



HAL
open science

Entre normes et réalité industrielle : apports sur la simulation numérique en éolien offshore

Surmont Florian

► **To cite this version:**

Surmont Florian. Entre normes et réalité industrielle : apports sur la simulation numérique en éolien offshore. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Nantes, 2020. Français. NNT : . tel-04578941

HAL Id: tel-04578941

<https://theses.hal.science/tel-04578941>

Submitted on 17 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : Génie Mécanique

Par

Florian SURMONT

« Entre normes et réalité industrielle : apports sur la simulation numérique en éolien offshore »

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 09/01/2020

Unité de recherche : Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique (GEM - UMR CNTS 6183)

Rapporteurs :

Guillaume PUEL
Jean-Baptiste CASIMIR

Professeur des Universités, Ecole Centrale de Paris
Professeur des Universités, Supméca Paris

Composition du Jury :

Président : Franck SCHOEFS
Examineurs : Corinne MIRAL
Christian BERHAULT
Dir. de thèse : Grégory LEGRAIN

Professeur des Universités, Université de Nantes
Maître de Conférences, HDR, Université de Nantes
Docteur, Expert scientifique chez France Energies Marines
Maître de Conférences, HDR, Ecole Centrale de Nantes

Table des matières

Table des matières	ii
Liste des figures	iv
Liste des tables	viii
Liste des abréviations	x
Remerciements	xi
Chapitre 1 : Contexte éolien offshore.....	1
1.1 Point de vue industriel.....	2
1.2 Point de vue normatif.....	4
1.3 Point de vue de la conception.....	7
1.4 Questionnement	10
Chapitre 2 : Etat de l’art général.....	13
2.1 Notion et calcul d’extrême.....	14
2.2 Modélisation numérique d’une éolienne offshore.....	18
2.3 Conclusion	36
Chapitre 3 : La méthode IFORM.....	38
3.1 Etude bibliographique	39
3.2 Présentation de l’étude	50
3.3 Résultats.....	64
3.4 Conclusion	68
Chapitre 4 : La méthode de tir.....	70
4.1 Etude bibliographique	71
4.2 Méthodes de tir appliquées aux fils et aux poutres	79
4.3 Résultats de la méthode.....	117
4.4 Conclusion	154
Chapitre 5 : Conclusion générale.....	156
5.1 Conclusion sur les apports	157
5.2 Conclusion générale sur l’éolien offshore.....	160
Références	161
Annexes	168
Annexe A Scatter diagram considéré pour l’étude IFORM.....	169
Annexe B Formulation analytique des efforts de Morison sur houle irrégulière	170
Annexe C Développement des équations multi-corps/multi-tir	180
Annexe D Résolution des exemples en fil caténaire	184

Annexe E Solutions de RDM.....	189
--------------------------------	-----

Liste des figures

Figure 1 : Exemples de concepts de fondations d'éoliennes offshore (source : Principle Power).....	3
Figure 2 : Processus de conception pour d'une éolienne en pleine mer préconisé par la norme IEC 61400-3 [4].....	5
Figure 3 : Chargements sur une éolienne flottante (source NREL).....	7
Figure 4 : Les phases de conception d'une éolienne offshore en pratique [12].....	9
Figure 5 : Applicabilité des outils numériques selon leur efficacité et précision [12].....	9
Figure 6 : Exemples de contours polygonaux. A gauche en dimension 2, à droite en dimension 3.....	17
Figure 7 : Angles de vues en simulation éolienne.....	19
Figure 8 : Champ d'application de la théorie linéaire [31] (H : hauteur de houle, L : longueur d'onde la houle, 2a : longueur caractéristique de la structure, i.e. le diamètre).....	25
Figure 9 : Nomenclature des poutres selon leurs hypothèses cinématiques [35].....	29
Figure 10 : Comparaison des modèles aérodynamiques [22].....	33
Figure 11 : Comparaison des modèles structurels [22].....	34
Figure 12 : (a) Transformation entre espace physique (Tp – période de pic – et Hs – hauteur significative) et (b) espace gaussien ($u1$ et $u2$).....	42
Figure 13 : Contour IFORM de dimension 2.....	45
Figure 14 : Exemple d'influence de distribution court terme.....	47
Figure 15 : Exemple de contours avec prise en compte de la variabilité court terme.....	49
Figure 16 : Schéma de l'éolienne (gauche) et élément de Morison (milieu et droite).....	51
Figure 17 : Démarche d'étude IFORM.....	51
Figure 18 : Scatter diagram : densité de probabilité et fonction de distribution cumulée.....	54
Figure 19: Ajustement de μ et σ	56
Figure 20 : Loi marginales empiriques et ajustées.....	56
Figure 21 : Quantile empirique-quantile ajusté pour la distribution de Gumbel.....	57
Figure 22 : Dépendance des maxima à Hs et Tp	59
Figure 23 : Monte Carlo réponse extrême.....	60
Figure 24 : Surfaces de réponses long-terme.....	61
Figure 25 : Long-terme – réponse extrême.....	62

Figure 26 : Surfaces de réponses projetées et <i>Hs 3 mois</i>	63
Figure 27 : Contour IFORM et états de mer maximisant	64
Figure 28 : Contour IFORM et iso-réponses	67
Figure 29 : Etats de mer les plus impactant	67
Figure 30 : Illustration de la méthode de tir	76
Figure 31 : Itérations de la méthode de tir	76
Figure 32 : Cinématique de fils	80
Figure 33 : Cinématique de poutre	85
Figure 34 : Algorithme de commutation entre MRP et SMRP	91
Figure 35 : Processus de résolution de la méthode de tir	103
Figure 36 : Illustration de la méthode de multi-tir	107
Figure 37 : Exemple de configuration à trois segments	109
Figure 38 : Chaînes cinématiques multi-corps et tir multiple	110
Figure 39 : Exemple de configuration avec liaison interne	111
Figure 40 : Exemple n°1 : définition d'un segment caténaire simple	119
Figure 41 : Exemple n°1 : solutions caténares rotule-prismatique pour différents ratios c	120
Figure 42 : Exemple n°1 : itérations du Newton	121
Figure 43 : Exemple n°1 : évolution du nombre de points d'intégration par rapport à l'erreur du schéma RKF45	122
Figure 44 : Exemple n°1 : itérations du Newton fonction du nombre de segments	122
Figure 45 : Exemple n°1 : temps de calcul fonction du nombre de segments (ramené au temps d'évaluation pour 1 segment)	123
Figure 46 : Exemple n°2 : convention de signe des efforts selon la direction d'intégration	124
Figure 47 : Exemple n°3 : pression hydrostatique constante sur une membrane cylindrique	127
Figure 48 : Exemple n°3 : multiples solutions de la méthode de tir pour un fil soumis à un effort radial	128
Figure 49 : Exemple n°3 : évolutions de $Cx(\lambda)$ et $Cy(\lambda)$ pour un effort linéique radial	129
Figure 50 : Exemple n°3 : diagramme de phase $Cx(\lambda)$ et $Cy(\lambda)$ fonction des valeurs prises par λ	129
Figure 51 : Exemple n°4 : configuration de l'exemple à trois brins – vue 3D	131
Figure 52 : Exemple n°4 : configuration de l'exemple à trois brins - vue horizontale	132
Figure 53 : Exemple n°4 : positions finales des segments dans le plan x-y	133

Figure 54 : Exemple n°5 : poutre console en flexion pure.....	135
Figure 55 : Exemple n°5 : profils déformés (haut : sans pré-courbure, bas : avec pré-courbure)	137
Figure 56 : Exemple n°6 : poutre fléchie en forme d'hélice.....	138
Figure 57 : Exemple n°6 : déformation en hélice.....	139
Figure 58 : Exemple n°6 : relation force-déplacement	140
Figure 59 : Exemple n°6 : relation force-déplacement zoom.....	140
Figure 60 : Exemple n°6 : relation force-déplacement - comparaison avec [90] Ibrahimbegovic, [92] Battini, [93] Ghosh, [86] Zupan (2003), [94] Makinen et [85] Zupan (2009)	141
Figure 61 : Exemple n°7 : poutre console initialement torsadée.....	143
Figure 62 : Exemple n°8 : poutre console à 45°	144
Figure 63 : Exemple n°8 : poutre console pour $F = 0$ N, $F = 300$ N, $F = 600$ N.....	145
Figure 64 : Exemple n°9 : effort linéique triangulaire (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b).....	146
Figure 65 : Exemple n°10 : poutre simple avec doublement d'inertie (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b).....	148
Figure 66 : Exemple n°10 : effort tranchant (haut gauche), moment fléchissant (haut droite), déflexion (bas).....	149
Figure 67 : Exemple n°10 : évolution du champs de rotation.....	150
Figure 68 : Exemple n°11 : poutre articulée (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b)	150
Figure 69 : Exemple n°11 : déflexion	152
Figure 70 : Exemple n°12 : portique en T (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b)	153
Figure 71 : Exemple de spectre de JONSWAP.....	175
Figure 72 : Variations de ω et $d\omega$ fonction de k	176
Figure 73 : Variations de dk et $d\omega$ fonction de ω	176
Figure 74 : Tirage de phases	176
Figure 75 : Annulation de la vitesse de particule en houle irrégulière à différents instants (gauche : $t = 6.09$ s, milieu : $t = 10.5$ s, droite : $t =$ 11.5 s).....	177
Figure 76 : Modèle de cylindre sur houle irrégulière – intégration discrète vs intégration analytique.....	178
Figure 77 : Evolution du temps de calcul sans annulation de la vitesse de particule.....	178
Figure 78 : Evolution du temps de calcul pour plusieurs solutions de vitesse de particule nulle.....	179
Figure 79 : Equilibre d'un tronçon caténaire	184

Liste des tables

Table 1 : Vue d'ensemble des certificats [5]	6
Table 2 : Outils de modélisation au sein du projet IEA Wind Task 30 : OC4 Phase II [26]	21
Table 3 : Coefficients pour μ et σ	55
Table 4 : IFORM - états de mer maximisant.....	64
Table 5 : Comparaison des résultats sur les extrêmes.....	65
Table 6 : Conditions aux limites pour les fils : champs inconnus et constraints	95
Table 7 : Conditions aux limites pour les poutres : champs inconnus et constraints.....	96
Table 8 : Dualité entre cinématique et statique pour les fils	97
Table 9: Méthode de tir - exemples de validation.....	118
Table 10 : Exemple n°1 : caractéristiques du segment.....	119
Table 11 : Exemple n°1 : erreurs maximales	120
Table 12 : Exemple n°2 : erreurs absolues adimensionnelles à l'extrémité initiale.....	125
Table 13 : Exemple n°2 : erreurs absolues adimensionnelles à l'extrémité finale ...	126
Table 14 : Exemple n°2 : erreurs absolues adimensionnelles maximales le long du tronçon	126
Table 15 : Exemple n°3 : erreurs maximales adimensionnelles.....	130
Table 16 : Exemple n°4 : propriété des segments	132
Table 17 : Exemple n°4 : erreurs adimensionnelles maximale pour chaque tronçon	133
Table 18 : Exemple n°4 : résultats et erreurs sur les paramètres principaux	133
Table 19 : Exemple n°4 : nombre d'éléments issus de l'intégrateur à pas adaptatif.....	133
Table 20 : Exemple n°5 : propriété mécaniques	135
Table 21 : Exemple n°5 : erreurs maximum absolues (pas adaptatif).....	136
Table 22 : Exemple n°5 : erreurs maximum absolues (pas non adaptatif).....	137
Table 23 : Exemple n°5 : nombre d'itérations et points d'intégration	138
Table 24 : Exemple n°7 : propriétés mécaniques.....	143
Table 25 : Exemple n°7 : résultats - comparaison avec l'état de l'art.....	143
Table 26 : Exemple n°8 : propriétés de la poutre.....	144
Table 27 : Exemple n°8 : résultats - comparaison avec l'état de l'art.....	145
Table 28 : Exemple n°11 : erreurs relatives maximales.....	153

Table 29: Scatter diagram n°17 (Global Wave Statistics)	169
---	-----

Liste des abréviations

BEM : Blade Element Momentum
CFD : Computational Fluid Dynamics
EF : Eléments finis
EMR : Energies Marines Renouvelables
FORM : First Order Reliability Method
IEC : International Electrotechnical Commission
IFORM : Inverse First Order Reliability Method
IVP : Initial Value Problem
MRP : Modified Rodrigues Parameters
ODE : Ordinary Differential Equations
PDE : Partial Differential Equations
RNA : Rotor-Nacelle Assembly
SMRP : Shadow Modified Rodrigues Parameters
TPBVP : Two Point Boundary Value Problem
VIV : Vortex Induced Vibrations

Remerciements

Les présents travaux ont été effectués au sein du Département Recherche de Bureau Veritas.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements aux directeurs de recherche qui se sont succédés et qui ont cru en moi : Pierre Besse qui m'a accueilli en 2011 en tant qu'ingénieur hydro-structure et son successeur Quentin Derbanne qui fut tout d'abord mon responsable puis mon directeur de recherche. Merci également aux équipes hydro-structure et hydrodynamique et ancrage qui m'ont accueillie. Un remerciement spécial à Damien Coache, membre de l'équipe hydrodynamique et ancrage, pour les échanges éclairés que nous avons pu avoir ensemble.

Je remercie chaleureusement Grégory Legrain, mon directeur de thèse, rattaché à l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) de l'Ecole Centrale de Nantes, pour m'avoir accompagné durant cette thèse, et pour les échanges fructueux que nous avons eu et ses inestimables conseils.

Mes remerciements vont également aux membres de mon jury, spécialement à M. Franck Schoefs président du jury, ainsi qu'à mes rapporteurs M. Guillaume Puel et M. Jean Baptiste Casimir, qui ont accepté et eu la patience de relire mon manuscrit.

Je remercie l'ensemble de ma famille : mon père, ma mère, mes frères et ma sœur, qui m'ont poussé à me lancer puis m'ont soutenu durant ce projet de thèse. Une pensée particulière pour mon grand-père centenaire, Gabriel, qui fut le premier à avoir une version manuscrite de ce mémoire et avec qui j'ai pu échanger sur son contenu.

Je remercie Alice, ma compagne, pour sa patience extraordinaire, pour m'avoir supporté, et m'avoir aidé à trouver du temps pour m'investir dans ce projet.

Et surtout, merci à toi, Arthur, mon fils, ma petite boule de lumière, pour tous ces moments de joie que tu m'apportes au quotidien.

Chapitre 1 : Contexte éolien offshore

Table des matières

1.1	Point de vue industriel	2
1.2	Point de vue normatif.....	4
1.3	Point de vue de la conception	7
1.4	Questionnement	10

Ce chapitre définit le contexte d'étude des présents travaux sur la simulation éolienne offshore au travers de trois points de vue : celui de l'industrie, celui de la certification et celui de la conception. Au travers de ces trois prismes, nous situons les travaux dans chacun de ces contextes et effectuons un état de l'art général.

1.1 POINT DE VUE INDUSTRIEL

Le contexte sociétal, environnemental et économique actuel pousse les acteurs industriels à se concentrer sur les énergies renouvelables. Par ailleurs, la France dispose de la seconde plus grande zone économique exclusive au monde. Grâce à ce fort potentiel, et afin de respecter une production d'énergies renouvelables fixée par le gouvernement à hauteur de 23% en 2020, puis 32% en 2030, les industriels tendent vers le développement des EMRs (Energies Marines Renouvelables). En 2018, la part des énergies renouvelables en France se situait à hauteur de 22%, équivalent à une puissance d'environ 51 GW. Malgré son potentiel, la contribution des EMR est aujourd'hui nulle alors qu'elle doit représenter 10% du mix énergétique à l'horizon 2030 [1].

Les technologies EMR envisagées à ce jour sont au nombre de sept, par ordre de maturité: l'éolien offshore fixe (ou posé), l'éolien flottant, l'hydrolien, le houlomoteur, le marémoteur, l'énergie thermique des mers et l'osmotique.

L'objectif des PPE (Programmations Pluriannuelles de l'Energie) est fixé à 2.4 GW pour la filière éolienne offshore (posé et flottant) d'ici 2023. Grâce à une meilleure qualité de vent en mer, l'éolien offshore présente l'avantage d'avoir un maximum d'énergie récupérable plus important, une meilleure régularité de récupération de l'énergie et une meilleure survie des machines en fatigue, comparé à son homologue terrestre. Deux obstacles se dressent sur cette transition vers la mer :

- le premier sociétal : les retards s'accumulent en raison de la complexité des procédures administratives et de nombreux recours d'opposants.
- le second économique et technologique : à la différence du secteur Oil & Gas, le coût de l'électricité générée en éolien est plus élevé (en 2018 le LCOE – Levelised Cost Of Electricity – se situe entre 75 et 138€/MWh pour l'éolien posé et estimé entre 108 et 172€/MWh pour l'éolien

flottant, contre 46 à 100€/MWh pour des sources fossiles [2,3]). La transition entre les technologies éoliennes se fait autour de 50 m de profondeur, au-delà de laquelle les coûts de production de l'éolien fixe dépassent ceux du flottant.

L'éolien offshore fixe et flottant peut disposer du retour d'expérience du secteur Oil & Gas sur chaque type de plateforme en gardant à l'esprit que les systèmes éoliens sont de natures différentes vis-à-vis des plateformes pétrolières. D'une part, les éoliennes offshore sont pour l'instant installées en eaux peu profondes, entraînant des cinématiques de houle non-linéaires. D'autre part, et c'est le but, les efforts aérodynamiques souvent négligés en Oil & Gas ont un impact important sur la structure de ces systèmes éoliens. De plus, pour le cas flottant, les masses de flotteurs mises en jeu sont beaucoup plus faibles, pouvant entraîner des couplages dynamiques entre flotteur et système d'ancrage. Si on allie ce contexte technologique au contexte économique, afin d'obtenir une énergie compétitive, **le secteur éolien ne peut se permettre de largement sur-dimensionner les plateformes comme cela peut être le cas dans l'industrie pétrolière.**

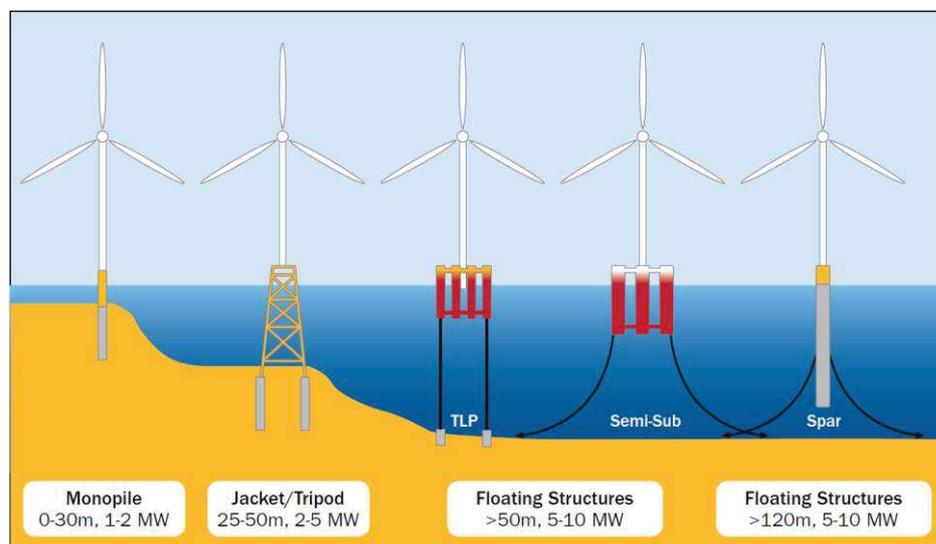


Figure 1 : Exemples de concepts de fondations d'éoliennes offshore (source : Principle Power)

1.2 POINT DE VUE NORMATIF

Les éoliennes offshore sont conçues pour des durées de vie de 20 ans [4]. La notion de dimensionnement au plus juste est extrêmement liée au cadre normatif qui va contraindre la conception de l'éolienne à respecter un ensemble de critères afin de s'assurer de la survie du système. Il est à noter que contrairement à la réglementation, une norme (ou un standard) n'a pas de caractère obligatoire, elle servira à normaliser (standardiser) le produit ou le service. Le suivi d'une norme traduit l'engagement d'une entreprise à satisfaire un niveau de qualité et de sécurité reconnu et approuvé. Dans la pratique, la certification d'un service ou d'un produit auprès d'une norme est fortement recommandée car le produit ou service est reconnu comme suivant les règles issues d'un consensus entre les parties intéressées. Cela facilite ainsi les échanges entre les utilisateurs, constructeurs, exploitants, investisseurs et tout autre acteur autour du produit ou service.

Le processus de certification consiste en l'application de réglementations ou de normes nationales et internationales pouvant donner lieu à la délivrance d'un certificat. Pour les EMR, différents certificats peuvent être émis selon le type de produit comme indiqué en Table 1 [5]. Les phases d'évaluation des conditions de chargement et d'évaluation de la conception indiquées dans ce tableau consistent à examiner si l'unité est conçue en conformité avec les hypothèses de conception et les standards en vigueur, principalement sur la base de notes de calcul issues de simulations numériques. Durant cette évaluation, l'organisme de certification pourra être à même d'effectuer des analyses numériques indépendantes.

Dans le cas des éoliennes offshore (fixes ou flottantes) la norme de référence concernant les exigences de conception est l'IEC 61400-3 [4] développée par l'IEC (International Electrotechnical Commission). A partir de cette norme, les entreprises de certification ont basé leurs propres recommandations ou normes [6,7,8,9,10] afin d'y intégrer leur expertise particulière.

Les cas de charge pour la conception d'une éolienne offshore sont spécifiés dans l'IEC 61400-3 au niveau de l'étape « Calcul de charge et effets de charge » du processus de conception préconisé par la norme et présenté en Figure 2. Ces cas font office de données d'entrées aux modèles numériques pour la vérification de la conception en fatigue et en extrême, ils seront retrouvés presque à l'identique dans toutes les recommandations ou normes des entreprises de certification. Ils couvrent

l'ensemble des cas de chargement jugés défavorables, cas correspondant à des points de design et qui constituent un set minimum de paramètres environnementaux à imposer. Pour les études extrêmes, ces cas de chargements définissent une « enveloppe » censée représenter de façon exhaustive les conditions qui seront rencontrées par le système.

Un concepteur devra donc vérifier la bonne tenue de l'éolienne à toutes ces conditions de chargement, notamment au travers de simulations numériques.

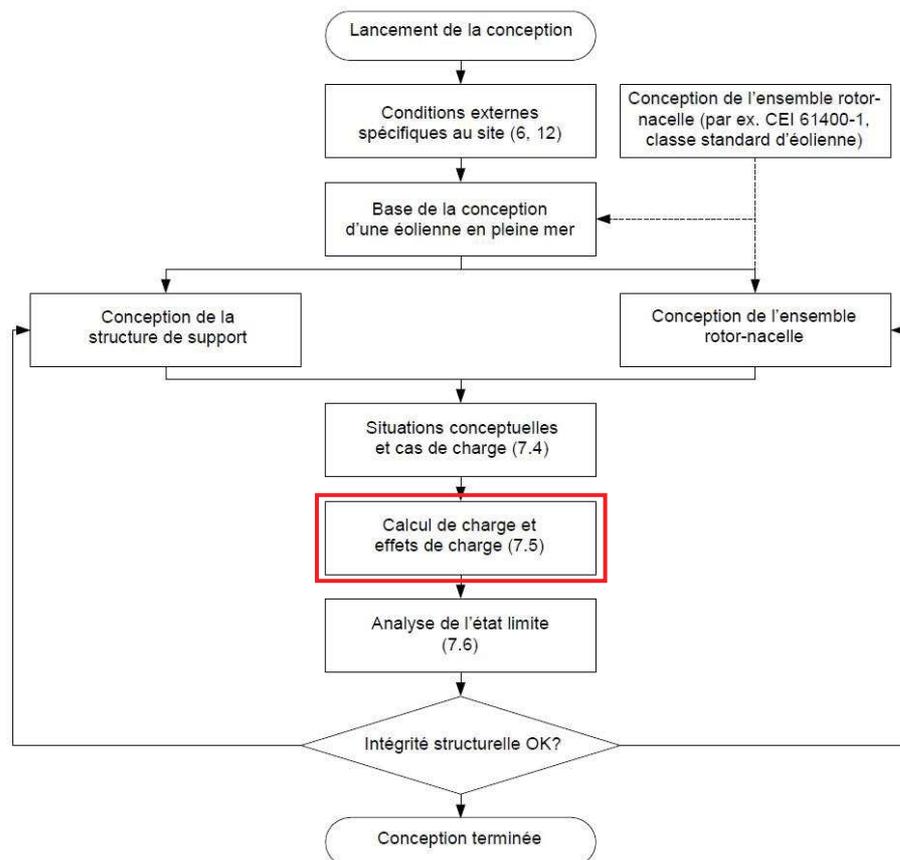


Figure 2 : Processus de conception pour d'une éolienne en pleine mer préconisé par la norme IEC 61400-3 [4]

Phases		Certificats				
Phase du cycle de vie du produit	Phase de certification	AIP ¹	Certificat de prototype	Certificat de composant	Certificat de type	Certificat de projet
Développement ²	Evaluation des risques	X	X		X	X
	Base de conception		X		X	X
	Conditions de chargement ²					X
	Evaluation de conception ²			X	X	X
Construction	Fabrication		X	X	X	X
	Surveillance du transport et de l'installation					X
Opération et maintenance	Tests		X	X	X	
	Surveillance de mise en service		X			X
	Mesures caractéristiques				X	X

Table 1 : Vue d'ensemble des certificats [5]

¹ Approval In Principal : approbation de principe

² Phases nécessitant des simulations numériques modélisant la physique du système EMR

1.3 POINT DE VUE DE LA CONCEPTION

Une éolienne offshore est soumise aux principaux phénomènes extérieurs suivants : la gravité, le vent (l'aérodynamique) autour des parties émergées, la houle et le courant (l'hydrodynamique) autour des parties immergées (Figure 3). A cela se rajoute la prise en compte d'un contrôle commande pilotant les éléments mobiles comme la nacelle et les pales. Les données environnementales de vent, de houle et de courant sont représentées sous forme de distributions jointes respectivement entre les paramètres de vitesse moyenne (3D) et écart type de turbulence ; hauteur significative, période de pic et direction, ainsi que vitesse moyenne (3D) et direction.

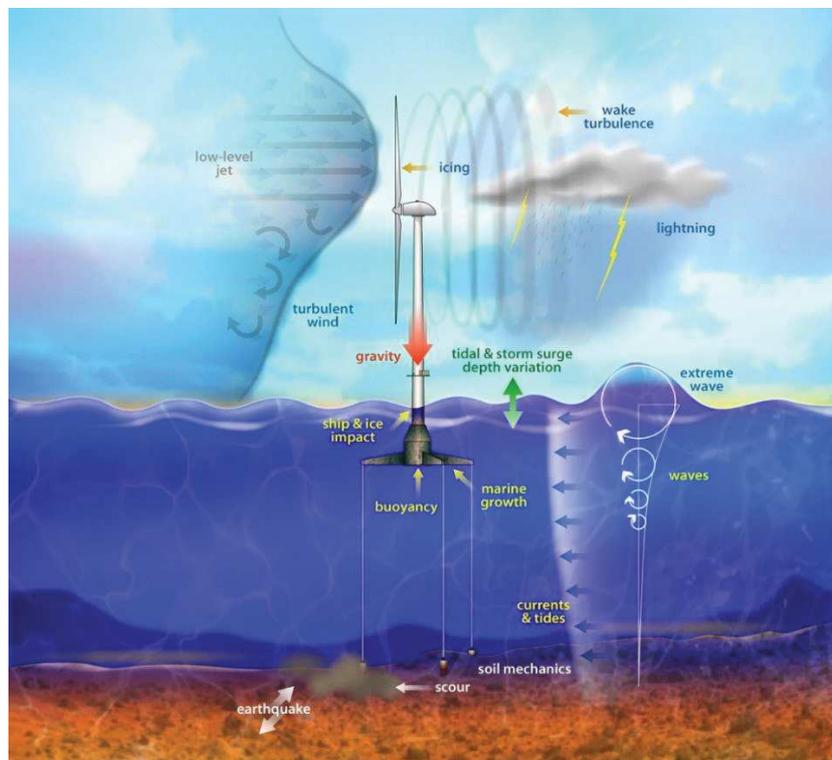


Figure 3 : Chargements sur une éolienne flottante (source NREL)

La conception d'une éolienne se déroule généralement en trois grandes phases : la phase de conception du concept (concept design), la phase de conception de base (basic design) et la phase de conception détaillée (detailed design) comme indiqué en Figure 4.

La première phase de conception consiste à déterminer les grandes caractéristiques du système (répartition de masses, dimensions globales, etc.) sur la

base de chargements estimés, car dans cette phase les données météocéan ne sont pas connues en général.

Dans la seconde phase, les données macroscopiques comme les mouvements, les vitesses, les accélérations du centre de gravité de l'éolienne ou encore les efforts (contraintes intégrées) transitant dans les éléments structurels élancés (structure et ancrage), sont recherchées sur la base des distributions de paramètres environnementaux [11]. C'est dans cette phase que sont réalisées des simulations temporelles couplées, et que sont effectués les calculs en extrême et en fatigue. Les données macroscopiques calculées sont utilisées à la fois pour la phase de conception de base, mais aussi pour la phase de conception détaillée, pour alimenter les modèles locaux aux interfaces.

En phase de conception détaillée, il est nécessaire d'aller chercher les contraintes locales afin de dimensionner les éléments structurels déformables (structure et ancrage). Dans ce cas, les phénomènes aérodynamiques et hydrodynamiques peuvent être modélisés plus finement au travers de modèles CFD (Computational Fluid Dynamics) pour estimer les pressions locales à appliquer sur des modèles EF (Eléments Finis) fins [12]. Les temps de calcul de ces types d'analyses peuvent être compatibles pour un nombre réduit de conditions de chargement extrêmes, mais ne sont pas adaptés à des calculs en fatigue.

Ainsi chaque degré de finesse nécessite des outils numériques différents pour faire le lien entre une caractérisation générale des environnements sous forme de distributions jointes multivariées, et la détermination de données locales comme des contraintes ou des pressions. La Figure 5 résume le lien entre vitesse et temps de calcul des outils en fonction de leur positionnement dans la chaîne de conception.

La matrice des cas de chargement à vérifier recommandée par les standards intervient à partir de la phase de conception de base jusqu'à la conception détaillée. La méthodologie itérative associée au fait que les standards imposent de nombreux cas de chargement à simuler indépendamment des méthodes de calcul utilisées implique que le processus de conception est long et coûteux car il n'existe pas de solution toute intégrée.

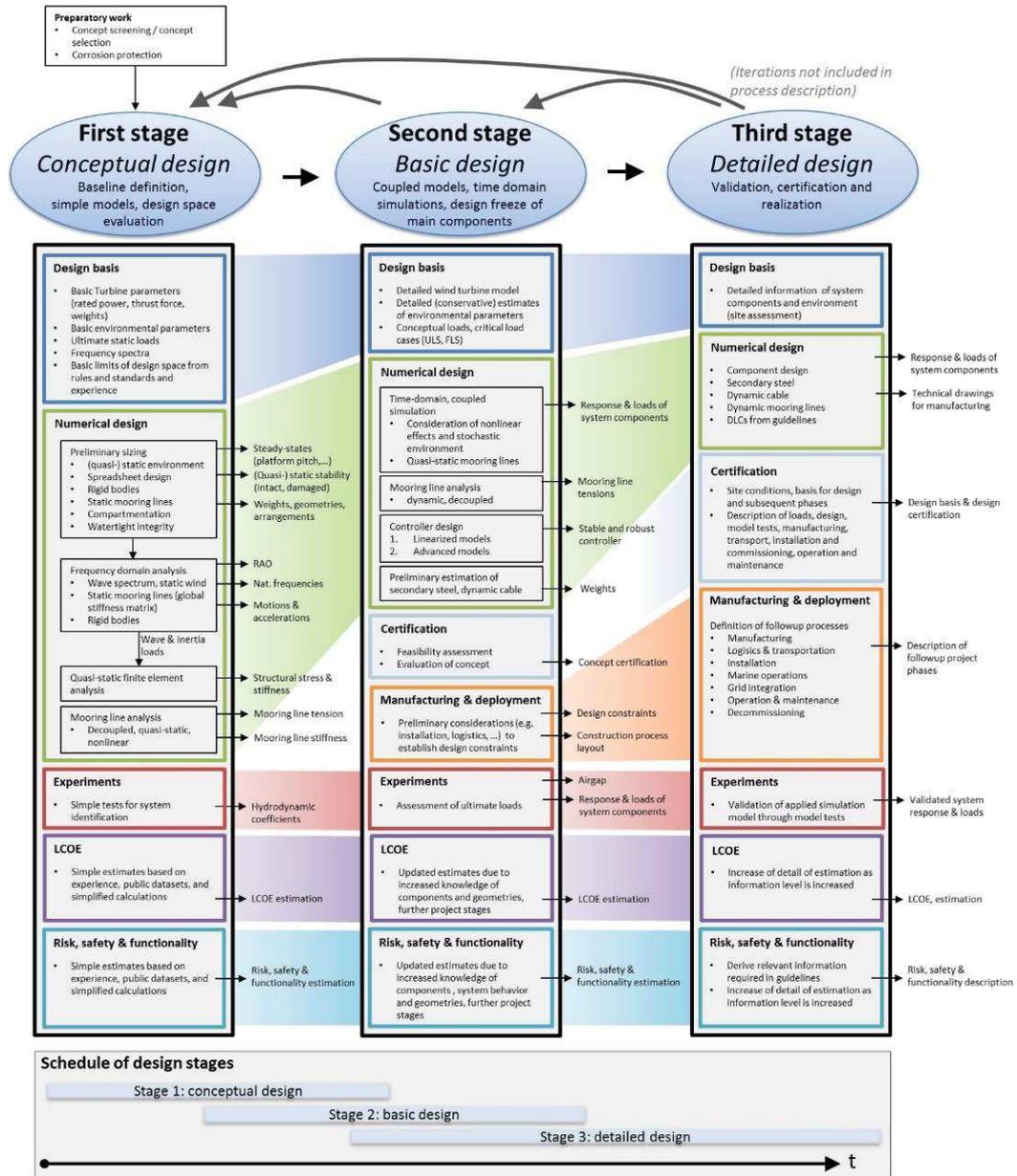


Figure 4 : Les phases de conception d'une éolienne offshore en pratique [12]

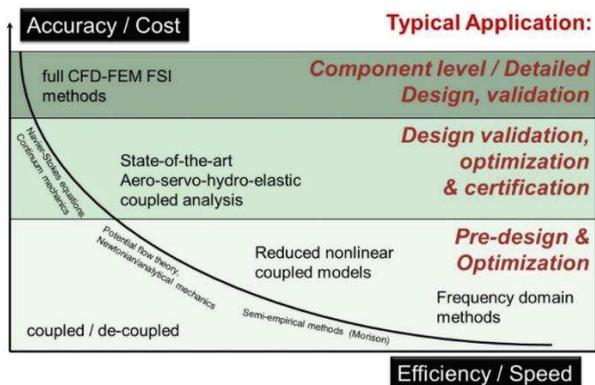


Figure 5 : Applicabilité des outils numériques selon leur efficacité et précision [12]

1.4 QUESTIONNEMENT

L'un des problèmes récurrents dans le domaine éolien flottant est donc la compatibilité entre les exigences élevées des standards sur le nombre de cas de chargement à simuler (dû au manque de recul dans le domaine), et la réalité de capacité de simulation industrielle (longue et coûteuse).

Deux voies peuvent être suivies : la première consiste à mettre à jour les standards pour épurer le nombre de cas de chargement à simuler. La norme ayant un rôle de garde-fou basé sur un retour d'expérience, il est nécessaire de générer cette expérience au travers de la recherche pour pouvoir effectuer ce type de mise à jour. Ce qui amène à la seconde voie qui consiste à trouver des méthodologies de conception et/ou de simulation permettant de faire un lien plus rapide entre les paramètres environnementaux et les valeurs dimensionnantes. C'est donc cette piste qui est investiguée dans ce mémoire.

Il apparaît donc nécessaire de construire les éléments méthodologiques pour la simulation d'une éolienne offshore (fixe ou flottante) afin de répondre aux exigences des standards tout en restant compétitif industriellement d'un point de vue des temps de la conception, et donc de la simulation. De ce constat très général, deux questionnements peuvent être posés :

- Tout d'abord, comment faire un lien méthodologique plus direct entre la caractérisation des paramètres environnementaux sous forme de variables aléatoires, et les modèles de simulation hydrodynamique en CFD, coûteux en temps de calcul, pour simuler les cas de chargement en réponse extrême d'une éolienne offshore imposés par les standards ? En effet, la houle est un phénomène caractérisé par des variables aléatoires de hauteur significative H_s et période de pic T_p . Un standard imposera l'étude de plusieurs configurations de paramètres environnementaux amenant à une réponse extrême, où chaque configuration nécessitera plusieurs dizaines de simulations pour évaluer de façon convergée la réponse. Les méthodes industrielles issues de l'Oil & Gas, actuellement utilisées pour l'évaluation des efforts hydrodynamiques sur des structures marines soumises à la houle, sont aujourd'hui largement validées et éprouvées pour des géométries

simples et dans des conditions de faible houle (grande profondeur, cambrure de vague faible). Cependant, ces méthodes deviennent imprécises lorsque les conditions de houle s'amplifient, et que des non-linéarités importantes apparaissent. L'utilisation de la CFD peut permettre d'améliorer la précision des chargements obtenus dans ces conditions extrêmes. Cependant le lien entre les nombreux cas de chargement imposés par les standard et les outils de simulation longs de type CFD (plusieurs dizaine d'heure pour simuler un état de mer) rend extrêmement coûteux industriellement l'étude de systèmes éoliens offshore. La valeur extrême d'un paramètre de dimensionnement est classiquement estimée à partir des valeurs des réponses aux conditions extrêmes d'états de mer, associées à une période de retour donnée. L'approche présente donc plusieurs défauts qu'il faut résoudre :

- La valeur extrême de la réponse n'est pas nécessairement donnée par la réponse engendrée en maximisant uniquement les paramètres caractérisant l'état de mer (en général le H_s).
- La période de retour est associée le plus souvent à la seule valeur du H_s (à laquelle sont associées des valeurs des autres paramètres de caractérisation de l'état de mer : T_p , direction, H_{max} , ...) plutôt qu'à la réponse elle-même.
- Tous les paramètres dimensionnants (efforts dans le sens de propagation et moment fléchissant par exemple) ne répondent pas aux mêmes combinaisons des paramètres d'environnement.
- Les probabilités jointes des différents paramètres de caractérisation de l'environnement ne sont pas ou mal prises en compte (H_s , T_p , direction houle, vitesse courant et direction, vitesse vent et direction).
- Ensuite, comment améliorer les performances d'une simulation globale d'éolienne offshore afin de conserver un ratio temps de calcul/précision compétitif industriellement ? Une éolienne flottante est soumise à de nombreux phénomènes : aérodynamiques, déformations structurelles, impact d'un contrôle commande, hydrodynamique, ancrage. Compte tenu du nombre de ces phénomènes couplés, les outils de simulation de comportement d'une éolienne flottante [13] se sont dirigés vers la simulation temporelle directe. Ces outils montrent des temps de calcul au

mieux de l'ordre de 1 pour 1 (1 seconde simulée en 1 seconde). Le calcul de la réponse extrême statistiquement convergée sur un état de mer complètement développé de 3h pourra nécessiter jusqu'à 20 simulations de cet état de mer. Dans ces conditions, les temps cumulés de calculs explosent lorsque des plages de paramètres environnementaux doivent être balayées. Le calcul d'une réponse en fatigue est usuellement effectué à partir d'un calcul d'endommagement issu de comptage Rainflow, qui nécessite également des centaines d'heures à simuler. Ces temps de calcul sont trop importants d'un point de vue industriel pour des études de conception de base.

Chapitre 2 : Etat de l'art général

Table des matières

2.1	Notion et calcul d'extrême.....	14
2.2	Modélisation numérique d'une éolienne offshore	18
2.2.1	L'aérodynamique.....	22
2.2.2	L'hydrodynamique	23
2.2.3	La structure.....	26
2.2.4	Discussion finale sur les phénomènes physiques	32
2.3	Conclusion.....	36

Ce chapitre effectue un état de l'art général des méthodes pour chacune des deux questions posées en fin de chapitre précédent. La section 2.1 se concentre sur une revue des méthodes de calcul de la réponse extrême en introduction à la problématique de lien entre paramètres environnementaux et calculs CFD. La section 2.2 se concentre sur les méthodes numériques utilisées en éolien offshore en introduction aux travaux sur les performances de simulation globale d'une éolienne offshore.

2.1 NOTION ET CALCUL D'EXTREME

Comme vu dans le chapitre précédent, les données d'entrée du problème sont les variables d'environnement, caractérisées sous forme de distributions de probabilité jointes. Les modèles de calculs sont quant à eux des modèles déterministes utilisés afin d'obtenir une réponse extrême du système.

La notion d'extrême est définie comme la valeur maximale de la réponse étudiée survenant pendant toute la durée de vie (20 ans) de l'éolienne. Cette valeur extrême « long terme » est à contrebalancer avec la valeur extrême « court terme » qui est la valeur maximale de la réponse étudiée sur un unique état environnemental (combinaison vagues, vent et courant) d'une durée limitée (10 minutes pour du vent, 3 heures pour de la houle). Cette section se concentre sur le calcul des valeurs extrêmes long terme. La terminologie « long-terme » ou « court terme » peut également être liée à l'approche plutôt qu'à la définition de l'extrême. Dans ce cas, une « approche long-terme » imposera une quantité importante de simulations ou des simulations longues alors qu'une « approche court-terme » entrainera un nombre de simulations limité.

La vérification d'une structure aux sollicitations extrêmes se fait généralement sur un nombre limité de cas de chargements. Il est important de prendre en compte que la notion d'extrême est reliée aux paramètres de réponses de la structure (mouvement, accélération, effort, contrainte, dépassement de la limite élastique...). Ici on s'intéresse aux effets des chargements sur le système plus qu'aux chargements en eux-mêmes. A partir du moment où les conditions environnementales sont aléatoires (états de mer, vent...) le calcul des réponses extrêmes d'une structure devrait prendre en compte l'ensemble des conditions possibles et les probabilités associées. Cependant, les méthodologies de conception n'utilisant pas d'approche fiabiliste, il est usuel de rechercher des combinaisons des paramètres d'environnement (couples H_s , T_p , V_{wind}

par exemple) correspondant à des conditions considérées comme extrêmes, puis de rechercher la réponse à ces conditions. C'est une approche de type point de conception, qui est en général considérée par les standards, dont l'IEC 61400-3 [4].

Afin de résumer les approches directes aboutissant à la détermination d'un extrême pour le calcul long terme en hydro-structure marine [14], nous pouvons les classer du plus coûteux au moins coûteux :

- **Simulation directe** : la simulation directe consiste à calculer toutes les conditions de chargements qui seront subies par le système tout au long de sa durée de vie. Du fait du nombre de simulation extrêmement important, les modèles non-linéaires ne sont pas envisageables. L'approche de Monte Carlo que nous utiliserons plus tard fait partie de cette classe.
- **Approche long-terme** : l'approche long-terme est une approche probabiliste. Elle consiste à calculer la surface de réponse déterministe de la structure en fonction des paramètres stochastiques caractérisant les conditions (état de mer, vent, courant) susceptibles d'être rencontrées pendant la vie de l'unité. Cette surface de réponse sert ensuite à calculer la distribution de réponse pour en tirer la valeur à un quantile particulier [15]. De manière pratique, cette approche est faisable uniquement dans le cas où le modèle de la réponse est suffisamment simple (modèle linéaire par exemple) pour pouvoir effectuer les simulations dans un temps raisonnable.
- **Approche long terme de surface de réponse stochastique** : C'est un dérivé de la méthode long terme où la surface de réponse est approximée par un modèle analytique. On dispose alors d'un métamodèle au coût de calcul négligeable qui peut avantageusement se substituer au modèle déterministe d'origine dans toute méthode probabiliste. Des méthodes permettant de qualifier les incertitudes comme la méthode projection sur le chaos polynomial [16] ou de collocation stochastique [17] font partie de cette approche. La difficulté de ces méthodes réside dans le bon calage du modèle analytique pour représenter une réponse non-linéaire globale.
- **Approche court-terme de conditions d'enveloppe (IFORM)** : cette méthode se base sur une spécialisation de la méthode de surface de réponse

stochastique lorsque la réponse est approximée par une fonction d'ordre 1 (FORM). Grâce à la connaissance des distributions conjointes de probabilité des variables environnementales, l'application d'une méthode IFORM (Inverse First Order Reliability Method) [18] permet de définir un ensemble d'environnements extrêmes court-terme, appelé contour ou enveloppe, pour une période de retour donnée (20 ans en éolien [4]). Le maximum des réponses court-terme sur cette enveloppe correspond au maximum long-terme recherché. Cette approche a l'avantage d'être facile à mettre en œuvre et permet de limiter le nombre de cas à prendre à simuler. Contrairement aux approches long-terme, elle ne donne pas d'indication sur la distribution de réponse.

- **Approche court-terme : paramètre de charge dimensionnant.** cette approche repose sur le choix a priori d'un certain nombre de paramètres de charge, supposés fortement corrélés à la réponse recherchée de la structure [14]. Cela nécessite de bien évaluer la dépendance de la réponse structurelle vis-à-vis de ces paramètres de charge (moment fléchissant, effort tranchant, accélération, pression locale, etc.). Cette méthode repose sur le fait que les paramètres de charge choisis sont plus faciles à calculer que la réponse structurelle elle-même, et qu'il est ainsi possible d'utiliser une méthode long-terme pour d'une part calculer la valeur extrême de chacun de ces paramètres de charge, et d'autre part définir la condition extrême (état de mer, direction, vent...) qui leur est associée. Il reste alors à calculer la réponse court-terme pour chacune des conditions identifiées et de ne retenir que la valeur maximale.
- **Approche par vague de design :** dans le secteur naval, cette méthode consiste à limiter les calculs à un nombre restreint de vagues de design équivalentes à une combinaison de (H_s, T_p) [19]. Cette approche est une simplification de la méthode précédente et, comme elle, s'appuie sur le choix a priori d'un certain nombre de paramètres de charge. Chaque état de mer de design identifié avec la méthode précédente est alors réduit à une simple vague (régulière), ou un groupe de quelques vagues (irrégulières) définies de manière à ce que la réponse du paramètre de charge dimensionnant atteigne sa valeur long-terme. Cette approche présente

l'avantage de limiter le nombre de simulations numériques. Par contre, la détermination de la vague de design peut être complexe car elle nécessite une bonne connaissance de l'évolution du paramètre dimensionnant.

- **Approche réglementaire navire : cas de chargement réglementaire :** la dernière simplification est celle effectuée dans les règlements, où un certain nombre de cas de chargements sont définis [4]. Comme pour l'approche vague de design, chaque cas de chargement est construit pour maximiser l'un des paramètres de charge dimensionnant. Les valeurs des charges (pression, efforts, accélération) sont alors données par des formules simplifiées, et seul un calcul de structure est nécessaire. Cette façon de procéder suppose que la réponse extrême est pilotée (corrélée) principalement par l'un ou l'autre des paramètres environnementaux. Cette approche peut être vue comme un dérivé de l'approche court terme IFORM pour laquelle seuls quelques points du contour (points de conception ou contour polygonal de la Figure 6) ont été sélectionnés sur la base d'une connaissance suffisamment approfondie de la surface de réponse.

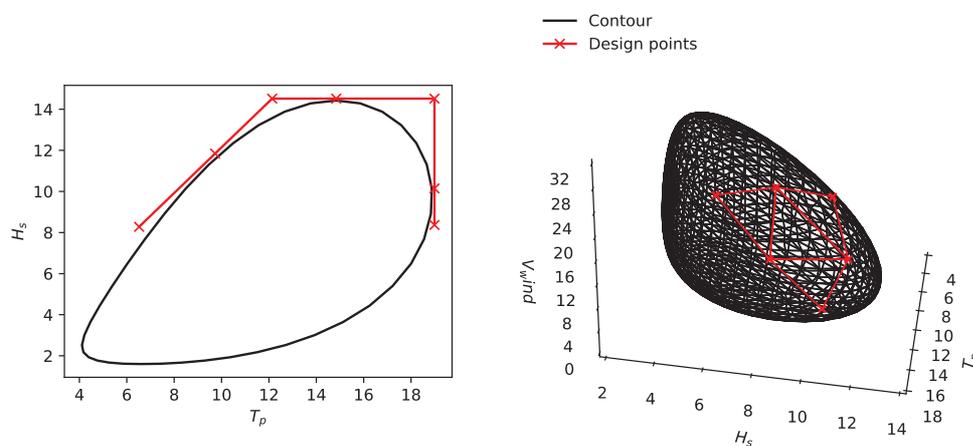


Figure 6 : Exemples de contours polygonaux. A gauche en dimension 2, à droite en dimension 3

Dans le but de sélectionner l'une ou l'autre approche, il est nécessaire de rappeler que les surfaces de réponses d'efforts structurels extrêmes en éolien offshore issues de calculs CFD hydrodynamiques non-linéaires sont mal connues globalement. Les temps de calcul importants nécessaires pour obtenir ces efforts sur une seule condition environnementale ne permettent pas à l'heure actuelle la réalisation de calcul CFD sur

un état de mer complet, et encore moins une approche long-terme. Dans une optique d'aide au dimensionnement, il faut donc s'assurer que l'état de mer simulé en CFD corresponde bien à l'effort extrême obtenu sur la structure pour toutes les conditions environnementales rencontrées.

Pour répondre au questionnement sur comment établir un lien entre la caractérisation de plusieurs paramètres environnementaux sous forme de variable aléatoire et des réponses extrêmes calculées via CFD, nous envisageons la piste de la méthode IFORM. Cette méthode permet d'effectuer le calcul d'une réponse extrême tenant compte d'un nombre quelconque de variables aléatoires et est la seule à pouvoir identifier les combinaisons de paramètres conduisant à cet extrême.

Dans un premier temps, il s'agira de vérifier le champ d'application de la méthode IFORM sur le calcul d'une réponse extrême issue d'un chargement non-linéaire qui est fonction des variables aléatoires d'environnement.

Dans un second temps, il s'agira d'identifier la combinaison de paramètres environnementaux conduisant à la réponse extrême afin qu'elle soit rejouée en CFD. Deux réponses seront étudiées : l'effort et le moment interne d'un mât d'éolienne fixe soumis à une houle paramétrée par des valeurs de hauteur significative et période de pic. Un modèle d'intégration analytique des efforts de Morison [20] sur houle irrégulière sera développé à titre de modèle de simulation.

2.2 MODELISATION NUMERIQUE D'UNE EOLIENNE OFFSHORE

Le but de cette section est d'effectuer un tour d'horizon des possibilités de simulation en éolien offshore offertes par l'état de l'art afin d'en tirer une problématique spécifique à l'amélioration des modèles. A cette fin, nous effectuerons une analyse qualitative des approches et modèles les plus gourmands en temps de calcul. Nous déterminerons ainsi les voies d'amélioration du ratio temps de calcul/précision dans le but de rester compatible avec la simulation de l'ensemble des cas de chargements préconisés par les normes éoliennes.

La simulation d'une éolienne offshore peut être envisagée sous différents angles de vue que nous allons détailler : celui du projet, celui des systèmes et celui des phénomènes physiques (Figure 7).

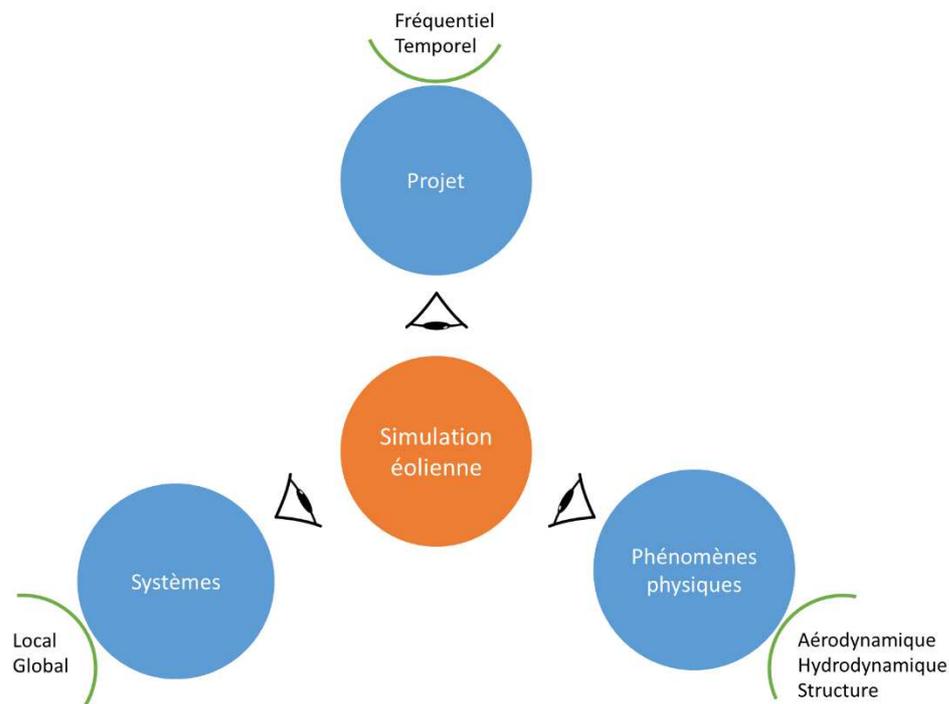


Figure 7 : Angles de vues en simulation éolienne

Selon l'angle projet, deux principaux axes sont privilégiés dans la littérature [10] : les outils fréquentiels, qui sont utilisés en phase de conception du concept, et les outils temporels pour les phases de conception du design de base et détaillé.

L'analyse fréquentielle permet de résoudre les équations du mouvement linéarisées en utilisant des analyses harmoniques ou des méthodes de transformées de Laplace et de Fourier. Une fois les calculs de fonctions de transfert réalisés, les coûts de calculs sont presque nuls. Cette méthodologie permet un premier dimensionnement du flotteur pour placer ses fréquences propres en dehors des fréquences de houle et du vent, sans rendre compte de phénomènes transitoires ni des chargements et interactions non linéaires entre composants. Cette approche n'est donc utilisée qu'en phase de conception du concept (Figure 4) pour laisser la place à des analyses temporelles pour les phases suivantes.

L'analyse temporelle permet de tenir compte de l'ensemble des effets non linéaires dynamiques et transitoires (efforts de traînée visqueux, VIV, ancrages non-linéaires, contrôle commande, couplage RNA/tour/structure support, etc.). C'est cette méthode qui est retenue par l'état de l'art pour la modélisation globale d'une éolienne. Ce type d'approche est nécessairement plus long que les analyses fréquentielles.

Selon l'angle système, deux catégories s'ouvrent : les outils de modélisation locaux et globaux. Les modèles locaux servent à affiner le dimensionnement de l'éolienne grâce à des modèles précis mais coûteux (CFD, EF 2D ou 3D [21,22]) en phase de conception détaillée. Ces approches étant trop coûteuses pour être utilisées industriellement, nous ne les détaillerons pas ici. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet peut se reporter aux références [21,23] pour une description détaillée de l'utilisation de la CFD pour la conception d'un rotor et de son sillage, et la référence [24] dans laquelle les auteurs viennent comparer plusieurs approches CFD pour l'évaluation des charges hydrodynamiques sur un pieu d'éolienne fixe et un flotteur ancré. Pour les modèles EF 2D et 3D la référence [22] fournit un état de l'art sur l'utilisation de ces méthodes pour la modélisation aéroélastique de pales d'éoliennes.

Les outils de simulation globaux, plus rapide moyennant des hypothèses sur les modèles, sont ceux utilisés en synergie avec l'ensemble des cas de charges normatifs définis par les normes [4] à l'échelle industrielle.

Les différents logiciels comparés dans les projets internationaux OC3 [25], OC4 [26], OC5 [13,27] et actuellement OC6, portés par le NREL (National Renewable Energy Laboratory), sont à l'état de l'art au niveau industriel en ce qui concerne la modélisation du comportement global d'une éolienne offshore. Les projets OC3 et OC4 se sont focalisés sur la comparaison code à code de modèles d'éoliennes onshore et offshore. Les résultats des comparaisons effectuées dans ces projets n'ont pas permis de déterminer quelle approche était la plus précise. Les projets OC5 et OC6 ont vu le jour dans le but d'introduire des essais au réel à des fins de comparaison avec les modèles numériques des précédents projets. Les principaux codes comparés dans OC4 ainsi que leurs approches théoriques sont résumés dans la Table 2.

Nous effectuerons une analyse plus détaillée de chaque approche dans les sous-sections suivantes, mais nous pouvons tout d'abord déduire de ce comparatif que la BEM (Blade Element Momentum) avec ses corrections [28] est la méthode la plus largement utilisée pour la modélisation des efforts aérodynamiques.

Ensuite, les efforts hydrodynamiques sont modélisés soit au moyen de la théorie potentielle (théorie de la diffraction-radiation), soit via le modèle de Morison [20], soit le plus souvent par une combinaison des deux.

Code	Code Developer	OC4 Participant	Structural Dynamics	Aerodynamics	Hydrodynamics	Mooring Model
FAST	NREL	NREL, CEN-TEC, IST, Goldwind, CSIC	T: Mod/MB P: Rigid	(BEM or GDW)+DS	PF+QD	QS
FAST v8	NREL	NREL	T: Mod/MB P: Rigid	(BEM or GDW)+DS	PF+ME	QS
CHARM3D+FAST	ABS+NREL	ABS	T: Mod/MB P: Rigid	(BEM or GDW)+DS	PF+ME+(MD+NA)+(IP+IW)	FE/Dyn
OPASS+FAST	CENER+NREL	CENER	T: Mod/MB P: Rigid	(BEM or GDW)+DS	PF+ME	LM/Dyn
UOU+FAST	UOU+NREL	Univ. of Ulsan	T: Mod/MB P: Rigid	(BEM or GDW)+DS	PF+QD	QS
Bladed	GH	GH, CGC, POSTECH	T: Mod/MB P: MB	(BEM or GDW)+DS	ME+(IW+IP)	QS
Bladed Adv Hydro Beta	GH	GH	T: Mod/MB P: MB	(BEM or GDW)+DS	PF+ME+(IW)	QS
OrcaFlex	Orcina	4Subsea	T: FE P: Rigid	BEM, GDW, or FDT	PF+ME	LM/Dyn
HAWC2	Risø-DTU	DTU	T: MB/FE P: MB/FE	(BEM or GDW)+DS	ME	FE/Dyn
hydro-GAST	NTUA	NTUA	T: MB/FE P: MB/FE	BEM or FWV	PF+ME+(IP)	FE/Dyn
Simo+Riflex+AeroDyn	MARINTEK+NREL	CeSOS	T: FE P: FE	(BEM or GDW)+DS	PF+ME	FE/Dyn
Riflex-Coupled	MARINTEK	Marintek	T: FE P: Rigid	BEM+FDT	PF+ME+(IW)	FE/Dyn
3Dfloat	IFE-UMB	IFE	T: FE (co-rotated) P: FE	BEM+FDT	ME+(IW)	FE/Dyn
SWT	LMS	LMS-IREC	T: FE+Mod/MB P:FE+Mod/MB	BEM or GDW	ME+(IW)	FE/Dyn
DeepLinesWT	PRINCIPIA-IFPEN	PRINCIPIA	T: FE P: FE	BEM	PF+ME+(IW)	FE/Dyn
SIMPACK+HydroDyn	SIMPACK	SWE	T: Mod/MB P: Rigid	BEM or GDW	PF+QD	QS
CAst	Univ. of Tokyo	Univ. of Tokyo	T: FE W: FE	BEM	ME	QS
Wavec2Wire	WavEC	WavEC	T: N/A P: Rigid	N/A	PF+QD	QS
WAMSIM	DHI	DHI	T: N/A P: Rigid	N/A	PF+QD	QS
T = Turbine P = Platform Mod = Modal MB = Multi-Body FE = Finite Element N/A = Not Applicable		BEM = Blade-Element/Momentum GDW = Generalized Dynamic Wake DS = Dynamic Stall FDT = Filtered Dynamic Thrust FWV = Free-Wake Vortex	PF = Potential Flow theory ME = Morison Eq. MD = Mean Drift NA = Newman's Approximation IP = Instantaneous Position IW = Instantaneous Water Level QD = Quadratic Drag	QS = Quasi-static Dyn = Dynamic LM = Lumped Mass		

Table 2 : Outils de modélisation au sein du projet IEA Wind Task 30 : OC4 Phase II [26]

Enfin, pour sa structure, une éolienne offshore est majoritairement constituée d'éléments élancés : pales, tour, pile, treillis (jacket, colonnes & bracons, etc.), lignes d'ancrage, comme montré en Figure 1, page 3. La littérature retient une cinématique

de dynamique de poutres pour l'étude des déformations des éléments structurels élancés. Ces éléments sont modélisés à partir de trois formulations : l'approche modale, l'approche multi-corps (ou lumped mass – masses concentrées) et l'approche EF 1D. Concernant l'étude des ancrages, deux autres formulations sont utilisées : la relation effort-déplacement et le modèle de fil caténaire quasi-statique.

Même les outils de modélisation globaux présentés ici ont des temps de calcul significativement longs lorsqu'il s'agit de simuler l'ensemble des cas préconisés par la norme IEC 61400-3. Il s'agit donc de rentrer dans les spécificités de chaque modèle pour déterminer les pistes d'amélioration.

Selon l'angle des phénomènes physiques, les phénomènes principaux à étudier en éolien offshore sont l'aérodynamique, l'hydrodynamique et la structure. Nous nous concentrons ici sur les modèles utilisés dans une approche de simulation globale, les approches locales n'étant actuellement pas compatibles avec les besoins industriels comme nous l'avons vu précédemment.

2.2.1 L'aérodynamique

Comme vu en début de section, la vaste majorité des codes aéroélastiques se basent sur la théorie de la BEM (Blade Element Momentum) [28] afin d'évaluer les efforts aérodynamiques agissant sur le rotor de l'éolienne. Cette méthode provient du domaine d'étude des hélicoptères dans lequel elle a fait ses preuves face aux méthodes alternatives comme le vortex model [22] ou l'actuator type model (aussi appelée Generalized Wake Dynamics – GDW) [23] dans le cas de turbines à axe horizontal. Un état de l'art sur l'aérodynamique des turbines à axe vertical peut également être trouvé dans [29].

La validation de la BEM a été établie grâce à des essais, et est largement utilisée du fait de sa simplicité et donc de sa rapidité, tant que les données de coefficients aérodynamiques sont disponibles. Son principal inconvénient réside dans le fait qu'elle est destinée à l'étude d'écoulements stationnaires et que, bien que les corrections apportées par les modèles empiriques permettent d'améliorer sa précision, ils ne permettent pas de rendre compte des effets instationnaires, ni de tenir compte d'écoulements désaxés par rapport au plan du rotor. Dans le cadre de la simulation

globale d'éoliennes, ces effets instationnaires de sillage sont généralement pris en compte au travers de la GWD qui est plus coûteuse en temps de calcul.

2.2.2 L'hydrodynamique

Hydrodynamique potentielle

La théorie potentielle [30] se base sur les hypothèses suivantes :

- Rôle négligeable des effets visqueux et des tourbillons ;
- Houle de cambrure faible ;
- Grandes dimensions de la structure étudiée devant l'amplitude de la houle et de ses mouvements propres

La méthode consiste à supposer le fluide gouverné par un potentiel de vitesse développé à différents ordres pour un petit paramètre de l'ordre de grandeur de la déformée de surface libre.

Les potentiels développés au premier ordre (incident, diffracté, radié) sont utilisés pour des formulations fréquentielles ainsi que des recompositions temporelles utilisant des fonctions de retard pour la prise en compte de la variation des efforts de radiation. A partir de ces potentiels de vitesse sont calculés les pressions puis les efforts sur la structure.

Les efforts potentiels du second ordre sont décomposés en : une partie basse fréquence (différence des fréquences de houle incidente) et une partie haute fréquence (somme des fréquences de houle incidente). Les efforts basse fréquence ont une influence importante sur la réponse d'un système ancré par des lignes caténares. Les efforts hautes fréquences sont quant à eux importants pour caractériser des excitations pouvant induire des résonances soit dans le système d'ancrage, soit dans la pile d'une éolienne fixe.

L'avantage de cette méthode est sa simplicité d'utilisation pour des faibles coûts de calculs, fournissant de bons résultats dans le cadre des hypothèses mentionnées ci-dessus. Ses principales limitations sont : sa faiblesse pour la prise en compte de non-linéarités sur la description de la houle (fortes cambrures) et de la structure étudiée ; sa non caractérisation des efforts visqueux.

Formulation de Morison

Afin de prendre en compte ces effets visqueux dans la modélisation des efforts, Morison et al [20] ont proposé de décomposer l'effort exercé par une vague sur un cylindre vertical, allant du fond à la surface, en deux composantes. La première est proportionnelle à l'accélération \dot{U} de l'écoulement (composante d'inertie), la seconde varie quadratiquement avec la vitesse U de l'écoulement relativement à la structure (composante de traînée). Dans (1), C_M , C_D , et ρ sont respectivement les coefficients d'inertie et de traînée, et la masse volumique du fluide.

$$f(x, z, t) = \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 \dot{U}(x, z, t) + \frac{1}{2} \rho C_D D U(x, z, t) |U(x, z, t)| \quad (1)$$

La formule est valide pour des éléments structurels élancés cylindriques et dépend du diamètre D du cylindre, ainsi que des coefficients de traînée C_D et d'inertie C_M .

En pratique, la formulation complète est utilisée pour les structures de type treillis, composés d'éléments cylindriques allongés de faibles sections. La cinématique relative de houle est calculée localement pour prendre en compte leurs variations spatiales. Cette cinématique peut donc être fournie à partir de modèles analytiques ou numériques, associés à des méthodes de stretching.

Discussion sur les approches hydrodynamiques

Du fait de la présence à la fois de corps élancés petits devant la longueur d'onde de la houle et d'éléments plus imposants, il est nécessaire de modéliser des phénomènes à la fois en théorie potentielle mais aussi des phénomènes visqueux selon la théorie de Morison. La Figure 8 décrit les domaines de validité de chaque théorie. Ainsi, le cadre d'utilisation de la formulation de Morison se situe pour un ratio $\frac{2\pi a}{L} < 0.2$. En delà de cette valeur, les efforts de diffractions sont également à prendre en compte. Par ailleurs, en deçà de la limite $\frac{H}{2a} < 1$, les déplacements relatifs d'une particule de fluide sont très petits et les effets visqueux peuvent être négligés.

De fait, plusieurs méthodes sont utilisées :

- La théorie potentielle de diffraction-radiation avec matrice d'amortissement visqueux,
- La théorie de Morison uniquement où les coefficients de traînée et masse ajoutée sont calibrés à partir du diamètre de chaque élément élancé structurel.
- La théorie potentielle combinée à des éléments de Morison. Dans le cas d'une éolienne flottante, plusieurs éléments sont utilisés pour la modélisation des bracons.

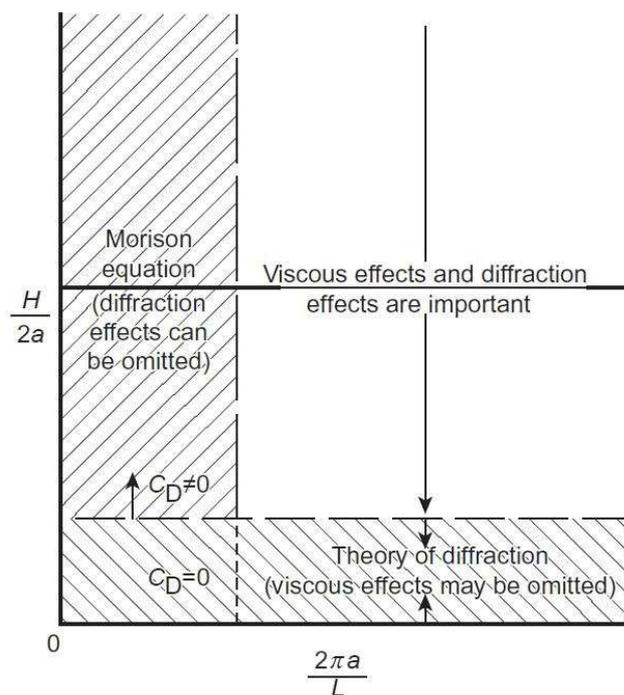


Figure 8 : Champ d'application de la théorie linéaire [31] (H : hauteur de houle, L : longueur d'onde la houle, $2a$: longueur caractéristique de la structure, i.e. le diamètre)

La première méthode permet de rendre compte des efforts hydrodynamiques à partir des composantes de houle linéaire incidente, diffractée et radiée pour le cas flottant. Pour le cas fixe, cette méthode utilisée seule ne permet pas de rendre compte des efforts visqueux lorsque le diamètre de la pile devient plus faible. Pour le cas flottant, il est nécessaire de tenir compte d'une composante visqueuse sous forme de matrice d'amortissement calibrée par des essais bassin, selon chacun des six degrés de

liberté du flotteur. Ce type d'approche permet le calcul d'une réponse en mouvement mais ne donne pas accès aux composantes locales des efforts visqueux.

La seconde méthode permet de décrire localement les composantes de traînée visqueuse et de masse ajoutée, où des coefficients sont définis pour chaque élément élancé de la structure support. A l'inverse de précédemment, lorsque le diamètre des éléments étudiés sort de la limite $\frac{2\pi a}{L} < 0.2$ la théorie de Morison n'est pas suffisante à elle seule pour caractériser l'ensemble des composantes des efforts hydrodynamiques. A noter que dans le cas flottant, certains modèles utilisent un seul élément de Morison pour représenter l'intégralité du flotteur. Dans ce cas, les coefficients sont à calibrer à partir d'étude CFD ou d'essais bassins.

La dernière méthode est actuellement la plus utilisée car fournissant plus de souplesse d'utilisation. Elle permet de tenir compte à la fois des composantes potentielles, mais aussi des composantes visqueuses locales à partir du moment où des coefficients de masse ajoutée et traînée sont disponibles (issus d'essais ou de simulations CFD). La composante d'inertie de Morison peut être incluse sous réserve que ces éléments ne soient pas déjà calculés via la théorie de diffraction/radiation.

La recombinaison des efforts potentiels à partir d'un calcul de diffraction-radiation est très peu coûteuse une fois la base de données hydrodynamique réalisée. Concernant le calcul des efforts de Morison, le plus coûteux consiste en l'intégrale des efforts distribués, dépendant eux même des vitesses locales du fluide le long du cylindre. Dans le cas d'une houle irrégulière d'Airy, selon le nombre de composantes, la recombinaison des vitesses peut s'avérer relativement longue.

2.2.3 La structure

Les éléments élancés composant l'éolienne sont représentés par deux cinématiques : celle des fils lorsque les déformations ne se font que selon la fibre neutre (ancrage), ou celle des poutres lorsque cisaillement, flexion et torsion doivent être modélisés (tour, pales, etc.).

Afin de vérifier la bonne tenue structurelle de ces éléments élancés, les méthodologies de simulation utilisées dans l'état de l'art sont au nombre de trois : l'approche modale, l'approche multi-corps (ou lumped mass – masses concentrées) et

l'approche éléments finis (EF) [22]. Deux autres modèles statiques spécifiques à l'ancrage peuvent également être cités à partir de l'expérience du secteur Oil & Gas : la relation effort-déplacement (ressort non-linéaire), et le modèle caténaire quasi-statique [32].

Approche modale

Dans cette approche, les déformations structurelles sont recomposées à partir d'une combinaison linéaire de déformées modales issues d'un calcul de modes propres. Ces modes propres sont issus d'un modèle EF 1D et correspondent à des modes stationnaires de vibration structurelle. Les équations de la dynamique sont alors résolues dans cette base modale. Une structure possédant une infinité de modes stationnaires, la base modale servant à la projection est tronquée, et le nombre de modes utilisés dans cette approche détermine la précision du résultat.

Le calcul des modes propres se fait par un passage dans l'équation de la dynamique (sans second membre) dans le domaine fréquentiel. De facto, les déformées modales sont calculées à partir d'une linéarisation des équations autour d'un état. Cette linéarisation porte essentiellement sur les déplacements qui sont considérés comme petits (la configuration déformée est proche de la configuration initiale). Les configurations déformées nécessitant une cinématique de grands déplacements sont donc proscrites. De plus la précision de calcul d'un mode dépend fortement du modèle EF utilisé et peut parfois mal représenter le mode propre réel.

Approche multi-corps dynamique

L'approche multi-corps (lumped mass) est issue des équations de la dynamique pour lesquelles le terme en dérivée spatiale a été calculé par une différence finie. Ce traitement revient à venir concentrer les masses linéiques au niveau de nœuds (corps), et convertir la loi de comportement en une raideur entre une force et un déplacement (ressorts) entre ces nœuds. Les distributions d'efforts sont concentrées de la même façon au niveau des nœuds.

Cette méthode a l'avantage d'être générale, simple à mettre en œuvre et de s'inscrire dans la logique de simulation multi-corps d'une éolienne : rotation du rotor, du pitch des pales, de la nacelle, etc. Contrairement à l'approche modale, elle permet

de s'affranchir de l'hypothèse des petits déplacements. C'est également une méthode permettant de représenter les phénomènes dynamiques.

Son principal inconvénient, comme toute méthode discrète, est qu'il faut s'assurer de la convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments choisis. Comme la méthode EF, le choix du schéma d'intégration peut être déterminant dans la précision des résultats et la vitesse de calcul [33]. Chaque nœud étant considéré comme un corps rigide, il possède 6 degrés de libertés (3 translation, 3 rotations), les matrices de masses et raideur sont donc de dimensions $6N \times 6N$ où N est le nombre de nœuds.

Approche EF 1D dynamique

Les approches EF 1D en éolien flottant se basent sur une cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli, Timoshenko ou GEBT (Geometrically Exact Beam Theory). Les deux premières font l'hypothèse des petites déformations, contrairement à la dernière (hypothèse de linéarité). La première suppose une cinématique non cisailée des sections de poutre alors que les deux dernières tiennent compte de l'ensemble des déformations en élongation, cisaillement, flexion et torsion [34]. La prise en compte du cisaillement devient importante lorsque la poutre tend à être courte et épaisse. De plus, l'hypothèse de linéarité des cinématiques d'Euler-Bernoulli et Timoshenko peut être remise en question du fait des grandes déflexions subies par des pales très souples.

La littérature fait souvent l'amalgame entre les dénominations des différentes formulations, et une formulation non-linéaire de Timoshenko réfèrera en réalité également à la GEBT, appelée aussi « poutre naturelle » ou « special Cossera rod » ou encore « poutre de Simo-Reissner ». Le détail des hypothèses de chaque théorie peut être trouvé en Figure 9.

Name	Theory	$\kappa_0 \neq 0$	$I_2 \neq I_3$	Tension	Shear	Torsion	Bending
Simo-Reissner	Nonlinear	+	+	+	+	+	+
(Anisotropic) Kirchhoff-Love	Nonlinear	+	+	+	-	+	+
Straight Kirchhoff-Love	Nonlinear	-	+	+	-	+	+
Isotropic Kirchhoff-Love Nonlinear Euler-Bernoulli	Nonlinear	-	-	+	-	+	+
Torsion-Free Simo-Reissner	Nonlinear	-	-	+	+	-	+
Torsion-Free Kirchhoff-Love	Nonlinear	-	-	+	-	-	+
Timoshenko	Linear	-	+	+	+	+	+
Euler-Bernoulli	Linear	-	+	+	-	+	+
Inextensible	-	-

Figure 9 : Nomenclature des poutres selon leurs hypothèses cinématiques [35]

Ancrage : relation effort-déplacement

Cette formulation consiste à appliquer un ressort-amortisseur linéaire ou non-linéaire au niveau des chaumards (point d'attache de l'ancrage sur le flotteur) ou directement sous forme de matrice au niveau du centre de gravité du flotteur. Ce modèle a l'avantage de faire un parallèle direct avec les montages utilisés lors d'essai en bassin de par leur simplicité de fabrication. Selon le degré de précision recherché, ces matrices sont soit diagonales (ressort/amortisseurs simples), soit possèdent des termes couplés. Dans tous les cas, un calibrage des coefficients doit être fait à partir de modèles plus riches.

Ce type d'approche manque de précision mais permet de rendre compte des effets de l'ancrage sur les mouvements globaux de l'éolienne flottante. Par contre, elle ne permet pas d'obtenir une quelconque information sur les répartitions d'efforts le long des lignes. Cette méthode est donc utile pour la description du comportement global de l'éolienne en phase de conception du concept.

Ancrage : modèle caténaire quasi-statique

Les modèles statiques d'ancrages caténaux basés sur la résolution des équations de la chaînette [36] sont largement éprouvés dans le secteur Oil & Gas [37]. Ce modèle spécifique suppose une cinématique de type fil n'admettant que des déformations selon la fibre neutre, et n'étant soumis qu'à son poids propre. Sous ces hypothèses, les équations de la statique peuvent alors être intégrées analytiquement et se mettre sous la forme d'un système algébrique à résoudre itérativement. Des bouées et des corps morts peuvent être modélisés sous forme d'efforts ponctuels dans cette représentation. Cette méthode de résolution impose à la ligne de rester dans un plan vertical passant

par l'ancre et le chaumard. La résolution de l'équation de la chaînette rentre dans le cadre des méthodes de résolutions dites indirectes, et est un cas particulier d'une méthode de tir comme nous le verrons plus loin. Ce modèle suppose l'équilibre statique de la ligne à chaque pas de temps et ne rend pas compte des effets dynamiques.

Ce type d'approche a le mérite d'être extrêmement rapide d'un point de vue de la simulation, pouvant aller jusqu'à des ratios temps réel/temps simulé de 1 pour 360 [37]. La précision est quasi-analytique en ce sens qu'elle est de l'ordre de la tolérance appliquée lors de la résolution des équations algébriques du problème.

Par contre, ce type d'approche statique ne permet pas de tenir compte des effets de masse de l'ancrage, ni de tenir compte d'efforts distribués hydrodynamiques de traînée, portance, ou d'amortissement structurel. L'hypothèse de négliger l'inertie de l'ancrage sur le comportement de la structure est valable lorsque l'ancrage représente une petite part de la masse totale du système flotteur et ancrage. Lorsque le flotteur diminue en taille (donc en masse) ou que les plateformes sont ancrées dans de grandes profondeurs d'eau, les effets inertiels de l'ancrage sur la plateforme doivent être modélisés. Pour les concepts de lignes tendues (TLP en Figure 1, page 3) où la stabilité de la plateforme est assurée par les tensions dans les lignes d'ancrages, des études dynamiques de l'ancrage sont nécessaires [32]. Dans ce cas, les méthodes multi-corps et EF 1D sont les seules alternatives.

Discussion sur les approches structurelles

L'approche modale est très efficace dès qu'il s'agit de simuler le comportement dynamique d'une structure, car elle permet de réduire drastiquement le nombre de degrés de libertés du système à résoudre. Son principal inconvénient réside dans l'exhaustivité de la base pré-calculée pour que la projection des équations dans la base modale ne vienne pas filtrer certains phénomènes importants. En éolien fixe, seuls deux modes de flexion dans chaque direction étaient historiquement utilisés pour décrire la base modale, sans description en torsion. Cette méthode a notamment été utilisée dans FAST (NREL) – logiciel éolien faisant office d'état de l'art dans le domaine – jusqu'en 2015 [38]. Bien que très efficace pour l'étude des turbines construire jusqu'à maintenant, l'agrandissement de tailles de turbines impose des outils permettant la simulation en grands déplacements des pales, et les méthodes

discrétisées prennent le pas sur l'approche modale car elles sont plus flexibles d'utilisation et peuvent s'affranchir des hypothèses de linéarisation.

L'approche multi-corps dynamique pour les corps élancés a l'avantage de s'intégrer naturellement dans un contexte de simulation globale multi-corps d'une éolienne offshore, et possède une grande flexibilité. Par rapport à l'approche modale, elle est plus coûteuse mais permet la description d'un plus grand nombre de degrés de libertés (souvent limitant en approche modale).

En revanche, comparé à l'approche EF 1D, elle nécessite en général une discrétisation spatiale et temporelle plus fine pour obtenir une précision équivalente.

Comparé aux types de modélisation modale et multi-corps, les EF 1D permettent une caractérisation précise de l'ensemble des modes de déformations. Cette méthode a donc l'avantage de pouvoir modéliser des géométries complexes ainsi que de prendre en compte des non-linéarités matérielles. Le calcul des matrices de masse et raideur est plus coûteux que pour les autres approches, impactant d'autant les performances de simulation dont les temps sont au mieux similaires à la représentation multi-corps. C'est un désavantage de taille lorsqu'il faut considérer des centaines de cas à étudier pour répondre aux critères de dimensionnement des standards. De plus, la modélisation de turbines éoliennes nécessite la représentation de grandes rotations et d'une cinématique relative entre composants du système et éléments déformés. Les codes EF standards « clefs en main » modélisent en général la structure autour d'une position de référence alors qu'une approche EF intégrée à un solveur multi-corps est nécessaire à la bonne représentation d'une turbine. C'est pour cette raison que les codes éoliens développent des méthodes de couplage multi-corps/EF spécifiques pour la représentation des déformations structurelles en grands déplacements au sein de grands mouvements de corps rigides. L'efficacité de ce genre de code dépend énormément de la méthode de couplage utilisée et des algorithmes employés, et restent plus lent que les approches modales et multi-corps.

L'un des points de vigilance majeurs des études utilisant des méthodes discrètes (multi-corps ou EF) est le schéma d'intégration temporel utilisé. Le problème poutre

discrétisé étant très raide, les phénomènes de propagation d'ondes instationnaires dans la structure sont des phénomènes très rapides (se propageant à la célérité des ondes dans le matériau), et nécessitent des pas de temps très réduits pour être captés numériquement (de l'ordre de la plus petite période). L'observation de ces phénomènes de propagation d'ondes ne rentre pas dans le cadre des analyses globales élasto-dynamiques et n'est donc pas souhaitée. De plus, chaque schéma d'intégration numérique a ses propres spécificités quant à sa stabilité. Dans le cas des études élasto-dynamiques, des schémas implicites sont recommandés afin de filtrer numériquement ces ondes hautes fréquences [33]. Ces schémas ont l'avantage de se concentrer uniquement sur la réponse basse fréquence que l'on cherche, par contre ils nécessitent un coût de calcul plus important et les réponses peuvent être trop amorties par les dissipations numériques entraînant une imprécision dans les résultats.

Concernant l'ancrage : l'approche statique (matrice de raideur ou caténaire) ou dynamique est adoptée par l'état de l'art. Les approches dynamiques considèrent des méthodes multi-corps ou EF 1D comme présentées pour les autres types d'éléments structurels. Les approches statiques considèrent l'équilibre statique de l'ancrage à chaque pas de temps, elles ont l'avantage d'être plus rapide que leurs homologues dynamiques. L'approche quasi-statique simple et rapide à mettre en œuvre est très utilisée, négligeant les effets de masse de l'ancrage. Ce type d'approche ne permet par contre pas de prendre en compte des efforts hydrodynamiques dus à de la houle ou du courant sur les lignes d'ancrage, ce type de modèle pourrait être amélioré.

2.2.4 Discussion finale sur les phénomènes physiques

Concernant l'aérodynamique, la BEM est reconnue pour être rapide et suffisamment précise pour des phases d'optimisation nécessitant de nombreux cas de simulation [22]. C'est un modèle robuste, rapide et éprouvé. Les autres types de modèles étant plus coûteux sans forcément fournir une précision supplémentaire significative, la BEM avec ses corrections semi empiriques est déjà le meilleur choix pour trouver un compromis temps/précision de calcul comme indiqué en Figure 10.

	BEM model	Vortex model	Actuator type model	CFD model
Accuracy	***	***	***	****
Computational speed	****	***	**	*
Airfoil aerodynamic data required?	Yes	Yes	Yes	No
Viscous effects included?	Yes	No	Yes	Yes

Figure 10 : Comparaison des modèles aérodynamiques [22]

Concernant l'hydrodynamique, la recomposition des efforts en théorie potentiels à partir d'un calcul de diffraction-radiation est très peu coûteuse une fois la base de données hydrodynamique réalisée. De plus, tant que les hypothèses de la théorie sont respectées, les résultats obtenus sont très précis.

Concernant le calcul des efforts de Morison, le plus coûteux consiste en l'intégrale des efforts distribués dépendant eux même des vitesses locales du fluide le long du cylindre. Dans le cas d'une houle irrégulière d'Airy, selon le nombre de composantes, la recomposition des vitesses peut être relativement longue. C'est sur ce constat qu'est développé un modèle de cylindre fixe perçant la surface libre sur houle de Airy comme modèle de simulation pour la vérification de la méthode IFORM sur une réponse non linéaire présentée dans le paragraphe 2.1.

Concernant la structure, la tendance consiste à utiliser exclusivement des modèles élasto-dynamiques pour la modélisation des poutres (approches modale, multi-corps et EF). Les approches dynamiques actuellement disponibles sont soit trop imprécises (modale) soit coûteuses en temps de calcul (multi-corps et EF) dans le cadre d'une simulation du comportement global comme indiqué en Figure 11. De plus, la précision est dépendante d'un raffinement de maillage suffisant, pouvant dépendre des cas étudiés (période de houle, courant) mais aussi du schéma d'intégration temporel utilisé.

	Modal approach	MBD	1D FEM
Accuracy	*	**	***
Computational speed	***	**	*
Number of DOFs	*	**	***
Prescribed modal shapes required?	Yes	No	No

Figure 11 : Comparaison des modèles structurels [22]

Le temps de simulation d'un code de simulation temporel peut être impacté par deux paramètres : le coût d'évaluation d'un pas de temps unique ou le nombre de pas de temps à simuler. Dans le premier cas s'ouvrent les pistes d'optimisation algorithmique ou réarrangement des équations à résoudre. Dans le second, si certains phénomènes rapides ne sont pas nécessaires à l'évaluation de la réponse, un changement pour un modèle plus rapide moyennant des hypothèses supplémentaires ou encore l'utilisation d'un schéma avec dissipation numérique peuvent être envisagés [39,40]. Les schémas d'intégration numériques utilisés par les logiciels éoliens sont déjà à l'état de l'art et se basent principalement sur des schémas α -généralisés (ou leur spécialisation en schéma de Newmark). Si l'on poursuit l'idée d'utiliser un schéma dissipatif pour filtrer des fréquences non souhaitées, il peut être intéressant de se poser la question des types de fréquences nécessaires à observer et donc des types de phénomènes dont il faut tenir compte.

Dans le cas de l'aéroélasticité des pales, les phénomènes dynamiques ayant un impact important sur la destruction rapide de la structure sont les phénomènes de flottement [41,42]. Il existe deux grands types de flottements : le couplage par rapprochement des modes de torsion-flexion (ou flottement classique) et le flottement par décrochage dynamique. Le premier type provient d'un rapprochement des fréquences propres des modes de torsion et de flexion. Pour être observé numériquement, il est alors nécessaire d'avoir une représentation des effets inertiels en torsion et en flexion (mal prise en compte par les logiciels se basant sur des approches modales).

Le second type provient de l'apparition d'un amortissement négatif qui va transformer l'effort aérodynamique d'amortissement en effort excitateur lors de la déformation structurelle des pales. Les vitesses locales entraînent une modification de l'angle d'attaque, qui va entraîner des modifications de la valeur des efforts

aérodynamiques, conduisant à l'apparition d'un amortissement négatif pour des angles proches du décrochage. D'un point de vue de la simulation, il est nécessaire de tenir compte de la modification locale de l'angle d'attaque à partir des vitesses de déformation pour tenir compte de ce phénomène.

Compte tenu du coût des codes structurels dynamiques, la question de l'utilisation d'une approche quasi-statique alliée à un intégrateur explicite (plus rapide que de l'implicite car nécessitant moins d'opérations) peut se poser. En effet, il y a ici une nécessité d'améliorer les méthodes de calcul des structures poutres 1D afin qu'elles soient suffisamment précises et suffisamment rapides pour être compatible avec le nombre élevé de cas de chargement indiqué par les standards. Concernant les pales, une approche quasi-statique pourrait être envisagée en tenant compte des efforts inertiels et des modifications des angles d'attaque dues aux vitesses de déformation (par discrétisation en temps des vitesses et accélérations) entre deux états d'équilibre afin de tenir compte des instabilités de flottement par décrochage dynamique. C'est ce type d'approche qui est utilisé par Till et al [43].

Pour l'ancrage, l'état de l'art se concentre sur des approches statiques qui montrent des limites en précision : le ressort non linéaire ne permet pas d'avoir d'informations sur l'ancrage, le modèle caténaire ne permet pas de prendre en compte d'effets 3D (courant hors plan caténaire, courant cisailé). Les performances des modèles caténaires sont en revanche très intéressantes. Ces modèles étant des dérivés de méthodes de tir, ces dernières méritent que l'on se penche de plus près sur leurs caractéristiques.

Les méthodes de tir issues de la théorie du contrôle optimal [44] ont été également utilisées pour la modélisation des poutres dans le domaine de la robotique [45] (robots souples et élancés) et du médical [46] (modélisation de cathéter concentriques) pour leur précision quasi analytique. Ces méthodes ont notamment été utilisées pour leurs performances de calcul en temps réel sur des modèles poutres [45]. En se basant sur l'hypothèse que les performances en temps de calcul pour la résolution des ancrages 3D seraient conservées, voire meilleures, le Dr Thomas Gazzola a initié des travaux en interne chez Bureau Veritas (non publiés) sur l'étude de la statique d'éléments élancés fils et poutres avec une méthode de tir simple pour une application dédiée à l'étude d'ancrages 3D et de risers. La méthode de tir simple a montré de bons

résultats au cas par cas pour l'étude de lignes d'ancrage uniques (structures souples) mais a présenté des problèmes de convergence lors de l'étude de poutres en petits déplacements soumises à des conditions aux limites bloquant les mouvements aux deux extrémités (encastrement-encastrement, encastrement-rotule, etc.). De plus, dès lors que plusieurs tronçons sont connectés ensemble au travers d'une discontinuité (changement de matériau, bouée, corps mort, etc.), la méthode de tir simple n'est plus applicable. Ceci représente une sérieuse limitation, d'autant plus lorsqu'il s'agit de l'utiliser dans un contexte multi-corps éolien offshore dans lequel il faut également tenir compte de plusieurs types de conditions aux limites.

La thématique principale de ce mémoire consistera donc à proposer une méthode de tir compatible avec un contexte de simulation multi-corps pour l'étude des discontinuités et des assemblages de corps élancés 3D statiques de type fils et poutres. Pour le cas spécifique des poutres, il apparaît indispensable d'étendre le champ d'application de la méthode de tir simple au cas des grands déplacements (et grandes rotations) pour la modélisation des pales. Dans un souci d'industrialisation, un accent particulier doit être mis sur l'unification en un formalisme commun des équations du problème de tir pour les cinématiques de fils et de poutres.

2.3 CONCLUSION

Pour chaque problématique relevée en 1.4, un axe d'étude a été identifié grâce à un tour d'horizon de l'état de l'art.

Le premier axe se concentre sur la définition d'une méthodologie de calcul basée sur la méthode IFORM pour l'étude de la réponse extrême d'un cylindre perçant la surface libre soumis à une houle irrégulière, afin de faire le lien entre variables aléatoires décrivant l'environnement et calculs CFD.

Le second axe porte sur l'extension de la méthode de tir simple à un contexte multi-corps pour la simulation de tous types de corps élancés statiques, cela dans un souci de gain en efficacité de temps de calcul pour la simulation globale d'éoliennes offshore.

Chacune de ces problématiques sera traitée successivement dans la suite en commençant par les travaux sur la méthode IFORM puis sur la méthode de tir. Pour

chaque problématique, un état de l'art détaillé sera effectué, puis une description de la méthode employée sera faite. Suivront ensuite la présentation des résultats et leur analyse pour conclure sur la pertinence de la méthode compte tenu de la problématique à laquelle elle est rattachée.

Chapitre 3 : La méthode IFORM

Table des matières

3.1	Etude bibliographique	39
3.1.1	Rappel du contexte.....	39
3.1.2	Position du problème du calcul d'extrême.....	40
3.1.3	Méthode FORM et notion de point de conception.....	41
3.1.4	Méthode IFORM et calcul de l'extrême	43
3.1.5	Méthode IFORM et variabilité court-terme	46
3.2	Présentation de l'étude	50
3.2.1	Paramètres du modèle physique	52
3.2.2	Conversion du scatter diagram discret.....	54
3.2.3	Calculs de l'extrême	57
3.3	Résultats.....	64
3.4	Conclusion	68

Ce chapitre décrit les travaux réalisés sur l'utilisation de la méthode IFORM pour la modélisation de la réponse extrême d'un mât d'éolienne offshore fixe sur houle irrégulière.

Dans un premier temps, le contexte sera rappelé puis les hypothèses de la méthode IFORM seront présentées.

Dans un second temps, la démarche d'étude utilisant la méthode IFORM (Inverse First Order Reliability Method) sera décrite. Le modèle physique de cylindre sur houle sera présenté, ainsi que les approches long-terme et court-terme utilisées à des fins de comparaison.

Enfin les résultats de comparaison entre les méthodes de calcul de l'extrême long-terme seront présentés, et des prescriptions sur l'utilisation de la méthode IFORM seront données.

3.1 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

3.1.1 Rappel du contexte

L'approche IFORM a déjà été introduite en éolien offshore fixe pour des analyses extrêmes d'efforts en pied de tour [47,48]. Les auteurs tiennent compte des efforts hydrodynamiques et aérodynamiques paramétrés par une hauteur significative et une vitesse de vent moyen. La turbine est modélisée en fréquentiel afin d'obtenir une caractérisation statistique de la réponse. Le modèle de chargement hydrodynamique utilisé est basé uniquement sur la partie inertielle de la formulation de Morison, linéarisée dans le domaine fréquentiel. Il ne tient donc pas compte de non-linéarités de la surface de réponse.

Les approches CFD permettent quant à elle de tenir compte de l'ensemble des non-linéarités de l'effort hydrodynamique servant à calculer la réponse en efforts internes. Comme vu précédemment, les surfaces de réponses issues de calculs CFD en éolien offshore sont mal connues au sein de l'état de l'art. C'est sur ce constat que le projet HYSMAR (HYdrodynamique des Structures MARines, 2012-2015) porté par l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne (IRT Jules Verne) s'est tourné vers la détermination d'outils et méthodologies d'analyse pour le dimensionnement des systèmes EMR soumis à des conditions de houle simulées en CFD. Dans ce mémoire

nous nous concentrons ainsi sur l'application de la méthode IFORM utilisant un modèle hydrodynamique non-linéaire. Le projet HYSMAR, dans lequel sont inscrits les présents travaux, est un projet français issu de la collaboration de partenaires industriels (IRT Jules Verne, Alstom Hydro France, Bureau Veritas, DCNS, STX France), PME (Hydrocean) et académique (Centrale Nantes – LHEEA).

La problématique est de construire un lien méthodologique entre les variables aléatoires décrivant les environnements marins, et les calculs de type CFD, précis mais coûteux, pour la détermination de la réponse extrême. La méthode IFORM se basant sur une linéarisation de la réponse, l'objectif de la démarche présentée ici est de vérifier que les états de mer identifiés par la méthode IFORM conduisent bien à la réponse extrême calculée à partir d'un chargement hydrodynamique non-linéaire. A cette fin, nous appliquerons la méthode sur un modèle de cylindre sur houle soumis à des efforts de Morison en temporel. Nous comparerons la réponse extrême obtenue avec ceux issus d'une approche de simulation directe classique de Monte Carlo, d'une approche par intégration de la surface de réponse (long terme) et d'une approche de type règlementaire. Nous pourrions ensuite conclure sur la méthodologie à employer afin de répondre à la problématique.

3.1.2 Position du problème du calcul d'extrême

La méthode IFORM permet de calculer la réponse maximale d'un système soumis aux conditions environnementales qu'il rencontrera tout au long de sa vie [18].

Une condition environnementale est caractérisée par une combinaison de variables aléatoires pouvant représenter une hauteur significative de vague, une période de pic, une vitesse de courant, une vitesse de vent, etc. liées entre elles par une densité jointe $f(H_s, T_z, U, V, \dots) = f(E)$, où E représente l'ensemble des variables d'environnement.

La réponse du système peut être envisagée comme un mouvement, une valeur de vitesse, de contrainte, etc. C'est le résultat d'une fonction *déterministe* dont les paramètres sont les variables aléatoires caractérisant l'environnement $X = func(E)$.

Soit la fonction d'état limite $g(X) = X_0 - X$, la probabilité de dépassement du niveau X_0 de la réponse X est donnée dans sa forme générale par :

$$P(g(X) \leq 0) = \int_{X > X_0} f(E) dE \quad (2)$$

Dans le cadre de la conception d'un système, l'objectif est de déterminer la valeur de X_0 correspondant à une valeur de probabilité cible. C'est à la résolution de cette problématique que tente de répondre l'approche IFORM.

3.1.3 Méthode FORM et notion de point de conception

Avant de décrire la méthode IFORM, il est intéressant d'introduire la méthode FORM. Afin de calculer la probabilité de défaillance définie par (2), la méthode directe représentée en Figure 12.a consiste à :

- Calculer la réponse X pour tout le domaine de définition de E ,
- Définir l'iso réponse X_0 (courbe rouge dans l'espace physique),
- Calculer la probabilité recherchée en intégrant la densité de probabilité jointe $f(E)$ (hachures dans l'espace physique).

La principale difficulté de cette façon de procéder vient de la détermination de la surface d'iso-réponse qui nécessite un nombre important de calculs.

La méthode FORM est une technique d'approximation de la probabilité de défaillance (2) d'un système. Elle propose une approche très différente de la simulation Monte Carlo et est directement appliquée au calcul de fiabilité. Le principe de FORM se décompose en trois étapes (Figure 12) :

1. Transformation de l'espace d'origine des variables jointes E en un espace gaussien standard de variables indépendantes, appelé le U-espace,
2. Recherche du point de conception U_0 correspondant à X_0 le plus proche de l'origine dans le nouvel l'espace gaussien avec un processus de minimisation sous contrainte. La distance entre ce point de conception et l'origine dans le U-espace est notée $\beta = \|U_0\|$,
3. Linéarisation de la surface de défaillance en ce point pour obtenir une approximation de la probabilité recherchée.

La probabilité de défaillance est approximée par l'intégrale de la distribution normale centrée réduite Φ à l'intérieur de l'aire quadrillée en blanc dans l'espace gaussien (Figure 12.b) :

$$P(g(X) \leq 0) = \int_{X > X_0} f(T^{-1}(U)) dU \approx \Phi(-\beta) \quad (3)$$

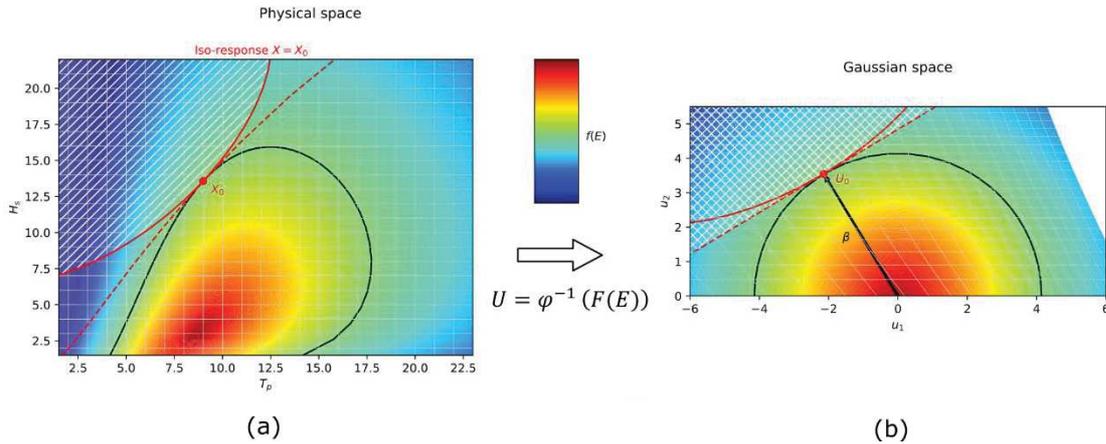


Figure 12 : (a) Transformation entre espace physique (T_p – période de pic – et H_s – hauteur significative) et (b) espace gaussien (u_1 et u_2)

La transformation de l'espace des variables physiques étant le point crucial pour l'application de la méthode IFORM, nous le détaillons ci-dessous.

Transformation de l'espace des variables de base

Transformer l'espace des variables de base constitue la première étape d'application de la méthode FORM. Cela consiste en l'introduction d'un difféomorphisme T de $\text{supp}(E)$ dans l'espace standard \mathbb{R}^n tel que le vecteur aléatoire $U = T(E)$ est constitué de variables aléatoires indépendantes suivant une distribution normale centrée réduite. Dans ce cas, la transformation T est dite isoprobabiliste. Il existe plusieurs transformations [49] régulièrement utilisées en pratique dont les plus connues sont la transformation de Nataf [50] et la transformation de Rosenblatt [51]. La transformation de Nataf nécessite les distributions marginales pour calculer T et fait l'hypothèse d'une dépendance gaussienne entre les composantes aléatoires de E . La transformation de Rosenblatt ne se base sur aucune hypothèse de dépendance particulière entre les variables aléatoires, mais nécessite la connaissance des fonctions de répartition conditionnelles. Ces deux transformations sont équivalentes dans le cas

particulier de dépendances gaussiennes. Nous utiliserons dans notre cas la transformation de Rosenblatt pour son caractère plus général.

Soit $E = (E_1, \dots, E_n)$ le vecteur aléatoire des paramètres environnementaux, et $F_{k|1, \dots, k-1}$ la fonction de répartition pour la variable aléatoire conditionnelle $E_k | E_1, \dots, E_{k-1}$. En notant Φ la loi normale centrée réduite, la transformation de Rosenblatt permettant le passage de l'espace physique à l'espace gaussien tel que :

$$U = T(E) = \begin{pmatrix} U_1 = \Phi^{-1}(F_1(E_1)) \\ \vdots \\ U_k = \Phi^{-1}(F_{k|1, \dots, k-1}(E_k | E_1, \dots, E_{k-1})) \\ \vdots \\ U_n = \Phi^{-1}(F_{n|1, \dots, n-1}(E_n | E_1, \dots, E_{n-1})) \end{pmatrix} \quad (4)$$

La transformation inverse permettant le passage de l'espace gaussien à l'espace physique s'écrit :

$$E = T^{-1}(U) = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(\Phi(U_1)) \\ \vdots \\ F_{k|1, \dots, k-1}^{-1}(\Phi(U_k)) \\ \vdots \\ F_{n|1, \dots, n-1}^{-1}(\Phi(U_n)) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Il est à noter que la transformation de Rosenblatt n'est pas unique et dépend intrinsèquement de l'ordre dans lequel sont données les distributions conditionnelles. Par contre, lorsque les variables de l'espace physique sont indépendantes, l'ordre des variables n'a plus d'importance et la transformation est unique. Elle s'écrit alors simplement :

$$T(E) = \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(F_1(E_1)) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(F_k(E_k)) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(F_n(E_n)) \end{pmatrix} \quad (6)$$

3.1.4 Méthode IFORM et calcul de l'extrême

A l'inverse de la méthode FORM, en repartant de (2), la méthode IFORM consiste à déterminer la valeur de X_0 en supposant connue la probabilité $p = P(g(X) \leq 0)$. La méthode IFORM se décompose en les étapes suivantes :

1. A partir de (3), générer l'hypersphère de rayon $\beta = \|U\| = -\Phi^{-1}(p)$ dans le domaine gaussien, correspondant à la probabilité de défaillance p d'entrée,
2. Transformer l'hypersphère de l'espace gaussien dans domaine physique par la transformation inverse (5),
3. Rechercher la réponse maximum sur l'hypersurface dans le domaine physique (point de conception X_0 associé à la probabilité p).

La méthode IFORM (comme la méthode FORM) suppose la linéarisation de la surface de réponse, ce qui implique que le contour généré est tangent à la surface de réponse en X_0 . Comme dit précédemment, la méthode IFORM nécessite la connaissance des fonctions de répartition conditionnelles *continues* pour effectuer la transformation de Rosenblatt. En pratique, les données météocécane sont données de façon discrètes et il nous sera nécessaire d'ajuster une distribution sur les données d'environnement. Une proposition de méthode sera donnée en section 3.2.2.

Exemple d'application de la méthode IFORM

Nous nous proposons d'étudier un exemple simple afin d'illustrer le processus de transformation décrit en Figure 12. Nous cherchons le maximum d'une réponse à un environnement de 3h apparaissant une fois tous les 20 ans. Cet environnement est supposé paramétré par deux variables aléatoires : la hauteur significative H_s et la période de pic T_p . Le nombre d'environnements de 3h indépendants en 20 ans est de $N = 58440$. La probabilité considérée est de $p = 1/N$. Dans le cas d'un état de mer, les variables aléatoires de hauteur significative H_s et de période de pic T_p sont considérées constantes sur une durée de 3h. Dans le cas du développement d'un vent, la période à considérer sera plutôt de 10 minutes [4].

L'espace des paramètres étant de dimension 2, l'hypersphère (contour) IFORM est de dimension 1. Il est défini par le cercle de rayon $\beta = -\Phi^{-1}(p) = 4.14$ dans le domaine gaussien (Figure 12.b). Les valeurs des paramètres dans l'espace gaussien sont calculées telles que $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \beta$. La transformation inverse de Rosenblatt (7) est ensuite utilisée pour recalculer les paramètres dans l'espace physique. La réponse

est calculée sur l'ensemble du contour et le maximum constitue la valeur extrême long-terme pour la probabilité p (Figure 13).

$$H_s = F_{H_s}^{-1}(\Phi(u_1)) \quad (7)$$

$$T_p = F_{T_p, H_s}^{-1}(\Phi(u_2))$$

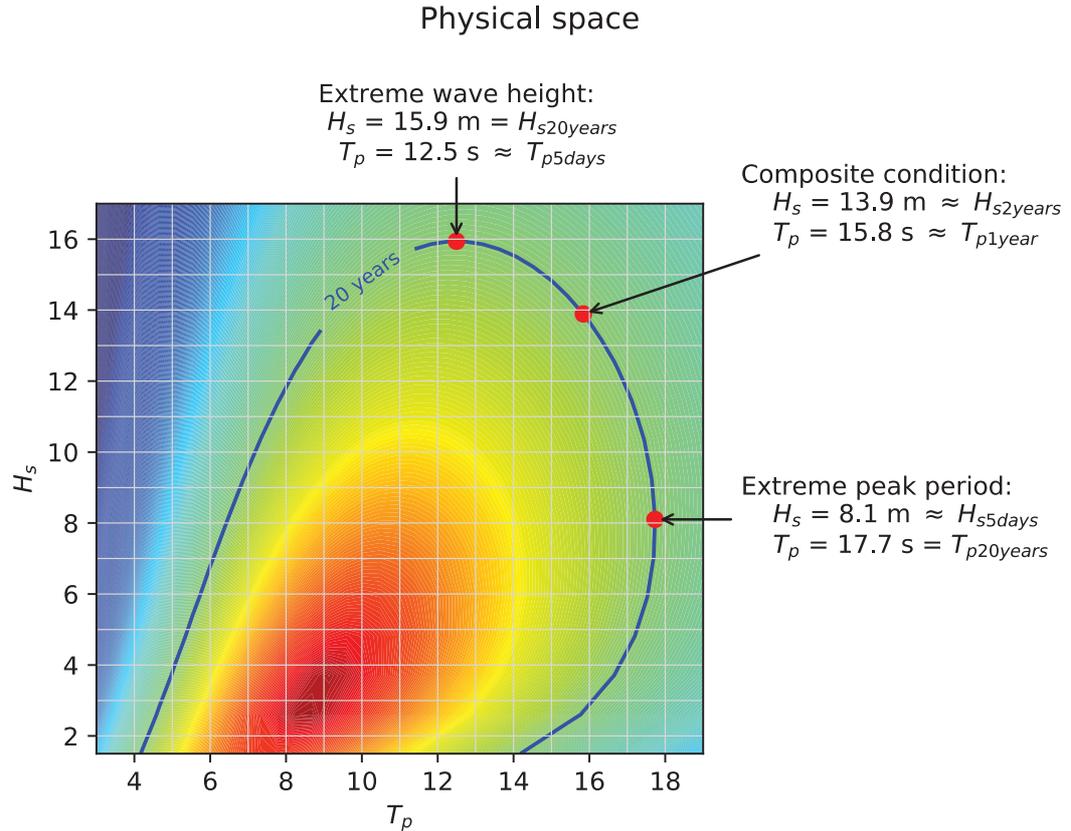


Figure 13 : Contour IFORM de dimension 2

La méthode FORM [52] et IFORM [18,53] ont régulièrement été utilisées en analyse de la fiabilité des structures. Cette dernière présente les caractéristiques suivantes [14] :

- Par construction, le contour est indépendant de la réponse considérée (pour une réponse déterministe) : il ne dépend que des paramètres environnementaux;
- Elle n'est pas indiquée pour des calculs de fatigue : les surfaces de réponse en fatigue sont très non-linéaires, incompatibles avec l'hypothèse de linéarisation de la méthode IFORM ;

- Cette méthode est efficace lorsque la variabilité court terme peut être négligée. Dans le cas contraire, la réponse devient stochastique et une attention particulière devra être portée à la convergence du maximum pour un environnement particulier.

Dans notre cas nous cherchons une méthode permettant d'identifier les combinaisons de paramètres environnementaux conduisant à la réponse extrême indépendamment du type de réponse considéré. Les deux premiers points ne sont donc pas bloquants. En revanche, sans information supplémentaire sur la réponse à étudier, nous devons donc nous intéresser à la prise en compte de la variabilité court-terme de la réponse.

3.1.5 Méthode IFORM et variabilité court-terme

La méthode IFORM telle que présentée dans les paragraphes précédents suppose une relation entre réponse et environnement sous forme de fonction déterministe. La génération d'un signal de houle à partir d'un spectre paramétré par les variables aléatoires de hauteur significative H_s et de période de pic T_p est de nature stochastique nécessitant un tirage aléatoire de phases. Le modèle de réponse n'est donc plus déterministe mais stochastique. De fait, la réponse pour un couple (H_s, T_p) n'est pas unique et la variabilité sur événement de houle doit être prise en compte. La Figure 14 ci-dessous montre le classement des extrema d'une réponse issue d'une simulation de 3h selon leur fréquence d'apparition, ainsi que la variabilité de l'extrême 3h (une simulation de 3h correspond à un jeu de couleur de points).

C'est le constat de Winterstein et al [18] qui proposent l'utilisation de contours augmentés se basant sur une connaissance de l'influence de la variabilité court terme sur la réponse long-terme pour la détermination d'un facteur d'augmentation.

En effet en cas de variabilité court terme, l'équation (2) est modifiée en (8) par l'introduction de la distribution court-terme conditionnelle $F_{st}(X|E)$:

$$P(g(X) \leq 0) = \int_{X > X_0} F_{st}(X|E) f(E) dE \quad (8)$$

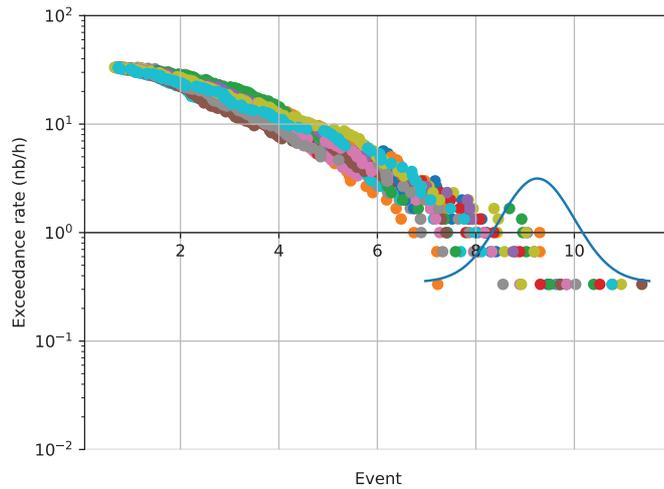


Figure 14 : Exemple d'influence de distribution court terme

Plusieurs types de distributions peuvent être utilisés : Gumbel, Pareto, composite, etc. Le calcul de $F_{st}(X|E)$ dépend du type de la réponse étudié, dans ce cas l'intérêt de généralité de la méthode IFORM est perdu.

Afin de pallier à ce défaut, il est possible de se ramener à une fonction de réponse déterministe pour utiliser la méthode IFORM telle que présentée dans les paragraphes précédents.

Deux approches peuvent être classiquement envisagées [14] :

- La première consiste à se baser sur un quantile de $F_{st}(X|E)$ pour déterminer de façon déterministe la valeur de la réponse extrême pour une combinaison d'environnement E (et donc à appliquer la méthode IFORM telle que décrite dans les paragraphes précédents). Dans ce cas les calculs d'extrême par les méthodes court termes définis dans le paragraphe 2.1 sont utilisés.
- La seconde approche consiste à augmenter la dimension de l'espace E des paramètres en y incluant la variable aléatoire Q représentant la valeur de la probabilité court-terme à simuler. Cette variable indépendante suit une distribution uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $P(Q \leq q) = p_q = F_q(Q) = q$. La fonction de réponse dépend elle aussi de cette variable aléatoire tel que $X = func(E, Q)$. Le calcul de la probabilité de défaillance s'écrit donc :

$$P(g(X) \leq 0) = \int_{X>X_0} f(E, Q)dEdQ = \int_{X>X_0} F_q(Q)f(E)dEdQ \quad (9)$$

Le contour IFORM calculé à partir de (9) fournira un ensemble de valeurs pour Q qui constitueront les valeurs de quantiles à chercher par la simulation, et qui définiront de façon déterministe la valeur de la réponse court-terme. Plusieurs simulations d'évènements seront nécessaires pour obtenir une distribution de réponse court-terme convergée. Une fois cette distribution calculée, la réponse extrême pour un environnement donné peut être définie comme un quantile de cette distribution court-terme. Le choix de l'une ou l'autre approche est discutée dans la sous-section suivante.

Exemple d'application avec variabilité court terme

Afin d'illustrer cette seconde approche, considérons à nouveau l'exemple présenté ci-dessus, en introduisant une troisième variable aléatoire Q , indépendante de H_s et T_p et représentant la probabilité de la variabilité court-terme de la réponse tel que $X = func(H_s, T_p, Q)$. Q est supposée indépendante car les conditions environnementales ne dépendent pas du type de simulation. En utilisant la transformation de Rosenblatt il vient :

$$\begin{aligned} Q &= F_Q^{-1}(\Phi(u_3)) = \Phi(u_3) = p_Q \\ H_s &= F_{H_s, Q}^{-1}(\Phi(u_1)|a) = F_{H_s}^{-1}(\Phi(u_1)) \\ T_p &= F_{T_p, H_s, Q}^{-1}(\Phi(u_2)|H_s, Q) = F_{T_p, H_s}^{-1}(\Phi(u_2)|H_s) \end{aligned} \quad (10)$$

Si l'on considère toujours des environnements de 3h sur une période de retour de 20 ans, $p = \frac{1}{N} = \frac{1}{146100}$ et $\beta = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 4.14$ définit une sphère dans l'espace gaussien. Si l'on vient projeter cette sphère dans le plan (H_s, T_p) pour différentes valeurs de p_Q il vient :

- $p_Q = 0.5 \Leftrightarrow u_3 = 0 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 4.14$: on retrouve le contour 20 ans où la réponse déterministe est définie comme la quantile 50% de $F_{st}(X|E)$.

- $p_Q = 0.95 \Leftrightarrow u_3 = 1.64 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 3.80$ où la réponse déterministe est définie comme la quantile 95% de $F_{st}(X|E)$. Le contour est équivalent à un contour 5 ans calculé avec $p_Q = 0.5$.
- $p_Q = 0.99 \Leftrightarrow u_3 = 2.33 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 3.42$ où la réponse déterministe est définie comme la quantile 95% de $F_{st}(X|E)$. Le contour est équivalent à un contour 1 ans calculé avec contour avec $p_Q = 0.5$.

Cette représentation permet également de faire l'analogie avec la notion de période de retour. De plus, l'approche présentée en 3.1.4 sans prise en compte de la variabilité court terme correspond en réalité à une réponse définie comme le quantile 50% de $F_{st}(X|E)$.

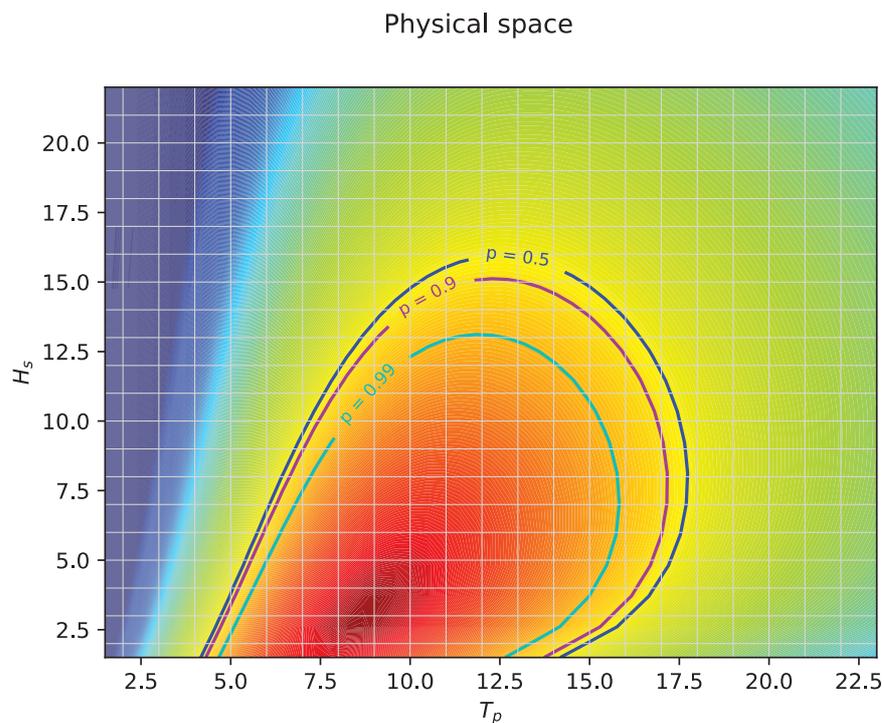


Figure 15 : Exemple de contours avec prise en compte de la variabilité court terme

Pour une utilisation industrielle, bien qu'exacte et indépendante de la réponse considérée, cette prise en compte du quantile court terme sous forme de distribution uniforme est trop coûteuse lorsque l'on cherche à évaluer les quantiles élevés des distributions court terme (supérieurs à 0.9). En effet la queue de distribution $F_{st}(X|E)$ doit être suffisamment convergée pour atteindre une bonne précision sur la valeur de

la réponse court terme. Ce type d'approche n'est donc applicable que sur des modèles de simulation extrêmement rapides.

Les standards de l'industrie offshore tiennent compte quant à eux du contour calculé pour le quantile 0.5 (médiane) en venant chercher une réponse d'un quantile supérieur (valeur moyenne, valeur la plus probable, quantile 0.8, quantile 0.9) [14]. Pour l'éolien offshore, l'IEC 61400-3 préconise l'utilisation des contours environnementaux pour déterminer les combinaisons de paramètres susceptibles d'apparaître pour une période de retour (probabilité) donnée. La méthode IFORM n'est pas utilisée en tant que telle car les cas de chargements proposés par la norme font déjà partie de la catégorie « contour polygonal » (cf. section 2.1) pour le calcul de la réponse extrême. Pour le calcul de la réponse sur ces cas de chargements, l'IEC 61400-3 préconise l'utilisation de la valeur moyenne de la réponse [4].

Le choix de l'une ou l'autre des méthodes dépendra principalement de la vitesse du modèle de simulation. Si le modèle de simulation est suffisamment rapide, une augmentation de l'espace des variables physiques sera envisageable. Sinon, il est nécessaire de se diriger vers l'utilisation d'une réponse court-terme médiane sur un contour augmenté [18] ou de quantiles supérieurs sur le contour médian. Cette dernière approche est plus simple à mettre en œuvre mais elle devient dépendante de la réponse. Une vérification à posteriori du facteur d'augmentation ou du quantile pris en compte devra être effectuée. Notre but étant de viser une efficacité numérique maximale avec la méthode IFORM, nous nous concentrons sur la seconde approche. Nous profiterons des calculs réalisés avec la méthode de Monte Carlo et d'intégration de la surface de réponse pour la vérification à posteriori de ce choix.

3.2 PRESENTATION DE L'ETUDE

Afin de vérifier que l'utilisation de la méthode IFORM permet d'établir un pont méthodologique entre une description statistique des environnements et des simulations CFD, nous nous proposons d'appliquer la méthode sur la réponse en efforts d'un pieu d'éolienne offshore (Figure 16). Un modèle non-linéaire de cylindre sur houle irrégulière est spécialement développé. Les résultats obtenus avec IFORM seront comparés à des approches de Monte Carlo, d'intégration directe (ou long-terme) et règlementaire (Figure 17). Nous verrons que la méthode IFORM permet :

- D'obtenir un bon compromis entre le nombre de simulations et la précision ;
- De détecter avec précision la valeur extrême de la réponse ainsi que les environnements y conduisant pour le modèle considéré.

Les enjeux consistent d'une part à introduire des non-linéarités dans le modèle physique utilisé par la méthode IFORM ; d'autre part à vérifier que la méthode permet effectivement de calculer la réponse extrême tout en identifiant correctement les environnements conduisant à cette réponse. Une fois identifiés les environnements, nous proposerons des pistes pour pouvoir déterminer la réponse extrême avec une étude CFD.

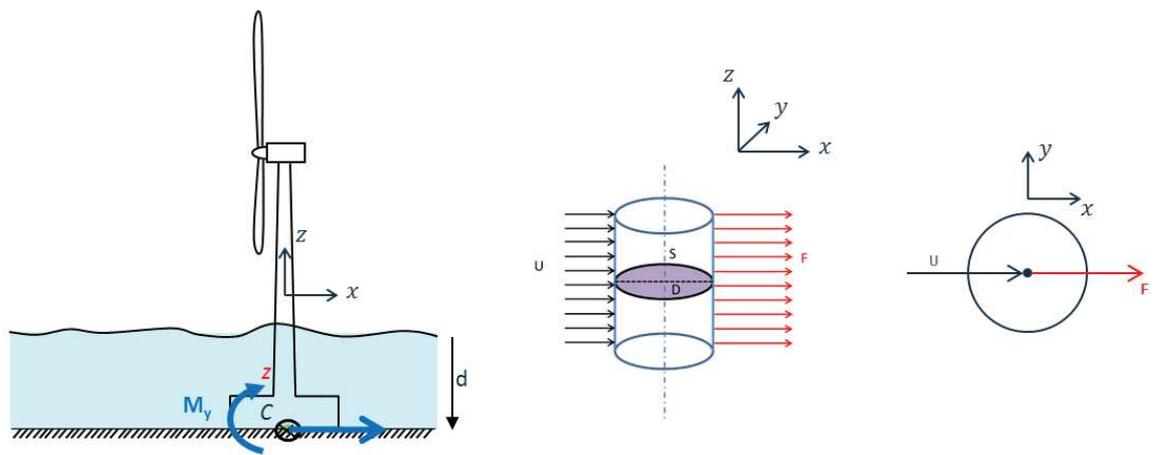


Figure 16 : Schéma de l'éolienne (gauche) et élément de Morison (milieu et droite)

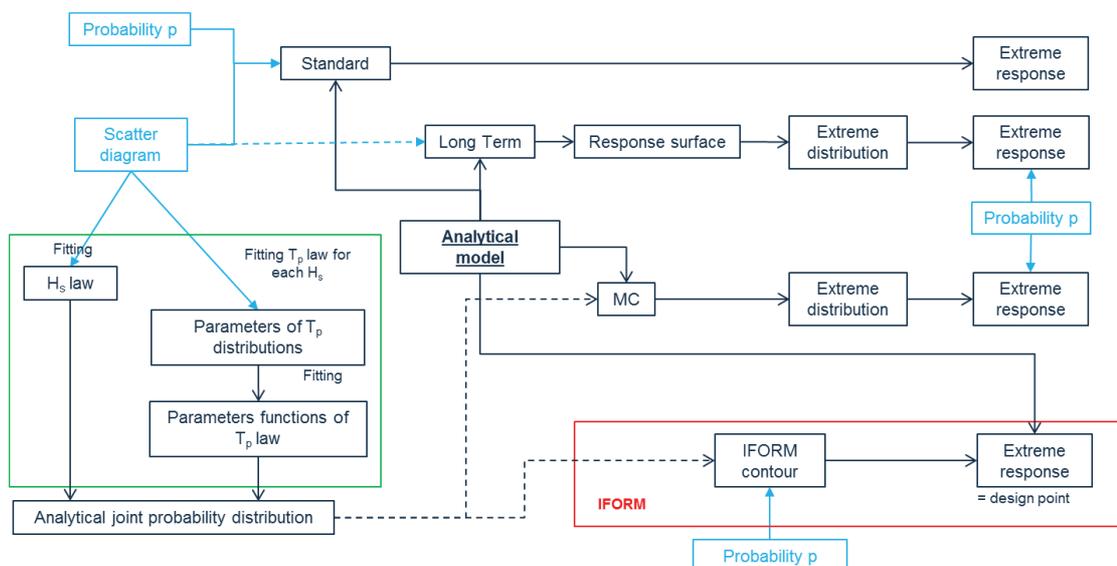


Figure 17 : Démarche d'étude IFORM

3.2.1 Paramètres du modèle physique

Le modèle de simulation tient compte des éléments suivants :

- Structure : il s'agit d'une fondation cylindrique d'éolienne offshore fixe de diamètre $D = 5 \text{ m}$ et de section transverse $S = \frac{\pi D^2}{4}$ (Figure 16). La profondeur d'eau est égale à $d = 25 \text{ m}$. Les efforts de houle estimés sur la fondation sont l'effort horizontal dans le sens de propagation de la houle, et le moment fléchissant au pied de de la fondation (sol). La structure est positionnée en $x = x_0$.
- Cinématique de la houle : pour un calcul CFD, il est d'usage d'utiliser un modèle de Stokes 5^{ème} ordre [54]. Pour le traitement IFORM, on utilisera ici une superposition de houles d'Airy (houle de Stokes d'ordre 1).
- Hypothèse pour le calcul des efforts : la formulation de Morison (traînée et inertie) est appliquée avec la cinématique de houle décrite ci-dessus. Le coefficient de traînée et masse ajoutée sont respectivement de $C_d = 1$ et $C_M = 2$.
- Statistiques des états de mer : afin d'avoir un cas d'étude représentatif d'une étude réelle, le scatter diagram discret Atlantique nord n°17 issu de la base de donnée Global Wave Statistics [55] est utilisé et donné en Table 29 de l'Annexe A. Cette base de données est celle utilisée par l'industrie maritime et notamment préconisée par l'IACS [56]. Un spectre mono-pic type JONSWAP [57] avec $\gamma=2$ permet de modéliser les conditions environnementales rencontrées. Sans que cela ne soit délicat à considérer, il n'y a ici pas de prise en compte du vent et du courant afin de simplifier l'étude.

Les états de mer sont supposés être d'une durée de 3h. La période de retour choisie pour l'étude est de 3 mois afin de pouvoir utiliser une approche long-terme par tirage de houle (Monte Carlo) et avoir des résultats statistiques convergés tout en limitant les temps de calcul. La probabilité associée est de $p_{3 \text{ mois}} = 1.3689 \cdot 10^{-3}$.

Le problème est supposé plan. La houle est supposée dans un premier temps définie comme une superposition de n houles de Airy (houle irrégulière comme somme

de cosinus), en profondeur finie d . La vitesse d'une particule fluide est donnée par (11) avec φ_i une valeur de phase tirée aléatoirement, $x \in]-\infty, +\infty[$ et $z \in [-d, 0]$.

$$U(x, z, t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i (z + d)}{sh k_i d} \cos(k_i x - \omega_i t + \varphi_i) \quad (11)$$

L'effort de Morison (1) est un effort linéique décomposé en une composante inertielle $f_M(x, z, t)$ et une composante de traînée $f_D(x, z, t)$ tel que $f(x, z, t) = f_M(x, z, t) + f_D(x, z, t)$. Le cylindre est supposé positionné en $x = x_0 = 0$, afin de s'affranchir de la composante en espace dans la suite des équations. L'effort en pied de pieu est obtenu par l'intégration de $f(z, t)$ tel que $F_x(t) = \int_{z=-d}^0 f(z, t) dz = F_{xM}(t) + F_{xD}(t)$. De la même façon, le moment s'obtient par $M_y(t) = \int_{z=-d}^0 f(z, t)(d + z) dz = M_{yM}(t) + M_{yD}(t)$. Le calcul des intégrales est délégué en Annexe B.1, les résultats tous calculs faits sont :

$$F_{xM}(t) = \rho C_M S g \sum_{i=0}^{n-1} A_i \sin(-\omega_i t + \varphi_i) th k_i d \quad (12)$$

$$F_{xD}(t) = \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{m=0}^{N-1} \text{sign} \left(U \left(\frac{z_m + z_{m+1}}{2}, t \right) \right) \left(\widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) - \widetilde{u}^2(z_m, t) \right) \quad (13)$$

$$F_x(t) = F_{xM}(t) + F_{xD}(t) \quad (14)$$

$$M_{yM}(t) = -\rho C_M S g \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i}{k_i} \sin(-\omega_i t + \varphi_i) \left(1 - \frac{1}{ch k_i d} \right) + \rho C_M S g d \sum_{i=0}^{n-1} A_i \sin(-\omega_i t + \varphi_i) th k_i d \quad (15)$$

$$M_{yD}(t) = \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{m=0}^{N-1} \text{sign} \left(U \left(\frac{z_m + z_{m+1}}{2}, t \right) \right) \left((d + z_{m+1}) \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) - (d + z_m) \widetilde{u}^2(z_m, t) - \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) + \widetilde{u}^2(z_m, t) \right) \quad (16)$$

$$M_y(t) = M_{yM}(t) + M_{yD}(t) \quad (17)$$

Où les expressions de $\widetilde{u}^2(z, t)$ et $\widetilde{u}^2(z, t)$ sont données respectivement en (122) et (123) de l'Annexe B.1 et z_m est la solution en z pour laquelle $U(z, t) = 0$ développée en Annexe B.2.

Les expressions (12) à (20) permettent d'accéder aux temporelles des efforts et moments en pied de cylindre nécessaires à la suite de l'étude. La formulation analytique proposée est plus performante qu'une intégration discrète effectuée au-delà de 20 éléments (Figure 77 et Figure 78). De plus pour 20 éléments, l'erreur d'une intégration discrète se situera autour de 12.5% (Figure 76). Le modèle proposé est donc particulièrement efficace, sans optimisation numérique particulière.

3.2.2 Conversion du scatter diagram discret

La méthode IFORM nécessite l'utilisation d'une description analytique des distributions jointes des paramètres d'environnement. Les données empiriques permettent de construire la fonction de densité de probabilité (PDF) $f(H_s, T_p)$ ainsi que la fonction de distribution cumulée (CDF) $F(H_s, T_p) = \int_{h_s=-\infty}^{H_s} \int_{t_p=-\infty}^{T_p} f(h_s, t_p) dt_p dh_s$. L'intégration de la PDF selon T_p et H_s nous permet d'accéder respectivement aux distributions marginales de H_s et T_p .

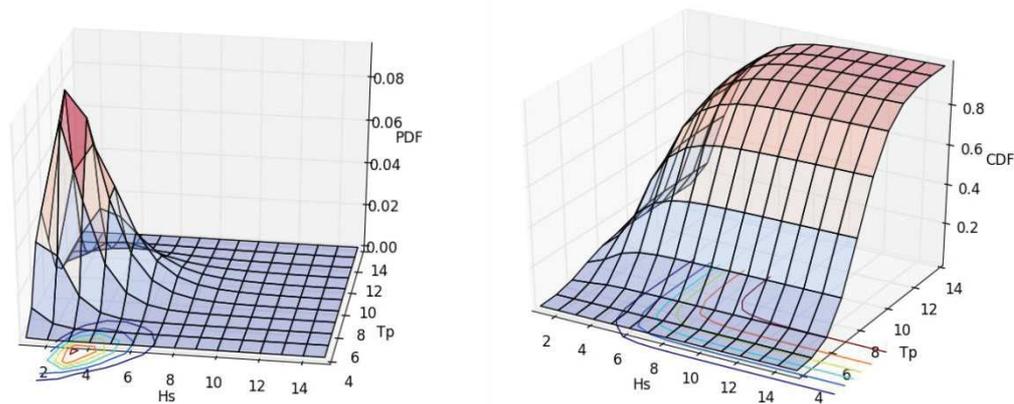


Figure 18 : Scatter diagram : densité de probabilité et fonction de distribution cumulée

Il est fait le choix de décrire la fonction densité de probabilité jointe par le produit d'une fonction marginale de H_s et de fonctions conditionnelles de T_p sachant H_s telle que :

$$f(H_s, T_p) = f(H_s)f(T_p|H_s) \quad (18)$$

Pour le scatter diagram considéré, nous supposons que H_s suit une loi de Gumbel [58] et T_p sachant H_s des lois normales dont les paramètres sont supposés de la forme $\mu(H_s) = a_0 + a_1e^{a_2H_s}$ et $\sigma(H_s) = b_0 + b_1e^{b_2H_s}$. La méthode consiste à ajuster une distribution de Gumbel sur la loi marginale en H_s et une loi normale pour chaque valeur de H_s pour en extraire les coefficients a_i , b_i . Ces relations nous permettent d'accéder aux paramètres $\mu(H_s)$ et $\sigma(H_s)$ des lois conditionnelles normales pour n'importe quel tirage de H_s , permettant ainsi de construire des distributions $f(T_p|H_s)$ de façon analytique en accord avec (18). La librairie Python open source OpenTurns [59] permettant le traitement et l'ajustement de distributions statistiques par la méthode du maximum de vraisemblance a été utilisée ici.

Les valeurs de coefficients issus des données d'entrées de la Table 29 sont données en Table 3. Les valeurs des paramètres de la loi de Gumbel sont estimées à $\alpha = 0.636447$ et $\beta = 2.28575$. Nous pouvons maintenant décrire la probabilité conjointe $f(H_s, T_p) = f(H_s)f(T_p|H_s)$ de façon analytique. La qualité de l'ajustement est vérifiée graphiquement par le recalcul des distributions marginales (Figure 20).

a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
10.801541	-4.4403429	-0.1879537	1.5741559	-0.43005537	-0.26378

Table 3 : Coefficients pour μ et σ

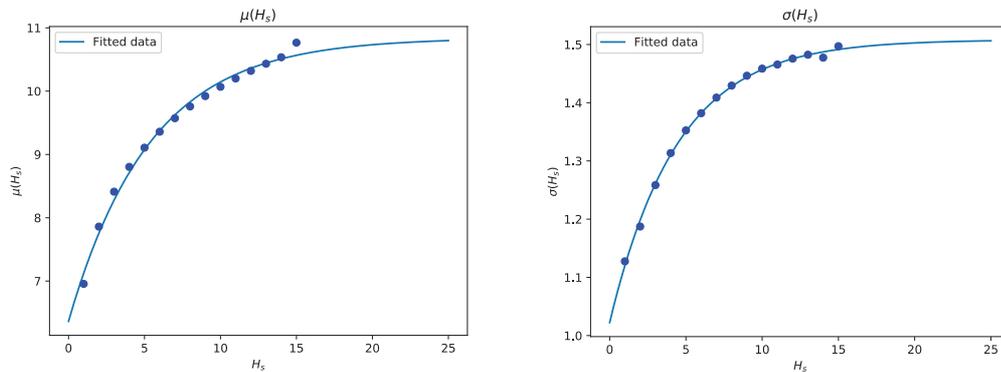


Figure 19: Ajustement de μ et σ

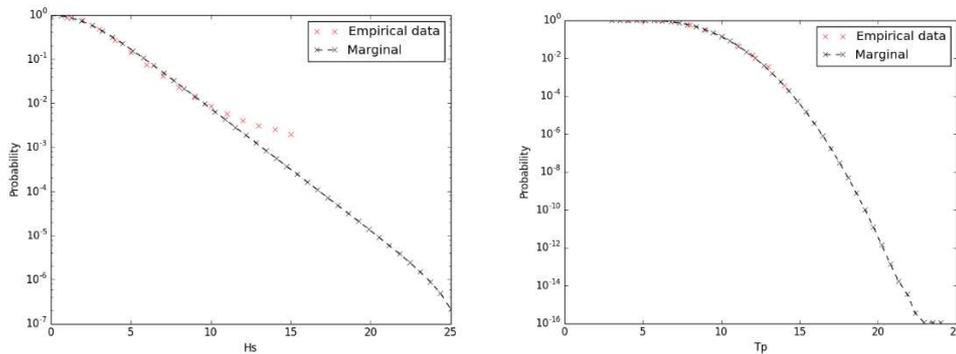


Figure 20 : Loi marginales empiriques et ajustées

Concernant la distribution marginale de H_s , la queue de distribution empirique s'éloigne de la queue de distribution ajustée. Cette remarque est confirmée par la divergence des points du diagramme QQ (Quantile-Quantile) en Figure 21 qui représente les quantiles empiriques et ajustés. A cause de ce biais, la distribution ajustée pour H_s aura tendance à sous-estimer H_s pour les faibles probabilités de dépassement. Pour une meilleure représentation, la qualité de l'ajustement automatique devra être améliorée (modification de l'échantillon utilisé pour l'ajustement, choix d'une autre distribution que Gumbel, etc.). Concernant la distribution marginale de T_p , nous obtenons une bonne corrélation entre les données empiriques et la distribution ajustée : la queue de distribution est bien captée comme montré en Figure 20. Cela permet de valider le choix de loi de probabilités conditionnelles normales.

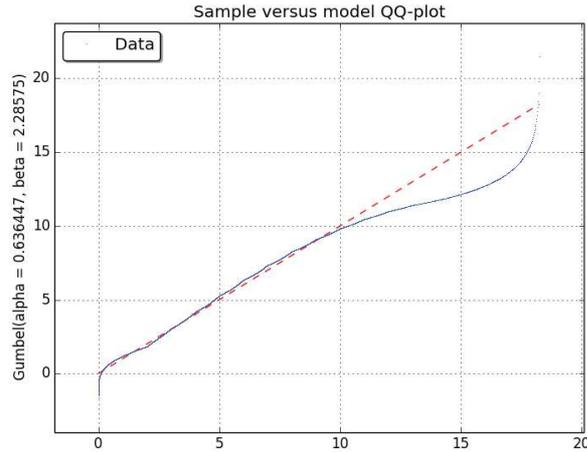


Figure 21 : Quantile empirique-quantile ajusté pour la distribution de Gumbel

3.2.3 Calculs de l'extrême

La réponse extrême court-terme est définie par le maxima que prend la réponse sur un état de mer de 3h paramétré par (H_s, T_p) . Elle est calculée comme le minimum et le maximum de $F_x(t)$ et $M_y(t)$ issus de (14) et (20).

Les quatre approches suivantes sont étudiées pour le calcul des efforts/moments extrêmes long-terme :

- L'approche Monte Carlo : simple à mettre en œuvre une fois la loi de probabilité conjointe connue. Elle présente le désavantage de devoir effectuer beaucoup de simulations pour obtenir des données statistiques convergées, et donc beaucoup de temps de calcul.
- L'approche par intégration directe de la réponse calculée pour l'ensemble du scatter diagram : plus courte à mettre en œuvre, on s'affranchit de la convergence statistique long-terme mais pas de la convergence court-terme (pour la définition déterministe de la réponse). Cette méthode est dépendante des choix de distribution faits.
- L'approche réglementaire : nous supposons la réponse gouvernée en H_s et investiguerons le long du H_s 3 mois.
- L'approche IFORM : l'objet de l'étude.

Approche de Monte Carlo

L'approche Monte Carlo (MC) est la plus directe et coûteuse en temps de calcul. Elle consiste en l'approximation de l'intégrale (2) par :

$$F = \int f(E)dE = \mathbb{E}[f(U)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(E_i) = \tilde{f}_N \quad (19)$$

Si nous notons $\sigma_f^2 = \mathbb{E}[f^2(E)] - \mathbb{E}[f(E)]^2$ alors la variable $\frac{\sqrt{N}}{\sigma_f}(\tilde{f}_N - F)$ converge vers une loi normale centrée réduite φ par le théorème central limite. Pour un niveau de risque α , l'écart $\varepsilon_N = \tilde{f}_N - F$ satisfait $P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_f}\varepsilon_N < q_{\varphi_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha/2$. Nous obtenons donc $\varepsilon_N < q_{\varphi_{1-\alpha/2}} \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$ où $q_{\varphi_{1-\alpha/2}}$ est le quantile de la loi normale centrée réduite pour le niveau de risque α . La convergence de l'écart ε_N est donc bornée par $\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$. Cette vitesse de convergence présente l'avantage d'être insensible à la dimension de l'espace des paramètres.

Nous pouvons noter l'importance de l'écart type σ_f de la réponse quant à l'estimation de la convergence. Afin d'avoir un résultat convergé sur un évènement apparaissant toutes les N fois (pour un niveau de confiance de 90%), les recommandations préconisent l'étude d'échantillons de $20N$ à $50N$ observations [14], basé sur un retour d'expérience des secteurs naval et Oil & Gas. Dans notre cas, 20 ans d'observations d'états de mer de 3h ont été simulés (58440 observations), pour une période de retour souhaitée de 3 mois (731 évènements de 3h). Dans ce cas, nous obtenons un ratio d'environ 80, nous assurant une bonne convergence statistique du maximum 3 mois.

La démarche de calcul pour le Monte Carlo est la suivante : 58440 couples (H_s, T_p) sont tirés aléatoirement à partir de la loi de probabilité jointe $(H_s, T_p) = f(H_s)f(T_p|H_s)$. Le maximum 3h pour chacune des réponses $(F_{min}, F_{max}, M_{min}, M_{max})$ est calculé pour chaque couple (H_s, T_p) . Leur dépendance à H_s et T_p est représentée sur la Figure 22.

Les graphes ci-dessous nous donnent les tendances générales d'évolution de chaque réponse en fonction de H_s et T_p . Nous observons que ces maxima évoluent de façon croissante avec H_s . Les moments minimum et maximum ont tendance à être plus

dispersés avec H_s que les efforts. La corrélation avec T_p est quant à elle plus difficile à souligner.

Les valeurs de réponse sont classées et associées à un quantile pour construire la distribution de chaque réponse. Une distribution de Gumbel est ajustée sur ces valeurs pour pouvoir calculer la valeur de n'importe quel quantile (cf. Figure 23). La valeur associée pour la probabilité de dépassement $p_{3\text{mois}} = 1.3689 \cdot 10^{-3}$ peut donc être calculée simplement. Les résultats sont discutés en section 3.3.

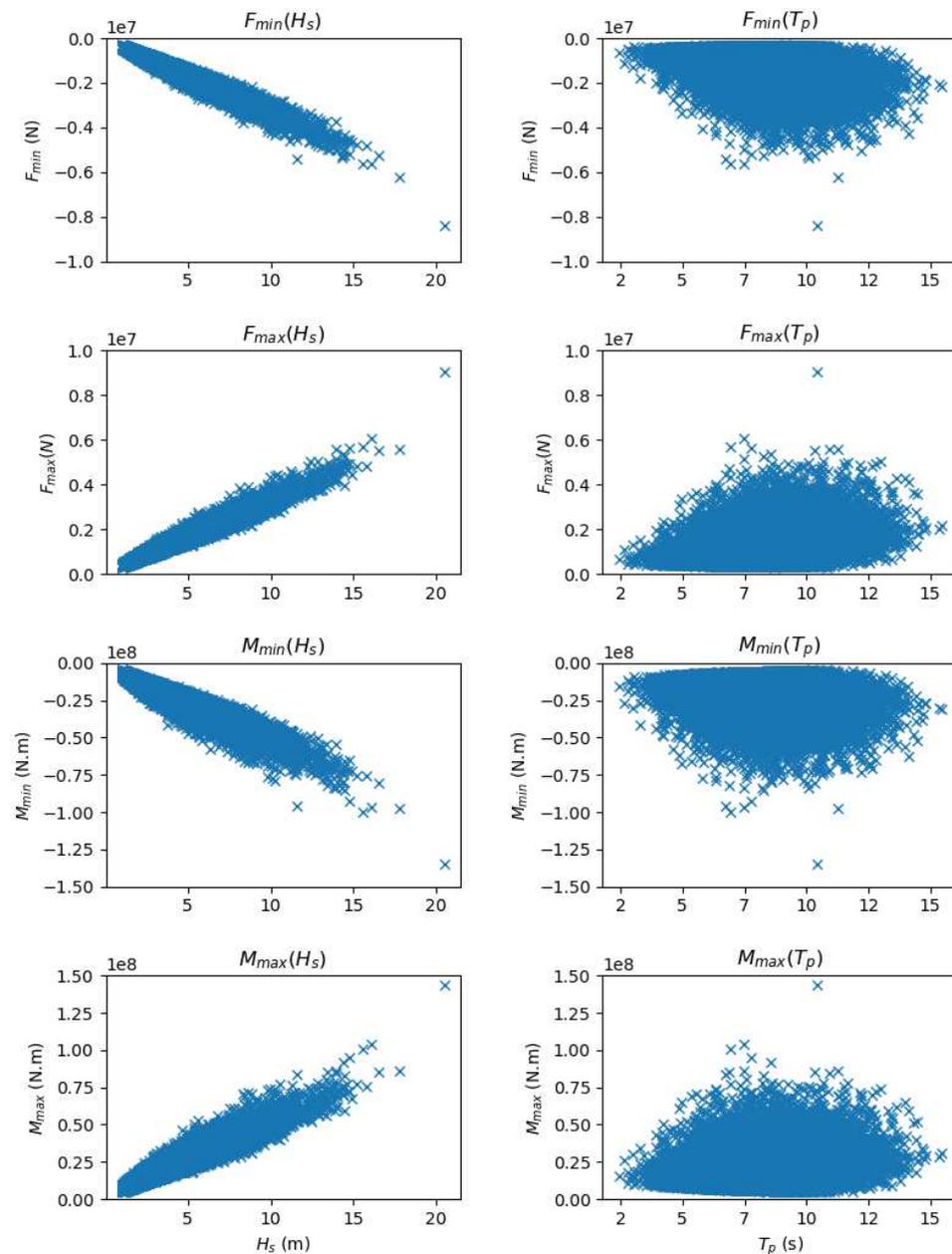


Figure 22 : Dépendance des maxima à H_s et T_p

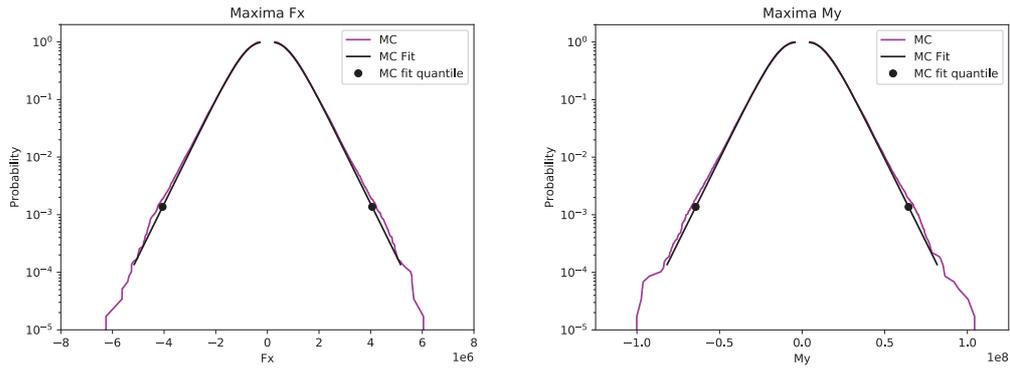


Figure 23 : Monte Carlo réponse extrême

Approche par intégration directe

Cette méthode consiste à calculer la réponse pour toutes les valeurs de couple (H_s, T_p) du scatter diagram. Cela nous permet de définir à la fois la surface de réponse (associée en général à un quantile court terme), et les distributions de réponse court terme pour chaque couple de paramètres. Si l'on veut construire une distribution court-terme, il faudra évidemment effectuer plusieurs simulations par couple (H_s, T_p) . Dans la présente étude, nous avons effectué 40 simulations par combinaison et utilisé une distribution de Gumbel pour la représentation de la variabilité court terme. Le nombre de 40 simulations a été arbitrairement choisi entre 20 et 50 afin d'avoir une évaluation du quantile 50% situé dans intervalle de confiance de 90% [14]. En tenant compte de la discrétisation du scatter diagram, le nombre total de simulations se monte à 6600. Dans le cas de cette étude, les valeurs de réponse ont été calculées sur la discrétisation du scatter diagram initial (empirique). Le calcul de la probabilité pour des niveaux de réponse donnés a ensuite été effectué grâce à la probabilité jointe analytique.

La Figure 24 représente les surfaces de réponse associées au quantile 50% pour $(F_{min}, F_{max}, M_{min}, M_{max})$, ainsi que les valeurs de toutes les simulations effectuées pour chaque couple (H_s, T_p) . Cette représentation nous permet d'avoir des informations générales sur l'évolution des réponses en fonction de H_s et T_p , et selon leur type. Tous les maxima ont tendance à être plus importants avec la croissance de H_s . Cette remarque est cohérente avec les évolutions présentées avec l'approche Monte Carlo. De plus, les moments internes minimum et maximum sont plus impactés par T_p pour de forts H_s , information plus compliquée à interpréter à partir des résultats de Monte Carlo. Enfin, la variabilité court-terme augmente avec H_s et T_p , ce qui

montre l'importance de la prise en compte de ce phénomène dans le calcul de la réponse finale. De la même façon que pour l'approche Monte Carlo, une fois cette distribution empirique calculée, une distribution de Gumbel est ajustée afin d'avoir accès à la valeur de n'importe quel quantile, notamment pour la probabilité de dépassement de $p_{3\text{ mois}} = 1.3689 \cdot 10^{-3}$.

Les distributions de réponse obtenues à partir de l'approche d'intégration directe sont données en Figure 25. Les résultats numériques sont discutés en section 3.3.

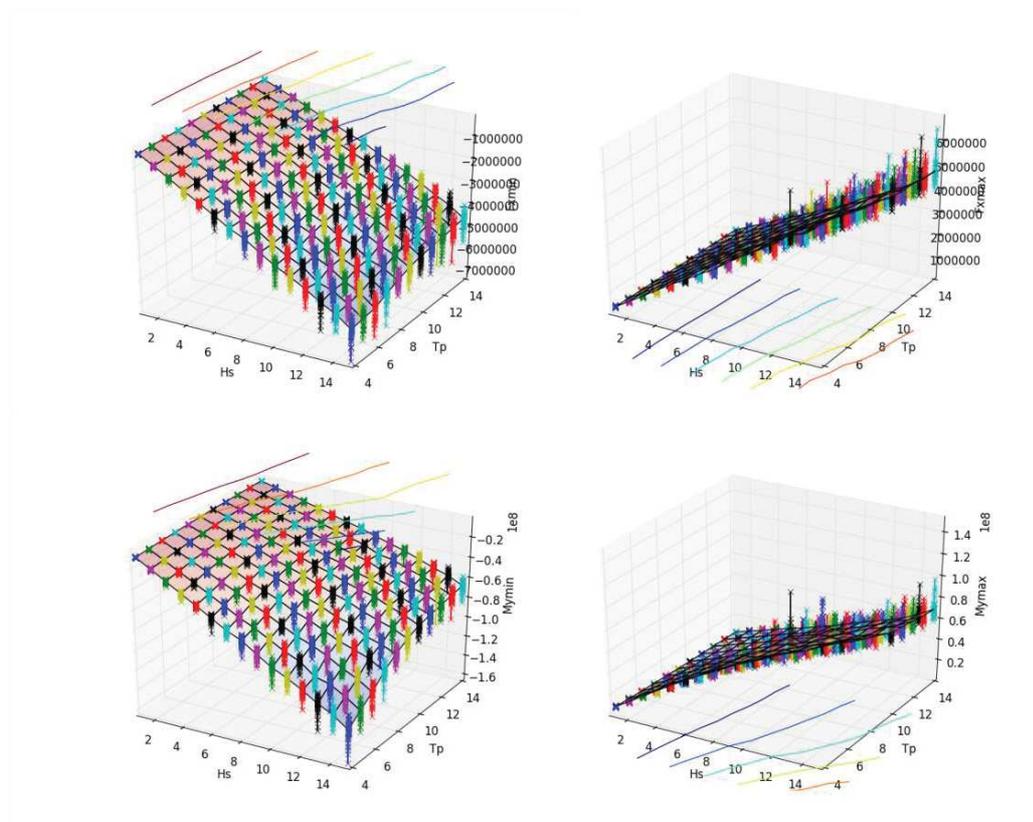


Figure 24 : Surfaces de réponses long-terme

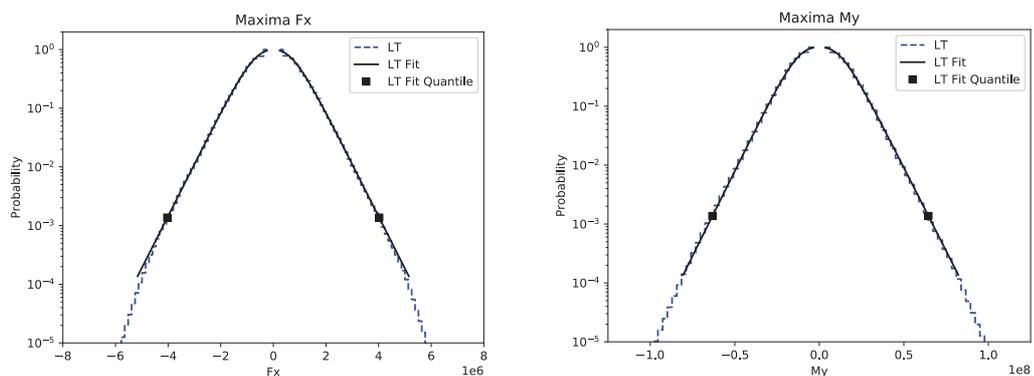


Figure 25 : Long-terme – réponse extrême

Approche règlementaire

La mise en place de cette méthode passe par :

- La détermination de la valeur $H_{S\ 3\ mois}$ à partir de la loi de probabilité de H_S ;
- La détermination de la valeur maximale sur les états de mer à ce H_S pour différents T_p .

La valeur de H_S pour la période de retour de 3 mois considérée est $H_{S\ 3\ mois} = 12.65\ m$. Concrètement, cela revient à sélectionner des T_p sur la droite définie par $H_S = H_{S\ 3\ mois}$ sur le scatter diagram. La valeur T_p obtenue pour la réponse maximale est de $T_p = 4\ s$. Cela est cohérent avec les surfaces de réponses calculées avec l'approche par intégration directe (Figure 26) où il apparaît clairement que le maximum sera atteint pour les petites valeurs de T_p . Il est rappelé que les surfaces de réponse projetées sont calculées pour un quantile court terme de 50%. Les résultats numériques sont discutés en section 3.3.

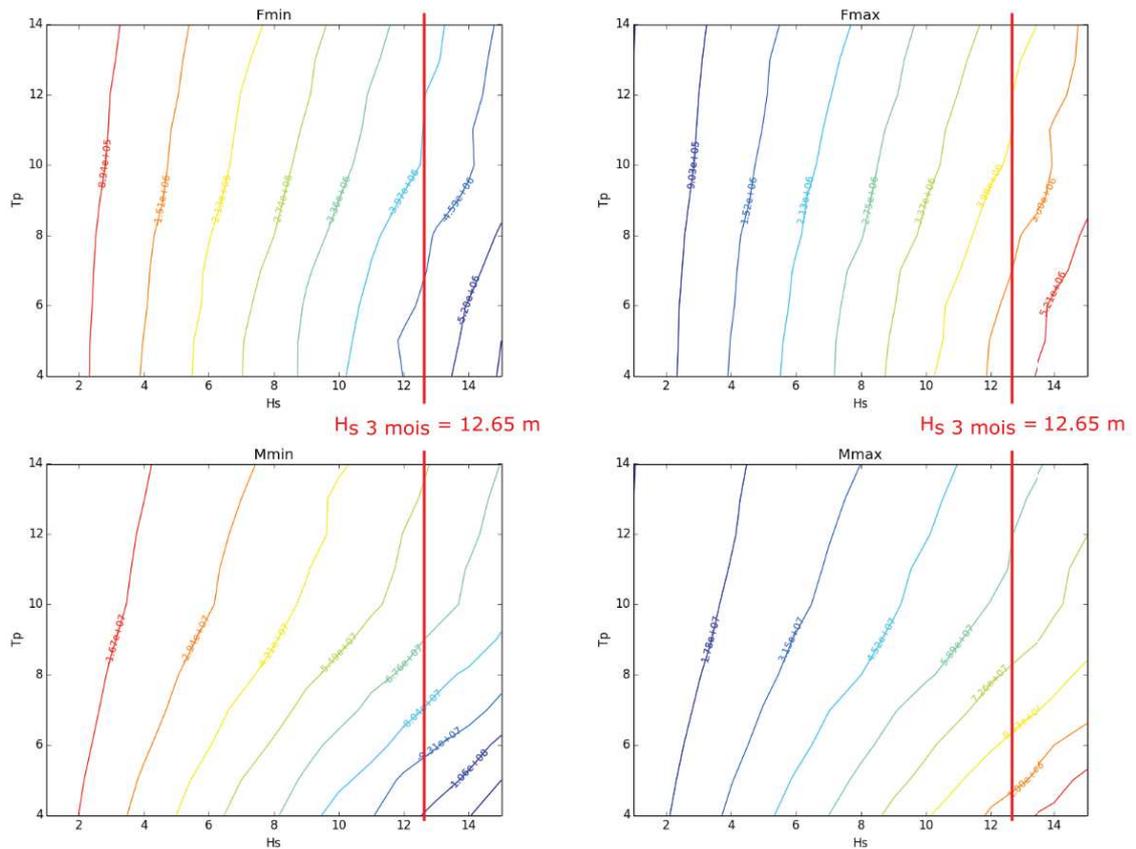


Figure 26 : Surfaces de réponses projetées et H_s 3 mois

Approche IFORM

La démarche est la suivante :

- Sur la base des données statistiques du scatter diagram, détermination du contour (H_s, T_p) pour la probabilité $p_{3\text{mois}} = 1.3689 \cdot 10^{-3}$;
- Calcul des valeurs d'efforts/moment interne sur le contour trouvé, grâce à la formulation semi-analytique. Les valeurs d'effort/moment interne seront calculées pour une probabilité de dépassement de 50% (comme pour la méthode par intégration directe, 40 simulations sont effectuées par couple (H_s, T_p) , afin d'avoir des distributions court terme bien convergées) ;
- Le maximum à la période de retour considérée est le maximum obtenu sur le contour.

Le contour ainsi que les états de mer maximisant sont représentés sur la Figure 27. Les états de mer obtenus sont décrits dans la Table 4. Il est également intéressant

de noter que, par construction, le contour est tangent horizontalement et verticalement aux $H_{s\ 3\ mois}$ et $T_{p\ 3\ mois}$. Cette propriété s'explique simplement par le fait que les points du contour pour les valeurs de $H_{s\ 3\ mois}$ et $T_{p\ 3\ mois}$ (associés à leurs valeurs complémentaires respectivement $T_p / H_{s\ 3\ mois}$ et $H_s / T_{p\ 3\ mois}$) correspondent aux points ($U_1 = 1, U_2 = 0$) et ($U_1 = 0, U_2 = 1$) de l'espace gaussien. Les résultats numériques des réponses extrêmes sont discutés en section 3.3.

Les états de mer obtenus sont décrits dans le tableau suivant :

	F_{min}	F_{max}	M_{min}	M_{max}
H_s (m)	12.4	12.6	12.0	12.2
T_p (s)	9.6	10.2	9.0	9.3

Table 4 : IFORM - états de mer maximisant

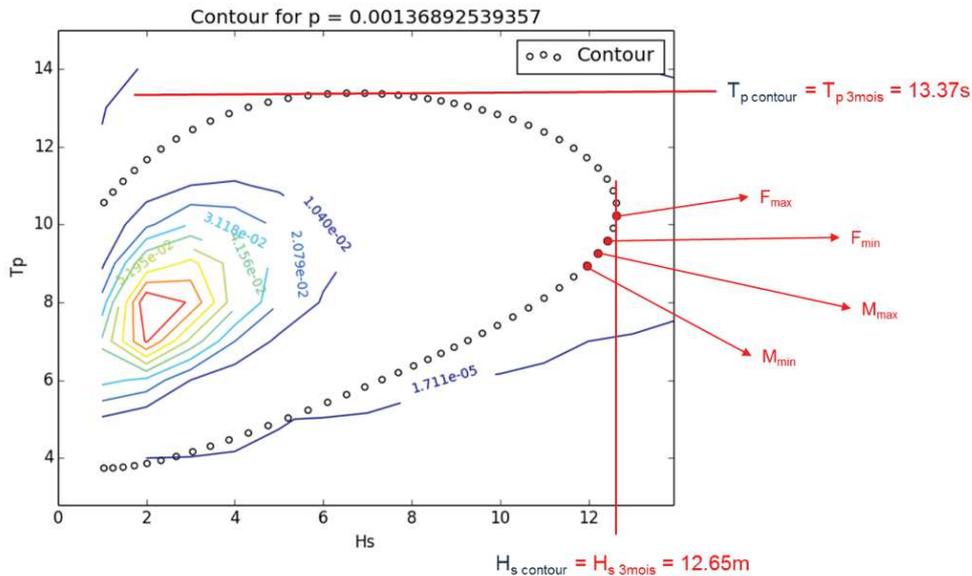


Figure 27 : Contour IFORM et états de mer maximisant

3.3 RESULTATS

Cette partie récapitule tous les résultats obtenus à travers les différentes méthodes. L'approche de Monte Carlo est utilisée comme référence. Les résultats numériques sont résumés dans la Table 5.

D'un point de vue purement qualitatif, les résultats Monte Carlo, long terme et IFORM sont très proches (entre -1.83% et 2.32% d'erreur). Il est difficile de quantifier d'où proviennent ces légers écarts. Les principales sources peuvent provenir :

- Du nombre de simulations du Monte Carlo ;

- De la discrétisation du scatter diagram pour le long terme ;
- De la méthode d'intégration numérique pour le long terme ;
- De la qualité de l'ajustement de la distribution conjointe analytique.

	Monte Carlo	Long- terme	$H_s = H_{s\ 3\ mois}$	IFORM	
	Nombre de simulations	58440	6600	-	2880
T = 3 mois	F_{min} (N)	$-4.06.10^6$	$-4.03.10^6$	$-4.87.10^6$	$-4.16.10^6$
	Erreur relative	-	2.32%	19.9%	2.32%
	F_{max} (N)	$4.06.10^6$	$4.02.10^6$	$4.92.10^6$	$4.11.10^6$
	Erreur relative	-	1.25%	21.3%	1.25%
	M_{min} (N.m)	$-6.44.10^7$	$-6.33.10^8$	$-1.07.10^8$	$-6.53.10^7$
	Erreur relative	-	-1.83%	65.8%	1.30%
	M_{max} (N.m)	$6.44.10^7$	$6.45.10^8$	$1.07.10^8$	$6.44.10^7$
	Erreur relative	-	0.16%	66.8%	0.02%

Table 5 : Comparaison des résultats sur les extrêmes

Un point notable est que l'approche réglementaire consistant à calculer la réponse pour un ensemble de T_p pour $H_s = H_{s\ 3\ mois}$ est extrêmement conservative dans notre cas d'application. Cette remarque doit être prise avec du recul lors de l'étude d'autres types de réponses.

Monte Carlo, long terme et IFORM donnent des résultats très proches. L'approche IFORM permet d'effectuer un nombre de simulations réduit.

Une information intéressante que fournit IFORM contrairement aux méthodes de Monte Carlo et long-terme est l'identification des environnements conduisant à maximiser la réponse (Table 4). Par contre aucune information sur la surface de réponse n'est disponible, au contraire des autres méthodes, et la méthode doit être réappliquée à chaque nouvelle probabilité de défaillance.

A des fins de validation, la superposition du contour avec les iso-réponses montré en Figure 28 permet de vérifier la tangence du contour au niveau du point de design identifié par IFORM.

Les résultats Monte Carlo (et long terme) nous fournissent la distribution de réponse $P(X \leq x) = F(x)$ représentée en Figure 23 Au travers d'un ajustement sur cette distribution, nous avons accès la densité de probabilité de la réponse $f(X)$. Grâce

à cela nous pouvons construire la densité de probabilité d'un environnement, connaissant un niveau de réponse donné $f(H_s, T_p|X)$. Cette densité nous permet de savoir quels sont les environnements qui auront le plus de chances de faire apparaître la réponse visée. Comme $f(X, H_s, T_p) = f(X)f(H_s, T_p|X) = f(H_s, T_p)f(X|H_s, T_p)$, la densité de probabilité des évènements les plus impactant est calculée par :

$$f(H_s, T_p|X) = \frac{f(H_s, T_p)f(X|H_s, T_p)}{f(X)} \quad (20)$$

Cette densité de probabilité calculée à partir de la valeur de réponse 3 mois, superposée au contour IFORM avec chaque réponse maximale, est montrée en Figure 29. Deux observations peuvent être faites :

- Le contour passe bien au travers du pic du maximum de densité de probabilité ;
- Les états de mer identifiés par IFORM sont très proches de ce pic.

Finalement, pour notre cas d'application d'un cylindre fixe perçant la surface libre soumis à une houle irrégulière, les états de mer identifiés par IFORM peuvent être pris comme centre de discrétisation de l'espace de variables H_s et T_p afin d'effectuer des calculs plus poussés et lourds de type CFD. Cela revient à entreprendre une approche de type plan d'expérience (sur un modèle plus lourd) centré sur les environnements identifiés par IFORM (et son modèle léger).

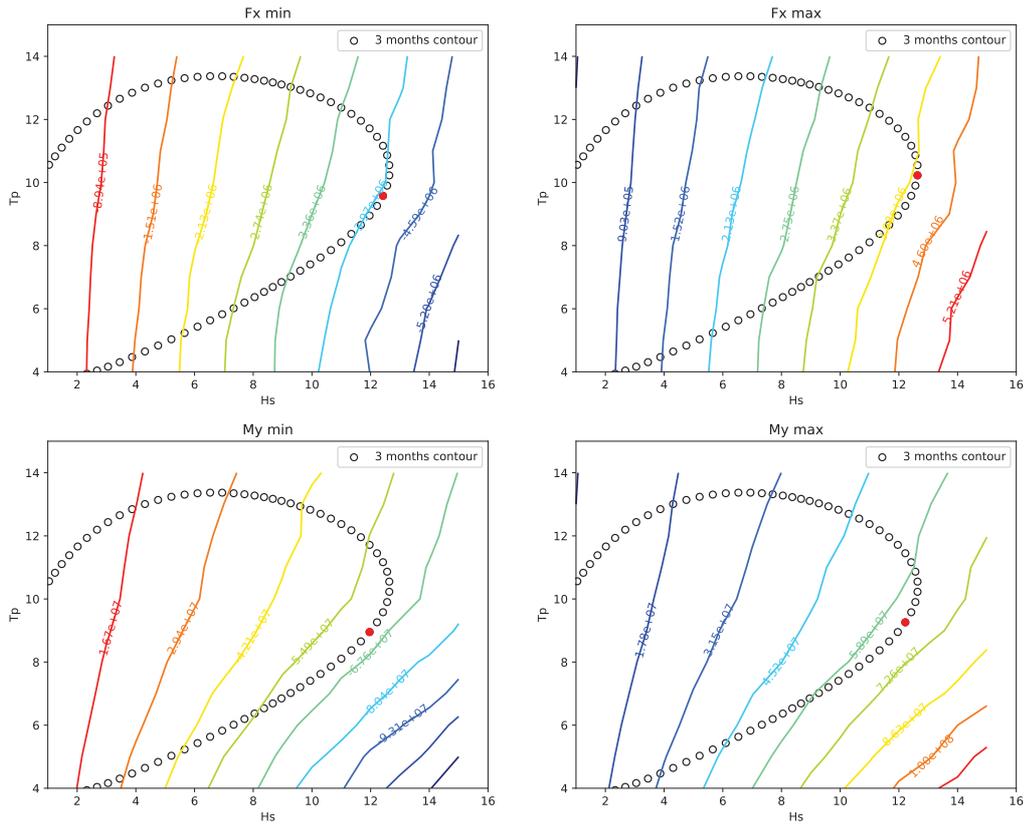


Figure 28 : Contour IFORM et iso-réponses

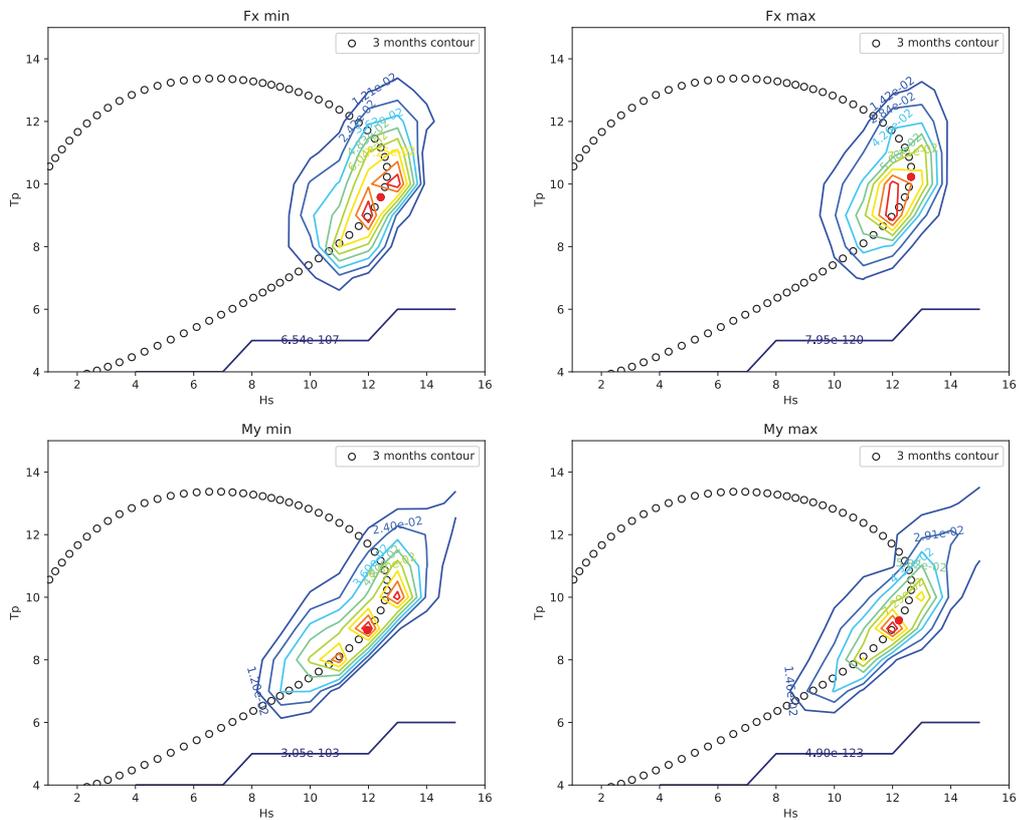


Figure 29 : Etats de mer les plus impactant

3.4 CONCLUSION

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du projet HYSMAR (HYdrodynamique des Structures MARines, 2011-2014) porté par l'IRT Jules Verne et les résultats obtenus ont été présentés lors des conférences « 14èmes Journées de l'Hydrodynamique » (2014) [60] et « EWTEC » (2015) [24].

Les présents travaux avaient pour objectif de fournir une méthodologie faisant le lien entre une description statistique des environnements marins et des simulations numériques coûteuses en CFD. Nous avons proposé l'utilisation de la méthode IFORM pour faire un début de pont méthodologique. Un modèle analytique de réponse en efforts internes d'un mât d'éolienne offshore fixe soumis à des chargements hydrodynamiques non-linéaires de Morison sur houle irrégulière a été développé. La réponse extrême a été calculée suivant les approches IFORM, de Monte Carlo, d'intégration directe et réglementaire. Bien que le modèle hydrodynamique soit très non-linéaire, la réponse en efforts interne reste très régulière à la vue des surfaces de réponses. Sur le modèle considéré, la méthode IFORM permet d'obtenir une précision sur la valeur de l'extrême de l'ordre de $\pm 2\%$ par rapport à une approche directe de Monte Carlo, et du même ordre de grandeur qu'une approche par intégration de la surface de réponse.

Une vérification de la localisation des états de mer conduisant à la réponse extrême identifiés par IFORM a été effectuée à partir d'un calcul de répartition des états de mer les plus impactant issu du calcul long-terme mené en parallèle.

Les principaux avantages de la méthode IFORM sont les suivants :

- Faible coût comparé à une méthode par intégration de la surface de réponse ;
- Identification des couples de paramètres conduisant à la réponse maximale ;
- Pas de restriction sur le nombre de variables aléatoires caractérisant un environnement (houle, vent, courant, etc.) ;

Ses principaux désavantages sont les suivants :

- Pas de prise en compte de variable aléatoires discontinues. Certains auteurs [47,48] ont introduit la discontinuité d'état (discontinuité d'état de fonctionnement de l'éolienne en fonction de la vitesse de vent) dans le

modèle de simulation de la turbine lui-même. L'hypothèse de linéarisation au point de conception, intrinsèque à la méthode IFORM, est alors remise en cause ;

- Imprécise pour des réponses très non-linéaires [47,48] : il est nécessaire de garder un recul suffisant sur la réponse étudiée et si possible connaître les géométries de la surface de réponse ;
- Pas d'information pour plusieurs probabilités de défaillance.

Les recommandations que nous pouvons tirer de ces travaux est que la méthode IFORM, combinée à un modèle de simulation rapide, permet d'identifier des zones d'environnements les plus impactant à simuler avec une simulation plus fine. Cette conclusion est valable si le modèle rapide est suffisamment représentatif du modèle fin. Une phase de validation du modèle léger est donc nécessaire. Cette proposition méthodologique revient à une approche par paramètre de charge dimensionnant comme décrit en paragraphe 2.1. Une fois le point de design identifié, un quadrillage des paramètres d'environnement autour du point de design peut être effectué afin d'alimenter le modèle plus fin. Cette démarche correspond à la description de « multiple design seastates » décrite dans [14] et à une approche de type « plan d'expérience ». Dans le cas de l'étude d'une réponse via la CFD, plusieurs simulations de plusieurs heures pour avoir une description de la variabilité court terme sur des états de mer complètement développés ne seront pas envisageables. Dans ce cas, une conversion de la houle en vague de design [14,19] sera nécessaire.

L'utilisation de la méthode IFORM telle que proposée constitue donc un premier niveau d'une fusée à étage faisant le lien entre la description sous forme de distributions jointes des paramètres environnementaux, et le calcul de la réponse hydrodynamique extrême d'une éolienne offshore au travers d'un modèle CFD.

Maintenant que la brique méthodologique IFORM est posée, nous allons nous intéresser à l'étude de la méthode de tir pour le calcul d'éléments élancés statiques, toujours dans l'optique d'améliorer les méthodologies et modèles conciliant précision et performance de calcul. Comme mentionné plus haut, la méthode de tir s'incorpore comme brique de modélisation des éléments élancés dans le contexte de simulation globale d'une éolienne flottante.

Chapitre 4 : La méthode de tir

Table des matières

4.1	Etude bibliographique	71
4.1.1	Rappel du contexte.....	71
4.1.2	Méthode de tir.....	73
4.1.3	Approches concurrentes : avantages / inconvénients.....	78
4.2	Méthodes de tir appliquées aux fils et aux poutres	79
4.2.1	Equations de la statique des fils.....	79
4.2.2	Equations de la statique des poutres	83
4.2.3	Conditions aux limites	94
4.2.4	Les différentes méthodes de tir.....	101
4.3	Résultats de la méthode.....	117
4.3.1	Exemple n°1 : Fil caténaire rotule-prismatique	118
4.3.2	Exemple n°2 : Fil caténaire sous plusieurs combinaisons de conditions aux limites.....	123
4.3.3	Exemple n°3 : Fil soumis à un effort radial	127
4.3.4	Exemple n°4 : Configuration de fils à trois brins convergents	131
4.3.5	Exemple n°5 : Poutre en grandes rotations	134
4.3.6	Exemple n°6 : Poutre fléchie en hélice.....	138
4.3.7	Exemple n°7 : Poutre console initialement torsadée.....	142
4.3.8	Exemple n°8 : Poutre console à 45°.....	143
4.3.9	Exemple n°9 : Poutre simple soumise à un effort linéique triangulaire.....	145
4.3.10	Exemple n°10 : Poutre simple avec changement d'inertie	147
4.3.11	Exemple n°11 : Poutre articulée	150
4.3.12	Exemple n°12 : Portique en T.....	152
4.4	Conclusion	154

4.1 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

4.1.1 Rappel du contexte

Plusieurs approches issues des milieux Oil & Gas et éolien onshore peuvent être envisagées pour l'étude de l'évolution en temps des éléments élancés d'une éolienne offshore : l'approche dynamique et l'approche quasi-statique. La première approche a l'avantage de tenir compte des effets dynamiques, et est donc théoriquement plus précise mais peut induire en pratique des problèmes de précision et/ou de convergence. Les paramètres de discrétisation doivent alors être raffinés, conduisant à des simulations plus longues. La seconde approche consiste à supposer les éléments poutres et/ou fils composant l'éolienne en équilibre statique à chaque pas de temps. Elle a l'avantage de s'affranchir de problèmes de convergence liés à la résolution temporelle, et permet théoriquement l'utilisation de pas de temps plus larges afin de réduire les temps de simulation. De plus, afin d'initialiser des calculs dynamiques, une méthode de résolution statique est nécessaire. Dans la pratique, les codes de calcul éolien initialisent les éléments élancés à partir d'une géométrie non chargée, et les débuts de simulations comportent nécessairement des phases transitoires de relaxation devant être retirées des résultats finaux.

Les types de modèles structurels (pales, tour et/ou ancrage) utilisés en éolien offshore ont été vus dans l'état de l'art général en paragraphe 2.2.3, et sont au nombre de trois : l'approche modale, l'approche multi-corps dynamique et l'approche EF 1D dynamique. L'avantage de ces méthodes est le fort recul de l'état de l'art sur ces approches : mises en œuvre EF et multi-corps maîtrisées, application à des géométries non-linéaires et discontinues, généralisation naturelle des approches discrètes dans leur utilisation dans un contexte multi-corps, etc. Les approches discrètes EF ou multi-corps permettent également d'effectuer des analyses modales afin de vérifier les caractéristiques globales de masse et de raideur du modèle de l'éolienne. Les équations finales des poutres écrites en dynamique issues de ces méthodes de calcul de structure s'interfaçent directement pour le couplage aérodynamique avec la BEMT. Cette dernière base en effet son calcul de coefficients d'induction sur une discrétisation des sections aérodynamiques le long des pales, fournissant des charges aérodynamiques discrétisées facilement applicables sur un maillage. Les limites de ces approches

concernent la bonne convergence des champs sur les maillages. Cette précision est impactée par les paramètres de discrétisation en espace et en temps. Des études de convergence sont nécessaires et se rajoutent au nombre de cas de chargement normatifs. De plus, les valeurs des paramètres pour une bonne convergence peuvent dépendre des cas de chargement, ce qui peut être source d'erreur et ce qui nécessite donc une réelle expertise. La conséquence de cette limitation, déjà discutée en paragraphe 2.2.3, concerne les temps de calcul des méthodes discrétisées. La prise en compte des phénomènes dynamiques nécessite des discrétisations en espace fines pour maintenir une précision acceptable et entraîne des temps de calculs élevés [22].

Compte tenu des limitations inhérentes à l'approche dynamique pour l'analyse des structures élancées, il s'agit ici de tirer profit du retour d'expérience issu du secteur Oil & Gas pour l'appliquer au secteur éolien offshore et envisager le problème sous l'angle de la modélisation quasi-statique. Afin de marquer une rupture méthodologique avec les méthodes discrètes utilisées dans la concurrence, et dans l'optique de s'appuyer sur les avantages de précision et vitesse de la méthode de tir observés sur la résolution statique des modèles caténaux, le Dr Thomas Gazzola a initié des travaux sur l'application de la méthode à des corps élancés 3D visant des applications pour des études d'ancrages et de risers, travaux n'ayant pas fait l'objet de publication. De premiers résultats encourageants ont été obtenus en utilisant une méthode de tir simple pour résoudre les équations de la statique des fils et poutres avec et sans contact avec une surface solide. Les conditions aux limites étaient écrites au cas par cas et limitées à trois types : rotules, encastrement et libre. De plus, le paramétrage en cosinus directeurs des rotations des sections de poutre entraînait des traitements spécifiques selon les combinaisons de conditions aux limites étudiées. Ces deux aspects sont limitants dans le cadre de la simulation en service d'éoliennes offshore car d'autres types de liaisons mécaniques faisant office de conditions aux limites doivent être représentés : liaison rotule pour les amarrages, encastrement pour les pieds pales, libre pour les bouts de pales, flexjoint pour les câbles d'export de courant, pivot pour l'arbre du rotor, etc. Dans l'optique d'une résolution statique des éléments rigides et élancés, il s'agit donc de pouvoir étudier indifféremment tous types de conditions aux limites, de s'affranchir de cas particuliers dus au choix du paramétrage en rotation des sections matériau et de se placer dans un contexte multi-corps.

De plus, les configurations de systèmes d'ancrage, souvent issues de l'expérience de l'Oil & Gas, peuvent être complexes : bouée, tronçon flottant, matériaux de types différents pouvant être articulés au travers de liaisons cinématiques, etc. Au contraire des méthodes discrètes comme les éléments finis et les différences finies, la méthode de tir est une méthode continue. Les différentes configurations mentionnées sont vues comme des discontinuités d'un point de vue des corps élançés, et il est primordial de pouvoir traiter ces cas via la méthode de tir.

Les paragraphes suivants décrivent donc l'extension de la méthode de tir pour répondre à la problématique de résolution statique des corps élançés 3D dans un contexte multi-corps.

4.1.2 Méthode de tir

La méthode de tir est une technique de résolution de problèmes dits « aux deux bouts » (TPBVP) régis par une équation différentielle ordinaire [61] (ODE) ainsi qu'un couple de conditions aux initiales et finales. C'est une méthode basée sur le Principe du Maximum de Pontriaguine [62], utilisée en contrôle optimal afin de déterminer les solutions cibles d'un problème différentiel en temps [44]. Elle fait partie des méthodes de résolution dites indirectes, contrairement aux méthodes directes (telles que les éléments finis et les différences finies) qui impliquent une discrétisation totale ou partielle du problème. Du fait de sa grande précision, la méthode de tir a été utilisée lors des problèmes de mise en orbite [44] permettant de calculer les lois de contrôle pour atteindre une trajectoire cible. Dans des domaines se rapprochant de la mécanique, elle a été utilisée dans la modélisation de robots classiques (bras articulé) [45] ou en milieu médical (robot souple continu) [63] pour ses performances de temps de calcul en temps réel comparée aux méthodes discrètes. La méthode de tir a également été utilisée en offshore pour l'analyse la configuration d'équilibre quasi-statique de câbles sous-marins se déformant en 3D. Les cas d'application concernaient l'étude du profil et des tensions d'une ligne simple soumise à de la gravité et du courant et connectant, au travers de liaison rotules, un bateau à un engin au fond de l'eau [64,65].

La méthode de tir permettant la résolution de problèmes gouvernés par une ODE, son application à des cas dynamiques gouvernés par des équations aux dérivées

partielles (PDE) n'est pas directe. Deux possibilités peuvent classiquement être considérées : utiliser la méthode des caractéristiques pour reformuler le PDE en ODE (une reformulation des conditions aux limites en fonctions des variables caractéristiques est nécessaire) ; ou alors discrétiser la dérivée en temps afin de revenir au formalisme développé dans ce mémoire en tenant compte de termes inertiels supplémentaires dans le bilan des efforts [43]. Enfin, dans le domaine mécanique toujours en lien avec l'application originelle de détermination de solutions cibles en temps, la méthode de tir a été utilisée pour le calcul de modes propres non-linéaires de poutres à section variable [66,67,68].

Afin d'illustrer la méthode, considérons la résolution d'un problème aux limites basé sur l'ODE du second ordre suivante :

$$\begin{aligned} y''(x) &= F(x, y(x), y'(x)), & x \in]a, b[\\ y(a) &= \alpha, y(b) = \beta \end{aligned} \tag{21}$$

La solution de ce type de problème n'existe pas forcément et n'est pas forcément unique si elle existe. Les conditions imposées aux bords sont de type Dirichlet. En revanche, le problème aux conditions initiales (22) (IVP), faisant intervenir la même équation différentielle possède, en général, une unique solution qui dépend du choix de la valeur t dans la condition $y'(a) = t$.

$$\begin{aligned} y''(x) &= F(x, y(x), y'(x)), & x \in]a, b[\\ y(a) &= \alpha, y'(a) = t \end{aligned} \tag{22}$$

On observe que les conditions imposées sont cette fois de types différents, le problème aux limites a été converti en un problème de Cauchy. Pour obtenir une solution du problème (21), une méthode consiste à trouver $t = \bar{t}$ de manière à ce que la solution correspondante $y = y(x, \bar{t})$ du problème aux conditions initiales (22) satisfasse la condition aux limites $y(b) = y(b, \bar{t}) = \beta$. Cela revient à rechercher t annulant la fonction de contrainte $C(t)$:

$$C(t) = y(b, t) - \beta \tag{23}$$

La famille de méthodes de résolution de problèmes aux limites faisant appel à la résolution d'une succession de problèmes aux valeurs initiales porte le nom de

méthodes de tir. Dans le cas où (22) est un problème aux limites linéaire, il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x)y'(x) + g(x)y(x) + h(x), & x \in]a, b[\\ y(a) &= \alpha, y(b) = \beta \end{aligned} \quad (24)$$

Où f , g et h sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et α et β les valeurs aux limites. Sous ces hypothèses, il existe une unique paire de fonctions (y_1, y_2) de classe C^2 sur $[a, b]$ solutions respectivement des problèmes (25) et (26).

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= f(x)y_1'(x) + g(x)y_1(x) + h(x), & x \in]a, b[\\ y_1(a) &= \alpha, y_1'(a) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y_2''(x) &= f(x)y_2'(x) + g(x)y_2(x), & x \in]a, b[\\ y_2(a) &= 0, y_2'(a) = 1 \end{aligned} \quad (26)$$

La solution de (24) s'écrivant pour $y_2(b) \neq 0$ (le cas $y_2(b) = 0$ implique $y_2 \equiv 0$ compte tenu de (26)) :

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \quad (27)$$

Dans un cas d'équations différentielles ordinaires linéaires, la solution du problème aux limites est obtenue par combinaison linéaire des solutions de deux problèmes aux valeurs initiales.

La méthode de résolution du cas non-linéaire général décrit par (22) est identique à la technique de résolution linéaire, à l'exception près que la solution du problème non-linéaire ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de solutions de deux problèmes aux valeurs initiales. Au lieu de cela, la solution du problème non-linéaire est obtenue comme une suite de solutions de problèmes aux valeurs initiales faisant intervenir la pente $t = t_k$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b, \bar{t}) = y(b) = \beta \quad (28)$$

Où $y(x, t_k)$ est la solution du problème aux valeurs initiales (22) et $y(x)$ la solution du problème aux valeurs limites (21). Le but est de venir ajuster la pente

comme l'on viendrait ajuster son tir en visant une cible statique, d'où le nom de la méthode (Figure 30).

La procédure consiste à initier le tir à la pente t_0 à partir du point (a, α) . Si $y(b, t_0)$ n'est pas suffisamment près de β , on corrige l'élévation successivement en t_1, t_2 , jusqu'à ce que $y(b, t_k)$ soit suffisamment près pour *toucher* β (Figure 31).

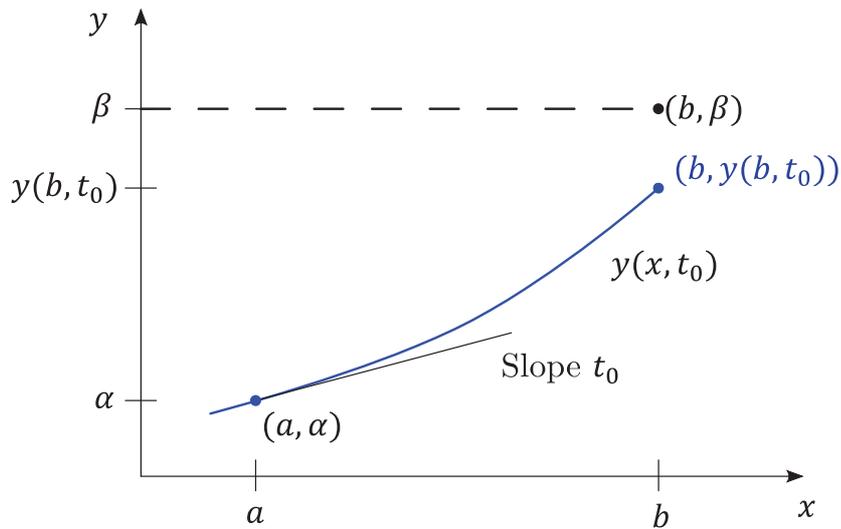


Figure 30 : Illustration de la méthode de tir

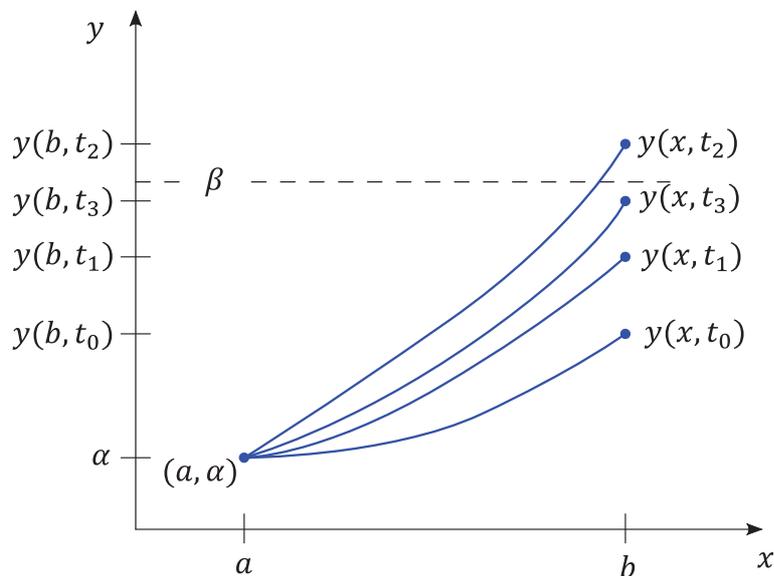


Figure 31 : Itérations de la méthode de tir

La suite de pentes t_k est obtenue par la résolution de la fonction de contrainte décrite en (23). La méthode de Newton est la plus utilisée. L'actualisation de t_k en dimension 1 est donnée par (29) et en dimension $n > 1$ par (30).

$$t_{k+1} = t_k - \frac{C(t_k)}{\frac{dC}{dt}(t_k)} = t_k - \frac{y(b, t_k) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_k)} \quad (29)$$

$$t_{k+1} = t_k - \left(\frac{dC}{dt}(t_k) \right)^{-1} C(t_k) \quad (30)$$

L'expression de $\frac{dy}{dt}(b, t_k)$ n'est pas connue et peut s'évaluer numériquement par différence finie de façon classique ou par intégration d'un problème aux valeurs initiales. Dans le second cas si l'on vient écrire (22) en faisant dépendre la solution de t telle que $F(x, y(x, t), y'(x, t))$, il vient :

$$\frac{dy''}{dt}(x, t) = \frac{dF}{dy}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dy'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{dy'}{dt} \quad (31)$$

$$\frac{dy}{dt}(a, t) = 0$$

$$\frac{dy'}{dt}(a, t) = 1$$

En posant $z(x, t) = \frac{dy}{dt}(x, t)$, (31) se met sous la forme du problème aux valeurs initiales :

$$z''(x, t) = \frac{dF}{dy}(x, y(x, t), y'(x, t))z + \frac{dF}{dy'}(x, y(x, t), y'(x, t))z' \quad (32)$$

$$z(a, t) = 0$$

$$z'(a, t) = 1$$

L'intégration de (32) permet d'évaluer la quantité $\frac{dy}{dt}(b, t)$ nécessaire à l'actualisation de t au travers de (29). La méthode de Newton avec calcul du jacobien semi-analytiquement nécessite donc l'intégration (numérique) de deux problèmes aux valeurs initiales (22) et (32).

4.1.3 Approches concurrentes : avantages / inconvénients

Une revue des avantages et inconvénients des méthodes EF et différences finies (multi-corps) pour la modélisation des poutres a été effectuée dans l'état de l'art général en paragraphe 2.2.3. Il s'agit ici d'en rappeler les grandes lignes à comparer avec les caractéristiques de la méthode de tir vue sous l'angle de la théorie du contrôle.

En faisant le parallèle avec la théorie du contrôle optimal [44], les méthodes directes (type EF) présentent l'avantage de ne pas avoir besoin de connaissance a priori de la solution (de l'état statique final) pour obtenir la convergence, permettent la prise en compte de contraintes sur le vecteur état (au travers de liaisons cinématiques) de façon simple, et elles sont robustes numériquement. Par contre, ces approches sont gourmandes en mémoire, en temps de calcul, et peuvent être imprécises du fait de la méthode de discrétisation utilisée ainsi que du pas de temps utilisé. Les méthodes indirectes (type méthode de tir) présentent quant à elles l'avantage d'avoir une très grande précision pour des temps de calculs faibles même pour des problèmes de grande dimension (possibilité de paralléliser les calculs lors de l'intégration de tronçons en multi-tir). De plus, elles transfèrent naturellement et de façon automatique le problème de contrôle de l'erreur et du pas d'intégration au niveau du solveur du problème aux valeurs initiales, permettant à son utilisateur de s'affranchir de ces tâches critiques. Elles ont l'inconvénient d'être moins robustes : sensibilité aux valeurs initiales et petit domaine de convergence autour de la solution recherchée. La technique de tir multiple (multi-tir) qui sera décrite dans les paragraphes suivants permet une augmentation du rayon de convergence de la méthode simple présentée ici [69]. Comme la méthode de tir utilise généralement des algorithmes de Newton, des techniques de modification de la direction de descente sont utilisées afin d'améliorer la convergence de l'algorithme [70].

Bien qu'utilisée sur des problèmes spécifiques de câbles ou de poutres, l'état de l'art n'établit pas de généralisation du formalisme de la méthode de tir appliquée aux fils, poutres avec plusieurs types de conditions aux limites et multi-corps statique. C'est l'objectif du travail qui sera décrit dans la suite de ce chapitre.

4.2 METHODES DE TIR APPLIQUEES AUX FILS ET AUX POUTRES

Ce paragraphe rappelle la cinématique des fils et des poutres, les lois de comportement élastique ou indéformable, et les équations d'équilibre associées. Un formalisme d'écriture des conditions aux limites de manière compatible avec la méthode de tir sera proposé. Nous développerons les équations de la méthode de tir simple dans ce nouveau formalisme. Nous introduirons ensuite la méthode de tir multiple pour l'étude des discontinuités sur un segment unique. Enfin, dans l'objectif de modéliser statiquement des segments interconnectés, nous proposerons une extension de la méthode de tir multiple classique : la méthode multi-corps/multi-tir.

Précisons dès à présent que la notation \tilde{a} sera utilisée pour designer la matrice antisymétrique du produit vectoriel issue du vecteur $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ telle que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{a}\mathbf{b}$ avec :

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

4.2.1 Equations de la statique des fils

Le problème aux limites d'un modèle poutre est constitué d'une équation différentielle ordinaire associée à deux conditions aux limites aux extrémités du segment. La formulation de la théorie des poutres dérive du formalisme défini dans [71]. Aucune hypothèse de petites déformations ou petits déplacements n'est prise, et le fil peut être soumis à de grandes déformations en extension. Les hypothèses qui sont prises pour la cinématique du fil sont les suivantes :

- (i) la configuration de la poutre est définie comme un ensemble de points matériels dans l'espace (sections matérielles) ayant la propriété de représenter une courbe dans \mathbb{R}^3 ;
- (ii) le fil est supposé parfaitement flexible et n'est soumis qu'à des déformations en extension suivant la fibre neutre ;
- (iii) les fonctions définissant les propriétés géométriques et mécaniques sont suffisamment régulières pour être dérivées autant de fois que nécessaire (en général une classe C^1 ou C^2 suffit).

Cinématique du point matériel

A partir de (i), le paramétrage d'un point matériel se fait par la description d'un vecteur global $\mathbf{r}(s)$ identifié dans un système de coordonnées globales par le paramètre s . Ce paramètre est pris comme l'abscisse curviligne sur la configuration de référence (configuration non contrainte) $\mathbf{r}^0(s)$ tel que $v^0(s) = |\partial_s \mathbf{r}^0(s)| = 1$, où $\partial_s \cdot$ est la dérivée partielle par rapport au paramètre s .

A partir de (i) et (ii) l'élongation v est définie telle que $v(s) = |\partial_s \mathbf{r}(s)| > 0$. Sur la configuration de référence l'abscisse curviligne est définie sur l'intervalle $s \in [0, L]$. La longueur à vide (non déformée) est obtenue par la relation $L = \int_0^L v^0(s) ds$. La longueur déformée s'obtient quant à elle par $l = \int_0^L v(s) ds$.

Dans cette description géométrique, nous introduisons le vecteur d'élongation $\mathbf{v}(s)$ qui représente les déformations suivant la fibre neutre de la configuration déformée, ainsi que sa norme $v(s)$ qui est valeur de l'allongement. Il vient l'équation différentielle décrivant les déformations géométriques du problème de statique des fils :

$$\partial_s \mathbf{r}(s) = \mathbf{v}(s) = v(s) \frac{\partial_s \mathbf{r}(s)}{|\partial_s \mathbf{r}(s)|} \quad (34)$$

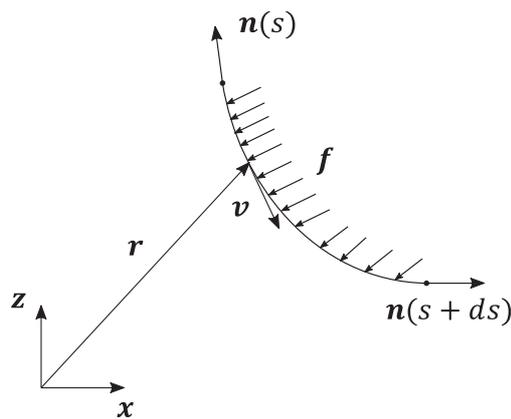


Figure 32 : Cinématique de fils

Equations d'équilibre

Les forces et moments agissant sur un segment générique (a, s) avec $0 < a < s < L$ sont les efforts (internes) de contact $\mathbf{n}^+(s)$ exercés par le segment (s, L) sur (a, s) , et $-\mathbf{n}^-(a)$ les efforts de contact (internes) exercés par le segment $(0, a)$ sur le segment (a, s) .

Nous supposons que tous les autres types de forces (externes) appliqués à un segment sont de la forme $\int_a^s \mathbf{f}(\xi) d\xi$, où $\mathbf{f}(s)$ sont les forces par unité de longueur (aussi dénommés *linéiques* ou *distribuées*) agissant sur le fil. Les vecteurs \mathbf{n}^- , \mathbf{n}^+ et \mathbf{f} sont définis dans le système de coordonnées global. Pour tout $0 < a < s < L$, l'équation d'équilibre statique du segment (a, s) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{n}^+(s) - \mathbf{n}^-(a) + \int_a^s \mathbf{f}(\xi) d\xi = 0 \quad (35)$$

La condition de continuité (iii) impose $\mathbf{n}^+(a) = \mathbf{n}^-(a) = \mathbf{n}(a)$ lorsque $s \rightarrow a$. Si l'on suppose un segment élémentaire de longueur ds , alors la convention de signe pour \mathbf{n} est la suivante : les forces exercés par le point matériel situé à $s + ds$ sur le point matériel situé à s (de la droite sur la gauche) sont positifs.

Finalement, en venant différentier (35) par rapport à l'abscisse curviligne s , la seconde équation différentielle du problème portant sur le vecteur tension \mathbf{n} est obtenue :

$$\partial_s \mathbf{n}(s) = -\mathbf{f}(s) \quad (36)$$

Loi de comportement

La loi de comportement caractérise les propriétés matériaux du fil au travers d'une relation liant les forces de contact \mathbf{n} avec le changement de forme du fil pour toute configuration \mathbf{r} . L'hypothèse (ii) impose $\partial_s \mathbf{r}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$, $\forall s \in [0, L]$. En utilisant (34) nous définissons la loi de comportement comme :

$$\mathbf{v}(s) = \hat{v}(|\mathbf{n}(s)|, s) \frac{\mathbf{n}(s)}{|\mathbf{n}(s)|} \quad (37)$$

$\hat{v}(|\mathbf{n}(s)|, s) = v(s) > 0$ est l'élongation déjà introduite dans les paragraphes précédents qui ne dépend que de la norme de vecteur de tension. Cette définition impose évidemment $|\mathbf{n}(s)| \neq 0$.

L'équation (37) représente la forme générale de loi de comportement pour un fil. Selon la fonction d'élongation $\hat{v}(|\mathbf{n}(s)|, s)$ prise en compte, il est possible de modéliser un comportement en élasticité linéaire, hyperélastique ou au contraire inextensible. Seuls les cas en élasticité linéaire (38), et inextensible (39) seront traités par la suite.

$$\hat{v}(|\mathbf{n}(s)|, s) = 1 + \frac{|\mathbf{n}(s)|}{E(s)A(s)} \quad (38)$$

$$\hat{v}(|\mathbf{n}(s)|, s) = 1 \quad (39)$$

Où $E(s)$ et $A(s)$ sont respectivement le module d'Young et l'aire de la section matérielle, pouvant dépendre de l'abscisse curviligne. Injecter (38) et (39) dans (37), nous permet d'obtenir avec (34) les équations différentielles géométriques (40) pour le cas de l'élasticité linéaire et (41) pour le cas inextensible.

$$\partial_s \mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{|\mathbf{n}(s)|}{EA} \right) \frac{\mathbf{n}(s)}{|\mathbf{n}(s)|} \quad (40)$$

$$\partial_s \mathbf{r}(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{|\mathbf{n}(s)|} \quad (41)$$

Bilan des équations du système différentiel

Pour les fils, nous introduisons le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ tel que $\boldsymbol{\varphi}(s) = [\mathbf{r}(s), \mathbf{n}(s)]^T$ pour mettre les équations sous la forme $\partial_s \boldsymbol{\varphi} = F(\boldsymbol{\varphi}, s)$. En considérant l'équilibre statique des efforts internes, l'équation géométrique et les lois de comportement, le système d'équation de la statique des fils s'écrit pour un fil inextensible :

$$\partial_s \boldsymbol{\varphi} = \begin{cases} \partial_s \mathbf{r} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \\ \partial_s \mathbf{n} = -\mathbf{f} \end{cases} \quad (42)$$

Et pour un fil en élasticité linéaire :

$$\partial_s \boldsymbol{\varphi} = \begin{cases} \partial_s \mathbf{r} = \left(1 + \frac{|\mathbf{n}|}{EA} \right) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \\ \partial_s \mathbf{n} = -\mathbf{f} \end{cases} \quad (43)$$

Evolution des champs finaux par rapport aux valeurs initiales

Le but est de calculer $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}(s = L)$ qui sera utilisé dans le calcul du jacobien du problème de tir. Nous utilisons la même démarche que présentée en paragraphe 4.1.2 et nous venons faire dépendre la solution $\boldsymbol{\varphi}$ des valeurs initiales $\boldsymbol{\varphi}_0$ tel que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(s, \boldsymbol{\varphi}_0)$. En venant dériver $\partial_s \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)$ par rapport à $\boldsymbol{\varphi}_0$, nous obtenons l'IVP linéaire suivant :

$$\partial_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0} \right) = \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}(s = 0) = I$$

En intégrant cet IVP, nous pouvons évaluer $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}$ à $s = L$. Pour cela, il s'agit maintenant d'estimer les termes non nuls de $\frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$ pour les équations (42) et (43). A partir de (37) nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\hat{v}(|\mathbf{n}|) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right) = \hat{v}'(|\mathbf{n}|)I + \left(\hat{v}'(|\mathbf{n}|) - \frac{\hat{v}(|\mathbf{n}|)}{|\mathbf{n}|} \right) \frac{\tilde{\mathbf{n}}^2}{|\mathbf{n}|^2} \quad (45)$$

Nous laissons la possibilité aux efforts extérieurs de dépendre de la position courante \mathbf{r} ainsi que de la tangente $\mathbf{t} = \frac{\partial_s \mathbf{r}}{|\partial_s \mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ tel que $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$. Nous supposons connues les expressions des dérivées $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ et $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$. Dans ce cas :

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}} \left(\mathbf{r}, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right) \frac{\tilde{\mathbf{n}}^2}{|\mathbf{n}|^2} \quad (46)$$

4.2.2 Equations de la statique des poutres

La cinématique associée aux modèles poutres peut être vue comme une complexification de la cinématique des fils pour laquelle nous venons rajouter la notion d'orientation d'une section du corps élancé. Nous verrons que la prise en compte des rotations dans le cadre théorique nécessite un traitement particulier supplémentaire comparé au formalisme des fils. L'approche de mise en équation reste cependant la même.

Le problème aux limites d'un modèle poutre est également constitué d'une équation différentielle ordinaire associée à deux conditions aux extrémités du segment. Que ce soit la théorie d'Euler-Bernoulli, Timoshenko [72], Kirchhoff-Love [73,74], Simo-Reissner [75] ou Cosserat [76], toutes sont basées sur l'hypothèse que les sections normales à la fibre neutre suivent une cinématique de corps rigide. La formulation la plus générale de la théorie des poutres des frères Cosserat est utilisée dans la suite, dont le formalisme dérive de Antman [71]. Aucune hypothèse de petites déformations ou petits déplacements n'est considérée, et la poutre peut être soumise à de grandes déformations couplant flexion, torsion, extension et cisaillement. Les hypothèses qui sont retenues pour la cinématique de poutre sont les suivantes :

- (i) la configuration de la poutre est définie comme un ensemble de points matériels orientés dans l'espace (sections matérielles) ayant la propriété de représenter une courbe dans \mathbb{R}^3 ,
- (ii) les sections matérielles ont une cinématique de corps rigide,
- (iii) les fonctions définissant les propriétés géométriques et mécaniques sont suffisamment régulières pour être dérivées autant de fois que nécessaire (en général une classe C^1 ou C^2 suffit)

Cinématique du point matériel

A partir de (i), le paramétrage d'un point matériel se fait par la description d'un vecteur global $\mathbf{r}(s)$ définissant le champ géométrique de position du point, et par deux vecteurs $\mathbf{d}_1(s)$ et $\mathbf{d}_2(s)$ contenus dans le plan de la section matérielle comme indiqué en Figure 33. L'hypothèse (ii) impose que l'angle entre \mathbf{d}_1 et \mathbf{d}_2 soit constant (mouvement de corps rigide). Par soucis de simplicité, \mathbf{d}_1 et \mathbf{d}_2 sont choisis orthogonaux. Nous pouvons donc définir un troisième vecteur \mathbf{d}_3 orthogonal aux deux derniers cités tel que $\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$. Ces trois vecteurs sont appelés *directeurs* et, tels que définis, constituent le second champ géométrique par leur assemblage en la matrice de rotation $R(s)$ représentant l'orientation de la section. Les deux champs géométriques $\mathbf{r}(s)$ et $R(s)$ dépendent du paramètre s identifié comme l'abscisse curvilinéaire sur la configuration de référence (configuration non contrainte) $(\mathbf{r}^0(s), R^0(s))$ tel que $\partial_s \mathbf{r}^0(s) = \mathbf{v}^0(s)$ et $\partial_s R^0(s) = \tilde{u}^0(s) R^0(s)$ où $\partial_s \cdot$ est la dérivée partielle par rapport au paramètre s . Sur la configuration de référence

l'abscisse curviligne est définie sur l'intervalle $s \in [0, L]$. La longueur non déformée du segment matériel est $L = \int_0^L |\mathbf{v}^0(s)| ds$. \mathbf{v}^0 et \mathbf{u}^0 sont respectivement les vecteurs pré-déformation et pré-courbure (i.e. déformation et courbure sur la configuration de référence non contrainte).

A partir de la description géométrique, nous introduisons les vecteurs de déformation $\mathbf{v}(s)$ et de courbure $\mathbf{u}(s)$ tels que :

$$\partial_s \mathbf{r}(s) = \mathbf{v}(s) \quad (47)$$

$$\partial_s R(s) = \tilde{\mathbf{u}}(s)R(s) \quad (48)$$

Le vecteur \mathbf{u} représente les courbures le long des vecteurs colonnes de $R = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3]$ qui sont les trois directeurs \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 et \mathbf{d}_3 de la théorie des poutres de Cosserat. $\mathbf{v}(s)$ et $\mathbf{u}(s)$ sont appelées déformations généralisées.

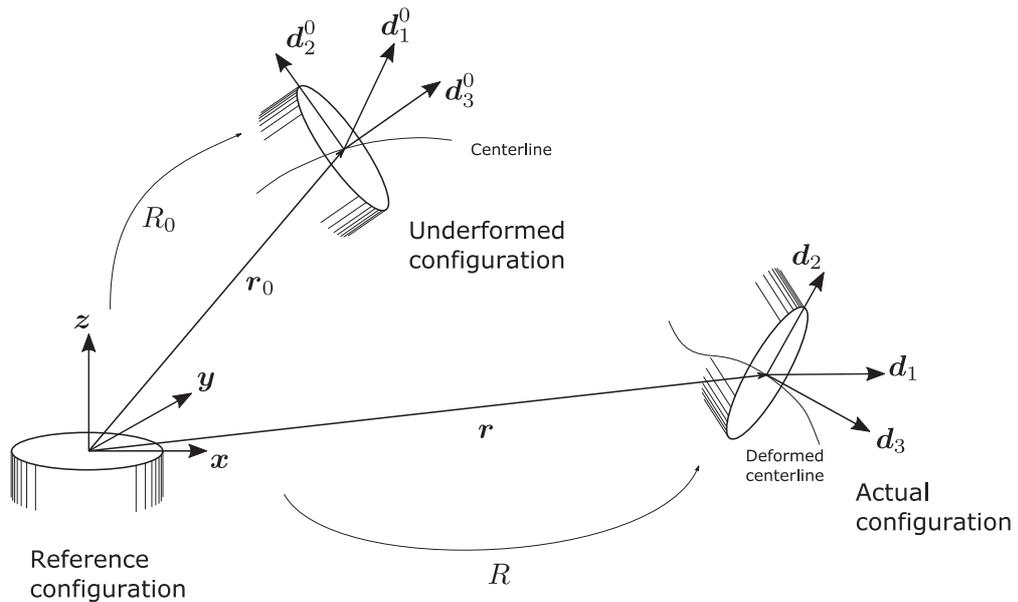


Figure 33 : Cinématique de poutre

Equations d'équilibre

Le processus de définition des efforts et moments internes est identique à celui effectué pour le cas des fils. Les forces et moments agissant sur un segment générique (a, s) avec $0 < a < s < L$ sont les efforts (interne) de contact $\mathbf{n}^+(s)$ et $\mathbf{m}^+(s)$ exercés par le segment (s, L) sur (a, s) et $-\mathbf{n}^-(a)$ et $-\mathbf{m}^-(a)$ les efforts de contact (interne) exercés par le segment $(0, a)$ sur le segment (a, s) .

Nous supposons que tous les autres types de forces et de moments appliqués à un segment sont de la forme $\int_a^s \mathbf{f}(\xi)d\xi$ et $\int_a^s \mathbf{l}(\xi)d\xi$. Où $\mathbf{f}(s)$ et $\mathbf{l}(s)$ sont les forces et moments par unité de longueur (aussi dénommés *linéiques* ou *distribués*) agissant sur la poutre. Les vecteurs \mathbf{n}^+ , \mathbf{n}^- , \mathbf{m}^+ , \mathbf{m}^- , \mathbf{f} et \mathbf{l} sont définis dans le système de coordonnées global. Pour tout $0 < a < s < L$, l'équation d'équilibre statique du segment (a, s) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{n}^+(s) - \mathbf{n}^-(a) + \int_a^s \mathbf{f}(\xi)d\xi = 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^+(s) - \mathbf{m}^-(a) + \mathbf{r}(s) \times \mathbf{n}^+(s) - \mathbf{r}(a) \times \mathbf{n}^-(a) \\ + \int_a^s \mathbf{r}(\xi) \times \mathbf{f}(\xi) + \mathbf{l}(\xi)d\xi = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

La condition de continuité (iii) impose $\mathbf{n}^+(a) = \mathbf{n}^-(a) = \mathbf{n}(a)$ et $\mathbf{m}^+(a) = \mathbf{m}^-(a) = \mathbf{m}(a)$ lorsque $s \rightarrow a$. Si l'on suppose un segment élémentaire de longueur ds , alors la convention de signe pour \mathbf{n} et \mathbf{m} est la suivante : les forces et moments exercés par le point matériel situé à $s + ds$ sur le point matériel situé à s (de la droite sur la gauche) sont positifs.

Finalement, en venant différentier (49) et (50) et en utilisant (47), les équations d'équilibre statique sont obtenues.

$$\partial_s \mathbf{n}(s) = -\mathbf{f}(s) \quad (51)$$

$$\partial_s \mathbf{m}(s) = -\mathbf{l}(s) - \mathbf{v}(s) \times \mathbf{n}(s) \quad (52)$$

Equations d'équilibre locales

Les équations (47), (48), (51) et (52) constituent les quatre équations différentielles du problème statique. Dans le but d'obtenir les équations différentielles projetées dans une base particulière, nous introduisons deux bases : une base fixe $\{\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}\}$ et la base des directeurs $\{\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3\}$. Un *champ de vecteur* \mathbf{a} peut se décomposer dans chaque base tel que $\mathbf{a} = a_x \mathbf{x} + a_y \mathbf{y} + a_z \mathbf{z} = a_1 \mathbf{d}_1 + a_2 \mathbf{d}_2 + a_3 \mathbf{d}_3$. Nous dénoterons un *vecteur de composantes* décrit dans la base $\{\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}\}$ avec la même notation que le champ de vecteur tel que $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ (minuscule, italique, gras) sans ambiguïté car les composantes des vecteurs \mathbf{r} , \mathbf{d}_k , \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{n} , \mathbf{m} sont

liées par les relations (47), (48), (51) et (52) dans la base inertielle. Une telle description correspond à une description spatiale.

Nous dénoterons le *vecteur de composantes* décrit dans la base $\{\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3\}$ par une police sans-serif, minuscule, gras tel que $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$. Les vecteurs de composantes \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{n} , \mathbf{m} font ainsi référence à une description matérielle. Le passage d'une base à l'autre se fait par l'introduction de la matrice de rotation $R = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3]$ tel que $\mathbf{a} = R\mathbf{a}$ et $\mathbf{a} = R^T \mathbf{a}$.

\mathbf{v} , \mathbf{u} sont les déformations généralisées (respectivement déformation et courbure) tel que u_1 et u_2 mesurent la flexion, u_3 décrit la torsion, v_1 et v_2 mesurent le cisaillement et v_3 la compression/dilatation [71].

Les équations d'équilibre écrites par rapport aux champs locaux \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{n} et \mathbf{m} sont données par les équations (53) à (56) dans lesquelles la dépendance à s a été omise pour plus de clarté.

$$\partial_s \mathbf{r} = R\mathbf{v} \quad (53)$$

$$\partial_s R = R\tilde{\mathbf{u}} \quad (54)$$

$$\partial_s \mathbf{n} = -R^T \mathbf{f} - \mathbf{u} \times \mathbf{n} \quad (55)$$

$$\partial_s \mathbf{m} = -R^T \mathbf{l} - \mathbf{v} \times \mathbf{n} - \mathbf{u} \times \mathbf{m} \quad (56)$$

Dans (54) $\tilde{\mathbf{u}}$ est la matrice anti-symétrique générée par le vecteur \mathbf{u} où \mathbf{u} représente la courbure en description *matérielle* (description locale) alors que \mathbf{u} se réfère à la courbure en description *spatiale* ou *inertielle*. Pour la description poutre, la description matérielle sera adoptée pour les *vecteurs de composantes* \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{n} et \mathbf{m} car la loi de comportement s'écrit de façon plus naturelle dans la base des directeurs.

Paramétrage de la matrice de rotation

L'intégration directe de (54) peut conduire à une accumulation d'erreurs qui tend à faire perdre la propriété d'orthonormalité de la matrice de rotation R .

De plus, le paramétrage de l'orientation au travers d'une matrice de rotation est redondant. Il est constitué en effet de 9 paramètres (matrice 3x3) pour 6 équations de contrainte (orthonormalité des vecteurs de base) conduisant à 3 degrés de libertés effectifs. La méthode de tir consiste à trouver le minimum d'une fonction contrainte

(avec une approche d'optimisation) en inversant le jacobien de la fonction contrainte dans la résolution de Newton. Le paramétrage redondant de la matrice de rotation peut induire des problèmes d'inversion du jacobien dont les lignes ne sont alors plus indépendantes.

Afin de pallier ces problèmes nous choisissons de paramétrer R avec les paramètres de Rodrigues modifiés (Modified Rodrigues Parameters - MRP, aussi dénommés paramètres de Wiener-Milenkovic [77]). Le paramétrage MRP permet de modéliser une rotation pour un angle compris dans l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$. Comme les angles d'Euler, les MRP constituent un ensemble minimal (non redondant) de trois degrés de liberté mais ne souffrent pas de la singularité cinématique bien connue du blocage de cardan des angles d'Euler. Le blocage de cardan se caractérise par un déterminant nul de la matrice cinématique de rotation (aussi appelée *spatial manipulator jacobian* en robotique [78]) dans certaines configurations. Cette matrice caractérise la relation entre la courbure \mathbf{u} et la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne des paramètres d'Euler. La méthode de tir nécessitant l'inversion de cette matrice lors de l'inversion du jacobien, un paramétrage avec une séquence unique d'angles d'Euler peut poser problème.

Soit la séquence 1-2-3 d'angles d'Euler donnée par le vecteur $\mathbf{a} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$ telle que $R = R_{123}(\mathbf{a}) = R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)$. La relation cinématique pour ce paramétrage est [79] :

$$\partial_s \mathbf{a} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (57)$$

Dans ce cas, la matrice cinématique de (57) est singulière pour $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, c'est le blocage de cardan. Les 12 séquences d'angles d'Euler présentent ce type de singularité ($\theta = k\pi$ pour une séquence symétrique, $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour une séquence asymétrique). Basculer d'une séquence à une autre en cours de résolution est possible, mais les relations de passage ne sont pas aussi simples et systématiques que dans le cas MRP comme nous allons le voir.

Les MRP ne souffrent pas d'une singularité cinématique mais d'une singularité d'orientation : une orientation particulière n'est pas définie. Parmi l'ensemble des

paramétrages à trois degrés de liberté, les MRP disposent du plus large champ de représentation d'orientation sans singularité. De plus, le paramétrage dual aux MRP, appelé le SMRP (Shadow Modified Rodrigues Parameters), permet de résoudre ce problème de singularité d'orientation.

La façon la plus simple d'obtenir le MRP $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$ se fait au travers d'une représentation en axe-angle (\mathbf{e}, θ) de la rotation ou à partir de la projection stéréographique [80] d'un quaternion $\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in H$.

$$\sigma_i = e_i \tan \frac{\theta}{4} = \frac{q_i}{q_0 + 1} \quad (58)$$

Cette définition des MRP met en avant la singularité d'orientation pour des angles $\theta = 2\pi + k4\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le paramétrage MRP permet donc de représenter des orientation dans le champ d'angle $\theta \in]-2\pi, 2\pi[$. Si une représentation au-delà de cette plage est nécessaire, il faut passer sur la représentation duale SMRP lors du passage des singularités :

$$\sigma_i^S = e_i \tan \frac{\theta - 2\pi}{4} = \frac{-q_i}{-q_0 + 1} \quad (59)$$

L'équation (59) est obtenue en notant que la représentation d'une matrice R du groupe des matrices de rotation $SO(3)$ par un quaternion \mathbf{q} du groupe des quaternions H n'est pas unique. En effet, les deux quaternions \mathbf{q} et $-\mathbf{q}$ paramètrent la même matrice.

A partir de (59) le SMRP est défini pour $\theta \in]0, 4\pi[$ ce qui étend l'intervalle de définition du MRP pour les angles $\theta = k4\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alternier entre une représentation MRP et SMRP à partir de (60) et (61) au passage des singularités d'orientation permet de représenter n'importe quelle rotation sans singularité cinématique.

$$\boldsymbol{\sigma}^S = \frac{-\boldsymbol{\sigma}}{\sigma^2} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{-\boldsymbol{\sigma}^S}{\sigma^{S2}} \quad (61)$$

Avec $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ la norme au carré du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ des composantes du MRP ou du SMRP.

A partir des représentations MRP ou SMRP, la matrice de rotation est obtenue avec (62). La matrice de rotation inverse peut être calculée par la même relation en remarquant que $R^T(\boldsymbol{\sigma}) = R(-\boldsymbol{\sigma})$. La relation cinématique de la représentation MRP (ou SMRP) par rapport à la courbure locale (matérielle) \mathbf{u} est donnée par (63). Cette relation cinématique est toujours définie et ne souffre pas de singularité tant que le MRP et le SMRP sont définis. La forme symétrique et simple des équations (58) à (63) montre l'avantage de la représentation de la matrice de rotation au travers d'un paramétrage MRP.

$$R(\boldsymbol{\sigma}) = I - \frac{4(1 - \sigma^2)}{(1 + \sigma^2)^2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{8}{(1 + \sigma^2)^2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2 \quad (62)$$

$$\partial_s \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4} \left((1 + \sigma^2) I + 2\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + 2\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2 \right) \mathbf{u} \quad (63)$$

Afin d'éviter le point singulier nous proposons en Figure 34 un algorithme de commutation entre MRP et SMRP garantissant de ne jamais se rapprocher de la singularité d'orientation. Notons tout d'abord que $\sigma^2 = \sigma^{S^2} = 1$ pour une orientation $\theta = \pm\pi$ (lointaine du point singulier $\theta = \pm 2\pi$). Pour cette orientation spécifique $\boldsymbol{\sigma}^S = -\boldsymbol{\sigma}$. Dans la pratique le point de changement entre MRP et SMRP ne doit pas strictement respecter $\sigma^2 = \sigma^{S^2} = 1$. Ainsi il est possible de détecter les conditions $\sigma^2 > 1$ ou $\sigma^{S^2} > 1$ lors de l'intégration de (63) et de basculer entre les représentations en utilisant (60) et (61).

Nous avons donc défini dans ce paragraphe un paramétrage robuste de la matrice de rotation compatible avec la méthode de tir. Pour l'intégration du champ de rotation dans les équations de la statique, l'équation (54) est remplacée par l'équation (63).

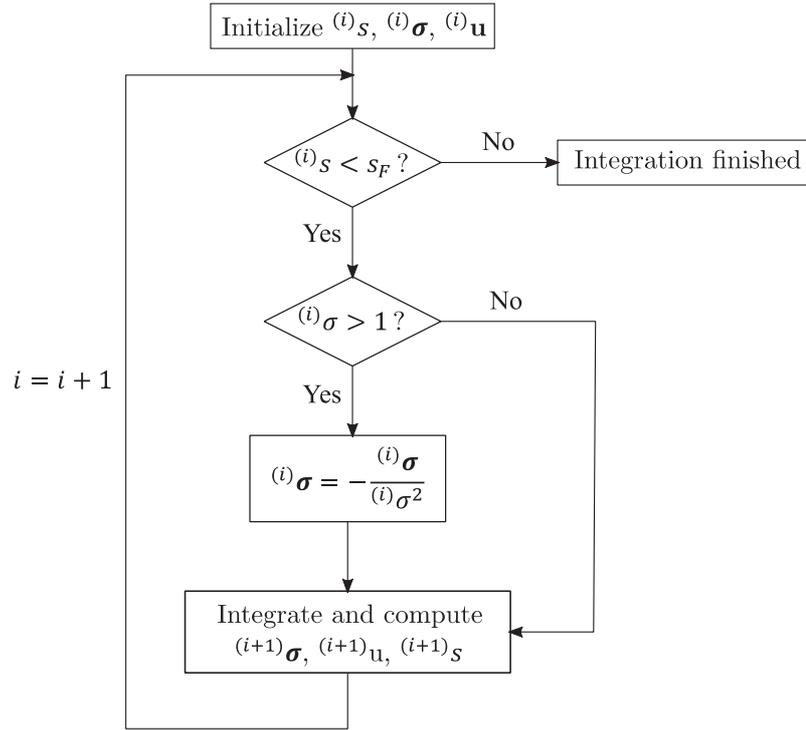


Figure 34 : Algorithme de commutation entre MRP et SMRP

Loi de comportement

Une poutre est appelée *élastique* s'il existe des fonctions constitutives $\hat{\mathbf{n}}$ et $\hat{\mathbf{m}}$ telles que $\mathbf{n}(s) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{v}(s), \mathbf{u}(s), s)$ et $\mathbf{m}(s) = \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{v}(s), \mathbf{u}(s), s)$ [71]. Dans le cas présent, nous considérons une loi élastique linéaire de la forme de (64) et (65).

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{v}(s), \mathbf{u}(s), s) = K^n(s)(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \quad (64)$$

$$\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{v}(s), \mathbf{u}(s), s) = K^m(s)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) \quad (65)$$

Avec les deux matrices de raideur définies comme :

$$K^n(s) = \begin{bmatrix} G(s)A(s) & 0 & 0 \\ 0 & G(s)A(s) & 0 \\ 0 & 0 & E(s)A(s) \end{bmatrix}$$

$$K^m(s) = \begin{bmatrix} E(s)I_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & E(s)I_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & G(s)C(s) \end{bmatrix}$$

Où $G(s)$, $E(s)$, $A(s)$, $I_k(s)$ et $C(s)$ sont respectivement le module de cisaillement (effectif [71]), le module d'Young, l'aire de la section, le moment d'inertie géométrique (moment quadratique) selon le directeur \mathbf{d}_k , et le module de torsion. Nous gardons ici la dépendance des propriétés de section vis-à-vis de

l'abscisse curviligne pour souligner le fait que des sections matérielles arbitraires peuvent être modélisées dans l'approche proposée.

A partir de (64) et (65), les déformations $\mathbf{v}(s)$ et $\mathbf{u}(s)$ sont transformées en (66) et (67) par l'utilisation des fonctions inverses $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s)$ et $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s)$ et des matrices de souplesse $Q^n = K^{n-1}$ et $Q^m = K^{m-1}$. Dans ces relations \mathbf{v}^0 et \mathbf{u}^0 peuvent dépendre également de l'abscisse curviligne et sont des champs prérequis au calcul.

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) = \mathbf{v}^0 + Q^n(s)\mathbf{n} \quad (66)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) = \mathbf{u}^0 + Q^m(s)\mathbf{m} \quad (67)$$

En insérant les deux dernières équations dans (55) et (56) il vient :

$$\partial_s \mathbf{n} = -R^T \mathbf{f} - \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) \times \mathbf{n} \quad (68)$$

$$\partial_s \mathbf{m} = -R^T \mathbf{l} - \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) \times \mathbf{n} - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) \times \mathbf{m} \quad (69)$$

Les équations (68) et (69) sont ici écrites par rapport aux termes généraux $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s)$ et $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s)$. Cela souligne le fait que les lois de comportement utilisées avec la méthode de tir peuvent être arbitraires (élastique, hyperélastique, avec contrainte interne de type Bernoulli, rigide) et dépendantes de l'abscisse curviligne (section variable).

Bilan des équations du système différentiel

Pour les poutres, nous introduisons le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ tel que $\boldsymbol{\varphi}(s) = [\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\sigma}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{m}(s)]^T$ pour mettre les équations sous la forme $\partial_s \boldsymbol{\varphi} = F(\boldsymbol{\varphi}, s)$. En considérant les équations locales et les lois de comportement décrites dans les paragraphes précédents, le système d'équations de la statique des poutres issu de (53), (63), (68) et (69) est résumé (70).

$$\partial_s \boldsymbol{\varphi} = \begin{cases} \partial_s \mathbf{r} = R^T (\mathbf{v}^0 + Q^n \mathbf{n}) \\ \partial_s \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4} \left((1 + \sigma^2) I + 2\tilde{\sigma} + 2\tilde{\sigma}^2 \right) (\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m}) \\ \partial_s \mathbf{n} = -R^T \mathbf{f} - (\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \\ \partial_s \mathbf{m} = -R^T \mathbf{l} - (\mathbf{v}^0 + Q^n \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - (\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m}) \times \mathbf{m} \end{cases} \quad (70)$$

Evolution des champs finaux par rapport aux valeurs initiales

De la même façon que pour les fils, le but est de calculer $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}(s = L)$ qui sera utilisé dans le calcul du jacobien du problème de tir. Nous utilisons la même démarche que présentée en paragraphe 4.1.2, où nous venons faire dépendre la solution $\boldsymbol{\varphi}$ avec les valeurs initiales $\boldsymbol{\varphi}_0$ tel que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(s, \boldsymbol{\varphi}_0)$. En venant dériver $\partial_s \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)$ par rapport à $\boldsymbol{\varphi}_0$ nous obtenons l'ODE linéaire $\partial_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0} \right) = \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}$ pour la condition initiale $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}(s = 0) = I$. En intégrant le problème IVP, nous pouvons évaluer $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}$ à $s = L$. Pour cela, il s'agit maintenant d'évaluer les termes non nuls de $\frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$ à partir de (70). Nous définissons les matrices $J^{d-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}B(\boldsymbol{\sigma})$ et $J^d(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{4}{(1+\sigma^2)^2}B^T(\boldsymbol{\sigma})$ telles que $\partial_s \boldsymbol{\sigma} = J^{d-1}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}$ avec $B(\boldsymbol{\sigma}) = (1 + \sigma^2)I + 2\tilde{\sigma} + 2\tilde{\sigma}^2$. Nous notons \mathbf{e}_i le vecteur unitaire de composante non nulle i , et $\tilde{\mathbf{e}}_i$ sa matrice antisymétrique associée.

Pour l'équation en \mathbf{r} :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(R^T(\mathbf{v}^0 + Q^n \mathbf{n}) \right) = -(\widetilde{J^d \mathbf{e}_i}) R^T(\mathbf{v}^0 + Q^n \mathbf{n}) \quad (71)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{n}} = Q^n \quad (72)$$

Pour l'équation en $\boldsymbol{\sigma}$, avec $J^{d-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4} \left((1 + \sigma^2)I + 2\tilde{\sigma} + 2\tilde{\sigma}^2 \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(J^{d-1}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m}) \right) \quad (73)$$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_i I + \tilde{\mathbf{e}}_i + \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} \tilde{\mathbf{e}}_i) (\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m})$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{m}} = J^{d-1}(\boldsymbol{\sigma}) Q^m \quad (74)$$

Pour l'équation en \mathbf{n} :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(-R^T \mathbf{f} - (\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \right) = -R^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \quad (75)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \sigma_i} = (\widetilde{J^d \mathbf{e}_i}) R^T \mathbf{f} - R^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma_i} \quad (76)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{m}} = \tilde{n}Q^m \quad (77)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{u}^0 + \widetilde{Q^m \mathbf{m}}) \quad (78)$$

Pour l'équation en \mathbf{m} :

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{r}} (-R^T \mathbf{l} - (\mathbf{v}^0 + Q^n \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - (\mathbf{u}^0 + Q^m \mathbf{m}) \times \mathbf{m}) = -R^T \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{r}} \quad (79)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \sigma_i} = (\widetilde{J^d e_i}) R^T \mathbf{l} - R^T \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \sigma_i} \quad (80)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{v}^0 + \widetilde{Q^n \mathbf{n}}) + \tilde{n}Q^n \quad (81)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{m}} = -(\mathbf{u}^0 + \widetilde{Q^m \mathbf{m}}) + \tilde{m}Q^m \quad (82)$$

4.2.3 Conditions aux limites

Ce paragraphe aborde l'écriture des conditions aux limites pour les fils et les poutres, et fera mention explicitement lorsque des commentaires particuliers concernant l'une ou l'autre théorie sont nécessaires.

Dans le but de résoudre les équations du problème différentiel, des conditions aux limites doivent être données au niveau de la frontière du domaine (points aux extrémités). Il existe quatre grands types de conditions aux limites : les conditions de Cauchy, de Dirichlet, de Neumann et de Robin. Une condition aux limites de Cauchy fournit les valeurs pour les variables d'état et leurs dérivées, cela correspond à la résolution d'un problème aux valeurs initiales. Les trois autres types de conditions aux limites définissent un problème aux deux bouts. Les conditions de Dirichlet renseignent les valeurs des variables d'état, les conditions de Neumann portent sur leurs dérivées et les conditions de Robin définissent une combinaison linéaire entre variables d'états et dérivées. La méthode de résolution présentée est compatible avec tous les types de conditions aux limites sans distinction de traitement pour l'une ou l'autre. Dans un souci de simplification des notations, les champs globaux \mathbf{r} , $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{n} , et \mathbf{m} seront utilisés dans les paragraphes suivants. L'utilisation de champs locaux sera explicitement mentionnée.

Dualité des champs cinématiques et statiques

Les variables d'état sont ici le champ de position $\mathbf{r}(s)$ (et d'orientation $\boldsymbol{\sigma}(s)$). Au travers des lois de comportement, la dérivée du vecteur d'état est assimilée aux champs d'efforts (et moments) internes $\mathbf{n}(s)$ (et $\mathbf{m}(s)$). L'ensemble des conditions aux limites représentant des liaisons cinématiques admissibles pour les fils et les poutres sont définies respectivement en Table 6 et Table 7. L'absence de cinématique en rotation pour les fils (parfaite flexibilité i.e. souplesse infinie ou raideur nulle) implique le regroupement de certaines liaisons cinématique : un encastrement, un pivot et une rotule posséderont les mêmes degrés de liberté libres et contraints. La Table 6 et la Table 7 récapitulent les degrés de libertés libres et contraints pour l'ensemble des types de conditions aux limites, respectivement pour les fils et les poutres.

	Type de liaison	DDLs libres \mathbf{X}	DDLs contraints \mathbf{Y}
(a)	Encastrement- Rotule-Pivot	\mathbf{n}	\mathbf{r}
(b)	Force imposée Prismatique / Pivot glissant /	\mathbf{r}	\mathbf{n}
(c)	Hélicoïdale Linéaire annulaire d'axe \mathbf{x}	$x \quad n_y \quad n_z$	$y \quad z \quad n_x$
(d)	Ponctuelle / Appui plan d'axe \mathbf{z} / Linéaire rectiligne d'axe quelconque et de normale \mathbf{z}	$x \quad y \quad n_z$	$z \quad n_x \quad n_y$
(e)	Ressort linéaire	$x \quad y \quad z$	$n_x(x, y, z) \quad n_y(x, y, z) \quad n_z(x, y, z)$
(f)	Ressort linéaire d'axe \mathbf{x}	$x \quad n_y \quad n_z$	$n_x(x) \quad y \quad z$
⋮	⋮	⋮	⋮

Table 6 : Conditions aux limites pour les fils : champs inconnus et contraints

Type de liaison	DDL libres X	DDL contraints Y
(a) Encastrement	$\mathbf{n} \quad \mathbf{m}$	$\mathbf{r} \quad \boldsymbol{\sigma}$
(b) Rotule	$\boldsymbol{\sigma} \quad \mathbf{n}$	$\mathbf{r} \quad \mathbf{m}$
(c) Force/moment imposés	$\mathbf{r} \quad \boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{n} \quad \mathbf{m}$
(d) Linéaire annulaire d'axe x	$x \quad \boldsymbol{\sigma} \quad n_y \quad n_z$	$y \quad z \quad n_x \quad \mathbf{m}$
(e) Prismatique d'axe x	$x \quad n_y \quad n_z \quad \mathbf{m}$	$y \quad z \quad \boldsymbol{\sigma} \quad n_x$
(f) Ponctuelle d'axe z	$x \quad y \quad n_z \quad \boldsymbol{\sigma}$	$z \quad n_x \quad n_y \quad \mathbf{m}$
(g) Linéaire rectiligne d'axe x et de normale z	$x \quad y \quad \sigma_x \quad \sigma_z \quad n_z \quad m_y$	$z \quad \sigma_y \quad n_x \quad n_y \quad m_x \quad m_z$
(h) Pivot d'axe x	$\sigma_x \quad \mathbf{n} \quad m_y \quad m_z$	$\mathbf{r} \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad m_x$
(i) Pivot glissant d'axe x	$x \quad \sigma_x \quad n_y \quad n_z \quad m_y \quad m_z$	$y \quad z \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad n_x \quad m_x$
(j) Appui plan d'axe z	$x \quad y \quad \sigma_z \quad n_z \quad m_x \quad m_y$	$z \quad \sigma_x \quad \sigma_y \quad n_x \quad n_y \quad m_z$
(k) Hélicoïdale d'axe x	$x \quad n_y \quad n_z \quad \mathbf{m}$	$y \quad z \quad \sigma_x(x) \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad n_x(m_x)$
(l) Ressort linéaire d'axe x	$x \quad n_y \quad n_z \quad \mathbf{m}$	$y \quad z \quad \boldsymbol{\sigma} \quad n_x(x)$
\vdots	\vdots	\vdots

Table 7 : Conditions aux limites pour les poutres : champs inconnus et contraints

Dans une approche multi-corps, une liaison cinématique est la représentation d'une liaison mécanique qui va venir imposer/libérer des mouvements relatifs entre deux structures connectées. Le point fondamental dans la représentation de telles liaisons est la dualité entre torseurs cinématiques et torseurs statiques. Dans le cas des liaisons parfaites que nous considérons ici, la puissance des efforts de liaison est nulle. La puissance se calcule par le comoment des torseurs cinématique et statique. Ainsi lorsqu'un degré de liberté cinématique est contraint, la vitesse relative correspondante est nulle, et l'effort de contact est inconnu. Nous parlerons dans ce cas de degré de liberté statique. A l'opposé, lorsqu'un degré de liberté cinématique est libre, les efforts (et moments) ne sont pas transmissibles, et les composantes du torseur statique correspondantes sont nulles. Un exemple de cette dualité pour les fils est donné en Table 8. Si nous considérons l'exemple d'une liaison rotule, les translations relatives entre les corps ne sont pas permises, les vitesses de translation relatives sont nulles,

comme les moments de liaison. Dans ce cas, les efforts internes ainsi que les degrés de liberté en rotation sont libres (inconnus).

Type de liaison	Point de réduction M	Cinématique admissible	Statique admissible
 Rotule de centre A	Point A	$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A$
 Linéaire annulaire De centre A , et d'axe x	Point A	$\begin{Bmatrix} \omega_x & p_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A$
 Ponctuelle De centre A et normale z	Le long de z	$\begin{Bmatrix} \omega_x & p_x \\ \omega_y & p_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_M$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_M$
 Libre	Tout point de l'espace	$\begin{Bmatrix} \omega_x & p_x \\ \omega_y & p_y \\ \omega_z & p_z \end{Bmatrix}_M$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M$

Table 8 : Dualité entre cinématique et statique pour les fils

Le problème aux deux bouts de la statique des corps élancés est écrit par rapport aux coordonnées globales $\mathbf{r}(s)$ (et $\boldsymbol{\sigma}(s)$) de la section matérielle. Ainsi, plutôt que d'utiliser les champs de vitesses relatives de liaison, nous utiliserons les champs globaux intégrés \mathbf{r} (et $\boldsymbol{\sigma}$) dans l'écriture des contraintes de liaison aux extrémités.

Ainsi, avec ces notations et du fait de la dualité cinématique/statique d'une liaison, au niveau des extrémités, une moitié des champs \mathbf{r} et \mathbf{n} (et $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{m}) sera systématiquement connue et l'autre moitié sera systématiquement inconnue.

Conditions aux limites dans le problème aux deux bouts

Nous notons respectivement \mathbf{X} et \mathbf{Y} les champs libres et contraints au niveau d'une liaison cinématique. Ces champs peuvent représenter des positions, des orientations, des forces, des moments, ou une combinaison de chaque comme indiqué en Table 7. La condition aux limites vient donc contraindre à la fois des champs de position et orientation mais aussi les champs de forces et moments. Ce faisant, le vecteur d'état $\boldsymbol{\varphi}(s) = [\mathbf{r}(s), \mathbf{n}(s)]^T$ (fils) ou $\boldsymbol{\varphi}(s) = [\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\sigma}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{m}(s)]^T$ (poutres) peut être évalué aux extrémités $s = 0$ et $s = L$ au travers de (83).

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (83)$$

La fonction $\boldsymbol{\gamma}$ permet le passage entre les variables cinématiquement admissibles d'une condition aux limites et le vecteur d'état du problème différentiel. Cela nous permet d'évaluer les vecteurs $\boldsymbol{\varphi}_{s_0}$ et $\boldsymbol{\varphi}_{s_L}$ à partir des variables cinématiquement libres \mathbf{X}_{s_0} , \mathbf{X}_{s_L} et contraintes \mathbf{Y}_{s_0} , \mathbf{Y}_{s_L} tel que $\boldsymbol{\varphi}_{s_0, s_L} = \boldsymbol{\gamma}_{s_0, s_L}(\mathbf{X}_{s_0, s_L}, \mathbf{Y}_{s_0, s_L})$, où $\boldsymbol{\gamma}_{s_0}$ et $\boldsymbol{\gamma}_{s_L}$ sont respectivement les fonctions de passage à $s = 0$ et $s = L$.

Nous pouvons également définir les relations inverses $\boldsymbol{\Gamma}_X$ et $\boldsymbol{\Gamma}_Y$ pour passer du vecteur d'état du problème différentiel aux champs libres et contraints de la liaison cinématique.

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Gamma}_X(\boldsymbol{\varphi}) \quad (84)$$

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Gamma}_Y(\boldsymbol{\varphi}) \quad (85)$$

En gardant la même notation, si $\boldsymbol{\Gamma}_{X_{s_0}}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{Y_{s_0}}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{X_{s_L}}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{Y_{s_L}}$ sont les fonctions de passage des liaisons situées à $s = 0$ et $s = L$ alors $\mathbf{X}_{s_0, s_L} = \boldsymbol{\Gamma}_{X_{s_0, s_L}}(\boldsymbol{\varphi}_{s_0, s_L})$ et $\mathbf{Y}_{s_0, s_L} = \boldsymbol{\Gamma}_{Y_{s_0, s_L}}(\boldsymbol{\varphi}_{s_0, s_L})$.

Le système d'ODE à résoudre est mis sous la forme d'un système du premier ordre (86) avec les conditions aux limites définies par (87) et (88). Le formalisme utilisé pour les conditions aux limites permet de traiter indifféremment des champs libres et imposés en position/rotation, efforts/moments imposés ou mixés. Dans notre cas le problème aux deux bouts possède toujours des conditions aux limites séparées.

$$\partial_s \boldsymbol{\varphi}(s) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s) \quad (86)$$

$$\mathbf{C}_{s_0}(\boldsymbol{\varphi}(s=0), \bar{\mathbf{Y}}_{s_0}) = \mathbf{0} \quad (87)$$

$$\mathbf{C}_{s_L}(\boldsymbol{\varphi}(s=L), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}) = \mathbf{0} \quad (88)$$

La notation $\bar{\cdot}$ est utilisée ici pour distinguer la variable \mathbf{Y} de son évaluation $\bar{\mathbf{Y}}$ qui résulte du type de liaison considéré. $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s)$ est défini à partir de (42), (43) et (70).

Le problème aux deux bouts consiste donc en la résolution du système (86) à (88) où $\boldsymbol{\varphi}_{s_0}$ et $\boldsymbol{\varphi}_{s_L}$ sont évalués au travers de (83) et de la Table 7. Les équations (87) et (88) décrivent le cas le plus général de conditions aux limites séparées.

Pour des conditions aux limites mixtes il est important de faire attention à la base dans laquelle les composantes de positions, orientations, forces et moments sont écrites. Les liaisons mécaniques possèdent souvent une base privilégiée dans laquelle les mouvements de translation et rotation s'écrivent simplement et les fonctions de contraintes \mathbf{C}_{s_0,s_L} peuvent alors être non-linéaires. Par exemple, pour une cinématique poutre et un appui plan d'axe \mathbf{z} , la contrainte nulle sur la composante d'effort \mathbf{x} s'écrira avec la description matérielle des champs d'efforts comme $\mathbf{C}_{s_0,s_L} = \left(R(\boldsymbol{\sigma}(s=0,L)) \mathbf{n}(s=0,L) \right) \cdot \mathbf{x} = n_{x_0,L} = 0$. Pour un fil, cette contrainte s'écrira plus simplement $\mathbf{C}_{s_0,s_L} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_{x_0,L} = 0$.

Les contraintes sont également non-linéaires lorsque l'on vient imposer de façon complète une orientation. Il est alors préférable d'utiliser une composition de rotations pour se ramener autour d'une rotation nulle plutôt que contraindre directement le vecteur $\boldsymbol{\sigma}(s=0,L)$ à des valeurs quelconques (le changement de variable de R vers $\boldsymbol{\sigma}$ étant extrêmement non-linéaire). Cette rotation composée $\boldsymbol{\sigma}'$ se définit à partir de la matrice de rotation imposée $R(\boldsymbol{\sigma}_{s_0,s_L})$ à une extrémité telle que :

$$R(\boldsymbol{\sigma}') = R^T(\boldsymbol{\sigma}_{s_0,s_L})R(\boldsymbol{\sigma}(s)) \quad (89)$$

Le formalisme MRP permet également la composition directe de rotations au travers de (90) en considérant $R(\boldsymbol{\sigma}') = R(\boldsymbol{\sigma}'')R(\boldsymbol{\sigma})$.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{(1 - \boldsymbol{\sigma}''^2)\boldsymbol{\sigma} + (1 - \boldsymbol{\sigma}^2)\boldsymbol{\sigma}'' + 2\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma}''}{1 + \boldsymbol{\sigma}''^2\boldsymbol{\sigma}^2 - 2\boldsymbol{\sigma}'' \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (90)$$

L'équation (90) n'est pas définie lorsque la rotation finale $\boldsymbol{\sigma}'$ abouti sur l'angle singulier. Il est possible d'éviter cela en convertissant $\boldsymbol{\sigma}$ ou $\boldsymbol{\sigma}''$ en leurs duaux SMRP afin de garantir la bonne composition des rotations, et garder $\boldsymbol{\sigma}'$ dans la sphère unité ($\boldsymbol{\sigma}'^2 < 1$). La conversion de $\boldsymbol{\sigma}$ ou $\boldsymbol{\sigma}''$ portera sur le vecteur ayant la plus haute norme. Finalement, la contrainte pour imposer complètement une orientation s'écrira $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{0}$.

Le traitement de liaison imposant partiellement les composantes de la rotation (liaison pivot) est plus subtile. Soit $\mathbf{d}_i(\boldsymbol{\sigma})$ les vecteurs représentant l'orientation local de la liaison tel que $\mathbf{d}_i(\boldsymbol{\sigma}) = R(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{e}_i$ avec $\mathbf{e}_i = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Nous supposons la rotation libre autour du vecteur unitaire \mathbf{d}_k . Les champs libres se composent : de l'angle de rotation $\theta_{\mathbf{d}_k}$ autour de \mathbf{d}_k , des deux composantes de moment orthogonales au plan défini par \mathbf{d}_k , et du vecteur des forces internes \mathbf{n} au complet. L'angle peut être calculé à partir du paramétrage MRP $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{d}_k \tan \frac{\theta_{\mathbf{d}_k}}{4}$; où $\boldsymbol{\sigma}'$ est la représentation MRP de la rotation composée introduite par (90). Les deux composantes libres de moment sont calculées par $m_{\mathbf{d}_{j \neq k}} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{d}_{j \neq k}$ tel que $\mathbf{m}_{\perp \mathbf{a}} = m_{\mathbf{d}_{j \neq k}} \mathbf{d}_{j \neq k} = \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = -\tilde{\mathbf{a}}^2 \mathbf{m}$. Pour une liaison pivot, les champs contraints sont le moment imposé selon l'axe de la pivot \mathbf{d}_k . $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}_{0,L}$, les deux contraintes sur l'axe de rotation lui-même : $\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{d}_{j \neq k} = 0$, ainsi que le trois positions $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_{0,L}$.

Lorsque les champs \mathbf{n} , \mathbf{m} ou \mathbf{r} sont entièrement contraints, les fonctions de contrainte se simplifient en (91). C'est notamment le cas pour des liaisons encastrement, rotule ou d'efforts/moments imposés.

$$\mathbf{C}_{s_0, s_L}(\boldsymbol{\varphi}(s = 0, L), \boldsymbol{\varphi}_{s_0, s_L}) = \boldsymbol{\Gamma}_{Y_{s_0, s_L}}(\boldsymbol{\varphi}(s = 0, L)) - \bar{\mathbf{Y}}_{s_0, s_L} \quad (91)$$

Dans le cas d'efforts imposés, lors de la mise en place de la cinématique des fils et poutres nous avons définis les champs d'efforts (et moments) internes \mathbf{n} (et \mathbf{m}) positifs comme l'action des forces (et moments) exercés par le tronçon situé « à droite » du tronçon étudié. Au niveau des extrémités, ces efforts représentent l'action du segment sur la liaison. Afin de permettre l'équilibre statique des corps élanés soumis à des efforts (et moments) imposés aux extrémités, nous viendrons contraindre les champs \mathbf{n} (et \mathbf{m}) aux extrémités de façon à ce que les efforts transmis par la liaison (somme des efforts internes et imposés) soient effectivement nuls. Ainsi, une force imposée \mathbf{F} sera vue comme une liaison libre contraignant le champ \mathbf{n} au niveau de liaison tel que $\mathbf{n} = \pm \mathbf{F}$ (et $\mathbf{m} = \mathbf{0}$). Le signe \pm vient de la convention positive pour l'effort \mathbf{n} (et moment \mathbf{m}) et dépend du sens choisi pour l'origine des abscisses curvilignes ainsi que la localisation de la condition aux limites (début ou fin).

Enfin, il est possible de dériver les liaisons d'efforts (et moments) imposés sous forme de ressort en faisant dépendre les valeurs d'efforts (et moments) à la

cinématique. Ainsi pour combiner une liaison prismatique d'axe \mathbf{i} avec un ressort de raideur k et de point de référence (d'attache) P de coordonnées \mathbf{p} , la contrainte portant sur la composante de force sera $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = n_i(\mathbf{r}) = \pm k(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}$. Le même processus peut être suivi pour la modélisation d'une liaison hélicoïdale où ce seront les composantes de translation et d'orientation (et de force et moment) sur lesquelles porteront les deux contraintes utilisant le pas de la liaison.

4.2.4 Les différentes méthodes de tir

Dans un premier temps, nous développons et généralisons l'écriture du problème aux deux bouts dans le cadre de la méthode de tir simple afin d'en tirer un formalisme commun entre le problème des fils et celui des poutres.

Avec ce nouveau formalisme, nous développons ensuite les équations du tir multiple utilisées dans le but de modéliser des discontinuités géométriques et mécaniques afin de se libérer de la contrainte de dérivabilité des champs géométriques et mécaniques (iii) imposée lors de la mise en place de la cinématique des fils et poutres.

Enfin, les limites de l'approche multi-tir classique quant à la gestion de plusieurs segments connectés ensemble sera mise en évidence et une formulation basée sur une approche multi-corps sera proposée.

Méthode de tir simple

Ce paragraphe se base sur les travaux du Dr Thomas Gazzola quant à l'application de la méthode de tir simple à la résolution spécifique de chaque TPBVP.

La méthode de tir consiste à transformer le problème aux deux bouts (TPBVP) (86), (87) et (88) en la recherche des zéros d'une fonction de contrainte (en général non linéaire) évaluée à partir d'une succession de problèmes aux valeurs initiales (IVP).

En gardant les notations du paragraphe précédent, le principe de la méthode de tir simple classique est d'imposer \mathbf{Y}_{s_0} aux valeurs connues $\bar{\mathbf{Y}}_{s_0}$ et deviner les inconnues \mathbf{X}_{s_0} dans le but de construire le vecteur d'état initial $\boldsymbol{\varphi}_{s_0} = \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0}, \mathbf{Y}_{s_0} =$

$\bar{Y}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0}) = \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0})$ à partir de (83). Il est à noter que \bar{Y}_{s_0} peut être dépendant de \mathbf{X}_{s_0} (cas ressort ou hélicoïdal).

L'intégration de cet état initial $\boldsymbol{\varphi}_{s_0}$ au travers de l'équation différentielle ordinaire (ODE) permet d'évaluer les état finaux $\boldsymbol{\varphi}(s = L; \boldsymbol{\varphi}_{s_0}) = \boldsymbol{\varphi}(L; \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0}))$ qui dépendent de l'état initial $\boldsymbol{\varphi}_{s_0} = \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0})$. Cet état est enfin comparé aux valeurs de conditions aux limites finales via la correspondance inverse (85) définissant $\mathbf{Y}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}) = \boldsymbol{\Gamma}_{Y_{s_L}}(\boldsymbol{\varphi}(L; \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0})))$ et tel que la fonction de contrainte $\mathbf{C}(\mathbf{Y}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}))$ issue de (92) s'annule. Comme $\bar{Y}_{s_0}, \bar{Y}_{s_L}$ peut dépendre de la partie inconnue de la condition aux limites finale $\mathbf{X}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}) = \boldsymbol{\Gamma}_{X_{s_L}}(\boldsymbol{\varphi}(L; \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0})))$ tel que à $s = L$, $\bar{Y}_{s_L} = \bar{Y}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}))$.

Dans cette description, \mathbf{X}_{s_0} est l'inconnue de la condition aux limites de départ et la fonction de contrainte \mathbf{C} ne dépend que de \mathbf{X}_{s_0} .

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{X}_{s_0}) &= \mathbf{C}(\mathbf{Y}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0})) \\ &= \mathbf{C}_{s_L}(\boldsymbol{\varphi}(L; \boldsymbol{\varphi}_{s_0}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0})) \end{aligned} \quad (92)$$

Une extension de cette description consiste à supposer à la fois \mathbf{X}_{s_0} et \mathbf{Y}_{s_0} inconnus. Le processus de résolution est le même à la différence près qu'au départ \mathbf{Y}_{s_0} est aussi estimé et l'ODE est intégré de la même manière. Par contre la fonction de contrainte \mathbf{C} dépendra à la fois de \mathbf{X}_{s_0} et \mathbf{Y}_{s_0} sera remplacée par (93).

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{X}_{s_0}, \mathbf{Y}_{s_0}) &= \mathbf{C}(\mathbf{Y}_{s_0}, \bar{\mathbf{Y}}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0}), \mathbf{Y}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0})) \\ &= \begin{cases} \mathbf{C}_{s_0}(\boldsymbol{\varphi}(s = 0; \boldsymbol{\varphi}_{s_0}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_0}(\mathbf{X}_{s_0})) \\ \mathbf{C}_{s_L}(\boldsymbol{\varphi}(s = L; \boldsymbol{\varphi}_{s_0}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}(\mathbf{X}_{s_0})) \end{cases} \end{aligned} \quad (93)$$

Quel que soit le choix d'inconnues employées (vecteur d'état $\boldsymbol{\varphi}$ partiellement imposé avant l'intégration ou non), les inconnues de la fonction contrainte sont rassemblées sous le vecteur \mathbf{Z} tel que $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_{s_0}$ dans le cas (92) et $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}_{s_0}, \mathbf{Y}_{s_0}]^T$ dans le cas (93). De plus, à partir de (84) et (85), nous pouvons définir $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\varphi})$ sans ambiguïté.

Le problème de tir peut s'écrire comme l'imbrication d'un IVP au sein d'un algorithme de recherche de zéro (Root Finding – RF) :

$$RF: \begin{cases} IVP: \begin{cases} \partial_s \boldsymbol{\varphi}(s) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s) \\ \boldsymbol{\varphi}(s=0) = \boldsymbol{\varphi}_{s_0} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{Z}) \end{cases} \\ \mathbf{C}(\mathbf{Z}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (94)$$

\mathbf{C} est la fonction vectorielle de contrainte et $\boldsymbol{\varphi}_{s_0}$ peut être partiellement ou totalement inconnue, et dépend de la variable \mathbf{Z} qui est l'inconnue de l'algorithme de recherche de zéro (Newton). Deux niveaux de notation sont donc à prendre en compte : les variables minuscules $\boldsymbol{\varphi}$, s , \mathbf{r} , $\boldsymbol{\sigma}$, etc. font référence au problème d'intégration, les variables majuscules \mathbf{C} , \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} , etc. font référence au problème d'inversion.

La méthode de tir consiste donc à itérer sur la partie inconnue \mathbf{Z} de l'IVP dans le but de respecter la contrainte \mathbf{C} calculée à partir de \mathbf{Y}_{s_L} (et si nécessaire \mathbf{Y}_{s_0}) évaluée à travers d'intégrations successives. Le processus de résolution est décrit en Figure 35.

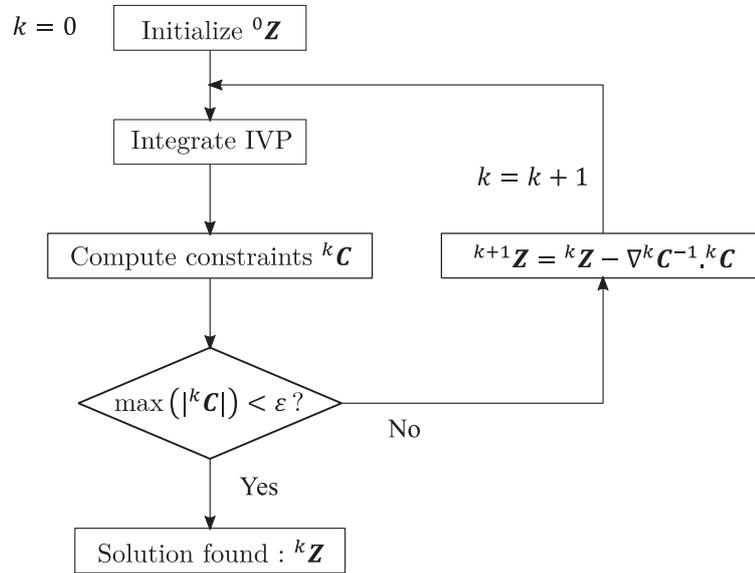


Figure 35 : Processus de résolution de la méthode de tir

L'intégration de l'ODE se fait au travers d'un schéma de Runge-Kutta-Fehlberg 4-5 (RKF45). Dans le cas des poutres, l'algorithme de commutation entre MRP et SMRP décrit en Figure 34 est utilisé au sein du bloc d'intégration. Comme dit précédemment, la résolution de la fonction de contrainte est faite avec un algorithme

de Newton-Raphson, dans lequel le calcul du jacobien du problème se fait par différences finies. Lorsque les conditions aux limites permettent un mouvement de corps rigide, le jacobien $\nabla \mathbf{C}$ n'est pas de rang plein et n'est pas inversible. Nous utilisons une décomposition SVD (Singular Value Decomposition) afin d'assurer la bonne inversion du jacobien dans le processus de Newton. Bien que réputée coûteuse, cette décomposition est en réalité effectuée sur des matrices de petite taille et à une faible fréquence (la méthode de tir permet une convergence en moins de 10 itérations en général) comme nous le verrons plus loin.

Concernant l'utilisation d'un intégrateur à pas adaptatif, le paramètre d'erreur absolue d'un schéma RKF45 correspond à une valeur d'erreur cumulée entre deux schémas. Il s'ensuit que l'adaptation du pas d'intégration le long d'un segment conduit à une erreur cumulée entre un schéma RK4 et RK5 ne dépassant jamais la tolérance prescrite. Cela nous laisse confiant en ce qui concerne la précision de l'intégration en fin de segment, tout en venant minimiser le nombre de points d'intégration nécessaire à l'obtention d'une précision cible.

D'un point de vue général, la méthode de tir telle que décrite hérite des inconvénients d'un algorithme de résolution non-linéaire : si la fonction \mathbf{C} est très non linéaire, il peut ne pas converger si l'estimation ${}^0\mathbf{Z}$ est trop loin d'une racine de \mathbf{C} . Cette notion de « distance » repose sur les équations physiques mises en jeu (fils ou poutres), la forme de \mathbf{C} et le conditionnement (les valeurs propres) de $\nabla \mathbf{C}$. Des problèmes raides – pour lesquelles de petites perturbations de \mathbf{Z} induisent des variations larges de \mathbf{C} au travers de l'ODE – restreignent le rayon de convergence de l'algorithme de Newton, et nécessitent que ${}^0\mathbf{Z}$ soit proche de la solution recherchée. De plus, du fait que \mathbf{C} soit non-linéaire, plusieurs solutions peuvent exister et la solution trouvée par l'algorithme de Newton dépendra de l'itéré initial ${}^0\mathbf{Z}$.

Les problèmes de convergences inhérents à la méthode de tir simple sont en partie résolus par la méthode de tir multiple [69,81]. D'autres méthodes se basant sur la modification de la pente de l'algorithme de Newton sont également référencées dans l'état de l'art [70].

Contrairement aux approches discrétisées, une grande force de la méthode de tir est qu'elle traite de façon continue tous les champs et paramètres intégrés. Par exemple les lois de comportement élastiques introduites en (38), (66) et (67) peuvent dépendre de l'abscisse curviligne s au travers des paramètres $A(s)$, $E(s)$, $I(s)$, etc. caractérisant la section. Cela permet par exemple la modélisation d'une variation continue de la forme de la section matérielle du corps élancé.

Dans l'utilisation de la méthode qui sera faite dans ce mémoire nous choisirons de réduire le nombre d'inconnues de l'algorithme de Newton au maximum. Nous choisirons ainsi d'imposer la moitié du vecteur $\boldsymbol{\varphi}_{s_0}$ pour nous retrouver dans le cas $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{s_0} = \mathbf{X}_{s_0}$. Le but est de garder la dimension du jacobien $\nabla \mathbf{C}$ la plus petite possible pour une inversion aussi rapide que possible. Tenant compte de cette remarque, ${}^0\mathbf{Z}$ et \mathbf{C} ont la même dimension et sont de dimension 3 pour le problème des fils et 6 pour le problème poutre. Quel que soit le type de corps élancé, le problème de tir simple s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \partial_s \boldsymbol{\varphi}(s) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, s) \\ \boldsymbol{\varphi}(s=0) = \boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{Z}_{s_0}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{Z}_{s_0}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (95)$$

Dans la description développée ici, les inconnues \mathbf{Z}_{s_0} de $\boldsymbol{\varphi}_{s_0}$ dépendent de la condition aux limites à $s = 0$. Les Table 6 (page 95) et Table 7 (page 96) résument les composantes connues et inconnues pour chaque type de liaison. Il est souligné ici que pour les fils, le jacobien du problème sera *toujours* de dimension 3x3 et de dimension 6x6 dans le cas des poutres. Inverser des matrices 3x3 ou 6x6 est extrêmement efficace comparé à des approches discrètes pour lesquelles la taille du jacobien (matrice de raideur) est proportionnel à $N \times N$ avec N le nombre de nœuds.

Un élément intéressant à souligner est que les notations adoptées ici ne sont pas dépendantes de la configuration étudiée (encastrement- encastrement, encastrement - rotule, etc.) et permettent une généralité dans le traitement des configurations.

De plus pour une configuration de conditions aux limites donnée, les résultats fournis par la méthode de tir sont indépendants du sens d'intégration. Nous vérifierons cette propriété dans les exemples.

Bien qu'efficace sur les configurations à un seul segment, la méthode de tir simple présente ses limites dès qu'une discontinuité matériau ou d'effort doit être modélisée ou lorsque plusieurs tronçons sont connectés au même nœud. Afin de lever ces limitations, nous introduisons tout d'abord la méthode de tir multiple classique permettant le traitement de discontinuités sur un tronçon. Nous développerons ensuite une nouvelle méthode de tir multiple basée sur un formalisme multi-corps afin de traiter le cas de plusieurs tronçons interconnectés.

Méthode de tir multiple

Le premier but déjà évoqué de la méthode multi-tir [82] est de venir stabiliser le problème de tir simple [81]. En effet le principe est de couper le segment initial en n sous-segments suivant la même équation différentielle, et à ajouter en ensemble de contraintes assurant la continuité des champs. Cela conduit à des intervalles d'intégration plus petits qui tendent à améliorer le conditionnement de $\nabla \mathbf{C}$ au prix de l'agrandissement de la taille du jacobien à inverser. L'intégration et les contraintes exprimées sur des sous intervalles plus petits peuvent être vus comme une technique de linéarisation de la fonction de contrainte \mathbf{C} . En effet, des intervalles d'intégration plus courts induisent des variations moindres du vecteur propagé $\boldsymbol{\varphi}_{s_L}$, donc de la fonction de contrainte \mathbf{C} .

Nous proposons ici une autre application de la technique de multi-tir consistant à prendre en compte les discontinuités pouvant apparaître dans les champs $\mathbf{r}(s)$, $\boldsymbol{\sigma}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{m}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{l}(s)$. En effet l'hypothèse (iii) prise dans la mise en place de la cinématique des fils et poutres impose la continuité de ces champs. Ces discontinuités peuvent être : un effort ponctuel à une abscisse curviligne donnée, un changement brutal de propriété matériau de la section (géométries de section différentes, paramètres matériau différents) ou une discontinuité sur les efforts extérieurs (effort extérieur appliqué sur un tronçon uniquement).

Quel que soit le cadre d'application, le principe de la méthode multi-tir pour la résolution d'un problème aux deux bouts est basé sur la même idée de résoudre un problème aux valeurs initiales, mais sur des sous intervalles du domaine initial. La méthode de multi-tir est donc basée sur le même système que (94) et diffère de la méthode de tir simple uniquement par les tailles de $\boldsymbol{\varphi}$, \mathbf{Z} et \mathbf{C} . La division en sous

intervalles génère de nouvelles inconnues et de nouvelles contraintes pour faire correspondre les trajectoires des champs intégrés au niveau des limites de chaque sous domaine. La Figure 36 illustre la subdivision pour un choix d'abscisses curvilignes $s_0 = 0 < s_1 < s_i < s_{i+1} < s_n = s_L = L$.

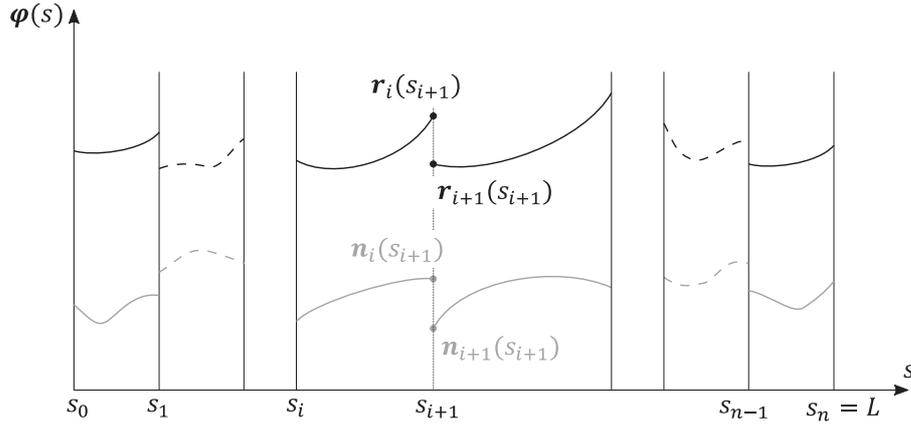


Figure 36 : Illustration de la méthode de multi-tir

La solution sur le i ème intervalle est notée $\varphi_i(s)$. Au départ de l'intervalle $i + 1$, la totalité du vecteur d'état est inconnue et constituent des variables additionnelles (96).

$$\varphi_{i+1}(s = s_{i+1}) = \gamma_{s_{i+1}}(\mathbf{Z}_{s_{i+1}}) \quad (96)$$

De plus, à la fin de l'intervalle i , les champs intégrés doivent être égaux aux valeurs au départ de l'intervalle $i + 1$. Le vecteur contrainte \mathbf{C} est donc augmenté avec la nouvelle contrainte $\mathbf{C}_{s_i}(\Gamma_{\mathbf{Z}_{s_{i+1}}}(\mathbf{Z}_i), \mathbf{Z}_{s_{i+1}}) = \mathbf{0}$ où $\Gamma_{\mathbf{Z}_{s_{i+1}}}(\mathbf{Z}_{s_i}) = \Gamma_{\mathbf{Z}_{s_{i+1}}}(\varphi_i(s = s_{i+1}; \mathbf{Z}_{s_i}))$ est le vecteur intégré sur l'intervalle i , entièrement contraint à l'abscisse curviligne finale s_{i+1} . Dans le cas multi-tir, les fonctions γ_{s_i} et $\Gamma_{\mathbf{Z}_{s_i}}$ sont des fonctions identités telles que $\gamma_{s_{i+1}}(\mathbf{Z}_{s_{i+1}}) = \mathbf{Z}_{s_{i+1}} \forall i \in]0, n[$. Ici, \mathbf{C}_{s_i} est exprimée telle que la contrainte est équivalente à une liaison encastrement.

Finalement, en introduisant le vecteur $\boldsymbol{\phi}(s) = [\varphi_0, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{n-1}]^T$, l'équation (95) est réécrite en (99). Comme mentionné, cette dernière a exactement la même structure que (94).

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, s) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}_0, s) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}_i, s) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}_{n-1}, s) \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{Z}_{s_0}, \dots, \mathbf{Z}_{s_i}, \dots, \mathbf{Z}_{s_{n-1}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{s_1}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}_{s_1}}(\mathbf{Z}_{s_0}), \mathbf{Z}_{s_1}) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{s_i}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}_{s_i}}(\mathbf{Z}_{s_{i-1}}), \mathbf{Z}_{s_i}) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{s_L}(\mathbf{Y}_{s_L}(\mathbf{Z}_{s_{n-1}}), \bar{\mathbf{Y}}_{s_L}(\mathbf{Z}_{s_{n-1}})) \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\begin{cases} \partial_s \boldsymbol{\phi}(s) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, s) \\ \boldsymbol{\phi}_0 = [\boldsymbol{\gamma}_{s_0}(\mathbf{Z}_{s_0}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\gamma}_{s_i}(\mathbf{Z}_{s_i}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\gamma}_{s_{n-1}}(\mathbf{Z}_{s_{n-1}})]^T \\ \mathbf{C}(\mathbf{Z}_{s_0}, \dots, \mathbf{Z}_{s_i}, \dots, \mathbf{Z}_{s_{n-1}}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (99)$$

Les domaines d'intégration sont tous indépendants. Il est donc possible d'optimiser l'intégration en parallélisant le calcul. L'IVP peut être également intégré en une fois en venant normaliser l'abscisse curviligne de telle façon que le domaine d'intégration soit l'intervalle commun $[0,1]$ au travers d'un changement du variable (100).

$$s^i = \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} \in [0,1] \quad (100)$$

$$s = s_i + (s_{i+1} - s_i)s^i \quad (101)$$

L'équation (101) permet le recalcul de l'abscisse curviligne originelle afin de pouvoir évaluer les lois de comportement qui sont définies par rapport à l'abscisse curviligne nulle du segment non coupé.

A noter que dans (99) nous avons fait le choix de construire $\boldsymbol{\phi}_0$ avec la partie connue $\bar{\mathbf{Y}}_{s_0}$ des conditions aux limites extraites des Table 6 et Table 7 tel que $\mathbf{Z}_{s_0} = \mathbf{X}_{s_0}$. Comme décrit dans le paragraphe traitant de la méthode de tir simple, il s'agit d'un choix et nous aurions tout aussi bien pu envisager d'utiliser $\mathbf{Z}_{s_0} = [\mathbf{X}_{s_0}, \mathbf{Y}_{s_0}]^T$ et concaténer la contrainte \mathbf{C}_{s_0} à \mathbf{H} .

Méthode de tir multiple étendue au multi-corps

Principe et équations

Le paragraphe précédent traitait de l'application de la méthode de multi-tir classique au formalisme des équations des corps élançés développé dans ce document. Le présent paragraphe aborde la méthode de multi-tir sous l'angle de vue des multi-corps. Ce travail est motivé par le fait que la méthode de multi-tir classique ne permet pas de connecter plus de deux segments de façon simple et générique. Par exemple, une configuration à trois segments avec effort imposé, comme celle décrite en Figure 37 et traitée dans les exemples, n'est pas immédiate et des équations de contrainte spécifiques doivent être ajoutées pour venir connecter les trois brins ensemble et appliquer l'effort. Le but de cette section est donc de proposer un formalisme générique basé sur la philosophie multi-corps de corps statiques connectés au travers de liaisons cinématiques, tout en venant résoudre la statique des corps élançés au travers de la méthode de tir.

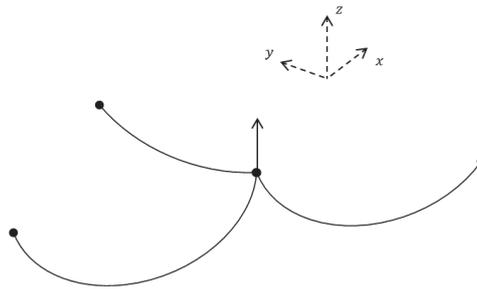


Figure 37 : Exemple de configuration à trois segments

La Figure 38 présente trois configurations : (a) une configuration multi-corps classique de chaîne ouverte, (b) la méthode multi-tir telle que présentée dans le paragraphe précédent, et (c) la méthode mixte multi-corps/multi-tir proposée.

Dans la configuration (a), le corps j est connecté au corps $j - 1$ par la liaison cinématique $k - 1$ et au corps $j + 1$ par la liaison cinématique k . \mathbf{r}_j et R_j sont respectivement les vecteur position et matrice d'orientation absolue du corps j . $\mathbf{r}_{j/j+1}$ et $R_{j/j+1}$ décrivent respectivement les positions et orientations relatives du corps j par rapport au corps $j + 1$.

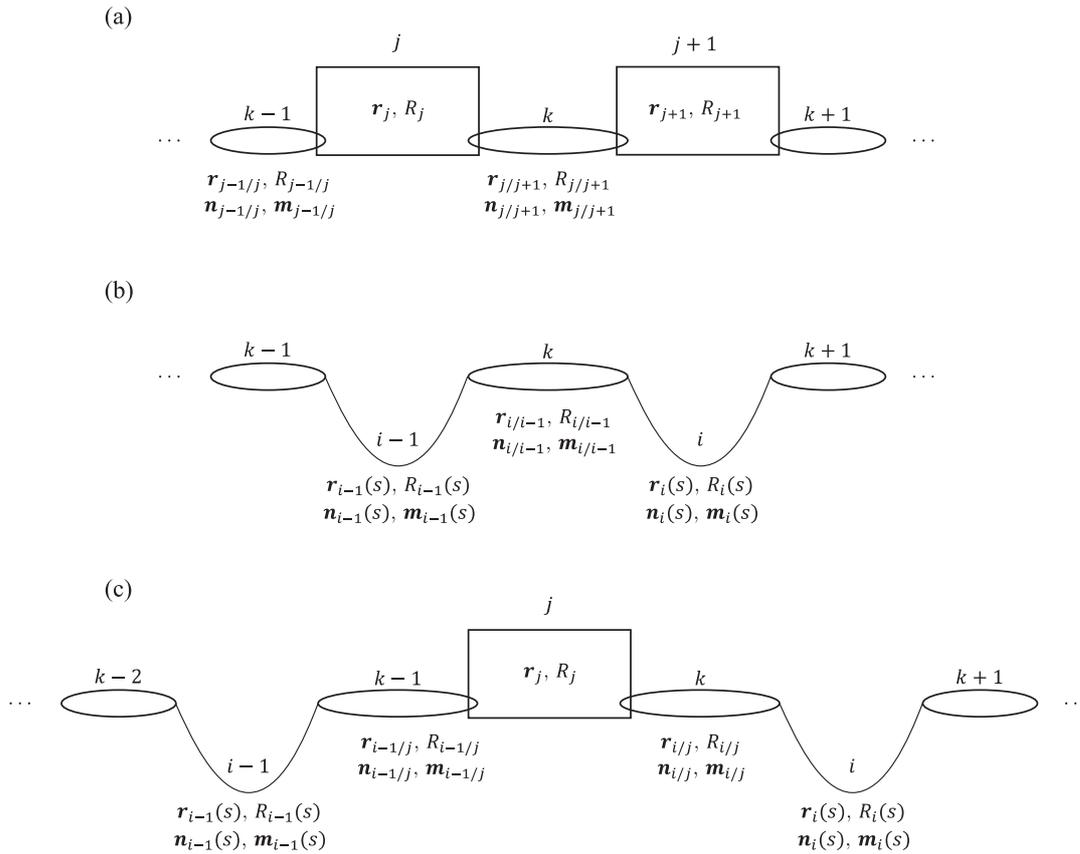


Figure 38 : Chaînes cinématiques multi-corps et tir multiple

La première idée est de considérer un corps élastique comme un corps particulier qui peut être lié à travers une connexion cinématique, comme montré sur le schéma (b). La méthode de multi-tir classique décrite au paragraphe précédent est un cas particulier de la configuration (b), car nous avons vu que les contraintes de continuité de la méthode multi-tir correspondent à des liaisons encastrement. Comme énoncé précédemment, l'inconvénient de la configuration (b) est que les segments ne peuvent se connecter que deux à deux.

Finalement, si les corps élastiques peuvent être considérés comme des corps, ils peuvent être liés à des corps rigides comme montré sur le schéma (c). Cette approche particulière permet également d'inclure une description lumped mass dans laquelle les corps élastiques seraient discrétisés en corps rigides connectés par des ressorts linéaires.

Dans les formalismes (b) et (c), les liaisons entre les éléments (élastiques et rigides) sont des conditions aux limites pour les corps élastiques et les éléments développés dans le paragraphe 4.2.3 traitant des conditions aux limites s'appliquent toujours. De même,

le formalisme (b) a déjà été développé dans le paragraphe précédent traitant de l'approche multi-tir classique.

La structure de (c) permet de modéliser des assemblages de corps élancés arbitraires en venant les lier au corps rigide j avec n'importe quel type de liaison. A titre d'exemple la Figure 39 montre une configuration avec liaison interne et sa conversion dans le formalisme (c).



Figure 39 : Exemple de configuration avec liaison interne

Comme dans (a), les variables $\mathbf{r}_{i/j+1}$, $R_{i/j+1}$, $\mathbf{n}_{i/j+1}$ et $\mathbf{m}_{i/j+1}$ constituent les inconnues de liaison de la liaison k . Ces variables sont à rapprocher de celles utilisées dans la description des conditions aux limites. En effet elles sont le point d'entrée de l'étape de recherche de solution de la méthode de tir. Le vecteur $\mathbf{X}_{b_j} = [\mathbf{r}_j, R_j]^T$ des positions \mathbf{r}_j et orientation R_j de chaque corps rigide constitue un ensemble de variables additionnelles de l'algorithme de recherche de zéro comme indiqué au paragraphe précédent. L'ajout de degrés de liberté $\mathbf{X}_{b_{c_i}}$ du corps b_{c_i} auquel est liée la connexion c_i impacte la reconstruction du vecteur d'état $\boldsymbol{\varphi}_{c_i}$, des inconnues de liaison \mathbf{X}_{c_i} et des champs contraints \mathbf{Y}_{c_i} au niveau de la connexion c_i tel que :

$$\boldsymbol{\varphi}_{c_i} = \boldsymbol{\gamma}_{c_i}(\mathbf{X}_{c_i}, \mathbf{Y}_{c_i}, \mathbf{X}_{b_{c_i}}) \quad (102)$$

$$\mathbf{X}_{c_i} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_{c_i}}(\boldsymbol{\varphi}_{c_i}, \mathbf{X}_{b_{c_i}}) \quad (103)$$

$$\mathbf{Y}_{c_i} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Y}_{c_i}}(\boldsymbol{\varphi}_{c_i}, \mathbf{X}_{b_{c_i}}) \quad (104)$$

Afin de tenir compte de valeurs de champs imposés dépendant des champs inconnus, les valeurs de champs imposés s'écrivent :

$$\bar{\mathbf{Y}}_{c_i} = \boldsymbol{\Gamma}_{\bar{\mathbf{Y}}_{c_i}}(\mathbf{X}_{c_i}, \mathbf{X}_{b_{c_i}}) \quad (105)$$

Le vecteur d'état partiellement contraint s'écrit avec cette dernière équation et (102) :

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{c_i} = \boldsymbol{\gamma}_{c_i} \left(\mathbf{X}_{c_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{c_i}, \mathbf{X}_{b_{c_i}} \right) \quad (106)$$

Enfin, l'expression du vecteur d'état de la connexion finale cf_i s'écrit par rapport au vecteur d'état de la connexion initiale ci_i de la façon suivante grâce à l'ODE :

$$\boldsymbol{\varphi}_{cf_i} = \int_0^L \partial_s \boldsymbol{\varphi} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_i} = \boldsymbol{\varphi}_{cf_i}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_i}) \quad (107)$$

Les contraintes additionnelles proviennent de deux sources : des contraintes de liaison (comme en méthode de tir classique), ainsi que de l'équation (108). (108) représente l'équilibre statique de toutes les forces et moments transmis par les p liaisons connectées au le corps rigide j . Pour obtenir (108), nous avons utilisé le fait que $\mathbf{n}_{j+1/j} = -\mathbf{n}_{j/j+1}$ et $\mathbf{m}_{j+1/j} = -\mathbf{m}_{j/j+1}$. Les moments $\mathbf{m}_{p/j}$ provenant des différentes connexions doivent évidemment être calculés au même point de réduction.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{c_i} \mathbf{n}_{c_i/j} - F \\ \sum_{c_i} \mathbf{m}_{c_i/j} - M \end{array} \right\} = \mathbf{C}_{b_j} \left(\mathbf{Y}_{b_j}^{c_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{b_j} \right) = 0 \quad (108)$$

Le terme $\mathbf{Y}_{b_j}^{c_i}$ est l'équivalent de (104), et permet d'extraire les champs contraints $\mathbf{n}_{c_i/j}$ et $\mathbf{m}_{c_i/j}$ de la liaison c_i . Le terme $\bar{\mathbf{Y}}_{b_j}$ est quant à lui l'équivalent de (105) pour le corps rigide et vient imposer la valeur des forces F et des moments M extérieurs autre que ceux issus des connexions (en général F et M sont nuls). $\mathbf{Y}_{b_j}^{c_i}$ et $\bar{\mathbf{Y}}_{b_j}$ s'écrivent :

$$\mathbf{Y}_{b_j}^{c_i} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Y}_{b_j}^{c_i}} \left(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{c_i}, \mathbf{X}_{b_j} \right) \quad (109)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{b_j} = \boldsymbol{\Gamma}_{\bar{\mathbf{Y}}_{b_j}} \left(\mathbf{X}_{b_j} \right) \quad (110)$$

Pour la suite nous distinguerons le vecteur $\mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}$ des liaisons connectées au corps rigide faisant office de début d'intégration d'un segment par l'indice ci_α , du vecteur

$\mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta}$ des liaisons faisant office de cible de l'intégration (arrivant sur le corps rigide) par l'indice $cf\beta$, tel que $\mathbf{C}_{b_j}(\mathbf{Y}_{b_j}^{ci}, \bar{\mathbf{Y}}_{b_j}) = \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_{b_j}^{ci\alpha}, \mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta}, \bar{\mathbf{Y}}_{b_j})$.

Dans le formalisme (c), les variables de position et orientation des corps rigides sont considérées comme de nouvelles inconnues, et les équations d'équilibre (108) constituent de nouvelles contraintes qui sont à concaténer au vecteur de contrainte \mathbf{C} .

Le formalisme (c) proposé permet de recouvrir les capacités de la méthode multi-tir classique. En effet, dans la méthode multi-tir classique, chaque sous segment arrive à ou repart d'un corps rigide à partir d'une liaison encastrement. Cela équivaut dans le formalisme (c) à ce que la connexion d'arrivée $k - 1$ impose l'extrémité du segment à respecter les positions et orientations du corps rigide tel que $\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{i-1/j} = \mathbf{0}$ et $R_{i-1}R_j^T = R_{i-1/j} = I$. Avec une convention MRP choisie pour les rotations, la contrainte en orientation se réécrit $\boldsymbol{\sigma}_{i-1/j} = \mathbf{0}$. La connexion de départ k génère quant à elle des nouvelles inconnues pour le Newton : $\mathbf{n}_{i/j+1}$ et $\mathbf{m}_{i/j+1}$.

Comme dans le formalisme (b), dans le cas (c), couper un segment en deux sous-segments génère 6 inconnues et 6 nouvelles contraintes, permettant de garder une taille de problème réduite pour une résolution la plus efficace possible.

De plus, au contraire de (b), le formalisme (c) permet de traiter tout type de liaison cinématique au niveau des connections entre corps élançés et corps rigides.

La formulation générale des contraintes multi-corps/multi-tir pour n segments ($2n$ connections) et m corps s'écrit :

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, s) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}_0, s) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}_i, s) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}_{n-1}, s) \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}_{ci_0}, \dots, \mathbf{X}_{ci_{n-1}}, \mathbf{X}_{b_0}, \dots, \mathbf{X}_{b_{m-1}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cf_i}(\mathbf{Y}_{cf_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{cf_i}) \\ \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_{b_j}^{ci\alpha}, \mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta}, \bar{\mathbf{Y}}_{b_j}) \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\begin{cases} (\partial_s \boldsymbol{\phi}(s) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, s) \\ \boldsymbol{\phi}_0 = \left[\boldsymbol{\gamma}_{ci_0}(\mathbf{X}_{ci_0}, \mathbf{Y}_{ci_0}, \mathbf{X}_{b_{ci_0}}) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\gamma}_{ci_{n-1}}(\mathbf{X}_{ci_{n-1}}, \mathbf{Y}_{ci_{n-1}}, \mathbf{X}_{b_{ci_{n-1}}}) \right]^T \\ \mathbf{C}(\mathbf{X}_{ci_0}, \dots, \mathbf{X}_{ci_{n-1}}, \mathbf{X}_{b_0}, \dots, \mathbf{X}_{b_{m-1}}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (113)$$

Où \mathbf{C}_{cf_i} est la contrainte générée par la connexion finale cf_i du segment i , et $\mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}$ est la contrainte générée par le corps rigide j .

Les notations introduites dans cette section et les dépendances (102) à (107) et (109) et (110), nous permettent de développer les termes \mathbf{Y}_{cf_i} , $\bar{\mathbf{Y}}_{cf_i}$, $\mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}$, $\mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}$ et $\bar{\mathbf{Y}}_{b_j}$ en fonction des inconnues \mathbf{X}_{ci_i} et \mathbf{X}_{b_j} du problème de tir. Afin de ne pas alourdir inutilement cette section, le développement effectif de ces termes est reporté en Annexe C.1.

Jacobien

Il s'agit ici d'obtenir la dérivée de $\mathbf{C}(\mathbf{X}_{ci_0}, \dots, \mathbf{X}_{ci_{n-1}}, \mathbf{X}_{b_0}, \dots, \mathbf{X}_{b_{m-1}})$ (112) par rapport aux inconnues du Newton $\mathbf{X}_{ci_0}, \dots, \mathbf{X}_{ci_{n-1}}, \mathbf{X}_{b_0}, \dots, \mathbf{X}_{b_{m-1}}$.

A titre d'exemple, la dérivée de la première composante $\mathbf{C}_{cf_i}(\mathbf{Y}_{cf_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{cf_i})$ de (112) par rapport aux inconnues de liaison \mathbf{X}_{ci_i} et de corps $\mathbf{X}_{b_{ci_i}}$ et $\mathbf{X}_{b_{cf_i}}$ (qui sont des éléments parmi $\mathbf{X}_{b_0}, \dots, \mathbf{X}_{b_{m-1}}$) est développée ci-dessous.

Nous calculons tout d'abord le terme intermédiaire :

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{cf_i}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_i}} = \left(\frac{\partial \mathbf{C}_{cf_i}}{\partial \mathbf{Y}_{cf_i}} \frac{\partial \mathbf{Y}_{cf_i}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cf_i}} + \frac{\partial \mathbf{C}_{cf_i}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_i}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_i}}{\partial \mathbf{X}_{cf_i}} \frac{\partial \mathbf{X}_{cf_i}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cf_i}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cf_i}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_i}} \quad (114)$$

Il représente la variation de la contrainte générée par la condition aux limites de fin par rapport au vecteur d'état imposé en début de segment (à $s = 0$).

Dans ce terme, $\frac{\partial \mathbf{C}_{cf_i}}{\partial \mathbf{Y}_{cf_i}}$ est la variation de la contrainte finale par rapport aux champs contraints de la liaison finale.

$\frac{\partial \mathbf{Y}_{cf_i}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cf_i}}$ exprime la dérivée de la transformation (104) entre les champs contraints de la liaison finale et le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ intégré via l'ODE et évalué en $s = L$. Elle permet

de faire le lien entre variables du Newton et variables de l'ODE au niveau de la liaison finale. Son équivalent pour les champs non contraints se retrouve dans le terme $\frac{\partial X_{cf_i}}{\partial \varphi_{cf_i}}$.

Enfin, $\frac{\partial \varphi_{cf_i}}{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}$ correspond à la dérivée des champs intégrés finaux par rapport aux variations des champs initiaux de l'IVP. Ce terme représente l'influence de la condition initiale sur le résultat intégré. Il est évalué à partir des relations présentées aux paragraphes 4.2.1 et 4.2.2.

Ce terme intermédiaire $\frac{\partial C_{cf_i}}{\partial \varphi_{ci_i}}$ nous permet d'exprimer plus simplement la dérivée de la fonction de contraintes, tel que :

$$\frac{\partial C_{cf_i}}{\partial X_{ci_i}} = \frac{\partial C_{cf_i}}{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial X_{ci_i}} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial \bar{Y}_{ci_i}} \frac{\partial \bar{Y}_{ci_i}}{\partial X_{ci_i}} \right) \quad (115)$$

$$\frac{\partial C_{cf_i}}{\partial X_{b_{ci_i}}} = \frac{\partial C_{cf_i}}{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial X_{b_{ci_i}}} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial \bar{Y}_{ci_i}} \frac{\partial \bar{Y}_{ci_i}}{\partial X_{b_{ci_i}}} \right) \quad (116)$$

$$\frac{\partial C_{cf_i}}{\partial X_{b_{cf_i}}} = \frac{\partial C_{cf_i}}{\partial Y_{cf_i}} \frac{\partial Y_{cf_i}}{\partial X_{b_{cf_i}}} + \frac{\partial C_{cf_i}}{\partial \bar{Y}_{cf_i}} \left(\frac{\partial \bar{Y}_{cf_i}}{\partial X_{cf_i}} \frac{\partial X_{cf_i}}{\partial X_{b_{cf_i}}} + \frac{\partial \bar{Y}_{cf_i}}{\partial X_{b_{cf_i}}} \right) \quad (117)$$

Le terme $\frac{\partial C_{cf_i}}{\partial X_{ci_i}}$ est la dérivée de la contrainte générée par la condition aux limites de fin par rapport aux inconnues de liaison de la condition au limite de début du segment i .

Y_{cf_i} sont les inconnues de la liaison finale sur lesquels portent la contrainte. \bar{Y}_{cf_i} sont les valeurs prises par ces champs.

$\frac{d\bar{\varphi}_{ci_i}}{dX_{ci/f_i}} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial X_{ci/f_i}} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial \bar{Y}_{ci/f_i}} \frac{\partial \bar{Y}_{ci/f_i}}{\partial X_{ci_i}}$ correspond à la dérivée des champs initiaux évaluée en $s = 0$ par rapport aux inconnues X_{ci/f_i} de la liaison initiale/finale. C'est la dérivée de la transformation (102) entre les inconnues de liaison et le vecteur d'état de l'ODE, et a la même signification que le terme $\frac{\partial Y_{cf_i}}{\partial \varphi_{cf_i}}$. Si $\varphi = \gamma(X, \bar{Y}(X, X_b), X_b)$ alors apparaît le terme complémentaire $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{Y}_{ci/f_i}} \frac{\partial \bar{Y}_{ci/f_i}}{\partial X_{ci/f_i}}$ représentant la dérivée des champs

imposés par rapport aux champs non contraints au niveau de la condition initiale/finale (soit par exemple la dérivée $\frac{\partial n_x}{\partial x}(x)$ de la liaison ressort (l) de la poutre).

De la même façon, $\frac{d\bar{\varphi}_{ci_i}}{dX_{b_{ci_i}}} = \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial X_{b_{ci_i}}} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_i}}{\partial \bar{Y}_{ci_i}} \frac{\partial \bar{Y}_{ci_i}}{\partial X_{b_{ci_i}}}$ est la dérivée de la transformation (106) entre les inconnues de liaison et le vecteur d'état de l'ODE par rapport aux inconnues du corps k .

Le principe de calcul des termes du jacobien ayant été établi, la dérivée de la seconde composante de (112) par rapport aux inconnues de liaison X_{ci_i} et de corps X_{b_j} et $X_{b_{ci_\beta}}$ est laissée en Annexe C.2 à des fins de concisions.

L'assemblage du jacobien se fait ensuite par bloc en fonction de la façon dont le vecteur contrainte $C(X_{ci_0}, \dots, X_{ci_{n-1}}, X_{b_0}, \dots, X_{b_{m-1}})$ (112) est construit à partir des inconnues $X_{ci_0}, \dots, X_{ci_{n-1}}, X_{b_0}, \dots, X_{b_{m-1}}$. L'avantage d'utiliser un jacobien recomposé réside dans le fait que chaque composante du vecteur des contraintes ne dépend que de quelques inconnues du Newton. En effet, les inconnues d'une liaison sur une autre alors qu'elles ne sont pas liées par un segment ou un corps rigide seront sans effet sur le calcul des contraintes. Le jacobien possède donc beaucoup de blocs de zéros. De ce fait, lorsque beaucoup de liaisons et de corps rigides seront impliqués, une différence finie « brutale » sur la fonction de contrainte entraîne des temps de calculs long et le réassemblage permet un gain de temps significatif. En pratique nous avons observé qu'à partir de 3 tronçons (soit 6 liaisons et 2 corps rigides), la recombinaison devient plus efficace d'un point de vue temps de calcul qu'une différence finie directe, pour un segment unique résolu avec la méthode multi-tir.

Les deux prochaines sections traitent des résultats obtenus sur des modèles fils et poutres avec la formulation multi-corps/simple ou multi-tir proposée. Les références auxquelles sont comparés les résultats sont issues de formulations analytiques lorsque ces formulations existent, ou de la littérature dans le cas contraire.

4.3 RESULTATS DE LA METHODE

Cette section vise à valider numériquement de la méthode de tir simple et multi-corps/multi-tir développée en section précédente. Les objectifs sont multiples, il s'agit de démontrer les capacités de la méthode appliquée aux problèmes fils ou poutres en termes :

- De précision ;
- De convergence : nombre d'itérations du Newton et nombre de nœuds lors de l'intégration en pas adaptatif ;
- De capacité de modélisation commune aux fils et poutres : simple ou multi segments, différentes conditions aux limites, paramètres de sections matériaux différents ou différents types de lois de comportement, chargement linéique extérieur non-linéaire (types efforts suiveurs) ;
- De capacité de modélisation spécifique aux poutres : robustesse du paramétrage en MRP, utilisation d'une configuration de référence non droite, couplage non-linéaire des champs solution.

Les références pour la comparaison des résultats proviennent soit de formulations analytiques (ou semi-analytiques : résolues numériquement), soit sont extraites de la littérature. 12 exemples résumés en Table 9 seront traités afin de recouvrir l'ensemble de ces sujets. Les types de références considérés sont également rappelés dans cette table.

Pour les fils, deux sources de références sont utilisées :

- La formulation caténaire [36] : c'est en réalité un dérivé de la méthode de tir pour laquelle l'ODE a été intégrée analytiquement (voir Annexe D.1). Une fois intégrées, les équations forment un système algébrique à résoudre. Comme avec la méthode de tir, un algorithme de Newton est utilisé ;
- La formulation analytique du problème *velaria* [71].

Pour les poutres, trois types de références sont utilisées :

- La formulation analytique d'une poutre en flexion pure en grandes rotations [83] ;

- Des formulations issues de la Résistance Des Matériaux (RDM) [84] ;
- Des valeurs numériques issues de la littérature dont les références seront précisées au cas par cas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Référence	C	C	A	C	A	L	L	L	R	R	R	R
Segment simple	X	X	X		X	X	X	X				
Plusieurs segments				X					X	X	X	X
Conditions aux limites	X	X									X	X
Loi de comportement			X	X		X				X		X
Convergence	X	X										
Intégrateur (nombre de nœuds)	X			X	X							
Rotations (poutres)	NC	NC	NC	NC	X	X	X					
Géométrie initiale					X		X	X				
Couplages entre modes	NC	NC	NC	NC		X	X	X				
Chargement linéique non-linéaire (solutions multiples)			X									
A : analytique C : caténaire (semi-analytique) L : littérature R : résistance des matériaux NC : non concerné												

Table 9: Méthode de tir - exemples de validation

4.3.1 Exemple n°1 : Fil caténaire rotule-prismatique

Cet exemple propose l'étude d'un fil seul soumis uniquement à son poids propre (caténaire) attaché aux extrémités par une liaison rotule et une liaison prismatique d'axe x (Figure 40). Le problème permet de vérifier la méthode de tir simple avec laquelle plusieurs valeurs d'effort horizontal de la liaison prismatique sont ciblées. L'objectif est de sortir du cadre classique de la modélisation caténaire dans laquelle le

segment est connecté par des liaisons rotules à chaque extrémité. Dans cet exemple de validation, nous regarderons également l'influence de l'erreur du schéma d'intégration Runge-Kutta vis-à-vis du nombre de points et de la précision.

Le segment est supposé avoir une section matériau uniforme dont les paramètres sont donnés en Table 10. La ligne est fixée en $s = 0$, et libre de translater selon x en $s = L$ avec un effort imposé F_x .

V_a , H_a , V et H sont respectivement les tensions verticales et horizontales à l'extrémité gauche (ancrage) et droite (chaumard). La tolérance de Newton est fixée à 10^{-12} et dans un premier temps nous utilisons un schéma RK4 explicite où nous fixons le nombre d'éléments à 10.

Les résultats sont comparés à la formulation analytique développée en Annexe D.1.

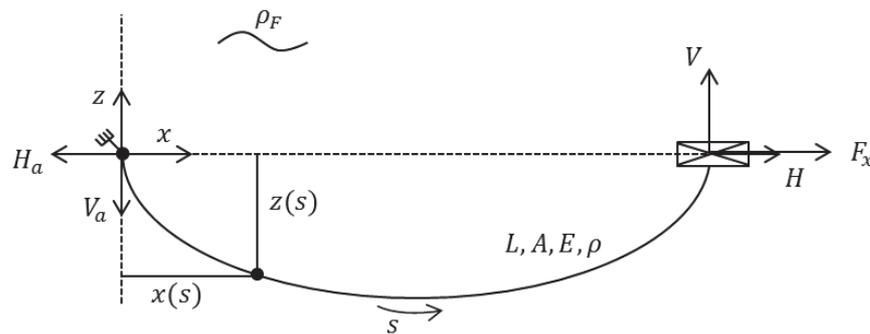


Figure 40 : Exemple n°1 : définition d'un segment caténaire simple

Longueur au repos L	50 m
Module d'Young E	$2.11.10^{11}$ N/m ²
Aire A	$3.1426.10^{-4}$ m ²
Masse volumique ρ	$7.850.10^3$ kg/m ³
Masse volumique du fluide ρ_F	$1.025.10^3$ kg/m ³

Table 10 : Exemple n°1 : caractéristiques du segment

La Figure 41 présente les solutions pour les valeurs de c variant de 1 à 10. La Table 11 donne les erreurs adimensionnelles absolues en positions et tensions maximales le long du segment pour différentes valeurs de tension horizontale imposées au travers du ratio $c = wL/F_x$ avec $w = gA(\rho - \rho_F)$. L'erreur est calculée

par $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(n_i - n_{i \text{ exact}})|/wL$ pour les tensions et par $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(x_i - x_{i \text{ exact}})|/L$ pour les déplacements.

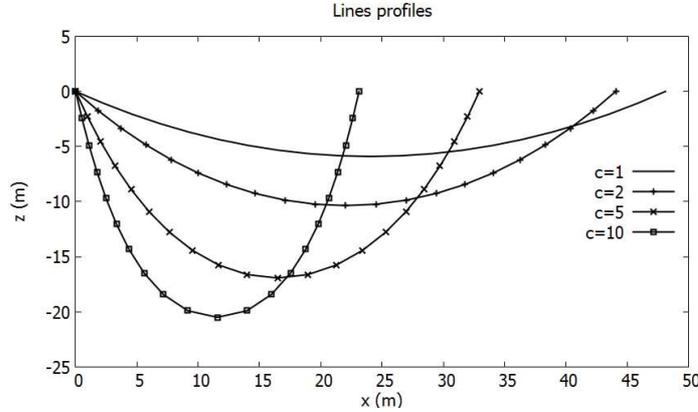


Figure 41 : Exemple n°1 : solutions caténaire rotule-prismatique pour différents ratios c

Champ	$c = 1$	$c = 2$	$c = 5$	$c = 10$
x	$7.92 \cdot 10^{-9}$	$3.79 \cdot 10^{-8}$	$5.10 \cdot 10^{-7}$	$3.89 \cdot 10^{-6}$
z	$6.52 \cdot 10^{-9}$	$6.61 \cdot 10^{-8}$	$8.57 \cdot 10^{-7}$	$7.53 \cdot 10^{-6}$
H	$1.86 \cdot 10^{-13}$	$1.95 \cdot 10^{-15}$	$3.73 \cdot 10^{-14}$	$1.86 \cdot 10^{-14}$
V	$4.66 \cdot 10^{-14}$	$6.99 \cdot 10^{-11}$	$4.84 \cdot 10^{-14}$	$4.66 \cdot 10^{-14}$

Table 11 : Exemple n°1 : erreurs maximales

La méthode de tir simple montre de très bons résultats en termes de précision sur ces cas. L'erreur maximale tous cas confondus n'excède pas $7.53 \cdot 10^{-6}$ sur les positions verticales avec seulement 10 éléments. Les erreurs pour les champs d'efforts sont de l'ordre de la précision machine. Cet exemple permet également de tester une formulation en condition aux limites mixte (position et effort de la liaison prismatique).

Comme mentionné en paragraphe 4.2.4, un atout intéressant de la méthode de tir est l'utilisation d'un intégrateur à pas adaptatif pour minimiser le nombre de points d'intégration. En utilisant un schéma RKF45, nous obtenons les itérations présentées en Figure 42 (pour une erreur de 10^{-12} du schéma) ainsi que l'évolution du nombre de points d'intégration en fonction de l'erreur absolue choisie pour le schéma RKF45 en Figure 43. Ces résultats ont été obtenus pour le cas $c = 1$ et l'itéré initial ${}^0\mathbf{X} = {}^0\mathbf{n}_0 =$

[50, 0, -100] (condition initiale à la rotule). L'algorithme de Newton converge en 5 itérations vers la solution finale. L'itéré initial n'étant pas nécessairement proche de la cible (Figure 42), nous observons ici une convergence très rapide de la méthode. De plus, la Figure 43 nous montre que le nombre de points d'intégration ne dépasse pas les 10 nœuds dès la première itération, même pour des erreurs absolues du schéma très faibles. Enfin, le nombre de points est identique entre les itérations 1 à 4. Cela s'explique par les solutions géométriquement proches visibles en Figure 42. Un schéma d'intégration adaptatif utilisé avec la méthode de tir permet donc une réduction du nombre de nœuds d'intégration et donc du temps de calcul tout en maintenant une précision maîtrisée grâce au paramètre d'erreur de l'intégrateur.

Finalement nous effectuons un calcul multi-corps/multi-tir en discrétisant le segment afin de caractériser l'influence de la méthode de calcul du jacobien sur les performances de calcul. Le jacobien est calculé soit par une différence finie directe de la fonction contrainte (FD), soit recomposé au travers des éléments fournis en paragraphe 4.2.4 où le calcul du terme $\frac{\partial \varphi_{cf_i}}{\partial \varphi_{ci_i}}$ se fait par différence finie (R_FD) ou par intégration de l'ODE qui lui est associée (R_AN).

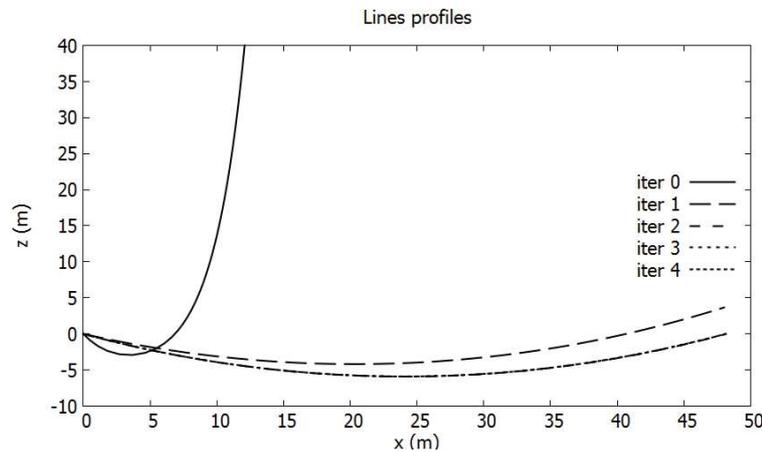


Figure 42 : Exemple n°1 : itérations du Newton

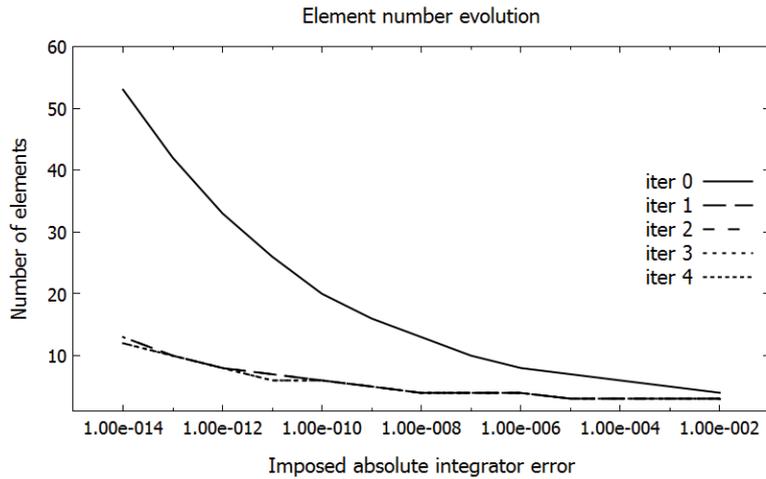


Figure 43 : Exemple n°1 : évolution du nombre de points d'intégration par rapport à l'erreur du schéma RKF45

La technique de calcul du jacobien n'a pas d'influence sur l'évolution du nombre d'itérations du Newton (Figure 44). Le calcul par intégration de l'ODE, censé être plus précis, ne permet pas de réduire significativement le nombre d'itérations par rapport aux approches différences finies (avec un pas de 10^{-8}). En revanche, la recomposition du jacobien permet un gain en temps significatif comparé à une différence finie brute (Figure 45) car les blocs de zéros des segments non adjacents ne sont pas calculés. Le temps de calcul dépend quadratiquement du nombre de segments lors d'un calcul direct, et linéairement lors d'un calcul avec recomposition, comme indiqué par les régressions quadratiques et linéaires des courbes pointillées de la Figure 45.

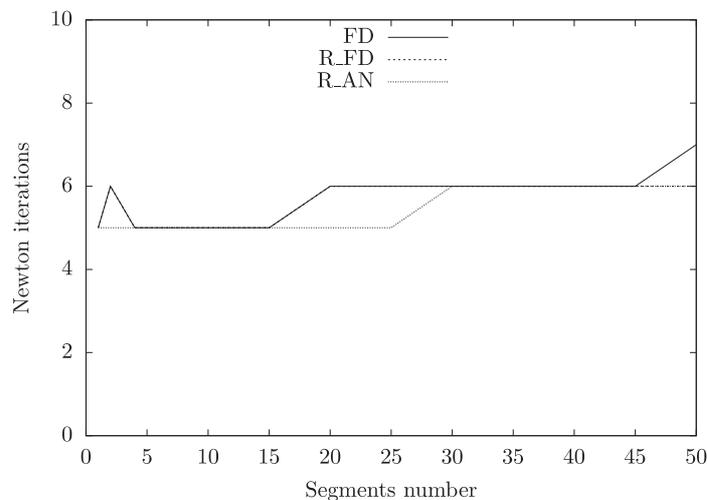


Figure 44 : Exemple n°1 : itérations du Newton fonction du nombre de segments

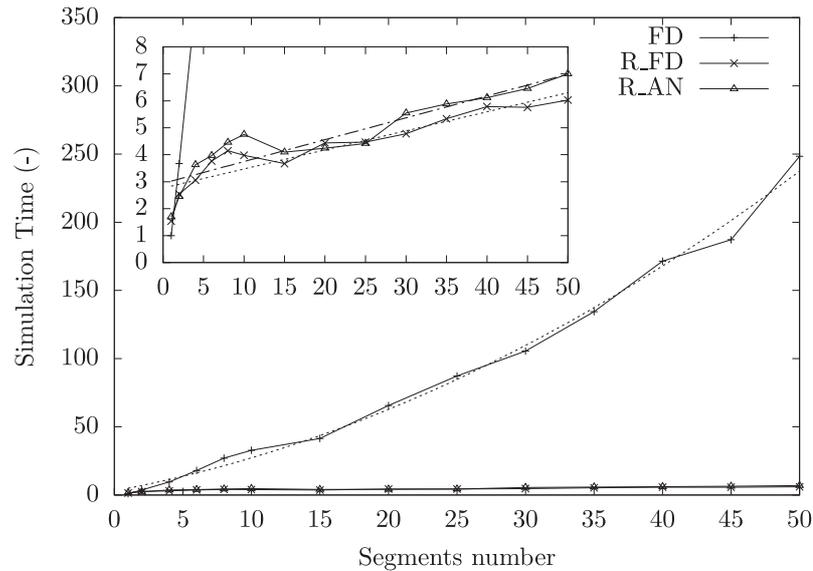


Figure 45 : Exemple n°1 : temps de calcul fonction du nombre de segments (ramené au temps d'évaluation pour 1 segment)

4.3.2 Exemple n°2 : Fil caténaire sous plusieurs combinaisons de conditions aux limites

Le but de cet exemple est d'étudier le comportement de la méthode de tir simple avec plusieurs types de conditions aux limites. Une particularité évoquée en paragraphe 4.2.4 est la notion de direction du tir. En effet, l'intégration de l'ODE se fait à partir d'un côté du segment étudié. Selon l'extrémité de départ d'intégration de l'ODE, les inconnues et contraintes de la méthode de tir peuvent différer même si la configuration du système physique reste la même (Figure 46). La direction de tir impacte également la valeur des champs d'efforts internes compte tenu de la convention de positivité de la droite sur la gauche qui dépend de l'origine des abscisses curvilignes (voir la cinématique des fils 4.2.1 et des poutres 4.2.2). Nous cherchons donc à vérifier si les valeurs des champs solutions sont bien identiques, indépendamment du choix de l'origine des abscisses curvilignes (à la convention de signe près).

L'exemple se base sur un fil caténaire dont la solution de référence est donnée en Annexe D.1. Un même segment identique à l'exemple précédent est considéré. C'est un segment simple déformable, de paramètres de section matériau constants, suivant une loi élastique, donnés en Table 10.

La condition aux limites de gauche sera toujours prise comme une rotule. Celle de droite sera prise parmi les conditions aux limites suivantes : (a) rotule, (b) effort imposé, (c) prismatique, (e) ressort linéaire, (f) ressort linéaire + liaison prismatique (c.f. Table 6). La configuration caténaire étant dans un plan, la liaison (d) ponctuelle est équivalente à une liaison prismatique pour les fils et n'est donc pas réétudiée. Ces 5 combinaisons sont dédoublées pour les s croissants et décroissants selon x qui correspondent aux configurations (I) et (II) de la Figure 46. Au total, 10 combinaisons sont donc étudiées dans cet exemple.

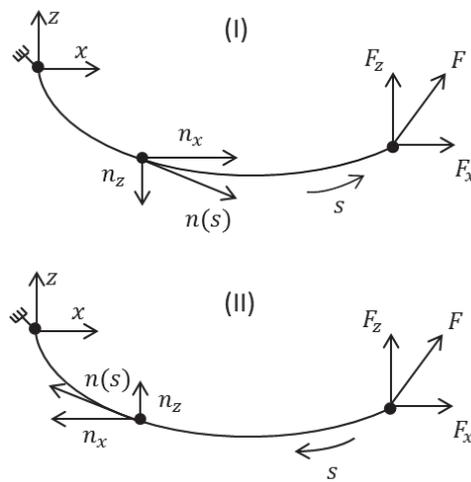


Figure 46 : Exemple n°2 : convention de signe des efforts selon la direction d'intégration

Pour le cas (b), nous considérons un pur effort horizontal tel que $F_z = 0$. Pour les cas (b) et (c), nous introduisons le ratio $c = wL/F_x$ avec $w = gA(\rho - \rho_F)$ et tel que F_x est obtenu pour la valeur $c = 10$. Les coordonnées de la rotule à l'extrémité gauche en convention (I) sont $x_A = 0, z_A = 0$. Enfin, les coordonnées de l'extrémité de droite pour les cas (I)-(a), (I)-(c) sont $x_F = 25$ et $z_F = 0$. Le point de référence du ressort est pris à $\mathbf{a} = [25, 0, 0]^T$. La raideur du ressort est de $k = wL/10$. La tolérance du Newton est fixée à 10^{-8} et le paramètre d'erreur absolue de l'intégrateur à 10^{-8} . L'estimation de l'itéré initial pour les cas (II)-(b), (II)-(c) et (II)-(f) est imposée à $\mathbf{r}_F = [x_F, z_F]$. De la même façon, lorsque des tensions initiales sont inconnues (cas (I) et (II)-(a), (II)-(c)), les tensions verticales et horizontales sont supposées égales telles que la norme est obtenue pour le ratio $c = 10$. Cela correspond à un fil dont la tangente fait un angle de 45 degrés vers le bas.

Nous comparons les erreurs absolues adimensionnelles $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(n_i - n_{i \text{ exact}})|/wL$ et $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(x_i - x_{i \text{ exact}})|/L$ en début, fin et maximale le long du segment, dont les résultats sont donnés en Table 12 à Table 14. Nous avons retiré de la Table 12 les erreurs nulles dues au fait que nous imposons la moitié des champs au niveau de l'extrémité initiale. Nous pouvons voir que l'erreur maximale ne dépasse pas $2.92.10^{-9}$ pour la position en x le long du segment. Aux extrémités initiales et finales, l'erreur maximale est respectivement de $8.29.10^{-10}$ et $2.18.10^{-9}$, tous champs confondus. Les erreurs sur le cas (c) sont plus faibles que dans l'exemple précédent car nous avons fixé le nombre de points d'intégration constant à 10, alors que dans l'exemple présent l'intégrateur RKF45 adapte le pas en fonction de la précision souhaitée. Ici nous obtenons 34 points d'intégration pour la solution finale du cas rotule-prismatique avec $c = 10$, cette valeur ayant été sélectionnée car présentant la moins grande précision dans l'exemple n°1.

Les valeurs d'erreur sont donc fortement dépendantes des tolérances choisies pour l'intégrateur à pas adaptatif et pour l'algorithme de Newton. La tolérance sur le Newton influencera principalement l'erreur au niveau des extrémités alors que l'erreur sur le RKF45 affectera l'erreur maximale le long du segment. L'intégrateur à pas adaptatif permet donc un gain significatif en précision tout en limitant le nombre de nœuds au strict nécessaire.

		Champs			
Conv.	Cas	x	z	n_x	n_z
(I)	(a)	-	-	$2.34.10^{-10}$	$6.12.10^{-10}$
	(b)	-	-	$1.86.10^{-14}$	$1.86.10^{-13}$
	(c)	-	-	$1.86.10^{-14}$	$6.92.10^{-10}$
	(e)	-	-	$2.90.10^{-10}$	$6.43.10^{-10}$
	(f)	-	-	$2.73.10^{-10}$	$7.46.10^{-10}$
	(II)	(a)	-	-	$2.34.10^{-10}$
	(b)	$7.60.10^{-10}$	$3.03.10^{-11}$	-	-
	(c)	$8.29.10^{-10}$	-	$1.86.10^{-14}$	$6.92.10^{-10}$
	(e)	$4.10.10^{-11}$	$6.80.10^{-12}$	$2.39.10^{-10}$	$5.72.10^{-10}$
	(f)	$4.79.10^{-11}$	-	$2.73.10^{-10}$	$7.46.10^{-10}$

Table 12 : Exemple n°2 : erreurs absolues adimensionnelles à l'extrémité initiale

Cet exemple illustre le fait que la méthode de tir permet la modélisation de plusieurs types de conditions aux limites. Quelle que soit la configuration choisie (origine des abscisses curvilignes), les erreurs sur les champs de position et d'effort sont du même ordre de grandeur, validant le choix d'assemblage du vecteur d'état à intégrer par la moitié des champs connus par la condition aux limites. Les conditions aux limites de type ressort, considérées comme des liaisons cinématiques classiques générant les inconnues et contraintes du Newton sont également validées. De plus, la méthode se base sur une utilisation des champs continus sans approximation ou discrétisation, ce qui conduit à une très grande précision sur les efforts tout le long de la ligne comme montré en Table 14.

		Champs			
Conv.	Cas	x	z	n_x	n_z
(I)	(a)	$2.00.10^{-13}$	$4.51.10^{-15}$	$2.34.10^{-10}$	$6.12.10^{-10}$
	(b)	$2.18.10^{-9}$	$1.13.10^{-10}$	$1.86.10^{-14}$	$1.90.10^{-15}$
	(c)	$8.29.10^{-10}$	$4.77.10^{-16}$	$1.86.10^{-14}$	$6.92.10^{-10}$
	(e)	$5.06.10^{-11}$	$4.78.10^{-12}$	$2.90.10^{-10}$	$6.43.10^{-10}$
	(f)	$4.79.10^{-11}$	$2.53.10^{-15}$	$2.73.10^{-10}$	$7.46.10^{-10}$
	(II)	(a)	$1.04.10^{-13}$	$2.88.10^{-15}$	$2.34.10^{-10}$
	(b)	$1.36.10^{-15}$	$2.93.10^{-16}$	$1.86.10^{-14}$	$1.86.10^{-13}$
	(c)	$4.22.10^{-15}$	$1.71.10^{-15}$	$1.86.10^{-14}$	$6.92.10^{-10}$
	(e)	$7.97.10^{-16}$	$1.06.10^{-16}$	$2.39.10^{-10}$	$5.72.10^{-10}$
	(f)	$1.78.10^{-15}$	$6.90.10^{-17}$	$2.73.10^{-10}$	$7.46.10^{-10}$

Table 13 : Exemple n°2 : erreurs absolues adimensionnelles à l'extrémité finale

		Champs			
Conv.	Cas	x	z	n_x	n_z
(I)	(a)	$8.83.10^{-10}$	$1.10.10^{-10}$	$2.34.10^{-10}$	$6.12.10^{-10}$
	(b)	$2.92.10^{-9}$	$1.59.10^{-10}$	$1.86.10^{-14}$	$4.42.10^{-13}$
	(c)	$1.26.10^{-9}$	$1.20.10^{-10}$	$1.86.10^{-14}$	$6.92.10^{-10}$
	(e)	$1.09.10^{-9}$	$1.16.10^{-10}$	$2.90.10^{-10}$	$6.43.10^{-10}$
	(f)	$9.47.10^{-10}$	$1.13.10^{-10}$	$2.73.10^{-10}$	$7.46.10^{-10}$
	(II)	(a)	$8.83.10^{-10}$	$1.10.10^{-10}$	$2.34.10^{-10}$
	(b)	$1.18.10^{-9}$	$6.03.10^{-11}$	$1.86.10^{-14}$	$1.86.10^{-13}$
	(c)	$1.20.10^{-9}$	$1.20.10^{-10}$	$1.86.10^{-14}$	$6.92.10^{-10}$
	(e)	$9.54.10^{-10}$	$9.66.10^{-11}$	$2.39.10^{-10}$	$5.72.10^{-10}$
	(f)	$9.55.10^{-10}$	$1.13.10^{-10}$	$2.73.10^{-10}$	$7.46.10^{-10}$

Table 14 : Exemple n°2 : erreurs absolues adimensionnelles maximales le long du tronçon

4.3.3 Exemple n°3 : Fil soumis à un effort radial

Nous avons vu dans les deux exemples précédents l'application de la méthode de tir sur des cas caténaux avec plusieurs types de conditions aux limites. Les équations caténaux sont basées sur un effort de gravité ne dépendant pas de la position et de l'orientation de la section. Cela conduit à un bon conditionnement de l'IVP tant que la ligne ne se tend pas.

Nous allons maintenant éprouver la méthode de tir simple appliquée à la résolution d'un tronçon soumis à un effort dépendant de sa position. Ce type d'approche a été utilisée pour des lignes d'ancrage soumises aux effets de la gravité et du courant par [64,65] avec un formalisme de la cinématique du fil en coordonnées sphériques.

Nous allons ici valider le formalisme cartésien adopté en réalisant un exemple d'étude sur la référence du velaria [71]. Le fil est supposé inextensible, sans masse et soumis à une force distribuée normale d'intensité constante p de la forme $\mathbf{f}(s) = -p\mathbf{k} \wedge \partial_s \mathbf{r}$. La solution à ce problème est un arc circulaire. Cet exemple correspond à l'application d'une pression hydrostatique d'amplitude p sur une membrane cylindrique d'axe \mathbf{k} . Nous considérons ici le fil inextensible (loi de comportement (39)) dont les extrémités sont rotulées (Figure 47). Le rayon R est pris à 1 m et l'effort distribué p à 1 N/m. Les conditions aux limites rotulées imposent $\mathbf{r}(s = 0) = R.\mathbf{x}$ et $\mathbf{r}(s = L) = -R.\mathbf{x}$. Avec ce paramétrage, nous avons la longueur de tronçon $L = \pi R$ et l'origine des abscisses curvilignes est choisie pour un angle θ nul tel que $\theta(s) = \frac{s}{R}$.

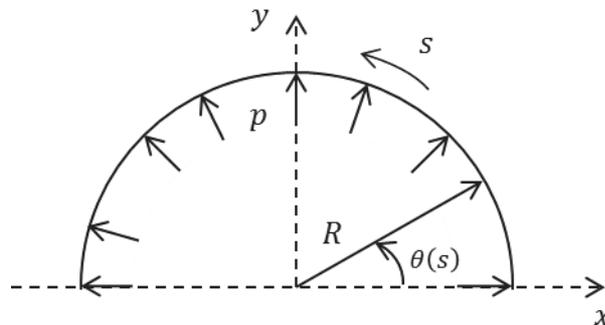


Figure 47 : Exemple n°3 : pression hydrostatique constante sur une membrane cylindrique

La solution analytique pour ce problème est :

$$x(s) = R\cos(\theta(s)) \quad (118)$$

$$y(s) = R\sin(\theta(s))$$

$$n_x(s) = -pR\sin(\theta(s))$$

$$n_y(s) = pR\cos(\theta(s))$$

Même si l'algorithme de tir est résolu en trois dimensions, nous effectuons le raisonnement dans le plan dans la suite de cet exemple. D'un point de vue conceptuel, ce cas est de dimensions 2, avec deux inconnues pour le Newton ($X = [n_x(s=0), n_y(s=0)]^T$).

Nous introduisons la tension adimensionnelle λ (pourcentage de la tension solution) en extrémité de départ, et définie comme $n_y(s=0) = \lambda pR = n_y^\lambda$ tel que $X^\lambda = [0, n_y^\lambda]^T$ (la composante $n_x(s=0)$ est annulée afin de simplifier l'analyse).

La tolérance du Newton est prise à 10^{-10} , l'erreur absolue pour l'intégrateur à 10^{-12} . Deux estimations initiales sont investiguées : $\lambda = -1.5$ et $\lambda = 1.5$. La méthode de tir converge en 9 itérations pour chacun des cas (Figure 48).

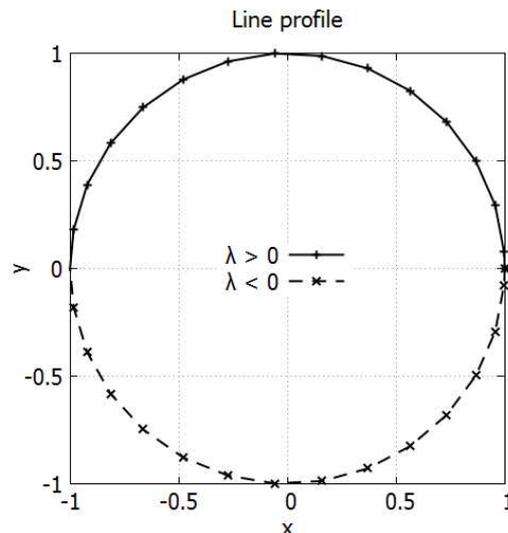


Figure 48 : Exemple n°3 : multiples solutions de la méthode de tir pour un fil soumis à un effort radial

Si nous paramétrons l'équation de contrainte finale $\mathbf{r}(s = L) = -R \cdot \mathbf{x}$ par λ nous obtenons deux termes : $C_x(\lambda) = x(s = L; \lambda)/R + 1$ et $C_y(\lambda) = y(s = L; \lambda)/R$. La Figure 49 présente l'évolution de $C_x(\lambda)$ et $C_y(\lambda)$ en fonction de λ . L'objectif de la méthode de tir étant d'annuler ces fonctions au travers du Newton, la solution est obtenue pour $\lambda = 1$. Le diagramme de phase $(C_x(\lambda), C_y(\lambda))$ est montré en Figure 50 dont les labels indiquent les valeurs prises par λ pour initialiser X^λ . Sur ce diagramme de phase, la solution est trouvée pour $(C_x(\lambda), C_y(\lambda)) = (0,0)$. Le trait plein correspond au cas $\mathbf{k} = \mathbf{z}$ avec $\lambda > 0$. Les Figure 49 et Figure 50 sont simplement obtenues par l'intégration d'ODE pour plusieurs valeurs de $\lambda \in [-1.7, -0.5] \cup [0.5, 1.7]$, donc de X^λ .

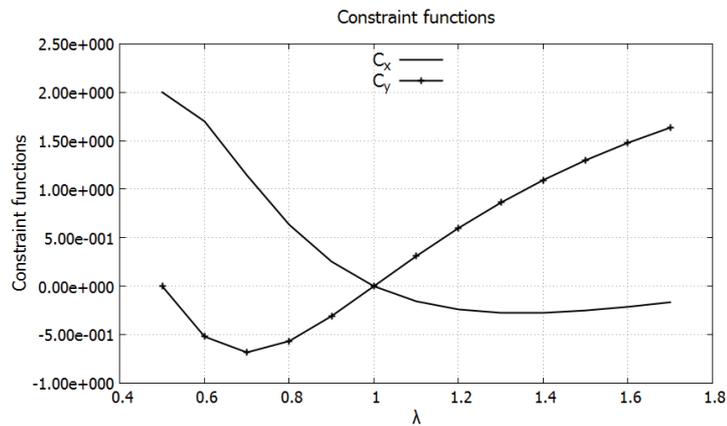


Figure 49 : Exemple n°3 : évolutions de $C_x(\lambda)$ et $C_y(\lambda)$ pour un effort linéique radial

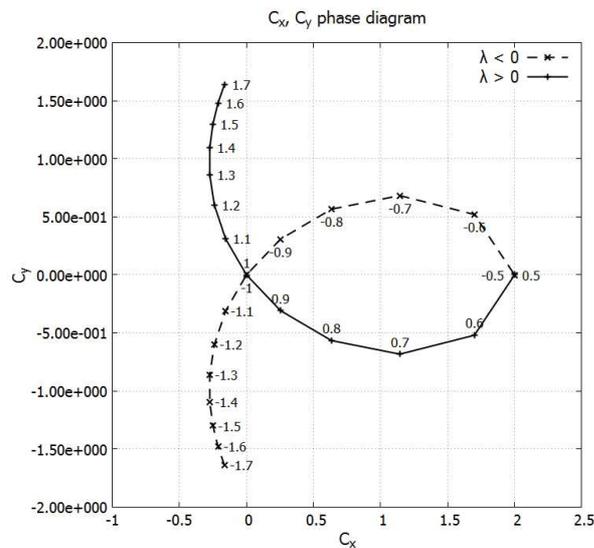


Figure 50 : Exemple n°3 : diagramme de phase $C_x(\lambda)$ et $C_y(\lambda)$ fonction des valeurs prises par λ

Si l'on modifie la normale \mathbf{k} tel que $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{OM} \wedge \partial_s r}{\|\mathbf{OM} \wedge \partial_s r\|}$ où M est un point courant appartenant au segment, cela permet d'étendre le paramétrage pour traiter des orientations du segment (sens de l'angle θ et des abscisses curvilignes) horaires ou trigonométriques. Ainsi, la solution pointillée de la Figure 48 peut être atteinte et deux solutions symétriques par rapport à \mathbf{x} existent (λ positif et λ négatif). Le trait pointillé sur le diagramme de phase est obtenu pour les valeurs de λ négatives.

Il est intéressant de constater en Figure 50 que dans le cadre de cet exemple simple en deux dimensions, où l'évolution des fonctions contraintes est restreinte au seul paramètre λ , deux solutions peuvent coïncider lorsque le diagramme de phase présente une intersection pour différentes valeurs de λ . Chaque solution est atteignable par la méthode de tir tant qu'un itéré initial se trouve dans le domaine de convergence de cette solution.

Si l'on observe précisément la Figure 50, nous pouvons remarquer un autre point d'intersection $(C_x(\lambda), C_y(\lambda)) = (2,0)$ pour les valeurs $\lambda = -0.5$ et $\lambda = 0.5$. Cela correspond au cas du cercle fermé. Du fait que la configuration de référence soit un segment ouvert (extrémités déconnectées), il existe pour ce point spécifique du diagramme de phase une infinité de solutions correspondant aux cercles pleins de rayon $r = \frac{R}{n}$ (le fil fait des tours sur lui-même).

Enfin, les erreurs maximales adimensionnelles le long du segment $\varepsilon_a = \max_{s \in [0,L]} |(n_i - n_{i \text{ exact}})|/pR$ et $\varepsilon_a = \max_{s \in [0,L]} |(x_i - x_{i \text{ exact}})|/R$ sont données en Table 15.

Champs	Itéré initial λ	
	-1.5	1.5
x	$3.70 \cdot 10^{-9}$	$3.70 \cdot 10^{-9}$
y	$9.18 \cdot 10^{-9}$	$9.18 \cdot 10^{-9}$
n_x	$6.01 \cdot 10^{-9}$	$6.01 \cdot 10^{-9}$
n_y	$4.58 \cdot 10^{-9}$	$4.58 \cdot 10^{-9}$

Table 15 : Exemple n°3 : erreurs maximales adimensionnelles

Encore une fois la précision de la méthode de tir est remarquable sur cet exemple où l'effort linéique dépend de la géométrie du segment en position et orientation.

Nous mettons ici en évidence le fait que la méthode de tir peut prendre en compte des chargements non-linéaires sur le corps élastique, une loi matériau inextensible, et atteindre plusieurs solutions du problème aux deux bouts lorsqu'elles existent (à condition d'avoir un premier itéré suffisamment bien défini) tout en gardant une précision quasi-analytique.

4.3.4 Exemple n°4 : Configuration de fils à trois brins convergents

Cet exemple permet d'aborder l'utilisation du multi-tir pour la résolution de plusieurs segments caténaux (lignes d'ancrage) connectés ensemble comme représentés sur les Figure 51 et Figure 52.

Nous considérons trois extrémités uniformément réparties sur un cercle de rayon R à des angles constants de $\psi = \frac{2\pi}{3}$ et une altitude nulle. Chacun des trois segments possède ses propres caractéristiques matériau $E^{(i)}, A^{(i)}, \rho^{(i)}$, et ils sont connectés ensemble à l'une de leurs extrémités par une bouée modélisée par un effort vertical F_b . La résolution semi-analytique à partir des équations caténales est donnée en Annexe D.3.

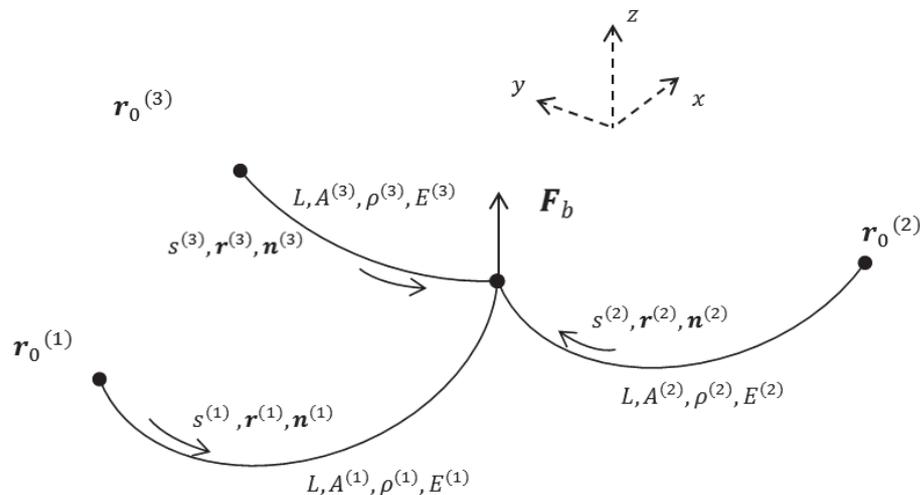


Figure 51 : Exemple n°4 : configuration de l'exemple à trois brins – vue 3D

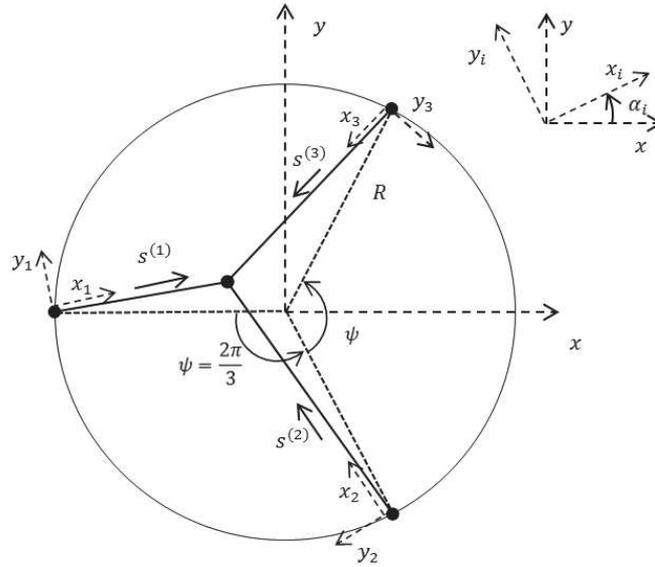


Figure 52 : Exemple n°4 : configuration de l'exemple à trois brins - vue horizontale

Nous considérons les valeurs suivantes : $L_0 = 50 \text{ m}$, $E_0 = 2.11.10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 7850 \text{ kg/m}^3$ et $A_0 = 3.1416.10^{-4} \text{ m}^2$. A partir de ces paramètres, les propriétés de chaque segment sont données dans la Table 16.

Propriété	Segment 1	Segment 2	Segment 3
$L^{(i)}$	L_0	L_0	L_0
$A^{(i)}$	A_0	A_0	A_0
$E^{(i)}$	$0.05E_0$	$0.001E_0$	E_0
$\rho^{(i)}$	$2\rho_0$	$0.5 \rho_0$	ρ_0

Table 16 : Exemple n°4 : propriété des segments

Pour cet exemple, une tolérance de 10^{-10} est utilisée pour le Newton et de 10^{-12} pour l'erreur absolue sur l'intégrateur à pas adaptatif. L'itéré initial est pris à pour chaque brin à ${}^0X^i = {}^0X \cos(\psi_i)$ avec ${}^0X = [50, 0, -100]$.

La Figure 53 présente les positions finales de chaque segment dans le plan horizontal. Les erreurs absolues maximales adimensionnelles $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(n_i - n_{i \text{ exact}})|/wL$ pour les tensions et $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(x_i - x_{i \text{ exact}})|/L$ pour les positions sont présentées sur chaque segment en Table 17. Les angles de ligne, la position de la bouée, et les erreurs absolues dimensionnelles ($\varepsilon_a = |(X - X_{\text{exact}})|$) associées sont

données en Table 18. De plus, la Table 19 fournit le nombre de points final utilisé par l'intégrateur à pas adaptatif pour intégrer l'ODE de chaque tronçon.

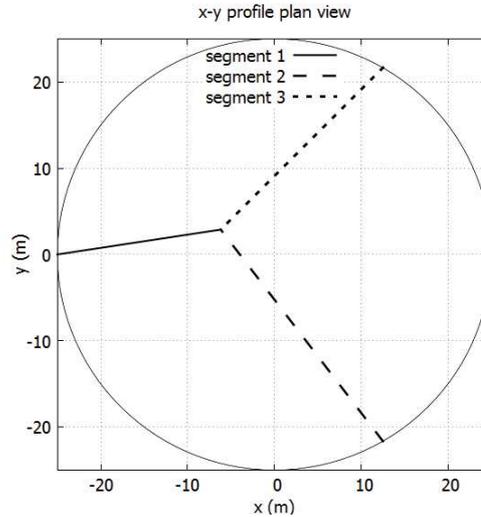


Figure 53 : Exemple n°4 : positions finales des segments dans le plan x-y

Champs	Line 1	Line 2	Line 3
x	$1.67.10^{-11}$	$2.09.10^{-11}$	$1.88.10^{-11}$
y	$1.11.10^{-11}$	$1.08.10^{-10}$	$1.08.10^{-10}$
z	$5.19.10^{-12}$	$3.24.10^{-11}$	$1.87.10^{-11}$
H	$5.85.10^{-12}$	$5.16.10^{-11}$	$2.68.10^{-11}$
V	$8.97.10^{-13}$	$2.60.10^{-12}$	$4.10.10^{-13}$

Table 17 : Exemple n°4 : erreurs adimensionnelles maximale pour chaque tronçon

Champs	Tir multiple	Référence	Erreur absolue (dimensionnelle)
$\alpha^{(1)}$ (rad)	$1.5208.10^{-1}$	$1.5208.10^{-1}$	$2.2130.10^{-11}$
$\alpha^{(2)}$ (rad)	2.2216	2.2216	$1.3838.10^{-10}$
$\alpha^{(3)}$ (rad)	-2.3540	-2.3540	$1.5105.10^{-10}$
x_b (m)	-6.1827	-6.1827	$8.3703.10^{-10}$
y_b (m)	2.8840	2.8840	$5.5509.10^{-10}$
z_b (m)	8.8387	8.8387	$9.1566.10^{-11}$

Table 18 : Exemple n°4 : résultats et erreurs sur les paramètres principaux

	Segment 1	Segment 2	Segment 3
Elements	33	24	27

Table 19 : Exemple n°4 : nombre d'éléments issus de l'intégrateur à pas adaptatif

Les résultats des Table 17 et Table 19 montrent une très bonne précision de la méthode de tir multiple sur les champs \mathbf{r} et \mathbf{n} , ainsi que sur les angles des lignes et position finale de la bouée. Ce résultat n'est en soit pas surprenant car la méthode de résolution de la caténaire est un dérivé de la méthode de tir. En effet, nous pouvons faire un parallèle entre la méthode de tir et les équations caténares pour lesquelles les équations (139) à (142) de l'Annexe D.3 sont le résultat de l'intégration analytique de l'ODE. Les équations algébriques (139) à (142) associées aux valeurs conditions aux limites sont résolues au travers d'un algorithme de Newton. Ce processus de résolution pour les caténares n'est possible que grâce à la forme de l'équation différentielle issue des équations d'équilibre qui ne tiennent compte que de la gravité comme effort extérieur. L'intégration analytique des efforts ne sera pas possible avec un effort de courant par exemple [64,65].

Outre les aspects de précision, cet exemple permet de valider l'approche multi-corps/multi-tir dans laquelle la bouée est modélisée par un corps rigide sur lequel viennent se connecter chaque ligne (en rotule) et sur lequel la force \mathbf{F}_b est appliquée.

L'intégrateur adaptatif permet également l'ajustement automatique du pas d'intégration pour cibler la tolérance requise. Nous voyons une tendance apparaître ici : le nombre de points augmente avec la masse linéique, donc avec l'effort extérieur de gravité imposé qui induit une déformée plus grande. Le même constat avait été fait entre les exemples n°1 et n°2. La tendance est moins marquée sur les variations de module d'Young.

4.3.5 Exemple n°5 : Poutre en grandes rotations

Cet exemple de poutre a pour but de vérifier le paramétrage en rotation effectué avec les MRP, ainsi que la précision de la méthode de tir lorsque la poutre se déforme en grandes rotations.

Deux cas sont traités ici : le premier considère la poutre droite, le second introduit une pré-courbure de la configuration de référence. Le cas sans pré-courbure a été traité par plusieurs auteurs [83,85,86,87,88,89] afin de vérifier les paramétrages en rotation de modèles éléments finis. Le cas avec pré-courbure est quant à lui traité par la littérature [85,90] grâce à des formulations spécifiques en éléments finis. Le but est ici de montrer que la prise en compte d'une configuration de référence de poutre

pré-courbée se fait naturellement avec la méthode de tir au travers des équations de comportement (64) et (65). Alors que les méthodes éléments finis nécessitent des reformulations particulières afin de tenir compte de la pré-courbure [90,91], la méthode de tir ne nécessite quant à elle pas de traitement supplémentaire.

Soit une poutre droite de fibre neutre dirigée selon l'axe x , encadrée d'un côté et soumise à un pur moment d'amplitude M autour de y (Figure 54), dont les propriétés mécaniques sont données en Table 20. La solution analytique à ce problème [83] est un arc de cercle est donnée par (119).

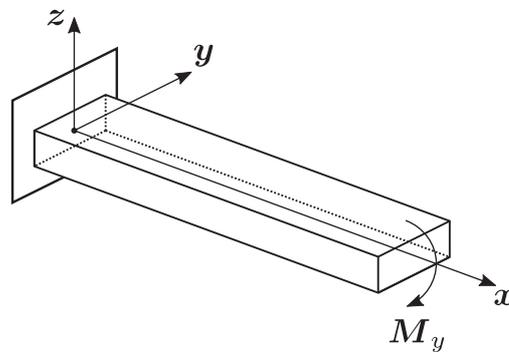


Figure 54 : Exemple n°5 : poutre console en flexion pure

Length at rest L	1 m
Second moment of inertia $I_1 = I_2 = I$	2 m ⁴
Polar moment of Inertia C	1 m ⁴
Cross section area A	0.25 m ²
Young Modulus E	1 N/m ²
Poisson's ratio ν	0.3

Table 20 : Exemple n°5 : propriété mécaniques

$$m_y(s) = M \quad (119)$$

$$x(s) = \frac{1}{\rho} \sin(\rho s)$$

$$z(s) = \frac{1}{\rho} (\cos(\rho s) - 1)$$

$$\rho = \frac{M}{EI} + \rho_0$$

ρ correspond à la courbure constante de l'arc de cercle, ρ_0 correspond à la pré-courbure de la configuration de référence. La méthode de tir simple est utilisée sur cet exemple. Cinq valeur du moment adimensionnel $\frac{ML}{EI}$ sont considérées : $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ et 2π . Une tolérance de 10^{-8} est utilisée pour l'algorithme de Newton et de 10^{-12} pour l'intégrateur RKF45. Le tir débute de la liaison encastrement et l'itéré initial du Newton (force et moment) est pris nul. Le choix de l'itéré initial en efforts/moments a ici peu d'influence car la fonction de contrainte porte elle-même sur les efforts/moments et l'équilibre entre efforts interne et externes est direct. Les géométries déformées obtenues numériquement sans et avec pré-courbure ($\rho_0 = \frac{2\pi}{L}$) sont montrées en Figure 55. Les erreurs maximum absolues adimensionnelles $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(m - m_{exact})|/M$ pour le moment fléchissant, et $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(x_i - x_{i exact})|/L$ pour les déplacements, sont données en Table 21.

Champs						
$\frac{M}{EI}$	$\rho_0 = 0$			$\rho_0 = \frac{2\pi}{L}$		
	x	z	m_y	x	z	m_y
0	0.00	$3.33 \cdot 10^{-16}$	0.00	$1.35 \cdot 10^{-11}$	$7.99 \cdot 10^{-12}$	0.00
$\frac{\pi}{2}$	$4.28 \cdot 10^{-12}$	$7.88 \cdot 10^{-12}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$	$1.64 \cdot 10^{-11}$	$6.60 \cdot 10^{-12}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$
π	$1.09 \cdot 10^{-11}$	$7.62 \cdot 10^{-12}$	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$1.09 \cdot 10^{-11}$	$7.63 \cdot 10^{-12}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$
$\frac{3}{2}\pi$	$1.64 \cdot 10^{-11}$	$6.57 \cdot 10^{-12}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$	$4.28 \cdot 10^{-12}$	$7.90 \cdot 10^{-12}$	$8.07 \cdot 10^{-14}$
2π	$1.35 \cdot 10^{-11}$	$8.03 \cdot 10^{-12}$	$1.32 \cdot 10^{-11}$	0.00	$1.30 \cdot 10^{-12}$	$1.46 \cdot 10^{-12}$

Table 21 : Exemple n°5 : erreurs maximum absolues (pas adaptatif)

Les déformées de la Figure 55 montrent les grandes orientations mises en jeu. Les erreurs maximales le long du segment fournies en Table 21 sont très faibles quel que soit le champ considéré. Le choix du paramétrage MRP associé à la méthode de tir permet la modélisation des grandes rotations. Si nous considérons un pas d'intégration constant (20 éléments), les erreurs maximales pour chaque champ sont fournies en Table 22. Le nombre de nœuds généré par l'intégrateur adaptatif croit avec la courbure totale (Table 23). La méthode reste malgré tout assez précise avec peu de points d'intégration. Le nombre d'itérations du Newton reste quant à lui très bas (~3-4 itérations) et identique quel que soit le chargement appliqué.

Cet exemple permet de mettre en valeur la faculté de la méthode de tir à tenir compte de configuration de référence pré-courbée. La précision reste très bonne avec le paramétrage MRP choisi, précision atteinte pour un nombre faible d'itérations du Newton ($\sim 3-4$) sur cet exemple en grande rotation.

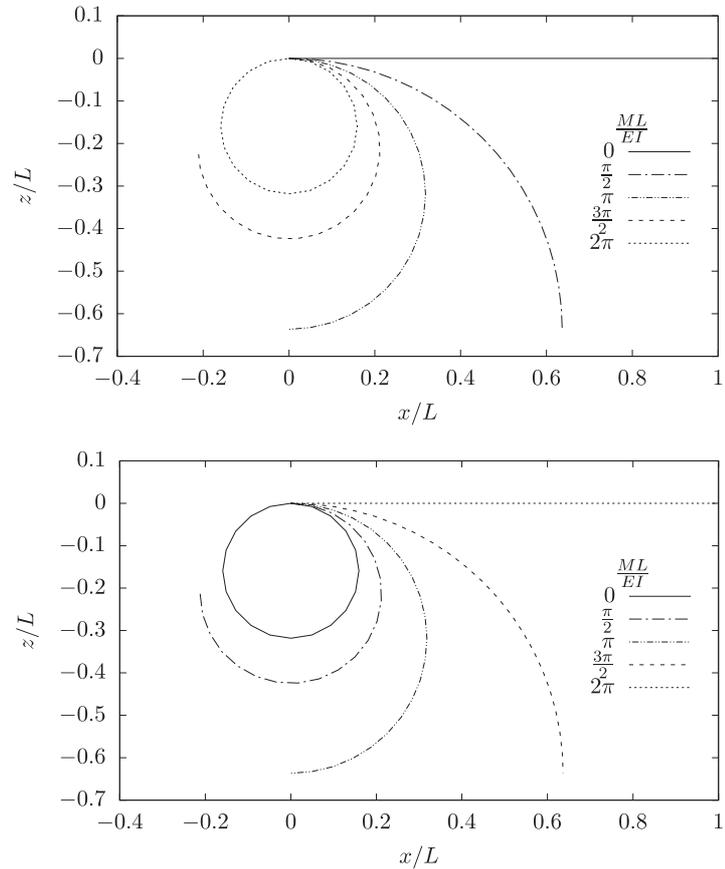


Figure 55 : Exemple n°5 : profils déformés (haut : sans pré-courbure, bas : avec pré-courbure)

Champs						
$\rho_0 = 0$				$\rho_0 = \frac{2\pi}{L}$		
$\frac{M}{EI}$	x	z	m_y	x	z	m_y
0	0.00	$3.33 \cdot 10^{-16}$	0.00	$4.31 \cdot 10^{-6}$	$2.81 \cdot 10^{-6}$	0.00
$\frac{\pi}{2}$	$1.77 \cdot 10^{-8}$	$1.58 \cdot 10^{-8}$	$1.31 \cdot 10^{-13}$	$2.14 \cdot 10^{-6}$	$1.19 \cdot 10^{-6}$	$6.48 \cdot 10^{-11}$
π	$4.25 \cdot 10^{-7}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$4.06 \cdot 10^{-11}$	$4.25 \cdot 10^{-7}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$2.73 \cdot 10^{-12}$
$\frac{3}{2}\pi$	$2.14 \cdot 10^{-6}$	$1.19 \cdot 10^{-6}$	$8.97 \cdot 10^{-9}$	$1.77 \cdot 10^{-8}$	$1.58 \cdot 10^{-8}$	$8.07 \cdot 10^{-14}$
2π	$4.31 \cdot 10^{-6}$	$2.81 \cdot 10^{-6}$	$5.10 \cdot 10^{-8}$	0.00	$4.46 \cdot 10^{-15}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$

Table 22 : Exemple n°5 : erreurs maximum absolues (pas non adaptatif)

	Sans pas adaptatif				Avec pas adaptatif			
	$\rho_0 = 0$		$\rho_0 = \frac{2\pi}{L}$		$\rho_0 = 0$		$\rho_0 = \frac{2\pi}{L}$	
$\frac{M}{EI}$	Itérations	Nœuds	Itérations	Nœuds	Itérations	Nœuds	Itérations	Nœuds
0	1	21	1	21	1	4	1	230
$\frac{\pi}{2}$	3	21	3	21	3	72	3	178
π	3	21	4	21	3	128	3	128
$\frac{3}{2}\pi$	4	21	4	21	3	178	4	72
2π	4	21	4	21	3	230	3	9

Table 23 : Exemple n°5 : nombre d'itérations et points d'intégration

4.3.6 Exemple n°6 : Poutre fléchie en hélice

Cet exemple est un dérivé de l'exemple précédent de pure flexion, à la différence près qu'une force dans le plan de la section est appliquée à l'extrémité libre, venant tordre la poutre en forme d'hélice (Figure 56). Ce cas a d'abord été étudié par [88] puis plus tard par plusieurs auteurs [85,86,92,93] et ne possède pas de référence analytique, nous comparerons donc les résultats numériques de la littérature. Le but de cet exemple est multiple : vérifier l'algorithme de commutation MRP/SMRP en dépassant la plage angulaire admissible par le paramétrage MRP ($\theta = \pm 2\pi$) et éprouver la méthode de tir simple lorsque plusieurs modes de déformation (cisaillement, flexion) sont sollicités. Comme soulignés par [88], [92] et [93] l'efficacité du paramétrage en rotation est un point crucial pour obtenir des résultats corrects.

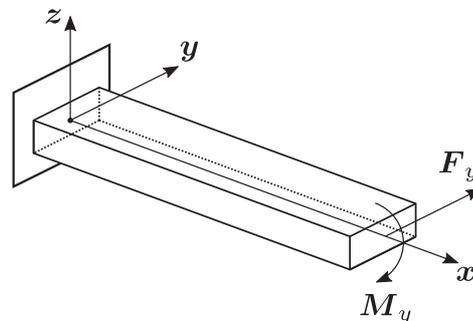


Figure 56 : Exemple n°6 : poutre fléchie en forme d'hélice

Les raideurs en flexion et cisaillement sont respectivement prises à $EI_1 = EI_2 = GC = 10^2$ et $EA = 2GA = 10^4$, le ratio de Poisson est sélectionné à une valeur nulle $\nu = 0$ et la longueur vaut $L = 10$.

La force $F = 50\lambda$ et le moment $M = 200\pi\lambda$ sont augmentés incrémentalement de $\lambda = 0$ à $\lambda = 1$. Augmenter à la fois la force et le moment conduit à déformer en forme d'hélice (Figure 57) la poutre initialement droite, et on constate une oscillation de déplacement de l'extrémité libre. La méthode de tir simple est utilisée pour la résolution de cet exemple, pour laquelle l'initialisation du Newton se fait à partir des résultats du dernier incrément. La tolérance du Newton est fixée à 10^{-8} pour une erreur absolue sur le schéma d'intégration de 10^{-9} .

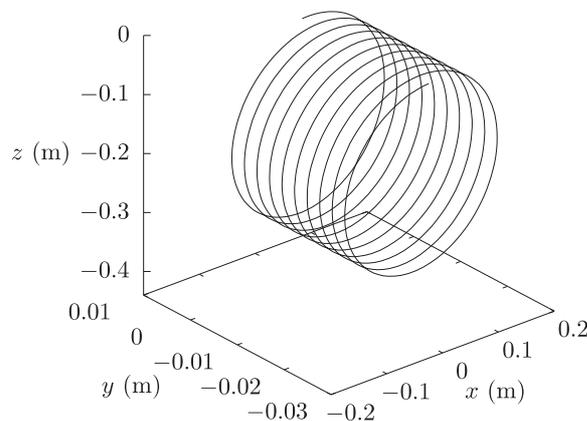


Figure 57 : Exemple n°6 : déformation en hélice

Les relations effort-déplacement de l'extrémité sont montrées en Figure 58 et Figure 59. La Figure 60 compare les résultats obtenus par la méthode de tir avec ceux extraits de plusieurs références. Avant toute comparaison, il est important de noter que les résultats de la littérature n'adoptent pas tous la même valeur de raideur en cisaillement. En effet, [85,86,88,92] utilisent $EA = GA = 10^4$ alors que [93] se base sur une raideur $EA = 2GA = 10^4$. [94] ne renseigne pas de valeur mais nous pouvons supposer que les auteurs se basent sur les mêmes hypothèses que [88], à savoir $EA = GA = 10^4$ compte tenu des références utilisées. Dans cette optique la Figure 58 et Figure 59 montrent également l'ensemble des résultats obtenus pour un module de cisaillement de $G = \frac{E}{2}$, $G = E$ et pour une déformation en cisaillement nulle (raideur infinie).

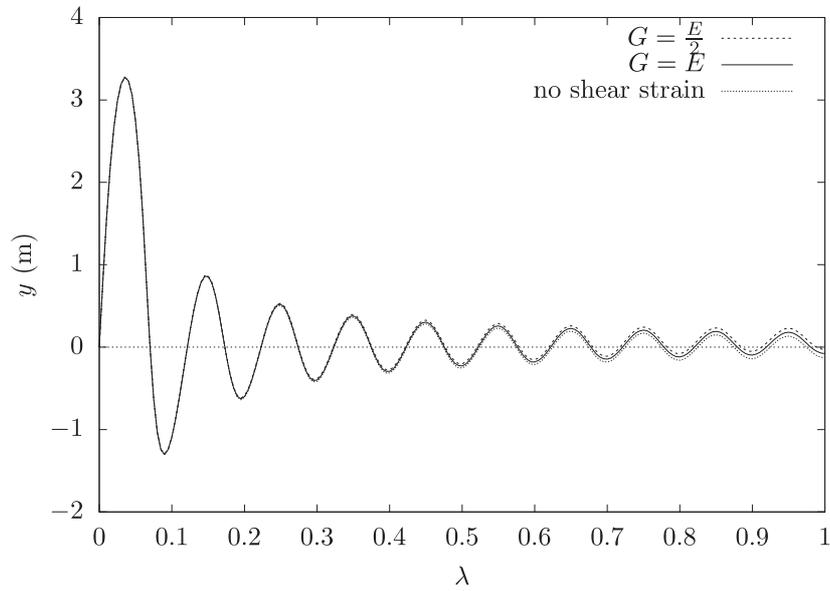


Figure 58 : Exemple n°6 : relation force-déplacement

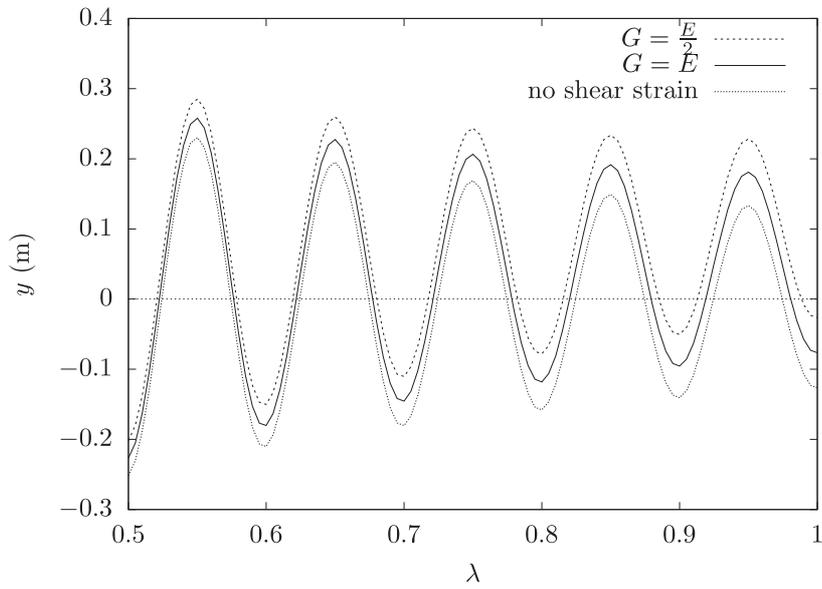


Figure 59 : Exemple n°6 : relation force-déplacement zoom

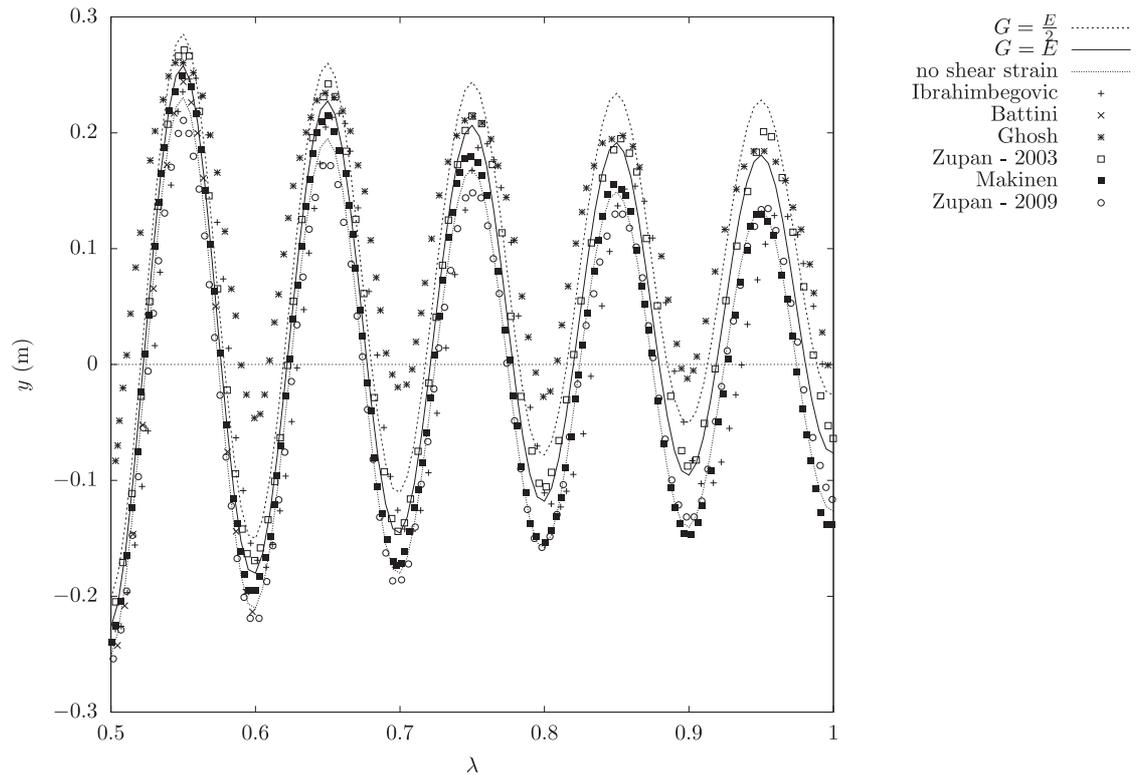


Figure 60 : Exemple n°6 : relation force-déplacement - comparaison avec [90] Ibrahimbegovic, [92] Battini, [93] Ghosh, [86] Zupan (2003), [94] Makinen et [85] Zupan (2009)

Nous pouvons voir que les déplacements hors plan obtenus avec la méthode de tir sont en accord avec [86,88]. Nous notons sur le graphique force-déplacement l'apparition d'une pente moyenne légère lorsque le module de cisaillement est égal au module d'Young. A effort constant, lorsque nous imposons le cisaillement comme la moitié du module d'Young, la pente force-déplacement est plus raide car la raideur plus faible implique des déformations plus grandes du fait de (64). C'est ce qui est également observé par [93].

Il est intéressant de voir en Figure 58 et Figure 59 qu'une poutre d'Euler-Bernoulli (i.e. pas de déformation en cisaillement ou raideur en cisaillement infinie) correspond à un déplacement oscillant de moyenne nulle. Si l'on compare avec la littérature en Figure 60, les résultats de [85,92,94] sont plus proches d'une solution d'Euler-Bernoulli, ce qui laisse à supposer que le type d'élément utilisé dans la formulation EF de ces auteurs induit une raideur supplémentaire, malgré les mêmes données d'entrée de module de cisaillement.

Nous constatons également ici que le modèle de cisaillement a un effet important sur la solution en forme d'hélice comparé au cas de flexion pure.

De plus, au regard des résultats sur cet exemple d'hélice pour lequel la poutre fait dix tours, nous pouvons conclure que le paramétrage MRP combiné à l'algorithme de commutation proposé permettent la bonne représentation des grandes rotations des sections lorsqu'un couplage entre cisaillement et flexion apparaît.

Nous venons de montrer au travers de cet exemple que la méthode de tir permet de tenir correctement du couplage entre cisaillement et flexion d'une poutre de Cosserat. Cet exemple montre également que plusieurs cinématiques de poutres (Cosserat, Euler-Bernoulli) peuvent prises en compte au travers de lois matériaux différentes, sans avoir à effectuer de reformulation des équations.

4.3.7 Exemple n°7 : Poutre console initialement torsadée

Cet exemple proposé par [95] et repris par [85,86,96,97], vise la validation de la méthode de tir lorsque les modes de déformation de torsion flexion et cisaillement apparaissent. Il s'agit d'une poutre dont la configuration de référence est torsadée. Deux chargements sont considérés : un effort unitaire appliqué soit dans la direction de l'épaisseur de section, soit dans la largeur de section comme montré en Figure 61. Les propriétés mécaniques de la poutre sont données en Table 24. La méthode de tir simple est utilisée ici en imposant une pré-courbure initiale selon l'axe de la fibre neutre. Une tolérance de 10^{-8} est prise pour le Newton et une erreur absolue de 10^{-9} pour l'intégrateur à pas adaptatif. Le tir débute de la liaison encastrement, et l'itéré initial du Newton (force et moment) est pris nul. Deux itérations du Newton sont seulement nécessaires pour converger.

Les résultats issus de l'état de l'art sont utilisés pour les comparaisons et sont résumés en Table 25. Les résultats obtenus avec la méthode de tir simple sont quantitativement très proches de [85] et leur formulation poutre en éléments finis basée sur un paramétrage en quaternion. Un très bon accord est également trouvé avec la solution théorique basée sur un modèle plaque [95]. Cet exemple montre la capacité de la méthode de tir à résoudre de façon précise un problème impliquant des couplages de déformation en torsion, flexion et cisaillement.

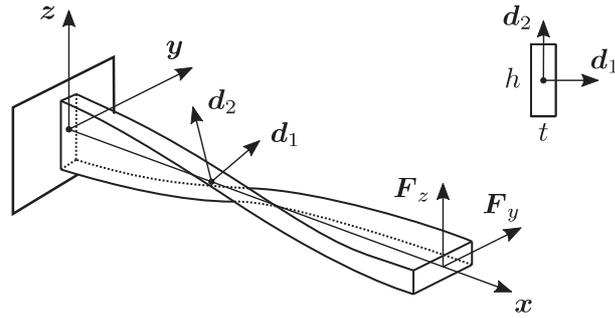


Figure 61 : Exemple n°7 : poutre console initialement torsadée

Largeur t	0.32 m
Hauteur h	1.1 m
Longueur	12 m
Module d'Young E	$2.9 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
Ratio de Poisson ν	0.22

Table 24 : Exemple n°7 : propriétés mécaniques

Référence	Déplacements de l'extrémité libre			
	$F_y = 1N$	$F_z = 0N$	$F_y = 0N$	$F_z = 1N$
	y	z	y	z
[95] MacNeal and Harer (1985)	0.00542400	-	-	0.00175400
[96] Dutta and White (1992)	0.005402	-	-	0.001741
[97] Ibrahim and Frey (1994)	0.005411	-	-	0.001751
[91] Zupan and Saje (Analytical) (2006)	0.00542244	0.00171874	0.00171874	0.00174274
[85] Zupan and Saje (2009)	0.005429	0.001719	0.001719	0.001750
Présent travail	0.00542871	0.00171872	0.00171870	0.00174903

Table 25 : Exemple n°7 : résultats - comparaison avec l'état de l'art

4.3.8 Exemple n°8 : Poutre console à 45°

Comme l'exemple précédent, cet exemple est utilisé comme benchmark dans la littérature car tous les modes de déformation sont couplés. Il s'agit d'une poutre console pré-courbée en flexion à 45 degrés (Figure 62), introduite par [89] et extrêmement réutilisée par plusieurs auteurs [83,85,88,93,94,98,99,100,101]. La configuration de référence forme un arc de cercle de rayon $R = 100 \text{ m}$ et d'angle 45

degrés dans le plan horizontal. La poutre est encastree d'un cote et libre de l'autre. Deux valeurs d'effort respectivement de 300 N et 600 N sont appliquees a l'extremite libre. Une tolerance de 10^{-8} est utilisee pour le Newton et une erreur absolue de 10^{-9} pour l'integrateur a pas adaptatif. La resolution se fait avec la methode de tir simple. La section est un carre de cote unitaire dont les proprietes sont donnees en Table 26

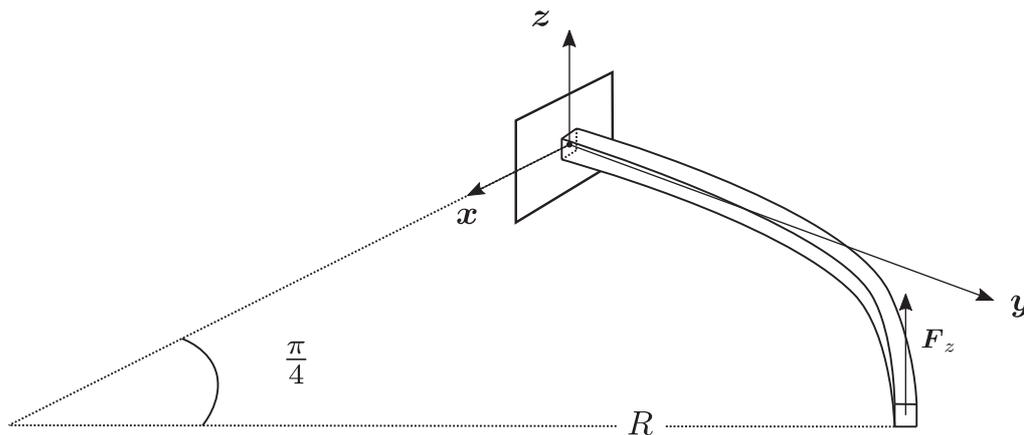


Figure 62 : Exemple n°8 : poutre console à 45°

Width/height $t = h$	1 m
Young modulus E	10^7 N/m ²
Shear modulus $G = E/2$	$5 \cdot 10^6$ N/m ²

Table 26 : Exemple n°8 : propriétés de la poutre

Il n'existe pas de solution analytique à ce problème, les résultats sont donc comparés à ceux de la littérature donnés en Table 27. Il n'a pas été nécessaire d'effectuer de chargement incrémental, et seulement 5 itérations du Newton sont nécessaires pour chaque chargement. Les déformées sont montrées en Figure 63 et nous observons un très bon accord de la méthode avec les résultats de la littérature Table 27. Cet exemple implique des couplages forts entre les différents modes de déformation de cisaillement, de flexion et de torsion. La méthode de tir telle que présentée permet d'obtenir une très bonne précision. En comparaison, des modèles spécifiques doivent être utilisés pour atteindre ces niveaux de précision si la méthode des éléments finis est utilisée [96].

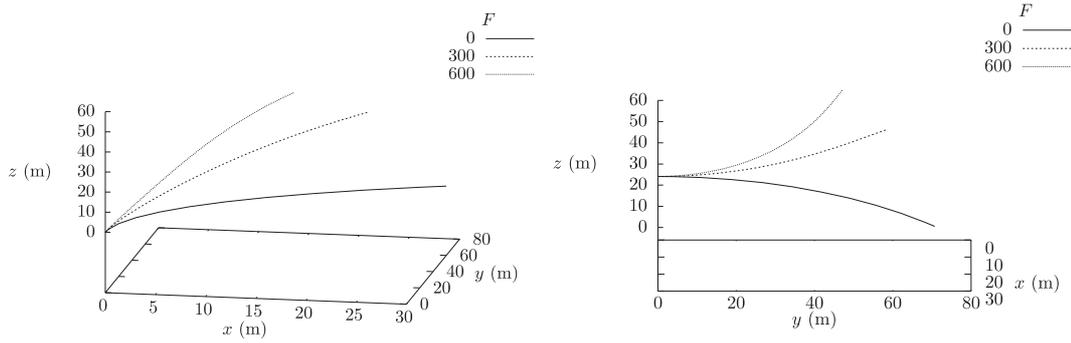


Figure 63 : Exemple n°8 : poutre console pour $F = 0$ N, $F = 300$ N, $F = 600$ N

Reference	Déplacement de l'extrémité					
	$F = 300N$			$F = 600N$		
	x	y	z	x	y	z
[89] Bathe and Bolourchi (1979)	22.5	59.2	39.5	15.9	47.2	53.4
[83] Simo and Vu-Quoc (1986)	22.33	58.84	40.08	15.79	47.23	53.37
[98] Cardona and Gérardin (1988)	22.14	58.64	40.35	15.55	47.04	53.50
[96] Dutta (1992)	22.20	58.56	40.46	15.66	47.02	53.57
[99] Crivelli and Felippa (1993)	22.31	58.85	40.08	15.75	47.25	53.37
[87] Ibrahimbegovic, Frey, Kozar (1995)	-	-	-	15.62	47.21	53.50
[100] Smolenski (1999)	22.19	58.51	40.25	15.69	47.01	53.54
[102] Gérardin, Cardona (2001)	22.14	58.64	40.35	15.55	47.04	53.50
[94] Makinen (2007)	-	-	-	15.62	47.01	53.50
[93] Ghosh (2009)	22.26	58.89	40.08	15.67	47.29	53.37
[85] Zupan, Saje and Zupa (2009)	22.14	58.56	40.47	15.61	46.89	53.60
[101] Fan, Zhu (2016)	-	-	-	15.68	47.20	53.45
Présent travail	22.24	58.78	40.19	15.68	47.15	53.47

Table 27 : Exemple n°8 : résultats - comparaison avec l'état de l'art

4.3.9 Exemple n°9 : Poutre simple soumise à un effort linéique triangulaire

Cet exemple a pour but de valider l'approche multi-corps/multi-tir lors de la présence d'une discontinuité d'effort extérieur. Nous considérons ici une poutre simple soumise à une distribution symétrique triangulaire d'effort linéique, comme montré en

Figure 64. La longueur de la poutre est de $L = 5 \text{ m}$, la section matérielle est supposée circulaire de rayon $r = 0.02 \text{ m}$, suivant une loi élastique linéaire de module d'Young $E = 2.11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, de coefficient de poisson $\nu = 0.3$. L'amplitude maximale de la distribution triangulaire est $q = 10 \text{ N/m}$.

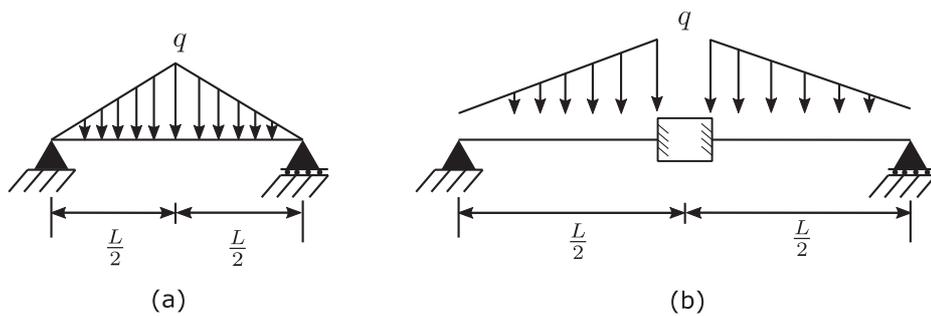


Figure 64 : Exemple n°9 : effort linéique triangulaire (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b)

La Figure 64 montre le passage du problème physique à la décomposition multi-tir dans le formalisme multi-corps présenté en paragraphe 4.2.4, où le segment initial est coupé au niveau de la rupture de pente de l'effort triangulaire, et un corps rigide est introduit. Chaque segment est encastré sur le corps rigide de telle manière à ce que les extrémités soient confondues. Dans ce cas particulier, le sens d'intégration du segment initial est conservé : l'origine des abscisses est conservée. Le segment de gauche est intégré de la condition aux limites de gauche (rotule) au corps rigide (encastrement) alors que le segment de droite est intégré du corps rigide (encastrement) à la condition aux limites de droite (support simple). La direction d'intégration est arbitraire comme nous l'avons vu pour l'exemple présenté en paragraphe 4.3.2. Les encastrements additionnels sont considérés de la même manière que les conditions aux limites d'origine (rotule et support simple) : ils génèrent des inconnues et des contraintes lorsqu'ils sont respectivement une condition aux limites de départ et de fin. Le corps rigide génère également de nouvelles inconnues en position et déplacement, afin que le centre de la poutre puisse fléchir. Ces inconnues additionnelles sont contrebalancées par l'ajout d'un jeu de contraintes décrivant l'équilibre statique du corps : la somme des efforts internes des segments transitant au travers des connections encastrement est égale à zéro. Comme mentionné en paragraphe 4.2.4, l'introduction

d'un corps rigide avec lequel les segments sont encastrés est équivalente à la méthode multi-tir classique. Cette dernière est donc un cas particulier de la méthode multi-corps/multi-tir proposée.

La tolérance du Newton est fixée à 10^{-10} et l'erreur absolue pour l'intégrateur à pas adaptatif à 10^{-12} . La solution de RDM pour cet exemple est fournie en Annexe E.1. Comme précédemment, les erreurs absolues adimensionnelles sont considérées : $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(n - n_{exact})|/qL$ pour l'effort de cisaillement, $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(m - m_{exact})|/qL^2$ pour le moment fléchissant et $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(z - z_{exact})|/L$ pour la déflexion. Nous obtenons ainsi une erreur de $7.4607 \cdot 10^{-16}$ pour l'effort de cisaillement, $4.1206 \cdot 10^{-8}$ pour le moment fléchissant et $4.0574 \cdot 10^{-8}$ pour la déflexion. Pour le paramètre d'erreur sur l'intégration choisi, 22 points d'intégration sont générés sur chaque segment du fait de la symétrie du problème. L'algorithme de Newton converge quant à lui en 3 itérations en partant d'une initialisation des efforts et moments interne nuls pour le premier itéré.

Bien que cet exemple puisse être traité en multi-tir classique, il nous permet de vérifier le bon recouvrement par la méthode multi-corps générique pour la modélisation de fonctions d'efforts linéiques discontinus. Le nombre de nœuds reste limité malgré la précision très fine choisie, et seulement 3 itérations du Newton sont nécessaires à déterminer la solution.

4.3.10 Exemple n°10 : Poutre simple avec changement d'inertie

Nous avons vu dans l'exemple précédent comme traiter une discontinuité d'effort linéique. Cet exemple montre également de quelle manière traiter un effort concentré ainsi que des discontinuités de la section matériau (changement de géométrie par exemple) via le formalisme multi-corps/multi-tir.

Soit une poutre $ABCDE$ de longueur $L = 10 \text{ m}$ simplement supportée dont l'inertie est doublée dans sa zone centrale. Un effort concentré $P = 2.5 \text{ N}$ est appliqué en son milieu C . Le matériau est élastique de module d'Young $E = 2.11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ et de coefficient de poisson $\nu = 0.3$. Les tronçons aux extrémités sont de sections circulaires de rayon $r = 0.02 \text{ m}$ et d'inertie $I_0 = \frac{\pi r^4}{4}$. Le tronçon central possède une inertie doublée $I_1 = 2I_0$.

La Figure 65 montre la conversion du modèle physique dans le formalisme multi-corps/multi-tir. Des corps rigides sont introduits au niveau des discontinuités de section matériau, sur lesquels les segments sont encastrés. Un corps rigide est également introduit au niveau du point d'application de l'effort concentré. Ce dernier est appliqué sur le corps rigide lui-même afin d'être pris en compte dans l'équilibre statique du corps dont les contributions d'efforts proviennent des forces internes du tronçon BC , des forces internes du tronçon CD et de l'effort concentré P .

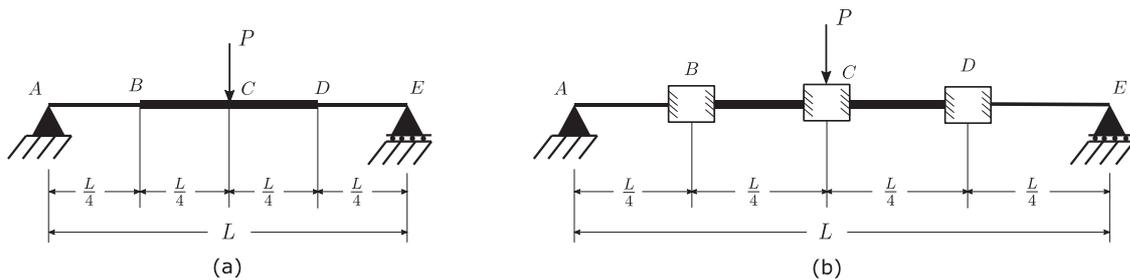


Figure 65 : Exemple n°10 : poutre simple avec doublement d'inertie (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b)

Une tolérance de 10^{-10} est utilisée pour le Newton et une erreur absolue de 10^{-12} pour l'intégrateur à pas adaptatif. La Figure 66 montre l'évolution de l'effort de cisaillement, du moment fléchissant et de la déflexion le long de la poutre. Les erreurs absolues adimensionnelles considérées sont $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(n - n_{exact})|/P$ pour l'effort de cisaillement, $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(m - m_{exact})|/PL$ pour le moment fléchissant et $\varepsilon_a = \max_{s \in [0, L]} |(z - z_{exact})|/L$ pour la déflexion. La solution de RDM pour cet exemple est fournie en Annexe E.2. Nous obtenons ainsi une erreur de $1.7764 \cdot 10^{-16}$ pour l'effort de cisaillement, de $7.6871 \cdot 10^{-9}$ pour le moment fléchissant et $5.2248 \cdot 10^{-9}$ pour la déflexion.

Pour la valeur d'erreur sur l'intégrateur choisie, l'algorithme génère 5 points pour le segment AB , 4 points pour le segment BC , 4 points pour le segment CD et 5 points pour le segment DE , soit un total de 18 points (15 en supprimant les doublons aux connexions B , C et D). L'algorithme de Newton converge en 3 itérations pour la tolérance choisie, et en partant d'une initialisation des efforts et moments internes nuls pour le premier itéré.

L'équation de contrainte sur le corps rigide assure la continuité des champs d'efforts (Figure 66). Les liaisons encastrement sur le corps rigide assurent la continuité des champs de position, d'orientation (Figure 66 et Figure 67). La Figure 67 montre l'évolution du paramètre MRP selon l'axe de fléchissement y . Le MRP étant la tangente du quart de l'angle de rotation, nous constatons la bonne continuité de la rotation, mais pas de sa dérivée : la courbure. En effet, les moments internes sont continus lors du passage de la discontinuité matériau, par contre leur conversion au travers de la loi matériau (65) entraîne une discontinuité de la courbure.

La méthode multi-corps/multi-tir permet le traitement générique de l'effort ponctuel qui génère une discontinuité du champ d'effort de cisaillement, là où la méthode de tir multiple classique aurait nécessité un traitement particulier. La méthode est appliquée avec succès à la représentation d'efforts concentrés ainsi que de discontinuités matériau (ici au travers de l'inertie) des sections de poutre. Le nombre de nœuds reste très limité ainsi que le nombre d'itérations nécessaires au Newton.

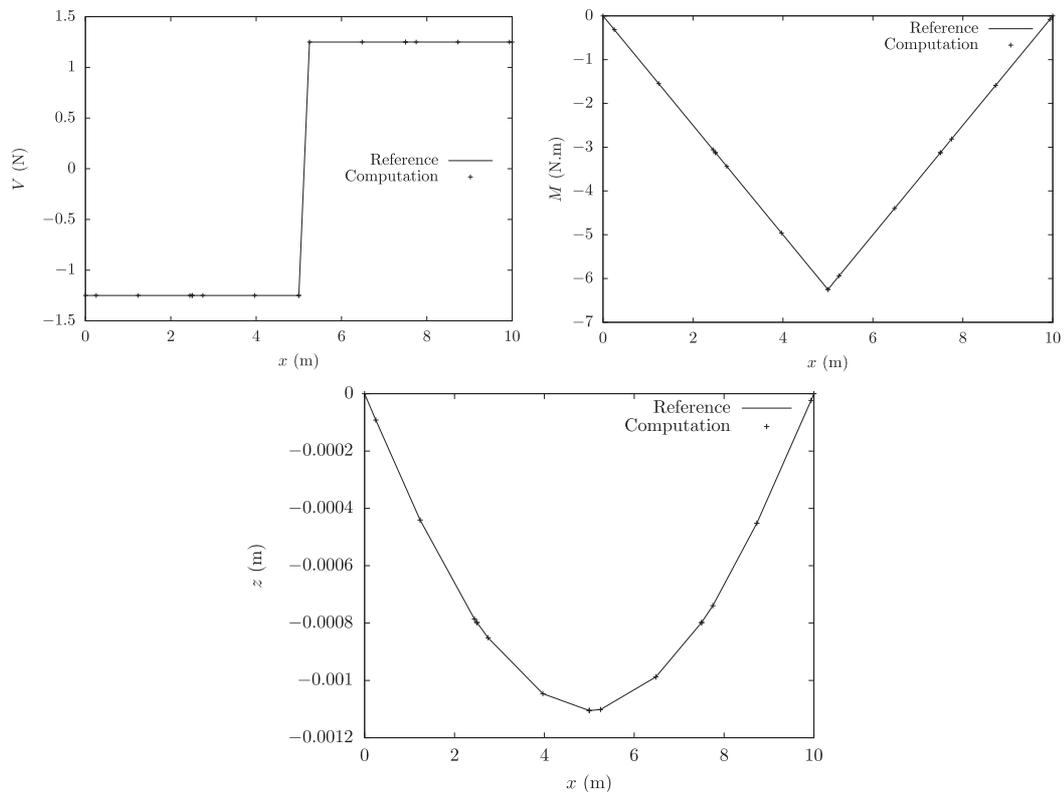


Figure 66 : Exemple n°10 : effort tranchant (haut gauche), moment fléchissant (haut droite), déflexion (bas)

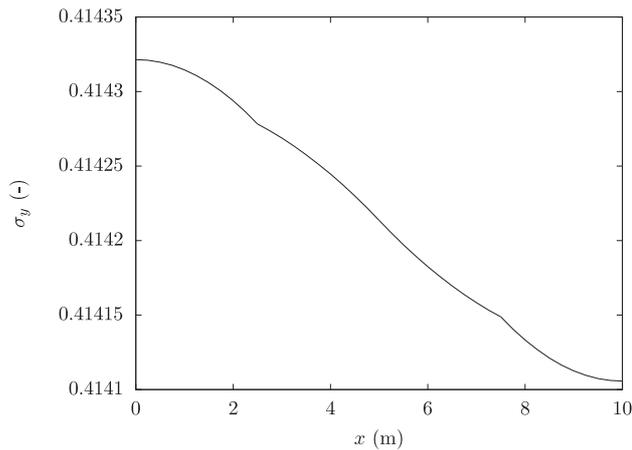


Figure 67 : Exemple n°10 : évolution du champs de rotation

4.3.11 Exemple n°11 : Poutre articulée

Les exemples précédents se sont limités à venir encastrent les segments sur les corps rigides introduits, processus équivalent à la méthode multi-tir classique. Nous introduisons ici une articulation via une rotule entre deux segments afin d'éprouver la méthode multi-corps/multi-tir lorsque plusieurs types de conditions aux limites sont connectées au corps rigide.

Considérons le segment ABC en appui simple en A et encastré en C , composé de deux tronçons articulés par une charnière en B comme montré en Figure 68. Les segments AB et BC sont respectivement de longueur $a = 4\text{ m}$ et $b = 6\text{ m}$. Un effort concentré $P = 2\text{ N}$ est appliqué à une distance $2a/3$ de l'extrémité A et un effort linéique uniforme $q = 1\text{ N/m}$ est appliqué entre B et C . Le segment ABC est suppose suivre une loi élastique de section circulaire de rayon $r = 0.02\text{ m}$ et d'inertie $I = \frac{\pi r^4}{4}$.

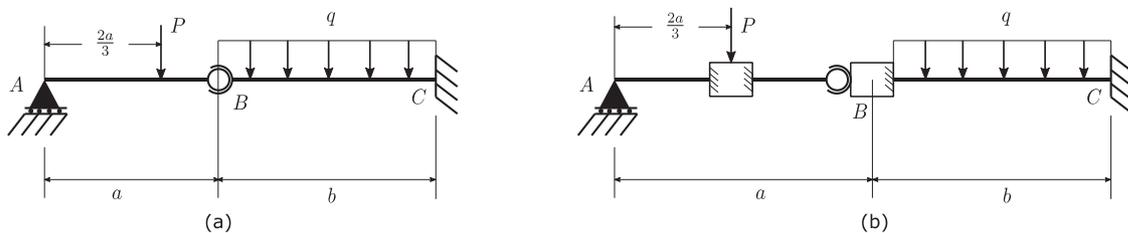


Figure 68 : Exemple n°11 : poutre articulée (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b)

La Figure 68 montre la conversion du modèle physique dans le formalisme multi-corps/multi-tir. Comme précédemment, un corps rigide est introduit au niveau des discontinuités d'efforts (efforts concentrés et linéiques). Le segment BC est encasté en B sur le corps rigide, toutefois l'extrémité B du segment AB est liée au corps rigide avec une liaison rotule plutôt qu'une liaison encastrement. Ce choix est arbitraire et nous aurions pu venir lier avec une rotule le segment BC , et encastérer le segment AB .

Les solutions de RDM [84] pour la déflexion δ_B et l'angle de rotation θ_A sont respectivement :

$$\begin{aligned}\delta_B &= \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI} \\ \theta_A &= \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI} + \frac{4Pa^2}{81EI}\end{aligned}\tag{120}$$

Pour cette solution, les erreurs absolues adimensionnelles sont de $2.2545 \cdot 10^{-8}$ pour la déflexion δ_B (erreur adimensionnée par rapport à la longueur de poutre) et de $5.8692 \cdot 10^{-8}$ pour l'angle θ_A . La déflexion finale est montrée en Figure 69. Ces résultats sont obtenus en 3 itérations du Newton en partant d'une initialisation des efforts et moments interne nuls pour le premier itéré. L'algorithme d'intégration à pas adaptatif a généré deux fois 8 points pour le segment AB (4 par tronçon coupés au niveau de l'effort ponctuel) et 8 points pour le segment BC .

Cet exemple souligne la capacité de la méthode multi-corps/multi-tir à traiter de façon générique une articulation de poutre grâce au formalisme multi-corps. Dans l'exemple présenté, il s'agit d'un relâchement des degrés de liberté en rotation au niveau de la charnière B , conduisant à une perte de continuité de la dérivée de l'angle (la courbure). La méthode présentée permet donc de prendre en compte ce type de discontinuité cinématique au contraire de l'approche multi-tir classique. De plus, les résultats obtenus sont très précis avec un nombre limité de points et d'itérations.

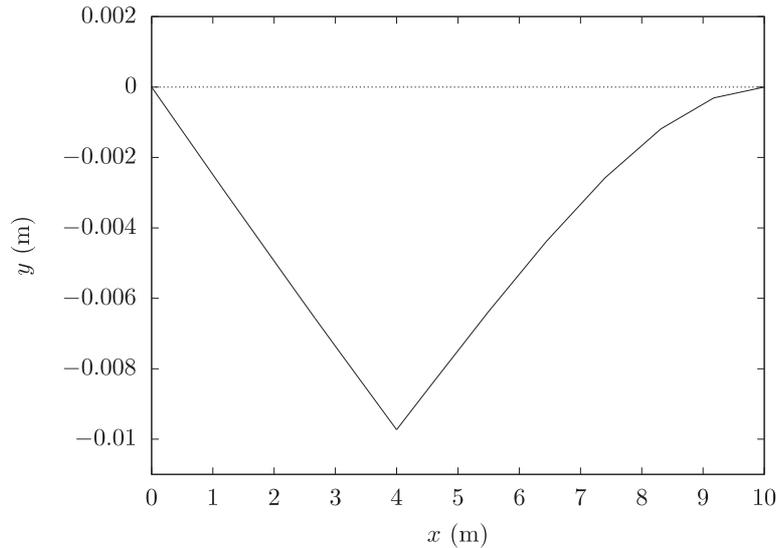


Figure 69 : Exemple n°11 : déflexion

4.3.12 Exemple n°12 : Portique en T

Ce dernier exemple a pour but de rassembler la plupart des spécificités étudiées séparément dans les exemples précédents. Nous considérons le portique en T $ABCD$ supporté simplement en A où nous appliquons un moment concentré M_0 et rotulé en D . Une distribution linéaire d'intensité maximale q_0 est appliquée sur le segment AB , et un effort concentré incliné P agit à l'extrémité C . Une force ponctuelle de même intensité P est appliquée au centre du tronçon BD . La Figure 70 montre la conversion du modèle physique dans le formalisme multi-corps/multi-tir.

La solution de RDM pour cet exemple est fournie en Annexe E.3. Compte tenu de la référence, nous ne comparons ici que la répartition des efforts internes (effort de traction, effort de cisaillement et moment fléchissant). De plus, la référence considère les éléments indéformables. Afin d'avoir des résultats comparables, nous considérons donc la loi de comportement indéformable telle que $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) = \mathbf{v}^0 = [0,0,1]^T$ et $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, s) = \mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ (correspondant à un segment droit indéformable dont la fibre neutre est dirigée selon l'axe local \mathbf{d}_3). Cette loi exprime le fait que les déformations dans la base locale sont indépendantes des vecteurs des forces internes \mathbf{n} et des moments internes \mathbf{m} , ne permettant ainsi aucune déformation.

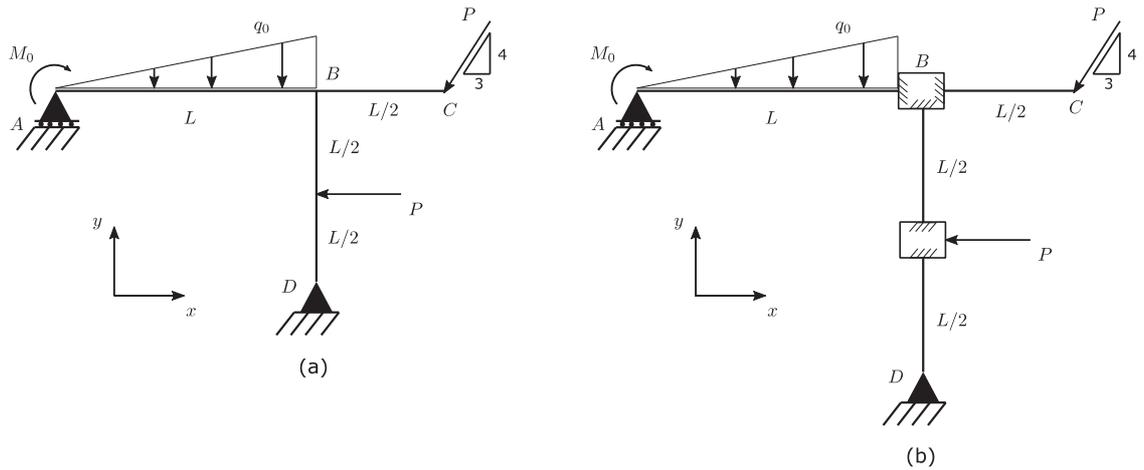


Figure 70 : Exemple n°12 : portique en T (a) et sa conversion en formalisme multi-corps/multi-tir (b)

Les erreurs relatives maximales ($\varepsilon_r = \max_{s \in [0, L]} |(x - x_{exact})| / x_{exact}$) à chaque champ sont les suivantes :

Champs	AB	BC	DB
N	$4.3021 \cdot 10^{-15}$	$5.9212 \cdot 10^{-16}$	$8.2382 \cdot 10^{-16}$
V	$1.2357 \cdot 10^{-15}$	$4.4409 \cdot 10^{-16}$	$8.8818 \cdot 10^{-16}$
M	$6.7671 \cdot 10^{-16}$	$7.5791 \cdot 10^{-14}$	$6.6317 \cdot 10^{-14}$

Table 28 : Exemple n°11 : erreurs relatives maximales

Pour cet exemple, nous avons considéré une tolérance de 10^{-10} pour le Newton et une erreur absolue de 10^{-12} pour l'intégrateur à pas adaptatif. Pour ces paramètres, la méthode multi-corps/multi-tir proposée converge en 3 itérations en partant d'une initialisation des efforts et moments internes nuls pour le premier itéré. L'algorithme à pas adaptatif génère 5 points pour le segment AB, 4 points pour le segment BC et deux fois 3 points pour le segment BD. Les segments ne se déformant pas et n'ayant pas une évolution d'efforts et moments internes conséquente, il est normal d'obtenir ces résultats sur le nombre de points générés.

Cet exemple permet d'illustrer l'utilisation de la méthode multi-corps/multi-tir dans le cas d'une discontinuité géométrique (ici l'angle vif) avec une loi de comportement indéformable dans le cas des poutres. Il rassemble les briques multi-corps/multi-tir présentées plus haut et des résultats précis ont été obtenus en comparaison de la référence RDM.

4.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons proposé une nouvelle méthode de tir, dite multi-corps/multi-tir, compatible avec un contexte de simulation multi-corps pour l'étude des discontinuités (géométriques, matériaux ou d'efforts), et des assemblages de corps élançés 3D statiques de type fils et poutres. Cette nouvelle méthode est issue d'un formalisme que nous avons proposé pour la description des problèmes classiques de tir simple et multiple. Elle se positionne comme une extension de la méthode de tir multiple par l'introduction de corps rigides statiques sur lesquels les corps élançés sont connectés via des liaisons cinématiques. L'introduction de ce concept de corps statique dans la méthode de tir fait ainsi le pont vers les résolutions multi-corps statiques classiques où les corps rigides sont directement connectés entre eux au travers de liaisons cinématiques.

La méthode de tir a été transposée avec succès à l'étude de poutres en grands déplacements. Nous avons proposé un paramétrage des rotations rigides des sections basé sur le couple dual MRP/SMRP, paramétrage qui a été validé au travers de plusieurs cas de référence basés sur l'état de l'art. Nous avons également proposé un algorithme de commutation entre MRP et SMRP s'inscrivant dans le processus d'intégration de la méthode de tir.

L'ensemble des conditions aux limites pour les fils et les poutres a été revu, ainsi que leur place au sein de la méthode de tir sous forme d'équations de contraintes basées sur la cinématique et la statique admissible de chaque connexion. Les équations du jacobien du problème de tir ont ensuite été développées afin de permettre son évaluation en un temps minimum comme montré dans les exemples.

Nous avons vu que l'utilisation d'un algorithme d'intégration à pas adaptatif permet de conserver un rapport optimal entre le nombre de points d'intégration et la précision. Cela permet d'une part de s'affranchir d'une étude de convergence des champs intégrés, tout en conservant des temps de calculs optimaux.

Un algorithme de Newton a été utilisé dans notre étude pour la détermination du zéro de la fonction de contrainte du problème de tir. Ce type d'approche permet une

convergence quadratique. Cependant, la robustesse de ce type d'algorithme montre ses limites lorsque la solution du problème non-linéaire est trop loin de l'itéré initial. Cette limitation est particulièrement vraie dans le cas de problèmes raides (mauvais conditionnement du jacobien). De tels cas n'ont pas été rencontrés sur les problèmes de fils, mais plutôt dans l'étude de problèmes de poutres rotulé-rotulé ainsi que dans des cas où le flambement est proche. Dans ce dernier cas, c'est le problème aux valeurs initiales lui-même qui est mal conditionné. Comparée à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple répond partiellement à cette limitation. La division de l'intervalle d'intégration en sous-intervalles permet de se rapprocher d'une linéarisation du problème au prix d'une augmentation du nombre d'inconnues. Bien que la méthode de tir multiple (avec ou sans corps rigides) aide sur ce point, la question de la bonne convergence reste un point majeur de la méthode à améliorer.

Les travaux effectués sur la méthode de tir on fait l'objet de trois publications : deux dans des conférences internationales avec comité de revue : l'ISOPE 2017 [103] et l'OMAE 2018 [104] ; et une dans le journal « International Journal of Non-Linear Mechanics » [105].

Chapitre 5 : Conclusion générale

Table des matières

5.1	Conclusion sur les apports	157
5.2	Conclusion générale sur l'éolien offshore.....	160

5.1 CONCLUSION SUR LES APPORTS

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la construction d'éléments méthodologiques pour la simulation d'une éolienne offshore (fixe ou flottante), afin de répondre aux exigences des standards tout en restant compétitif industriellement d'un point de vue des temps de la conception, et donc de la simulation.

Après avoir fait un bilan des approches et méthodes de simulations utilisées en Oil & Gas et en éolien, nous nous sommes intéressés à deux thématiques :

- La première concerne l'utilisation de la méthode IFORM comme base méthodologique pour le calcul d'une réponse extrême fine à partir de données d'environnement stochastiques. Cette approche a été adoptée car elle permet, à moindre coût, d'identifier les combinaisons de paramètres environnementaux conduisant à la réponse extrême. ;
- La seconde traite de l'utilisation de la méthode de tir dans le cadre d'étude structurelle multi-corps de corps élancés statiques fils et poutres. Cette méthode a été identifiée car elle présente de très bonnes performances sur des cas de fils caténaux.

Les travaux sur la méthode IFORM et la méthode de tir rentrent dans une logique de définition de méthodologies d'études alliant précision et performance de calcul.

Par rapport à une approche long-terme impliquant le calcul de toutes les combinaisons environnementales, la solution de calcul de la réponse extrême se basant sur la méthode IFORM proposée permet de poser une brique d'identification des conditions environnementales critiques. Grâce à un modèle représentatif suffisamment précis et rapide, la méthode IFORM permet d'identifier les combinaisons environnementales amenant à une réponse extrême. Un modèle de calcul plus fin et plus coûteux (type CFD par exemple) peut ensuite être lancé sur un quadrillage autour des combinaisons identifiées pour la détermination de la réponse extrême.

Un modèle suffisamment précis et rapide est défini ici comme un modèle représentant suffisamment fidèlement l'évolution globale de la réponse à observer.

La méthode présentée permet donc de répondre en partie à la façon de faire le lien entre la caractérisation de plusieurs paramètres environnementaux sous forme de variables aléatoires, et l'étude de plusieurs cas de chargements en réponse extrême imposés par les standards au travers de simulation CFD coûteuses en temps de calcul.

Certaines précautions doivent tout de même être prises :

- L'utilisation de cette approche nécessite l'assurance que le modèle léger utilisé soit suffisamment représentatif de ce que l'on veut observer. Si ce modèle léger n'est pas assez proche de la réponse réelle, au mieux le quadrillage autour des combinaisons observées devra être large et induira plus de calcul coûteux, au pire les combinaisons identifiées avec IFORM ne seront pas dans la zone de maximum local de la réponse extrême, et tout intérêt de la méthode sera perdu. Il est donc primordial d'avoir un recul suffisant sur l'évolution de la réponse recherchée fonction des paramètres environnementaux ;
- La méthode IFORM telle que présentée n'est pas adaptée pour des réponses très non linéaires ou avec discontinuités, ce qui peut s'avérer être une limite pour l'étude du comportement global de certaines EMR où un modèle de contrôle commande est utilisé ;
- La variabilité court-terme en tant que paramètre statistique supplémentaire peut in fine devenir très coûteuse afin de s'assurer de la convergence pour des quantiles court terme élevés (environ une centaine pour obtenir la convergence de la queue de distribution court terme). Afin de s'affranchir de cette limitation, [14] propose l'estimation du quantile 90% grâce à un nombre limité de simulations (au moins 5).

Dans le cadre de ce travail, nous avons également investigué l'utilisation de la méthode de tir pour la résolution des équations non-linéaires de la statique 3D des fils et des poutres. Un formalisme commun aux deux problèmes physiques a été proposé. Il permet d'appliquer la méthode de tir sur un problème aux limites aux deux bouts avec une dérivée spatiale de l'ODE, et des conditions aux limites mixtes (écrites simultanément avec les inconnues cinématiques et statiques). Il englobe les formulations classiques de méthode de tir simple et multiple vues au travers du prisme

de la mécanique. Dans la continuité de cette formulation, une nouvelle méthode de tir multiple multi-corps/multi-tir a été développée. Elle permet la généralisation du multi-tir dans un contexte d'assemblages mécaniques, en levant la limite de segments connectés deux à deux. La méthode proposée permet également le traitement générique des discontinuités géométriques, de matériaux et d'efforts sur un élément élané.

L'introduction de corps rigides statiques, auxquels sont attachés des liaisons cinématiques, permet d'étendre la méthode classique basée sur un équivalent de liaisons encastrement en le généralisant à tous types de conditions aux limites entre les corps rigides. Cette extension ouvre également la voie à la résolution multi-corps statique, où les corps rigides peuvent être directement connectés entre eux via les liaisons cinématiques, et dans laquelle la méthode multi-corps/multi-tir s'inscrit naturellement. En cela, la méthode présentée est adaptée à la modélisation des corps élanés comme les pales d'une éolienne ou d'une hydrolienne ou les lignes d'ancrage d'un système flottant. La prise en compte de liaisons cinématiques entre corps rigides permettra l'acquisition d'une méthode d'étude complète pour l'initialisation statique d'une simulation du comportement global d'une EMR, modélisée en multi-corps rigides et élanés.

Les résultats présentés sont très probants en termes de précision. Les vitesses de calcul étant très dépendantes du code lui-même, il est difficile d'évaluer de façon catégorique des données de temps de calcul absolues. Certaines tendances peuvent être tout de même extraites : la partie algorithmique prenant le plus de temps se trouve être l'algorithme d'intégration. En ce sens, le calcul du jacobien par recomposition permet un gain significatif de temps au-delà de deux tronçons. De plus, la méthode de tir multiple est par nature parallélisable, ce qui permet de bonnes performances numériques même lorsque les tailles de problèmes augmentent. L'utilisation d'algorithmes d'intégration à pas adaptatif permet également d'obtenir le meilleur compromis précision/vitesse de calcul.

Par contre la méthode de tir telle que présentée souffre de problèmes de convergence pour des études de flambement, de treillis, ou lorsque la fonction contrainte des éléments élanés étudiés a un rayon de convergence très court. Dans ce dernier cas, un premier itéré en dehors du rayon de convergence entraînera la non-convergence de l'algorithme de Newton. Cette notion de rayon de convergence est

particulièrement difficile à caractériser compte tenu de l'aspect multidimensionnel du vecteur de contrainte à annuler. Afin de résoudre ce point sur la convergence, deux axes peuvent être cités : l'utilisation d'algorithmes d'optimisation plus robustes qu'un simple Newton (passant par l'écriture sous forme de fonctionnelle du vecteur contrainte), et la détermination d'une fonctionnelle ayant une géométrie plus intéressante que la fonction de contrainte directement issue des degrés de libertés libres et contraints des liaisons cinématiques.

Finalement, un axe d'étude permettant à la fois la réduction du temps de calcul et l'amélioration de la convergence du problème de tir pourra être la projection des champs à intégrer sur une base de fonctions permettant une intégration analytique de ces dernières. Grâce au choix d'une base satisfaisante, la solution projetée trouvée pourra permettre l'initialisation sur une solution proche de la solution recherchée.

5.2 CONCLUSION GENERALE SUR L'EOLIEN OFFSHORE

L'objectif de ce travail peut se résumer à la définition de méthodologies d'études pour l'éolien offshore afin de concilier les capacités de simulation numérique dans un contexte industriel et les exigences des standards et règlements.

Deux axes ont été abordés :

- Le lien entre la définition de paramètres environnementaux sous forme de paramètres statistiques conjoints, et des modèles fins, coûteux et utilisables sur un nombre limité de simulations ;
- Le développement d'une méthode alternative de modélisation de la statique des corps élanés pour la simulation d'un comportement global multi-corps en vue, à terme, d'obtenir un ratio calcul/précision compétitif industriellement.

Bien que le cadre d'application de ce travail ait été limité à l'éolien offshore, les deux axes d'étude cités ne sont pas exclusifs à ce type d'EMR en particulier. En effet, du fait de leur transversalité, la méthode IFORM et la méthode de tir peuvent tout à fait être appliquées sur des systèmes hydroliens ou houlomoteurs.

Références

- [1] Observ'ER, *Le baromètre 2018 des Energies renouvelables électriques en France.*, 2018.
- [2] Fraunhofer, "Levelized Cost of Electricity Renewable Energy Technologies," 2018.
- [3] Anders Myhr, Catho Bjerkseter, Anders Agotnes, and Tor A. Nygaard, "Levelised cost of energy for offshorefloating wind turbines in a life cycle perspective," *Renewable Energy*, vol. 66, pp. 714-728, 2014.
- [4] International Electrotechnical Commission (IEC), "IEC 61400-3 : Wind Turbines Part 3 - Design Requirement for offshore wind turbines," 2009.
- [5] Bureau Veritas, "Guidance Note NI 631 DT R00 E - Certification Scheme for Marine Renewable Energy Technologies," 2011.
- [6] Bureau Veritas, "Rule Note NI 572 DT R02 E - Classification and Certification of Floating Offshore Wind Turbines," 2019.
- [7] Det Norske Veritas, "OS-J101 Design of Offshore Wind Turbine Structures," 2013.
- [8] Germanischer Lloyd, "Guideline for the Certification of Offshore Wind Turbines," 2012.
- [9] Lloyd's Register, "Rules and Regulations for the Classification of a Floating Offshore Installation at a Fixed Location," 2013.
- [10] American Bureau of Shipping, "Guide for building and classing floating offshore wind turbine installations," 2014.
- [11] Marc Seidel, Sven Voomeeren, and Jan-Bart Van der Steen, "State-of-the-art design process for the offshore wind turbine support structures: Practical approaches and pitfalls during different stages in the design process," *Stahlbau*, vol. 85, no. 9, pp. 583-590, 2016.
- [12] Lifes50+, "Qualification of innovative floating substructures for 10MW wind turbines and water depths greater than 50m - D7.4 State-of-the-Art FOWT design practice and guidelines," 2016.
- [13] Amy Robertson et al., "OC5 Project Phase II: Validation of Global Loads of the DeepCwind Floating Semisubmersible Wind Turbine," *Energy Procedia*, vol. 137, pp. 38-57, 2017.
- [14] Bureau Veritas, "Rule Note NI 638 DT R00 E - Guidance for Long-term Hydro-structure Calculations," 2019.
- [15] Quentin Derbanne, Jean-François Leguen, Thierry Dupau, and Etienne Hamel, "Prévision a long terme du moment fléchissant non linéaire," in *Conférence ATMA*, Val de Reuil, 2008.
- [16] Franck Schoefs, Humberto Yanez-Godoy, and Francesca Lanata, "Polynomial Chaos Representation for Identification of Mechanical Characteristics of Instrumented Structures," *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 26, no. 3, pp. 173-189, 2011.
- [17] Hassen Riahi, "Analyse de structures à dimension stochastique élevée : application aux toitures bois sous sollicitation sismique," Phd Thesis 2013.

- [18] S.R. Winterstein, T.C. Ude, C. A. Cornell, P. Bjerager, and S. Haver, "Environmental parameters for extreme response: inverse FORM with omission factors," in *Proceedings of ICOSAR-93*, Innsbruck, Austria, 1993.
- [19] Quentin Derbanne, Fabien Bigot, and Guillaume De Hauteclocque, "Comparison of Design Wave Approach and Short Term Approach With Increased Wave Height in the Evaluation of Whipping Induced Bending Moment," in *Proceedings of the ASME 2012 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, Rio de Janeiro, 2012.
- [20] J.R. Morison, S.A. Schaaf, S.A. Johnson, and J.W. Johnson, "The force exerted by surface waves on piles," *Journal of Petroleum Engineers*, vol. 189, pp. 149-154, 1950.
- [21] Alireza Shourangiz-Haghighi et al., "State of the Art in the Optimisation of Wind Turbine Performance Usign CFD," *Archives of Computational Methods in Engineering*, pp. 1-19, 2019.
- [22] Lin Wang, Xiongwei Liu, and Athanasios Kolios, "State of the Art in in the Aeroelasticity of Wind Turbine Blades: Aeroelastic Modelling," *Renawable and Sustainable Energy Review*, vol. 64, pp. 195-210, 2016.
- [23] B. Sanderse, S. P. van der Pijl, and Koren B., "Review of computational fluid dynamics for wind turbine wake aerodynamics," *Wind Energy*, vol. 14, pp. 799-819, 2011.
- [24] Olivia Thilleul et al., "Evaluation of Response Based Design Method and Validation of Wave Loads Computations in CFD," in *EWTEC*, 2015.
- [25] J. Jonkman and M. Musial, "Offshore Code Comparison Collaboration (OC3) for IEA Task 23 Offshore Wind Technology and Deployment Technical Report NREL/TP-5000-48191," 2010.
- [26] Amy Robertson et al., "Offshore Code Comparison Collaboration, Continuation: Phase II Results Regarding a Floating Semisubmersible Wind System," in *33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, San Francisco, California, 2014.
- [27] Amy Robertson et al., "OC5 Project Phase Ib: Validation of Hydrodynamic Loading on a Fixed, Flexible Cylinder for Offshore Wind Applications," *Energy Procedia*, vol. 94, pp. 82-101, 2016.
- [28] H. Glauert, "Aerodynamic Theory," in *Airplane Propellers*. New York: Willieman Fredereick Durand, 1935, pp. 169-360.
- [29] Michael Borg, Andrew Shires, and Maurizio Collu, "Offshore floating vertical axis wind turbines, dynamics modelling state of the art. Part I: Aerodynamics," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 39, pp. 1214-1225, 2014.
- [30] Subrata Kumar Chakrabarti, *Hydrodynamics of Offshore Structures.*: Springer Verlag, 2003.
- [31] Huacan Fang and Menglan Duan, *Offshore Operation Facilities.*: Petroleum Industry Press, 2014.
- [32] Michael Borg, Maurizio Collu, and Athanasios Kolios, "Offshore floating vertical axis wind turbines, dynamics modelling state of the art. Part II: Mooring line and structural dynamics," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 39, pp. 1226-1234, 2014.

- [33] Klaus-Jurgen Bathe, *Finite Element Procedures, Second Edition*. Watertown MA: Prentice Hall, 2014.
- [34] Simon R. Eugster, *Geometric Continuum Mechanics and Induced Beam Theories*. New York: Springer, 2015.
- [35] C. Meier, W. A. Wall, and A. Popp, "Geometrically exact finite element formulations for curved slender beams: Kirchhoff-Love theory vs Simo-Reissner theory," 2006.
- [36] Max Irvine, *Cable Structures*. Cambridge: MIT Press, 1981.
- [37] Bureau Veritas, "Ariane8, Theoretical Manual," 2018.
- [38] Bonnie Jonkman and Jason Jonkman, "Guide to Changes in Fast v8," Technical report 2016.
- [39] Elisabete Alberdi Celaya and Juan José Anza, "BDF-alpha: A multistep Method with Numerical Damping Control," *Universal Journal of Computational Mathematics*, vol. 1, no. 3, pp. 96-108, 2013.
- [40] Olivier Andre Bauchau, *Flexible Multibody Dynamics*.: Springer Science & Business Media, 2010, vol. 176.
- [41] P. Brondsted and R.P. Nijssen, *Advances in wind turbine blade design and materials*.: Elsevier, 2013.
- [42] M. O. L. Hansen, J. N. Sorensen, S. Voutsinas, N. Sorensen, and H. A. Madsen, "State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity," *Progress in aerospace sciences*, vol. 42, no. 4, pp. 285-330, 2006.
- [43] John Till and Caleb Rucker, "Elastic Rod Dynamics: Validation of a Real-Time Implicit Approach," in *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vancouver, Canada, 2017, pp. 3013-3019.
- [44] Emmanuel Trelat, *Contrôle optimal : théorie et applications*.: Vuibert, 2008.
- [45] Moritz Diehl, Hans Georg Bock, Holger Diedam, and Pierre-Brice Wieber, "Fast Direct Multiple Shooting Algorithms for Optimal Robot Control," in *Fast Motions in Biomechanics and Robotics*. Heidelberg, Germany: Springer, 2005, pp. 65-93.
- [46] Caleb Rucker, Bryan A. Jones, and Robert J. Webster, "A geometrically exact model for externally loaded concentric-tube continuum robots," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 26, no. 5, pp. 769-780, 2010.
- [47] Claus F. Christensen and Torben Arnbjerg-Nielson, "Return Period for Environmental Loads - Combination of Wind and Wave Loads for Offshore Wind Turbines," Copenhagen, Denmark, 2000.
- [48] Korn Saranyasoontorn and Lance Manuel, "On Assessing the Accuracy of Offshore Wind Turbine Reliability-based Design Loads from the Environmental Contour Method," *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, vol. 15, no. 2, pp. 1-9, 2005.
- [49] A. Der Kiureghian and P.L. Liu, "Structural Reliability Under Incomplete Probabilistic Information," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 112, no. 1, pp. 85-104, 1986.
- [50] Nataf André, "Détermination des distributions de probabilité dont les marges sont données," *Compte rendu de l'Académie des Sciences*, no. 255, pp. 42-43, 1962.

- [51] Murray Rosenblatt, "Remarks on a Multivariate Transformation," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, no. 3, pp. 470-472, 1952.
- [52] Yan Gang Zhao and Tetsuro Ono, "A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM)," *Structural Safety*, vol. 21, no. 1, pp. 95-112, 1999.
- [53] J.M. Niedzwecki, J.W. van de Lindt, and J.T.P. Yao, "Estimating extreme tendon reponse using environmental contours," *Engineering Structures*, vol. 20, no. 7, pp. 601-607, 1997.
- [54] Lars Skjelbreia and James Hendrickson, "Fifth order gravity wave theory," in *Coastal Engineering Proceedings*, 1960, pp. 184-196.
- [55] N. Hogben, Da Cunha L.F., and H.N. Oliver, *Global Wave Statistics*. London, England: Unwin Brothers Limited, 1986.
- [56] IACS Rec. No 34, "Standard wave data," revision November 2001.
- [57] K. Hasselmann et al., "Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)," *Erganzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*, vol. 8, no. 12, pp. 1-95, 1973.
- [58] E. J. Gumbel, "Les valeurs extrêmes des distributions statistiques," *Annales de l'IHP*, vol. 5, no. 2, pp. 115-158, 1935.
- [59] Michael Baudin, Anne Dutfoy, Bertrand Iooss, and Anne Laure Popelin, "OpenTURNS: An industrial software for uncertainty quantification in simulation," ArXiv E-Prints, arXiv:1501.05242v2, 2015.
- [60] Olivia Thilleul et al., "Prédiction des réponses extrêmes pour les structures EMR - Apport de la CFD avec surface libre," in *14èmes Journées de l'Hydrodynamique*, Val de Reuil, 2014.
- [61] Herbert B. Keller, *Numerical Solution of Two-Point Boundary Value problems*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1976, vol. 24.
- [62] L. Pontriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*. Moscou: Editions Mir, 1974.
- [63] John Till and Caleb Rucker, "Efficient Computation of Multiple Coupled Cosserat Rod Models for Real-Time Simulation and Control of Parallel Continuum Manipulators," in *International Conference on Robotics and Automation*, Seattle, Washington, 2015.
- [64] Arjuna P. K. De Zoysa, "Steady-state Analysis of Undersea Cables," *Ocean Engineering*, vol. 5, no. 3, pp. 209-223, 1978.
- [65] Michael Ian Friswell, "Steady-state Analysis of Underwater Cables," *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, no. 2, pp. 98-104, 1995.
- [66] R. S. Chen, "Evaluation of natural vibration frequency of a compression bar with varying cross-section vy using the shooting method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 201, no. 4, pp. 520-527, 1997.
- [67] Maxime Peeters, Régis Vigié, Guillaume Sérandour, Gaëtan Kerschen, and Jean-Claude Golinval, "Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computing using numerical continuation techniques," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 1, pp. 195-216, 2009.

- [68] R. J. Kuether et al., "Nonlinear normal modes, modal interactions and isolated resonance curves," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 351, pp. 299-310, 2015.
- [69] M. R. Osborne, "On Shooting Methods for Boundary Value Problems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 27, pp. 417-433, 1969.
- [70] P. Deuffhard, "A modified Newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting," *Numerische Mathematik*, vol. 22, no. 4, pp. 289-315, 1974.
- [71] Stuart Antman, *Nonlinear Problems of Elasticity*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [72] S. P. Timoshenko, "LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 41, no. 245, pp. 744-746, 1921.
- [73] G. Kirchhoff, "Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 56, pp. 285-313, 1859.
- [74] Augustus Edward Hough Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*.: Cambridge University Press, 1892.
- [75] J. C. Simo, "A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 49, pp. 55-70, 1985.
- [76] Eugène Cosserat and François Cosserat, *Théorie des corps déformables*. Paris: Librairie scientifique A. Hermann, 1909.
- [77] Thomas Freud Wiener, "Theoretical analysis of gimballess inertial reference equipment using delta-modulated instruments," Massachusetts Institute of Technology, Master's thesis 1962.
- [78] Richard R. Murray, Li Zexiang, and Shankar S. Sastry, *A mathematical Introduction to Robotic Manipulation*.: CRC Press, 1994.
- [79] James Diebel, "Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors," *Matrix*, vol. 58, no. 15-16, pp. 1-35, 2006.
- [80] H. Schaub and J. L. Junkins, "Stereographic Orientation Parameters for Attitude Adynamics: A Generalization of the Rodrigues Parameters," *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 11, no. 1, pp. 1-19, 1996.
- [81] Granville Sewell, *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [82] Andrew Benjamin Jr White, "Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems," Pasadena, California, 1974.
- [83] Juan C. Simo and Loc Vu-Quoc, "A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational aspects," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, pp. 79-116, 1986.
- [84] James M. Gere and Barry J. Goodno, *Mechanics of materials*, 9th ed. Boston, USA: Cengage Learning, 2018.

- [85] E. Zupan, M. Saje, and D. Zupan, "The quaternion-based three-dimensional beam theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, no. 49-52, pp. 3944-3956, 2009.
- [86] D. Zupan and M. Saje, "Finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 49-50, pp. 5209-5248, 2003.
- [87] A. Ibrahimbegović, F. Frey, and I. Kozar, "Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, no. 21, pp. 3653-3673, 1995.
- [88] A. Ibrahimbegović, "On the choice of finite rotation parameters," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 149, no. 1-4, pp. 49-71, 1997.
- [89] K.J. Bathe and S. Bolourchi, "Large displacement analysis of three-dimensional beam structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 7, pp. 961-986, 1979.
- [90] Adnan Ibrahimbegović, "On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 122, no. 1-2, pp. 11-26, 1995.
- [91] Dejan Zupan and Miran Saje, "The linearized three-dimensional beam theory of naturally curved and twisted beams: The strain vectors formulation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 4557-4578, 2006.
- [92] Jean-Marc Battini and Costin Pacoste, "Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, no. 17, pp. 1755-1789, 2002.
- [93] S. Ghosh and D. Roy, "A frame-invariant scheme for the geometrically exact beam using rotation vector parametrization," *Computational Mechanics*, vol. 44, no. 1, p. 103, 2009.
- [94] Jari Mäkinen, "Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, pp. 1009-1048, 2006.
- [95] Richard H. MacNeal and Robert L. Harder, "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, pp. 3-20, 1985.
- [96] A. Dutta and D. W. White, "Large displacement formulation of a three-dimensional beam element with cross-sectional warping," *Computers and Structures*, vol. 45, no. 1, pp. 9-24, 1992.
- [97] Adnan Ibrahimbegović and François Frey, "Stress resultant geometrically non-linear shell theory with drilling rotations. Part III: Linearized Kinematics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 3659-3683, 1994.
- [98] A. Cardona and M. Gerardin, "A beam finite element non-linear theory with finite rotations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2403-2438, 1988.

- [99] L.A. Crivelli and C.A. Felippa, "A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 3647-3673, 1993.
- [100] W. Marek Smoleński, "Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 178, no. 1, pp. 89-113, 1999.
- [101] W. Fan and W. D. Zhu, "An Accurate Singularity-Free Formulation of a Three-Dimensional Curved Euler-Bernoulli Beam for Flexible Multibody Dynamic Analysis," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 138, no. 5, p. 051001, 2016.
- [102] Michel Géradin and Alberto Cardona, *Flexible multibody dynamics: a finite element approach.*: John Wiley, 2001.
- [103] Florian Surmont, Damien Coache, Thomas Gazzola, Cédric Brun, and Sébastien Martin, "An Alternative Methodology for Static 3D Nonlinear Hanging Mooring Lines Analysis," in *Proceedings of the Twenty-seventh (27th) International Ocean and Polar Engineering Conference*, San Francisco, 2017, pp. 105-112.
- [104] Florian Surmont and Damien Coache, "Investigation on the Shooting Method Ability to Solve Different Mooring Lines Boundary Condition Types," in *ASME 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, 2018.
- [105] Florian Surmont and Damien Coache, "Geometrically exact static 3D Cosserat rods problem solved using a shooting method," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, In press, October 2019.

Annexes

Table des matières

Annexe A Scatter diagram considéré pour l'étude IFORM	169
Annexe B Formulation analytique des efforts de Morison sur houle irrégulière	170
Annexe B.1 Intégration des efforts de Morison	170
Annexe B.2 Annulation de la vitesse de particule selon \mathbf{z}	173
Annexe C Développement des équations multi-corps/multi-tir	180
Annexe C.1 Dépendances des fonctions de contraintes aux inconnues du problème de tir	180
Annexe C.2 Développement du jacobien de l'équation de contrainte sur les corps 181	181
Annexe D Résolution des exemples en fil caténaire	184
Annexe D.1 Equation de la statique des caténaires	184
Annexe D.2 Exemple n°2 : Equations de contraintes	187
Annexe D.3 Exemple n°4 : Equations de contraintes	188
Annexe E Solutions de RDM	189
Annexe E.1 Effort linéique triangulaire	189
Annexe E.2 Poutre avec changement d'inertie	189
Annexe E.3 Portique en T	190

Annexe A

Scatter diagram considéré pour l'étude IFORM

		T_p (s)										
		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
H_s (m)	15	0	0	0	200274	27816	8941	5532	5502	7823	14513	33379
	14	0	0	0	250343	35763	12838	8941	9817	15406	31293	83448
	13	0	0	0	111263	19257	7418	5355	6181	10115	21769	55632
	12	0	0	1001371	58904	10115	4155	3179	3851	6632	14726	40055
	11	0	0	500686	27816	5188	2276	1848	2367	4261	10014	28611
	10	0	0	200274	12676	2574	1211	1051	1428	2721	6721	20027
	9	0	0	83448	5502	1227	627	584	849	1724	4490	14104
	8	0	0	29452	2286	563	315	319	499	1085	3007	10014
	7	0	500686	10218	901	249	154	172	293	690	2060	7363
	6	0	166895	3327	341	108	75	94	177	457	1484	5722
	5	0	43538	1028	126	47	38	54	115	332	1194	5057
	4	0	10014	311	48	22	21	36	89	293	1195	5690
	3	500686	2172	97	20	12	15	32	96	381	1831	10115
	2	62586	450	35	12	11	19	55	220	1125	6812	47684
	1	2503	112	29	23	40	126	596	3779	29452	250343	0

Table 29: Scatter diagram n°17 (Global Wave Statistics)

Annexe B

Formulation analytique des efforts de Morison sur houle irrégulière

Cette annexe vise au développement de la formulation analytique du calcul des efforts de Morison en pied de cylindre fixe sur houle irrégulière d'Airy.

Annexe B.1 Intégration des efforts de Morison

La vitesse d'une particule fluide est donnée par (121) avec φ_i une valeur de phase tirée aléatoirement, $x \in]-\infty, +\infty[$ et $z \in [-d, 0]$ (le cylindre est choisi positionné en $x = x_0 = 0$, d'axe z). L'effort de Morison est un effort linéique décomposé en une composante inertielle $f_M(z, t)$ et une composante de traînée $f_D(z, t)$.

$$U(z, t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \quad (121)$$

$$f(z, t) = \rho C_M S \dot{U}(z, t) + \frac{1}{2} \rho C_D D U(z, t) |U(z, t)|$$

L'effort en pied de pieu est obtenu par l'intégration des efforts extérieurs de Morison (1) tel que $F_x(t) = \int_{z=-d}^0 f(z, t) dz = F_{xM}(t) + F_{xD}(t)$. De la même façon, le moment s'obtient par $M_y(t) = \int_{z=-d}^0 f(z, t)(d+z) dz = M_{yM}(t) + M_{yD}(t)$.

En supposant l'axe du cylindre coïncidant avec l'origine des x , les efforts et moment interne en pied de pieu s'écrivent :

$$F_{xM}(t) = \int_{z=-d}^0 \rho C_M S \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i^2 \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \sin(-\omega_i t + \varphi_i) dz$$

$$F_{xD}(t) = \int_{z=-d}^0 \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \left| \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \right| dz$$

$$M_{yM}(t) = \int_{z=-d}^0 \rho C_M S \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i^2 \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \sin(-\omega_i t + \varphi_i) (d+z) dz$$

$$M_{yD}(t) = \int_{z=-d}^0 \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \left| \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \right| (d+z) dz$$

Les composantes de masse ajoutée ne présentent pas de difficultés particulières pour leur intégration. En utilisant la relation de dispersion $\omega_i^2 = g k_i th k_i d$ il vient :

$$F_{xM}(t) = \rho C_M S g \sum_{i=0}^{n-1} A_i \sin(-\omega_i t + \varphi_i) th k_i d$$

$$M_{yM}(t) = -\rho C_M S g \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i}{k_i} \sin(-\omega_i t + \varphi_i) \left(1 - \frac{1}{ch k_i d}\right) + \rho C_M S g d \sum_{i=0}^{n-1} A_i \sin(-\omega_i t + \varphi_i) th k_i d$$

Comme $F_{xD}(t) = \int_{z=-d}^0 f_D(z, t) dz = \int_{z=-d}^0 \frac{1}{2} \rho C_D D U(z, t) |U(z, t)| dz$, les composantes de traînée sont plus complexes à calculer du fait de la présence de la valeur absolue de la vitesse dans l'intégrale. Une étude de signe de $f_D(z, t)$ fonction de z est nécessaire.

Tout d'abord, $f_D(z, t)$ est du signe de $U(z, t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{ch k_i(z+d)}{sh k_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i)$. Il faut séparer le domaine d'intégration pour $U(z, t) > 0$ et $U(z, t) < 0$, et par continuité en $U(z, t) = 0$, $f_D(z, t) = 0$. Soit N le nombre de domaines d'intégration, alors :

$$F_{xD}(t) = \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{m=0}^{N-1} \text{sign}(U(z, t)|_{z \in [z_m, z_{m+1}]}) \int_{z=z_m}^{z_{m+1}} U(z, t)^2 dz$$

Où $z_0 = -d$, $z_N = 0$ et z_m sont les solutions tel que $U(z, t) = 0$ et $\text{sign}(U(z, t)|_{z \in [z_m, z_{m+1}]} = \begin{cases} 1 \text{ si } U(z, t) > 0 \\ -1 \text{ si } U(z, t) < 0 \end{cases} \quad \forall z \in [z_m, z_{m+1}]$ et $\forall m \in [0, N - 1]$. On évaluera $\text{sign}(U(z, t)|_{z \in [z_m, z_{m+1}]}$ pour $z = \frac{z_m + z_{m+1}}{2}$.

En introduisant $\widetilde{u}^2(z, t)$ la primitive de $U(z, t)^2$ il vient $\int_{z=z_m}^{z_{m+1}} U(z, t)^2 dz = \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) - \widetilde{u}^2(z_m, t)$. Finalement :

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^2(z, t) = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{A_i A_j \omega_i \omega_j}{sh k_i d \cdot sh k_j d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \cos(-\omega_j t \\ & + \varphi_j) \left[\frac{sh((k_i + k_j)(z + d))}{k_i + k_j} \right. \\ & \left. + \frac{sh((k_i - k_j)(z + d))}{k_i - k_j} \right] \\ & + \frac{A_i^2 \omega_i^2}{sh^2 k_i d} \cos^2(-\omega_i t + \varphi_i) \left[\frac{sh(2k_i(z + d))}{2k_i} + z \right] \end{aligned} \quad (122)$$

$$F_{xD}(t) = \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{m=0}^{N-1} \text{sign} \left(U \left(\frac{z_m + z_{m+1}}{2}, t \right) \right) \left(\widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) - \widetilde{u}^2(z_m, t) \right)$$

Le processus est le même pour le calcul du moment $M_{yD}(t) = \int_{z=-d}^0 f_D(z, t)(d + z) dz = \int_{z=-d}^0 \frac{1}{2} \rho C_D D U(z, t) |U(z, t)| (d + z) dz$. En introduisant $\widetilde{u}^2(z, t)$ la primitive de $\widetilde{u}^2(z, t)$ tel que $\int_{z=z_m}^{z_{m+1}} \widetilde{u}^2(z, t) dz = \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) - \widetilde{u}^2(z_m, t)$, il vient :

$$M_{yD}(t) = \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{m=0}^{N-1} \text{sign}(U(z, t)|_{z \in [z_m, z_{m+1}]}) \int_{z=z_m}^{z_{m+1}} U(z, t)^2 (d + z) dz$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^2(z, t) = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{A_i A_j \omega_i \omega_j}{shk_i d \cdot shk_j d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) \cos(-\omega_j t \\
& + \varphi_j) \left[\frac{ch((k_i + k_j)(z + d))}{(k_i + k_j)^2} \right. \\
& \left. + \frac{ch((k_i - k_j)(z + d))}{(k_i - k_j)^2} \right] \\
& + \frac{A_i^2 \omega_i^2}{sh^2 k_i d} \cos^2(-\omega_i t + \varphi_i) \left[\frac{ch(2k_i(z + d))}{4k_i^2} + \frac{z^2}{2} \right]
\end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{z=z_m}^{z_{m+1}} U(z, t)^2 (d + z) dz \\
& = (d + z_{m+1}) \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) - (d + z_m) \widetilde{u}^2(z_m, t) \\
& \quad - \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) + \widetilde{u}^2(z_m, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{yD}(t) = & \frac{1}{2} \rho C_D D \sum_{m=0}^{N-1} \text{sign} \left(U \left(\frac{z_m + z_{m+1}}{2}, t \right) \right) \left((d + z_{m+1}) \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) \right. \\
& \left. - (d + z_m) \widetilde{u}^2(z_m, t) - \widetilde{u}^2(z_{m+1}, t) + \widetilde{u}^2(z_m, t) \right)
\end{aligned}$$

Annexe B.2 Annulation de la vitesse de particule selon z

Le cylindre étant positionné en $x = 0$, nous devons résoudre l'équation :

$$U(z, t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega_i \frac{chk_i(z + d)}{shk_i d} \cos(-\omega_i t + \varphi_i) = 0 \tag{124}$$

L'amplitude d'une composante s'écrit à parti d'un spectre $A_j = \sqrt{2S(\omega_j) \delta \omega_j}$

avec $S(\omega_j) = \alpha H_s^2 T_p^{-4} \omega^{-5} \exp\left(-1.25 \frac{\omega_p^4}{\omega^4}\right) \gamma^{\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma \omega_p^2}\right)}$, $\alpha = \frac{487.045}{0.325 \gamma^{0.803 + 0.675}}$ et $\sigma = 0.07$ pour $\omega \leq \omega_p$ et $\sigma = 0.09$ pour $\omega > \omega_p$. La relation de dispersion $\omega_j^2 =$

$gk_j thk_j d$ nous permet de reformuler la partie cosinus de (124) en fonction de k_i . Nous choisissons ici de décomposer le spectre par rapport à k_j tel que :

$$\forall j \in [0, n - 1]$$

$$k_j = k_0 + j\Delta k$$

$$\frac{k_0}{\Delta k} = c$$

$$c \in \mathbb{N}$$

En introduisant ce choix de discrétisation dans (124) et en posant En posant $a_j = A_j \omega_j \frac{\cos(-\omega_j t + \varphi_j)}{shk_j d}$ il vient :

$$U(z, t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (e^{(j+c)\Delta k(z+d)} + e^{-(j+c)\Delta k(z+d)}) = 0$$

En posant $X = e^{\Delta k(z+d)}$ et en multipliant la dernière équation par $2X^{n+c}$ il vient :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j (X^{N+2c+j} + X^{N-j}) = 0$$

Cette dernière équation revient à la recherche des zéros d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ d'ordre $2(n + c)$ tel que :

$$P(X) = \sum_{m=0}^{2(n+c)} b_m X^m$$

Dont les coefficients sont définis par :

$$b_m = \begin{cases} a_{N-m-1}, \forall m \in [0, n - 1] \\ 0, \forall m \in [n, n + 2c - 2] \\ a_{m-N-2c+1}, \forall m \in [n + 2c - 1, 2(n + c)] \end{cases}$$

En cherchant les racines de $P(X)$, nous obtenons les valeurs de z pour lesquelles $U(z, t) = 0$. Ce polynôme admet au plus $2(n + c)$ racines complexes lorsqu'il est bien défini (i.e. coefficients b_m non nuls). Si tous les coefficients b_m sont nuls, nous sommes dans la situation où $\cos(-\omega_j t + \varphi_j) = 0, \forall j \in [0, n - 1]$, dans ce cas $U(z, t) = 0$ admet une infinité de solutions en z . La recherche de racine se fait

numériquement et les solutions en z sont ensuite calculées avec la relation $X = e^{\Delta k(z+d)}$.

La procédure utilise un algorithme de Sturm qui permet de calculer le nombre de racines réelles dans l'intervalle $[-d, 0]$. Si ce nombre est supérieur à 0, alors les racines du polynôme sont calculées. Les racines réelles dans l'intervalle $[-d, 0]$ sont gardées et constituent les profondeurs d'annulation de la vitesse $U(z, t)$.

A titre d'exemple nous appliquons cette méthode de recherche de zéro de $U(z, t)$ sur une houle modélisée par un spectre de JONSWAP de paramètres $H_s = 5m$, $T_p = 8s$, $\gamma = 1$. Le spectre est discrétisé en utilisant les paramètres $N = 45$, $k_0 = 0.0274093659799481$ et $c = 3$.

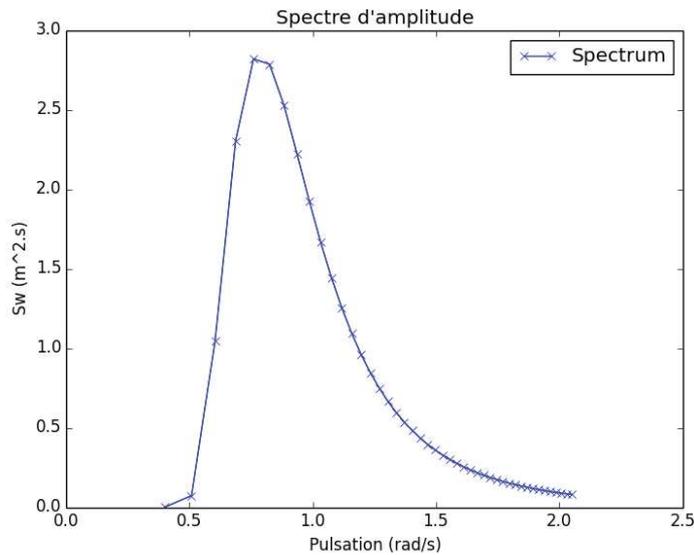


Figure 71 : Exemple de spectre de JONSWAP

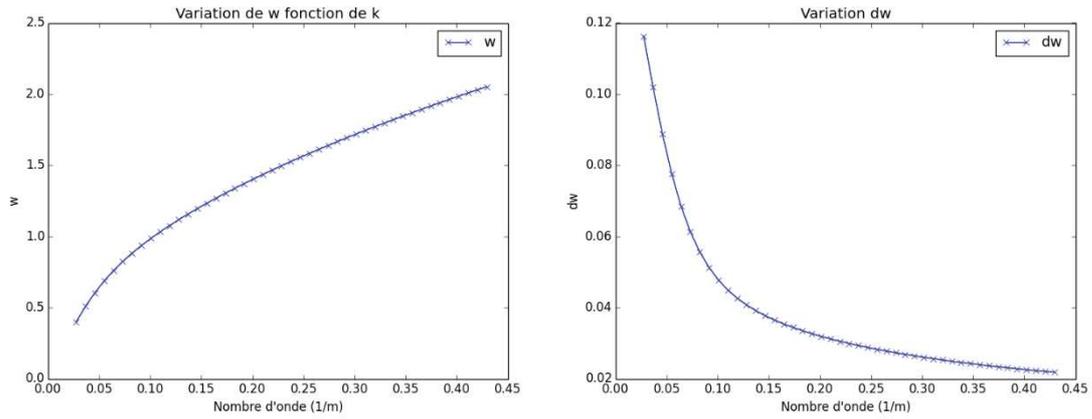


Figure 72 : Variations de ω et $d\omega$ fonction de k

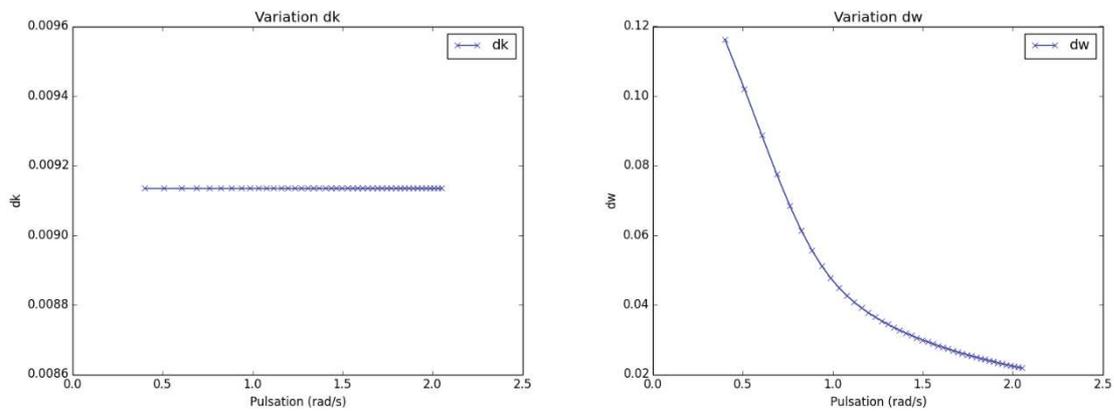


Figure 73 : Variations de dk et $d\omega$ fonction de ω

Le tirage aléatoire permettant de générer les phases est le suivant :

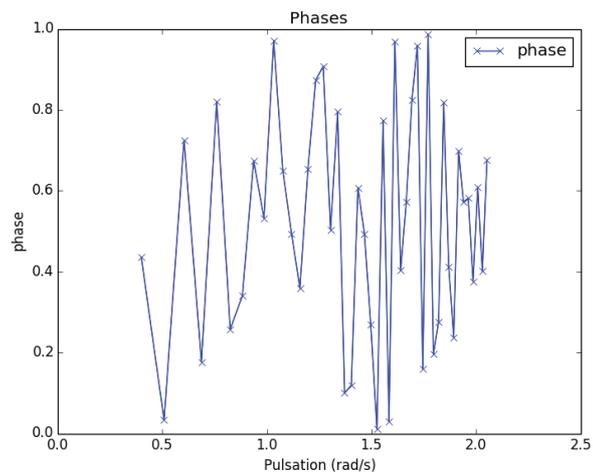


Figure 74 : Tirage de phases

Avec ces paramètres et pour une profondeur d'eau $d = 25m$ il vient :

- pour $t = 6.05 s$ on obtient deux solutions : $z_1 = -2.14m$ et $z_2 = -7.23m$
- pour $t = 10.5 s$ nous n'avons qu'une solution : $z = -9.16m$
- pour $t = 11.5 s$ il n'y a pas de solution

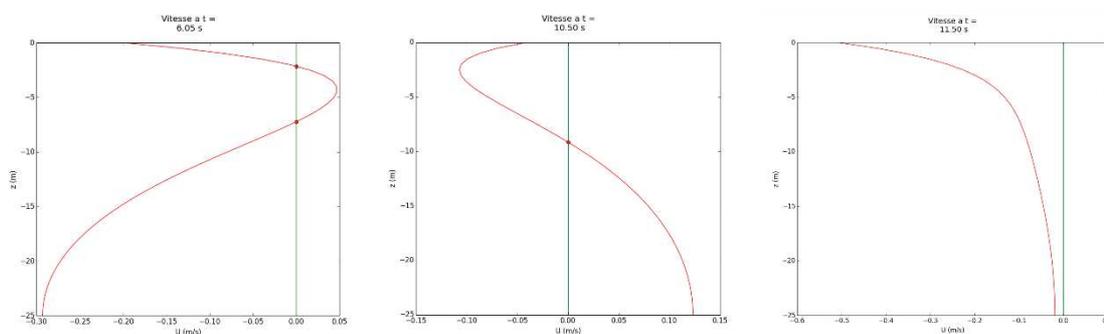


Figure 75 : Annulation de la vitesse de particule en houle irrégulière à différents instants (gauche : $t = 6.09 s$, milieu : $t = 10.5 s$, droite : $t = 11.5 s$)

La méthode de discrétisation du spectre en considérant Δk constant et multiple de k est discutable. Cela induira une périodicité spatiale de la houle. Dans le cas présent cette périodicité n'a pas d'influence car le cylindre est considéré à une position $x = 0$ fixe.

Afin d'évaluer les performances du modèle, la formulation analytique proposée est comparée à une intégration discrète. L'évolution des erreurs est montrée en Figure 76. L'évolution du temps d'évaluation de l'effort est donnée en Figure 77 et Figure 78 selon l'annulation ou non de la vitesse de particule. Nous constatons que la formulation analytique est plus performante en vitesse de simulation qu'une intégration discrète au-delà de 20 éléments lorsque qu'il n'y a pas d'annulation de la vitesse de fluide (pas de recherche de solution). Pour ce nombre d'éléments l'erreur de l'intégration discrète se monte à 12.5%. La formulation analytique développée est donc particulièrement efficace comparée à une intégration discrète dans ce premier cas. En revanche, les performances se dégradent lorsqu'il y a une recherche des racines de $U(z, t)$ (ce qui en pratique est assez rare). La solution semi-analytique devient tout de même plus performante qu'une intégration discrète utilisant 75 éléments ou plus (erreur de 2.5% de l'intégration discrète pour ce nombre d'éléments). Une amélioration de l'algorithme

de recherche des racines de $U(z, t)$ reste cependant à faire pour obtenir une vitesse optimale.

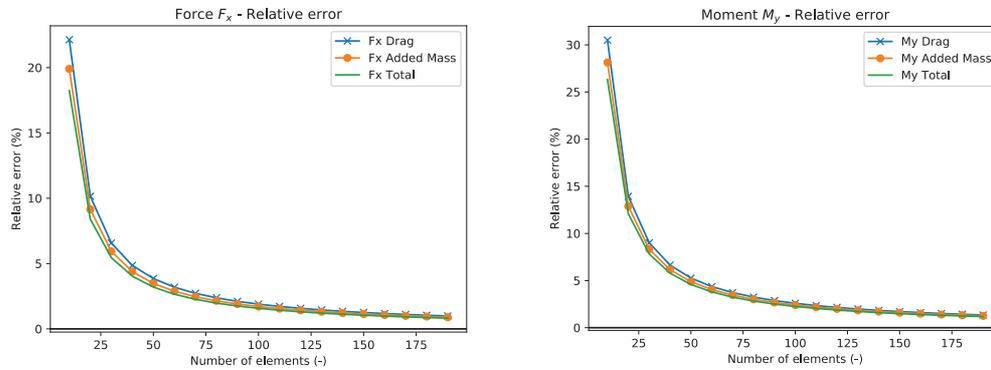


Figure 76 : Modèle de cylindre sur houle irrégulière – intégration discrète vs intégration analytique

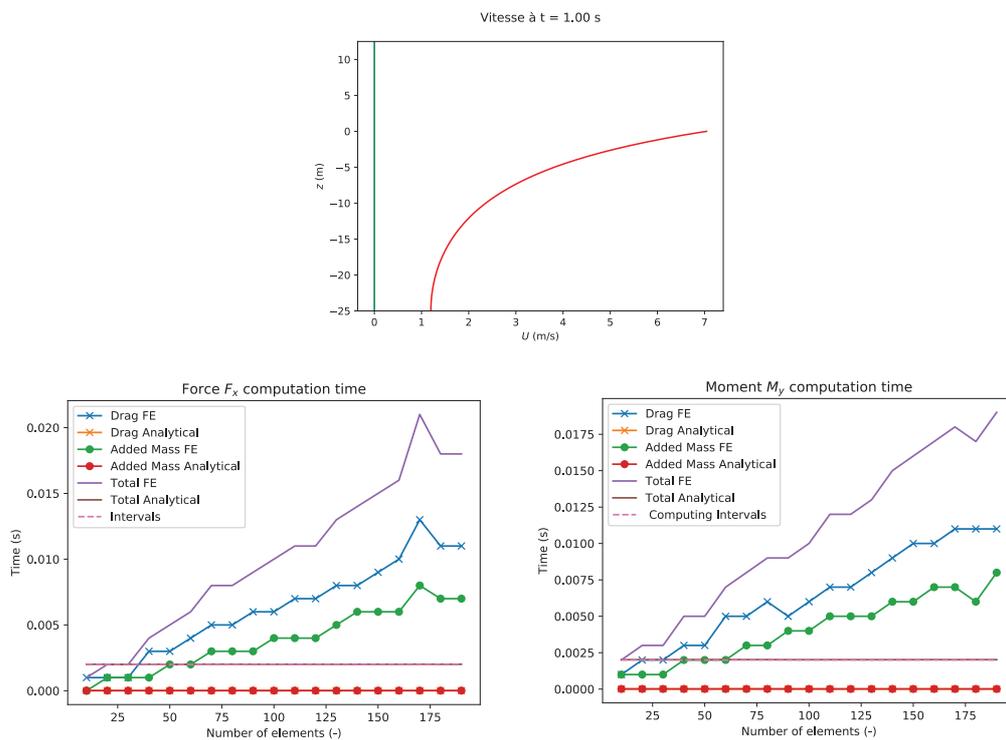


Figure 77 : Evolution du temps de calcul sans annulation de la vitesse de particule

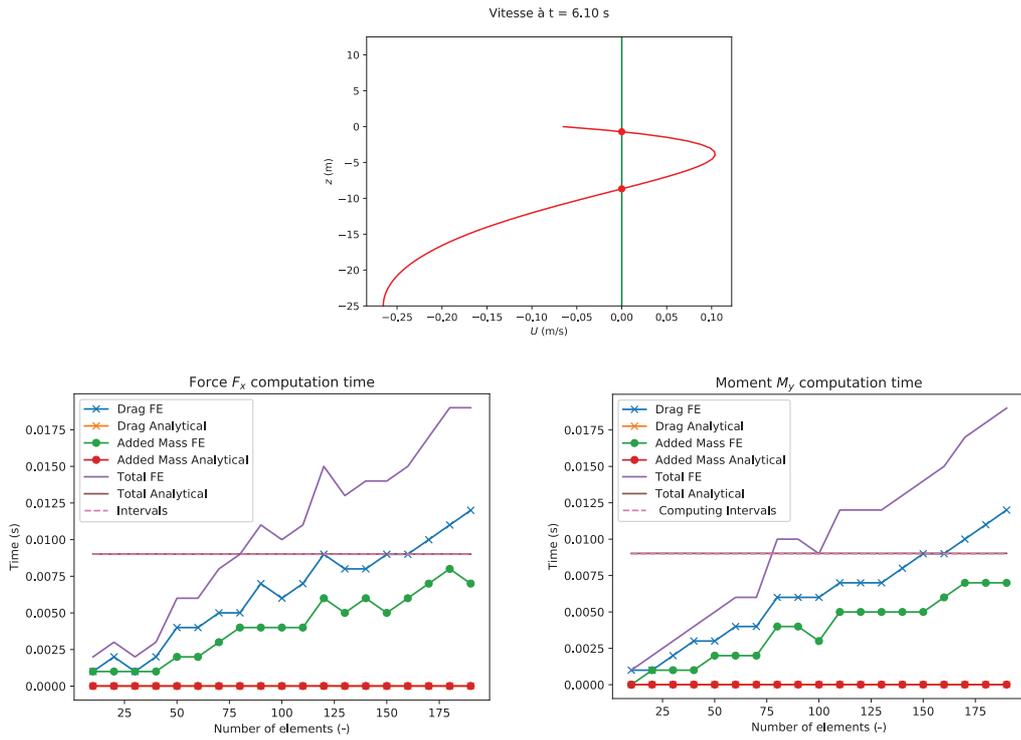


Figure 78 : Evolution du temps de calcul pour plusieurs solutions de vitesse de particule nulle

Annexe C

Développement des équations multi-corps/multi-tir

Annexe C.1 Dépendances des fonctions de contraintes aux inconnues du problème de tir

Cette section a pour but de développer les équations de contraintes \mathbf{C}_{cf_i} et $\mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}$ décrites par (112). Les dépendances (102) à (107) et (109) et (110), nous permettent de développer les termes \mathbf{Y}_{cf_i} , $\bar{\mathbf{Y}}_{cf_i}$, $\mathbf{Y}_{b_j}^{ci\alpha}$, $\mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta}$ et $\bar{\mathbf{Y}}_{b_j}$ dont dépendent \mathbf{C}_{cf_i} et $\mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}$, en fonction des inconnues \mathbf{X}_{ci_i} et \mathbf{X}_{b_j} .

Pour rappel le terme \mathbf{X}_{ci_i} correspond aux inconnues du problème de tir (du Newton) générées par la connexion initiale d'indice ci_i . Le terme \mathbf{X}_{b_j} correspond aux inconnues générées par le corps d'indice b_j . Parmi les éléments de \mathbf{X}_{b_j} nous distinguerons le terme $\mathbf{X}_{b_{ci_i}}$ (respectivement $\mathbf{X}_{b_{cf_i}}$) décrit les inconnues générées par le corps rigide lié à la connexion initiale ci_i (respectivement finale cf_i).

Afin de développer \mathbf{Y}_{cf_i} , $\bar{\mathbf{Y}}_{cf_i}$, $\mathbf{Y}_{b_j}^{ci\alpha}$, $\mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta}$ et $\bar{\mathbf{Y}}_{b_j}$, nous exprimons tout d'abord :

$$\bar{\varphi}_{ci_i} = \bar{\varphi}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right), \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right) \quad (125)$$

$$\mathbf{X}_{cf_i} = \mathbf{X}_{cf_i} \left(\varphi_{cf_i} \left(\bar{\varphi}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right), \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right) \right), \mathbf{X}_{b_{cf_i}} \right) \quad (126)$$

Pour obtenir :

$$\mathbf{Y}_{cf_i} = \mathbf{Y}_{cf_i} \left(\varphi_{cf_i} \left(\bar{\varphi}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right), \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right) \right), \mathbf{X}_{b_{cf_i}} \right) \quad (127)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{cf_i} = \bar{\mathbf{Y}}_{cf_i} \left(\mathbf{X}_{cf_i} \left(\varphi_{cf_i} \left(\bar{\varphi}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \bar{\mathbf{Y}}_{ci_i} \left(\mathbf{X}_{ci_i}, \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right), \mathbf{X}_{b_{ci_i}} \right) \right), \mathbf{X}_{b_{cf_i}} \right), \mathbf{X}_{b_{cf_i}} \right) \quad (128)$$

$$\mathbf{Y}_{b_j}^{ci\alpha} = \mathbf{Y}_{b_j}^{ci\alpha} \left(\bar{\varphi}_{ci_\alpha} \left(\mathbf{X}_{ci_\alpha}, \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\alpha} \left(\mathbf{X}_{ci_\alpha}, \mathbf{X}_{b_j} \right), \mathbf{X}_{b_j} \right), \mathbf{X}_{b_j} \right) \quad (129)$$

$$\mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta} = \mathbf{Y}_{b_j}^{cf\beta} \left(\bar{\varphi}_{cf_\beta} \left(\mathbf{X}_{cf_\beta}, \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}, \mathbf{X}_{b_j} \right), \mathbf{X}_{b_j} \right) \quad (130)$$

Avec \mathbf{X}_{cf_β} et $\bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}$ issus respectivement de (126) et (127). Et enfin :

$$\bar{Y}_{b_j} = \bar{Y}_{b_j}(\mathbf{X}_{b_j}) \quad (131)$$

Annexe C.2 Développement du jacobien de l'équation de contrainte sur les corps

Cette section développe le calcul de la dérivée du terme $\mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}, \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}, \bar{\mathbf{Y}}_{b_j})$ de l'équation (112) par rapport aux inconnues de liaison \mathbf{X}_{ci_α} et de corps \mathbf{X}_{b_j} . Nous distinguerons par \mathbf{X}_{ci_α} les inconnues des connexions initiales (début d'intégration) attachées au corps b_j , par \mathbf{X}_{ci_β} les inconnues des liaisons finales (fin d'intégration) également attachées au corps b_j , et par $\mathbf{X}_{b_{ci_\beta}}$ les inconnues générées par le corps b_{ci_β} auquel sur lequel est attaché la liaison initiale ci_β . Grâce à ces notations nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}} \frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_\alpha}} \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_\alpha}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\alpha}} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_\alpha}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\alpha}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\alpha}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\alpha}} \right) \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\beta}} &= \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}} \frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf_\beta}} \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf_\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cf_\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cf_\beta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_\beta}} \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\beta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\beta}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\beta}} \right) \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} &= \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}}{\partial \bar{\varphi}_{ci_\alpha}} \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_\alpha}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\alpha}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\alpha}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} + \frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{ci_\alpha}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} \right) \\
&+ \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}}{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}} \frac{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}} \frac{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} \right) + \frac{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} \right) \right. \\
&\left. + \frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}} \right) + \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{b_j}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{b_j}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}}
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_{ci_\beta}}} &= \frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}} \frac{\partial \mathbf{Y}_{b_j}^{cf_\beta}}{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \bar{\varphi}_{cf_\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}_{cf_\beta}}{\partial \varphi_{cf_\beta}} \frac{\partial \varphi_{cf_\beta}}{\partial \bar{\varphi}_{ci_\beta}} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_{ci_\beta}}} \right. \\
&\left. + \frac{\partial \bar{\varphi}_{ci_\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\beta}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{ci_\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_{ci_\beta}}} \right)
\end{aligned} \tag{135}$$

Les termes $\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\alpha}}$ et $\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{ci_\beta}}$ sont les dérivées de la contrainte générée par le corps j , respectivement par rapport aux inconnues \mathbf{X}_{ci_α} et \mathbf{X}_{ci_β} des liaisons cinématiques attachées au corps (indices α), et des liaisons cinématiques initiales intégrées via le segment j (indices β).

$\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_j}}$ est la dérivée de la contrainte générée par le corps j par rapport aux inconnues du corps j .

$\frac{\partial \mathbf{C}_{b_j}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{X}_{b_{ci_\beta}}}$ est la dérivée de la contrainte générée par le corps j par rapport aux inconnues du corps b_{ci_β} sur lequel est attachée la contrainte ci_β k lorsque les corps j et b_{ci_β} sont liés au travers d'un segment.

$\frac{\partial \mathbf{c}_{bj}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{ci\alpha}}$ et $\frac{\partial \mathbf{c}_{bj}^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{cf\beta}}$ correspondent aux dérivées de l'équation de contrainte (108) par

rapport à chacun des champs de forces et moments $\mathbf{Y}_{bj}^{ci\alpha}$ et $\mathbf{Y}_{bj}^{cf\beta}$ (correspondant aux champs $\mathbf{n}_{ci/j}$ et $\mathbf{m}_{ci/j}$).

Le terme $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$ est la dérivée de la transformation équivalente à (85) pour le corps rigide, elle permet d'extraire les composantes $\mathbf{n}_{ci/j}$ et $\mathbf{m}_{ci/j}$ de $\boldsymbol{\varphi}$ (changement de base, transport de moment, etc.). Les notations $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{ci\alpha}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci\alpha}}$ et $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{cf\beta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf\beta}}$ indiquent les évaluations de $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{ci\alpha}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$ et $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{cf\beta}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$ tel que $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{ci\alpha}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{ci\alpha}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}(s=0))$ et $\frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{cf\beta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf\beta}} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{bj}^{cf\beta}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}(s=L))$. Avec $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_b), \mathbf{X}_b)$ l'évaluation de $\boldsymbol{\varphi}$ pour les champs inconnus et imposés de la liaison initiale/finale du segment i .

Le terme $\frac{d\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf\beta}}{d\mathbf{X}_{cf\beta}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf\beta}} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{cf\beta}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf\beta}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf\beta}}$ correspond à la dérivée des champs évaluée en $s=L$ par rapport aux inconnues $\mathbf{X}_{cf\beta}$ de la liaison finale. C'est la dérivée de la transformation (106) entre les inconnues de liaison et le vecteur d'état de l'ODE. Si $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_b), \mathbf{X}_b)$ alors il apparaît le terme complémentaire $\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_L}{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf\beta}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}_{cf\beta}}{\partial \mathbf{X}_{cf\beta}}$ représentant la dérivée des champs imposés par rapport aux champs non contraints au niveau de la connexion (changement de base, ressort, liaison hélicoïdale, etc.).

Le terme $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{cfj}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{ci_i}}$ peut être calculé à partir de l'intégration d'un IVP comme présenté en paragraphes 4.2.1 et 4.2.2. Les autres termes dépendent pour la plupart des types de conditions aux limites et peuvent se calculer soit analytiquement par la formalisation des relations (102) à (104), soit numériquement.

Annexe D

Résolution des exemples en fil caténaire

Annexe D.1 Equation de la statique des caténaires

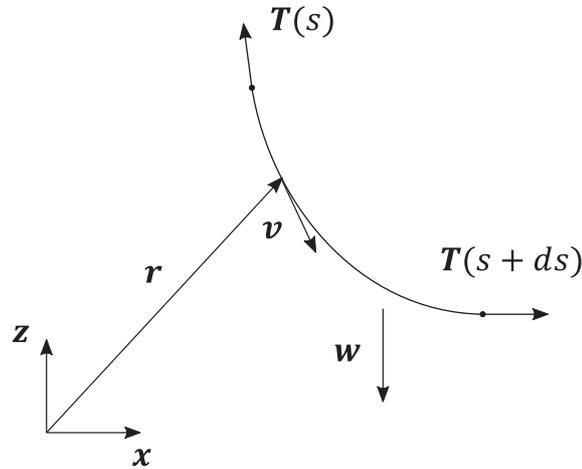


Figure 79 : Equilibre d'un tronçon caténaire

La résolution de la caténaire d'un fil élastique suit un processus de résolution d'équations algébrique [36] qui est rappelé ici. Soit une ligne de longueur non déformée L suivant une cinématique de fil et soumise uniquement à son poids. Nous notons $\mathbf{r}(s) = [x(s), z(s)]^T$ la position d'une section matérielle et $\mathbf{T}(s) = [H(s), V(s)]^T$ le vecteur tension. De plus nous notons les valeurs aux extrémités par :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s = 0) &= [x_0, z_0]^T \\ \mathbf{T}(s = 0) &= [H_0, V_0]^T \\ \mathbf{r}(s = L) &= [x_L, z_L]^T \\ \mathbf{T}(s = L) &= [V_L, V_L]^T \end{aligned}$$

Nous introduisons $w = gA\rho$, avec g l'accélération de gravité, A l'aire de la section matériau et ρ le masse volumique (du matériau ρ_{mat} ou relative à la masse d'un fluide $(\rho_{mat} - \rho_{fluid})$). Dans ce cas, le bilan des efforts sur le câble s'écrit :

$$\mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s) - w\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}(s)}{\partial s} - w\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Soit $\partial_s \mathbf{r}(s) = \mathbf{v}(s) = \left[\frac{\partial x(s)}{\partial s}, \frac{\partial z(s)}{\partial s} \right]^T$ le vecteur tangent à la courbe et $v(s) = |\mathbf{v}(s)| = \sqrt{\frac{\partial x(s)^2}{\partial s} + \frac{\partial z(s)^2}{\partial s}}$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T(s) \frac{\mathbf{v}(s)}{v(s)} \right) - w\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Soit en projetant sur les axes \mathbf{x} et \mathbf{z} :

$$\begin{cases} \frac{\partial H(s)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T(s) \frac{1}{v(s)} \frac{\partial x(s)}{\partial s} \right) = 0 \\ \frac{\partial V(s)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T(s) \frac{1}{v(s)} \frac{\partial z(s)}{\partial s} \right) = w \end{cases} \quad (136)$$

Si l'on considère les conditions aux limites en tension $\mathbf{T}(s=0) \cdot \mathbf{x} = H_0$ et $\mathbf{T}(s=0) \cdot \mathbf{z} = V_0$ il vient :

$$\begin{cases} H(s) = H_0 \\ V(s) = V_0 + ws \end{cases} \quad (137)$$

$$\begin{cases} T(s) \frac{\partial x(s)}{\partial s} = H_0 v(s) \\ T(s) \frac{\partial z(s)}{\partial s} = (V_0 + ws) v(s) \end{cases}$$

En utilisant les deux dernières équations il vient :

$$T(s) = \sqrt{H_0^2 + (V_0 + ws)^2}$$

La loi matériau nous donne également :

$$T(s) = EA(v(s) - 1)$$

Soit :

$$v(s) = 1 + \frac{T(s)}{EA}$$

Ainsi en remplaçant $T(s)$ et $v(s)$ par leurs expressions nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} T(s) \frac{\partial x(s)}{\partial s} = H_0 v(s) \\ T(s) \frac{\partial z(s)}{\partial s} = (V_0 + ws) v(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x(s)}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_0 + ws}{H_0}\right)^2}} + \frac{H_0}{EA} \\ \frac{\partial z(s)}{\partial s} = \frac{(V_0 + ws)}{\sqrt{H_0^2 + (V_0 + ws)^2}} + \frac{(V_0 + ws)}{EA} \end{cases}$$

Leur intégration donne :

$$\begin{cases} x(s) = \frac{H_0}{w} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V_0 + ws}{H_0} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V_0}{H_0} \right) \right] + \frac{H_0 s}{EA} + x_0 \\ z(s) = \frac{H_0}{w} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V_0 + ws}{H_0} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{H_0} \right)^2} \right] + \frac{ws}{EA} \left(\frac{V_0}{w} - \frac{s}{2} \right) + z_0 \end{cases} \quad (138)$$

Afin d'obtenir (137) et (138) nous avons utilisé les conditions aux limites en $s = 0$ uniquement. En évaluant ces équations en $s = L$ nous obtenons :

$$x_L = \frac{H_0}{w} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V_0 + wL}{H_0} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V_0}{H_0} \right) \right] + \frac{H_0 L}{EA} + x_0 \quad (139)$$

$$z_L = \frac{H_0}{w} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V_0 + wL}{H_0} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{H_0} \right)^2} \right] + \frac{wL}{EA} \left(\frac{V_0}{w} - \frac{L}{2} \right) + z_0 \quad (140)$$

$$H_L = H_0 \quad (141)$$

$$V_L = V_0 + wL \quad (142)$$

Le système (139) à (142) est le résultat de l'intégration analytique du système différentiel régissant la statique d'un fil sous son poids. Il constitue un système d'équations algébriques à résoudre. Les conditions aux limites en $s = 0$ et $s = L$ nous fourniront un quadruplet parmi les valeurs de $x_0, z_0, x_L, z_L, H_0, V_0, H_L$ et V_L . Par exemple pour l'étude d'une ligne d'ancrage les positions des extrémités seront données et les efforts seront à déterminer. Dans le cas d'un effort imposé en $s = L$, les paramètres x_0, z_0, H_L et V_L seront fournis permettant d'écrire les contraintes en fonction des inconnues x_L, z_L, H_0 et V_0 .

Nous pouvons faire un parallèle entre la méthode de tir et les équations caténales pour lequel dans ce dernier, les équations (139) à (142) sont le résultat de l'intégration de l'ODE intégrées analytiquement. En fonction des conditions aux limites, il faudra ensuite résoudre le système d'équation algébrique (139) à (142) au travers d'un

algorithme de Newton par exemple. Ce processus de résolution pour les caténares n'est possible que grâce à la forme de l'équation différentielle issue des équations d'équilibre qui ne tiennent compte que de la gravité comme effort extérieur. L'intégration analytique des efforts ne sera pas possible avec un effort de courant par exemple [64,65].

Annexe D.2 Exemple n°2 : Equations de contraintes

Les champs contraints par les liaisons cinématiques étudiées pour les cas (a) rotule, (b) effort imposé, (c) prismatique, (e) ressort linéaire, (f) ressort linéaire + liaison prismatique sont référencés en Table 6. Les contraintes associées utilisées dans le processus de résolution caténaire de l'Annexe D.1 sont les suivants :

Liaison	Equation de contrainte
(a)	$\left. \begin{array}{l} x(s=L) - x_L \\ z(s=L) - z_L \end{array} \right\} = \mathbf{0}$
(b)	$\left. \begin{array}{l} n_x(s=L) - F_x \\ n_z(s=L) - F_z \end{array} \right\} = \mathbf{0}$
(c)	$\left. \begin{array}{l} n_x(s=L) - F_x \\ z(s=L) - z_L \end{array} \right\} = \mathbf{0}$
(e)	$\left. \begin{array}{l} n_x(s=L) - k(a_x - x(s=L)) \\ n_z(s=L) - k(a_z - z(s=L)) \end{array} \right\} = \mathbf{0}$
(f)	$\left. \begin{array}{l} n_x(s=L) - k(a_x - x(s=L)) \\ z(s=L) - z_L \end{array} \right\} = \mathbf{0}$

Où x_L et z_L sont les coordonnées du point final, F_x et F_z les composantes de l'effort final, k la raideur du ressort considéré et a_x et a_z les coordonnées de son point de référence.

Annexe D.3 Exemple n°4 : Equations de contraintes

La résolution du cas à trois brins considère les équations caténares développées en Annexe D.1. Les équations (137) et (138) sont écrites pour chaque brin, exprimées dans des bases locales $\{x_i, y_i, z\}$ (Figure 52).

Le cas à trois brins considère trois segments dont les ancres sont uniformément distribuées sur un cercle de rayon R selon un angle constant de $\psi = \frac{2\pi}{3}$. Les ancres sont positionnées à une altitude nulle.

Dans la même logique de résolution des équations caténares au travers d'un système d'équation algébrique, les inconnues du problème sont au nombre de 9 : α_i , $H_L^{(i)}$, $V_L^{(i)}$ dont les équations de contrainte sont les suivantes :

$$0 = \begin{cases} x^{(2)}(L)\cos(\alpha_2) - x^{(1)}(L)\cos(\alpha_1) - R(\cos(\psi_2) + \cos(\psi_1)) \\ x^{(2)}(L)\sin(\alpha_2) - x^{(1)}(L)\sin(\alpha_1) - R(\sin(\psi_2) + \sin(\psi_1)) \\ z^{(2)}(L) - z^{(1)}(L) \\ x^{(3)}(L)\cos(\alpha_3) - x^{(2)}(L)\cos(\alpha_2) - R(\cos(\psi_3) + \cos(\psi_2)) \\ x^{(3)}(L)\sin(\alpha_3) - x^{(2)}(L)\sin(\alpha_2) - R(\sin(\psi_3) + \sin(\psi_2)) \\ z^{(3)}(L) - z^{(2)}(L) \\ \sum_{i=1}^3 H_L^{(i)} \cos(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^3 H_L^{(i)} \sin(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^3 V_L^{(i)} - F_b \end{cases} \quad (143)$$

Où α_i est décrit en Figure 52, et $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\psi_i = (i - 1) \frac{2\pi}{3}$. Il s'agit ici de résoudre un système 9x9 dépendant des paramètres α_i , $V_a^{(i)}$ et $H_a^{(i)}$. Un algorithme de Newton est utilisé pour résoudre ce système.

Annexe E

Solutions de RDM

Annexe E.1 Effort linéique triangulaire

Cette annexe décrit la solution analytique issue de la RDM [84] du cas d'une poutre simple soumise à un effort linéique triangulaire. La solution pour l'effort de cisaillement V , le moment fléchissant M et la flèche v sont donnés à une abscisse curviligne donnée x par (en restant dans les hypothèse de la RDM de petites déformations et petits déplacement, abscisse curviligne et axe x se confondent) :

$$V(x) = -\frac{P}{4L}(L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq a \quad (144)$$

$$M(x) = \frac{Px}{4L}(L^2 - 4x^2)$$

$$v(x) = -\frac{Px}{960LEI}(5L^2 - 4x^2)^2$$

$$V(x) = -\frac{P}{4L}(2x - 3L)(2x - L) \quad a \leq x \leq L$$

$$M(x) = \frac{Px}{12L}(x - L)(4x^2 - 8Lx + L^2)$$

$$v(x) = \frac{P}{960LEI}(x - L)(4x^2 - 8Lx - L^2)^2$$

Annexe E.2 Poutre avec changement d'inertie

Cette annexe décrit la solution analytique issue de la RDM [84] du cas d'une poutre avec changement de l'inertie en son milieu soumise à un effort concentré en son milieu. La solution pour l'effort de cisaillement V , le moment fléchissant M et la flèche v sont donnés à une abscisse curviligne donnée x par (en restant dans les hypothèse de la RDM de petites déformations et petits déplacement, abscisse curviligne et axe x se confondent) :

$$V(x) = \frac{P}{2} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (145)$$

$$M(x) = \frac{Px}{2}$$

$$v(x) = -\frac{Px}{384EI} (15L^2 - 32x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{4}$$

$$v(x) = -\frac{P}{768EI} (L^3 + 24L^2x - 32x^3) \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$V(x) = -\frac{P}{2} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$M(x) = \frac{P}{2} (L - x)$$

$$v(x) = -\frac{P}{768EI} (-7L^3 + 72L^2x - 96Lx^2 + 32x^3) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq \frac{3L}{4}$$

$$v(x) = -\frac{P}{384EI} (L - x)(-17L^2 + 64Lx - 32x^2) \quad \frac{3L}{4} \leq x \leq L$$

Annexe E.3 Portique en T

Cette annexe décrit la solution analytique issue de la RDM [84] du cas d'un portique en T. Ce cas est supposé indéformable et nous ne regardons que les répartitions d'efforts dans les poutres. La solution pour l'effort de cisaillement V , le moment fléchissant M et l'effort de traction N sont donnés à une abscisse curviligne locale (par segment) donnée x par :

Les réactions aux supports sont :

$$D_x = \frac{8}{5}P \quad (146)$$

$$D_y = \frac{M_0}{L} + \frac{1}{3}q_0L + \frac{1}{10}P$$

$$A_y = -\frac{M_0}{L} + \frac{1}{6}q_0L + \frac{7}{10}P$$

Sur le segment AB :

$$N(x) = 0 \quad (147)$$

$$V(x) = A_y - \frac{q_0 x^2}{2L}$$

$$M(x) = M_0 + A_y x - \frac{q_0 x^3}{6L}$$

Sur le segment BC :

$$N(x) = -\frac{3}{5}P \quad (148)$$

$$V(x) = \frac{4}{5}P$$

$$M(x) = -\frac{4}{5}P \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

Sur le segment DB :

$$N(x) = -D_y \quad 0 \leq x \leq L \quad (149)$$

$$V(x) = -D_x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M(x) = -D_x x$$

$$V(x) = P - D_x \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$M(x) = -D_x x + P \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

Titre : Entre normes et réalité industrielle : apports sur la simulation numérique en éolien offshore

Mots clés : méthode IFORM, réponse extrême, méthode de tir, statique des fils et poutres

Résumé : Afin de répondre aux exigences de cas de chargement des standards tout en tenant compte des procédés de calcul industriels, cette thèse de doctorat porte sur l'amélioration des méthodes et modèles de simulation numérique en éolien offshore. Deux axes sont étudiés. Le premier consiste en la définition d'une méthodologie basée sur la méthode IFORM pour l'étude des efforts extrêmes au niveau des fondations d'un mât d'éolienne, afin de faire le lien entre les variables aléatoires caractérisant l'environnement et des calculs CFD coûteux numériquement. Les résultats obtenus avec la méthode IFORM sur un modèle non-linéaire analytique de cylindre sur houle irrégulière sont comparés à une approche de Monte-Carlo, une approche par intégration de la surface statistique et une approche réglementaire. Nous montrons que la méthode IFORM permet d'identifier des environnements conduisant à la réponse extrême à simuler en CFD, environnements qui ne sont pas nécessairement ceux maximisant l'une des variables aléatoires.

Le second axe porte sur l'extension de la méthode de tir simple à un contexte multi-corps, pour la simulation de corps élançés statiques (ancrages, pales). Le but sous-jacent est de proposer une méthode efficace en termes de temps de calcul pour la simulation globale d'éoliennes offshore. La méthode de tir consiste à transformer le problème aux limites en la résolution d'une fonction de contrainte évaluée par des intégrations continues successives du problème différentiel. Ce travail propose un formalisme du problème de tir simple commun aux cinématiques de fils et poutres et dérive dans ce formalisme l'ensemble des conditions aux limites pour chaque cinématique. Nous nous intéressons ensuite à la modélisation des discontinuités géométriques et matériaux grâce à la méthode de tir multiple. Enfin, nous étendons les approches précédentes à une méthode multi-tir/multi-corps pour l'étude des assemblages de corps élançés extrêmement présents en éolien. Les différentes extensions développées dans ce travail montrent de très bonnes correspondances avec des exemples issus de la littérature.

Title : On the edge between standards and industrial reality: contributions on numerical simulation for offshore wind turbines

Keywords : IFORM, extreme response, shooting method, statics of strings and beams

Abstract: In order to meet the requirements of load cases defined in standards while taking into account actual industrial calculation methods, this PhD thesis focuses on the improvement of two axes regarding numerical simulation methods and models used to simulate offshore wind turbines. The first one consists in the definition of a methodology based on IFORM method to study the extreme loads at the foundations of fixed offshore wind turbines, in order to fulfil the gap between a description of the environment through random variables and computational expensive CFD simulations. IFORM method is applied on an analytical nonlinear model of a cylinder subject to irregular swell and results are compared to Monte Carlo, stochastic surface response and standard approaches. We show that IFORM method identifies environments leading to the extreme response that need to be simulated in CFD, while these environments are not necessarily those maximizing one of the random variables.

The second shooting axe focuses on the extension of the simple shooting method to a multi-body framework, suitable for the simulation of slender structures. The final aim of this work is to improve the computational efficiency of global offshore wind turbine simulations. The shooting method consists in transforming the two point boundary value problem into the root search of a constraint function evaluated through successive, continuous, integrations of the differential problem. The present work proposes a new formalism for the single shooting equations in order to simulate both strings and beams. All sets of boundary condition for each kinematics are then derived in this formalism. Then, we propose an approach based on the multiple shooting method to handle geometrical and material sectional discontinuities. Finally, this last approach is extended to what we call the multi-shooting/multi-body method for the study of slender body assemblies. The different proposed extensions show very good agreement with examples taken from the literature.