers l'industrie. Des travaux récents ont été entrepris pour rendre la méthode moins intrusive, notamment pour s'intégrer aux codes industriels existants. Par exemple, dans [SCANFF et al., 2019], une version faiblement intrusive de la méthode LATIN est proposée pour la résolution de problèmes non-linéaires, tandis que dans [OUMAZIZ et al., 2019], une méthode de décomposition de domaine multi-échelle non intrusive est développée pour les assemblages mécaniques. Ces avancées visent à rendre la méthode LATIN plus accessible et applicable dans un contexte industriel.

L'objectif qui sera poursuivi dans la suite de ce chapitre est de sortir de la mécanique et de capitaliser sur les travaux antérieurs pour proposer une méthode de décomposition de domaine efficace dédiée à la simulation magnéto-statique.

## 2 La méthode LATIN pour la décomposition de domaine en magnéto-statique

### 2.1 Séparation des difficultés

Dans cette partie, nous mettons en œuvre la méthode LATIN pour la décomposition de domaine dans le contexte de la magnéto-statique. Nous reprenons le problème de magnéto-statique de référence défini dans la section 2.1. La méthode est initialement présentée dans une approche 2D, où le problème est discrétisé à l'aide des éléments finis de Lagrange et décomposé en sous-domaines et interfaces selon les notations introduites dans la section

4.1. Le problème décomposé à résoudre est rappelé ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} A = J + \mathbf{t}^T \tilde{T} \\ W = \mathbf{t} A \\ \mathbf{O}_d W = 0 \\ \mathbf{O}_s T = 0 \end{array} \right. . \quad (2.1)$$

Sous l'hypothèse d'une résolution linéaire, la recherche de la solution du problème peut se ramener à la connaissance des grandeurs d'interfaces seulement. On notera alors  $s = (W, T)$  la solution du problème.

Le premier principe de la méthode LATIN consiste à séparer les équations du problème en deux groupes. Dans le cadre de son application à la décomposition de domaine, ce principe revient à séparer les équations relatives aux sous-domaines de celles intervenant sur les interfaces. Ainsi, les solutions  $s$  de l'espace  $\mathcal{A}_d$  satisfont les équations d'équilibre des sous-domaines

$$\mathcal{A}_d : s = (W, T) \quad \text{tq} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} A = J + \mathbf{t}^T \tilde{T} \\ W = \mathbf{t} A \end{array} \right. . \quad (2.2)$$

L'espace  $\Gamma$  regroupe quant à lui les solutions  $\hat{s}$  vérifiant les équations de continuité aux interfaces

$$\Gamma : \hat{s} = (\widehat{W}, \widehat{T}) \quad \text{tq} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{O}_d \widehat{W} = 0 \\ \mathbf{O}_s \widehat{T} = 0 \end{array} \right. . \quad (2.3)$$

## 2.2 Algorithme itératif à deux étapes

Chacun des deux sous-problèmes est mal posé car il ne dispose pas de l'ensemble complet des équations. Cependant, en mettant en place un algorithme itératif avec des directions de recherche  $E^-$  et  $E^+$ , il est possible de construire une solution pour le problème complet. Les directions de recherche constituent des relations linéaires locales entre les quantités d'interface des deux espaces de solutions

$$E^- : T - \widehat{T} + \mathbf{k}^- (W - \widehat{W}) = 0 , \quad (2.4)$$

$$E^+ : \widehat{T} - T - \mathbf{k}^+ (\widehat{W} - W) = 0 , \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{k}^-$  et  $\mathbf{k}^+$  des opérateurs de direction de recherche, sur lesquels plus de détails sont apportés dans la partie 2.4.

Ces directions de recherche permettent d'ajouter une équation à chaque sous-problème, qui peut alors être résolu, et de passer d'un espace de solution à l'autre successivement. L'algorithme itératif est alors constitué des deux étapes suivantes, exprimées à une itération  $n$  :

» Étape linéaire

Connaissant  $\hat{s}^{n-1} = (\widehat{W}^{n-1}, \widehat{T}^{n-1})$  dans  $\Gamma$ , trouver  $s^n = (W^n, T^n)$  dans  $\mathcal{A}_d$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{K} A^n = J + \mathbf{t}^T \widehat{T}^n \\ W^n = \mathbf{t} A^n \\ T^n - \widehat{T}^{n-1} + \mathbf{k}^- (W^n - \widehat{W}^{n-1}) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

» Étape locale

Connaissant  $s^n = (W^n, T^n)$  dans  $\mathcal{A}_d$ , trouver  $\hat{s}^n = (\widehat{W}^n, \widehat{T}^n)$  dans  $\Gamma$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{O}_d \widehat{W}^n = 0 \\ \mathbf{O}_s \widehat{T}^n = 0 \\ \widehat{T}^n - T^n - \mathbf{k}^+ (\widehat{W}^n - W^n) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

••• Remarque

Une étape de relaxation est ajoutée après chaque étape linéaire pour améliorer la convergence de l'algorithme. La solution  $s^n$  devient

$$s^n \leftarrow r s^n + (1 - r) s^{n-1}. \quad (2.8)$$

avec  $r$  le coefficient de relaxation.

Nous soulignons que les équations des deux étapes, exprimées de cette manière, font intervenir des opérateurs et vecteurs concaténés qui, en pratique, ne sont jamais assemblés. Les équations relatives à chaque sous-domaine sont indépendantes des autres sous-domaines et peuvent être résolues séparément. Il est possible de mettre en place une stratégie de calcul adaptée, notamment en parallèle, ce qui sera abordé en détail dans le Chapitre 4. De même, les équations de l'étape locale incluent des relations de continuité entre les champs primal et dual de part et d'autre de chaque interface, de manière indépendante. Chaque interface est traitée séparément des autres. Nous détaillons ensuite le problème effectivement résolu pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$  à l'étape linéaire  $n$ , ainsi que pour chaque interface  $\Gamma_{ij}$  lors de l'étape locale  $n$ .

### 2.2.1 Résolution de l'étape linéaire

Pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$  (voir Figure 2.2), l'étape linéaire consiste à chercher les champs restreints aux interfaces du sous-domaine ( $W_i^n$  et  $T_i^n$ ) connaissant les champs issus de l'étape locale précédente sur les interfaces vers les sous-domaines voisins. Sur l'exemple Figure 2.2, le sous-domaine  $\Omega_i$  possède deux voisins  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$ . L'expression concaténée des champs aux interfaces du sous-domaine donne

$$W_i^n = \begin{bmatrix} W_{ij}^n \\ W_{ik}^n \end{bmatrix}, \quad T_i^n = \begin{bmatrix} T_{ij}^n \\ T_{ik}^n \end{bmatrix}, \quad \widehat{W}_i^{n-1} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{ij}^{n-1} \\ \widehat{W}_{ik}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{T}_i^{n-1} = \begin{bmatrix} \widehat{T}_{ij}^{n-1} \\ \widehat{T}_{ik}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

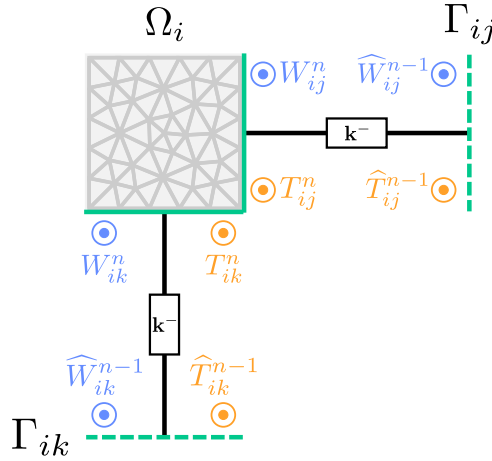


FIGURE 2.2 • Problème sur un sous-domaine  $\Omega_i$

L'équation de direction de recherche du problème linéaire nous permet d'exprimer le champ dual  $T_i^n$  en fonction des autres inconnues d'interfaces, notamment celles provenant de l'étape locale précédente

$$T_i^n = \widehat{T}_i^{n-1} - \mathbf{k}_i^- (W_i^n - \widehat{W}_i^{n-1}). \quad (2.10)$$

Comme il s'agit du champ dual généralisé (Eq. (1.37)) qui intervient dans l'équation d'équilibre du sous-domaine, nous repartons de son écriture intégrale pour mettre en évidence les nouveaux termes issus de l'ajout d'une direction de recherche

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \mu^{-1} A_i^{*T} (\nabla \wedge N) (\nabla \wedge N)^T A_i^n d\Omega &= \int_{\Omega_i} A_i^{*T} N j_i d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_i} A_i^{*T} N N^T \left( \widehat{T}_i^{n-1} - \mathbf{k}_i^- (W_i^n - \widehat{W}_i^{n-1}) \right) dS. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En utilisant la relation  $W_i^n = \mathbf{t}_i A_i^n$ , il est possible de re-écrire le problème en terme de potentiel vecteur  $A_i^n$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \mu^{-1} A_i^{*T} (\nabla \wedge N) (\nabla \wedge N)^T A_i^n d\Omega &+ \int_{\Gamma_i} \mathbf{k}_i^- A_i^{*T} N N^T \mathbf{t}_i A_i^n dS = \\ \int_{\Omega_i} A_i^{*T} N j_i d\Omega &+ \int_{\Gamma_i} A_i^{*T} N N^T \left( \widehat{T}_i^{n-1} + \mathbf{k}_i^- \widehat{W}_i^{n-1} \right) dS. \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'étape linéaire revient alors à résoudre le problème matriciel suivant :

$$(\mathbf{K}_i + \mathbf{t}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i) A_i^n = J_i + \mathbf{t}_i^T \mathbf{M}_i (\widehat{T}_i^{n-1} + \mathbf{k}_i^- \widehat{W}_i^{n-1}) \quad (2.13)$$

avec  $\mathbf{M}_i$  l'analogie en magnétostatique de la matrice de masse mécanique construite sur les interfaces du sous-domaine  $\Omega_i$ .

### 2.2.2 Résolution de l'étape locale

Pour chaque interface  $\Gamma_{ij}$  (voir Figure 2.3), l'étape locale consiste à chercher les champs de part et d'autre de l'interface ( $\widehat{W}_{ij}^n, \widehat{W}_{ji}^n, \widehat{T}_{ij}^n$  et  $\widehat{T}_{ji}^n$ ) connaissant les champs solutions de l'étape linéaire précédente des deux sous-domaines partageant l'interface  $\Gamma_{ij}$  ( $W_{ij}^n, W_{ji}^n, T_{ij}^n$  et  $T_{ji}^n$ ).

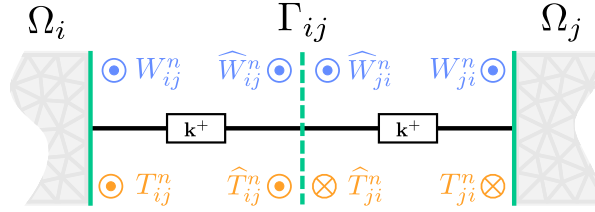


FIGURE 2.3 • Problème sur une interface  $\Gamma_{ij}$

Le problème de l'étape locale sur l'interface  $\Gamma_{ij}$  s'écrit

$$\begin{cases} \widehat{W}_{ij}^n - \widehat{W}_{ji}^n = 0 \\ \widehat{T}_{ij}^n + \widehat{T}_{ji}^n = 0 \\ \widehat{T}_{ij}^n - T_{ij}^n - \mathbf{k}_i^+ (\widehat{W}_{ij}^n - W_{ij}^n) = 0 \\ \widehat{T}_{ji}^n - T_{ji}^n - \mathbf{k}_j^+ (\widehat{W}_{ji}^n - W_{ji}^n) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

La solution s'obtient de manière explicite

$$\begin{cases} \widehat{W}_{ij}^n = \widehat{W}_{ji}^n = \frac{\mathbf{k}_i^+ W_{ij}^n + \mathbf{k}_j^+ W_{ji}^n}{\mathbf{k}_i^+ + \mathbf{k}_j^+} - \frac{T_{ij}^n + T_{ji}^n}{\mathbf{k}_i^+ + \mathbf{k}_j^+} \\ \widehat{T}_{ij}^n = -\widehat{T}_{ji}^n = T_{ij}^n + \mathbf{k}_i^+ (\widehat{W}_{ij}^n - W_{ij}^n) \end{cases} \quad (2.15)$$

#### Remarque

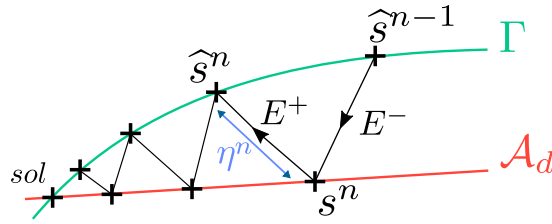
Il est possible de prendre en compte des comportements plus complexes aux interfaces pendant l'étape locale. Pour la simulation magnéto-statique de machines tournantes, les conditions de continuité suffisent. Cependant, la séparation des équations dans la méthode LATIN est propice à la prise en compte de la rotation du rotor par une méthode de l'interface glissante (voir en 3). L'idée est d'introduire les nouvelles conditions de connexion comme un comportement sur une interface spécifique  $\Gamma_R$  entourant le rotor.

## 2.3 Convergence

La convergence de l'algorithme a été démontrée dans [LADEVÈZE, 1999] pour un coefficient de relaxation  $r = 0.5$  et un choix de directions de recherche telles que  $\mathbf{k}^- = \mathbf{k}^+ = k\mathbf{l}$ , avec  $k$  un scalaire.

Le contrôle des itérations repose sur un indicateur de convergence spécifique à la méthode LATIN. Dans les méthodes de décomposition de domaines primales ou duales, l'algo-

rithme est guidé par le résidu des quantités primales ou des quantités duales. En revanche,



**FIGURE 2.4** • Représentation de l'indicateur de convergence  $\eta^n$  dans le schéma itératif de la méthode LATIN

la méthode LATIN est une méthode mixte où les résidus des quantités primales et duales doivent être pris en compte simultanément, ce qui confère moins de sens physique à l'indicateur. Il est choisi de manière à représenter l'écart entre la solution obtenue à l'étape linéaire et celle obtenue à l'étape locale à chaque itération  $n$  (voir Figure 2.4) et s'exprime par :

$$\eta^n = \frac{\|s^n - \hat{s}^n\|^2}{\frac{1}{2}(\|s^n\|^2 + \|\hat{s}^n\|^2)} \quad (2.16)$$

avec

$$\|s^n\|^2 = (T^n)^T (\mathbf{k}^-)^{-1} T^n + (W^n)^T \mathbf{k}^- W^n. \quad (2.17)$$



L'indicateur de convergence est un critère qui mesure la vitesse de convergence de la méthode, mais il ne permet pas d'évaluer la qualité de la solution obtenue. Étant donné que cet indicateur est global, il se peut qu'il masque des perturbations localisées dans la solution. De plus, il fait intervenir les directions de recherche, leur choix peut alors influencer la vitesse de convergence.

### 2.4 Choix des directions de recherche

Le choix des directions de recherche de la méthode LATIN a une forte influence sur la convergence de l'algorithme, en particulier lorsque des hétérogénéités importantes existent entre les sous-domaines. Cela se produit notamment dans l'étude des machines tournantes, où l'on considère à la fois des milieux ferromagnétiques et de l'air, avec  $\mu_0 \ll \mu_{fer}$ .

Considérons un sous-domaine  $\Omega_i$  avec comme directions de recherche  $\mathbf{k}_i^+ = \mathbf{k}_i^- = k_i \mathbb{1}$ . Un choix optimal de direction de recherche serait que  $k_i$  représente le comportement de tout ce qu'il y a de l'autre côté de l'interface, soit le complémentaire dans  $\Omega$  de  $\Omega_i$  [OUMAZIZ, 2017]. Le calcul des directions de recherche reviendrait aux calculs des compléments de Schur des sous-domaines. Cette solution n'est pas envisageable en terme de coût de calcul et pour une implémentation parallèle dans laquelle les sous-domaines n'ont pas d'informations sur les autres sous-domaines.

Classiquement, une approximation simple de cet opérateur est réalisée et montre son efficacité dans de nombreux travaux autour de la méthode LATIN. Par une analyse dimensionnelle des équations définissant les directions de recherche Eq. (2.4) et (2.5), nous obtenons

$$[k] = \frac{[v]}{[L]}, \quad (2.18)$$

avec  $\nu = 1/\mu$  la réductivité d'un matériaux et  $L$  une longueur caractéristique. L'opérateur  $k$  est donc homogène au rapport  $\nu/L$  soit à une réductance. La réductance caractérise l'aptitude d'un circuit magnétique à s'opposer à sa pénétration par un champ magnétique. Ainsi choisir  $k = \nu/L$  permet de représenter un comportement magnétique global de la structure.

Même si ce choix de direction de recherche permet de converger convenablement, il ne rend pas compte du caractère hétérogène du domaine. D'autres choix plus optimaux ont été proposés :

- » Dans le cadre d'une résolution mono-échelle on pourra choisir

$$k = \frac{R}{L_0}, \quad (2.19)$$

où  $R$  est une moyenne globale des réductivités des matériaux qui constituent le domaine complet et  $L_0$  est une longueur caractéristique du domaine, par analogie avec [J.-Y. COGNARD et al., 1996].

- » Dans le cadre de l'utilisation d'une stratégie multi-échelle micro/macro, [DUREISSEIX, 1997] propose une direction de recherche optimale par sous-domaine  $\Omega_i$  qui revient en magnétostatique à :

$$k_i = \frac{\nu_i}{L_{\Gamma_i}}, \quad (2.20)$$

où  $\nu_i$  est une moyenne globale des réductivités des matériaux présents dans le sous-domaine et  $L_{\Gamma_i}$  est une longueur représentative des dimensions de l'interface  $\Gamma_i$ .

Pour illustrer l'impact du choix de la direction de recherche entre les deux approches proposées, nous considérons un problème 2D simple composé d'un barreau de fer de longueur  $L$  et de hauteur  $h$  coupé par un entrefer d'air d'épaisseur  $e$ , le tout englobé dans de l'air, comme illustré sur la Figure 2.5. Sur les bords inférieurs et extérieurs du domaine, des conditions aux limites sur  $A$  sont imposées. Les données du problème sont rassemblées dans la Table 2.1.

Dénomination	Symbole	Valeur
Perméabilité magnétique du fer	$\mu$	$3000\mu_0$
Longueur barreau	$L$	0,025 m
Hauteur barreau	$h$	0,002 m
Épaisseur entrefer	$e$	0,0002 m
Condition aux limites	$A_1$	$0 \text{ Wbm}^{-1}$
	$A_2$	$1 \times 10^{-3} \text{ Wbm}^{-1}$

TABLE 2.1 • Paramètres du problème

Le problème est décomposé en 6 sous-domaines  $\Omega_1$  à  $\Omega_6$ . Un zoom autour de l'entrefer est représenté Figure 2.5 et permet de voir que l'entrefer est décomposé en deux sous-domaines pour obtenir des interfaces entre des sous-domaines « fer/air » et « air/air ». La solution obtenue quelle que soit la direction de recherche retenue est représentée par les isovalues du potentiel vecteur  $A$  sur le second zoom de la figure.

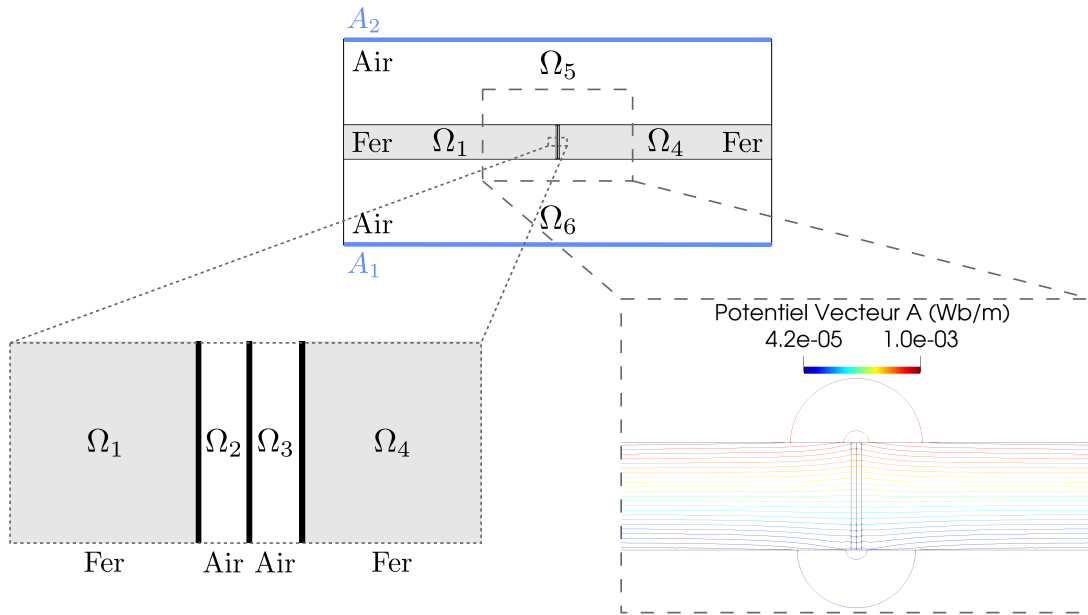


FIGURE 2.5 • Définition d'un barreau avec entrefer, décomposition et champ  $A$  obtenu

L'impact du choix de la direction de recherche se retrouve dans la vitesse de convergence. Nous traçons Figure 2.6 l'évolution de l'indicateur de convergence au cours des itérations pour un même critère d'arrêt à  $10^{-5}$  (donnant la solution précédente) pour les deux choix de direction de recherche. Nous avons défini ici  $L_0 = L$ . Nous observons que la direction de recherche définie localement par  $k_i = \nu_i / L_{\Gamma_i}$  confère une bien meilleure convergence à l'algorithme. Cette définition de direction de recherche sera celle conservée pour la suite.

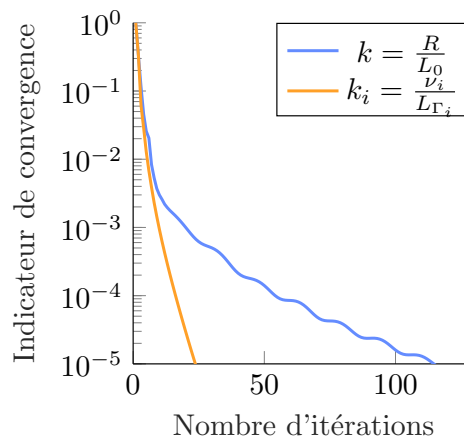


FIGURE 2.6 • Impact de la direction de recherche sur la convergence

## 2.5 Conditions aux limites

Il existe différentes approches pour prendre en compte les conditions aux limites :

- » **Sur les interfaces** : des interfaces fictives vers l'extérieur sont introduites, sur lesquelles les conditions aux limites sont imposées comme un comportement.

» **Sur les sous-domaines** : les conditions limites sont imposées directement sur les bords des sous-domaines.

L'avantage de la première est de ne pas avoir besoin d'introduire d'inconnues supplémentaires pour imposer les conditions aux limites. De plus, quelles que soient ces conditions, le problème à résoudre par sous-domaine reste inchangé. Tous les bords des sous-domaines sont liés à des interfaces. Les conditions aux limites peuvent même être définies indépendamment de la décomposition. Par contre, il faut choisir des directions de recherche adaptées pour imposer ces conditions.

Nous avons choisi d'utiliser la seconde approche, sur les sous-domaines, afin de simplifier l'implémentation. De plus, cette approche présente l'avantage de vérifier de manière exacte les conditions aux limites sur les sous-domaines.

## 2.6 Initialisation

L'algorithme est initialisé en construisant une solution dans l'espace  $\Gamma$  notée  $\widehat{s}_0$ , généralement choisie nulle sur toutes les interfaces.

## 2.7 Algorithme mono-échelle

L'algorithme 6 résume les étapes de la méthode LATIN-DDM. Cette méthode ne fait pas intervenir d'approche multi-échelle de résolution d'un problème grossier. Elle est alors qualifiée de mono-échelle.

---

### Algorithme 6 : LATIN-DDM mono-échelle

---

**Initialisation** : construire  $\widehat{s}_0$  nulle

**while**  $\eta^n \geq \text{seuil}$  **do**

    Ⓜ Ⓜ **Étape linéaire** :

$$\text{Chercher } s^n = (W^n, T^n) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbf{K} A^n = J + \mathbf{t} \tilde{T}^n \\ W^n = \mathbf{t} A^n \\ T^n - \widehat{T}^{n-1} + \mathbf{k}^- (W^n - \widehat{W}^{n-1}) = 0 \end{cases}$$

    Ⓜ Ⓜ **Relaxation** :

$$\text{Calculer : } s^n \leftarrow r s^n + (1 - r) s^{n-1}$$

    Ⓜ Ⓜ **Étape locale** :

$$\text{Chercher } \widehat{s}^n = (\widehat{W}^n, \widehat{T}^n) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbf{O}_d \widehat{W}^n = 0 \\ \mathbf{O}_s \widehat{T}^n = 0 \\ \widehat{T}^n - T^n - \mathbf{k}^+ (\widehat{W}^n - W^n) = 0 \end{cases}$$

    Ⓜ Ⓜ **Indicateur de convergence** :

$$\text{Calculer : } \eta^n = \frac{\|s^n - \widehat{s}^n\|^2}{\frac{1}{2}(\|s^n\|^2 + \|\widehat{s}^n\|^2)}$$

**end**

*Légende* :

    Ⓜ Ⓜ étape parallélisable sur les sous-domaines

    Ⓜ Ⓜ étape parallélisable sur les interfaces

---

### 3 Première implémentation et limites des méthodes mono-échelles

#### 3.1 Validation sur un cas simple

Une première implémentation de l'algorithme de la méthode LATIN-DDM mono-échelle a été réalisée sous *Matlab*. Afin de valider la résolution, nous avons considéré un cas simple en 2D, académique et sans réel sens physique, pour lequel la solution analytique est connue. Le problème est constitué uniquement d'un barreau ferromagnétique de longueur  $L$  suivant l'axe  $\underline{x}$  et de perméabilité  $\mu = 10000\mu_0$ , comme illustré dans la Figure 2.7. Sur les bords du

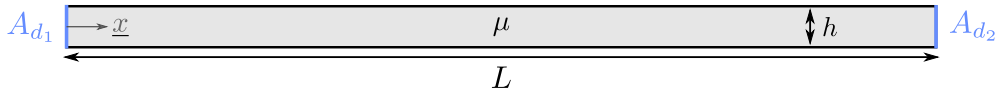


FIGURE 2.7 • Définition du problème

barreau en  $\underline{x} = 0$  et  $\underline{x} = L$ , nous avons imposé le potentiel vecteur  $\underline{A}$  avec des valeurs respectives de  $A_{d_1} = 1 \text{ Wbm}^{-1}$  et  $A_{d_2} = 2 \text{ Wbm}^{-1}$ . Les autres bords du barreau sont libres. Dans ce problème plan, le potentiel vecteur  $\underline{A}$  n'a qu'une composante non nulle, suivant  $\underline{z}$ . La solution analytique du problème qui nous servira de référence est donnée par

$$A_{ex}(x) = A_{d_1} + \frac{A_{d_2} - A_{d_1}}{L} x. \tag{2.21}$$

La solution dépend uniquement de  $x$ , nous choisissons alors de décomposer le barreau en sous-domaines suivant l'axe  $\underline{x}$  seulement. Un exemple de décomposition en 5 sous-domaines est illustré dans la Figure 2.8.

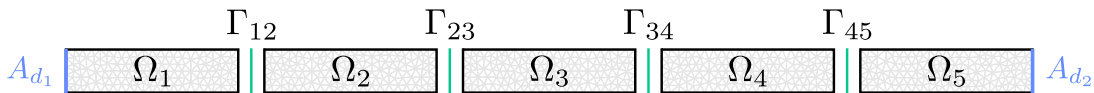


FIGURE 2.8 • Exemple de décomposition du barreau

La résolution est réalisée en choisissant  $k = \nu/h$  pour chaque sous-domaine et un paramètre de relaxation  $r = 0,8$ . Bien que la convergence de l'algorithme ne soit démontrée que pour  $r = 0,5$ , il a été constaté que pour des études courantes, un choix de  $r = 0,8$  permet d'accélérer la convergence. Le critère d'arrêt de l'algorithme est fixé à  $10^{-6}$ . La solution construite est représentée Figure 2.9. Comme la solution analytique du problème est

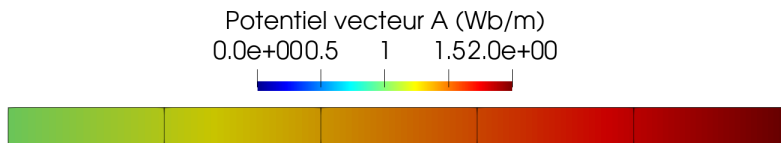


FIGURE 2.9 • Potentiel vecteur  $A$  à convergence

connue, il est possible de calculer l'erreur exacte à convergence telle que

$$e_{ex} = \frac{\|A_{ex} - A\|}{\|A_{ex}\|}. \quad (2.22)$$

avec  $\|\cdot\|$  la norme  $L^2$ .

La Figure 2.10 compare l'évolution de l'erreur exacte au fil des itérations avec celle de l'indicateur de convergence de la méthode LATIN. On observe une décroissance satisfaisante pour les deux quantités. Pour le critère d'arrêt fixé à  $10^{-6}$  de l'algorithme, l'erreur exacte obtenue est de 2%. Cette étude permet de donner une première validation de l'implémentation de la méthode. De plus, la comparaison entre les deux courbes met en évidence le fait que l'indicateur LATIN ne reflète pas directement l'erreur à une itération donnée, mais renseigne plutôt sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Dans d'autres cas d'étude où l'erreur exacte n'est pas disponible, un critère d'arrêt basé sur l'indicateur de convergence à  $10^{-6}$  devrait être suffisant.

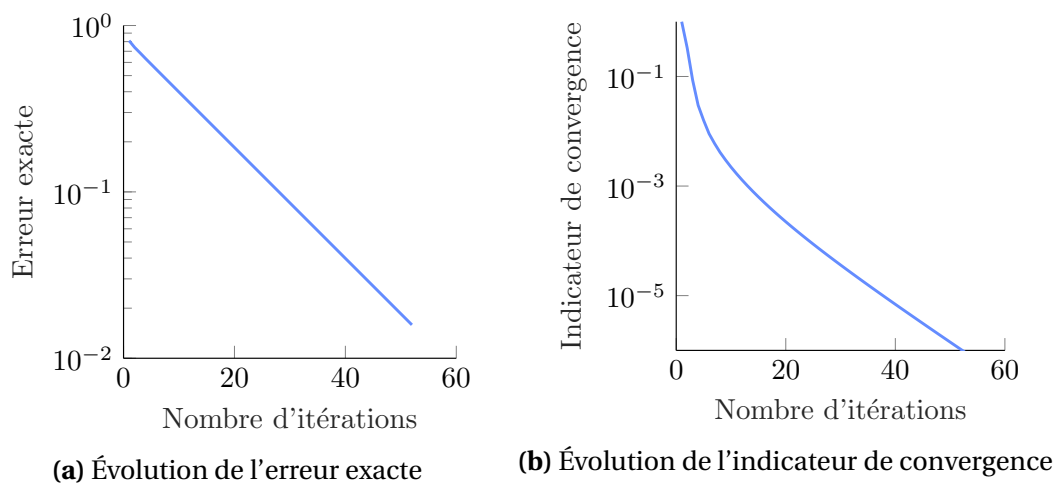
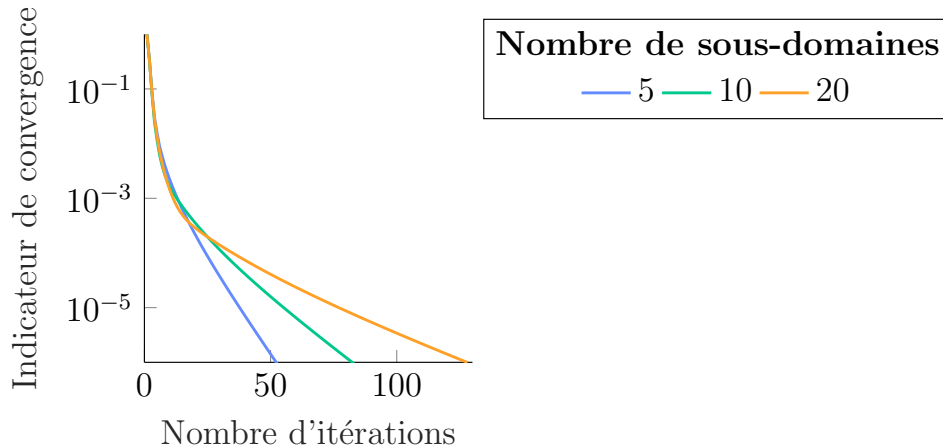


FIGURE 2.10 • Comparaison entre l'erreur exacte et l'indicateur de convergence

### 3.2 Limites des méthodes mono-échelle

Les méthodes de décomposition de domaine, dans leur formulation mono-échelle, présentent une limitation significative : elles ne sont pas extensibles. En effet, à mesure que le nombre de sous-domaines augmente, le nombre d'itérations requises pour atteindre un même critère d'arrêt augmente également. Pour illustrer ce comportement, nous décomposons le barreau précédent en 5, 10 et 20 sous-domaines dans la direction  $\underline{x}$ .

La Figure 2.11 représente l'évolution de l'indicateur de convergence pour les différentes décompositions et met en évidence ce phénomène.



**FIGURE 2.11** • Évolution de l'indicateur de convergence selon le nombre de sous-domaines

Ce comportement est dû au fait que chaque sous-domaine ne peut transférer d'informations qu'à ses voisins. Par conséquent, les informations associées aux conditions aux limites et sources internes sont transmises d'un sous-domaine à un autre, ce qui ralentit le processus. Alors que nous souhaiterions augmenter le nombre de sous-domaines afin de réduire le temps de calcul et l'utilisation de la mémoire, cette limitation pose problème.

La Figure 2.12 permet de se rendre compte de ce phénomène de propagation de l'information au cours des itérations. Elle montre le potentiel vecteur  $A$  dans un barreau décomposé en 5, 10 et 20 sous-domaines pour différentes itérations de l'algorithme LATIN-DDM.

- À l'issue de la première itération (Figure 2.12a), nous remarquons que les conditions aux limites n'impactent que les sous-domaines sur lesquels elles sont imposées. Ensuite, la solution calculée évolue de proche en proche dans les différents sous-domaines.
- À l'itération 5 (Figure 2.12b), certains sous-domaines ont encore une solution nulle à l'intérieur, sauf pour le barreau décomposé en 5 sous-domaines où l'information des conditions aux limites a eu le temps de se propager à travers tous les sous-domaines.
- À l'itération 20, le barreau décomposé en 5 sous-domaines présente déjà une solution proche de la solution à convergence, tandis que le barreau décomposé en 20 sous-domaines possède encore des sous-domaines avec une solution proche de 0.

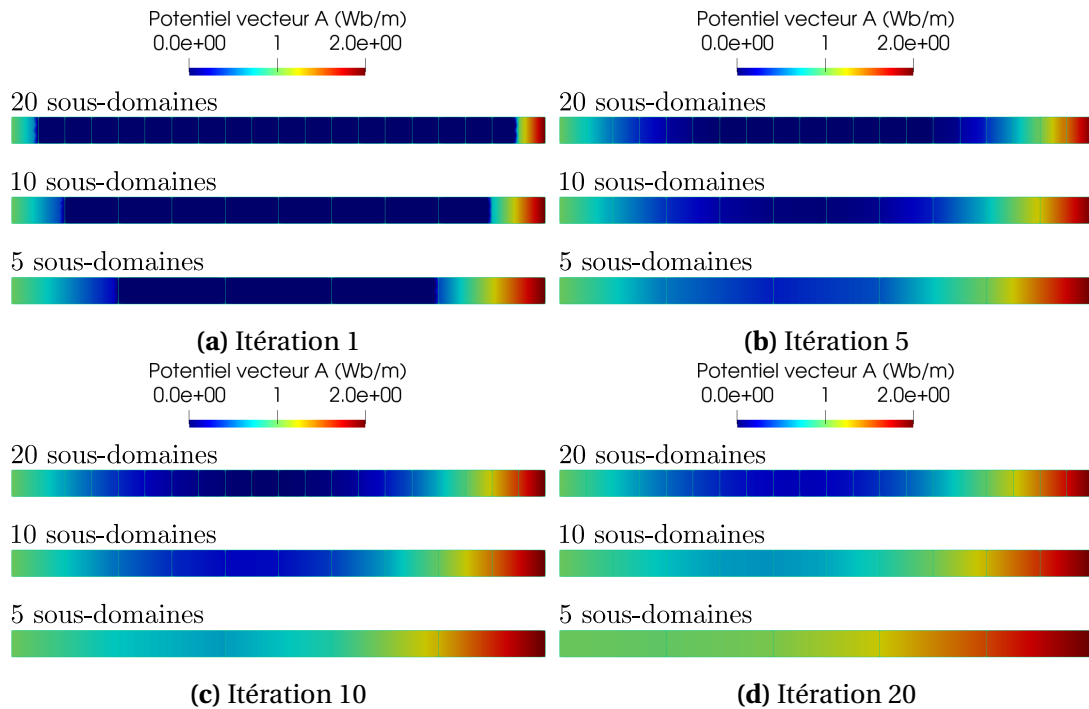


FIGURE 2.12 • Potentiel vecteur  $A$  selon les itérations, pour des décompositions en 5, 10 ou 20 sous-domaines

## 4 Extension à une approche multi-échelle

### 4.1 Introduction des méthodes multi-échelles

Pour répondre au problème de non-extensibilité de la méthode LATIN-DDM mono-échelle, nous introduisons dans cette partie une approche de résolution multi-échelle, s'intégrant dans l'algorithme précédemment présenté.

#### Remarque

Dans le domaine de la simulation numérique, l'ajout d'une approche multi-échelle fait référence à deux familles différentes de méthodes :

- les méthodes de **modélisation** multi-échelles : dans le cas où les détails locaux présentent une dimension caractéristique beaucoup plus petite que celle de la structure dans son ensemble, des techniques d'homogénéisation ou d'enrichissement local sont développées.
- les méthodes de **calcul** multi-échelles : pour la résolution de problèmes à grand nombre de degrés de liberté qui ne peuvent pas faire appel à des solveurs directs, les méthodes multi-grilles ou de décomposition de domaine sont introduites.

La méthode introduite dans cette partie s'inscrit dans les méthodes de **calculs** multi-échelles.

Le développement des méthodes de calcul multi-échelles repose sur l'observation selon laquelle les méthodes itératives, utilisées notamment pour la décomposition de domaine,

sont plus efficaces pour réduire l'erreur relative aux petites longueurs de variations de la solution recherchée au fil des itérations, plutôt que l'erreur associée aux grandes longueurs de variations de la solution [YAVNEH, 2006]. Cela se traduit par une décroissance rapide de l'erreur au cours des premières itérations, suivie d'une stagnation de celle-ci, ou du moins d'un ralentissement du taux de convergence.

L'idée générale est d'introduire des échelles adaptées aux phénomènes à prendre en compte. Les premiers travaux visant à rendre la méthode LATIN-DDM extensible ont été introduits par [DUREISSEIX, 1997], s'inspirant des méthodes multi-grilles. Les méthodes multi-grilles reposent sur le principe de superposition de plusieurs échelles de résolution, matérialisées par des discrétisations de raffinement distincts, appelées grilles (voir Figure 2.13). Chaque résolution sur des grilles différentes permet de réduire la contribution du résidu dont la longueur de variation correspond à la discrétisation de la grille.

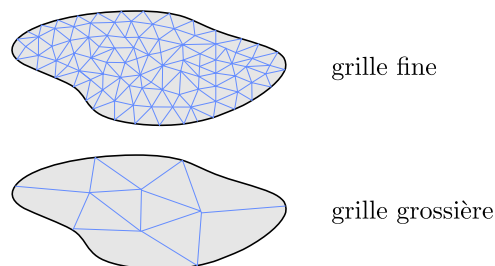


FIGURE 2.13 • Niveaux de discrétisation d'une méthode multi-grilles

Dans le cas des méthodes de décomposition de domaine, notamment pour la méthode LATIN-DDM, le principe est alors d'introduire un problème grossier qui permet d'obtenir une solution rendant compte du comportement global. Dans l'approche proposée par [DUREISSEIX, 1997], le problème grossier est écrit sur une discrétisation correspondant aux grandes longueurs de variations de la solution (voir Figure 2.14). Il est résolu par une méthode éléments finis standard. Un autre problème, discrétisé à une échelle fine, est quand à lui résolu par décomposition de domaine.

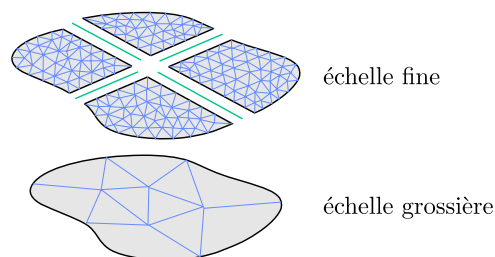


FIGURE 2.14 • Deux échelles de résolution

Les travaux autour de cette méthode ont ensuite suivi une certaine évolution, ce qui a permis l'intégration progressive du problème grossier dans l'étape linéaire de la méthode LATIN-DDM :

- Dans [LADEVÈZE & DUREISSEIX, 1999] une première distinction micro / macro sur la solution à l'étape linéaire est réalisée. Des quantités primales et duales macro sont exprimées à l'aide d'une base macroscopique sur une échelle de discrétisation grossière et globale. Une nouvelle direction de recherche est introduite pour ces quanti-

tés, ce qui conduit à un problème macro qui peut être interprété comme un problème d'homogénéisation.

- Dans une nouvelle version proposée par [LOISEAU, 2001], la séparation des échelles micro / macro est effectuée au niveau des interfaces (voir Figure 2.15). La séparation des échelles est réalisée indépendamment de toute discrétisation, ce qui accorde à la méthode une plus grande souplesse en termes de mise en œuvre. L'étape linéaire se retrouve modifiée, faisant intervenir un problème global posé sur les inconnues macroscopiques. Cependant, l'aspect multi-échelle rompt la mixité de la méthode. Deux approches sont possibles : l'une en se donnant a priori un champ primal globalement admissible [LADEVÈZE & DUREISSEIX, 2000], l'autre un champ dual globalement admissible [LADEVÈZE et al., 2001].

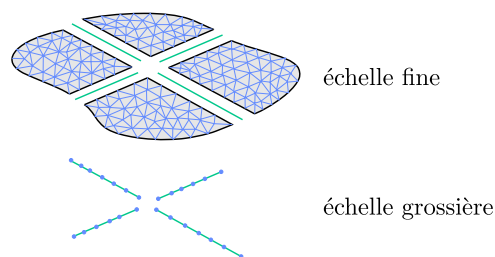


FIGURE 2.15 • séparation micro / macro sur les interfaces

- Les travaux de [LADEVÈZE & NOUY, 2003; NOUY, 2003] proposent ensuite de vérifier l'équilibre macroscopique du champ dual par la recherche d'un multiplicateur de Lagrange.
- Enfin, une réécriture algébrique de l'approche multi-échelle précédente a été récemment proposée par [OUMAZIZ, 2017; OUMAZIZ et al., 2018]. Cette nouvelle approche a la particularité de ne pas introduire de direction de recherche supplémentaire pour les quantités macroscopiques, ne nécessitant donc pas de définir a priori de base macroscopique duale.

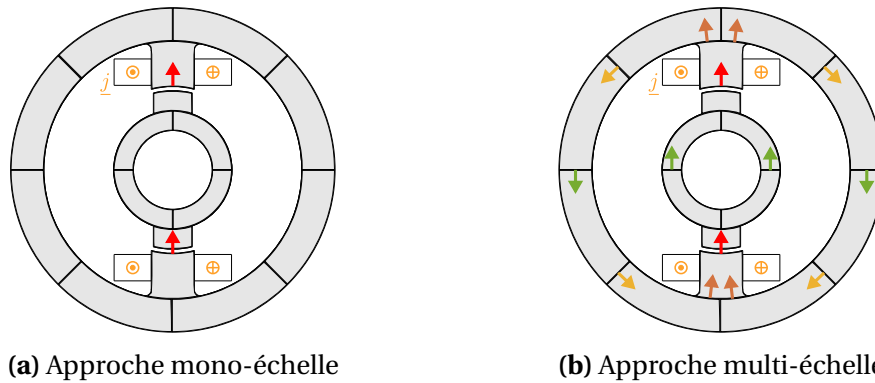
Cette dernière approche est avantageuse pour étendre son utilisation au-delà du domaine de la mécanique. Son écriture algébrique lui confère une modularité qui nous permet de proposer une approche multi-échelle de la méthode LATIN-DDM en magnéto-statique.

### Remarque

Dans le cas de structures complexes nécessitant un grand nombre de sous-domaines et, par conséquent, d'interfaces, la résolution du problème macroscopique peut devenir limitante en raison de sa grande taille. Pour surmonter cette limitation, l'introduction d'une échelle supplémentaire, appelée super-macro, a été proposée par [VIOLEAU, 2007] pour l'étude de matériaux composites. Cette idée de troisième échelle a ensuite été reprise par [KERFRIDEN et al., 2009]. Lorsque le problème grossier devient trop volumineux, il est également possible d'introduire un solveur BDD pour le résoudre. Nous nous restreignons à une méthode à deux échelles dans ce manuscrit.

## 4.2 Approche multi-échelle : réécriture de l'étape linéaire

En constatant que les quantités d'interface ne satisfont pas les conditions de continuité à l'étape linéaire, on observe que le flux magnétique n'est pas équilibré sur la structure globale lors des premières itérations de l'algorithme. L'intérêt d'ajouter la résolution d'un problème grossier serait de permettre la recherche d'une solution à l'étape linéaire dont le flux magnétique moyen est équilibré sur la structure, dès la première itération. Pour cela, les conditions de continuité aux interfaces doivent être vérifiées de manière globale. La Figure 2.16 schématise l'effet recherché de l'approche multi-échelle.



**FIGURE 2.16** • Schématisation du flux magnétique aux interfaces pour la première itération de l'algorithme LATIN (milieu ferromagnétique en gris)

Le problème grossier consiste alors à vérifier une condition d'équilibre global du flux magnétique aux travers des interfaces. Cette condition correspond à imposer une énergie magnétique surfacique macroscopique nulle.

### 4.2.1 Représentation macro du champ primal

L'équilibre qui doit être vérifié est macroscopique, ce qui signifie qu'il ne doit pas représenter les petites variations des champs. Les informations à transmettre avec le problème grossier correspondent aux grandes variations de l'énergie magnétique surfacique. Une façon de procéder est de se donner une base macro du champ primal par rapport à laquelle le champ dual sera équilibré. Sur chaque interface, le potentiel vecteur  $A$  est alors exprimé dans une base de « modes » représentant ses variations macroscopiques. Cette base est notée  $\mathbb{W}$ . Comme le flux magnétique à travers une interface est obtenu avec la dérivée du potentiel vecteur  $A$ , les modes macro peuvent se limiter à une représentation affine. Sur une interface  $\Gamma_{ij}$ , on introduit alors un mode constant  $\mathbb{W}_{ij}^1$  et un mode linéaire  $\mathbb{W}_{ij}^2$ , représentés Figure 2.17.

Ainsi, nous notons pour l'interface  $\Gamma_{ij}$

$$\mathbb{W}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_{ij}^1 & \mathbb{W}_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

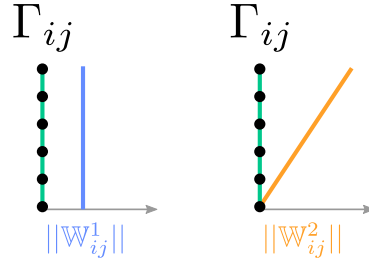


FIGURE 2.17 • Représentation des modes macro sur une interface  $\Gamma_{ij}$

et  $\mathbb{W}$  la concaténation sur toutes les interfaces

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbb{W}_{ij} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

#### Remarque

Un grand nombre de modes différents pourrait être choisis pour représenter la base macro. Cependant, [SAAVEDRA et al., 2017] montre qu'enrichir cette base avec des ordres supérieurs n'améliore pas significativement les performances. Conserver seulement le mode constant et le mode linéaire sera suffisant pour étudier des machines tournantes dans le cadre de la magnéto-statique.

### 4.2.2 Problème macro

A partir de l'expression macroscopique du champ primal, la condition d'équilibre de l'énergie magnétique surfacique est donnée par

$$\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s T = 0. \quad (2.25)$$

#### Exemple

Sur une interface  $\Gamma_{ij}$ , la condition d'équilibre s'écrit

$$\mathbb{W}_{ij}^T (T_{ij} + T_{ji}) = 0. \quad (2.26)$$

La prise en compte de cette nouvelle condition se fait à travers la direction de recherche de l'étape linéaire. À l'origine, la direction de recherche exprime une relation linéaire entre les quantités d'interface locales. Cependant, le problème macroscopique impose une nouvelle condition sur ces quantités. Afin de la prendre en compte, une nouvelle direction de recherche est construite, qui respecte toujours la même relation linéaire entre les quantités d'interface, mais sous la contrainte (2.25). Cette direction de recherche vérifie le problème

$$\min_{\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s T = 0} \left( \frac{1}{2} (T - \hat{T})^T (\mathbf{k}^-)^{-1} (T - \hat{T}) + (T - \hat{T})^T (W - \widehat{W})^T \right) \quad (2.27)$$

Un Lagrangien est introduit pour prendre en compte la contrainte, associée à un multiplicateur  $\alpha$ . La minimisation de ce Lagrangien par rapport à la quantité duale d'interface conduit à une nouvelle expression de la direction de recherche pour l'approche multi-échelle de la forme

$$T - \widehat{T} + \mathbf{k}^- (W - \widehat{W} + \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \alpha) = 0. \quad (2.28)$$

Notons que la direction de recherche n'est plus exprimée localement mais globalement sur les interfaces. Le terme supplémentaire peut s'interpréter comme une correction macroscopique appliquée sur chaque interface.

Ainsi, avec une approche multi-échelle, le problème à résoudre à l'étape linéaire devient

$$\begin{cases} \mathbf{K} A = J + \mathbf{t}^T \tilde{T} \\ W = \mathbf{t} A \\ \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s T = 0 \\ T - \widehat{T} + \mathbf{k}^- (W - \widehat{W} + \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \alpha) = 0 \end{cases}. \quad (2.29)$$

Pour obtenir l'équation à résoudre en terme de potentiel vecteur  $A$ , [OUMAZIZ, 2017] propose une séquence de résolution particulière en trois étapes.

1. La relation de direction de recherche est injectée dans l'équilibre énergétique (2.25) pour exprimer le multiplicateur  $\alpha$  en fonction de  $W$

$$\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s T - \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \widehat{T} + \mathbb{W} \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- (W - \widehat{W}) + \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \alpha = 0 \quad (2.30)$$

puis

$$\alpha = (\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W})^{-1} (\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- (\widehat{W} - W)) \quad (2.31)$$

avec l'inverse qui ne sera pas calculé mais qui est exprimé ici pour améliorer la compréhension.

2. Le multiplicateur  $\alpha$  est re-injecté dans l'équation de direction de recherche (2.28) pour obtenir une relation entre  $T$  et  $W$

$$T = \mathbf{k}^- (\mathbb{I} - \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} (\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W})^{-1} \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^-) (\widehat{W} - W) + \widehat{T} \quad (2.32)$$

3. Cette nouvelle expression est introduite dans l'équilibre des sous-domaines (2.29) pour obtenir un problème en terme de potentiel vecteur  $A$

$$(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- (\mathbb{I} - \mathbf{P}_M) \mathbf{t}) A = J + \mathbf{t}^T (\widehat{T} + \mathbf{k}^- (\mathbb{I} - \mathbf{P}_M) \widehat{W}) \quad (2.33)$$

avec le projecteur macro

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} (\mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W})^{-1} \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- \quad (2.34)$$

L'apparition du projecteur macroscopique vient coupler les sous-domaines voisins entre eux en raison de la présence de l'opérateur  $\mathbf{O}_s$  dans son expression. Sous cette forme, il n'est plus possible de résoudre l'étape linéaire en parallèle sur les différents sous-domaines. Une stratégie de résolution est proposée par [OUMAZIZ, 2017] faisant intervenir des étapes

parallélisables. Cependant, des communications entre les sous-domaines sont inévitables.

### 4.2.3 Séparation des contributions micro et macro

Une stratégie de résolution à deux échelles est mise en place, impliquant la séparation du potentiel vecteur en deux contributions, à savoir  $A_{(m)}$  pour le champ micro et  $A_{(M)}$  pour le champ macro, tels que

$$A = A_{(m)} + A_{(M)}. \quad (2.35)$$

Ces deux champs satisfont deux parties distinctes du problème (2.33). Pour construire  $A_{(m)}$ , le problème à résoudre correspond à celui de l'étape linéaire mono-échelle (2.13)

$$(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t}) A_{(m)} = (J + \mathbf{t}^T [\hat{T} + \mathbf{k}^- \hat{W}]). \quad (2.36)$$

Ce problème, appelé problème micro, ne comprend pas d'opérateurs macro et peut être résolu de manière parallèle, comme précédemment.

Le champ macro  $A_{(M)}$  vérifie la partie restante du problème

$$(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t}) A_{(M)} = -\mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \mathbf{K}_M^{-1} \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- (W_{(m)} - \hat{W}), \quad (2.37)$$

où la solution du problème micro est nécessaire avec le terme  $W_{(m)} = \mathbf{t} A_{(m)}$ . Pour simplifier l'équation, nous introduisons un opérateur macro  $\mathbf{K}_M$  qui couple les sous-domaines voisins entre eux

$$\mathbf{K}_M = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s (\mathbf{k}^- \mathbf{t} (\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T - \mathbf{I}) \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}. \quad (2.38)$$

Cet opérateur est assemblé et factorisé au début de l'algorithme, il reste constant par la suite. Cependant, son assemblage nécessite une information provenant de tous les sous-domaines. Il est nécessaire de mettre en place un traitement particulier pour garantir au maximum une implémentation parallèle.

### 4.2.4 Construction parallèle des opérateurs macro

Nous expliquons la construction des opérateurs macro en prenant comme exemple une décomposition simple illustrée dans la figure 2.18. Le domaine  $\Omega$  est divisé en trois sous-

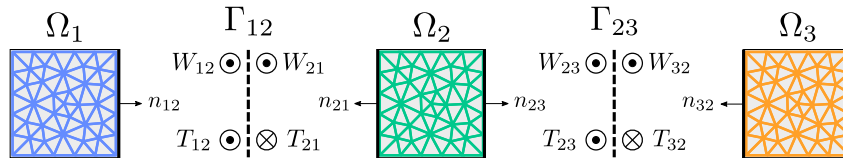


FIGURE 2.18 • Exemple d'une décomposition en 3 sous-domaines

domaines et deux interfaces. Dans cet exemple particulier, l'opérateur  $\mathbf{O}_s$  s'écrit

$$\mathbf{O}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Nous considérons une base  $\mathbb{W}$  comprenant deux modes par interface

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_{12}^1 & \mathbb{W}_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{W}_{23}^1 & \mathbb{W}_{23}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Pour chaque interface du problème décomposé, nous calculons un chargement magnétique macro correspondant à une partie de l'équation définissant  $\mathbf{K}_M$  (2.38)

$$\mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^-_{12} \mathbb{W}_{12}^1 & \mathbf{k}^-_{12} \mathbb{W}_{12}^2 & 0 & 0 \\ \mathbf{k}^-_{21} \mathbb{W}_{12}^1 & \mathbf{k}^-_{21} \mathbb{W}_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}^-_{23} \mathbb{W}_{23}^1 & \mathbf{k}^-_{23} \mathbb{W}_{23}^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}^-_{32} \mathbb{W}_{23}^1 & \mathbf{k}^-_{32} \mathbb{W}_{23}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Chaque couleur correspond à un sous-domaine, comme dans la figure 2.18. Nous pouvons remarquer que les différents chargements sont découplés. Ils peuvent donc être calculés en parallèle pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$ . Ensuite, chaque chargement  $\mathbf{k}_{ij} \mathbb{W}_{ij}$  est étendu à chaque nœud de son sous-domaine respectif grâce à la transposition de l'opérateur  $\mathbf{t}_{ij}$ . Ces chargements correspondent aux conditions de Neumann qui sont résolues en parallèle sur chaque sous-domaine dans l'expression de  $(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}$ . Cet opérateur,  $\mathbf{S}$ , est stocké localement sur chaque sous-domaine pour une utilisation future

$$\mathbf{S} = -(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \quad (2.42)$$

Pour simplifier les notations, nous introduisons une matrice  $\mathbb{K}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{t}_i^T \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i$ . Pour chaque interface  $\Gamma_{ij}$  d'un sous-domaine  $\Omega_i$ , nous extrayons le champ primal construit à partir du problème de Neumann constitué d'une condition sur  $\Gamma_{ij}$ . Par exemple, les termes (2,1) et (3,1) de la matrice

$$\mathbf{t}(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{12} \mathbb{K}_1^{-1} \mathbf{t}_{12}^T \mathbf{k}^-_{12} \mathbb{W}_{12}^1 & \mathbf{t}_{12} \mathbb{K}_1^{-1} \mathbf{t}_{12}^T \mathbf{k}^-_{12} \mathbb{W}_{12}^2 & 0 & 0 \\ \mathbf{t}_{21} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{k}^-_{21} \mathbb{W}_{12}^1 & \mathbf{t}_{21} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{k}^-_{21} \mathbb{W}_{12}^2 & \mathbf{t}_{21} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{23}^T \mathbf{k}^-_{23} \mathbb{W}_{23}^1 & \mathbf{t}_{21} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{23}^T \mathbf{k}^-_{23} \mathbb{W}_{23}^2 \\ \mathbf{t}_{23} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{k}^-_{21} \mathbb{W}_{12}^1 & \mathbf{t}_{23} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{k}^-_{21} \mathbb{W}_{12}^2 & \mathbf{t}_{23} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{23}^T \mathbf{k}^-_{23} \mathbb{W}_{23}^1 & \mathbf{t}_{23} \mathbb{K}_2^{-1} \mathbf{t}_{23}^T \mathbf{k}^-_{23} \mathbb{W}_{23}^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{t}_{32} \mathbb{K}_3^{-1} \mathbf{t}_{32}^T \mathbf{k}^-_{32} \mathbb{W}_{23}^1 & \mathbf{t}_{32} \mathbb{K}_3^{-1} \mathbf{t}_{32}^T \mathbf{k}^-_{32} \mathbb{W}_{23}^2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

correspondent respectivement au champ primal sur  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{23}$  calculés à partir du problème de Neumann avec un chargement macro  $\mathbf{k}_{21}^- \mathbb{W}_{12}^1$  sur l'interface  $\Gamma_{12}$ . La Figure 2.19 illustre cet exemple.

À ce stade, nous pouvons calculer en parallèle chaque terme de la matrice selon les différents sous-domaines. La matrice globale n'est encore jamais assemblée. L'opérateur  $\mathbf{O}_s$  dans l'expression de  $\mathbf{K}_M$  implique une communication entre les sous-domaines qui doivent échanger leurs contributions. Pour simplifier les échanges, nous construisons un opérateur

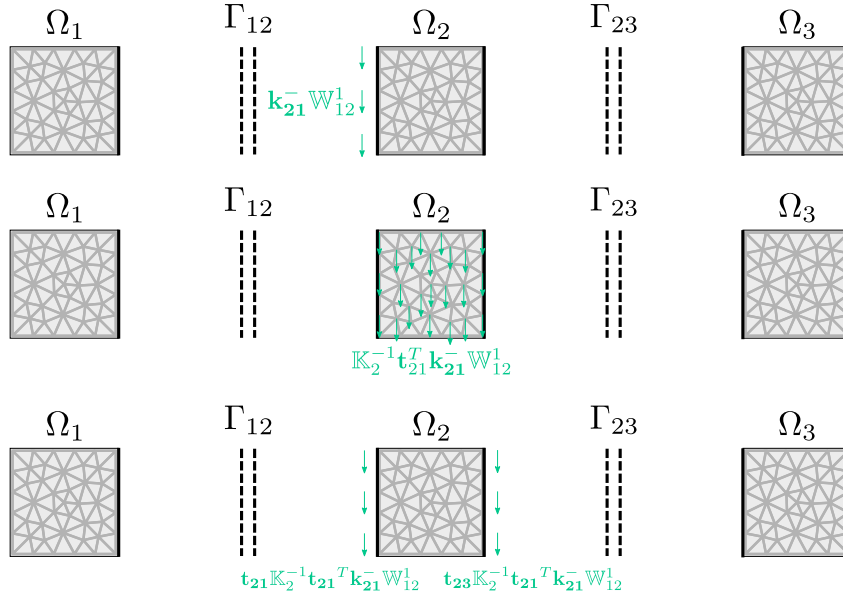


FIGURE 2.19 • Illustration des étapes de construction de  $\mathbf{K}_M$  : termes obtenus à partir du macro chargement de Neumann  $\mathbf{k}_{21}^- \mathbb{W}_{12}^1$

macro décomposé  $\mathbf{K}_{M_i}$  pour chaque sous-domaine avec ses propres termes uniquement

$$\mathbf{K}_{M_i} = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \left( \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i (\mathbf{K}_i + \mathbf{t}_i^T \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i)^{-1} \mathbf{t}_i^T - \mathbf{I} \right) \mathbf{k}_i^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}. \quad (2.44)$$

Finalement, l'opérateur macro  $\mathbf{K}_M$  est assemblé sur un processeur dédié, rassemblant les opérateurs macro locaux  $\mathbf{K}_{M_i}$ .

#### 4.2.5 Stratégie de résolution du problème macro

La méthode LATIN-DDM est développée pour tirer parti des ordinateurs à architectures parallèles, ce qui signifie que nous devons nous assurer que l'approche multi-échelle est compatible avec le calcul parallèle. Nous avons facilement vu comment nous pouvons paralléliser l'algorithme LATIN-DDM mono-échelle sur les différents sous-domaines. Cependant, avec l'approche multi-échelle qui ajoute la prise en compte d'un problème macro impliquant toutes les interfaces, la parallélisation est moins évidente. Une stratégie de résolution par étapes est proposée pour garantir une parallélisation maximale, s'appuyant sur la séparation micro / macro du potentiel vecteur  $A$  :

1. Résoudre le problème micro (2.36) en parallèle.
2. Calculer le second membre  $\psi$  du problème macro pour chaque sous-domaine

$$\psi = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- (\mathbf{t} A_n^{(m)} - \widehat{W}_{n-1}). \quad (2.45)$$

### Exemple

Nous reprenons l'exemple de décomposition en trois sous-domaines présenté Figure 2.18. Le second membre  $\psi$  s'écrit

$$\psi = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_{12}^T \mathbf{k}_{12} (W_{12} - \widehat{W}_{12}) + \mathbb{W}_{12}^T \mathbf{k}_{21} (W_{21} - \widehat{W}_{21}) \\ \mathbb{W}_{23}^T \mathbf{k}_{23} (W_{23} - \widehat{W}_{23}) + \mathbb{W}_{23}^T \mathbf{k}_{32} (W_{32} - \widehat{W}_{32}) \end{bmatrix}$$

→ Les contributions provenant des bords de chaque sous-domaine sont construites sur leur sous-domaine respectif. Le second membre  $\psi$  global est ensuite assemblé une fois que chaque contribution a été récupérée par une phase de communication.

3. Résoudre le problème macro en calculant le multiplicateur  $\alpha$ .

$$\mathbf{K}_M \alpha = \psi \quad (2.46)$$

4. Construire le champ macro solution par sous-domaine.

$$A_{(M)} = \mathbf{S} \alpha \quad (2.47)$$

avec

$$\mathbf{S} = -(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \quad (2.48)$$

5. Construite la solution complète de l'étape linéaire.

$$A = A_{(m)} + A_{(M)} \quad (2.49)$$

$$T = \widehat{T} - \mathbf{k}^- (W - \widehat{W}) - \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \alpha \quad (2.50)$$

L'algorithme 7 résume la stratégie de calcul implémentée pour la méthode LATIN-DDM multi-échelle.

### 4.3 Comparaison des approches

Afin de mettre en évidence l'intérêt de l'approche multi-échelle mise en place, nous reprenons l'exemple analytique du barreau présenté en 3. Les mêmes conditions sont appliquées, seule l'approche de résolution change.

Tout d'abord, pour valider l'implémentation réalisée, nous utilisons la solution analytique du potentiel vecteur  $\underline{A}$  dans le barreau et quantifions l'erreur exacte au cours des itérations de l'algorithme. La Figure 2.20 présente l'évolution de cette erreur avec en vis à vis l'évolution de l'indicateur de convergence. Nous pouvons observer une décroissance satisfaisante de l'erreur, ainsi qu'une diminution régulière de l'indicateur de convergence au fil des itérations. Le critère d'arrêt de l'algorithme à  $10^{-6}$  est approprié. On note immédiatement que seulement 3 itérations sont nécessaires pour converger.

La Figure 2.21 présente une comparaison de l'évolution de l'indicateur de convergence entre l'approche mono-échelle et l'approche multi-échelle pour différentes décompositions

**Algorithme 7 :** LATIN-DDM multi-échelle

**Pre-processing :**

Ⓜ Ω Factorisation des opérateurs macro locaux :

$$\mathbf{K}_{M_i} = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \left( \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i (\mathbf{K}_i + \mathbf{t}_i^T \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i)^{-1} \mathbf{t}_i^T - \mathbf{I} \right) \mathbf{k}_i^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}$$

⊗ Assemblage de l'opérateur macro global  $\mathbf{K}_M$

Ⓜ Ω Sauvegarde de l'opérateur intermédiaire :

$$\mathbf{S} = -(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}$$

**Initialisation :** construire  $\hat{s}_0$  nulle

**while**  $\eta_n \geq \text{seuil}$  **do**

**Étape linéaire :**

Ⓜ Ω **Résoudre le problème micro :**

$$(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t}) A_{(m)}^n = (J + \mathbf{t}^T [\hat{T}^{n-1} + \mathbf{k}^- \widehat{W}^{n-1}])$$

Ⓜ Ω **Construire le second membre :**

$$\psi = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- (\mathbf{t} A_{(m)}^n - \widehat{W}^{n-1})$$

⊗ **Résoudre le problème macro :**

$$\mathbf{K}_M \alpha = \psi$$

Ⓜ Ω **Calculer le champ macro :**

$$A_{(M)}^n = \mathbf{S} \alpha$$

Ⓜ Ω **Assembler :**

$$\begin{aligned} A^n &= A_{(m)}^n + A_{(M)}^n \\ T^n &= \hat{T}^{n-1} - \mathbf{k}^- (W^n - \widehat{W}^{n-1}) - \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \alpha \end{aligned}$$

Ⓜ Ω **Relaxation :**

$$s^n \leftarrow r s^n + (1 - r) s^{n-1}$$

Ⓜ Γ **Étape locale :**

$$\text{Chercher } \hat{s}^n = (\widehat{W}^n, \hat{T}^n) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbf{O}_d \widehat{W}^n = 0 \\ \mathbf{O}_s \hat{T}^n = 0 \\ \hat{T}^n - T^n - \mathbf{k}^+ (\widehat{W}^n - W^n) = 0 \end{cases}$$

Ⓜ Γ **Indicateur de convergence :**

$$\text{Calculer : } \eta^n = \frac{\|s^n - \hat{s}^n\|^2}{\frac{1}{2}(\|s^n\|^2 + \|\hat{s}^n\|^2)}$$

**end**

*Légende :*

Ⓜ Ω étape parallélisable sur les sous-domaines

Ⓜ Γ étape parallélisable sur les interfaces

⊗ étape non parallélisable

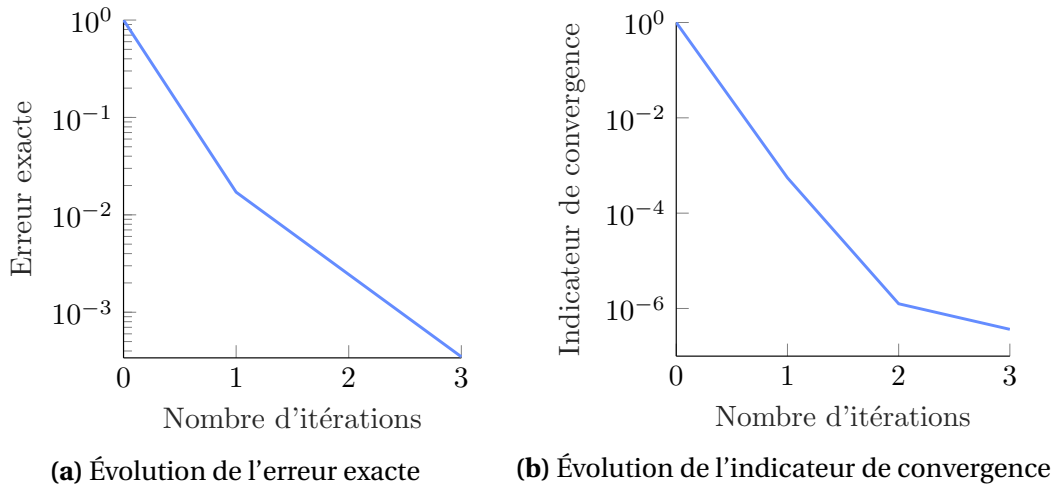


FIGURE 2.20 • Comparaison entre l'erreur exacte et l'indicateur de convergence

en 5, 10 ou 20 sous-domaines. Nous pouvons observer une réduction drastique du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère de convergence avec l'approche multi-échelle. De plus, l'application de cette approche annule pratiquement la dépendance à la décomposition.

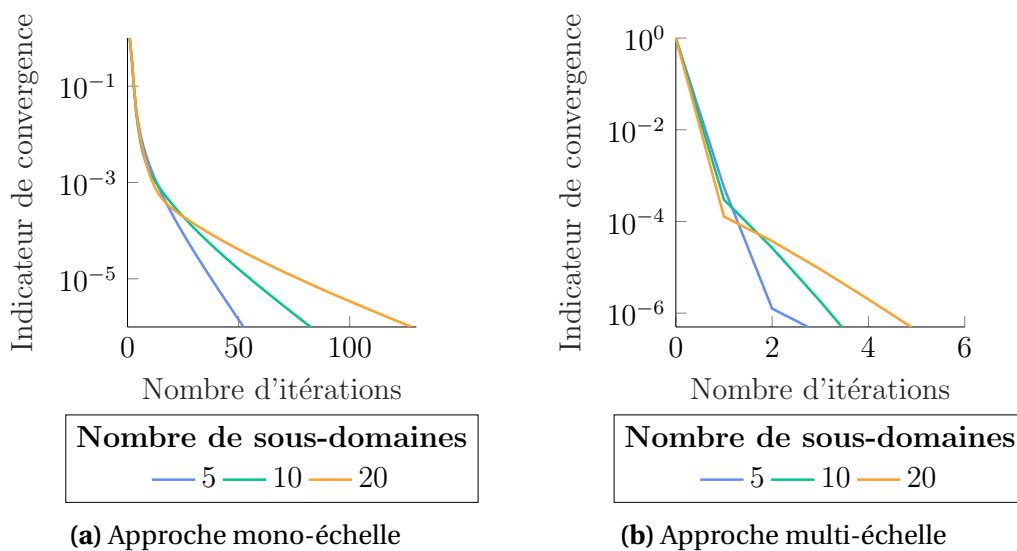
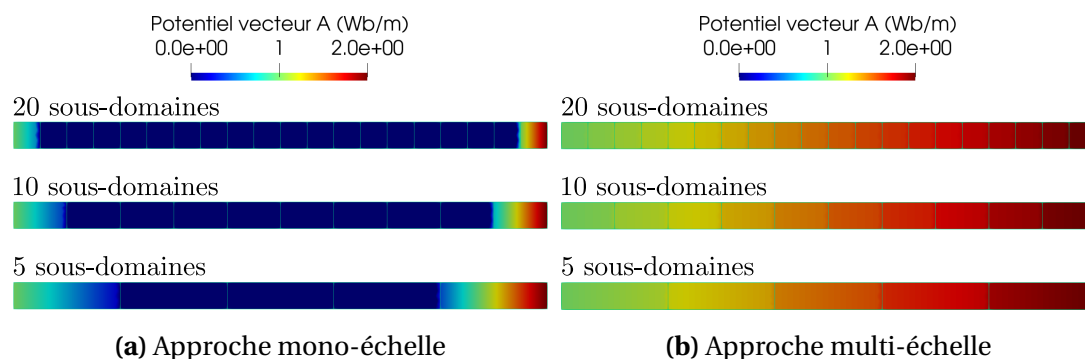


FIGURE 2.21 • Comparaison du nombre d'itérations nécessaire pour atteindre un même critère de convergence en mono et multi-échelle

Pour mieux visualiser l'impact de l'approche multi-échelle sur la construction de la solution  $A$  au fil des itérations, nous examinons la Figure 2.22 qui présente la solution à la première itération de l'algorithme pour différentes décompositions selon les deux approches. Un comportement magnétique grossier est déjà vérifié dans le barreau. Ces résultats démontrent que l'approche multi-échelle permet une transmission efficace de l'information provenant des conditions aux limites à l'ensemble des sous-domaines dès la première itération.

Ces résultats ont permis de mettre en évidence le caractère extensible de la méthode LATIN-DDM multi-échelle. C'est une propriété indispensable pour envisager de réaliser des



**FIGURE 2.22** • Comparaison du potentiel vecteur  $A$  à la première itération, pour des décompositions en 5, 10 ou 20 sous-domaines

simulations performantes. Le gain obtenu dans ce chapitre avec l'approche multi-échelle est exprimé en termes de nombre d'itérations. Il est effectivement nécessaire de réduire le nombre d'itérations pour converger, et ne plus dépendre de la décomposition. Cependant, l'approche multi-échelle ajoute des phases de communication entre les sous-domaines et la résolution d'un problème macro sur l'ensemble des interfaces. En terme de temps de calcul, il ne faudrait pas que ces ajouts soient trop coûteux au point de compromettre les performances de l'approche multi-échelle. Ces aspects seront abordés dans le Chapitre 4, dédié à la stratégie d'implémentation parallèle et aux performances de l'algorithme.

\* \* \*

### › Bilan

Une méthode de décomposition de domaine mixte pour traiter les problèmes de magnétostatique a été introduite, basée sur la méthode LATIN. Cette approche présente l'avantage de séparer clairement les aspects relatifs aux sous-domaines de ceux relatifs aux interfaces. Les équations du problème sont séparées en deux groupes distincts, et un schéma itératif de résolution à deux étapes est proposé. À chaque étape, une solution partielle du problème est construite en introduisant des directions de recherche qui permettent de coupler les quantités d'interface entre les deux groupes d'équations. De plus, le caractère mixte de la méthode implique la définition simultanée du champ primal et du champ dual sur les interfaces, tout en garantissant qu'aucune de ces deux quantités ne soit privilégiée lors du respect des conditions de continuité au cours des itérations.

Ce chapitre avait pour objectif d'adapter la méthode LATIN-DDM au contexte de la magnétostatique. Les problèmes traités présentent des hétérogénéités importantes, notamment avec la présence de milieux ferromagnétiques et d'air, caractérisés par des

perméabilités magnétiques très différentes. Un choix judicieux d'opérateurs de direction de recherche a été réalisé afin d'obtenir un comportement de convergence de l'algorithme plus optimal.

Une première implémentation de l'algorithme a révélé une caractéristique courante des méthodes de décomposition de domaine : leur dépendance au nombre de sous-domaines. L'information ne peut se propager qu'entre les sous-domaines voisins, ce qui entraîne un ralentissement significatif de la convergence lorsque le nombre de sous-domaines augmente. Alors que les méthodes de décomposition de domaine visent à augmenter le nombre de sous-domaines pour réduire la taille des problèmes à résoudre, cette limitation constitue un obstacle majeur.

Une approche multi-échelle basée sur une réécriture de la direction de recherche à l'étape linéaire a alors été introduite. Cette approche permet de vérifier dès la première itération un équilibre macroscopique du problème étudié. De cette façon, une information grossière issue des conditions aux limites et des termes sources est transmise à tous les sous-domaines. Des modes représentant un champ primal macroscopique sont introduits. Dans un cadre magnétostatique, nous montrons qu'un mode constant et un mode linéaire sont suffisants pour traduire un flux magnétique moyen.

Une étude de l'influence de l'approche multi-échelle sur la convergence de l'algorithme a été menée sur un cas simple de validation. Cette approche permet d'obtenir un algorithme LATIN-DDM extensible, grâce à la résolution d'un problème macro.



---

## La LATIN-DDM 3D basée sur les éléments de Whitney

*Pour la résolution des problèmes de magnétostatique 3D, les éléments de Whitney sont implémentés pour obtenir une meilleure représentation de la physique. Le problème matriciel associé n'ayant pas de solution unique, nous mettons en place une stratégie de résolution en utilisant un algorithme itératif de type gradient conjugué et en construisant un second membre compatible. La méthode LATIN-DDM est ensuite étendue aux spécificités des éléments de Whitney. Des exemples simples sont simulés pour valider l'implémentation développée.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction aux éléments de Whitney</b>	<b>60</b>
1.1	Les p-formes pour une meilleure représentation de la physique	60
1.2	Les éléments de Whitney	62
1.3	Propriétés des éléments de Whitney	67
<b>2</b>	<b>Simulation d'un problème de magnétostatique 3D</b>	<b>73</b>
2.1	Formulation du problème discret	73
2.2	Traitement d'un problème sans unicité de la solution	76
2.3	Construction d'un champ source compatible	77
2.4	Validation de l'implémentation	79
<b>3</b>	<b>Extension de la méthode LATIN-DDM aux problèmes 3D</b>	<b>82</b>
3.1	Quantités échangées aux interfaces	82
3.2	Modification de l'étape linéaire	83
3.3	Validation numérique	84
<b>&gt;</b>	<b>Bilan</b>	<b>87</b>

---

# 1 Introduction aux éléments de Whitney

## 1.1 Les $p$ -formes pour une meilleure représentation de la physique

Comme évoqué dans le Chapitre 1, la modélisation 3D des problèmes de magnétostatique requiert une attention particulière lors de sa discrétisation. En effet, pour respecter la physique des équations de Maxwell, seule la composante normale de  $\underline{B}$ , et la composante tangentielle de  $\underline{H}$  (en l'absence de courants surfaciques), doivent être imposées continues au passage de certaines interfaces. Dans la ré-écriture du problème en terme de potentiel vecteur  $\underline{A}$  cette condition est obtenue en considérant la composante tangentielle de  $\underline{A}$  continue.

Partant du constat que les vecteurs ne constituent pas la meilleure représentation pour les champs issus des équations de Maxwell, l'idée proposée par [BOSSAVIT, 1988b] est de s'appuyer sur les formes différentielles pour tenir compte de la nature spécifique de ces champs. Les grandeurs physiques sont représentées par des intégrales de différentes dimensions. Ainsi, des formes différentielles de différents degrés  $p$  sont introduites, représentant les variables intégrées. En d'autres termes, une forme de degré  $p$ , appelée une  $p$ -forme, peut-être vue comme l'intégrande d'une intégrale à  $p$  dimensions. Ces formes différentielles sont des fonctionnelles linéaires des champs vectoriels, permettant de définir entièrement un champ vectoriel particulier. Pour faciliter la compréhension, la Table 3.1 exprime les formes différentielles (notées en italique) dans un espace de dimension 3 dans lequel elles peuvent s'écrire par des opérations vectorielles.

0-forme	1-forme	2-forme	3-forme
$\phi = \phi$	$a = \underline{A} dx$	$j = \underline{J} dx dy$	$\rho = \rho dx dy dz$

TABLE 3.1 • Expression des formes différentielles

Cette formulation par les formes différentielles ne prend pas en compte les champs locaux, mais plutôt les quantités globales définies dans une structure mathématique correspondante, appelée complexe de De Rham. Elle est composée de quatre espaces et trois opérateurs différentiels. Les quatre espaces sont deux copies de  $L^2$  et deux copies de  $\mathbb{L}^2$ , qui sont respectivement l'espace des champs scalaires et des champs de vecteurs de carré intégrable sur  $\Omega$ . Les trois opérateurs sont le gradient, le rotationnel et la divergence. Il s'agit de fonctions linéaires partielles définies seulement sur un sous-espace de  $L^2$  ou  $\mathbb{L}^2$ . Ces domaines, notés  $\mathcal{W}_h^p$  avec  $p$  le degré de l'opérateur associé, sont définis de façon à incorporer les conditions aux limites dans la Table 3.2.

Degré	Opérateur	Domaines
0	grad	$\mathcal{W}_h^0 = \left\{ u \in L^2(\Omega); \underline{\text{grad}}(u) \in \mathbb{L}^2; u _{\Gamma_H} = 0 \right\}$
1	rot	$\mathcal{W}_h^1 = \left\{ \underline{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega); \underline{\text{rot}}(\underline{u}) \in \mathbb{L}^2; \underline{n} \wedge \underline{u} _{\Gamma_H} = 0 \right\}$
2	div	$\mathcal{W}_h^2 = \left\{ \underline{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega); \text{div}(\underline{u}) \in L^2; \underline{n} \cdot \underline{u} _{\Gamma_H} = 0 \right\}$

TABLE 3.2 • Les trois opérateurs et leurs domaines

Notons que l'image de chaque domaine d'un opérateur est le noyau de l'opérateur suivant. On peut donc écrire

$$\underline{\text{grad}}(\mathcal{W}_h^0) \subset \mathcal{W}_h^1 \tag{3.1}$$

et

$$\underline{\text{rot}}(\mathcal{W}_h^1) \subset \mathcal{W}_h^2. \tag{3.2}$$

Les opérateurs définissent alors des applications de  $\mathcal{W}_h^p$  dans  $\mathcal{W}_h^{p+1}$  : ils "lient" les espaces fonctionnels entre eux de façon à former une suite

$$\mathcal{W}_h^0 \xrightarrow{\text{grad}} \mathcal{W}_h^1 \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{W}_h^2 \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{W}_h^3. \tag{3.3}$$

Des sous-espaces duaux, notés  $\mathcal{W}_b^p$ , peuvent également être définis en considérant les adjoints des précédents opérateurs. Ils sont explicités dans la Table 3.3. Nous pouvons remarquer que les conditions aux limites considérées dans la définition de ces domaines sont maintenant relatives à la portion de contour complémentaire à  $\Gamma_H$ , soit  $\Gamma_B$ . Ces sous-espaces forment aussi une suite.

Degré	Opérateur	Domaines
2	$(\text{grad})^* = -\text{div}$	$\mathcal{W}_b^2 = \left\{ \underline{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega); \text{div}(\underline{u}) \in L^2; \underline{n} \cdot \underline{u} _{\Gamma_B} = 0 \right\}$
1	$(\text{rot})^* = \text{rot}$	$\mathcal{W}_b^1 = \left\{ \underline{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega); \underline{\text{rot}}(\underline{u}) \in \mathbb{L}^2; \underline{n} \wedge \underline{u} _{\Gamma_B} = 0 \right\}$
0	$(\text{div})^* = -\text{grad}$	$\mathcal{W}_b^0 = \left\{ u \in L^2(\Omega); \underline{\text{grad}}(u) \in \mathbb{L}^2; u _{\Gamma_B} = 0 \right\}$

TABLE 3.3 • Les opérateurs duaux et leurs domaines

La Figure 3.1 montre comment cette nouvelle structure mathématique permet de définir toutes les équations de Maxwell, ainsi que leurs conditions aux limites (inclues dans la définition des espaces). Ce diagramme, appelé diagramme de Tonti, représente à chaque niveau une  $p$ -forme, et à chaque colonne un système d'équations. Deux niveaux successifs d'une colonne sont liés par un opérateur gradient, rotationnel ou divergence. Deux formes d'un même niveau sont liées par une loi de comportement.

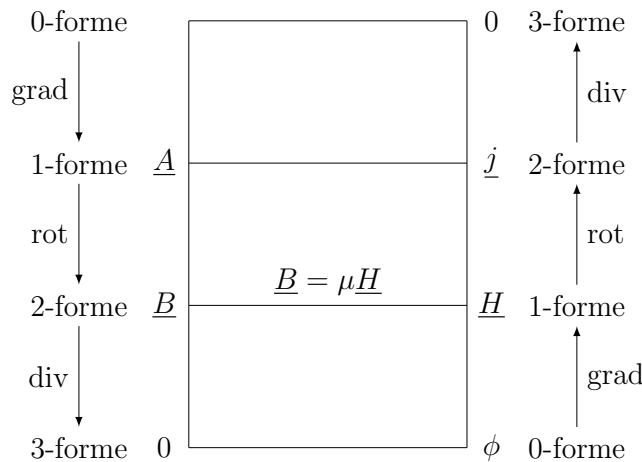


FIGURE 3.1 • Diagramme de Tonti pour la magnétostatique

### Remarque

Ce diagramme met en évidence la dualité des équations de Maxwell avec les lois de conservation de flux dans la colonne de gauche et le théorème d'Ampère dans la colonne de droite.

## 1.2 Les éléments de Whitney

Dans le cadre de la simulation numérique de machines électriques, nous souhaitons obtenir une version discrétisée des équations précédentes. L'idée est alors de construire une structure discrète analogue à celle présentée en continu. Les espaces linéaires deviennent des espaces de dimension finie, les opérateurs différentiels sont alors représentés par des matrices. Cette structure discrète existe, et a même été inventée avant l'ère des éléments finis par [WHITNEY, 1957]. Elle est reprise par [BOSSAVIT, 1988b] qui introduit les éléments de Whitney pour lesquels les inconnues deviennent les valeurs des formes différentielles, utilisées comme degrés de liberté dans la méthode des éléments finis.

Les éléments de Whitney sont définis sur un maillage classique du domaine d'étude  $\Omega$ . En plus des nœuds, ces éléments incluent des degrés de liberté aux arêtes et aux facettes. La Figure 3.2 représente les quatre degrés de liberté aux nœuds  $n_i$ , les six degrés de liberté aux arêtes  $a_i$  et les quatre degrés de liberté aux facettes  $f_s$  sur un élément de référence tétraèdre isoparamétrique. Ces degrés de liberté pourront être respectivement appelé *éléments nodaux*, *éléments d'arêtes*, et *éléments de facettes*. Il existe également un dernier degré de liberté  $v_e$ , associé au volume de l'élément, non représenté sur la figure. Le centre du repère de référence  $(u, v, w)$  est situé au niveau du nœud  $n_1$ , et chaque côté partant de ce nœud a une longueur unitaire.

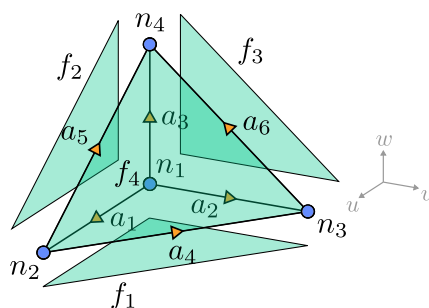


FIGURE 3.2 • Représentation des degrés de liberté d'un élément de Whitney

### Remarque

Dans ce manuscrit, seuls les éléments de Whitney définis sur des tétraèdres sont abordés. Cependant, il est également possible d'utiliser les éléments de Whitney sur des maillages comportant d'autres types de géométrie d'éléments. Des travaux ont été menés sur les éléments linéaires prismatiques, pyramidaux ou hexaédriques [DULAR et al., 1994; GRADINARU & HIPTMAIR, 1999; NEDELEC, 1980], ainsi que sur des éléments d'ordre supérieur [WANG & IDA, 1993; WEBB & FORGAHANI, 1993].

Pour utiliser les formes différentielles en tant que degrés de liberté des éléments de Whitney, les expressions continues rassemblées en Table 3.1 sont transformées en des approximations discrètes, telles que :

» 0-forme : associées aux nœuds  $n_i$  de l'élément,  $i = 1, \dots, 4$

$$\Phi_i = \phi_i \quad (3.4)$$

» 1-forme : associées aux arêtes  $a_l$  de l'élément,  $l = 1, \dots, 6$

$$A_l = \int_{a_l} \underline{A} \cdot \underline{dl} \quad (3.5)$$

avec  $\underline{dl}$  un vecteur directeur associé à l'arête  $a_l$ .

! La valeur associée au degré de liberté  $A_l$  ne correspond donc plus à la valeur du champ  $\underline{A}$  en un point mais à la valeur de la circulation de  $\underline{A}$  le long de l'arête  $a_l$ .

» 2-forme : associée aux facettes  $f_s$  de l'élément,  $s = 1, \dots, 4$

$$B_s = \int_{f_s} \underline{B} \cdot \underline{n} dS \quad (3.6)$$

avec  $\underline{n}$  la normale extérieure à la facette.

! La valeur associée au degré de liberté  $B_s$  ne correspond donc plus à la valeur du champ  $\underline{B}$  en un point mais à la valeur du flux de  $\underline{B}$  au travers de la surface  $f_s$ .

» 3-forme : associé au volume  $v_e$  de l'élément

$$\rho = \int_{v_e} \rho dV \quad (3.7)$$

L'utilisation de ces degrés de liberté possède plusieurs avantages :

- Il est possible de les construire de manière intrinsèque, indépendamment du choix particulier du référentiel.
- Ces approximations permettent de ne pas imposer plus de continuité que ce que la physique demande.
- Nous travaillons directement avec les quantités physiques d'intérêt (flux, potentiel électrique, force magnétomotrice), sans devoir les intégrer ou dériver.
- Chaque degré de liberté est maintenant un scalaire, même si l'approximation discrète représente un champ vectoriel. La taille du problème à résoudre est réduite par rapport à un problème vectoriel.

Ce dernier point met en évidence le fait que certaines fonctions d'interpolation doivent être vectorielles afin d'imposer les conditions aux limites de manière naturelle.

### Remarque

Les éléments de Whitney peuvent être vus comme réunissant les éléments finis de Lagrange via les éléments nodaux, les éléments de Nédélec via les éléments d'arêtes et les éléments de Raviart-Thomas via les éléments de facettes.

### 1.2.1 Fonction d'interpolation 0-forme

Pour un nœud  $n_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), les éléments de Whitney d'ordre 0 sont définis par la fonction d'interpolation

$$N_i^0 = \lambda_i \quad (3.8)$$

avec  $\lambda_i$  la coordonnée barycentrique d'un point  $M$  en regard avec le nœud  $n_i$ . Cette coordonnée vaut 1 si  $M$  se confond avec  $n_i$ , elle vaut 0 si  $M$  se confond avec les autres nœuds du maillage. Cette fonction d'interpolation correspond à la fonction d'interpolation classique d'ordre 1 des éléments finis de Lagrange.

Une fonction scalaire  $\phi$  est interpolée telle que

$$\phi = \sum_{n_i \in \tilde{N}} (N_i^0)^T \Phi_i \quad (3.9)$$

avec  $\Phi_i$  les valeurs nodales de  $\phi$  et  $\tilde{N}$  l'ensemble des nœuds du maillage.

Cette fonction d'interpolation permet de conserver la continuité nodale des champs. Pour l'élément de référence isoparamétrique représenté Figure 3.2, les fonctions d'interpolation s'écrivent de manière explicite avec les expressions rassemblées dans la Table 3.4.

Nœud $n_i$	Fonctions $N_i^0$
$n_1$	$1 - u - v - w$
$n_2$	$u$
$n_3$	$v$
$n_4$	$w$

TABLE 3.4 • Fonctions d'interpolations pour 0-forme

Les fonctions d'interpolation pour 0-forme sont utilisées pour créer la correspondance entre les coordonnées de référence dans l'élément isoparamétrique et les coordonnées de l'élément réel qui est une déformation de l'élément isoparamétrique. Un point de coordonnées  $\underline{x} = (x, y, z)$  vérifie la relation

$$\underline{x} = \sum_{n_i \in \tilde{N}} (N_i^0)^T \underline{x}_i \quad (3.10)$$

avec  $\underline{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$  les coordonnées réelles des nœuds  $n_i$ .

### 1.2.2 Fonction d'interpolation 1-forme

Pour une arête  $a_l$  ( $l = 1, \dots, 6$ ), ayant pour extrémités les nœuds  $n_i$  et  $n_j$  et une orientation de  $n_i$  vers  $n_j$ , les éléments de Whitney d'ordre 1 sont définis par la fonction d'interpolation

$$\underline{N}_l^1 = \underline{N}_{i \rightarrow j}^1 = (N_i^0 \underline{\text{grad}}(N_j^0) - N_j^0 \underline{\text{grad}}(N_i^0)). \quad (3.11)$$

Le sens de parcours de l'arête est important dans la définition des fonctions d'interpolation puisque qu'elles servent à représenter la circulation d'un champ le long des arêtes, qui est une grandeur impactée par l'orientation retenue.

La Figure 3.3 représente la fonction d'interpolation  $N_{2 \rightarrow 4}^1$  dans l'élément de référence. Sa définition donne un vecteur qui « tourne » autour de l'arête  $n_1 \rightarrow n_3$  avec une amplitude proportionnelle à la distance à cette arête. Ce champ est défini pour que sa circulation soit

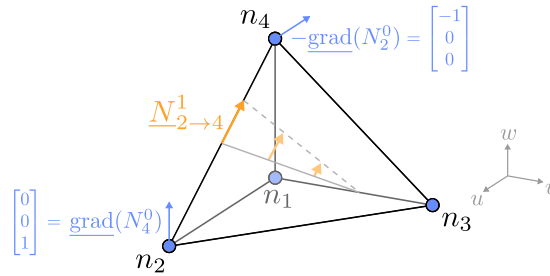


FIGURE 3.3 • Représentation de la fonction d'interpolation 1-forme  $N_{2 \rightarrow 4}^2$

égale à 1 le long de l'arête  $n_2 \rightarrow n_4$  et 0 le long des autres arêtes. Au travers des facettes de l'élément, la fonction d'interpolation est discontinue mais sa composante tangentielle est continue.

Ces fonctions d'interpolations sont utilisées pour approximer le potentiel vecteur magnétique  $\underline{A}$  tel que

$$\underline{A} = \sum_{a_l \in \bar{A}} (N_l^1)^T A_l \quad (3.12)$$

avec  $A_l$  le degré de liberté valant la circulation de  $\underline{A}$  le long de l'arête  $a_l$  et  $\bar{A}$  l'ensemble des arêtes. De la même façon, comme le champ magnétique  $\underline{H}$  est de même nature, nous le discrétisons sur les arêtes tel que

$$\underline{H} = \sum_{a_l \in \bar{A}} (N_l^1)^T H_l \quad (3.13)$$

avec  $H_l$  le degré de liberté valant la circulation de  $\underline{H}$  le long de l'arête  $a_l$ .

Un sens de circulation arbitraire doit être défini dans l'élément de référence avec lequel toutes les fonctions d'interpolations sont exprimées. Nous choisissons de parcourir chaque arête dans l'ordre croissant des nœuds, comme représenté sur la Figure 3.2. Ce sens de circulation dans l'élément de référence donne les expressions des fonctions d'interpolation, rassemblées dans la Table 3.5.

### 1.2.3 Fonction d'interpolation 2-forme

Pour une facette  $f_s$  ( $s = 1, \dots, 4$ ), définie par les nœuds  $n_i, n_j$  et  $n_k$  (dans cet ordre), les éléments de Whitney d'ordre 2 sont définis par la fonction d'interpolation

$$\underline{N}_s^2 = \underline{N}_{ijk}^2 = 2(N_i^0 \underline{\text{grad}}(N_j^0) \wedge \underline{\text{grad}}(N_k^0) + N_j^0 \underline{\text{grad}}(N_k^0) \wedge \underline{\text{grad}}(N_i^0) + N_k^0 \underline{\text{grad}}(N_i^0) \wedge \underline{\text{grad}}(N_j^0)) \quad (3.14)$$

La Figure 3.4 représente la fonction d'interpolation d'un élément de facette. En remarquant qu'un produit vectoriel  $\underline{\text{grad}}(N_1^0) \wedge \underline{\text{grad}}(N_2^0)$  donne un vecteur parallèle à l'arête  $n_3 \rightarrow n_4$ , on construit le champ  $\underline{N}_{124}^2$  de façon à ce qu'il émerge du nœud  $n_3$  et croisse linéairement vers la facette opposée  $\{n_1, n_2, n_4\}$ . Par construction, le flux de ce champ est égal

Arête $a_l$	$l = i \rightarrow j$	Fonctions $\underline{N}_{i \rightarrow j}^1$
$a_1$	$a_{1 \rightarrow 2}$	$1 - v - w$
		$u$
		$u$
$a_2$	$a_{1 \rightarrow 3}$	$v$
		$1 - u - w$
		$v$
$a_3$	$a_{1 \rightarrow 4}$	$w$
		$w$
		$1 - u - v$
$a_4$	$a_{2 \rightarrow 3}$	$-v$
		$u$
		$0$
$a_5$	$a_{2 \rightarrow 4}$	$-w$
		$0$
		$u$
$a_6$	$a_{3 \rightarrow 4}$	$0$
		$-w$
		$v$

TABLE 3.5 • Fonctions d'interpolation pour 1-forme

à 1 au travers de la facette  $\{n_1, n_2, n_4\}$  et égal à 0 au travers des autres facettes. Cette définition de fonction d'interpolation garantit leur continuité normale mais pas leur continuité tangentielle.

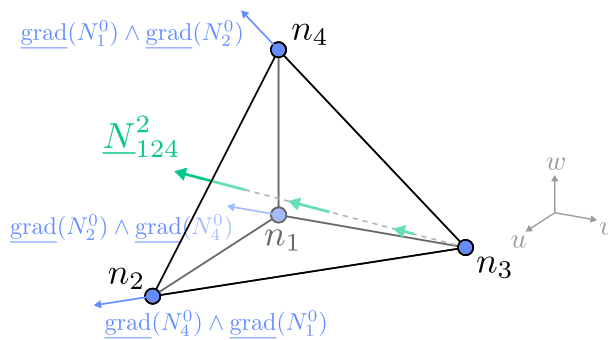


FIGURE 3.4 • Représentation de la fonction d'interpolation 2-forme  $\underline{N}_{124}^2$

Nous utilisons les fonctions d'interpolation 2-forme pour approximer la densité de courant  $\underline{j}$

$$\underline{j} = \sum_{f_s \in \bar{F}} (\underline{N}_s^2)^T J_s \tag{3.15}$$

avec  $J_s$  le degré de liberté valant le flux de  $\underline{j}$  à travers la facette  $f_s$ , et  $\bar{F}$  l'ensemble des facettes.

De la même manière, nous discrétisons l'induction magnétique  $\underline{B}$  telle que

$$\underline{B} = \sum_{f_s \in \bar{F}} (\underline{N}_s^2)^T B_s \tag{3.16}$$

L'ordre des nœuds dans la définition de la facette est important : il permet de déterminer le sens de la normale. Ce choix est arbitraire, et nous choisissons de définir les facettes de manière à ce que leurs normales sortent de l'élément de référence. Cette convention conduit à l'expression des fonctions d'interpolation comme indiqué dans la Table 3.6.

Facette $f_s$	$s = ijk$	Fonctions $\underline{N}_{ijk}^2$
$f_1$	$f_{132}$	$\begin{bmatrix} 2u \\ 2v \\ 2w - 2 \end{bmatrix}$
$f_2$	$f_{124}$	$\begin{bmatrix} 2u \\ 2v - 2 \\ 2w \end{bmatrix}$
$f_3$	$f_{143}$	$\begin{bmatrix} 2u - 2 \\ 2v \\ 2w \end{bmatrix}$
$f_4$	$f_{234}$	$\begin{bmatrix} 2u \\ 2v \\ 2w \end{bmatrix}$

TABLE 3.6 • Fonctions d'interpolation pour 2-forme

**Remarque**

Nous pouvons noter que les éléments de Whitney suivent un certain enchaînement. Les éléments d'arêtes sont obtenus par la combinaison linéaire du gradient des éléments nodaux. Les éléments de facettes sont obtenus par la combinaison linéaire du rotationnel des éléments d'arêtes. On retrouve ces relations entre les  $p$ -formes sur le diagramme de Tonti Figure 3.1

Nous ne détaillons pas les fonctions d'interpolation 3-forme, notées  $N_\sigma^3$ , car elles ne seront pas utilisées dans les travaux réalisés ici.

**Remarque**

Il est possible d'introduire des éléments de Whitney 2D dans certains cas d'études. Il s'agit des éléments 3D dégénérés, présentés dans [REN, 1997].

### 1.3 Propriétés des éléments de Whitney

Les éléments de Whitney ont des propriétés intéressantes, exposées par [BOSSAVIT, 1998]. Nous en détaillons quelques unes dans cette partie.

### 1.3.1 Continuités naturelles

Comme abordé précédemment, la composante tangentielle d'une fonction d'interpolation 1-forme  $\underline{N}_l^1$  est continue au travers des interfaces. Il est possible de montrer cette propriété sur un exemple simple. On considère un domaine  $\Omega$  borné par  $\partial\Omega$  et séparé en deux sous-domaines tels que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et séparés par une interface  $\Gamma$  de normale  $\underline{n}$  dirigée du domaine  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ , comme représentés Figure 3.5. Pour toute fonction  $\underline{v}$  (dans l'espace

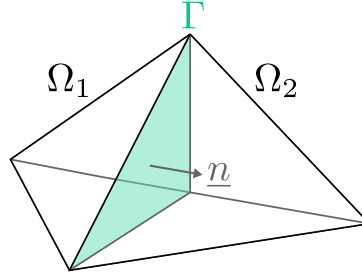


FIGURE 3.5 • Exemple d'interface entre deux sous-domaines

qui garantit sa dérivabilité) telle que  $\underline{v} = \underline{0}$  sur  $\partial\Omega$ , on calcule :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\text{rot}}(\underline{v}) \underline{N}_l^1 d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot (\underline{\tilde{n}} \wedge \underline{N}_l^1) dS = \int_{\Omega} \underline{\text{rot}}(\underline{v}) \underline{N}_l^1 d\Omega \quad (3.17)$$

avec  $\underline{\tilde{n}}$  la normale sur  $\partial\Omega$ . Or, il est aussi possible d'écrire :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) d\Omega = \int_{\Omega_1} \underline{v} \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) d\Omega + \int_{\Omega_2} \underline{v} \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) d\Omega \quad (3.18)$$

$$= \int_{\Omega_1} \underline{\text{rot}}(\underline{v}) \underline{N}_l^1 d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \underline{v} \cdot (\underline{\tilde{n}} \wedge \underline{N}_l^1) dS + \int_{\Omega_2} \underline{\text{rot}}(\underline{v}) \underline{N}_l^1 d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} \underline{v} \cdot (\underline{\tilde{n}} \wedge \underline{N}_l^1) dS \quad (3.19)$$

$$= \int_{\Omega} \underline{\text{rot}}(\underline{v}) \underline{N}_l^1 d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{v} \cdot \delta[\underline{n} \wedge \underline{N}_l^1] dS \quad (3.20)$$

avec  $\delta[\ ]$  qui désigne le saut au passage de l'interface. On a donc  $\forall \underline{v}$ ,

$$\int_{\Gamma} \underline{v} \cdot \delta[\underline{n} \wedge \underline{N}_l^1] dS = 0 \quad (3.21)$$

Nous en déduisons que  $\delta[\underline{n} \wedge \underline{N}_l^1] = 0$  ce qui traduit la continuité tangentielle de  $\underline{N}_l^1$ . Par contre, la composante normale peut être discontinue, comme c'est le cas pour  $\underline{H}$  sur une interface air/fer.

De la même manière, il est possible de montrer que la composante normale d'une fonction d'interpolation 2-forme  $\underline{N}_s^2$  est continue au travers des interfaces. En considérant le même exemple Figure 3.5, et pour toute fonction  $\underline{v}$  telle que  $\underline{v} = \underline{0}$  sur  $\partial\Omega$ , on calcule :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \underline{\text{div}}(\underline{N}_s^2) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{v}) \underline{N}_s^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot (\underline{N}_s^2 \cdot \underline{\tilde{n}}) dS = \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{v}) \underline{N}_s^2 d\Omega \quad (3.22)$$

avec  $\tilde{n}$  la normale sur  $\partial\Omega$ . Or, on peut aussi écrire :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \operatorname{div}(\underline{N}_s^2) d\Omega = \int_{\Omega_1} \underline{v} \operatorname{div}(\underline{N}_s^2) d\Omega + \int_{\Omega_2} \underline{v} \operatorname{div}(\underline{N}_s^2) d\Omega \quad (3.23)$$

$$= \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\underline{v}) \underline{N}_s^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \underline{v} \cdot (\underline{N}_s^2 \cdot \tilde{n}) dS + \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\underline{v}) \underline{N}_s^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} \underline{v} \cdot (\underline{N}_s^2 \cdot \tilde{n}) dS \quad (3.24)$$

$$= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{v}) \underline{N}_s^2 d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{v} \cdot \delta[\underline{N}_s^2 \cdot \underline{n}] dS \quad (3.25)$$

avec  $\delta[\ ]$  qui désigne le saut. On a donc  $\forall \underline{v}$ ,

$$\int_{\Gamma} \underline{v} \cdot \delta[\underline{N}_s^2 \cdot \underline{n}] dS = 0 \quad (3.26)$$

On en déduit que  $\delta[\underline{N}_s^2 \cdot \underline{n}] = 0$  ce qui traduit la continuité normale de  $\underline{N}_s^2$ . Par contre, la composante tangentielle peut être discontinue, comme c'est le cas pour  $\underline{B}$  sur une interface air/fer.

Ainsi, en discrétisant les champs du problème de magnétostatique selon les éléments adaptés aux formes différentielles correspondantes, la continuité requise de ces champs est naturellement satisfaite, sans imposer de continuité trop forte comme ce serait le cas avec les éléments d'ordre 0.

### 1.3.2 Propriété de conformité

On introduit par  $\mathcal{N}^p$  l'ensemble des éléments de Whitney d'ordre  $p$ . Les fonctions de forme des éléments de Whitney ont été définies de telle façon que l'ensemble de  $N_i^0$  génère  $\mathcal{N}^0$ , l'ensemble de  $\underline{N}_l^1$  génère  $\mathcal{N}^1$  et l'ensemble de  $\underline{N}_s^2$  génère  $\mathcal{N}^2$ . Les fonctions d'interpolations des éléments de volume 3-forme génèrent  $\mathcal{N}^3$ . Ces domaines sont inclus dans les domaines des opérateurs définis précédemment :

$$\mathcal{N}^0 \subset \mathcal{W}^0 \quad (3.27)$$

$$\mathcal{N}^1 \subset \mathcal{W}^1 \quad (3.28)$$

$$\mathcal{N}^2 \subset \mathcal{W}^2 \quad (3.29)$$

$$\mathcal{N}^3 \subset \mathcal{W}^3 \quad (3.30)$$

Ces inclusions impliquent la séquence suivante

$$\mathcal{N}^0 \xrightarrow{\operatorname{grad}} \mathcal{N}^1 \xrightarrow{\operatorname{rot}} \mathcal{N}^2 \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathcal{N}^3. \quad (3.31)$$

Cette séquence garantit la propriété de conformité des éléments de Whitney. Par exemple, la discrétisation du potentiel vecteur  $\underline{A}$  par les éléments d'arêtes ( $A \in \mathcal{N}^1$ ) assure sa continuité tangentielle, mais aussi la continuité normale de l'induction magnétique  $\underline{B} = \operatorname{rot}(\underline{A})$ . Cette dernière relation est vérifiée au sens exact, signifiant également la vérification exacte de  $\operatorname{div}(\underline{B}) = 0$ .

Les quelques propriétés abordées dans ce chapitre sont résumées dans la Table 3.7, avec

$\delta$  le symbole de Kronecker.

Fonctions	Intégrale	Continuité	Espace généré
$N_i^0$	$N_i^0(x_j) = \delta_{ij}$	continue	$\mathcal{N}^0$
$\underline{N}_l^1$	$\int_{a_l} \underline{N}_k^1 d\mathbf{l} = \delta_{lk}$	$\underline{n} \wedge \underline{N}_l^1$	$\mathcal{N}^1$
$\underline{N}_s^2$	$\int_{f_s} \underline{N}_p^2 d\mathbf{S} = \delta_{sp}$	$\underline{N}_s^2 \cdot \underline{n}$	$\mathcal{N}^2$

TABLE 3.7 • Propriétés des éléments de Whitney

### 1.3.3 Discrétisation des opérateurs

Un avantage à l'utilisation des éléments de Whitney est de pouvoir discrétiser les opérateurs « naturellement ». Pour cela nous introduisons la notion d'incidence [BOSSAVIT, 1998; MEUNIER, 2008] :

» Incidence d'un nœud  $n_i$  dans une arête  $a_l = :$

$$i(n_i, a_l) = \begin{cases} 1 & \text{si départ} \\ -1 & \text{si arrivée} \\ 0 & \text{si n'appartient pas} \end{cases} \quad (3.32)$$

» Incidence d'une arête  $a_l$  dans une facette  $f_s :$

$$i(a_l, f_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_l \in f_s \text{ tq } a_l = \{n_i, n_j\} \in f_s = \{n_i, n_j, n_k\} \\ -1 & \text{si } a_l \in f_s \text{ tq } a_l = \{n_j, n_i\} \in f_s = \{n_i, n_j, n_k\} \\ 0 & \text{si } a_l \notin f_s \end{cases} \quad (3.33)$$

» Incidence d'une facette  $f_s$  dans un volume  $v_e :$

$$i(f_s, v_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_s \in v_e \\ 0 & \text{si } f_s \notin v_e \end{cases} \quad (3.34)$$

Le calcul des incidences dépend de l'orientation arbitraire des arêtes et des facettes dans l'élément de référence. Ces incidences permettent la construction de trois matrices de passages :  $\mathbf{G}$  des nœuds aux arêtes,  $\mathbf{R}$  des arêtes aux facettes et  $\mathbf{D}$  des facettes au volume. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= i(n_i, a_l) \quad \forall a_l \in \bar{A}, \forall n_i \in \bar{N} \\ \mathbf{R} &= i(a_l, f_s) \quad \forall f_s \in \bar{F}, \forall a_l \in \bar{A} \\ \mathbf{D} &= i(f_s, v_e) \quad \forall v_e \in \bar{V}, \forall f_s \in \bar{F} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ces matrices sont rectangulaires, respectivement de dimensions  $N_a \times N_n$ ,  $N_f \times N_a$  et  $N_v \times N_f$ , avec  $N_n$ ,  $N_a$ ,  $N_f$  et  $N_v$  respectivement le nombre de nœuds, d'arêtes, de facettes et de volume dans un élément. Dans l'élément de référence avec les choix d'orientations rappelés Figure 3.6, les matrices d'incidences s'écrivent alors :

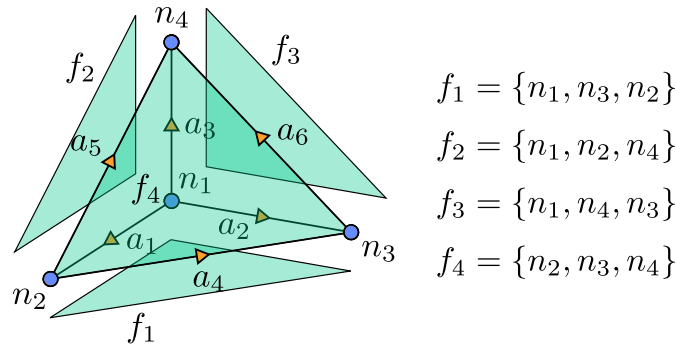


FIGURE 3.6 • Rappel des orientations choisies dans l'élément de référence

	a \ n	1	2	3	4
<b>G</b> =	1	-1	1	0	0
	2	-1	0	1	0
	3	-1	0	0	1
	4	0	-1	1	0
	5	0	-1	0	1
	6	0	0	-1	1

	f \ a	1	2	3	4	5	6
<b>R</b> =	1	-1	1	0	-1	0	0
	2	1	0	-1	0	1	0
	3	0	-1	1	0	0	-1
	4	0	0	0	1	-1	1

	v \ f	1	2	3	4
<b>D</b> =	1	1	1	1	1

Les relations suivantes sont montrées dans [BOSSAVIT, 1998] :

$$\sum_{a_l \in \bar{A}} i(n_i, a_l) \underline{N}_l^1 = \underline{\text{grad}}(\underline{N}_i^0) \quad (3.36)$$

$$\sum_{f_s \in \bar{F}} i(a_l, f_s) \underline{N}_s^2 = \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) \quad (3.37)$$

$$\sum_{v_e \in \bar{V}} i(f_s, v_e) \underline{N}_e^3 = \underline{\text{div}}(\underline{N}_s^2) \quad (3.38)$$

Ainsi, grâce à la relation (3.37), le rotationnel d'un champ  $\underline{H}$  de  $\mathcal{W}^1$  définit le champ

$$\underline{J} = \underline{\text{rot}}(\underline{H}) = \sum_{a_l \in \bar{A}} H_l \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) = \sum_{a_l \in \bar{A}} H_l \sum_{f_s \in \bar{F}} i(a_l, f_s) \underline{N}_s^2 = \sum_{f_s \in \bar{F}} \left( \sum_{a_l \in \bar{A}} i(a_l, f_s) H_l \right) \underline{N}_s^2 \quad (3.39)$$

avec  $\underline{J}$  qui appartient à  $\mathcal{W}^2$ . Ses composantes discrètes, notées  $J_s$ , sont la somme des circulations de  $\underline{H}$  le long des contours de chaque facette  $f$  (ce qui physiquement correspond à

des forces magnétomotrices) :

$$J_s = \left( \sum_{a_l \in \bar{A}} i(a_l, f_s) H_l \right) \quad (3.40)$$

Nous pouvons alors écrire à l'aide des matrices d'incidence la relation suivante :

$$J = \mathbf{R}H \quad (3.41)$$

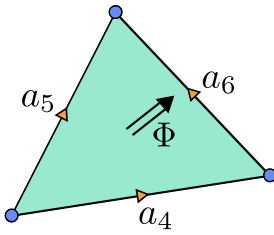
La matrice  $\mathbf{R}$  apparaît alors comme l'équivalent discret du rotationnel. De la même manière, nous pouvons montrer que  $\mathbf{G}$  est l'équivalent discret de l'opérateur gradient et finalement que  $\mathbf{D}$  est celui de l'opérateur divergence.

En considérant cette fois-ci les espaces discrets et les opérateurs discrets, la séquence s'écrit :

$$\mathcal{N}^0 \xrightarrow{\mathbf{G}} \mathcal{N}^1 \xrightarrow{\mathbf{R}} \mathcal{N}^2 \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathcal{N}^3. \quad (3.42)$$

Cette séquence est exacte, les opérateurs discrets traduisent exactement les phénomènes physiques.

 Exemple



La somme des circulations du champ  $\underline{A}$  sur un contour fermé est égal au flux de  $\underline{B}$  au travers de la surface :

$$\Phi = A_4 + A_6 - A_5. \quad (3.43)$$

En utilisant les opérateurs discrets, nous retrouvons les relations classiques  $\underline{\text{rot}}(\underline{\text{grad}}) = \underline{0}$  et  $\text{div}(\underline{\text{rot}}) = 0$  :

$$\mathbf{R}\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

Ces relations peuvent être transposées telles que :

$$\mathbf{G}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{D}^T = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Ainsi, les opérateurs transposés  $\mathbf{G}^T$ ,  $\mathbf{R}^T$  et  $\mathbf{D}^T$  sont respectivement les adjoints de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{G}$ , donnant la séquence duale :

$$\mathcal{N}^0 \xleftarrow{\mathbf{D}^T} \mathcal{N}^1 \xleftarrow{\mathbf{R}^T} \mathcal{N}^2 \xleftarrow{\mathbf{G}^T} \mathcal{N}^3. \quad (3.48)$$

## 2 Simulation d'un problème de magnétostatique 3D

### 2.1 Formulation du problème discret

Nous souhaitons dans ce chapitre discrétiser le problème de magnétostatique posé section 2.1 avec les éléments de Whitney. La formulation variationnelle associée à des conditions aux limites aux bords s'écrit :

Trouver  $A \in \mathcal{W}^1$  tel que

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \underline{\text{rot}}(A') \cdot \underline{\text{rot}}(A) \, dV = \int_{\Omega} A' \cdot \underline{j} \, dV, \quad \forall A' \in \mathcal{W}^1 \quad (3.49)$$

Le potentiel vecteur  $\underline{A}$  est discrétisé sur les éléments d'arêtes avec les fonctions d'interpolation  $\underline{N}_l^1$

$$\underline{A} = \sum_{a_l \in \bar{A}} (\underline{N}_l^1)^T A_l \quad (3.50)$$

De même, la densité de courant  $\underline{j}$  est discrétisée sur les éléments de facettes avec les fonctions d'interpolations  $\underline{N}_s^2$

$$\underline{j} = \sum_{f_s \in \bar{F}} (\underline{N}_s^2)^T J \quad (3.51)$$

#### Remarque

Les conditions de Dirichlet ( $\underline{n} \wedge \underline{A}$ ) sur  $\Gamma_B$  seront prises en compte par l'annulation des degrés de liberté respectifs dans le problème matriciel final.

Si on se ramène au domaine d'intégration d'un élément  $\Omega_e$ , les intégrales à calculer sont :

$$\int_{\Omega_e} \mu^{-1} (A'_l)^T \underline{\text{rot}}(\underline{N}_l^1) \underline{\text{rot}}(\underline{N}_k^1)^T A_k \, dV_e ; \int_{\Omega_e} (A'_l)^T (\underline{N}_l^1) (\underline{N}_s^2)^T J_s \, dV_e. \quad (3.52)$$

Les opérateurs somme ont été omis pour plus de lisibilité.

L'expression des fonctions de forme est connue sur un élément de référence. Nous introduisons alors la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  qui fait le lien entre les coordonnées réelles et les coordonnées de référence  $\hat{x} = (u, v, w)$  dans un élément, telle que :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Ainsi, pour se ramener au système de coordonnées isoparamétriques de l'élément de référence, la matrice  $\mathbf{J}$  intervient dans les différentes expressions, comme résumé dans la Table 3.8.

Ce qui signifie :

$$\underline{N}_l^1(x, y, z) = \mathbf{J}^{-1} \underline{N}_l^1(u, v, w) \quad (3.54)$$

$$\underline{N}_s^2(x, y, z) = \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} \underline{N}_s^2(u, v, w) \quad (3.55)$$

Espace	Champs	Opérateurs
$\mathcal{W}^0$	$x = u$	$\underline{\text{grad}}(x) = \mathbf{J}^{-1} \underline{\text{grad}}(u)$
$\mathcal{W}^1$	$\underline{x} = \mathbf{J}^{-1} \underline{u}$	$\underline{\text{rot}}(\underline{x}) = \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} \underline{\text{rot}}(\underline{u})$
$\mathcal{W}^2$	$\underline{x} = \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} \underline{u}$	$\text{div}(\underline{x}) = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \text{div}(\underline{u})$

TABLE 3.8 • Transformation des vecteurs et opérateurs dans les coordonnées de référence

$$\underline{\text{rot}}(N_l^1(x, y, z)) = \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} \underline{\text{rot}}(N_l^1(u, v, w)) \quad (3.56)$$

Donc le problème (3.52), ramené à l'élément de référence  $\Delta_e$ , mène à l'expression de la matrice élémentaire  $\mathbf{K}_e$  et du vecteur second membre élémentaire  $J_e$  tels que

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Delta_e} \mu^{-1} \text{sign}(a_l) \underline{\text{rot}}(N_l^1) \frac{\mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} \underline{\text{rot}}(N_k^1)^T \text{sign}(a_k) \det(\mathbf{J}) dV_e \quad (3.57)$$

$$J_e = \int_{\Delta_e} \text{sign}(a_l) N_l^1 (\mathbf{J}^{-1})^T \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} (N_s^2)^T \text{sign}(f_s) J_s \det(\mathbf{J}) dV_e \quad (3.58)$$

! Dans ces expressions, les orientations des arêtes et des facettes interviennent. Considérant le maillage global du domaine étudié, des arêtes et des facettes sont définies respectivement entre chaque binôme et trinôme de nœuds reliés dans des éléments. Des orientations dans le maillage global ont alors été choisies arbitrairement. Lorsqu'on se ramène à l'élément de référence, l'orientation choisie d'une arête ne correspond pas forcément à l'orientation imposée dans l'élément de référence. Dans ce cas, le signe affecté à l'arête vaut  $-1$  dans les expressions précédentes. Il vaut  $1$  sinon. Il s'agit du même principe pour le signe affecté aux facettes.

Il y a plusieurs manières de considérer le rotationnel de  $N_l^1$  :

- Soit en utilisant le fait que  $\underline{\text{rot}}(\mathcal{N}^1) = \mathcal{N}^2$ .
- Soit en calculant a priori  $\underline{\text{rot}}(N_l^1)$  donnant des vecteurs constants pour tous les éléments d'arêtes  $a_l$  notés  $\underline{RN}_l^1$  et rassemblés Table 3.9.

Cette dernière méthode est celle retenue pour la suite.

## 2. Simulation d'un problème de magnéto-statique 3D

Arête $a_l$	$l = i \rightarrow j$	Fonctions $\underline{N}_{i \rightarrow j}^1$	Rotationnel $\underline{RN}_l^1$
$a_1$	$a_{1 \rightarrow 2}$	$1 - v - w$	0
		$u$	-2
		$u$	2
$a_2$	$a_{1 \rightarrow 3}$	$v$	2
		$1 - u - w$	0
		$v$	-2
$a_3$	$a_{1 \rightarrow 4}$	$w$	-2
		$w$	2
		$1 - u - v$	0
$a_4$	$a_{2 \rightarrow 3}$	$-v$	0
		$u$	0
		0	2
$a_5$	$a_{2 \rightarrow 4}$	$-w$	0
		0	-2
		$u$	0
$a_6$	$a_{3 \rightarrow 4}$	0	2
		$-w$	0
		$v$	0

**TABLE 3.9** • Rotationnel des fonctions d'interpolation pour 1-forme

On a alors :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Delta_e} \mu^{-1} \text{sign}(a_l) \underline{RN}_l^1 \frac{\mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} \frac{\mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})} (\underline{RN}_k^1)^T \text{sign}(a_k) \det(\mathbf{J}) dV_e \quad (3.59)$$

Les termes de l'intégrale (3.59) étant constants, nous obtenons :

$$\mathbf{K}_e = \mu^{-1} \text{sign}(a_l) \underline{RN}_l^1 \frac{\mathbf{J}^T \mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})^2} (\underline{RN}_k^1)^T \text{sign}(a_k) \quad (3.60)$$

L'intégrale du vecteur second membre élémentaire (3.58) est quant à elle calculée à l'aide d'une quadrature de Gauss, telle que :

$$J_e = \sum_g \text{sign}(a_l) \underline{N}_l^1 (\underline{N}_s^2)^T \text{sign}(f_s) J_s w_g \quad (3.61)$$

avec  $g$  les points de Gauss de l'élément de référence et  $w_g$  leurs poids associés.

Ces matrices élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $J_e$  sont assemblées sur le domaine  $\Omega$  donnant respectivement  $\mathbf{K}$  et  $J$ . Le problème matriciel à résoudre est finalement

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = J \quad (3.62)$$

Cette formulation du problème de magnétostatique en terme de potentiel vecteur discrétisé aux arêtes est très couramment utilisée en raison de sa robustesse. Elle assure naturellement la vérification des continuités des champs considérés. Cependant, il reste deux problèmes à résoudre. Comme abordé dans la section 2.2, la solution recherchée n'est pas unique, elle est définie à un gradient près. Le second problème concerne la compatibilité : le second membre relatif à la source de courant doit avoir une divergence nulle. Ces deux problèmes seront traités dans les sections suivantes.

## 2.2 Traitement d'un problème sans unicité de la solution

Telle qu'elle est posée, la formulation (3.49) n'a pas de solution unique. Le potentiel vecteur  $\underline{A}$  est défini à un gradient près. En effet, pour définir un champ de manière unique, son rotationnel et sa divergence doivent être connus. Il est donc nécessaire d'imposer une condition de jauge. Plusieurs jauges sont possibles :

### » La jauge de Coulomb :

Fréquemment utilisée lors d'une discrétisation nodale, elle consiste à imposer la condition  $\text{div}(\underline{A}) = 0$ . Elle peut être introduite dans la formulation du problème par pénalisation, ou par la méthode des contraintes qui consiste à enlever les degrés de liberté redondants.

### » La méthode de l'arbre :

L'idée est de se ramener à un potentiel vecteur à deux composantes en annulant la composante de  $\underline{A}$  suivant une direction  $\underline{w}$  tel que  $\underline{A} \cdot \underline{w} = 0$ . Le champ  $\underline{w}$  est construit unitaire et ne formant pas de boucle (pour ne pas annuler de flux).

Cette méthode est bien adaptée au cas d'une discrétisation avec des éléments d'arêtes. De plus cette discrétisation met en évidence la non-unicité de la solution. Dans sa formulation discrète avec les éléments de Whitney, la relation  $\underline{B} = \underline{\text{rot}}(\underline{A})$  s'écrit :

$$\underline{B} = \mathbf{R}\underline{A}. \quad (3.63)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  est rectangulaire, de taille  $N_f \times N_a$  avec  $N_f < N_a$ . Le rang de  $\mathbf{R}$  vaut  $N_a - (N_n - 1)$ , il est alors possible de fixer arbitrairement  $N_n - 1$  valeurs de circulations de  $\underline{A}$  pour obtenir le champ  $\underline{B}$  [ALBANESE & RUBINACCI, 1990].

Une suite d'arêtes ne formant pas de boucle est construite et appelée arbre, Figure 3.7. Les reste des arêtes définissent un co-arbre. Imposer la condition  $\underline{A} \cdot \underline{w} = 0$  revient à annuler

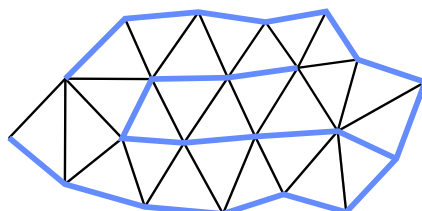


FIGURE 3.7 • Exemple de construction d'un arbre (arêtes en bleu)

les circulations de  $\underline{A}$  sur l'arbre. Cela revient également à imposer les  $N_n - 1$  circulations en trop. Les arêtes associées au co-arbre constituent alors les inconnues restantes.

### » L'auto-jauge :

La vérification explicite d'une condition de jauge n'est pas indispensable, dans la mesure où une solution  $A$  est recherchée telle que son rotationnel (c'est-à-dire  $B$ ) soit unique.

L'idée est de tirer parti des algorithmes de résolution type gradient conjugué (GC) [REN, 1995; 1996]. Ces algorithmes itératifs permettent d'imposer implicitement la condition de jauge sur le champ  $A$  déjà discrétisé. En effet, la solution à l'itération  $n + 1$  est déterminée par :

$$A^{n+1} = A^n + \alpha^n p^n, \quad (3.64)$$

avec  $\alpha^n$  un coefficient et  $p^n$  une combinaison linéaire de  $\mathbf{K}A^i - J$ , ( $i \leq n$ ).

Or par construction, l'opérateur  $\mathbf{K}$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^T \mathbf{N}_f \mathbf{R}, \quad (3.65)$$

avec  $\mathbf{N}_f$  une matrice de taille  $N_f \times N_f$  dont les termes élémentaires sont les intégrales des fonctions d'interpolations 2-forme  $\underline{N}_f^2$ .

Comme  $\mathbf{G}^T \mathbf{R}^T = 0$  (3.46), la matrice  $\mathbf{K}$  appartient au noyau de  $\mathbf{G}^T$ , c'est-à-dire que sa divergence est nulle. Lorsque nous nous plaçons dans un cadre compatible, signifiant que le second membre  $J$  de l'équation est aussi à divergence nulle, alors la divergence de  $p^n$  est nulle. Ainsi, nous obtenons par récurrence :

$$\mathbf{G}^T A^{n+1} = \mathbf{G}^T A^n = \dots = \mathbf{G}^T A^0 \quad (3.66)$$

A chaque itération, la divergence de  $A$  est imposée et elle vaut  $\mathbf{G}^T A^0$ . Le problème est implicitement jaugé : une solution  $A$  est construite, dépendant de l'initialisation, mais donnant la même induction magnétique  $B$ .

Une étude menée par [BIRO et al., 1996] compare la convergence avec une discrétisation nodale et une jauge de Coulomb à la convergence avec une discrétisation d'arêtes et sans jauge (auto-jauge). Il est montré que cette dernière méthode est plus stable. Concernant la méthode de l'arbre, le choix des arêtes définissant l'arbre est théoriquement arbitraire. Cependant, les expériences numériques montrent que ce choix fait varier la précision de la solution et la vitesse de convergence [GOLIAS & TSIBOUKIS, 1994]. Il serait possible de faire un choix optimal, notamment en prenant  $\underline{w}$  dans la direction de l'induction magnétique  $\underline{B}$ . Malheureusement, ce champ n'est pas encore calculé.

Ces considérations justifient notre choix d'implémenter la méthode de l'auto-jauge pour résoudre le problème de non-unicité. Cependant, comme mentionné précédemment, il est nécessaire de construire un second membre compatible. Nous détaillons comment le construire dans la section suivante.

### 2.3 Construction d'un champ source compatible

La condition de compatibilité de l'équation à résoudre signifie que la divergence de la source de courant doit être nulle. Cette condition peut ne pas être satisfaite à cause de l'erreur introduite lors de la discrétisation. Dans le cas d'une géométrie complexe de bobinage, nous pouvons nous assurer de la vérification de cette condition par la résolution

d'un problème préliminaire construisant un second membre compatible. Dans le domaine du conducteur  $\Omega_c$ , nous voulons imposer que la source de courant  $\underline{j}$  soit à divergence nulle. Si elle l'est, nous pouvons alors introduire un champ source noté  $\underline{H}_s$  vérifiant la relation suivante :

$$\underline{j} = \text{rot}(\underline{H}_s). \quad (3.67)$$

Le problème à résoudre dans  $\Omega_c$  est le suivant :  
Trouver  $\underline{H}_s \in \mathcal{W}^1$  tel que

$$\int_{\Omega_c} \text{rot}(\underline{H}'_s) \cdot \text{rot}(\underline{H}_s) dV_c = \int_{\Omega_c} \text{rot}(\underline{H}'_s) \cdot \underline{j} dV_c, \quad \forall \underline{H}'_s \in \mathcal{W}^1 \quad (3.68)$$

! Le domaine du conducteur  $\Omega_c$  doit être simplement connexe.

Le potentiel  $\underline{H}_s$  est discrétisé sur les éléments d'arêtes. La dérivation de l'équation (3.68) par rapport au champ test  $\underline{H}'_s$  mène au système matriciel suivant :

$$\mathbf{K}_j \underline{H}_s = S_j, \quad (3.69)$$

avec  $\mathbf{K}_j$  l'assemblage sur  $\Omega_c$  des matrices élémentaires

$$\mathbf{K}_{je} = \text{sign}(a_l) \underline{RN}_l^1 \frac{\mathbf{J}^T \mathbf{J}}{\det(\mathbf{J})^2} (\underline{RN}_k^1)^T \text{sign}(a_k), \quad (3.70)$$

et  $S_j$  l'assemblage sur  $\Omega_c$  des vecteurs second membre élémentaires

$$S_{je} = \sum_g \text{sign}(a_l) \underline{RN}_l^1 \mathbf{J}^T \underline{j}(g) w_g. \quad (3.71)$$

Le champ source  $\underline{H}_s$  n'est pas unique, cependant la résolution du problème par un algorithme itératif type gradient conjugué permet de converger vers une des solutions donnant la densité de courant  $\underline{j}$  voulue. En effet, par construction, la matrice  $\mathbf{K}_j$  et le second membre  $S_j$  sont à divergence nulle car de la forme

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{R}^T \mathbf{N}_f \mathbf{R}, \quad (3.72)$$

et

$$S_j = \mathbf{R}^T \mathbf{N}_f J. \quad (3.73)$$

Ainsi, la résolution du problème préliminaire sur  $\Omega_c$  permet de construire un champ source  $\underline{H}_s$ . De cette façon, la densité de courant  $\underline{j}$  vérifie la condition de compatibilité telle que  $\text{div}(\underline{j}) = 0$ , et le problème (3.49) devient :

Trouver  $\underline{A} \in \mathcal{W}^1$  tel que

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \text{rot}(\underline{A}') \cdot \text{rot}(\underline{A}) dV = \int_{\Omega} \underline{A}' \cdot \text{rot}(\underline{H}_s) dV, \quad \forall \underline{A}' \in \mathcal{W}^1 \quad (3.74)$$

Cette formulation permet de converger et de construire un potentiel vecteur  $\underline{A}$  solution. Cependant, les travaux de [REN, 1996] montrent que la convergence peut être encore amé-

liorée en transformant la formulation (3.74) à l'aide d'une intégration par parties pour projeter le champ source  $H_s$  dans le rotationnel de  $\mathcal{W}^1$ . La formulation devient :

Trouver  $\underline{A} \in \mathcal{W}^1$  tel que

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \underline{\text{rot}}(\underline{A}') \cdot \underline{\text{rot}}(\underline{A}) dV = \int_{\Omega} \underline{\text{rot}}(\underline{A}') \cdot \underline{H}_s dV, \quad \forall A' \in \mathcal{W}^1 \quad (3.75)$$

Sa dérivation par rapport au champ test  $\underline{A}'$  et sa discrétisation avec les éléments de Whitney donnent le problème matriciel

$$\mathbf{K}A = \mathbf{S} \quad (3.76)$$

avec  $\mathbf{K}$  qui reste inchangé et le second membre  $\mathbf{S}$  qui résulte de l'assemblage des vecteurs second membre élémentaires :

$$S_e = \sum_g \text{sign}(a_l) \underline{RN}_l^1 (\underline{N}_k^1)^T (H_s)_k \text{sign}(a_k) w_g. \quad (3.77)$$

### 2.4 Validation de l'implémentation

L'implémentation des éléments de Whitney dans le code *Matlab* a été validée dans un premier temps sur un cas test ne faisant pas intervenir de décomposition de domaine. La simulation porte sur un exemple de circuit ferromagnétique 3D, dont la géométrie globale est illustrée à la Figure 3.8a. Le domaine comprend une boîte d'air dans laquelle est situé un

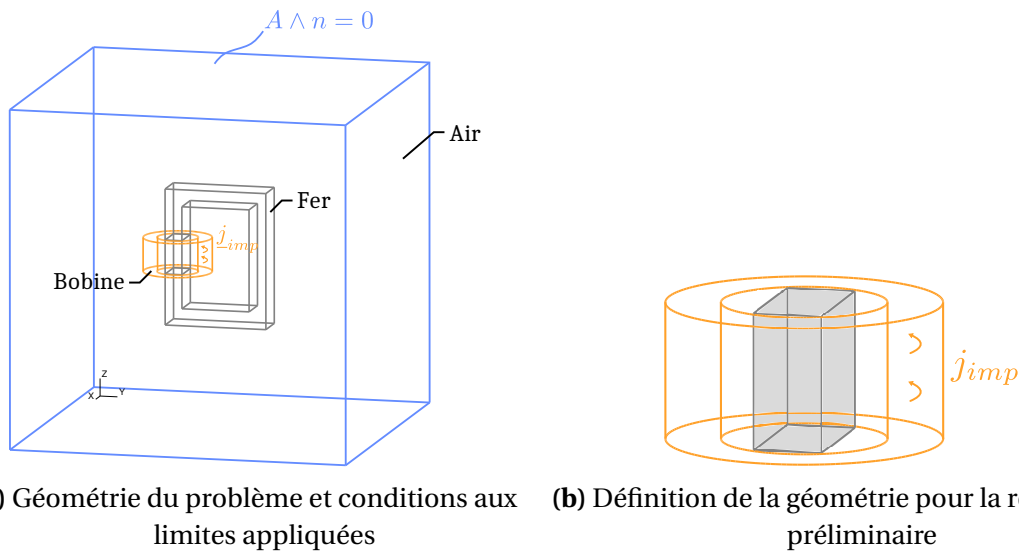


FIGURE 3.8 • Exemple de circuit ferromagnétique 3D

circuit ferromagnétique rectangulaire. Une bobine entoure l'une des branches du circuit, et une densité de courant  $j_{imp}$  y est imposée. Le potentiel vecteur  $\underline{A} \wedge \underline{n}$  est imposé nul sur les bords extérieurs du domaine. Les paramètres du problème sont rassemblés dans la Table 3.10.

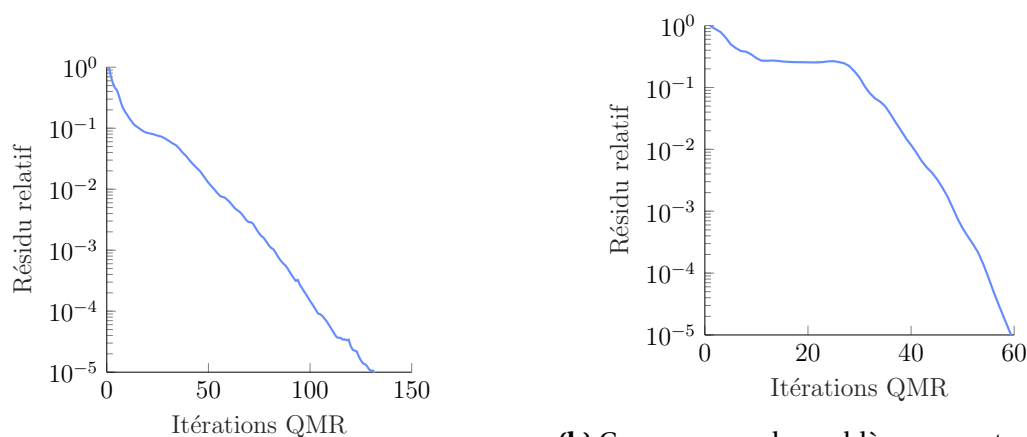
On peut noter que, dans ce cas simple, on pourrait utiliser une expression analytique de  $\underline{H}_s$ , mais nous souhaitons valider un fonctionnement applicable à d'autres géométries plus complexes de bobines. Ainsi, la première étape de la résolution consiste à construire

Dénomination	Symbole	Valeur
Perméabilité magnétique	$\mu$	$14872\mu_0$
Densité de courant imposée	$j_{imp}$	$3,3 \times 10^3 \text{ Am}^{-1}$
Hauteur bobine	$h_b$	0,02 m
Rayon intérieur bobine	$r_{int}$	0,02 m
Rayon extérieur bobine	$r_{ext}$	0,03 m
Longueur ligne moyenne circuit	$l_b$	0,36 m

TABLE 3.10 • Paramètres du problème

un second membre compatible. Ce problème préliminaire est résolu sur une portion de la géométrie globale, voir Figure 3.8b. Elle englobe la bobine, et comme le domaine doit être simplement connexe, elle inclut également la partie du circuit à l'intérieur de la bobine, ainsi que l'air entre ces deux éléments. Nous construisons alors un champ source  $H_s$  par la résolution du problème (3.69) à l'aide d'un solveur itératif de type gradient conjugué. La matrice  $\mathbf{K}_j$  n'étant pas définie, nous choisissons d'utiliser la méthode du résidu quasi-minimal (QMR) avec un pré-conditionneur LU.

Ensuite, nous pouvons procéder à la résolution du problème (3.76) pour trouver le potentiel vecteur  $\underline{A}$  dans l'ensemble du domaine. Une fois encore, la matrice  $\mathbf{K}$  n'est pas définie, et nous utilisons le même solveur que précédemment. L'évolution du résidu au cours des itérations du solveur itératif QMR pour les deux résolutions est représentée sur la Figure 3.9. Les deux problèmes convergent de manière satisfaisante.



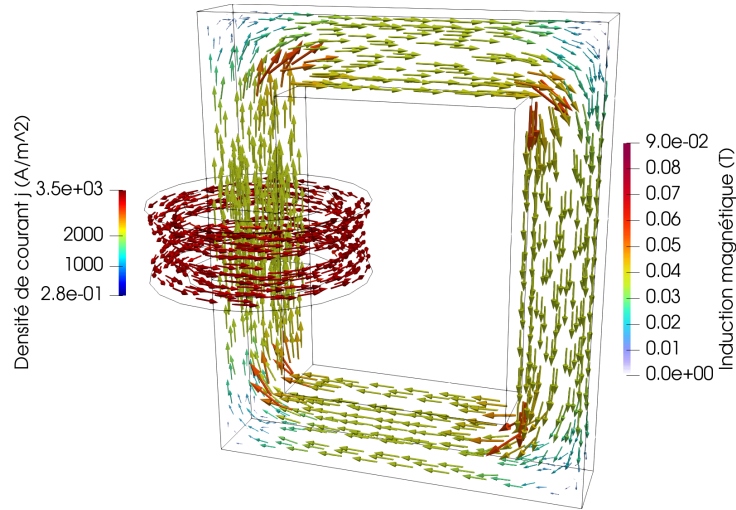
(a) Convergence du problème préliminaire

(b) Convergence du problème en potentiel vecteur

FIGURE 3.9 • Évolution du résidu relatif pour les deux résolutions

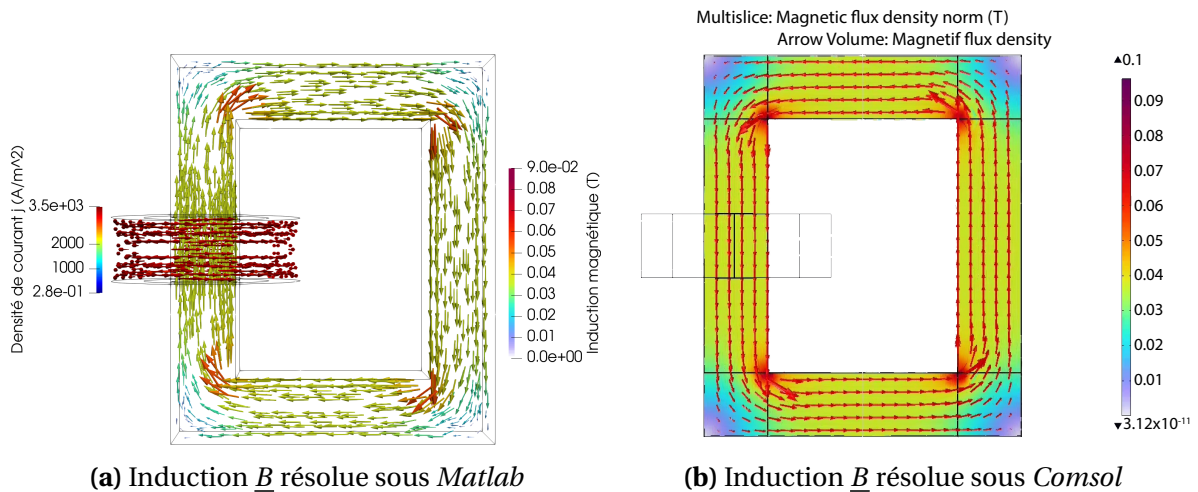
Sur la Figure 3.10 nous affichons la densité de courant  $\underline{j}$  construite à partir du rotationnel de  $\underline{H}_s$ . Le problème préliminaire nous permet bien d'imposer une densité de courant adéquate dans la bobine. Nous affichons sur cette même figure l'induction magnétique  $\underline{B}$  en calculant le rotationnel du potentiel vecteur  $\underline{A}$  solution. Le résultat obtenu correspond à la distribution de l'induction magnétique attendue.

La Figure 3.11 présente une comparaison du champ  $\underline{B}$  obtenu entre le code réalisé sous *Matlab* et une simulation effectuée avec *Comsol*. Les variations de l'induction magnétique



**FIGURE 3.10** • Densité de courant  $\underline{j}$  imposée et induction magnétique  $\underline{B}$  solution

sont équivalentes entre les deux simulations, ce qui confirme la validité de l'implémentation réalisée (les différences dans l'orientation du flux sont liées au signe de  $\underline{j}$ ).



**FIGURE 3.11** • Comparaison du résultat en  $\underline{B}$  avec une simulation *Comsol*

De plus, le problème posé ici est suffisamment simple pour permettre de déterminer analytiquement l'intensité de l'induction magnétique moyenne sur la ligne moyenne du circuit ferromagnétique, à l'aide du théorème d'Ampère. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$B_{moy} = \frac{\mu S_b j_{imp}}{l_f} \tag{3.78}$$

avec  $S_b = h_b(r_{ext} - r_{int})$  la surface d'une section de la bobine et  $l_f$  la longueur de la ligne moyenne du circuit ferromagnétique. Avec les données du problème, nous obtenons analytiquement  $B_{moy} = 34,3\text{ mT}$ . La simulation 3D réalisée avec le code *Matlab* donne  $B_{moy} = 37\text{ mT}$ , ce qui est en accord avec la solution analytique. Cette comparaison renforce notre confiance dans l'implémentation numérique réalisée.

### 3 Extension de la méthode LATIN-DDM aux problèmes 3D

Nous présentons dans cette partie l'application de la méthode LATIN-DDM à la résolution de problèmes de magnétostatique en 3D. Cette méthode, présentée au Chapitre 2, est suffisamment générique pour être adaptée à l'utilisation des éléments de Whitney. Cependant, quelques ajustements spécifiques sont nécessaires et sont détaillés ici.

#### 3.1 Quantités échangées aux interfaces

La discrétisation d'un domaine  $\Omega$  avec les éléments de Whitney n'empêche pas sa décomposition en sous-domaines. La Figure 3.12 donne un exemple de décomposition d'une géométrie 3D en deux sous-domaines. Les interfaces entre les sous-domaines sont mainte-

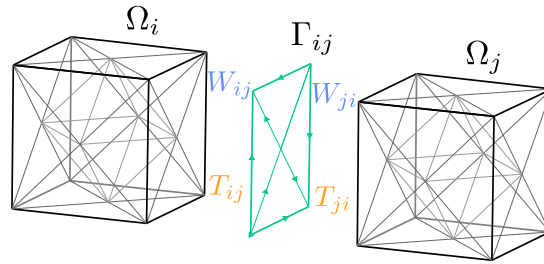


FIGURE 3.12 • Exemple de décomposition d'un problème 3D en deux sous-domaines

nant des surfaces. Comme nous l'avons vu, la méthode LATIN-DDM est une méthode mixte qui considère à la fois les quantités primales et duales sur les interfaces. Avec les éléments de Whitney et notamment la discrétisation du problème sur les éléments d'arêtes, les quantités d'interfaces échangées deviennent les circulations du potentiel vecteur  $\underline{A}$  et du champ magnétique  $\underline{H}$  le long des arêtes du maillage.

Ces quantités sont directement les composantes des vecteurs discrets  $A$  et  $H$  restreints aux différentes interfaces. Elles sont notées :

$$W_{ij} = \mathbf{t}_{ij} A_i \quad (3.79)$$

$$T_{ij} = \mathbf{t}_{ij} H_i \quad (3.80)$$

avec, nous le rappelons,  $A_i$  et  $H_i$  les restrictions de  $A$  et  $H$  au sous-domaine  $\Omega_i$ , et  $\mathbf{t}_{ij}$  l'opérateur restriction sur une interface  $\Gamma_{ij}$  d'un sous-domaine  $\Omega_i$ .



En 2D, il s'agissait de la composante tangentielle du champ magnétique  $\underline{H}$  qui était échangée aux interfaces. Un traitement particulier était réalisé pour construire  $T_{ij}$ . Ici, un vecteur  $T_{ij}$  est directement composé des degrés de liberté  $H_l, \forall a_l \in \Gamma_{ij}$ .

Les quantités échangées aux interfaces étant les circulations de  $\underline{A}$  et  $\underline{H}$ , les fonctions d'interpolations 1-forme garantissent leur continuité tangentielle respective aux interfaces.

De plus, avec les éléments de Whitney, les degrés de liberté sont des scalaires. Même en 3D, le problème reste scalaire, ce qui simplifie grandement l'implémentation.

Le changement de nature des quantités échangées aux interfaces, qui représentent maintenant des circulations, pose la question du choix de l'opérateur de direction de recherche

$k$ , qui lie par une relation linéaire  $W$  et  $T$ . Une analyse dimensionnelle montre que  $k$  est toujours homogène à une réluctivité. Nous conservons alors le choix justifié section 2.4 de direction de recherche tel que

$$k_i = \frac{v_i}{L_{|\Gamma_i}} \quad (3.81)$$

## 3.2 Modification de l'étape linéaire

Au vu des considérations exposées dans la section précédente sur les quantités d'interface, il est évident que l'étape locale de l'algorithme LATIN-DDM ne se voit pas impactée par les spécificités de la résolution d'un problème de magnétostatique en 3D. Cependant, l'étape linéaire se retrouve elle impactée :

- » Tout d'abord, la prise en compte d'une source de courant  $\underline{j}$  pour modéliser une bobine nécessite la résolution d'un problème préliminaire pour construire un champ source  $\underline{H}_s$  compatible. Ce problème n'a besoin d'être résolu que dans le domaine du conducteur, qui peut correspondre à un sous-domaine par simplification. Cependant, il est important que ce sous-domaine reste simplement connexe. La décomposition en sous-domaines doit permettre de respecter cette condition de connexité.
- » Une fois un champ source compatible construit, les étapes linéaires par sous-domaine  $\Omega_i$  peuvent être résolues. Nous rappelons ici que le problème matriciel à une itération  $n$  s'écrit

$$(\mathbf{K}_i + \mathbf{t}_i^T \tilde{\mathbf{M}}_i \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i) A_i^n = J_i + \mathbf{t}_i^T \tilde{\mathbf{M}}_i (\hat{T}_i^{n-1} + \mathbf{k}_i^- \hat{W}_i^{n-1}) \quad (3.82)$$

Ce problème est le même que celui présenté section 2.2.1, à l'exception de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_i$ . Initialement, la matrice de masse  $\mathbf{M}_i$  construite sur les interfaces intervenait dans l'expression du problème. Avec l'utilisation des éléments d'arêtes pour discrétiser les champs, cette matrice est construite à partir des fonctions d'interpolation 1-forme telle que :

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \int_{\Gamma_i} \underline{N}_l^1 (\underline{N}_k^1)^T dS \quad (3.83)$$

Cela revient à l'assemblage aux points de Gauss des matrices élémentaires :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ie}(l, k) = \sum_g \text{sign}(a_l) \underline{N}_l^1(g) (\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{J}^{-1} (\underline{N}_k^1(g))^T \text{sign}(a_k) \det(\mathbf{J}) w_g \quad (3.84)$$



La matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_i$  s'intègre sur des surfaces, ce qui signifie que nous devons utiliser les fonctions d'interpolation 1-forme dégénérées pour des maillages 2D. Elles sont données Table 3.11 pour un maillage triangulaire de référence dont les orientations des arêtes sont choisies comme sur la Figure 3.13.

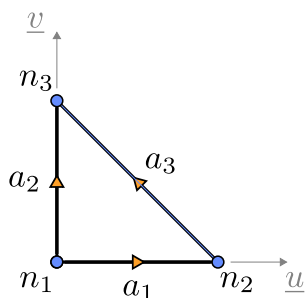


FIGURE 3.13 • Élément de référence 2D et orientations des arêtes

Arête $a_l$	$l = i \rightarrow j$	Fonctions $N_{i \rightarrow j}^1$
$a_1$	$a_{1 \rightarrow 2}$	$1 - v$
$a_2$	$a_{1 \rightarrow 3}$	$u$
$a_3$	$a_{2 \rightarrow 3}$	$v$
		$1 - u$
		$-v$
		$u$

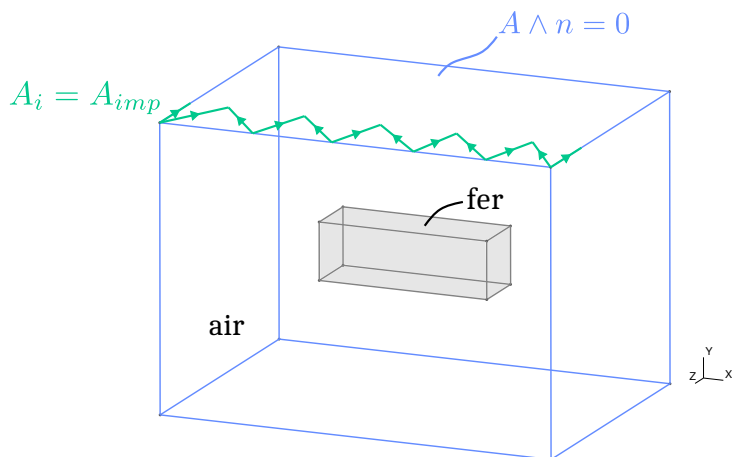
TABLE 3.11 • Fonctions d'interpolation 2D pour 1-forme

» De par sa construction, le problème 3.82 n'admet pas de solution unique. Comme présenté précédemment, nous pouvons rechercher une solution  $A_i^n$  par sous-domaine à l'aide d'un algorithme itératif de type gradient conjugué. Pour assurer une convergence satisfaisante, nous avons mis en évidence que le problème doit être compatible, c'est-à-dire que la divergence du second membre  $J_i$  doit être nulle. Afin de garantir cette condition, nous avons préalablement construit un champ source  $H_s$  compatible.

! Le champ  $H_s$  intervenant dans la construction de  $J_i$  ne doit pas être décomposé entre plusieurs sous-domaines. Pour maintenir la propriété de divergence nulle, le champ  $H_s$  issu d'un conducteur ne peut intervenir que dans le second membre d'un seul sous-domaine.

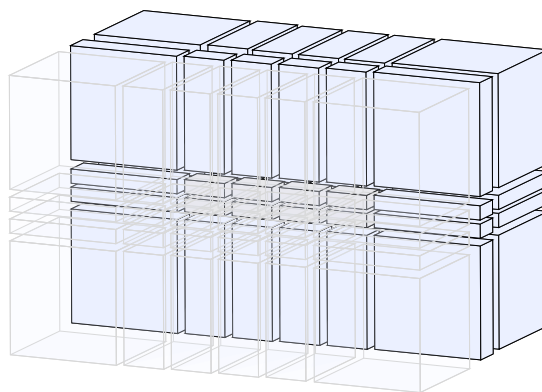
### 3.3 Validation numérique

L'application de la méthode LATIN-DDM est validée sur un problème simple de magnétostatique 3D. Il s'agit d'un barreau de fer plongé dans de l'air, comme montré sur la Figure 3.14. Le problème est discrétisé avec des éléments d'arêtes. Dans une première approche, nous ne considérons pas de source de courant. Nous imposons alors l'existence d'un flux magnétique dans la direction  $\underline{x}$  grâce à des conditions aux limites « zig-zag » sur une des faces du contour extérieur. Le principe consiste à imposer les circulations du potentiel vecteur  $\underline{A}$  nulles sur toutes les arêtes des surfaces extérieures de normales  $\underline{y}$  et  $\underline{z}$  sauf sur un « zig-zag » d'arêtes sur lequel les circulations valent  $A_{imp}$ . De cette façon, la circulation sur chaque contour fermé autour de  $\underline{x}$  vaut  $A_{imp}$ , ce qui revient à imposer une induction magnétique suivant  $\underline{x}$ .



**FIGURE 3.14** • Définition du problème et des conditions aux limites

Ce problème est ensuite décomposé en 72 sous-domaines suivant une architecture régulière présentée Figure 3.15. Les paramètres de la géométrie et de la résolution par la méthode LATIN-DDM sont donnés dans la Table 3.12.



**FIGURE 3.15** • Décomposition du problème en 72 sous-domaines

Dénomination	Symbole	Valeur
Longueur barreau	$L$	0,12 m
Largeur barreau	$l$	0,02 m
Hauteur barreau	$h$	0,02 m
Perméabilité magnétique du fer	$\mu$	$3000\mu_0$
Circulations imposées	$A_{imp}$	$1 \times 10^{-3} \text{ Wb}$
Seuil de convergence	$\eta_{lim}$	$1 \times 10^{-5}$

**TABLE 3.12** • Paramètres du problème

L'algorithme converge en 42 itérations. L'évolution de l'indicateur de convergence au cours des itérations est montré sur la Figure 3.16. Sa décroissance est satisfaisante. La solu-

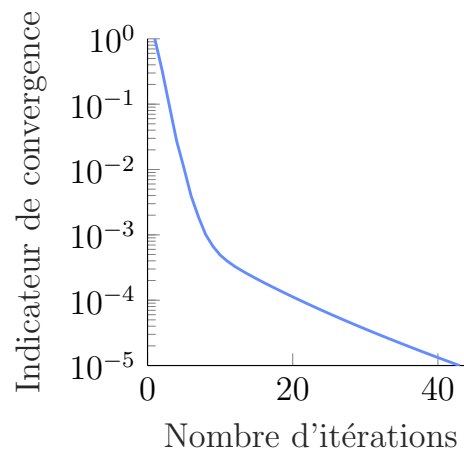


FIGURE 3.16 • Évolution de l'indicateur de convergence

tion obtenue en terme d'induction magnétique  $\underline{B}$  est représentée sur la Figure 3.17. Comme attendu, le barreau de fer canalise les lignes de flux magnétique. Cet exemple nous permet de valider l'application de la méthode LATIN-DDM à un problème discrétisé avec les éléments de Whitney.

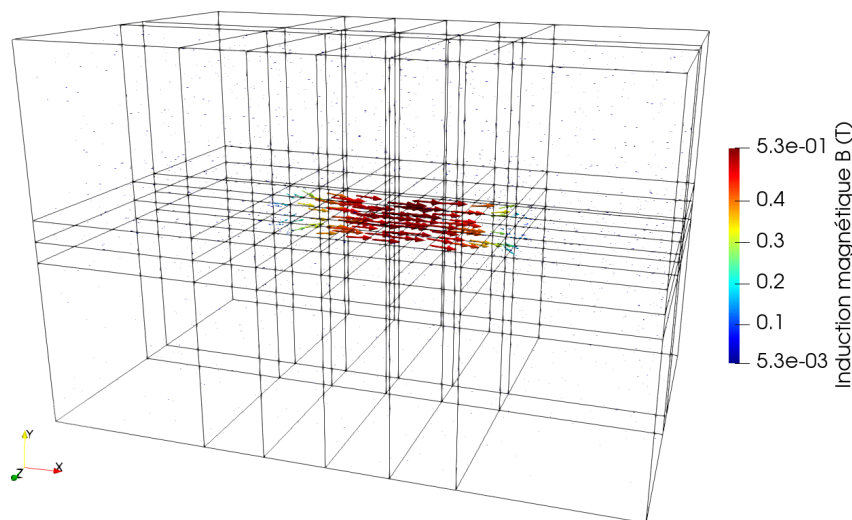


FIGURE 3.17 • Norme de l'induction magnétique  $\underline{B}$  solution

#### Remarque

L'approche multi-échelle n'a pas été implémentée dans le cadre des problèmes de magnétostatique 3D. Des réflexions sont menées pour définir des modes macro sur les interfaces à partir des circulations du potentiel vecteur  $\underline{A}$  sur les arêtes.

\* \* \*

#### › Bilan

La résolution numérique des problèmes de magnétostatique 3D pose des difficultés qui peuvent être surmontées par l'introduction des éléments de Whitney. Contrairement aux éléments finis de Lagrange, qui imposent des continuités non désirées, les éléments de Whitney utilisent des formes différentielles pour mieux représenter la physique. Des approximations discrètes de ces formes sont données par [BOSSAVIT, 1988b]. Elles correspondent aux degrés de liberté sur les nœuds, les éléments d'arêtes ou les éléments de facettes. Ainsi, le potentiel vecteur  $\underline{A}$  est discrétisé sur les éléments d'arêtes, permettant d'assurer sa continuité tangentielle.

La discrétisation du problème de magnétostatique avec les éléments de Whitney est réalisée dans ce chapitre. Une expression matricielle classique du problème est obtenue. Cependant, la solution d'un tel problème n'est pas unique. Nous avons alors adopté l'approche proposée par [REN, 1996], qui consiste à utiliser un algorithme itératif de type gradient conjugué. Cette méthode permet d'imposer naturellement une jauge qui assure l'unicité de la solution. Néanmoins, cette méthode requiert la construction d'un second membre compatible, c'est-à-dire dont la divergence est nulle. Dans le cas général, cela implique de résoudre un problème préliminaire dans un domaine intégrant la bobine pour construire ce second membre. Cette stratégie de calcul 3D a été implémentée dans le code *Matlab*, et validée sur un cas test.

Dans l'objectif de résoudre efficacement des problèmes de magnétostatique 3D de grande taille, nous étendons la méthode LATIN-DDM aux éléments de Whitney et prenons en compte leurs particularités. Les grandeurs discrètes échangées aux interfaces entre les sous-domaines sont désormais les circulations des champs considérés. Le principal changement dans l'algorithme de LATIN-DDM se situe à l'étape linéaire dans laquelle le sous-problème résolu n'a pas de solution unique. Pour remédier à cela, nous introduisons une résolution par gradient conjugué après avoir préalablement construit un second membre compatible. L'implémentation a été validée sur un exemple simple de magnétostatique 3D.



## 4

---

# Implémentation numérique et cas d'application

*Dans ce chapitre, nous présentons la plateforme collaborative ROMlab dans laquelle nous implémentons les développements présentés précédemment. Une stratégie de calcul parallèle utilisant les capacités du cluster Ruche est détaillée et son implémentation permet de mesurer les performances de l'algorithme sur un cas test « extrême ». L'ensemble des développements est validé grâce au benchmark TEAM numéro 24 et une illustration sur un exemple 3D met en évidence le potentiel de l'algorithme.*

---

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Implémentations dans ROMlab</b> . . . . .	<b>90</b>
1.1	Une plateforme collaborative . . . . .	90
1.2	Présentation générale du code . . . . .	91
1.3	Discrétisation du problème avec les éléments de Whitney . . . . .	93
<b>2</b>	<b>Stratégie de calcul parallèle</b> . . . . .	<b>95</b>
2.1	Mise en place des communications . . . . .	95
2.2	Limitation de MPI_SENDRECV . . . . .	99
2.3	Étude du speed-up sur un cas test . . . . .	101
<b>3</b>	<b>Validation sur une machine 2D : Problème TEAM 24</b> . . . . .	<b>104</b>
3.1	Définition du cas de référence . . . . .	104
3.2	Vérification des grandeurs utiles . . . . .	107
3.3	Speed-up sur un cas d'échelle . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Illustration sur un exemple 3D</b> . . . . .	<b>110</b>
➤	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>113</b>

---

# 1 Implémentations dans ROMlab

## 1.1 Une plateforme collaborative

L'implémentation numérique a été réalisée intégralement dans le démonstrateur ROMlab. Il s'agit d'une plateforme collaborative de routines *Matlab* pour la simulation numérique en mécanique des solides, développée au Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS). Initialement créé par D. Néron, le code ROMlab a ensuite évolué grâce aux contributions de différentes thèses. Globalement, ce code repose sur une discrétisation du problème par éléments finis et suit différentes variantes du schéma de résolution de la méthode LATIN, notamment pour la mise en place de méthodes de réduction de modèle (ROM).

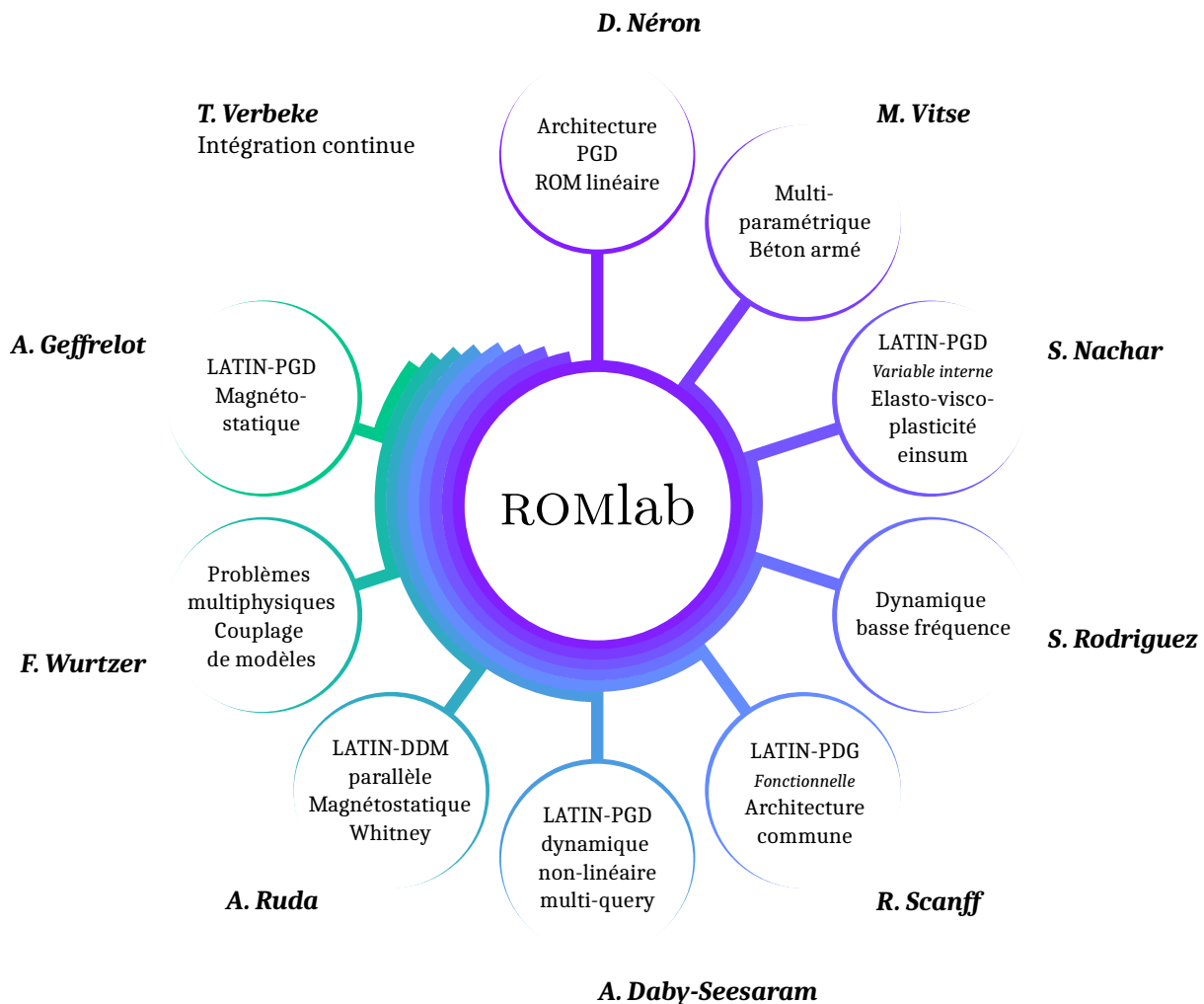


FIGURE 4.1 • Développements des différents contributeurs et contributrices de ROMlab

La Figure 4.1 présente, de manière non exhaustive, les apports réalisés au cours de différentes thèses et intégrés dans la plateforme ROMlab. T. Verbeke s'assure du maintien des développements et de leur compatibilité. Les premiers travaux ont porté sur la résolution multi-paramétrique de problèmes en béton armé par [VITSE, 2016]. Ensuite, une approche

à variables internes de la méthode LATIN-PGD a été ajoutée par [NACHAR, 2019] pour résoudre des problèmes élasto-visco-plastiques. De plus, le code ROMlab a été optimisé pour exploiter les architectures multi-threads disponibles dans *Matlab*, en introduisant notamment une fonction *einsum* qui permet des calculs tensoriels parallèles plus efficaces en se basant sur une sommation d'Einstein. Cette fonction reprend dans les grandes lignes le fonctionnement de la fonction *Python* du même nom. Pour étendre les capacités du code, les développements réalisés par [RODRIGUEZ-ITURRA et al., 2021] traitent des problèmes de dynamiques basse fréquence. La thèse de [SCANFF, 2022] a permis l'implémentation de la variante fonctionnelle de la méthode LATIN-PGD. Une attention particulière a également été portée à l'uniformisation des différentes routines autour d'une architecture commune, ce qui permet de pérenniser les nombreuses routines et de fournir une base solide pour les futurs développements. ROMlab est géré via un dépôt git interne au LMPS, ce qui facilite la collaboration et la gestion des différents développements.

Aujourd'hui, en parallèle des travaux présentés dans ce manuscrit, les développements de ROMlab portent sur la méthode LATIN-PGD pour la dynamique non-linéaire multi-query par [DABY-SEESARAM et al., 2023] et autour de problèmes multi-physiques thermo-mécaniques couplés par [WURTZER et al., 2023].

Jusqu'à présent, à l'exception du couplage thermo-mécanique, seuls des problèmes de mécanique étaient résolus dans ROMlab. Durant cette thèse, l'un des premiers apports a été d'adapter les routines pour la résolution des problèmes en magnéto-statique. Ensuite, la méthode LATIN-DDM multi-échelle a été implémentée et adaptée à une stratégie de calcul parallèle. Enfin, pour la résolution de problèmes de magnéto-statique 3D, les éléments de Whitney ont été introduits et utilisés pour la construction des opérateurs. Ces implémentations participent à l'extension du code ROMlab, et serviront notamment de base à A. Geffrelot (doctorant 2023 - 2026) pour développer la méthode LATIN-PGD dans un contexte magnéto-statique.

### 1.2 Présentation générale du code

Nous présentons succinctement l'architecture du code dans cette section, résumée sur la Figure 4.2 dans le cas d'une résolution d'un problème de magnéto-statique par la méthode LATIN-DDM. Pour utiliser ROMlab, et notamment la méthode LATIN-DDM implémentée, l'utilisateur doit fournir trois fichiers :

- Le maillage de la géométrie étudiée généré avec *Gmsh*.
- Un fichier « Configuration » dans lequel les dimensions du problème, la géométrie étudiée, les comportements souhaités et la méthode de résolution choisie sont spécifiés.
- Un fichier « Input » qui renseigne les matériaux considérés, les conditions aux limites et la décomposition du maillage en sous-domaines effectuée en amont.

Ensuite, la résolution se déroule en trois principales étapes :

- **Pre\_processing** : une routine commune à toutes les résolutions construit au fil des fonctions les données et opérateurs qui seront nécessaires pour la résolution.
- **Processing** : ROMlab offre différentes possibilités de résolution. Dans le cas de la méthode LATIN-DDM, la décomposition des opérateurs est réalisée, suivie de la construc-

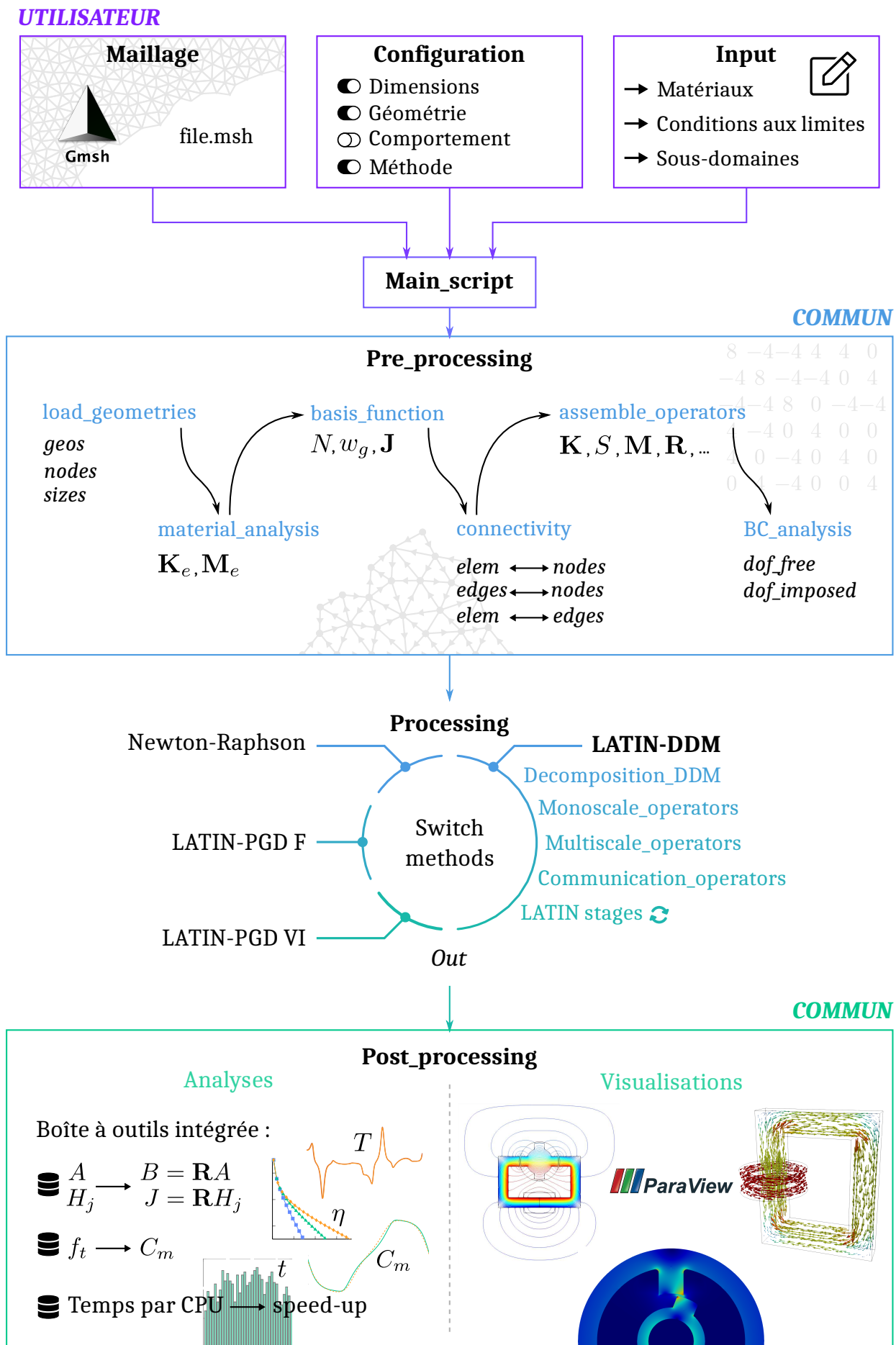


FIGURE 4.2 • Architecture du code ROMlab

tion des opérateurs relatifs aux approches mono-échelle, multi-échelle et parallèle incluant des opérateurs de communication entre les processeurs (détaillées dans la partie 2). Finalement, les étapes de l’algorithme LATIN-DDM sont exécutées.

- **Post\_processing** : les résultats obtenus peuvent être traités à l’aide d’une boîte à outils intégrée aux routines *Matlab* permettant notamment de calculer les quantités intégrées  $B$  ou  $J$ , le couple moteur  $C_m$  dans le cas d’une machine tournante, ou encore le *speed-up* de la résolution. Il est aussi possible de visualiser et d’exploiter les résultats avec le logiciel libre *ParaView*.

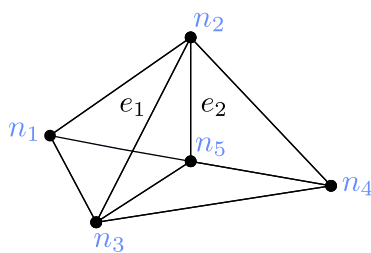
L’implémentation de l’algorithme LATIN-DDM multi-échelle pour les équations magnéto-statiques est classique et ne demande pas d’autres explications que les commentaires apportés dans le code ROMlab. Néanmoins, il est moins courant dans notre communauté d’utiliser les éléments de Whitney. Nous détaillons alors dans la section suivante leur implémentation dans ROMlab. Une autre spécificité non négligeable ajoutée dans ROMlab réside dans la stratégie de calculs parallèle mise en place. Nous y consacrons alors une partie entière, la section 2.

### 1.3 Discrétisation du problème avec les éléments de Whitney

La discrétisation de la géométrie est effectuée avec *Gmsh*. La lecture du fichier dans la routine *Pre\_processing* fournit les coordonnées de chaque nœud ainsi qu’une table de connectivité répertoriant les nœuds de chaque élément. Pour utiliser les éléments de Whitney, il est nécessaire de construire les éléments d’arêtes et de facettes à partir de la seule connaissance de la table de connectivité éléments/nœuds, notée *Elem.Nodes*.

#### Exemple

Nous illustrons la construction des tables de données à l’aide d’un exemple simple d’un maillage composé de deux éléments  $e_1$  et  $e_2$ , comme représenté sur la Figure 4.3.



$$Elem.Nodes = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_5 & n_3 \\ n_2 & n_3 & n_5 & n_4 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

FIGURE 4.3 • Deux éléments

L’ordre des arêtes dans l’élément de référence et leur sens de parcours (défini par un signe positif ou négatif) dans chaque élément étant des informations nécessaires, une certaine attention à la construction des arêtes est essentielle. Il en va de même pour la construction des facettes. Une convention est choisie : elle consiste à considérer que l’ordre de stockage des nœuds pour chaque élément dans la table de connectivité *Elem.Nodes* est équivalent à l’ordre des nœuds dans l’élément de référence. De cette façon, nous définissons une table  $T_{enn}$  regroupant dans chacune de ses lignes les couples de nœuds constituant le départ et l’arrivée de chaque arête d’un élément. Les nœuds de départ et d’arrivée de chaque

arrête respectent la convention choisie dans la Table 3.5.

 Exemple

$$T_{enn} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_1 & n_5 & n_1 & n_3 & n_2 & n_5 & n_2 & n_3 & n_5 & n_3 \\ n_2 & n_3 & n_2 & n_5 & n_2 & n_4 & n_3 & n_5 & n_3 & n_4 & n_5 & n_4 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A partir de la table  $T_{enn}$ , une table des arrêtes donnant leurs nœud de départ et d'arrivée est construite et notée  $Edges.Nodes$ . Cette table répertorie de manière globale et sans redondance les arêtes du maillage par la connaissance de leurs nœuds, et elle impose arbitrairement le sens de circulation positif de chaque arête (départ vers arrivée). Le numéro d'une arête correspond ensuite au numéro de la ligne dans  $Edges.Nodes$ .

 Exemple

$$Edges.Nodes = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_1 & n_5 \\ n_1 & n_3 \\ n_2 & n_5 \\ n_2 & n_3 \\ n_5 & n_3 \\ n_2 & n_4 \\ n_3 & n_4 \\ n_5 & n_4 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Une table de connectivité éléments/arrêtes, notée  $Elem.Edges$ , est également construite. Elle regroupe les numéros des arêtes de chaque élément. Si les nœuds de départ et d'arrivée de l'arête considérée sont inversés par rapport au choix dans  $Edges.Nodes$ , un signe négatif est ajouté dans  $Elem.Edges$ .

 Exemple

$$Elem.Edges = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

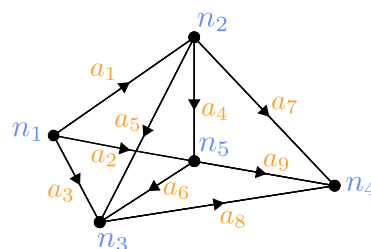


FIGURE 4.4 • Définition globale des arêtes

Un processus similaire est mis en place pour la construction des tables relatives aux facettes. La Figure 4.5 résume la structure de données mise en place pour l'utilisation des éléments de Whitney.

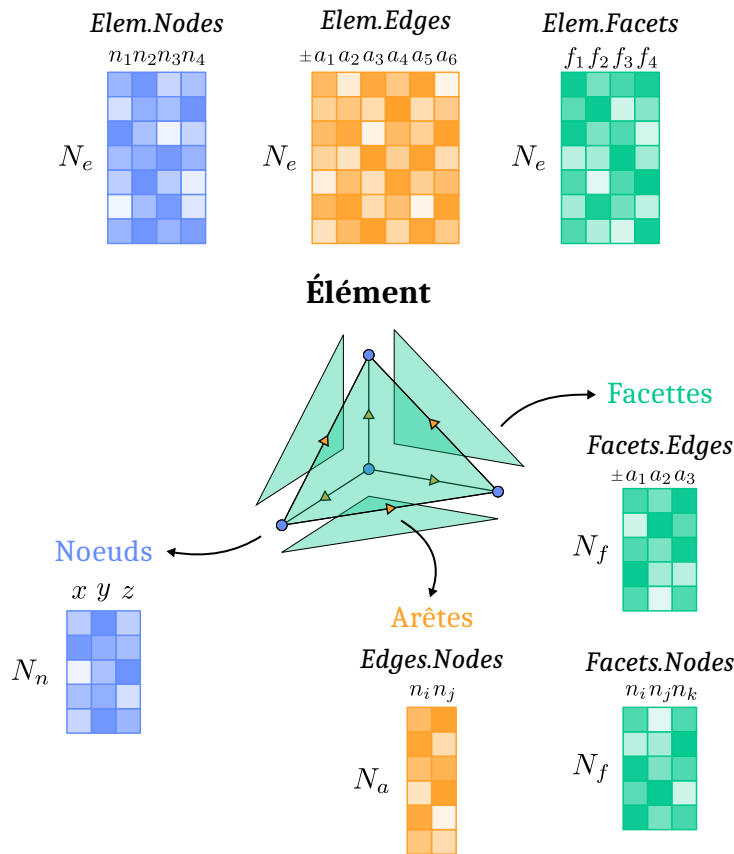


FIGURE 4.5 • Structure de données pour les éléments de Whitney

Cette structure de données fournit alors les connectivités nécessaires à la construction des opérateurs élémentaires puis à leur assemblage par sous-domaine.

## 2 Stratégie de calcul parallèle

### 2.1 Mise en place des communications

Jusqu'à présent, l'implémentation que nous avons présentée était séquentielle. Dans cette partie, notre objectif est de proposer une stratégie de résolution parallèle pour l'algorithme LATIN-DDM multi-échelle. Pour cela, nous faisons appel à l'environnement MPI (Message Passing Interface) qui offre une bibliothèque d'échanges de messages pour le calcul parallèle. Contrairement au code ROMlab qui est implémenté en *Matlab*, la bibliothèque MPI est développée en *C* ou en *Fortran*. Ainsi, nous utilisons une réécriture des modules MPI adaptée à l'environnement *Matlab* pour exécuter les calculs sur différents processeurs  $P_i$ . Ceux-ci sont basés sur des mex-files maintenus par T. Verbeke.

La structure de l'algorithme LATIN-DDM permet de séparer naturellement les équations sur les sous-domaines de celles sur les interfaces. L'étape linéaire sur chaque sous-domaine peut être calculée en parallèle, et l'étape locale sur chaque interface également en parallèle. La difficulté du calcul parallèle réside dans l'étape de communication entre les différents processeurs. Le principe de la stratégie parallèle choisie est de rendre l'étape locale redondante. Cette étape est la moins coûteuse en temps de calcul, surtout par rapport à l'étape

de communication. Chaque processeur  $P_i$  considère un sous-domaine  $\Omega_i$  et toutes les interfaces  $\Gamma_{ij}$  autour du sous-domaine. Ainsi, chaque interface  $\Gamma_{ij}$  est considérée par deux processeurs,  $P_i$  et  $P_j$ . Les étapes locales sur celle-ci sont donc calculées deux fois mais en parallèle. Cette stratégie permet d'éviter une étape de communication après l'étape locale, car chaque processeur possède déjà les informations nécessaires pour l'étape linéaire.

En guise d'exemple fil rouge, nous considérons un domaine  $\Omega$  décomposé en trois sous-domaines, comme présenté sur la Figure 4.6. Nous utilisons alors trois processeurs pour la résolution parallèle, embarquant les informations concernant un sous-domaine et ses interfaces associées. Par exemple, l'interface  $\Gamma_{12}$  est à la fois considérée par le processeur  $P_1$  et par le processeur  $P_2$ .

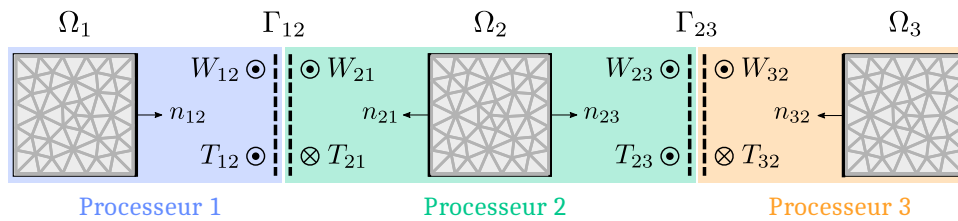


FIGURE 4.6 • Exemple de décomposition en trois sous-domaines et répartition sur trois processeurs

Les étapes préliminaires de construction d'opérateurs et de décomposition sont effectuées en parallèle. La bibliothèque MPI utilise un schéma à mémoire distribuée. Pour minimiser le besoin en mémoire par processeur, nous cherchons à leur faire construire et stocker uniquement ce qui leur est utile pour la résolution de leur sous-domaine. Seule la construction des opérateurs macro nécessite une attention particulière, comme abordé dans la section 4.2.4. Une fois les opérateurs macro  $\mathbf{K}_{M_i}$  décomposés par sous-domaines construits, une communication **MPI\_REDUCE** permet d'assembler l'opérateur macro complet sur un processeur dédié, noté  $P_0$ .

De la même façon, la première étape de l'algorithme LATIN-DDM, l'étape linéaire, nécessite la mise en place d'une stratégie de communication dans sa version multi-échelle. En effet, la résolution du problème macro fait appel aux champs sur toutes les interfaces du problème, ce qui rend une communication entre les processeurs incontournable. Dans la section 4.2.5, une stratégie de résolution parallèle du problème macro est proposée. Nous détaillons ici les étapes de communication mises en place autour de cette stratégie :

1. Le problème micro est résolu en parallèle sur chaque processeur.

**Remarque**

Un niveau de parallélisme supplémentaire peut être envisagé pendant la résolution du problème micro par les différents processeurs en exploitant les capacités de multi-thread de *Matlab*. Cependant, pour des raisons de reproductibilité, les résultats présentés dans la suite n'utilisent pas ce multi-thread, chaque calcul restant mono-cœur. Néanmoins, il s'agit d'une capacité implémentée dans ROMlab.

2. Le second membre  $\psi$  est calculé par sous-domaines. Il est ensuite assemblé sur le processeur dédié  $P_0$  à l'aide d'une communication **MPI\_REDUCE**.

3. La résolution du problème macro  $\mathbf{K}_M \alpha = \psi$  est exécutée sur le processeur dédié  $P_0$ . Le multiplicateur  $\alpha$  est diffusé à tous les processeurs avec une communication **MPI\_BCAST**.
4. Le champ macro solution est construit par sous-domaine, ainsi que la solution complète de l'étape linéaire. L'étape de relaxation est également réalisée en parallèle.

Après avoir calculé en parallèle les étapes linéaire et de relaxation pour chaque sous-domaine, nous implémentons une étape de communication entre les processeurs dans l'algorithme. Pour l'étape locale, chaque processeur doit connaître les champs d'interface de ses voisins. Nous utilisons le module de communication **MPI\_SENDRECV** à cette fin. Il s'agit d'une opération qui envoie et reçoit simultanément un message. La Figure 4.7 schématise le processus de communication. Par exemple, le processeur  $P_1$  envoie le champ  $W_{12}$  au processeur  $P_2$  qui le reçoit dans un nouveau vecteur  $W_{12}^{rec}$ . Dans le même temps, le processeur  $P_2$  envoie le champ  $W_{21}$  au processeur  $P_1$  qui le reçoit dans un nouveau vecteur  $W_{21}^{rec}$ . Ensuite, l'étape locale est effectuée sur chaque processeur pour toutes les interfaces auxquelles il a accès.

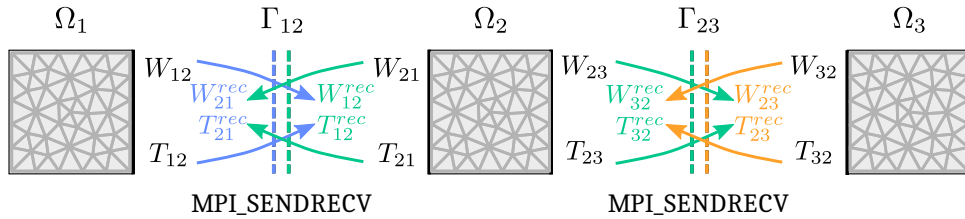


FIGURE 4.7 • Échange des quantités d'interfaces avant l'étape locale

En dupliquant les étapes locales, chaque processeur a déjà connaissance des champs d'interface nécessaires à la construction du second membre de l'étape linéaire. Nous n'avons donc pas besoin d'introduire une étape de communication supplémentaire.

La dernière étape de l'algorithme LATIN-DDM est le calcul de l'indicateur de convergence  $\eta$ . Cet indicateur est défini globalement sur toutes les interfaces. Nous choisissons de calculer sur chaque processeur les contributions sur chaque interface  $\Gamma_{ij}$  au numérateur  $\eta_{ij}^n$  et au dénominateur  $\eta_{ij}^d$ , définies par

$$\eta_{ij}^n = \|s_{ij} - \hat{s}_{ij}\|^2, \quad (4.5)$$

$$\eta_{ij}^d = \frac{1}{2} (\|s_{ij}\|^2 + \|\hat{s}_{ij}\|^2). \quad (4.6)$$

Ces contributions sont ensuite envoyées sur tous les processeurs, sommées et divisées pour donner  $\eta$ . Cette opération est réalisée avec le module **MPI\_ALLREDUCE** et est schématisée sur la Figure 4.8. De cette manière, tous les processeurs connaissent la valeur de l'indicateur et peuvent stopper l'algorithme au même moment. Pour économiser en temps de communication, il est possible d'envisager d'autres stratégies, comme calculer  $\eta$  sur un seul processeur, ou alors calculer l'indicateur toutes les  $N$  itérations.

Finalement, l'Algorithme 8 résume la stratégie de calcul implémentée pour la LATIN-DDM multi-échelle parallèle.

**Algorithme 8 :** LATIN-DDM multi-échelle parallèle

**Pre-processing :**

Ⓜ Ω Factorisation des opérateurs macro locaux :

$$\mathbf{K}_{M_i} = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \left( \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i (\mathbf{K}_i + \mathbf{t}_i^T \mathbf{k}_i^- \mathbf{t}_i)^{-1} \mathbf{t}_i^T - \mathbf{I} \right) \mathbf{k}_i^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}$$

⊗ Assemblage de l'opérateur macro global  $\mathbf{K}_M$

Ⓜ Ω Sauvegarde de l'opérateur intermédiaire :

$$\mathbf{S} = -(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W}$$

**Initialisation :** construire  $\hat{s}_0$  nulle

**while**  $\eta_n \geq \text{seuil}$  **do**

**Étape linéaire :**

Ⓜ Ω **Résoudre le problème micro :**

$$(\mathbf{K} + \mathbf{t}^T \mathbf{k}^- \mathbf{t}) A_{(m)}^n = (J + \mathbf{t}^T [\hat{T}^{n-1} + \mathbf{k}^- \widehat{W}^{n-1}])$$

Ⓜ Ω **Construire le second membre :**

$$\psi = \mathbb{W}^T \mathbf{O}_s \mathbf{k}^- (\mathbf{t} A_{(m)}^n - \widehat{W}^{n-1})$$

⇔ **Communication :** (MPI\_REDUCE)

Assembler  $\psi$  sur un processeur dédié

⊗ **Résoudre le problème macro :**

$$\mathbf{K}_M \alpha = \psi$$

⇔ **Communication :** (MPI\_BCAST)

Diffuser le multiplicateur  $\alpha$  sur tous les processeurs

Ⓜ Ω **Calculer le champ macro :**

$$A_{(M)}^n = \mathbf{S} \alpha$$

Ⓜ Ω **Assembler :**

$$A^n = A_{(m)}^n + A_{(M)}^n$$

$$T^n = \hat{T}^{n-1} - \mathbf{k}^- (W^n - \widehat{W}^{n-1}) - \mathbf{k}^- \mathbf{O}_s^T \mathbb{W} \alpha$$

Ⓜ Ω **Relaxation :**

$$s^n \leftarrow r s^n + (1 - r) s^{n-1}$$

⇔ **Communication :** (MPI\_SENDRCV)

Échange des quantités d'interfaces entre sous-domaines voisins

Ⓜ Γ **Étape locale :**

$$\text{Chercher } \hat{s}^n = (\widehat{W}^n, \hat{T}^n) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbf{O}_d \widehat{W}^n = 0 \\ \mathbf{O}_s \hat{T}^n = 0 \\ \hat{T}^n - T^n - \mathbf{k}^+ (\widehat{W}^n - W^n) = 0 \end{cases}$$

Ⓜ Γ **Indicateur de convergence :**

Calculer l'indicateur local  $\eta_n = \|s^n - \hat{s}^n\|^2$  and  $\eta_d = \frac{1}{2} (\|s^n\|^2 + \|\hat{s}^n\|^2)$

⇔ **Communication :** (MPI\_ALLREDUCE)

Diffuser les indicateurs locaux sur tous les processeurs et calculer  $\eta^n = \frac{\sum \eta_n}{\sum \eta_d}$

**end**

**Légende :**

Ⓜ Ω étape parallélisable sur les sous-domaines

Ⓜ Γ étape parallélisable sur les interfaces

⊗ étape non parallélisable

⇔ étape de communication

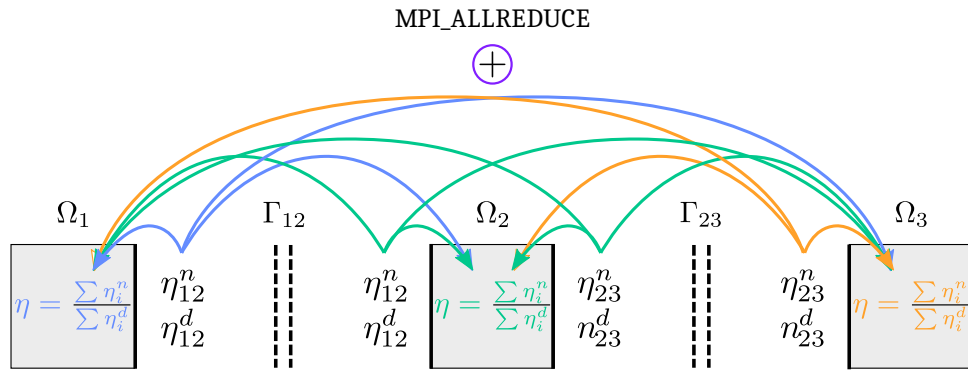


FIGURE 4.8 • Calcul de l'indicateur de convergence sur tous les processeurs

## 2.2 Limitation de MPI\_SENDRECV

Dans cette section, nous mettons en évidence une limitation rencontrée lors de l'utilisation du communicateur `MPI_SENDRECV`. En effet, cette communication est bloquante et peut entraîner des temps d'attente non désirés dans certaines situations. Nous l'observons dans un exemple simple d'un barreau 2D décomposé en 20 sous-domaines dans sa longueur, avec des conditions aux limites de Dirichlet en ses deux extrémités, comme représenté sur la Figure 4.9. Chaque sous-domaine est associé à un processeur dont le rang est croissant de la gauche vers la droite.



FIGURE 4.9 • Exemple d'un barreau 2D décomposé en 20 sous-domaines

Sur la Figure 4.10, nous traçons le temps CPU nécessaire par processeur pour accomplir l'étape de communication. Chaque sous-domaine n'ayant qu'une ou deux interfaces, le temps nécessaire pour l'étape de communication ne devrait pas trop différer entre les processeurs. Cependant, ce n'est pas ce qui est observé : le temps croît globalement avec le numéro du rang du processeur.

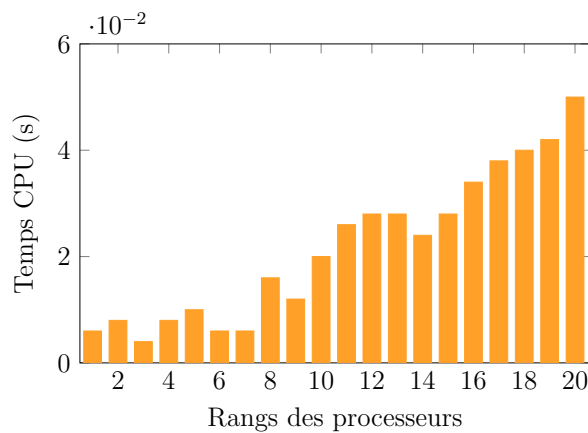


FIGURE 4.10 • Temps CPU par processeur pour l'étape de communication avec `MPI_SENDRECV`

Cette tendance peut s'expliquer simplement. Pour effectuer une communication avec

le module `MPI_SENDRECV`, les deux processeurs qui veulent échanger de l'information doivent avoir fait une demande de communication l'un avec l'autre. Si un processeur fait une demande de communication avec un processeur pas encore disponible, il doit attendre que ce dernier se libère et fasse une demande de communication avec lui. D'où le terme de communication bloquante : une fois démarrée, elle bloque toute autre action tant que la communication n'a pas eu lieu. La Figure 4.11 schématise sur l'exemple du barreau le principe de cette communication et comment elle engendre un temps d'attente. Le module `MPI_SENDRECV` ne fait communiquer que deux processeurs ensemble, alors pour réaliser l'ensemble des échanges aux interfaces, nous devons manuellement parcourir les interfaces et appeler des demandes de communications avec le sous-domaine voisin. Si le parcours arbitraire des interfaces est malheureux, comme sur la Figure 4.11, certains sous-domaines peuvent devoir attendre qu'un certain nombre de communications aient eu lieu avant d'être débloqués. Par exemple, il aurait été judicieux que le sous-domaine  $\Omega_4$  demande d'abord une communication avec le sous-domaine  $\Omega_5$  plutôt que  $\Omega_3$  pour limiter le temps d'attente global. Cependant, il est généralement impossible de fournir a priori un ordre de communication judicieux : la numérotation interne des interfaces n'est pas connue et empêche de définir un parcours des interfaces intéressant.

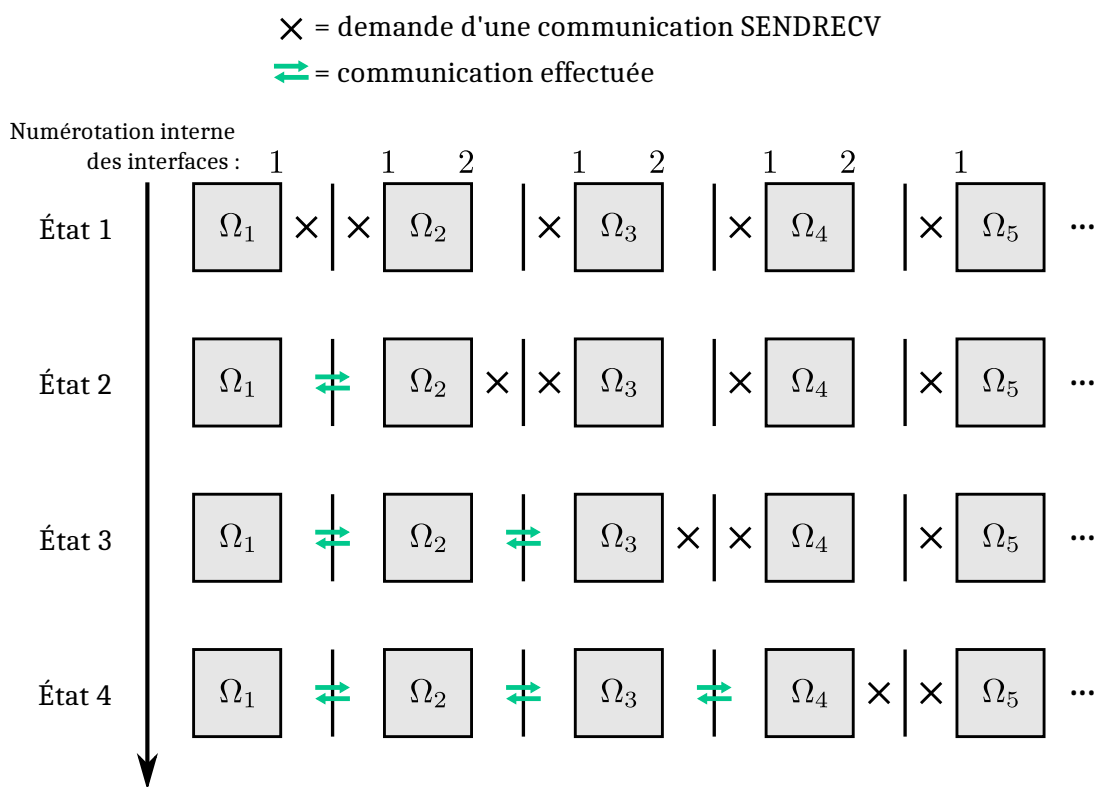


FIGURE 4.11 • Principe de l'attente pendant l'étape de communication

Pour contourner cet effet, un nouveau module de communication `MPI` adapté au langage *Matlab* a été implémenté dans `ROMLab`, appelé `MPI_Neighbor_alltoallv`. Ce module de communication agit comme `MPI_SENDRECV` entre deux-sous-domaines, mais en ayant une connaissance globale de toutes les communications à réaliser. Une topologie d'ordre de communication idéal est définie en amont et permet d'effectuer les échanges d'information dans le meilleur ordre possible. Nous observons sur la Figure 4.12 que ce nouveau module

permet de supprimer les temps d'attente que nous avons précédemment. Ce module est celui utilisé pour l'étape de communication dans toute la suite.

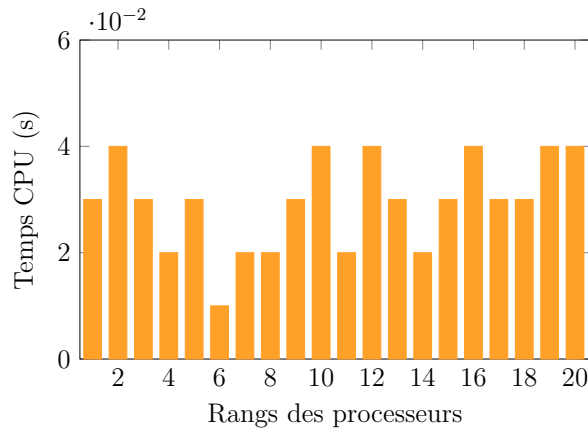


FIGURE 4.12 • Temps CPU par processeur pour l'étape de communication avec `MPI_Neighbor_alltoallv`

### 2.3 Étude du speed-up sur un cas test

Pour illustrer les performances de la méthode de décomposition de domaine implémentée, nous considérons un cas test en 2D. La figure 4.13a représente le problème à résoudre : un carré homogène avec des conditions aux limites de Neumann sur les bords imposant la composante tangentielle du champ magnétique  $H_t^{imp}$ . Ces conditions ont l'avantage de créer un potentiel vecteur  $A_z$  ayant des composantes selon les directions  $x$  et  $y$ , comme le montre la Figure 4.13b. Un tel cas de test permet de mettre en évidence l'influence de la décomposition du domaine dans les deux directions.

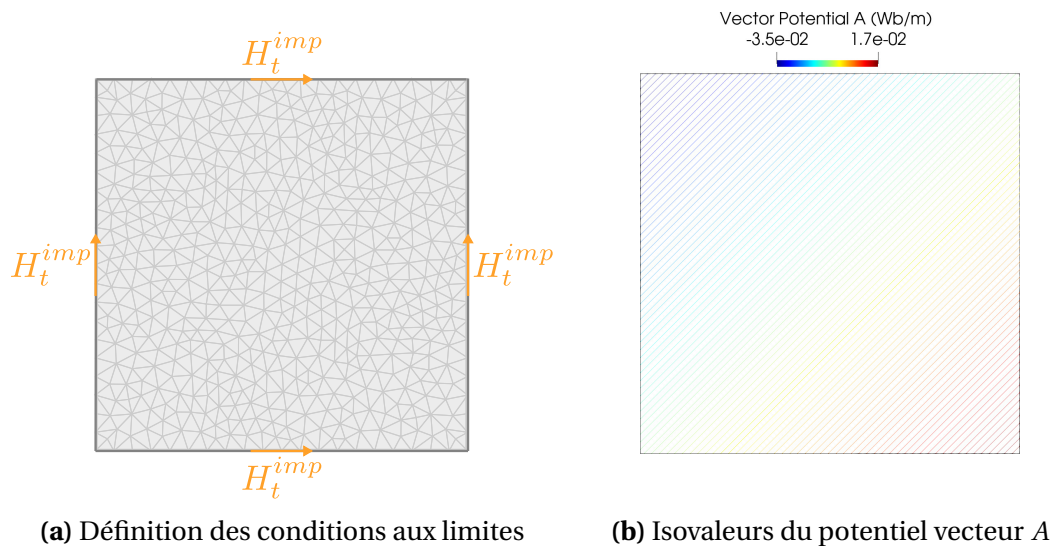


FIGURE 4.13 • Illustration sur un cas test 2D

Nous considérons différentes décompositions de domaine selon un quadrillage pour étudier l'impact du nombre de sous-domaines sur le temps de calcul. Le domaine est dé-

composé en 25, 36, 64 ou 100 sous-domaines, comme présenté sur la Figure 4.14. La direction de recherche de l'algorithme LATIN-DDM est la même pour toutes les interfaces et vaut  $k = \frac{\nu}{l}$ , avec  $l$  la longueur caractéristique d'une interface. Le critère d'arrêt de l'algorithme est défini pour  $\eta \leq 10^{-6}$ .

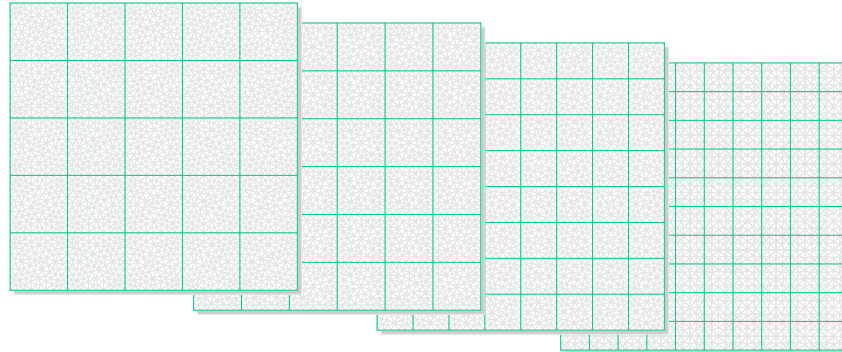


FIGURE 4.14 • Différentes décompositions selon un quadrillage

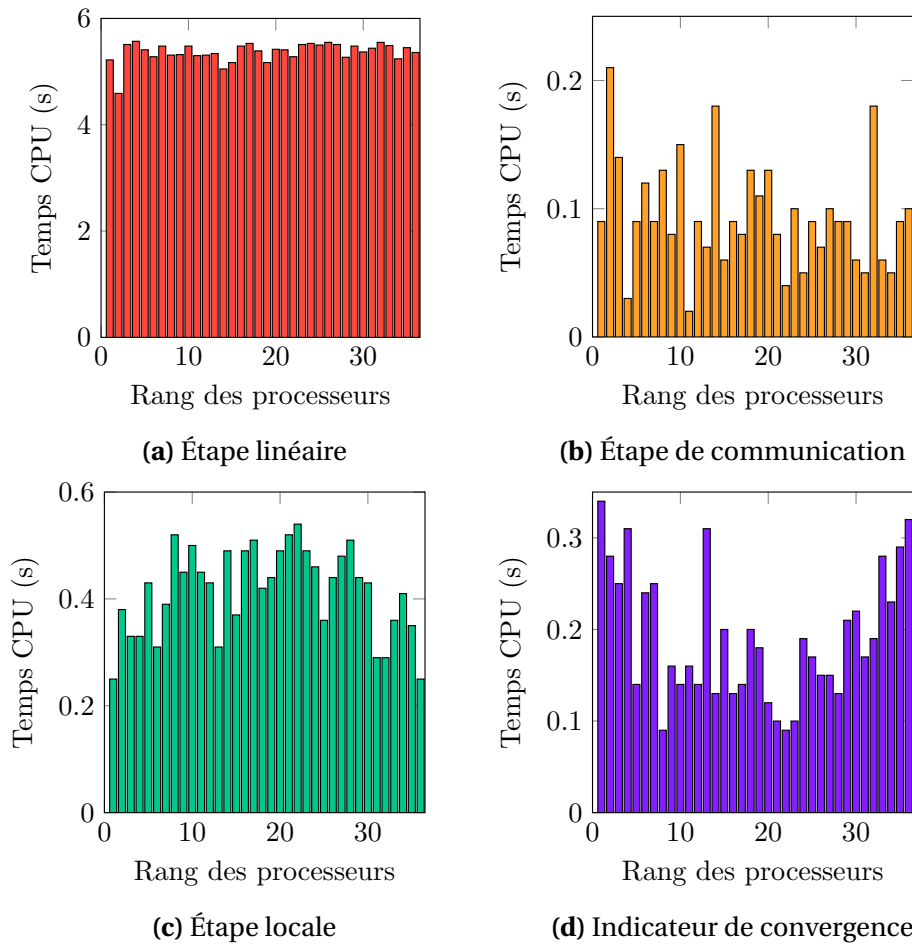
Les calculs ont été effectués grâce au mésocentre *Ruche* de l'Université Paris-Saclay. Un aperçu des spécifications des processeurs utilisés est donné dans la Table 4.1. Pour les différentes décompositions en 25, 36, 64 et 100 sous-domaines, nous allouons un cœur pour chaque sous-domaine. Nous proposons d'évaluer le gain en temps de calcul de l'al-

Référence CPU	cœurs/processeur	Mémoire (GB)
Intel Xeon Gold 6230 - 2,1 GHz	20	192

TABLE 4.1 • Spécifications des CPUs du mésocentre *Ruche*

gorithme. À cette fin, nous discrétisons finement les sous-domaines pour atteindre environ  $30 \times 10^6$  degrés de liberté sur l'ensemble du domaine du cas test, quel que soit le nombre de sous-domaines. Ainsi, pour chaque discrétisation, le nombre de degrés de liberté associés à chaque sous-domaine diminue avec l'augmentation du nombre de sous-domaines.

Tout d'abord, nous analysons le temps de calcul requis lors des différentes étapes de l'algorithme LATIN-DDM pour chaque processeur. Un exemple des résultats obtenus est donné dans la Figure 4.15 pour la stratégie multi-échelle appliquée au problème décomposé en 36 sous-domaines. Chaque graphique représente le temps de calcul requis pour chaque étape de l'algorithme. Chaque barre des graphiques représente le temps total de l'étape pour un processeur. Comme attendu, l'étape linéaire prend le plus de temps car elle résout le micro-problème. Pour les autres étapes, certaines disparités sont remarquées entre les processeurs en raison du nombre différent d'interfaces pour chaque sous-domaine et de l'aléa temporel propre au mésocentre. Cependant, ces disparités sont insignifiantes car leurs temps de calcul associés sont faibles. Dans la suite, lorsque nous donnons un temps de calcul pour une étape, il correspondra au maximum parmi tous les processeurs.



**FIGURE 4.15** • Temps de calcul requis pour les différentes étapes en fonction du rang du processeur, pour la résolution multi-échelle du problème décomposé en 36 sous-domaines.

La Figure 4.16 illustre le gain en temps CPU (aussi appelé *speed-up*) obtenu pour les différentes décompositions et les deux approches implémentées de l’algorithme LATIN-DDM. Il est défini par la relation suivante :

$$\text{Speed-up} = \frac{t_0}{t_N} \tag{4.7}$$

avec  $t_0$  le temps CPU théorique de résolution sans décomposition de domaine et  $t_N$  le temps CPU réel avec une méthode de décomposition de domaine et  $N$  sous-domaines. Le *speed-up* est normalisé par rapport au *speed-up* avec 25 sous-domaines. De cette façon, nous n’avons pas besoin de réaliser une estimation du temps théorique  $t_0$ .

Les diagrammes circulaires sur la Figure 4.16 représentent la répartition du temps pour chaque étape de l’algorithme. Nous observons que le problème macroscopique ne contribue pas de manière significative au temps de calcul total. De plus, la réduction du nombre d’itérations résultant de cette approche multi-échelle permet de diminuer efficacement le temps de calcul requis pour résoudre le micro-problème, car il est moins souvent sollicité.

Malgré l’implémentation parallèle, l’approche mono-échelle est limitée en raison de son manque d’extensibilité. En revanche, l’approche multi-échelle, qui intègre la résolution

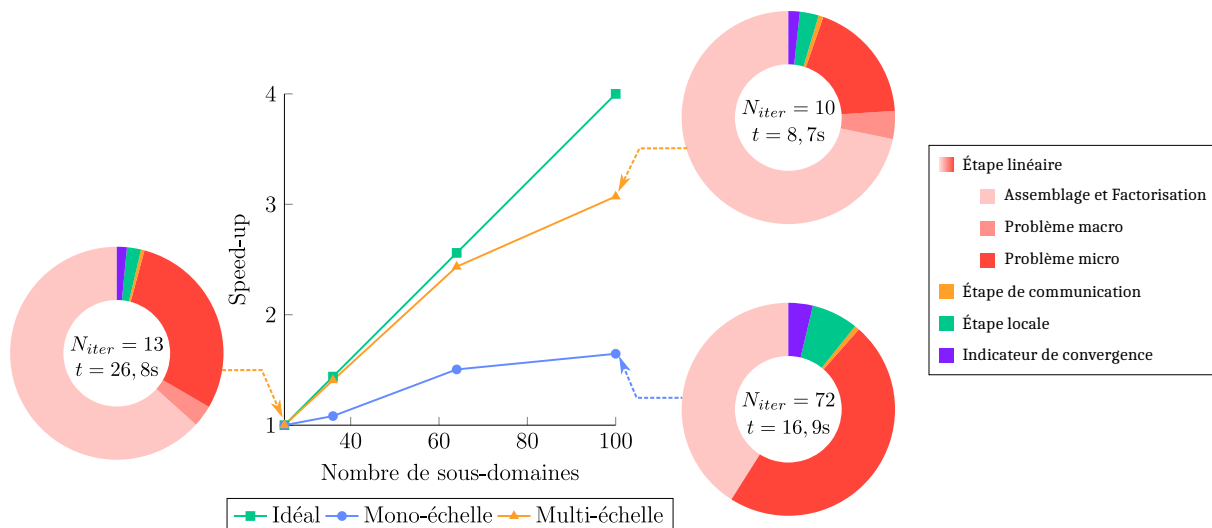


FIGURE 4.16 • Comparaison des speed-up

d'un problème macroscopique, présente des performances satisfaisantes et se rapproche du *speed-up* théorique représentant un cas idéal. Cependant, en atteignant environ 70 sous-domaines, le *speed-up* obtenu par l'approche multi-échelle commence à diminuer par rapport au cas idéal. Cela peut être attribuée à la diminution de la taille du problème à résoudre par sous-domaine : à nombre de degrés de liberté total égal, la décomposition en un trop grand nombre de sous-domaine n'est plus efficace à cause de la multiplication des communications.

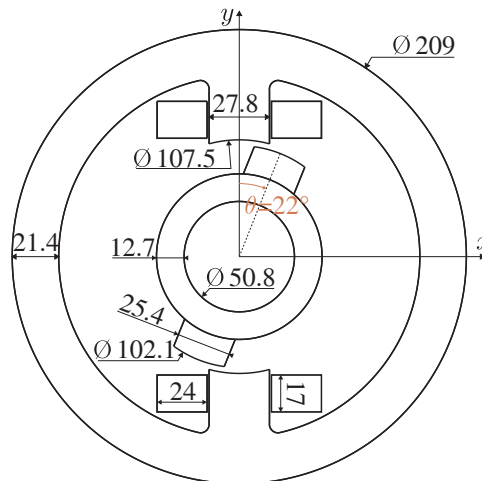
En outre, les méthodes de décomposition de domaine présentent un autre avantage : la réduction de l'utilisation de la mémoire. En divisant le problème en sous-problèmes, chaque processeur assemble des opérateurs plus petits et requiert moins de mémoire pour les calculs. Les méthodes DDM permettent donc de traiter des problèmes plus volumineux qui n'auraient pas été réalisables autrement.

### 3 Validation sur une machine 2D : Problème TEAM 24

#### 3.1 Définition du cas de référence

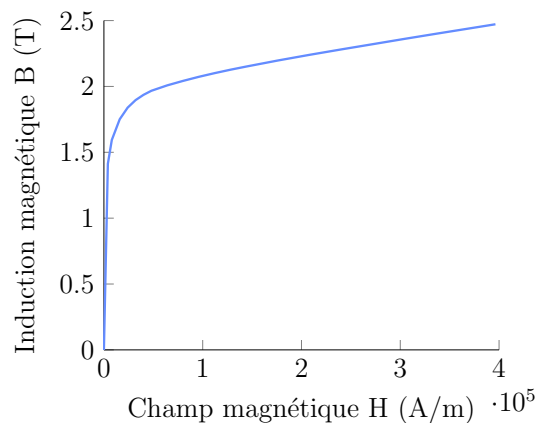
La totalité des développements proposés dans ce manuscrit et implémentés dans ROMlab sont validés sur une machine à réluctance variable 2D de référence : le problème TEAM 24. Ce problème est un benchmark proposé par la Société Internationale Compumag et fait partie des benchmarks Testing Electromagnetic Analysis Methods (TEAM) [ALLEN & RODGER, s. d.] qui couvrent un large éventail de dispositifs et phénomènes électromagnétiques. La description du problème numéro 24 est donnée sur la Figure 4.17. Il comprend un stator circulaire et un rotor à deux pôles qui peut tourner par rapport au stator. Les pôles du stator sont entourés de deux bobines dans lesquelles une source de courant  $j_{imp}$  est imposée. Différentes grandeurs mesurées sont présentées dans le benchmark et peuvent être comparées aux résultats numériques. Nous nous plaçons alors dans la même configuration avec le rotor verrouillé à  $22^\circ$  par rapport au stator, ce qui permet une petite zone de recouvrement

entre les pôles.



**FIGURE 4.17** • Définition de la géométrie du problème Team 24

Dans le benchmark, une intensité de 7,39A est fournie aux bobines. L'excitation résultante conduit à un champ magnétique suffisamment élevé pour saturer le fer dans le petit chevauchement entre les pôles. Le matériau utilisé dans le stator et le rotor est l'acier EN9 dont la courbe d'aimantation initiale  $B-H$  est mesurée. Elle est représentée Figure 4.18.



**FIGURE 4.18** • Comportement magnétique du matériau EN9

Pour valider l'implémentation de la résolution d'un problème de magnétostatique 2D avec ROMlab, nous effectuons une simulation sans DDM utilisant un schéma de Newton-Raphson pour la même excitation que le benchmark. Nous observons alors, Figure 4.19, l'induction magnétique suivant l'axe  $y$  au niveau de la sonde placée dans le benchmark et qui a permis les mesures. Les résultats obtenus avec ROMlab correspondent à la référence mesurée.

Cette simulation sans DDM mais utilisant ROMlab servira de référence dans la suite. Comme la prise en compte de la saturation magnétique fera l'objet de travaux futurs, nous présentons ici des résultats où l'excitation dans les bobines est choisie pour maintenir le champ magnétique dans la zone linéaire. Ainsi, une intensité  $I = 1,5A$  est appliquée dans les bobines. Les paramètres du problème linéaire sont donnés dans la Table 4.2.

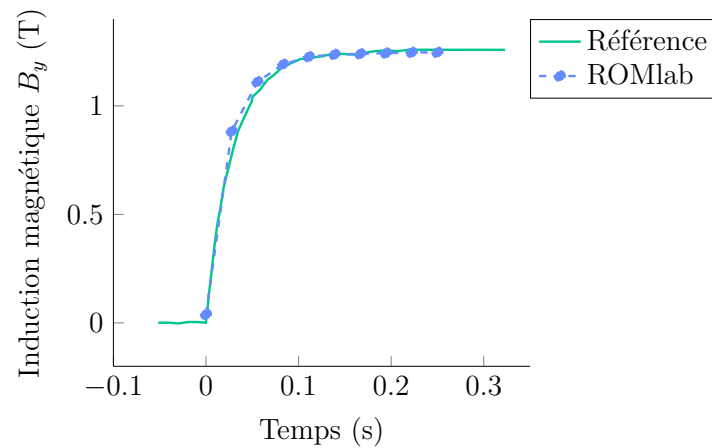


FIGURE 4.19 • Comparaison de l'induction magnétique  $B_y$  au niveau de la sonde

Dénomination	Symbole	Valeur
Perméabilité magnétique EN9	$\mu$	$281,1\mu_0$
Nombre enroulements	$N$	350
Taux de remplissage	$\rho$	0,43
Intensité appliquée	$I$	1,5A

TABLE 4.2 • Paramètres du problème linéaire

Le maillage de la géométrie est créé avec *Gmsh* et comprend  $40 \times 10^3$  degrés de liberté. Le problème est décomposé en 62 sous-domaines définis dans la Figure 4.20. Un zoom au niveau de l'entrefer est représenté pour mettre en évidence le besoin d'introduire une interface particulière entourant complètement le rotor. Cette interface est utile pour appliquer la méthode de l'interface glissante et ainsi simuler la rotation du rotor.

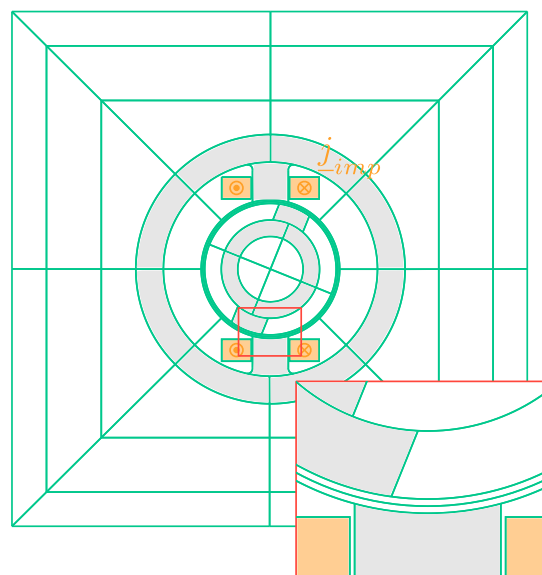


FIGURE 4.20 • Décomposition du problème en 62 sous-domaines

### 3.2 Vérification des grandeurs utiles

Nous simulons le problème linéaire présenté avec la méthode LATIN-DDM Multi-échelle. Une attention particulière doit être apportée à la définition des modes macro sur l'interface circulaire entourant le rotor. En effet, si le mode constant reste adapté, le mode linéaire lui ne permet plus de représenter grossièrement la physique du moteur puisqu'il ferait apparaître un saut du potentiel  $A$ . Si nous traçons le potentiel vecteur  $A$  solution sur l'interface circulaire, Figure 4.21, nous observons plutôt une variation périodique du champ. Nous nous

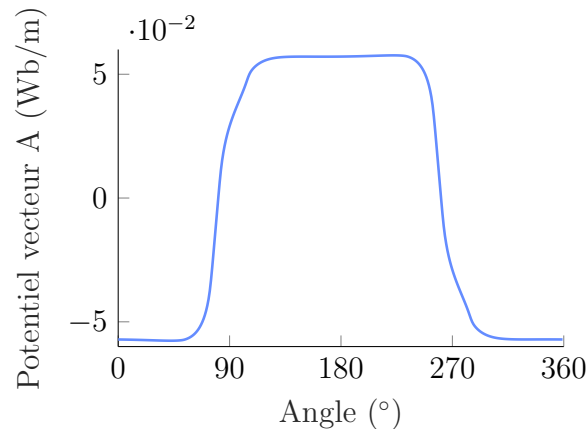


FIGURE 4.21 • Potentiel vecteur  $A$  sur l'interface circulaire entourant le rotor

inspirons alors de ces variations pour définir le second mode macro sur cette interface. Cette périodicité peut être soit définie a priori connaissant la géométrie de la machine, ou à partir d'une première simulation grossière à moindre coût, qui permet d'extraire le champ sur l'interface et de le réutiliser comme mode. Cette deuxième approche est celle choisie dans la suite.

#### Remarque

Comme la contribution macro  $A_{(M)}$  de la solution tend à s'annuler au fil des itérations, un « mauvais » mode macro sur une interface permettrait tout de même d'atteindre la bonne solution à convergence. Néanmoins le gain espéré avec l'approche multi-échelle serait alors moins flagrant.

L'impact des considérations multi-échelles est mis en évidence sur la Figure 4.22, qui représente l'évolution de l'indicateur de convergence  $\eta$  au cours des itérations de l'algorithme. Le gain en termes de nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le même critère de convergence est conséquent avec la stratégie multi-échelle mise en œuvre.

La Figure 4.25 compare la norme de l'induction magnétique  $B$  calculée avec la simulation de référence sans DDM et avec l'algorithme LATIN-DDM utilisant l'approche multi-échelle et un critère de convergence de  $10^{-6}$ . Les résultats obtenus correspondent à la référence et permettent de vérifier l'implémentation réalisée.

Pour valider globalement les résultats obtenus, nous calculons également le couple moteur  $C_m$  de la machine. Pour une position rotorique donnée, le couple instantané est par exemple obtenu en intégrant la densité de force  $f_t$  sur un contour circulaire  $\Gamma$  dans l'entre-

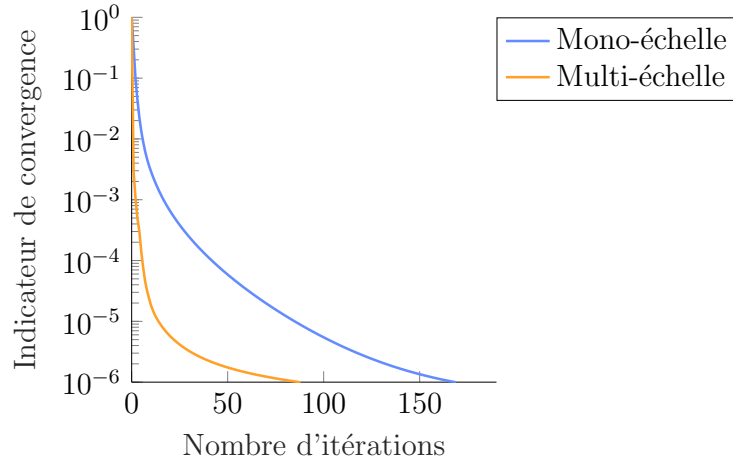


FIGURE 4.22 • Évolution de l'indicateur de convergence selon l'approche LATIN-DDM utilisée

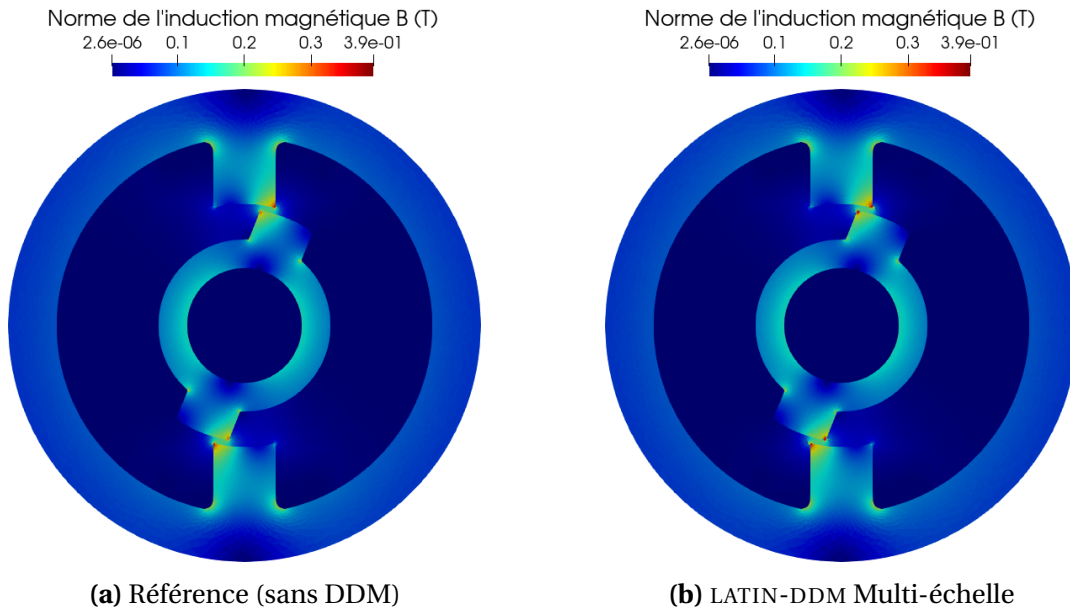


FIGURE 4.23 • Comparaison de la norme de l'induction magnétique obtenue

fer, tel que :

$$C_m = \int_0^{2\pi} f_t R_\Gamma d\theta \quad (4.8)$$

avec

$$f_t = \frac{1}{\mu_0} B_r B_t R_\Gamma \quad (4.9)$$

et le rayon  $R_\Gamma$  du contour  $\Gamma$  entourant le rotor.  $B_r$  et  $B_t$  sont les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique  $\underline{B}$  sur le contour  $\Gamma$ .

Un intérêt notable de la méthode LATIN-DDM est que les composantes  $B_r$  et  $B_t$  sont plus facilement récupérables. En effet, la méthode LATIN-DDM étant une méthode mixte, le champ tangentiel est déjà directement connu aux nœuds avec

$$B_t = \mu_0 T. \quad (4.10)$$

Il ne reste à calculer que  $B_r$ , approximée à l'aide de la connaissance du potentiel vecteur  $A$  sur l'interface, tel que :

$$B_r = \frac{1}{R_\Gamma} \frac{A(n) - A(n+1)}{\Delta\theta} \quad (4.11)$$

avec  $n$  et  $n+1$  deux nœuds adjacents sur l'interface circulaire et dont l'écart angulaire vaut  $\Delta\theta$ .

Sans la méthode LATIN-DDM, une approximation de l'induction magnétique  $\underline{B}$  aux nœuds doit être réalisée, ce qui détériore la solution. La Figure 4.24 compare la densité de force  $f_t$  obtenue sans DDM et en approximant l'induction magnétique aux nœuds, à celle calculée en tirant parti des quantités accessibles par la méthode LATIN-DDM. Les résultats sont nettement améliorés par cette méthode.

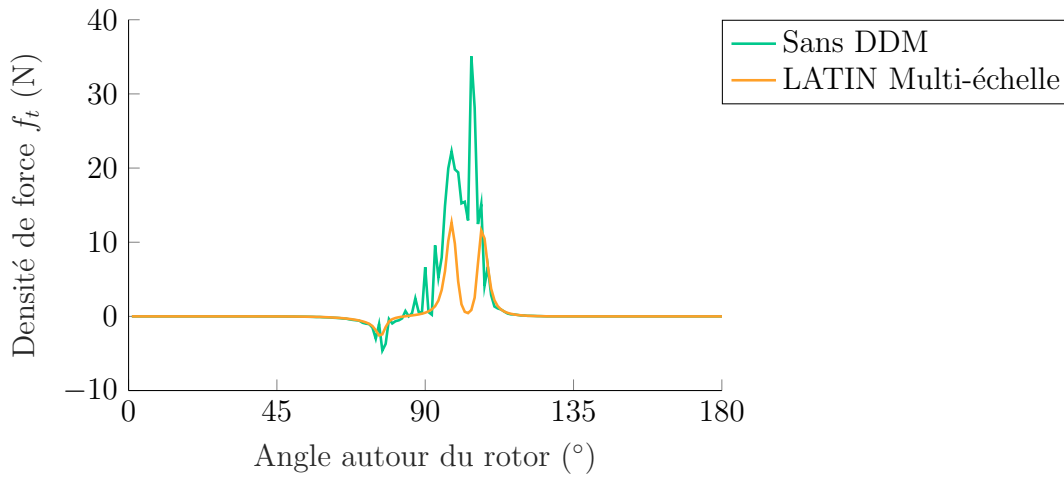


FIGURE 4.24 • Comparaison de la densité de force  $f_t$  obtenue selon les deux méthodes pour la position rotorique  $\theta = 22^\circ$

Le calcul du couple par l'intégrale de  $f_t$  pouvant être peu fiable, une autre façon de faire est de calculer l'inductance  $L$  des bobines en connaissant le flux moyen les traversant. La méthode des travaux virtuels donne ensuite le couple instantané tel que

$$C_m = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (4.12)$$

Nous utilisons cette méthode pour calculer le couple avec la simulation de référence sans DDM. Nous comparons sur la Figure 4.25 le couple obtenu pour les deux méthodes, tracé entre 0 et 90 degrés. La forte similitude des résultats (erreur inférieure à 2%) permet de valider l'implémentation de l'algorithme LATIN-DDM.

### 3.3 Speed-up sur un cas d'échelle

Nous cherchons enfin à déterminer le *speed-up* de la méthode sur cet exemple plus physique. Comme dans la section 2.3, les simulations sont réalisées à l'aide du cluster *Ruche*, dont les caractéristiques ont été données Table 4.1. Le nombre de degrés de liberté du maillage est élevé à  $2 \times 10^6$  degrés de liberté pour se placer dans un cas d'échelle. Le calcul de référence sans DDM est réalisé en utilisant un seul processeur du mésocentre. Pour un pas de

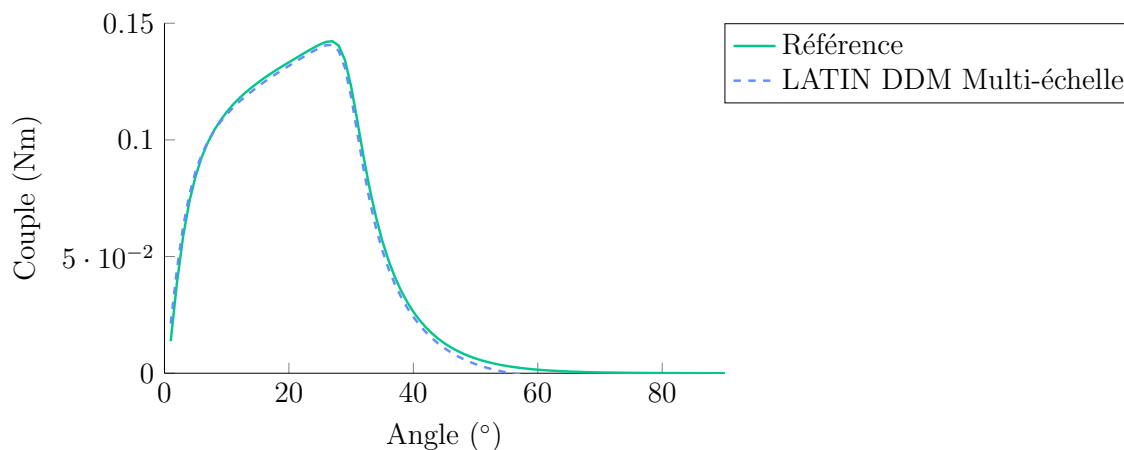


FIGURE 4.25 • Comparaison du couple calculé

rotation, l'assemblage, la factorisation et la résolution du problème ont nécessité 235 s. En utilisant l'algorithme LATIN-DDM multi-échelle, le calcul est réparti sur 62 processeurs (un pour chaque sous-domaine). L'algorithme a convergé en un temps total de 6,3 s. Le calcul a donc été 37 fois plus rapide que la référence sans DDM. Ainsi, dans ce cas test physique, une valeur remarquable de *speed-up* de 60% est atteinte.

## 4 Illustration sur un exemple 3D

Nous étudions finalement un problème de magnétostatique 3D avec la méthode LATIN-DDM pour illustrer les potentialités des travaux réalisés. Le problème est composé d'un barreau de fer de base carré autour duquel une bobine est enroulée. Le tout est plongé dans de l'air. La Figure 4.26a décrit la géométrie du problème et les conditions appliquées. Une source de courant  $\underline{j}_{imp}$  est imposée dans la bobine et la condition  $\underline{A} \wedge \underline{n} = \underline{0}$  est appliquée sur le contour extérieur. Cet exemple est discrétisé avec les éléments de Whitney et est décomposé en sous-domaines, représentés sur la Figure 4.26b. Les formes particulières des sous-domaines ont été choisies identiques par « étages » par simplicité. Les paramètres de l'étude sont rassemblés dans la Table 4.3.

Dénomination	Symbole	Valeur
Perméabilité magnétique du fer	$\mu$	$3000\mu_0$
Densité de courant	$j_{imp}$	$24 \times 10^5$
Longueur barreau	$L$	0,16 m
Épaisseur barreau	$e$	0,01 m
Longueur bobine	$L_b$	0,08 m
Diamètre intérieur bobine	$d_b$	0,04 m
Diamètre extérieur bobine	$D_b$	0,06 m
Indicateur de convergence seuil	$\eta_{seuil}$	$1 \times 10^5$

TABLE 4.3 • Paramètres du problème linéaire

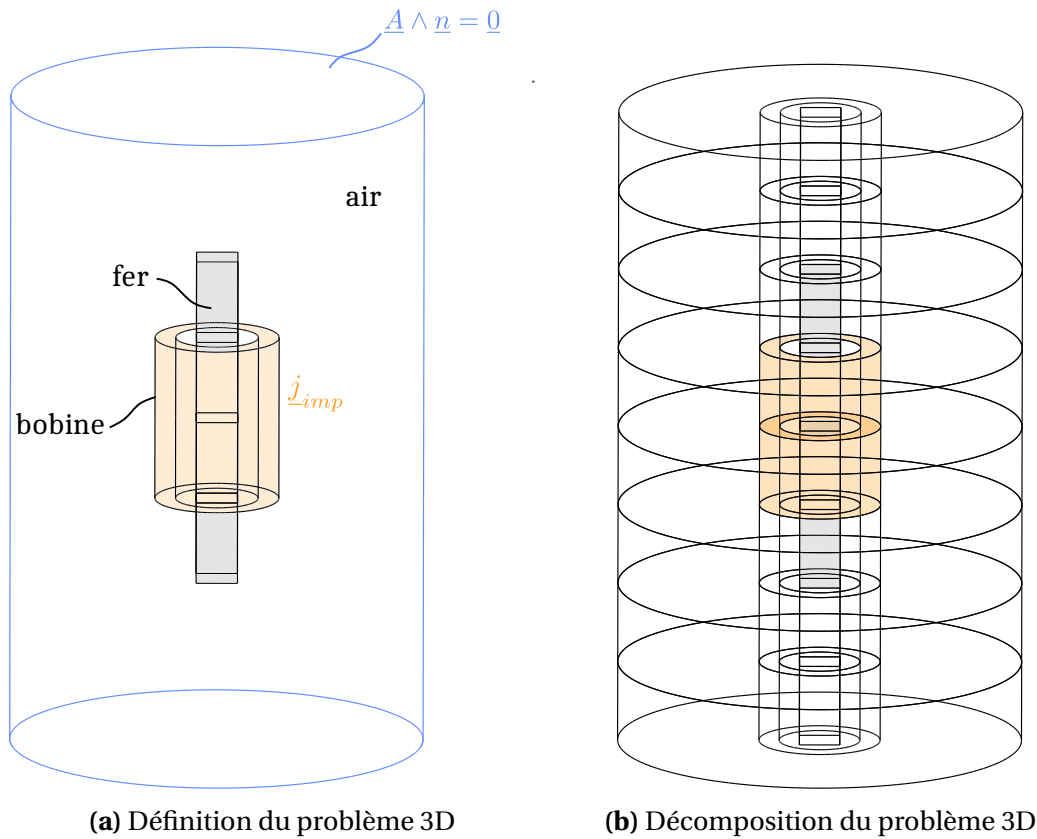


FIGURE 4.26 • Description du problème 3D

Avant de rechercher la solution en terme de potentiel vecteur  $\underline{A}$  dans l'ensemble du domaine, il est nécessaire de construire un champ source compatible dans la bobine, comme présenté section 2.3. La Figure 4.27 représente la source de courant dérivée du champ source  $\underline{H}_s$  construit telle que  $\underline{j} = \text{rot}(\underline{H}_s)$ . La densité de courant obtenue correspond aux attentes du problème.

Le champ source est alors imposé dans la bobine et l'algorithme LATIN-DDM mono-échelle permet de résoudre le problème en 65 itérations pour la valeur seuil d'indicateur choisie. L'évolution de l'indicateur de convergence, tracée sur la Figure 4.28, est satisfaisante.

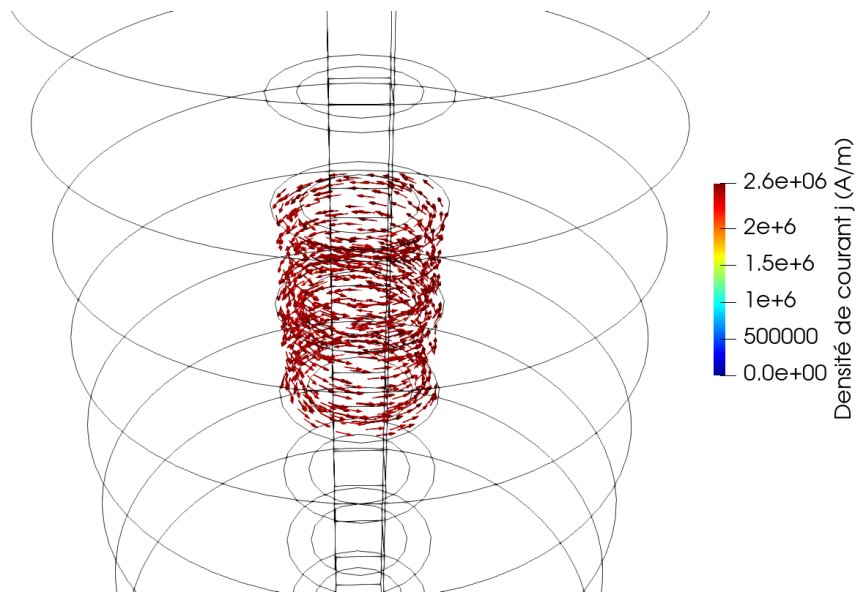


FIGURE 4.27 • Densité de courant  $j$  dérivée du champ source compatible

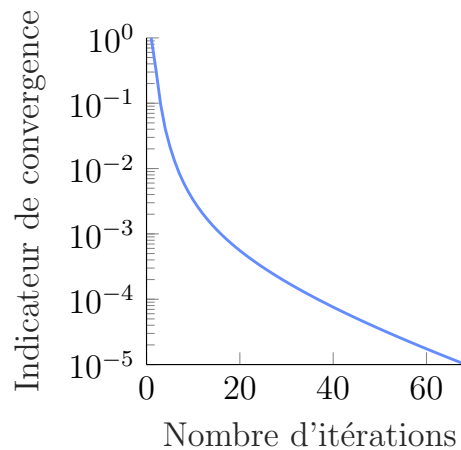
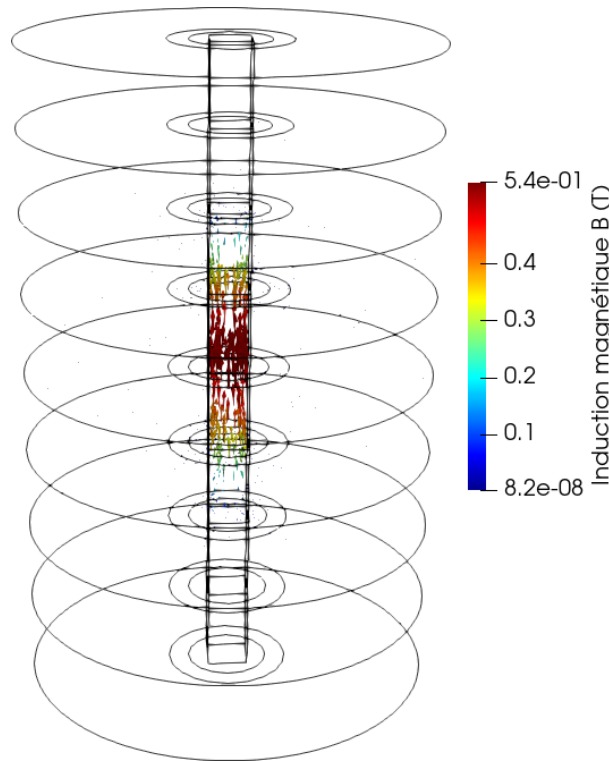


FIGURE 4.28 • Évolution de l'indicateur de convergence

La Figure 4.29 montre l'induction magnétique  $\underline{B}$  calculée dans le domaine. Le comportement magnétique est celui attendu : le flux magnétique est canalisé dans le barreau ferromagnétique.

Cet exemple illustre donc les possibilités de l'algorithme LATIN-DDM implémenté dans ROMlab. Nous pouvons traiter des problèmes de magnétostatique 3D avec une densité de courant imposée par une méthode de décomposition de domaine. Ce problème étant simple, nous n'avons pas cherché à déterminer les performances de l'algorithme dans son implémentation parallèle. Cependant, les performances mises en évidence dans la section précédente avec un exemple 2D se transposent sans difficultés aux problèmes 3D.

FIGURE 4.29 • Induction magnétique  $\underline{B}$ 

\* \* \*

## › Bilan

Dans ce chapitre, l'implémentation de l'algorithme LATIN-DDM multi-échelle a été abordée, avec notamment la présentation de la solution collaborative de routines *Matlab* dans laquelle elle a été réalisée : la plateforme ROMlab. Dans le cadre des problèmes de magnétostatique 3D utilisant les éléments de Whitney, une nouvelle structure de données est construite et permet de définir les arêtes et les facettes sur la géométrie complète.

Afin de tirer parti des caractéristiques des clusters à architecture parallèle, nous mettons en place une stratégie de calcul parallèle spécifique à la méthode LATIN-DDM multi-échelle. Nous utilisons alors des communicateurs MPI adaptés à l'environnement *Matlab*. Les performances de cette stratégie implémentée sont évaluées sur un cas simple mais possédant  $30 \times 10^6$  degrés de liberté. Les simulations réalisées montrent un *speed-up* proche de 100% pour l'approche multi-échelle jusqu'à 70 sous-domaines.

Enfin, nous validons la totalité des développements réalisés, d'abord en 2D, à l'aide du benchmark de référence TEAM numéro 24, puis en 3D sur l'exemple d'un noyau bobiné plongé dans l'air. Le problème TEAM 24 permet d'avoir connaissance de certaines mesures que nous pouvons comparer aux résultats des simulations. Ces résul-

tats permettent de valider la construction des opérateurs et la résolution dans ROMlab mais sans DDM du problème. Cette simulation fait alors office de référence dans ROMlab. Les grandeurs utiles telles que l'induction magnétique  $\underline{B}$  ou le couple moteur sont calculées et validées par rapport à la référence. Nous mettons également en évidence le besoin de définir un mode macro spécifique sur l'interface entourant le rotor pour représenter grossièrement la physique. Le *speed-up* est évalué sur ce problème et atteint le résultat très prometteur de 60%.

Le problème du barreau 3D permet quant à lui de mettre en évidence les possibilités offertes par l'implémentation des éléments de Whitney. Les résultats obtenus avec la méthode LATIN-DDM valident l'implémentation réalisée et ouvrent les perspectives pour l'étude de machines tournantes complexes par des modélisations 3D.

---

# Conclusion

La modélisation efficace de machines électriques est un enjeu de l'industrie d'aujourd'hui. Le besoin croissant de machines innovantes et performantes appelle à la mise en place de démarches d'optimisations coûteuses en temps de calcul et en mémoire. Les ressources informatiques basées sur les ordinateurs à architecture parallèle permettent de répondre à ce besoin. Pour en tirer parti, une solution est de mettre en place un algorithme de résolution parallèle s'appuyant sur une méthode de décomposition de domaine.

Nous nous sommes intéressés à la méthode LATIN, un solveur non-incrémental développé initialement pour les problèmes de mécanique non linéaires. Appliquée à un problème décomposé en sous-domaines, cette méthode conduit à une méthode de décomposition de domaine mixte. Elle a l'avantage de ne favoriser ni la continuité primale ni la continuité duale lors des itérations. L'objectif de ces travaux de thèse a été de proposer une adaptation de la méthode LATIN-DDM aux problèmes de magnétostatique 2D et 3D.

Le Chapitre 1 a permis de dresser un état de l'art des méthodes de décomposition de domaine. Ces méthodes font l'objet de nombreux travaux dans le domaine de la magnétostatique, notamment au travers de leurs approches de résolution primales ou duales. Des performances prometteuses sont mises en avant avec les méthodes du type BDD ou FETI. Un enjeu de la simulation des machines tournantes est la considération de la rotation du rotor. Une grande variété de méthodes est proposée, et celle qui se montre la plus adaptée aux méthodes de décomposition de domaines est la méthode de l'interface glissante [RODGER et al., 1990], que nous avons alors choisi d'implémenter.

Le Chapitre 2 a présenté la méthode LATIN-DDM dont l'écriture a été adaptée aux équations de la magnétostatique. Les fortes hétérogénéités entre les milieux ferromagnétiques et l'air ont nécessité un choix judicieux de directions de recherche rendant compte du comportement magnétique des problèmes étudiés. La convergence des méthodes de décomposition de domaines ayant la particularité d'être dépendantes du nombre de sous-domaines, nous avons introduit une approche multi-échelle dans l'algorithme à partir des travaux proposés par [OUMAZIZ, 2017]. Cette approche permet de vérifier un équilibre macroscopique dès la première itération de l'algorithme. Des modes du champ primal sont introduits sur les interfaces et définis en accord avec la physique des équations de la magnétostatique. Un exemple 2D a permis de valider l'implémentation et l'apport de l'approche multi-échelle.

Le Chapitre 3 a introduit les éléments de Whitney [BOSSAVIT, 1988b] pour la discrétisation des problèmes de magnétostatique 3D en remplacement des éléments finis de Lagrange

qui imposent des continuités non désirées. Le potentiel vecteur  $\underline{A}$  a alors été discrétisé avec les éléments d'arêtes. Le problème ainsi discrétisé ne possède pas de solution unique et une stratégie de résolution basée sur un algorithme itératif type gradient conjugué a donc été présentée. La méthode LATIN-DDM a ensuite été adaptée à l'utilisation des éléments de Whitney. Deux exemples 3D ont permis de valider l'implémentation réalisée.

Le Chapitre 4 a été consacré à l'implémentation numérique dans la plateforme collaborative ROMlab développée sous *Matlab*. Les particularités de ROMlab ont été présentées ainsi que les développements apportés par cette thèse. Une stratégie de calcul parallèle a été mise en place pour tirer profit des caractéristiques des clusters. Les performances de cette stratégie ont été évaluées par une étude de *speed-up* sur un exemple test 2D. Jusqu'à 70 sous-domaines, la méthode LATIN-DDM multi-échelle montre un gain de temps de calcul significatif. La totalité des développements ont finalement été validés en 2D via le problème de référence TEAM 24 et en 3D via un exemple de noyau bobiné plongé dans l'air.

Dans l'ensemble, les travaux réalisés durant cette thèse ont permis de démontrer l'intérêt de la méthode LATIN-DDM appliquée au cadre de la magnétostatique. La méthode s'adapte aux spécificités des problèmes de magnétostatique 3D et montre des performances très prometteuses.

Finalement, nous partageons plusieurs perspectives à ces travaux qui pourraient être étudiées.

- » **A court terme :** La définition de modes macroscopiques sur des interfaces discrétisées avec les éléments d'arêtes permettrait l'utilisation de l'approche multi-échelle lors de la résolution de problèmes de magnétostatique 3D. L'idée est de trouver un choix judicieux de circulations du potentiel vecteur  $\underline{A}$  sur les arêtes de chaque interface de telle façon que l'induction magnétique  $\underline{B}$  résultante décrive un flux sortant. De premiers tests ont été réalisés sans aboutir à une définition acceptable des modes pour le moment. Cet élément est cependant essentiel pour simuler efficacement des machines tournantes 3D.
- » **A moyen terme :** Les machines tournantes sont généralement utilisées à des points de fonctionnement pour lesquels les matériaux du rotor et du stator arrivent à saturation magnétique. Pour modéliser au mieux ces machines, il est utile de tenir compte des non-linéarités du comportement magnétique. Cependant, la prise en compte de ce comportement fortement non-linéaire alourdit les simulations numériques de manière conséquente. Les méthodes de décomposition de domaine permettent de réduire les temps de calcul, mais nous pouvons aller plus loin en intégrant une méthode de réduction de modèle. L'intérêt d'avoir utilisé la méthode LATIN-DDM durant cette thèse est qu'elle constitue un cadre pouvant naturellement intégrer une méthode de réduction de modèle. Peu de travaux dans le domaine de la magnétostatique montre une utilisation robuste de ces méthodes. Cette perspective constitue un réel challenge pour la simulation de machines tournantes.
- » **A plus long terme :** Les objectifs définis pour cette thèse sont issus des problématiques du monde industriel. Nous avons démontré de manière académique qu'il était possible de diminuer les temps de calculs de problèmes de magnétostatique de façon notable. Pour que ces travaux aient un impact sur la recherche de nouvelles machines tournantes répondants aux nécessités de la société de demain, il est important

---

de rendre ces développements utilisables dans le milieu industriel. Des travaux autour de la méthode LATIN et allant dans ce sens ont déjà permis des réflexions sur la non-intrusivité de l'algorithme pour son incorporation dans des codes éléments finis industriels [OUMAZIZ, 2017; SCANFF, 2022]. De nouveaux travaux pourraient continuer dans ce sens et plus spécifiquement autour de l'implémentation de la méthode LATIN-DDM avec les éléments de Whitney pour les problèmes de magnéto-statique 3D et la mise en place d'une stratégie de calcul parallèle adaptée.



---

# Bibliographie

- ABDEL-RAZEK, A., COULOMB, J., FELIACHI, M. & SABONNADIÈRE, J. (1982).** Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2) (cf. p. 16).
- ALAMEDDIN, S., BHATTACHARYYA, M., FAU, A., NACKENHORST, U., NÉRON, D. & LADEVÈZE, P. (2017).** Large time increment approach for fatigue damage computations. *PAMM*, 17(1), 231-232. <https://doi.org/10.1002/pamm.201710085> (cf. p. 32)
- ALBANESE, R. & RUBINACCI, G. (1990).** Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(3), 515-532. <https://doi.org/10.1002/nme.1620290305> (cf. p. 76)
- ALLEN, N. & RODGER, D. (s. d.).** Description of team workshop problem 24 : nonlinear time transient rotational test rig. <http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem24.pdf>. (Cf. p. 104)
- ALLIX, O. & LADEVÈZE, P. (1992).** Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4), 235-242. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(92\)90060-P](https://doi.org/10.1016/0263-8223(92)90060-P) (cf. p. 31)
- AMESTOY, P. R., DUFF, I. S., L'EXCELLENT, J.-Y. & KOSTER, J. (2001).** A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1), 15-41. <https://doi.org/10.1137/S0895479899358194> (cf. p. 3)
- BHATTACHARYYA, M., FAU, A., DESMORAT, R., ALAMEDDIN, S., NÉRON, D., LADEVÈZE, P. & NACKENHORST, U. (2019).** A kinetic two-scale damage model for high-cycle fatigue simulation using multi-temporal latin framework. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 77, 103808. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103808> (cf. p. 31)
- BIANCHI, N. (2005).** *Electrical Machine Analysis Using FE*. Taylor & Francis. (Cf. p. 12).
- BIRO, O., PREIS, K. & RICHTER, K. (1996).** On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3d magnetostatic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3), 651-654. <https://doi.org/10.1109/20.497322> (cf. p. 77)

- BLANZÉ, C., CHAMPANEY, L. & VEDRINE, P. (2000). Contact problems in the design of a superconducting quadrupole prototype. *Engineering Computations*, 17(2), 136-153. <https://doi.org/10.1108/02644400010313093> (cf. p. 31)
- BOISSE, P., LADEVEZE, P., POSS, M. & ROUGEE, P. (1991). A new large time increment algorithm for anisotropic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 7(1), 65-77. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(91\)90005-J](https://doi.org/10.1016/0749-6419(91)90005-J) (cf. p. 31)
- BONTINCK, Z., LASS, O., SCHÖPS, S., DE GERSEM, H., ULBRICH, S. & RAIN, O. (2018). Robust optimisation formulations for the design of an electric machine. *IET Science, Measurement & Technology*, 12(8), 939-948. <https://doi.org/10.1049/iet-smt.2018.5235> (cf. p. 2)
- BOSSAVIT, A. (1988a). A rationale for 'edge-elements' in 3-d fields computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1), 74-79. <https://doi.org/10.1109/20.43860> (cf. p. 4)
- BOSSAVIT, A. (1988b). Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings A Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews*, 135(8), 493. <https://doi.org/10.1049/ip-a-1.1988.0077> (cf. p. 15, 60, 62, 87, 115)
- BOSSAVIT, A. (1998). *Computational Electromagnetism*. Academic Press. (Cf. p. 12, 13, 67, 70, 71).
- BOUCARD, P. A. & CHAMPANEY, L. (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9), 1259-1281. <https://doi.org/10.1002/nme.724> (cf. p. 32)
- BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P., POSS, M. & ROUGÉE, P. (1997). A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers & Structures*, 64(1), 499-508. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(96\)00165-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00165-4) (cf. p. 31)
- BOUILLAULT, F. & RAZEK, A. (1988). Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1), 259-261. <https://doi.org/10.1109/20.43906> (cf. p. 17)
- CHAMPANEY, L., COGNARD, J. & LADÈVEZE, P. (1999). Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers & Structures*, 73(1), 249-266. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00285-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00285-5) (cf. p. 31)
- CHAMPANEY, L. (1996). *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 31).
- CHAN, T. F. & MATHEW, T. P. (1994). Domain decomposition algorithms. *Acta Numerica*, 3, 61-143. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002427> (cf. p. 11)
- CHEN, D., ROJAS, M., SAMSET, B., COBB, K., DIONGUE NIANG, A., EDWARDS, P., EMORI, S., FARIA, S., HAWKINS, E., HOPE, P., HUYBRECHTS, P., MEINSHAUSEN, M., MUSTAFA, S.,

- PLATTNER, G.-K. & TRÉGUIER, A.-M. (2021). Framing, Context, and Methods. In *Climate Change 2021 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (p. 147-286). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009157896.003>. (Cf. p. 1)
- COGNARD, J. Y., LADEVEZE, P. & TALBOT, P. (1999). A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software* (cf. p. 31).
- COGNARD, J.-Y., DUREISSEIX, D., LADEVÈZE, P. & LORONG, P. (1996). Expérimentation d'une approche parallèle en calcul des structures. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 5(2), 197-220. <https://doi.org/10.1080/12506559.1996.10511217> (cf. p. 38)
- COGNARD, J.-Y. & LADEVÈZE, P. (1991). The large time increment method applied to cyclic loadings In *Creep in structures* (M. ŻYCZKOWSKI, Éd.). Berlin, Heidelberg, Springer. 555-562. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-84455-3\\_62](https://doi.org/10.1007/978-3-642-84455-3_62). (Cf. p. 31)
- COGNARD, J.-Y. & LADEVÈZE, P. (1993). A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9(2), 141-157. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(93\)90026-M](https://doi.org/10.1016/0749-6419(93)90026-M) (cf. p. 32)
- DABY-SEESARAM, A., FAU, A., CHARBONNEL, P.-É. & NÉRON, D. (2023). A hybrid frequency-temporal reduced-order method for nonlinear dynamics. *Nonlinear Dynamics*. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08513-8> (cf. p. 32, 91)
- DAVAT, B., REN, Z. & LAJOIE-MAZENC, M. (1985). The movement in field modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6), 2296-2298. <https://doi.org/10.1109/TMAG.1985.1064185> (cf. p. 16)
- DE ROECK, Y.-H. & LE TALLEC, P. (1991). Analysis and test of a local domain decomposition preconditioner. Fourth international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations. SIAM. (Cf. p. 20).
- DRYJA, M. & WIDLUND, O. B. (1990). Some domain decomposition algorithms for elliptic problems. In *Iterative methods for large linear systems* (Kincaid, D. R. and Hayes, L., editors, p. 273-291). SIAM. (Cf. p. 11).
- DULAR, P., HODY, J.-Y., NICOLET, A., GENON, A. & LEGROS, W. (1994). Mixed finite elements associated with a collection of tetrahedra, hexahedra and prisms. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5), 2980-2983. <https://doi.org/10.1109/20.312563> (cf. p. 62)
- DULAR, P. (1996). *Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires* (thèse de doct.). Université de Liège. (Cf. p. 5, 13).
- DUREISSEIX, D., LADEVÈZE, P. & SCHREFLER, B. A. (2003). A LATIN computational strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10), 1489-1510. <https://doi.org/10.1002/nme.622> (cf. p. 31)

- DUREISSEIX, D. (1997).** *Une Approche Multi-échelles pour des Calculs de Structures sur Ordinateurs à Architecture Parallèle* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Caen. (Cf. p. 31, 38, 45).
- FARHAT, C., AVERY, P., TEZAU, R. & LI, J. (2005).** Feti-dph : a dual-primal domain decomposition method for acoustic scattering. *Journal of Computational Acoustics*, 13(3), 499-524. <https://doi.org/10.1142/S0218396X05002761> (cf. p. 25, 26)
- FARHAT, C., CHEN, P.-S., MANDEL, J. & ROUX, F. X. (1998).** The two-level FETI method part II : extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1), 153-179. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00145-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00145-X) (cf. p. 24)
- FARHAT, C., LESOINNE, M., LETALLEC, P., PIERSON, K. & RIXEN, D. (2001).** FETI-DP : a dual-primal unified FETI method – part i : a faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7), 1523-1544. <https://doi.org/10.1002/nme.76> (cf. p. 24)
- FARHAT, C. & MANDEL, J. (1998).** The two-level FETI method for static and dynamic plate problems part i : an optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1), 129-151. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00146-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00146-1) (cf. p. 24)
- FARHAT, C., MANDEL, J. & ROUX, F. X. (1994).** Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(3), 365-385. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)90068-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90068-X) (cf. p. 21)
- FARHAT, C. & ROUX, F.-X. (1991).** A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6), 1205-1227. <https://doi.org/10.1002/nme.1620320604> (cf. p. 4, 21)
- GANDER, M. J. (2006).** Optimized Schwarz Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(2), 699-731. <https://doi.org/10.1137/S0036142903425409> (cf. p. 4, 11)
- GANDER, M. J. (2008).** Schwarz methods over the course of time. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 31, 228-255 (cf. p. 11).
- GHENAI, M., PERRUSSEL, R., CHADEBEC, O., VI, F., GUICHON, J.-M., MEUNIER, G. & SIAU, J. (2023).** Domain decomposition for 3d nonlinear magnetostatic problems : newton-krylov-schur vs. schur-newton-krylov methods. 24th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag'2023). (Cf. p. 26).
- GOLIAS, N. & TSIBOUKIS, T. (1994).** Magnetostatics with edge elements : a numerical investigation in the choice of the tree. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5), 2877-2880. <https://doi.org/10.1109/20.312537> (cf. p. 77)
- GRADINARU, V. & HIPTMAIR, R. (1999).** Whitney elements on pyramids. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 8, 154-168 (cf. p. 62).

- GUIDAULT, P.-A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. & CORNUAULT, C. (2008).** A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5), 381-399. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.07.023> (cf. p. 32)
- IEA. (2022a).** *Energy consumption in transport by fuel in the Net Zero Scenario, 2000-2030* (IEA). (Cf. p. 2).
- IEA. (2022b).** *Global CO2 emissions from transport by sub-sector in the Net Zero Scenario, 2000-2030* (IEA). (Cf. p. 1).
- JOURNEAUX, A. (2013).** *Modélisation multi-physiques en génie électrique, Application au couplage magnéto-thermo-mécanique.* (thèse de doct.). Université Paris Sud. (Cf. p. 14, 15).
- KANAYAMA, H., OGINO, M., SUGIMOTO, S.-I. & TERADA, S. (2013).** Large-scale magnetostatic domain decomposition analysis based on the MINRES method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5), 1565-1568. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2013.2238612> (cf. p. 25)
- KERANEN, J., PIPPURI, J., MALINEN, M., RUOKOLAINEN, J., RABACK, P., LYLÛ, M. & TAMMI, K. (2015).** Efficient parallel 3-d computation of electrical machines with elmer. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3), 1-4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2014.2356256> (cf. p. 3)
- KERFRIDEN, P., ALLIX, O. & GOSSELET, P. (2009).** A three-scale domain decomposition method for the 3d analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 44(3), 343-362. <https://doi.org/10.1007/s00466-009-0378-3> (cf. p. 31, 46)
- KLAWONN, A. & RHEINBACH, O. (2010).** Highly scalable parallel domain decomposition methods with an application to biomechanics. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 90(1), 5-32. <https://doi.org/10.1002/zamm.200900329> (cf. p. 25)
- LADEVEZE, P., NOUY, A. & LOISEAU, O. (2002).** A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43), 4869-4891. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00406-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00406-1) (cf. p. 31)
- LADEVÈZE, P. (1985).** Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*, 300(2), 41-44 (cf. p. 30-32).
- LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. & DUREISSEIX, D. (2001).** A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1), 121-138. <https://doi.org/10.1002/nme.274> (cf. p. 46)
- LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. & NÉRON, D. (2010).** The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21), 1287-1296. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.06.023> (cf. p. 32)

- LADEVÈZE, P. (1999).** *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation.* Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1432-8>. (Cf. p. 3, 4, 30, 31, 36)
- LADEVÈZE, P. & DUREISSEIX, D. (1999).** Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures (cf. p. 45).
- LADEVÈZE, P. & DUREISSEIX, D. (2000).** A micro / macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1, 18 (cf. p. 46).
- LADEVÈZE, P. & NOUY, A. (2003).** On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28), 3061-3087. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00341-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00341-4) (cf. p. 46)
- LEHIKONEN, A., IKAHEIMO, J., ARKKIO, A. & BELAHSEN, A. (2017).** Domain decomposition approach for efficient time-domain finite-element computation of winding losses in electrical machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 53(5), 1-9. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2017.2681045> (cf. p. 26)
- LI, J., LIU, P. & DINAHAHI, V. (2020).** Matrix-free edge-domain decomposition method for massively parallel 3-d finite element simulation with field-circuit coupling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 56(10), 1-9. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2020.3013143> (cf. p. 26)
- LI, Y.-J. & JIN, J.-M. (2007).** A new dual-primal domain decomposition approach for finite element simulation of 3-d large-scale electromagnetic problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 55(10), 2803-2810. <https://doi.org/10.1109/TAP.2007.905954> (cf. p. 26)
- LI, Y.-J. & JIN, J.-M. (2009).** Parallel implementation of the FETI-DPEM algorithm for general 3d EM simulations. *Journal of Computational Physics*, 228(9), 3255-3267. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.01.029> (cf. p. 26)
- LIONS, P.-L. (1988).** On the Schwarz alternating method. I. First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations. Paris, France. 1-42. (Cf. p. 9).
- LIONS, P.-L. (1990).** On the Schwarz Alternating Method III : A Variant fo Nonoverlapping Subdomains. Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations. SIAM. 202-223. (Cf. p. 4, 9).
- LIU, P. & DINAHAHI, V. (2018).** Matrix-free nodal domain decomposition with relaxation for massively parallel finite-element computation of EM apparatus. *IEEE Transactions on Magnetics*, 54(9), 1-7. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2018.2848622> (cf. p. 26)
- LOISEAU, O. (2001).** *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes* (thèse de doct.). (Cf. p. 46).

- LORONG, P. (1994). *Sur une approche parallèle pour le calcul des structures : comportement sur calculateurs parallèles* (These de doctorat). Cachan, Ecole normale supérieure. (Cf. p. 31).
- LU, T. & JIN, J.-M. (2014). Transient electrical-thermal analysis of 3-d power distribution network with FETI-enabled parallel computing. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 4(10), 1684-1695. <https://doi.org/10.1109/TCPMT.2014.2345651> (cf. p. 26)
- MANDEL, J., MCCORMICK, S. & BANK, R. (1987). 5. Variational Multigrid Theory. In *Multigrid Methods* (p. 131-177). Society for Industrial; Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971057.ch5>. (Cf. p. 21)
- MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3), 233-241. <https://doi.org/10.1002/cnm.1640090307> (cf. p. 4, 21)
- MANDEL, J. & BREZINA, M. (1993). Balancing domain decomposition : theory and performance in two and three dimensions (cf. p. 21).
- MARCSA, D. & KUCZMANN, M. (2015). Primal domain decomposition method with direct and iterative solver for circuit-field-torque coupled parallel finite element method to electric machine modelling. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, 13(5), 458-465. <https://doi.org/10.15598/aeet.v13i5.1410> (cf. p. 25)
- MEUNIER, G. (Éd.). (2008). *The finite element method for electromagnetic modeling*. ISTE [u.a.] (Cf. p. 12, 70).
- NABBEN, R. (2003). Comparisons between multiplicative and additive schwarz iterations in domain decomposition methods. *Numerische Mathematik*, 95(1), 145-162. <https://doi.org/10.1007/s00211-002-0444-7> (cf. p. 11)
- NACHAR, S. (2019). *Optimisation de structures viscoplastiques par couplage entre métamodèle multi-fidélité et modèles réduits* (thèse de doct.). Université Paris Saclay (COMUE). (Cf. p. 91).
- NAKANO, T., KAWASE, Y., YAMAGUCHI, T., NAKAMURA, M., NISHIKAWA, N. & UEHARA, H. (2010). Parallel computing of magnetic field for rotating machines on the earth simulator. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8), 3273-3276. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2010.2045225> (cf. p. 25)
- NAKANO, T., KAWASE, Y., YAMAGUCHI, T. & NAKAMURA, M. (2012). Parallel Computing of 3-D Eddy-Current Analysis With A- $\phi$  Method for Rotating Machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2), 975-978. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2011.2172678> (cf. p. 25)
- NEDELEC, J. C. (1980). Mixed finite elements in r3. *Numerische Mathematik*, 35(3), 315-341. <https://doi.org/10.1007/BF01396415> (cf. p. 62)

- NÉRON, D. & DUREISSEIX, D. (2008).** A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time–space interface coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(9), 1053-1084. <https://doi.org/10.1002/nme.2283> (cf. p. 31)
- NOUY, A. (2003).** *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 46).
- ODIÈVRE, D. (2009).** *Sur une stratégie de calcul en dynamique transitoire en présence de variabilité paramétrique* (thèse de doct.). École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. (Cf. p. 32).
- OUMAZIZ, P. (2017).** *Une méthode de décomposition de domaine mixte non-intrusive pour le calcul parallèle d'assemblages* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 37, 46, 49, 115, 117).
- OUMAZIZ, P., GOSSELET, P., BOUCARD, P.-A. & ABBAS, M. (2018).** A parallel noninvasive multiscale strategy for a mixed domain decomposition method with frictional contact : noninvasive parallel and multiscale mixed domain decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(8), 893-912. <https://doi.org/10.1002/nme.5830> (cf. p. 4, 32, 46)
- OUMAZIZ, P., GOSSELET, P., BOUCARD, P.-A. & GUINARD, S. (2019).** A parallel non-invasive mixed domain decomposition - implementation and applications to mechanical assemblies. *Finite Elements in Analysis and Design*, 156, 24-33. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2019.01.004> (cf. p. 32)
- PASSIEUX, J.-C., LADEVÈZE, P. & NÉRON, D. (2010).** A scalable time–space multiscale domain decomposition method : adaptive time scale separation. *Computational Mechanics*, 46(4), 621-633. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0504-2> (cf. p. 32)
- PRESTON, T., REECE, A. & SANGHA, P. (1988).** Induction motor analysis by time-stepping techniques. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1), 471-474. <https://doi.org/10.1109/20.43959> (cf. p. 16)
- RAPETTI, F. (2000).** *Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints* (thèse de doct.). Université Paris 6. (Cf. p. 16, 17).
- RELUN, N., NÉRON, D. & BOUCARD, P. A. (2013).** A model reduction technique based on the PGD for elastic-viscoplastic computational analysis. *Computational Mechanics*, 51(1), 83-92. <https://doi.org/10.1007/s00466-012-0706-x> (cf. p. 32)
- REN, Z. (1995).** Solving 3d static field problems by dual formulations using potential variables. In A. NICOLET & R. BELMANS (Éd.), *Electric and magnetic fields : from numerical models to industrial applications* (p. 213-216). Springer US. [https://doi.org/10.1007/978-1-4615-1961-4\\_48](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-1961-4_48). (Cf. p. 77)

- REN, Z. (1996). Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3), 655-658. <https://doi.org/10.1109/20.497323> (cf. p. 5, 77, 78, 87)
- REN, Z. (1997). *Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels* (thèse de doct.). Université Paris-Sud. (Cf. p. 67).
- RIHA, L., BRZOBOHATÝ, T. & MARKOPOULOS, A. (2017). Hybrid parallelization of the total FETI solver. *Advances in Engineering Software*, 103, 29-37. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.04.004> (cf. p. 25)
- RIXEN, D. J. & FARHAT, C. (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4), 489-516. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990210\)44:4<489::AID-NME514>3.0.CO;2-Z](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990210)44:4<489::AID-NME514>3.0.CO;2-Z) (cf. p. 21)
- RODGER, D., LAI, C. & LEONARD, J. (1990). Coupled elements for problems involving movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) (cf. p. 5, 17, 115).
- RODRIGUEZ-ITURRA, S., NÉRON, D., LADEVÈZE, P., CHARBONNEL, P. E. & NAHAS, G. (2021). Latin-PGD multi-scale In time for complex fatigue problems In *14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIV) - ECCOMAS Congress 2020*. Paris, France. (Cf. p. 91).
- ROULET, V. (2011). *Stratégie multiparamétrique pour la simulation d'assemblages de structures stratifiées* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 31, 32).
- SAAVEDRA, K., ALLIX, O. & GOSSELET, P. (2012). On a multiscale strategy and its optimization for the simulation of combined delamination and buckling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(7), 772-798. <https://doi.org/10.1002/nme.4305> (cf. p. 31)
- SAAVEDRA, K., ALLIX, O., GOSSELET, P., HINOJOSA, J. & VIARD, A. (2017). An enhanced non-linear multi-scale strategy for the simulation of buckling and delamination on 3d composite plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317, 952-969. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.01.015> (cf. p. 48)
- SAAVEDRA, K. (2012). *Stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage de composites stratifiés* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 31).
- SCANFF, R., NACHAR, S., BOUCARD, P.-A. & NÉRON, D. (2021). A study on the LATIN-PGD method : analysis of some variants in the light of the latest developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 28(5), 3457-3473. <https://doi.org/10.1007/s11831-020-09514-1> (cf. p. 31)
- SCANFF, R. (2022). *Une vision faiblement intrusive de la méthode LATIN-PGD en non-linéaire* (thèse de doct.). Université Paris-Saclay. (Cf. p. 91, 117).

- SCANFF, R., NÉRON, D. & LADEVÈZE, P. (2019). Sur une vision non intrusive de la méthode LaTin-PGD en non linéaire (cf. p. 32).
- SCHOPS, S., NIYONZIMA, I. & CLEMENS, M. (2018). Parallel-in-time simulation of eddy current problems using parareal. *IEEE Transactions on Magnetics*, 54(3), 1-4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2017.2763090> (cf. p. 26)
- SCHWARZ, H. A. (1870). Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft. Zürich.* 272-286. (Cf. p. 3, 8).
- SUGIMOTO, S.-i., OGINO, M., KANAYAMA, H. & YOSHIMURA, S. (2010). Introduction of a Direct Method at Subdomains in Non-linear Magnetostatic Analysis with HDDM In *2010 International Conference on Broadband, Wireless Computing, Communication and Applications*. 2010 International Conference on Broadband, Wireless Computing, Communication and Applications. 304-309. <https://doi.org/10.1109/BWCCA.2010.87>. (Cf. p. 25)
- TAKAHASHI, Y., FUJIWARA, K., IWASHITA, T. & NAKASHIMA, H. (2016). Parallel finite-element analysis of rotating machines based on domain decomposition considering nonconforming mesh connection. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3), 1-4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2477308> (cf. p. 25)
- TAKAHASHI, Y., FUJIWARA, K., IWASHITA, T. & NAKASHIMA, H. (2019). Parallel finite-element method based on space–time domain decomposition for magnetic field analysis of electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 55(6), 1-4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2019.2895590> (cf. p. 26)
- TAKAHASHI, Y., FUJIWARA, K., IWASHITA, T. & NAKASHIMA, H. (2021). Comparison of parallel-in-space-and-time finite-element methods for magnetic field analysis of electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 57(6), 1-4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2021.3064320> (cf. p. 3, 26)
- TALLEC, P. L., ROECK, Y. H. D. & VIDRASCU, M. (1991). Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 34(1), 93-117. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(91\)90150-I](https://doi.org/10.1016/0377-0427(91)90150-I) (cf. p. 20)
- TSUKERMAN, I. (1992). Overlapping finite elements for problems with movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(5), 2247-2249. <https://doi.org/10.1109/20.179458> (cf. p. 17)
- VAUCHEZ, P. (1991). *Simulation numérique des processus de mise en forme par la méthode à grand increment de temps* (These de doctorat). Paris 6. (Cf. p. 31).
- VIOLEAU, D. (2007). *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés* (thèse de doct.). Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 46).

- VITSE, M., NÉRON, D. & BOUCARD, P.-A. (2019). Dealing with a nonlinear material behavior and its variability through PGD models : application to reinforced concrete structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 153, 22-37. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2018.05.006> (cf. p. 31, 32)
- VITSE, M. (2016). *Model-order reduction for the parametric analysis of damage in reinforced concrete structures* (thèse de doct.). Université Paris Saclay (COMUE). (Cf. p. 90).
- WANG, J.-S. & IDA, N. (1993). Curvilinear and higher order 'edge' finite elements in electromagnetic field computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2), 1491-1494. <https://doi.org/10.1109/20.250685> (cf. p. 62)
- WEBB, J. & FORGAHANI, B. (1993). Hierarchical scalar and vector tetrahedra. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2), 1495-1498. <https://doi.org/10.1109/20.250686> (cf. p. 62)
- WHITNEY, H. (1957). *Geometric Integration Theory* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (cf. p. 62).
- WURTZER, F., BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P. & NÉRON, D. (2023). A modular reduced-order modeling strategy for coupled multiphysics problems. 10th International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED 2023). (Cf. p. 31, 91).
- YAO, W., JIN, J.-M. & KREIN, P. T. (2012). A highly efficient domain decomposition method applied to 3-d finite-element analysis of electromechanical and electric machine problems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 27(4), 1078-1086. <https://doi.org/10.1109/TEC.2012.2216528> (cf. p. 26)
- YAO, W., JIN, J.-M. & KREIN, P. T. (2013). A dual-primal finite-element tearing and interconnecting method combined with tree-cotree splitting for modeling electromechanical devices. *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, 26(2), 151-163. <https://doi.org/10.1002/jnm.1848> (cf. p. 26)
- YAO, W., JIN, J.-M., KREIN, P. T. & MAGILL, M. P. (2014). A Finite-Element-Based Domain Decomposition Method for Efficient Simulation of Nonlinear Electromechanical Problems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 29(2), 309-319. <https://doi.org/10.1109/TEC.2014.2303987> (cf. p. 26)
- YAVNEH, I. (2006). Why Multigrid Methods Are So Efficient. *Computing in Science & Engineering*, 8(6), 12-22. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2006.125> (cf. p. 45)