



**HAL**  
open science

# Modèles de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la condition d'impédance. Application au problème inverse

Simon Loillier

► **To cite this version:**

Simon Loillier. Modèles de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la condition d'impédance. Application au problème inverse. Electromagnétisme. INSA de Rennes, 2019. Français. NNT : 2019ISAR0031 . tel-04582191

**HAL Id: tel-04582191**

**<https://theses.hal.science/tel-04582191>**

Submitted on 21 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'INSA RENNES

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Electronique*

Par

**Simon LOILLIER**

**Modèles de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la condition d'impédance. Application au problème inverse.**

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 07/10/2019

Unité de recherche : IETR

Thèse N° : 19ISAR 13 / D19 - 13

## Rapporteurs avant soutenance :

Amélie LITMAN, Maître de conférences HdR, Aix-Marseille  
David LAUTRU, Professeur des Universités, Paris Nanterre

## Composition du Jury :

Marc HELIER, Professeur des Universités, Sorbonne  
(Président)

Amélie LITMAN, Maître de conférences HdR, Aix-Marseille

David LAUTRU, Professeur des Universités, Paris Nanterre

Philippe POULIGUEN, Docteur HdR, DGA-MI

Renaud LOISON, Professeur des Universités, INSA-Rennes

Stephane MERIC, Maître de conférences HdR, INSA-Rennes

(Directeur de thèse)

## Invité

Geneviève MAZE-MERCEUR, Docteur HdR, CEA-CESTA

**Intitulé de la thèse :**

Modèles de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la condition d'impédance. Application au problème inverse.

**Simon LOILLIER**

**En partenariat avec :**

--	--	--	--	--

*Document protégé par les droits d'auteur*





## RESUME

Ces travaux s'inscrivent dans l'objectif de déterminer les variations de la distribution spatiale de propriétés électromagnétiques des matériaux expliquant l'écart entre la mesure de l'onde électromagnétique réfléchie par l'objet fabriqué et le calcul de l'onde électromagnétique réfléchie par l'objet conçu (la maquette numérique). Ces variations étant considérées faibles, le problème de CND (contrôle non destructif) est adressé dans un cadre perturbatif. Notre travail consiste alors à proposer des modèles théoriques permettant d'estimer la sensibilité du champ électromagnétique aux points de mesure à des variations de propriétés électromagnétiques des matériaux sur l'objet.

Nous proposons alors deux approches répondantes à des modèles d'interaction onde-matière différents.

La première est originale et permet d'évaluer la sensibilité du champ électrique aux points de mesure à des variations d'impédance surfacique de type Léontovich.

La seconde permet d'évaluer la sensibilité du champ électrique aux points de mesure à des variations de permittivité et de perméabilité. Elle consiste en une extension d'une méthode existante (Volumetric Perturbative Reciprocal Theory, ou VPRT) à des matériaux magnétiques.

En ne conservant que le premier ordre, nous obtenons des modèles linéaires dont nous montrons la capacité à résoudre le problème inverse considéré : dans une configuration canonique et à partir de mesures simulées nous déterminons la distribution de permittivité, de perméabilité et d'impédance surfacique équivalente.

Les perspectives et les applications de ces travaux sont bien plus étendues que pour la résolution du problème initialement adressé. Les modèles perturbatifs trouvent en effet naturellement leur place en propagation d'incertitudes, en optimisation, comme outil d'aide à la conception ou d'aide à la détermination de l'élément critique d'un système de mesure.



# REMERCIEMENTS

Depuis mon arrivée au CESTA jusqu'à l'aboutissement de ce travail, de nombreuses personnes ont contribué. Je commencerais par remercier Jacques qui m'a fait découvrir le CEA CESTA à travers la rentrée atmosphérique puis Denis et Fabrice pour avoir fait le pari de m'ouvrir les portes du laboratoire de furtivité. Ma gratitude va ensuite à G. Mazé-Merceur, R. Loison, S. Meric et P. Pouliguen pour avoir suivi ces travaux et contenu la curiosité scientifique qui m'anime afin (bien que ne représentant qu'une fraction des sujets qui m'ont animés) de présenter des recherches bornées.

Je remercie M. Helier de m'avoir fait l'honneur de présider le jury et A. Litman pour son avis et ses remarques sur ce manuscrit. Je remercie les relecteurs, Renaud, Stéphane, Geneviève, Sylvain, Paula, Lucile, Ludivine pour les corrections tant scientifiques qu'orthographiques.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des membres du laboratoire de furtivité, en particulier mon voisin de bureau depuis plus de quatre ans, Sylvain, pour sa capacité à nourrir et faire grandir ma curiosité, pour continuer de faire des sciences une passion. Je tiens à souligner le plaisir que j'ai à travailler avec lui mais aussi avec Pascal, Paula et Bruno.

Paula, merci de ta considération, pour ton aide, ta joie, ton enthousiasme, ta persévérance, pour le pain au levain, les histoires d'alpagas etc...

Pascal, merci pour ton soucis de l'élégance mathématique, ta justesse scientifique et pour les sessions jazz.

Bruno, merci pour ta franchise, ta rigueur, pour ta bonne humeur et ton bouquin d'intégrales.

Merci à Pierre et Agnès sans qui la mise en œuvre numérique aurait été encore plus laborieuse, à Francis et Daniel pour leurs lumières si précieuses, à Richard pour sa contribution à cet article sur les « n-complex », à Florent pour son aide ponctuelle sur les calculs analytiques et merci à Guillaume de donner une perspective de suite à ces travaux.

Je remercie aussi l'ensemble de ceux qui ont fait en sorte que ces années se déroulent dans de bonnes conditions : Lucile, Laurence, Christelle, Axelle, Christine, Hervé.

Je tiens à remercier aussi les musiciens du CESTA en particulier Studio Alco et Ludivine que je considère avec beaucoup d'amitié mais aussi Pascal, Aymeric, Phillippe<sup>2</sup>, Thomas, Olivier etc...

Enfin, merci à ma famille et mes amis en particulier Rachel d'être rentrée d'Irlande pour assister à la soutenance, Ben et Loic pour être venus me soutenir jusqu'à Rennes. Ben, merci pour ces 25 années d'amitié et merci de me loger dans ce chalet de rêve lorsque je suis SDF.



# INTRODUCTION

## L'électromagnétisme

**L'électromagnétisme est une branche de la physique qui étudie les interactions entre particules chargées électriquement.** Son domaine d'application est considérable. Outre l'électricité, l'électromagnétisme permet de comprendre l'existence aussi bien des ondes radio que de la lumière, des micro-ondes que du rayonnement gamma. Ainsi dans son article de 1864, « *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* », Maxwell écrit : « *L'accord des résultats semble montrer que la lumière et le magnétisme sont deux phénomènes de même nature et que la lumière est une perturbation électromagnétique se propageant dans l'espace suivant les lois de l'électromagnétisme* ». L'interaction électromagnétique constitue une des quatre interactions fondamentales ; elle permet de comprendre (avec la mécanique quantique) l'existence, la cohésion et la stabilité des édifices chimiques tels que les atomes ou les molécules.

## La permittivité, la perméabilité et la condition d'impédance

Les équations de Maxwell expriment la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu. Elles constituent un modèle de propagation. Pour expliquer comment une onde se propage dans un matériau, il faut y ajouter un modèle d'interaction onde-matière.

Les propriétés des matériaux qui expriment l'interaction onde-matière dans un milieu peuvent se résumer à **la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique**. Ce sont des quantités volumiques qui **expriment la capacité de réponse du matériau au champ magnétique (respectivement au champ électrique)**.

Pour simplifier le modèle de propagation électromagnétique au sein d'un matériau, le concept d'impédance surfacique est initialement introduit par Rytov [1] et Léontovich [2] dans les années 1940. Un tel modèle réduit l'interaction onde-matière dans tout le volume de matière à une condition équivalente à l'interface entre les matériaux. **La condition d'impédance surfacique de Léontovich modélise à elle seule la capacité de réponse électrique et magnétique d'une épaisseur de matières**. Aujourd'hui, ce modèle dispose d'une notoriété excellente dans le monde industriel. Sa simplicité lui permet en particulier d'évaluer à moindre coût et avec une précision suffisante, la signature radar de grands objets (avions, éoliennes, immeubles etc...).

## Le problème inverse en matériaux

Les applications de l'électromagnétisme sont conséquentes : les télécommunications, la détection radar, l'électronique, l'imagerie médicale... Dans le cadre de ces travaux, nous nous intéressons à du contrôle non-destructif : nous souhaitons caractériser l'état d'intégrité électromagnétique des matériaux constitutifs d'un objet sans dégrader ni les matériaux, ni l'objet.

Lors de tests non-destructifs, les objets sont souvent bien connus : ils ont été pré-dimensionnés numériquement, le modèle CAO (conception assistée par ordinateur) est disponible et les propriétés électromagnétiques des matériaux peuvent être estimées à partir de mesures d'échantillons. Cependant, l'objet construit comporte inéluctablement de nombreuses petites différences avec l'objet « numérique » inhérentes au processus de fabrication. La qualité garantie que les tolérances

fixées lors de la conception sont respectées lors de la fabrication ou au moins, qu'elles ne mettent pas en défaut le cahier des charges. Dans la pratique, certaines tolérances ne sont pas vérifiables : il est en particulier difficile de qualifier les propriétés des matériaux en tous points.

**Ainsi le problème consiste à retrouver en tous points, les écarts des propriétés électromagnétiques des matériaux entre l'objet conçu et l'objet fabriqué.** C'est un *problème inverse* puisqu'il consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Il est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets à partir des causes connues. **Dans notre cas, il s'agit d'un problème inverse en matériaux puisque les inconnues sont des propriétés matériaux. Ces inconnues étant des petites variations autour d'un cas de référence bien déterminé (la maquette CAO), le problème inverse est abordé dans un cadre perturbatif.**

### Les modèles perturbatifs

**Les modèles perturbatifs sont des représentations de l'influence de variations faibles des arguments sur la fonction autour d'un état d'équilibre.** En mécanique des milieux continus, l'hypothèse conduisant à ces modèles est connue sous la dénomination « HPP » : l'Hypothèse des Petites Perturbations. Cette hypothèse permet d'envisager une linéarisation des équations décrivant l'état, ce qui simplifie à la fois l'analyse théorique et le traitement numérique. Dans ce procédé, seul les premiers ordres du développement de Taylor (autour des valeurs d'équilibre) sont conservés, ce qui est légitimé par l'HPP. En électromagnétisme, cette hypothèse est utilisée pour linéariser les relations de constitution des matériaux. Bien que la plupart des matériaux aient des comportements non linéaires lorsqu'ils sont soumis à une excitation électromagnétique, leurs comportements peuvent être décrits par des relations linéaires lorsque les champs sont suffisamment faibles.

Lorsque l'ingénieur cherche à observer l'influence d'une modification, il réalise une étude de sensibilité. Et si la modification est suffisamment faible, une étude de sensibilité peut être réalisée par des modèles perturbatifs : les lourdes étapes de simulation du système complet sur lequel seules de petites modifications ont été apportées sont remplacées par un modèle plus simple. Cela permet au minimum une économie de temps, de ressources et permet d'explorer un domaine plus étendu mais constitue parfois la seule façon d'étudier le problème.

### Organisation du document

Ce document est alors organisé de la façon suivante. La première partie intitulée « **Contexte** » a pour objectif de présenter tout d'abord le contexte « entreprise », c'est-à-dire les objectifs, les moyens et les hypothèses puis, le contexte bibliographique, c'est-à-dire l'état de l'art sur le problème inverse et les modèles perturbatifs. La seconde partie (« **Modélisation** ») regroupe deux chapitres, chacun présentant des modèles théoriques permettant d'estimer la sensibilité du champ électromagnétique aux points de mesure à des variations de propriétés électromagnétiques des matériaux sur l'objet. La première consiste en une extension d'une méthode trouvée dans la littérature (Volumetric Perturbative Reciprocal Theory, ou VPRT) à des matériaux magnétiques. La seconde est originale et permet d'évaluer la sensibilité du champ électrique aux points de mesure à des variations d'impédance surfacique de type Léontovich. La partie « **Domaine de validité** » s'attache à expliciter et développer, d'un point de vue formel, les hypothèses constitutives des modèles proposés. La dernière partie s'intitule « **Application** » et a pour objectif d'illustrer les capacités des modèles précédemment établis à résoudre le problème inverse en matériaux. Une **Conclusion générale**

résume les principaux résultats en proposant une prise de recul, des critiques et des perspectives. En particulier, dans le cadre d'un modèle d'interaction onde-matière surfacique, nous proposons d'étendre l'approche perturbative à l'ensemble des paramètres : position de la source électromagnétique, de l'antenne de réception, support de la distribution de matériaux etc. Cela constitue alors un moyen riche et complet de résolution du problème inverse perturbatif multi-paramètres mais aussi de caractérisation de bancs de mesures électromagnétiques en espace libre, de propagation d'incertitudes et, comme tous modèles de sensibilité, trouvent des applications en optimisation et comme outil d'aide à la conception.

L'utilisateur trouvera encadré, les principaux résultats de ces travaux. Pour le modèle de sensibilité à la permittivité et la perméabilité, les formules D.28, D.30, D.31, D.47, D.49 et D.52 constituent les résultats théoriques majeurs. Pour le modèle de sensibilité à l'impédance surfacique de Léontovich, les formules E.10 et E.29 (avec E.30, E.31, E.32, E.33, E.34, E.35, E.36 et E.37 en fonction des situations) constituent l'essentiel.





# CONTENU

---

<b>RESUME</b>	<b>2</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>4</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>6</b>
<b>PARTIE I : CONTEXTE</b>	<b>14</b>
<b>A. CONTEXTE « ENTREPRISE »</b>	<b>19</b>
I. Objectifs initiaux/Contexte	19
II. Résumé du contexte avant hypothèses	27
III. Hypothèses et données initiales	29
IV. Résumé du contexte après hypothèses	30
V. Du problème inverse aux modèles perturbatifs	32
VI. Des propriétés matériaux à la condition d'impédance : modèles d'interaction onde/matière	33
VII. Conclusion	35
<b>B. CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>37</b>
I. Le problème inverse en électromagnétisme	37
II. Modèles électromagnétiques perturbatifs en matériaux	46
III. Conclusion	47
<b>C. CONCLUSION</b>	<b>48</b>
I. Contribution de la thèse	48
II. Démarche	49
III. Déroulement-Plan du document	50
<b>PARTIE II : MODELISATION</b>	<b>53</b>

<b>D. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE</b>	<b>57</b>
I. Le problème direct : propagation électromagnétique en milieu magnéto-diélectrique inhomogène	59
II. Sensibilité du problème direct : extension de la « Volumetric Perturbative Reciprocal Theory »	63
III. Conclusion	81
<b>E. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE</b>	<b>83</b>
I. Le problème direct : le rayonnement des courants électromagnétiques surfaciques	85
II. Sensibilité du problème direct : sensibilité du champ électrique rétrodiffusé à l'impédance de surface de Leontovich	88
III. Conclusion	97
<b>PARTIE III : DOMAINE DE VALIDITE</b>	<b>100</b>
<b>F. MOTIVATION</b>	<b>104</b>
<b>G. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE (VPRT)</b>	<b>108</b>
I. Modèle exact	108
II. Premier ordre	108
III. Second ordre	111
IV. Cas monostatique	112
V. Distribution axisymétrique	112
VI. Propriétés matériaux orthotropes et isotropes	113
VII. étude numérique de l'erreur sur un exemple axisymétrique	113
VIII. Conclusion partielle	117
<b>H. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE</b>	<b>120</b>
I. Hypothèse « petites perturbations »	120
II. Influence du modèle en impédance de Léontovich	125
III. Influence du modèle d'optique physique	126
IV. Modèle hybride	129

V. Modèle champ lointain	130
VI. Modèle « Born en impédance »	131
VII. Conclusion partielle	132
<b>PARTIE IV : APPLICATION</b>	<b>135</b>
<b>I. UN EXEMPLE D'APPLICATION AU PROBLEME INVERSE EN MATERIAUX</b>	<b>139</b>
I. Présentation du cas de référence	140
II. Démarche	141
III. Evaluation de la sensibilité	142
IV. Présentation de la mesure simulée	149
V. Résolution du problème inverse linéaire axisymétrique	151
VI. Conclusion	168
<b>CONCLUSION GENERALE : RESUME, CRITIQUES ET PERSPECTIVES</b>	<b>171</b>
Résumé des conclusions partielles	171
Critiques et Perspectives	173
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>181</b>



# **PARTIE I : CONTEXTE**



<b>PARTIE I : CONTEXTE</b>	<b>14</b>
<b>A. CONTEXTE « ENTREPRISE »</b>	<b>19</b>
<b>I. Objectifs initiaux/Contexte</b>	<b>19</b>
1. Phase de dessin	20
2. Phase de test numérique	21
3. Phase de fabrication	25
4. Phase de test expérimental	26
5. Phase de comparaison calcul-mesure	27
<b>II. Résumé du contexte avant hypothèses</b>	<b>27</b>
<b>III. Hypothèses et données initiales</b>	<b>29</b>
<b>IV. Résumé du contexte après hypothèses</b>	<b>30</b>
<b>V. Du problème inverse aux modèles perturbatifs</b>	<b>32</b>
<b>VI. Des propriétés matériaux à la condition d'impédance : modèles d'interaction onde/matière</b>	<b>33</b>
<b>VII. Conclusion</b>	<b>35</b>
<b>B. CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>37</b>
<b>I. Le problème inverse en électromagnétisme</b>	<b>37</b>
1. Généralités	37
2. L'inversion directe : les modèles de propagation rectiligne	38
3. Le problème inverse en géométrie	39
4. Le problème inverse en matériaux	40
Le contrôle destructif	40
Le contrôle non destructif	40
En « caractérisation des matériaux » :	41
En « problème inverse en matériaux » :	41
Caractéristiques volumiques :	41
Caractéristiques surfaciques :	42
5. Le problème inverse en géométrie et matériaux	42
6. Approximations : Linéarisations	43
Méthodes non itératives	43
Born	43
Rytov	44
Marks	44
Méthodes itératives	45
Méthode de Born inverse itérative (BIM) :	45
Méthode de Born distordue inverse itérative (DBIM) :	45
Méthode de Born distordue inverse itérative modifiée (MDBI) :	45
Méthode de Born distordue inverse itérative multi-fréquences :	45
<b>II. Modèles électromagnétiques perturbatifs en matériaux</b>	<b>46</b>

1. Méthodes mathématiques	46
2. Modèles Physiques	46
<b>III. Conclusion</b>	<b>47</b>
<b>C. CONCLUSION</b>	<b>48</b>
<b>I. Contribution de la thèse</b>	<b>48</b>
<b>II. Démarche</b>	<b>49</b>
<b>III. Déroulement-Plan du document</b>	<b>50</b>





## A. CONTEXTE « ENTREPRISE »

### I. OBJECTIFS INITIAUX/CONTEXTE

Ces travaux s'inscrivent dans l'objectif de quantifier les caractéristiques électromagnétiques locales des matériaux constitutifs d'un objet à partir de mesures électromagnétiques en chambre anéchoïque. Il s'agit un problème de contrôle non destructif, de problème inverse en matériaux.

Les objets sujets de notre étude, sont le fruit d'étapes de conception, de fabrication puis de mesures que nous expliquons. Ces étapes permettent en particulier de comprendre les hypothèses de ces travaux.

Etapes de conception :

- Un objet est conçu pour satisfaire des performances (signature radar dans notre cas) vis-à-vis de sollicitations physiques (rayonnement électromagnétique dans notre cas). Cette conception fait appel à des outils de DAO (dessin assisté par ordinateur) permettant le dessin de l'objet. C'est **la phase de dessin**.
- Ce dessin est ensuite testé par simulation numérique. On sollicite virtuellement l'objet conçu grâce à la résolution numérique de modèles que l'on espère au plus proche de la réalité. C'est **la phase de test numérique**. Les résultats de cette phase peuvent conduire à une modification du dessin de l'objet puis à de nouvelles phases de tests successifs. C'est ce qui est appelée la boucle de conception.
- Du résultat de ces phases naît l'objet conçu et l'étape de conception se termine.

Etapes de fabrication :

- Lorsque les tests numériques satisfont les performances demandées par le cahier des charges, **la phase de fabrication** débute. L'objet est fabriqué de manière à respecter les spécifications de conception, afin de garantir que les performances simulées soient celles de l'objet réel.
- En général, la phase de fabrication est suivie ou concomitante à une **phase de métrologie** qui permet de contrôler le respect des tolérances spécifiées. C'est une phase parfois appelée « contrôle qualité ».

Etape de contrôle :

- Les performances de l'objet fabriqué peuvent alors être évaluées dans une phase de mesure. On sollicite l'objet réel expérimentalement. Dans notre cas, on mesure en chambre anéchoïque, le champ électromagnétique réfléchi par l'objet conçu. C'est **la phase de test expérimental ou mesure**.
- Pour vérifier que les performances de l'objet fabriqué satisfont le cahier des charges initial, les résultats des phases de tests électromagnétiques numériques et expérimentales sont comparés. Les incertitudes de mesures et de calcul sont prises en compte. C'est **la phase de comparaison calculs-mesures**.

- Nous cherchons à expliquer les différences résiduelles observées entre le champ électromagnétique mesuré en chambre anéchoïque et le résultat de la simulation numérique. Ces différences peuvent être liées :
  - à des écarts géométriques entre l'objet conçu et l'objet fabriqué,
  - à des incertitudes sur les propriétés matériaux,
  - à des dispersions spatiales des propriétés radioélectriques des matériaux constitutifs de l'objet. Ces dispersions sont inhérentes au processus de fabrication. C'est dans cette phase que ces travaux de recherche prennent place.

Dans notre cas, nous faisons l'hypothèse que les différences observées entre la mesure en chambre anéchoïque (en prenant en compte les incertitudes de mesure) et le résultat de la simulation numérique sont uniquement attribuées à ces variations spatiales des propriétés des matériaux. Il est en effet courant d'attribuer au modèle CAO des propriétés matériaux parfaitement homogènes alors qu'elles sont légèrement inhomogènes sur l'objet fabriqué. Dans notre cas, la qualité de fabrication est telle que les différences entre l'objet réel et la conception (la maquette DAO) sont de l'ordre de quelques pourcents. Nous cherchons donc à quantifier ces faibles variations locales de propriétés matériaux à partir des différences observées entre la mesure et le calcul. Ces variations étant faibles, le problème inverse en matériaux est adressé dans un cadre perturbatif : c'est ce qui fait la particularité de ces travaux.

Nous détaillons maintenant les différentes phases afin de de cerner les détails importants du contexte et définir le vocabulaire utilisé dans la suite. Nous utiliserons en particulier les termes suivants que nous définissons afin de lever toute ambiguïté.

- « Une distribution de propriétés matériau »
- « Le support d'une distribution de propriétés matériau » ou « la géométrie »
- « La conception », « l'objet conçu » ou « la maquette numérique »
- « L'objet de référence »
- « L'objet mesuré », « L'objet fabriqué » ou « l'objet réel »
- Un « test électromagnétique », qu'il soit virtuel (numérique) ou expérimental
- Une « configuration de test », qu'elle soit numérique ou expérimentale
- Le « résultat d'un test électromagnétique » qu'il soit virtuel (numérique) ou expérimental

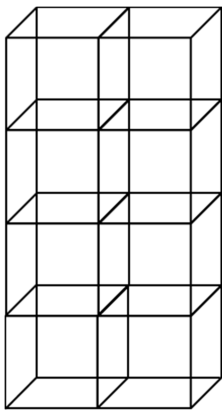
La définition de ce vocabulaire nous conduit à des considérations plus générales pouvant être déclinées à toute autre branche de la physique que l'électromagnétisme.

## 1. Phase de dessin

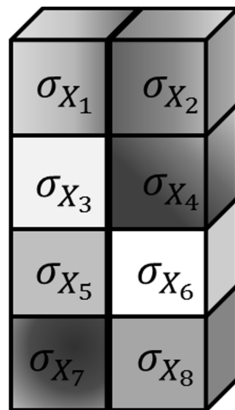
La conception d'un objet fait appel à des outils de DAO (dessin assisté par ordinateur) permettant le dessin de l'objet. Ce dessin ne représente que des interfaces délimitant des volumes (ou surfaces en 2D). Chacun de ces volumes est ensuite virtuellement associé à des matériaux, c'est-à-dire qu'on leur attribue des propriétés physiques correspondant à la physique d'intérêt. En électromagnétisme ces propriétés physiques sont par exemple la permittivité et la perméabilité ; en mécanique des solides élastiques, le coefficient de Poisson, le module de Young et la masse volumique etc... La distribution  $\sigma_{X_k}$  de ces propriétés  $X$  dans chacun de ces volumes  $k$  peut être homogène ou inhomogène. Comme le montre la **Figure 1**, on peut comparer ces premières étapes à la manière de faire un coloriage : l'outil de DAO sert à donner des frontières, les différentes couleurs

représentent une propriété des différents matériaux et l'intensité de coloriage la fonction de distribution. On peut alors définir une distribution spatiale globale  $\Omega_{OX}$  pour chaque propriété  $X$  de l'ensemble des  $k$  matériaux comme étant l'union des distributions spatiales locales  $\sigma_{X_k}$ .

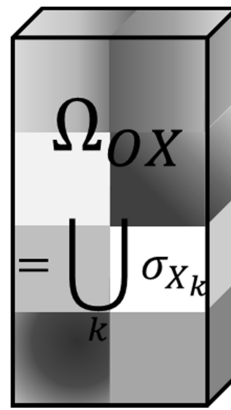
La grandeur  $\Omega_{OX}$  se lit alors comme la distribution ( $\Omega$ ) dans l'objet ( $\Omega_o$ ) de la propriété matériau  $X$ . Par exemple, lorsque la propriété matériau considérée est la permittivité diélectrique  $\varepsilon$ , alors sa distribution dans l'objet s'écrit  $\Omega_{O\varepsilon}$ .



**Figure 1.a:** Construction de frontières dans l'espace, délimitation de  $k$  volumes.



**Figure 1.b:** Attribution d'une distribution  $\sigma_{X_k}$  d'une propriété matériau  $X$  par volume  $k$  (distributions locales).



**Figure 1.c :** La distribution globale, union des distributions locales, constitue l'objet conçu.

**Figure 1 :** Représentation schématique de la phase de conception

« La conception », « l'objet conçu » ou « la maquette numérique » est définie comme la distribution spatiale  $\Omega_{OX}$  de propriété(s) matériaux à tester, réalisée lors de la phase de conception.

Le « support » de cette distribution spatiale  $\Omega_{OX}$  de propriété(s) matériaux est alors l'espace de définitions de la distribution. Il constitue en ce qu'on appelle couramment la géométrie de l'objet conçu.

« L'objet de référence » est défini comme un objet parfaitement connu servant d'élément de comparaison pour un autre objet. Comme nous le verrons, dans notre cas, l'objet de référence est l'objet conçu.

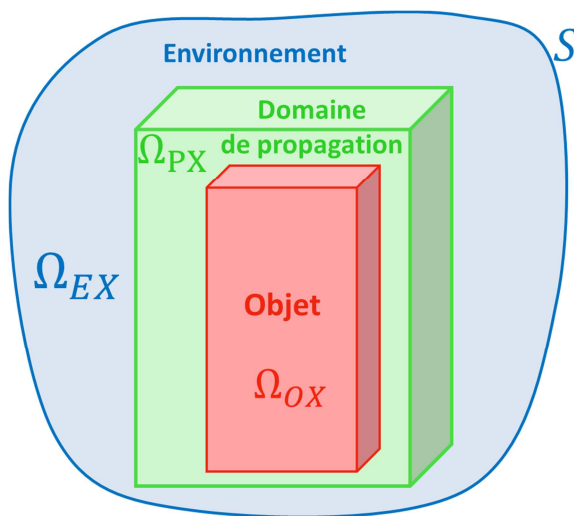
## 2. Phase de test numérique

L'objet conçu est alors testé virtuellement. Dans la majorité des cas, cette phase de test est numérique : un solveur permet de simuler la réponse de la maquette numérique à une sollicitation physique.

Nous définissons un « test électromagnétique » comme l'observation/le prélèvement d'une quantité électromagnétique résultant de l'excitation d'une distribution spatiale de propriétés électromagnétiques par des sources électromagnétiques. Il peut être virtuel (numérique, analytique) ou expérimental.

Dans notre cas, le test électromagnétique correspond à une mesure du champ électromagnétique rétrodiffusé en chambre anéchoïque. Le *système* à considérer est donc l'objet mais aussi le milieu environnant, les sources et les moyens d'observation (de mesures).

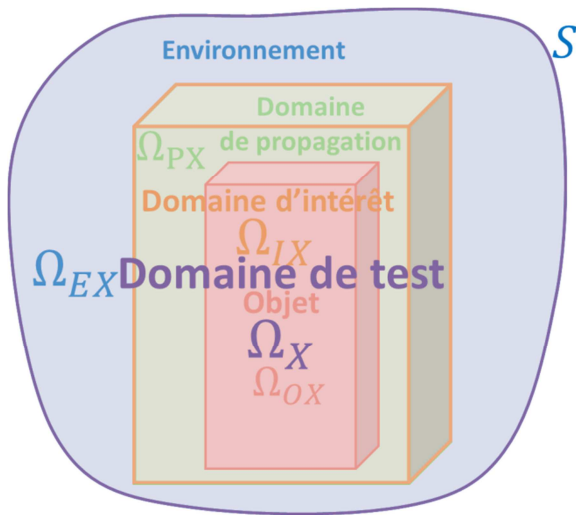
Comme représenté en **Figure 2**, le contenu de la surface fermée  $S$  constitue un *système*. L'objet est l'un des domaines disjoints de ce système. Dans le cas d'un test numérique, l'objet est la maquette numérique précédemment définie. Dans le cadre d'un test expérimental, l'objet est l'objet fabriqué. L'Environnement constitue un domaine connu, support d'une distribution  $\Omega_{EX}$  d'une propriété  $X$ . En général ce domaine est le volume d'air de la chambre anéchoïque et la distribution est considérée homogène. Comme nous allons le voir, il est pratique de définir un domaine de propagation séparant l'environnement et l'objet. Ce domaine de Propagation est le support d'une distribution  $\Omega_{PX}$  d'une propriété  $X$ . En général, le matériau constitutif du domaine de propagation est identique à celui constitutif de l'environnement.



**Figure 2 :** Schéma du système considéré. L'environnement, le domaine de propagation et l'objet constituent trois domaines disjoints. Chacun est le support d'une distribution spatiale de la propriété matériau  $X$  considérée.

A ces domaines disjoints s'ajoutent deux domaines : le *domaine d'intérêt* et le *domaine de test*.

Comme le montre la **Figure 3**, le *domaine d'intérêt* est l'union du *domaine de propagation* et de l'*objet*. C'est le domaine dans lequel il est certain de trouver l'objet, qu'il soit l'*objet numérique* ou l'*objet fabriqué*. En effet, les erreurs de positionnement de l'*objet fabriqué* dans l'enceinte de mesure nécessitent de considérer un domaine englobant plutôt que l'*objet* uniquement. Ce domaine est le support d'une distribution spatiale  $\Omega_{IX} = \Omega_{OX} \cup \Omega_{PX}$ .



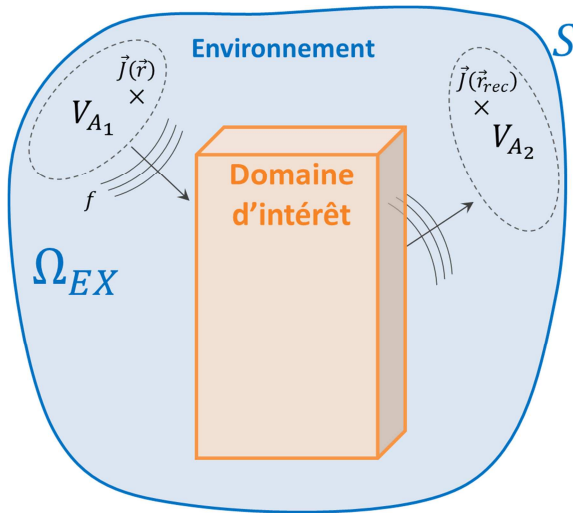
**Figure 3 :** Schéma du système numérique considéré. Le domaine d'intérêt est l'union du domaine de propagation et de l'objet. Il est le support d'une distribution spatiale  $\Omega_{IX} = \Omega_{OX} \cup \Omega_{PX}$ .

Comme le montre la **Figure 3**, le *domaine de test* est l'union du *domaine d'intérêt* et de l'*environnement*. C'est le domaine considéré lors d'un test. Ce domaine est le support d'une distribution spatiale  $\Omega_X = \Omega_{IX} \cup \Omega_{EX}$  d'une propriété matériaux  $X$ .

La grandeur  $\Omega_X$  se lit alors comme la distribution ( $\Omega$ ) dans le domaine de test de la propriété matériau  $X$ . Par exemple, lorsque la propriété matériau considérée est la permittivité diélectrique  $\epsilon$ , alors sa distribution dans le domaine de test s'écrit  $\Omega_\epsilon$ .

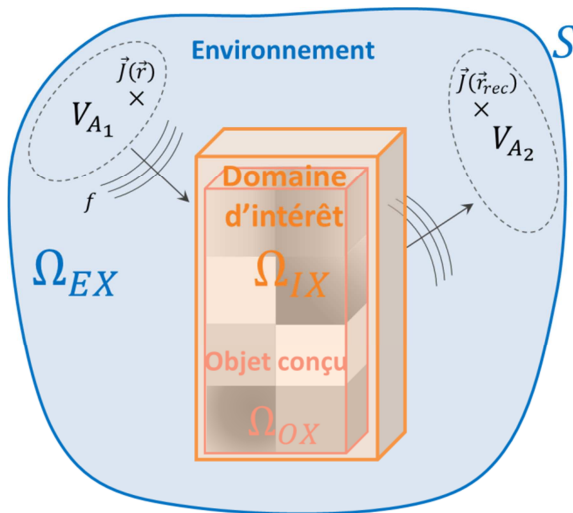
Le positionnement de sources et d'instruments de mesure dans le *domaine de test* permet de définir une *configuration de test*. En électromagnétisme, les sources sont des Antennes occupant un volume  $V_{A_1}$ . Le volume  $V_{A_2}$  contient les antennes de réception, de mesure. Les sources  $\vec{j}$  (densité volumique de courant électrique) émettent une onde de fréquence(s)  $f$ . Un schéma d'une *configuration de test* numérique est donné en **Figure 4**.

Une *configuration de test* est définie comme l'union d'un *environnement* support de distribution(s)  $\Omega_{EX}$  définie(s) et d'un *domaine d'intérêt* support de distribution(s) indéfinie(s) dans lesquels sont positionnées des sources  $\vec{j}$  réparties dans un volume  $V_{A_1}$  et des zones de prélèvement occupant un volume  $V_{A_2}$ .



**Figure 4 :** Schéma d'une *configuration de test*. L'*environnement* est le support de distribution(s) de propriété(s) connue(s). Aucune distribution n'est attribuée au *domaine d'intérêt* : une *configuration de test* est indépendante du contenu du *domaine d'intérêt*. Des sources d'émission  $\vec{J}$  sont positionnées dans un volume  $V_{A_1}$ . Des zones de prélèvement occupent un volume  $V_{A_2}$ .

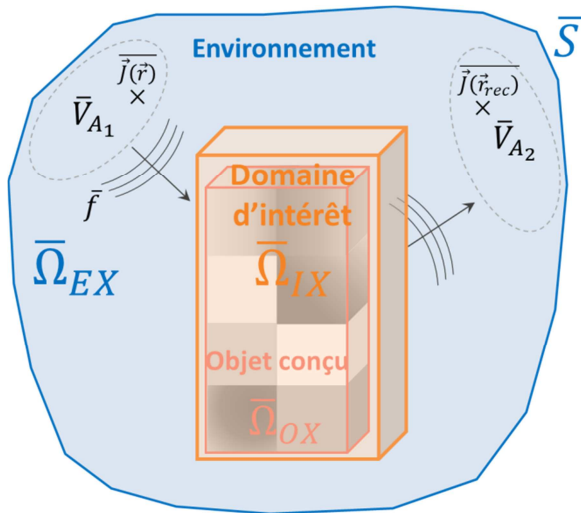
L'association d'une *configuration de test* à un *objet* constitue un *test électromagnétique*. On attribue alors une distribution  $\Omega_{IX}$  de propriétés matériaux au domaine d'intérêt. Pour un *test électromagnétique numérique*, on associe la configuration de test numérique (**Figure 4**) à la maquette numérique (**Figure 1**). La **Figure 5** en donne un exemple.



**Figure 5 :** Schéma d'un test électromagnétique numérique : association d'une *configuration de test numérique* à l'*objet conçu*. Dans le domaine d'intérêt, le complémentaire de l'objet constitue le *domaine de propagation*.

La réalisation du *test électromagnétique numérique* alors établie, c'est-à-dire le prélèvement des quantités d'intérêt sans mesure expérimentale, nécessite la résolution d'un système d'équations modélisant le phénomène naturel. Dans notre cas, le phénomène est la propagation de l'onde électromagnétique générée par les sources. La résolution numérique de tels modèles nécessite souvent une discrétisation, un maillage. Lorsque cette discrétisation est requise, c'est l'ensemble du test qui doit être discrétisé<sup>1</sup> : non seulement le domaine de test (le mot « maillage » est trop souvent uniquement associé à la discrétisation spatiale) mais aussi les sources (la fréquence et le diagramme de rayonnement par exemple), le volume de prélèvement  $V_{A_2}$  etc.

<sup>1</sup> En toute rigueur, l'étape de discrétisation nécessite le test mais aussi le modèle décrivant le phénomène étudié : ce n'est pas le dessin DAO qui est discrétisé mais bien les distributions des propriétés matériaux du *domaine de test* compte tenu de l'excitation, de l'observation, des équations du modèle considéré et même des schémas numériques utilisés pour discrétiser ces équations



**Figure 6 :** Schéma d'un test électromagnétique numérique discrétisé. Les quantités de ce test sont marquées d'une barre supérieure signifiant « discrétisé ».

Une fois le test électromagnétique numérique discrétisé, la résolution des équations discrètes du modèle considéré fait appel à des solveurs numériques permettant de tester virtuellement son comportement et ainsi de quantifier ses performances. Les résultats de cette phase de test électromagnétique peuvent conduire à une modification de la maquette numérique puis à de nouvelles phases de tests successifs. Lorsque les tests satisfont les performances demandées par le cahier des charges, la phase de conception s'achève et la phase de fabrication débute.

Le « résultat d'un test électromagnétique » est définie comme la quantité observée/prélevée lors d'un test électromagnétique.

Dans notre cas, les résultats du test électromagnétique numérique sont les valeurs des champs électromagnétiques numériques prélevées aux  $N$  points  $\vec{r}_{rec N}$  de réceptions :  $\vec{E}(\vec{r}_{rec N})$ .

### 3. Phase de fabrication

L'objet est ensuite fabriqué. Lors de la fabrication, on cherche généralement à minimiser l'écart entre l'objet conçu et l'objet fabriqué. C'est-à-dire que les propriétés matériaux de l'objet conçu et la distribution spatiale de ces propriétés doivent satisfaire les tolérances spécifiées afin de garantir que les performances de l'objet fabriqué soient cohérentes de celles de l'objet conçu.



**Figure 7 :** Représentation de l'objet réel, l'objet fabriqué.

La notion d'« objet mesuré », d'« objet fabriqué » ou d'« objet réel » est définie par l'intermédiaire



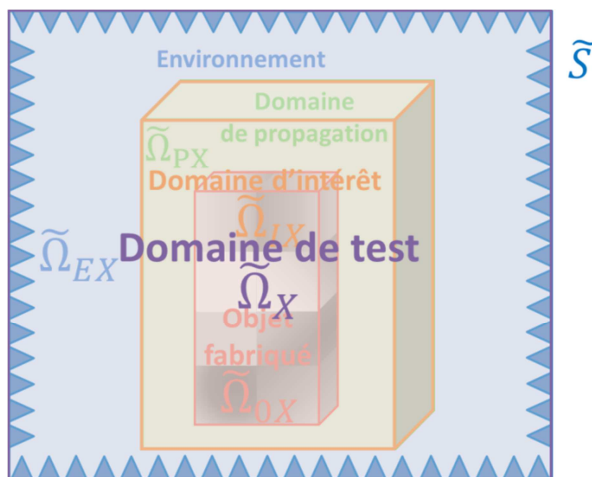
de la distribution spatiale  $\tilde{\Omega}_{OX}$  de propriété(s) matériau à tester expérimentalement, réalisée lors de la phase de fabrication.

Une fois l'objet fabriqué, la qualité de l'objet fabriqué est évaluée en mesurant ses performances électromagnétiques lors d'une phase de test expérimental.

#### 4. Phase de test expérimental

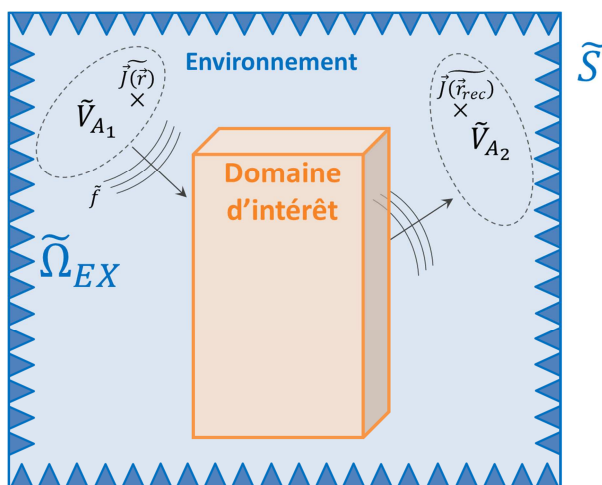
Les performances électromagnétiques de l'objet fabriqué sont évaluées par mesures expérimentales. On soumet alors l'objet à une phase de *test électromagnétique expérimental*.

De la même façon que pour le *test électromagnétique numérique*, nous définissons les différents domaines du système expérimental considéré. Ils sont résumés en **Figure 8**. Les quantités sont marquées d'un « tilde » pour signifier « expérimental » et les différencier des quantités définies lors du *test électromagnétique numérique*.



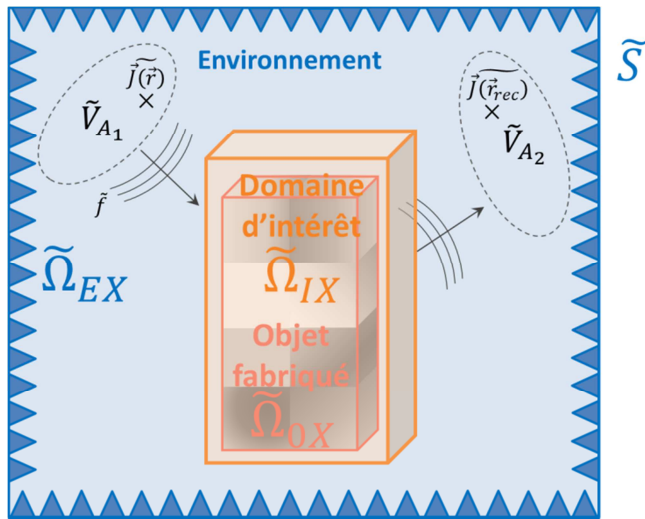
**Figure 8 :** Schéma du système expérimental considéré. La frontière  $\tilde{S}$  représente schématiquement des absorbants pour signifier l'aspect expérimental. Les différentes distributions sont définies et différenciées du cas numérique par un « ~ ».

On représente alors en **Figure 9** une *configuration de test expérimental*.



**Figure 9 :** Schéma d'une *configuration de test expérimental*.

Un *test électromagnétique expérimental* (**Figure 10**), est alors défini comme l'association d'une *configuration de test expérimental* (**Figure 9**) et de l'*objet fabriqué* (**Figure 1**).



**Figure 10 :** Schéma d'un test électromagnétique expérimental : association d'une configuration de test expérimental à l'objet fabriqué. Les quantités sont marquées d'un « tilde » pour les différencier des quantités définies pour le test électromagnétique numérique.

Les résultats de ce test électromagnétique sont appelés les résultats expérimentaux ou résultats de mesure. Dans notre cas, les résultats du test électromagnétique expérimental sont les valeurs des champs électromagnétiques prélevés aux points  $\vec{r}_{rec}$  de réception :  $\vec{E}(\vec{r}_{rec})$ .

Lorsque la conception est suffisamment robuste aux tolérances de fabrication, les résultats de mesure satisfont les performances définies dans le cahier des charges et valident ainsi l'objet fabriqué.

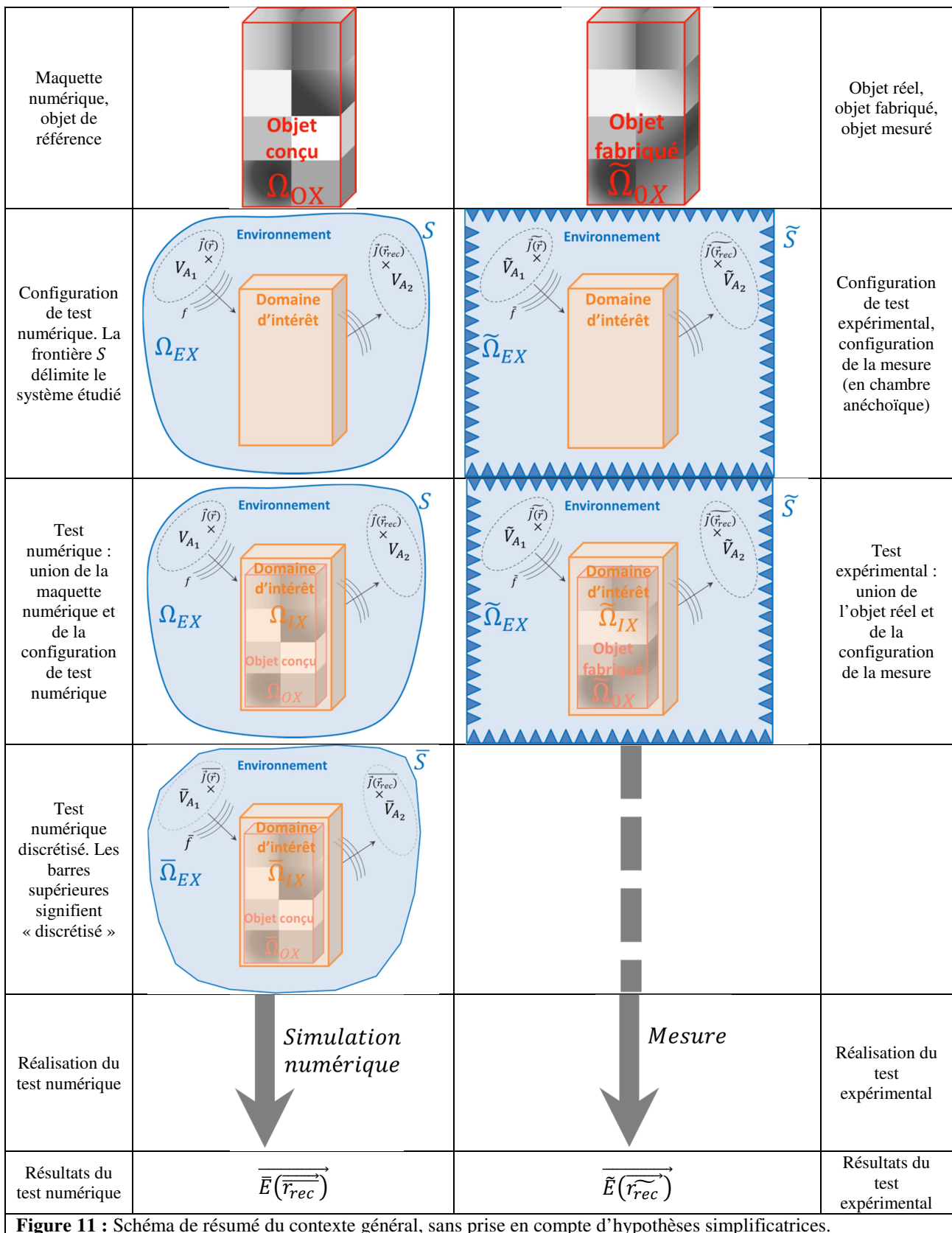
## 5. Phase de comparaison calcul-mesure

Dans le cas qui nous intéresse, même en prenant en compte les incertitudes de mesure et de calcul, nous observons des différences lors de la comparaison des résultats des tests électromagnétiques expérimentaux et numériques.

Nous souhaitons expliquer ces différences résiduelles. Compte tenu de la qualité de fabrication considérée, le support de la distribution spatiale de propriétés matériaux est supposé parfaitement maîtrisé. C'est-à-dire que l'écart géométrique entre la maquette numérique et l'objet fabriqué est négligeable par rapport à l'écart de propriétés matériaux. De plus, cet écart local de propriétés matériaux entre les objets numérique et réel n'est que de quelques pourcents. C'est ce faible écart que nous souhaitons quantifier à partir des résultats des tests électromagnétiques numérique et expérimentaux.

## II. RESUME DU CONTEXTE AVANT HYPOTHESES

L'ensemble du contexte peut alors être résumé par le schéma global de la Figure 11.



**Figure 11** : Schéma de résumé du contexte général, sans prise en compte d'hypothèses simplificatrices.

L'objectif consiste à retrouver l'écart de distributions potentiellement inhomogène  $\tilde{\Omega}_{OX} - \Omega_{OX}$  à partir des quantités  $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_{rec})$  et  $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_{rec})$ .

Cette présentation simplifiée du contexte global met en lumière la complexité de la réalisation de l'objectif sans hypothèses : les sources potentielles des écarts observés sont très nombreuses. Dans le cadre de nos travaux, des hypothèses permettent de simplifier et particulariser le problème.

### III. HYPOTHESES ET DONNEES INITIALES

Le contexte et l'existant conduisent à des hypothèses dans la réalisation de l'objectif.

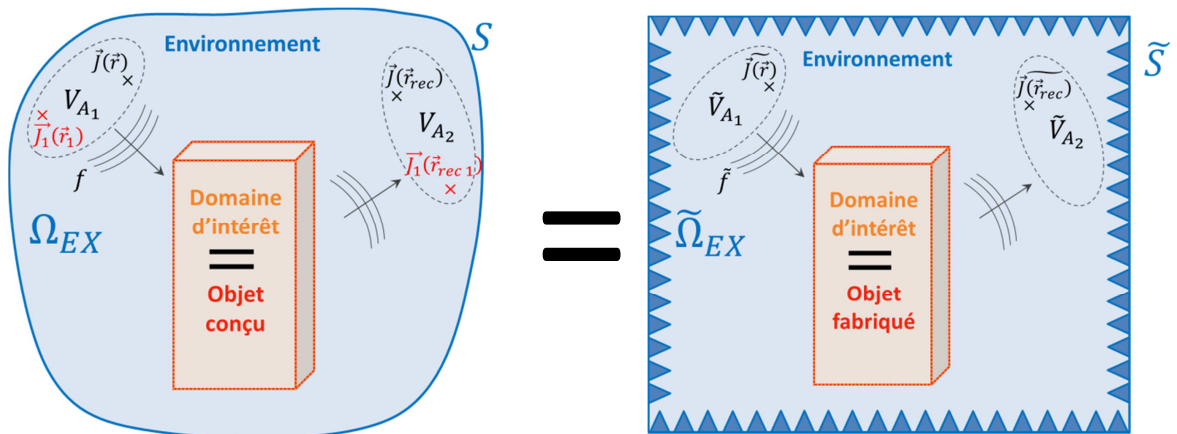
- 1) Tout d'abord, « **la physique** » d'intérêt est **l'électromagnétisme** : les propriétés d'intérêt sont les propriétés électromagnétiques des matériaux et les sollicitations testées sont aussi de nature électromagnétique.
- 2) L'intérêt, les moyens de simulations et ceux de mesures au CEA CESTA imposent de considérer le problème dans le **domaine fréquentiel** (domaine de Fourier), dans la bande de fréquence SHF<sup>2</sup>.
- 3) Les objets sont conçus axisymétriques, c'est-à-dire que **la distribution de propriétés matériaux du cas de référence est axisymétrique**.
- 4) Les **matériaux** d'intérêts **sont potentiellement magnétiques et diélectriques, dispersifs en fréquence et anisotropes**. Cela signifie que leur réponse à un champ électromagnétique dépend de la direction de propagation et de la fréquence de ce champ.
- 5) Le comportement des matériaux est en plus considéré **passif, linéaire vis-à-vis de l'onde électromagnétique** et **non chiraux**. Cela signifie que les relations de constitution des matériaux lient linéairement leurs propriétés électromagnétiques au champ appliqué et que leurs réponses électrique et magnétique ne sont pas couplées.
- 6) La distance entre l'objet et les antennes d'émission et de réception et la taille de l'objet sont telles que l'on considère le problème inverse à partir d'observations en **champ proche**.
- 7) **Les erreurs de discrétisation sont considérées négligeables**. C'est-à-dire que le *test numérique discrétisé* est considéré identique au *test numérique continu* (par opposition à discret).

---

<sup>2</sup> Supra Haute Fréquences. Elle s'étend généralement de 1 GHz à 30 GHz.

- 8) **Les configurations de tests** électromagnétique expérimental et numérique sont considérées **identiques aux incertitudes de mesures près**.
- 9) **L'ensemble des incertitudes de mesures est pris en compte à travers une incertitude d'illumination et de réception**. Par exemple, l'incertitude de positionnement de l'objet par rapport aux sources est considérée comme un écart de diagramme de rayonnement des sources à incertitude de positionnement nulle de l'objet dans le *domaine d'intérêt*. Ainsi, le *domaine d'intérêt* peut être réduit à l'objet. On a alors  $\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \vec{J}_1(\vec{r}_1)$  où  $\vec{J}_1(\vec{r}_1)$  sont les incertitudes modélisées par un écart de rayonnement sur les sources d'émission. De la même façon,  $\vec{J}(\vec{r}_{rec}) = \vec{J}(\vec{r}_{rec}) + \vec{J}_1(\vec{r}_{rec1})$  où  $\vec{J}_1(\vec{r}_{rec1})$  représentent les incertitudes modélisées par un écart de rayonnement des antennes de réception.
- 10) **Les différences entre les résultats des tests numérique et expérimental sont uniquement attribuées à des variations de propriétés matériaux** entre l'objet numérique et l'objet fabriqué. En particulier, cela signifie que les supports des distributions  $\tilde{\Omega}_{OX}$  et  $\Omega_{OX}$  sont identiques mais les distributions différentes.

Le résultat des hypothèses 8), 9) et 10) est schématisé par la Figure 12.

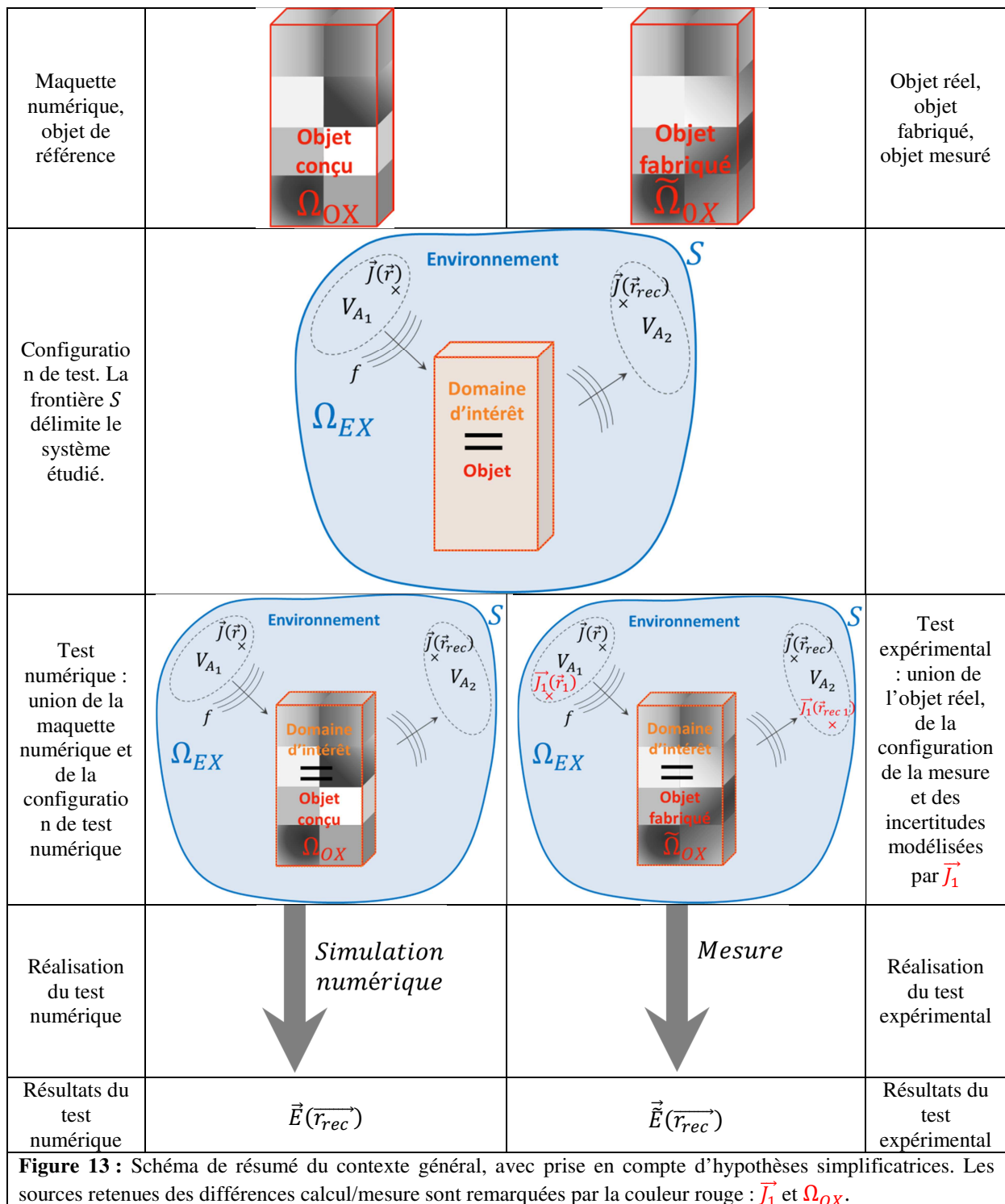


**Figure 12 :** Les configurations de tests expérimental et numérique sont considérées identiques aux incertitudes d'illumination et de réception près. Les supports des sources et des antennes de réception sont identiques mais les sources différentes :  $\vec{J}_1$  modélisent les incertitudes de mesure.

- 11) Compte tenu du processus de fabrication, **les variations de propriétés matériaux sont considérées faibles**. C'est-à-dire qu'en tous points  $\vec{r}$  du *domaine d'intérêt* l'écart entre  $\tilde{\Omega}_{OX}(\vec{r})$  et  $\Omega_{OX}(\vec{r})$  n'est que de quelques pourcents. On note alors  $\tilde{\Omega}_{OX}(\vec{r}) = \Omega_{OX}(\vec{r}) + \delta_X(\vec{r})$ .

#### IV. RESUME DU CONTEXTE APRES HYPOTHESES

L'ensemble du contexte avec la prise en compte des hypothèses ci-dessus peut alors être résumé par le schéma global de la **Figure 13**.



Et l'objectif consiste à retrouver l'écart de distributions potentiellement inhomogène  $\tilde{\Omega}_{OX} - \Omega_{OX}$  à partir des quantités  $\vec{E}(\vec{r}_{rec})$  et  $\vec{E}(\vec{r}_{rec})$  sous l'hypothèse que seuls ces distributions et l'écart de rayonnement  $\vec{J}_1$  des antennes diffèrent. Les propriétés matériaux étant considérées dispersives en fréquence, il nous faut déterminer l'écart de distribution à chaque fréquence. Ces travaux traitent

uniquement le problème à fréquence fixe ; la solution sur une bande de fréquences pouvant être obtenue par juxtaposition de plusieurs problèmes monochromatiques.

Comme précédemment dit, nous cherchons à quantifier les faibles variations entre les distributions de propriétés électromagnétiques des matériaux de l'objet conçu et de l'objet fabriqué. Ce problème inverse étant particulièrement complexe, nous souhaitons tirer profit du contexte pour le simplifier. Or, ce contexte singulier pour un problème inverse fait naturellement naître l'idée d'hypothèse « petites perturbations ».

## V. DU PROBLEME INVERSE AUX MODELES PERTURBATIFS

Il est important de rappeler que l'objectif consiste à déterminer la distribution spatiale de chaque propriété électromagnétique considérée. Le nombre d'inconnues est alors potentiellement conséquent : pour une seule propriété matériaux, il faut déterminer sa valeur en chaque point de l'objet. D'un point de vue numérique, si la fonction de base sur chaque maille est constante, il y a une inconnue par maille. C'est potentiellement un problème inverse de très grande dimension et constitue l'une des difficultés majeures du problème considéré.

Nous souhaitons alors profiter au maximum des particularités de notre problème<sup>3</sup> pour compenser cet inconvénient.

Les hypothèses 10) et 11) (cf. §III p. 29) incitent naturellement à simplifier le problème inverse considéré. La solution du problème inverse est cherchée comme des variations locales de propriétés matériaux autour d'un cas de *référence*. Le support de la distribution solution du problème est connu : c'est celui de la *référence*.

Les zones de prélèvement du champ électrique sont extérieures à l'objet et à toutes interfaces matérielles. Cela signifie que le champ électromagnétique en ces points est continu.

Cette considération conduit à considérer le caractère dérivable du champ aux points de mesure.

De plus, l'objet fabriqué doit rester intègre au test : le cadre de ces travaux est un contrôle non destructif pour l'objet. Ainsi, *le test électromagnétique expérimental* constitue une source de données pauvre : seules quelques quantités (les champs électromagnétiques dans notre cas) peuvent être mesurées et uniquement en certains points (impossible de mesurer le champ électromagnétique au cœur des matériaux).

Au contraire, *le test numérique* constitue une source de données très riche : il est potentiellement possible d'évaluer n'importe quelle quantité (champs, courants, potentiels etc...) en tous points du *domaine de test* (en tout point du maillage). Ainsi, *le test électromagnétique numérique* constitue une excellente *référence* à partir de laquelle l'impact de toute variation peut être observé ; à partir de laquelle *le test électromagnétique expérimental* peut être comparé.

---

<sup>3</sup> De manière générale, profiter au maximum des particularités d'un problème est une façon physique de le simplifier, d'introduire de l'information a priori afin de le régulariser, de diminuer le temps calcul, d'éviter les solutions multiples ou non admissibles etc... C'est une façon de tirer profit de la situation et souvent de résoudre avec une bonne précision le problème considéré. L'inconvénient est alors de rendre l'approche spécifique, moins générale.



Ainsi, le problème est naturellement abordé dans un cadre perturbatif où le *test électromagnétique numérique* constitue la *référence*, c'est-à-dire l'élément de comparaison. Nous cherchons la solution du problème comme des variations locales de propriétés matériaux autour de celles de *l'objet conçu*. Le support de la solution (la géométrie) est connu ; c'est le support de *l'objet conçu*.

Pour trouver la solution d'un tel problème inverse, il est nécessaire de connaître le problème direct<sup>4</sup> : il faut déterminer la sensibilité du champ électromagnétique aux points de mesures (quantités connues) à des variations locales de propriétés matériaux (quantités inconnues).

Une autre façon de simplifier le problème inverse consiste à simplifier le problème direct et en particulier le modèle d'interaction onde-matière.

## **VI. DES PROPRIETES MATERIAUX A LA CONDITION D'IMPEDANCE : MODELES D'INTERACTION ONDE/MATIERE**

Comme nous le verrons, les équations de Maxwell macroscopiques expriment la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu. Elles constituent un modèle de propagation. Pour expliquer comment une onde se propage dans un matériau, il faut y ajouter un modèle d'interaction onde-matière.

Dans le cadre qui nous intéresse, les propriétés électromagnétiques intrinsèques des matériaux peuvent se résumer à leur perméabilité magnétique et leur permittivité diélectrique. Ce sont des quantités macroscopiques volumiques qui expriment la capacité de réaction macroscopique d'un matériau à une sollicitation électromagnétique. Les relations constitutives du matériau expriment cette réaction : elles constituent un modèle d'interaction onde-matière volumique. Ainsi, après discrétisation, il est possible d'évaluer numériquement la propagation d'une onde électromagnétique à travers tout type de distribution volumique de matériaux. Un tel modèle présente l'avantage d'être très général : parmi les matériaux connus, très peu ne peuvent être modélisés par un tel modèle. Même un simple modèle linéaire suffit à représenter les interactions ondes-matière de la majorité des matériaux utilisés. Par contre, puisqu'il s'agit d'un modèle volumique, la résolution numérique nécessite une discrétisation tridimensionnelle dont la taille des mailles est en particulier proportionnelle à la longueur d'onde<sup>5</sup>. Ainsi, pour un objet de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde, la résolution du problème ainsi modélisé peu devenir très coûteuse en calcul.

Lorsque la puissance de calcul n'est pas suffisante, on cherche naturellement à simplifier ce modèle. L'élément coûteux d'un modèle linéaire volumique est en priorité la dimension du système et donc le caractère volumique. On cherche alors un modèle d'interaction onde-matière de dimension inférieure. Le concept d'impédance surfacique est initialement introduit par Rytov [1] et Léontovich [2] dans les années 1940 pour traiter le problème de la diffraction par un objet diélectrique à fort indice. Leur analyse est basée sur un développement asymptotique où le paramètre considéré faible est l'inverse de l'indice du matériau. Un tel modèle réduit l'interaction onde-matière dans tout le volume de matériau à une condition équivalente à la surface du matériau

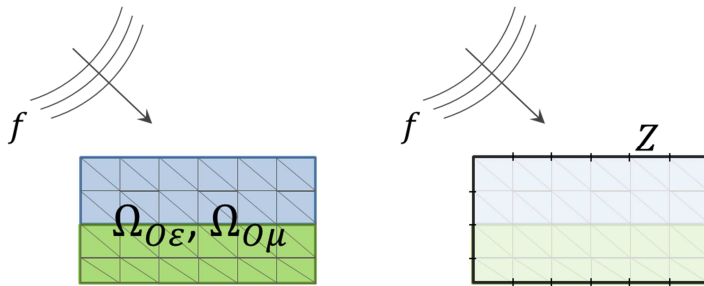
---

<sup>4</sup> De façon générale, la résolution maîtrisée d'un problème inverse nécessite une connaissance fine du problème direct, du modèle utilisé et des hypothèses faites

<sup>5</sup> Longueur d'onde dans le matériau



(Figure 14). La propagation interne au matériau n'est alors plus évaluée réduisant drastiquement le domaine maillé et donc le nombre d'inconnues.



**Figure 14 :** Les deux grands types de modèles d'interaction onde-matière : volumique et surfacique. La condition d'impédance  $Z$  modélise le comportement volumique global par un équivalent surfacique.

Cette approche est globale et ne requiert en particulier aucune hypothèse sur la nature du champ électromagnétique. Cependant, ce modèle est complexe : avant même le calcul de propagation de l'onde, il nécessite l'évaluation d'une intégrale sur toute la surface de l'objet pour estimer l'impédance surfacique en un point de l'objet. Il reste encore trop coûteux en calcul pour les ressources disponibles à l'époque et aujourd'hui, le faible gain de temps ne justifie pas de privilégier ce modèle au modèle volumique. On trouve de nombreux travaux sur le sujet regroupés sous ce qu'on appelle « les impédances d'ordres élevés » [3] [4].

En ne considérant que les termes d'ordre faible, le modèle se simplifie. En particulier, Léontovich [2] propose un modèle d'ordre zéro portant aujourd'hui son nom où l'impédance en chaque point de la surface ne dépend que des quantités sous la surface en ce point. L'évaluation de l'impédance surfacique est réduite au calcul d'une expression vectorielle sans intégrale. C'est ce qu'on appelle un modèle local. Cette simplification introduit de nombreuses hypothèses mais présente l'avantage de réduire considérablement le problème et de rendre la résolution bien moins coûteuse. Aujourd'hui, le modèle d'impédance surfacique de Léontovich dispose d'une notoriété excellente dans le monde industriel<sup>6</sup>. Sa simplicité lui permet en particulier d'évaluer à moindre coût et avec une précision suffisante, la signature radar de grands objets (avions, éoliennes, immeubles etc...). C'est en plus un excellent complément d'un modèle volumique. En effet, la résolution des équations de Maxwell avec un modèle d'interaction onde-matière volumique est d'autant plus coûteuse que la fréquence augmente. Par contre, à matériaux donnés, la précision du modèle d'impédance surfacique de Léontovich est d'autant meilleure que la fréquence augmente.

Ainsi, nous jugeons que les deux types de modèles d'interaction onde-matière sont pertinents dans le cadre de notre travail. Nous proposons alors d'étudier le problème perturbatif précédemment décrit dans le cadre du modèle d'interaction onde-matière volumique et du modèle en impédance de Léontovich.

Lorsque le modèle considéré est de type volumique, nous cherchons donc à établir un modèle de sensibilité du champ électromagnétique aux points de mesures à des variations de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique.

Lorsque le modèle considéré est de type surfacique, nous cherchons donc à établir un modèle de sensibilité du champ électrique aux points de mesures à des variations d'impédance de Léontovich.

<sup>6</sup> Rytov [1] montre quelques années plus tard qu'il est possible de proposer d'autres modèles locaux en impédance plus rigoureux et aussi simples mais sans que nous sachions pourquoi, leur notoriété reste faible.

## VII. CONCLUSION

Le contexte et ses spécificités conduisent à aborder le problème inverse dans le cadre et sous les hypothèses suivantes :

- Le problème est abordé dans le domaine fréquentiel, dans la bande de fréquence SHF.
- Les objets sont conçus axisymétriques, c'est-à-dire que la distribution de propriétés matériaux du cas de référence est axisymétrique.
- Les matériaux d'intérêts sont potentiellement magnétiques et diélectriques, dispersifs en fréquence et anisotropes.
- Le comportement des matériaux est en plus considéré passif, linéaire vis-à-vis de l'onde électromagnétique et non chiraux.
- La distance entre l'objet et les antennes d'émission et de réception et la taille de l'objet sont telles que l'on considère le problème inverse à partir d'observations en champ proche.
- Les erreurs de discrétisations sont considérées négligeables. C'est-à-dire que le *test numérique discrétisé* est considéré identique au *test numérique continu* (par opposition à discret).
- Les *configurations de test électromagnétique expérimental et numérique* sont considérées identiques aux incertitudes de mesures près.
- L'ensemble des incertitudes de mesures est pris en compte à travers une incertitude d'illumination et de réception. Ainsi, le domaine d'intérêt peut être réduit à l'objet numérique.
- Les différences entre les *résultats des tests numériques et expérimentaux* sont uniquement attribuées à des variations de la distribution spatiale des propriétés matériaux entre *l'objet numérique* (la maquette numérique) et *l'objet fabriqué*.
- Compte tenu du processus de fabrication, les variations de propriétés matériaux sont considérées faibles.

Le problème électromagnétique inverse en matériau est abordé dans un cadre perturbatif : la solution recherchée ne diffère du cas de référence que par des perturbations de propriétés des matériaux. Les propriétés matériaux considérées peuvent être la permittivité et la perméabilité ou l'impédance suivant que le modèle d'interaction onde-matière considéré soit respectivement volumique ou surfacique.

Pour répondre à cette problématique, un bilan de l'état de l'art dans les thématiques que sont le problème électromagnétique inverse et perturbatif est réalisé.



## B. CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE

### I. LE PROBLEME INVERSE EN ELECTROMAGNETISME

#### 1. Généralités

J.B. Keller [5] décrit deux problèmes inverses comme des problèmes dont la formulation de l'un met l'autre en cause. Cette définition comporte une part d'arbitraire. Une définition plus pratique est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets à partir des causes connues. Cette seconde définition décrit à quel point nous sommes plus habitués à étudier des problèmes directs. En effet, depuis Newton la notion de causalité est ancrée dans notre subconscient scientifique : nous avons appris à poser, puis résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données, et l'on cherche les effets [6]. Cette définition exprime aussi que la résolution des problèmes inverses pose des difficultés particulières. Nous avons tous appris que « les mêmes causes produisent les mêmes effets », autrement dit, qu'il est raisonnable d'exiger que le problème direct soit bien posé. Il est par contre facile d'imaginer que les mêmes effets puissent provenir de causes différentes. Cette idée contient en germe la principale difficulté de l'étude des problèmes inverses : à observations limitées<sup>7</sup>, ils peuvent avoir plusieurs solutions<sup>8</sup>.

Ainsi, le problème inverse nous est plus complexe que le problème direct : Non seulement il ne nous est pas habituel et intuitif mais il hérite en plus de la complexité du problème direct à laquelle s'ajoute le caractère mal posé. C'est ce caractère que Hadamard [7] introduit dès 1923. Il définit un problème bien posé comme un problème dont :

- une solution existe,
- la solution est unique,
- la solution dépend de façon continue des données.

Depuis Hadamard, la littérature sur le problème inverse est considérable. « Chaque physique » cherche à retrouver les causes des observations faites<sup>9</sup>.

En électromagnétisme, la littérature sur le sujet est aussi très vaste. De manière générale, les travaux existants gravitent autour de trois grands domaines d'applications :

- l'imagerie médicale
- l'exploration des sols en géophysique
- **la caractérisation de matériaux**

Dans chacun de ces domaines d'application, les méthodes peuvent être classées en fonction de leurs caractéristiques. La couleur rouge souligne le problème qui concerne nos travaux.

- L'objectif du problème inverse.

---

<sup>7</sup> Limitées mais aussi incertaines, bruitées...

<sup>8</sup> Et à observations illimitées et certaines, peuvent-ils avoir plusieurs solutions ? A notre connaissance, la question reste entière.

<sup>9</sup> Il pourrait être intéressant d'allier « les physiques » pour disposer de plus d'observations. A notre connaissance, aucun problème inverse alliant des observations et une modélisation multiphysique n'a été considéré.

- Faut-il déterminer :
  - la géométrie ?
  - **les propriétés radioélectriques des matériaux constitutifs ?**
  - une combinaison de ces éléments ?
- L'inconnue doit-elle être déterminée :
  - sans précision : détection (méthode qualitative) ?
  - **avec précision (méthode quantitative) ?**
- Les contraintes.
  - Le problème est-il considéré
    - **dans le domaine fréquentiel** (domaine de Fourier) ?
    - dans le domaine temporel ?
  - L'objet doit-il :
    - rester intègre : **méthodes non destructives** (CND) obligatoires ?
    - peu importe : méthodes destructives admissibles ?
- Les hypothèses.
  - L'onde se propage-t-elle :
    - en ligne droite dans tout l'environnement entre la source et le récepteur ?
    - **pas forcément en ligne droite ?**
  - Les matériaux sont-ils :
    - **diélectriques, magnétiques ?**
    - isotropes, **anisotropes ?**
    - constants ou **dispersifs en fréquence ?**
  - Les points de mesures sont-ils considérés :
    - **en champ proche ?**
    - en champ lointain (cas particulier du précédent) ?
- Les aspects mathématiques du problème.
  - Le modèle du problème direct est-il :
    - linéaire ?
    - non-linéaire ?
  - La résolution du problème inverse est-elle :
    - itérative ?
    - non itérative ?

La littérature sur le problème inverse en électromagnétisme étant considérable, la liste qui suit n'est pas exhaustive. Elle regroupe les travaux que nous jugeons les plus pertinents. Nous commençons par résumer la littérature sur les problèmes dont l'inversion peut être abordée par simple transformée inverse de type Fourier ou Radon. Ensuite l'état de l'art sur les problèmes inverses en géométrie est introduit avant d'approfondir la littérature traitant du problème inverse en matériaux. Nous finissons par un état de l'art concernant les approximations utilisées dans toutes les approches précédemment évoquées pour linéariser les formulations intrinsèquement non linéaires.

## 2. L'inversion directe : les modèles de propagation rectiligne

La longueur d'onde de l'onde incidente par rapport aux tailles caractéristiques de l'objet permet de séparer les problèmes en différentes catégories. En effet, plus la longueur d'onde est faible par rapport aux caractéristiques (géométriques et matériaux) de l'objet et plus le phénomène de

diffraction devient minoritaire rendant l'hypothèse d'une propagation rectiligne de plus en plus juste. On peut alors interpréter les résultats de mesures comme une ombre due à l'atténuation des matériaux traversés. Sous cette hypothèse, le problème inverse peut être traité directement, faisant appel aux modèles de Radon [8], Wolf [9] et Fourier [10]. Ainsi, l'utilisation de rayons X en imagerie médicale devient naturelle. L'ensemble de ces techniques est regroupé dans les techniques dites de tomographies [11]. Dans le cas qui nous intéresse, les objets considérés sont de l'ordre de quelques dizaines de centimètres et la bande de fréquence est la bande SHF. Les techniques de tomographie ne sont donc pas adaptées.

### 3. Le problème inverse en géométrie

Depuis le début des années 1980, les travaux de Colton et Kress sur le problème de diffraction inverse posent les bases théoriques. Dans leur ouvrage de référence [12], la nature non linéaire et mal posée du problème inverse de diffraction est mise en évidence. En particulier, l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse sont traitées pour les équations d'Helmoltz et de Maxwell. Les problèmes inverses sont classés en deux grands types : le problème inverse en géométrie (« *inverse obstacle problem* ») et le problème inverse en matériau (« *inverse medium problem* »). Ils considèrent principalement le problème inverse en géométrie défini comme la recherche, à partir de connaissances (partielles) du champ lointain, de la position spatiale d'une frontière dont la condition d'interaction onde-matière homogène est connue<sup>10</sup>. Ils introduisent la méthode « *dual space method* » qui consiste à décomposer le champ lointain en éléments orthogonaux puis à résoudre un problème aux valeurs propres. Ils démontrent en particulier qu'à connaissance parfaite du champ lointain, il existe une solution unique. Le problème inverse en matériau est succinctement abordé en utilisant une variation de la méthode « *dual space method* » [13]. Le problème est posé avec l'objectif de retrouver les indices de matériaux diélectriques à partir de mesures du champ lointain. En particulier, ils prouvent qu'il n'existe pas d'indice de réfraction comme solution unique lorsqu'il est déterminé à partir du champ.

De nombreux autres travaux viennent compléter cette approche théorique. Concernant l'unicité de la solution dans différents contextes, nous renvoyons aux travaux de Colton, Coyle et Monk [14], Cakoni et Colton [15] et Colton et Päivärinta [16]. Depuis les travaux de Kirsh et Kress [17], qui utilisent une idée originale de Isakov [18], nous savons que le champ lointain diffracté provenant d'une seule direction d'incidence suffit à déterminer de manière unique la forme de la géométrie quelles que soient les conditions à la frontière.

De ces premiers travaux théoriques naissent une multitude de méthodes qualitatives se concentrant sur le problème inverse en géométrie à partir de mesures en champ lointain. Les plus connus sont la « *linear sampling method* » [19] et la « *factorization method* » dont une excellente revue est proposée par Lechleiter [20]. Cette dernière méthode repose sur de solides bases théoriques de la décomposition de l'opérateur de champ lointain afin d'en calculer un noyau<sup>11</sup>.

Toutes ces formulations sont intrinsèquement non linéaires. La résolution du problème inverse ainsi considéré fait alors appel à des techniques d'optimisation. Certains de ces travaux utilisent des

---

<sup>10</sup> C'est en effet un problème d'identification radar d'importance majeure dans les années 1980 : les avions et navires étant principalement métalliques, la condition d'interaction est connue et l'on souhaite identifier le modèle d'avion ou de navire.

<sup>11</sup> Nous percevons ici un lien étroit avec les méthodes de décomposition en courants caractéristiques [91] pouvant alors être considérés comme des « champs caractéristiques ».

approximations pour en simplifier la résolution. Nous avons choisi de séparer cet aspect dans une partie spécifique (cf. § 6.Approximations : Linéarisations).

La recherche du support de la distribution spatiale de propriétés matériaux (la géométrie) est un sujet largement exploré dans la littérature. Il est par contre intéressant de remarquer que ces approches reposent sur des caractéristiques de l'opérateur de champ lointain diffracté par des objets constitués généralement de matériaux non magnétiques. Puisque nous souhaitons en particulier profiter de la spécificité des mesures en champ proche, les méthodes existantes pour le problème inverse en géométrie ne sont pas adaptables au problème que nous considérons.

#### **4. Le problème inverse en matériaux**

En revanche, sur le sujet qui nous intéresse, c'est-à-dire le problème inverse en matériaux, la littérature est plus éparse. Nous la classons en deux catégories : le contrôle non destructif et le contrôle destructif.

##### ***Le contrôle destructif***

Les techniques destructives pour l'objet sont caractéristiques de la caractérisation de matériaux dite en propagation guidée. On retrouve les techniques coaxiales, de cavité [21], d'interférométrie à un cornet ou de sondes à terminaison coaxiale ouverte (Mosig [22]). Dans tous les cas, un échantillon de géométrie travaillée est inséré dans un instrument où une mesure de réflexion, de transmission ou de fréquence de résonance permet alors de remonter aux caractéristiques radioélectriques homogénéisées de l'échantillon. Dans le cadre de nos travaux, ces méthodes ne sont pas adaptées puisque destructives et homogénéisantes. Pour le lecteur intéressé, un excellent résumé de ces méthodes est proposé par Quéffelec [21].

##### ***Le contrôle non destructif***

De façon générale, les moyens de déterminer les propriétés électromagnétiques des matériaux par méthodes non destructives sont répartis dans la littérature autour de deux thématiques distinctes : la caractérisation de matériau et le problème inverse en matériau. Dans la pratique, ces deux thématiques sont très liées puisqu'elles partagent le même objectif. La distinction faite semble surtout concerner l'approche du problème.

En général, le problème inverse en matériau est posé à partir *d'observations subies d'une géométrie subie*. Les « pires » observations sont alors généralement considérées : l'objet est mesuré en champ lointain - l'intégrale de rayonnement « moyennant » la réponse locale. Le problème est alors très général conduisant à des problématiques considérées sous un aspect mathématique (on comprend que retrouver des quantités locales d'une observation globale soit un problème particulièrement mal posé). En caractérisation de matériaux, on cherche à résoudre un problème inverse simple et donc à travailler à l'établissement d'un système de mesures adéquat par des *observations choisies d'une géométrie choisie*. Cela conduit généralement à des moyens de mesures spécifiques d'une réponse locale.

Lorsque les méthodes de caractérisation sont dites en espace libre et les matériaux considérés inhomogènes, la distinction avec ce qui est appelé « le problème inverse en matériaux » devient réellement fine. Les observations sont généralement à une distance suffisante pour « moyennner » la réponse locale de l'objet. Et même lorsque la géométrie est choisie comme la plus simple possible,

elle comporte nécessairement une réponse non-choisie (par exemple la diffraction par les bords d'une plaque plane alors qu'on cherche à mesurer le coefficient de réflexion).

#### En « caractérisation des matériaux » :

Les méthodes de caractérisation non destructives sont généralement celles dites en espace libre. La méthode requiert en général des géométries de test particulières. En effet, la majorité de ces méthodes est basée sur l'acquisition des coefficients de réflexion et de transmission planaires [23] [24]. Les matériaux testés sont donc sous forme de plaques planes. Pour ces méthodes, les effets de diffraction et les réflexions multiples sont les principales causes ou sources d'erreurs. Il existe différentes façons de réduire ces erreurs. Par exemple, Ghodgaonkar [25] propose de minimiser les réflexions par une combinaison de lentilles et d'antennes. D'une façon différente, Sagnard [26] propose d'utiliser un échantillon suffisamment large et suffisamment loin de la source. Dans notre cas, la géométrie de l'objet n'est pas plane et ces techniques ne sont alors pas utilisables et difficilement adaptables.

Quelques travaux se rapprochent d'avantage de notre problématique où la mesure est réalisée sans contact et le problème est globalement abordé comme un problème inverse plus que comme un problème de caractérisation. Dans ce cadre, les travaux de Eyraud [27] sont à noter. La méthode proposée combine des mesures en champ lointain avec une modélisation statistique des incertitudes de mesure pour déterminer la permittivité complexe isotrope. Faget [28] qui utilise une méthode nommée RECY développée par Dieudonné [29] [30], détermine la perméabilité magnétique de bandes de matériaux à partir de mesures en champ proche. Bien que l'application soit réduite à un cas bidimensionnel et à une configuration spécifique (les bandes de matériaux sont collées sur un cylindre métallique et on ne détermine que la perméabilité supposée isotrope), la formulation originelle est assez générale (tridimensionnelle et magnéto-diélectrique) rendant cette approche intéressante. Nous verrons plus tard que cette formulation est généralisée par une autre méthode : la VPRT.

Le problème inverse en matériaux est intrinsèquement non linéaire. La résolution du problème inverse ainsi considéré fait alors appel à des techniques d'optimisation. Certains de ces travaux utilisent des approximations pour en simplifier la résolution. Nous avons choisi de séparer cet aspect dans une partie spécifique (cf § 6.Approximations : Linéarisations).

#### En « problème inverse en matériaux » :

Parmi les travaux s'inscrivant dans la thématique du problème inverse en matériaux, deux grandes familles peuvent être distinguées : la détermination des caractéristiques électromagnétiques volumiques des matériaux, c'est-à-dire la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique, et la détermination des caractéristiques surfaciques, l'impédance.

##### *Caractéristiques volumiques :*

En utilisant les fondamentaux précédemment évoqués, Kirsch introduit la « *transmission eigenvalues method* » reposant elle aussi sur une décomposition judicieuse de l'opérateur de champ lointain. En 2010, Cakoni, Gintides et Haddar montrent les capacités de cette méthode à déterminer la permittivité diélectrique anisotrope homogène [31]. Dans notre cas, la mesure est réalisée en champ proche et les matériaux sont considérés inhomogènes et magnétiques. Cette technique prometteuse n'est alors pas adaptée.



De nombreuses approches consistent à chercher la solution du problème comme la solution d'un problème d'optimisation non linéaire. On cherche alors à réduire l'écart entre la donnée mesurée et le champ électrique prédit numériquement par itérations successives. Nous citons les approches de Newman [32] [33] et de Haber [34] qui utilisent un schéma de type quasi-Newton nourri d'une approximation de la Jacobienne et/ou de la matrice Hessienne pour déterminer la permittivité diélectrique isotrope homogène.

Au contraire, de nombreux travaux consistent à linéariser le problème à partir d'approximations de type Born ou Rytov (cf § 6. Approximations : Linéarisations). De façon générale, cette approche est principalement exploitée en imagerie médicale. Pour rester succinct, nous citons les travaux de Crocco [35] et de Bao [36]. La position spatiale du support de la distribution de propriétés à imager est considérée inconnue et le *domaine d'intérêt* considéré est alors bien plus étendu que le support de l'objet.

Ainsi, à notre connaissance, les travaux cherchant à déterminer les caractéristiques électromagnétiques volumiques des matériaux et regroupés parmi les « problèmes inverses en matériaux » se concentrent uniquement sur la détermination de la distribution de permittivité diélectrique isotrope. Seuls les travaux de Cakoni, Gintides et Haddar [31] traitent du cas anisotrope mais à partir d'une technique spécifique aux observations en champ lointain. De plus, le contexte considéré est loin du contexte perturbatif dans la mesure où le support de la distribution est inconnu et une estimation de cette distribution est impossible. Dans le cas qui nous intéresse, le support de la distribution est connu et une estimation de la distribution est donnée par la conception.

#### *Caractéristiques surfaciques :*

A notre connaissance, seuls les travaux de Bourgeois et Haddar [37] proposent de déterminer la distribution spatiale d'impédance de surface d'un objet connu. Ils considèrent le problème d'identification des conditions d'impédance généralisées à la frontière de l'objet (supposé connu) à partir de mesure en champ lointain et d'une seule onde incidente considérée plane et monochromatique. Ils mettent en évidence l'absence d'une solution unique dans le cas général mais proposent d'ajouter des hypothèses pour restaurer l'unicité. Ces travaux sont particulièrement intéressants. Ils reposent cependant sur l'utilisation des propriétés spécifiques à l'opérateur de champ lointain et ne profitent pas d'un cadre perturbatif.

## **5. Le problème inverse en géométrie et matériaux**

Certains travaux s'attèlent à la détermination de l'ensemble « géométrie » (support de la distribution de propriétés matériaux) et « propriétés matériaux » (valeur de la distribution) de manière quantitative. Il existe deux grandes façons d'aborder le problème :

- Soit le problème est posé comme un problème inverse en matériau dans un domaine d'intérêt contenant l'objet (objet nécessairement plus petit). L'espace scanné est alors plus conséquent que nécessaire. C'est typiquement le cas en imagerie médicale où l'on cherche à imager tout le volume de test, la position du patient n'étant pas déterminée. Un excellent point de vue général est donné par Fiddy et Ritter [11]. Un exemple d'application à partir de mesures réelles est donné par Geffrin, Eyraud et Litman [38].
- Soit le problème est séparé en deux étapes. La première consiste en une recherche qualitative de la géométrie en résolvant un problème inverse en géométrie (réduction du

domaine d'intérêt). La seconde étape est un problème inverse en matériaux quantitatif dans le domaine précédemment déterminé. De Buhan et Kray proposent un article particulièrement clair sur le sujet, tant sur leur travail de bibliographie, de couplage des deux problèmes inverses, que sur la mise en œuvre numérique incluant l'adaptation de maillage [39]. Pour des considérations plus théoriques, les travaux de Cakoni, Gintides et Haddar sont à privilégier [31]. Ils s'appuient en effet sur la « *transmission eigenvalues method* ».

Lorsque l'interaction onde-matière est considérée à travers un modèle en impédance la littérature est bien plus succincte. Nous renvoyons aux travaux de Haddar et Kress [40] pour la détermination de l'impédance supposée homogène. La première étape consiste à déterminer la surface, c'est-à-dire la position de la condition d'impédance par approximations successives. La seconde résout un problème non linéaire pour déterminer l'impédance de surface. Serranho [41] propose une méthode hybride combinant les avantages des approches itératives et la décomposition de l'opérateur de champ lointain.

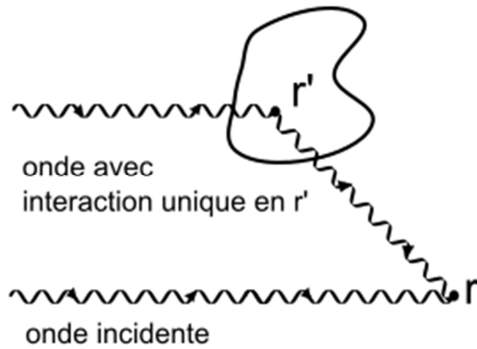
## 6. Approximations : Linéarisations

Toutes ces formulations sont intrinsèquement non linéaires (en matériau ou en géométrie). De nombreux travaux proposent d'utiliser des approximations pour simplifier la résolution. Comme nous l'avons vu, le cadre de nos travaux conduit à considérer le problème inverse dans un cadre perturbatif. Des modèles aux faibles ordres et en particulier les modèles linéaires sont donc potentiellement adaptés. Nous regroupons ici les approximations de ce type trouvées dans la littérature. Cet état de l'art n'est pas exhaustif : nous présentons les méthodes nécessaires à la bonne compréhension de nos travaux ainsi que les méthodes que nous jugeons d'intérêt en particulier pour le lecteur désireux poursuivre ces travaux. Ces approximations peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes linéaires non-itératives et les méthodes linéaires itératives.

### ***Méthodes non itératives***

#### Born

L'approximation la plus courante est l'approximation de Born. Cette approximation est une approximation faite en théorie de la diffusion. Initialement utilisée en mécanique quantique, elle consiste à écrire l'onde totale comme une somme infinie d'ondes interagissant à différents ordres avec le milieu et de n'en retenir qu'une partie. Par exemple, à l'ordre zéro, l'onde totale est alors approximée par l'onde incidente sans interaction avec le milieu. A l'ordre un, l'onde totale est approchée par la superposition de l'onde incidente et de l'onde interagissant une seule fois avec chaque point du domaine (**Figure 15**).



**Figure 15 :** Approximation de Born au premier ordre : seules l'onde incidente et l'onde incidente ayant interagi une seule fois en tous points  $r'$  sont considérées dans la diffusion en  $r$ .  
Figure extraite de [42]

Les approximations de Born à l'ordre zéro et à l'ordre un sont largement étudiées. En électromagnétisme cette approximation donne lieu à une littérature conséquente pour trois raisons principales :

- Sa simplicité conduit à des modèles directs généralement linéaires et leur inversion peu coûteuse permet des applications sur des cas réels (3D). Le domaine médical est le plus utilisateur de cette approche dans la mesure où la précision demandée n'est pas primordiale (on cherche à imager un corps donc à détecter des contrastes de propriétés matériaux plutôt qu'à en estimer les valeurs) et que le temps de résolution du problème inverse est d'importance (le temps d'examen d'un patient doit être raisonnable).
- Elle constitue la base d'une multitude d'approximations, en particulier à des méthodes itératives (cf. paragraphe correspondant : Méthodes itératives p. 45).
- Sa validité est l'objet de controverses ; les travaux de Li, Wang et Wang [43] en donnent un excellent point de vue. Nous citons en particulier les travaux de Diong [44] qui cherchent à quantifier l'impact de cette approximation sur la solution du problème inverse bidimensionnel.

De façon générale, dans la littérature, le domaine de validité de l'approximation de Born est résumé aux objets à faible contraste. Cette approximation est particulièrement intéressante pour nos travaux. En effet le cadre perturbatif en matériaux sous-entend un faible contraste entre l'objet réalisé et l'objet conçu.

### Rytov

Une autre forme d'approximation moins courante est l'approximation de Rytov [45]. Alors que l'approximation de Born est additive et linéaire, celle de Rytov est multiplicative. Elle consiste à écrire l'onde totale comme le produit de l'amplitude de l'onde incidente et d'un terme de phase (terme exponentiel). L'hypothèse sous-jacente à cette approximation peut être comprise comme : l'interaction entre l'onde incidente et l'objet ne modifie pas l'amplitude de l'onde incidente mais sa phase.

Cette approximation ne sera pas exploitée mais peut être intéressante comme perspective à nos travaux.

### Marks

Dans des travaux peu connus, Marks [46] propose une approximation paramétrique qui regroupe à la fois l'approximation de Born et celle de Rytov. Un des avantages de cette formulation est qu'elle donne lieu à tout un ensemble d'approximations passant continument de celle de Born à

celle de Rytov à mesure que le paramètre varie. L'inconvénient est que le domaine de validité de cette famille d'approximations n'est pas établi.

Cette approximation ne sera pas exploitée mais peut être intéressante comme perspective pour nos travaux.

### ***Méthodes itératives***

Il existe deux techniques majeures de méthodes itératives pour la résolution du problème inverse : Born inverse itératif et Born distordu inverse itératif. Toutes deux conduisent à chaque étape à résoudre un problème inverse linéaire, par approximations linéaires successives. On évoque ensuite des modifications possibles pour améliorer ces techniques.

Ces approximations peuvent être intéressantes à nos travaux. Toutefois, elles ne seront pas exploitées car, comme nous le verrons, la méthode que nous avons développée mène naturellement à une méthode itérative sensiblement différente. Nous y ferons tout de même référence à titre comparatif.

#### Méthode de Born inverse itérative (BIM) :

Cette technique consiste à effectuer une première inversion avec l'approximation de Born, puis on estime à nouveau le champ total avec l'objet obtenu (la solution). A chaque itération, on résout donc un problème direct qui donne une nouvelle estimation du champ, puis un problème inverse intégrant cette dernière estimation. L'évaluation du champ par le problème direct se fait en utilisant la dernière solution, mais en gardant le noyau de Green du milieu homogène. La qualité de l'image obtenue est meilleure qu'avec la seule hypothèse de Born, mais le procédé est toujours limité à des structures à faible contraste et la convergence n'est pas garantie.

#### Méthode de Born distordue inverse itérative (DBIM) :

Cette technique est un peu plus sophistiquée car la résolution du problème direct est réalisée avec le noyau de Green du milieu inhomogène évalué à chaque itération. Le calcul de ce noyau constitue un second problème direct à traiter. Chaque itération comporte donc trois étapes, au lieu de deux dans la méthode BIM. Mais la convergence est plus rapide, et l'erreur est plus faible (du second ordre au lieu du premier ordre pour BIM). La méthode DBIM permet de s'intéresser à des matériaux plus hétérogènes. Cependant, l'algorithme est moins robuste en présence de bruit que celui de BIM, ce qui donne naissance à une troisième méthode : la méthode de Born itérative distordue modifiée.

#### Méthode de Born distordue inverse itérative modifiée (MDBI) :

L'algorithme comporte deux boucles imbriquées, la boucle intérieure étant tout simplement l'algorithme de BIM. Le noyau de Green est mis à jour seulement quand la méthode BIM a convergé au sens du critère choisi. Ainsi la solution utilisée est plus juste, moins bruitée, et le calcul du nouveau noyau de Green sera meilleur. Cette méthode est donc plus robuste que DBIM. Notons que de plus, elle converge plus vite.

#### Méthode de Born distordue inverse itérative multi-fréquences :

Il reste un problème fondamental dans les méthodes DBIM ou MDBI : il est toujours impossible de reconstituer des milieux à fort contraste. En effet, la première estimation reste une approximation de Born qui devient très mauvaise en présence de forts contrastes. Il est donc difficile d'effectuer des analyses des tissus osseux, même infantiles, avec de telles méthodes. Une des idées qui est mise en

œuvre pour aborder de tels milieux très contrastés, est d'effectuer une approche multi-fréquentielle. On commence par utiliser des ondes basses fréquences, ce qui fournit une "mauvaise" résolution spatiale (qu'on peut améliorer par un traitement du signal adapté) mais qui augmente le domaine de validité de l'approximation de Born pour des objets contrastés. On utilise alors un algorithme type DBIM et la fréquence est augmentée au fur et à mesure des itérations. Cela est possible puisque le fond (i.e. la référence, "approximation à fond variable") s'adapte dans cet algorithme et les inhomogénéités analysées sont donc de plus en plus faibles.

Comme nous l'avons précédemment développé, le problème inverse que nous considérons est abordé dans un cadre perturbatif. Nous proposons donc dans la partie suivante, un état de l'art sur les modèles perturbatifs en électromagnétisme.

## II. MODELES ELECTROMAGNETIQUES PERTURBATIFS EN MATERIAUX

La littérature sur les problèmes perturbatifs (les modèles de sensibilité) est ici classée en deux catégories. La première résume succinctement quelques travaux appliqués à l'électromagnétisme mais abordant la problématique d'un point de vue mathématique. La seconde catégorie identifiée consiste en des modèles perturbatifs propres à l'électromagnétisme.

### 1. Méthodes mathématiques

Certains travaux considèrent le problème perturbatif sous un aspect théorique général. On cherche alors à estimer la sensibilité de la sortie d'un code d'électromagnétisme à tous les paramètres d'entrée à partir d'un calcul de dérivées partielles. Par exemple Borggaard et Numes proposent d'estimer la dérivée de Fréchet [47]. Les travaux de Liu et Sarris [48] [49] sont particulièrement intéressants. Ils proposent d'utiliser une méthode initialement développée par Lyness et Moler [50] pour estimer la sensibilité du champ électromagnétique en temporel (FDTD) : la dérivation N-complexe. Cette méthode présente de nombreux avantages : elle est numériquement stable, robuste, non-intrusive pour le code de calcul<sup>12</sup> et permet d'évaluer les sensibilités d'ordre élevé. Nous avons étendu cette méthode pour l'utiliser en régime fréquentiel. Ces travaux font l'objet d'une publication en cours (cf. [51]). Dans le cadre de ce manuscrit, cette méthode ne sera pas développée car uniquement mathématique et menant au même modèle surfacique développé.

### 2. Modèles Physiques

D'autres travaux traitent le problème perturbatif en électromagnétisme en le considérant sous un aspect physique. On cherche alors à estimer l'influence d'une petite inclusion de matériau ou d'une rugosité d'interface sur les quantités électromagnétiques (généralement le champ aux points de mesure).

Dans le cas de petites inclusions, on trouve les travaux de Ammari et Khelifi [52] [53]. Ils proposent des formules asymptotiques en volume pour les perturbations des champs électrique et magnétique, des fréquences de résonance ainsi que de l'amplitude de diffusion qui sont dues à la présence de petites inhomogénéités diélectriques. Ces travaux sont d'abord repris théoriquement par Griesmaier [54] puis utilisés par Darbas, Heleine et Lohrengel [55] et Bao, Lin et Mefire [56] pour le problème inverse en matériaux : déterminer la position et la perméabilité magnétique de petites

---

<sup>12</sup> Si le code numérique est orienté objet, cette méthode ne nécessite que le développement d'une classe de « nombres N-complexes »

inclusions. Ces travaux sont particulièrement proches des nôtres mais reposent sur un développement asymptotique en volume. C'est-à-dire que le volume des perturbations est considéré faible. Dans notre cas, ce n'est pas le volume des perturbations qui est supposé faible (il peut même être important, la perturbation pouvant être une valeur moyenne dans tout l'objet) mais leurs amplitudes.

Dans le cadre de rugosités d'interface, deux grandes familles d'approximations existent : la perturbation de la condition d'interface sans modification géométrique ou la modification de la géométrie sans modification de la condition d'interface.

Dans la première famille, il existe trois modèles : celui de Fuks, de Sarabandi et de Yarovoy. Ils diffèrent uniquement par la géométrie prise en compte :

- Fuks [57] étudie le cas d'un multicouche où seule la surface supérieure comporte une rugosité, les surfaces inférieures étant considérées parfaitement lisses.
- Sarabandi [58] propose un modèle pour un métal rugueux recouvert d'une seule couche de diélectrique à la surface supérieure parfaitement lisse.
- Yarovoy [59] étudie le cas plus général d'une interface rugueuse au sein d'un multicouche dont les interfaces supérieures et inférieures sont considérées planes.

Dans la seconde famille, nous citons par ordre chronologique :

- Les travaux de Keller et Millman [60] qui traitent analytiquement le cas perturbatif pour différentes configurations : de la propagation en guide d'onde à la réflexion sur milieux complexes.
- Près de 20 ans plus tard, Joannopoulos, Meade et Winn [61] puis Kottke, Farjadpour et Johnson [62] proposent une formulation de prise en compte de perturbations volumiques qu'ils appliquent à l'étude de la variation de la surface.
- Dans une série d'articles [63] [64] [65] [66] [67] [68], Imperatore propose une méthode qu'il nomme VPRT (*Volumetric Perturbative Reciprocal Theory*). Il montre que cette méthode unifie à la fois les travaux de Kottke, Farjadpour et Johnson mais aussi les modèles de Fuks, Sarabandi et Yarovoy. Cette méthode est alors particulièrement intéressante pour nos travaux : elle est non-destructive, sa formulation est volumique, perturbative à différents ordres et valable en champ proche. Cette méthode est reprise et étendue dans nos travaux.

### III. CONCLUSION

Ainsi, à notre connaissance, le problème que nous considérons est très peu traité dans la littérature. Le contexte du problème inverse en matériaux qui nous intéresse semble être assez singulier. Nous considérons en effet l'illumination et la réception en champ proche, dans un cadre perturbatif ainsi qu'une méthode non destructive pour l'objet.

Les éléments à retenir pour nos travaux sont :

- La méthode VPRT parce qu'elle décrit l'influence de variations volumiques de propriétés matériaux sur le champ électrique à l'extérieur de l'objet, valable en champ proche. Nous montrerons que c'est une méthode similaire et généralisant la méthode RECY [29]. Nous

retiendrons la VPRT pour son caractère plus général (multi-ordre) et son antériorité. Nous l'étendrons aux matériaux magnétiques.

- La dérivation N-complexe parce qu'elle est applicable quelles que soient les hypothèses physiques. C'est en effet une méthode mathématique et numérique qui n'exploite pas les spécificités de la physique. Nous avons étendu cette méthode pour l'utiliser en régime fréquentiel. Ces travaux font l'objet d'une publication en cours (cf. [51]). Dans le cadre de ce manuscrit, cette méthode ne sera pas développée car uniquement mathématique et conduisant au même modèle surfacique que celui présenté en chapitre E (il s'agit de deux façons différentes d'évaluer la même quantité ; la dérivée partielle du champ électrique à l'impédance).
- L'approximation de Born. Comme nous le verrons, cette hypothèse apparaît naturellement dans le développement de nos modèles. De plus, cette approximation bien connue servira d'élément de comparaison et nous y ferons référence dans la suite de ces travaux.
- A notre connaissance, la sensibilité du champ électromagnétique à l'impédance de surface est un sujet qui n'a pas encore été abordé.

Le lecteur averti sur les problèmes inverses connaît l'importance de la quantité d'information, de l'information dite « a priori » dans la résolution d'un tel problème. Ainsi, introduire un maximum d'information dans la modélisation du problème direct considéré avant de s'attaquer au problème inverse est une façon de répondre au juste problème.

*“Far better an approximate answer to the right question, which is often vague, than an exact answer to the wrong question, which can always be made precise.”*

John W. Tukey, 1962

A notre connaissance, la question de l'existence et de l'unicité de la solution du problème inverse en géométrie tout comme en matériaux et à partir d'observation en champ proche reste entière. Considérer le problème dans un cadre perturbatif est alors a priori avantageux : il semble raisonnable de penser que la solution du problème inverse, résultat de petites perturbations autour d'une solution admissible, existe.

## C. CONCLUSION

### I. CONTRIBUTION DE LA THESE

Compte tenu des conclusions précédentes (A.VII p. 19 et B.III p. 47), il est proposé :

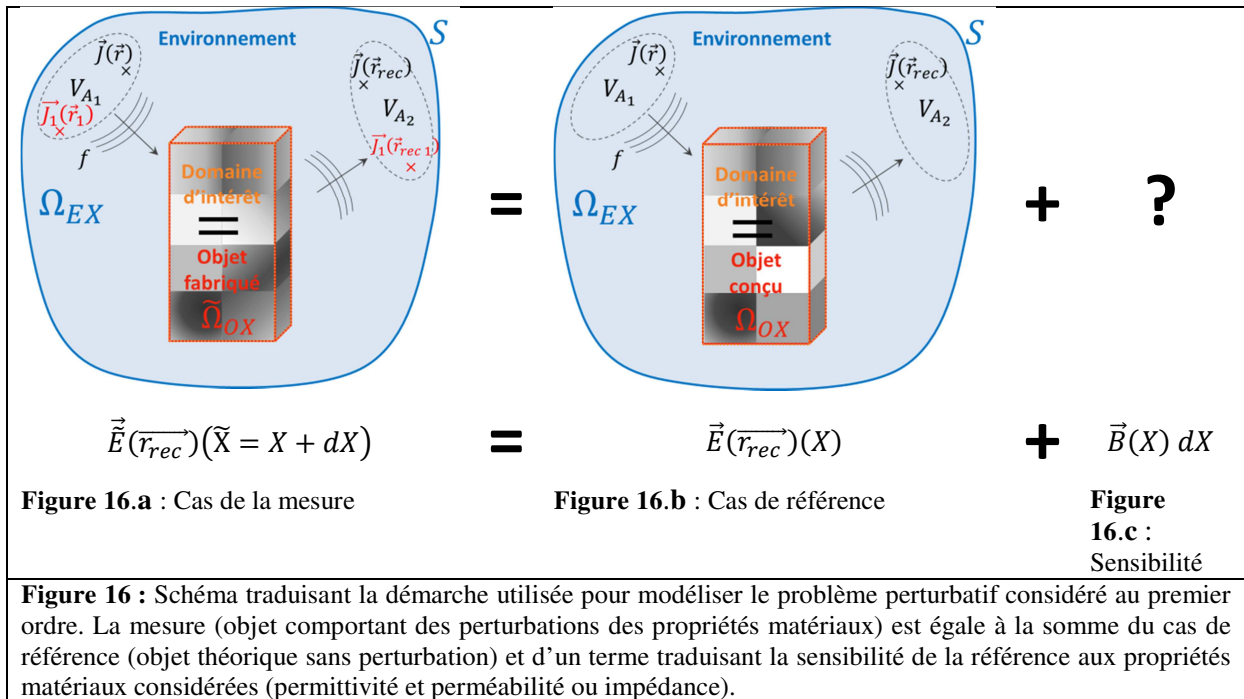
- Lorsque l'interaction onde-matière considérée est de type volumique,
  - D'étendre la méthode VPRT aux matériaux magnétiques anisotropes. Nous montrons par la même occasion les liens existant avec les méthodes RECY et l'approximation de Born.
  - D'ajouter les spécificités de notre problématique en particulier l'aspect axisymétrique de la distribution spatiale de propriétés matériaux.
  - De modéliser les incertitudes de mesure à travers un terme source.
  - De discuter un domaine de validité.

- Lorsque l'interaction onde-matière considérée est de type surfacique,
  - o De modéliser la sensibilité du champ électromagnétique rayonné par l'objet à la condition d'impédance surfacique de Léontovich. Plusieurs modèles sont proposés. Nous montrons le lien avec l'approximation de Born.
  - o De discuter un domaine de validité pour chaque modèle.

## II. DEMARCHE

Un modèle volumique et un modèle surfacique de sensibilité du champ électromagnétique aux propriétés matériaux sont développés respectivement dans les chapitres D (p. 57) et E (p. 83). Bien qu'ils soient différents et indépendants, ils reposent sur le même principe : un cadre perturbatif.

Les hypothèses précédemment expliquées conduisent à considérer que les différences entre le champ électromagnétique mesuré aux points  $\vec{r}_{rec}$  et celui calculé aux mêmes points proviennent uniquement de petites perturbations des propriétés matériaux. Dans le cas où l'on se retient à une modélisation linéaire, l'approche choisie est présentée en **Figure 16** : le résultat du test électromagnétique expérimental ( $\vec{E}$ ) est considéré égal à la somme du résultat du test électromagnétique numérique ( $\vec{E}$ ) et de termes traduisant la sensibilité du test numérique ( $\vec{B}$ ) à la distribution des propriétés matériaux. Puisque les supports des distributions  $\tilde{\Omega}_{OX}$  et  $\Omega_{OX}$  sont supposés identiques, seules leurs amplitudes - l'amplitude des propriétés matériaux  $\tilde{X}$  et  $X$  - diffèrent.



Lorsque le modèle d'interaction onde-matière est volumique,  $X$  est la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique. Au premier ordre, le modèle recherché est donc :

$$\vec{E}(\vec{r}_{rec})(\varepsilon + d\varepsilon, \mu + d\mu) = \vec{E}(\vec{r}_{rec})(\varepsilon, \mu) + \vec{B}_\varepsilon(\varepsilon, \mu) d\varepsilon + \vec{B}_\mu(\varepsilon, \mu) d\mu \quad (\text{C.1})$$



L'objectif consiste alors à déterminer  $d\varepsilon$  et  $d\mu$  à partir des champs électromagnétiques du cas de référence et du cas de la mesure. Avant de s'attaquer au problème inverse, la première étape consiste à établir un modèle permettant d'évaluer les sensibilités  $\vec{B}_\varepsilon(\varepsilon, \mu)$  et  $\vec{B}_\mu(\varepsilon, \mu)$ .

Lorsque le modèle d'interaction onde-matière est surfacique,  $X$  est l'impédance surfacique de Léontovich. Au premier ordre, le modèle recherché est donc :

$$\vec{E}(\vec{r}_{rec})(Z + dZ) = \vec{E}(\vec{r}_{rec})(Z) + \vec{B}_Z(Z) dZ \quad (\text{C.2})$$

L'objectif consiste alors à déterminer  $dZ$  à partir des champs électromagnétiques du cas de référence et du cas de la mesure. Avant de s'attaquer au problème inverse, la première étape consiste à établir un modèle permettant d'évaluer la sensibilité  $\vec{B}_Z(Z)$ .

### III. DEROULEMENT-PLAN DU DOCUMENT

La présentation de ces travaux est alors organisée de la façon suivante.

La partie II est consacrée à la modélisation. Elle contient les chapitres D et E.

Le chapitre D est consacré à l'établissement du modèle de sensibilité dans le cas où le modèle d'interaction onde-matière est de type volumique. Ce chapitre débute avec un rappel des équations de Maxwell qui permet de fixer les conventions de signes ainsi que les notations mathématiques utilisées par la suite. La seconde partie présente une extension de la VPRT permettant de modéliser les sensibilités  $\vec{B}_\varepsilon(\varepsilon, \mu)$  et  $\vec{B}_\mu(\varepsilon, \mu)$ .

Le chapitre E est consacré à l'établissement du modèle de sensibilité dans le cas où le modèle d'interaction onde-matière est de type surfacique. Ce chapitre est organisé de la même façon que le précédent. Il débute avec un rappel des équations régissant le rayonnement d'une surface revêtue d'une condition d'impédance ce qui permet de fixer les conventions de signe ainsi que les notations mathématiques utilisées par la suite. La seconde partie présente des modèles de la sensibilité  $\vec{B}_Z(Z)$ .

Dans la Partie III, il est proposé d'étudier et de discuter du domaine de validité des modèles de sensibilité établis dans les deux chapitres précédents. Les motivations et un point de vue personnel sont d'abord donnés avant de présenter une contribution à l'étude du domaine de validité des modèles précédemment établis.

La Partie IV illustre sur une sphère, l'utilisation et les performances de ces modèles pour le problème inverse en matériaux.

Enfin, la conclusion propose à la fois un point de vue sur le travail restant pour atteindre l'objectif de résolution du problème inverse en matériaux ainsi qu'un point de vue sur les perspectives. Une prise de recul sur le travail présenté met en lumière que les hypothèses définissant le cadre de ces travaux ne sont pas évidentes à satisfaire. Dans le cadre d'un modèle d'interaction onde-matière surfacique, nous proposons alors d'étendre l'approche perturbative à l'ensemble des paramètres : position de la source électromagnétique, de l'antenne de réception, support de la distribution de matériaux etc. L'approche proposée constitue alors un moyen riche et complet de résolution du problème inverse perturbatif multi-paramètres mais aussi de caractérisation de bancs de mesures électromagnétiques

en espace libre, de propagation d'incertitudes et comme tous modèles de sensibilité, trouve des applications en optimisation et comme outil d'aide à la conception.



## **PARTIE II : MODELISATION**



<b>PARTIE II : MODELISATION</b>	<b>53</b>
<b>D. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE</b>	<b>57</b>
<b>I. Le problème direct : propagation électromagnétique en milieu magnéto-diélectrique inhomogène</b>	<b>59</b>
1. Maxwell en régime harmonique	59
2. Modélisation du cas de référence	61
3. Modélisation de la mesure	62
<b>II. Sensibilité du problème direct : extension de la « Volumetric Perturbative Reciprocal Theory »</b>	<b>63</b>
1. Introduction – Principe	63
2. Approche perturbative	63
3. Utilisation du principe de superposition	66
4. Utilisation du théorème de réciprocité de Lorentz	69
5. Particularisation au cas monostatique	72
6. Particularisation à une distribution spatiale axisymétrique de matériaux	73
<b>III. Conclusion</b>	<b>81</b>
<b>E. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE</b>	<b>83</b>
<b>I. Le problème direct : le rayonnement des courants électromagnétiques surfaciques</b>	<b>85</b>
1. L'intégrale de rayonnement de courants surfaciques	85
2. Interprétation physique	87
<b>II. Sensibilité du problème direct : sensibilité du champ électrique rétrodiffusé à l'impédance de surface de Leontovich</b>	<b>88</b>
1. Sensibilité d'ordre 1	89
2. Sensibilité d'ordre supérieur	96
<b>III. Conclusion</b>	<b>97</b>



## **D. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE**



<b>D. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE</b>	<b>57</b>
<b>I. Le problème direct : propagation électromagnétique en milieu magnéto-diélectrique inhomogène</b>	<b>59</b>
1. Maxwell en régime harmonique	59
Du temporel au fréquentiel	59
Les relations constitutives des matériaux	59
Résumé	60
Régime/Domaine de validité	60
2. Modélisation du cas de référence	61
3. Modélisation de la mesure	62
<b>II. Sensibilité du problème direct : extension de la « Volumetric Perturbative Reciprocal Theory »</b>	<b>63</b>
1. Introduction – Principe	63
2. Approche perturbative	63
Formulation exacte	64
Premier ordre – Approximation de Born	65
Multi-ordre – VPRT	65
3. Utilisation du principe de superposition	66
4. Utilisation du théorème de réciprocité de Lorentz	69
Introduction d'un problème auxiliaire	69
Formulation exacte	70
Remarque : liens avec l'existant	71
Premier ordre – Approximation de Born	71
Second ordre	71
Liens avec les méthodes itératives existantes	72
5. Particularisation au cas monostatique	72
6. Particularisation à une distribution spatiale axisymétrique de matériaux	73
VPRT dans le repère cylindrique	73
Décomposition en série de Fourier	74
Perturbations axisymétriques	74
Cas orthotrope	75
Cas isotrope	75
Perturbations non-axisymétriques : cas particulier du modèle au premier ordre (Born)	76
Cas orthotrope	77
Cas isotrope	77
Exemple de modélisation : écriture matricielle	78
<b>III. Conclusion</b>	<b>81</b>

# I. LE PROBLEME DIRECT : PROPAGATION ELECTROMAGNETIQUE EN MILIEU MAGNETO-DIELECTRIQUE INHOMOGENE

## 1. Maxwell en régime harmonique

Le comportement des champs électromagnétiques dans n'importe quel milieu est décrit par les équations de Maxwell. Un point de vue historique du développement théorique de l'électromagnétisme est donné par [69]. Nous résumons ici l'obtention des équations de Maxwell en régime harmonique et les conventions utilisées dans ces travaux. Pour plus de détails, nous conseillons [70].

### *Du temporel au fréquentiel*

Le comportement de l'onde électromagnétique en fonction du temps peut être exprimé comme une superposition d'ondes de fréquences différentes par une transformée de Fourier. Chaque onde de fréquence différente se comportant de la même façon, le problème temporel est identique à une multitude de problèmes fréquentiels tous gouvernés par les mêmes équations (ayant le même comportement). Le problème est alors qualifié « d'harmonique » et l'onde monochromatique est décrite par la partie réelle du champ complexe.

Le régime harmonique est introduit pour séparer la variation temporelle rapide de l'onde et la variation spatiale généralement plus lente. Alors, en convention  $e^{j\omega t}$ , le vecteur champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , une fonction réelle de la position  $\vec{r}$  et du temps  $t$ , est donné par ( D.1 ) où  $A(\vec{r})$  est l'amplitude et  $\phi(\vec{r})$  la phase.

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re(\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}) \\ &= A(\vec{r}) \cos(\omega t + \phi(\vec{r}))\end{aligned}\quad (\text{D.1})$$

En convention  $e^{j\omega t}$  volontairement omise pour alléger l'écriture, les équations de Maxwell en régime harmonique sont alors données par ( D.2 ).

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) + j\omega \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{M}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}(\vec{r}) - j\omega \vec{D}(\vec{r}) &= \vec{J}_i(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \rho(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0\end{aligned}\quad (\text{D.2})$$

Où  $\vec{E}$  est le vecteur champ électrique en  $V/m$ ,  $\vec{H}$  le vecteur champ magnétique en  $A/m$ ,  $\vec{D}$  le vecteur déplacement électrique en  $C/m^2$ ,  $\vec{B}$  le vecteur de densité de flux magnétique en  $Wb/m^2$ . Les sources d'excitations sont modélisées par  $\vec{J}$ , le vecteur densité de sources électriques en  $A/m^2$  et  $\vec{M}$ , le vecteur de densité de sources magnétiques en  $V/m^2$ .  $\vec{J}_i$  est définie comme le vecteur de densité volumique de charges électriques induites dans les matériaux; et  $\rho$  la densité volumique de charge en  $C/m^3$ .

### *Les relations constitutives des matériaux*

Les relations liant  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  et  $\vec{M}$  dépendent des caractéristiques du milieu et sont exprimées par les relations constitutives. Dans le cas qui nous intéresse, les matériaux sont considérés linéaires, passifs, dispersifs en fréquence, non chiraux et anisotropes et les relations constitutives sont de la forme ( D.3 ).

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \bar{\epsilon} (\vec{E} + \vec{P}) \\ \vec{B} &= \bar{\mu} (\vec{H} + \vec{M}_a)\end{aligned}\quad (\text{D.3})$$

Où la perméabilité magnétique  $\bar{\mu}$  en  $H/m$  et la permittivité électrique ou constante diélectrique  $\bar{\epsilon}$  en  $F/m$  sont des tenseurs réels à deux dimensions et  $\vec{M}_a$  est l'aimantation en  $A/m$ ,  $\vec{P}$  est le vecteur polarisation en  $C/m^2$ .

Dans le cas de matériaux linéaires à pertes, la densité de courant induit  $\vec{J}_i$  est proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}$ . C'est le phénomène d'effet joule décrit par la loi d'Ohm ( D.4 ) où  $\sigma$  est la conductivité électrique du milieu en  $S/m$ .

$$\vec{J}_i = \sigma \vec{E} \quad (\text{D.4})$$

Pour des matériaux magnétiques linéaires, un lien linéaire existe entre l'aimantation  $\vec{M}_a$  et le champ magnétique. La réaction du milieu à un champ magnétique extérieur  $\vec{H}$  est linéaire et décrite par ( D.5 ) où  $\bar{\chi}_m$  est la susceptibilité magnétique (sans dimension).

$$\vec{M}_a = \bar{\chi}_m \vec{H} \quad (\text{D.5})$$

De la même façon, pour des matériaux diélectriques linéaires, un lien linéaire existe entre la polarisation  $\vec{P}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  décrit par ( D.5 ) où  $\bar{\chi}_e$  est la susceptibilité électrique.

$$\vec{P} = \bar{\chi}_e \vec{E} \quad (\text{D.6})$$

En posant ( D.7 ) où  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{\mu}$  sont les tenseurs complexes, on peut réécrire les deux premières équations de Maxwell sous la forme ( D.8 ).

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \bar{\mu}(1 + \bar{\chi}_m) = \bar{\mu}' - j\bar{\mu}'' \\ \bar{\epsilon} &= \bar{\epsilon}(1 + \bar{\chi}_e) - j\sigma/\omega = \bar{\epsilon}' - j\bar{\epsilon}''\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) + j\omega\bar{\mu}\vec{H}(\vec{r}) &= \vec{M}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}(\vec{r}) - j\omega\bar{\epsilon}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r})\end{aligned}\quad (\text{D.8})$$

### Résumé

A partir de maintenant et afin d'alléger l'écriture, nous notons  $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$  les tenseurs complexes,  $\vec{M}, \vec{J}$  les densités de courants des sources excitatrices. Nous utilisons :

- La convention  $e^{j\omega t}$  dont la dépendance en temps sera implicite, volontairement omise.
- $\bar{\mu} = \bar{\mu}' - j\bar{\mu}''$  et  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}' - j\bar{\epsilon}''$ .
- La dépendance spatiale et fréquentielle des propriétés matériaux, des champs et des densités de courant est implicite.

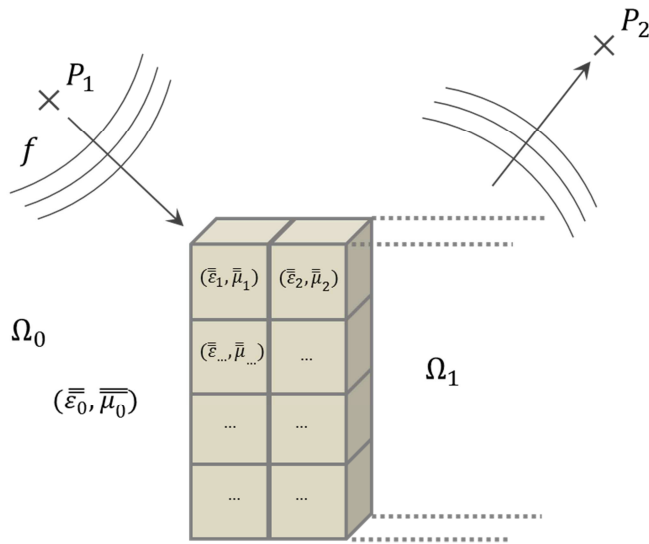
$$\begin{aligned}- \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + j\omega\bar{\mu}\vec{H} &= \vec{M} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} &= \vec{J}\end{aligned}\quad (\text{D.9})$$

### Régime/Domaine de validité

Le système d'équations de Maxwell présenté est valable lorsque les lois de comportement électromagnétique des matériaux sont linéaires et non chiraux (cf. ( D.3 )). En particulier, certains méta-matériaux et les matériaux actifs ne rentrent pas dans cette catégorie.

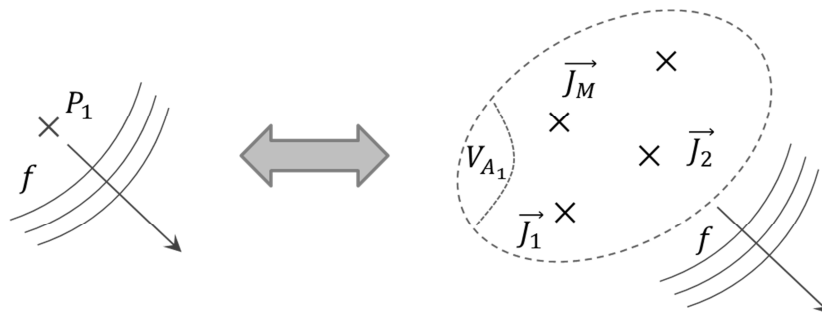
## 2. Modélisation du cas de référence

Nous nous intéressons à l'étude électromagnétique d'un objet  $\Omega_1$  fait de  $N$  matériaux (passifs, dispersifs, anisotropes, hétérogènes) aux propriétés électromagnétiques  $(\vec{\epsilon}_N, \vec{\mu}_N)$  (**Figure 17**). Cet objet  $\Omega_1$  baigne dans un milieu  $\Omega_0$  homogène aux propriétés  $(\vec{\epsilon}_0, \vec{\mu}_0)$  et est éclairé par une onde électromagnétique à la fréquence  $f$  provenant d'une antenne  $A_1$  placée en  $P_1$  dans  $\Omega_0$ . L'onde électromagnétique résultant de l'interaction entre l'objet et l'onde incidente est mesurée par une antenne  $A_2$  en  $P_2$  aussi placée dans  $\Omega_0$ . Un schéma est donné en **Figure 17**.



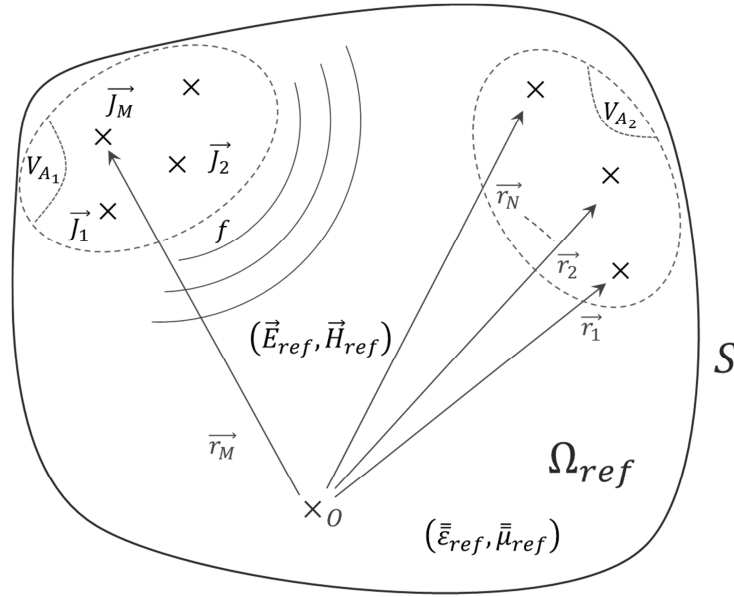
**Figure 17 :** Schéma représentatif du cas de référence.

On modélise ce cas appelé « référence » par une distribution spatiale volumique  $\Omega_{ref}$  de propriétés électromagnétiques  $(\vec{\epsilon}_{ref}, \vec{\mu}_{ref})$ . Cette distribution est contenue à l'intérieur d'une surface fermée  $S$ . Un réseau de plusieurs sources dans un volume  $V_{A_1}$  modélise l'antenne d'émission  $A_1$  positionnée en  $P_1$  comme en **Figure 18** :  $M$  sources de courants électriques  $\vec{J}_M(\vec{r}_M)$  placées en  $\vec{r}_M$  créent une onde électromagnétique  $(\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref})$  dans  $\Omega_{ref}$  équivalente à l'onde émise par l'antenne.



**Figure 18 :** Modélisation de l'antenne (à gauche) par un réseau de sources (à droite). Les deux configurations rayonnent le même champ électromagnétique. La double flèche signifie « équivalent ».

De la même façon, la somme de plusieurs points de réception modélise l'antenne de réception  $A_2$  dans un volume  $V_{A_2}$  : le champ électrique résultant de l'interaction onde-matériaux est capté en  $N$  points placés en  $\vec{r}_N$  dans  $\Omega_{ref}$ . La **Figure 17** est ainsi équivalente à la **Figure 19**.



**Figure 19** : Modélisation du cas de référence

Le comportement de l'onde électromagnétique dans la distribution spatiale  $\Omega_{ref}$  schématisée en **Figure 19** est donnée par les équations de Maxwell **(D.10)**. L'indice « *ref* » signifie « référence ».

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{ref} + j\omega \vec{\mu}_{ref} \vec{H}_{ref} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_{ref} - j\omega \vec{\epsilon}_{ref} \vec{E}_{ref} &= \sum_M \vec{J}_M(\vec{r}_M)\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

### 3. Modélisation de la mesure

La fabrication de l'objet conçu numériquement est intrinsèquement différente de l'objet simulé, l'objet de référence : des variations de la distribution spatiale des propriétés matériaux sont inhérentes au processus de fabrication. De plus, la configuration de test électromagnétique (placement des antennes par rapport à l'objet) du cas de référence est impossible à reproduire avec exactitude en mesure. Ainsi la modélisation de la mesure est nécessairement différente de la modélisation du cas de référence.

En procédant de la même façon que pour le cas de référence, nous modélisons la mesure par le système d'équations de Maxwell **(D.11)** dans la distribution spatiale  $\Omega_{mes}$ . L'indice « *mes* » signifie « mesure ». Nous précisons que l'indice « *m* » (utilisé pour le modèle de mesure) est différent de « *M* » (utilisé pour le modèle du cas de référence) car les sources ne sont pas forcément de même nombre ni placées au même endroit<sup>13</sup>.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{mes} + j\omega \vec{\mu}_{mes} \vec{H}_{mes} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_{mes} - j\omega \vec{\epsilon}_{mes} \vec{E}_{mes} &= \sum_m \vec{J}_m(\vec{r}_m)\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

<sup>13</sup> Il peut être en particulier intéressant de modéliser par un réseau de  $M$  dipôles dans le cas de référence, le rayonnement d'une seule antenne  $m = 1$  en mesure.

Si le calcul est suffisamment représentatif de la mesure<sup>14</sup>, la différence entre les configurations de tests électromagnétiques est faible. On imagine alors facilement qu'un modèle perturbatif au(x) premier(s) ordre(s) sur les sources de courant suffit à rendre compte des différences.

Si la précision de fabrication est suffisante, la différence est faible entre l'objet de référence (l'objet numérique) et l'objet réalisé. Et on imagine facilement qu'un modèle perturbatif au(x) premier(s) ordre(s) sur la distribution spatiale des propriétés des matériaux suffit à rendre compte des différences.

C'est l'influence de ces différences sur les champs électromagnétiques aux points de mesures que nous souhaitons étudier.

Nous choisissons de dire dans la suite que le modèle issu de la simulation est appelé cas de référence et que la mesure est représentative de la simulation à des perturbations près.

## **II. SENSIBILITE DU PROBLEME DIRECT : EXTENSION DE LA « VOLUMETRIC PERTURBATIVE RECIPROCAL THEORY »**

### **1. Introduction – Principe**

En reprenant les idées développées dans la méthode « Volumetric Perturbative Reciprocal Theory » (VPRT) [71] [72] [64] [66] [67] [68], nous proposons une approche de prise en compte des perturbations volumiques de propriétés électromagnétiques des matériaux. La méthode est initialement développée pour évaluer le champ diffracté par un empilement multicouche de matériaux à interfaces tridimensionnelles rugueuses. Jusque-là restreinte à des variations de permittivité prises en compte à travers l'équation d'Helmholtz, nous l'étendons aux variations de perméabilité en utilisant les équations de Maxwell. Nous soulignons alors les points communs et les différences entre la VPRT étendue aux matériaux magnétiques et la méthode RECY [30] [29]<sup>15</sup>. Nous introduisons ensuite deux particularisations de la méthode. La première dans le cas où la configuration de test électromagnétique est monostatique et la seconde lorsque la distribution spatiale de propriétés matériaux est axisymétrique. Cela permet en particulier d'utiliser un solveur existant au CEA-CESTA et spécifique aux distributions axisymétriques pour valider et mettre en œuvre cette méthode.

Cette méthode est basée sur trois grands principes physiques que nous détaillons dans chacune des parties suivantes : l'écriture d'un modèle perturbatif (§2), l'utilisation du principe de superposition (§3) puis du théorème de réciprocité (§4). Il en résulte alors un modèle rigoureux non linéaire d'où nous pouvons dériver un modèle multi-ordre itératif. Nous mettons en évidence les différences et points communs avec les modèles existants en particulier ceux basés sur l'approximation de Born.

### **2. Approche perturbative**

Nous commençons par dériver un modèle perturbatif du modèle de la mesure. Pour rappel, la modélisation de la mesure est donnée en §3 p. 62.

---

<sup>14</sup> Difficile de ne pas prendre parti, un autre point de vue serait « si la mesure est suffisamment représentative du calcul ».

<sup>15</sup> Bien que les méthodes VPRT et RECY soient toutes les deux basées sur l'utilisation du principe de réciprocité pour décrire l'influence de perturbations sur le champ rayonné, nous choisissons de conserver le nom de la méthode VPRT parce qu'elle s'appuie sur une base théorique plus robuste et parce qu'elle est antérieure.

### Formulation exacte

La configuration de mesure est modélisée par les équations de Maxwell ( D.11 ).

Nous décrivons les perturbations  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sur la distribution spatiale  $\Omega_{mes}$  des propriétés matériaux ( $\bar{\epsilon}_{mes}, \bar{\mu}_{mes}$ ) par ( D.12 ) où  $I$  est la matrice identité.

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{mes}(\vec{r}) &= \bar{\mu}_{ref}(\vec{r}) (I + \bar{q}(\vec{r})) \\ \bar{\epsilon}_{mes}(\vec{r}) &= \bar{\epsilon}_{ref}(\vec{r}) (I + \bar{p}(\vec{r}))\end{aligned}\quad (D.12)$$

Les champs électromagnétiques résultant de ces perturbations sont aussi écrits sous forme de perturbations. On obtient ( D.13 ) où  $\vec{E}_1$  et  $\vec{H}_1$  sont les champs électromagnétiques résultant des perturbations  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$ .

$$\begin{aligned}\vec{E}_{mes}(\vec{r}) &= \vec{E}_{ref}(\vec{r}) + \vec{E}_1(\vec{r}) \\ \vec{H}_{mes}(\vec{r}) &= \vec{H}_{ref}(\vec{r}) + \vec{H}_1(\vec{r})\end{aligned}\quad (D.13)$$

Nous décrivons l'écart entre les  $M$  sources de courants modélisant les  $m$  antennes d'émission par l'ajout de  $x$  sources de courants  $\vec{J}_x^C$  correctrices positionnées en  $\vec{r}_x$ . Nous obtenons ( D.14 ).

$$\sum_m \vec{J}_m(\vec{r}_m) = \sum_M \vec{J}_M(\vec{r}_M) + \sum_x \vec{J}_x^C(\vec{r}_x)\quad (D.14)$$

En omettant la dépendance spatiale afin d'alléger l'écriture, nous injectons ( D.12 )( D.13 )( D.14 ) dans ( D.11 ). En utilisant ( D.10 ) et en posant ( D.16 ), nous obtenons ( D.15 ).

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 + j\omega \bar{\mu}_{ref} \vec{H}_1 &= \vec{M}_{exact} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_1 - j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \vec{E}_1 &= \vec{J}_{exact}\end{aligned}\quad (D.15)$$

Où :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{exact} &= -j\omega \bar{\mu}_{ref} \bar{q} (\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1) \\ \vec{J}_{exact} &= j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \bar{p} (\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1) + \sum_x \vec{J}_x^C(\vec{r}_x)\end{aligned}\quad (D.16)$$

Ainsi, les champs  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  dus aux perturbations  $\bar{p}, \bar{q}, \vec{J}_x^C$  vérifient les équations de Maxwell ( D.15 ) où les perturbations sont écrites comme des sources de courants volumiques équivalentes ( $\vec{J}_{exact}$  et  $\vec{M}_{exact}$ ) rayonnant dans le milieu de référence. Autrement dit, le problème correspondant à la mesure, dans une distribution spatiale de matériaux inconnue, est ramené au cas de l'étude de sources inconnues dans le milieu de référence, parfaitement connu.

Il est important de souligner que ce système est exact, que les perturbations soient considérées faibles ou non. C'est ce que nous soulignons par l'indice « exact ». Les sources  $\vec{J}_{exact}$  et  $\vec{M}_{exact}$  dépendent de  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  rendant le système non linéaire.

### **Premier ordre – Approximation de Born**

En se rappelant que les champs  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  sont les champs créés par les perturbations  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{J}_x^C$ , ils sont alors définis comme d'ordre un par rapport à  $\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref}$  (qui sont d'ordre zéro). En les considérant négligeables, c'est-à-dire en posant  $\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1 \approx \vec{H}_{ref}$  et  $\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1 \approx \vec{E}_{ref}$ , les termes sources ( **D.16** ) sont rendus indépendants de l'ordre un. On obtient alors un modèle linéaire qui n'est autre que le modèle de Born ( **D.17** ) et ( **D.18** ).

$$\begin{aligned} \vec{M}_{Born} &= -j\omega \bar{\mu}_{ref} \bar{q} \vec{H}_{ref} \\ \vec{J}_{Born} &= j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \bar{p} \vec{E}_{ref} + \vec{J}_1^C(\vec{r}_1) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 + j\omega \bar{\mu}_{ref} \vec{H}_1 &\approx \vec{M}_{Born} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_1 - j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \vec{E}_1 &\approx \vec{J}_{Born} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Dans ce cas et pour le problème direct, le cas de référence et les perturbations  $\vec{p}, \vec{q}$  sont connus donc les sources  $\vec{M}_{Born}$  et  $\vec{J}_{Born}$  aussi. La résolution de ( **D.18** ) donne alors les champs  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  créés par les perturbations. Pour le problème inverse, les champs  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  sont connus grâce à la mesure<sup>16</sup> et ( **D.18** ) sert à déterminer les perturbations  $\vec{p}, \vec{q}$  de la distribution  $\Omega_{ref}$ .

De très nombreux travaux utilisent l'approximation de Born. Mais ne sachant pas à l'avance quelle distribution spatiale de propriétés matériaux sera étudiée, le cas de référence est souvent pris comme l'espace vide. C'est en particulier courant en imagerie médicale et dans quelques travaux récents en contrôle non destructif. La qualité des résultats est parfois surprenante alors que la perturbation  $\vec{p}$  peut représenter près de 50% de la valeur de  $\bar{\epsilon}$ . Au contraire, certains cas où la perturbation est inférieure à quelques pourcents suffisent à rendre le modèle de Born imprécis.

L'hypothèse faite nécessite en effet quelques précisions. Tout d'abord, ce n'est pas une hypothèse faite sur les perturbations matériaux elles-mêmes : nous ne négligeons pas  $\vec{p}, \vec{q}$  par rapport à  $\bar{\epsilon}_{ref}, \bar{\mu}_{ref}$ . C'est en fait le couplage  $\bar{\mu}_{ref} \bar{q} \vec{H}_1$  qui est négligé devant  $\bar{\mu}_{ref} \bar{q} \vec{H}_{ref}$ . Ainsi, si la perturbation  $\vec{q}$  est orthogonale à  $\vec{H}_{ref}$ , le produit  $\bar{q} \vec{H}_{ref}$  tend vers zéro et il devient peu prudent de négliger  $\bar{q} \vec{H}_1$ . Peu de travaux s'attardent sur la justification physique de cette approximation. Nous proposons de nous y attarder dans le chapitre G p. 108. Pour une approche plus mathématique sur la validité de cette approximation, nous conseillons les travaux de Li [73].

Nous allons maintenant montrer que la VPRT est une formulation plus riche et qui englobe l'approximation de Born.

### **Multi-ordre – VPRT**

L'idée de P. Imperatore consiste à écrire les perturbations et les champs électromagnétiques sous forme d'une série infinie d'ordre croissant. A la place de ( **D.12** ) et ( **D.13** ), on obtient alors ( **D.19** )( **D.20** ).

<sup>16</sup> On rappelle que  $\vec{E}_1 = \vec{E}_{mes} - \vec{E}_{ref}$



$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{mes} &= \bar{\mu}_{ref} (I + \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \dots) \\ \bar{\epsilon}_{mes} &= \bar{\epsilon}_{ref} (I + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots)\end{aligned}\quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_{mes} &= \overrightarrow{E}_{ref} + \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 + \dots \\ \overrightarrow{H}_{mes} &= \overrightarrow{H}_{ref} + \overrightarrow{H}_1 + \overrightarrow{H}_2 + \dots\end{aligned}\quad (\text{D.20})$$

En injectant (D.19) et (D.20) dans (D.11) et en utilisant (D.10), on peut montrer qu'on obtient un couple d'équations qui s'écrit comme la somme de plusieurs couples d'équations. En ne gardant que les termes d'ordres un et deux nous séparons le problème complet en un problème d'ordre 1 (D.21) et un problème d'ordre 2 (D.22).

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}_1 + j\omega \bar{\mu}_{ref} \overrightarrow{H}_1 &= \overrightarrow{M}_1 \\ \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{H}_1 - j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \overrightarrow{E}_1 &= \overrightarrow{J}_1\end{aligned}\quad (\text{D.21})$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}_2 + j\omega \bar{\mu}_{ref} \overrightarrow{H}_2 &= \overrightarrow{M}_2 \\ \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{H}_2 - j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \overrightarrow{E}_2 &= \overrightarrow{J}_2\end{aligned}\quad (\text{D.22})$$

Où les sources indicées « 1 » et « 2 » sont données par (D.23)(D.24).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}_1 &= -j\omega \bar{\mu}_{ref} \bar{q}_1 \overrightarrow{H}_{ref} \\ \overrightarrow{J}_1 &= j\omega \bar{\epsilon}_{ref} \bar{p}_1 \overrightarrow{E}_{ref} + \overrightarrow{J}_1^C(\vec{r}_1)\end{aligned}\quad (\text{D.23})$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}_2 &= -j\omega \bar{\mu}_{ref} (\bar{q}_1 \overrightarrow{H}_1 + \bar{q}_2 \overrightarrow{H}_{ref}) \\ \overrightarrow{J}_2 &= j\omega \bar{\epsilon}_{ref} (\bar{p}_1 \overrightarrow{E}_1 + \bar{p}_2 \overrightarrow{E}_{ref}) + \overrightarrow{J}_2^C(\vec{r}_2)\end{aligned}\quad (\text{D.24})$$

Nous remarquons que l'ordre 1 est strictement équivalent à l'approximation de Born. Pour l'ordre 2, les sources équivalentes aux perturbations comportent deux termes qu'il est intéressant d'analyser :

- Le premier terme modélise l'influence d'une perturbation du premier ordre ( $\bar{p}_1, \bar{q}_1$ ) sur le champ généré par une perturbation de premier ordre ( $\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{H}_1$ ). C'est donc un terme de couplage fort entre la perturbation et le champ électromagnétique qu'elle crée.
- Le second terme modélise l'influence d'une perturbation du second ordre ( $\bar{p}_2, \bar{q}_2$ ) sur le champ du cas de référence ( $\overrightarrow{E}_{ref}, \overrightarrow{H}_{ref}$ ). C'est donc un terme de couplage faible entre le cas perturbé et le cas non perturbé.

De la même façon, il est possible d'étendre l'approche à des ordres plus élevés.

### 3. Utilisation du principe de superposition

Nous avons écrit l'influence d'une perturbation de la distribution spatiale de perméabilité et de permittivité comme l'effet de sources volumiques équivalentes réparties dans la distribution spatiale du cas de référence.

Nous mettons en évidence que le problème qui modélise la mesure peut être vu comme la somme du cas de référence et d'un cas perturbé, vérifiant ainsi le principe de superposition. C'est en fait déjà

ce qui a été fait à travers les équations de Maxwell dans le paragraphe 2 (p. 63) lorsque les équations de Maxwell sont soustraites.

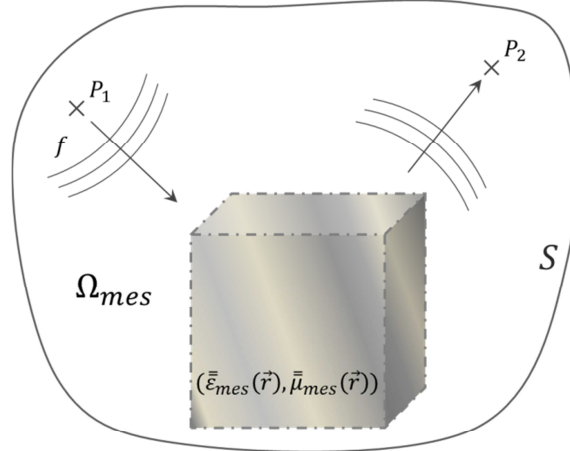
Le cas représentatif de la mesure est décrit par les équations ( **D.11** ). Une représentation schématique est donnée en **Figure 20.a** où les équations de Maxwell gouvernant l'état électromagnétique sont rappelées. La modélisation de l'antenne d'émission est en particulier donnée par la **Figure 18**. Ce cas comporte des variations inhérentes aux incertitudes de mesure et à une connaissance imparfaite de la distribution  $\Omega_{ref}$  représentées par des couleurs non homogènes sur la **Figure 20.a**. La connaissance de cette configuration est limitée aux quantités mesurées (typiquement le champ électrique aux points de mesure).

Le cas de référence est décrit par les équations ( **D.10** ). Il correspond à la simulation et est donc parfaitement connu en tout point de l'espace. Une représentation est donnée en **Figure 20.b**.

Le cas perturbatif exact précédemment modélisé (cf. p. 64) vérifie les équations ( **D.15** ). Des sources volumiques ( **D.16** ) rayonnent dans la distribution de référence ( **Figure 20.c** ). Cette configuration est partiellement connue. La distribution spatiale de matériaux et les points spatiaux de prélèvement des champs sont connus puisque identiques au cas de référence. Pour le problème inverse en matériaux, les sources volumiques équivalentes aux perturbations restent à déterminer. Pour le problème direct, ce sont les champs aux points de mesures qu'il reste à déterminer.

Nous montrons à partir des équations de Maxwell modélisant les trois configurations et de la modélisation des perturbations ( **D.12** )( **D.13** )( **D.14** ) qu'étudier la mesure est équivalent à étudier le cas de référence et le cas perturbatif.

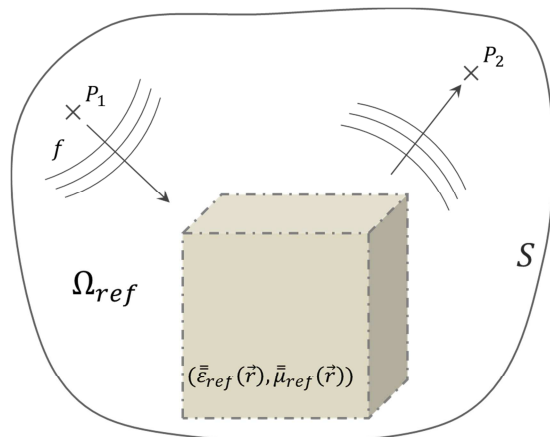
**Figure 20.a :** Représentation schématique de la mesure. Les variations de couleurs représentent les variations de la distribution spatiale de propriétés matériaux par rapport au cas de référence.



$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{mes} + j\omega \vec{\mu}_{mes} \vec{H}_{mes} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_{mes} - j\omega \vec{\epsilon}_{mes} \vec{E}_{mes} &= \sum_M \vec{J}_M(\vec{r}_M)\end{aligned}$$

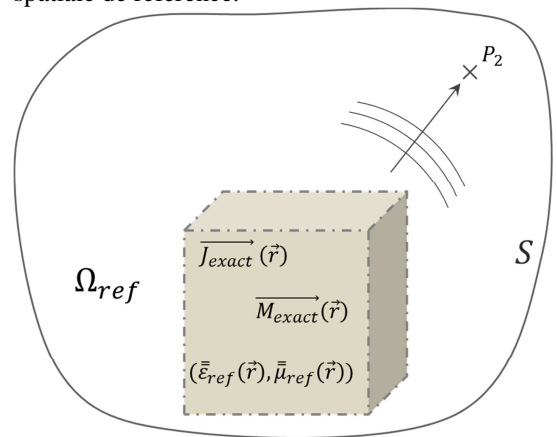
=

**Figure 20.b :** Représentation schématique de la référence. L'aspect monochrome représente la distribution spatiale de référence.



$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{ref} + j\omega \vec{\mu}_{ref} \vec{H}_{ref} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_{ref} - j\omega \vec{\epsilon}_{ref} \vec{E}_{ref} &= \sum_m \vec{J}_m(\vec{r}_m)\end{aligned}$$

**Figure 20.c :** Représentation schématique du cas perturbé. Les perturbations sont écrites comme des sources rayonnant dans la distribution spatiale de référence.



$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 + j\omega \vec{\mu}_{ref} \vec{H}_1 &= \vec{M}_{exact} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_1 - j\omega \vec{\epsilon}_{ref} \vec{E}_1 &= \vec{J}_{exact}\end{aligned}$$

**Figure 20 :** Illustration de l'utilisation du principe de superposition. L'étude de la mesure est équivalente à l'étude du cas de référence (parfaitement connu) superposé à un cas perturbé écrit dans la distribution de référence.

Le cas perturbé (**Figure 20.c**) peut être remplacé par un modèle réduit comme le modèle d'ordre 1 (p. 65) ou d'ordre supérieur (p. 65). Dans ce cas l'égalité représentée en **Figure 20** n'est plus stricte.

Le cas de référence étant parfaitement connu, il reste à étudier le cas perturbé. Il est possible de résoudre le système d'équations de Maxwell correspondant mais ce travail est aussi coûteux que la résolution du cas de référence. L'utilisation du théorème de réciprocité nous permet alors de palier judicieusement à cette difficulté.

#### 4. Utilisation du théorème de réciprocité de Lorentz

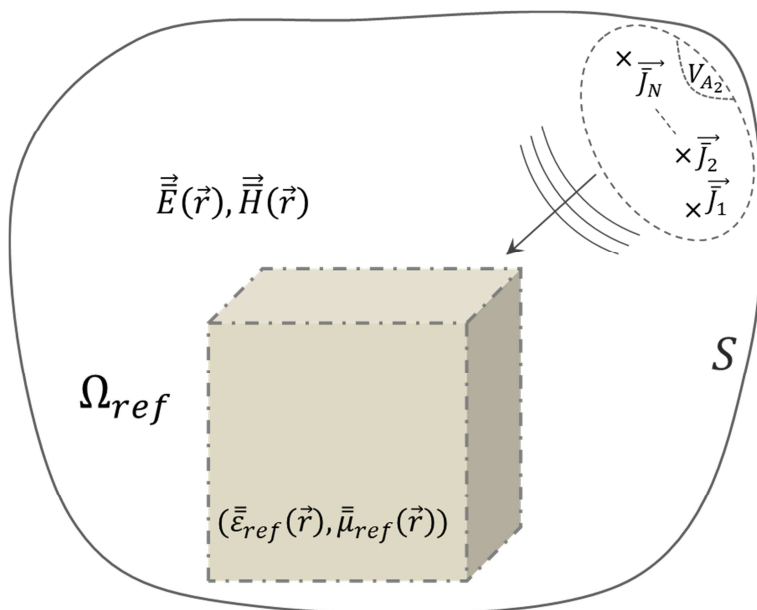
Nous commençons par introduire une configuration auxiliaire nécessaire à l'application du théorème de réciprocité. Les champs et les sources de ce problème sont indiqués par une barre supérieure.

Le principe de réciprocité général (qui prend en compte à la fois les sources de courants électriques et magnétique) peut être démontré à partir des équations de Maxwell [70, p. 24]. Il se base sur le principe selon lequel une source positionnée en un point 1 et observée depuis un point 2 est vue exactement identique lorsqu'elle est positionnée en 2 et vue depuis le point 1. Comme nous le verrons, ce principe n'est pas toujours valide et nécessite quelques précisions sur les propriétés physiques du milieu de propagation. On comprend alors que la réciprocité utilise l'équivalence entre deux configurations. Pour étudier la configuration perturbée, nous commençons donc par introduire un problème auxiliaire dont les sources sont positionnées aux points d'observation du problème d'intérêt.

##### Introduction d'un problème auxiliaire

$N$  sources tests  $\vec{J}_N(\vec{r}_{rec N})$  sont placées aux  $N$  points de réception (en  $\vec{r}_{rec N}$ ) dans la distribution spatiale de référence  $\Omega_{ref}$ . Ce problème réciproque est posé sans source magnétique. La configuration résultante est schématisée en **Figure 21** et gouvernée par les équations ( D.25 ). L'indice « *rec* » signifie « réception ».

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + j\omega \vec{\mu}_{ref} \vec{H} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - j\omega \vec{\epsilon}_{ref} \vec{E} &= \sum_N \vec{J}_N(\vec{r}_{rec N}) \end{aligned} \quad (D.25)$$



**Figure 21 :** Schéma représentatif du cas réciproque du cas perturbé (cf. Figure 20.c). Les sources réciprocques sont placées aux points de réception du cas perturbé.

### Formulation exacte

En utilisant le théorème de réciprocité [70] entre la formulation exacte de l'état perturbé (**Figure 20.a**) et le cas réciproque (**Figure 21**), nous obtenons (**D.26**).

$$-\oint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}_1 + \vec{E}_1 \wedge \vec{H}) \cdot \vec{dS} = \iiint_{V_\Omega} \left( \left[ \vec{E}_1 \cdot \sum_N \vec{J}_N \right] + \left[ \vec{E} \cdot \vec{J}_{exact} - \vec{H} \cdot \vec{M}_{exact} \right] \right) dV_\Omega \quad (\text{D.26})$$

Où  $V_\Omega$  est le volume de la distribution spatiale  $\Omega$  délimité par la surface  $S$  de surface élémentaire orientée  $\vec{dS}$ .

En considérant un volume  $V_\Omega$  infini, c'est-à-dire en renvoyant la surface  $S$  à l'infini, les champs vérifient la condition de Silver-Müller (énergie nulle à l'infini). L'intégrale surfacique dans (**D.26**) est alors nulle. Nous injectons dans (**D.26**) les expressions de  $\vec{J}_{exact}$ ,  $\vec{M}_{exact}$  (cf. (**D.16**)) et nous définissons les sources réciproques  $\vec{J}_N$  et  $\vec{J}_x^c$  comme des dipôles ponctuels (**D.27**).  $\vec{t}_{J_N}$  est le vecteur directeur de la source  $\vec{J}_N$  et définit donc la polarisation de l'onde émise,  $\bar{J}_N$  l'amplitude (en A.m),  $\vec{r}_{rec N}$  la position spatiale du dipôle et  $\delta(\cdot)$  est la fonction de Dirac.

$$\begin{aligned} \vec{J}_N(\vec{r}_{rec N}) &= \bar{J}_N \delta(\vec{r} - \vec{r}_{rec N}) \vec{t}_{J_N} \\ \vec{J}_x^c(\vec{r}_{J_x^c}) &= J_x^c \delta(\vec{r} - \vec{r}_{J_x^c}) \vec{t}_{J_x^c} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Nous obtenons alors (**D.28**).

$$\begin{aligned} \sum_N \bar{J}_N \vec{E}_1(\vec{r}_{rec N}) \cdot \vec{t}_{J_N} + \sum_x J_x^c \vec{E}(\vec{r}_{J_x^c}) \cdot \vec{t}_{J_x^c} \\ = -j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{p} (\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1)] - \vec{H} \cdot [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{q} (\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1)] \right] dV_\Omega \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

On précise l'identité et le rôle de chaque terme de (**D.28**) :

$\vec{E}_1(\vec{r}_{rec N})$	Le champ généré par les perturbations au point de réception. Il est connu puisque $\vec{E}_{mes}(\vec{r}) = \vec{E}_{ref}(\vec{r}) + \vec{E}_1(\vec{r})$ , avec le champ de référence connu pour tout $\vec{r}$ et la mesure connue en $\vec{r}_{rec N}$ .
$\bar{J}_N \vec{E}_1(\vec{r}_{rec N}) \cdot \vec{t}_{J_N}$	L'énergie générée par les perturbations au point de réception et dans la direction de polarisation $\vec{t}_{J_N}$
$\sum_x J_x^c \vec{E}(\vec{r}_{J_x^c}) \cdot \vec{t}_{J_x^c}$	Energie résultante de l'écart entre la modélisation de l'antenne par un réseau de sources (sources qui servent à évaluer les champs de référence) et l'antenne réelle utilisée lors de la mesure.
$\vec{E} \cdot [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{p} (\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1)]$	C'est une densité volumique d'énergie. Elle représente un couplage énergétique d'origine électrique entre la mesure et le cas réciproque en présence de perturbations de permittivité.
$\vec{H} \cdot [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{q} (\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1)]$	C'est une densité volumique d'énergie. Elle représente un couplage énergétique d'origine magnétique entre la mesure et le cas réciproque en présence de perturbations de perméabilité.

Dans la pratique, il est plus simple d'utiliser une seule source test d'amplitude unitaire  $\vec{J}_{N=1} = 1 A.m$ .

**Remarque : liens avec l'existant**

On dispose ainsi d'un système d'équations liant chaque observation aux mêmes perturbations  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$ . En négligeant l'erreur de modélisation de l'antenne, on obtient alors (D.29) qui est aussi obtenue par [29] [30] [28]. Dans le cas où les matériaux sont purement diélectriques,  $\vec{q}$  est nulle et on retrouve la formulation proposée par P. Imperatore [72].

$$\vec{E}_1(\vec{r}_{rec1}) \cdot \vec{t}_{\vec{J}_1} = -j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot [\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} (\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1)] - \vec{H} \cdot [\vec{\mu}_{ref} \vec{q} (\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1)] \right] dV_\Omega \quad (D.29)$$

Nous avons ainsi écrit l'influence de perturbations de la distribution spatiale de propriétés matériaux sur le champ électrique prélevé au(x) point(s) d'observation(s). Cette écriture est exacte et 3D mais non linéaire puisque le champ électrique créé par les perturbations au point de réception  $\vec{E}_1(\vec{r}_{rec1})$  dépend de lui-même dans tout le volume de la distribution  $\vec{E}_1(\vec{r})$ .

**Premier ordre – Approximation de Born**

En utilisant le théorème de réciprocité entre la formulation de premier ordre de l'état perturbé et le cas réciproque (Figure 21), nous obtenons le modèle linéaire (D.30).

$$\sum_N \vec{J}_N \vec{E}_1(\vec{r}_{recN}) \cdot \vec{t}_{\vec{J}_N} + J_1^C \vec{E}(\vec{r}_{J_1^C}) \cdot \vec{t}_{J_1^C} \approx_{1ier} -j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot [\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p}_1 \vec{E}_{ref}] - \vec{H} \cdot [\vec{\mu}_{ref} \vec{q}_1 \vec{H}_{ref}] \right] dV_\Omega \quad (D.30)$$

Où nous indiquons par «  $\approx_{1ier}$  » que cette équation constitue une approximation de premier ordre.

En négligeant l'erreur de modélisation de l'antenne et pour une seule source test d'amplitude unitaire dans la formulation (D.30), nous retrouvons le modèle de Born utilisé dans les travaux de [28] (pour la signification physique des termes, il est nécessaire de se référer à la partie III).

**Second ordre**

Il est possible d'obtenir une expression de second ordre en utilisant (D.19) et (D.20) dans (D.29) et en ne gardant que les termes d'ordre inférieur à trois. En utilisant le principe de superposition, c'est à dire en soustrayant (D.30), nous obtenons (D.31).

$$\sum_N \vec{J}_N \vec{E}_2(\vec{r}_{recN}) \cdot \vec{t}_{\vec{J}_N} + J_2^C \vec{E}(\vec{r}_{J_2^C}) \cdot \vec{t}_{J_2^C} \approx_{2nd} -j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} (\vec{p}_1 \vec{E}_1 + \vec{p}_2 \vec{E}_{ref}) - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} (\vec{q}_1 \vec{H}_1 + \vec{q}_2 \vec{H}_{ref}) \right] dV_\Omega \quad (D.31)$$

Où nous indiquons par «  $\approx_{2nd}$  » que cette équation constitue une approximation de second ordre.

En négligeant l'erreur de modélisation de l'antenne, pour une seule source test et dans le cas où les matériaux sont purement diélectriques,  $\vec{q}_1$  et  $\vec{q}_2$  sont nuls et on retrouve la formulation proposée par [72].

Il est intéressant de remarquer que l'équation ( D.31 ) traduit l'effet du couplage d'une perturbation matériau d'ordre 1 sur le champ créé par cette perturbation (à travers le terme  $\overline{p_1} \overline{E_1}$ ). De la même façon, elle traduit l'effet du couplage entre le champ de référence et une perturbation matériau d'ordre 2 (à travers le terme  $\overline{p_2} \overline{E_{ref}}$ ). L'ensemble de ces deux couplages a un effet sur le champ électromagnétique au point de réception  $\overline{E_2}(\overline{r_{recN}})$ .

Pour le problème inverse en matériaux<sup>17</sup>, dans le cas où l'erreur sur les sources est négligée, la résolution du premier ordre ( D.30 ) donne  $\overline{p_1}, \overline{q_1}$ . Un nouveau calcul direct avec ces solutions utilisées dans le cas de référence donne  $\overline{E_1}, \overline{H_1}$  en tout point de l'espace. Les seules inconnues de l'équation ( D.31 ) sont alors  $\overline{p_2}, \overline{q_2}$ .

Il est alors possible de mettre en évidence les liens avec les méthodes existantes. Ces liens mettent en lumière les hypothèses physiques qui conduisent aux méthodes BIM<sup>18</sup> et DBIM<sup>19</sup>.

### ***Liens avec les méthodes itératives existantes***

La méthode BIM néglige l'effet du couplage entre une perturbation et le champ qu'elle génère. L'équivalent au modèle ( D.31 ) sous l'approximation BIM est alors donné par ( D.32 ).

$$\sum_N \overline{J_N} \overline{E_2}(\overline{r_{recN}}) \cdot \overline{t_{J_N}} + J_2^C \overline{E}(\overline{r_{J_2^C}}) \cdot \overline{t_{J_2^C}} \approx_{BIM} - j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \overline{E} \cdot \overline{\epsilon_{ref}} \overline{p_2} \overline{E_{ref}} - \overline{H} \cdot \overline{\mu_{ref}} \overline{q_2} \overline{H_{ref}} \right] dV_\Omega \quad (D.32)$$

La méthode DBIM modélise une perturbation de premier ordre  $\overline{p_1}$  ou  $\overline{q_1}$  par un second ordre  $\overline{p_2}$  ou  $\overline{q_2}$ . L'équivalent au modèle ( D.31 ) sous l'approximation DBIM est alors donné par ( D.33 ).

$$\sum_N \overline{J_N} \overline{E_2}(\overline{r_{recN}}) \cdot \overline{t_{J_N}} + J_2^C \overline{E}(\overline{r_{J_2^C}}) \cdot \overline{t_{J_2^C}} \approx_{DBIM} - j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \overline{E} \cdot \overline{\epsilon_{ref}} \overline{p_2} (\overline{E_{ref}} + \overline{E_1}) - \overline{H} \cdot \overline{\mu_{ref}} \overline{q_2} (\overline{H_{ref}} + \overline{H_1}) \right] dV_\Omega \quad (D.33)$$

On montre ainsi que la VPRT constitue une méthode simple qui met en lumière les origines physiques des couplages onde-matière dans un problème perturbatif. Elle explique aussi les hypothèses physiques à l'origine des méthodes BIM et DBIM.

Jusqu'à-là, les formulations de la VPRT sont tridimensionnelles. Dans le cadre de ces travaux, les objets (les distributions spatiales de matériaux) d'intérêts sont axisymétriques. Afin de profiter de cette propriété géométrique, nous particularisons la méthode.

## **5. Particularisation au cas monostatique**

L'ensemble de nos modélisations est général, valable aussi bien lorsque l'illumination et la réception sont proches ou éloignées de la distribution spatiale de perturbation (en zone de champ proche ou en zone de champ lointain), monostatique ou bistatique. Dans le cas monostatique, le point l'émission et celui de réception sont confondus. La source auxiliaire (cas réciproque) est donc placée

<sup>17</sup> Les inconnues du problème sont alors les perturbations  $\overline{p_1}, \overline{q_1}, \overline{p_2}, \overline{q_2}$ .

<sup>18</sup> BIM : « Born Iterative Method »

<sup>19</sup> DBIM : « Distorted Born Iterative Method »

au point d'émission du cas de référence. Si l'on utilise la même source pour ces deux problèmes, alors  $\vec{E} = \vec{E}_{ref}$  et  $\vec{H} = \vec{H}_{ref}$  et l'ensemble des modèles développés est simplifié en conséquence.

Dans la suite, nous continuerons d'utiliser le cas bistatique dans un souci de généralité mais cette particularisation au cas monostatique reste valable.

## 6. Particularisation à une distribution spatiale axisymétrique de matériaux

L'objectif ici est double :

- simplifier l'intégrale volumique (terme droit des équations ( D.28 )( D.30 )( D.31 )) et la réduire à une intégrale surfacique lorsque la distribution spatiale de propriétés des matériaux est axisymétrique.
- Profiter du solveur éléments finis pour objets axisymétriques « SHFC » disponible au CEA CESTA pour évaluer  $\vec{E}$  et  $\vec{E}_{ref}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{H}_{ref}$  en tout point de l'espace. Ce solveur utilise la décomposition en série de Fourier pour réduire le problème 3D axisymétrique à une formulation 2D [74]. On dispose ainsi des coefficients de Fourier de la décomposition en azimut (angle  $\theta$  en **Figure 22**) des champs électromagnétiques en tout point de l'espace.

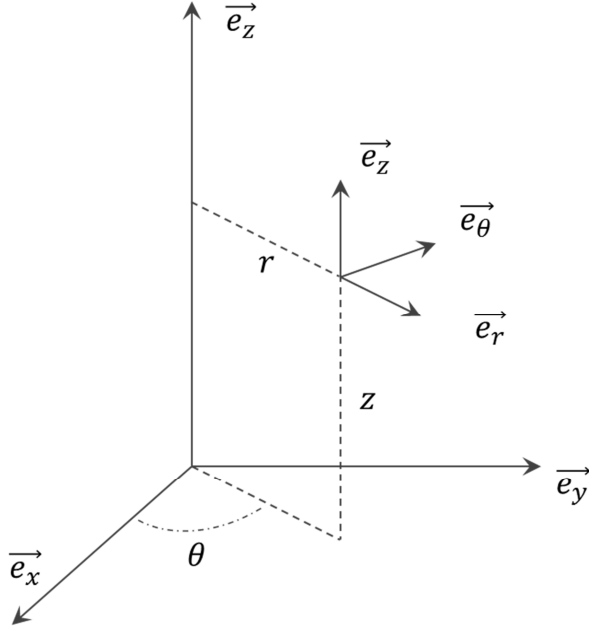
### VPRT dans le repère cylindrique

Une distribution spatiale de matériaux axisymétrique est naturellement décrite dans le repère cylindrique (**Figure 22**) où elle est indépendante de  $\theta$  [75]: nous notons alors la dépendance spatiale de la permittivité avec  $\vec{\epsilon}(r, z)$ .

Pour chacune des équations ( D.28 )( D.30 )( D.31 ), nous remarquons que l'intégrale est de même type et s'écrit comme ( D.34 ) en coordonnées cylindriques (cf. **Figure 22**).  $\vec{X}(r, z, \theta)$  est le champ électromagnétique (par exemple  $\vec{X} = \vec{E}$  ou  $\vec{H}$ ) dans la distribution spatiale de  $\vec{\alpha}$  (par exemple  $\vec{\alpha} = \vec{\epsilon}$  ou  $\vec{\mu}$ ) et  $\vec{X}$  (par exemple  $\vec{X} = \vec{E}$  ou  $\vec{H}$ ) dans la distribution avec perturbations  $\vec{\delta}$  (par exemple  $\vec{\delta} = \vec{p}$  ou  $\vec{q}$ ).

$$\iiint_{V_{\Omega}} \vec{X} \cdot [\vec{\alpha} \vec{\delta} \vec{X}] dV_{\Omega} = \iint r \int_0^{2\pi} \vec{X}(r, z, \theta) \cdot [\vec{\alpha}(r, z, \theta) \vec{\delta}(r, z, \theta) \vec{X}(r, z, \theta)] d\theta dr dz \quad (\text{D.34})$$





**Figure 22** : Repère cylindrique utilisé : orientation et notation dans le repère cartésien.

### ***Décomposition en série de Fourier***

Dans le cas d'une distribution spatiale axisymétrique, les champs électromagnétiques  $\vec{X}$  peuvent être décomposés spatialement en série de Fourier [10]. Ainsi la dépendance en  $\theta$  des champs électromagnétiques est connue et tout vecteur  $\vec{X}$  de l'espace s'écrit comme (D.35).

$$\vec{X}(r, z, \theta) = \sum_m \overline{X^m}(r, z) e^{jm\theta}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.35})$$

Où  $m$  est le numéro du mode de Fourier.

Dans le cas où  $\vec{X}$  est un champ électromagnétique ( $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$ ) dans une distribution spatiale de propriétés matériaux axisymétriques, les coefficients  $\overline{X^m}$  sont les sorties du solveur numérique disponible au CEA CESTA.

Dans le cadre de ces travaux, le cas de référence est axisymétrique. Ainsi  $(\overrightarrow{E_{ref}}, \overrightarrow{H_{ref}})$  et  $(\vec{E}, \vec{H})$  sont décomposables en série de Fourier et leurs coefficients sont évalués par le solveur disponible. Les perturbations sur cette distribution peuvent être étudiées comme étant axisymétriques (on note alors la dépendance spatiale :  $(r, z)$ ) ou non-axisymétriques (la dépendance spatiale est notée :  $(r, z, \theta)$ ).

### **Perturbations axisymétriques**

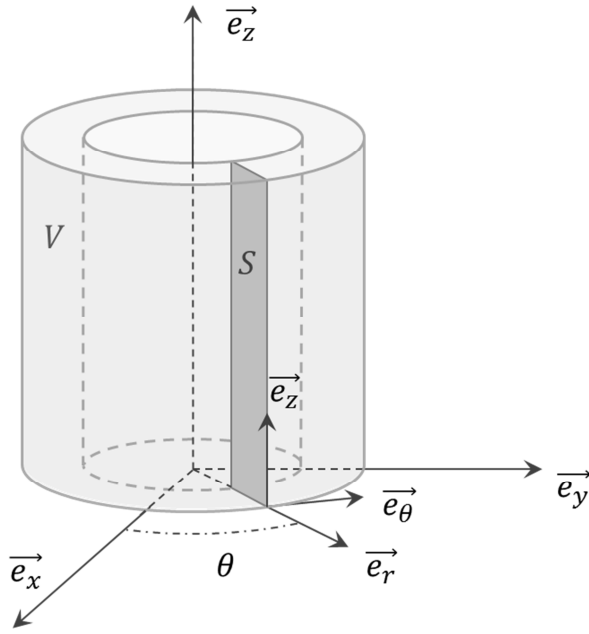
Lorsque les perturbations  $\delta(r, z)$  de la distribution spatiale sont aussi axisymétriques, en plus des champs  $(\overrightarrow{E_{ref}}, \overrightarrow{H_{ref}})$  et  $(\vec{E}, \vec{H})$ , les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{H}_1$ ,  $\vec{E}_2$  et  $\vec{H}_2$  sont aussi évaluables par le solveur à notre disposition et leur coefficients de Fourier disponibles.

Dans ce cas, en utilisant (D.35) pour  $\vec{X}$  et (D.36) pour  $\vec{X}$  on montre que le terme en  $\theta$  de l'intégrale du type de (D.34) est évalué analytiquement avec (D.37). Nous réduisons ainsi un calcul volumique tridimensionnel à un calcul bidimensionnel.

$$\vec{X}(r, z, \theta) = \sum_{\bar{m}} \vec{X}_{\bar{m}}(r, z) e^{j\bar{m}\theta}, \quad \bar{m} \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.36})$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha}\bar{\delta}\vec{X}] d\theta = 2\pi \left[ \sum_{\substack{n \\ n \in m \cap \bar{m}}} (\bar{X}^n \cdot \bar{\alpha}\bar{\delta}\bar{X}^{-n}) \right] \quad (\text{D.37})$$

Par exemple (**Figure 23**), le calcul sur une distribution spatiale cylindrique creuse de volume  $V$  est réduit à un calcul sur la surface génératrice  $S$ .



**Figure 23** : Exemple de réduction du problème sur une distribution cylindrique creuse. L'intégrale ( D.34 ) sur le volume  $V$  est réduite à l'intégrale sur la surface  $S$  grâce à la décomposition en série de Fourier des champs.

Cela est applicable aussi bien à la formulation exacte qu'aux modèles de tout ordre tant que la perturbation de l'ordre considéré est axisymétrique.

#### Cas orthotrope

Dans le cas où le tenseur  $\bar{\alpha}\bar{\delta}$  est indépendant de  $\theta$  et diagonal, alors  $\vec{X}(r, z, \theta) \cdot \bar{\alpha}\bar{\delta}(r, z) \vec{X}(r, z, \theta) = \bar{\alpha}\bar{\delta}(r, z) \vec{X}(r, z, \theta) \cdot \vec{X}(r, z, \theta)$  et (D.37) peut être réduite à (D.38).

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha}\bar{\delta}\vec{X}] d\theta = 2\pi \left[ \sum_n (\bar{\alpha}\bar{\delta}\bar{X}^n \cdot \bar{X}^{-n}) \right] \quad (\text{D.38})$$

#### Cas isotrope

Dans le cas où le tenseur  $\bar{\alpha}\bar{\delta}$  est indépendant de  $\theta$ , diagonal et que les valeurs sont identiques, alors  $\bar{\alpha}\bar{\delta} = \alpha\delta\bar{I}$  où  $\bar{I}$  est la matrice identité et (D.38) peut être réduite à (D.39).

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha}\bar{\delta}\vec{X}] d\theta = 2\pi \alpha \delta \left[ \sum_{n>0} (\bar{X}^n \cdot \bar{X}^{-n}) \right] \quad (\text{D.39})$$

### Perturbations non-axisymétriques : cas particulier du modèle au premier ordre (Born)

Lorsque les perturbations  $\vec{p}(r, z, \theta)$  de la distribution spatiale ne sont pas axisymétriques (mais que le cas de référence l'est), seuls les champs  $\vec{E}_{ref}$ ,  $\vec{H}_{ref}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont évaluables par le solveur à notre disposition. Les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{H}_1$ ,  $\vec{E}_2$  et  $\vec{H}_2$  ne le sont plus puisqu'ils sont le résultat d'une interaction entre une onde et une distribution spatiale non-axisymétrique.

Dans ce cas, évaluer analytiquement l'intégrale en  $\theta$  (D.34) pour le cas général n'est pas simple. Mais le modèle au premier ordre constitue un cas particulier. Puisque la formulation est indépendante des champs créés par les perturbations ( $\vec{E}_1$  et  $\vec{H}_1$ ,  $\vec{E}_2$  et  $\vec{H}_2$ ), seules les perturbations  $\vec{p}(r, z, \theta)$  sont dépendantes de  $\theta$ . L'intégrale en  $\theta$  n'est toujours pas évaluable analytiquement mais est réduite à la simple dépendance en  $\theta$  des perturbations. Dans le cadre du problème direct, évaluer les répercussions de perturbations des matériaux connus (3D sur une distribution spatiale de référence axisymétrique) sur le champ électromagnétique aux points de mesures, est alors possible au premier ordre. Dans le cadre du problème inverse en matériaux, cette dépendance spatiale des perturbations à  $\theta$  augmente significativement le nombre d'inconnues.

Ainsi, le modèle au premier ordre est du type de (D.40) où la dépendance spatiale de chaque terme est précisée et où  $\vec{X}$  et  $\vec{X}$  sont décomposables en mode de Fourier.

$$\iiint_{V_\Omega} \vec{X} \cdot [\vec{\alpha} \vec{\delta} \vec{X}] dV_\Omega = \iint r \int_0^{2\pi} \vec{X}(r, z, \theta) \cdot [\vec{\alpha}(r, z) \vec{\delta}(r, z, \theta) \vec{X}(r, z, \theta)] d\theta dr dz \quad (\text{D.40})$$

Se donner un modèle<sup>20</sup> d'évolution de perturbation  $\vec{\delta}$  en  $\theta$  permet alors de réduire la résolution d'un problème tridimensionnel à une équation bidimensionnelle en calculant analytiquement l'intégrale en  $\theta$ .

Puisque les perturbations  $\vec{\delta}(r, z, \theta)$  sont nécessairement  $2\pi$  périodiques en  $\theta$ , un modèle possible est de les décomposer en série de Fourier<sup>21</sup> (D.41).

$$\vec{\delta}(r, z, \theta) = \sum_M \vec{\delta}_M(r, z) e^{jM\theta}, \quad M \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.41})$$

Dans ce cas, et en utilisant les décompositions (D.35) et (D.36) on montre que l'intégrale en  $\theta$  est évaluée analytiquement (D.42).

On évalue ainsi l'impact de perturbations tridimensionnelles sur un cas de référence axisymétrique à travers une formulation surfacique en injectant (D.42) dans (D.40).

<sup>20</sup> Le choix du modèle constitue un choix a priori. Le modèle le plus pertinent dépend du problème et de la connaissance a priori de la répartition azimutale des perturbations.

<sup>21</sup> Bien qu'assez général, le modèle en série de Fourier n'est pas toujours le plus pertinent. Il convient particulièrement lorsque la distribution spectrale de perturbations en fonction de  $\theta$  est ramassée, le nombre de mode de Fourier nécessaire étant alors faible.

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha} \bar{\delta} \vec{X}] d\theta = 2\pi \sum_{\bar{m}} \vec{X}_{\bar{m}} \cdot \sum_M \bar{\alpha} \bar{\delta}_M \vec{X}_{-(\bar{m}+M)} \quad (\text{D.42})$$

Pour le problème direct, l'évaluation de l'impact de perturbations  $\bar{\delta}(r, z, \theta)$  tridimensionnelles sur le champ électromagnétique nécessite alors la connaissance des coefficients de la série de Fourier  $\bar{\delta}_M(r, z)$ .

Pour le problème inverse en matériau, les coefficients de la série de Fourier  $\bar{\delta}_M(r, z)$  sont les inconnus du problème.

Dans la pratique, le nombre de mode  $\bar{m}$  (nombre de mode de Fourier du cas réciproque) et  $m$  (nombre de mode de Fourier du cas de référence) est donné par le solveur éléments finis<sup>22</sup>. Le nombre de mode  $M$  est fonction de la dispersion spectrale des perturbations en  $\theta$  pour chaque  $(r, z)$  et de la précision recherchée.

Nous faisons remarquer que la perturbation  $\bar{\delta}_{M=0}(r, z)$  correspond à la moyenne des perturbations  $\bar{\delta}(r, z, \theta)$  en  $\theta$ . L'équation ( D.42 ) peut être décomposée comme ( D.43 ) où l'on retrouve bien l'équation ( D.37 ) à travers le premier terme du membre de droite. Nous montrons ainsi que le cas où les perturbations ne sont pas axisymétriques est une généralisation qui peut s'écrire comme la somme d'un cas axisymétrique (une perturbation moyenne indépendante de l'azimut :  $\bar{\delta}_0$ ) et de termes tridimensionnels ( $\bar{\delta}_{M \neq 0}$ ).

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha} \bar{\delta} \vec{X}] d\theta = 2\pi \left[ \sum_{\bar{m}} \vec{X}_{\bar{m}} \cdot \bar{\alpha} \bar{\delta}_0 \vec{X}_{-\bar{m}} + \sum_{\bar{m}} \vec{X}_{\bar{m}} \cdot \sum_M \bar{\alpha} \bar{\delta}_M \vec{X}_{-(\bar{m}+M)} \right] \quad (\text{D.43})$$

#### Cas orthotrope

Si en plus, la distribution de référence et les perturbations sont orthotropes, c'est-à-dire  $\bar{\alpha}(r, z) \bar{\delta}(r, z, \theta) = [\bar{\alpha}(r, z) \cdot \bar{\delta}(r, z, \theta)] \bar{I}$  alors l'intégrale ( D.40 ) se simplifie en ( D.44 ).

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha} \bar{\delta} \vec{X}] d\theta = 2\pi \sum_M \sum_{\bar{m}} \bar{\alpha} \bar{\delta}_M \vec{X}_{\bar{m}} \cdot \vec{X}_{-(\bar{m}+M)} \quad (\text{D.44})$$

#### Cas isotrope

Le cas où les perturbations  $\bar{\delta}(r, z, \theta)$  sont isotropes est un cas orthotrope particulier dont les valeurs diagonales de  $\bar{\delta}(r, z, \theta)$  sont identiques. Dans ce cas,  $\bar{\delta}(r, z, \theta) = \delta(r, z, \theta) \bar{I}$  et quel que soit  $\bar{\alpha}(r, z)$  axisymétrique et symétrique, on montre ( D.45 ).

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} \cdot [\bar{\alpha} \bar{\delta} \vec{X}] d\theta = 2\pi \alpha \sum_M \delta_M \Gamma_M \quad (\text{D.45})$$

Où  $\Gamma_M$  est donné par ( D.46 ).

<sup>22</sup> Le nombre de mode de Fourier nécessaire à l'évaluation des champs électromagnétiques dépend en particulier de l'objet (de la plus grande distance à l'axe), de l'angle d'incidence de l'onde incidence par rapport à l'axe de symétrie et de la distance entre la source et le domaine perturbé.

$$\Gamma_M = \sum_{\bar{m}} \vec{X}_{\bar{m}} \cdot \vec{X}_{-(\bar{m}+M)} \quad (\text{D.46})$$

### Exemple de modélisation : écriture matricielle

Nous proposons d'illustrer sur un exemple le résultat de ces modélisations. Cet exemple est défini ainsi :

- les différences entre les sources du cas de référence et de la mesure ne sont pas prises en compte :
  - $\sum_x J_x^c \vec{E}(\vec{r}_{J_x^c}) \cdot \vec{t}_{J_x^c} = 0$
- La distribution spatiale de propriétés matériaux de référence est axisymétrique :
  - Au premier ordre, les champs électromagnétiques sont décomposables en série de Fourier.
- La distribution spatiale de perturbations des propriétés matériaux est axisymétrique :
  - L'intégrale volumique peut être réduite à une intégrale surfacique
- La source test est un dipôle ponctuel unitaire placé en  $\vec{r}_{rec\ 1}$  et de direction  $\vec{t}_{J_1}$ :
  - $\sum_N \bar{J}_N \vec{E}_1(\vec{r}_{rec\ N}) \cdot \vec{t}_{J_N} = \vec{E}_1(\vec{r}_{rec\ 1}) \cdot \vec{t}_{J_1}$
- Le cas est bistatique :
  - $(\vec{E}, \vec{H}) \neq (\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref})$

Sous ces conditions, la formulation de la VPRT (valide sous l'hypothèse que les propriétés matériaux soient réciproques, c'est-à-dire que leurs tenseurs soient symétriques) est donnée par (D.47).

$$[\vec{E}_{mes}(\vec{r}_{rec\ 1}) - \vec{E}_{ref}(\vec{r}_{rec\ 1})] \cdot \vec{t}_{J_1} = -2\pi j\omega \iint_{z,r} [\Upsilon - \Lambda] r dr dz \quad (\text{D.47})$$

Où  $\Upsilon$  et  $\Lambda$  sont données par (D.48) et (D.49) pour la formulation au premier ordre.

$$\Upsilon \approx_{1^{ier}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{E}^m \cdot \bar{\epsilon}_{ref} \bar{p}_1 \vec{E}_{ref}^{-m}) \quad (\text{D.48})$$

$$\Lambda \approx_{1^{ier}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{H}^m \cdot \bar{\mu}_{ref} \bar{q}_1 \vec{H}_{ref}^{-m}) \quad (\text{D.49})$$

- De plus, si la distribution des propriétés matériaux de référence et des perturbations sont isotropes, on obtient (D.50) et (D.51).

$$\Upsilon \approx_{1^{ier}} \epsilon_{ref} p_1 \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{E}^m \cdot \vec{E}_{ref}^{-m}) \right] \quad (\text{D.50})$$

$$\Lambda \approx_{1ier} \mu_{ref} q_1 \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{H}^m \cdot \vec{H}_{ref}^{-m}) \right] \quad (\text{D.51})$$

Ainsi, l'écart entre les champs électriques rétrodiffusés par l'objet mesuré  $\vec{E}_{mes}$  et celui rétrodiffusé par l'objet de référence  $\vec{E}_{ref}$  au point de mesure  $\vec{r}_{rec1}$  est exprimé comme dépendant :

- Du cas de référence dont les quantités sont repérées par l'indice « ref » (parfaitement connues puisqu'il s'agit d'un cas numérique).
- Du cas réciproque dont les quantités sont repérées par une barre supérieure (parfaitement connues puisqu'il s'agit d'un cas numérique).
- Des perturbations  $\vec{p}_1$  et  $\vec{q}_1$  de la distribution spatiale des propriétés matériaux.

Ainsi à  $\vec{p}_1$  et  $\vec{q}_1$  connus, il est possible d'évaluer l'impact de ces perturbations sur le champ électrique au point de mesure. En particulier, cela permet de propager simplement les incertitudes (problème direct). Pour le problème inverse en matériaux, l'écart entre la mesure et le cas de référence au point de réception ( $\vec{E}_{mes}(\vec{r}_{rec1}) - \vec{E}_{ref}(\vec{r}_{rec1})$ ) est connu et la formulation ( D.47 ) est à inverser pour déterminer les perturbations  $\vec{p}_1$  et  $\vec{q}_1$  qui expliquent cet écart.

Une fois discrétisée, l'équation ( D.47 ) peut être écrite sous forme matricielle plus pratique pour une utilisation numérique. Par exemple, ( D.47 ) avec ( D.50 ) et ( D.51 ) peut s'écrire comme ( D.52 ) où  $\mathbf{B}_\varepsilon$  est le terme de couplage énergétique d'origine électrique et  $\mathbf{B}_\mu$  celui d'origine magnétique.  $\mathbf{A}_{mes-ref}$  est l'écart entre la mesure et le cas de référence aux  $N$  points de réception  $\vec{r}_{recN}$ .

$\mathbf{A}_{mes-ref} \approx_{1ier} [\mathbf{B}_\varepsilon \quad \mathbf{B}_\mu] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.52})$
--

Exemple:

Comme représenté en **Figure 24**, deux volumes cylindriques creux et coaxiaux  $V_1$  et  $V_2$  sont soumis à une sollicitation électromagnétique de fréquence  $f$  dont la source est extérieure à  $V_1 \cup V_2$ . Chaque cylindre est composé d'un matériau aux propriétés électromagnétiques homogènes et isotropes à la fréquence  $f$ :  $(\varepsilon_{1,ref}, \mu_{1,ref})$  pour le cylindre n°1,  $(\varepsilon_{2,ref}, \mu_{2,ref})$  pour le cylindre n°2. La sollicitation électromagnétique crée un champ électromagnétiques alors décomposable en série de Fourier dans le volume de chaque cylindre:  $(\vec{E}_{1,ref}, \vec{H}_{1,ref})$  dans le volume du cylindre n°1,  $(\vec{E}_{2,ref}, \vec{H}_{2,ref})$  dans le volume du cylindre n°2. Les perturbations des propriétés des matériaux sont aussi considérées homogènes et isotropes. Dans les cylindres n°1 et n°2, elles sont notées respectivement  $(p_{1,1}, q_{1,1})$  et  $(p_{2,1}, q_{2,1})$ . Le problème est alors réduit à un problème surfacique  $S_1 \cup S_2$ . La sensibilité électromagnétique aux perturbations du champ électrique au point d'observation  $\vec{r}_{rec1}$  et dans la direction de polarisation  $\vec{t}_{j_1}$  est alors régi par l'équation ( D.53 ) avec ( D.50 ) et ( D.51 ).

$$\mathbb{Q}_{mes-ref} \approx_{1ier} \left[ \iint_{S_1} [\Upsilon - \Lambda] dS_1 + \iint_{S_2} [\Upsilon - \Lambda] dS_2 \right] \quad (\text{D.53})$$

Où  $\mathbb{Q}_{mes-ref} = [\vec{E}_{mes}(\vec{r}_{rec1}) - \vec{E}_{ref}(\vec{r}_{rec1})] \cdot \vec{t}_{j_1} / -2\pi j \omega$

De plus, les champs  $(\vec{E}_{1,ref}, \vec{H}_{1,ref})$  et  $(\vec{E}_{2,ref}, \vec{H}_{2,ref})$  sont supposés homogènes et isotropes dans chaque volume  $V_1$  et  $V_2$ <sup>23</sup>. Ainsi, (D.53) s'écrit :

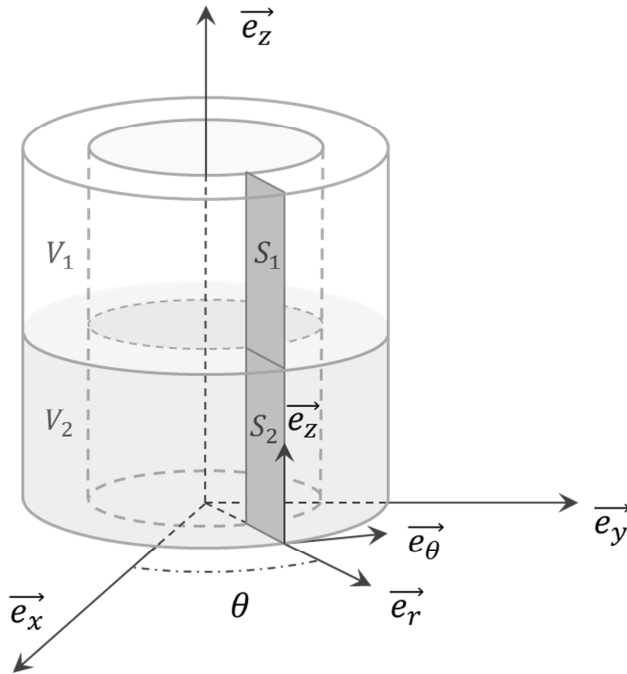
$$\mathbb{Q}_{mes-ref} \approx_{1ier} ([Y_1 - \Lambda_1] S_1 + [Y_2 - \Lambda_2] S_2) \quad (\text{D.54})$$

Soit sous forme matricielle :

$$\mathbb{Q}_{mes-ref} \approx_{1ier} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 \\ p_{1,1} & p_{2,1} & q_{1,1} & q_{2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ q_{1,1} \\ q_{2,1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.55})$$

Ou en injectant les expressions de  $Y$  et  $\Lambda$ :

$$\mathbb{Q}_{mes-ref} \approx_{1ier} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{E}_1^m \cdot \vec{E}_{1,ref}^{-m}) \right] S_1 \\ \varepsilon_{2,ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{E}_2^m \cdot \vec{E}_{2,ref}^{-m}) \right] S_2 \\ -\mu_{1,ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{H}_1^m \cdot \vec{H}_{1,ref}^{-m}) \right] S_1 \\ -\mu_{2,ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{H}_2^m \cdot \vec{H}_{2,ref}^{-m}) \right] S_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ q_{1,1} \\ q_{2,1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.56})$$



**Figure 24 :** Configuration de la distribution spatiale servant d'exemple à l'écriture matricielle de la VPRT au premier ordre.

Ce qui explicite alors la formulation (D.52).

<sup>23</sup> Cela ne correspond pas à un état physique mais à une discrétisation dont les volumes élémentaires sont  $V_1$  et  $V_2$  et les fonctions de bases constantes. Le lecteur peut alors imaginer  $V_1$  et  $V_2$  (ou  $S_1$  et  $S_2$ ) comme des éléments d'un maillage.

### III. CONCLUSION

Un modèle de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique et à la perméabilité magnétique est proposé. Il permet d'estimer  $\vec{B}_\varepsilon(\varepsilon, \mu)$  et  $\vec{B}_\mu(\varepsilon, \mu)$ . Il résulte de l'extension de la VPRT développée par P. Imperatore. Au premier ordre nous soulignons les liens de cette extension avec l'approximation de Born et la méthode RECY. Une formulation exacte et générale est obtenue à partir de laquelle un modèle multi-ordre est établi.

L'influence de différentes hypothèses est explicitée : propriétés matériaux orthotropes, isotropes, configuration de test électromagnétique monostatique, etc... En particulier l'hypothèse d'axisymétrie de la distribution spatiale de matériaux est introduite réduisant le système tridimensionnel à un système bidimensionnel. Il est aussi montré qu'au premier ordre, il est possible de considérer le cas de référence axisymétrique mais d'obtenir une sensibilité tridimensionnelle. Cet aspect ouvre des perspectives d'applications inattendues au CEA-CESTA : le couplage de cette méthode avec le code SHFC (code « full-wave » pour objet axisymétrique) permettrait d'étudier l'influence de perturbations tridimensionnelles sur un objet initialement conçu comme axisymétrique tout en profitant des performances numériques de ce code (précision, simplicité de maillage et rapidité).

Ce chapitre met fin à la modélisation de la sensibilité du champ électromagnétique à  $\varepsilon$  et  $\mu$ . L'objet du chapitre suivant est alors de proposer et d'établir un modèle équivalent lorsque l'interaction onde-matière est réduite à une condition surfacique.





## **E. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE**

<b>E. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE</b>	<b>83</b>
<b>I. Le problème direct : le rayonnement des courants électromagnétiques surfaciques</b>	<b>85</b>
1. L'intégrale de rayonnement de courants surfaciques	85
2. Interprétation physique	87
<b>II. Sensibilité du problème direct : sensibilité du champ électrique rétrodiffusé à l'impédance de surface de Leontovich</b>	<b>88</b>
1. Sensibilité d'ordre 1	89
Sensibilité du champ électrique rétrodiffusé aux propriétés électromagnétiques : un lien étroit avec la sensibilité des densités de courants électromagnétiques surfaciques	89
Sensibilité du courant magnétique à l'impédance de surface de Léontovich : un lien étroit avec le courant électrique	90
Sensibilité du courant électrique à l'impédance de surface de Léontovich	92
Sensibilité du courant électrique d'optique physique à l'impédance de Léontovich	92
Sensibilité du coefficient de réflexion d'optique physique à l'impédance de Léontovich	93
Expressions concises de la sensibilité du courant électrique d'optique physique à l'impédance de Léontovich	93
Résultats : Sensibilité du champ électrique à l'impédance de surface de Léontovich	93
Modèle 1 : modèle naturel explicite en impédance	93
Modèle 2 : modèle optique physique, exact mais réducteur	94
Modèle 3 : modèle naturel implicite en impédance	95
Modèle 4 : modèle hybride	95
Modèle 5 : modèle champ lointain	96
Modèle 6 : modèle « Born en impédance »	96
2. Sensibilité d'ordre supérieur	96
<b>III. Conclusion</b>	<b>97</b>

# I. LE PROBLEME DIRECT : LE RAYONNEMENT DES COURANTS ELECTROMAGNETIQUES SURFACIQUES

Nous rappelons le problème auquel nous nous intéressons : une surface fermée  $S$  baigne dans un milieu aux propriétés radioélectriques homogènes et isotropes. Une source extérieure à cette surface est à l'origine d'une onde électromagnétique de fréquence  $f$  qui se propage dans le milieu environnant et interagit avec la surface  $S$ . L'interaction onde-surface dépend en particulier des caractéristiques radioélectriques de la surface et de la fréquence de l'onde incidente. Le résultat de cette interaction onde-surface est modélisé par des densités surfaciques de courants électriques et magnétiques sur la surface  $S$ . Ces courants rayonnent dans le milieu environnant : ils créent une onde électromagnétique qui est mesurée par une antenne supposée ponctuelle placée en un point quelconque  $T$ . L'onde électromagnétique mesurée est alors le résultat global du rayonnement de toutes les densités (locales) de courants électromagnétiques. Ce lien entre les densités de courants surfaciques et le champ électrique au point  $T$  est régi par l'intégrale de rayonnement.

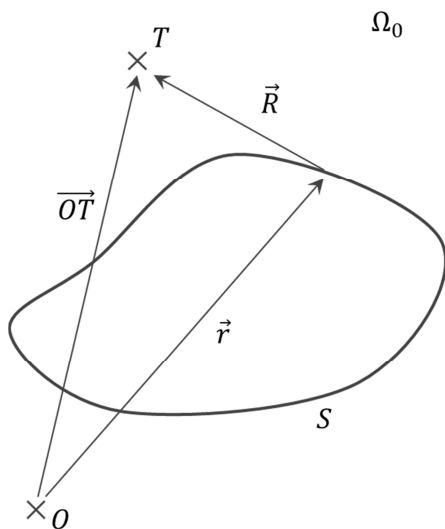
## 1. L'intégrale de rayonnement de courants surfaciques

Ici, l'objectif est d'obtenir une formulation analytique de l'intégrale de rayonnement en champ proche propice à la suite de nos travaux. Elle permettra d'établir une expression simple de la sensibilité du champ à l'impédance locale dans le paragraphe suivant.

Nous cherchons le champ électrique total  $\vec{E}^t(T)$  en un point quelconque  $T$  de l'espace.

On considère une surface  $S$  baignant dans un milieu  $\Omega_0$ . Des densités surfaciques de courants électriques  $\vec{J}_S$  et magnétique  $\vec{M}_S$  existent sur cette surface  $S$ . Ils sont le résultat de l'interaction entre l'onde incidente de fréquence  $f$  et la surface. A cette fréquence, le milieu environnant  $\Omega_0$  possède des caractéristiques  $(\epsilon_0, \mu_0)$  considérées homogènes et isotropes.

Comme schématisé sur la **Figure 25**, la surface  $S$  est décrite spatialement par le vecteur  $\vec{r}$  dans le repère d'origine  $O$ . Nous rappelons que nous notons  $\vec{e}_{OT}$  le vecteur directeur unitaire de tout vecteur  $\vec{OT}$ .



**Figure 25** : Schéma de la configuration étudiée.

Les équations gouvernant l'état de  $\vec{E}^t(T)$  dans cette configuration sont tirées de [76, pp. 254-288]. Nous les rappelons ici :

Dans le milieu  $\Omega_0$ , la somme des sources de densité surfacique de courants électrique  $\vec{J}_S$  et magnétique  $\vec{M}_S$  crée des potentiels électrique  $\vec{A}$  et magnétique  $\vec{F}$  globaux (E.1)(E.2).

$$\vec{A}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \vec{J}_S \frac{e^{-jk_0R}}{R} dS \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{F}(T) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \iint \vec{M}_S \frac{e^{-jk_0R}}{R} dS \quad (\text{E.2})$$

$$\text{Où : } k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \text{ et } \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$$

Dans le milieu  $\Omega_0$ , ces potentiels créent des champs électriques et magnétiques exprimés par (E.3)(E.4) et (E.5) :

$$\vec{E}^A = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{H}^A \quad (\text{E.3})$$

$$\vec{E}^F = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \quad (\text{E.4})$$

$$\vec{H}^A = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{E.5})$$

Le champ électrique total au point  $T$  est alors exprimé comme la somme de deux champs électriques  $\vec{E}^A$  et  $\vec{E}^F$  créés par les potentiels  $\vec{A}$  et  $\vec{F}$ .

$$\vec{E}^t(T) = \vec{E}^A(T) + \vec{E}^F(T) \quad (\text{E.6})$$

Lorsqu'on ne s'intéresse pas aux potentiels, l'ensemble de ces équations peut être condensé pour lier directement le champ rayonné aux densités surfaciques de courant. En effet, en utilisant les astuces de géométrie différentielle comme [76, pp. 282-283], et en posant  $\alpha = jk_0R$  et  $\gamma = (1 + \alpha)/\alpha^2$  on obtient (E.7) à partir des équations (E.4) et (E.2).

$$\vec{E}^F = \frac{-k_0^2}{4\pi} \iint \vec{e}_R \wedge \vec{M}_S \gamma e^{-\alpha} dS \quad (\text{E.7})$$

De la même façon, on obtient (E.8) en partant de (E.3), (E.5) et (E.1).

$$\vec{E}^A = \frac{-k_0^2}{4\pi} \iint [2\gamma\vec{J}_S\eta_0 + (3\gamma + 1)\vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{J}_S\eta_0)] \left(\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\right) dS \quad (\text{E.8})$$

Et le champ électrique total  $\vec{E}^t(T)$  en tout point T de l'espace à partir de (E.6)(E.7)(E.8) est alors donné par (E.9),

$$\vec{E}^t = \frac{-k_0^2}{4\pi} \iint [2\gamma \vec{J}_S \eta_0 + \vec{e}_R \wedge \{ (3\gamma + 1)(\vec{e}_R \wedge \vec{J}_S \eta_0) + (1 + 1/\alpha) \vec{M}_S \}] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} dS \quad (\text{E.9})$$

ou encore (E.10) qui comme nous le verrons, est une forme plus explicite.

$$\vec{E}^t(T) = \frac{jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \iint [2\gamma \vec{J}_S \eta_0 + \vec{e}_R \wedge \{ (3\gamma + 1)(\vec{e}_R \wedge \vec{J}_S \eta_0) + (1 + 1/\alpha) \vec{M}_S \}] \frac{\|\vec{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} dS \quad (\text{E.10})$$

L'expression (E.10) est équivalente à (E.6) - (E.2) mais à notre connaissance, la forme (E.10) est originale. Son intérêt réside dans sa simplicité qui permet de simplifier son implémentation et de mettre en lumière les hypothèses sous-jacentes aux modèles champ lointain et hautes fréquences.

## 2. Interprétation physique

Bien que visuellement lourde, l'expression (E.10) est mise sous une forme simple par rapport à (E.6)-(E.2), en effet :

Les calculs différentiels nécessaires pour l'évaluation du rotationnel des expressions (E.3)-(E.5) sont éliminés. L'implémentation numérique est alors facilitée et les erreurs de différentiation numériques éliminées.

1. Il ne reste que l'intégrale surfacique qui nécessite généralement une discrétisation pour une résolution numérique. Une description analytique de la surface permet d'aller plus loin dans la simplification.
2. Les changements de variables  $\alpha$  et  $\gamma$  sont choisis tels qu'ils définissent les facteurs poids  $2\gamma$ ,  $(3\gamma + 1)$  et  $(1 + 1/\alpha)$  associés aux courants électriques et magnétiques (cf. (E.10)). Ainsi, on peut par exemple étudier la contribution de  $\vec{J}_S$  par rapport à sa composante normale à la direction d'observation ( $\vec{e}_R \wedge \vec{J}_S$ ) ou au courant magnétique  $\vec{e}_R \wedge \vec{M}_S$ .
3. Lorsque  $k_0 R \gg 1$  alors  $\alpha \rightarrow \infty$  et  $\gamma \rightarrow 0$ . L'équation (E.10) est alors réduite à (E.11). Cette approximation peut être appelée « approximation haute fréquence »,  $\vec{E}_{HF}^t$ .

$$\vec{E}_{HF}^t(T) = \frac{jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \iint \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{J}_S \eta_0 + \vec{M}_S) \frac{\|\vec{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} dS \quad (\text{E.11})$$

4. Lorsque  $k_0 R \gg 1$  et que  $R \rightarrow \infty$  alors  $\|\vec{OT}\| \cong R$  et  $\vec{e}_R$  et  $\vec{e}_{OT}$  sont quasiment colinéaires donc  $\vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT} \cong 1$ . Cette approximation est appelée « approximation champ lointain »  $\vec{E}_{CL}^t$ . L'équation ( E.11 ) se réduit à ( E.12 ).

$$\vec{E}_{CL}^t(T) = \frac{jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0\|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \vec{e}_{OT} \wedge \iint (\vec{e}_{OT} \wedge \vec{J}_S \eta_0 + \vec{M}_S) e^{jk_0 \vec{r} \cdot \vec{e}_{OT}} dS \quad (\text{E.12})$$

5. Pour des applications de SER, il est pratique et courant de définir une grandeur  $\vec{E}_0^t(T)$  indépendante de la distance  $R$ .  $\vec{E}_0^t(T)$  est obtenue en divisant ( E.12 ) par  $\frac{e^{-jk_0\|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|}$ . On obtient alors ( E.13 ) et la SER (Surface Equivalente Radar) est obtenue grâce à ( E.14 ).

$$\vec{E}_0^t(T) = \frac{jk_0}{4\pi} \vec{e}_{OT} \wedge \iint (\vec{e}_{OT} \wedge \vec{J}_S \eta_0 + \vec{M}_S) e^{jk_0 \vec{r} \cdot \vec{e}_{OT}} dS \quad (\text{E.13})$$

$$\text{SER}(T) = 10 \log_{10} \left( 4\pi \left| \vec{E}_0^t(T) \right|^2 \right) \quad (\text{E.14})$$

Le rayonnement d'une surface chargée de courants surfaciques  $\vec{J}_S$  et  $\vec{M}_S$  en tout point  $T$  de l'environnement extérieur  $\Omega_0$  est explicité. Nous regardons alors comment varie le rayonnement en  $T$  lorsque les caractéristiques radioélectriques de la surface varient. Dans la suite, nous utiliserons majoritairement la formule la plus générale ( E.10 ).

## II. SENSIBILITE DU PROBLEME DIRECT : SENSIBILITE DU CHAMP ELECTRIQUE RETRODIFFUSE A L'IMPEDANCE DE SURFACE DE LEONTOVICH

Dans cette partie, nous cherchons à établir un modèle décrivant le lien entre le champ électrique rétrodiffusé par un objet réel et mesuré en chambre anéchoïque  $\vec{E}_{mes}$  et le champ électrique calculé sur un objet de référence quasi-identique  $\vec{E}_{ref}$ . Seules les caractéristiques radioélectriques  $X$  des matériaux constituant ces objets les différencient. En particulier, leurs géométries (leurs surfaces) sont identiques. Puisque ces différences sont considérées faibles, on propose un modèle perturbatif du type développement de Taylor :

$$\vec{E}_{mes}(X + dX) = \vec{E}_{ref}(X) + \sum_m \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \vec{E}_{ref}}{\partial X^m} dX^m.$$

Dans le cadre du problème inverse, il faut déterminer  $dX$  à partir d'un modèle CAO du cas de référence et d'une mesure de l'objet réel. Les champs  $\vec{E}_{mes}(X + dX)$  et  $\vec{E}_{ref}(X)$  sont connus et il manque  $\frac{\partial^m \vec{E}_{ref}}{\partial X^m}$  pour déterminer  $dX$ .

Dans le cadre du problème direct, en propagation d'incertitudes par exemple, l'objet de référence est connu et on cherche à évaluer l'impact de variations  $dX$  sur le champ rétrodiffusé. Le champ  $\vec{E}_{ref}(X)$  et la perturbation  $dX$  sont connus et il manque  $\frac{\partial^m \vec{E}_{ref}}{\partial X^m}$  pour déterminer  $\vec{E}_{mes}(X + dX)$ .

Que ce soit pour le problème direct ou inverse, nous remarquons que la sensibilité du cas de référence aux propriétés matériaux  $\frac{\partial^m \vec{E}_{ref}}{\partial X^m}$  est essentielle à la résolution du problème.

## 1. Sensibilité d'ordre 1

Dans cette partie, nous établissons le modèle au premier ordre, c'est-à-dire que nous cherchons à évaluer  $\frac{\partial^{m=1} \vec{E}_{ref}}{\partial X^{m=1}}$ .

Nous commençons par mettre en évidence le lien entre la sensibilité aux propriétés matériaux du champ électrique rétrodiffusé au point de mesure  $\left(\frac{\partial \vec{E}^t(T)}{\partial X}\right)$  et la sensibilité aux propriétés des matériaux des densités de courants électromagnétiques  $\left(\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial X}\right)$  et  $\left(\frac{\partial \vec{M}_S}{\partial X}\right)$ . Puis, (p. 90) nous dérivons une expression pour  $\frac{\partial \vec{M}_S}{\partial X}$  et nous proposons, dans un souci de simplicité, d'utiliser un modèle en impédance de Léontovich  $Z_k$  [2].  $\frac{\partial \vec{M}_S}{\partial X}$  est alors évalué comme étant  $\frac{\partial \vec{M}_S}{\partial Z_k}$ . Sous cette hypothèse, nous mettons en évidence le lien entre la sensibilité du courant magnétique à l'impédance  $\left(\frac{\partial \vec{M}_S^{Léon}}{\partial Z_k}\right)$  et celle du courant électrique  $\left(\frac{\partial \vec{J}_S^{Léon}}{\partial Z_k}\right)$ . Ensuite (p. 92), nous nous intéressons à la sensibilité du courant électrique à l'impédance de Léontovich  $\left(\frac{\partial \vec{J}_S^{Léon}}{\partial Z_k}\right)$ : nous restreignons cette étude en utilisant le modèle d'optique physique. La sensibilité du courant électrique à l'impédance est alors évalué grâce à un modèle d'optique physique :  $\frac{\partial \vec{J}_S^{Léon}}{\partial Z_k} \cong \frac{\partial \vec{J}_S^{O.P}}{\partial Z_k}$ . La dernière partie (p. 93) synthétise les modèles de sensibilité (les expressions de  $\frac{\partial \vec{E}^t(T)}{\partial Z_k}$ ) pour différentes approximations.

### ***Sensibilité du champ électrique rétrodiffusé aux propriétés électromagnétiques : un lien étroit avec la sensibilité des densités de courants électromagnétiques surfaciques***

Les propriétés  $(\epsilon_0, \mu_0)$  faisant référence à l'environnement extérieur  $\Omega_0$ , il est important de noter l'absence des caractéristiques radioélectriques de la surface dans la formulation de l'intégrale de rayonnement ( **E.10** ). Ces caractéristiques radioélectriques interviennent dans l'interaction entre l'onde incidente et la surface. Elles permettent donc d'évaluer  $\vec{J}_S$  et  $\vec{M}_S$  lorsque l'objet est soumis à une onde électromagnétique incidence. Une fois  $\vec{J}_S$  et  $\vec{M}_S$  connus, ( **E.10** ) permet d'évaluer le champs  $\vec{E}^t(T)$  total au point  $T$ .

Pour connaître la sensibilité de  $\vec{E}^t(T)$  à des variations des propriétés radioélectriques  $X$  nous proposons d'évaluer  $\frac{\partial \vec{E}^t(T)}{\partial X}$ .

Partant de ( **E.10** ) et puisque seuls  $\vec{J}_S$  et  $\vec{M}_S$  dépendent des propriétés radioélectriques  $X$ , nous arrivons à ( **E.15** ).

$$\frac{\partial \vec{E}^t(T)}{\partial X} = \frac{-jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \quad (\text{E.15})$$



$$\iint \left[ 2\gamma \frac{\partial \vec{J}_S}{\partial X} \eta_0 + \vec{e}_R \wedge \left\{ (3\gamma + 1) \left( \vec{e}_R \wedge \frac{\partial \vec{J}_S}{\partial X} \eta_0 \right) + (1 + 1/\alpha) \frac{\partial \vec{M}_S}{\partial X} \right\} \right] \frac{\|\vec{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} dS$$

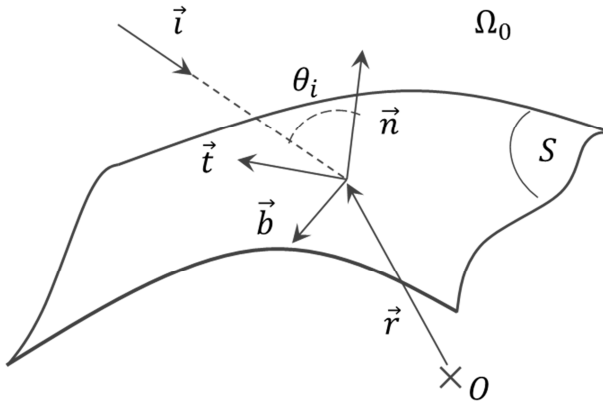
L'évaluation de  $\frac{\partial \vec{E}^t(T)}{\partial X}$  passe par celle de  $\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial X}$  et  $\frac{\partial \vec{M}_S}{\partial X}$ , respectivement la sensibilité du courant électrique et magnétique aux propriétés électromagnétiques de la surface.

### **Sensibilité du courant magnétique à l'impédance de surface de Léontovich : un lien étroit avec le courant électrique**

On peut montrer que l'impédance de Léontovich  $\vec{Z}$  vérifie localement l'équation (E.16).

$$\vec{M}_S^{Léon} = -\vec{n} \wedge \left( \vec{Z} \vec{J}_S^{Léon} \right) \quad (\text{E.16})$$

Elle lie ainsi le courant magnétique  $\vec{M}_S^{Léon}$  au courant électrique  $\vec{J}_S^{Léon}$  en un point de la surface de normale sortante  $\vec{n}$ . L'exposant « Léon » est ajouté pour signifier le modèle sous-jacent. Le courant  $\vec{J}_S^{Léon}$  étant surfacique (tout comme  $\vec{J}_S$ ), il peut être décomposé suivant deux vecteurs  $(\vec{t}, \vec{b})$  formant avec la normale locale  $\vec{n}$ , un repère de base orthonormée directe  $(\vec{t}, \vec{b}, \vec{n})$  : le vecteur  $\vec{n}$  (normale sortante à la surface) forme avec la direction d'incidence locale  $\vec{i}$ , le plan d'incidence. On définit  $\vec{b} = \vec{i} \wedge \vec{n} / \|\vec{i} \wedge \vec{n}\|$  et  $(\vec{t}, \vec{b})$  sont alors tangents à la surface, comme sur la **Figure 26**.



**Figure 26** : Notation, repère et vecteurs utilisés pour décrire l'interaction onde-surface sur la surface S.

Dans ce repère, la formule (E.16) peut être réécrite comme (E.17) ou (E.18)

$$\vec{M}_S^{Léon} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \left( \begin{pmatrix} Z_t & Z_{bt} & Z_{nt} \\ Z_{tb} & Z_b & Z_{nb} \\ Z_{tn} & Z_{bn} & Z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{S,t}^{Léon} \\ J_{S,b}^{Léon} \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{(\vec{t}, \vec{b}, \vec{n})} \quad (\text{E.17})$$

$$\vec{M}_S^{Léon} = \begin{pmatrix} Z_{tb} J_{S,t}^{Léon} + Z_b J_{S,b}^{Léon} \\ -Z_t J_{S,t}^{Léon} - Z_{bt} J_{S,b}^{Léon} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{t}, \vec{b}, \vec{n})} \quad (\text{E.18})$$

Dans le cas général, les termes du tenseur  $\vec{\bar{Z}}$  sont indépendants entre eux et la sensibilité de  $\overrightarrow{M_S^{Léon}}$  à l'impédance est fonction des directions  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$ . C'est-à-dire que l'on peut évaluer indépendamment la sensibilité du courant magnétique à chaque composante du tenseur  $\vec{\bar{Z}}$  :  $\frac{\partial \overrightarrow{M_S^{Léon}}}{\partial Z_t}$ ,  $\frac{\partial \overrightarrow{M_S^{Léon}}}{\partial Z_b}$ , etc.

En notant  $Z_k$  un des éléments de  $\vec{\bar{Z}}$  ( $k \in [t, bt, tb, b]$ ) et à partir de (E.16), on obtient (E.19)

$$\frac{\partial \overrightarrow{M_S^{Léon}}}{\partial Z_k} = -\vec{n} \wedge \left( \vec{\bar{Z}} \frac{\partial \overrightarrow{J_S^{Léon}}}{\partial Z_k} + \frac{\partial \vec{\bar{Z}}}{\partial Z_k} \overrightarrow{J_S^{Léon}} \right) \quad (\text{E.19})$$

Lorsque l'impédance  $\vec{\bar{Z}}$  est exprimée dans le repère locale  $(\vec{t}, \vec{b}, \vec{n})$ , le tenseur est diagonal et on obtient (E.20).

$$\frac{\partial \overrightarrow{M_S^{Léon}}}{\partial Z_k} = -\vec{n} \wedge \left( \vec{\bar{Z}} \frac{\partial \overrightarrow{J_S^{Léon}}}{\partial Z_k} + J_{S,k}^{Léon} \vec{k} \right) \quad (\text{E.20})$$

On remarque alors que la sensibilité du courant magnétique à l'impédance de Léontovitch dépend notamment de la sensibilité du courant électrique à cette même impédance.

Nous montrons ainsi, sous approximation de Léontovich, que la sensibilité du courant magnétique à l'impédance est dépendante de la sensibilité du courant électrique à l'impédance.

Note : l'approximation de Born en impédance ou « Z Born »

*Dans la littérature, pour approcher la valeur des champs électromagnétiques issus de perturbations du milieu, il est courant d'entendre parler d'approximation de Born. D'un point de vue mathématique, cette approximation est controversée car elle consiste à ne garder que le premier terme des champs écrit sous forme d'une série au nombre de termes infini, dont la convergence n'est pas garantie et dont la contribution de ce premier terme est inconnue. D'un point de vue physique, cela signifie que les champs électromagnétiques dans un milieu inconnu sont approchés par les champs au même point mais dans un milieu connu. C'est-à-dire que dans un milieu connu, les champs sont considérés indépendants de variations des propriétés électromagnétiques, soit mathématiquement  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial X} = \vec{0}$ . Le plus simple consiste à utiliser le milieu ambiant comme milieu connu. Le vide constitue généralement ce choix. On comprend que plus le milieu réel et inconnu possède des caractéristiques radioélectriques voisines du milieu connu utilisé pour évaluer les champs, plus ces champs seront proches des champs réels. L'approximation de Born sera alors d'autant plus valide.*

*Dans le cas qui nous intéresse,  $X = Z$  et  $\vec{J}_S = \vec{n} \wedge \vec{H}$ . Alors  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial X} = \vec{0}$  est équivalent à  $\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z_k} = \vec{0}$  et les équations (E.19) et (E.20) deviennent (E.21). Nous appellerons cette approximation l'approximation de « Born en impédance » ou « Z Born ».*

$$\frac{\partial \overrightarrow{M_S^{Léon}}}{\partial Z_k} \sim_{Z \text{ Born}} -\vec{n} \wedge \left( \frac{\partial \vec{\bar{Z}}}{\partial Z_k} \overrightarrow{J_S^{Léon}} \right) \quad (\text{E.21})$$

## ***Sensibilité du courant électrique à l'impédance de surface de Léontovich***

### Sensibilité du courant électrique d'optique physique à l'impédance de Léontovich

Les expressions ( E.15 ) et ( E.19 ) nécessitent la connaissance de  $\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z}$ . Nous remarquerons que l'hypothèse de Born généralement faite consiste à négliger ce terme (cf. (B.7)). Nous proposons d'aller un peu plus loin en le modélisant.

Rigoureusement, le lien entre le courant électrique et l'impédance surfacique est donné par une formulation intégrale : la MFIE ou la EFIE avec la condition d'impédance. C'est à dire que le courant électrique en un point  $\vec{r}$  de la surface est fonction du courant sur toute la surface. Une telle formulation, bien qu'exacte, est complexe. L'étude de sensibilité par le calcul de la dérivée partielle  $\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z}$  est alors compliquée ce qui conduit à la négliger et qui donne naissance au modèle de Born en impédance. A notre connaissance, aucune autre justification n'est apportée au modèle de Born. C'est ce qui lui vaut de multiples critiques. Pourtant sa grande simplicité lui vaut d'être le modèle le plus utilisé, aussi bien en contrôle non destructif qu'en imagerie médicale.

Nous proposons une approche tout autant critiquable : plutôt que de négliger ce terme, nous le calculons à partir d'un modèle local. Dans un souci de simplicité, nous proposons d'utiliser un modèle d'optique physique pour décrire la densité de courant surfacique  $\vec{J}_S$  en fonction de l'impédance de Léontovich. Le modèle résultant est alors presque aussi simple que le modèle de Born tout en apportant une richesse supplémentaire lorsque le modèle d'optique physique est valide.

Sous ces considérations, le courant  $\vec{J}_S$  est alors local et donné par ( E.22 ).

$$\vec{J}_S^{O.P} = \cos \theta_i (1 - R_t) (\vec{E}^i \cdot \vec{t}) \vec{t} + \frac{(1 - R_b)}{\cos \theta_i} (\vec{E}^i \cdot \vec{b}) \vec{b} \quad (\text{E.22})$$

Où  $\vec{E}^i$  est le champ électrique incident local et  $\theta_i$  l'angle d'incidence local par rapport à la normale extérieure comme représenté sur la **Figure 26**.  $R_t$  et  $R_b$  sont les coefficients de réflexion locaux de la surface selon les composantes respectives  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$ .

En utilisant ( E.22 ), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{J}_S^{O.P}}{\partial Z_t} &= -\cos \theta_i \left( \frac{\partial R_t}{\partial Z_t} \right) (\vec{E}^i \cdot \vec{t}) \vec{t} \\ \frac{\partial \vec{J}_S^{O.P}}{\partial Z_b} &= -\frac{(\vec{E}^i \cdot \vec{b}) \vec{b}}{\cos \theta_i} \left( \frac{\partial R_b}{\partial Z_b} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Ou encore :

$$\frac{\partial \vec{J}_S^{O.P}}{\partial Z_k} = \left( \frac{\partial R_k}{\partial Z_k} \right) (\vec{J}_S^{O.P} \cdot \vec{k}) / (1 - R_k) \vec{k} \quad , \quad k \in [t, b] \quad (\text{E.24})$$

Nous montrons ainsi, sous hypothèse de l'optique physique, que la sensibilité du courant électrique à l'impédance est dépendante de la sensibilité du coefficient de réflexion  $R_k$  à l'impédance.

### Sensibilité du coefficient de réflexion d'optique physique à l'impédance de Léontovich

En utilisant les expressions des coefficients de réflexion rappelées par ( E.25 ), nous pouvons évaluer  $\frac{\partial R_k}{\partial Z_k}$ .

$$\begin{aligned} R_t &= \left( \frac{Z_t \cos \theta_i}{\eta_0} - 1 \right) / \left( \frac{Z_t \cos \theta_i}{\eta_0} + 1 \right) \\ R_b &= \left( \frac{Z_b}{\eta_0} - \cos \theta_i \right) / \left( \frac{Z_b}{\eta_0} + \cos \theta_i \right) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

L'expression ( E.26 ) est explicite et ferme alors la modélisation.

$$\frac{\partial R_k}{\partial Z_k} = \frac{\cos \theta_i}{2\eta_0} (1 - R_k)^2 \quad , \quad k \in [t, b] \quad (\text{E.26})$$

En regroupant les expressions utiles nous pouvons proposer des expressions concises de la sensibilité du courant électrique d'optique physique à l'impédance de Léontovich.

### Expressions concises de la sensibilité du courant électrique d'optique physique à l'impédance de Léontovich

En utilisant ( E.24 ) et ( E.26 ), nous obtenons ( E.27 ).

$$\frac{\overrightarrow{\partial J_S^{O,P}}}{\partial Z_k} = -\frac{\cos \theta_i}{2\eta_0} [(1 - R_k) J_{S,k}^{O,P} \vec{k}] \quad , \quad k \in [t, b] \quad (\text{E.27})$$

Ou encore ( E.28 ) à partir de ( E.23 ) et ( E.26 ).

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{\partial J_S^{O,P}}}{\partial Z_t} &= -\frac{\cos \theta_i}{2\eta_0} \left[ \frac{1}{\cos \theta_i (\vec{E}^i \cdot \vec{t})} (J_{S,t}^{O,P})^2 \vec{t} \right] \\ \frac{\overrightarrow{\partial J_S^{O,P}}}{\partial Z_b} &= -\frac{\cos \theta_i}{2\eta_0} \left[ \frac{\cos \theta_i}{(\vec{E}^i \cdot \vec{b})} (J_{S,b}^{O,P})^2 \vec{b} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Si les expressions ( E.27 ) et ( E.28 ) sont mathématiquement égales, l'une peut être plus pratique que l'autre à l'utilisation si l'on dispose du champ incident local  $\vec{E}^i$  ou du coefficient de réflexion local  $R$  (qui cache l'impédance).

### **Résultats : Sensibilité du champ électrique à l'impédance de surface de Léontovich**

#### Modèle 1 : modèle naturel explicite en impédance

En insérant la sensibilité du courant magnétique ( E.20 ) et celle du courant électrique ( E.27 ) dans ( E.15 ), nous obtenons ( E.29 ) qui constitue un premier modèle de la sensibilité du champ électrique rétrodiffusé au point  $T$  à l'impédance de surface de Léontovich.

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{\partial E}^t(T)}{\partial Z_k} = \frac{-jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \iint [ \vec{Q}_{1,k} + \vec{Q}_{2,k} + \vec{Q}_{3,k} ] \frac{\|\vec{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} dS \quad (\text{E.29})}$$

$$\vec{Q}_{1,k} = \frac{\cos \theta_i}{2} (1 - R_k) J_{S,k}^{O.P} \{ 2\gamma \vec{k} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{k}) \} \quad (\text{E.30})$$

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{2,k} &= \frac{-\cos \theta_i}{2\eta_0} (1 - R_k) \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \vec{e}_R \wedge (J_{S,k}^{O.P} Z_k \vec{n} \wedge \vec{k}) \\ &= \frac{-\cos \theta_i}{2\eta_0} (1 - R_k) \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) M_{S,\vec{n}\wedge k}^{O.P} \vec{e}_R \wedge (\vec{n} \wedge \vec{k}) \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

$$\vec{Q}_{3,k} = \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) J_{S,k}^{Léon} \vec{e}_R \wedge (\vec{n} \wedge \vec{k}) \quad (\text{E.32})$$

Les termes bleus représentent les propriétés électromagnétiques de la surface. Les termes en rouge sont issus de l'approximation de l'optique physique, plus restrictive que l'approximation de Léontovich dont les termes verts et bleus sont issus.

Ce premier modèle exprime la sensibilité du champ rétrodiffusé à l'impédance de Léontovich en fonction :

- des courants électriques surfaciques  $J_{S,k}^{O.P}$  créés par l'onde incidente sur la surface d'impédance  $\vec{Z}$ ,
- de l'impédance de surface  $Z_k$  dans la direction  $\vec{k}$  (aussi présente dans le coefficient de réflexion (E.25)),
- des caractéristiques géométriques de l'éclairement de la surface élémentaire  $dS$  à travers les termes  $\theta_i, \alpha, \gamma, \vec{R}, \vec{OT}$  (dont dépendent implicitement  $Z_k, J_{S,k}^{O.P}$  ...).

Le modèle gouverné par l'équation (E.29) est éclaté en trois termes principaux (E.30), (E.31) et (E.32). Ils représentent respectivement :

- la dépendance au couplage du courant électrique surfacique d'optique physique  $J_{S,k}^{O.P}$  et de la réaction de la surface à une onde électromagnétique à travers le coefficient de réflexion  $R_k$ ,
- la dépendance au couplage du courant magnétique surfacique d'optique physique  $M_{S,\vec{n}\wedge k}^{O.P}$  et de la réaction de la surface à une onde électromagnétique à travers le coefficient de réflexion  $R_k$ ,
- la dépendance du courant électrique surfacique sous hypothèse de Léontovich  $J_{S,k}^{Léon}$ .

### Modèle 2 : modèle optique physique, exact mais réducteur

L'approximation de l'optique physique en impédance est plus restrictive que l'approximation de Léontovich. Ainsi, lorsqu'on remplace  $J_{S,k}^{Léon}$  par  $J_{S,k}^{O.P}$ , on obtient naturellement la sensibilité du champ électrique d'optique physique  $\frac{\partial E^{t,O.P}(T)}{\partial Z_k}$  rayonné au point  $T$ , à l'impédance de surface de Léontovich  $Z_k^{Léon}$ .

### Modèle 3 : modèle naturel implicite en impédance

En insérant la sensibilité du courant magnétique ( E.20 ) et la sensibilité du courant électrique ( E.28 ) dans ( E.15 ), nous obtenons aussi ( E.29 ) mais les termes  $\overrightarrow{Q_{1,k}}$  et  $\overrightarrow{Q_{2,k}}$   $k \in [t, b]$  diffèrent. Ils sont alors donnés par ( E.33 ) et ( E.34 ).  $\overrightarrow{Q_{3,k}}$  reste identique au modèle 1. Cela constitue un troisième modèle de la sensibilité du champ électrique rétrodiffusé au point  $T$  à l'impédance de surface de Léontovich.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_{1,t}} &= \frac{-J_{S,t}^{O,P^2}}{2(\overline{E^t} \cdot \vec{t})} \{2\gamma \vec{t} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{t})\} \\ \overrightarrow{Q_{1,b}} &= \frac{-J_{S,b}^{O,P^2} \cos^2 \theta_i}{2(\overline{E^t} \cdot \vec{b})} \{2\gamma \vec{b} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{b})\}\end{aligned}\tag{E.33}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_{2,t}} &= \frac{J_{S,t}^{O,P}}{2\eta_0(\overline{E^t} \cdot \vec{t})} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_{S,b}^{O,P} \vec{e}_R \wedge \vec{b} \\ \overrightarrow{Q_{2,b}} &= -\frac{J_{S,b}^{O,P} \cos^2 \theta_i}{2\eta_0(\overline{E^t} \cdot \vec{b})} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_{S,t}^{O,P} \vec{e}_R \wedge \vec{t}\end{aligned}\tag{E.34}$$

Ce modèle n'est qu'une réécriture du premier. S'ils sont mathématiquement égaux, l'un peut être plus pratique à d'utilisation que l'autre si l'on dispose du champ incident local  $\overline{E^t}$  ou du coefficient de réflexion local  $R$  (qui cache l'impédance). Par rapport au premier modèle, les propriétés électromagnétiques de la surface n'apparaissent pas explicitement, le résultat de l'interaction entre l'onde et la surface étant exclusivement contenu dans les courants électriques  $\overrightarrow{J_S^{O,P}}$ ,  $\overrightarrow{J_S^{Léon}}$  et magnétique  $\overrightarrow{M_S^{O,P}}$ .

### Modèle 4 : modèle hybride

Dans le Modèle 3, le résultat de l'interaction onde-surface est uniquement contenu dans les densités de courants électriques et magnétiques. Cette spécificité nous conduit à proposer un modèle hybride formulé à partir du Modèle 3 dans lequel les courants  $\overrightarrow{J_S^{O,P}}$  et  $\overrightarrow{J_S^{Léon}}$  sont remplacés par un courant  $\overrightarrow{J_S^C}$  et  $\overrightarrow{M_S^{O,P}}$  par  $\overrightarrow{M_S^C}$ . Ces courants surfaciques sont le résultat de l'interaction entre l'onde et la surface ou le volume sous la surface. Quel que soit le modèle d'interaction, le modèle proposé n'en dépend pas explicitement. Ainsi (comme c'est le cas pour le code éléments finis « maison » du CEA), s'il est possible de calculer les courants électriques  $\overrightarrow{J_S^C}$  et magnétiques  $\overrightarrow{M_S^C}$  surfaciques équivalents à l'interaction entre l'onde incidente et la matière présente sous la surface  $S$ , alors les formules ( E.35 ) ( E.36 ) ( E.37 ) et ( E.29 ) permettent d'estimer  $\frac{\partial \overline{E^t}(T)}{\partial Z_k}$ ; la sensibilité du champ électrique rayonné au point  $T$  à l'impédance locale.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_{1,t}} &= \frac{-J_{S,t}^C{}^2}{2(\overline{E^t} \cdot \vec{t})} \{2\gamma \vec{t} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{t})\} \\ \overrightarrow{Q_{1,b}} &= \frac{-J_{S,b}^C{}^2 \cos^2 \theta_i}{2(\overline{E^t} \cdot \vec{b})} \{2\gamma \vec{b} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{b})\}\end{aligned}\tag{E.35}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_{2,t}} &= \frac{J_{S,t}^C}{2\eta_0(\overrightarrow{E}^i \cdot \vec{t})} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_{S,b}^C \overrightarrow{e}_R \wedge \vec{b} \\ \overrightarrow{Q_{2,b}} &= -\frac{J_{S,b}^C \cos^2 \theta_i}{2\eta_0(\overrightarrow{E}^i \cdot \vec{b})} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_{S,t}^C \overrightarrow{e}_R \wedge \vec{t}\end{aligned}\quad (\text{E.36})$$

$$\overrightarrow{Q_{3,k}} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) J_{S,k}^C \overrightarrow{e}_R \wedge (\vec{n} \wedge \vec{k}) \quad (\text{E.37})$$

Ce modèle n'a pas de justification rigoureuse. Nous profitons simplement d'une formulation implicite en modèle d'interaction onde-surface pour la généraliser en utilisant n'importe quel couple  $\overrightarrow{J}_S^C$   $\overrightarrow{M}_S^C$  de courants électromagnétiques surfaciques. D'un point de vue physique, on peut résumer les hypothèses conduisant à ce modèle par : « Si les courants surfaciques  $\overrightarrow{J}_S^C$  et  $\overrightarrow{M}_S^C$  interagissent localement avec la surface de la même façon que les courants sous condition d'impédance de Léontovich interagissent localement avec la surface, alors la sensibilité calculée par le Modèle 4 est une bonne estimation ».

Ce modèle vérifie toujours le principe de localité. C'est à la fois un avantage et un inconvénient. En effet, le principe de localité est vérifié lorsque la longueur d'onde est petite devant la taille de la scène considérée. C'est donc un principe asymptotique dit « haute fréquence », qui n'est ni général ni exact. La localité du Modèle 4 présente l'avantage de disposer d'une expression permettant d'évaluer et donc d'afficher la sensibilité locale. Ainsi, on définit une densité surfacique de sensibilité de champ électrique (observé depuis le point  $T$  et créé par l'onde incidente  $\overrightarrow{E}^i$ ) à l'impédance surfacique de Léontovich  $\left[\left[\frac{\partial \overrightarrow{E}^i(T)}{\partial Z_k}\right]\right]$  par l'intégrande de (E.29) :

$$\left[\left[\frac{\partial \overrightarrow{E}^i(T)}{\partial Z_k}\right]\right] = \frac{-jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\overrightarrow{OT}\|}}{\|\overrightarrow{OT}\|} \left[ \overrightarrow{Q_{1,k}} + \overrightarrow{Q_{2,k}} + \overrightarrow{Q_{3,k}} \right] \frac{\|\overrightarrow{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \overrightarrow{e}_{OT} - R(1 - \overrightarrow{e}_R \cdot \overrightarrow{e}_{OT}))} \quad (\text{E.38})$$

### Modèle 5 : modèle champ lointain

Tous les modèles 1 à 4 sont facilement exploitable en champ lointain en se rappelant que dans ce cas (cf. §E.I p. 85) :

$$\gamma \cong 0 ; 1/\alpha \cong 0 \text{ et } \overrightarrow{OT} \cong \vec{R}$$

### Modèle 6 : modèle « Born en impédance »

Il est intéressant de remarquer que les termes  $\overrightarrow{Q_{1,k}}$  (E.30) et  $\overrightarrow{Q_{2,k}}$  (E.31) sont les résultats du calcul du terme  $\frac{\partial \overrightarrow{J}_S}{\partial Z}$ . Or sous l'approximation de Born, ce terme est nul (cf. (E.21)). Les modèles 1 à 5 sont alors facilement exploitable sous approximation de « Born en impédance » en leur ajoutant que  $\overrightarrow{Q_{1,k}} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{Q_{2,k}} = \vec{0}$ .

## **2. Sensibilité d'ordre supérieur**

La partie précédente détaille le calcul de la sensibilité d'ordre un du champ électrique rayonné à l'impédance locale. Nous utilisons en particulier deux modèles : le modèle en impédance de

Léontovich et un modèle d'optique physique pour dériver les équations. En utilisant les même modèles et en procédant de la même façon, il est possible d'établir un modèle d'ordre  $u$ .

Lorsque le modèle d'impédance est local et orthotrope, les termes « croisés »  $\frac{\partial^u \vec{E}^t(T)}{\partial Z_k^m \partial Z_q^p}$ ,  $\forall [u, m, p] \in \mathbb{Z}$ ,  $u = m + p$ ,  $q \neq k \in [n, b, t]$  sont nuls.

Ainsi, la sensibilité à l'ordre  $u$  du champ électrique total  $\vec{E}^t(T)$  au point d'observation  $T$  est donné par (E.39) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^u \vec{E}^t(T)}{\partial Z_k^u} &= \frac{-jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \iint \left[ 2\gamma \frac{\partial^u \vec{J}_S}{\partial Z_k^u} \eta_0 + \vec{e}_R \right. \\ &\quad \wedge \left\{ (3\gamma + 1) \left( \vec{e}_R \wedge \frac{\partial^u \vec{J}_S}{\partial Z_k^u} \eta_0 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + 1/\alpha) \frac{\partial^u \vec{M}_S}{\partial Z_k^u} \right\} \right] \frac{\|\vec{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} dS \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

Où la sensibilité d'ordre  $u$  du courant magnétique peut être modélisée par celle sous hypothèse de Léontovich. Lorsque l'impédance est orthotrope (tenseur diagonal) on obtient (E.40).

$$\frac{\partial^u \vec{M}_S^{\text{Léon}}}{\partial Z_k^u} = -\vec{n} \wedge \left( \vec{Z} \frac{\partial^u \vec{J}_S^{\text{Léon}}}{\partial Z_k^u} + u \frac{\partial^{u-1} \vec{J}_S^{\text{Léon}}}{\partial Z_k^{u-1}} \right) \quad (\text{E.40})$$

La sensibilité d'ordre  $u$  du courant électrique peut être modélisée, sous l'hypothèse d'un modèle d'optique physique et lorsque l'impédance est orthotrope (tenseur diagonal), par (E.41).

$$\frac{\partial^u \vec{J}_S^{\text{O.P}}}{\partial Z_k^u} = u! \left[ -\frac{\cos \theta_i}{2\eta_0} (1 - R_k) \right]^u \left( \vec{J}_S^{\text{O.P}} \cdot \vec{k} \right) \vec{k}, \quad k \in [t, b] \quad (\text{E.41})$$

(E.39)(E.40)(E.41) modélisent la sensibilité d'ordre élevé du champ électrique à l'impédance de Léontovich. Puisque les dérivées « croisées » sont nulles, le modèle n'est pas informatif lorsqu'il y a un couplage entre des zones d'impédances différentes.

### III. CONCLUSION

Six modèles différents de sensibilité du champ électromagnétique à l'impédance surfacique de Léontovich sont proposés. Ils permettent d'estimer  $\vec{B}_Z(Z)$ . Ils résultent d'un calcul analytique de la dérivée partielle du champ électrique rayonné à l'impédance. Ce sont donc des modèles naturellement basés sur une hypothèse de petite perturbation en impédance.

- Le modèle 1 est un modèle naturel explicite en impédance. Il présente la particularité d'exprimer la sensibilité du champ électrique en fonction des courants électrique et magnétique ainsi que du modèle d'interaction onde-matière en impédance. Le champ



électromagnétique incident sur chaque maille n'apparaît pas explicitement. Ces particularités rendent ce modèle particulièrement intéressant lorsqu'on souhaite évaluer cette sensibilité et que l'on dispose déjà d'un code en impédance. Son domaine de validité est naturellement donné par le domaine de validité des modèles utilisés pour son développement : les modèles d'optique physique et de Léontovich.

- Le modèle 2 est un modèle dans lequel les courants électromagnétiques utilisés sont ceux d'optique physique. C'est une simplification réduisant la précision et le domaine de validité. Ces particularités rendent ce modèle intéressant pour sa simplicité : seul un code d'optique physique est nécessaire à l'évaluation de la sensibilité. Son domaine de validité est naturellement donné par le domaine de validité du modèle d'optique physique.
- Le modèle 3 est un modèle naturel implicite en impédance. Il constitue une alternative comportant les mêmes avantages que le modèle 1.
- Le modèle 4 est un modèle hybride dans lequel nous avons profité de la dépendance implicite en impédance du modèle 3 pour le généraliser. Il présente l'avantage de permettre une estimation de la sensibilité à partir de tout code électromagnétique. Et ce même un code « full-wave » où l'interaction onde-matière est volumique puisque le modèle en impédance n'apparaît pas. Comme nous le verrons, son inconvénient réside dans un domaine de validité difficile à établir.
- Les modèles 5 et 6 proposent une simplification des modèles précédents dans le cas respectif où seule la sensibilité en champ lointain est désirée et lorsque l'hypothèse de Born est souhaitée.

Au premier ordre nous soulignons les liens avec l'approximation de Born en impédance. Une formulation multi-ordre est aussi proposée.

L'hypothèse d'axisymétrie de la distribution spatiale de matériaux n'est pas introduite : les essais n'ont pas permis de réduire l'intégrale surfacique en une intégrale de contour. Cet échec permet de disposer d'un modèle surfacique plus général qu'initialement désiré mais aussi plus coûteux en temps calcul.

Ce chapitre met fin à la modélisation de la sensibilité du champ électromagnétique à  $\bar{\bar{Z}}$ , l'impédance surfacique de Léontovich. L'objet de la partie suivante est alors de proposer et de discuter les domaines de validité des modèles établis dans cette partie « modélisation ».



## **PARTIE III : DOMAINE DE VALIDITE**



<b>PARTIE III : DOMAINE DE VALIDITE</b>	<b>100</b>
<b>F. MOTIVATION</b>	<b>104</b>
<b>G. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE (VPRT)</b>	<b>108</b>
I. Modèle exact	108
II. Premier ordre	108
III. Second ordre	111
IV. Cas monostatique	112
V. Distribution axisymétrique	112
VI. Propriétés matériaux orthotropes et isotropes	113
VII. étude numérique de l'erreur sur un exemple axisymétrique	113
1. Sensibilité au maillage et à la distance objet-observation	116
2. Sensibilité à l'angle de bistatisme et à la distance objet-observation	116
VIII. Conclusion partielle	117
<b>H. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE</b>	<b>120</b>
I. Hypothèse « petites perturbations »	120
1. Influence de la distance objet-observation	121
2. Influence de la distribution spatiale des perturbations	122
Distribution homogène	122
Distribution inhomogène	123
II. Influence du modèle en impédance de Léontovich	125
III. Influence du modèle d'optique physique	126
IV. Modèle hybride	129
V. Modèle champ lointain	130
VI. Modèle « Born en impédance »	131
VII. Conclusion partielle	132



## F. MOTIVATION

Un domaine de validité d'un modèle est un espace de paramètres d'entrée du modèle pour lequel l'espace des réponses de ce modèle est considéré juste. Ces réponses sont considérées justes si l'erreur faite par le modèle satisfait un critère donné. L'erreur est définie par l'écart entre la solution du modèle et une solution de référence. On parle alors d'erreur relative. Idéalement, la solution de référence est exacte dans le sens où elle constitue la réponse naturelle de la configuration étudiée (la réponse présente dans la nature). L'erreur relative est alors l'erreur naturelle. Mais en pratique, cette erreur est difficile à évaluer et la solution de référence choisie est souvent issue d'un autre modèle. En électromagnétisme, nous utilisons couramment une solution des équations de Maxwell comme référence. Ces équations constituent elles-mêmes un modèle de la réalité. Dans le régime électromagnétique qui nous intéresse, les équations de Maxwell constituent le modèle de confiance le plus élevé ce qui explique qu'elles constituent habituellement le modèle de référence. Ainsi, dans le cas où elles se résolvent analytiquement, la solution est définie comme la solution analytique « exacte » (où les guillemets rappellent que leur exactitude est toute relative). Dans le cas où elles sont discrétisées, elles forment alors un modèle discret d'elles-mêmes. Leur solution est alors définie comme une solution numérique « exacte ». Ainsi, toute erreur évaluée est relative à la solution d'un modèle choisi pour la confiance qui lui est attribuée (une confiance supérieure). Etablir un régime de validité est alors équivalent à établir un domaine de confiance.

Un régime de validité clair est essentiel à tout modèle. En effet, un modèle est utilisé avec d'autant plus de confiance que le régime de validité est connu et prévisible pour la configuration étudiée. Le caractère prévisible du domaine de validité signifie que pour une configuration test, (par exemple une configuration où l'on connaît la cible, la source et la distribution de propriété matériau), il est possible de dire a priori, si cette configuration entre dans le domaine de validité du modèle.

Une approche possible pour établir le domaine de validité d'un modèle consiste en une comparaison de la prédiction par ce modèle avec la solution « exacte ». Il existe alors deux possibilités. Soit la configuration étudiée possède une solution analytique « exacte », soit elle n'en possède pas. Dans ce cas, la solution de référence sera une solution numérique « exacte ».

Lorsqu'une solution analytique « exacte » existe, la comparaison met clairement en évidence l'erreur de modélisation. Bien souvent, une telle solution ne peut être obtenue que pour quelques configurations données. La solution est alors connue pour l'ensemble continu des paramètres de la configuration. Le domaine de validité obtenu pour le modèle est ainsi réduit à cette configuration. A ma connaissance, en interaction onde-matière, la résolution analytique des équations de Maxwell n'est possible que dans un milieu homogène, isotrope, linéaire, non dispersif sans pertes et sans interface; la solution étant alors donnée par la fonction de Green. Le cas particulier de l'interaction onde-sphère peut être aussi considéré comme tel dans la mesure où la solution est décrite analytiquement par une somme infinie, les séries de Mie [77].

Lorsqu'aucune solution analytique « exacte » n'existe, il est d'usage d'utiliser une solution « exacte » numérique comme référence [78] [79] [80]. Les méthodes numériques apportent une solution spécifique au problème considéré (c'est à dire seulement pour des configurations précises), pour des jeux de paramètres discrets fixés (par opposition au jeu de paramètres continus lorsqu'une

solution analytique existe). Réaliser une multitude de comparaisons, bien que chronophage, peut conduire à certaines conditions de validité exprimées, dans le pire des cas, sous forme de séquence de paramètres discrets et dans le meilleur des cas, sous forme d'inégalités bornant un domaine exploré<sup>24</sup> [81]. Ces inégalités ne peuvent pas exhiber un caractère général et lorsqu'elles sont extrapolées, elles servent d'indications<sup>25</sup>. La solution numérique est intéressante pour vérifier la validité de la solution d'un modèle. Elle s'utilise alors a posteriori et devient souvent indispensable pour quantifier l'erreur sur la solution donnée par le modèle<sup>26</sup>.

Une seconde approche possible pour établir le domaine de validité d'un modèle consiste en l'étude attentive des hypothèses et simplifications réalisées lors de sa construction. C'est une approche qui nécessite de reprendre chaque étape de construction du modèle et de lister les hypothèses nécessaires à la validité de l'étape suivante. C'est une approche souvent complexe qui nécessite la connaissance et la maîtrise de la construction du modèle. Elle n'est donc pas toujours possible en particulier lorsque le modèle construit est de nature empirique. Lorsque cette approche est possible et fructueuse, elle apporte des éléments généraux et précis sur le domaine de validité. Elle permet aussi une compréhension fine de l'influence des paramètres d'entrées sur le domaine de validité du modèle.

Un autre point important concerne la prévisibilité du domaine de validité. C'est un élément primordial permettant, à problème donné, le choix pertinent d'un modèle plutôt qu'un autre ; d'attribuer a priori une confiance qualitative aux solutions du modèle. Dans le cas où le modèle sert à l'exploitation de résultats expérimentaux, la prévisibilité de sa validité permet aussi de concevoir une configuration expérimentale favorable au modèle (qui rentre dans son domaine de validité) et donc aux résultats. Par exemple, lors de l'utilisation du modèle surfacique développé dans ces travaux pour déterminer les propriétés électromagnétiques des matériaux à partir de données de mesure en chambre anéchoïque, la connaissance du domaine de validité permet de spécifier des mesures de manière à ce que la source illumine directement la zone à inspecter puisqu'il s'agit d'une condition de validité du modèle.

Pour rendre prévisible le domaine de validité du modèle, il faut qu'il repose sur des bases, des concepts compris de l'utilisateur et donc reflets du domaine d'utilisation du modèle. Par exemple, le domaine de validité d'un modèle d'électronique prend du sens lorsqu'il est exprimé en fonction de critères sur l'intensité, la résistance, la capacité, etc. que l'électronicien peut directement comprendre et utiliser. Donner un critère sur le rayon spectral d'une matrice du modèle peut constituer une étape indispensable mais ne constitue pas un critère utilisable en pratique. D'autant plus que cette matrice est à évaluer pour le problème donné, et constitue donc un critère de validité a posteriori, donc non prévisible. Pour le physicien, il est alors primordial d'exprimer le régime de validité en fonction d'hypothèses physiques. C'est ce qui permet le choix judicieux d'un modèle à

---

<sup>24</sup> Dans les cas où la solution fait non seulement appel à une évaluation numérique mais aussi à une discrétisation (maillage), l'aspect chronophage (réalisation de maillage pour chaque configuration testée par exemple) et dans une moindre mesure, le caractère « exact » de la solution (toute géométrie maillée est un modèle de la géométrie « CAO » elle-même un modèle de la géométrie réelle) mérite d'être d'autant plus considéré avec prudence.

<sup>25</sup> Dans ce cadre, l'utilisation intensive de code numérique dont le plus grand soin a été parfois accordé à la précision, au choix des méthodes numériques, à la discrétisation, à l'unicité de la solution etc... ne sert alors qu'à établir quelques « recettes ».

<sup>26</sup> Dans ce cadre, le soin accordé à la précision, au choix des méthodes numériques, à la discrétisation etc... du code numérique devient primordial.



problème fixé ou de poser le problème judicieusement compte tenu du modèle disponible et d'anticiper la confiance accordée aux résultats du modèle.

Ces considérations préliminaires soulignent la difficulté d'établir un domaine de validité. Ainsi, avant de procéder à d'onéreuses simulations numériques, le régime de validité des modèles développés nécessite d'être investigué d'un point de vue formel et physique. Dans ce chapitre, il est donc proposé modestement d'apporter des éléments de discussion aux régimes de validité des modèles établis. Le lien entre l'hypothèse mathématique et l'hypothèse physique résultante est souligné en l'appuyant parfois d'exemples.

Le domaine de validité du modèle volumique nommé VPRT est discuté dans le chapitre G puis le modèle surfacique en chapitre H.



## G. MODELE DE SENSIBILITE VOLUMIQUE (VPRT)

Une analyse du régime de validité de la VPRT en milieu diélectrique est proposée dans [65]. L'extension de la méthode aux milieux magnétiques nécessite de s'intéresser au nouveau régime de validité. Pour ce faire, le domaine de validité du modèle VPRT exact est d'abord abordé. Nous discutons ensuite le domaine de validité du modèle au premier ordre puis celui au second ordre. Enfin nous abordons le cas des particularisations : distributions de propriétés matériaux axisymétriques, orthotropes puis isotropes.

### I. MODELE EXACT

Le domaine de validité du modèle exact hérite d'abord de celui du modèle direct. Les équations de Maxwell réduites utilisées dans ces travaux sont valides lorsque les matériaux sont linéaires et non chiraux. Lors de la construction du modèle exact, la seule hypothèse supplémentaire provient du principe de réciprocité. Nous ne le démontrons pas (voir [70] pour plus de détails), mais l'équation ( G.1 ) est valable lorsque nous avons ( G.2 ).

$$\begin{aligned} \sum_N \vec{J}_N \vec{E}_1(\vec{r}_{rec N}) \cdot \vec{t}_{\vec{J}_N} + \sum_x J_x^c \vec{E}(\vec{r}_{J_x^c}) \cdot \vec{t}_{J_x^c} \\ = -j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{p} (\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1)] - \vec{H} \cdot [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{q} (\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1)] \right] dV_\Omega \end{aligned} \quad (G.1)$$

$$\vec{E} \cdot [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{E}_1] - [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{E}] \cdot \vec{E}_1 + \vec{H}_1 \cdot [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{H}] - [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{H}_1] \cdot \vec{H} = 0 \quad (G.2)$$

D'un point de vue physique, il n'y a aucune raison pour que les termes énergétiques d'origine électrique compensent ceux d'origine magnétique. Ainsi ( G.2 ) est équivalent à ( G.3 ).

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{E}_1] - [\vec{\bar{\epsilon}}_{ref} \vec{E}] \cdot \vec{E}_1 = 0 \\ \vec{H}_1 \cdot [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{H}] - [\vec{\bar{\mu}}_{ref} \vec{H}_1] \cdot \vec{H} = 0 \end{aligned} \quad (G.3)$$

Les deux équations du système ( G.3 ) sont sous une forme équivalente et une condition nécessaire à leur validation, pour tous champs électriques et magnétiques, est donnée par ( G.4 ).

$$\begin{aligned} \vec{\bar{\epsilon}}_{ref} = \vec{\bar{\epsilon}}_{ref}^T \\ \vec{\bar{\mu}}_{ref} = \vec{\bar{\mu}}_{ref}^T \end{aligned} \quad (G.4)$$

Mathématiquement, la relation ( G.4 ) signifie que les tenseurs des propriétés des matériaux de référence doivent être symétriques. Nous retrouvons alors le principe de réciprocité sur lequel s'appuie la méthode : il faut que les matériaux soient réciproques.

Remarque : Il est possible d'écrire l'équivalent de cette méthode pour des matériaux non réciproques, c'est-à-dire sans négliger le terme ( G.2 ).

### II. PREMIER ORDRE

Le modèle au premier ordre consiste à linéariser le modèle exact en négligeant le terme de couplage. Son domaine de validité hérite donc de celui du modèle exact avec une hypothèse supplémentaire.

$$\begin{aligned} & \iint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot [\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} (\vec{E}_{ref} + \vec{E}_1)] - \vec{H} \cdot [\vec{\mu}_{ref} \vec{q} (\vec{H}_{ref} + \vec{H}_1)] \right] dV_\Omega \\ & \approx_{1^{ier}} \iint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot [\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref}] - \vec{H} \cdot [\vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_{ref}] \right] dV_\Omega \end{aligned} \quad (G.5)$$

L'équation ( G.5 ) signifie mathématiquement :

$$\begin{aligned} & \left\| \iint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_1 - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_1 \right] dV_\Omega \right\| \\ & \ll \left\| \iint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref} - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_{ref} \right] dV_\Omega \right\| \end{aligned} \quad (G.6)$$

Deux cas sont possibles pour satisfaire( G.6 ) : soit la norme de l'intégrande de gauche est faible vis-à-vis de celui de droite, soit la somme (l'intégrale) sur le domaine se compense, tendant vers une valeur faible.

Il est difficile de tirer une conclusion du cas où l'intégrale sur le domaine se compense. C'est un cas qui nécessite une distribution spatiale particulière de l'intégrande sur le volume  $V_\Omega$ . D'un point de vue physique cela signifie que les couplages locaux entre les perturbations des propriétés matériaux  $(\vec{p}, \vec{q})$  et les champs électromagnétique qu'elles créent  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  sont forts mais que la résultante globale n'a pas d'influence sur le champ aux points d'observation (les couplages se compensent).

Lorsque l'intégrande de gauche est faible vis-à-vis de celui de droite, on a ( G.7 ).

$$\left\| \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_1 - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_1 \right\| \ll \left\| \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref} - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_{ref} \right\| \quad (G.7)$$

D'un point de vue physique, au premier ordre, les perturbations diélectrique et magnétiques sont découplées et peuvent être considérées indépendantes. Alors, ( G.7 ) est équivalente à ( G.8 ).

$$\begin{aligned} & \left\| \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_1 \right\| \ll \left\| \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref} \right\| \\ & \left\| \vec{E} \cdot \vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_1 \right\| \ll \left\| \vec{E} \cdot \vec{\mu}_{ref} \vec{q} \vec{H}_{ref} \right\| \end{aligned} \quad (G.8)$$

En décomposant les champs  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  en deux termes, l'un colinéaire et l'autre orthogonal aux champs de référence, deux configurations sont remarquées :

Si  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  est globalement colinéaire à  $(\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref})$ , c'est-à-dire  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1) \cong (\alpha_E \vec{E}_{ref}, \alpha_H \vec{H}_{ref})$  alors la condition ( G.9 ) suffit à vérifier ( G.8 ).

$$\begin{aligned} & \left\| \vec{E}_1 \right\| \ll \left\| \vec{E}_{ref} \right\| \\ & \left\| \vec{H}_1 \right\| \ll \left\| \vec{H}_{ref} \right\| \end{aligned} \quad (G.9)$$

Ce qui signifie que le modèle au premier ordre est valable lorsque les champs créés par la perturbation sont d'amplitudes négligeables par rapport aux champs de référence. Dans la pratique, les champs créés par les perturbations ne sont pas connus mais ils vérifient les équations de Maxwell (cf. p. 60). Ils sont donc proportionnels aux perturbations. Ainsi, si  $|\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p}| \ll |\vec{\epsilon}_{ref}|$ , alors ( G.9 ) est vérifiée.

Dans la littérature, le domaine de validité du modèle de Born est souvent réduit à cette condition [29] [30] [28] [71] [65]. Mais cette condition n'est pas toujours suffisante :

Si  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  n'est globalement pas colinéaire à  $(\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref})$ , alors c'est le couplage entre les perturbations et les champs qui est déterminant. Ainsi lorsque la perturbation  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p}$  est un tenseur orthogonal à  $\vec{E}_{ref}$ , le produit  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref}$  est nul et il devient dangereux de négliger  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_1$ .

Par exemple, des champs  $\vec{E}_{ref} = E_{ref} \vec{z}$  existent dans un volume élémentaire  $V$  de propriété  $\vec{\epsilon}_{ref}$ .

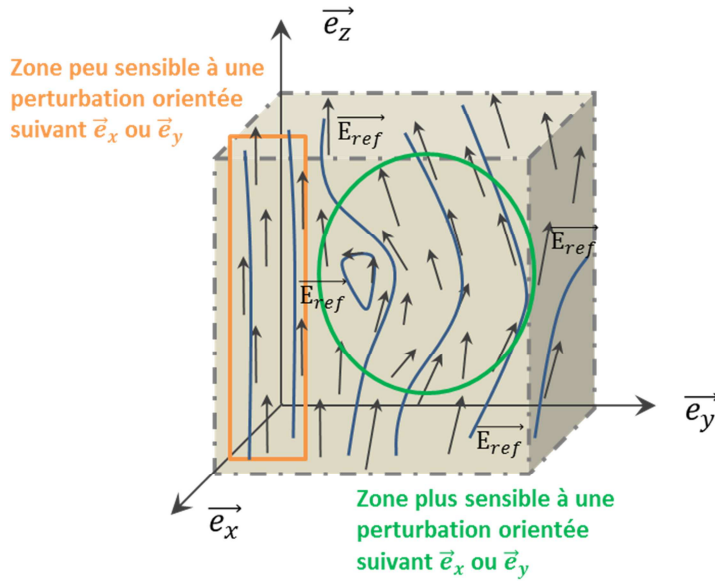
Alors toutes perturbations de la forme  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\forall a, b, c, d, e, f$  sont orthogonales à  $\vec{E}_{ref}$

puisque  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref} = \vec{0}$ . Le champ  $\vec{E}_1$  est créé par les perturbations  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p}$ , il n'est donc pas connu, mais le négliger devant  $\vec{\epsilon}_{ref} \vec{p} \vec{E}_{ref} = \vec{0}$  n'est pas prudent.

Ces considérations ne permettent pas d'établir des conditions claires et exhaustives, elles soulignent simplement des éléments essentiels à la compréhension physique des hypothèses.

Ainsi, pour le problème direct de propagation d'incertitudes, les perturbations sont connues et un calcul numérique du cas de référence donne  $(\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref})$  en tout point de l'espace. Alors, le modèle au premier ordre est suffisant lorsque les incertitudes que l'on souhaite étudier ne sont pas orthogonales aux champs de référence.

Pour le problème inverse, les perturbations ne sont a priori pas connues. Dans ce cas, si des perturbations orthogonales aux champs de référence existent, le modèle au premier ordre n'y est pas sensible et le problème inverse à résoudre est généralement mal conditionné (puisque la matrice de sensibilité comporte de nombreux termes très faibles). Un autre point de vue consiste à donner différents degrés de confiance aux résultats du problème inverse en fonction d'observations de la distribution spatiale des champs de référence. Par exemple, les zones où les champs de référence ont une direction privilégiée et qui varient peu, sont insensibles à toutes perturbations de direction différente. La confiance dans les résultats doit alors y être faible. Au contraire, les zones où les directions des champs de références sont très variables sont potentiellement sensibles à toutes sortes de perturbations. Une meilleure confiance peut être attribuée aux résultats du problème inverse au premier ordre (cf. **Figure 27**).



**Figure 27 :** Estimation de la validité du modèle au premier ordre à partir d'observations du cas de référence. Les zones où la direction des champs de référence est peu variable doivent être considérées avec prudence.

Le domaine de validité de la VPRT au premier ordre peut être ainsi résumé par :

- i. Les lois de comportement électromagnétique des matériaux doivent être linéaires et non chiraux (condition héritée du domaine de validité des équations de Maxwell présenté en D.I.1 p.60).
- ii. Les matériaux de référence doivent avoir un comportement réciproque à une sollicitation électromagnétique (condition héritée du théorème de réciprocité de Lorentz tel que présenté en D.II.4 p.69)
- iii. Les perturbations des propriétés des matériaux ne doivent pas être orthogonales aux champs électromagnétiques de référence.
- iv. L'amplitude des perturbations des propriétés matériaux doit être faible vis-à-vis de l'amplitude des propriétés des matériaux de référence.
- v. Il est possible que les couplages locaux entre les perturbations des propriétés des matériaux et les champs électromagnétiques résultant de ces perturbations ne soient pas négligeables mais que la contribution globale (l'intégrale sur le volume) le soit. Par exemple, l'amplitude des perturbations des propriétés des matériaux peut être non négligeable vis-à-vis des propriétés matériaux de référence mais le modèle au premier ordre peut rester valide. Dans ce cas, nous ne sommes pas parvenus à établir une condition supplémentaire nécessaire à la validité du modèle au premier ordre.

### III. SECOND ORDRE

Nous nous intéressons maintenant au domaine de validité du modèle au second ordre dont l'expression mathématique est rappelée ( G.10 ).

$$\sum_N \bar{J}_N \vec{E}_2(\vec{r}_{rec N}) \cdot \vec{t}_{J_N} + J_2^C \vec{E}(\vec{r}_{J_2^C}) \cdot \vec{t}_{J_2^C} \approx_{2^{nd}} -j\omega \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot \vec{\bar{\epsilon}}_{ref} (\vec{p} \vec{E}_1 + \vec{h} \vec{E}_{ref}) - \vec{H} \cdot \vec{\bar{\mu}}_{ref} (\vec{q} \vec{H}_1 + \vec{u} \vec{H}_{ref}) \right] dV_\Omega \quad (G.10)$$

En comparant avec la formulation exacte, nous identifions que cette équation est vérifiée lorsque ( G.11 ) est satisfait.

$$\left\| \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot \vec{\varepsilon}_{ref} (\vec{p} \vec{E}_1 + \vec{h} \vec{E}_{ref}) - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} (\vec{q} \vec{H}_1 + \vec{u} \vec{H}_{ref}) \right] dV_\Omega \right\| \quad (G.11)$$

$$\gg \left\| \iiint_{V_\Omega} \left[ \vec{E} \cdot \vec{\varepsilon}_{ref} (\vec{p} \vec{E}_2 + \vec{h} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)) - \vec{H} \cdot \vec{\mu}_{ref} (\vec{q} \vec{H}_2 + \vec{u} (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)) \right] dV_\Omega \right\|$$

En procédant de la même façon que précédemment, le régime de validité du modèle au second ordre hérite du régime de validité du premier ordre et est complété par les critères suivants :

- vi. Les perturbations des propriétés matériaux de second ordre ( $\vec{h}$  et  $\vec{u}$ ) ne doivent pas être orthogonales aux champs électromagnétiques de référence ou les perturbations des propriétés matériaux de premier ordre ( $\vec{p}$  et  $\vec{q}$ ) ne doivent pas être orthogonales aux champs électromagnétiques de premier ordre ( $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ ).
- vii. L'amplitude des perturbations de second ordre ( $\vec{h}$  et  $\vec{u}$ ) des propriétés matériaux doit être faible vis-à-vis de l'amplitude des propriétés matériaux de premier ordre ( $\vec{p}$  et  $\vec{q}$ ).
- viii. Il est possible que les couplages locaux entre les perturbations des propriétés matériaux ( $\vec{p}, \vec{h}, \vec{q}, \vec{u}$ ) et les champs électromagnétiques résultant de ces perturbations ( $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{H}_1, \vec{H}_2$ ) ne soient pas négligeables mais que la contribution globale (l'intégrale sur le volume) le soit. Dans ce cas, nous ne sommes pas parvenus à établir une condition supplémentaire nécessaire à la validité du modèle au second ordre.

## IV. CAS MONOSTATIQUE

La particularisation au cas monostatique ne fait pas intervenir d'hypothèses supplémentaires. Le domaine de validité est indépendant de la configuration d'éclairage. Il hérite donc naturellement des domaines de validité dépendant de l'ordre considéré ou de la distribution spatiale des propriétés des matériaux.

## V. DISTRIBUTION AXISYMETRIQUE

Lorsque la distribution spatiale de propriétés matériaux est axisymétrique, deux hypothèses supplémentaires sont introduites et impactent le régime de validité des modèles résultants : le caractère axisymétrique et la décomposition en série de Fourier des champs électromagnétiques.

Le domaine de validité hérite donc du domaine de validité de l'ordre de la méthode en y ajoutant :

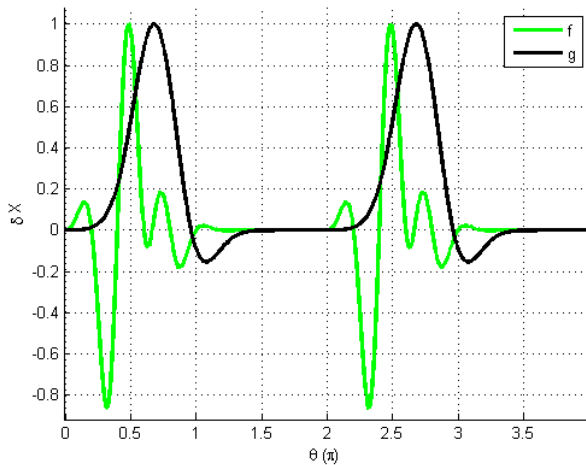
- ix. La distribution spatiale de propriétés matériaux du cas de référence ( $\vec{\varepsilon}_{ref}, \vec{\mu}_{ref}$ ) doit être axisymétrique.
- x. Le nombre de modes de Fourier utilisés pour le calcul des champs électromagnétiques de référence ( $\vec{E}_{ref}, \vec{H}_{ref}$ ) et des champs réciproques ( $\vec{E}, \vec{H}$ ) doit être suffisant pour assurer une erreur maximale donnée entre les champs calculés et les champs réels.

Dans le cas où la distribution spatiale des perturbations des propriétés matériaux est supposée axisymétrique, il faut ajouter :

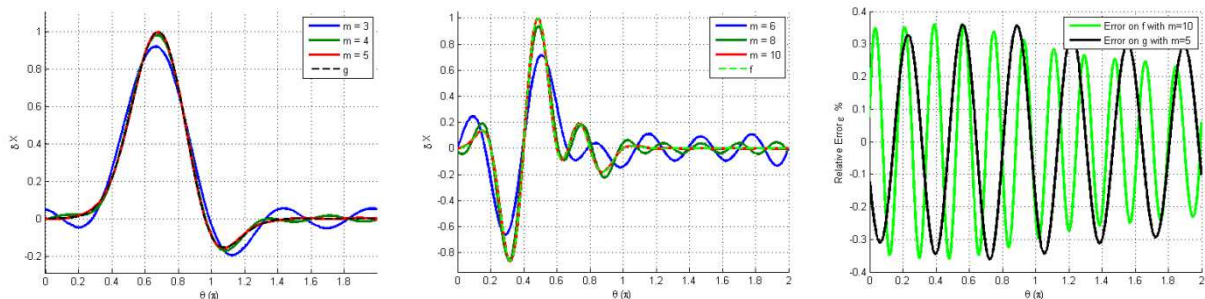
- xi. La distribution spatiale des perturbations des propriétés matériaux ( $\bar{p}$  et  $\bar{q}$ ) doit être axisymétrique.

Dans le cas où la distribution spatiale des perturbations des propriétés matériaux n'est pas supposée axisymétrique mais qu'elle est projetée dans une base de Fourier, il faut ajouter :

- xii. Le nombre de modes de Fourier utilisés pour le calcul de la distribution spatiale des perturbations des propriétés des matériaux doit être suffisant pour assurer une erreur maximale donnée entre les perturbations calculées et les perturbations réelles. Ce cas est d'autant plus simple à satisfaire que le nombre de modes de Fourier est faible et donc que les variations azimutales des perturbations sont « lisses » (**Figure 28** et **Figure 29**).



**Figure 28 :** Exemple de variations azimutales de perturbations. La courbe noire  $g$  représente des perturbations de distribution spectrale plus faible que la courbe verte  $f$ . Elle nécessite donc moins de modes de Fourier pour le même taux d'erreur. Dans tous les cas, la base de Fourier assure la périodicité azimutale de période  $2\pi$ .



**Figure 29 :** La courbe noire  $g$  nécessite 5 modes de Fourier pour être représentée avec la même erreur relative que la fonction  $f$  représentée avec 10 modes de Fourier.

## VI. PROPRIETES MATERIAUX ORTHOTROPES ET ISOTROPES

Lorsque les propriétés des matériaux sont orthotropes ou isotropes, la seule hypothèse introduite est explicite. Le régime de validité hérite donc naturellement des domaines de validité de l'ordre considéré et/ou de la distribution spatiale des propriétés des matériaux en ajoutant le caractère orthotrope ou isotrope aux propriétés matériaux et/ou aux perturbations.

## VII. ETUDE NUMERIQUE DE L'ERREUR SUR UN EXEMPLE AXISYMETRIQUE

Caractériser la précision du modèle direct est indispensable à la maîtrise de la précision du problème inverse. En effet si, avant même la résolution du problème inverse, le problème direct



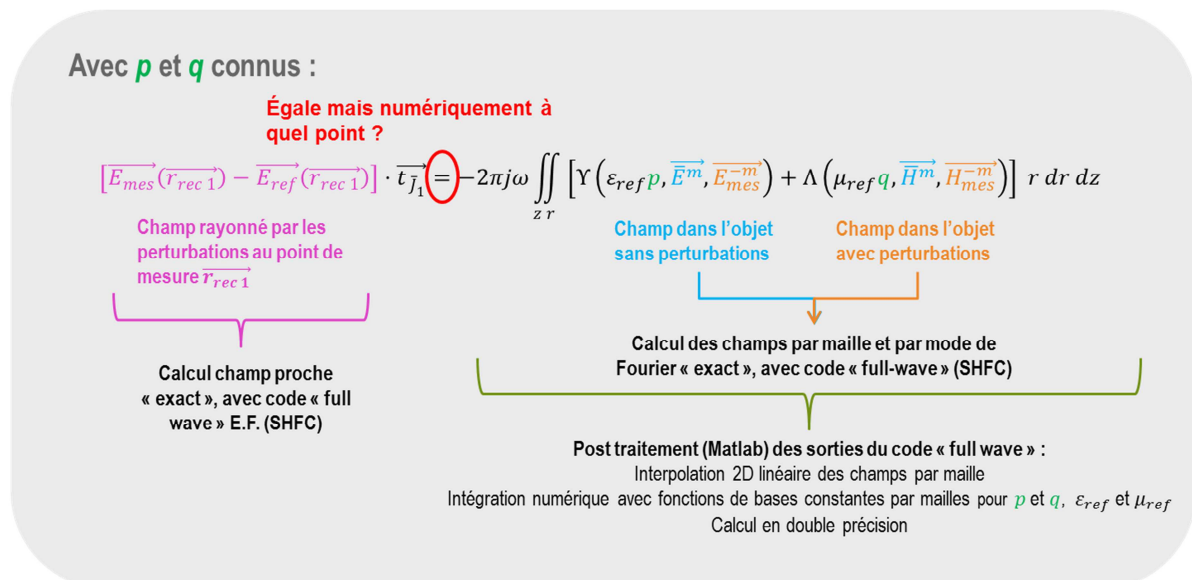
exact comporte une incertitude de 5% et que l'on souhaite obtenir un résultat avec une précision de l'ordre de 5% en « inversant » ce modèle exact réduit à un premier ordre, l'objectif est perdu d'avance.

Il est proposé d'étudier l'erreur de la VPRT sur l'exemple d'une sphère. Cette étude est réduite à la formulation pour un objet de référence et des perturbations axisymétriques et isotropes.

L'objectif est donc de quantifier la précision du modèle direct, c'est-à-dire l'écart entre les termes de droite et de gauche de l'équation ( G.12 ) lorsque l'ensemble des paramètres est connu. Cette précision définit la performance maximale théorique atteignable lors de l'inversion. En d'autres termes, l'écart entre le terme de droite et le terme de gauche de l'équation ( G.12 ) évalués numériquement à perturbations connues fixe l'erreur minimale accessible lors de la résolution du problème inverse.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{mes}}(\overrightarrow{r_{rec1}}) - \overrightarrow{E_{ref}}(\overrightarrow{r_{rec1}}) \cdot \overrightarrow{t_{j_1}} &= -2\pi j\omega \iint_{z r} [\Upsilon - \Lambda] r dr dz \\ \Upsilon &= \varepsilon_{ref} p \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\overrightarrow{E}^m \cdot \overrightarrow{E_{mes}^{-m}}) \right] \\ \Lambda &= \mu_{ref} q \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\overrightarrow{H}^m \cdot \overrightarrow{H_{mes}^{-m}}) \right] \end{aligned} \quad (G.12)$$

Comme décrit sur la **Figure 30**, les champs électromagnétiques nécessaires à l'équation ( G.12 ) sont évalués numériquement par un solveur « full-wave » et différentes étapes sont nécessaires pour calculer les termes de droite et de gauche.



**Figure 30 :** Etapes mises en œuvre pour évaluer l'erreur numérique du modèle exact.

L'écart entre les termes de droite et de gauche est alors sensible :

- au solveur qui calcule les champs électromagnétiques,
- au maillage,

- au post-traitement mis en œuvre (l'évaluation de l'intégrande et de l'intégrale du terme de droite),
- à la configuration étudiée :
  - o à la géométrie,
  - o à la distance objet-antenne,
  - o aux angles d'incidence et de réception,
  - o à la fréquence,
  - o aux propriétés matériaux,

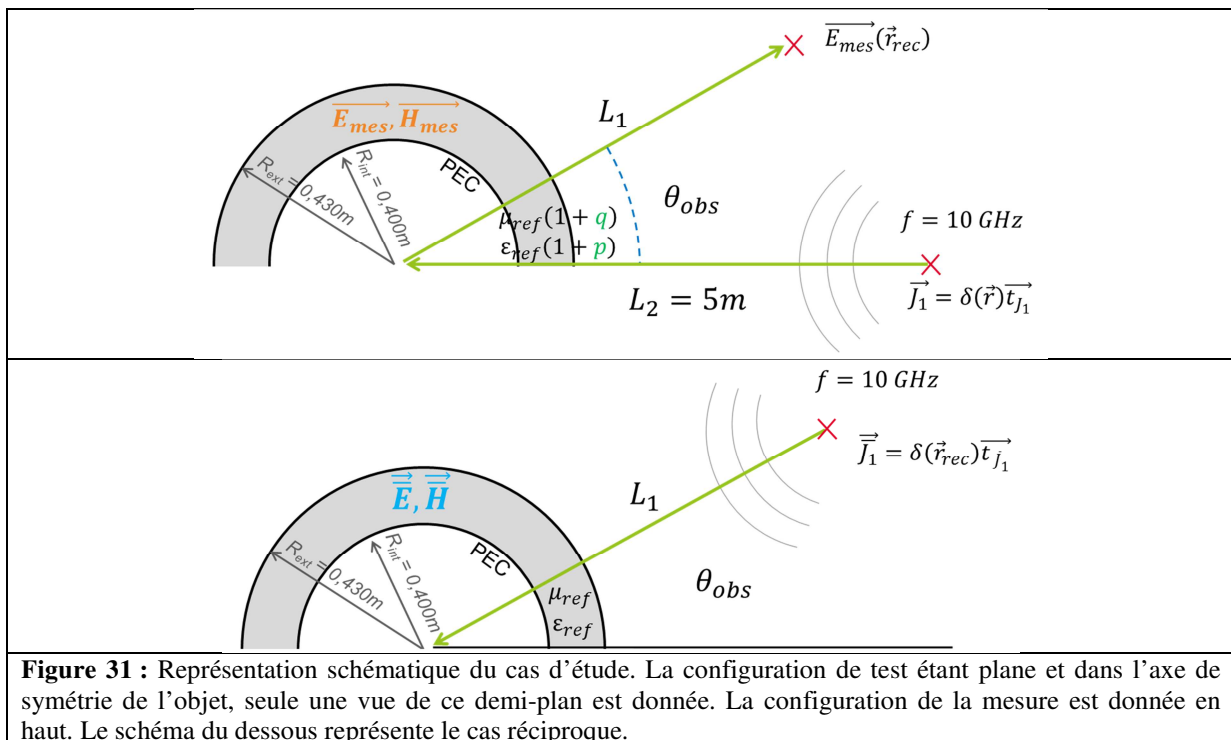
Dans notre cas, certains paramètres sont fixés par les moyens mis à notre disposition :

- le solveur : SHFC,
- le nombre de mode de Fourier  $m$  (paramètre interne au code SHFC<sup>27</sup>).

D'autres sont fixés par le temps imparti et le choix est arbitraire :

- le post traitement mis en œuvre (il est choisi de discrétiser l'intégrale du terme de droite sur le maillage utilisé par le solveur « full-wave », d'utiliser des fonctions de bases linéaires par mailles pour les champs électromagnétiques, constantes pour les propriétés matériaux et les perturbations).
- la géométrie. Une sphère métallique de rayon 400mm revêtue d'un matériau de 30mm d'épaisseur est considérée (cf. **Figure 31**).
- les propriétés matériaux.
- la fréquence : 10GHz.

Le cas d'étude résultant est alors défini en **Figure 31**.



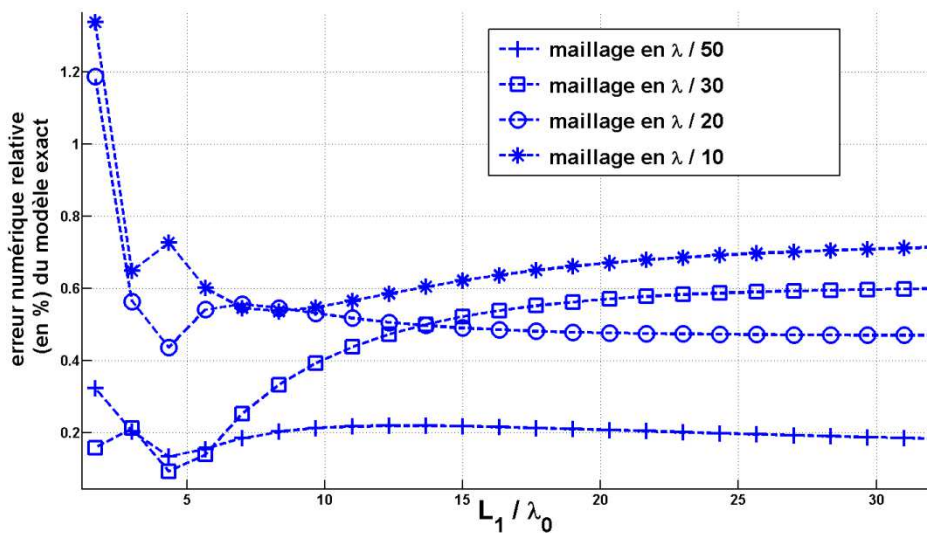
**Figure 31** : Représentation schématique du cas d'étude. La configuration de test étant plane et dans l'axe de symétrie de l'objet, seule une vue de ce demi-plan est donnée. La configuration de la mesure est donnée en haut. Le schéma du dessous représente le cas réciproque.

<sup>27</sup> Le nombre de mode de Fourier dépend de l'angle d'incidence et de la distance objet-antennes. Au CEA-CESTA, ce paramètre est choisi pour satisfaire un critère d'erreur maximale sur la SER.

Sur ce cas d'étude, la sensibilité de l'erreur numérique de mise en œuvre est étudiée sur les trois paramètres restants : le maillage, la distance objet-antenne et l'angle de bistatisme.

## 1. Sensibilité au maillage et à la distance objet-observation

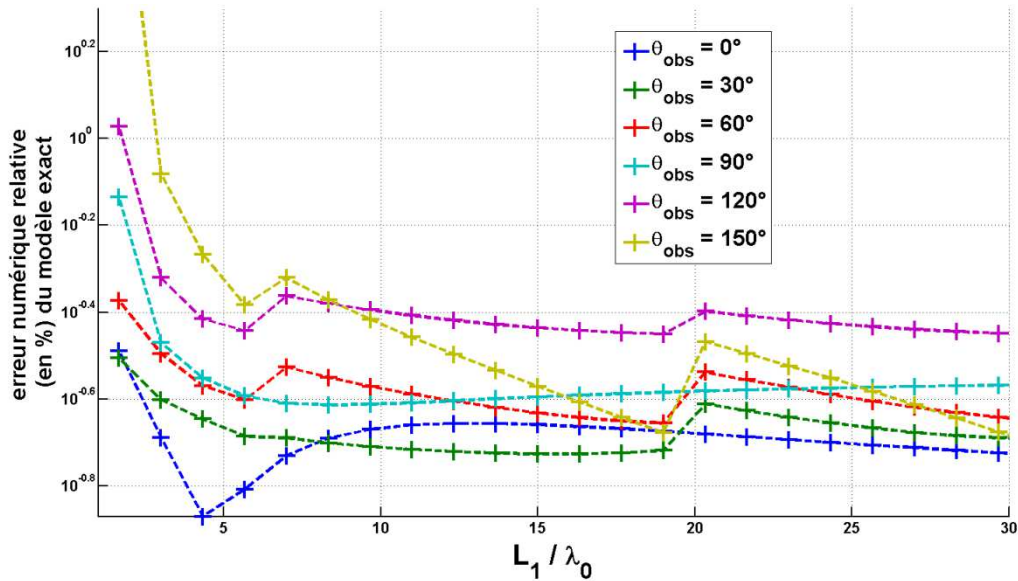
La **Figure 32** montre l'évolution en fonction de la taille de maille, de l'écart entre le terme de droite et de gauche de l'équation lorsque chaque terme est évalué numériquement. La sensibilité au maillage de la méthode telle qu'elle a été implémentée n'est pas négligeable : quel que soit  $L_1$ , entre le maillage le plus raffiné ( $\lambda/50$ ) et le moins raffiné ( $\lambda/10$ ), l'erreur relative augmente d'un facteur supérieur à 3. Sur cet exemple, pour une distance  $L_1 > 3\lambda_0$ , quelle que soit la taille de maille inférieure à  $\lambda/10$ , l'erreur numérique relative est inférieure à 1%. Cette erreur relative permet de valider la méthode et son implémentation. En remarquant que l'erreur tend vers une limite à mesure que la distance  $L_1/\lambda_0$  augmente, cette étude permet aussi de borner à 1%, l'erreur numérique en champ lointain dès lors que le facteur de maille est inférieur à  $\lambda/10$ .



**Figure 32 :** Evolution de l'erreur numérique de la formulation exacte de la VPRT telle qu'implémentée (cf. **Figure 30**) en fonction du maillage et de la distance objet-observation. La configuration électromagnétique est donnée en **Figure 31**. Les résultats présentés sur ce graphique sont pour  $\theta_{obs} = 0^\circ$ .

## 2. Sensibilité à l'angle de bistatisme et à la distance objet-observation

La **Figure 33** montre l'évolution en fonction de l'angle de bistatisme, de l'écart entre le terme de droite et de gauche de l'équation lorsque chaque terme est évalué numériquement et pour un maillage en  $\lambda/50$ . La sensibilité à l'angle de bistatisme de la méthode telle qu'elle est implémentée n'est pas négligeable. Sur cet exemple, pour une distance  $L_1 > 3\lambda_0$ , quel que soit l'angle de bistatisme, l'erreur numérique relative est inférieure à 1%. Cette erreur relative permet de valider la méthode et son implémentation. En remarquant que l'erreur tend vers une limite à mesure que la distance  $L_1$  augmente, cette étude permet aussi de borner à 1%, l'erreur numérique en champ lointain pour un tel maillage.



**Figure 33 :** Evolution de l'erreur numérique de la formulation exacte de la VPRT telle qu'implémentée (cf **Figure 30**) en fonction de l'angle d'observation et de la distance objet-observation. La configuration électromagnétique est donnée en **Figure 31**. Les résultats présentés sur ce graphique sont obtenus avec un maillage en  $\lambda/50$ .

## VIII. CONCLUSION PARTIELLE

Quelques éléments permettant de comprendre et d'anticiper partiellement le domaine de validité de la méthode VPRT étendue (matériaux magnétiques, distribution de propriétés matériaux axisymétrique) ont été proposés. Nous avons ainsi établi que la VPRT au premier ordre est valide lorsque :

- i. Les lois de comportement électromagnétique des matériaux sont linéaires et les matériaux non-chiraux.
- ii. Les matériaux de référence ont un comportement réciproque à une sollicitation électromagnétique.
- iii. Les perturbations des propriétés des matériaux ne doivent pas être orthogonales aux champs électromagnétiques de référence.
- iv. L'amplitude des perturbations des propriétés matériaux sont faible vis-à-vis de l'amplitude des propriétés des matériaux de référence.
- v. Il est possible que les couplages locaux entre les perturbations des propriétés matériaux et les champs électromagnétiques résultant de ces perturbations ne soient pas négligeables mais que la contribution globale (l'intégrale sur le volume) le soit. Par exemple, l'amplitude des perturbations des propriétés matériaux peut être non négligeable vis-à-vis des propriétés matériaux de référence mais le modèle au premier ordre peut rester valide. Dans ce cas, nous ne sommes pas parvenus à établir une condition supplémentaire nécessaire à la validité du modèle au premier ordre.

Une étude de l'erreur numérique de la formulation exacte telle qu'implémentée en fonction de la distance objet-observation, du maillage et de l'angle de bistatisme a été proposée sur un exemple. Cette erreur fixe l'erreur minimale accessible lors de la résolution du problème inverse. Bien que le taux d'erreur soit faible pour la plupart des configurations étudiées, les résultats mettent en

évidence une forte sensibilité de l'erreur numérique à tous les paramètres étudiés. Cette sensibilité est nécessairement liée au solveur SHFC et à l'ensemble des post-traitements implémentés. La source principale de cette sensibilité n'est pas identifiée. Sur l'exemple utilisé, il est mis en évidence que pour une distance objet-observation supérieure à  $3\lambda_0$ , le maillage en  $\lambda/50$  permet de garantir une erreur numérique maximale de 1%.



## H. MODELE DE SENSIBILITE SURFACIQUE

La méthode surfacique proposée constitue une approche nouvelle. Le chapitre E en établit les fondements. Nous proposons une contribution à l'étude de son domaine de validité.

Le régime de validité de la méthode proposée pour l'évaluation de la sensibilité du champ électrique à l'impédance surfacique hérite en premier lieu du domaine de validité de l'intégrale de rayonnement. La formulation donnée en E.I.1 est générale tant que le point d'observation n'appartient pas à la surface rayonnante. Cette première considération constitue le premier élément du domaine de validité.

Lors de la construction du modèle de sensibilité (cf.E.II.1), plusieurs hypothèses sont faites. Tout d'abord, la série de Taylor est tronquée à l'ordre 1. C'est une hypothèse « petites perturbations » dont il faut étudier l'impact sur le domaine de validité de la méthode. Ensuite, il a été proposé d'utiliser un modèle en impédance de Léontovich pour écrire le lien entre la densité de courant électrique et de courant magnétique. Plutôt que d'utiliser un modèle de Born qui néglige la variation du courant, nous avons utilisé un modèle d'optique physique pour estimer sa variation locale. Ces deux modèles (Léontovich et optique physique) sont dimensionnant du domaine de validité de la méthode.

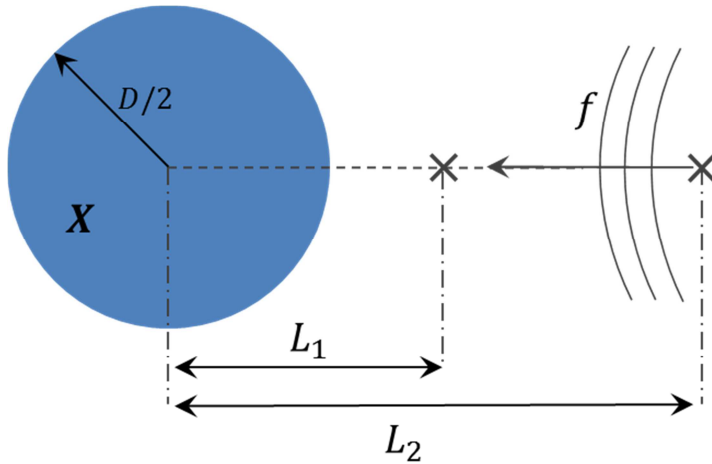
### I. HYPOTHESE « PETITES PERTURBATIONS »

Le modèle au premier ordre est suffisant lorsque les ordres négligés ont une contribution inférieure à une erreur  $\epsilon$  donnée. Ainsi, pour une fonction  $\vec{E}_{ref}$  analytique et partant du développement en série de Taylor, l'hypothèse « petites perturbations » est valide lorsque

$$\sum_{m>1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \vec{E}_{ref}}{\partial X^m} dX^m < \vec{\epsilon}$$

Ainsi le domaine de validité de l'hypothèse « petites perturbations » dépend de l'évolution du champ électrique  $\vec{E}_{ref}$  en fonction de la perturbation. Lorsque cette évolution est faible, la série converge rapidement et le premier terme (l'ordre 1) est une bonne estimation de cette évolution. Borner le domaine de validité de l'hypothèse « petites perturbations » a priori, c'est-à-dire sans connaître  $\vec{E}_{ref}(X)$  est donc difficile. Une étude qualitative est proposée.

D'un point de vue physique, il est possible d'identifier des configurations favorables ou défavorables à l'hypothèse « petites perturbations ». Elles sont classées en deux catégories : l'influence de la distance objet-observation et de la distribution spatiale des perturbations. Ces configurations sont illustrées sur un exemple : une sphère de diamètre  $D$  aux propriétés matériaux électromagnétiques  $X$  homogènes et isotropes, baigne dans le vide. Elle est éclairée par une onde monochromatique de fréquence  $f$  et de longueur d'onde  $\lambda = c/f$  créée par un dipôle ponctuel placé à une distance  $L_1$  du centre de la sphère. Une antenne ponctuelle placée à une distance  $L_2$  sur le même axe mesure le champ électrique qu'elle rayonne. Un schéma est donné en **Figure 34**. Nous notons  $\tau = \frac{dX}{X} * 100$  le taux de variation de la perturbation nécessaire pour assurer une erreur  $\vec{\epsilon}$  sur le champ électrique au point d'observation.

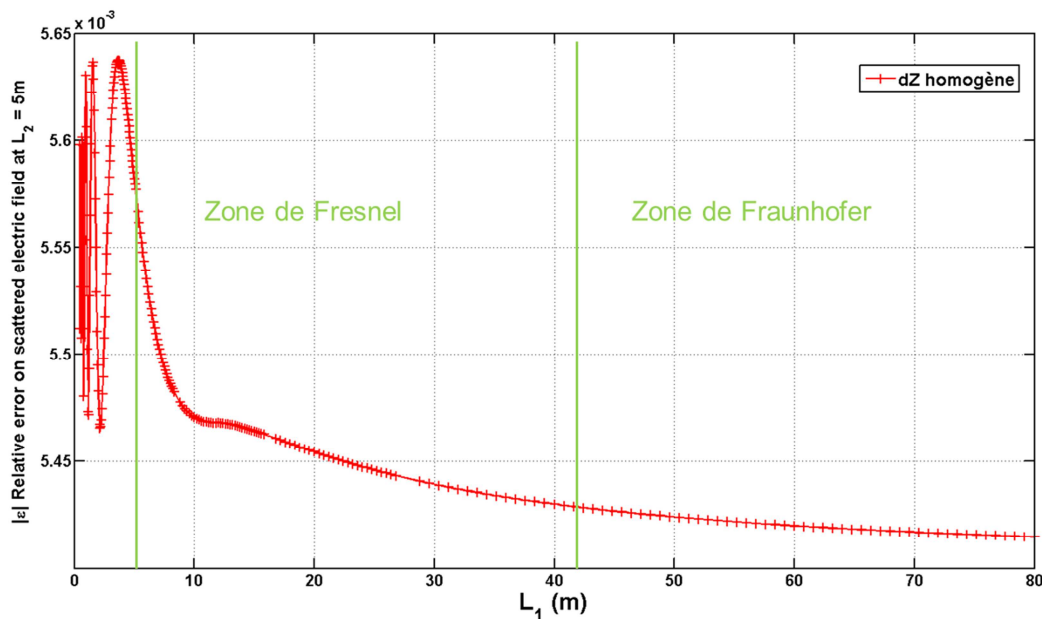


**Figure 34 :** Schéma de la configuration d'étude. La sphère est composée d'une distribution de matériaux aux propriétés homogènes.

## 1. Influence de la distance objet-observation

A  $L_2$  fixée, à mesure que la distance  $L_1$  augmente, l'antenne de réception mesure la zone réactive (zone de Rayleigh) lorsqu'elle est très près de la sphère ( $L_1 < \frac{D^2}{4\lambda}$ ), puis la zone de Fresnel ( $\frac{D^2}{4\lambda} < L_1 < \frac{2D^2}{\lambda}$ ) et enfin la zone de Fraunhofer ou zone de champ lointain.

Le graphique **Figure 35** présente l'évolution de l'erreur  $|\vec{\epsilon}|$  sur le champ électrique en fonction de  $L_1$  commise par le modèle perturbatif au premier ordre pour  $f = 10 \text{ GHz}$ ,  $L_2 = 5,0 \text{ m}$ ,  $D = 0,80 \text{ m}$ ,  $X = Z = 0,463 + 0,095i$ <sup>28</sup> et  $dZ = 5\% * Z$ .



**Figure 35 :** Evolution de l'erreur relative sur le champ électrique estimé par le modèle perturbatif surfacique au premier ordre en fonction de la distance objet-observation. L'objet de référence est une sphère  $D = 0,80 \text{ m}$  homogène en impédance  $Z = 0,463 + 0,095i$  dont l'impact d'une perturbation homogène  $dZ = 0,05 * Z$  sur le champ électrique issue d'un éclairage dipolaire en  $L_2 = 5,00 \text{ m}$  est estimé à  $f = 10 \text{ GHz}$ . Les courants sont évalués par optique physique.

<sup>28</sup> Cette impédance correspond à 1cm de verre sur une surface parfaitement conductrice



La zone de Rayleigh comporte de grandes inhomogénéités et de grandes variations du champ électromagnétique. Elle constitue une zone de « couche limite » le long de la surface de l'objet où l'interaction avec l'objet est forte. Cette zone de forte interaction onde-matière induit une sensibilité forte du champ électrique aux propriétés matériaux  $X$ . Comme le montre les oscillations sur le graphique **Figure 35**, le modèle au premier ordre dans la zone de Rayleigh a donc un domaine de validité incertain. Le taux maximal de variation de la perturbation nécessaire pour assurer une erreur  $\vec{\epsilon}$  sur le champ électrique au point d'observation est noté  $\tau_{Rayleigh}$ .

Au contraire, la zone de champ lointain est caractéristique d'un champ électromagnétique établi c'est-à-dire dont les variations spatiales sont quasi-périodiques. L'intégrale de rayonnement tend à moyenniser l'influence de l'interaction entre l'onde incidente et l'objet d'autant plus que la distance  $L_1$  est grande (cf.E.I.1). Ainsi, les variations du champ électromagnétique dues à des perturbations  $dX$  sont « lissées » dans la zone de champ lointain. Il en résulte une sensibilité du champ électrique aux propriétés matériaux plus faible dans cette zone que dans la zone de champ proche. Nous notons  $\tau_{Fraunhofer}$  le taux maximal de variation de la perturbation nécessaire pour assurer une erreur  $\vec{\epsilon}$  sur le champ électrique au point d'observation dans la zone de champ lointain. A même configuration, nous avons alors  $\tau_{Rayleigh} < \tau_{Fraunhofer}$ .

La zone de Fresnel constitue une zone intermédiaire où le champ électromagnétique n'est pas pleinement établi et les interactions onde-matière locales ont une influence. Nous notons  $\tau_{Fresnel}$  le taux maximal de variation de la perturbation nécessaire pour assurer une erreur  $\vec{\epsilon}$  sur le champ électrique au point d'observation dans la zone correspondante. A même configuration, nous avons alors  $\tau_{Rayleigh} < \tau_{Fresnel} < \tau_{Fraunhofer}$ .

Ces considérations sont uniquement qualitatives. Nous en déduisons que pour une configuration fixée, plus le point d'observation est éloigné de la distribution spatiale de propriétés matériaux comportant des variations et plus l'hypothèse « petites perturbations » des propriétés matériaux sur le champ électrique au point d'observation possède un domaine de validité étendu.

## 2. Influence de la distribution spatiale des perturbations

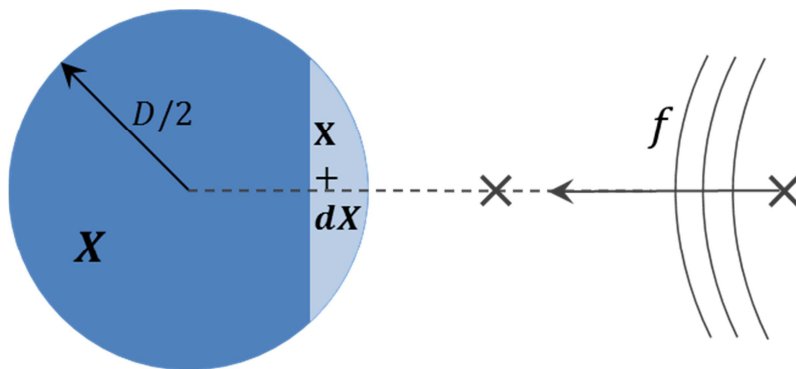
Intéressons-nous maintenant à l'influence de la distribution spatiale des perturbations quel que soit le point d'observation.

### ***Distribution homogène***

Sur la sphère de propriétés matériaux  $X$  homogènes et isotropes, une perturbation  $dX$  homogène et isotrope est ajoutée dans tout le volume de la sphère (cf. **Figure 34**). Dans ce cas, l'interaction onde-matière locale, c'est-à-dire en tout point de la sphère, est modifiée de façon uniforme. L'impact de cette modification n'introduit pas de nouveaux phénomènes physiques par rapport au cas sans perturbation. Cela peut s'interpréter comme « la sphère de matériaux perturbés répond de la même façon à la sollicitation électromagnétique que la sphère sans perturbations ; seule l'amplitude de la réponse diffère ». Nous notons  $\tau_{homogene}$  le taux maximal de variation de la perturbation homogène nécessaire pour assurer une erreur  $\vec{\epsilon}$  sur le champ électrique au point d'observation.

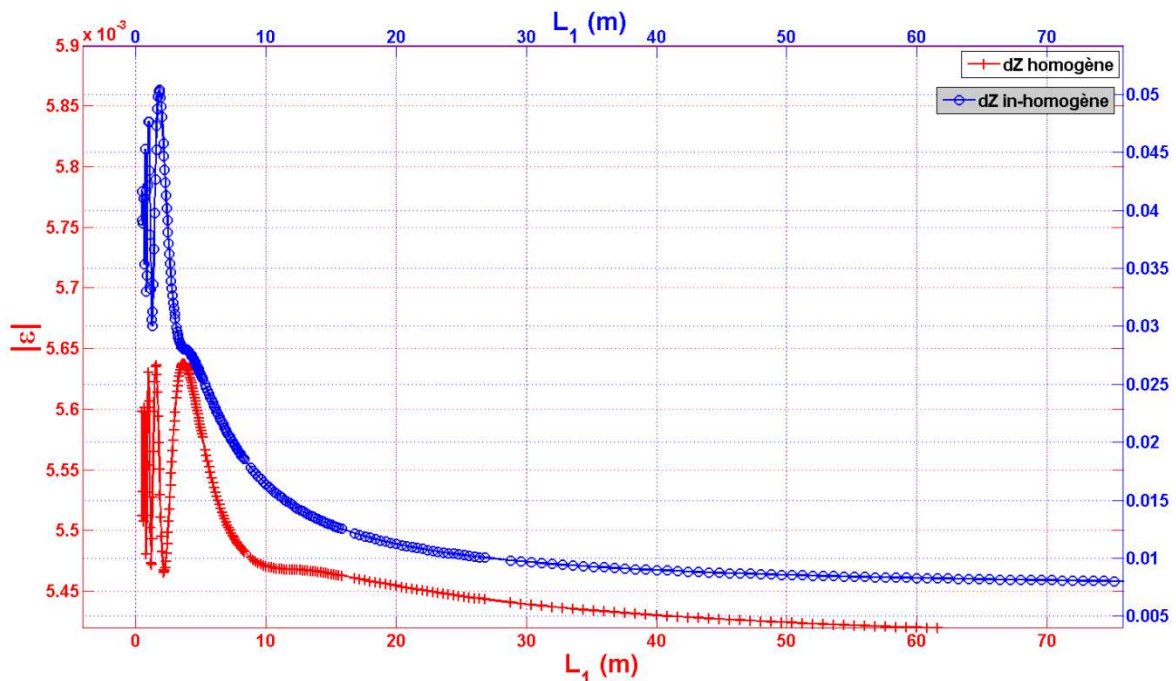
### Distribution inhomogène

Considérons au contraire, le cas où une perturbation  $dX$  isotrope et inhomogène est ajoutée, par exemple seulement dans une partie du volume de la sphère (cf. **Figure 36**).



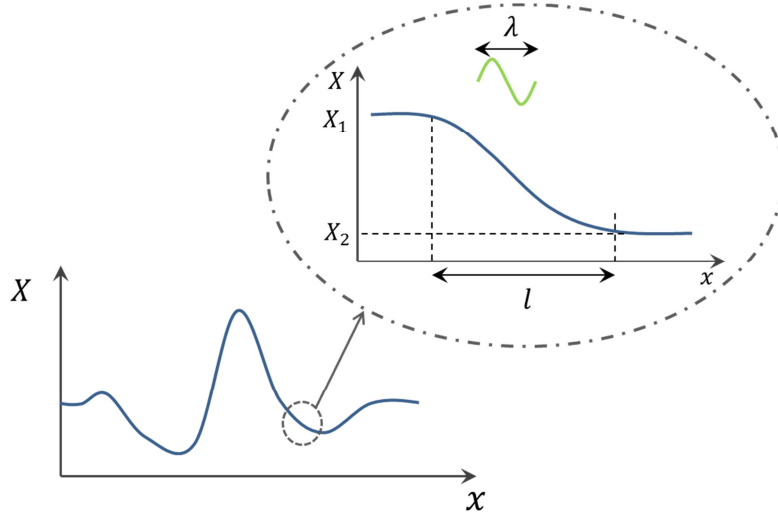
**Figure 36 :** Représentation d'une distribution de perturbation de propriétés matériaux inhomogène constante par morceaux. Le changement brutal des propriétés des matériaux fait apparaître un phénomène de diffraction à l'interface.

Dans ce cas, l'interaction onde-matière locale, c'est-à-dire en tout point de la sphère, n'est pas modifiée de façon uniforme. L'impact de cette modification introduit potentiellement de nouveaux phénomènes physiques par rapport au cas sans perturbation. Par exemple, à la jonction entre la zone non perturbée et la zone perturbée, un phénomène de diffraction peut apparaître alors qu'il est inexistant sur le cas sans perturbation. Ce nouveau phénomène physique constitue une non-linéarité nécessairement difficile à modéliser par un modèle linéaire... Comme le montre la **Figure 37**, le modèle au premier ordre – l'hypothèse « petites perturbations » – est donc d'autant moins valide que la perturbation est inhomogène. C'est-à-dire qu'elle est valide pour un taux de perturbation  $\tau_{inhomogène} \ll \tau_{homogène}$ .



**Figure 37 :** Comparaison de l'évolution de l'erreur relative sur le champ électrique commise par le modèle perturbatif surfacique au premier ordre en fonction de la distance objet-observation dans le cas de perturbations homogènes (cf. **Figure 34**) et inhomogènes (cf. **Figure 36**). L'objet de référence est une sphère  $D = 0,80 \text{ m}$  homogène en impédance  $Z = 0,463 + 0,095i$  dont l'impact d'une perturbation  $dZ = 0,05 * Z$  sur le champ électrique issue d'un éclairage dipolaire en  $L_2 = 5,00 \text{ m}$  est estimé à  $f = 10 \text{ GHz}$ .

De façon plus générale, toute distribution spatiale de propriétés matériaux peut être représentée par une fonction de l'espace. Lorsque cette distribution est éclairée par une onde électromagnétique, toute variation forte vue par l'onde génère un phénomène de diffraction [5]. Cela signifie que lorsque le gradient spatial de la distribution dans la direction de propagation locale de l'onde est suffisant vis-à-vis de la longueur d'onde, un phénomène de diffraction se produit. Dans le cas 1D et pour une distribution de propriétés  $X$  isotropes, comme représenté en **Figure 38**, la phrase précédente est traduite mathématiquement par les équations ( H.1 ).



**Figure 38 :** Représentation schématique d'une distribution de propriétés matériaux isotropes et inhomogènes  $X(x)$  en 1D. Le phénomène de diffraction apparaît lorsque l'onde perçoit une discontinuité de son milieu de propagation. C'est-à-dire qu'il existe une condition nécessaire liant les quantités  $l, X_1, X_2, \lambda$ .

$$C_n(x) = \left| \frac{X(x + n\lambda/2) - X(x - n\lambda/2)}{n \lambda(x)} \right| = \frac{1}{n} \left| \int_{x-n\lambda/2}^{x+n\lambda/2} \frac{\nabla X(x)}{\lambda(x)} dx \right| \quad (\text{H.1})$$

$C_n(x)$  doit être compris comme « le gradient spatial de la distribution de  $X$  vu par l'onde (vu par  $n$  longueurs d'onde) ». Ainsi lorsque le critère  $C_n(x) > \tau_n$  est atteint, on dit qu'il y a diffraction où  $\tau_n$  est la variation spatiale maximale de la distribution à partir de laquelle le phénomène de diffraction est considéré non-négligeable. Il est paramétré par  $n$ , un réel positif tel que  $l = n \lambda$ . Des valeurs raisonnables de  $n$  sont  $n = 1$  ou  $n = 1/2$  puisque  $n$  traduit « le nombre de longueur d'onde considérée percevant la variation de distribution comme une cause de diffraction ».

Dans la pratique, à distribution spatiale donnée (à objet donné),  $C_n(x)$  est facilement évaluable. La borne  $\tau_n$  définissant le critère reste à déterminer. Il peut l'être par études paramétriques sur des cas de distributions canoniques comme un cylindre. Une seconde possibilité consiste à considérer les problèmes canoniques par une approche asymptotique type « Théorie de la diffraction » [82].

Dans le cas tridimensionnel et lorsque  $X$  est une propriété isotrope, ce critère peut être généralisé par ( H.2 ) où  $\vec{dx}$  pointe dans la direction de propagation locale de l'onde. Afin de calculer  $C_n(\vec{r})$  a priori, on choisira pour  $\vec{dx}$  la direction de propagation de l'onde « léchant » l'objet et définie par  $-\vec{t}$  en **Figure 26** et  $\lambda(\vec{x})$  peut-être surévalué par la valeur  $\lambda_0$ .

$$C_n(\vec{r}) < \tau_n$$

$$C_n(\vec{r}) = \frac{1}{n} \left| \int_{\vec{r}-n\lambda/2\vec{d}\vec{x}}^{\vec{r}+n\lambda/2\vec{d}\vec{x}} \frac{\vec{\nabla}X(\vec{x})}{\lambda(\vec{x})} \cdot \vec{d}\vec{x} \right| \quad (\text{H.2})$$

Ainsi, à configuration fixée, plus le gradient spatial de la distribution de perturbations  $dX$  vu par l'onde est faible et plus l'hypothèse « petites perturbations » des propriétés matériaux sur le champ électrique au point d'observation possède un domaine de validité étendu. C'est équivalent au principe de localité puisque cela signifie que chaque point doit réagir sans couplage avec la région voisine. C'est aussi cohérent de la négligence des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor dans le sens où toutes les dérivées partielles croisées  $\frac{\partial^{m>1} \overline{E_{ref}}}{\partial X_i^k \partial X_{i+1}^j}$ ,  $k + j = m$  responsables du couplage de la zone  $i$  avec la zone  $i + 1$  sont négligées.

## II. INFLUENCE DU MODELE EN IMPEDANCE DE LEONTOVICH

Le modèle en impédance de Léontovich introduit pour évaluer la sensibilité du courant magnétique à des variations de propriétés matériaux a un impact sur le domaine de validité de la méthode. Pour rappel, il permet de lier la densité surfacique de courant électrique  $\overline{J_S^{Leon}}$  à la densité surfacique de courant magnétique  $\overline{M_S^{Leon}}$  à travers une impédance  $\overline{Z}$  représentative de l'interaction onde-matière locale.

$$\overline{M_S^{Leon}} = -\vec{n} \wedge \left( \overline{Z} \overline{J_S^{Leon}} \right) \quad (\text{H.3})$$

Cette condition d'impédance locale est largement utilisée puisqu'elle propose un excellent ratio simplicité-précision. Aussi, existe-t-il de nombreux travaux sur sa condition de validité. Léontovich lui-même propose une contribution au domaine de validité du modèle portant son nom [83]. Les travaux de Rytov [1], Senior et Volakis [84] et Mohsen [85] précisent le régime de validité. Ces travaux estiment que la condition d'impédance de Léontovich est valide lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- i. Le long de la surface, sur une échelle de la longueur d'onde, le champ extérieur varie faiblement.
- ii. Le long de la surface, toute variation des propriétés matériaux est faible à l'échelle de la longueur d'onde locale.
- iii. Les propriétés matériaux sous la surface sont telles que leur indice de réfraction complexe  $N = \sqrt{\mu\epsilon}$  est grand par rapport à celui du milieu extérieur à la surface.
- iv. Les rayons de courbures locaux de la surface sont grands par rapport à la longueur d'onde et par rapport à la profondeur de pénétration de l'onde<sup>29</sup>. En particulier, la condition ( H.5 ) doit être satisfaite.

L'ensemble de ces critères découle de deux hypothèses plus générales : l'interaction onde-matière est locale (principe de localité) et l'onde perçoit une interface plane.

Le caractère local de la condition d'impédance de Léontovich est pleinement justifié pour une étude de sensibilité au premier ordre. En effet, comme conclu au paragraphe précédent, négliger les termes d'ordre supérieur à un dans le développement en série de Taylor conduit à un modèle de sensibilité local. Ainsi, la localité de la condition d'impédance de Léontovich ne restreint pas le domaine de validité du modèle de sensibilité au premier ordre<sup>30</sup>.

Par contre la condition d'interface localement plane est une restriction supplémentaire. En reprenant les travaux de Mitzer [86] on remarque qu'au premier ordre, le modèle d'impédance de Léontovich néglige le facteur  $p$  donné par l'équation ( H.4 ).

$$p = 1 \mp \frac{(1+i)(\rho_t - \rho_b)\delta}{4} \quad (\text{H.4})$$

Où  $\rho_t, \rho_b$  sont les courbures<sup>31</sup> dans les directions  $\vec{t}, \vec{b}$  et  $\delta$  la profondeur de pénétration de l'onde.

Pour un plan ou une sphère,  $\rho_t = \rho_b$  et la condition d'impédance de Mitzer est équivalente à celle de Léontovich. En fixant une erreur relative maximale de 10% sur l'impédance locale, l'équation ( H.4 ) permet d'établir un critère sur les courbures locales. Ainsi, la condition d'interface localement plane nécessaire au modèle d'impédance de Léontovich est valide lorsque ( H.5 ) est satisfaite(cf. [86]).

$$\delta ||\rho_t| - |\rho_b|| < 0.4 \quad (\text{H.5})$$

### III. INFLUENCE DU MODELE D'OPTIQUE PHYSIQUE

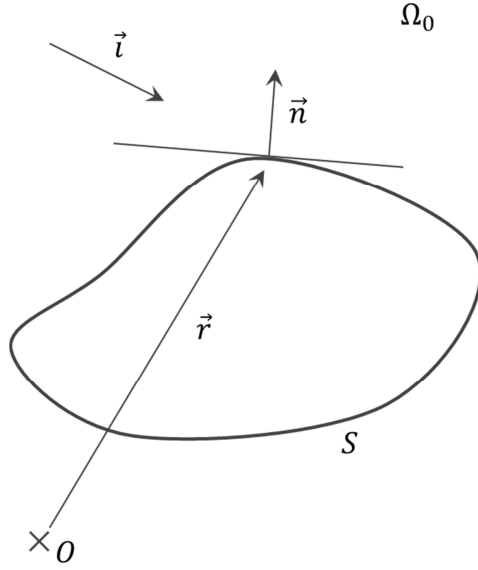
Le modèle d'optique physique est utilisé pour décrire la densité de courant surfacique  $\vec{J}_S$  en fonction de l'impédance de Léontovich. Dans cette partie l'impact d'un modèle d'optique physique sur le domaine de validité du modèle de sensibilité au premier ordre est discuté.

En plus du caractère local hérité du modèle d'impédance de Léontovich, le modèle d'optique physique utilise l'approximation de Kirchoff. C'est une approximation qui simplifie le calcul du champ électromagnétique total à la surface  $\vec{E}_T(\vec{r})$ . Elle consiste à approximer le champ total en tout point  $\vec{r}$  de la surface par le champ total sur le plan tangent comme s'il s'agissait d'un plan infini (**Figure 39**). Il existe alors une zone non éclairée appelé zone d'ombre où le champ incident est nul. Le champ total résultant y est alors aussi nul. Dans la zone éclairée, le champ total et le champ incident sont simplement liés par un facteur de proportionnalité qu'est le coefficient de réflexion. A polarisation fixée, cela s'exprime par ( H.6 )

$$\vec{E}_T(\vec{r}_{\text{éclairée}}) = (1 + R)\vec{E}_{inc}(\vec{r}_{\text{éclairée}}) \quad (\text{H.6})$$

<sup>30</sup> Par contre, pour un modèle d'ordre supérieur, l'influence du caractère local de la condition d'impédance de Léontovich sur le domaine de validité du modèle perturbatif est à considérer.

<sup>31</sup> Pour rappel, la courbure est définie comme l'inverse du rayon de courbure



**Figure 39 :** Représentation de l'approximation de Kirchoff.  $\vec{i}$  est la direction de l'onde incidente.

Le domaine de validité résultant est alors défini par la capacité de l'interaction onde-objet à créer un champ négligeable dans la zone d'ombre et la capacité de chaque point de l'objet à réagir comme une surface plane à l'onde incidente. La seconde considération n'est autre que le principe de localité discuté précédemment. Physiquement, la présence d'un champ total négligeable en zone d'ombre par rapport au champ total en zone éclairée est d'autant plus vraie que :

- il n'y a pas de sources en zone d'ombre (les matériaux sont passifs),
- la longueur d'onde est faible par rapport aux dimensions caractéristiques de l'objet,
- les matériaux constitutifs de l'objet dans la zone d'ombre s'opposent à la propagation de l'onde et ceux en zone éclairée réfléchissent bien l'onde incidente. Cela se produit en particulier lorsque les matériaux ont un fort indice par rapport au milieu extérieur et sont résistifs à l'onde, qu'ils dissipent l'énergie par effet Joule.

En faisant appel à des considérations asymptotiques, un critère de validité de ce dernier point peut être établi. Pour que le champ en zone d'ombre soit négligeable par rapport au champ en zone éclairé, il faut vérifier ( H.7 ).

$$\frac{|\vec{E}_T(\vec{r}_{ombre})|}{|\vec{E}_T(\vec{r}_{éclairée})|} < \tau_{Kirchoff} \quad (H.7)$$

Où  $\tau_{Kirchoff}$  est le critère de validité du modèle de Kirchoff.

En zone d'ombre, le champ électrique total peut s'exprimer comme ( H.8 ) .  $R_{détach}$  et  $R_{attach}$  sont des coefficients d'attachement et de détachement de l'onde à la surface et  $e^{ikvL}$  traduit la propagation de l'onde le long du chemin  $L$  dans la zone d'ombre.

$$\vec{E}_T(\vec{r}_{ombre}) = R_{détach}R_{attach}\vec{E}_{inc}(\vec{r}_{attach}) e^{jkvL(\vec{r}_{ombre})} \quad (H.8)$$

La quantité physique  $\nu(\lambda, \varepsilon, \mu, \dots)$  (ou  $\nu(\lambda, Z, \dots)$  en impédance) est la constante de propagation de l'onde dans les matériaux de la zone d'ombre.

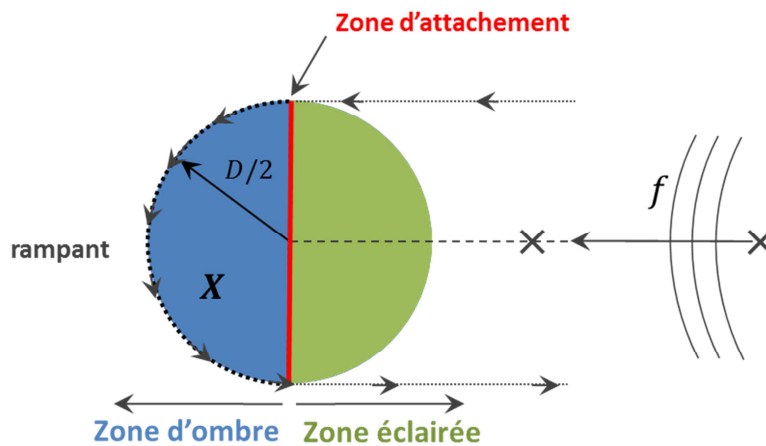
Dans le cas le plus défavorable, l'attachement et le détachement de l'onde en zone d'ombre sont énergétiquement parfaits ; on a alors  $R_{détach} = 1$  et  $R_{attach} = 1$ . De la même façon, dans le pire des cas, la surface est plane et la constante de propagation est alors donnée par  $\nu = \sqrt{1 - Z_{ombre}^2}$ . En utilisant le coefficient de réflexion isotrope défini par  $R = \frac{Z-1}{Z+1}$  et en considérant le point limite d'attachement, c'est-à-dire en  $\vec{r}_{éclairée} = \vec{r}_{attach}$ , nous obtenons ( H.9 ).

$$\frac{\left| e^{jk\sqrt{1-Z_{ombre}^2}L} \right|}{\left| \frac{2Z}{Z+1} \right|} < \tau_{Kirchoff} \quad (H.9)$$

Cette expression est évaluable a priori : il suffit de connaître la géométrie pour estimer  $L$ , de connaître les matériaux constitutifs et la fréquence de la source pour estimer l'impédance  $Z$  et  $k$ .

Exemple, application :

Nous reprenons la configuration décrite précédemment et rappelée en **Figure 40**. La sphère est recouverte d'une impédance homogène isotrope<sup>32</sup>  $X = Z = 15,133i$  à la fréquence d'excitation  $f = 10 \text{ GHz}$ . La zone éclairée et la zone d'ombre sont séparées par la zone d'attachement qui est aussi la zone de détachement dans le cas où la sphère est observée depuis le point d'émission.



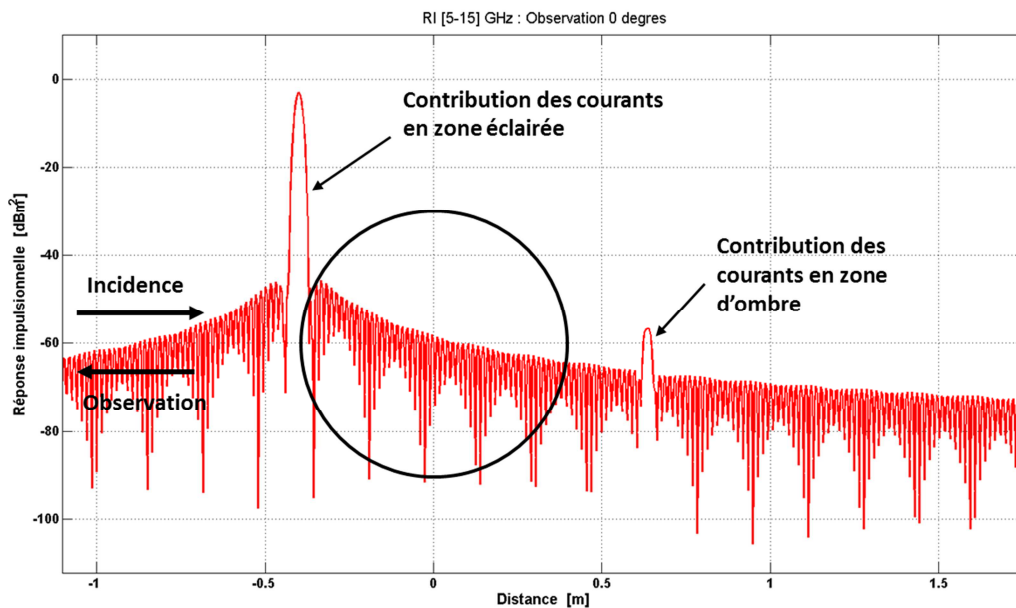
**Figure 40 :** Représentation de la configuration. Identification des zones d'ombre, éclairée, d'attachement, de détachement et onde rampante sur une sphère excitée par une source de fréquence  $f$ .

Dans cette configuration, l'onde rampante parcourt une distance physique minimale de  $L = \pi D/2$  pour être vue de l'observation. Une estimation de ( H.7 ) est donnée par ( H.9 ) et nous obtenons numériquement  $\left| \frac{Z+1}{2Z} \right| \left| e^{jk\sqrt{1-Z^2}L} \right| = 0,511$ .

<sup>32</sup> Cette impédance est l'impédance de Léontovich d'une épaisseur de 1cm de verre recouvrant une surface parfaitement conductrice.



Ce qui signifie que même en estimant très défavorablement le critère ( H.7 ), la contribution de la réflexion est plus de deux fois supérieure à celle des ondes de surfaces. Cela est vérifié par la **Figure 41**. L'hypothèse de Kirchoff constitue a priori un modèle viable pour cette configuration.



**Figure 41** : Réponse impulsionnelle de la signature de la sphère recouverte d'une impédance homogène évaluée par série de Mie. La contribution des courants en zone d'ombre sur le champ électromagnétique rayonné à une distance  $L_1 = 5m$  est négligeable par rapport à la contribution des courants en zone éclairée.

En conclusion, le domaine de validité du modèle d'optique physique hérite donc du modèle en impédance de Léontovich auquel il faut ajouter l'approximation de Kirchoff :

- le champ électromagnétique est négligeable dans la zone d'ombre par rapport à la zone éclairée.

Ce qui se traduit par :

- les sources électromagnétiques en zone d'ombre doivent être négligeables (matériaux passifs),
- Le critère ( H.7 ) doit être satisfait. Une estimation possible a priori est donnée par ( H.9 ).

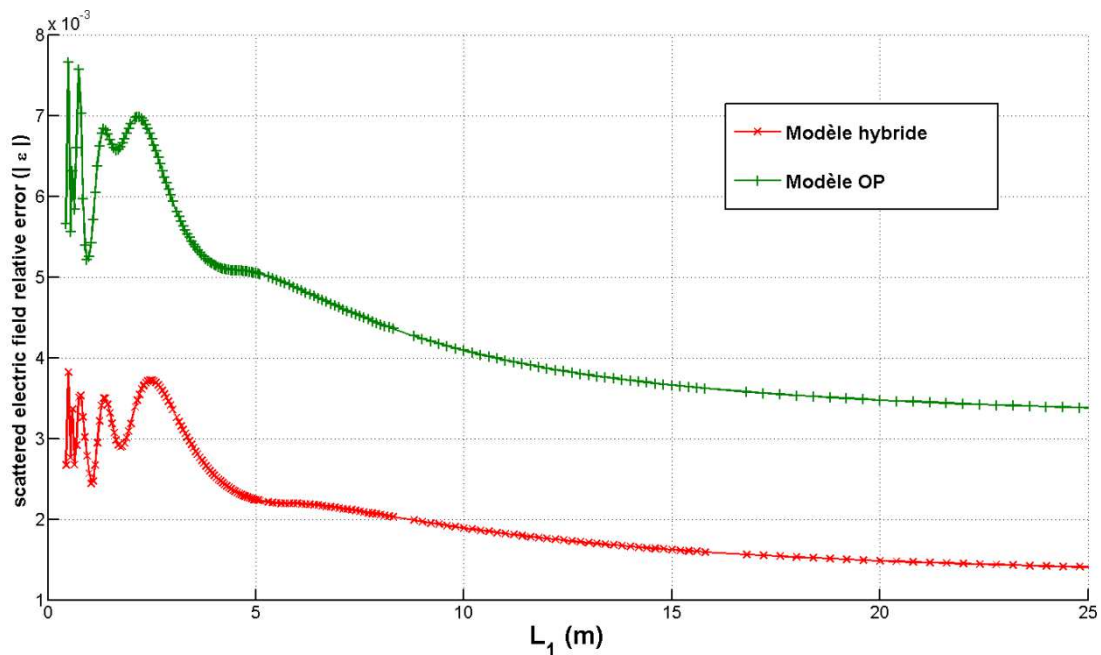
## IV. MODELE HYBRIDE

Les modèles de sensibilité appelés modèle « naturel explicite en impédance », « naturel implicite en impédance » et « optique physique » décrits en chapitre E.II.1 p.93 héritent du domaine de validité des différentes approximations ci-dessus. Par contre, le modèle « hybride » est un peu particulier dans le sens où il résulte simplement d'une formulation implicite en modèle d'interaction onde-surface pour la généraliser en utilisant n'importe quel couple  $\vec{J}_S^C \vec{M}_S^C$  de courants électromagnétiques surfaciques. D'un point de vue physique, on peut résumer les hypothèses conduisant à ce modèle par : « Si les courants surfaciques  $\vec{J}_S^C$  et  $\vec{M}_S^C$  interagissent localement avec la surface perturbée (de la même façon que les courants sous condition d'impédance de Léontovich interagissent localement avec la surface), alors la sensibilité calculée par le modèle hybride constitue une bonne estimation ».



En ce sens, ce modèle hybride ne semble hériter que du domaine de validité défini par le principe de localité et de celui des petites perturbations. Mais sa construction a aussi nécessité l'utilisation des approximations d'optique physique et d'impédance de Léontovich. Ainsi, je ne sais pas contribuer d'avantage d'un point de vue formel, à l'établissement du domaine de validité du modèle hybride proposé.

Dans la même configuration homogène précédente, l'erreur relative commise par ce modèle hybride dans le cas où les courants sont issus du code « full-wave » SHFC peut être calculée numériquement. Dans cette configuration, la **Figure 42** présente l'erreur commise par un tel modèle et la compare à l'erreur relative du modèle où les courants utilisés sont ceux de l'optique physique.



**Figure 42 :** Comparaison de la précision de la sensibilité du modèle surfacique suivant l'utilisation des courants d'optique physique ou d'un code « full-wave ». Evolution de l'erreur relative sur le champ électrique diffracté en fonction de la distance objet-réception commise par les modèles hybride (les densités de courants électrique et magnétique utilisés sont issues du code full-wave SHFC) et Optique Physique au premier ordre. L'objet considéré est homogène en matériaux (cf **Figure 34**).

Bien que je ne sache pas contribuer formellement à l'établissement du domaine de validité du modèle hybride proposé, la **Figure 42** vérifie qu'il est raisonnable de penser qu'en utilisant des courants « exacts », c'est-à-dire des courants calculés par un solveur « full-wave », l'erreur d'évaluation de la sensibilité du champ électrique à l'impédance est plus faible qu'en utilisant les courants de l'optique physique.

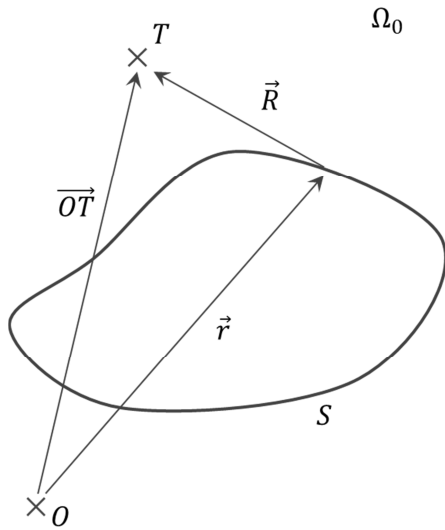
## V. MODELE CHAMP LOINTAIN

Le domaine de validité du modèle de sensibilité en champ lointain hérite du même domaine que les modèles plus généraux (modèles champ proche) en y ajoutant :

- $\frac{\|\vec{OT}\|}{R} \approx 1$
- $k_0 R \gg 1$
- $R \rightarrow \infty$

$$- \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT} \cong 1$$

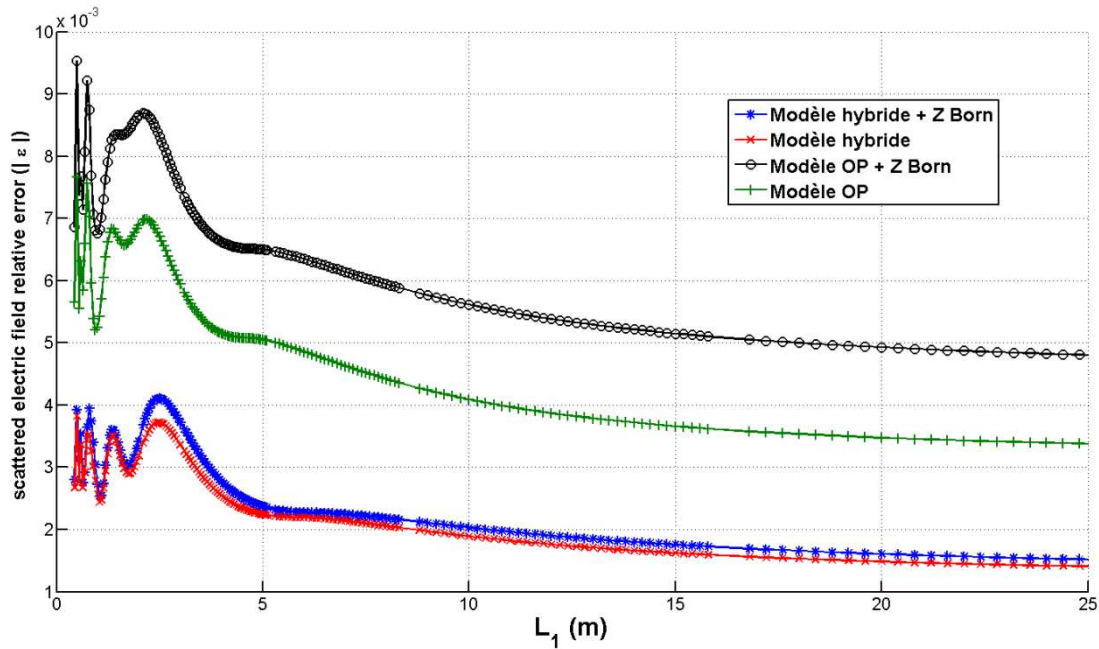
Où l'ensemble de ces paramètres est défini au chapitre E.I et rappelé en **Figure 43**.



**Figure 43** : Schéma de la configuration étudiée où **T** est le point d'observation.

## VI. MODELE « BORN EN IMPEDANCE »

Le modèle de Born en impédance, ou « Z Born » consiste à négliger l'influence d'une variation d'impédance locale  $Z_k$  sur le courant électrique local  $\vec{J}_S$ , c'est-à-dire d'écrire  $\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z_k} = \vec{0}$ . Cette approximation a l'avantage de ne pas faire appel au modèle d'optique physique. Le domaine de validité est donc donné par ceux du modèle en impédance de Léontovich et de l'hypothèse de petites perturbations. Il faut cependant ajouter que je ne sais pas déterminer le domaine de validité de l'hypothèse  $\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z_k} = \vec{0}$ .



**Figure 44 :** Comparaison de l'évolution de l'erreur relative sur le champ électrique diffracté en fonction de la distance objet-réception commise par les modèles Hybride (les densités de courants électrique et magnétique utilisés sont issues du code full-wave SHFC) et Optique Physique au premier ordre, avec et sans approximation de Born. L'objet considéré est la sphère homogène en impédance (cf **Figure 34**).

La **Figure 44** montre sur un exemple que l'approche proposée qui consiste à modéliser la sensibilité du courant électrique à l'impédance  $\left(\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z_k}\right)$  permet de diminuer l'erreur commise par le modèle au premier ordre comparativement à l'approximation de Born  $\left(\frac{\partial \vec{J}_S}{\partial Z_k} = \vec{0}\right)$ .

## VII. CONCLUSION PARTIELLE

Quelques éléments permettant de comprendre et d'anticiper partiellement le domaine de validité de la méthode surfacique ont été proposés. Le domaine de validité hérite de ceux :

- De l'hypothèse « petites perturbations » qui est d'autant plus valide que, à configuration fixée :
  - le point d'observation est éloigné de la distribution spatiale de propriétés matériaux comportant des variations,
  - le gradient spatial de la distribution de perturbations  $dX$  vu par l'onde est faible. Cela signifie que chaque point doit réagir sans couplage avec la région voisine. ( H.2 ) constitue un critère qualitatif évaluable a priori.
- Du modèle en impédance de Léontovich qui est d'autant plus valide que :
  - le long de la surface, sur une échelle de la longueur d'onde, le champ extérieur varie faiblement,
  - le long de la surface, toute variation de propriétés matériau est faible sur une échelle de la longueur d'onde locale,
  - les propriétés des matériaux sous la surface sont telles que leur indice de réfraction complexe  $N = \sqrt{\mu\varepsilon}$  est grand par rapport à celui du milieu extérieur à la surface,

- les rayons de courbure locaux de la surface sont grands par rapport à la longueur d'onde et par rapport à la profondeur de pénétration de l'onde.
- Du modèle d'optique physique (Hypothèse de Kirchoff) qui est d'autant plus valide que :
  - le champ électromagnétique est négligeable dans la zone d'ombre par rapport à la zone éclairée.

Ce qui se traduit par :

- les sources électromagnétiques en zone d'ombre doivent être négligeables (matériaux passifs).
- Le critère ( H.7 ) doit être satisfait. Une estimation possible a priori est donnée par ( H.9 ).

Ainsi, l'étude du domaine de validité de la méthode surfacique réalisée dans ce chapitre permet seulement d'aboutir à des tendances ou à des critères qualitatifs. La méthode hérite en effet des domaines de validité des modèles que sont la condition d'impédance de Léontovich et l'optique physique largement étudiés mais jamais rigoureusement définie. Ce sont en effet des modèles asymptotiques et empiriques extrêmement simplifiés de l'interaction onde-matière. Ils présentent l'avantage d'être simples et peu coûteux en temps de calcul et sont largement employés pour ces raisons. En ce sens, nous n'apportons pas de contribution significative puisque non quantitative.

Pourtant, le domaine de validité du modèle d'impédance de Léontovich est souvent réduit à un « modèle pour matériaux forts indices » dans la littérature récente. De la même façon, le domaine de validité du modèle d'optique physique est trop souvent réduit à un « modèle hautes fréquences ». Nos considérations permettent de mettre en évidence que ces réductions ne sont pas générales et que leur régime de validité n'est pas si clair. Nous proposons aussi quelques « règles d'ingénieur » et cherchons à sensibiliser le lecteur aux considérations physiques pouvant améliorer ou détériorer la validité du modèle.



## **PARTIE IV : APPLICATION**



## **PARTIE IV : APPLICATION**

**135**

<b>I. UN EXEMPLE D'APPLICATION AU PROBLEME INVERSE EN MATERIAUX</b>	<b>139</b>
<b>I. Présentation du cas de référence</b>	<b>140</b>
<b>II. Démarche</b>	<b>141</b>
<b>III. Evaluation de la sensibilité</b>	<b>142</b>
1. Sensibilité volumique .....	142
Sensibilité à la permittivité diélectrique.....	142
Sensibilité à la perméabilité magnétique .....	145
2. Sensibilité à l'impédance surfacique.....	147
3. Conclusion.....	149
<b>IV. Présentation de la mesure simulée</b>	<b>149</b>
<b>V. Résolution du problème inverse linéaire axisymétrique</b>	<b>151</b>
1. Modèle surfacique hybride .....	152
Convergence de l'opérateur de sensibilité.....	152
Choix du paramètre de régularisation.....	153
Solutions (à 1 GHz) .....	154
Conclusion .....	157
2. Modèle volumique, VPRT.....	157
Convergence de l'opérateur de sensibilité.....	157
Choix du paramètre de régularisation.....	159
Solutions (à 1GHz) .....	160
Solutions sur les perturbations $p$ .....	160
Solutions sur les perturbations $q$ .....	161
Conclusion .....	162
3. Influence de la fréquence .....	163
4. Comparaison des résultats des modèles d'optique physique et hybride (à 10 GHz) .....	165
5. Quid du choix du paramètre de régularisation (à 10 GHz) .....	166
<b>VI. Conclusion</b>	<b>168</b>





# I. UN EXEMPLE D'APPLICATION AU PROBLEME INVERSE EN MATERIAUX

Ce chapitre illustre l'application des modèles perturbatifs du premier ordre précédemment développés pour le problème inverse en matériaux. L'objectif initial de ces travaux étant la résolution d'un problème inverse en matériau, il constitue le fil conducteur de l'application. Nous proposons tout de même quelques discussions à propos d'applications différentes lorsque des résultats permettent de les illustrer.

Le chapitre est composé de cinq parties articulées de la façon suivante.

La première partie vise à présenter le cas d'étude. Le vocabulaire et la méthodologie utilisés s'inscrivent dans la phase de conception telle que décrite dans le chapitre A.I. Afin d'utiliser les codes numériques disponibles au CEA CESTA et faciliter ainsi la mise en œuvre tout en répondant à l'hypothèse initiale, l'objet conçu est une sphère résultat d'une distribution spatiale axisymétrique des propriétés du matériau. Pour limiter le temps calcul important nécessaire à la méthode VPRT (nous avons précédemment vu qu'il fallait mailler en  $\lambda/50$  pour garantir une erreur relative du modèle direct inférieure à 1%) et compte tenu du choix des dimensions de la sphère (cf. paragraphe suivant), la fréquence est choisie égale à 1 GHz. La maquette numérique dans cette configuration de test électromagnétique numérique constitue alors le cas de référence.

La deuxième partie présente les étapes et leurs enchainements nécessaires pour exprimer les différents modèles perturbatifs linéaires du type  $\tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}_{rec})(\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \mathbf{E}(\vec{r}_{rec})(\mathbf{X}) + \mathbf{B}_X(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$ , avec  $X = \varepsilon, \mu$  ou  $Z$ .

Dans la troisième partie, les résultats du calcul de la sensibilité (termes  $\mathbf{B}_\varepsilon(\varepsilon, \mu)$ ,  $\mathbf{B}_\mu(\varepsilon, \mu)$  et  $\mathbf{B}_Z(Z)$  suivant que  $X = \varepsilon, \mu$  ou  $Z$ ) pour chaque modèle sont présentés.

La quatrième partie est consacrée à la présentation de l'objet mesuré et de la configuration de mesure. La mesure est simulée par un solveur « full-wave ». Le résultat de ce test électromagnétique est alors le champ électrique  $\tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}_{rec})(\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + d\mathbf{X})$ .

La cinquième et dernière partie s'attache à proposer une résolution du problème inverse linéaire surfacique (en impédance) et volumique (en permittivité et perméabilité). Compte tenu du cadre perturbatif et pour des raisons de simplicité, nous cherchons la solution minimisant la distance  $\|\tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}_{rec})(\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{E}(\vec{r}_{rec})(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_X(\mathbf{X}) d\mathbf{X}\|^2$  (norme  $\mathcal{L}_2$ ). Les solutions obtenues pour différents modèles sont présentées à la fréquence fixée à 1 GHz. Pour les modèles de sensibilité surfacique, la valeur de la fréquence n'est pas limitante en temps calcul. Ainsi, des résultats à 10 GHz sont aussi présentés pour ces modèles et l'influence de la fréquence, du modèle d'optique physique et de la régularisation sont évoqués.

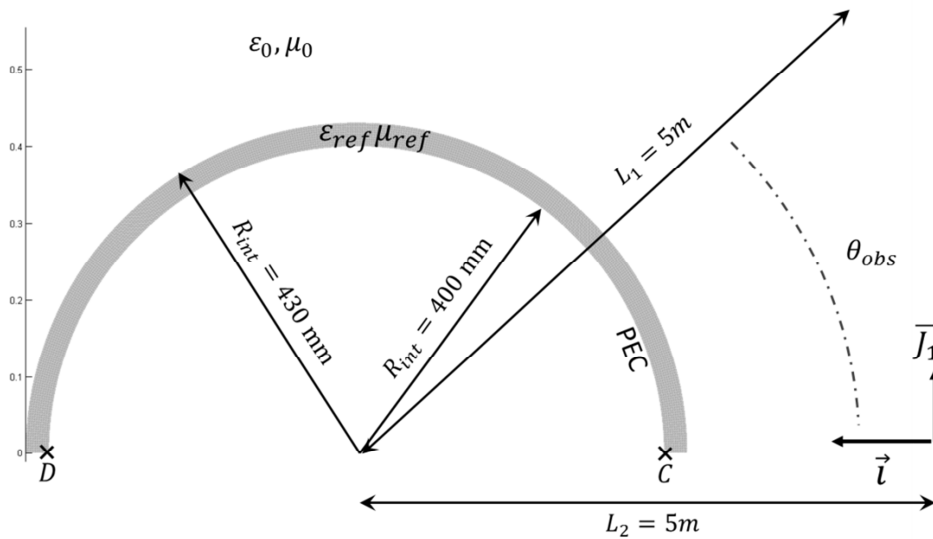
Afin de rendre le document succinct et lisible, un cas relativement simple est présenté : les matériaux sont isotropes, homogènes par morceaux, une configuration de test à incidence fixe est imposée et bien que les quantités soient de nature complexe, seules leurs normes sont affichées (nous aurions pu présenter et discuter les parties réelles et imaginaires).

## I. PRESENTATION DU CAS DE REFERENCE

Comme le montre la **Figure 45**, l'objet (la maquette numérique) de notre étude est une sphère métallique (supposée parfaitement conductrice, PEC) de rayon  $R_{int} = 400$  mm. Elle est recouverte d'une épaisseur  $ep = 30$  mm d'un matériau à la permittivité et à la perméabilité relatives homogènes et isotropes  $\epsilon_{ref} = 10 + 1i$ ,  $\mu_{ref} = 10 + 1i$  à la fréquence  $f = 1GHz$ . Cette maquette numérique constitue l'objet de référence pour notre étude.

La configuration de test électromagnétique numérique est la suivante :

- L'objet baigne dans un milieu homogène et isotrope  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 1$  et est éclairé par un dipôle  $\vec{J}_1 = J_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_{J_1}) \vec{t}_{J_1}$  d'amplitude  $J_1 = 1$  A.m à la fréquence  $f = 1$  GHz positionné à  $L_2 = 5,000$  m du centre la sphère et orienté suivant un vecteur  $\vec{t}_{J_1}$  définissant la polarisation.
- La zone de prélèvement consiste en un cercle de rayon  $L_1 = 5,000$  m centré sur le centre de la sphère. Ce cercle est contenu dans un plan contenant aussi la direction d'incidence de l'onde. Sur cette zone de prélèvement, les points de réception sont équidistants d'un pas angulaire  $d\theta_{obs} = 0,20^\circ$ .



**Figure 45** : Schéma du cas de référence : objet conçu et configuration de test électromagnétique numérique vus en coupe dans le demi-plan commun. Les marques « C » et « D » servent de repères

L'objet numérique ainsi défini et associé à cette configuration de test électromagnétique numérique constitue le cas de référence. La première étape consiste alors à évaluer la sensibilité  $\mathbf{B}_X(X)$  de ce cas de référence à des variations de propriétés matériaux  $X$  grâce aux modèles précédemment développés. Cette sensibilité  $\mathbf{B}_X(X)$  est associée à des mesures afin d'évaluer le second membre  $\mathbf{A}_{mes-ref}$  et compléter ainsi le modèle linéaire. La seule inconnue étant alors les variations  $dX$  des propriétés des matériaux, on les détermine en résolvant le problème linéaire inverse. Les étapes menant au résultat sont présentées dans le paragraphe suivant.

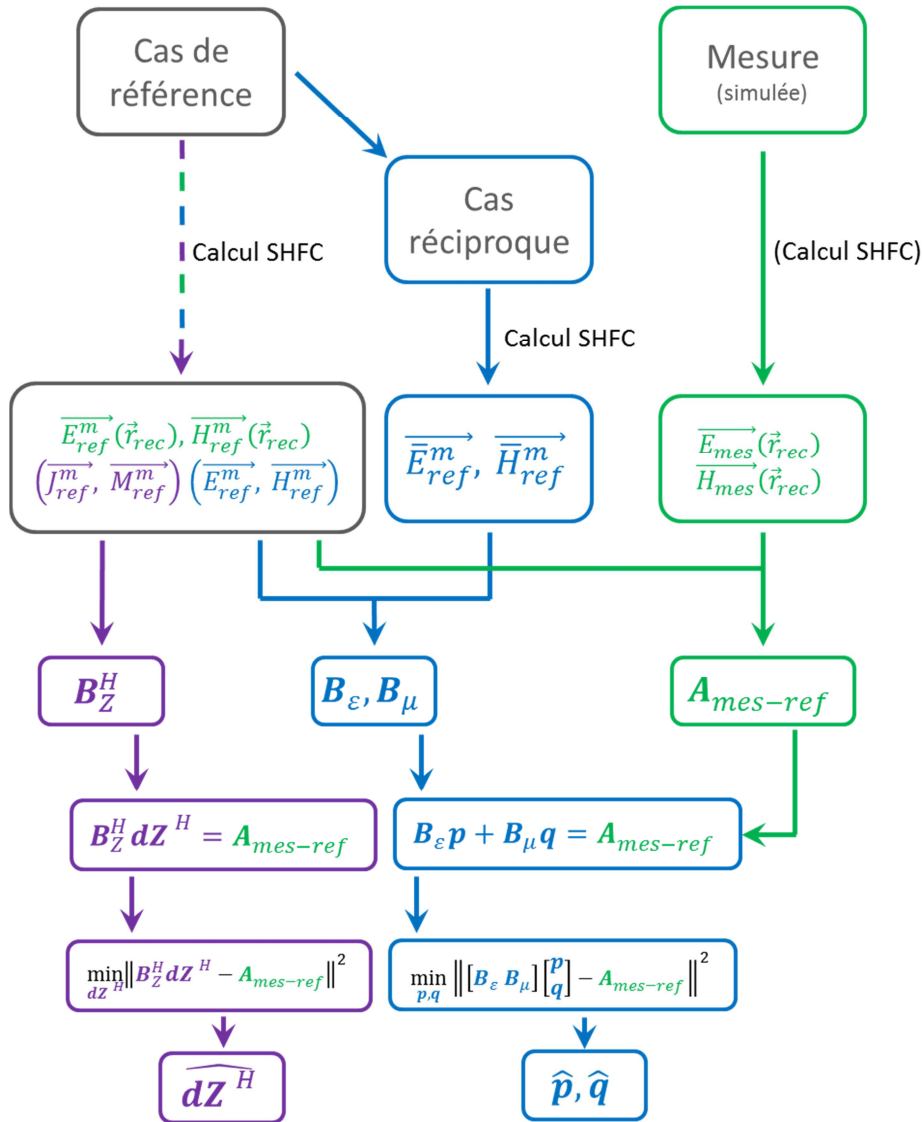
## II. DEMARCHE

Le cas de référence étant déterminé, les étapes de calcul menant aux résultats du problème inverse en matériau grâce aux modèles surfacique hybride et au modèle volumique (VPRT) sont présentés en **Figure 46**. Avant de résoudre le problème linéaire inverse, deux étapes majeures sont indispensables : évaluer la sensibilité (opérateur  $\mathbf{B}$ ) et évaluer le second membre (vecteur  $\mathbf{A}_{mes-ref}$ ).

Quel que soit le modèle utilisé, le second membre est évalué de la même manière : on soumet à un test électromagnétique numérique (calcul « full-wave » SHFC) un objet identique à l'objet de référence et comportant des variations de propriétés matériaux. Cet objet est présenté en partie IV. Le second membre est alors calculé en soustrayant les champs électromagnétiques ( $\overrightarrow{E}_{mes}(\vec{r}_{rec}) \overrightarrow{H}_{mes}(\vec{r}_{rec})$ ) résultats de ce test et ceux résultats du test électromagnétique de l'objet de référence ( $\overrightarrow{E}_{ref}(\vec{r}_{rec}) \overrightarrow{H}_{ref}(\vec{r}_{rec})$ ) dans la même configuration de test (cf. éléments verts en **Figure 46**). Ces quantités sont évaluées aux points de réception  $\vec{r}_{rec}$  extérieurs à l'objet. Les incertitudes inhérentes à un test expérimental sont inexistantes dans ce cas puisque la mesure est simulée.

La sensibilité est évaluée en fonction du modèle. La sensibilité à l'impédance  $\mathbf{B}_Z^H$  est évaluée par le modèle hybride. Cette évaluation est bien sûr uniquement dépendante du cas de référence. Elle fait appel aux résultats du test électromagnétique numérique de référence : les densités surfaciques de courants électriques  $\overrightarrow{J}_{ref}^m$  et magnétiques  $\overrightarrow{M}_{ref}^m$  (cf. éléments violets en **Figure 46**). Le code SHFC qui permet l'évaluation de ces quantités est spécifique aux objets axisymétriques (distributions spatiales de propriétés matériaux) et exploite cette spécificité à travers une décomposition en série de Fourier. L'exposant «  $m$  » rappelle que ces quantités sont modales. La sensibilité à la permittivité  $\mathbf{B}_\epsilon$  et la sensibilité à la perméabilité  $\mathbf{B}_\mu$  sont évaluées par la méthode VPRT (cf. éléments bleus en **Figure 46**). Elle fait appel aux résultats du test électromagnétique numérique de référence (les densités modales de champs électriques  $\overrightarrow{E}_{ref}^m$  et magnétiques  $\overrightarrow{H}_{ref}^m$ ) ainsi qu'aux résultats du test électromagnétique numérique réciproque (les densités modales de champs électriques  $\overrightarrow{E}_{ref}^m$  et magnétiques  $\overrightarrow{H}_{ref}^m$ ). Pour rappel, le test réciproque est le test de référence où les sources sont placées aux points de réception.

Une fois le second membre  $\mathbf{A}_{mes-ref}$  et les sensibilités  $\mathbf{B}_Z^H$ ,  $\mathbf{B}_\epsilon$  et  $\mathbf{B}_\mu$  évaluées, les perturbations sont cherchées comme les solutions d'un problème de moindres carrés. La régularisation nécessaire à la résolution est réalisée en tronquant les valeurs propres de l'opérateur de sensibilité. Cet aspect sera détaillé par la suite. Les résultats sont alors les estimateurs  $\widehat{dZ}^H$ ,  $\widehat{p}$  et  $\widehat{q}$ , des perturbations respectives en impédance, en permittivité et en perméabilité.



**Figure 46 :** Schéma de la démarche utilisée pour résoudre le problème inverse en matériau. La couleur verte fait référence aux termes nécessaires à l'évaluation du second membre des modèles linéaires. Il s'agit de quantités extérieures à l'objet. La couleur bleue est associée au modèle VPRT alors que la couleur violette fait référence au modèle surfacique hybride (cf. E.II.1 p. 95) précisé par un exposant  $H$ . Le « ^ » signifie « estimateur ».

### III. EVALUATION DE LA SENSIBILITE

Cette partie présente les résultats de l'évaluation de la sensibilité volumique ( $B_\epsilon$  puis  $B_\mu$ ) puis surfacique ( $B_Z^H$ ).

#### 1. Sensibilité volumique

L'opérateur de sensibilité volumique est le résultat de la concaténation des opérateurs de sensibilité à la permittivité et à la perméabilité.

##### *Sensibilité à la permittivité diélectrique*

Comme nous l'avons vu dans le chapitre D, la sensibilité à la permittivité diélectrique (pour une distribution spatiale de propriété matériaux isotrope axisymétrique) peut être estimée par l'équation (I.1).

$$B_\varepsilon = -2\pi j\omega \iint_{z,r} \varepsilon_{ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{E}^m \cdot \vec{E}_{ref}^{-m}) \right] r dr dz \quad (\text{I.1})$$

Dans notre cas, il est important de noter que l'évaluation numérique de cet opérateur est le résultat d'une double discrétisation<sup>33</sup>. En effet, l'intégrale est évaluée numériquement en discrétisant le volume spatial de l'objet. Mais l'intégrande dépend de l'angle d'observation  $\theta_{obs}$  (à travers le cas réciproque  $\vec{E}^m, \vec{H}^m$ ). L'opérateur est alors de la forme :

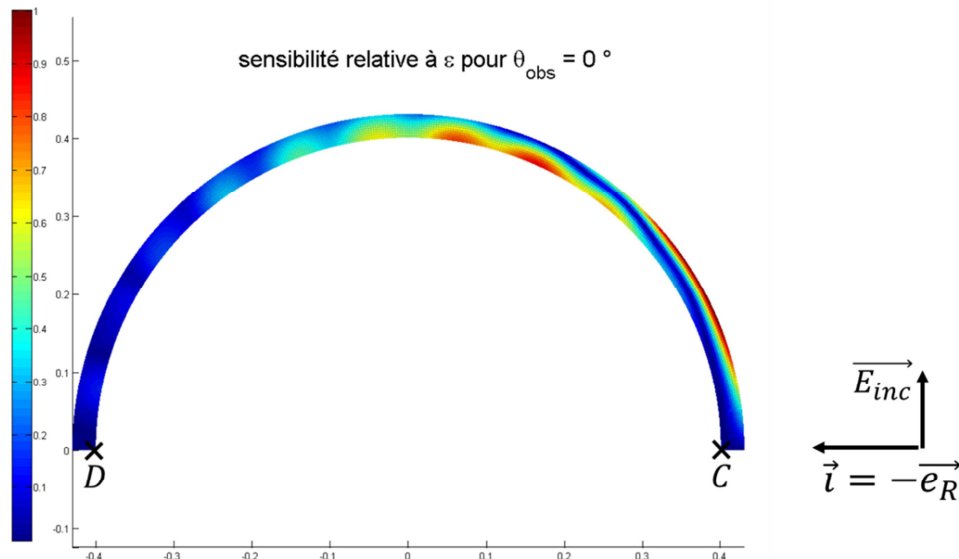
$$B_\varepsilon = \begin{matrix} \text{Nombre de maille : } N \\ \leftarrow \text{-----} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} b_\varepsilon^{1,1} & \dots & b_\varepsilon^{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_\varepsilon^{M,1} & \dots & b_\varepsilon^{M,N} \end{pmatrix} \\ \updownarrow \text{Nombre d'angle} \\ \text{d'observation : } M \end{matrix}$$

En isolant l'intégrande de (I.1), on définit une sensibilité locale (I.2) : la densité surfacique de sensibilité du champ électrique à la permittivité diélectrique.

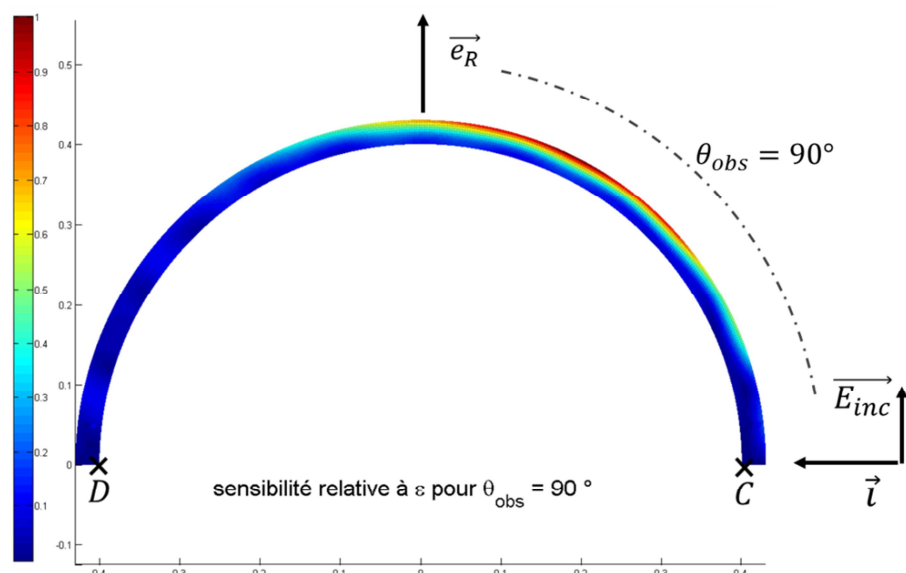
$$b_\varepsilon = -2\pi j\omega \varepsilon_{ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\vec{E}^m \cdot \vec{E}_{ref}^{-m}) \right] r \quad (\text{I.2})$$

Une fois discrétisée sur le maillage du cas de référence, la quantité  $b_\varepsilon$  peut être évaluée par maille et permet de cartographier la sensibilité de l'objet à la permittivité diélectrique. Sur le cas de référence précédemment défini, la densité surfacique de sensibilité du champ électrique à la permittivité diélectrique est évaluée pour chaque angle d'observation de la configuration de test  $\theta_{obs} = [0:0,2:360^\circ]$ . Chaque « ligne » de l'opérateur matriciel  $B_\varepsilon$  caractérise la sensibilité locale à la permittivité vue sous l'angle d'observation correspondant à cette ligne. Les **Figure 47** et **Figure 48** donnent les résultats (en relatif par rapport à la valeur maximale) pour des angles d'observations respectifs  $\theta_{obs} = 0^\circ$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$ .

<sup>33</sup> Double discrétisation dans notre cas puisque l'incidence et la fréquence sont fixées. Dans le cas plus général où la direction d'incidence, la fréquence et la polarisation de l'onde incidente varient cet opérateur est le résultat d'une quintuple discrétisation.



**Figure 47 :** Norme relative de la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (à  $f = 1\text{GHz}$ ,  $L_1 = L_2 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 0^\circ$ ) à la permittivité diélectrique. Estimation sur le cas de référence par le modèle VPRT. Vue en coupe.



**Figure 48 :** Norme relative de la densité de sensibilité du champ électrique (à  $f = 1\text{GHz}$ ,  $L_1 = L_2 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$ ) à la permittivité diélectrique. Estimation sur le cas de référence par le modèle VPRT. Vue en coupe.

La **Figure 47** met en évidence (en rouge) les zones de l'objet responsables d'une plus forte variation du champ électrique en  $L_1 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 0^\circ$  lorsque la permittivité diélectrique varie. Il faut noter que la sensibilité est bien plus forte en zone éclairée qu'en zone d'ombre. Nous pouvons aussi remarquer que deux zones disjointes sont les plus sensibles. La première située à l'interface entre l'environnement extérieur et la couche de matériau et d'une faible épaisseur<sup>34</sup>, est le résultat du phénomène de réflexion à l'interface air-matériau. La seconde zone est située dans l'épaisseur de matériau. Cette zone de sensibilité est le résultat de l'onde guidée.

<sup>34</sup> Est-ce lié à l'épaisseur de pénétration de l'onde dans le matériau ?

La **Figure 48** met en évidence les zones de l'objet (en rouge) responsables d'une plus forte variation du champ électrique en  $L_1 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$  lorsque la permittivité diélectrique varie. Il faut là aussi noter que la sensibilité est bien plus forte en zone éclairée qu'en zone d'ombre. Une seule zone est majoritairement responsable de la sensibilité globale. Cette zone est le résultat du phénomène de réflexion à l'interface air-matériau.

Il est important de souligner que la densité surfacique de sensibilité évaluée est relative à la surface définie par l'épaisseur de matériau. La formulation utilisée pour l'opérateur de sensibilité volumique ( $B_\epsilon B_\mu$ ) est axisymétrique. En effet, le repère utilisé lors de la modélisation est le repère cylindrique. Ainsi, la distance à l'axe de symétrie (quantité  $r$ ) apparaît naturellement dans l'équation ( I.2 ). Proche des pôles de la sphère (repères « C » et « D » sur **Figure 47** et **Figure 48**),  $r$  tend vers zéro ce qui explique que la sensibilité soit faible dans ces zones.

### **Sensibilité à la perméabilité magnétique**

De la même façon, la sensibilité à la perméabilité magnétique (pour une distribution spatiale de propriété matériaux isotrope axisymétrique) peut être estimée par l'équation ( I.3 ).

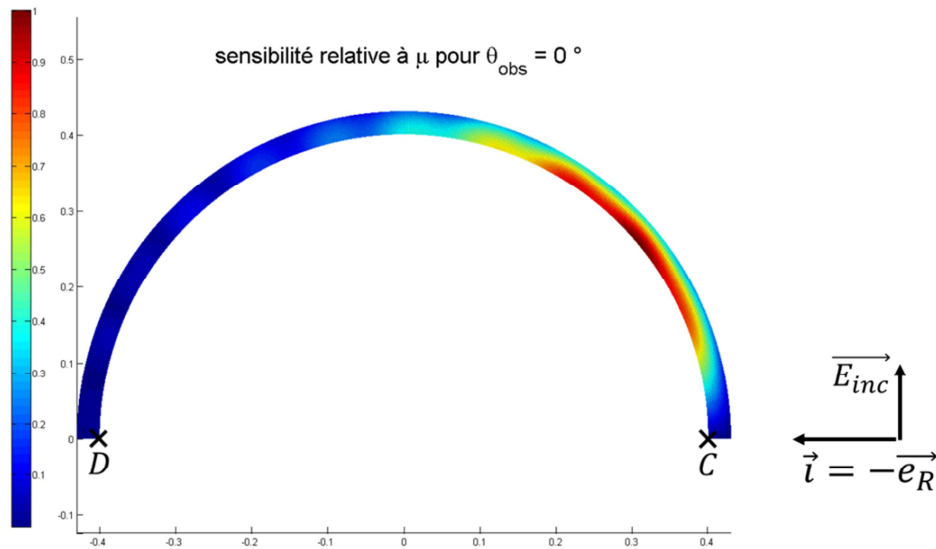
$$B_\mu = 2\pi j\omega \iint_{z r} \mu_{ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\overline{H^m} \cdot \overline{H_{ref}^{-m}}) \right] r dr dz \quad (I.3)$$

En isolant l'intégrande de ( I.3 ), on définit une sensibilité locale ( I.4 ): la densité surfacique de sensibilité du champ électrique à la perméabilité magnétique.

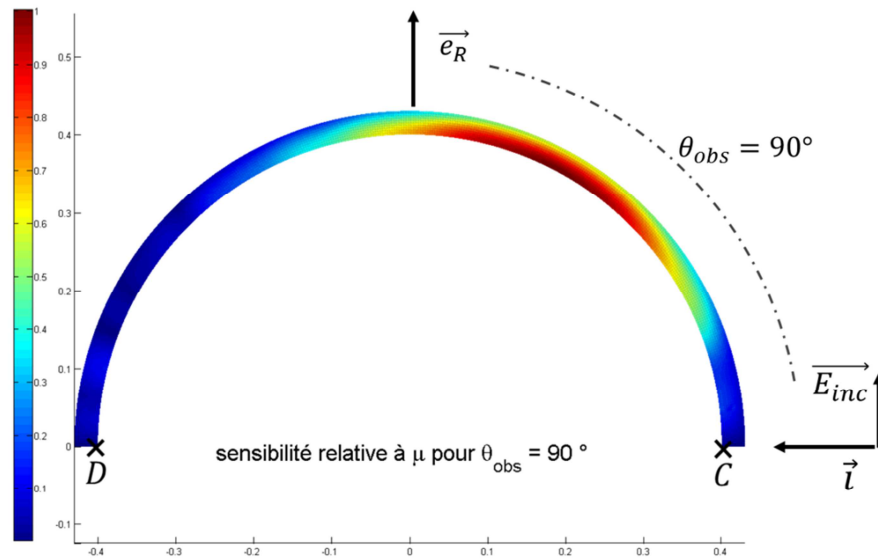
$$b_\mu = 2\pi j\omega \mu_{ref} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\overline{H^m} \cdot \overline{H_{ref}^{-m}}) \right] r \quad (I.4)$$

Sur le cas de référence précédemment défini, la densité surfacique de sensibilité du champ électrique à la perméabilité magnétique est évaluée pour chaque angle d'observation de la configuration de test  $\theta_{obs} = [0:0,2:360^\circ]$ . Chaque « ligne » de l'opérateur matriciel  $B_\mu$  caractérise la sensibilité locale à la perméabilité vue sous l'angle d'observation correspondant à cette ligne. Les **Figure 49** et **Figure 50** donnent les résultats (en relatif par rapport à la valeur maximale) pour des angles d'observations respectifs  $\theta_{obs} = 0^\circ$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$





**Figure 49 :** Norme de la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (à  $f = 1\text{GHz}$ ,  $L_1 = L_2 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 0^\circ$ ) à la perméabilité magnétique. Estimation sur le cas de référence par le modèle VPRT. Vue en coupe.



**Figure 50 :** Norme de la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (à  $f = 1\text{GHz}$ ,  $L_1 = L_2 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$ ) à la perméabilité magnétique. Estimation sur le cas de référence par le modèle VPRT. Vue en coupe.

Les **Figure 49** et **Figure 50**, mettent en évidence (en rouge) les zones de l'objet responsables d'une plus forte variation du champ électrique en  $L_1 = 5\text{m}$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$  lorsque la perméabilité magnétique varie. Il faut là aussi noter que la sensibilité est bien plus forte en zone éclairée qu'en zone d'ombre. Une seule zone est majoritairement responsable de la sensibilité globale. Cette zone semble être le résultat du phénomène de réflexion mais contrairement au cas précédent, l'interface responsable semble être l'interface matériau-métal.

## 2. Sensibilité à l'impédance surfacique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre E, la sensibilité à l'impédance surfacique peut être estimée par l'équation (I.5) pour le modèle hybride.

$$B_Z^H = \frac{-jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{\|\vec{OT}\|} \iint [ \vec{Q}_{1,k} + \vec{Q}_{2,k} + \vec{Q}_{3,k} ] \frac{\|\vec{OT}\|}{R} e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} dS \quad (\text{I.5})$$

Où  $k \in [t, b]$  et les termes  $\vec{Q}_{1,k}, \vec{Q}_{2,k}, \vec{Q}_{3,k}$  sont données par (I.6)(I.7)(I.8) :

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{1,t} &= \frac{-J_{S,t}^C{}^2}{2(\vec{E}^i \cdot \vec{t})} \{2\gamma \vec{t} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{t})\} \\ \vec{Q}_{1,b} &= \frac{-J_{S,b}^C{}^2 \cos^2 \theta_i}{2(\vec{E}^i \cdot \vec{b})} \{2\gamma \vec{b} + (3\gamma + 1) \vec{e}_R \wedge (\vec{e}_R \wedge \vec{b})\} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{2,t} &= \frac{J_{S,t}^C}{2\eta_0(\vec{E}^i \cdot \vec{t})} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_{S,b}^C \vec{e}_R \wedge \vec{b} \\ \vec{Q}_{2,b} &= -\frac{J_{S,b}^C \cos^2 \theta_i}{2\eta_0(\vec{E}^i \cdot \vec{b})} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_{S,t}^C \vec{e}_R \wedge \vec{t} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{Q}_{3,k} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) J_{S,k}^C \vec{e}_R \wedge (\vec{n} \wedge \vec{k}) \quad (\text{I.8})$$

Comme précédemment, l'évaluation numérique de cet opérateur est le résultat d'une double discrétisation<sup>35</sup>. En effet, l'intégrale est évaluée numériquement en discrétisant le volume spatial de l'objet. Mais l'intégrande dépend de la direction d'observation  $\vec{e}_R$ . L'opérateur est alors de la forme :

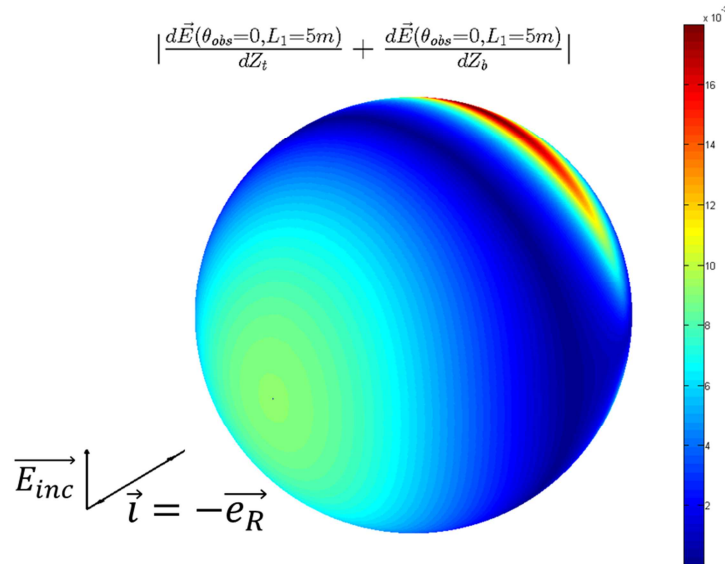
$$B_Z^H = \begin{matrix} \text{Nombre de maille : } N \\ \leftarrow \text{-----} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} b_Z^{H 1,1} & \dots & b_Z^{H 1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_Z^{H M,1} & \dots & b_Z^{H M,N} \end{pmatrix} \\ \updownarrow \\ \text{Nombre d'angle} \\ \text{d'observation : } M \end{matrix}$$

En isolant l'intégrande de (I.5), on définit une sensibilité locale  $b_Z^H$  : la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (champ au point d'observation) à l'impédance (I.9) :

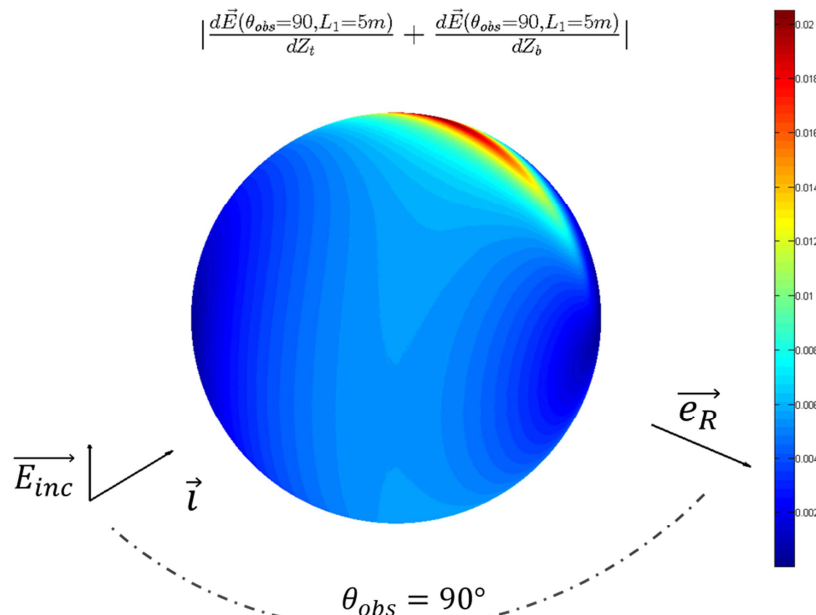
$$b_Z^H = \frac{-jk_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{OT}\|}}{R} [ \vec{Q}_{1,k} + \vec{Q}_{2,k} + \vec{Q}_{3,k} ] e^{jk_0(\vec{r} \cdot \vec{e}_{OT} - R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{e}_{OT}))} \quad (\text{I.9})$$

<sup>35</sup> Double discrétisation dans notre cas puisque l'incidence et la fréquence sont fixées. Dans le cas plus général où la direction d'incidence, la fréquence et la polarisation varient cet opérateur est le résultat d'une quintuple discrétisation.

Une fois discrétisée sur le maillage du cas de référence, la quantité  $b_z^H$  peut être évaluée par maille et permet de cartographier la sensibilité de l'objet à l'impédance surfacique. Sur le cas de référence précédemment défini, la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (champ au point d'observation) à l'impédance est évaluée pour chaque angle d'observation de la configuration de test  $\theta_{obs} = [0; 0,2; 360^\circ]$ . Chaque « ligne » de l'opérateur matriciel  $B_Z^H$  caractérise la sensibilité locale à l'impédance vue sous l'angle d'observation correspondant à cette ligne. Les **Figure 51** et **Figure 52** donnent les résultats pour des angles d'observations respectifs  $\theta_{obs} = 0^\circ$  et  $\theta_{obs} = 90^\circ$ .



**Figure 51 :** Norme de la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (à  $f = 1$  GHz,  $L_1 = L_2 = 5$  m et  $\theta_{obs} = 0^\circ$ ) à l'impédance. Estimation sur le cas de référence par le modèle hybride. Vue 3D.



**Figure 52 :** Norme de la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (à  $f = 1$  GHz,  $L_1 = L_2 = 5$  m et  $\theta_{obs} = 90^\circ$ ) à l'impédance. Estimation sur le cas de référence par le modèle hybride. Vue 3D.

Ces deux figures mettent en évidence que deux zones sont les responsables principales de la sensibilité globale : une surface en zone éclairée que l'on attribue au phénomène de réflexion et une surface en zone d'ombre que nous attribuons à l'onde guidée.

Il est important de souligner que la densité surfacique de sensibilité à l'impédance est relative à la surface définie par la surface extérieure de la sphère. Il ne s'agit donc pas de la même surface que celle utilisée pour la densité surfacique de sensibilité à la permittivité ou la perméabilité. En particulier, proche des pôles de la sphère (points « C » et « D »), la sensibilité évaluée n'a plus de raison de tendre vers zéro.

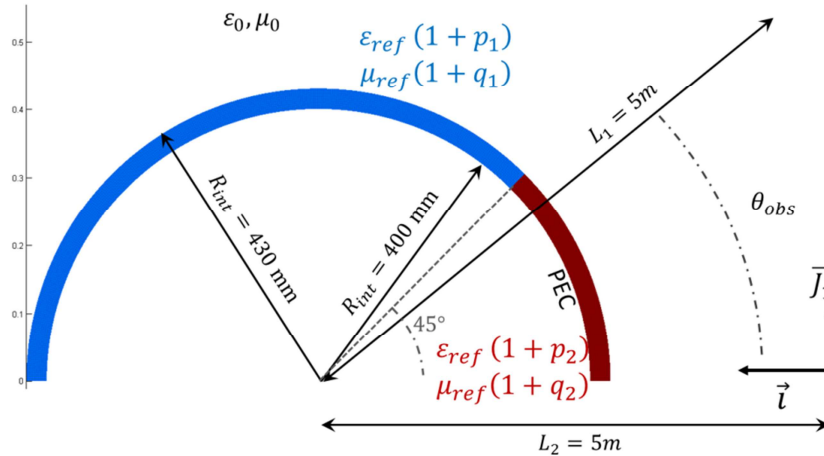
### 3. Conclusion

Nous montrons que les évaluations des opérateurs de sensibilité constituent un « simple » post traitement de codes numériques existants. Leurs évaluations numériques sont le résultat d'une double discrétisation : le maillage de l'objet et le maillage en observation. Il est difficile de comparer les sensibilités fournies par le modèle surfacique (OP hybride) et le modèle volumique (VPRT). Ils ne sont pas construits à partir du même modèle d'interaction onde-matière et ne dépendent pas du même nombre de paramètres matériaux : le modèle de sensibilité à l'impédance est un agrégat de la sensibilité à la permittivité, de la sensibilité à la perméabilité et de la sensibilité à l'épaisseur de matériaux. De plus, les densités surfaciques de sensibilités qu'ils fournissent n'ont pas la même surface de référence : l'un a comme référence la surface extérieure de la sphère et l'autre la surface de coupe. Dans l'exemple traité, les informations fournies par les opérateurs de sensibilité surfacique et volumique, sont cohérentes : en fonction de l'angle d'observation nous observons une contribution de la zone éclairée et une contribution de la zone d'ombre.

Dans le cadre du problème inverse qui nous intéresse, l'affichage de ces densités surfaciques de sensibilité locale est peu utile (les résultats du problème inverse seront quand même critiqués au regard de ces densités surfacique de sensibilité). Elles font cependant le lien entre les quantités  $B$  qui peuvent être uniquement vues comme le facteur mathématique du modèle linéaire et leur contenu physique. Nous espérons ainsi mettre en évidence la pertinence de ces modèles perturbatifs dans un cadre tout autre que celui du problème inverse. En particulier, à configuration de test fixé, ils constituent des outils précieux d'aide à la conception : en permettant d'identifier les zones de l'objet où il est possible de modifier les matériaux en impactant un minimum la réponse de l'objet ou au contraire les zones favorables à une modification pour augmenter la détectabilité.

## IV. PRESENTATION DE LA MESURE SIMULEE

Nous venons de montrer comment obtenir les sensibilités  $B_z^H$ ,  $B_\epsilon$  et  $B_\mu$  du cas de référence. L'obtention du second membre  $A_{mes-ref}$  nécessite la mesure de l'objet fabriqué. Dans notre cas, la mesure est simulée. Comme nous l'avons vu, les différences entre l'objet conçu et l'objet fabriqué sont supposées être des différences de propriétés matériaux uniquement. Nous recréons des variations de propriétés matériaux arbitraires, constantes par morceau. L'objet fabriqué qui sert à la simulation de la mesure dans sa configuration de test est alors représenté en **Figure 53**.



**Figure 53 :** Schéma de la configuration de test expérimental simulée vue en coupe dans le demi-plan. Pour rappel,  $\epsilon_{ref} = 10 + 1i$  et  $\mu_{ref} = 10 + 1i$ .

Comme indiqué en **Figure 53**, l'objet fabriqué est modélisé par l'objet de référence auquel est ajouté une perturbation relative  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]$  sur la permittivité et une perturbation  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]$  sur la perméabilité. Ces perturbations isotropes et homogènes par morceaux sont réparties en deux zones schématiquement représentées par des couleurs sur la **Figure 53**.

Nous attribuons arbitrairement les valeurs suivantes à ces perturbations :

- $p_1 = 0.050 + 0.005j$  soit  $|p_1| = 0.0502$
- $p_2 = 0.100 + 0.010j$  soit  $|p_2| = 0.1005$
- $q_1 = 0.050 + 0.005j$  soit  $|q_1| = 0.0502$
- $q_2 = 0.100 + 0.010j$  soit  $|q_2| = 0.1005$

De cette manière, les perturbations complexes représentent environ 5% (en amplitude) du cas de référence dans la zone n°1 (zone bleue) et environ 10% (en amplitude) dans la zone n°2 (zone rouge), à la fois sur la permittivité et sur la perméabilité.

L'équivalent de ces perturbations de permittivité et de perméabilité sur la sphère est calculé en impédance surfacique de Léontovich :

Sur la zone n°1 (zone bleue en **Figure 53**), nous obtenons  $dZ_1 = 0.0231 + 0.0047i$ , soit  $|dZ_1| = 0.0236$

Sur la zone n°2 (zone rouge en **Figure 53**), nous obtenons  $dZ_2 = 0.0463 + 0.0095i$ , soit  $|dZ_2| = 0.0472$

Ces perturbations sont des choix arbitraires permettant de tester les méthodes lorsque,

- les perturbations sont à la fois sur la permittivité et la perméabilité,
- elles sont constantes par morceaux donc inhomogènes (la discontinuité est une difficulté, cf. Partie III),
- elles sont réparties dans tout le volume de l'objet.

La configuration de test électromagnétique de la mesure est identique à la configuration de test du cas de référence. On obtient alors les valeurs des champs  $\vec{E}_{mes}(\vec{r}_{rec})$  et  $\vec{H}_{mes}(\vec{r}_{rec})$  (cf. **Figure 46**) nécessaires à l'évaluation du second membre  $A_{mes-ref}$ .

## V. RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE LINEAIRE AXISYMETRIQUE

Comme précédemment dit, la solution du problème inverse linéaire est cherchée comme la solution d'un problème des moindres carrés :

$$\min_{\vec{dZ}^H} \|A_{mes-ref} - B_Z^H dZ\|^2 \text{ et } \min_{\hat{p}, \hat{q}} \|A_{mes-ref} - [B_\varepsilon B_\mu] \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{bmatrix}\|^2$$

La résolution numérique de tels problèmes comporte deux difficultés principales :

- L'imprécision de l'évaluation numérique de l'opérateur de sensibilité (opérateur initialement continu, problématique de discrétisation),
- L'imprécision de l'évaluation de la matrice pseudo-inverse de l'opérateur de sensibilité (problématique de régularisation).

La problématique de discrétisation de l'opérateur de sensibilité a été partiellement évoquée. Il a été souligné que cet opérateur est le résultat d'une double discrétisation : le maillage de l'objet et le maillage en observation. Concernant le maillage de l'objet, il a été montré que dans notre cas, un maillage dont la taille des mailles est inférieure à un cinquantième de la longueur d'onde permet une précision inférieure à 1%. Concernant le maillage en observation, la problématique n'a pas été traitée. Comme nous allons le voir, c'est un aspect déterminant pour le problème inverse. Nous proposons d'étudier la convergence de l'opérateur à travers la convergence des valeurs propres de l'opérateur de sensibilité<sup>36</sup>.

Une fois ce problème résolu, la solution du problème des moindres carrés est alors classiquement obtenue grâce à la pseudo-inverse de Moore-Penrose [87] de l'opérateur de sensibilité.

« toute matrice  $B$  de  $M$  lignes,  $N$  colonnes et de rang  $k$ , est décomposable en  $B = USV^H$  où  $S$  est une matrice diagonale et l'exposant « H » signifie conjuguée hermitienne (ou adjointe ou transconjuguée). Alors  $\min_{\hat{X}} \|A_{mes-ref} - BX\|^2$  est équivalent à  $\hat{X} = VS^+U^HB$  où l'on note  $B^+ = VS^+U^H$  et qui est définie comme la pseudo-inverse de  $B$ . La pseudo-inverse  $S^+$  de la matrice diagonale  $S$  est simplement obtenue en inversant les éléments non nuls de  $S$ . »

On comprend alors qu'il existe un comportement problématique pour le calcul de la solution  $\hat{X}$  : lorsque les éléments diagonaux  $\lambda$  de  $S$  sont suffisamment faibles ils deviennent particulièrement sensibles à toutes erreurs, leur inverse tend vers l'infini et la solution du problème inverse « explose ». Les méthodes de régularisation sont utilisées pour remédier à ce problème. Dans le cadre de ces travaux, la régularisation la plus simple est utilisée : seules les valeurs propres supérieures à une valeur seuil sont conservées, les autres étant simplement réduites à zéro. Cette méthode est appelée « TSVD » (truncated singular value decomposition).

<sup>36</sup> Il est possible de voir cette problématique sous l'aspect « théorie de l'information » et fait directement référence à la quantité d'information pertinente au problème physique abordé et nécessaire au modèle.

Cette partie « Résolution du problème inverse linéaire axisymétrique » est alors organisée de la façon suivante.

Que ce soit pour le modèle linéaire en impédance ou en permittivité et perméabilité, la problématique de convergence des valeurs propres de l'opérateur de sensibilité puis la problématique de régularisation, sont abordées avant de présenter les résultats du problème inverse. Suivent ensuite des études de l'influence

- de la fréquence,
- de l'évaluation des densités de courants par le modèle d'optique physique,
- du paramètre de régularisation,

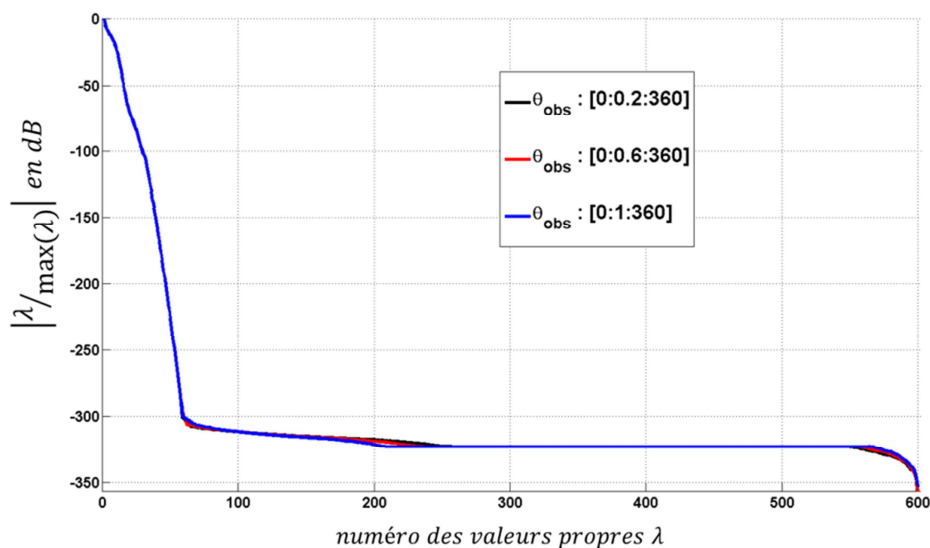
sur la solution du problème inverse.

## 1. Modèle surfacique hybride

### *Convergence de l'opérateur de sensibilité*

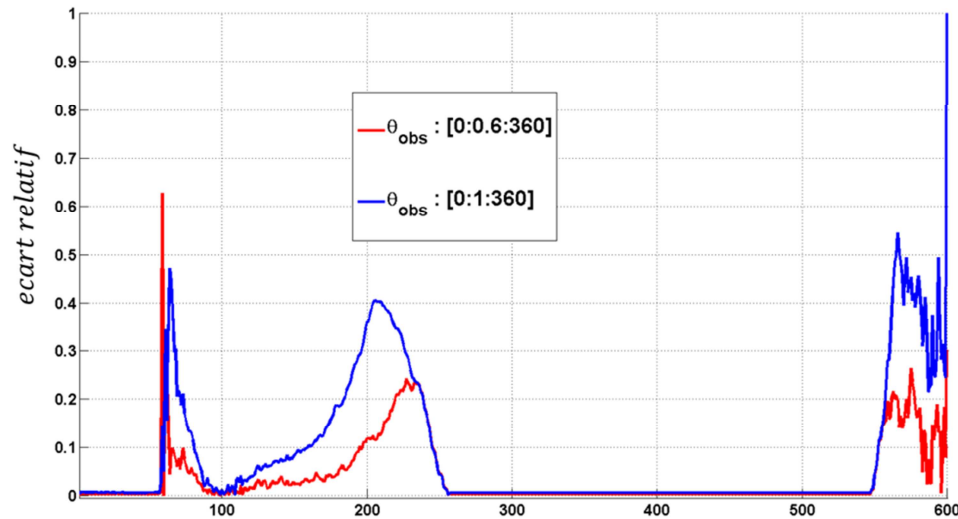
Avant de s'attaquer au problème inverse, il est primordial de vérifier que l'opérateur de sensibilité évalué numériquement correspond à l'opérateur de sensibilité continu. Cette problématique de discrétisation est largement comprise lorsqu'elle est associée au maillage de l'objet mais souvent oubliée concernant les autres dimensions. L'opérateur de sensibilité étant un opérateur couplant l'espace défini par l'objet et l'espace des observations, sa convergence numérique doit être vérifiée dans ces deux espaces.

La convergence en maillage « objet » étant assuré, nous proposons d'étudier la convergence de l'opérateur  $B_Z^H$  de sensibilité numérique à travers la convergence de ses valeurs propres. En discrétisant différemment la direction d'observation, nous obtenons plusieurs opérateurs numériques dont les valeurs propres sont présentées en **Figure 54**.



**Figure 54 :** Amplitude des valeurs propres de l'opérateur  $B_Z^H$  (classées par ordre d'amplitude décroissante) discrétisé sur le maillage axisymétrique de la sphère en fonction de sa discrétisation sur  $\theta_{obs}$ . Le système considéré est surdéterminé et le nombre de valeurs singulières est donné par le nombre de « tranche » de sphère. Le cas présenté comporte 600 mailles axisymétriques et donc 600 valeurs singulières.

En utilisant comme référence les valeurs propres de l'opérateur le plus discrétisé (courbe noire en **Figure 54**), un écart relatif est évalué pour les deux autres discrétisation en observation. La **Figure 55** montre les résultats. Il faut constater que sur les 55 premières valeurs propres, l'écart relatif est inférieur à 1% ce qui laisse penser que ces valeurs propres convergent. Nous émettons l'hypothèse qu'elles convergent vers les valeurs propres de l'opérateur continu (par opposition à discret). En revanche, à partir de la valeur propre 56, l'écart relatif passe rapidement à 50% et il est certain que ces valeurs propres ne sont pas représentatives du comportement de l'opérateur continu.



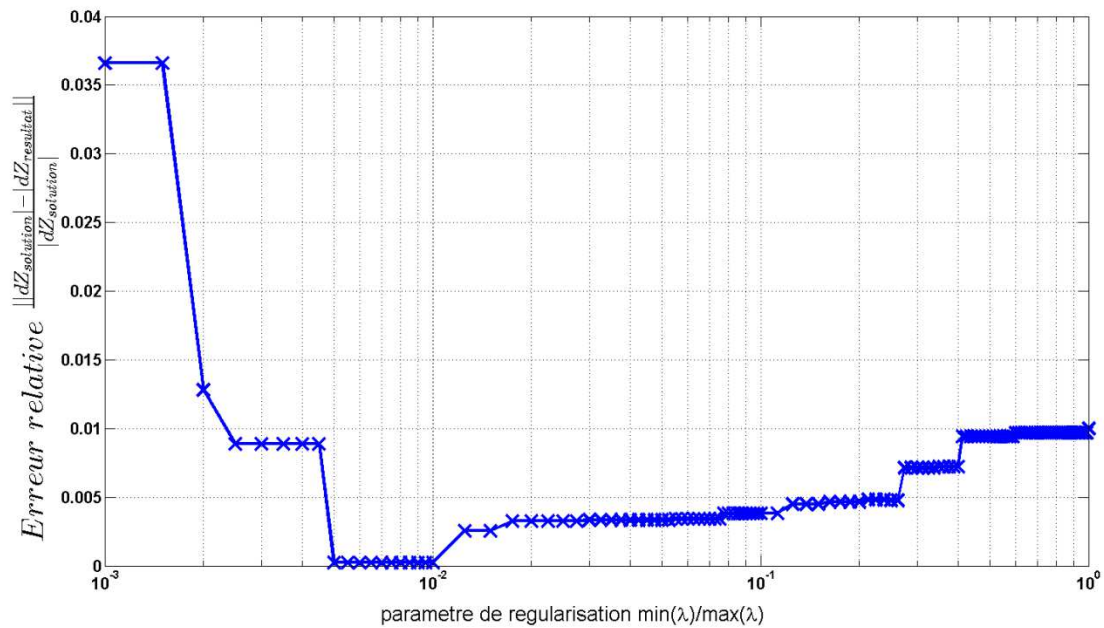
**Figure 55 :** Etude de convergence des valeurs propres de l'opérateur  $B_Z^H$  discrétisé sur le maillage axisymétrique de la sphère en fonction de sa discrétisation sur  $\theta_{obs}$ . La référence utilisée pour évaluer l'écart relatif est le cas discrétisé le plus finement ( $\theta_{obs} = [0; 0,2; 360^\circ]$ ).

Ainsi, dans la suite, seules les 55 premières valeurs singulières de l'opérateur  $B_Z^H$  seront utilisées, les autres n'étant « pas convergées ».

### ***Choix du paramètre de régularisation***

Pour la méthode de résolution TSVD, le paramètre de régularisation est le seuil de troncature que nous définissons comme l'écart entre la valeur propre de plus forte amplitude et la dernière valeur propre utilisée. En calculant l'écart relatif entre la solution obtenue en résolvant le problème inverse pour différents seuils de régularisation et la solution connue (**Figure 53**), il est possible d'identifier le paramètre de régularisation donnant l'erreur relative minimale. Les résultats sont présentés en **Figure 56**.



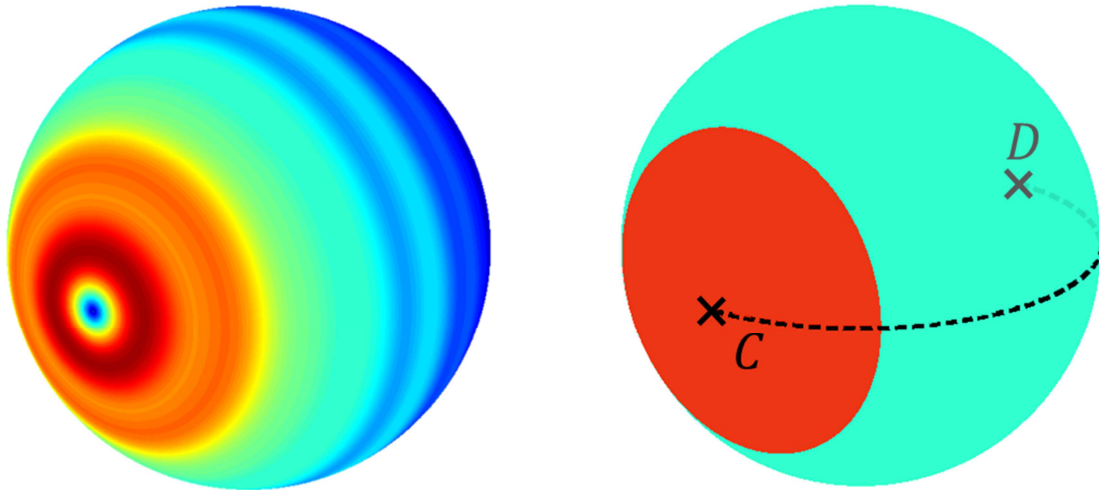


**Figure 56 :** Evolution de l’erreur relative sur la solution du problème inverse (écart entre la solution du problème inverse et la perturbation introduite pour simuler la mesure) en fonction de la régularisation. Pour la suite de notre étude, nous choisirons un paramètre de régularisation  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 6 \cdot 10^{-3}$  qui minimise cette erreur relative.

Nous observons que l’erreur relative minimale sur la solution est obtenue pour un paramètre de régularisation compris entre  $5 \cdot 10^{-3}$  et  $1 \cdot 10^{-2}$ . Dans la suite, nous utilisons  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 6 \cdot 10^{-3}$ . Ce paramètre de seuillage correspond à conserver uniquement les 20 premières valeurs propres de l’opérateur de sensibilité  $B_Z^H$ .

### Solutions (à 1 GHz)

En utilisant les paramètres précédemment définis, un estimateur  $\widehat{dZ}$  de la perturbation en impédance  $dZ$  est reconstitué. Nous soulignons que la seule hypothèse faite concerne l’axisymétrie de la solution. En particulier, nous cherchons une solution complexe par « tranche » de sphère. Le cas présenté comporte 600 mailles axisymétriques et donc 600 inconnues complexes. La **Figure 57** montre à gauche, les résultats obtenus et à droite, la solution connue (sur la même échelle de couleur).

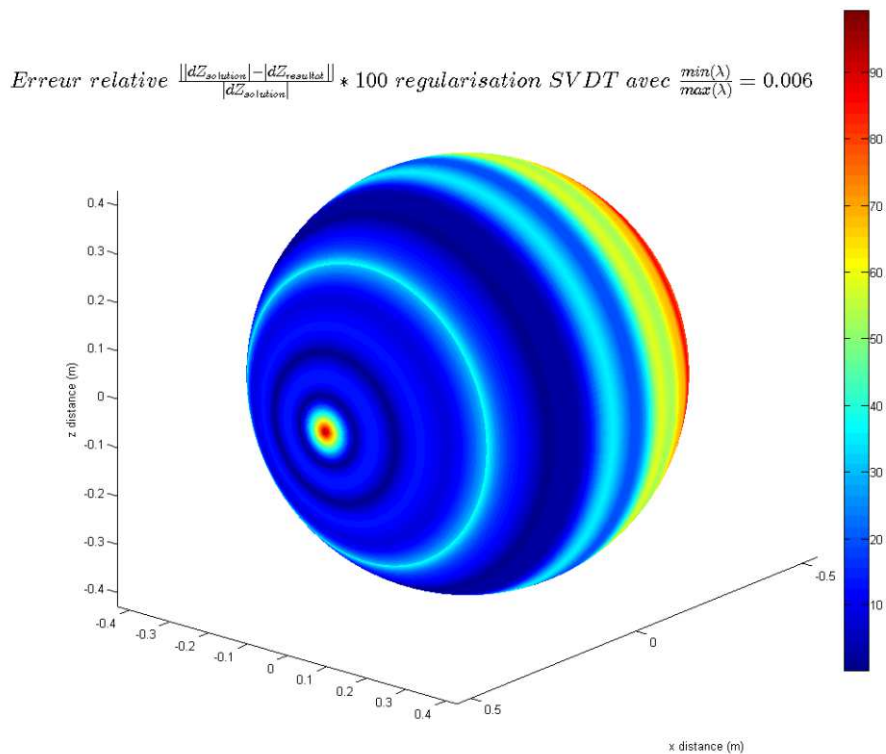


**Figure 57 :** A gauche, norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride à incidence fixe et  $f = 1$  GHz,  $\theta_{obs} = [0; 0,1; 360]$ ,  $L_1 = L_2 = 5$  m et TSVD tronquée à  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 6 \cdot 10^{-3}$ . A droite, norme de la perturbation en impédance introduite pour simuler la mesure. L'échelle de couleur est identique pour les deux images. Les repères  $C$  et  $D$  servent de références sur certains graphiques et commentaires.

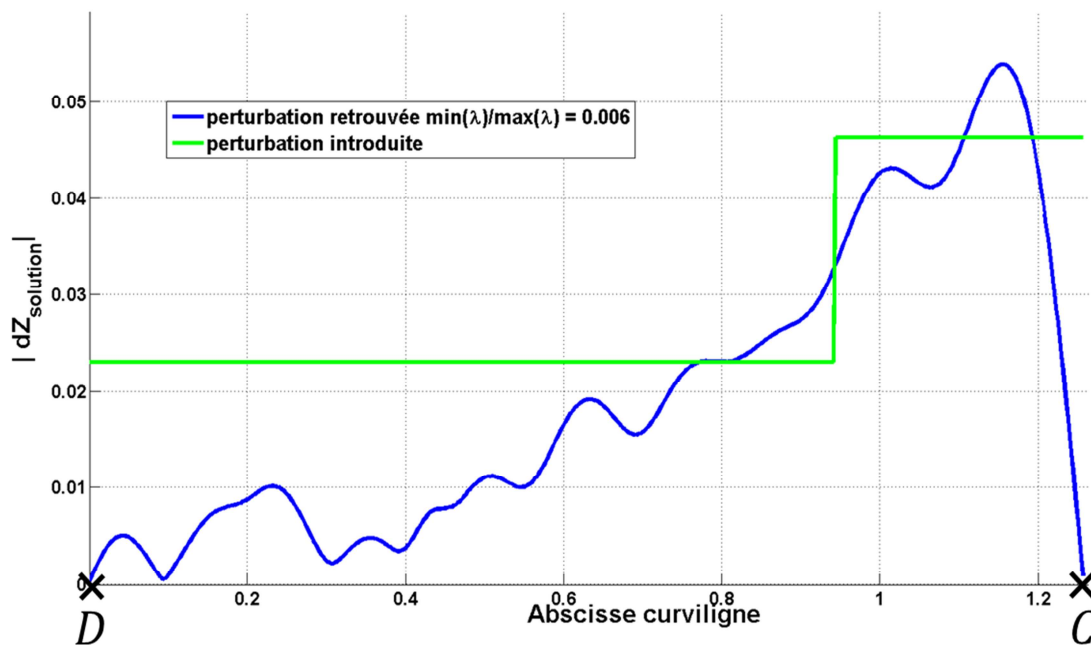
Trois aspects sont à constater :

- Contrairement à la reconstruction en zone d'ombre, la reconstruction de la perturbation en impédance est plutôt conforme à l'original en zone éclairée. Cela est mis en évidence en **Figure 58** par l'erreur relative de la solution : en zone éclairée cette erreur est de l'ordre de 20% alors qu'elle atteint 100% en zone d'ombre. Ce résultat confirme l'attendu : la sensibilité en zone éclairée étant plus forte qu'en zone d'ombre, il faut éclairer directement la zone à prospecter pour reconstituer au mieux la distribution spatiale de perturbations  $dZ$ .
- Les pôles de la sphère marqués par les repères  $C$  et  $D$  en **Figure 57** sont particulièrement mal reconstitués (cf. erreur relative en **Figure 58**). Il s'agit d'un souci numérique résultant d'un choix de repère inapproprié à l'intégration numérique sur les mailles proches de l'axe de symétrie.
- Bien qu'on parvienne clairement à identifier la zone n°2 (zone rouge) sur la solution, cette solution comporte des oscillations spatiales qui tendent à « lisser » la solution, c'est-à-dire à ne pas retrouver les fortes variations spatiales de perturbations. Comme le montre la **Figure 59**, le phénomène est mis en évidence en traçant une coupe de la solution le long de la courbe  $D - C$ . Ce « lissage » est le résultat de deux phénomènes :
  - o la non-localité de la physique considérée : à 1 GHz, la longueur d'onde dans le vide est d'environ 30 cm ; la sphère de diamètre 86 cm est alors uniquement « vue » par  $86/30 = 2,87$  longueurs d'onde et l'onde parvient difficilement à discriminer trois zones indépendantes sur l'objet.
  - o la régularisation : en tronquant les valeurs propres faibles, les solutions à variations brutales sont éliminées<sup>37</sup>.

<sup>37</sup> La régularisation peut être vue comme un filtrage des solutions « hautes fréquence », comme un filtre passe bas dont le paramètre de régularisation définit la fréquence de coupure.



**Figure 58 :** Ecart relatif entre la norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride et la norme de la perturbation en impédance introduite pour simuler la mesure (écart relatif entre les 2 images de la **Figure 57**). L'erreur relative moyenne sur la zone éclairée est de 20% alors qu'elle atteint 100% en zone d'ombre.



**Figure 59 :** Comparaison de la norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride (courbe bleue, coupe de la **Figure 57** gauche) et la norme de la perturbation en impédance introduite pour simuler la mesure (courbe verte, coupe de la **Figure 57** droite) le long de l'abscisse curviligne d'une génératrice (ligne en pointillés sur la **Figure 57**).

## Conclusion

Nous venons de montrer les capacités du modèle surfacique hybride à reconstituer une distribution spatiale de perturbation d'impédance sur le cas canonique précédemment défini.

En particulier, la robustesse d'évaluation numérique de l'opérateur de sensibilité  $B_Z^H$  sur l'exemple traité est à remarquer : sans précautions numériques particulières, la convergence de l'opérateur de sensibilité est suffisante pour résoudre un problème inverse à 600 inconnues.

De plus, les résultats montrent que la sensibilité en zone éclairée étant plus forte qu'en zone d'ombre, il est important d'éclairer directement la zone à prospecter pour reconstituer au mieux la distribution spatiale de perturbations  $dZ$ .

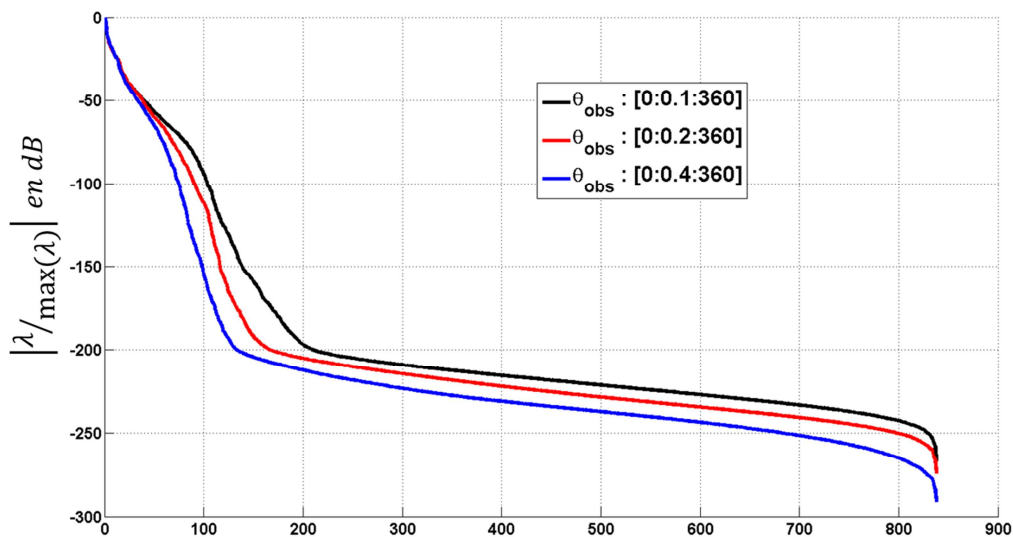
Enfin, la solution obtenue tend à discriminer difficilement les variations spatiales brutales de perturbations. Ce phénomène est le résultat de la non-localité de la physique considérée et de la régularisation.

Cette conclusion s'applique bien sûr uniquement au modèle hybride de sensibilité en impédance. L'objectif de la partie suivante est donc d'observer le comportement de la deuxième méthode (modèle de sensibilité volumique, VPRT) soumise au même cas d'étude.

## 2. Modèle volumique, VPRT

### Convergence de l'opérateur de sensibilité

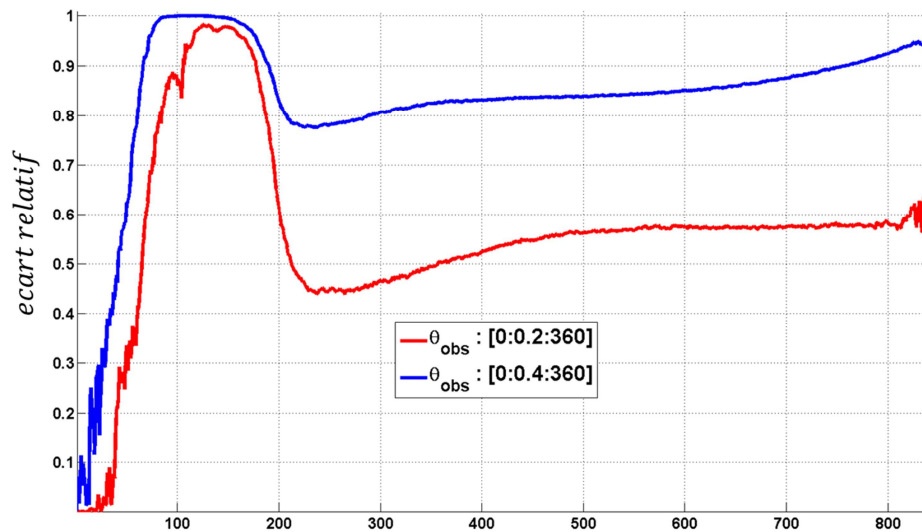
De la même façon que pour le modèle surfacique, nous proposons d'étudier la convergence de l'opérateur  $[B_\varepsilon B_\mu]$  de sensibilité numérique à travers la convergence de ses valeurs propres. En discrétisant différemment la direction d'observation, nous obtenons plusieurs opérateurs numériques dont les valeurs propres sont présentées en **Figure 60**.



**Figure 60** : Valeurs propres de l'opérateur  $[B_\varepsilon B_\mu]$  discrétisé sur le maillage axisymétrique de la sphère en fonction de sa discrétisation sur  $\theta_{obs}$ .

En utilisant comme référence les valeurs propres de l'opérateur le plus discrétisé (courbe noire en **Figure 60**), un écart relatif est évalué pour les deux autres discrétisations en observation. La **Figure 61**

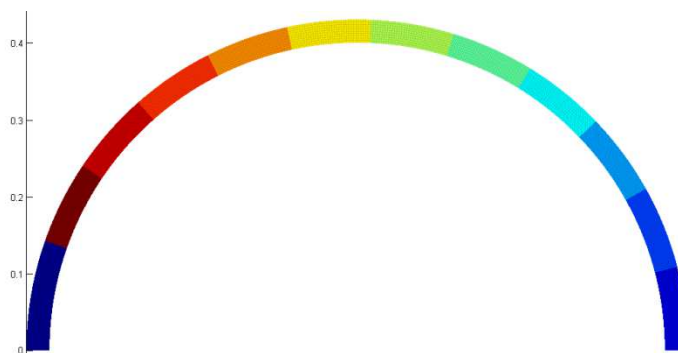
montre les résultats. Il faut constater que contrairement au cas précédent, l'écart relatif est supérieur à 5% dès la cinquième valeur propre. Cela laisse penser que l'opérateur discret tel qu'il est évalué ne tend pas vers l'opérateur physique (l'opérateur continu par opposition à l'opérateur discret).



**Figure 61 :** Etude de convergence des valeurs propres de l'opérateur  $[B_\varepsilon B_\mu]$  discrétisé sur le maillage axisymétrique de la sphère en fonction de sa discrétisation sur  $\theta_{obs}$ . La référence utilisée pour évaluer l'écart relatif est le cas discrétisé le plus finement ( $\theta_{obs} = [0:0,1:360^\circ]$ ).

Tel quel, il n'est donc pas prudent d'utiliser l'opérateur  $[B_\varepsilon B_\mu]$  pour le problème considéré. La façon rigoureuse de remédier à ce problème consisterait à accorder une attention particulière à sa discrétisation. Une solution critiquable est proposé : elle consiste à partitionner l'objet en groupes de mailles pour réduire la complexité (mais aussi la richesse) de l'opérateur et ainsi faciliter sa convergence.

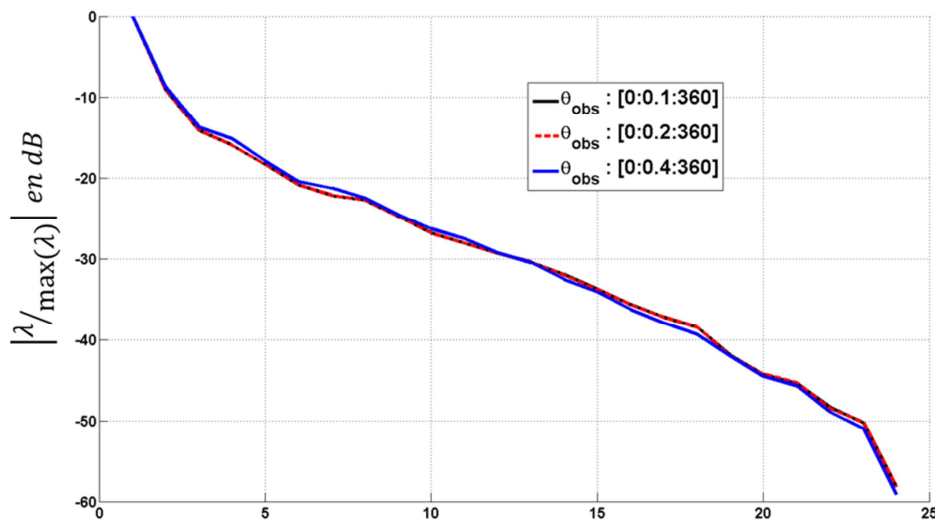
En divisant l'objet en 12 zones<sup>38</sup> (cf. **Figure 62**) chacune considérée homogène (c'est à dire que les fonctions de bases sont considérées constantes par morceau) la dimension de l'opérateur de sensibilité  $[B_\varepsilon B_\mu]$  est drastiquement réduite.



**Figure 62 :** Représentation des 12 zones de recherche de permittivité et perméabilité. Chaque couleur représente une zone où les propriétés matériaux sont supposées homogènes.

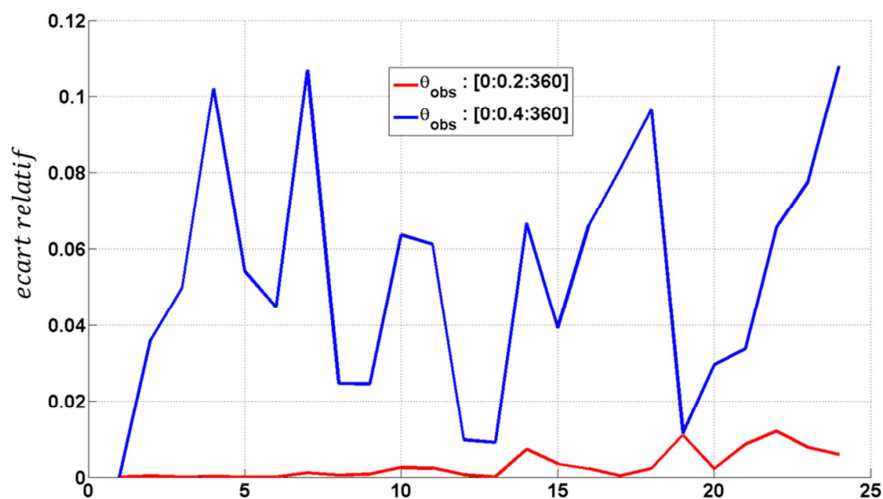
<sup>38</sup> Il s'agit du nombre maximal de zone qui nous a permis d'assurer la convergence de l'opérateur à moins d'1% d'écart relatif.

Les nouvelles valeurs propres de cet opérateur réduit sont présentées en **Figure 63** pour différentes discrétisations en observation.



**Figure 63 :** Valeurs propres de l'opérateur  $[B_\epsilon B_\mu]$  discrétisé sur les 12 zones de recherche (cf **Figure 62**) en fonction de sa discrétisation sur  $\theta_{obs}$ .

Et de la même façon que précédemment, un écart relatif est évalué (**Figure 64**). Nous constatons que l'écart relatif entre les opérateurs résultats des discrétisation  $\theta_{obs} = [0:0,1:360^\circ]$  et  $\theta_{obs} = [0:0,2:360^\circ]$  est inférieur à 1% pour toutes les valeurs propres. Nous supposons alors que cette convergence numérique garantit une convergence de l'opérateur discret vers l'opérateur continu et nous poursuivons l'étude avec cet opérateur.



**Figure 64 :** Etude de convergence des valeurs propres de l'opérateur  $[B_\epsilon B_\mu]$  discrétisé sur les 12 zones de recherche (cf **Figure 62**) en fonction de sa discrétisation sur  $\theta_{obs}$ . La référence utilisée pour évaluer l'écart relatif est le cas discrétisé le plus finement ( $\theta_{obs} = [0:0,1:360^\circ]$ ).

### **Choix du paramètre de régularisation**

De la même façon que pour l'opérateur de sensibilité à l'impédance, le paramètre de régularisation optimal peut être identifié comme celui donnant l'erreur relative minimale. Nous ne le présentons

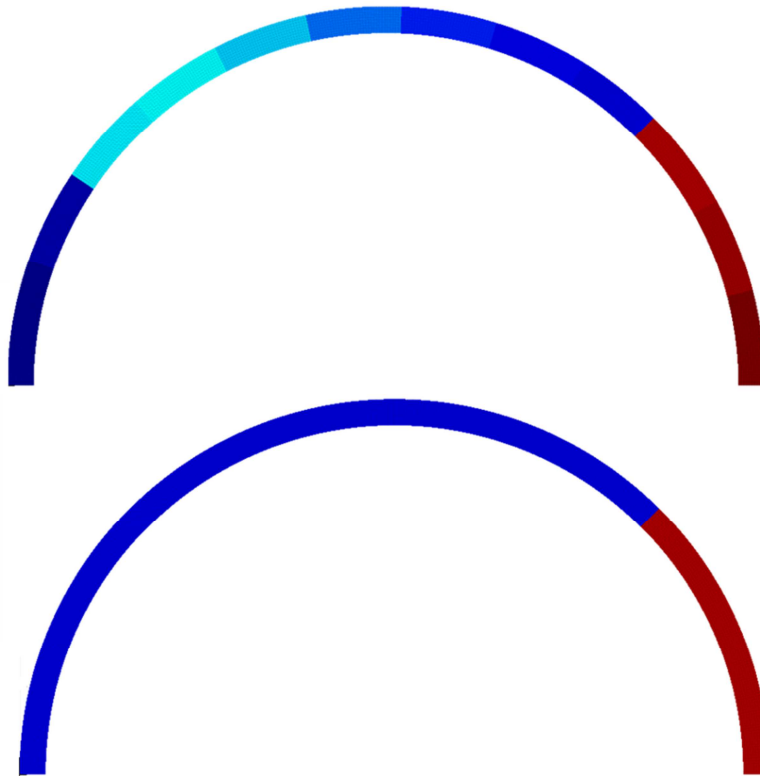
pas mais en effectuant les mêmes étapes que pour la méthode surfacique hybride, ce paramètre est estimé à  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 3.10^{-3}$ .

### **Solutions (à 1GHz)**

En utilisant les paramètres précédemment définis, les estimateurs  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  des perturbations  $p$  et  $q$  respectivement sur la permittivité et la perméabilité sont reconstitués. Nous soulignons que la formulation utilisée est intrinsèquement axisymétrique : la solution recherchée l'est aussi. De plus, deux paramètres complexes par zone sont recherchés et comme nous l'avons vu, l'objet est divisé en 12 zones. Le cas présenté comporte donc 24 inconnues complexes.

#### Solutions sur les perturbations $p$

La **Figure 65** montre les résultats obtenus pour  $p$  en haut, et en bas, la solution connue (sur la même échelle de couleur).



**Figure 65 :** En haut, norme de la perturbation  $p$  reconstituée grâce au modèle hybride à  $f = 1GHz$ ,  $\theta_{obs} = [0:0.1:360]$ ,  $L_1 = L_2 = 5m$  et TSVD tronquée à  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 3.10^{-3}$ . En bas, norme de la perturbation  $p$  introduite pour simuler la mesure. L'échelle de couleur est identique pour les deux images.

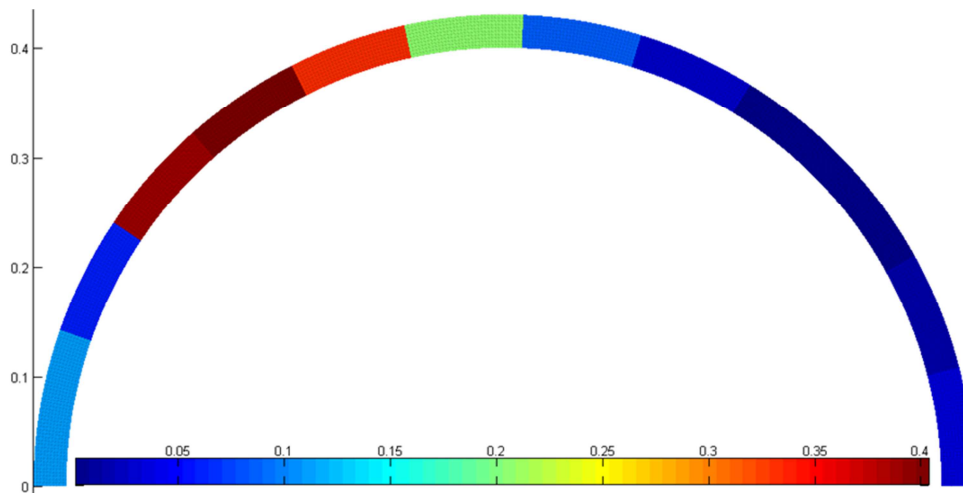
Un aspect (commun à la solution en impédance) est à constater :

- Contrairement à la reconstruction en zone d'ombre, la reconstruction des perturbations  $p$  est plutôt conforme à l'original en zone éclairée. Cela est mis en évidence en **Figure 66** par l'erreur relative de la solution : en zone éclairée cette erreur est de l'ordre de 7% alors qu'elle atteint 40% en zone d'ombre. Ce résultat confirme l'attendu : la sensibilité en zone éclairée étant plus forte qu'en zone d'ombre, il faut éclairer directement la zone à prospecter pour reconstituer au mieux la distribution spatiale de perturbations  $p$ .



Un aspect est à discuter :

- Comme nous l'avons vu (cf. § III.1 p.142) la sensibilité au niveau des pôles de la sphère est particulièrement mal calculée. Il s'agit du résultat d'un choix de repère inapproprié à l'intégration numérique sur les mailles proches de l'axe de symétrie. Pourtant la solution affichée sur 12 zones ne semble pas en pâtir. Cela est dû à la taille des zones considérées : sur une zone comportant en moyenne 400 mailles de surface équivalente, la sensibilité erronée d'une vingtaine de maille est « moyennée ». Il en aurait été tout autrement en considérant des zones bien plus petites.

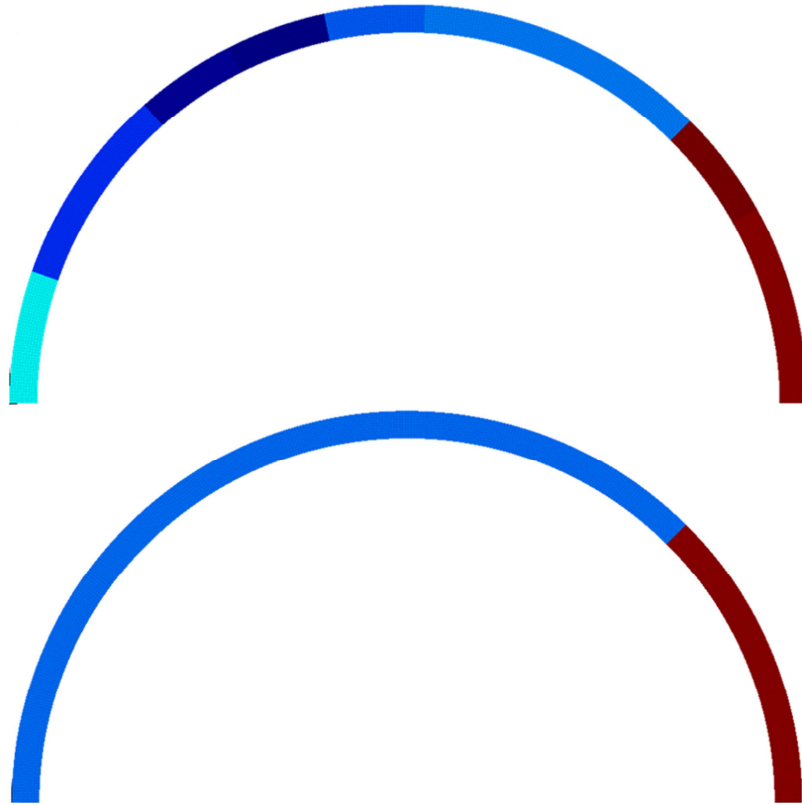


**Figure 66** : Écart relatif entre la norme de la perturbation  $p$  reconstituée grâce au modèle hybride et la norme de la perturbation introduite pour simuler la mesure (écart relatif entre les 2 images de la **Figure 65**). L'erreur relative moyenne sur la zone éclairée est de 7% alors qu'elle atteint 40% en zone d'ombre.

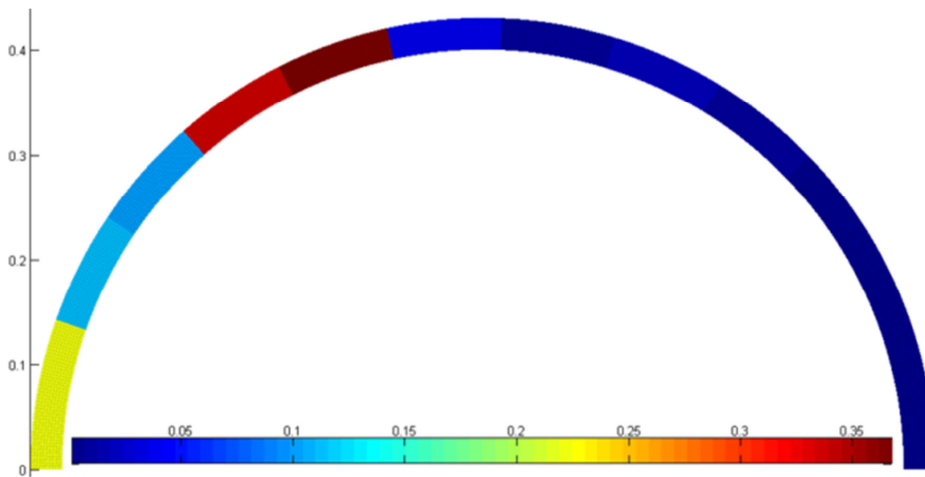
### Solutions sur les perturbations $q$

De la même façon, les solutions sur les perturbations  $q$  sont présentées. Les **Figure 67** et **Figure 68** montrent les résultats obtenus et la distribution spatiale des écarts relatifs. Les mêmes constats et conclusions que ceux fait sur la solution sur  $p$  peuvent être fait sur la solution sur  $q$ .





**Figure 67 :** En haut, norme de la perturbation  $q$  reconstituée grâce au modèle hybride à  $f = 1GHz$ ,  $\theta_{obs} = [0:0.1:360]$ ,  $L_1 = L_2 = 5m$  et SVD tronquée à  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 3 \cdot 10^{-3}$ . En bas, norme de la perturbation  $p$  introduite pour simuler la mesure. L'échelle de couleur est identique pour les deux images.



**Figure 68 :** Ecart relatif entre la norme de la perturbation  $q$  reconstituée grâce au modèle hybride et la norme de la perturbation introduite pour simuler la mesure (écart relatif entre les 2 images de la **Figure 67**). L'erreur relative moyenne sur la zone éclairée est de 4% alors qu'elle atteint 35% en zone d'ombre.

### Conclusion

Nous venons de montrer les capacités du modèle volumique (VPRT) à reconstituer une distribution spatiale de perturbation sur la permittivité et la perméabilité sur le cas canonique précédemment défini.

En particulier, la non-robustesse d'évaluation numérique de l'opérateur de sensibilité  $[B_\varepsilon B_\mu]$  sur l'exemple traité est à remarquer : sans précautions numériques particulières, la convergence de l'opérateur de sensibilité est insuffisante pour résoudre un problème inverse à grand nombre d'inconnues. Un travail numérique est à envisager pour améliorer cet aspect.

En contournant ce problème, nous obtenons tout de même des résultats. Ils montrent que la sensibilité en zone éclairée étant plus forte qu'en zone d'ombre, il est important d'éclairer directement la zone à prospecter pour reconstituer au mieux la distribution spatiale de perturbations  $p, q$ .

Sur l'exemple considéré, les erreurs relatives de reconstruction des perturbations sont du même ordre de grandeur. Cela garantit un comportement identique des opérateurs  $B_\varepsilon$  et  $B_\mu$ .

Il est maintenant proposé d'observer l'influence de la fréquence sur les résultats du problème inverse considéré puis de comparer les résultats du modèle d'optique physique au modèle hybride. Enfin nous critiquerons le choix du paramètre de régularisation.

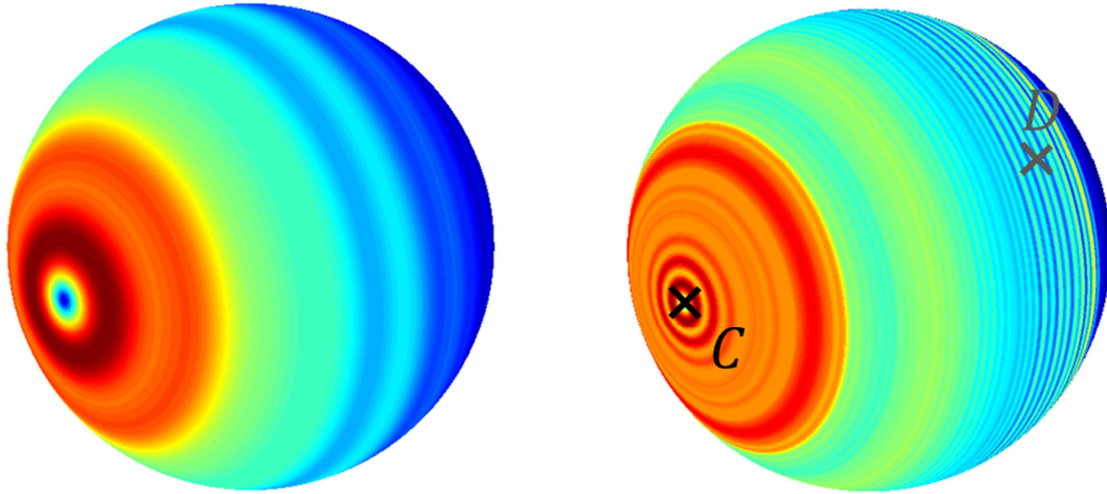
### 3. Influence de la fréquence

Nous proposons de regarder l'influence de la fréquence sur la solution du problème inverse considéré. Le coût calcul de la méthode volumique étant problématique, en particulier lorsque la fréquence augmente, seuls des résultats avec le modèle surfacique hybride sont obtenus et présentés.

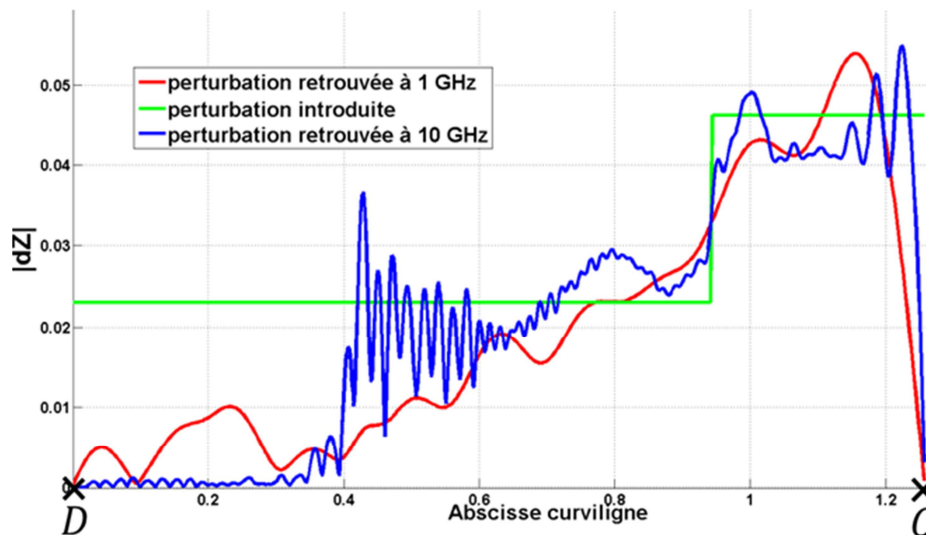
Le même objet, comportant les mêmes propriétés matériaux et les mêmes perturbations que précédemment est considéré. La configuration de test électromagnétique est aussi identique. En particulier nous supposons les propriétés des matériaux non dispersives en fréquence de telle manière que la seule différence avec le cas précédent soit la fréquence d'émission de la source : nous avons considéré une fréquence de 1 GHz, nous considérons maintenant une fréquence de 10 GHz.

La démarche de résolution du problème inverse est identique à celle décrite précédemment. La convergence de l'opérateur de sensibilité  $B_Z^H$  est vérifiée. Le paramètre de régularisation minimisant l'écart relatif à la nouvelle fréquence de 10 GHz est  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 6 \cdot 10^{-3}$ .

La **Figure 69** présente les résultats 3D obtenus en mettant en comparaison le résultat précédemment obtenu à 1 GHz. La **Figure 70** met en évidence l'influence de la fréquence.



**Figure 69 :** A gauche, norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride à  $f = 1$  GHz et  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 3 \cdot 10^{-3}$ . A droite, norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride à  $f = 10$  GHz et  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 6 \cdot 10^{-3}$ . L'échelle de couleur et l'ensemble des autres paramètres  $\theta_{obs} = [0; 0,1; 360]$ ,  $L_1 = L_2 = 5$  m et les maillages (600 mailles le long de C-D et 1200 dans la direction orthogonale à C-D) sont identiques pour les deux images.



**Figure 70 :** Comparaison de la norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride à  $f = 1$  GHz (courbe rouge, coupe de la **Figure 69** gauche) et à  $f = 10$  GHz (courbe bleue, coupe de la **Figure 69** droite) le long de l'abscisse curviligne d'une génératrice. La norme de la perturbation introduite pour simuler la mesure est la courbe verte.

Nous notons :

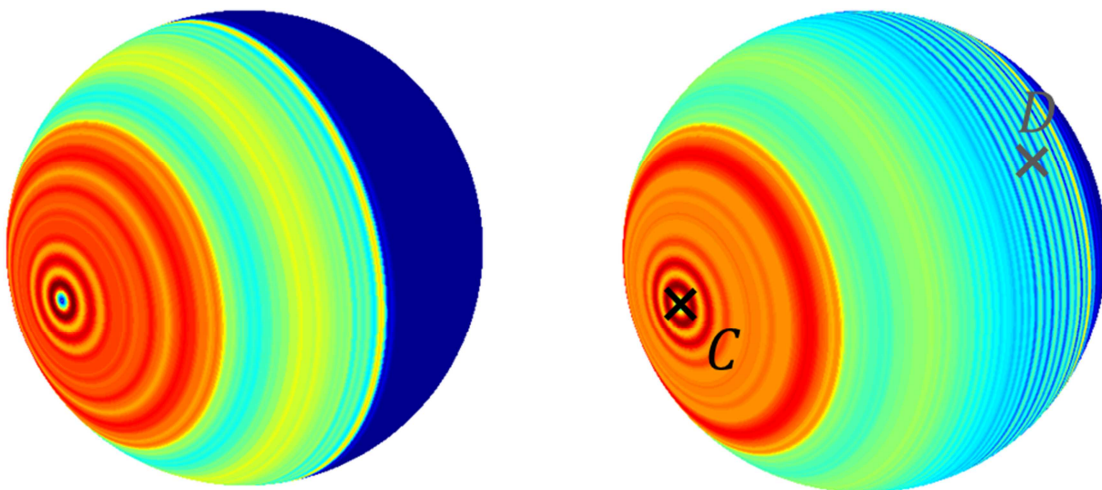
- Comme attendu, l'augmentation de la fréquence permet une discrimination spatiale plus fine des perturbations d'impédance. En particulier, le « saut » d'impédance à l'abscisse curviligne de 0,92 (cf. **Figure 70**) est bien mieux reconstruit à 10 GHz qu'à 1 GHz.
- Comme attendu, l'augmentation de la fréquence tend à réduire l'amplitude des densités de courant surfacique en zone d'ombre. La sensibilité du modèle dans cette zone est donc plus faible à 10 GHz qu'à 1 GHz et la solution  $dZ$  tend vers zéro (cf. abscisse curviligne entre 0 et 0,4 en **Figure 70**).

- Les oscillations de la solution semblent liées à la fréquence : les oscillations spatiales sont plus rapides à haute fréquence qu'à basse fréquence. Nous ne savons pas expliquer ce comportement.

#### 4. Comparaison des résultats des modèles d'optique physique et hybride (à 10 GHz)

Ce paragraphe s'attache à montrer les différences entre le modèle hybride et le modèle optique physique. Il est important de se rappeler que ces deux modèles sont identiques à la différence près que le modèle appelé hybride est « nourri » des densités de courant surfacique  $\vec{J}_S^C$  et  $\vec{M}_S^C$  évalués par un solveur « full-wave » (SHFC dans notre cas avec 600 mailles le long de C-D <sup>39</sup>) alors que le modèle optique physique utilise les densités de courant  $\vec{J}_S^{O.P}$  et  $\vec{M}_S^{O.P}$  calculés par optique physique (600 mailles le long de C-D <sup>40</sup>).

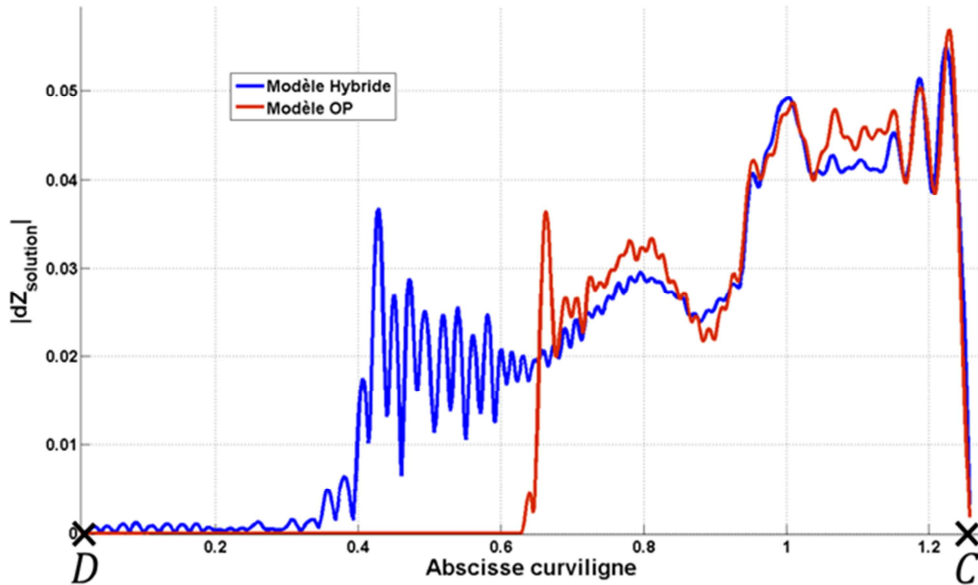
Le cas d'étude précédent est à nouveau repris. La démarche de résolution du problème inverse est à nouveau identique et les résultats obtenus sont présentés en **Figure 71** et **Figure 72**.



**Figure 71** : A gauche, norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle Optique Physique. A droite, norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride. L'échelle de couleur et l'ensemble des autres paramètres  $f = 10$  GHz,  $\theta_{obs} = [0; 0,1; 360]$ ,  $L_1 = L_2 = 5$  m et  $\min(\lambda)/\max(\lambda) = 6 \cdot 10^{-3}$  est identique pour les deux images.

<sup>39</sup> Ainsi que 20 mailles dans l'épaisseur de matériaux. La dépendance dans la direction orthogonale à C-D est explicite grâce à la décomposition en modes de Fourier.

<sup>40</sup> Ainsi que 1200 mailles dans la direction orthogonale à C-D. Le modèle en impédance surfacique ne nécessite pas de maillage dans l'épaisseur de matériaux.



**Figure 72** : Comparaison de la norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride (courbe bleue, coupe de la **Figure 71** droite) et grâce au modèle Optique Physique (courbe rouge, coupe de la **Figure 57** gauche) le long de l’abscisse curviligne d’une génératrice.

Nous notons :

- Comme attendu, le modèle d’optique physique est insensible en zone d’ombre. Dans cette zone, la solution obtenue est donc nulle (abscisse curviligne entre 0 et 0,615 en **Figure 72**).
- En zone éclairée (abscisse curviligne après 0,615 en **Figure 72**), les solutions données par les deux modèles sont comparables : les niveaux sont similaires et les oscillations de même fréquence (ce qui conforte l’idée qu’elles ne dépendent que de la fréquence).
- Il existe une zone (abscisse curviligne entre 0,4 et 0,6) où les courants calculés par le solveur « full-wave » ne sont pas nuls contrairement à leur évaluation par le modèle d’optique physique. Dans cette zone, le modèle hybride tire de l’information du calcul « full-wave » pour reconstituer une impédance inaccessible au modèle d’optique physique.

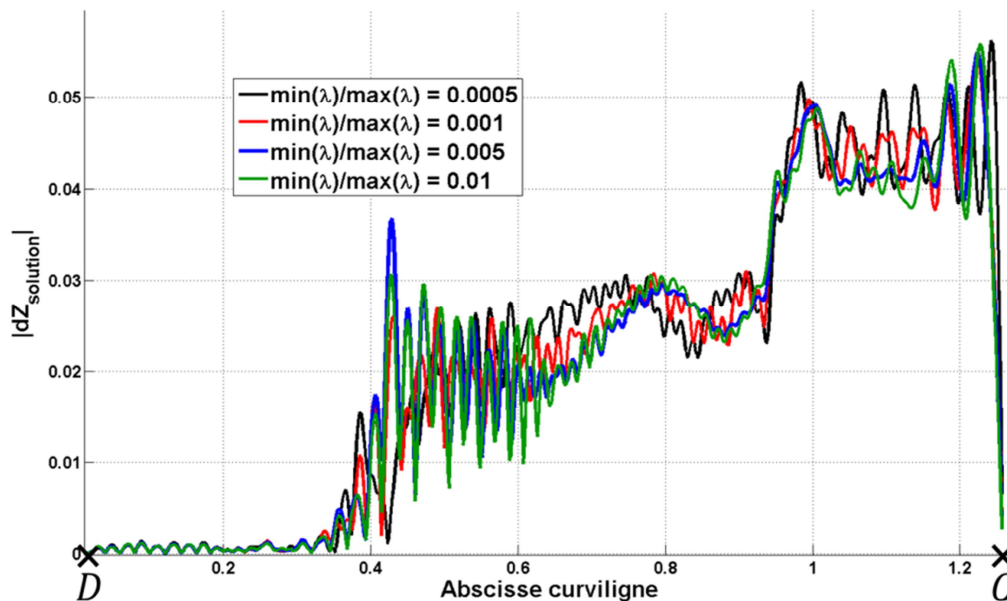
## 5. Quid du choix du paramètre de régularisation (à 10 GHz)

Le choix du paramètre de régularisation est un sujet dont nous souhaitons discuter. La démarche de régularisation précédemment exposée est une démarche courante, quelle que soit la méthode de régularisation<sup>41</sup> : ce paramètre est évalué de manière à minimiser l’écart relatif par rapport à la solution connue. Pourtant, dans la pratique, la solution n’est pas connue. Déterminer ce paramètre optimal de régularisation est donc impossible. De la même façon, le choix du critère d’optimalité est arbitraire : il est classiquement choisi de chercher le paramètre qui minimise la distance (norme  $\mathcal{L}_2$ ) entre l’amplitude de la solution et du résultat. Mais nous aurions pu choisir de minimiser une norme  $\mathcal{L}_1$ , entre les parties réelles uniquement, ou trouver un critère plus physique comme minimiser la différence d’énergie.

Ainsi, à mon avis, les solutions présentées ne peuvent avoir un caractère quantitatif. Seuls les ordres de grandeurs sont informatifs. La **Figure 73** montre la norme des solutions obtenues pour plusieurs paramètres de régularisation et pour un même problème. Ainsi, sur cet exemple, qualifier

<sup>41</sup> Nous pensons en particulier à la méthode de Tikhonov

une solution « meilleure » qu'une autre est un travail tout subjectif. Les solutions présentées en **Figure 73** sont alors toutes aussi « valables » les unes que les autres. Elles forment une famille de solutions possibles.



**Figure 73 :** Comparaison de la norme de la perturbation en impédance reconstituée grâce au modèle hybride pour différente valeur du paramètre de régularisation (seuil de troncature) le long de l'abscisse curviligne d'une génératrice. Les autres paramètres sont  $f = 10\text{GHz}$ ,  $\theta_{\text{obs}} = [0; 0,1; 360^\circ]$ ,  $L_1 = L_2 = 5\text{m}$ .

Il faut d'autant plus se souvenir qu'avant de choisir un paramètre de régularisation deux choix arbitraires sont fait :

- la solution du problème est cherchée comme solution d'un problème de moindre carré (nous aurions pu choisir les moindres carrés totaux par exemple). Les solutions (quelle que soit la méthode de régularisation) forment alors une population de solution correspondante.
- le problème inverse linéaire est résolu par TSVD. Ainsi, parmi la population de solution attribuée aux moindres carrés, les solutions présentées en **Figure 73** forment une famille attribuée à cette méthode. Par exemple, la régularisation par méthode de Tikhonov forme une seconde famille de solutions possibles.

Je souhaite ainsi souligner que résoudre mathématiquement un problème linéaire inverse est une première difficulté. S'il est parfois facile d'éliminer des solutions, en choisir une parmi les possibles en est une autre. En général, il est crucial de choisir en conscience et de ne pas oublier :

- Le modèle physique décrivant le problème direct (le domaine de validité du modèle peut permettre d'éliminer des solutions).
- Qu'introduire une information à l'étape de modélisation du problème direct est généralement plus pertinente que de l'introduire comme information a priori à l'étape de régularisation (cela permet de résoudre le juste problème et d'éliminer dès l'étape de modélisation des solutions impossibles).
- Qu'en général, l'erreur relative de la solution est un estimateur biaisé :
  - cela signifie que l'on connaît la solution ce qui est impossible dans la réalité

- la façon de calculer cette erreur relative est arbitraire : elle peut être « avantageuse » ou « désavantageuse ».
- La population de solution (type de solutions recherchées).
- La famille de solution (type de régularisation de la population).
- Qu'en général, si une solution est jugée « mauvaise » c'est que le critère qui nous fait dire que la solution n'est pas valable n'est pas injecté dans la modélisation ou dans l'étape de régularisation.

## VI. CONCLUSION

Les modèles perturbatifs développés permettent d'évaluer la sensibilité du champ électrique au point de mesure à des variations de propriétés radioélectriques en tout point de l'objet. En particulier, le premier ordre constitue une sensibilité locale qui permet de cartographier l'objet : il est possible d'identifier et de quantifier les zones de l'objet les plus sensibles (les zones les moins sensibles) à des variations de propriétés électromagnétiques. Ces modèles constituent alors des outils précieux d'aide à la conception électromagnétique. Ils constituent aussi un moyen simple de propagation d'incertitude sur les propriétés des matériaux en très grande dimension : la localité des modèles permet de propager des incertitudes de permittivité, de perméabilité ou d'impédance en tous points de l'objet (en chaque maille) et de quantifier leurs impacts sur le champ électrique au point de mesure (point extérieur à l'objet).

Pour une utilisation sur le problème inverse en matériaux, nous avons alors montré les capacités des modèles surfacique et volumique à reconstituer une distribution spatiale de perturbations inhomogènes (de 5% à 10% en amplitude) sur un cas canonique sphérique.

Les résultats obtenus montrent des similitudes entre les deux modèles proposés :

- quel que soit le modèle, la sensibilité en zone éclairée est plus forte qu'en zone d'ombre. Il est donc important d'éclairer directement la zone à prospecter pour reconstituer la distribution spatiale de perturbations,

mais aussi des différences :

- contrairement à la robustesse numérique de l'opérateur  $B_Z^H$ , la non-robustesse d'évaluation numérique de l'opérateur de sensibilité  $[B_\epsilon B_\mu]$  sur l'exemple traité est à remarquer,
- telles que les méthodes ont été implémentées, le coût numérique (temps calcul) pour l'estimation de l'opérateur de sensibilité est environ 100 fois supérieur pour la méthode volumique.

Pour le modèle surfacique, il est vérifié que :

- la solution obtenue à 1 GHz discrimine difficilement les variations spatiales brutales de perturbations. Ce phénomène est le résultat de la non-localité de la physique considérée et de la régularisation. En augmentant la fréquence, le principe de localité tend à être vérifié. Ainsi, par rapport aux résultats à 1 GHz, ceux à 10 GHz permettent de discriminer plus précisément les variations à fort gradient spatial,



- pour l'exemple traité, le modèle surfacique en optique physique est équivalent au modèle surfacique hybride en zone éclairée. En zone d'ombre, le modèle surfacique en optique physique est insensible.
- dans la pratique, le choix d'un paramètre de régularisation unique n'est pas possible. Le résultat du problème inverse est alors constitué de toute une famille de solutions.





# CONCLUSION GENERALE : RESUME, CRITIQUES ET PERSPECTIVES

## RESUME DES CONCLUSIONS PARTIELLES

Nous considérons le problème inverse en matériaux à illumination et à réception en champ proche, dans un cadre perturbatif par une méthode non destructive pour un objet axisymétrique. Bien que l'étude bibliographique mette en évidence l'existence de la méthode VPRT [67] (développée pour caractériser l'influence de rugosité de surfaces diélectriques sur le champ électromagnétique réfléchi), le problème posé est un problème singulier à notre connaissance.

Compte tenu de ce contexte, ces travaux se concentrent sur les modèles perturbatifs en matériaux. Il est choisi de répondre à la problématique à la fois pour des modèles d'interaction onde-matière volumique et surfacique.

### Modèle d'interactions onde-matière volumique

La **sensibilité multi-ordre** de l'onde électromagnétique (à l'extérieur de l'objet) à **des variations locales de permittivité et de perméabilité** est modélisée en étendant la méthode VPRT aux matériaux magnétiques. Le premier ordre est équivalent à l'approximation de Born [42] et nous retrouvons alors des formulations similaires aux travaux de Dieudonné [30] et Johnson [61].

L'influence de différentes hypothèses est explicitée : propriétés matériaux orthotropes, isotropes, configuration de test électromagnétique monostatique, etc... En particulier **l'hypothèse d'axisymétrie de la distribution spatiale de propriétés matériaux est introduite, réduisant le système tridimensionnel à un système bidimensionnel**. Il est aussi montré qu'au premier ordre, il est possible de considérer **le cas de référence axisymétrique mais d'obtenir une sensibilité tridimensionnelle**. Cet aspect ouvre des **perspectives d'applications inattendues au CEA-CESTA** : le couplage de cette méthode avec le code SHFC (code « full-wave » pour objet axisymétrique) permet d'étudier l'influence de perturbations tridimensionnelles sur un objet initialement conçu comme axisymétrique tout en profitant des performances numériques de ce code (précision, simplicité de maillage et rapidité).

Des éléments permettant de **comprendre et d'anticiper le domaine de validité de la méthode VPRT** ont été établis. En particulier, la VPRT est valide lorsque :

- les lois de comportement électromagnétique **des matériaux sont linéaires et non-chirales**.
- les matériaux de référence ont un **comportement réciproque** à une sollicitation électromagnétique.
- les perturbations des propriétés des matériaux ne sont pas orthogonales aux champs électromagnétiques de référence.

**Au premier ordre**, cette méthode permet d'évaluer l'**opérateur de sensibilité**  $[B_\epsilon B_\mu]$ . Couplé avec un solveur « full-wave » (SHFC), **la VPRT permet de cartographier la sensibilité à la permittivité et à la perméabilité dans l'épaisseur de matériaux** : l'opérateur de sensibilité est local et peut être évalué par maille.

Les avantages de la VPRT telle que nous l'avons étendue sont :

- la richesse physique : accès à la sensibilité à la permittivité et à la perméabilité (même anisotropes) dans tout le volume (formulation 3D),
- la réduction à un calcul 2D pour une distribution de propriétés matériaux axisymétrique,
- la possibilité d'accès à la sensibilité d'ordre élevé.

Les inconvénients sont :

- la nécessité d'une discrétisation numérique attentive de l'opérateur de sensibilité,
- le coût du calcul,
- la nécessité d'explorer d'avantage le domaine de validité.

**La capacité de ce modèle à retrouver des perturbations de permittivité et de perméabilité inhomogènes et axisymétriques de 5% et 10% (en amplitude par rapport au cas de référence) est mise en évidence** à travers un exemple numérique. Des exemples numériques mettent en évidence que cet opérateur **est particulièrement sensible à sa discrétisation**. Sans soin particulier accordé à sa discrétisation, nous ne parvenons à exploiter qu'une faible proportion de la richesse de l'opérateur de sensibilité : la sensibilité est évaluée par maille (4800) mais le problème inverse n'est résolu que sur 12 zones.

## **Modèle d'interactions onde-matière surfacique**

La **sensibilité multi-ordre** de l'onde électromagnétique (à l'extérieur de l'objet) à **des variations locales d'impédance surfacique de Léontovich** est modélisée. Différents modèles sont proposés. En particulier, en tirant parti d'une formulation implicite en impédance, **un modèle hybride est obtenu. Couplé à un solveur « full-wave », ce modèle** profite de la précision d'évaluation des densités de courants surfaciques d'un tel solveur pour **diviser par deux l'erreur de modèle** par comparaison au modèle d'optique physique.

L'influence de différentes hypothèses est explicitée : impédances isotropes, configuration de test électromagnétique monostatique, etc... En revanche, **l'hypothèse d'axisymétrie de la distribution de propriétés matériaux n'est pas introduite.**

Des éléments permettant de **comprendre et d'anticiper partiellement le domaine de validité de la méthode surfacique** sont apportés. En particulier, le domaine de validité hérite :

- de l'hypothèse « petites perturbations » qui est d'autant plus valide que, à configuration fixée :
  - o le **point d'observation est éloigné** de la distribution spatiale de propriétés matériaux comportant des variations,
  - o le gradient spatial de la distribution de perturbations vu par l'onde est faible.
- du modèle en impédance de Léontovich qui est d'autant plus valide que :
  - o le long de la surface, **toute variation** (de propriétés matériau, de champ ...) **est faible sur une échelle de la longueur d'onde** locale,
  - o les propriétés des matériaux sous la surface sont telles que l'amplitude de leur **indice de réfraction complexe est grand** par rapport à celui du milieu extérieur à la surface,

- **les rayons de courbure locaux de la surface sont grands par rapport à la longueur d'onde** et par rapport à la profondeur de pénétration de l'onde.

**Au premier ordre**, cette méthode permet en particulier d'évaluer **les opérateurs de sensibilité  $B_Z^H$**  (méthode hybride) et  $B_Z^{OP}$  (méthode optique physique). Le premier exploite les densités de courant surfacique évalués par un solveur « full-wave » alors que le second exploite ceux évalués par un modèle d'optique physique. Ils **permettent de cartographier la sensibilité de l'objet à l'impédance sur la surface des matériaux**.

Les avantages de la méthode surfacique sont :

- le coût calcul réduit (dans notre cas, environ 100 fois moins coûteux que la VPRT),
- la facilité de mise en œuvre numérique,
- l'évolutivité : ordre élevé et multi paramètres possibles.

Les inconvénients sont :

- le domaine de validité uniquement qualitatif (modèles asymptotiques).

**La capacité de ces modèles à retrouver des perturbations d'impédance** inhomogènes et axisymétriques de 5% et 10% (en amplitude par rapport au cas de référence) **est mise en évidence** à travers des exemples numériques. Ces exemples mettent en évidence que **ces opérateurs ne sont pas particulièrement sensibles à leur discrétisation**. Le modèle d'impédance surfacique de Léontovich étant moins riche et de dimension inférieure au modèle volumique, il est numériquement moins contraignant et dans ce sens, plus adapté à la résolution du problème inverse : sans soin particulier accordé à la discrétisation de l'opérateur, un problème inverse à 600 inconnues est résolu.

## CRITIQUES ET PERSPECTIVES

Résoudre mathématiquement un problème linéaire inverse est une première difficulté. S'il est parfois facile d'éliminer des solutions, en choisir une parmi les possibles est une autre difficulté. Mais avant d'aborder le problème inverse, à mon avis, il est crucial de se poser la question « Quel(s) phénomènes(s) physique(s) constitue(nt) le(s) meilleur(s) capteur(s) pour l'objectif à atteindre ? ». Par exemple, dans l'objectif de déterminer la distribution spatiale des perturbations de propriétés électromagnétiques des matériaux, **soumettre les matériaux à une sollicitation électromagnétique** « excite » les inconnues du problème et **paraît judicieux. Mais mesurer le champ électromagnétique** modifié par les perturbations **ne semble pas forcément judicieux** : l'électromagnétisme est une physique non locale. Une telle mesure contient alors la réponse de l'ensemble des perturbations et retrouver une quantité locale d'une mesure intégrale est extrêmement compliqué. Il peut être alors intéressant de se tourner vers un (des) effet(s) indirect(s). Par exemple, les dissipations de l'énergie électromagnétique par effet Joule constitue un phénomène particulièrement intéressant pour mesurer une quantité locale. En effet, la thermique est une physique lente par nature : un échauffement local met du temps à diffuser. Ainsi, la mesure de la dissipation thermique de l'énergie apportée par l'onde électromagnétique à la surface d'un matériau (par caméra infra-rouge par exemple) peut permettre une cartographie spatiale de l'interaction onde-matière.

*“If I had an hour to solve a problem I'd spend 55 minutes thinking about the problem and five minutes thinking about solutions.”*

Une fois le problème posé, modéliser le problème direct (au plus près du besoin) mais aussi déterminer son domaine de validité, vérifier sa convergence numérique et quantifier son erreur constituent des étapes indispensables avant d’aborder le problème inverse. En effet, on ne peut espérer une solution au problème inverse plus précise que le problème direct ou ne respectant pas le domaine de validité du modèle initial. Ces étapes sont une façon de répondre au juste problème.

*“Far better an approximate answer to the right question, which is often vague, than an exact answer to the wrong question, which can always be made precise.”*

John W. Tukey, 1962

Pour autant, s’assurer ainsi de la maîtrise du problème direct ne garantit pas directement une bonne résolution du problème inverse. Dans notre cas, la source excitatrice et le capteur sont de nature électromagnétique et le problème direct est abordé dans un cadre perturbatif. Comme nous l’avons vu, l’opérateur de sensibilité est le résultat d’une double discrétisation. Par habitude, lorsque nous testons la convergence numérique du problème direct, nous vérifions (par exemple) la convergence du champ électrique au point  $x(L_1, \theta_{obs})$  en fonction de l’évolution du maillage de l’objet. C’est-à-dire que nous testons la convergence du maillage de l’objet en un point  $x$  précis (pour un angle  $\theta_{obs}$  précis). En d’autres termes, lorsque l’opérateur est de la forme,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b^{1,1} & \dots & b^{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{M,1} & \dots & b^{M,N} \end{pmatrix}$$

↔ Nombre de maille : N
↕ Nombre d'angle d'observation : M

nous testons une ligne (des lignes si plusieurs angles sont testés) de l’opérateur discret. Si cela est suffisant pour le problème direct, le problème inverse nécessite plus : en cherchant une décomposition judicieuse de l’opérateur  $\mathbf{B}$  (pour parvenir à inverser le système), les lignes et les colonnes de l’opérateur se couplent. Dans le cas d’une SVD, les valeurs singulières sont une caractéristique de ce couplage (il s’agit bien d’une matrice diagonale, résultat d’un couplage de lignes et de colonnes). La convergence couplée des lignes et des colonnes de l’opérateur  $\mathbf{B}$  est alors nécessaire au problème inverse.

Ainsi, si la convergence partielle de l’opérateur  $\mathbf{B}$  est généralement suffisante au problème direct, la convergence complète de l’opérateur  $\mathbf{B}$  est nécessaire au problème inverse.

Dans ces travaux, la convergence des valeurs singulières est étudiée afin d’estimer la convergence de l’opérateur. Mais le problème mérite une toute autre rigueur, en particulier dans l’objectif d’estimer a priori la discrétisation couplée (en observation et en mailles dans l’objet) nécessaire. Une étude fine de discrétisation de l’opérateur de sensibilité est alors primordiale. Le lecteur intéressé à

poursuivre dans ce sens commencera par se référer à l'équation ( D.26 ) mais introduira une distribution continue de sources plutôt que des sources ponctuelles<sup>42</sup> ( D.27 ).

En mettant en lien la discrétisation en observation et en mailles dans l'objet, cette considération numérique rejoint alors les problématiques physiques de quantités d'informations, d'informations nécessaires et pertinentes au problème inverse : quelles observations et combien sont nécessaires à déterminer les caractéristiques des matériaux de 50 zones données ?

Ainsi, l'étude de la discrétisation et de la convergence de l'opérateur de sensibilité constitue à mon avis le premier travail nécessaire à une utilisation future de telles méthodes pour le problème inverse.

Ceci étant, d'autres perspectives à ces travaux peuvent être mises en évidence. Il est proposé de les présenter en fonction de l'objectif d'utilisation : les perspectives aux modèles de sensibilité (problème direct) et celles au problème inverse en matériaux.

## Modèles de sensibilité

Disposer de la sensibilité des quantités d'intérêts aux paramètres d'entrée d'un modèle ou d'une simulation constitue un élément déterminant à de nombreuses applications : pour le problème inverse, comme outil d'aide à la conception, pour la propagation d'incertitude, pour les problèmes d'optimisation etc... Si pour l'application au problème inverse en matériaux, nous nous sommes limités à la modélisation de la sensibilité aux propriétés matériaux, la sensibilité à d'autres paramètres peut être intéressante. En particulier pour la propagation d'incertitudes, la sensibilité à l'ensemble des paramètres devient pertinente (incertitude sur les propriétés matériaux  $Z$ , sur la géométrie de l'objet  $S$ , sur la position des antennes  $\theta_{obs}$  de mesure, sur la fréquence  $f$  émise par la source etc...). Cela constitue la première perspective.

### - Sensibilité multi-paramètres

Lorsque l'ensemble des paramètres est d'intérêt, un modèle perturbatif d'ordre 1 multi-paramètre est donné par le développement en série de Taylor :

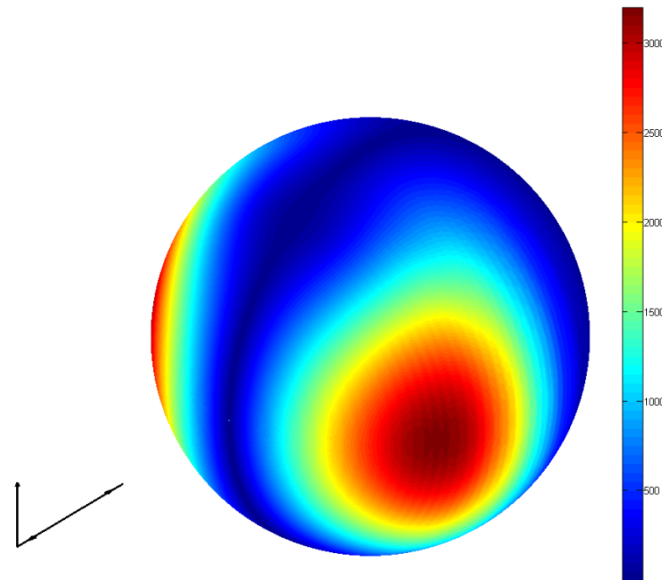
$$\vec{E}^t(Z + dZ, \theta_{obs} + d\theta_{obs}, f + df, \dots) = \vec{E}^t(Z, \theta_{obs}, f, \dots) + \frac{\partial \vec{E}^t}{\partial Z} dZ + \frac{\partial \vec{E}^t}{\partial \theta_{obs}} d\theta_{obs} + \frac{\partial \vec{E}^t}{\partial f} df + \dots$$

Le modèle surfacique est particulièrement adapté à cette approche : comme nous l'avons vu, dériver l'équation de rayonnement est relativement simple et permet rapidement d'obtenir des résultats. Par exemple, la sensibilité du champ électrique  $\vec{E}^t(T)$  en  $T$  à l'angle d'observation  $\theta_{obs}$  est évaluable par :

$$\frac{\partial \vec{E}^t(T)}{\partial \theta_{obs}} = \frac{-k_0^2}{4\pi} \iint \left[ \frac{\partial \vec{O}T}{\partial \theta_{obs}} \wedge \left\{ (3\gamma + 1)(\vec{e}_R \wedge \vec{J}_S \eta_0) + (1 + 1/\alpha)\vec{M}_S \right\} + \vec{e}_R \wedge \left\{ (3\gamma + 1) \left( \frac{\partial \vec{O}T}{\partial \theta_{obs}} \wedge \vec{J}_S \eta_0 \right) \right\} \right] \frac{e^{-\alpha}}{R\alpha} dS$$

<sup>42</sup> En injectant des sources ponctuelles, le terme de gauche de l'équation est discrétisé indépendamment du terme de droite.

Lorsque le vecteur unitaire local  $\vec{OT}$  s'exprime comme  $\vec{OT} = \|\vec{OT}\|(\sin \theta_{obs} \vec{e}_y + \cos \theta_{obs} \vec{e}_x)$ , alors  $\frac{\partial \vec{OT}}{\partial \theta_{obs}} = \vec{e}_z \wedge \vec{OT}$ . La sensibilité du champ électrique  $\vec{E}^t(T)$  (au point d'observation  $T$ ) à l'angle d'observation peut alors être évaluée<sup>43</sup>. La **Figure 74** montre un exemple de cartographie de la sensibilité de la sphère (celle utilisée en exemple pour le problème inverse, cf. chapitre I.I p. 140) à l'angle d'observation  $\theta_{obs}$ .



**Figure 74 :** Norme de la densité surfacique de sensibilité du champ électrique (à  $f = 10$  GHz,  $L_1 = L_2 = 5$  m et  $\theta_{obs} = 0^\circ$ ) à l'angle d'observation. Estimation sur le cas de référence par le modèle hybride. Vue 3D.

Nous espérons ainsi montrer les possibilités d'extension de l'approche proposée. Les perspectives d'utilisation de tels résultats étant conséquentes, nous espérons aussi motiver une suite à ces travaux.

#### - Sensibilité d'ordre élevée

Lorsque la sensibilité au premier ordre ne suffit pas à satisfaire la précision demandée, il peut devenir utile d'augmenter l'ordre du modèle. Dans la partie intitulée « Modélisation », des modèles d'ordres élevés sont développés mais seuls les modèles d'ordre 1 sont exploités. Même si je juge plus pertinent d'étendre en priorité les modèles de sensibilité à l'ensemble des paramètres (cf. « sensibilité multi-paramètre »), l'augmentation de l'ordre des modèles constitue une seconde perspective.

## Problème inverse

Nous listons ici les perspectives d'amélioration du problème inverse dans le contexte perturbatif que nous avons développé.

<sup>43</sup> Les densités de courants  $\vec{J}_S$  et  $\vec{M}_S$  étant indépendantes de l'angle d'observation, il est intéressant de remarquer que la sensibilité ainsi modélisée ne fait pas intervenir de modèles asymptotiques ! Le domaine de validité de la formule donnée dépend donc uniquement du domaine de validité du modèle utilisé pour l'évaluation des densités de courant. Pour les résultats présentés en **Figure 74**, l'erreur de modèle est donc l'erreur du solveur « full-wave » !

## ***Perspectives théoriques***

- Discrétisation et convergence de l'opérateur de sensibilité  
Comme nous l'avons vu, un travail conséquent reste à effectuer pour espérer tirer profit de la richesse de l'opérateur de sensibilité pour la résolution du problème inverse. C'est en particulier le cas pour la méthode volumique, la VPRT.
- Régularisation du problème inverse  
Sur ce point aussi, un travail non négligeable reste à faire. Dans ces travaux, pour des raisons de simplicité, la solution du problème inverse est cherchée sous la forme d'un problème de moindres carrés. De nombreuses autres possibilités existent. Un choix pertinent se fera par exemple en fonction du modèle et de son domaine de validité. En particulier, il faut se rappeler que :
  - o les modèles perturbatifs supposent des variations d'amplitude de propriétés matériaux faibles par rapport au cas de référence.
  - o les modèles à l'ordre 1 supposent une réponse locale de l'objet à une sollicitation. Ce principe de localité dépend en particulier de la fréquence et de la distribution spatiale des perturbations. Une idée consiste à chercher une solution dont la distribution spatiale est approchée par une base de fonctions respectant le principe de localité.
- Remise en phase de la mesure et du calcul  
Le second membre du système linéaire  $A_{mes-ref}$  est évalué en soustrayant le résultat du test électromagnétique expérimental à celui du test électromagnétique numérique. Une des premières sources d'erreur consiste à soustraire les signaux alors qu'ils n'ont pas la même référence de phase. Chercher à résoudre un problème inverse avec un tel second membre est équivalent à attribuer l'écart de phase aux perturbations matériaux.
- Modélisation des incertitudes de mesure  
Pour la méthode volumique (VPRT), nous avons proposé de modéliser les incertitudes de mesure par un terme source équivalent. Cette modélisation n'a pas été exploitée.  
Pour la méthode surfacique, nous n'avons pas pris en compte les incertitudes de mesure dans la modélisation<sup>44</sup>. La sensibilité multi-paramètres telle qu'elle est proposée dans le paragraphe précédent constitue un modèle de choix : l'incertitude sur chaque paramètre de mesure peut être prise en compte indépendamment.  
Les incertitudes étant caractérisées par des variables aléatoires, le modèle résultant sera probabiliste.
- Modèles d'ordre élevé  
Lorsque la précision du modèle au premier ordre ne suffit pas, l'utilisation de modèles d'ordre élevé peut devenir indispensable. Le modèle n'étant plus linéaire, la résolution du problème inverse devient d'autant plus complexe.

## ***Perspectives expérimentales***

- Utilisation de mesures réelles  
L'une des perspectives expérimentales évidente à ces travaux est l'utilisation de mesures réelles (mesures non simulées). En toute rigueur, cette étape interviendra après la

---

<sup>44</sup> Il faut remarquer que les hypothèses de ce travail amènent en particulier à négliger les termes  $\frac{\partial \bar{E}^i}{\partial \theta_{obs}} d\theta_{obs} + \frac{\partial \bar{E}^i}{\partial f} df + \dots$  ce qui est largement critiquable mais « facilement » améliorable.



modélisation des incertitudes de mesure (cf. ci-dessus) ainsi qu'après la remise en phase du calcul et de la mesure (cf. ci-dessus) afin d'en tenir compte dans le processus d'inversion.

- Etablissement d'un protocole expérimental adapté

Lorsque des mesures réelles sont envisagées, un protocole expérimental est nécessaire. Il faut en particulier indiquer quelles mesures sont à effectuer. Le protocole expérimental adapté doit tenir compte des capacités de l'instrumentation (temps de mesure, taille de la chambre anéchoïque, capacité de soustraction etc...) et des besoins nécessaires à la résolution du problème inverse. Cette étape est au croisement entre l'information nécessaire (discrétisation de l'opérateur de sensibilité) et l'information accessible lors de la mesure.

J'espère alors que ces perspectives montrent les possibilités d'extensions et d'améliorations des approches proposées et motivent ainsi des suites ou de nouveaux travaux.





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. M. Rytov, «Calculation of skin-effect by perturbation method,» *Journal of Physics*, vol. 2, pp. 233-242, 1940.
- [2] M. A. Leontovich, «Approximate boundary condition for the electromagnetic field on the surface of a good conductor,» *Investigations Radiowave Propagation Part II*, 1948.
- [3] H. Haddar et P. Joly, «Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles : the case of Maxwell's equations,» *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 18, n° 10, pp. 1787-1827, octobre 2008.
- [4] M. Duruflé, H. Haddar et P. Joly, «High order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems,» *Compte rendus de l'academie des sciences de Paris Serie Physique*, vol. 7, n° 15, pp. 533-542, Juin 2006.
- [5] J. B. Keller, «Inverse Problems,» *The American Mathematical Monthly*, vol. 83, n° 12, pp. 107-118, fevrier 1976.
- [6] M. Paty, «Genèse de la causalité physique,» *Revue Philosophique de Louvain*, vol. 102, n° 13, pp. 417-445, Aout 2004.
- [7] J. Hadamard, «Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations,» Yale University Press, 1923.
- [8] «Théorème de Radon,» [En ligne]. [Accès le 24 Avril 2019].
- [9] E. Wolf, «Three-dimensional structure determination of semi-transparent object from holographic data,» chez *Optics Communication*, 1969.
- [10] «Transformation de Fourier,» [En ligne]. [Accès le 24 Avril 2019].
- [11] M. A. Fiddy et R. S. Ritter, *Introduction to Imaging from Scattered Fields*, CRC Press, 2015.
- [12] D. Colton et R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, 1992.
- [13] D. Colton et P. Monk, «A modified dual space method for solving the electromagnetic inverse scattering problem for an infinite cylinder,» *Inverse Problems*, vol. 10, pp. 87-107, 1994.
- [14] C. Colton, J. Coyle et P. Monk, «Recent developments in inverse acoustic scattering theory,» *SIAM Rev.*, vol. 42, n° 13, pp. 369-414, 2000.
- [15] F. Cakoni et D. L. Colton, *Qualitative methods in inverse scattering theory : an introduction*,

Springer, 2006.

- [16] D. Colton et L. Päiväranta, «The Uniqueness of a Solution to an Inverse Scattering Problem for Electromagnetic Waves,» *Arch. Rational Mech. Anal.*, n° 1119, pp. 59-70, 1992.
- [17] A. Kirsh et R. Kress, «Uniqueness in inverse obstacle scattering,» *Inverse Problems*, vol. 9, pp. 285-299, 2007.
- [18] V. Isakov, «On uniqueness in the inverse transmission scattering problem,» *Partial Differential Equations*, vol. 15, pp. 1565-1587, 1990.
- [19] D. Colton et A. Kirsch, «A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region,» *Inverse Problems*, vol. 12, n° 14, pp. 383-393, 1996.
- [20] A. Lechleiter. [En ligne]. Available: <http://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/media.php/278/factorization.pdf>. [Accès le 24 avril 2019].
- [21] P. Quéffélec, «Caractérisation électromagnétique des matériaux anisotropes ou hétérogènes,» 10 février 2018. [En ligne]. Available: <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/materiaux-th11/materiaux-magnetiques-42537210/caracterisation-electromagnetique-des-materiaux-anisotropes-ou-heterogenes-e1157/>. [Accès le 29 Avril 2019].
- [22] J. R. Mosig, J. C. E. Besson, M. Gex-Farby et F. Gardiol, «Reflection of an Open-Ended Coaxial Line and Application to Non-destructive Measurement of Materials,» *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 30, pp. 46-51, 1981.
- [23] P. K. Kadaba, «Simultaneous Measurement of Complex Permittivity and Permeability in the Millimeter region by a Frequency-Domain technique,» *IEEE Trans. Instrument. Meas.*, vol. 33, pp. 336-340, 1984.
- [24] G. Friedsam et E. Biebl, «A Broadband Free-space Dielectric Properties Measurement System at Millimeter Wavelengths,» *IEEE Transaction Instrument. Meas.*, vol. 46, n° 12, pp. 515-518, 1997.
- [25] K. Ghodgaonkar et V. V. Varadan, «Free-Space Measurement of Complex Permittivity and Complex Permeability of Magnetic Materials at Microwave Frequencies,» *IEEE Trans. Instrument. Meas.*, vol. 39, n° 12, pp. 387-394, 1990.
- [26] F. Sagnard, F. Bentabet et C. Vignat, «In situ Measurements of Complex Permittivity of Materials Using Reflection Ellipsometry in the Microwave Band,» *IEEE Trans. on Instrument. and Measurement*, vol. 54, n° 13, pp. 1274-1282, 2005.
- [27] C. Eyraud, J.-M. Geffrin, A. Litman et H. Tortel, «Complex Permittivity Determination From Far-Field Scattering Patterns,» *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, pp. 309-312, 31 Octobre 2018.

- [28] X. Faget, A. Litman, E. Dieudonné, S. Enoch et N. Mallejac, «Free-Space Characterization of the Permeability of Inhomogeneous Magneto-Dielectric Materials,» *Transactions on Microwave Theory and Techniques*, pp. 5035 - 5045, 2017.
- [29] E. Dieudonné, N. Mallejac, C. Amra et S. Enoch, «Surface and bulk scattering by magnetic and dielectric inhomogeneities: A first-order method,» *Optical Society of America*, vol. 30, n° %19, 2013.
- [30] E. Dieudonné, N. Mallejac et S. Enoch, «Scattering by complex inhomogeneous objects : A first-order reciprocity method,» *Optics Express*, vol. 22, n° %113, Juin 2014.
- [31] F. Cakoni, D. Gintides et H. Haddar, «The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues,» *J. Math. Anal*, vol. 42, n° %11, pp. 237-255, fevrier 2010.
- [32] G. Newman et P. Boggs, «Solution accelerators for large-scale three-dimensional electromagnetic inverse problem,» *Inverse Problems*, vol. 20, n° %14, pp. 151-170, 2004.
- [33] G. Newman et M. Hoversten, «Solution strategies for two- and three-dimensional,» *Inverse Problems*, vol. 16, n° %13, pp. 1357-1375, 2000.
- [34] E. Haber, «Quasi-Newton methods for large scale distributed parameter estimation,» *Inverse Problems*, vol. 21, pp. 305-323, 2004.
- [35] L. Crocco, «Testing the contrast source extended Born inversion method against real data : the TM case,» *Inverse Problems*, vol. 21, n° %16, 2005.
- [36] G. Bao et P. Li, «Inverse Medium Scattering Problems in Near-Field,» *Journal of Computational Mathematics*, vol. 25, n° %13, pp. 252-265, 2007.
- [37] L. Bourgeois et H. Haddar, «Identification of generalized impedance boundary conditions in inverse scattering problems,» Saclay-île-de-France, 2008.
- [38] J.-M. Geffrin, C. Eyraud et A. Litman, «3D Inversion of Lossy Targets From Free Space Scattering Measurements,» chez *6th European Conference on Antennas and Propagation*, 2011.
- [39] M. de Buhan et M. Kray, «A new approach to solve the inverse scattering problem for waves: combining the TRAC and the Adaptative Inversion methods,» *Inverse Problems*, vol. 29, n° %18, 2013.
- [40] H. Haddar et R. Kress, «Conformal mapping and an inverse impedance boundary value problem,» *Inverse and Ill-posed Problems*, vol. 14, n° %18, pp. 785-804, 2006.
- [41] P. Serranho, «A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance,» *Inverse Problems*, vol. 22, pp. 663-680, 2006.
- [42] «Approximation de Born,» [En ligne]. Available:

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Approximation\\_de\\_Born](https://fr.wikipedia.org/wiki/Approximation_de_Born). [Accès le 25 avril 2019].

- [43] J. Li, T. Wang et X. Wang, «On the Validity of Born Approximation,» *Progress in electromagnetics Research*, vol. 107, pp. 219-237, 2010.
- [44] L. Diong, A. Roueff, P. Lasaygues et A. Litman, «Impact of the Born approximation on the estimation error in 2D inverse scattering,» *Inverse Problems*, vol. 32, n° %16, 2016.
- [45] G. Potvin, «General Rytov approximation,» *Optical Society of America*, vol. 32, n° %110, pp. 1848-1855, 2015.
- [46] D. L. Marks, «A family of approximations spanning the Born and Rytov scattering series,» *Optics Express*, vol. 14, n° %119, 2006.
- [47] J. Borggaard et V. Leite Nunes, «Frechet Sensitivity Analysis for Partial Differential Equations with Distributed Parameter,» chez *American control*, San Francisco, 2011.
- [48] K.-A. Liu et C. D. Sarris, «Broadband Uncertainty Quantification with the FDTD Method and the Multi-Complex Step Derivative Approximation,» 2017.
- [49] K.-A. Liu et C. D. Sarris, «High-Order Sensitivity Analysis with FDTD and the Multi-Complex Step Derivative Approximation,» 2017.
- [50] J. N. Lyness et C. B. Moler, «Numerical Differentiation of Analytic Functions,» *SIAM Numerical Analysis*, vol. 4, pp. 202-210, 1967.
- [51] S. Loillier, R. Chonion, P. Pagani et B. Etchessahar, «The Complex-Step Derivative Approximation for Complex Functions. Application: Sensitivity Analysis in Electromagnetic Frequency Domain,» *A paraitre*.
- [52] H. Ammari et A. Khelifi, «Electromagnetic scattering by small dielectric inhomogeneities,» *Math. Pures Appli.*, vol. 82, pp. 749-842, 2002.
- [53] C. Daveau et A. Khelifi, «On the perturbation of the electromagnetic energy due to the presence of small inhomogeneities,» ELSEVIER, Paris, 2008.
- [54] «A general perturbation formula for electromagnetic fields in presence of low volume scatterers,» *ESAIM*, pp. 1193-1218, 2010.
- [55] M. Darbas, J. Heleine et S. Lohrengel, «Sensitivity analysis for 3D Maxwell's equations and its use in the resolution of an inverse medium problem at fixed frequency,» *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2019.
- [56] G. Bao, J. Lin et S. Mefire, «Numerical reconstruction of electromagnetic inclusions in three dimensions,» *SIAM Journal on Imaging Sciences, Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 7, n° %11, pp. 558-577, 2014.

- [57] A. Fuks, «Wave diffraction by a rough boundary of an arbitrary plane-layered medium,» *IEEE Transaction Antennas and Propagation*, n° 124, pp. 630-639, 2001.
- [58] A. Azadegan et K. Sarabandi, «Analytical formulation of the scattering by a slightly rough dielectric boundary covered with a homogeneous dielectric layer,» *Proc. IEEE APS Int. Symp. Columbus*, pp. 420-423, 2003.
- [59] A. G. Yarovoy, «Scattering properties of a statistically rough interface inside a multilayered medium,» *Radio Science*, vol. 35, n° 12, pp. 455-462, 2000.
- [60] J. B. Keller et M. H. Millman, «Perturbation Theory of Nonlinear Electromagnetic Wave Propagation,» *Physical Review*, vol. 181, n° 15, pp. 1730-1745, 1969.
- [61] C. Kottke, A. Farjadpour et S. G. Johnson, «Perturbation theory for anisotropic dielectric interfaces and application to sub pixel smoothing of discretized numerical methods,» *Physics Optics*, 2007.
- [62] J. Joannopoulos, R. D. Mead et J. Winn, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, 1995.
- [63] P. Imperatore, «Second Order Volumetric Perturbative Reciprocal Scattering Theory,» *Tr. Antennas and Propagation*, vol. 60, n° 13, Mars 2012.
- [64] P. Imperatore, A. Iodice et D. Riccio, «Electromagnetic Wave Scattering from Layered Structures with an Arbitrary Number of Rough Interfaces,» *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, n° 14, pp. 1056-1072, April 2009.
- [65] P. Imperatore, A. Iodice et D. Riccio, «On the regime of validity of volumetric and boundary perturbation -based scattering models for rough multilayer,» *chez Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 2012.
- [66] P. Imperatore, A. Iodice et D. Riccio, «Physical Meaning of Perturbative Solutions for Scattering From and Through Multilayered Structures with Rough Interfaces,» *Transaction Antennas and Propagation*, vol. 58, n° 18, pp. 2710-2724, Aout 2010.
- [67] P. Imperatore, A. Iodice et D. Riccio, «Transmission Through Layered Media With Rough Boundaries: First Order Perturbative Solution,» *Transaction Antennans and Propagation*, vol. 57, n° 15, pp. 1481-1494, Mai 2009.
- [68] P. Imperatore, A. Iodice et D. Riccio, «Volumetric-Perturbative Reciprocal Formulation for Scattering from Rough Multilayers,» *Transactions Antennas and Propagation*, vol. 59, n° 13, pp. 877-887, Mars 2011.
- [69] R. S. Elliott, *Electromagnetics*, New York: Mc Graw-Hill, 1966.
- [70] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Englewood Cliffs:



Prentice Hall, 1991.

- [71] G. Fransechetti, P. Imperatore, A. Iodice et D. Riccio, «Scattering from Layered Structures with one Rough Interface: A Unified Formulation of Perturbative Solutions,» *Trans. Geosci. Remote Sens*, vol. 46, n° 16, Juin 2008.
- [72] P. Imperatore, «Second Order Volumetric Perturbative Reciprocal Scattering Theory,» *Tr. Antennas and Propagation*, vol. 60, n° 13, Mars 2012.
- [73] J. Li, «On the validity of the Born approximation,» *PIER*, n° 1107, pp. 219-237, 2010.
- [74] B. Stupfel et P. Bonnemason, «Solution of the scattering problem by axisymmetrical penetrable objects with a mixed boundary-element and finite-element method,» chez *JINA*, Strasbourg, 1991.
- [75] M. A. Morgan et K. K. Mei, «Finit-Element Computation os Scattering by Inhomogeneous Penetrable Bodies of Revolution,» *Antennas and Propagation*, vol. 25, pp. 202-2014, 1979.
- [76] C. A. Balanis, *Advances engineering electromagnetics*, New York: Wiley, 1989.
- [77] G. Mie, «Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen,» *Annalen der Physik*, vol. 330, n° 13, pp. 377-445, 1908.
- [78] E. I. Thorsos, «The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using Gaussian roughness spectrum,» *Journal Acoustic Soicity Amer.*, vol. 83, n° 11, pp. 78-92, janvier 1988.
- [79] E. I. Thorsos et D. R. Jackson, «The validity of the perturbation approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum,» *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 86, n° 11, pp. 261-277, juillet 1989.
- [80] J. M. Crespo et M. Nieto-Vesperinas, «Scattering from slightly rough random surfaces: A detailed study on the validity of the small perturbation method,» *J. Opt. Image Sci.*, vol. 7, n° 17, pp. 1185-1201, Juillet 1990.
- [81] F. T. Ulaby, R. K. Moore et A. K. Fung, *Microwave Remote Sensing*, Vols. 1 sur 2, II, III, Addison-Wesley, 1982.
- [82] D. Bouche, «Fringe wave diffraction coefficients for higher order discontinuities,» *annals of telecommunications*, vol. 51, n° 13, pp. 137-142, Mars 1992.
- [83] M. A. Leontovich, *Investigations on Radiowave Propagation*, Part II, P. H. o. t. A. o. Sciences, Éd., Moscow: Academy of Sciences, 1948, pp. 5-12.
- [84] T. B. A. Senior et J. L. Volakis, *Approximate boundary conditions in electromagnetics*, T. i. o. E. Engineers, Éd., London, 1995.

- [85] A. Mohsen, «On the impedance boundary condition,» *Appl. Math. Modelling*, vol. 6, pp. 405-407, octobre 1982.
- [86] K. M. Mitzer, «An Integral Equation Approach to Scattering From a Body of Finite Conductivity,» *Radio Science*, vol. 2, n° 112, pp. 1459-1470, decembre 1967.
- [87] R. Penrose, «On best approximate solution of linear matrix equations,» *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 52, pp. 17-19, 1956.
- [88] V. H. Rumsey, «Reaction Concept in Electromagnetic Theory,» *Physical Review*, vol. 94, pp. 1483-1491, Juin 1954.
- [89] F. Caubet, M. Dambine et D. Kateb, «Shape optimization methods for the Inverse Obstacle problem with generalized impedance boundary conditions,» *Inverse Problems*, vol. 29, n° 111, 2013.
- [90] B. Stupfel, P. Bonnemason et R. Le Martret, «Solution of the scattering problem by axisymmetrical penetrable objects with a mixed boundary-element and finit-element method,» chez *JINA*, Nice, 1990.
- [91] Y. Morel, «Decomposition en courants caractéristiques. Application à l'analyse de SER,» 2005.
- [92] D. Bouche et I. V. Andronov, «Asymptotics of creeping waves in a degenerated case of matrix impedance,» *PIER*, vol. 59, pp. 215-230, 2006.



## AVIS DU JURY SUR LA REPRODUCTION DE LA THESE SOUTENUE

**Titre de la thèse:**

Modèles de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la condition d'impédance. Application au problème inverse

**Nom Prénom de l'auteur : LOILLIER SIMON**

**Membres du jury :**

- Madame LITMAN Amélie
- Monsieur HÉLIER Marc
- Monsieur POULIGUEN Philippe
- Monsieur LOISON Renaud
- Monsieur MERIC Stéphane
- Monsieur LAUTRU David

Président du jury : *M<sup>r</sup> Marc HÉLIER*

Date de la soutenance : 07 Octobre 2019

Reproduction de la these soutenue

- Thèse pouvant être reproduite en l'état  
 Thèse pouvant être reproduite après corrections suggérées

Fait à Rennes, le 07 Octobre 2019

Signature du président de jury

*M. M.*  
Marc HÉLIER

Le Directeur,

M'hamed DRISSI



**Titre :** Modèles de sensibilité du champ électromagnétique à la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la condition d'impédance. Application au problème inverse.

**Mots clés :** électromagnétisme, perturbation, sensibilité, CND, VPRT, permittivité, perméabilité, impédance

**Résumé :** Nous cherchons à déterminer les variations de la distribution spatiale de propriétés électromagnétiques des matériaux expliquant l'écart entre la mesure de l'onde électromagnétique réfléchie par l'objet fabriqué et le calcul de l'onde électromagnétique réfléchie par l'objet conçu (la maquette CAO). Ces variations étant considérées faibles, le problème de contrôle non destructif est adressé dans un cadre perturbatif. Deux modèles permettant d'estimer la sensibilité du champ électromagnétique aux points de mesure à des variations de propriétés électromagnétiques des matériaux sur l'objet sont développées. Le premier permet d'évaluer la sensibilité du champ électrique aux points de mesure à des variations d'impédance surfacique de Léontovich. Le second permet d'évaluer la sensibilité du champ électrique aux points

de mesure à des variations de permittivité et de perméabilité. Il consiste en une extension de la Volumetric Perturbative Reciprocal Theory. En ne conservant que le premier ordre, nous obtenons des modèles linéaires dont nous montrons la capacité à résoudre le problème inverse considéré : sur une sphère et à partir de mesures simulées nous déterminons la distribution de permittivité, de perméabilité et d'impédance. Les perspectives et les applications de ces travaux sont bien plus étendues que pour la résolution du problème initialement adressé. Les modèles perturbatifs trouvent en effet naturellement leur place en propagation d'incertitudes, en optimisation, comme outil d'aide à la conception ou d'aide à la détermination de l'élément critique d'un système de mesure.

**Title :** Models for electromagnetic fields sensitivities to permittivity, permeability and impedance boundary condition.

**Keywords:** electromagnetism, sensitivities, NDT, VPRT, permittivity, permeability, impedance

**Abstract:** We investigate the recovering of electromagnetic materials properties variations which explain the differences between the measurement of the electric field scattered by the manufactured object and the computed electric field scattered by the numerical object (the CAO model). Only small variations from CAO configuration are of interest. Hence, the non-destructive testing is addressed from a sensitivities point of view. We develop two theoretical models. The first one allows the computing of the electric fields sensitivities to Leontovich's impedance boundary condition. Starting from the Volumetric Perturbative Reciprocal Theory, the second model allows the computing of the electric field sensitivities to permeability and permittivity.

Using the first order, we highlight the ability of these models to tackle the inverse material problem on a sphere. The measurement is computed from a full-wave code and we recover inhomogeneous permeability, permittivity and impedance. Perspectives and applications of these models are much broader than for the resolution of the initially addressed problem. The sensitivity models are useful in propagation of uncertainties, in optimization, as a tool for design.