



**HAL**  
open science

# Etude de la réponse dynamique du Bloc Réacteur soumis à une sollicitation extrême : Co-simulation implicite/explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact

Yvan Le Nôtre

► **To cite this version:**

Yvan Le Nôtre. Etude de la réponse dynamique du Bloc Réacteur soumis à une sollicitation extrême : Co-simulation implicite/explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2023. Français. NNT : 2023ISAL0055 . tel-04583693

**HAL Id: tel-04583693**

**<https://theses.hal.science/tel-04583693>**

Submitted on 22 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2023ISAL0055

**THÈSE de DOCTORAT de L'INSA LYON,  
membre de l'Université de Lyon**

**École Doctorale MEGA (ED 162)**  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**  
Spécialité de Doctorat  
**Mécanique**

Soutenue publiquement le 07/09/2023, par :

**Yvan Le Nôtre**  
Ingénieur

---

**Étude de la réponse dynamique du Bloc  
Réacteur soumis à une sollicitation  
extrême : Co-simulation  
implicite/explicite multi-échelle en temps  
pour la dynamique du contact**

---

Devant le jury composé de :

NOM, Prénom	Grade/Qualité	Établissement	Rôle
BARANGER, Thouraya	Professeure	Université Lyon 1	Examinatrice
PEGON, Pierre	Docteur	ELSA	Rapporteur
COTTEREAU, Regis	CR, HdR	Centrale Marseille	Rapporteur
GRAVOUIL, Anthony	Professeur	INSA Lyon	Directeur de thèse
BRUN, Michael	Professeur	Université de Lorraine	Co-Directeur de thèse
GRENAT, Clément	Docteur	Framatome	Examineur

## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr	<b>M. Stéphane DANIELE</b> C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr	<b>M. Philippe DELACHARTRE</b> INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sandrine CHARLES</b> Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:sandrine.charles@univ-lyon1.fr">sandrine.charles@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</b> <a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr">hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr	<b>M. Stéphane BENAYOUN</b> Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon mega@insa-lyon.fr	<b>M. Jocelyn BONJOUR</b> INSA Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="https://edsciencessociales.universite-lyon.fr">https://edsciencessociales.universite-lyon.fr</a> Sec. : Mélina FAVETON INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.77.79 melina.faveton@univ-lyon2.fr	<b>M. Bruno MILLY</b> Université Lumière Lyon 2 86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:bruno.milly@univ-lyon2.fr">bruno.milly@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

**Abstract :**

Nuclear power plants are an important source of energy production in France. However, following the various accidents and risks associated with this technology, nuclear safety is a global concern. In France, standards are continually being imposed on existing nuclear facilities and on the next generations under development. Among the many aspects of nuclear safety, the dimensioning of mechanical structures is an important subject for industrial players. Framatome's core business is the design and justification of nuclear power plants. These must be designed to withstand extreme operating conditions, such as earthquakes, plane crashes or pipe ruptures. Numerical modeling of this type of loading requires dynamic temporal analyses to consider these multi-scale phenomena. However, such analyses are CPU and memory intensive. The aim of this thesis is to develop a new heterogeneous (different integration schemes) and asynchronous (different time steps) integrator, based on the GC coupling method, with improved energy conservation properties. The multi-scale phenomena present in the reactor block are simulated using an explicit integrator with small time steps for the contact zones and an implicit integrator with large time steps for the rest of the structure. A co-simulation demonstrator is developed between the Code Aster and Europlexus software packages in order to get closer to an industrial development and thus demonstrate the performance gain, for a three-dimensional reactor block model, provided by the multi-time-scale co-simulation approaches.

Keywords : reactor block, asynchronous heterogeneous time integrator, co-simulation, earthquake, contact, Code Aster, Europlexus, energy conservation

---

## Résumé :

Les centrales nucléaires sont une source de production d'énergie importante en France. Cependant, suite aux différents accidents et aux risques encourus avec cette technologie, la sûreté nucléaire est une préoccupation mondiale. En France, des normes sont imposées continuellement sur les installations nucléaires existantes et sur les prochaines générations en développement. Parmi les nombreux aspects de la sûreté nucléaire, le dimensionnement des structures mécaniques est un sujet important pour les acteurs industriels. L'activité principale de l'entreprise Framatome concerne le dimensionnement et la justification des centrales nucléaires. Celles-ci doivent être conçues pour résister à des conditions extrêmes d'utilisation telles que des séismes, des crashes d'avion ou encore des ruptures de tuyauterie. La modélisation numérique de ce type de chargement passe par des analyses dynamiques temporelles afin de considérer ces phénomènes multi-échelles en temps. Cependant, réaliser ces analyses demande beaucoup de temps CPU et de mémoire. L'objectif de la thèse est le développement d'un nouvel intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps), basé sur la méthode de couplage GC, ayant de meilleures propriétés relatives à la conservation énergétique. En effet, les phénomènes multi-échelles en temps présents dans le bloc réacteur sont des cas d'usages favorables aux méthodes multi-échelles en temps, avec un intégrateur explicite pour les zones de contact, comportant une discrétisation temporelle fine, et un intégrateur implicite pour le reste de la structure, discrétisé par des pas de temps plus gros. Un démonstrateur de co-simulation est développé entre les logiciels Code Aster et Europlexus pour se rapprocher d'un développement industriel et ainsi montrer le gain de performance, pour un modèle tridimensionnel de bloc réacteur, apporté par les approches de co-simulation multi-échelles en temps.

Mots clés : bloc réacteur, intégrateur temporel hétérogène asynchrone, co-simulation, séisme, contact, Code Aster, Europlexus, conservation d'énergie

---

*Il n'y a pas de problèmes ; il n'y a que  
des solutions. L'esprit de l'homme in-  
vente ensuite le problème. Il voit des  
problèmes partout.*

---

De André Gide

# Remerciements

Le travail présenté dans ce document n'aurait jamais été possible sans mes encadrants académiques et industriels. Je souhaite à présent les remercier pour leur contribution. Je remercie Anthony Gravouil, mon directeur de thèse, pour toujours avoir été enthousiaste par les résultats apportés en réunion, moteur pour expliquer de nouvelles notions et partager quelques anecdotes du petit monde de la mécanique. Je remercie Michael Brun, mon co-directeur de thèse, qui a toujours été là pour me supporter et échanger sur mes développements informatiques et apporter de la bonne humeur par son accessibilité. Enfin mes remerciements vont également à Clément Grenat, jeune docteur et encadrant industriel, avec qui j'ai eu l'occasion de partager la vie d'équipe au sein de Framatome à Paris durant 1 an et demi. Il a toujours été un précieux support aussi bien pour échanger sur les difficultés scientifiques que pour simplement partager des moments simples et agréables. Je suis très heureux d'avoir collaboré avec vous et j'en garderai de très bons souvenirs.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres du jury : Thouraya Baranger pour avoir présidé la soutenance du doctorat, Pierre Pegon et Regis Cottureau pour leur travail de rapporteur et leurs conseils concernant le manuscrit de la thèse.

Je tiens également à remercier l'entreprise Framatome pour le financement de cette thèse et plus particulièrement Nathalie Souquet pour m'avoir accueilli dans son équipe (DTIMRD). J'ai eu l'occasion de rencontrer de nombreuses personnes lors de mon séjour à la tour Areva à La Défense. J'ai apprécié toutes ces pauses café et repas avec mes collègues, de l'équipe DTIMRD, propices aux échanges légers mais également très profonds avec Clément en parlant sciences fondamentales ! Vous êtes trop nombreux pour tous vous énumérer mais je tiens à vous remercier pour ces moments chaleureux importants dans le quotidien d'un doctorant.

J'ai passé la plus grosse partie de ma thèse au sein du laboratoire du LaMCoS. J'en

retiens de nombreux souvenirs partagés avec les doctorants : Zineb ma co-bureau toujours enthousiaste ; Loïc, Pierre, Ben, Maxime, Audrey mes partenaires de course à pied ; Rémi, Victor et Adrien la tripléte des efficaces ; Julie, Joaquin et Léonardo le rire facile ; Clément et Hussein les isolés du bout du couloir ; Maelle et Matthieu les exilés de MATEIS ; et enfin Nicolas, Timothée et Benjamin les jeunes pousses de notre bureau. Cette liste est non exhaustive car de nombreuses autres personnes ont partagé notre quotidien au laboratoire. Je mets également un point d'honneur à mon grand ami Julien Chapelat avec qui nous avons vécu ensemble cette aventure de la thèse au LaMCoS ! La réalisation de cette thèse n'aurait pas été la même sans toutes ces interactions.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis de Bretagne, de Paris et de Lyon de m'avoir accompagné dans cette aventure. Ces moments partagés ensemble ont été très importants aussi bien pour prendre du recul sur la thèse que pour passer des moments de convivialité au quotidien. Vous savez à quel point ces moments me sont précieux et je n'aurais pas pu le faire sans vous.



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Etat de l'art des méthodes multi-échelles en temps</b>	<b>21</b>
2.1	Problème de référence . . . . .	23
2.2	Discrétisation en espace . . . . .	25
2.3	Discrétisation en temps . . . . .	27
2.3.1	Schémas de Newmark . . . . .	28
2.3.2	Schéma $\alpha$ -généralisé . . . . .	41
2.4	Méthode de décomposition de domaine . . . . .	43
2.4.1	Méthodes avec recouvrement . . . . .	45
2.4.2	Méthodes sans recouvrement . . . . .	46
2.5	Méthodes multi-échelles en temps . . . . .	49
2.6	Conclusion & motivation . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Nouvelle approche de résolution multi-échelles en temps pour la dynamique précise au second ordre</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Une nouvelle méthode de co-simulation . . . . .	58
3.2.1	Problème de référence en dynamique transitoire . . . . .	58
3.2.2	Méthodes multi-échelles . . . . .	60
3.3	Analyse de la cohérence et de la stabilité d'un oscillateur partitionné . . . . .	68
3.3.1	Problème d'oscillateur partitionné . . . . .	70
3.3.2	Analyse de stabilité . . . . .	71
3.3.3	Erreur de troncature locale . . . . .	89
3.3.4	Amortissement algorithmique et allongement de la période . . . . .	91
3.3.5	Erreur globale . . . . .	94
3.3.6	Pseudo-norme énergétique et bilan énergétique . . . . .	98
3.4	Comportement du déplacement à l'interface . . . . .	102
3.5	Conclusion . . . . .	104

<b>4</b>	<b>Co-simulation implicite-explicite de modèle tridimensionnel d'un bloc réacteur simplifié</b>	<b>107</b>
4.1	Problématique industrielle . . . . .	109
4.2	Calcul tridimensionnel implicite/explicite pour un Bloc réacteur simplifié .	111
4.2.1	Présentation du modèle 3D . . . . .	111
4.2.2	Présentation des logiciels utilisés . . . . .	115
4.2.3	Présentation de la stratégie de co-simulation . . . . .	118
4.2.4	Application numérique . . . . .	122
4.3	Conclusion . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>137</b>
5.1	Conclusions . . . . .	137
5.2	Perspectives . . . . .	139
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>



## Liste des figures

1.1	Réacteur à eau pressurisée (REP) [Kam19] . . . . .	17
1.2	Schéma bloc réacteur . . . . .	18
2.1	Problème de mécanique de référence . . . . .	24
2.2	Stabilité du schéma de Newmark . . . . .	33
2.3	Décomposition en deux sous-domaines avec recouvrement . . . . .	45
2.4	Décomposition en deux sous-domaines sans recouvrement . . . . .	46
3.1	Deux sous-domaines avec des discrétisations temporelles différentes . . . . .	63
3.2	Oscillateur SDOF divisé en deux sous-domaines A and B . . . . .	71
3.3	Module des fréquences propres de la matrice d'amplification pour l'oscillateur partitionné dans le cas de la méthode GC, lors du couplage des schémas CAA et CD avec différents rapports de pas de temps $m$ et $b_1 = 1$ . . . . .	82
3.4	Module des fréquences propres de la matrice d'amplification pour l'oscillateur partitionné dans le cas de la méthode $GC_{acc}$ , lors du couplage des schémas CAA et CD avec différents rapports de pas de temps $m$ et $b_1 = 1$ . . . . .	83
3.5	Module des fréquences propres de la matrice d'amplification pour l'oscillateur partitionné dans le cas de la méthode BLG, lors du couplage des schémas CAA et CAA avec différents rapports de pas de temps $m$ et $b_1 = 1$ . . . . .	84
3.6	Module des fréquences propres de la matrice d'amplification pour l'oscillateur partitionné dans le cas de la méthode BLG, lors du couplage des schémas CAA et CD avec différents rapports de pas de temps $m$ et $b_1 = 1$ . . . . .	85
3.7	Module des fréquences propres de la matrice d'amplification pour l'oscillateur partitionné dans le cas de la méthode BLG, lors du couplage des schémas CD et CD avec différents rapports de pas de temps $m$ et $b_1 = m$ . . . . .	86
3.8	Evolution de la limite de stabilité $\Omega_{B,crit}$ en fonction du ratio entre les pas de temps $m$ . . . . .	87
3.9	Evolution des valeurs propres principales de la matrice d'amplification dans le plan complexe pour les méthodes BGL et GC, lors du couplage des schémas CAA et CD pour $m = 20$ . . . . .	88

3.10	Evolution des valeurs propres principales de la matrice d'amplification dans le plan complexe pour les méthodes BGL et GC, lors du couplage des schémas CAA et CD pour $m = 100$ .	89
3.11	Erreurs de troncature locales $\bar{\tau}$ de l'oscillateur partitionné, pour différentes quantités (déplacement, vitesse, accélération pour les deux sous-domaines), dans le cas de la méthode GC couplant les schémas CAA et CD avec un rapport de pas de temps $m = 20$ .	90
3.12	Erreurs de troncature locales $\bar{\tau}$ de l'oscillateur partitionné, pour différentes quantités (déplacement, vitesse, accélération pour les deux sous-domaines), dans le cas de la méthode BLG couplant les schémas CAA et CD avec un rapport de pas de temps $m = 20$ .	91
3.13	Rapport d'amortissement numérique $\bar{\xi}$ de l'oscillateur partitionné pour le couplage des schémas de Newmark CAA et CD avec un rapport de pas de temps $m = 20$ .	92
3.14	Allongement de la période $\frac{\bar{T}-T}{T}$ de l'oscillateur partitionné pour le couplage des schémas de Newmark CAA et CD avec un rapport de pas de temps $m = 20$ .	93
3.15	Erreurs relatives des déplacements pour la méthode de couplage $GC_{acc}$ utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	95
3.16	Erreurs relatives des vitesses pour la méthode de couplage $GC_{acc}$ utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	96
3.17	Erreurs relatives des accélérations pour la méthode de couplage $GC_{acc}$ utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	96
3.18	Erreurs relatives des déplacements pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	97
3.19	Erreurs relatives des vitesses pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	97
3.20	Erreurs relatives des accélérations pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	98
3.21	Erreurs relatives du bilan énergétique et de la pseudo-énergétique pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples	100
3.22	Énergies d'interface pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD pour différents micro pas de temps ( $h^B$ ), avec le rapport de pas de temps $m = 20$ .	101

---

3.23	Énergie relative d'interface pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec $h^B = 1 \cdot 10^{-7}s$ et un rapport de pas de temps $m = 20$ . . . . .	102
3.24	Erreur relative du déplacement à l'interface entre les deux sous-domaines pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec $h^B = 1 \cdot 10^{-7}s$ et un rapport de pas de temps $m = 20$ . . . . .	103
3.25	Comparaison du déplacement du sous-domaine B pour les méthodes GC et BLG avec le déplacement théorique . . . . .	104
4.1	Chaîne de calculs finale . . . . .	112
4.2	Modélisation simplifiée du bloc réacteur, vue en coupe . . . . .	112
4.3	Vue 3D du maillage complet composé d'éléments hexaèdres . . . . .	113
4.4	Vue de coupe du maillage complet . . . . .	114
4.5	Zoom sur la partie encastrée reliant l'enveloppe de coeur à la cuve . . . . .	114
4.6	Vue de dessus pour une clé radiale . . . . .	115
4.7	Répartition du maillage complet en 2 sous-domaines distincts . . . . .	119
4.8	Co-simulation avec les logiciels Code Aster et Europlexus pour la méthode GC . . . . .	121
4.9	Modification dans le coupleur pour effectuer la méthode BLG . . . . .	122
4.10	Sollicitation sismique horizontale . . . . .	124
4.11	Noeuds soumis aux sollicitations sismiques . . . . .	125
4.12	Observateur 1 placé au niveau d'une des clés radiales . . . . .	126
4.13	Déformées modales du bloc réacteur . . . . .	127
4.14	Déformées modales du bloc réacteur . . . . .	128
4.15	Transformée de Fourier des sollicitations sismiques . . . . .	129
4.16	Evolution du déplacement de l'observateur 1 au cours du temps pour $m = 4000$	130
4.17	Evolution du déplacement de l'observateur 1 au cours du temps pour différents rapports de pas de temps $m$ . . . . .	131
4.18	Evolution du déplacement de l'observateur 1 au cours du temps pour différents rapports de pas de temps $m$ pour un temps simulé plus court . . . . .	132
4.19	Bilan énergétique de la co-simulation pour $m=4000$ . . . . .	132
4.20	Evolution de l'erreur relative de l'énergie d'interface en fonction du temps pour $m = 4000$ . . . . .	133
4.21	Transformée de Fourier du déplacement de l'observateur 1 . . . . .	133
4.22	Comparaison des temps CPU entre un calcul complet sur Europlexus et un calcul co-simulé . . . . .	134

# Liste des tableaux

2.1	Présentation d'algorithmes de la famille des schémas de Newmark . . . . .	34
2.2	Propriétés des schémas $\alpha$ -généralisés . . . . .	43
3.1	Résumé de $\Omega_{B,crit}$ pour les trois méthodes étudiées pour le couplage des schémas CAA et CD pour $m = 20$ et $m = 100$ . . . . .	89
3.2	Résumé de $W_{interface}$ pour les méthodes BLG et GC pour différents micro pas de temps au temps $t = 1 \cdot 10^{-4}s$ . . . . .	101
4.1	Pas de temps $h$ et degrés de liberté associés à chaque sous-domaine . . . . .	123
4.2	Premières fréquences propres issues de l'analyse modale . . . . .	126





---

# 1

## Introduction

La sûreté nucléaire est d'une importance primordiale dans le domaine de l'énergie nucléaire, visant à garantir la protection des individus, de l'environnement et des générations futures contre les risques associés aux activités nucléaires. Les installations nucléaires, telles que les réacteurs nucléaires, sont soumises à des normes strictes établies par les autorités de sûreté et notamment l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN) en France. Parmi les nombreux aspects de la sûreté nucléaire, le dimensionnement des structures mécaniques est un sujet important pour les acteurs industriels.

Le dimensionnement des structures mécaniques dans le contexte nucléaire vise à garantir leur intégrité, leur fiabilité et leur durabilité face à diverses contraintes opérationnelles, environnementales et accidentelles. Ces structures, telles que les cuves de réacteurs, les enceintes de confinement et les systèmes de support, doivent être conçues de manière à résister aux charges statiques et dynamiques, aux variations de température, aux séismes et à d'autres sollicitations potentielles.

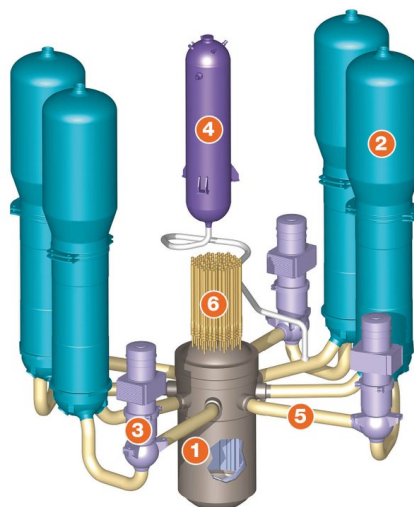
La conformité aux normes imposées par les autorités de sûreté est un élément essentiel dans la conception et le dimensionnement des structures mécaniques dans le domaine nucléaire. Ces normes sont établies sur la base d'études approfondies, de recherches expérimentales et de retours d'expérience afin de garantir un niveau élevé de sécurité et de réduire les risques associés à l'exploitation des installations nucléaires. Le parc nucléaire existant

est, lui aussi, soumis aux nouvelles normes exigées par l'ASN. Par conséquent, des études mécaniques sont aussi effectuées sur les différents réacteurs en fonctionnement sur le territoire français ou à l'étranger.

L'entreprise Framatome, acteur majeur du secteur nucléaire, conçoit des centrales nucléaires et notamment leur circuit primaire dont le principe est expliqué dans la Figure 1.1, assure également d'autres fonctions comme l'approvisionnement des équipements pour les chaudières nucléaires et un service de maintenance pour les réacteurs. Framatome est composé de plusieurs entités dont le département DTIM (Direction Technique et Ingénierie Mécanique) ayant pour rôle le dimensionnement des structures pour une large variété de cas d'utilisation incluant également des conditions extrêmes d'utilisation. La démarche choisie au sein du département DTIM est hybride : expérimentale et numérique. La stratégie des essais adoptée est de reproduire les structures de manière à être représentatif des physiques. Framatome dispose de moyens importants d'essai au Creusot mais pas seulement, d'autres centres existent comme en Allemagne. Il arrive aussi que des essais soient commandés pour être réalisés par d'autres entreprises comme le CEA qui dispose de moyens d'essais expérimentaux d'envergure. Cependant, réaliser des essais expérimentaux demande des moyens financiers importants, requiert des processus longs à mettre en place et ne peuvent pas être intégralement instrumentés. L'utilisation de simulations de modèles numériques permet de palier aux inconvénients de la démarche heuristique basée sur le retour d'expérience et les essais réalisés. En effet, les simulations peuvent être réalisées à moindre coût, les modélisations sont réutilisables pour des jeux de données différents tels que les propriétés matériaux, des géométries et autres, et les résultats sont accessibles sur l'ensemble du système analysé, y compris dans des zones non instrumentables à l'aide d'essais. Afin de garantir la validité physique des modélisations réalisées, celles-ci sont, d'une manière ou d'une autre, validées sur la base d'essais. Les deux démarches sont donc complémentaires.

Les conditions extrêmes d'utilisation telles que les séismes, les crashes d'avions et les pertes du réfrigérant primaire (APRP) nécessitent d'effectuer des calculs numériques dits dynamiques (résultats dépendant du temps). Ces modélisations sont effectuées par la section DTIMRD (Analyses dynamiques du circuit primaire, des internes de cuve pressurisé et des râteliers de stockages combustibles) par la méthode des éléments finis pour dimensionner les centrales nucléaires, dont notamment le bloc réacteur (BR) représenté sur la Figure 1.2. Ce dernier est dimensionné pour résister à des incidents extrêmes tels que la rupture de tuyauteries du circuit primaire, différents types de séismes ou encore des crashes d'avions. Lors de la simulation de ces différents scénarios, des phénomènes complexes apparaissent pouvant faire intervenir des effets localisés multi-échelles en espace

- ❶ **Cuve de réacteur et internes de cuve** : enceinte métallique étanche de forte épaisseur en acier renfermant le cœur du réacteur : les assemblages combustibles.
- ❷ **Générateurs de Vapeur (GV)** : assurent le transfert de chaleur de l'eau du circuit primaire à l'eau du circuit secondaire, la transformant ainsi en vapeur qui entraîne une turbine couplée à un alternateur.
- ❸ **Groupes MotoPompes Primaires (GMPP)** : participent à la sûreté de l'installation en permettant la circulation de l'eau primaire à travers le cœur du réacteur et les générateurs de vapeur.
- ❹ **Pressuriseur** : maintient l'eau du circuit primaire en phase liquide grâce à une pression de 155 bars.
- ❺ **Tuyauteries primaires** : assurent le transfert de l'eau entre la cuve et les générateurs de vapeur.
- ❻ **Mécanismes de Commande de Grappes (MCG)** : permettent de réguler la réaction nucléaire dans la cuve du réacteur et de la stopper en 2 secondes, assurant ainsi la sûreté de la centrale.



**FIGURE 1.1** – Réacteur à eau pressurisée (REP) [Kam19]

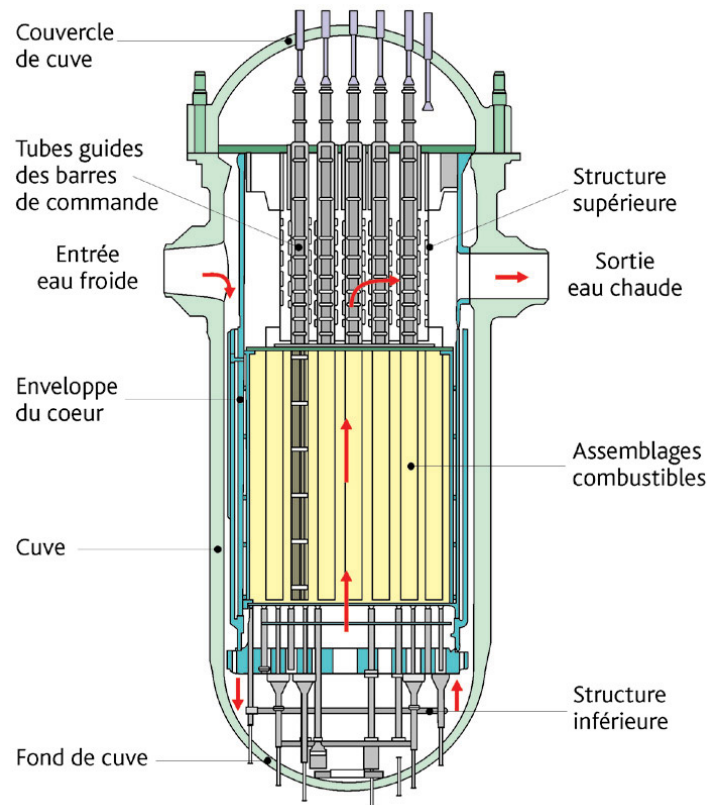
et en temps (contact, interaction fluide-structure, etc.). Or, la complexité de modélisation liée à ces phénomènes nécessite une discrétisation temporelle et spatiale fine conduisant à un allongement considérable des temps de calcul (de l'ordre de plusieurs jours).

La stratégie actuellement employée pour modéliser ces phénomènes est déclinée en deux volets : des modèles 2D appelés BR développés avec le code SYSTUS [Apa23] et un modèle 3D appelé BR 3D développé avec le code ANSYS [23].

Les modèles BR sont réalisés de manière à minimiser la complexité du modèle tout en étant représentatives des phénomènes d'intérêts. Ainsi, l'utilisation d'éléments finis de type poutre, coque, ressort (linéaires ou non), contact, maille acoustique, de super-élément et masse ponctuelle est privilégiée. De même, lorsque la modélisation de lois de comportement plus complexes est nécessaire, celles-ci peuvent être identifiées à l'aide de calculs en éléments finis 3D. La loi de comportement identifiée est ensuite intégrée au sein des modélisations simplifiées. En revanche, avec l'augmentation des exigences issues des normes, l'intégration continue de modélisations de plus en plus fines telles que des phénomènes multi-échelles 3D locaux (impact, frottement, plastification locale) est nécessaire.

Or, la modélisation de ces phénomènes multi-échelles en espace et en temps nécessite une discrétisation temporelle et spatiale fine de plus en plus fine afin d'être capable de représenter les phénomènes locaux associés. Cela a pour conséquence une perpétuelle augmentation des temps de calcul des simulations de BR nécessitant la création de méthodes numériques d'intégration temporelle alternatives assurant la compatibilité des temps de calculs avec les besoins industriels (aide à la décision, chaînage de logiciels,...).

Une des solutions permettant de réduire drastiquement les temps de calculs consisterait à employer une méthode multi-échelles en espace et en temps adaptée aux caractères non-linéaires et localisés des phénomènes traités.



**FIGURE 1.2** – Schéma bloc réacteur

Le LaMCoS (Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures), unité mixte de recherche de l'INSA de Lyon et du CNRS, développe des méthodes multi-échelles en espace et en temps. La méthode originale proposée par [Gra00], nommée méthode GC, a été enrichie par plusieurs thèses traitant de l'impact pour les ponts roulants sous séismes [Fek17], les impacts d'outils pour les structures composites aéronautiques [Cha14], l'entrechoquement entre les bâtiments sous séismes [Amb+22], l'interaction fluide-structure [Nun+17].

Ces méthodes permettent de décomposer un problème complexe en plusieurs sous-domaines. Chacun de ces sous-domaines dispose de sa propre échelle de temps ainsi que de sa propre discrétisation spatiale. Le résultat du système global est ensuite accessible en résolvant un problème aux interfaces entre les différents sous-domaines.

Les calculs sur chacun des sous-domaines étant non intrusifs, ceux-ci peuvent être réalisés en parallèle par des logiciels spécialisés (Europlexus, Ansys, LS-Dyna, Cast3m, Code Aster,

---

etc.). Par la suite, les résultats de ces sous-domaines sont utilisés pour résoudre l'ensemble du système et ainsi obtenir un résultat global. L'ensemble de ces étapes constitue la méthode de co-simulation.

Les objectifs initiaux de cette thèse sont multiples. La méthode de co-simulation permet d'accélérer les résultats mais à un certain prix. En effet, en utilisant la méthode actuelle, une faible dissipation numérique d'énergie est constatée au niveau des interfaces entre les différents sous-domaines [Gra00]. Cette dissipation numérique dégrade les résultats des différentes simulations utilisant cette méthode, et d'autant plus que le rapport entre les différentes échelles de temps est grand.

**L'objectif scientifique** de cette thèse est d'améliorer les méthodes de co-simulation implicite/explicite à pas de temps asynchrone couplée à l'échelle micro disponibles dans la littérature, telle que la méthode GC [Gra00], en réduisant la dissipation numérique à l'interface des sous-domaines. Des recherches actives ont été conduites sur le sujet depuis plus de vingt ans. La méthode GC a bénéficié de plusieurs avancées avec notamment une extension à d'autres schémas que ceux de la famille de Newmark (MGC) [Mah+11], une nouvelle écriture du problème pour généraliser la méthode aux schémas d'intégration temporelle alpha-généralisé en assurant une nouvelle propriété d'interface (BGC) [Bru+15], etc. L'un des derniers verrous concernant cette méthode concerne la dissipation d'énergie à l'interface des sous-domaines. La méthode MGC permettait d'annuler cette dissipation d'énergie mais elle s'avère en fait mal adaptée à la co-simulation lorsque l'on souhaite traiter les non-linéarités localisées avec une échelle fine en temps et conserver une échelle en temps large pour les parties linéaires du problème (couplage macro-temps).

**L'objectif industriel** de cette thèse consiste à adapter la méthode de co-simulation à la simulation du bloc réacteur lors d'incidents extrêmes et à démontrer la réduction en temps de calcul par rapport à une simulation purement réalisée en explicite ou implicite. L'implémentation résultante a pour but d'être facilement adaptable aux simulations des autres équipements du circuit primaire principal (CPP). La co-simulation est ici développée entre deux logiciels, Code Aster pour le sous-domaine implicite du calcul et Europlexus pour le sous-domaine explicite du calcul.

Les travaux réalisés pendant cette thèse sont présentés dans ce manuscrit en trois chapitres distincts :

- Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur les méthodes numériques

nécessaires pour réaliser une étude dynamique des structures. La recherche de la solution du problème de référence est approchée par la méthode des éléments finis. La discrétisation temporelle est utilisée sur le problème de référence afin d'obtenir une solution approchée. Plusieurs méthodes sont présentées en exposant pour chacune son domaine d'utilisation. Enfin, les méthodes de partitionnement en espace sont introduites avec les méthodes multi-échelles en temps.

- Le deuxième chapitre rappelle les équations de la dynamique des structures en utilisant l'écriture Lagrangienne. La méthode multi-échelle en temps GC [Gra00] est développée puis une amélioration est apportée, nommée dans le manuscrit méthode BLG. Une analyse de stabilité détaillée est conduite pour la méthode proposée afin de définir son domaine d'utilisation.
- Le troisième chapitre illustre la méthode GC et BLG avec la co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'un bloc réacteur simplifié. La stratégie de co-simulation du démonstrateur avec les logiciels Code Aster et Europlexus est expliquée et justifiée. Des résultats numériques provenant de calculs complets réalisés sur Europlexus sont comparés avec ceux obtenus par la co-simulation.

---

# 2

## Etat de l'art des méthodes multi-échelles en temps

*Ce premier chapitre présente les différents outils nécessaires pour étudier la dynamique d'un corps déformable. Tout d'abord, un problème de référence est présenté afin de décrire les équations de la dynamique pour un problème mécanique. Ensuite, la méthode des éléments finis est appliquée pour chercher une solution approchée au problème de référence dans le domaine spatial. De la même manière, plusieurs méthodes de discrétisation temporelle sont présentées pour également obtenir une réponse approchée dans le domaine temporel. Enfin, les méthodes permettant la décomposition d'un domaine en plusieurs sous-domaines sont détaillées.*

## Sommaire

---

2.1	Problème de référence . . . . .	<b>23</b>
2.2	Discrétisation en espace . . . . .	<b>25</b>
2.3	Discrétisation en temps . . . . .	<b>27</b>
2.3.1	Schémas de Newmark . . . . .	28
2.3.2	Schéma $\alpha$ -généralisé . . . . .	41
2.4	Méthode de décomposition de domaine . . . . .	<b>43</b>
2.4.1	Méthodes avec recouvrement . . . . .	45
2.4.2	Méthodes sans recouvrement . . . . .	46
2.5	Méthodes multi-échelles en temps . . . . .	<b>49</b>
2.6	Conclusion & motivation . . . . .	<b>52</b>

---



## 2.1 Problème de référence

Le problème de référence est défini sur  $\Omega$  un domaine fermé de  $\mathbb{R}^3$  avec  $\partial\Omega$  correspondant à la frontière. Les conditions limites de type Neumann et Dirichlet, représentées par les indices suivants  $N$  et  $D$ , sont appliquées au domaine  $\Omega$  (avec  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$  ;  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ ). Le cas étudié ici est un matériau homogène, isotrope et élastique. Le comportement mécanique du domaine  $\Omega$  est défini par les équations aux dérivées partielles suivantes : quantité de mouvement, moment cinétique, loi contrainte-déformation, conditions limites et conditions initiales. Les principales inconnues sont le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le tenseur des contraintes symétriques  $\boldsymbol{\sigma}$  en tout point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$  et pour tout instant  $t \in [t_0; t_f]$  :

1. Equation d'équilibre dynamique :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } [t_0, t_f] \times \Omega \quad (2.1)$$

2. Relation de comportement pour un matériau élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.2)$$

3. Mesure de déformation :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.3)$$

4. Les conditions limites :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{g} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = \mathbf{F} \quad (2.5)$$

5. Les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}^0 ; \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \dot{\mathbf{u}}^0 \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{f}$  le chargement extérieur appliqué au volume,  $\rho$  la masse volumique,  $\ddot{\mathbf{u}}$  le champ d'accélération,  $\mathbf{C}$  le tenseur de Hooke,  $\boldsymbol{\epsilon}$  le tenseur de déformation linéaire,  $\mathbf{g}$  le champ de déplacement imposé,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal au corps et pointant vers l'extérieur,  $\mathbf{F}$  le chargement extérieur appliqué à la surface,  $\mathbf{u}^0$  et  $\dot{\mathbf{u}}^0$  respectivement le déplacement initial et la vitesse initiale.

Le problème de référence présenté décrit un problème de mécanique. Dans la pratique, les problèmes rencontrés présentent de trop grandes complexités pour être résolus directement. Ces problèmes sont donc écrits sous leur forme faible en utilisant le principe des puissances virtuelles. Cette méthode conserve les propriétés du problème de référence présenté, mais

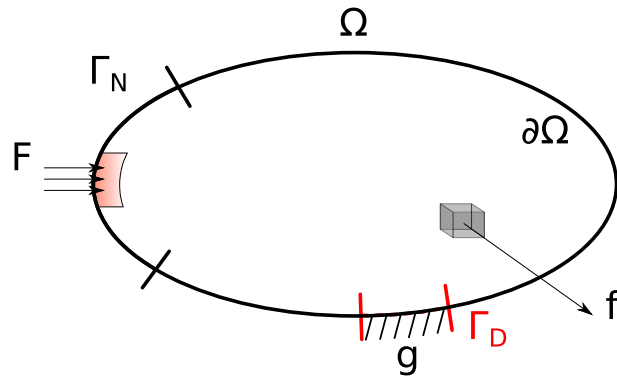


FIGURE 2.1 – Problème de mécanique de référence

a pour avantage d'être plus adaptée aux techniques de résolution approchées.

Le principe des puissances virtuelles est basé sur le principe fondamental de la dynamique multiplié par un vecteur virtuel  $\mathbf{v}$ , en intégrant sur le domaine  $\Omega$ . Le théorème de la divergence et  $\mathbf{v} = 0$  sur la frontière  $\Gamma_D$  donnent le résultat suivant :

$$\forall t \in [t_0; t_f] \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})] \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad (2.7)$$

La variable  $\mathbf{u}$  est définie sur le domaine  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega \times [t_0, t_F]) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \text{ sur } \Gamma_D \right\} \quad (2.8)$$

La variable  $\mathbf{v}$  est définie sur le domaine  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega \times [t_0, t_F]) \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} \quad (2.9)$$

Enfin, pour les champs précédents, on donne la définition du domaine de Sobolev  $H^1(\Omega)$  :

$$H^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{a} \in \Omega, \int_{\Omega} \|\mathbf{a}\|^2 dx < \infty, \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (2.10)$$

Le problème de référence est désormais exprimé sous forme faible (2.7) à partir de laquelle la discrétisation spatiale peut être introduite.

## 2.2 Discrétisation en espace

La complexité des comportements mécaniques et des géométries a entraîné le développement de méthodes de résolutions approchées permettant le traitement de problèmes pratiquement quelconques. Le problème initial est approché en discrétisant l'espace. Le domaine de la mécanique du solide adopte pour référence la méthode des éléments finis Lagrangienne (MEF) [Zie71] pour discrétiser en espace. Le domaine continu  $\Omega$  de dimension infinie est projeté sur un domaine approché et fini  $\Omega^h$ , discrétisé en espace tel que  $\Omega^h = \cup^e \Omega^e$ .

Le champ de déplacement est approché par la MEF comme ci-dessous :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \sim \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{X}) \mathbf{u}_i(t) \quad (2.11)$$

Le champ de déplacement est approximé par  $\mathbf{u}^h(\mathbf{X}, t)$ ;  $\phi_i(\mathbf{X})$  est la fonction de forme associée au degré de liberté  $\mathbf{u}_i(t)$ . Le domaine  $\mathcal{V}$  défini par l'équation (2.9) est également approximé par un domaine approché et fini  $\mathcal{V}^h$ . L'équilibre dynamique associé avec le principe des puissances virtuelles (2.7) peut s'écrire sous forme matricielle en réinjectant le champ de déplacement approximé (2.11) :

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0; t_f] \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ddot{\mathbf{u}}_i \left[ \int_{\Omega} \rho \phi_i \phi_j \, d\Omega \right] \mathbf{v}_j^h = - \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\Omega} \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon}\{\phi_i\}] \, d\Omega \right] \mathbf{v}_i^h \\ + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f} \phi_i \, d\Omega \right] \mathbf{v}_i^h + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\Gamma_N} \mathbf{F} \phi_i \, dS \right] \mathbf{v}_i^h \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) sous forme matricielle s'écrit :

$$\forall \mathbf{V}^h \in \mathcal{V}^h \quad \left( \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext} \right)^T \mathbf{V}^h = 0 \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des déplacements nodaux. La matrice de masse  $\mathbf{M}$ , le vecteur des efforts intérieurs généralisés  $\mathbf{F}^{int}$  et  $\mathbf{F}^{ext}$  le vecteur des forces externes sont construits par assemblage des éléments finis :

— Matrice de masse

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho^e \phi_i^e \phi_j^e \, d\Omega^e \quad (2.14)$$

— Vecteur des forces intérieures

$$\mathbf{F}_i^{int} = \sum_e \int_{\Omega^e} \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}^e \boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{\phi}_i^e)] d\Omega^e \quad (2.15)$$

— Vecteur des forces externes

$$\mathbf{F}_i^{ext} = \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e \boldsymbol{\phi}_i^e d\Omega^e + \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{F}^e \boldsymbol{\phi}_i^e dS^e \quad (2.16)$$

avec l'indice  $e$  représentant l'indice associé à un élément fini et la somme  $\sum_e$  représentant l'assemblage sur l'ensemble des éléments finis du domaine  $\Omega^h$  afin d'obtenir un résultat global sur le domaine. Si le cas d'étude porte sur un matériau élastique linéaire, alors le vecteur des efforts intérieurs généralisés  $\mathbf{F}^{int}$  peut être détaillé sous la forme d'un produit matriciel entre la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (2.17)$$

avec

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} \text{Tr}[\mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{\phi}_i^e) \boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{\phi}_j^e)] d\Omega^e \quad (2.18)$$

Enfin, le problème mécanique pour des milieux continus est obtenu à partir de la formulation faible discrétisée en espace par la Méthode des Éléments Finis :

$$\forall t \in [t_0; t_f], \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}^{ext}(t) \quad (2.19)$$

avec pour conditions aux limites (2.4) et initiales (2.6) écrites sous la forme discrète :

$$\forall t \in [t_0; t_f] \text{ et } \mathbf{U} \in \mathcal{U}^h \quad \mathbf{L}^D \mathbf{U} = \mathbf{G} \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{L}^D$  est l'opérateur d'interface de Dirichlet permettant de sélectionner les degrés de liberté concernés par la condition limite.  $\mathbf{G}$  est le vecteur de déplacements nodaux imposés.

$$\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}^0 \quad \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}^0 \quad (2.21)$$

avec  $\mathbf{U}^0$  et  $\dot{\mathbf{U}}^0$  respectivement le déplacement nodal initial et la vitesse nodale initiale. L'équation de l'équilibre dynamique (2.19) est semi-discrétisée en espace. La discrétisation temporelle est détaillée dans la partie suivante.

## 2.3 Discrétisation en temps

La méthode des éléments finis permet d'obtenir une équation d'équilibre semi-discrétisée en espace suffisante pour la résolution de problèmes statiques. La résolution de problèmes dynamiques demande la prise en considération de la variable temporelle pour décrire une solution dépendante du temps. Les méthodes d'intégration temporelle sont utilisées pour résoudre en temps ces problèmes en divisant l'intervalle de temps considéré  $[t_0, t_f]$  en un nombre fini de sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$ . La solution finale du problème sera définie en temps seulement sur ces instants  $t_n$  appartenant aux différents sous-intervalles. Pour les résolutions des cas statiques, les déplacements aux noeuds étaient les seules inconnues. En dynamique, il devient nécessaire de calculer les vitesses et accélérations aux noeuds. La solution à l'instant  $t_n$  est définie par les trois quantités cinématiques :

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}(t_n); \quad \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}(t_n); \quad \ddot{\mathbf{U}}_n = \ddot{\mathbf{U}}(t_n) \quad (2.22)$$

Cette solution à l'instant  $t_n$  est calculée à partir de la solution de l'instant précédent (méthode à un pas), ou à partir de solutions de plusieurs instants antérieurs (méthode multi-pas). Ces méthodes d'intégration temporelle sont aussi appelées schémas temporels. Ces méthodes d'intégration temporelle sont réparties en deux catégories : les schémas explicites et les schémas implicites.

Les schémas explicites sont utilisés pour des phénomènes non-linéaires comme des chocs, où les modes hautes fréquences impactent fortement la réponse globale du système. Ces schémas effectuent les calculs à chaque pas de temps pour un faible coût de calcul, qui s'explique par une inversion de matrice directe du fait du caractère diagonal de la matrice de masse. Néanmoins, les méthodes explicites sont conditionnellement stables, nécessitant de calculer au sein de domaines prédéfinis un pas de discrétisation qui permet d'assurer la propriété de stabilité de ces schémas [condition CFL[CFL28]]. Les schémas implicites [HOU50; New59; WFB72; CH93] impliquent des techniques de résolution itératives coûteuses en temps de calcul. En revanche, ils ont l'avantage d'être inconditionnellement stables. Leurs pas de discrétisation ne sont donc pas bornés à un domaine d'utilisation prédéfini, mais sont seulement contraints par la précision requise.

Ces schémas sont caractérisés par plusieurs paramètres : la précision, la consistance, l'ordre de convergence et la stabilité. La convergence de ces méthodes d'intégration temporelle vers la solution exacte du problème approximé est assurée par le théorème de Lax [LR56] : la méthode choisie est convergente si la méthode est stable et consistante.

Il existe d'autres méthodes d'intégration temporelle, qui en introduisant de la dissipation numérique répondent aux problèmes des modes hautes fréquences parasites. En effet, l'inté-

gration temporelle des équations de l'équilibre dynamique semi-discrétisée peut engendrer des modes hautes fréquences dûs à la discrétisation spatiale. Ces méthodes d'intégration temporelle implicite sont conçues pour amortir ces oscillations hautes fréquences artificielles tout en conservant les modes basses fréquences. Plusieurs schémas implicites dissipatifs conservant le second ordre existent comme la méthode Hilber-Hughes-Taylor (HHT- $\alpha$ ) [HHT77a] avec pondération sur les forces internes, la méthode Wood-Bossak-Zienkiewicz (WBZ- $\alpha$ ) [WBZ80] avec pondération sur les efforts d'inertie et la méthode Chung-Hulbert (CH- $\alpha$ ) [CH93]. La méthode  $\alpha$ -généralisé (CH- $\alpha$ ) est une écriture plus générale incluant les méthodes HHT- $\alpha$  et WBZ- $\alpha$ . Ces méthodes abordent la problématique des hautes fréquences engendrées par la discrétisation spatiale en introduisant parfois de l'énergie numérique, ce qui peut altérer le résultat. D'autres schémas d'intégration temporelle traitent également de l'apparition de ces hautes fréquences tout en préservant la conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie, tel que l'algorithme EMCA (Energy Momentum Conserving Algorithms) [STW92], développé par Simo et Tarnow, qui vérifie les équations du mouvement à mi-chemin de chaque pas de temps  $t_{n+\frac{1}{2}}$  et possède une stabilité inconditionnelle. La conservation exacte de l'énergie est un sujet de recherche très actif avec les travaux de Krenk [Kre08 ; Kre06a ; Kre06b]. Ces algorithmes ont pour vocation de conserver l'énergie, d'assurer des ordres de convergences élevés tout en dissipant les hautes fréquences sans altérer les basses fréquences.

### 2.3.1 Schémas de Newmark

La méthode d'intégration en temps pour la résolution du problème dynamique certainement la plus utilisée aujourd'hui provient de Newmark [New59]. La discrétisation temporelle de l'équation d'équilibre dynamique semi-discrétisée en espace s'écrit :

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}^{ext}(t) \quad (2.23)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur et  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement introduite ici pour définir un cas plus général. L'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  est divisé en un nombre fini de pas de temps tel que :  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots < t_f$  et un pas de temps  $h = t_{n+1} - t_n$  supposé constant. La famille des schémas de Newmark constitue des méthodes d'intégration à un pas, les quantités relatives à chaque piquet de temps  $t_{n+1}$  sont calculées en fonction de celles qui les précèdent (en  $t_n$ ) et des efforts extérieurs entre ces deux instants. Par un développement en série de Taylor à l'ordre 2, les déplacements et vitesses sont définis en fonction de l'intégrale de l'accélération sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . L'intégrale de l'accélération est calculée à partir de l'équation d'équilibre (2.23). Il est possible d'exprimer

les déplacements  $\mathbf{U}(t_n + h)$  au temps  $t_{n+1}$ , en fonction des déplacements  $\mathbf{U}(t_n)$  au temps  $t_n$ .

$$\mathbf{U}(t_n + h) = \mathbf{U}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

Le facteur 1 est pris en compte sous le signe intégral et on utilise une intégration par partie. Comme la primitive du facteur 1 est  $(\tau - t_{n+1})$ , le résultat de l'intégration par partie donne :

$$\mathbf{U}(t_n + h) = \mathbf{U}(t_n) + \left[ (t_{n+1} - \tau) \dot{\mathbf{U}}_n \right]_{t_n}^{t_{n+1}} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(\tau) (t_{n+1} - \tau) d\tau \quad (2.25)$$

Finalement, la borne supérieure du terme entre crochet a une valeur égale à zéro dans l'expression des déplacements au temps  $t_{n+1}$ . Le terme restant  $(t_{n+1} - t_n)$  est la définition du pas de discrétisation  $h$ . La définition des vitesses à l'instant  $t_{n+1}$  suit la même expression que celle des déplacements (2.24) :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(\tau) (t_{n+1} - \tau) d\tau \quad (2.27)$$

Les accélérations ne sont pas connues au moment du calcul sur l'intervalle de temps. Les intégrales sont approximées en utilisant une pondération [GR97] faisant intervenir les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Ces paramètres sont utilisés dans les schémas de Newmark :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \simeq (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma h \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.28)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \simeq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{\mathbf{U}}_n + \beta h^2 \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.29)$$

Les paramètres  $0 < \gamma < 1$  et  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  expriment le degré de pondération des accélérations. Finalement en implémentant cette dernière relation dans les relations (2.26) et (2.27), la vitesse, le déplacement et l'accélération sont maintenant reliés au cours du temps :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma h \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h \dot{\mathbf{U}}_n + h^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{U}}_n + h^2 \beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.31)$$

Il est maintenant possible d'exprimer l'équilibre dynamique (2.23) à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de l'accélération à l'instant  $t_{n+1}$  en substituant les relations (2.30), (2.31) dans (2.23) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \gamma h \mathbf{C} + \beta h^2 \mathbf{K}) \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = & \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{C} \left( \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{U}}_n \right) \\ & - \mathbf{K} \left( \mathbf{U}_n + h \dot{\mathbf{U}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

L'une des méthodes utilisées pour implémenter les schémas de Newmark est la méthode prédicteur-correcteur. Pour plus de clarté, les prédicteurs vitesses  ${}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  et les prédicteurs déplacements  ${}^P\mathbf{U}_{n+1}$  sont définis par :

$${}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.33)$$

$${}^P\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h \dot{\mathbf{U}}_n + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.34)$$

Les prédicteurs ne dépendent que des termes à l'instant  $t_n$ . Les relations (2.30) et (2.31) deviennent :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \gamma h \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = {}^P\mathbf{U}_{n+1} + h^2 \beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.36)$$

Finalement, en substituant les relations (2.35) et (2.36) dans l'équation (2.32), celle-ci devient :

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{C} {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \mathbf{K} {}^P\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.37)$$

avec  $\tilde{\mathbf{M}}$  la matrice de masse effective :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma h \mathbf{C} + \beta h^2 \mathbf{K} \quad (2.38)$$

Le couple de paramètres  $(\gamma, \beta)$  influe directement sur le comportement de l'algorithme de Newmark comme le montrent les équations (2.37), (2.36), (2.35). Une étude détaillée est nécessaire afin de déterminer les propriétés des schémas de la famille de Newmark. La convergence est un critère important. La convergence est assurée si et seulement si les propriétés de stabilité et de consistance sont satisfaites [LR56 ; Hug87]. Les vecteurs d'état  $\mathbf{X}_n^T = [\dot{\mathbf{U}}_n^T \ \mathbf{U}_n^T]$  à l'instant  $t_n$  et  $\mathbf{X}_{n+1}^T$  à l'instant  $t_{n+1}$  sont introduits pour l'étude de convergence.



### Consistance

La consistance d'un schéma est étudiée en comparant l'état du système à deux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . La consistance d'un schéma d'intégration est vérifiée si la solution approximée tend vers la solution exacte lorsque le pas de temps  $h$  tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{h} = \dot{\mathbf{X}}(t_n) \quad (2.39)$$

La famille des schémas de Newmark vérifie cette relation (2.39) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{bmatrix} (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_n + h(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\mathbf{U}}_n + h\beta\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \dot{\mathbf{U}}_n \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La propriété de consistance est vérifiée (2.40), pour toutes valeurs  $\gamma$  et  $\beta$ . Cette condition est nécessaire la convergence de la solution numérique vers la solution exacte quand le pas de temps  $h$  tend vers 0.

### Stabilité

Un schéma d'intégration est dit stable s'il existe un pas d'intégration  $h_0 > 0$  tel que  $\forall h \in [0, h_0]$ , une perturbation finie du vecteur d'état  $\mathbf{X}_n$  à l'instant  $t_n$  n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état  $\mathbf{X}_{n+1}$  à l'instant ultérieur  $t_{n+1}$ . La méthode la plus utilisée pour évaluer la stabilité d'un schéma d'intégration est l'étude spectrale [GR97 ; HHT77b] d'un système linéaire non amorti entre deux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$ . L'analyse spectrale étudie les vecteurs propres de la matrice d'amplification :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n \quad (2.41)$$

L'obtention de la relation (2.41) passe par la multiplication des relations (2.30) et (2.31) par la matrice de masse  $\mathbf{M}$ . Par la relation d'équilibre dynamique (2.37) à l'instant  $t_{n+1}$ , il est possible de substituer les termes  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$  et  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n$  afin d'avoir une relation de récurrence ne dépendant que des variables composant les vecteurs d'état :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma h \mathbf{K} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{K} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\gamma - 1)h \mathbf{K} & \mathbf{M} \\ (\beta - \frac{1}{2})h^2 \mathbf{K} - \mathbf{M} & h \mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \dot{\mathbf{U}}_n \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Pour effectuer l'analyse spectrale, le système est découplé et appliqué à un seul mode  $j$  de coordonnées modales  $[u(t), \dot{u}(t)]$ . Le système est multiplié par  $\mathbf{M}^{-1}$ . La fréquence naturelle est représentée par  $\omega$  et est adimensionnée, ce qui donne  $\Omega = h\omega$ . Dans cette étude, l'amortissement et la force extérieure ne sont pas considérés. Nous obtenons alors

une récurrence de la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma\Omega_j^2 & 1 \\ 1 + \beta\Omega_j^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ h\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\gamma - 1)\Omega_j^2 & 1 \\ (\beta - \frac{1}{2})\Omega_j^2 - 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ h\dot{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Finalement, la matrice d'amplification  $\mathbf{A}$  s'obtient à partir de (2.43), avec  $\mathbf{A} = \mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{H}_1$ , telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ h\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ h\dot{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Par l'étude du déterminant de la matrice d'amplification  $\mathbf{A}$ ,  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ , l'équation caractéristique est obtenue :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda \left( 2 - \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) + 1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \quad (2.45)$$

avec  $\zeta^2 = \frac{\Omega^2}{1 + \beta\Omega^2}$

La condition de stabilité, obtenue par la valeur de la norme du rayon spectrale  $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ , dépend des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Afin d'assurer la stabilité, le signe du déterminant doit être négatif  $\Delta \leq 0$  :

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\Omega} \quad (2.46)$$

On a alors une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui s'écrit :

$$\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\phi} \quad (2.47)$$

avec  $\rho$  et  $\phi$  définis comme :

$$\rho = \sqrt{1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2} \quad (2.48)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\zeta \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \zeta^2}}{1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2} \right) \quad (2.49)$$

Les propriétés du schéma de Newmark sont déterminées grâce aux équations (2.46) et

(2.48). Elles sont résumées ci-dessous et illustrées par la Figure (2.2).

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \text{ et } \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \beta \text{ Schéma inconditionnellement stable} \quad (2.50a)$$

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \text{ et } \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 > \beta \text{ Schéma stable si } h \leq h_c = \frac{1}{\omega_{jmax} \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \quad (2.50b)$$

avec  $\omega_{jmax}$  la plus grande fréquence propre du système discrétisé. Cette valeur est habituellement associée à la plus grande valeur fréquence propre du plus petit élément (si le matériau est homogène).

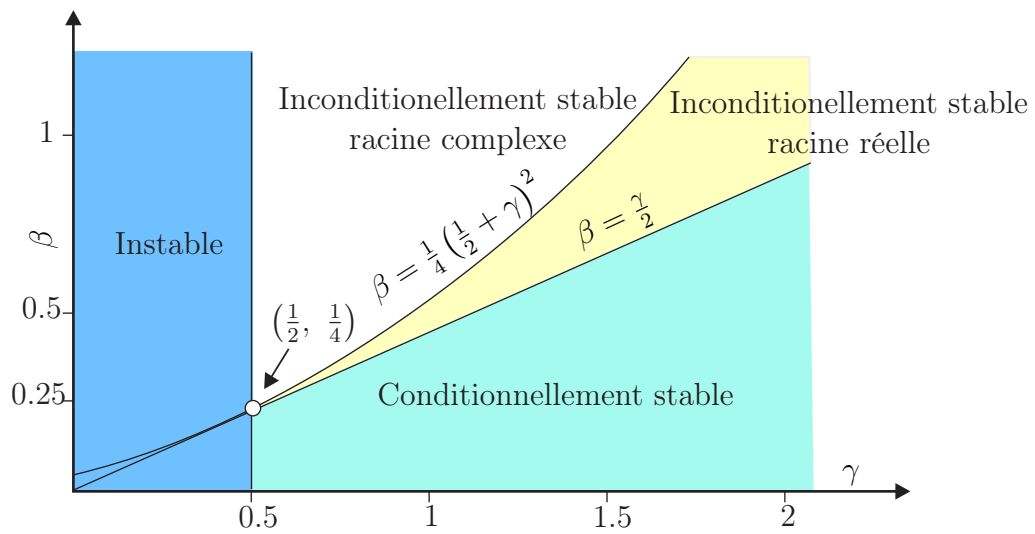


FIGURE 2.2 – Stabilité du schéma de Newmark

Le schéma de Newmark devient instable si  $\gamma < \frac{1}{2}$  et  $\forall \beta$  d'après l'équation (2.48). En effet, le rayon spectral  $\rho(\mathbf{A}) > 1$  introduit de l'énergie au schéma. D'après l'équation (2.48), pour qu'un schéma de Newmark puisse avoir des propriétés de stabilité, la condition  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  doit être satisfaite. La valeur du deuxième paramètre  $\beta$  définit le domaine de stabilité du schéma. Le schéma de Newmark devient conditionnellement stable (2.50b) si  $\beta < \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$ . La condition de stabilité revient ici à ne pas dépasser un pas de temps critique maximal :  $h \leq h_c = \frac{1}{\omega_{jmax} \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}}$ . Le cas particulier  $\beta = 0$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$ , aussi appelé différence centrée, est un schéma de Newmark dit explicite si la matrice de masse peut s'écrire comme une matrice diagonale, aussi appelée matrice de masse lumpée [ZTZ05 ; GR15 ; BLM00 ; Wu06] et ceci en assumant par ailleurs la conservation de la masse. Ce schéma de Newmark est stable, si et seulement si, la valeur maximale du pas de temps  $h \leq h_c = \frac{2}{\omega_{max}}$  (condition de CFL donnée par COURANT, FRIEDRICHS et LEWY [CFL28]).

Le schéma de Newmark est inconditionnellement stable (2.50a) si  $\beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$ . Dans

cette famille de schéma de Newmark, le schéma de Newmark implicite (appelé schéma de l'accélération moyenne) existe pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  et est de précision maximale.

Le Tableau 2.1 résume les propriétés de plusieurs algorithmes de la familles de Newmark :

Nom de la méthode	$\gamma$	$\beta$	Limite de stabilité $\omega h$
Différence centrée	1/2	0	2
Fox Goodwin	1/2	1/12	$\sqrt{6}$
Accélération linéaire	1/2	1/6	$2\sqrt{3}$
Accélération moyenne	1/2	1/4	$\infty$

TABLEAU 2.1 – Présentation d'algorithmes de la famille des schémas de Newmark

### Méthode énergétique

L'étude de la stabilité d'un schéma d'intégration temporelle peut aussi être menée par une étude énergétique d'un système [Hug87 ; KH05 ; Kre06a]. En effet, le bilan énergétique permet de déduire l'évolution de l'énergie d'un système et par conséquent l'amortissement numérique si le schéma d'intégration est dissipatif. Le bilan énergétique associé à un système élastique linéaire s'obtient en multipliant l'équation d'équilibre dynamique semi-discrétisée (2.23) par les vitesses  $\dot{\mathbf{U}}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}^{ext} - \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} \quad (2.51)$$

L'équation (2.51) représente la variation de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}$  en fonction de la variation des efforts extérieurs et de la variation de l'énergie dissipée décrite par la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$ .

$$\mathcal{E} = E_c + E_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.52)$$

avec  $E_c$  et  $E_p$  désignant l'énergie cinétique et l'énergie de déformation élastique, respectivement. L'évolution du bilan énergétique discrétisé (2.51) entre deux instants s'écrit  $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n$ . Dans le contexte continu en temps, et sans l'influence des forces extérieures  $\mathbf{F} = 0$  et de l'amortissement introduit par la matrice  $\mathbf{C}$ , l'énergie mécanique du système est conservée. Cependant les propriétés du schéma d'intégration temporelle peuvent modifier cette propriété. On distingue trois alternatives :

- $\Delta \mathcal{E} > 0$ , le schéma numérique introduit de l'énergie numérique supplémentaire au système. Ce comportement, non physique, traduit une instabilité du schéma numérique utilisé.

- $\Delta\mathcal{E} = 0$ , le schéma numérique est conservatif. Il ne perturbe pas le bilan énergétique globale du système.
- $\Delta\mathcal{E} < 0$ , le schéma numérique introduit de la dissipation numérique qui se traduit par une diminution du bilan énergétique global du système au cours du temps.

La forme discrète de l'équation du bilan énergétique s'écrit comme un incrément de l'énergie mécanique sur l'intervalle de temps entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Cet incrément peut être exprimé en termes de valeurs moyennes et d'incrément du déplacement et de la vitesse par l'identité suivante [Hug87] :

$$\left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} = \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] + \langle \mathbf{U}_n \rangle^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_n] \quad (2.53)$$

Afin de simplifier le développement, deux opérateurs ont été introduits dans l'équation précédente. L'opérateur de différence directe et l'opérateur de valeur moyenne, comme indiqué ci-dessous :

$$[\mathbf{U}_n] = \mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1} \quad (2.54)$$

$$\langle \mathbf{U}_n \rangle = \frac{\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n-1}}{2} \quad (2.55)$$

Avec les nouveaux opérateurs différence (2.54) et valeur moyenne (2.55), les incréments de vitesse pour les schémas de Newmark (2.30) et (2.31) s'écrivent [KH05 ; Kre06a] :

$$[\dot{\mathbf{U}}_n] = h \langle \ddot{\mathbf{U}}_n \rangle + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) h [\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.56)$$

$$[\mathbf{U}_n] = h \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) h^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.57)$$

En substituant les incréments de vitesses et de déplacements dans (2.53) avec les relations de Newmark (2.56) et (2.57) et en utilisant l'équation d'équilibre pour faire apparaître la contribution des efforts extérieurs  $\mathbf{F}^{ext}$ , l'équation devient :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} &= h \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle + h \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \\ &\quad + \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) \langle \mathbf{U}_n \rangle^T \mathbf{K} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \end{aligned} \quad (2.58)$$

où  $\langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle$  est définie selon la définition (2.55). Afin de réduire les termes de cette équation d'équilibre à des formes quadratiques, le terme  $h \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T$  dans le premier terme du côté droit du signe égal est éliminé en utilisant la définition de l'incrément de déplacement (2.57) :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} &= [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle + h \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \\ &+ \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T (\mathbf{K} \langle \mathbf{U}_n \rangle^T - \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Les termes  $\mathbf{K} \langle \mathbf{U}_n \rangle^T - \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle$  peuvent être remplacés par  $\mathbf{M} \langle \ddot{\mathbf{U}}_n \rangle^T$  en utilisant l'équation d'équilibre dynamique (2.23). Finalement ce terme s'écrit sous forme incrémentale et peut se mettre dans la partie gauche de l'équation :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} &= \\ [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle + h \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le terme  $\langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T$  est substitué à l'équation ci-dessus en utilisant la définition de l'incrément de vitesse (2.56) :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} &= \\ [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle + h \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) [\mathbf{U}_n]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] - \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \end{aligned} \quad (2.61)$$

La dernière étape du développement consiste à simplifier le deuxième terme se situant à droite du signe égal en utilisant l'équation de mouvement (2.23). Cette simplification génère un terme relatif aux forces extérieures regroupées dans le premier terme et un terme quadratique relatif à la matrice de rigidité :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} &= \\ [\mathbf{U}_n]^T \left( \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) [\mathbf{F}^{ext}] \right) - \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \left( \frac{h^2}{2} (2\beta - \gamma) [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] + [\mathbf{U}_n]^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_n] \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Le bilan énergétique défini dans la relation (2.62) permet d'obtenir la relation pour un incrément du travail des efforts extérieurs :

$$\Delta W_{ext} = [\mathbf{U}_n]^T \left( \langle \mathbf{F}_n^{ext} \rangle + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) [\mathbf{F}^{ext}] \right) \quad (2.63)$$

L'étude de la stabilité par la méthode énergétique développée par [Kre06a] part de l'expression du bilan énergétique (2.62) pour une force extérieure nulle  $\mathbf{F}^{ext} = 0$  afin d'étudier les vibrations libres. En exprimant les incréments d'accélération en termes d'incrément de déplacement à l'aide de l'équation homogène du mouvement  $\mathbf{F}^{ext} = 0$ , l'expression du bilan énergétique devient :

$$\left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{eq} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} = - \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) [\mathbf{U}_n]^T \mathbf{K}_{eq} [\mathbf{U}_n] \quad (2.64)$$

où la matrice  $\mathbf{K}_{eq}$  est la matrice de rigidité équivalente donnée par :

$$\mathbf{K}_{eq} = \mathbf{K} + h^2 \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad (2.65)$$

Pour que l'algorithme soit stable, les termes entre crochets à gauche du signe égal doivent être définis positifs et les termes à droite de l'équation doivent être nuls ou fournir une dissipation. Ces conditions sont satisfaites pour le couple de paramètres  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ . Le terme de droite doit être négatif ou nul pour des raisons de stabilité ce qui implique  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . Si le paramètre  $\gamma > \frac{1}{2}$  alors de l'amortissement numérique est introduit dans le schéma numérique. La matrice  $\mathbf{K}_{eq}$  doit être définie positive pour assurer la stabilité. On a alors la condition  $\beta \geq \frac{\gamma}{2}$ . Les propriétés du schéma de Newmark inconditionnellement stable sont retrouvées sous une autre forme :

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta \quad (2.66)$$

La condition (2.66) sur le paramètre  $\beta$  peut être relaxée pour obtenir une relation dépendante d'un pas de temps critique  $h_c$  permettant d'assurer que la matrice de rigidité équivalente  $\mathbf{K}_{eq}$  est définie positive. Le pas de temps critique  $h_c$  dépend du comportement de la structure décrite par la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et la matrice de masse  $\mathbf{M}$ . La solution du problème est exprimée en fonction des modes propres de la structure  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_m$  :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{j=1}^m u_j(t) \mathbf{U}_j \quad (2.67)$$

où  $u_j(t)$  représente les coordonnées modales décrivant la dépendance au temps de la solution décrite pour le modes propre  $\mathbf{U}_j$ . La solution du problème de vibration libre est donnée par :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_j e^{i\omega_j t} \quad (2.68)$$

avec  $i$  le nombre complexe imaginaire défini tel que  $i^2 = -1$  et  $\omega_j$  la pulsation propre associée au mode propre  $j$ . En substituant la relation (2.68) dans l'équation du mouvement d'un système libre non amorti, l'équation aux valeurs propres suivantes apparaît :

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_j = 0 \quad (2.69)$$

Les modes propres satisfont les conditions d'orthogonalité par rapport à la fois à la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et à la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  :

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{M} \mathbf{U}_k = \delta_{jk} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{K} \mathbf{U}_k = \omega_j^2 \delta_{jk} \quad (2.71)$$

avec  $\delta_{jk}$  représentant le symbole de Kronecker. L'orthogonalité de modes propres permet de traiter de manière indépendante chaque mode. En remplaçant la solution modale (2.67) dans le bilan énergétique, pour chaque mode  $j$ , une équation énergétique est définie :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u}_j^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) (\omega_j h)^2 \right) \omega_j^2 \mathbf{u}_j^2 \right]_n^{n+1} = \\ & - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) (\omega_j h)^2 \right) \omega_j^2 \Delta(\mathbf{u}_j)^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

L'équation (2.72) met en évidence que le terme relatif à la rigidité  $\omega_j^2$  est remplacé par un terme provenant de la rigidité équivalente  $\left( 1 + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) (\omega_j h)^2 \right) \omega_j^2$ . Ce terme doit être positif pour tous les modes  $j$  :

$$\forall j \quad \left( 1 + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) (\omega_j h)^2 \right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 \leq \frac{1}{\omega_j^2 \left( \frac{\gamma}{2} - \beta \right)} \quad (2.73)$$

Cette condition sur le pas de temps doit être satisfaite pour tous les modes  $j$ . Il en résulte que le pas de temps  $h$  est majoré par un pas de temps critique  $h_c$  représentant la condition de stabilité pour la plus haute fréquence du système pour assurer la stabilité du schéma sur tout le domaine fréquentiel. Finalement, la condition de stabilité définie dans l'équation (2.50b) est retrouvée :

$$h \leq h_c = \frac{1}{\omega_{jmax} \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \quad (2.74)$$

En s'appuyant sur les deux études, si  $\gamma < \frac{1}{2}$  alors les schémas de Newmark introduisent une dissipation numérique et une instabilité au schéma. Une étude plus complète [Hug87 ;



[GR15] sur les schémas de Newmark montre que si  $\gamma \neq \frac{1}{2}$  alors l'algorithme a une précision d'ordre 1, et si  $\gamma = \frac{1}{2}$  alors la précision de l'algorithme est du second ordre.

### Erreur d'amplitude et de périodicité

Lors de l'utilisation de schémas d'intégration temporelle pour résoudre des problèmes dynamiques, il est important de s'assurer que la solution numérique obtenue est suffisamment précise. Deux des critères de précision les plus couramment utilisés sont l'erreur d'amplitude et l'erreur de périodicité.

L'erreur d'amplitude se réfère à la différence entre l'amplitude de la solution numérique et celle de la solution exacte du problème. Cette erreur peut être due à plusieurs facteurs, notamment à la discrétisation temporelle, à l'erreur d'arrondi et à l'erreur de troncature. Les schémas d'intégration temporelle, tels que les schémas de Newmark, peuvent introduire des erreurs d'amplitude qui peuvent affecter la précision de la solution numérique. Gérardin *et al.* [GR97] définissent l'erreur d'amplitude pour les schémas de Newmark comme étant :

$$\rho - 1 = -\frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \Omega^2 + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.75)$$

L'erreur de périodicité, quant à elle, se réfère à la capacité du schéma d'intégration temporelle à reproduire des solutions périodiques avec la bonne période et la bonne amplitude. Cette erreur peut être causée par des erreurs d'approximation dans les formules de discrétisation temporelle ou par des erreurs numériques telles que l'accumulation d'erreurs d'arrondi. L'erreur de périodicité est définie pour les schémas de Newmark comme suit [GR97] :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega h}{\phi} - 1 = -\frac{1}{2} \left( \beta - \frac{1}{12} \right) \Omega^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (2.76)$$

L'ordre de précision des schémas de Newmark peut se calculer à partir de différents paramètres, cinématiques (déplacement, vitesse, accélération) mais aussi à partir des relations (2.75) et (2.76) faisant référence aux erreurs d'amplitude et de périodicité. L'ordre de précision atteint par les schémas de Newmark en fonction des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  :

- Schéma de Newmark précis à l'ordre 1 si  $\gamma \neq \frac{1}{2}$  et  $\forall \beta$
- Schéma de Newmark précis à l'ordre 2 si  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta \neq \frac{1}{12}$
- Schéma de Newmark précis à l'ordre 3 si  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{12}$

### Schéma de Newmark explicite : différence centrée

Les schémas de la famille de Newmark se déclinent en deux sous parties : les schémas implicites et les schémas explicites. Pour illustrer le cas des schémas explicites, le schéma

de la différence centrée est étudié. Ce schéma a pour paramètres  $\beta = 0$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Par conséquent, les formules (2.35), (2.36) du schéma de la famille de Newmark deviennent :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = {}^P \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{2}h\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.77)$$

$${}^P \dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.78)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = {}^P \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.79)$$

**Remarque :** on peut noter ici le caractère "explicite" du schéma par le fait que le déplacement  $\mathbf{U}_{n+1}$  est connu avant d'avoir résolu l'équation du mouvement (très utile pour le contact et les grandes déformations).

Enfin l'équilibre dynamique discrétisé en espace et en temps s'écrit pour le schéma de la différence centrée :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{C}^P \dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.80)$$

avec  $\tilde{\mathbf{M}}$  la matrice de masse modifiée :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{lump} + \frac{1}{2}h\mathbf{C} \quad (2.81)$$

Pour le cas où l'amortissement n'est pas considéré  $\mathbf{C} = 0$ , alors l'équilibre dynamique (2.80) devient :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.82)$$

avec  $\mathbf{M}_{lump}$  la matrice de masse diagonalisée pour l'utilisation des schémas explicites [GR15 ; ZTZ05 ; BLM00 ; Wu06]. Le système (2.80) est devenu explicite avec les déplacements ne dépendant que des déplacements calculés au temps précédents  $t_n$ . Les vitesses quant à elles dépendent des vitesses à l'instant  $t_{n+1}$ , cependant l'amortissement n'étant pas considéré, la matrice de masse modifiée est directement la matrice de masse lumpée  $\mathbf{M}_{lump}$ .

La résolution de ce système demande une inversion de la matrice de masse, résultat trivial du fait de la diagonalité de la matrice de masse. La conséquence directe est la réduction du temps de calcul pour résoudre ce système pour un pas de temps explicite. La contrepartie à considérer pour l'utilisation de ce schéma, expliquée pendant l'analyse de stabilité du schéma de Newmark 2.3.1, est la perte de stabilité si le pas de temps (2.74) choisi n'est pas inférieur au pas de temps critique  $h < h_c$ .

**Remarque :** en présence d'amortissement (2.81) soit on considère  $\mathbf{C} = \delta\mathbf{M}_{lump}$ , soit on utilise l'approximation de Belytschko [BLM00] :

$$\mathbf{M}_{lump}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} \quad (2.83)$$

$$\text{avec } \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{h}$$

### 2.3.2 Schéma $\alpha$ -généralisé

Dans le but de réduire les instabilités numériques causées par les hautes fréquences, l'algorithme de Newmark permet d'introduire une dissipation numérique. Cette dissipation peut être introduite en utilisant Newmark avec  $\gamma > \frac{1}{2}$ , mais cela conduit à une précision du premier ordre par rapport au pas de temps. Pour obtenir une précision du second ordre, Hilber, Hughes et Taylor [HHT77a] ont proposé de pondérer les forces internes, tandis que Wood, Bossak et Zienkiewicz [WBZ80] ont proposé de pondérer les forces d'inertie plutôt que les forces internes. Chung et Hulbert [CH93] ont proposé de combiner ces deux méthodes. Les avantages de ces méthodes par rapport à l'algorithme dissipatif de Newmark sont la possibilité de minimiser la dissipation des basses fréquences et de maintenir la précision du second ordre. Le principe de la méthode consiste à pondérer les forces d'inertie entre les temps d'intégration à l'aide du paramètre  $\alpha_m$  et les forces internes et externes entre les temps d'intégration à l'aide du paramètre  $\alpha_f$ . Les relations de base entre les déplacements, les vitesses et les accélérations restent les mêmes que pour l'algorithme de Newmark. Cependant, l'équation d'équilibre est réécrite en pondérant les forces entre les temps d'intégration :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{F}_{n+\alpha_f}^{ext} \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{n+\alpha_f}^{ext} = (1 + \alpha_f)\mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \alpha_f\mathbf{F}_n^{ext} \\ \mathbf{U}_{n+\alpha_f} = (1 + \alpha_f)\mathbf{U}_{n+1} - \alpha_f\mathbf{U}_n \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_f} = (1 + \alpha_f)\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \alpha_f\dot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = (1 + \alpha_m)\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} - \alpha_m\ddot{\mathbf{U}}_n \end{cases} \quad (2.85)$$

Cette pondération revient à résoudre l'équation (2.84) à un instant dépendant des paramètres  $\alpha_f$  et  $\alpha_m$  tel que :  $t_{n+\alpha} = t_{n+1} + (1 + \alpha)h \mid \alpha \in [0; 1]$ .

La stabilité et la dissipation numérique du schéma d'intégration sont contrôlées par les paramètres  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_f$  et  $\alpha_m$ . Pour des valeurs particulières des paramètres  $\alpha_f$  et  $\alpha_m$ , le schéma  $\alpha$ -généralisé donne des schémas, déjà identifiés, de Newmark :

- Pour  $\alpha_m = \alpha_f = 0$ , le schéma de Newmark,
- Pour  $\alpha_f = 0$ , le schéma WBZ [WBZ80],
- Pour  $\alpha_m = 0$ , le schéma HHT [HHT77a].

Comme pour les schémas de la famille de Newmark, la méthode  $\alpha$ -généralisée est résolue par un algorithme prédicteur-correcteur en utilisant les mêmes relations liant les déplacements (2.31) et les vitesses (2.30) aux accélérations.

De la même manière que pour les schémas de la famille de Newmark, l'étude de la stabilité du schéma  $\alpha$ -généralisé permet de déterminer les propriétés et domaines d'utilisation. L'étude est menée par une analyse spectrale de la matrice d'amplification obtenue par les relations (2.30), (2.31) et (2.84) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ h\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ h^2\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ h\dot{\mathbf{u}}_n \\ h^2\ddot{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

avec  $\mathbf{A}$  la matrice d'amplification [GR15] :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 - \alpha_m - \alpha_f \beta \Omega^2 & 1 - \alpha_m & \frac{1}{2}(1 - 2\beta - \alpha_m) \\ -\gamma \Omega^2 & 1 - \alpha_m + (1 - \alpha_f)(\beta - \gamma)\Omega^2 & 1 - \alpha_m - \gamma - (1 - \alpha_f)\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -(1 - \alpha_f)\Omega^2 & (1 - \alpha_f)\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\Omega^2 - \alpha_m \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

avec  $D = 1 - \alpha_m + (1 - \alpha_f)\beta\Omega^2$

Les caractéristiques numériques de l'algorithme sont obtenues en suivant la même démarche que celle utilisée dans la section 3.3.2.2. Les résultats principaux sont présentés ici, mais pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux sources [CH93 ; HHT77a ; KC99]. En examinant les fréquences propres de la matrice, la stabilité inconditionnelle, également appelée A-stabilité, est obtenue en s'assurant que les valeurs propres sont imaginaires conjuguées [CH93 ; GR97]. Pour ce faire, il est nécessaire de vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma \geq \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \\ \alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \\ \beta \geq \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} + \gamma \right]^2 \end{cases} \quad (2.88)$$

La précision en second ordre en temps, étudiée par le facteur d'amortissement et la

périodicité, est obtenue en vérifiant [CH93] :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (2.89)$$

En étudiant le rayon spectral  $\rho$  (la valeur absolue maximale des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ ) lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, il est possible d'exprimer les paramètres d'intégration en fonction de  $\rho_\infty$  ( $\rho$  pour  $\Omega \rightarrow \infty$ ) pour maximiser la dissipation des hautes fréquences. En supposant que la condition (2.89) ait déjà été vérifiée, la condition qui doit être satisfaite est alors :

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (2.90)$$

Pour la méthode de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) avec  $\alpha_m = 0$  et la méthode de Wood-Bossak-Zienkiewicz (WBZ) avec  $\alpha_f = 0$ , les équations (2.89) et (2.90) permettent d'exprimer tous les paramètres en fonction de  $\rho_\infty$ . Cependant, pour le schéma  $\alpha$ -généralisé de Chung-Hulbert (CH), il est nécessaire d'établir une nouvelle relation reliant  $\alpha_m$  et  $\alpha_f$ . Cette relation est obtenue en minimisant la dissipation numérique des basses fréquences [CH93], ce qui réduit la perte de précision. La relation liant ces deux paramètres est exprimée comme :

$$\alpha_f = \frac{\alpha_m + 1}{3} \quad (2.91)$$

L'ensemble des paramètres d'intégration exprimés en fonction de  $\rho_\infty$  est synthétisé dans le Tableau 2.2. Les méthodes Chung-Hulbert et Wood-Bossak-Zienkiewicz peuvent se retrouver dans la situation où  $\rho_\infty = 0$  ce qui induit un amortissement des hautes fréquences en un pas de temps.

Nom de la méthode	$\alpha_m$	$\alpha_f$	$\beta$	$\gamma$	$\rho_\infty$
HHT	0	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{1}{4}(1 + \alpha_f)^2$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	$\rho_\infty \in [\frac{1}{2}, 1]$
WBZ	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	0	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_m)^2$	$\frac{1}{2} - \alpha_m$	$\rho_\infty \in [0, 1]$
CB	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$	$\frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m$	$\rho_\infty \in [0, 1]$

TABLEAU 2.2 – Propriétés des schémas  $\alpha$ -généralisés

## 2.4 Méthode de décomposition de domaine

La simulation numérique est devenue un outil clé pour la compréhension et la conception de structures et de systèmes mécaniques complexes. Cependant, la complexité et la taille

des problèmes considérés nécessitent souvent des ressources informatiques importantes, limitant ainsi la résolution du problème sur un seul ordinateur. Pour relever ce défi, les méthodes de décomposition de domaine ont été développées pour diviser le domaine de calcul en sous-domaines plus petits, qui peuvent être résolus simultanément sur plusieurs processeurs en utilisant des techniques de calcul parallèle. Les méthodes de décomposition de domaine permettent de réduire le temps de calcul et les coûts tout en offrant une haute précision de la solution. Les méthodes de décomposition de domaine répondent également à un autre besoin, la modélisation de phénomènes multi-physiques comme les interactions fluide-structure nécessitant deux modèles physiques distincts. Dans ce contexte, l'objectif de cette section est de présenter un aperçu des différentes méthodes de décomposition de domaine utilisées en mécanique numérique, les avantages et les inconvénients des méthodes avec recouvrement et sans recouvrement qui sont les deux principales approches pour la décomposition en sous-domaines.

La décomposition en sous-domaines est une méthode populaire pour résoudre des problèmes de grande taille en mécanique numérique [TW06 ; FR91a]. Elle consiste à subdiviser le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines, qui peuvent être résolus simultanément et indépendamment les uns des autres. Les méthodes de décomposition de domaine peuvent être classées en deux catégories principales : les méthodes avec recouvrement et les méthodes sans recouvrement [SBG96]. Les méthodes avec recouvrement, telles que la méthode de Schwarz et la méthode de Neumann-Neumann, ont été largement étudiées dans la littérature [Gan06]. D'un autre côté, les méthodes sans recouvrement, telles que la méthode de décomposition de domaine FETI (finite element tearing and interconnect), ont été développées plus récemment [FLL98]. Dans cette section, la discussion porte sur ces deux catégories de méthodes de décomposition de domaine et de leurs avantages et inconvénients respectifs.

La décomposition en plusieurs sous-domaines est illustrée dans la suite pour la résolution d'un système linéaire discrétisé en espace et en temps :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (2.92)$$

avec  $\mathbf{A}$  une matrice définie positive,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{B}$  deux vecteurs. Dans le cas d'un problème élastique linéaire discrétisé en temps par un schéma de Newmark, ces termes deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{K} \\ \mathbf{X} &= \ddot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{K}^p \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.93)$$

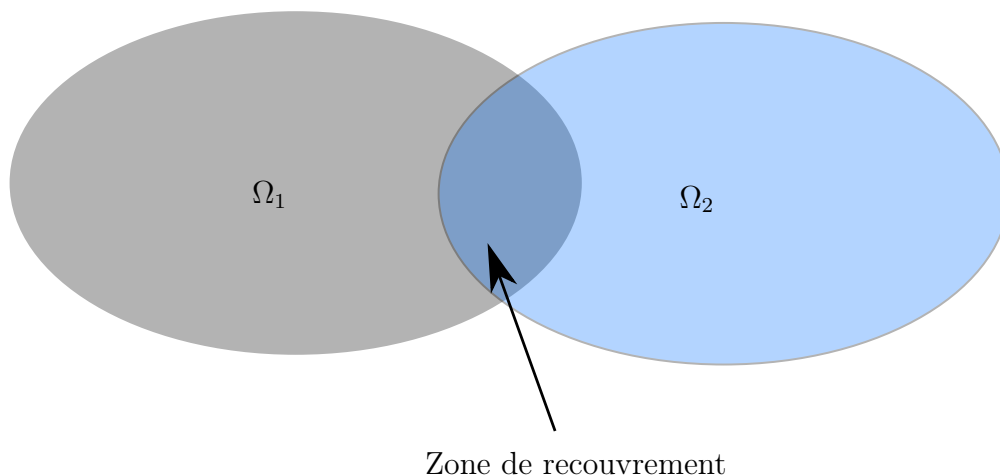
où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse et de rigidité,  $\mathbf{F}^{ext}$  est le vecteur des forces extérieures,  $\ddot{\mathbf{U}}$  le vecteur des accélérations. L'utilisation du schéma de Newmark fait intervenir le paramètre  $\beta$  et le vecteur des prédicteurs de déplacement  ${}^p\mathbf{U}$  (2.36). Ensuite, par la définition du problème dynamique (2.37) et le schéma de Newmark, toutes les quantités cinématiques sont liées entre elles. Enfin, ce système est développé pour deux sous-domaines. Les conclusions obtenues par la suite sont généralisables à un plus grand nombre de sous-domaines.

### 2.4.1 Méthodes avec recouvrement

Les méthodes de décomposition avec recouvrement considèrent un recouvrement partiel entre les sous-domaines comme le montre la Figure 2.3. Cette propriété est exprimée mathématiquement par la relation suivante :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{et} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset \quad (2.94)$$

Ce détail implique que les sous-domaines sont de même nature. La première méthode utilisant ce principe est la méthode de Schwarz [WT04], développée à l'origine pour résoudre le problème de Laplace. Elle consiste à résoudre une condition de Dirichlet à l'interface définie à partir de la résolution de l'autre sous-domaine. Étant une méthode itérative, un critère de convergence est à définir. L'inconvénient de cette méthode est la nécessité d'avoir un recouvrement des sous-domaines influençant directement la vitesse de convergence. Plus la zone de recouvrement est petite et plus la vitesse de convergence est lente. Si la zone de recouvrement devient égale à 0,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , alors l'algorithme ne converge plus comme le montre l'étude mathématique de convergence de la méthode de Schwarz [Lio88 ; Lio90].



**FIGURE 2.3** – Décomposition en deux sous-domaines avec recouvrement

Une autre méthode avec recouvrement, la méthode Arlequin [Dhi98 ; DR05 ; Gha+13], a été développée récemment pour coupler différents modèles. Elle duplique les états mécaniques dans la zone de recouvrement et active des forces de couplage fictives pour contrôler la disparité entre les différents états mécaniques, tels que les déplacements, les déformations et les contraintes. Le champ de force fictif peut être modélisé à l'aide d'une approche rigide (Lagrangienne), élastique (pénalisation) ou d'une combinaison des deux (pénalisation-dualité). De plus, pour éviter une double comptabilisation de l'énergie du système dans la zone de recouvrement, le travail virtuel associé à chaque modèle est pondéré par une fonction de pondération. Une exposition plus détaillée de cette méthode est disponible dans [DR05].

### 2.4.2 Méthodes sans recouvrement

Contrairement aux méthodes avec recouvrement, les méthodes sans recouvrement (également appelées méthode de Schur) partitionnent un domaine global en plusieurs sous-domaines disjoints tels que leur intersection est vide :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{et} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (2.95)$$

La Figure 2.4 illustre le partitionnement sans recouvrement d'un domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . L'interface entre ces sous-domaines est représentée par  $\Gamma$ .

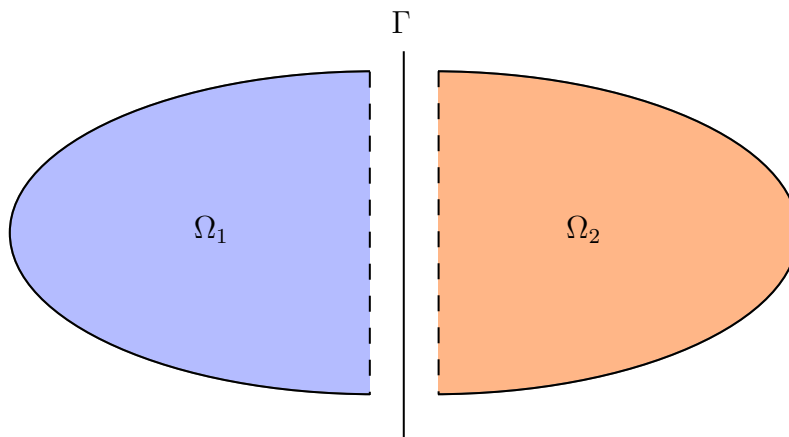


FIGURE 2.4 – Décomposition en deux sous-domaines sans recouvrement

Pour garantir le couplage entre les sous-domaines, il est nécessaire de s'assurer de la continuité des quantités cinématiques (2.96) et de l'équilibre des forces (2.97) sur l'interface  $\Gamma$  :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (2.96)$$



$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (2.97)$$

Les méthodes sans recouvrement sont réparties en trois catégories, chacune avec une manière différente de traiter les continuités à l'interface :

- Approche primale,
- Approche duale,
- Approche mixte.

### 2.4.2.1 Approche primale

Dans cette méthode sans recouvrement, également appelée méthode du complément de Schur primale, la continuité cinématique du vecteur inconnu est implicitement imposée au niveau des interfaces entre les sous-domaines. L'équilibre des forces d'interface est vérifié *a posteriori* en numérotant les nœuds et en créant deux groupes : l'un est composé des nœuds internes au sous-domaine et l'autre est composé des nœuds de l'interface avec les sous-domaines voisins. Le système présenté en début de section (2.92) s'écrit pour deux sous-domaines :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \mathbf{A}_{1\Gamma}^T & \mathbf{A}_{2\Gamma}^T & \mathbf{A}_\Gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{ext} \\ \mathbf{F}_2^{ext} \\ \mathbf{F}_\Gamma^{ext} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

La contribution des nœuds internes aux sous-domaines  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) est représentée par l'opérateur  $\mathbf{A}_i$ ; la contribution des nœuds interagissant avec les sous-domaines  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) et l'interface  $\Gamma$  sont associées à l'opérateur  $\mathbf{A}_{i\Gamma}$ , et les inconnues du problème  $\mathbf{X}_\Gamma$ .

Le problème est condensé sur ces inconnues  $\mathbf{X}_\Gamma$  par élimination des inconnues internes  $\mathbf{X}_i$  avec les deux premières lignes du système d'équations linéaires (2.98) :

$$\mathbf{H}\mathbf{X}_\Gamma = \mathbf{B}_\Gamma \quad (2.99)$$

avec  $\mathbf{H}$  l'opérateur d'interface, aussi appelé complément de Schur primal, défini par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_\Gamma - \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_{i\Gamma}^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_{i\Gamma} \quad (2.100)$$

et le second membre  $\mathbf{B}_\Gamma$  condensé s'exprime :

$$\mathbf{B}_\Gamma = \mathbf{F}_\Gamma - \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_{i\Gamma}^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_{i\Gamma} \mathbf{F}_i \quad (2.101)$$

La continuité entre les sous-domaines est exprimée par le système linéaire (2.92). La résolution de ce système linéaire implique l'inversion de la matrice  $\mathbf{H}$ . L'inversion de cette matrice dense par une méthode directe peut s'avérer coûteuse. Les méthodes itératives permettent d'accélérer cette opération : les références *Alfio Quarteroni et al.* [QSS07] introduisent plusieurs de ces méthodes. La mise en place de cette méthode demande l'accès aux opérateurs, ce qui peut être fastidieux si ces opérations sont réalisées par des codes industriels. En effet, il faut être en mesure d'accéder aux contributions internes et de l'interface.

### 2.4.2.2 Approche duale

La méthode du complément de Schur duale impose l'équilibre des efforts à l'interface et vérifie la continuité des quantités cinématiques *a posteriori*. Le système présenté en début de section 2.92 s'écrit pour deux sous-domaines :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & -\mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{A}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{ext} \\ \mathbf{F}_2^{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

où le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$  représente les efforts au niveau de l'interface de couplage  $\Gamma$ , les matrices  $\mathbf{C}_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont des opérateurs signés permettant de sélectionner les degrés de liberté à l'interface  $\Gamma$  afin de respecter la condition cinématique imposée (2.103). Ces matrices sont booléennes si les interfaces sont compatibles ou composées de différents termes provenant de la méthode de Mortar [BMP93] si l'interface n'est pas compatible. Enfin, les vecteurs  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, 2$ ) représentent la quantité cinématique utilisée pour la résolution du système.

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2 = 0 \quad (2.103)$$

Il convient de souligner que d'un point de vue discret, il y a une différence [CG02] entre imposer la continuité des déplacements, vitesses et accélérations en dynamique. Le problème est condensé de la même manière que pour la méthode primale en utilisant les deux premières lignes du système d'équations linéaires (2.102).

$$\mathbf{H} \Lambda = \mathbf{B} \quad (2.104)$$

avec  $\mathbf{H}$  l'opérateur d'interface, aussi appelé opérateur de Steklov-Poincaré, défini par :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{C}_i^T \quad (2.105)$$

et le second membre  $\mathbf{B}$  condensé s'exprime :

$$\mathbf{B} = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}_i \quad (2.106)$$

La méthode itérative du gradient conjugué, connue sous le nom de méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) et introduite par Farhat et Roux [FR91b], est souvent utilisée pour résoudre ce problème matriciel. La résolution peut aussi s'effectuer de manière directe en inversant la matrice  $\mathbf{H}$ . Plus de détails seront apportés sur cette méthode dans le chapitre suivant par la présentation détaillée de la méthode GC [GC01].

### 2.4.2.3 Approche mixte

Les méthodes mixtes combinent les propriétés des méthodes duale et primale, c'est-à-dire que l'équilibre des forces et la continuité des quantités cinématiques sont vérifiés. Cette méthode est basée sur la méthode du Lagrangien augmenté [R82] afin d'intégrer les conditions cinématiques d'interface. Une fonctionnelle modifiée est obtenue et s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \mathbf{X}_i^T \mathbf{A} \mathbf{X}_i \right] (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^T \boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{2} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^T \tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) \quad (2.107)$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}$  un opérateur symétrique, défini positif, appelé raideur d'interface. La minimisation de la fonctionnelle (2.107) conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{C}_1^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{C}_2^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{ext} \\ \mathbf{F}_2^{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

D'autres méthodes sont disponibles pour créer la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{L}}$ , comme l'utilisation d'un opérateur de raideur d'interface  $\tilde{\mathbf{A}}$  associé à chaque sous-domaine.

## 2.5 Méthodes multi-échelles en temps

En mécanique des structures, il est crucial de déterminer le niveau de résolution adéquat pour résoudre correctement le problème à traiter. Des techniques de changement d'échelle existent pour décrire le matériau à différentes échelles, allant d'une description microscopique à une description macroscopique. Pour la résolution numérique, des méthodes de changement d'échelle, telles que les méthodes multi-grilles, sont utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles à différents niveaux de résolution. Outre le matériau et la

structure, les échelles liées à la réponse de la structure à une sollicitation donnée doivent également être prises en compte. Cela implique la résolution des maillages en temps et en espace à différentes échelles pour décrire les phénomènes physiques. Lorsqu'il s'agit de problèmes d'impact en dynamique transitoire, les schémas temporels explicites sont souvent utilisés pour décrire le comportement haute fréquence du problème. Cependant, si les maillages présentent de grandes différences de tailles d'éléments, cela peut être coûteux en temps de calcul, car le plus petit élément impose le pas de temps pour l'ensemble de la structure. Les méthodes multi-échelles en temps ont été développées pour adapter le pas de temps et le schéma d'intégration au sous-domaine considéré, réduisant ainsi les coûts en temps de calcul, en particulier pour des longues simulations. Ces méthodes consistent à découper la structure en plusieurs sous-domaines en s'appuyant sur les méthodes vues dans la section 2.4, chaque sous-domaine ayant sa propre discrétisation en temps et son propre schéma de résolution adapté à la dynamique des sollicitations. Un raccord en temps doit être réalisé au niveau de l'interface entre les sous-domaines, et différentes techniques sont proposées dans la littérature pour le faire [PH04 ; MGC09 ; Mah+11 ; BCD06 ; GC01 ; CG02 ; Bru+15]. En effet, la stratégie utilisée à l'interface pour créer un raccord peut être basée sur l'échelle temporelle macroscopique ou microscopique, ce qui aura des conséquences directes sur le résultat.

En dynamique des structures non linéaire, la méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) permet de coupler différents sous-domaines [FR91b ; FCR94] grâce à son cadre puissant basé sur une approche de Schur duale, en introduisant des multiplicateurs de Lagrange afin de satisfaire les conditions de continuité cinématique à l'interface entre les sous-domaines sans recouvrement. Gravouil et Combescure (méthode GC) ont étendu la méthode FETI au cas de la dynamique des structures non linéaire multi-pas de temps [CG02 ; GC01], permettant de coupler n'importe quel intégrateur temporel de Newmark avec son propre pas de temps. La principale caractéristique de la méthode GC est d'assurer la continuité de la vitesse à l'interface sur l'échelle de temps fine, ce qui garantit la stabilité de l'algorithme de couplage, comme le démontre la méthode de l'énergie. Néanmoins, le couplage de schémas d'intégration temporelle avec la méthode GC n'est précis qu'au premier ordre dès que des pas de temps différents sont adoptés dans les sous-domaines. Par ailleurs, une dissipation d'énergie parasite est générée à l'interface, dont la quantité augmente avec le rapport entre les différentes échelles de temps. Le développement détaillé de cette méthode est présenté dans la partie 3.2.2.

L'une des applications les plus intéressantes de la méthode GC consiste à coupler le schéma explicite de Différence Centrée (CD "Central Difference"), lié à un sous-domaine avec une discrétisation fine de l'espace et un pas de temps fin, avec le schéma implicite

d'Accélération Moyenne Constante (CAA "Constant Average Acceleration"), lié à un sous-domaine avec une discrétisation grossière de l'espace et un grand pas de temps. Il a été appliqué à divers problèmes de dynamique des structures avec impacts [BCD06 ; Fek+17 ; CRG14], de propagation des ondes dans les problèmes d'interaction sol-structure avec des domaines non bornés [Zaf+16 ; Bru+16 ; Li+18 ; Li+21 ; BDR21] et les problèmes d'interaction fluide-structure [Cre+17 ; Med+18 ; MCP19 ; CMP20 ; Med+22]. Le cas du couplage explicite/explicite à plusieurs pas de temps est également d'un grand intérêt dans le cas du problème d'interaction fluide-structure avec la dynamique d'impact [Nun+17]. Par ces différents projets présentés, la méthode GC a été implémentée dans plusieurs logiciels afin de réaliser des couplages de code. Les gains de temps apportés par le déploiement de cette méthode de co-simulation au sein de codes éléments finis industriels sont significatifs [BCD06 ; Fek+17 ; CRG14].

Plusieurs méthodes multi-échelles en temps dérivées de la méthode GC existent et sont classées en deux catégories : les méthodes multi-échelles en temps avec résolution de l'interface sur l'échelle fine en temps et les méthodes multi-échelles en temps avec résolution de l'interface sur l'échelle grossière en temps. On note également des méthodes alternatives multi-échelles en temps : avec recouvrement [Gha+13], faiblement intrusive avec recouvrement (global-local) [Bet+17].

Le deuxième ordre de précision a été atteint avec les travaux de Prakash et Hjelmstad en considérant la continuité de la vitesse au pas de temps grossier plutôt qu'au pas de temps fin comme dans la méthode GC [PH04]. En outre, la méthode se révèle stable et satisfait la propriété de préservation de l'énergie au sens de la méthode de l'énergie. Une généralisation des méthodes GC et PH a été proposée dans [Bru+15], appelée méthodes BGC-micro et BGC-macro, en étendant le couplage aux schémas dissipatifs  $\alpha$ -généralisés. D'autres méthodes précises de second ordre, différentes des méthodes PH et BGC-macro, ont été proposées dans la littérature [KN14 ; MGC09 ; Mah+11 ; YD22 ; SR19]. Elles sont toutes basées sur la continuité des vitesses à l'échelle de temps grossière et elles partagent les mêmes propriétés que la méthode PH.

Les méthodes multi-échelles sont aussi utilisables sur des modèles hybrides. En adaptant la méthode GC pour des essais numériques/expérimentaux hétérogènes à pas de temps multiples, Pegon et Magonette [Bon+08] ont développé les méthodes PM. Dans cette méthode, le sous-système physique est testé expérimentalement avec un pas de temps fin, car il contient un composant clé de l'ensemble du système, tandis que le reste du système est simulé numériquement avec un pas de temps plus grand. Ce processus a été étendu à plusieurs cas tels que l'essai hybride sismique [Bur+17], l'essai hybride d'incendie [Abb+20] et l'essai hybride en temps rapide à taux multiples [Bur+17 ; Abb+19]. Bursi

*et al.* [BJW09; Bur+10] a amélioré la méthode PM, appelée PM- $\alpha$ , en permettant le couplage de schémas  $\alpha$ -Généralisés (G- $\alpha$ ) dotés d'une dissipation numérique. Les méthodes PM et PM- $\alpha$  restent précises au premier ordre lorsque des schémas de Newmark du second ordre sont couplés, comme la méthode GC.

La méthode GC et ses variantes (PM [Bon+08], PM- $\alpha$  [Bur+10], BGC-micro [Bru+15]) assure la continuité des vitesses à l'interface sur l'échelle fine en temps. Pour le cas du couplage multi-pas de temps (CD/CAA) explicite non-linéaire et implicite linéaire, ces méthodes sont beaucoup plus efficaces que les méthodes basées sur la continuité à l'échelle grossière en temps car elles ne nécessitent pas d'itération sur le sous-domaine implicite. Ce constat a conduit à adopter les méthodes basées sur la continuité sur la micro-échelle pour mettre en place des stratégies de co-simulation avec impacts [CRG14; BCD06; Fek+17] ou avec des d'interaction fluide-structure [Cre+17; Med+18; MCP19; CMP20; Med+22; Nun+17].

En effet, à notre connaissance, la méthode PH et les autres méthodes dont la continuité cinématique est imposée au pas de temps grossier, n'ont été étendues à la dynamique non linéaire que dans [PTH14], en adoptant des stratégies de Newton-Raphson pour résoudre le sous-domaine implicite lié au pas de temps grossier mais aussi pour résoudre le sous-domaine explicite lié au pas de temps fin. Cela peut être considéré comme un grave inconvénient pour les problèmes dynamiques non linéaires rapides basés sur une résolution explicite efficace, non itérative, sur le pas de temps. Par conséquent, l'imposition de la continuité de vitesses sur l'échelle de temps fine semble plus appropriée que l'imposition de la continuité des vitesses sur l'échelle grossière lorsque les non-linéarités sont concentrées sur le sous-domaine explicite à l'échelle de temps fine.

## 2.6 Conclusion & motivation

Ce chapitre introduit les outils mathématiques nécessaires pour calculer des résultats approchés relatifs à des problèmes mathématiques trop complexes pour avoir un résultat analytique. La méthode des éléments finis et les schémas de la famille de Newmark permettent de passer d'un problème dynamique continu à un problème discret. La discrétisation temporelle introduit la notion de résolution de problèmes successifs au cours du temps afin d'obtenir un résultat global en temps. Les systèmes obtenus sont implicites ou explicites, ce qui implique des coûts de calculs et des stratégies de résolutions différentes. De plus, la possibilité de résoudre plusieurs problèmes physiques ou d'utiliser différentes méthodes de résolution au sein d'un même problème est introduite par les méthodes de décomposition de domaine et notamment la méthode de Schur duale. Enfin, il est possible

de décomposer une structure en plusieurs sous-domaines ayant chacun leur propre méthode d'intégration temporelle et leur propre échelle de temps. Pour des applications comportant des non-linéarités concentrées sur l'échelle fine, nous privilégierons les méthodes assurant la continuité des quantités à l'interface sur l'échelle fine du système partitionné, avec démonstration de la stabilité numérique globale de la méthode de couplage.





---

# 3

## Nouvelle approche de résolution multi-échelles en temps pour la dynamique précise au second ordre

*Le bloc réacteur peut être sujet à des impacts au niveau des clés radiales, ce qui crée plusieurs échelles de temps au sein d'une seule modélisation. Une optimisation possible de cette modélisation est la considération de ces différentes échelles de temps en adoptant des stratégies propres à chacune d'entre elles. Après un rappel des méthodes multi-échelles en temps comme la méthode GC, une nouvelle méthode est proposée dans le but d'obtenir de meilleures propriétés de convergence.*

## Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	<b>57</b>
3.2	Une nouvelle méthode de co-simulation . . . . .	<b>58</b>
3.2.1	Problème de référence en dynamique transitoire . . . . .	58
3.2.2	Méthodes multi-échelles . . . . .	60
3.3	Analyse de la cohérence et de la stabilité d'un oscillateur partitionné . . . . .	<b>68</b>
3.3.1	Problème d'oscillateur partitionné . . . . .	70
3.3.2	Analyse de stabilité . . . . .	71
3.3.3	Erreur de troncature locale . . . . .	89
3.3.4	Amortissement algorithmique et allongement de la période . . . . .	91
3.3.5	Erreur globale . . . . .	94
3.3.6	Pseudo-norme énergétique et bilan énergétique . . . . .	98
3.4	Comportement du déplacement à l'interface . . . . .	<b>102</b>
3.5	Conclusion . . . . .	<b>104</b>

---

## 3.1 Introduction

De nos jours, la complexité des problèmes pratiques d'ingénierie augmente considérablement lorsqu'il s'agit de prendre en compte un nombre croissant de sous-systèmes physiques en interaction. Les problèmes multi-physiques tels que l'interaction structure-structure, l'interaction sol-structure et les problèmes complexes d'interaction thermique-fluide-structure rencontrés dans les applications des réacteurs nucléaires, nécessitent la résolution de différentes physiques à différentes échelles dans l'espace et dans le temps. En se concentrant sur la discrétisation temporelle, l'intégration dans le temps des équations non-linéaires couplées représentant les phénomènes multi-physiques avec un pas de temps unique s'avère inefficace en termes de temps de calcul. Une stratégie pour traiter efficacement le problème couplé consiste à diviser le domaine en plusieurs sous-domaines dans lesquels la discrétisation de l'espace, le schéma d'intégration temporelle et la taille du pas de temps pour un sous-domaine donné sont choisis indépendamment des paramètres temporels liés aux autres sous-domaines. Une telle stratégie numérique peut être considérée comme un intégrateur temporel asynchrone hétérogène (HATI) [Bru+15 ; GCB15] capable de traiter des problèmes multi-physiques et multi-échelles tout en garantissant une précision, une stabilité et des propriétés de préservation de l'énergie adéquates pour l'algorithme de couplage.

Ce chapitre présente tout d'abord la formulation variationnelle d'un problème dynamique divisé en deux sous-domaines. Des multiplicateurs de Lagrange sont introduits pour imposer des conditions cinématiques dans la formulation variationnelle : les différences entre les méthodes GC et BLG sont mises en évidence. Les caractéristiques de la méthode BLG sont démontrées en explorant les propriétés spectrales de la matrice d'amplification pour un oscillateur partitionné en deux sous-domaines, en termes de stabilité, d'ordre de l'erreur de troncature locale, de dissipation numérique et d'erreur d'allongement de la période. Enfin, l'erreur globale est calculée pour vérifier la convergence au second ordre de la méthode BLG ainsi que deux normes différentes d'énergie générée à l'interface. Ces normes correspondent à l'énergie d'interface et la pseudo-énergie d'interface définie dans la méthode énergétique, afin d'évaluer l'avantage de la méthode BLG par rapport à la méthode GC en termes de dissipation d'énergie parasite.

## 3.2 Une nouvelle méthode de co-simulation

### 3.2.1 Problème de référence en dynamique transitoire

Le problème de référence est défini dans la section précédente 2.1. Afin de résoudre l'approximation spatio-temporelle de la forme forte présentée dans les équations (2.1)-(2.6), on se concentre ici sur la méthode des éléments finis avec une intégration temporelle multi-échelles. En conséquence, on considère le Lagrangien semi-discrétisé suivant  $\mathcal{L}$  (continu en temps) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathcal{T}(\dot{\mathbf{U}}) - \mathcal{V}(\mathbf{U}) \quad (3.1)$$

avec :

$$\mathcal{T}(\dot{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{f}^T \mathbf{U} \quad (3.3)$$

où  $\mathcal{T}$  est l'énergie cinétique,  $\mathcal{V}$  l'énergie potentielle,  $\mathbf{U}$  le vecteur nodal de déplacement généralisé de dimension  $n$  (le nombre de degrés de liberté du maillage par éléments finis),  $\dot{\mathbf{U}}$  le vecteur nodal de la vitesse généralisée,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse symétrique définie positive et introduite par l'équation (2.14),  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur symétrique définie par la relation (2.18) et  $\mathbf{f}$  les forces extérieures données (sur le volume et les frontières) définie par la relation (2.16). Le principe de Hamilton est basé sur l'intégrale d'action suivante discrétisée dans l'espace et continue dans le temps :

$$\mathcal{A}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) dt \quad (3.4)$$

L'intégrale d'action conduit au principe de Hamilton (stationnarisation) :

$$\delta \mathcal{A}(\mathbf{U}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{U} \in \mathcal{U}_0 \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{U}_0 = \{H^1(\Omega^h) \times [t_0, t_f] \mid \delta \mathbf{U}(\cdot, t_0) = 0 ; \delta \mathbf{U}(\cdot, t_f) = 0 ; \delta \mathbf{U}(x, \cdot)|_{\Gamma_D} = 0\}$ , et  $\Omega^h$  le maillage du domaine. L'équation (3.5) implique :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathcal{L}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) dt &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{U} \in \mathcal{U}_0 \\ \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{U}^T (-\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{f}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

On obtient alors l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Cette équation peut être contrainte par exemple par la relation de vitesse suivante :

$$\mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}})|_{\Gamma_D} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{L}$  est une matrice booléenne sélectionnant les degrés de liberté concernés par la condition aux limites. Afin d'assurer cette propriété dans la forme variationnelle, la forme mixte suivante, basée sur les multiplicateurs de Lagrange, est utilisée :

$$\mathcal{A}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} \left( \mathcal{L}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \lambda^T \mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}}) \right) dt \quad (3.9)$$

L'intégrale d'action stationnaire modifiée (3.9) implique :

$$\delta \mathcal{A} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{U} \in \mathcal{U} \quad \forall \delta \lambda \in \Lambda \quad (3.10)$$

où  $\mathcal{U} = \{H^1(\Omega^h) \times [t_0, t_f] \mid \delta \mathbf{U}(\cdot, t_0) = 0 ; \delta \mathbf{U}(\cdot, t_f) = 0\}$   
 et  $\Lambda = \{H^{-1/2}(\Gamma_D^h) \times [t_0, t_f] \mid \delta \boldsymbol{\lambda}(\cdot, t_0) = 0 ; \delta \boldsymbol{\lambda}(\cdot, t_f) = 0\}$ .

L'équation (3.10) donne :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \left( \delta \mathcal{L}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \delta \lambda^T \mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}}) + \lambda^T \delta \mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}}) \right) dt = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{U}^T (-\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{f}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta \dot{\mathbf{U}}^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{L}^T \lambda) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta \lambda^T \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} dt = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{U}^T (-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{f} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta \lambda^T \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

où le terme  $\boldsymbol{\Lambda} = -\dot{\lambda}$  peut être interprété comme une force à l'interface qui garantit la relation de vitesse (3.8). L'équation d'Euler-Lagrange du principe variationnel modifié est alors donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda} \\ \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

L'équation du mouvement définie dans le paragraphe précédent (2.19) est retrouvée avec

les équation (3.12). La présence du multiplicateur de Lagrange permet de contraindre le système à respecter la condition limite sur la frontière (2.20).

Dans le paragraphe suivant, la continuité de la vitesse entre deux interfaces sera le concept fondamental afin de coller différents sous-domaines avec différentes échelles de temps.

### 3.2.2 Méthodes multi-échelles

KU Le principe variationnel modifié peut être adapté pour ajouter plusieurs sous-domaines en introduisant un Lagrangien  $\mathcal{L}$  pour chaque sous-domaine. Les équations du mouvement (3.12) restent les mêmes. Les indices A et B font référence aux deux sous-domaines. L'ajout d'un second terme Lagrangien modifie le principe variationnel précédent (3.10) comme suit :

$$\mathcal{A}(\mathbf{U}^A, \dot{\mathbf{U}}^A, \mathbf{U}^B, \dot{\mathbf{U}}^B, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} \left( \mathcal{L}^A(\mathbf{U}^A, \dot{\mathbf{U}}^A) + \mathcal{L}^B(\mathbf{U}^B, \dot{\mathbf{U}}^B) + \lambda^T \mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}}^A, \dot{\mathbf{U}}^B) \right) dt \quad (3.13)$$

Ici, l'équation des contraintes cinématiques  $\mathcal{G}$  fait référence à la continuité des vitesses à l'interface des deux domaines  $\Gamma_I$  :

$$\mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}}^A, \dot{\mathbf{U}}^B)|_{\Gamma_I} = \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}^B \quad (3.14)$$

De plus, l'équation des contraintes doit respecter la condition suivante (liaison parfaite) :

$$\mathcal{G}(\dot{\mathbf{U}}^A, \dot{\mathbf{U}}^B)|_{\Gamma_I} = 0 \quad (3.15)$$

Finalement, l'intégrale d'action stationnaire (3.13) donne les équations d'Euler-Lagrange pour les deux sous-domaines semi-discrétisés en espace et continus en temps dans le domaine temporel  $[t_0; t_f]$  :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^A \ddot{\mathbf{U}}^A + \mathbf{K}^A \mathbf{U}^A = \mathbf{f}^A + \mathbf{L}^{AT} \boldsymbol{\Lambda} ; \\ \mathbf{M}^B \ddot{\mathbf{U}}^B + \mathbf{K}^B \mathbf{U}^B = \mathbf{f}^B + \mathbf{L}^{BT} \boldsymbol{\Lambda} ; \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}^B = 0 \quad (3.17)$$

Ainsi, la continuité des vitesses (3.17) à l'interface entre les sous-domaines est assurée par les multiplicateurs de Lagrange. Les termes  $\mathbf{L}^{AT} \boldsymbol{\Lambda}$  et  $\mathbf{L}^{BT} \boldsymbol{\Lambda}$  représentent les forces d'interface entre le sous-domaine A et le sous-domaine B.

La superposition résout le problème global Eq. (3.16) en deux étapes. La première étape consiste à résoudre le problème "libre", puis le problème "lié". Tout d'abord, le pro-

blème "libre" résout les sous-domaines indépendamment les uns des autres. D'autre part, le problème "lié" résout les sous-domaines en tenant compte des forces d'interface. La somme des termes "libre" et "lié" décrit complètement le problème, avec les forces externes et d'interface :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{free} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{free} = \mathbf{f} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{link} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{link} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda} \end{cases} \quad (3.18)$$

où l'indice *free* fait référence au problème "libre" et l'indice *link* fait référence au problème "lié". Les schémas numériques de résolution sont modifiés en décomposant  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\ddot{\mathbf{U}}$  de cette manière :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_{free} + \mathbf{U}_{link} \\ \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{free} + \dot{\mathbf{U}}_{link} \\ \ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}_{free} + \ddot{\mathbf{U}}_{link} \end{cases} \quad (3.19)$$

En outre, la discrétisation temporelle de Newmark [Hug87] dans l'Eq. (3.18) donne :

$$\begin{cases} \underbrace{(\mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{K})}_{\tilde{\mathbf{M}}} \ddot{\mathbf{U}}_{free} = \mathbf{f} - \mathbf{K}^p \mathbf{U} \\ \tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{U}}_{link} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda} \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $\tilde{\mathbf{M}}$  est la matrice de masse effective et  ${}^p \mathbf{U}$  est le terme de déplacement prédictif :

$$\begin{cases} {}^p \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{U}}_{t-1} + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{U}}_t \\ {}^p \mathbf{U}_t = \mathbf{U}_{t-1} + h \dot{\mathbf{U}}_{t-1} + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_t \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres de Newmark permettant de modifier les propriétés pour les schémas d'intégration temporelle [Hug87] et  $h$  est le pas de temps. L'indice  $t$  fait référence à la discrétisation temporelle du paramètre continu  $t$  précédemment défini dans le domaine temporel  $[t_0; t_f]$ .

Pour chaque instant, l'équation d'interface est résolue pour calculer les termes de liaison à partir des termes libres :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}^B &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{link}^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{link}^B &= -\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{free}^A - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{free}^B \end{aligned} \quad (3.22)$$

En substituant la relation concernant les vitesses de "liaison" données dans Eq. (3.18)

dans l'équation d'interface (3.22), l'équation devient :

$$\mathbf{H}_{vel}\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{b}_{vel} \quad (3.23)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mathbf{H}_{vel} = \mathbf{L}^A \gamma h \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{A^T} + \mathbf{L}^B \gamma h \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \\ \mathbf{b}_{vel} = -\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{free}^A - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{free}^B \end{cases} \quad (3.24)$$

Dans la littérature, l'opérateur d'interface et le vecteur correspondant à la partie libre de la contrainte Eq. (3.22) sont représentés par  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{b}$ . Pour plus de clarté dans la suite du document, l'indice *vel* est introduit en référence à la contrainte de vitesse à l'interface utilisée pour construire la matrice  $\mathbf{H}_{vel}$  et le vecteur  $\mathbf{b}_{vel}$ . L'opérateur d'interface  $\mathbf{H}_{vel}$  est une matrice carrée dépendant du nombre de degrés de liberté à l'interface. Le scalaire  $h$  représente le pas de temps.

L'approche présentée ci-dessus permet de résoudre des problèmes avec plusieurs sous-domaines. La partition en plusieurs sous-domaines donne également la possibilité d'avoir des échelles de temps différentes selon les sous-domaines. La discrétisation temporelle est alors spécifique à chaque sous-domaine ici défini comme :  $h^A$  le pas de temps pour la macro échelle entre le temps  $t_0$  et  $t_m$  et  $h^B$  le pas de temps pour la micro échelle entre  $t_{j-1}$  et  $t_j$ . Le rapport entre  $h^A$  et  $h^B$  est appelé  $m$  et est défini comme tel :

$$m = \frac{h^A}{h^B} \quad (3.25)$$

Dans la suite, nous envisageons des rapports d'échelles entiers, mais ceci peut être aisément généralisable au cas où  $m \in \mathbb{R}^{+*}$ , et avec plusieurs sous-domaines (jusqu'à 10 voir Mahjoubi [Mah+11]).

Le paramètre de discrétisation du temps  $j$  est introduit pour énumérer les micro pas de temps au sein d'un macro-pas de temps :  $j \in [1, m]$ .

$$\begin{cases} \mathbf{M}^A \ddot{\mathbf{U}}_m^A + \mathbf{K}^A \mathbf{U}_m^A = \mathbf{f}_m^A + \mathbf{L}^{A^T} \boldsymbol{\Lambda}_m \\ \mathbf{M}^B \ddot{\mathbf{U}}_j^B + \mathbf{K}^B \mathbf{U}_j^B = \mathbf{f}_j^B + \mathbf{L}^{B^T} \boldsymbol{\Lambda}_j ; \quad j \in [1; m] \end{cases} \quad (3.26)$$

où  $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}_{lump}^B$  est la matrice de masse lumpée (diagonalisée) pour les intégrations temporelles explicites [ZTZ05 ; GR15 ; BLM00 ; Wu06].

### 3.2.2.1 Méthode GC

La méthode GC [Gra00], est basée sur la continuité des vitesses à l'interface, à l'échelle fine en temps. La stabilité a été démontrée par l'utilisation de la méthode de l'énergie telle qu'in-



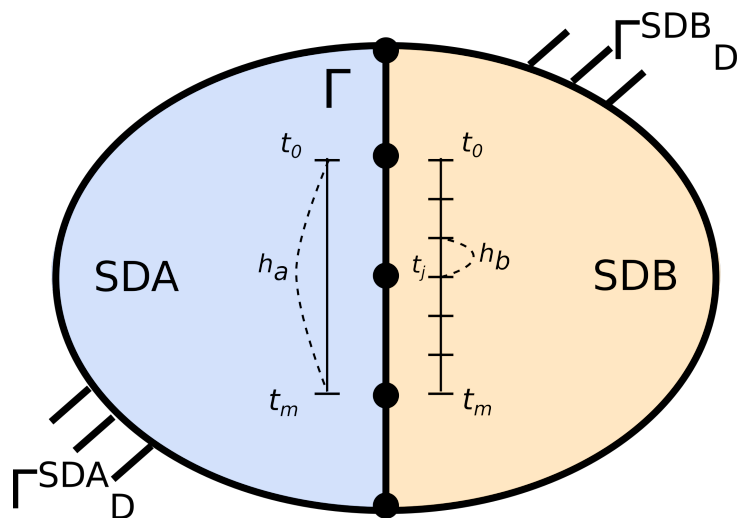


FIGURE 3.1 – Deux sous-domaines avec des discrétisations temporelles différentes

troduite par Hughes pour un algorithme de couplage hybride explicite/implicite [Hug87]. La méthode PM, dérivée de la méthode GC, est également basée sur la continuité des vitesses sur l'échelle fine en temps et une preuve alternative de stabilité a été fournie par l'étude des propriétés spectrales de la matrice d'amplification d'un système fractionné à un seul degré de liberté [Bon+08] (problème du "split-oscillator"). La continuité des vitesses s'écrit :

$$\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_j^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_j^B = 0 \quad (3.27)$$

Cette condition est assurée par l'interpolation linéaire des vitesses et des multiplicateurs de Lagrange de l'échelle grossière vers l'échelle fine dans le temps. Les équations (3.28) et (3.29) permettent de relier, à chaque itération, la résolution du sous-domaine B (indice  $j$ ) au sous-domaine A (indice  $m$ ) :

$$\mathbf{\Lambda}_j = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{\Lambda}_0 + \frac{j}{m} \mathbf{\Lambda}_m \quad (3.28)$$

$$\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^A = \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \left(\frac{j}{m}\right) + \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \left(1 - \frac{j}{m}\right) \quad (3.29)$$

L'équation d'interface est résolue à la micro échelle temporelle pour calculer les termes de liaison à partir des termes libres :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_j^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_j^B &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{j,link}^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,link}^B &= -\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^A - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \end{aligned} \quad (3.30)$$

En substituant la relation concernant les vitesses "liées" et les multiplicateurs de Lagrange

dans (3.18), (3.28), (3.29), dans l'interface Eq. (3.30), l'équation devient :

$$\mathbf{H}_{vel}\mathbf{\Lambda}_j = \mathbf{b}_{j,vel} \quad (3.31)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mathbf{H}_{vel} = \mathbf{L}^A \gamma^A h^A \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} + \mathbf{L}^B \gamma^B h^B \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{BT} \\ \mathbf{b}_{j,vel} = -\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^A - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \end{cases} \quad (3.32)$$

Enfin, la méthode GC permet de combiner différents schémas d'intégration temporelle pour effectuer une analyse dynamique. Le second ordre de convergence des schémas temporels de Newmark n'est pas conservé avec la méthode GC dès que des pas de temps différents pour les sous-domaines sont considérés mais la stabilité globale du système couplé est assurée. En effet, lorsque des schémas d'intégration temporelle précis du second ordre sont couplés, la convergence globale n'est plus que du premier ordre [Gra00]. L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode améliorée, basée sur la continuité de la vitesse à l'échelle de temps fine, capable de conserver le second ordre de convergence et la stabilité globale du système couplé. Les méthodes de collage sur la micro-échelle sont privilégiées afin de profiter de la plus grande flexibilité de ces approches par rapport à celles basées sur la continuité de la vitesse à l'échelle de temps grossière, notamment dans le cas non-linéaire.

### 3.2.2.2 Bilan énergétique

Le bilan énergétique discret pour les schémas d'intégration temporelle de Newmark est donné par [Hug87 ; KH05 ; Kre06a]. Afin de simplifier le développement, deux opérateurs sont introduits : L'opérateur de différence directe et l'opérateur de valeur moyenne, comme indiqués ci-dessous :

$$[u_n] = u_n - u_{n-1} \quad (3.33)$$

$$\langle u_n \rangle = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \quad (3.34)$$

où les indices  $(n - 1, n)$  font référence aux pas de temps des deux échelles : Macro pas de temps  $(0, m)$  et micro pas de temps  $(j - 1, j)$ . Sans amortissement et sur un pas de temps macro  $[t_0, t_m]$ , le bilan énergétique discret peut être exprimé comme suit (voir l'équation (2.62) obtenue par le développement détaillé dans le paragraphe 2.3.1) :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{h^2}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \right]_{t_0}^{t_m} = \dots \\
 & [\mathbf{U}_m]^T \left\{ \langle \mathbf{f}_m \rangle + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) [\mathbf{f}_m] \right\} \\
 & - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \left\{ [\mathbf{U}_m]^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_m] + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) h^2 [\ddot{\mathbf{U}}_m]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_m] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

De plus, l'Eq. (3.35) peut s'écrire en introduisant l'incrément des énergies sur un pas de temps macro  $\Delta W_{kin}$ ,  $\Delta W_{int}$ ,  $\Delta W_{comp}$ ,  $\Delta W_{ext}$ ,  $\Delta W_{diss}$ , termes liés aux énergies classiques cinétique, interne, complémentaire, externe et dissipée données par :

$$\begin{aligned}
 & \Delta W_{kin,m} + \Delta W_{int,m} + \Delta W_{comp,m} = \Delta W_{ext,m} + \Delta W_{diss,m} \\
 & \Delta W_{kin,m} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{U}}_m^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_m - \dot{\mathbf{U}}_0^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_0 \right\} \\
 & \Delta W_{int,m} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{U}_m^T \mathbf{K} \mathbf{U}_m - \mathbf{U}_0^T \mathbf{K} \mathbf{U}_0 \right\} \\
 & \Delta W_{comp,m} = \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{h^2}{2} \left\{ \ddot{\mathbf{U}}_m^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_m - \ddot{\mathbf{U}}_0^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_0 \right\} \\
 & \Delta W_{ext,m} = [\mathbf{U}_m]^T \left\{ \langle \mathbf{f}_m \rangle + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) [\mathbf{f}_m] \right\} \\
 & \Delta W_{diss,m} = - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \left\{ [\mathbf{U}_m]^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_m] + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) h^2 [\ddot{\mathbf{U}}_m]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_m] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Lorsque l'on considère deux sous-domaines avec deux échelles de temps, le bilan énergétique discret s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Delta W_m^A = \Delta W_{cin,m}^A + \Delta W_{int,m}^A + \Delta W_{comp,m}^A - \Delta W_{ext,m}^A \\
 \quad - \Delta W_{diss,m}^A - \Delta W_{interface,m}^A \\
 \Delta W_m^B = \Delta W_{cin,m}^B + \Delta W_{int,m}^B + \Delta W_{comp,m}^B - \sum_{j=1}^m \Delta W_{ext,j}^B \\
 \quad - \sum_{j=1}^m \Delta W_{diss,j}^B - \Delta W_{interface,m}^B
 \end{array} \right. \tag{3.37}$$

$$\Delta W_m^A + \Delta W_m^B = 0$$

où

$$\begin{aligned}
 \Delta W_{interface,m} &= \Delta W_{interface,m}^A + \Delta W_{interface,m}^B \\
 \Delta W_{interface,m}^A &= [\mathbf{U}_m^A]^T \left\{ \mathbf{L}_A^T \langle \boldsymbol{\Lambda}_m \rangle + \left( \gamma_A - \frac{1}{2} \right) \mathbf{L}_A^T [\boldsymbol{\Lambda}_m] \right\} \\
 \Delta W_{interface,m}^B &= \sum_{j=1}^m \left\{ [\mathbf{U}_j^B]^T \left\{ \mathbf{L}_B^T \langle \boldsymbol{\Lambda}_j \rangle + \left( \gamma_B - \frac{1}{2} \right) \mathbf{L}_B^T [\boldsymbol{\Lambda}_j] \right\} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Le bilan énergétique discret dans l'Eq. (3.38) représente le travail des forces d'interface des deux sous-domaines A et B. Lorsque ce terme diffère de zéro, le schéma de couplage résultant n'est pas conservatif. Si l'énergie de l'interface augmente, le schéma peut devenir instable car de l'énergie est injectée dans le système. Dans le cas de la méthode GC, l'énergie d'interface dans l'Eq. (3.38) est nulle ou négative et diminue pendant la durée de la simulation, ce qui indique que la méthode génère une certaine dissipation d'énergie à l'interface, ce qui entraîne la perte d'un ordre de précision lors du couplage des schémas d'intégration temporelle du second ordre [GCB15].

### 3.2.2.3 Une alternative à la continuité des vitesses à l'interface : $\mathbf{GC}_{acc}$

Comme proposé dans la littérature [Cho+19; BJW09], assurer la continuité des accélérations, à la place de la continuité des vitesses pour la méthode GC, peut également être étudiée dans le but d'améliorer les propriétés énergétiques des algorithmes de couplage. La continuité de l'accélération à l'échelle de temps fine est définie comme suit :

$$\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_j^A + \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_j^B = 0 \tag{3.39}$$

Par conséquent, l'équation d'interface notée par la relation (3.31) est modifiée par la nouvelle équation cinématique de contrainte, ce qui conduit à un opérateur d'interface, désigné par  $\mathbf{H}_{acc}$ , et à un nouveau vecteur du côté droit de l'équation, désigné par  $\mathbf{b}_{j,acc}$ , comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{acc} = \mathbf{L}^A \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} + \mathbf{L}^B \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{BT} \\ \mathbf{b}_{j,acc} = -\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^A - \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \end{cases} \tag{3.40}$$

Comme pour les vitesses dans la relation (3.29) à l'échelle du micro temps du sous-domaine A dans la méthode GC, l'accélération au  $j^{eme}$  micro pas de temps du sous-domaine A n'existe pas. Elle est donc estimée par une interpolation linéaire :

$$\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^A = \mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \left( \frac{j}{m} \right) + \mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \tag{3.41}$$

Cette méthode (la continuité des accélérations à l'interface sur l'échelle fine en temps) est appelée  $GC_{acc}$ . L'utilisation de la continuité de l'accélération pour tous les micro pas de temps a donné des résultats intéressants. En effet, un ordre de convergence plus élevé est obtenu, égal à deux lorsque l'on couple des schémas d'intégration temporelle du second ordre. Néanmoins, il s'avère que la plage de stabilité est considérablement réduite par rapport à la méthode GC. Afin de comparer avec la méthode de couplage proposée dans la suite, l'étude des propriétés spectrales de la matrice d'amplification pour un problème d'oscillateur partitionné est effectuée dans la section suivante, mettant en évidence la faible performance du schéma  $GC_{acc}$  en termes de stabilité, malgré le second ordre de précision. La construction de la matrice d'amplification  $\mathbf{A}$  est construite selon la démarche de Bonelli *et al.* [Bon+08].

### 3.2.2.4 Une nouvelle méthode à pas de temps multiples : la méthode BLG

L'idée est de réaliser une continuité de vitesse à l'interface sur l'échelle de temps fine et de changer la forme de la condition de continuité du dernier pas de temps fin afin de bénéficier d'un ordre de précision plus élevé provenant de la continuité d'accélération, tout en conservant les caractéristiques de stabilité de la méthode GC. Ainsi, les continuités cinématiques suivantes sont considérées :

$$\begin{cases} \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_j^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_j^B = 0, & j = 1, \dots, m-1 \\ \mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_m^A + \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_m^B = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

La continuité cinématique donnée dans l'équation (3.42) caractérise le nouvel algorithme de couplage, appelé méthode BLG dans la suite. La deuxième équation de contrainte, qui est la continuité de l'accélération à l'interface au dernier pas de temps micro, conduit à une équation d'interface telle que donnée dans l'équation (3.40), écrite au pas de temps micro lorsque  $j = m$ . Ainsi, les équations d'interface changent au cours du pas de temps macro. Lorsque l'instant micro temporel est différent de l'instant macro temporel, c'est-à-dire lorsque ( $j < m$ ), le problème d'interface conserve la forme de la méthode GC :

$$\mathbf{H}_{vel} \Lambda_j = \mathbf{b}_{j,vel} \quad (3.43)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mathbf{H}_{vel} = \mathbf{L}^A \gamma^A h^A \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{A^T} + \mathbf{L}^B \gamma^B h^B \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \\ \mathbf{b}_{j,vel} = -\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^A - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \end{cases} \quad (3.44)$$

Lorsque l'instant micro temporel est égal à l'instant macro temporel, c'est-à-dire ( $j = m$ ),

alors le problème d'interface prend la forme :

$$\mathbf{H}_{acc}\mathbf{\Lambda}_m = b_{m,acc} \quad (3.45)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mathbf{H}_{acc} = \mathbf{L}^A \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{A^T} + \mathbf{L}^B \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \\ \mathbf{b}_{m,acc} = -\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A - \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \end{cases} \quad (3.46)$$

La méthode BLG est résumée dans l'algorithme 1. La continuité de l'accélération à l'interface à l'échelle de temps macro ( $j = m$ ) a un impact sur l'équation de contrainte définie sur l'échelle de temps micro. En effet, la vitesse "libre" utilisée pour l'interpolation linéaire du sous-domaine A et la vitesse "libre" utilisée pour le premier pas de temps micro du sous-domaine B sont issues de la continuité d'accélération de la dernière échelle de temps macro. Ensuite, les propriétés spectrales de la matrice d'amplification liée au problème de l'oscillateur partitionné pour la méthode de couplage BLG sont étudiées. En plus de la stabilité, l'ordre de précision, le rapport d'amortissement, l'allongement de la période et la dissipation d'énergie à l'interface sont examinés, montrant que la méthode BLG s'avère très appropriée pour le couplage.

### 3.3 Analyse de la cohérence et de la stabilité d'un oscillateur partitionné

L'algorithme de couplage utilise deux schémas d'intégration temporelle différents liés à deux sous-domaines avec des pas de temps différents. L'analyse spectrale modale n'étant pas applicable dans ce cas, une preuve de stabilité peut être fournie par l'utilisation de la méthode de l'énergie [Hug87]. La stabilité de la méthode GC a également été démontrée à l'aide de la méthode de l'énergie en montrant que la pseudo-énergie d'interface, exprimée en Eq. (3.126), est négative et décroissante. La stabilité est donc assurée tant que les deux sous-domaines satisfont à leurs propres exigences de stabilité [Gra00]. On démontre que la pseudo-énergie de l'interface est égale à zéro dans les cas de la méthode PH [PH04], de l'algorithme de couplage proposé par Karimi et Nakshatrala [KN14] et de la méthode BGC-macro [Bru+15], toutes les méthodes étant basées sur la continuité de la vitesse au pas de temps grossier. Dans le cas de la méthode PM basée sur la continuité de la vitesse au pas de temps fin, il est montré que la pseudo-énergie de l'interface n'est pas monotone décroissante [Bon+08]. Par conséquent, plutôt que de trouver une norme d'énergie strictement décroissante, les auteurs adoptent une approche alternative basée sur l'étude spectrale de la matrice d'amplification liée au système à un seul degré de liberté

**Algorithm 1: BLG Method**

**Données d'entrée:**  $\gamma^A, \beta^A, \gamma^B, \beta^B, \mathbf{f}^A, \mathbf{f}^B, \mathbf{M}^A, \mathbf{M}^B, \mathbf{K}^A, \mathbf{K}^B, h^A, h^B$   
**Sortie:**  $\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}, E_{total}$

- 1  $\tilde{\mathbf{M}}^A \leftarrow \mathbf{M}^A + \beta^A h^{A^2} \mathbf{K}^A$
- 2  $\tilde{\mathbf{M}}^B \leftarrow \mathbf{M}^B + \beta^B h^{B^2} \mathbf{K}^B$
- 3 **for**  $n = 1$  **to**  $N$  **avec un pas de temps macro**  $[t_n; t_{n+1}] = [t_0; t_m]$  **do**
- 4     Calculer  ${}^p\mathbf{U}_m^A$  et  ${}^p\dot{\mathbf{U}}_m^A$ ; /\* Sous-domaine A \*/
- 5      $\ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \left( \mathbf{f}_m^A - \mathbf{K}^A \mathbf{U}_m^A \right)$
- 6     Correction :  $\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \leftarrow {}^p\dot{\mathbf{U}}_m^A + \gamma^A h^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \\ \mathbf{U}_{m,free}^A \leftarrow {}^p\mathbf{U}_m^A + \beta^A h^{A^2} \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \end{cases}$
- 7     **for**  $j = 1$  **to**  $m$  **do**
- 8         Calculer  ${}^p\mathbf{U}_j^B$  et  ${}^p\dot{\mathbf{U}}_j^B$ ; /\* Sous-domaine B sur  $[t_{j-1}; t_j]$  \*/
- 9          $\ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \left( \mathbf{f}_j^B - \mathbf{K}^B \mathbf{U}_j^B \right)$
- 10         Correction :  $\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \leftarrow {}^p\dot{\mathbf{U}}_j^B + \gamma^B h^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \\ \mathbf{U}_{j,free}^B \leftarrow {}^p\mathbf{U}_j^B + \beta^B h^{B^2} \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \end{cases}$
- 11         Condition d'interface cinématique :
- 12         **if**  $j < m$  **then**
- 13              $\Lambda_j = \mathbf{H}_{vel}^{-1} \cdot \left( -\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \frac{j}{m} - \mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \left(1 - \frac{j}{m}\right) \right.$
- 14              $\left. -\mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \right)$
- 15         **else**
- 16              $\Lambda_m = \mathbf{H}_{acc}^{-1} \cdot \left( -\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A - \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \right)$
- 17              $\ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \left( \mathbf{L}^{B^T} \Lambda_j \right)$
- 18              $\dot{\mathbf{U}}_{j,link}^B \leftarrow \gamma^B h^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B$
- 19              $\mathbf{U}_{j,link}^B \leftarrow \beta^B h^{B^2} \ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B$
- 20             finalement :  $\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_j^B = \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B + \ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B \\ \dot{\mathbf{U}}_j^B = \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B + \dot{\mathbf{U}}_{j,link}^B \\ \mathbf{U}_j^B = \mathbf{U}_{j,free}^B + \mathbf{U}_{j,link}^B \end{cases}$
- 21             **return**  $\ddot{\mathbf{U}}_m^B, \dot{\mathbf{U}}_m^B, \mathbf{U}_m^B, \Lambda_m$
- 22      $\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \left( \mathbf{L}^{A^T} \Lambda_m \right)$
- 23      $\dot{\mathbf{U}}_{m,link}^A \leftarrow \gamma^A h^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A$
- 24      $\mathbf{U}_{m,link}^A \leftarrow \beta^A h^{A^2} \ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A$
- 25     finalement :  $\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^A = \ddot{\mathbf{U}}_m^A = \ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A + \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^A = \dot{\mathbf{U}}_m^A = \dot{\mathbf{U}}_{m,link}^A + \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \\ \mathbf{U}_{n+1}^A = \mathbf{U}_m^A = \mathbf{U}_{m,link}^A + \mathbf{U}_{m,free}^A \end{cases}$  /\* Résultat complet
- 26     \*/
- 26     **Mise à jour du bilan énergétique discrétisé**

(SDOF) divisé en deux sous-domaines A et B. Ici, comme pour la méthode PM [Bon+08], une méthode d'étude spectrale [Dah63] est utilisée pour la méthode BLG afin de caractériser la stabilité de l'algorithme de couplage en fonction du rapport de pas de temps. L'étude spectrale de la matrice d'amplification permet également d'évaluer l'erreur de troncature locale, l'amortissement numérique et l'allongement de la période. De plus, les erreurs globales en termes de déplacement, de vitesse et d'accélération, comme l'accumulation des erreurs de troncature locales sur la durée de la simulation, sont également tracées pour vérifier l'ordre de convergence de la méthode BLG. L'énergie d'interface et la pseudo-énergie d'interface de la méthode énergétique [Hug87] sont scrutées pour évaluer les caractéristiques énergétiques de la méthode proposée par rapport à la méthode GC. Enfin, l'erreur relative associée au déplacement à l'interface est étudiée pour les deux méthodes GC et BLG.

### 3.3.1 Problème d'oscillateur partitionné

L'étude d'un oscillateur à un seul degré de liberté (SDOF) permet de vérifier l'ordre de précision des méthodes de couplage. Le second ordre de convergence est recherché pour les problèmes de dynamique linéaire afin de réduire l'erreur des quantités calculées selon le carré du pas de temps. Ainsi, l'objectif de la méthode de couplage est de conserver le second ordre de convergence des schémas d'intégration temporelle couplés. L'équation du mouvement de l'oscillateur non amorti, caractérisée par sa masse  $M$  et sa rigidité  $K$ , sans force extérieure, est donnée par :

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (3.47)$$

où  $\omega^2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$  est la fréquence angulaire. Un déplacement est imposé à l'instant initial :  $u(0) = u_0$ . L'oscillateur à un seul degré de liberté est divisé en deux parties : sous-domaines A et B, comme illustré sur la Figure 3.2. La masse et la rigidité sont également divisées :  $M = M^A + M^B$  et  $K = K^A + K^B$ . La masse et la rigidité des deux sous-domaines dépendent du rapport  $b_1$  comme suit :

$$b_1 = \frac{M^A}{M^B} = \frac{K^B}{K^A} \quad (3.48)$$

La fréquence propre du SDOF est calculée par :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} = 1 \text{ Hz} \quad (3.49)$$

Le rapport  $b_1$  permet d'explorer différentes caractéristiques des sous-domaines couplés A



et B : dans le cas de  $b_1 = 1$ , les fréquences propres des deux sous-domaines sont égales, ce qui correspond au cas de deux éléments finis avec le même matériau élastique homogène et la même taille, alors que le cas  $b_1 \neq 1$  permet d'explorer le cas de différents matériaux élastiques ou différentes tailles d'éléments finis pour un même matériau élastique.

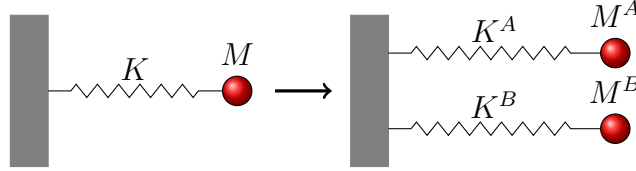


FIGURE 3.2 – Oscillateur SDOF divisé en deux sous-domaines A and B

### 3.3.2 Analyse de stabilité

#### 3.3.2.1 Construction de la matrice d'amplification de la méthode BLG

L'analyse de stabilité est effectuée sur l'équation d'équilibre sans amortissement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (3.50)$$

A partir de cette équation, une matrice d'amplification est construite pour relier le vecteur d'état au temps  $t_m$  au vecteur d'état précédent relatif au  $t_0$  comme :

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{F}_0 \quad (3.51)$$

où  $\mathbf{X}_0$  est le vecteur d'état dépendant de la formulation de l'algorithme de couplage,  $\mathbf{A}$  la matrice d'amplification, et  $\mathbf{F}_0$  le vecteur de charge provenant des forces externes. Le vecteur d'état au temps  $t_0$  est défini comme suit :

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{X}_0^A \ \mathbf{X}_0^B]^T \quad (3.52)$$

où  $\mathbf{X}_0^A$ ,  $\mathbf{X}_0^B$  sont les vecteurs d'état des sous-domaines A et B. Le vecteur d'état  $\mathbf{X}_0^A$  est composé des quantités cinématiques du sous-domaine A à l'échelle de temps macro, complétées par la vitesse libre comme dans [Bon+08 ; Bur+10] :

$$\mathbf{X}_0^A = [\mathbf{U}_0^A \ \dot{\mathbf{U}}_0^A \ \dot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \ \ddot{\mathbf{U}}_0^A]^T \quad (3.53)$$

Le vecteur d'état  $\mathbf{X}_0^B$  est composé des quantités cinématiques du sous-domaine B à

l'échelle de temps macro :

$$\mathbf{X}_0^B = \left[ \mathbf{U}_0^B \quad \dot{\mathbf{U}}_0^B \quad \ddot{\mathbf{U}}_0^B \right]^T \quad (3.54)$$

Comme ci-dessus, le vecteur d'état  $\mathbf{X}_m$  rassemble les vecteurs d'état relatifs aux sous-domaines A et B à l'instant  $t_m$ . Ainsi, les vecteurs d'état  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{X}_m$  rassemblent 7 composantes chacun. La matrice d'amplification est calculée numériquement pour différents rapports de pas de temps  $m$  et différents rapports  $b_1$  afin d'explorer les propriétés de stabilité de la méthode BLG lors du couplage des schémas d'intégration temporelle de Newmark caractérisés par leurs paramètres  $(\gamma^A, \beta^A, \gamma^B, \beta^B)$ . La construction de cette matrice d'amplification  $\mathbf{A}$  est détaillée étape par étape.

Le vecteur de charge n'est pas considéré dans l'analyse comme dans [Bon+08 ; Bur+10], en supposant que la puissance du terme principal de son approximation est supérieure à l'ordre de précision de l'algorithme de couplage. La relation (3.51) pour un pas de temps macro devient :

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 \quad (3.55)$$

### Partie libre du sous-domaine A sur le macro pas de temps $[t_0; t_m]$

Le développement commence par la décomposition de l'équation du mouvement en une partie libre et une partie liée. Ainsi, le problème libre pour le sous-domaine A est résolu à l'instant  $t_m$  :

$$\tilde{\mathbf{M}}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A = -\mathbf{K}^A \mathbf{U}_m^{pA} \quad (3.56)$$

et le problème lié à l'instant  $t_m$  :

$$\tilde{\mathbf{M}}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A = \mathbf{L}^{AT} \boldsymbol{\Lambda}_m \quad (3.57)$$

Pour le sous-domaine A, les formules d'approximation de Newmark sont utilisées :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A &= \dot{\mathbf{U}}_m^{pA} + \alpha_2^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \\ \mathbf{U}_{m,free}^A &= \mathbf{U}_m^{pA} + \alpha_1^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec les notations  $\alpha_1^A = \beta^A h^{A^2}$  et  $\alpha_2^A = \gamma^A h^A$ . Les expressions des prédicteurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_m^{pA} &= \dot{\mathbf{U}}_0^A + h^A(1 - \gamma^A)\ddot{\mathbf{U}}_0^A \\ \mathbf{U}_m^{pA} &= \mathbf{U}_0^A + h^A\dot{\mathbf{U}}_0^A + h^{A^2}\left(\frac{1}{2} - \beta^A\right)\ddot{\mathbf{U}}_0^A\end{aligned}\quad (3.59)$$

En utilisant Eq. (3.56) et les approximations de Newmark dans Eq. (3.58) et Eq. (3.59), la relation pour le sous-domaine A entre le vecteur d'état libre à l'instant  $t_m$  et le vecteur d'état à l'instant  $t_0$  est obtenue :

$$\mathbf{X}_{m,free}^A = \mathbf{A}_{free}^{AA} \mathbf{X}_0 \quad (3.60)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{free}^{AA}$  donnée par :

$$\mathbf{A}_{free}^{AA} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \alpha_1^A \mathbf{Z}_1 & h^A (\mathbf{I} + \alpha_1^A \mathbf{Z}_1) & \mathbf{0} & \left(\frac{1}{2} - \beta^A\right) h^{A^2} (\mathbf{I} + \alpha_1^A \mathbf{Z}_1) \\ \alpha_2^A \mathbf{Z}_1 & \mathbf{I} + \alpha_2^A h^A \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & (1 - \gamma^A) h^A \mathbf{I} + \alpha_2^A \left(\frac{1}{2} - \beta^A\right) h^{A^2} \mathbf{Z}_1 \\ \alpha_2^A \mathbf{Z}_1 & \mathbf{I} + \alpha_2^A h^A \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & (1 - \gamma^A) h^A \mathbf{I} + \alpha_2^A \left(\frac{1}{2} - \beta^A\right) h^{A^2} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_1 & h^A \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \left(\frac{1}{2} - \beta^A\right) h^{A^2} \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

avec la matrice  $\mathbf{Z}_1$  qui est définie comme :  $\mathbf{Z}_1 = -\tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{K}^A$ . Dans le cas de l'oscillateur partitionné, la matrice identité  $\mathbf{I}$  devient égale à la valeur scalaire 1 et la matrice  $\mathbf{A}_{free}^{AA}$  est de taille  $4 \times 4$ .

### Partie libre du sous-domaine B sur un micro pas de temps $[t_{j-1}; t_j]$

Pour le sous-domaine B, un pas de temps micro donné par l'intervalle de temps  $[t_{j-1}; t_j]$  est considéré, avec l'indice  $j$  allant de 1 à  $m$  de façon à couvrir le pas de temps macro  $[t_0; t_m]$ . Le pas de temps micro est donné par  $h^B = t_j - t_{j-1}$ . Le développement commence par la décomposition de l'équation du mouvement en une partie libre et une partie liée. Ainsi, le problème libre du sous-domaine B à l'instant  $t_j$  s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{M}}^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B = -\mathbf{K}^B \mathbf{U}_j^{pB} \quad (3.62)$$

et le problème lié à l'instant  $t_j$  :

$$\tilde{\mathbf{M}}^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B = \mathbf{L}^{B^T} \mathbf{\Lambda}_j \quad (3.63)$$

Pour le sous-domaine B, les formules d'approximation de Newmark sont utilisées :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B &= \dot{\mathbf{U}}_j^{pB} + \alpha_2^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \\ \mathbf{U}_{j,free}^B &= \mathbf{U}_j^{pB} + \alpha_1^B \ddot{\mathbf{U}}_{j,free}^B\end{aligned}\quad (3.64)$$

avec les notations  $\alpha_1^B = \beta^B h^{B^2}$  et  $\alpha_2^B = \gamma^B h^B$ , les prédicteurs sont définis :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_j^{pB} &= \dot{\mathbf{U}}_{j-1}^B + h^B(1 - \gamma^B)\ddot{\mathbf{U}}_{j-1}^B \\ \mathbf{U}_j^{pB} &= \mathbf{U}_{j-1}^B + h^B\dot{\mathbf{U}}_{j-1}^B + h^{B^2}\left(\frac{1}{2} - \beta^B\right)\ddot{\mathbf{U}}_{j-1}^B\end{aligned}\quad (3.65)$$

En utilisant Eq. (3.62) et les approximations de Newmark dans Eq. (3.64) et Eq. (3.65), la relation pour le sous-domaine B entre le vecteur d'état libre à l'instant  $t_j$  et le vecteur d'état à l'instant  $t_{j-1}$  est obtenue :

$$\mathbf{X}_{j,free}^B = \mathbf{A}_{free}^{BB} \mathbf{X}_{j-1} \quad (3.66)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{free}^{BB}$  donnée ci-dessous :

$$\mathbf{A}_{free}^{BB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \alpha_1^B \mathbf{Z}_2 & h^B (\mathbf{I} + \alpha_1^B \mathbf{Z}_2) & \left(\frac{1}{2} - \beta^B\right) h^{B^2} (\mathbf{I} + \alpha_1^B \mathbf{Z}_2) \\ \alpha_2^B \mathbf{Z}_2 & \mathbf{I} + \alpha_2^B h^B \mathbf{Z}_2 & (1 - \gamma^B) h^B \mathbf{I} + \alpha_2^B \left(\frac{1}{2} - \beta^B\right) h^{B^2} \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_2 & h^B \mathbf{Z}_2 & \left(\frac{1}{2} - \beta^B\right) h^{B^2} \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

avec la matrice  $\mathbf{Z}_2$  définie comme :  $\mathbf{Z}_2 = -\tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{K}^B$ . Dans le cas de l'oscillateur partitionné, la matrice identité  $\mathbf{I}$  devient égale à la valeur scalaire 1 et la matrice  $\mathbf{A}_{free}^{BB}$  est de taille  $3 \times 3$ .

### Partie liée du sous-domaine B sur un micro pas de temps $[t_{j-1}; t_j]$

Au micro temps  $t_j$  avec  $j \leq m - 1$ , nous supposons la continuité de la vitesse exprimée comme :

$$\mathbf{L}^A \dot{\mathbf{U}}_j^A + \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_j^B = 0 \quad (3.68)$$

ce qui conduit au problème d'interface dont l'inconnu est le multiplicateur de Lagrange au temps  $t_j$  :

$$\mathbf{H}_{vel} \boldsymbol{\Lambda}_j = -\mathbf{L}^A \left[ \frac{j}{m} \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A + \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \right] - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \quad (3.69)$$

avec

$$\mathbf{H}_{vel} = \alpha_2^A \mathbf{L}^A \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} + \alpha_2^B \mathbf{L}^B \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{BT} \quad (3.70)$$

Le multiplicateur de Lagrange est utilisé dans le problème de liaison du sous-domaine B, donné dans Eq. (3.63), afin d'exprimer l'accélération de la liaison :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B = \tilde{\mathbf{M}}^{B-1} \mathbf{L}^{BT} \mathbf{H}_{vel}^{-1} \left( -\mathbf{L}^A \left[ \frac{j}{m} \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A + \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \dot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \right] - \mathbf{L}^B \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \right) \quad (3.71)$$

En introduisant :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_3 &= -\tilde{\mathbf{M}}^{B-1} \mathbf{L}^{BT} \mathbf{H}_{vel}^{-1} \mathbf{L}^A \\ \mathbf{Z}_4 &= -\tilde{\mathbf{M}}^{B-1} \mathbf{L}^{BT} \mathbf{H}_{vel}^{-1} \mathbf{L}^B \end{aligned} \quad (3.72)$$

l'accélération liée devient :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B = \mathbf{Z}_3 \left[ \frac{j}{m} \dot{\mathbf{U}}_{m,free}^A + \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \dot{\mathbf{U}}_{0,free}^A \right] + \mathbf{Z}_4 \dot{\mathbf{U}}_{j,free}^B \quad (3.73)$$

L'accélération liée peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{j,link}^B = \mathbf{W}_j^A \mathbf{X}_0^A + \mathbf{W}^B \mathbf{X}_{j-1}^B \quad (3.74)$$

avec la matrice  $\mathbf{W}_j^A$ , dépendant de l'indice  $j$ , donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^A &= \begin{bmatrix} \frac{j}{m} \alpha_2^A \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_1 & \frac{j}{m} (\mathbf{Z}_3 + \alpha_2^A h^A \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_1) & \dots \\ \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \mathbf{Z}_3 & \frac{j}{m} \left( h^A (1 - \gamma^A) \mathbf{Z}_3 + \alpha_2^A h^{A^2} \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_1 \left( \frac{1}{2} - \beta^A \right) \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.75)$$

et la matrice  $\mathbf{W}^B$ , indépendante de l'indice  $j$ , donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^B &= \begin{bmatrix} \alpha_2^B \mathbf{Z}_4 \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_4 + \alpha_2^B h^B \mathbf{Z}_4 \mathbf{Z}_2 & \dots \\ (1 - \gamma^B) h^B \mathbf{Z}_4 + \alpha_2^B \left( \frac{1}{2} - \beta^B \right) h^{B^2} \mathbf{Z}_4 \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Enfin, la relation est écrite en termes de vecteurs d'état :

$$\mathbf{X}_{j,link}^B = \mathbf{A}_{j,link}^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}_{link}^{BB} \mathbf{X}_{j-1}^B \quad (3.77)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{j,link}^{BA}$  :

$$\mathbf{A}_{j,link}^{BA} = \begin{bmatrix} \alpha_1^B \mathbf{W}_j^A \\ \alpha_2^B \mathbf{W}_j^A \\ \mathbf{W}_j^A \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

et la matrice  $\mathbf{A}_{link}^{BB}$  :

$$\mathbf{A}_{link}^{BB} = \begin{bmatrix} \alpha_1^B \mathbf{W}^B \\ \alpha_2^B \mathbf{W}^B \\ \mathbf{W}^B \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

**Vecteur d'état complet du sous-domaine B sur un micro pas de temps  $[t_{j-1}; t_j]$**

Nous ajoutons la solution libre précédente dans Eq. (3.66) à la solution de liaison dans Eq. (3.77) pour obtenir :

$$\mathbf{X}_j^B = \mathbf{A}_j^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}^{BB} \mathbf{X}_{j-1}^B \quad (3.80)$$

avec les notations simplifiées  $\mathbf{A}_j^{BA} = \mathbf{A}_{j,link}^{BA}$  et  $\mathbf{A}^{BB} = \mathbf{A}_{free}^{BB} + \mathbf{A}_{link}^{BB}$ .

**Relation de récurrence pour le vecteur d'état du sous-domaine B à l'instant  $t_{m-1}$**

Nous utilisons Eq. (3.80) pour  $j$  variant de 1 à  $m-1$ . Pour  $j=1$ , la relation s'écrit :

$$\mathbf{X}_1^B = \mathbf{A}_1^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}^{BB} \mathbf{X}_0^B \quad (3.81)$$

Pour  $j=2$ , l'équation (3.80) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2^B &= \mathbf{A}_2^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}^{BB} \mathbf{X}_1^B \\ &= (\mathbf{A}_2^{BA} + \mathbf{A}^{BB} \mathbf{A}_1^{BA}) \mathbf{X}_0^A + (\mathbf{A}^{BB})^2 \mathbf{X}_0^B \end{aligned} \quad (3.82)$$

En raisonnant par récurrence, on peut exprimer le vecteur d'état relatif au sous-domaine B à l'instant  $t_{m-1}$  :

$$\mathbf{X}_{m-1}^B = \left( \sum_{j=1}^{m-1} (\mathbf{A}^{BB})^{m-1-j} \mathbf{A}_j^{BA} \right) \mathbf{X}_0^A + (\mathbf{A}^{BB})^{m-1} \mathbf{X}_0^B \quad (3.83)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations simplifiées suivantes :

$$\mathbf{A}_{m-1}^{BA\star} = \left( \sum_{j=1}^{m-1} (\mathbf{A}^{BB})^{m-1-j} \mathbf{A}_j^{BA} \right) \quad (3.84)$$

et

$$\mathbf{A}_{m-1}^{BB\star} = (\mathbf{A}^{BB})^{m-1} \quad (3.85)$$

En conséquence, le vecteur d'état relatif au sous-domaine B à l'instant  $t_{m-1}$  s'écrit :

$$\mathbf{X}_{m-1}^B = \mathbf{A}_{m-1}^{BA\star} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}_{m-1}^{BB\star} \mathbf{X}_0^B \quad (3.86)$$

**Partie libre du sous-domaine B sur le dernier micro pas de temps  $[t_{m-1}; t_m]$**

La partie libre du sous-domaine B sur un micro pas de temps s'écrit :

$$\mathbf{X}_{m,free}^B = \mathbf{A}_{free}^{BB} \mathbf{X}_{m-1}^B \quad (3.87)$$

En utilisant Eq. (3.86), celle-ci devient :

$$\mathbf{X}_{m,free}^B = \mathbf{A}_{m,free}^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}_{m,free}^{BB} \mathbf{X}_0^B \quad (3.88)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m,free}^{BA} &= \mathbf{A}_{free}^{BB} \mathbf{A}_{m-1}^{BA\star} \\ \mathbf{A}_{m,free}^{BB} &= \mathbf{A}_{free}^{BB} \mathbf{A}_{m-1}^{BB\star} \end{aligned} \quad (3.89)$$

**Partie liée du sous-domaine B sur le dernier micro pas de temps  $[t_{m-1}; t_m]$**

Au dernier pas de temps micro  $[t_{m-1}; t_m]$ , nous supposons la continuité de l'accélération au temps  $t_m$ , exprimée comme :

$$\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_m^A + \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_m^B = 0 \quad (3.90)$$

ce qui conduit au problème d'interface dont l'inconnue est le multiplicateur de Lagrange au temps  $t_m$  :

$$\mathbf{H}_{acc} \boldsymbol{\Lambda}_m = -\mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A - \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \quad (3.91)$$

avec

$$\mathbf{H}_{acc} = \mathbf{L}^A \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} + \mathbf{L}^B \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{BT} \quad (3.92)$$

L'accélération liée s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^B = -\tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A - \tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \quad (3.93)$$

En introduisant :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_3^* &= -\tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^A \\ \mathbf{Z}_4^* &= -\tilde{\mathbf{M}}^{B^{-1}} \mathbf{L}^{B^T} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^B \end{aligned} \quad (3.94)$$

l'accélération liée devient :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^B = \mathbf{Z}_3^* \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A + \mathbf{Z}_4^* \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \quad (3.95)$$

L'accélération liée peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^B = \mathbf{V}^A \mathbf{X}_0^A + \mathbf{V}^B \mathbf{X}_0^B \quad (3.96)$$

avec les matrices  $\mathbf{V}^A$  et  $\mathbf{V}^B$  données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^A &= \mathbf{Z}_3^* [\mathbf{A}_{free}^{AA}]_{4,:} + \mathbf{Z}_4^* [\mathbf{A}_{free}^{BB}]_{3,:} \mathbf{A}_{m-1}^{BA*} \\ \mathbf{V}^B &= \mathbf{Z}_4^* [\mathbf{A}_{free}^{BB}]_{3,:} \mathbf{A}_{m-1}^{BB*} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Dans l'expression ci-dessus, nous employons la notation  $[\mathbf{A}_{free}^{AA}]_{4,:}$  correspondant à la quatrième ligne de la matrice  $[\mathbf{A}_{free}^{AA}]$  dans le cas de l'oscillateur partitionné et  $[\mathbf{A}_{free}^{BB}]_{3,:}$  la troisième ligne de la matrice  $[\mathbf{A}_{free}^{BB}]$ . Enfin, la relation s'écrit en termes de vecteurs d'état :

$$\mathbf{X}_{m,link}^B = \mathbf{A}_{m,link}^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}_{m,link}^{BB} \mathbf{X}_0^B \quad (3.98)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{m,link}^{BA}$  :

$$\mathbf{A}_{m,link}^{BA} = \begin{bmatrix} \alpha_1^B \mathbf{V}^A \\ \alpha_2^B \mathbf{V}^A \\ \mathbf{V}^A \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{m,link}^{BB}$  :

$$\mathbf{A}_{m,link}^{BB} = \begin{bmatrix} \alpha_1^B \mathbf{V}^B \\ \alpha_2^B \mathbf{V}^B \\ \mathbf{V}^B \end{bmatrix} \quad (3.100)$$



### Vecteur d'état complet du sous-domaine B à l'instant $t_m$

Nous ajoutons la solution libre précédente dans Eq. (3.88) à la solution de liaison dans Eq. (3.98), au temps  $t_m$ , pour obtenir :

$$\mathbf{X}_m^B = \mathbf{A}^{BA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}^{BB} \mathbf{X}_0^B \quad (3.101)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{BA} &= \mathbf{A}_{m,free}^{BA} + \mathbf{A}_{m,link}^{BA} \\ \mathbf{A}^{BB} &= \mathbf{A}_{m,free}^{BB} + \mathbf{A}_{m,link}^{BB} \end{aligned} \quad (3.102)$$

### Partie liée du sous-domaine A sur le macro pas de temps $[t_0; t_m]$

L'accélération liée s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A = -\tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^A \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A - \tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^B \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \quad (3.103)$$

En introduisant

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_5 &= -\tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^A \\ \mathbf{Z}_6 &= -\tilde{\mathbf{M}}^{A^{-1}} \mathbf{L}^{AT} \mathbf{H}_{acc}^{-1} \mathbf{L}^B \end{aligned} \quad (3.104)$$

l'accélération liée devient :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A = \mathbf{Z}_5 \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^A + \mathbf{Z}_6 \ddot{\mathbf{U}}_{m,free}^B \quad (3.105)$$

L'accélération liée peut aussi s'écrire :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{m,link}^A = \mathbf{T}^A \mathbf{X}_0^A + \mathbf{T}^B \mathbf{X}_0^B \quad (3.106)$$

avec les matrices  $\mathbf{T}^A$  et  $\mathbf{T}^B$  données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^A &= \mathbf{Z}_5 [\mathbf{A}_{free}^{AA}]_{4,:} + \mathbf{Z}_6 [\mathbf{A}_{free}^{BB}]_{3,:} \mathbf{A}_{m-1}^{BA\star} \\ \mathbf{T}^B &= \mathbf{Z}_6 [\mathbf{A}_{free}^{BB}]_{3,:} \mathbf{A}_{m-1}^{BB\star} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Enfin, la relation est écrite en termes de vecteurs d'état :

$$\mathbf{X}_{m,link}^A = \mathbf{A}_{m,link}^{AA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}_{m,link}^{AB} \mathbf{X}_0^B \quad (3.108)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{m,link}^{AA}$  :

$$\mathbf{A}_{m,link}^{AA} = \begin{bmatrix} \alpha_1^A \mathbf{T}^A \\ \alpha_2^A \mathbf{T}^A \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^A \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

et la matrice  $\mathbf{A}_{m,link}^{AB}$  :

$$\mathbf{A}_{m,link}^{AB} = \begin{bmatrix} \alpha_1^A \mathbf{T}^B \\ \alpha_2^A \mathbf{T}^B \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^B \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

**Vecteur d'état complet du sous-domaine A à l'instant  $t_m$**

La solution libre précédente du sous-domaine A dans Eq. (3.60), au temps  $t_m$ , est ajoutée à la solution liée du sous-domaine A dans Eq. (3.108), au temps  $t_m$ , pour obtenir :

$$\mathbf{X}_m^A = \mathbf{A}^{AA} \mathbf{X}_0^A + \mathbf{A}^{AB} \mathbf{X}_0^B \quad (3.111)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{AA} &= \mathbf{A}_{free}^{AA} + \mathbf{A}_{m,link}^{AA} \\ \mathbf{A}^{AB} &= \mathbf{A}_{m,link}^{AB} \end{aligned} \quad (3.112)$$

**Matrice d'amplification reliant les vecteurs d'état globaux sur un macro pas de temps  $[t_0; t_m]$**

Enfin, en utilisant Eq. (3.101) et Eq. (3.111), la matrice globale  $\mathbf{A}$  est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{AA} & \mathbf{A}^{AB} \\ \mathbf{A}^{BA} & \mathbf{A}^{BB} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_m^A \\ \mathbf{X}_m^B \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{AA} & \mathbf{A}^{AB} \\ \mathbf{A}^{BA} & \mathbf{A}^{BB} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0^A \\ \mathbf{X}_0^B \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

### 3.3.2.2 Analyse de la matrice d'amplification

La matrice d'amplification  $\mathbf{A}$  permet d'étudier la stabilité de l'algorithme de couplage. La stabilité de la méthode BLG est analysée en calculant les valeurs propres de la matrice

d'amplification. Les valeurs propres non nulles sont associées à des vecteurs propres linéaires indépendants. Il en résulte que la condition d'un rayon spectral de la matrice d'amplification, noté  $\rho(A)$ , inférieur ou égal à 1 est suffisante pour démontrer la stabilité de la méthode. Le rayon spectral est défini par le maximum du module des valeurs propres. Pour le problème de l'oscillateur partitionné, cette condition s'écrit :

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (3.115)$$

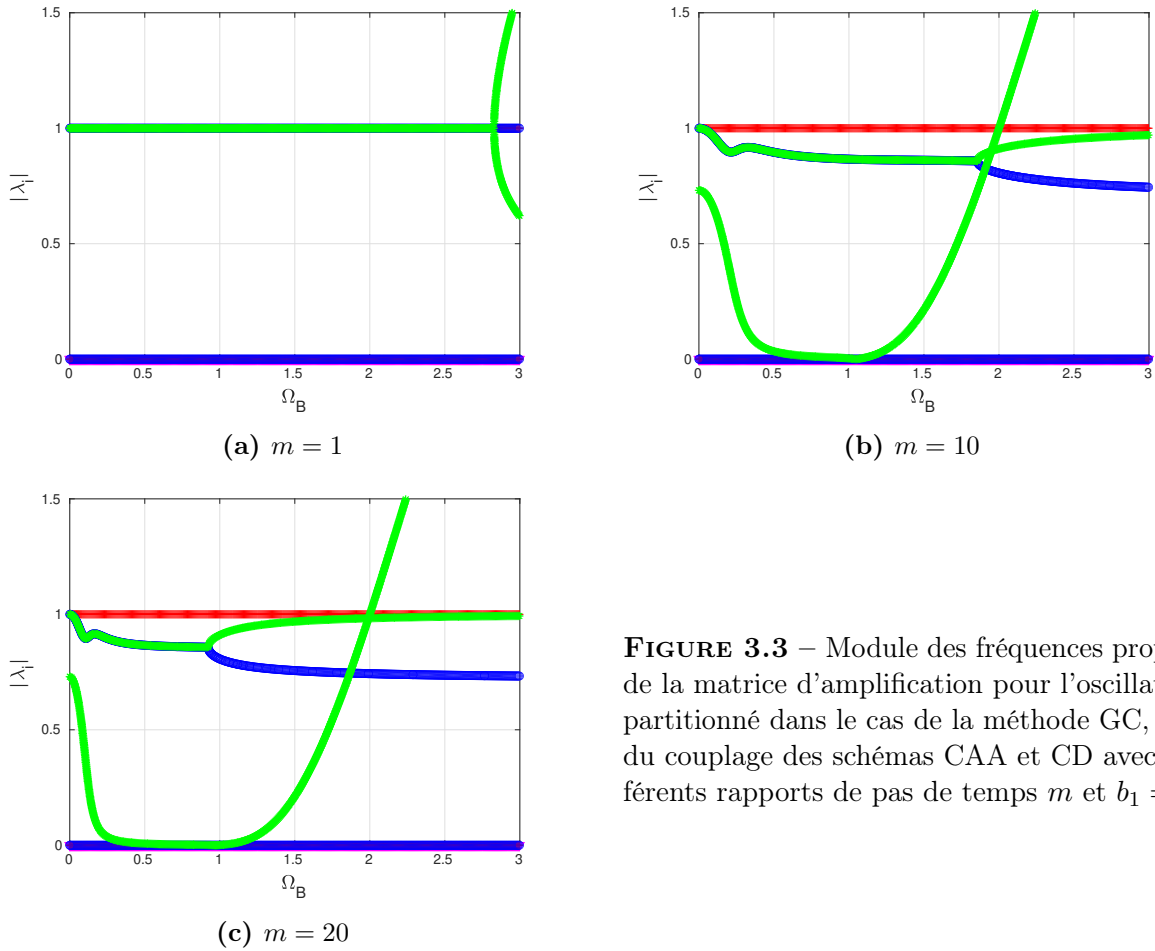
Enfin, la stabilité est étudiée en traçant le module des valeurs propres en fonction de la fréquence angulaire réduite  $\Omega_B = \omega_B h^B$ . Parmi les sept valeurs propres, une seule paire est conjuguée complexe, ce qui donne les valeurs propres principales, tandis que les cinq autres sont des valeurs parasites. Dans notre cas, le rapport de pas de temps  $m$  est fixé à plusieurs valeurs ( $m = 1, 10, 20$ ) pour étudier son influence sur la stabilité de la méthode. A titre de comparaison, l'étude spectrale de la matrice d'amplification liée à la méthode GC a été réalisée selon les travaux de [Bon+08 ; Bur+10].

Le module des fréquences propres est représenté sur la Figure 3.3 où le schéma implicite d'accélération moyenne (Constant Average Acceleration), défini par  $\beta_A = \frac{1}{4}$  et  $\gamma_A = \frac{1}{2}$ , est couplé au schéma explicite des différences centrées (Central Difference), défini par  $\beta_B = 0$  et  $\gamma_B = \frac{1}{2}$ . On peut vérifier que la limite de stabilité est  $\Omega_B = 2$  pour tous les cas avec  $m > 1$ , correspondant à la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [CFL28] liée au sous-domaine B, avec une surperformance dans le cas de  $m = 1$ .

L'étude de la stabilité de la méthode  $GC_{acc}$  est réalisée de la même manière que pour la méthode GC. Le module des fréquences propres est représenté sur la Figure 3.4 où le schéma implicite d'accélération moyenne est couplé au schéma explicite des différences centrées. Pour un rapport de pas de temps  $m = 1$ , une surperformance est présente avec une limite de stabilité supérieure à celle imposée par la condition de stabilité de CFL du sous-domaine B comme pour la méthode GC. Cependant, pour les rapports de pas de temps suivants ( $m = 10$  et  $m = 20$ ) la limite de stabilité est drastiquement réduite par rapport à la limite de stabilité de la méthode GC, correspondant à la limite de stabilité du schéma explicite des différences centrées  $\Omega_B = 2$  utilisé pour le sous-domaine B. En effet, la limite de stabilité pour  $m = 10$  est  $\Omega_{B,crit} = 0.4734$ , et la limite de stabilité pour  $m = 20$  est  $\Omega_{B,crit} = 0.2385$ .

L'analyse de stabilité de la méthode BLG suit le même processus. Trois configurations sont testées pour différents rapports de pas de temps :

- couplage d'un schéma d'accélération moyenne (CAA) implicite, défini par  $\beta_A = \frac{1}{4}$  et  $\gamma_A = \frac{1}{2}$  avec un autre schéma CAA explicite, défini par  $\beta_B = \frac{1}{4}$  et  $\gamma_B = \frac{1}{2}$ .

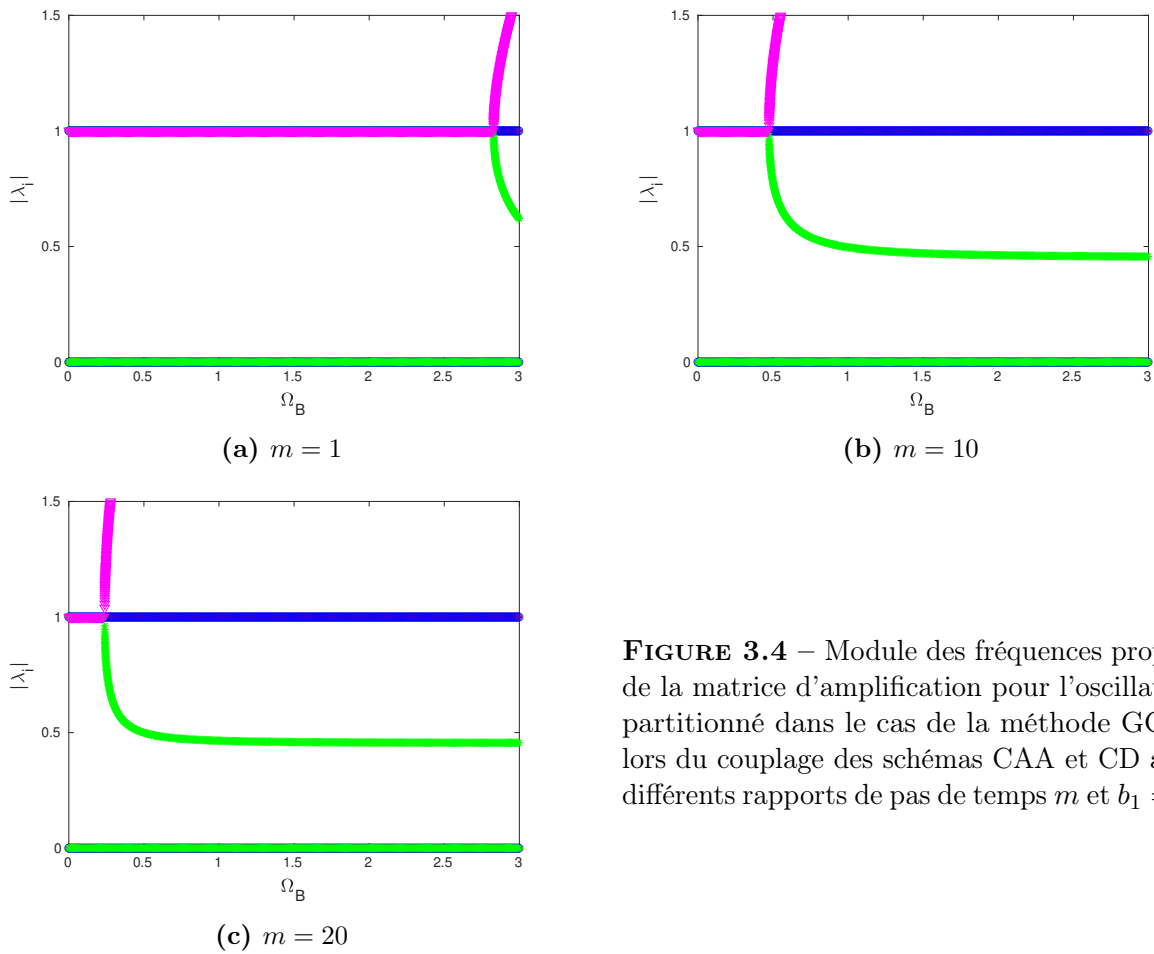


**FIGURE 3.3** – Module des fréquences propres de la matrice d’amplification pour l’oscillateur partitionné dans le cas de la méthode GC, lors du couplage des schémas CAA et CD avec différents rapports de pas de temps  $m$  et  $b_1 = 1$ .

- couplage d’un schéma CAA implicite avec un schéma explicite des différences centrées (CD)
- couplage d’un schéma CD explicite avec un autre schéma CD explicite

Pour la première configuration, dans la Figure 3.5, pour un rapport de pas de temps  $m = 1$ , la méthode est stable pour toutes les valeurs de  $\Omega_B$ . Lorsque  $m \neq 1$ , la méthode devient instable à partir d’une certaine valeur appelée  $\Omega_{B,crit}$  :  $\Omega_{B,crit} \simeq 5$  pour  $m = 10$  et  $\Omega_{B,crit} \simeq 7$  pour  $m = 20$ . Contrairement à la méthode GC, qui est inconditionnellement stable avec des intégrateurs temporels inconditionnellement stables, la méthode proposée devient instable pour une certaine valeur de  $\Omega_{B,crit}$  dépendant du rapport de pas de temps  $m$ . Cependant, la limite de stabilité  $\Omega_{B,crit}$  est largement supérieure à la condition CFL  $\Omega_{B,crit} = 2$  [CFL28] et augmente en fonction du rapport de pas de temps  $m$ .

Pour la deuxième configuration, représentée sur la Figure 3.6, le rapport de pas de temps  $m = 1$  donne une instabilité à  $\Omega_B = 2.8$ , donc supérieure à la condition CFL comme trouvée dans le cas de la méthode GC. Lorsque  $m \neq 1$ , la méthode BLG devient instable

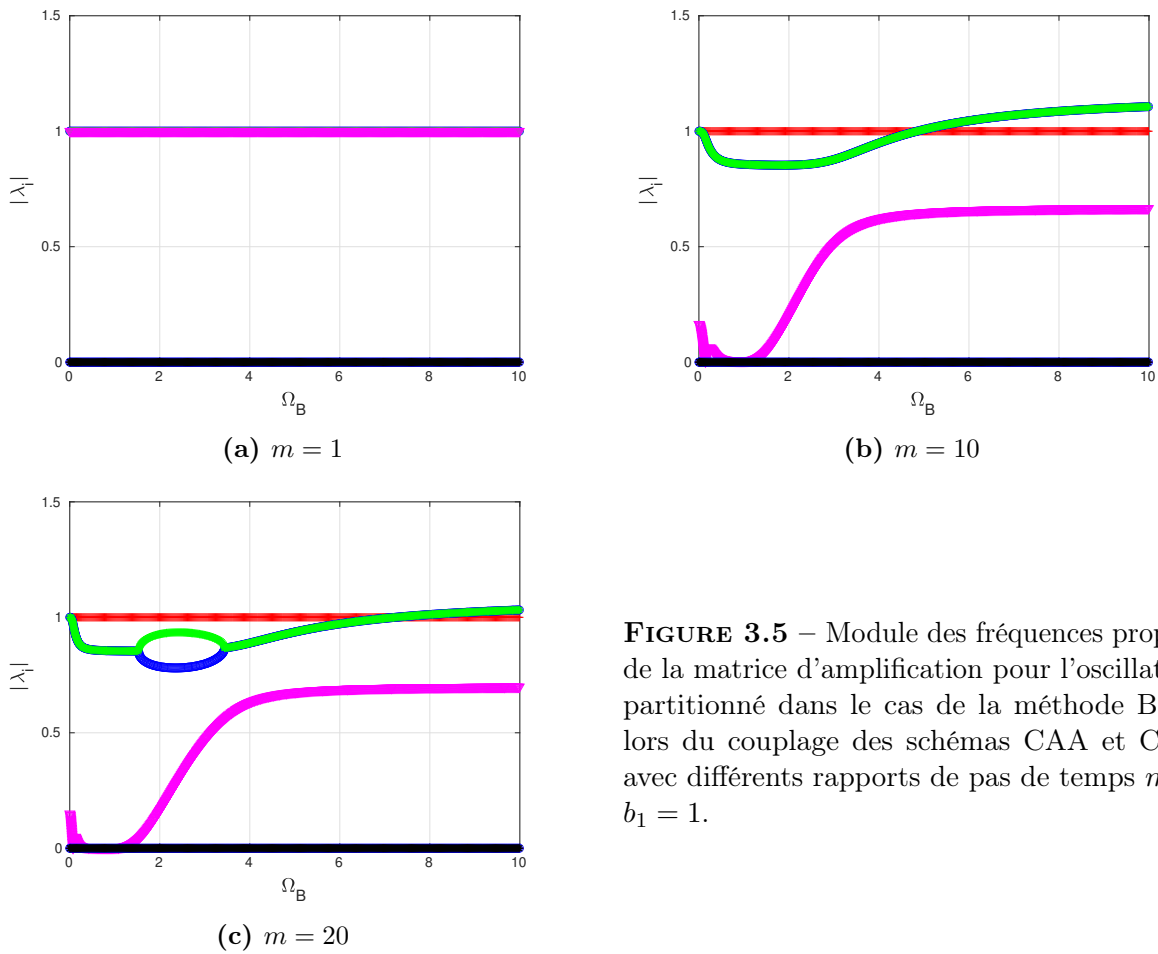


**FIGURE 3.4** – Module des fréquences propres de la matrice d’amplification pour l’oscillateur partitionné dans le cas de la méthode  $GC_{acc}$ , lors du couplage des schémas CAA et CD avec différents rapports de pas de temps  $m$  et  $b_1 = 1$ .

pour une valeur proche mais inférieure à la condition CFL. Plus le rapport de pas de temps  $m$  augmente, plus  $\Omega_{B,crit}$  semble tendre vers 2.

Pour la troisième configuration, représentée sur la Figure 3.7, correspondant au couplage explicite/explicite, nous considérons différentes valeurs du paramètre  $b_1$  afin de prendre en compte des situations avec des tailles d’éléments différentes ou des matériaux élastiques hétérogènes, comme exploré dans [Cho+19]. Pour chaque rapport de pas de temps  $m$ , le paramètre  $b_1$  est choisi de telle sorte que  $b_1 = m$ . Comme observé sur la Figure 3.7, la méthode BLG devient instable à une valeur légèrement inférieure à la condition CFL mais très proche. Plus le rapport de pas de temps  $m$  augmente, plus  $\Omega_{B,crit}$  semble tendre vers 2. Ce cas de couplage explicite/explicite est intéressant car la méthode BLG s’avère être aussi stable que la méthode GC, avec l’avantage, comme on le montrera dans la suite, d’être précise au second ordre, surpassant la méthode GC.

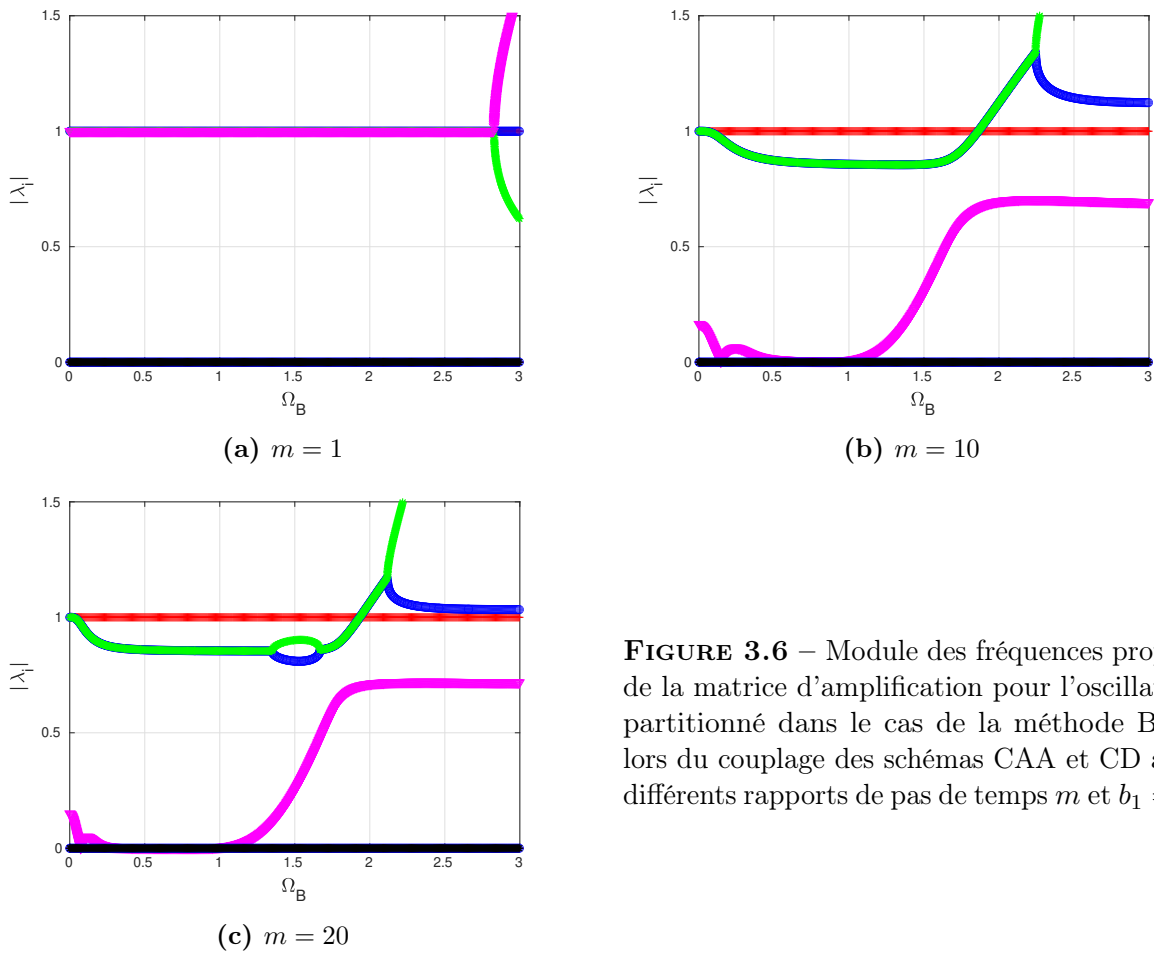
Les figures précédentes montrent que la méthode BLG devient instable pour  $\Omega_{B,crit}$  en fonction du rapport de pas de temps  $m$ . Dans la Figure 3.8, la limite de stabilité  $\Omega_{B,crit}$  est tracée en fonction du rapport de pas de temps  $m$ , pour différents cas de couplage (CD/CD,



**FIGURE 3.5** – Module des fréquences propres de la matrice d’amplification pour l’oscillateur partitionné dans le cas de la méthode BLG, lors du couplage des schémas CAA et CAA avec différents rapports de pas de temps  $m$  et  $b_1 = 1$ .

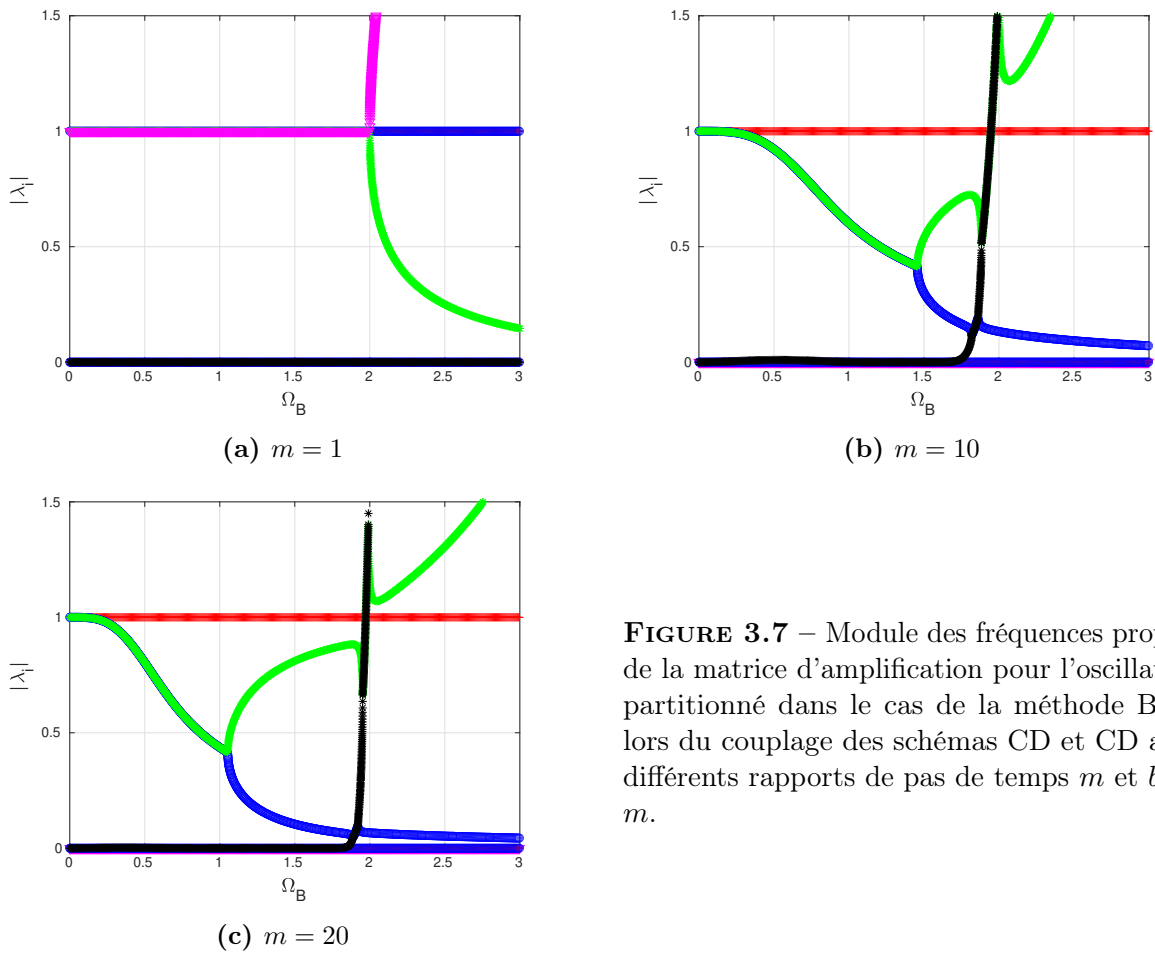
CAA/CD) et différentes valeurs de  $b_1$ . À l’exception de la surperformance pour le cas  $m = 1$ , le couplage devient instable pour  $\Omega_{B,crit}$  inférieur à la condition CFL mais  $\Omega_{B,crit}$  tend rapidement vers la condition CFL lorsque le rapport de pas de temps augmente. En outre, on constate que la prise en compte de différentes tailles d’éléments finis ou de matériaux élastiques ( $b_1 = m$ ) a un effet positif sur la stabilité.

Il est également important de souligner que, d’un point de vue industriel, la configuration  $b_1 = 1$  représente le pire cas d’utilisation de la méthode BLG pour coupler le schéma CAA avec le schéma CD, nous indiquant la limite de stabilité  $\Omega_{B,crit}$  à adopter pour un  $m$  fixe. Dans la Figure 3.9, les principales valeurs propres sont tracées dans le plan complexe pour le cas du couplage CAA/CD avec un rapport de pas de temps fixe  $m = 20$ . Tant que les valeurs propres restent dans le cercle unitaire, tracé en pointillés et en vert, caractérisé par son centre  $[0; 0]$  et un rayon égal à 1, les algorithmes de couplage GC,  $GC_{acc}$  et BGL restent stables. Dans le cas de la méthode GC, on constate que les positions des valeurs propres complexes conjuguées partent du point droit du cercle unitaire, à la position  $[1; 0]$ , correspondant au cas avec le petit pas de temps. Puis, à mesure que le pas de temps



**FIGURE 3.6** – Module des fréquences propres de la matrice d'amplification pour l'oscillateur partitionné dans le cas de la méthode BLG, lors du couplage des schémas CAA et CD avec différents rapports de pas de temps  $m$  et  $b_1 = 1$ .

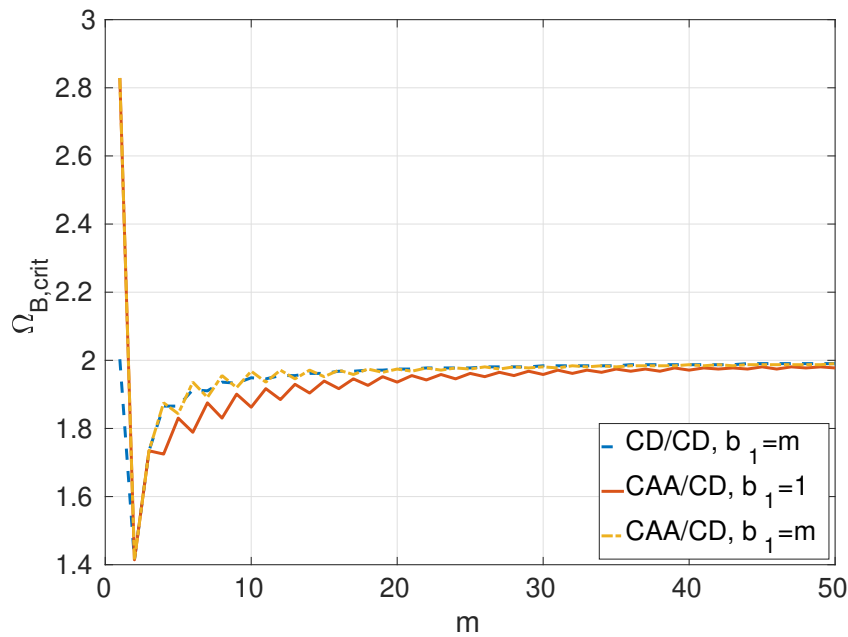
augmente, en gardant le rapport de pas de temps  $m$  constant, les positions des valeurs propres pour la méthode GC décrivent des branches circulaires, avec le point central  $[0; 0]$ , depuis le point de départ  $[1; 0]$  jusqu'au point final, proche de  $[-1; 0]$ . Les deux branches liées aux deux valeurs propres principales liées à la méthode GC forment un cercle fermé. Une branche circulaire reste à l'intérieur du cercle unitaire tandis que l'autre branche sort du cercle unitaire, vers des valeurs réelles négatives inférieures à  $-1$ , indiquant la limite de stabilité pour une certaine valeur du pas de temps. Afin de visualiser la limite de stabilité,  $\Omega_{B,crit}$  est représenté sur la Figure 3.9 avec un point bleu pour la méthode GC. Elle correspond à la condition CFL caractérisée par  $\Omega_{B,crit} = 2$ . Cette évolution des valeurs propres dans le plan complexe à mesure que le pas de temps augmente correspond à l'évolution des valeurs propres du schéma CD, décrite par exemple dans [CR08]. Dans le cas de la méthode  $GC_{acc}$ , les principales valeurs propres complexes de l'amplification sont représentées dans le plan complexe. Le point de départ des valeurs propres est situé près du point  $[1; 0]$  et décrit ensuite deux branches circulaires pour finalement former un cercle fermé, proche du point final du cercle unitaire  $[-1; 0]$ . À partir d'un certain pas de temps, les



**FIGURE 3.7** – Module des fréquences propres de la matrice d’amplification pour l’oscillateur partitionné dans le cas de la méthode BLG, lors du couplage des schémas CD et CD avec différents rapports de pas de temps  $m$  et  $b_1 = m$ .

valeurs propres principales complexes bifurquent et deviennent toutes deux réelles. Après la bifurcation, une valeur propre réelle se dirige vers le centre du cercle tandis que l’autre sort du cercle unitaire, ce qui indique la limite de stabilité de l’algorithme de couplage. Le cercle fermé dans le plan complexe obtenu avec la méthode  $GC_{acc}$  est très similaire à celui obtenu avec le schéma de différence centrale seul [CR08]. Pour le schéma CD, la limite de stabilité correspond à la condition CFL  $\Omega_{B,crit} = 2$ . Comme les valeurs propres liées à l’algorithme de couplage  $GC_{acc}$  décrivent avec précision le cercle unitaire, on peut conclure que la méthode de couplage  $GC_{acc}$  n’entraîne pas d’amortissement numérique, contrairement à la méthode GC et à la méthode BLG proposée. Néanmoins, nous traçons également la limite de stabilité, indiquée par un point dans la Figure 3.9. Elle correspond à la valeur  $\Omega_{B,crit} = 0.2385$ , montrant une forte diminution de la limite de stabilité de l’algorithme de couplage  $GC_{acc}$ . Pour un rapport de pas de temps  $m = 100$ , les deux branches circulaires décrites par les valeurs propres complexes sont représentées sur la Figure 3.10. La limite de stabilité, indiquée par un point, est à nouveau réduite par rapport au cas  $m = 20$ , avec une valeur  $\Omega_{B,crit} = 0,048$ . En conséquence, bien que l’algorithme de couplage  $GC_{acc}$  ait





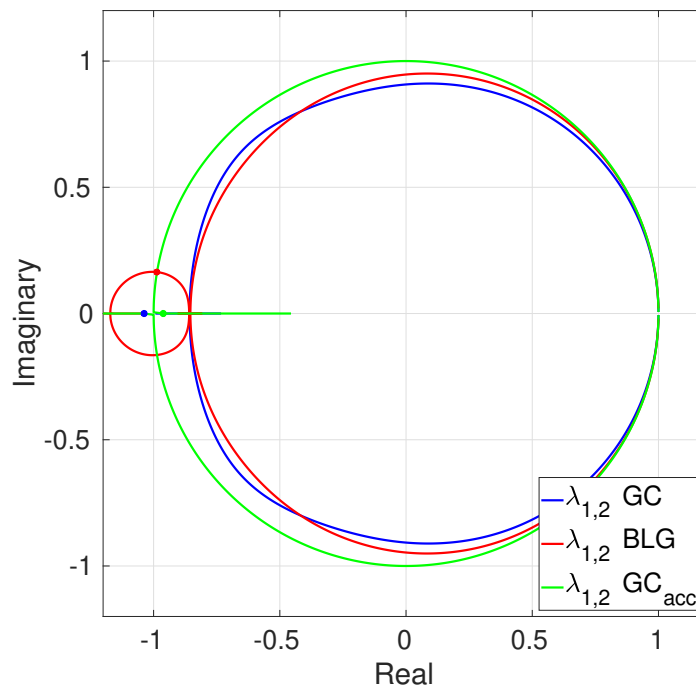
**FIGURE 3.8** – Evolution de la limite de stabilité  $\Omega_{B,crit}$  en fonction du ratio entre les pas de temps  $m$ .

des propriétés très intéressantes en termes d'amortissement numérique, la forte réduction de la limite de stabilité lorsque le rapport des pas de temps augmente est prohibitive pour son utilisation dans les problèmes de couplage hétérogène à plusieurs pas de temps.

Dans le cas de la méthode BLG, les valeurs propres décrivent d'abord, comme pour la méthode GC et la méthode  $GC_{acc}$ , des cercles fermés, du point de départ  $[1; 0]$  au point d'arrivée proche de  $[0; 1]$ , appartenant au cercle unitaire. Ensuite, les valeurs propres décrivent un second cercle, plus petit que le précédent, avec des valeurs propres sortant du cercle unitaire, indiquées par le point rouge pour lequel la limite de stabilité est égale à  $\Omega_{B,crit} = 1,93$ , donc légèrement inférieure à la condition CFL. Globalement, en comparant les positions des valeurs propres des méthodes GC et BLG, on constate que les cercles fermés liés aux deux méthodes sont proches l'un de l'autre. Néanmoins, dans la première partie de la branche circulaire, du point de départ  $[1; 0]$  au point  $[0; 1]$ , on peut observer que les branches circulaires de la méthode BLG semblent plus proches du cercle unitaire que les branches circulaires de la méthode GC. Cela semble indiquer que la méthode BLG est meilleure que la méthode GC en termes d'ordre de précision et de propriétés de conservation de l'énergie. Ces observations seront confirmées dans la suite du paragraphe. Pour évaluer plus précisément les différences en termes de limite de stabilité entre les méthodes BLG,  $GC_{acc}$  et GC, les  $\Omega_{B,crit}$  sont résumés dans le Tableau 3.1 pour le couplage CAA/CD et pour deux rapports de pas de temps,  $m$  égal à 20 et 100. Dans le cas précédent de  $m = 20$ , les limites de stabilité  $\Omega_{B,crit}$  sont différentes pour les trois méthodes : GC  $\Omega_{B,crit} = 2$ ,

$GC_{acc}$   $\Omega_{B,crit} = 0.2385$  et BLG  $\Omega_{B,crit} = 1,93$ . En augmentant le rapport des pas de temps  $m$ , on constate que  $\Omega_{B,crit}$  pour la méthode BLG tend vers la condition CFL  $\Omega_{B,crit} = 2$ . Cela est confirmé par la Figure 3.10 avec le rapport de pas de temps  $m = 100$ . On constate que le deuxième cercle fermé est plus petit dans le cas  $m = 100$  que dans le cas  $m = 20$ . Ainsi la limite de stabilité  $\Omega_{B,crit}$ , indiquée par le point rouge, tend vers la condition CFL : Ici, comme déjà donné dans le Tableau 3.1, nous avons BLG  $\Omega_{B,crit} = 1.99$ .

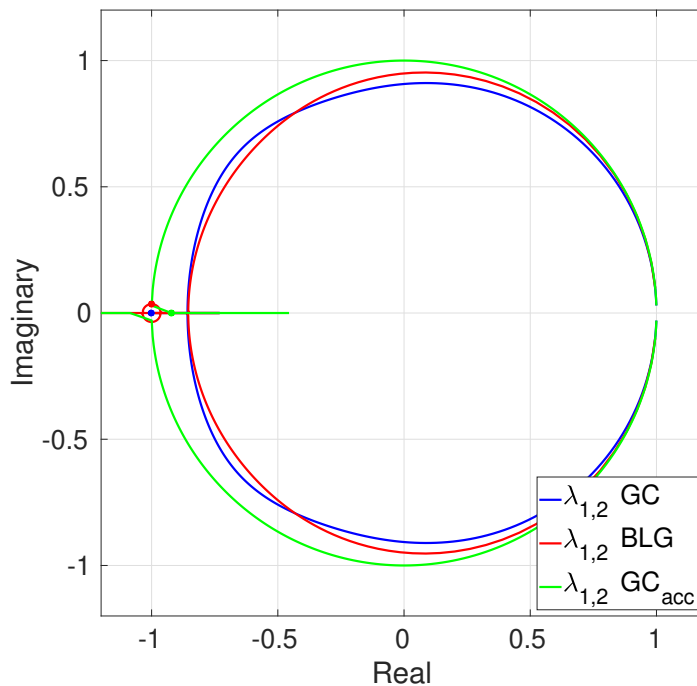
Comme le montre le Tableau 3.1, la méthode GC permet de conserver la condition CFL dans le cas du couplage CAA/CD comme démontré dans [Gra00]. La première méthode, appelée précédemment  $GC_{acc}$ , montre une réduction drastique de la limite de stabilité lorsque le rapport des pas de temps  $m$  augmente. Néanmoins les valeurs propres décrivent exactement le cercle unitaire, présentant des caractéristiques intéressantes en termes d'ordre de précision et d'amortissement numérique, au prix d'une réduction prohibitive de la limite de stabilité.



**FIGURE 3.9** – Evolution des valeurs propres principales de la matrice d'amplification dans le plan complexe pour les méthodes BGL et GC, lors du couplage des schémas CAA et CD pour  $m = 20$ .

	$m = 20$	$m = 100$
$\Omega_{B,crit}$ GC	2	2
$\Omega_{B,crit}$ BLG	1,93	1,99
$\Omega_{B,crit}$ GC <sub>acc</sub>	0,2385	0,048

**TABLEAU 3.1** – Résumé de  $\Omega_{B,crit}$  pour les trois méthodes étudiées pour le couplage des schémas CAA et CD pour  $m = 20$  et  $m = 100$ .



**FIGURE 3.10** – Evolution des valeurs propres principales de la matrice d'amplification dans le plan complexe pour les méthodes BGL et GC, lors du couplage des schémas CAA et CD pour  $m = 100$ .

### 3.3.3 Erreur de troncature locale

L'erreur de troncature locale  $\bar{\tau}_n$  est définie comme suit :

$$\bar{\tau}_n = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}(t_n) - \bar{\mathbf{X}}(t_{n+1}) \quad (3.116)$$

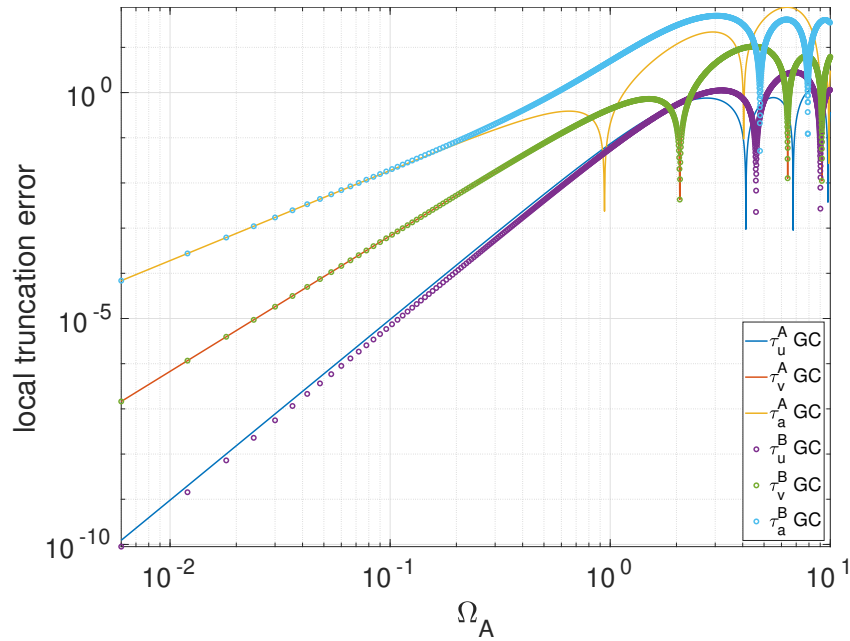
où  $\bar{\mathbf{X}}(t_n)$  et  $\bar{\mathbf{X}}(t_{n+1})$  sont les solutions exactes du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  et  $t_{n+1}$  et  $\mathbf{A}$  reste la matrice d'amplification (3.114) étudiée dans la section précédente. L'erreur de troncature locale s'écrit :  $\bar{\tau}_n = \alpha h^{A^k} + O(h^{A^{k+1}})$ , avec  $\alpha$  une constante et  $k$  la puissance du terme principal de l'erreur de troncature locale. La puissance  $k$  correspond à la pente de l'erreur de troncature dans un graphique log-log.

Avec le couplage GC, la Figure 3.11 donne l'erreur de troncature locale pour  $m = 20$  pour différentes quantités telles que le déplacement, la vitesse, l'accélération, pour les sous-domaines A et B. A partir de la Figure 3.11, les ordres de précision liés aux différentes quantités sont donnés ci-dessous :

$$\bar{\tau}_u^A = O(h^{A^4}) \quad \bar{\tau}_{\dot{u}}^A = O(h^{A^3}) \quad \bar{\tau}_{\ddot{u}}^A = O(h^{A^2}) \quad (3.117)$$

$$\bar{\tau}_u^B = O(h^{A^4}) \quad \bar{\tau}_{\dot{u}}^B = O(h^{A^3}) \quad \bar{\tau}_{\ddot{u}}^B = O(h^{A^2}) \quad (3.118)$$

Le plus petit ordre de précision lié aux différentes quantités fournit la puissance  $k$  du premier terme de l'erreur de troncature locale. On peut donc conclure que la puissance du terme principal des accélérations est égale à 2, ce qui donne une erreur de troncature locale d'ordre 2 pour la méthode GC. On note que l'ordre de précision de  $\bar{\tau}_n$  ne dépend pas de  $m$  dès que  $m > 2$  [GR97; Hug83].



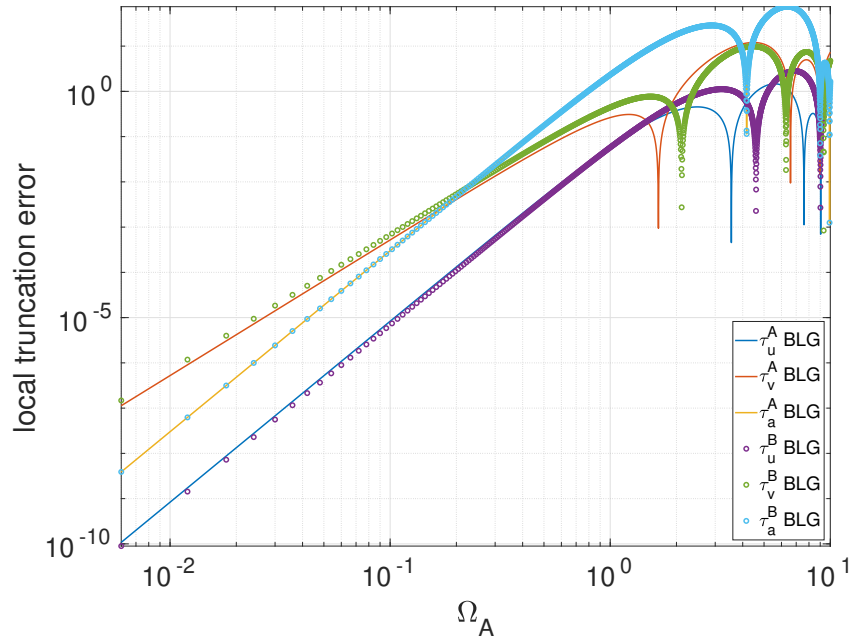
**FIGURE 3.11** – Erreurs de troncature locales  $\bar{\tau}$  de l'oscillateur partitionné, pour différentes quantités (déplacement, vitesse, accélération pour les deux sous-domaines), dans le cas de la méthode GC couplant les schémas CAA et CD avec un rapport de pas de temps  $m = 20$ .

Avec le couplage BLG, les erreurs de troncature locales en termes de déplacement, de vitesse et d'accélération sont représentées sur la Figure 3.12. L'identification des pentes donne :

$$\bar{\tau}_u^A = O(h^{A^4}) \quad \bar{\tau}_{\dot{u}}^A = O(h^{A^3}) \quad \bar{\tau}_{\ddot{u}}^A = O(h^{A^4}) \quad (3.119)$$

$$\bar{\tau}_u^B = O(h^{A^4}) \quad \bar{\tau}_{\dot{u}}^B = O(h^{A^3}) \quad \bar{\tau}_{\ddot{u}}^B = O(h^{A^4}) \quad (3.120)$$

Il ressort que les erreurs de troncature locales en termes d'accélération présentent un ordre de précision égal à 4, au lieu d'un ordre égal à 2 dans le cas de la méthode GC. Les erreurs de troncature locales en termes de vitesse régissent l'ordre de précision de l'erreur de troncature locale égale à 3 dans le cas de la méthode BLG qui est d'un ordre supérieur à la méthode GC :  $\bar{\tau}_n = O(h^{A^3})$ . La méthode BLG permet donc de gagner un ordre de précision.



**FIGURE 3.12** – Erreurs de troncature locales  $\bar{\tau}$  de l'oscillateur partitionné, pour différentes quantités (déplacement, vitesse, accélération pour les deux sous-domaines), dans le cas de la méthode BLG couplant les schémas CAA et CD avec un rapport de pas de temps  $m = 20$ .

L'étude de l'erreur de troncature locale permet de déterminer la convergence et l'ordre de convergence grâce au théorème d'équivalence de Lax [Smi91]. Selon le théorème d'équivalence de Lax, une méthode est convergente d'ordre  $k$  si la méthode est stable et que la puissance du terme principal de l'erreur de troncature locale est égale à  $k + 1$ . Par conséquent, lorsque le rapport des pas de temps  $m$  est supérieur à 2, la méthode BLG est convergente d'ordre 2 par rapport à la méthode GC convergente d'ordre 1. La deuxième équation de contrainte, à savoir la continuité de l'accélération à l'interface au dernier micro pas de temps, améliore l'ordre de convergence pour la méthode BLG. Dans la suite, l'étude des erreurs globales permettra de vérifier ces résultats.

### 3.3.4 Amortissement algorithmique et allongement de la période

L'étude de la convergence comprend également l'étude de l'allongement de la période et de l'amortissement numérique avec la fréquence angulaire réduite exprimée comme

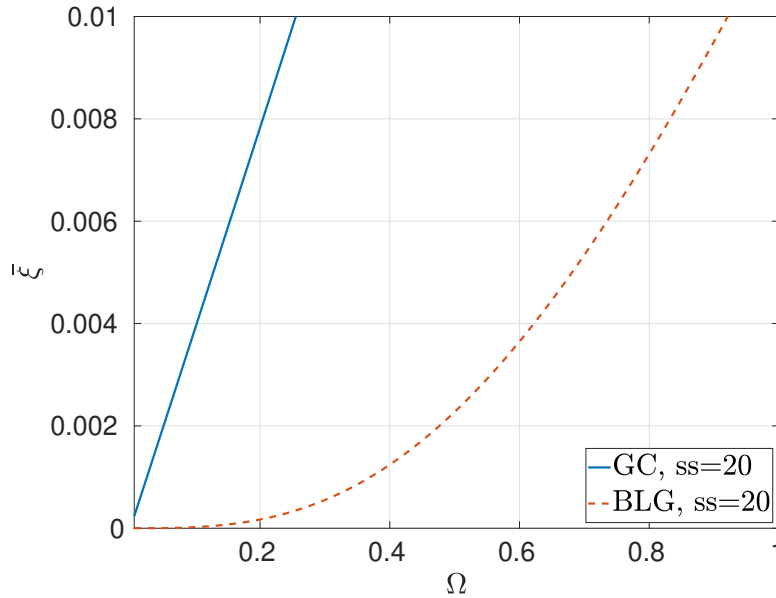
suit :  $\Omega = \sqrt{\frac{k^A+k^B}{m^A+m^B}}h^A = \omega h^A$ . Le système est considéré comme un oscillateur SDOF avec amortissement pour identifier l'amortissement numérique [Hug83]. En conséquence, les principales valeurs propres conjuguées complexes de la matrice d'amplification peuvent être exprimées comme [Hug83 ; GR97 ; Bon+08 ; Bru+15] :

$$\lambda_{1,2} = e^{-\bar{\xi}\bar{\omega}h^A \pm i\bar{\omega}h^A} \quad (3.121)$$

où  $\bar{\xi}$  est le rapport d'amortissement numérique et  $\bar{\omega}$  la fréquence angulaire numérique. Sur la base de Eq. (3.121), le rapport d'amortissement numérique peut être donné comme [GR97] :

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln|\lambda_{1,2}|}{|\phi|} \quad (3.122)$$

où  $\phi$  est l'angle numérique  $\phi = \arg(\lambda_{1,2})$ . La Figure 3.13 représente l'évolution du rapport d'amortissement numérique  $\bar{\xi}$  en fonction de  $\Omega$  pour la méthode BLG et un rapport de pas de temps  $m = 20$ . Afin d'obtenir l'ordre de précision du rapport d'amortissement numérique, la pente de la courbe dans un diagramme log-log est calculée entre deux macro-pas de temps proches :  $\frac{\ln(\xi(h_2^A)) - \ln(\xi(h_1^A))}{\ln(h_2^A) - \ln(h_1^A)}$ . L'ordre de précision obtenu pour la méthode BLG est  $\bar{\xi} = O(\Omega^3)$  pour tout rapport de pas de temps  $m$  par rapport à  $\bar{\xi} = O(\Omega)$  pour la méthode GC.



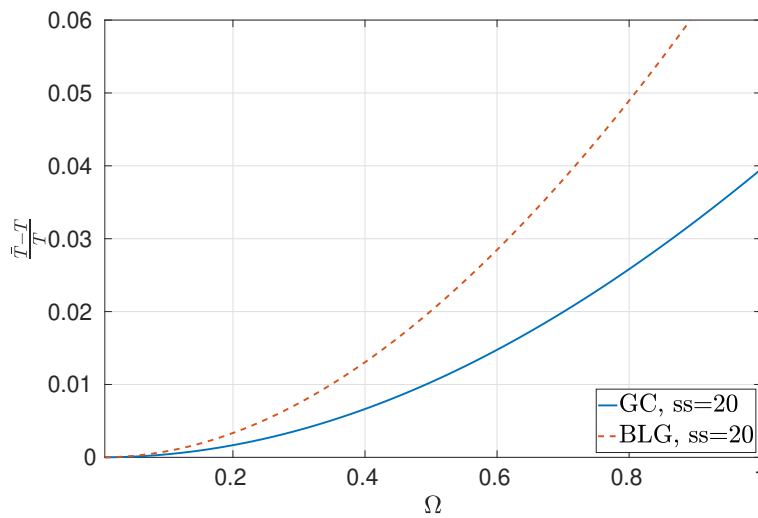
**FIGURE 3.13** – Rapport d'amortissement numérique  $\bar{\xi}$  de l'oscillateur partitionné pour le couplage des schémas de Newmark CAA et CD avec un rapport de pas de temps  $m = 20$ .

L'allongement de la période est donné par [GR97] :

$$\frac{\bar{T} - T}{T} = \frac{\Omega}{\phi} - 1 \quad (3.123)$$

Où  $\bar{T}$  est la période numérique et est définie comme suit :  $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

La Figure 3.14 montre l'ordre de précision de l'allongement de la période de la méthode BLG et GC  $\frac{\bar{T}-T}{T} = O(\Omega^2)$ . Les schémas de Newmark CAA et CD sont tous deux d'ordre 2 [Hug83]. Ainsi, comme la méthode GC, la méthode BLG conserve l'ordre de précision de l'allongement de la période des schémas CAA et CD.



**FIGURE 3.14** – Allongement de la période  $\frac{\bar{T}-T}{T}$  de l'oscillateur partitionné pour le couplage des schémas de Newmark CAA et CD avec un rapport de pas de temps  $m = 20$ .

En résumé, l'étude de la méthode BLG sur un oscillateur SDOF partitionné permet de conclure sur l'ordre de convergence de la méthode. En effet, plusieurs configurations variées ont permis d'illustrer la limite de stabilité de la méthode en traçant le rayon spectral en fonction de la fréquence angulaire réduite du sous-domaine CD explicite B. Comme la méthode GC, la méthode s'avère conditionnellement stable dans le cas du couplage CAA/CD, avec une limite de stabilité très proche de la condition CFL liée au sous-domaine B lorsque  $m$  augmente. De plus, l'étude de la matrice d'amplification a mis en évidence des ordres de précision plus élevés en termes d'erreur de troncature locale et d'amortissement numérique que la méthode GC dont le principal inconvénient est son ordre de précision égal à 1. Cela permet de conclure sur le second ordre de précision et de convergence de la méthode BLG, ce qui constitue une amélioration par rapport au premier ordre de précision de la méthode GC.

### 3.3.5 Erreur globale

Le but ici est d'évaluer les ordres de précision des quantités totales par les méthodes de couplage avec les schémas de Newmark : CAA et CD dans une configuration comprenant plusieurs échelles de temps ( $m > 1$ ). L'ordre de précision est calculé pour le déplacement, la vitesse et l'accélération. L'étude porte dans un premier temps sur la méthode  $GC_{acc}$  puis la méthode BLG est comparée à la méthode GC originale [Gra00]. L'équation d'équilibre de l'oscillateur non amorti sans forces externes est donnée dans Eq. (3.47). Un déplacement initial est imposé au moment initial :  $u(0) = u_0$ . La vitesse initiale est supposée égale à 0 :  $\dot{u}(0) = 0$ . Le rapport  $b_1$  est égal à 1, correspondant à une hypothèse de même taille pour les éléments finis couplés. Les valeurs numériques des masses et des rigidités des deux sous-domaines sont les suivantes :  $M^A = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ ,  $K^A = 1 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$  et  $M^B = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ ,  $K^B = 1 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$ . A partir de ces valeurs, le pas de temps critique est égal à  $h_{crit}^B = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . La fréquence angulaire du système est :  $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1} = \omega_A = \omega_B$ . Le temps final de la simulation de vibration libre est presque égal à trois fois la période :  $T_f \approx 3T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Les ordres de convergence des méthodes de couplage à pas de temps multiples sont déterminés en calculant l'erreur relative des quantités d'intérêt, c'est-à-dire les déplacements, vitesses et accélérations des deux sous-domaines.

Le problème de l'oscillateur SDOF a une solution analytique pour le déplacement, la vitesse et l'accélération définis comme suit :

$$\begin{cases} u_{ref}(t) = u_0 \cos(\omega t) \\ \dot{u}_{ref}(t) = -u_0 \omega \sin(\omega t) \\ \ddot{u}_{ref}(t) = -u_0 \omega^2 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3.124)$$

Les valeurs calculées par les méthodes à pas de temps multiples dans le temps sont ensuite comparées aux valeurs analytiques pour obtenir les erreurs relatives. Les erreurs relatives sont calculées au dernier pas de temps de la macro-échelle  $t = T_f$  exprimées comme :

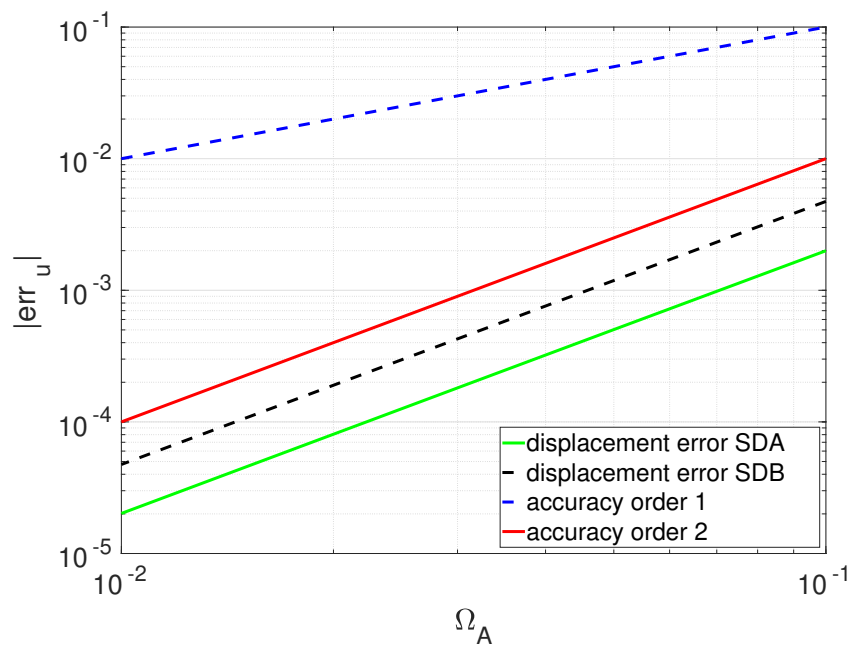
$$\begin{cases} err_u = \frac{|u(T_f) - u_{ref}(T_f)|}{u_{ref}(T_f)} \\ err_{\dot{u}} = \frac{|\dot{u}(T_f) - \dot{u}_{ref}(T_f)|}{\dot{u}_{ref}(T_f)} \\ err_{\ddot{u}} = \frac{|\ddot{u}(T_f) - \ddot{u}_{ref}(T_f)|}{\ddot{u}_{ref}(T_f)} \end{cases} \quad (3.125)$$

Les ordres de précision des méthodes de couplage à pas de temps multiples sont obtenus en calculant les erreurs relatives (3.125) pour une gamme de valeurs. La fréquence angulaire réduite pour le sous-domaine macro A, définie comme  $\Omega_A = \omega^A h^A$ , est calculée pour



une gamme de valeurs du pas de temps  $h^A \in [10^{-7}; 10^{-6}]$  s. Par conséquent, la fréquence angulaire réduite pour le sous-domaine micro B  $\Omega_B = \omega^B h^B$  varie également sur une plage de valeurs car le pas de temps micro  $h^B$  dépend de  $h^A$  car étant défini comme  $h^B = \frac{h^A}{m}$ . En outre, le pas de temps micro  $h^B$  doit satisfaire la condition CFL du schéma CD :  $h^B < h_{crit}^B$ . Enfin, tracer les erreurs relatives (déplacement, vitesse, accélération) en fonction de la fréquence angulaire réduite permet de vérifier les ordres de précision en identifiant la pente des courbes dans un tracé log-log.

### Etude de la méthode $GC_{acc}$



**FIGURE 3.15** – Erreurs relatives des déplacements pour la méthode de couplage  $GC_{acc}$  utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples

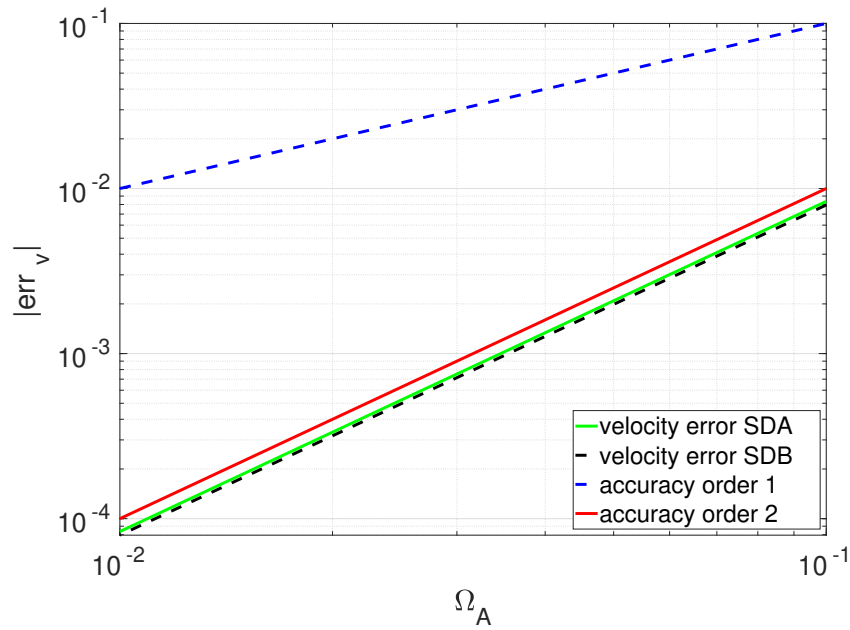


FIGURE 3.16 – Erreurs relatives des vitesses pour la méthode de couplage  $GC_{acc}$  utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples

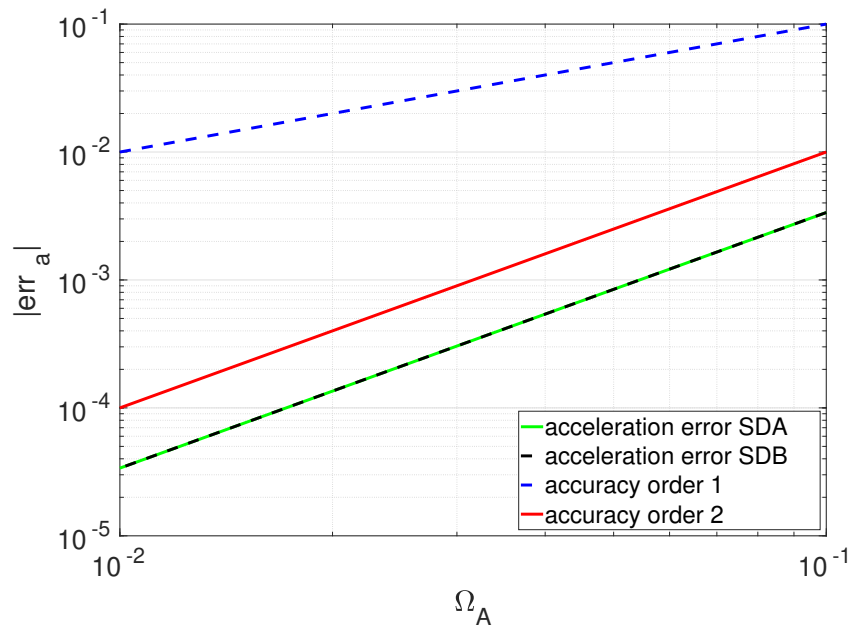
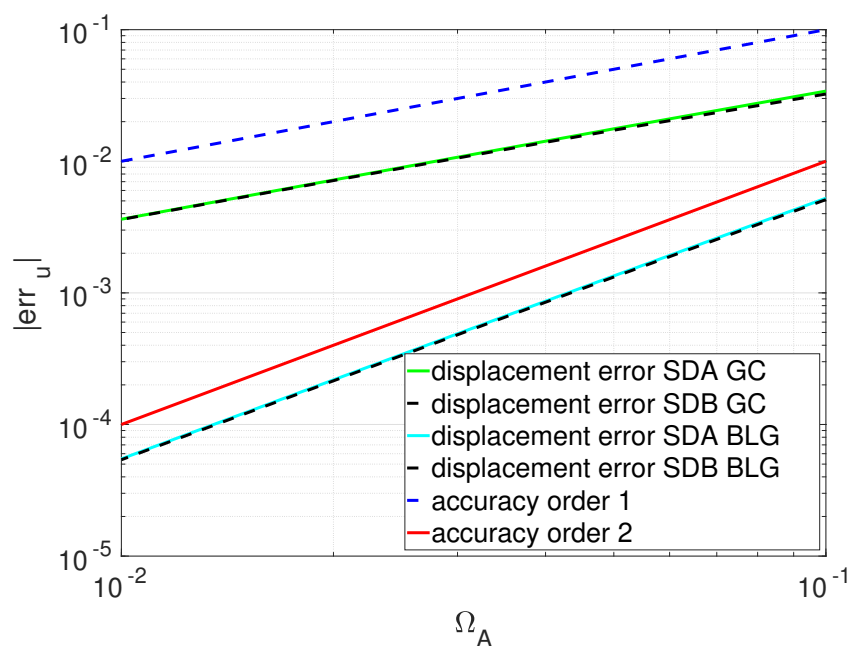


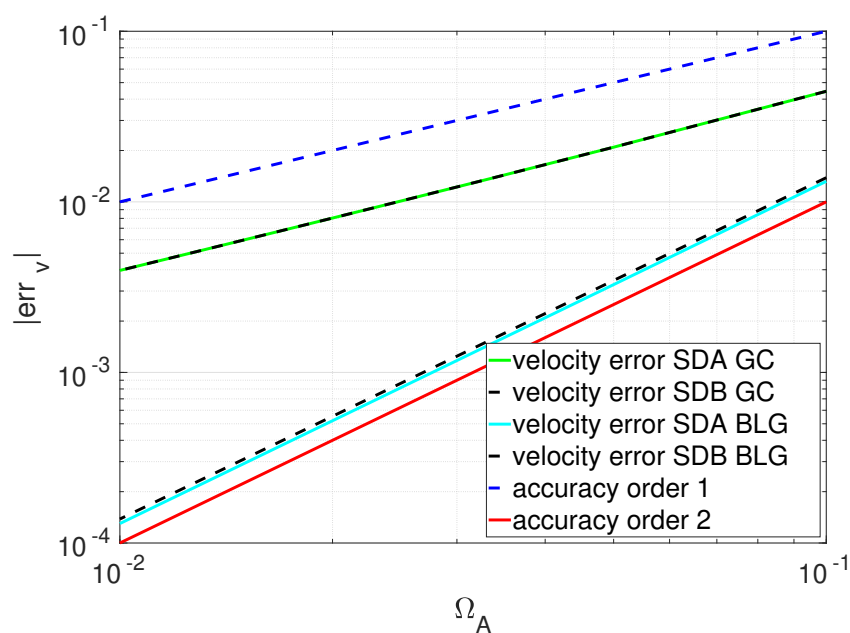
FIGURE 3.17 – Erreurs relatives des accélérations pour la méthode de couplage  $GC_{acc}$  utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples

Enfin, les Figures (3.15-3.17) permettent de conclure que le second ordre de précision des schémas d'intégration temporelle de Newmark (CAA & CD) est préservé avec la méthode  $GC_{acc}$  pour les deux sous-domaines. La méthode  $GC_{acc}$  conserve un ordre de précision de plus que la méthode GC.

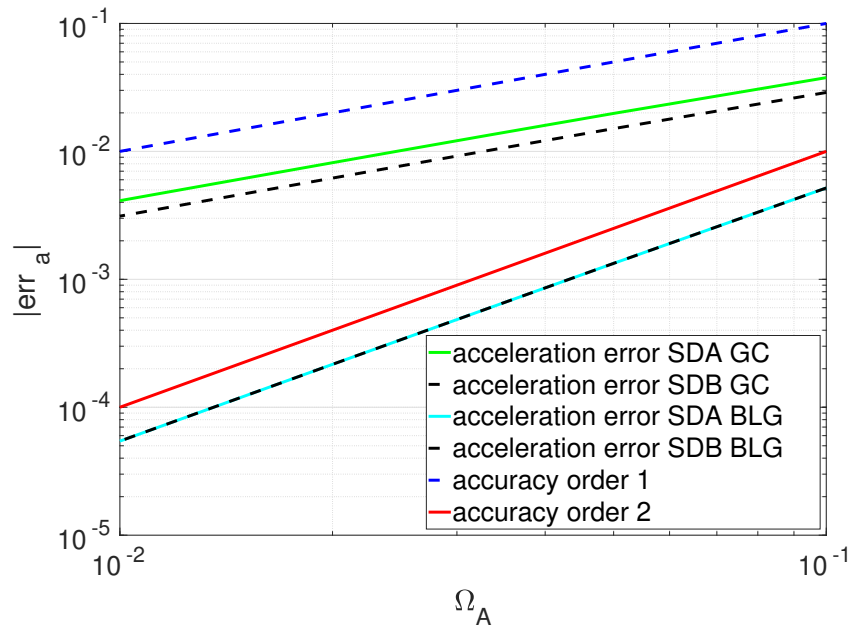
## Etude de la méthode BLG



**FIGURE 3.18** – Erreurs relatives des déplacements pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples



**FIGURE 3.19** – Erreurs relatives des vitesses pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples



**FIGURE 3.20** – Erreurs relatives des accélérations pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples

Le deuxième ordre de précision des schémas d'intégration temporelle de Newmark (CAA & CD) est conservé grâce à la méthode BLG pour les deux sous-domaines, comme le montre les Figures (3.18-3.20). Il est important de confirmer que la méthode GC ne converge qu'au premier ordre pour les trois quantités cinématiques. La méthode BLG gagne donc un ordre de convergence par rapport à la méthode GC.

### 3.3.6 Pseudo-norme énergétique et bilan énergétique

Le bilan énergétique pour deux sous-domaines ayant déjà été défini dans la partie 3.2.2.2, cette partie commence directement par la définition de la pseudo-énergie. La propriété de stabilité peut également être étudiée avec la méthode de la pseudo-énergie. Cette méthode a été proposée par Hughes [Hug87] afin de démontrer la condition de stabilité des schémas mixtes, combinant des schémas implicites et explicites. La méthode de couplage est stable si la pseudo-énergie de l'interface est égale ou inférieure à zéro. L'équation d'équilibre de la pseudo-énergie discrète pour le schéma de Newmark dans un domaine est donnée par :

$$\left[ \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{U}}^T \mathbf{A} \ddot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} \right]_0^m = \frac{1}{h} [\dot{\mathbf{U}}_m]^T [\mathbf{f}_m] - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \{ [\ddot{\mathbf{U}}_m]^T \mathbf{A} [\ddot{\mathbf{U}}_m] \} \quad (3.126)$$

avec  $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \left( \beta - \frac{\gamma}{2} \right) h^2 \mathbf{K}$ .

L'équation discrète du bilan pseudo-énergétique est étendue au cas de deux sous-domaines A et B, en considérant le pas de temps macro  $h^A$  et une série de pas de temps mi-

cro  $h^B$ , sur un pas de temps macro  $h^A$ . Un terme supplémentaire, correspondant à l'énergie d'interface, apparaît en raison de la condition cinématique utilisant les multiplicateurs de Lagrange; l'équation discrète du pseudo-bilan énergétique sur un pas de temps macro  $h^A$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta E_{kin,m}^A + \Delta E_{int,m}^A + \sum_{j=1}^m \{ \Delta E_{kin,j}^B + \Delta E_{int,j}^B \} = \dots \\ \Delta E_{ext,m}^A + \sum_{j=1}^m \Delta E_{ext,j}^B + \Delta E_{diss,m}^A + \sum_{j=1}^m \Delta E_{diss,j}^B + \Delta E_{interface} \end{aligned} \quad (3.127)$$

La pseudo-énergie d'interface [Bru+15] est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta E_{interface} = - \frac{1}{h_A} [\dot{\mathbf{U}}_m]^{AT} \{ \mathbf{L}_A^T[\mathbf{\Lambda}_m] \} \dots \\ - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{h_B} [\dot{\mathbf{U}}_j]^{BT} \{ \mathbf{L}_B^T[\mathbf{\Lambda}_j] \} \right\} \end{aligned} \quad (3.128)$$

Les ordres de précision pour la pseudo-énergie d'interface et l'énergie d'interface, définie par l'équation (3.38), sont calculés pour l'oscillateur non amorti sans forces externes dans Eq. (3.47), avec les mêmes paramètres présentés dans l'erreur globale dans la section 3.3.5. Comme le montre la Figure 3.21, les ordres de précision de la pseudo-énergie d'interface et de l'énergie d'interface gagnent également un ordre avec la méthode BLG par rapport à la méthode GC.

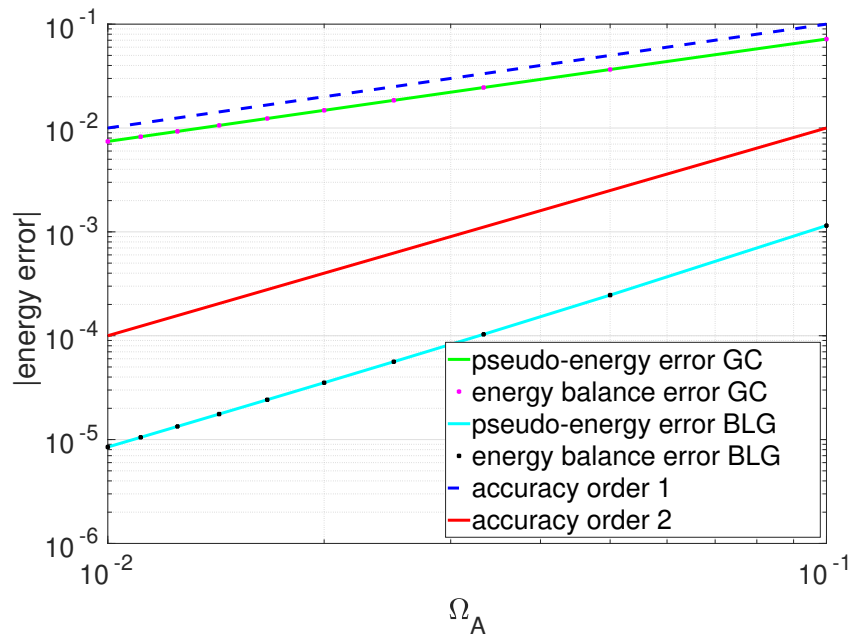
L'erreur de pseudo-énergie est définie comme le rapport entre le maximum de la valeur absolue de la pseudo-énergie et le maximum de la valeur absolue de l'énergie mécanique initiale.

$$erreur \ pseudo \ energie = \frac{max(|\Delta E_{interface}|)}{max(|\Delta E_{kin} + \Delta E_{int}|)} \quad (3.129)$$

L'erreur du bilan énergétique est définie en suivant la définition de l'erreur pseudo-énergétique :

$$erreur \ du \ bilan \ energetique = \frac{max(|\Delta W_{interface}|)}{max(|\Delta W_{kin} + \Delta W_{int}|)} \quad (3.130)$$

Après avoir déterminé l'ordre de précision, l'évolution de l'énergie d'équilibre en fonction du temps fournit des informations sur la dissipation numérique à l'interface générée par les méthodes de couplage GC et BLG. L'étude de cas porte sur le couplage d'un schéma de Newmark implicite (CAA) et d'un schéma de Newmark explicite (CD). Trois différents pas de temps micro avec le même rapport de pas de temps  $m = \frac{h^A}{h^B} = 20$  sont choisis pour illustrer l'intérêt de la méthode :



**FIGURE 3.21** – Erreurs relatives du bilan énergétique et de la pseudo-énergétique pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec des pas de temps multiples

- $h^B = 0.1 \cdot h_{crit}^B = 2 \cdot 10^{-6} s$  et  $h^A = 4 \cdot 10^{-5} s$
- $h^B = 0.01 \cdot h_{crit}^B = 2 \cdot 10^{-7} s$  et  $h^A = 4 \cdot 10^{-6} s$
- $h^B = 0.005 \cdot h_{crit}^B = 1 \cdot 10^{-7} s$  et  $h^A = 2 \cdot 10^{-6} s$

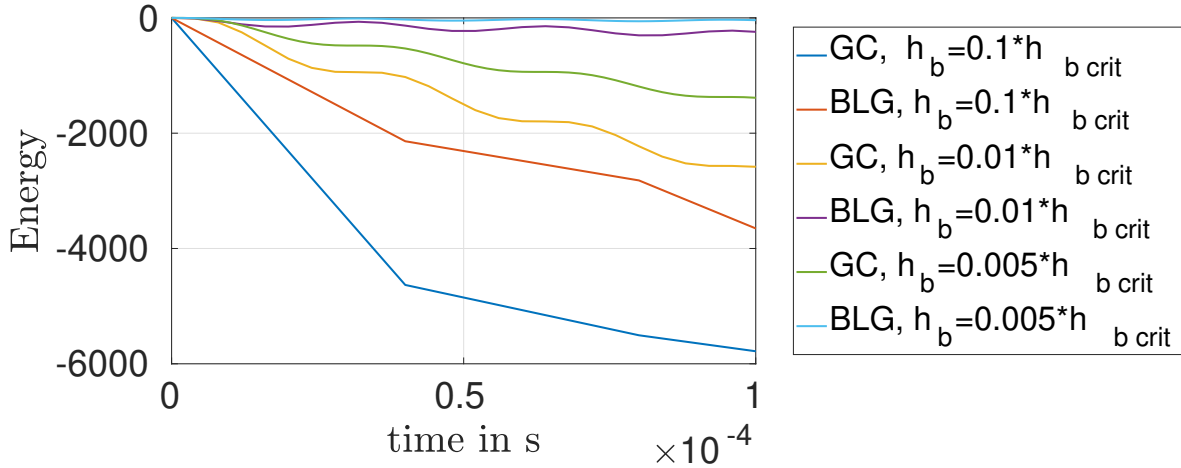
Le sous-domaine B a un pas de temps micro respectant la condition CFL comme  $h^B < h_{crit}^B$  avec  $h_{crit}^B = 2 \cdot 10^{-5}$ .

Le bilan énergétique non conservatif est égal à l'énergie d'interface  $W_{interface}$  calculée par le travail des multiplicateurs de Lagrange comme indiqué dans Eq. (3.38). L'énergie d'interface est représentée pour différents cas sur la Figure 3.22. Pour la méthode GC, l'énergie d'interface diminue avec le temps. C'est moins le cas pour la méthode BLG, pour laquelle l'énergie d'interface est globalement décroissante mais avec des oscillations positives dans certains cas. La méthode BLG a une dissipation d'énergie globalement plus faible que la méthode GC au temps final  $t = 1 \cdot 10^{-4}$ . Le Tableau 3.2 reprend les énergies d'interface au temps final pour les différents cas. On peut noter que la méthode BLG entraîne moins de dissipation d'énergie que la méthode GC, surtout lorsque les pas de temps sont petits. En effet, pour le plus petit pas de temps considéré dans le Tableau 3.2 ( $h^B = 1 \cdot 10^{-7} s$ ), la dissipation d'énergie est réduite d'un facteur de 35.

L'avantage de la méthode BLG en termes de réduction de la dissipation d'énergie par rapport à la méthode GC peut être étudié plus en détail avec une simulation plus longue.

	$W_{interface,BLG}$	$W_{interface,GC}$
$h^B = 2 \cdot 10^{-6} s$	-3820 J	-5700 J
$h^B = 2 \cdot 10^{-7} s$	-242.01 J	-2582.75 J
$h^B = 1 \cdot 10^{-7} s$	-39.75 J	-1385.43

**TABLEAU 3.2** – Résumé de  $W_{interface}$  pour les méthodes BLG et GC pour différents micro pas de temps au temps  $t = 1 \cdot 10^{-4} s$ .

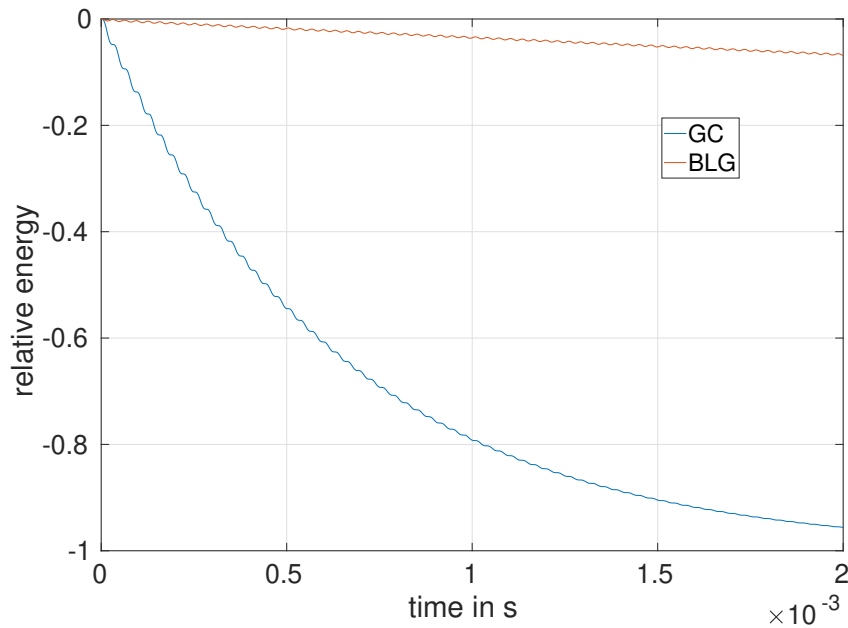


**FIGURE 3.22** – Énergies d'interface pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD pour différents micro pas de temps ( $h^B$ ), avec le rapport de pas de temps  $m = 20$ .

Une simulation 10 fois plus longue est considérée :  $T_f \approx 30T = 2 \cdot 10^{-3} s$ . Le rapport de pas de temps  $m$  reste égal à 20 et le pas de temps micro est égal à  $h^B = 0.005 \cdot h_{crit}^B$  (plus petit pas de temps dans le Tableau 3.2). L'énergie de l'interface normalisée par le maximum de l'énergie est étudiée pour les méthodes GC et BLG. L'énergie relative d'interface est le rapport entre l'énergie d'interface et l'énergie mécanique initiale :

$$Erreur\ relative\ energie\ interface(t) = \frac{\Delta W_{interface}(t)}{\max(|\Delta W_{kin}(t) + \Delta W_{int}(t)|)} \quad (3.131)$$

L'amélioration apportée par la méthode BLG en termes d'énergie est mise en évidence sur la Figure 3.23 avec une différence remarquable au temps final  $T_f = 2 \cdot 10^{-3} s$ . En fait, l'énergie d'interface relative de la méthode BLG au moment final est égale à 0.07, tandis que celle de la méthode GC est égale à 0.96.



**FIGURE 3.23** – Énergie relative d'interface pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec  $h^B = 1 \cdot 10^{-7} s$  et un rapport de pas de temps  $m = 20$ .

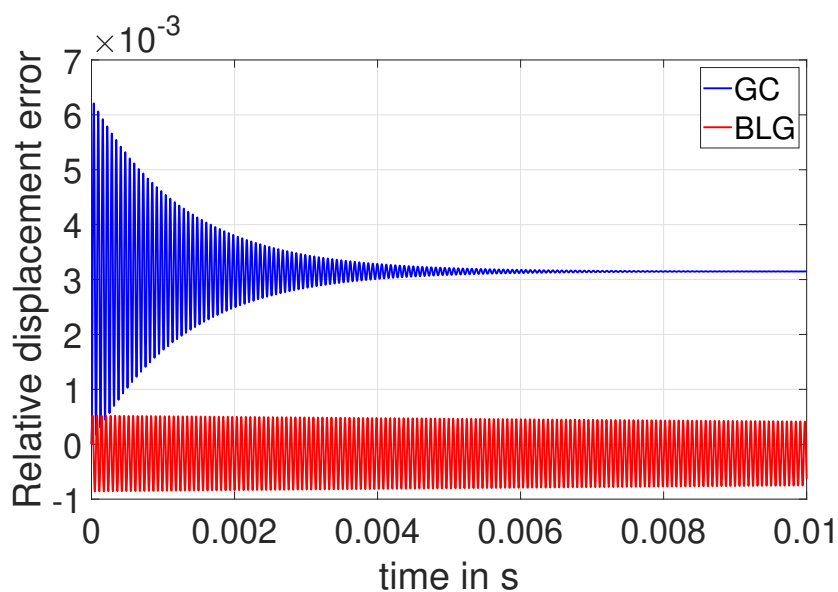
### 3.4 Comportement du déplacement à l'interface

Les conditions limites utilisées par les méthodes GC et BLG imposent la continuité des vitesses ou de l'accélération sur l'échelle fine en temps. De ce fait, le comportement du déplacement à l'interface n'est pas imposé. Afin d'étudier ce déplacement à l'interface, l'erreur relative (3.132) associée au déplacement à l'interface du sous-domaine A et du sous-domaine B pour chaque macro pas de temps est tracée pour un couplage implicite/explicite ayant un rapport de pas de temps  $m = 20$  et un micro pas de temps  $h^B = 1 \cdot 10^{-7} s$ . Le temps de simulation est étendu pour étudier la dissipation numérique des méthodes : il est de  $t_{final} = 1 \cdot 10^{-2} s$ , c'est à dire 5000 macro pas de temps réalisés.

$$u_{m,err} = \frac{u_m^A - u_m^B}{u_m^A} \quad (3.132)$$

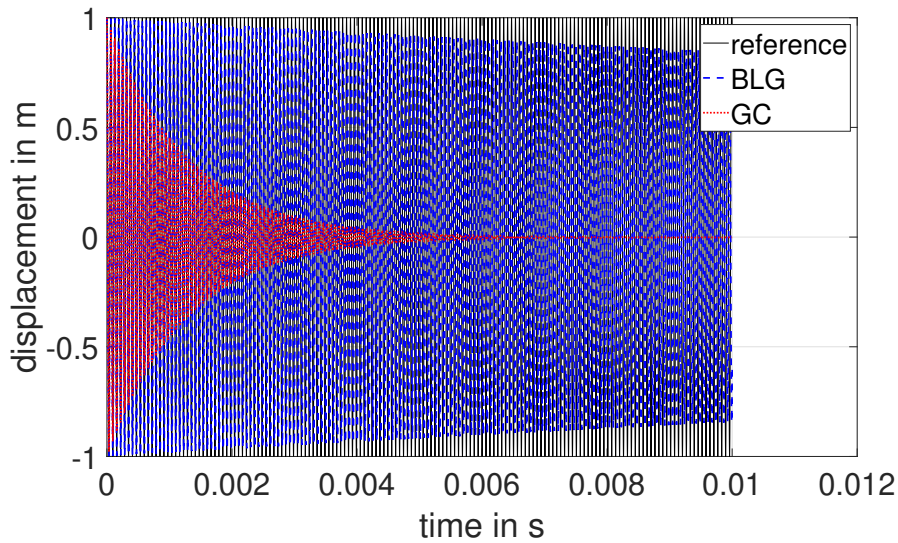
La Figure 3.24 présente l'erreur relative du déplacement associée à chaque méthode de couplage. L'erreur relative du déplacement obtenue par la méthode GC est positive, et après la première oscillation, est globalement décroissante pour se stabiliser autour d'une erreur relative proche de  $3 \cdot 10^{-3}$ . L'erreur relative du déplacement obtenue par la méthode BLG oscille autour de la valeur 0. Cette erreur est plus importante pour la méthode GC que pour la méthode BLG avec la présence d'un léger déphasage entre les deux résultats.





**FIGURE 3.24** – Erreur relative du déplacement à l'interface entre les deux sous-domaines pour les méthodes de couplage GC et BLG utilisant les schémas CAA et CD avec  $h^B = 1 \cdot 10^{-7} s$  et un rapport de pas de temps  $m = 20$ .

En complément de la Figure 3.24, les déplacements du sous-domaine B, correspondant à l'échelle de temps micro, sont tracés dans la Figure 3.25 pour les deux méthodes GC et BLG comparés aux déplacements théoriques (3.124). La figure 3.25 met en évidence l'amortissement numérique de la méthode GC au cours du temps avec un déplacement tendant vers 0. Ce comportement explique la convergence des erreurs pour la méthode GC vers une valeur donnée en Figure 3.24. Le déplacement calculé par la méthode BLG est aussi représenté dans la Figure 3.25. Un amortissement numérique est également observé par rapport aux résultats théoriques. Cependant, le déplacement calculé par la méthode BLG est beaucoup moins amorti que celui calculé par la méthode GC.



**FIGURE 3.25** – Comparaison du déplacement du sous-domaine B pour les méthodes GC et BLG avec le déplacement théorique

Il est à noter que le problème modélisé ici est un couplage de deux oscillateurs harmoniques multi-échelle en temps. La comparaison de l'erreur relative du déplacement et du déplacement par rapport aux résultats théoriques montre les avantages notables de la méthode BLG par rapport à la méthode GC.

### 3.5 Conclusion

Un intégrateur temporel asynchrone hétérogène précis au second ordre, appelé méthode BLG, a été présenté en renforçant la continuité cinématique au pas de temps fin. Il s'agit d'une version améliorée de la méthode GC, précise seulement au premier ordre. La méthode BLG permet de coupler n'importe quel intégrateur temporel de Newmark et est précise au second ordre avec des pas de temps différents. Les deux méthodes sont basées sur la continuité de la vitesse au pas de temps fin, mais la méthode BLG suppose une continuité de l'accélération au lieu d'une continuité de la vitesse au dernier pas de temps fin sur le pas de temps grossier.

Les caractéristiques en termes de stabilité, de précision, de dissipation numérique et d'allongement de la période liées à l'algorithme proposé sont examinées par le biais de l'étude des propriétés spectrales de la matrice d'amplification liée à un oscillateur partitionné. L'étude détaillée des cas de couplage implicite/explicite et explicite/explicite à plusieurs pas de temps a montré que la méthode BLG offre des propriétés de stabilité analogues à celles de la méthode GC, avec l'avantage décisif d'être plus précise d'un

ordre de grandeur. En outre, l'inconvénient de la méthode GC concernant la dissipation d'énergie est atténué grâce à la méthode BLG. Comme la méthode BLG est basée sur la continuité cinématique au pas de temps fin, des applications prometteuses devraient être explorées en remplaçant la méthode GC par la nouvelle méthode BLG dans divers problèmes couplés multi-physiques et multi-échelles, éventuellement non-linéaires. Plusieurs types d'applications potentielles sont attendues avec la méthode BLG. Elles vont des problèmes non-linéaires d'interaction sol-structure, à la dynamique structurelle avec des contacts frottants pendant un tremblement de terre de longue durée, en passant par des problèmes complexes d'interaction fluide-structure dans les réacteurs nucléaires.



---

# 4

## Co-simulation implicite-explicite de modèle tridimensionnel d'un bloc réacteur simplifié

*Ce dernier chapitre présente un démonstrateur de co-simulation entre les logiciels Code Aster et Europlexus. Le développement du démonstrateur découle d'un besoin industriel présenté dans cette partie. La stratégie de développement pour faire communiquer les deux logiciels est présentée. Ensuite, le modèle tridimensionnel utilisé pour la simulation ainsi que les hypothèses choisies sont expliqués. Enfin, les résultats obtenus par méthode de co-simulation sont comparés à ceux obtenus intégralement en implicite ou explicite sans méthode de co-simulation. Les méthodes de co-simulation multi-échelles utilisées sont la méthode GC et la méthode BLG.*

## Sommaire

---

4.1	Problématique industrielle . . . . .	<b>109</b>
4.2	Calcul tridimensionnel implicite/explicite pour un Bloc réacteur simplifié	<b>111</b>
4.2.1	Présentation du modèle 3D . . . . .	111
4.2.2	Présentation des logiciels utilisés . . . . .	115
4.2.3	Présentation de la stratégie de co-simulation . . . . .	118
4.2.4	Application numérique . . . . .	122
4.3	Conclusion . . . . .	<b>134</b>

---

## 4.1 Problématique industrielle

La justification des matériaux et géométries utilisés pour les structures composant le bloc réacteur nécessite la réalisation de simulations dynamiques de modèles éléments finis. Ces modélisations sont réalisées sur les logiciels Ansys [23], Systus [Apa23], LS-Dyna [Ans23] et Europlexus [alt23b].

Lors de ces simulations, le bloc réacteur est soumis à différentes sollicitations extrêmes telles que des chutes d'avions, des séismes, ou encore des ruptures de tuyauteries. Dans le cas des séismes, les durées simulées peuvent être de plusieurs dizaines de secondes. Lors de la simulation des réponses du bloc réacteur sous sollicitations extrêmes, les mouvements de réponses lents du bloc réacteur peuvent engendrer l'apparition des phénomènes non-lisses de dynamique rapide tels que des contacts impactant et glissements entre pièces ainsi que de la plasticité locale. Afin de bien prendre en compte de tels phénomènes, et de faciliter les convergences des calculs, des échelles de discrétisation en temps et en espace très fines doivent être considérées. Cependant, cela a pour conséquence l'augmentation des temps de calculs et donc du temps de réalisation des études d'ingénieries.

Pour la résolution des problèmes de dynamique plus lente, tel que le balancement de l'enveloppe de cœur, l'usage d'algorithme d'intégration temporelle implicite est privilégiée. L'avantage de cette méthode réside principalement dans son inconditionnelle stabilité en pas de temps lors de la résolution de système linéaire. En plus de cela, les phénomènes intervenant dans des problèmes de dynamiques lentes possèdent des échelles caractéristiques de discrétisation plus grossières. L'inconditionnelle stabilité du schéma d'intégration implicite combinée à la simulation de phénomènes de dynamiques lentes permet l'usage d'une discrétisation spatiale et temporelle grossière. Cette méthode est donc adaptée pour des calculs simulant une durée physique longue de structures linéaires à dynamique lente, et non de la simulation de dynamique rapide modélisant des phénomènes non-réguliers tels que ceux présent dans les modèles de blocs réacteurs.

La résolution des problèmes de dynamique rapide, telle que la simulation numérique d'impacts, passe le plus souvent pas l'usage d'un algorithme explicite. Le principal avantage d'une telle méthode réside dans son absence de besoin de convergence itérative rendant ce schéma d'intégration temporelle propice à la simulation de problème intégrant des non-linéarités non-régulières. L'usage de schéma d'intégration temporelle explicite impose également l'usage d'un pas de temps d'intégration inférieur au pas de temps critique de

résolution minimal pour l'ensemble de l'espace discrétisé. Ce pas de temps minimal étant directement proportionnel à la taille minimale de la discrétisation spatiale, la nécessité d'une discrétisation fine dans les zones de non-linéarités non-régulières implique l'usage d'un pas de temps d'intégration très fin. La combinaison d'une discrétisation spatiale et temporelle fine a pour conséquence des temps de résolution importants (de l'ordre de plusieurs jours). Cette méthode est donc adaptée pour des calculs simulant une durée physique courte et non des séismes de plusieurs dizaines de secondes.

En définissant plusieurs sous-espaces simulés soit à l'aide d'une méthode de résolution d'intégration temporelle implicite ou explicite, la méthode de co-simulation permet de s'affranchir des limites inhérentes à l'usage de ces schémas d'intégration temporelle en les faisant communiquer entre eux à l'aide d'un coupleur. La localisation des non-linéarités non-régulières permet la définition d'un sous-domaine restreint au voisinage de celles-ci. Une discrétisation spatiale et temporelle fine ainsi qu'une intégration temporelle explicite nécessaire à la simulation de la dynamique rapide peuvent alors y être considérées. D'autre part, le sous-domaine restant traitera de la dynamique lente des structures linéaires. Une discrétisation spatiale et temporelle grossière ainsi qu'une intégration temporelle implicite peuvent alors y être utilisées. Ainsi, les limitations inhérentes au traitement numérique de la dynamique rapide sont donc partiellement levées et des écarts importants entre les échelles de temps de résolutions propres aux sous domaines peuvent coexister.

La méthode de co-simulation s'applique donc parfaitement au cas du bloc réacteur du fait de la présence de phénomènes localisés non-linéaires multi-échelles en espace et en temps (contact non-linéaire, interaction fluide-structure, interaction sol-structure, etc) et de celles de sollicitations extrêmes de longue durée telles que lors d'un séisme. Le principal avantage offert est la réduction du temps de calcul global par discrétisation fine localement et d'une discrétisation plus grossière pour la majorité restante de la structure. Un autre avantage réside dans l'imposition de l'amortissement structurel sur les sous-domaines implicites afin de ne pas contraindre à nouveau le pas de temps critique des sous-domaines explicites. En effet, dans le cas du schéma de la différence centrée avec prise en compte des forces d'amortissement visqueuses avec la matrice de Rayleigh, il a été démontré que le pas de temps critique est réduit par la présence de l'amortissement haute fréquence [BLM00] (voir le paragraphe 2.3.1).

Ce chapitre est consacré à la présentation du démonstrateur implicite/explicite pour la co-simulation d'une sollicitation extrême de type séisme sur un modèle de bloc ré-



acteur simplifié.

## 4.2 Calcul tridimensionnel implicite/explicite pour un Bloc réacteur simplifié

Cette section présente les différentes étapes nécessaires au développement d'un démonstrateur de la méthode de co-simulation dans un environnement industriel par l'utilisation de logiciels dédiés à chaque sous-domaine pour la résolution du problème dynamique. La première étape pour réaliser un calcul dynamique est la construction d'un modèle 3D comprenant un maillage associé et incluant des hypothèses simplificatrices. Ensuite, deux calculs de références sont réalisés à l'aide de méthode d'intégration temporelle implicite du logiciel Code Aster [Fra23] et explicite du logiciel Europlexus [alt23b]. Les calculs réalisés sont par la suite comparés au calcul réalisé à l'aide de la méthode de co-simulation couplant les deux logiciels Code Aster et Europlexus. Enfin, une analyse entre les différentes méthodes de calcul est présentée en expliquant les limites de notre modèle.

### 4.2.1 Présentation du modèle 3D

Comme expliqué en introduction de ce manuscrit 4.1, concernant les calculs effectués au sein de la section DTIMRD de l'entreprise Framatome, on cherche à minimiser les temps de calculs tout en fournissant des résultats représentatifs des phénomènes d'intérêts. C'est la raison pour laquelle l'utilisation d'éléments finis de type poutre, coque, super-éléments, masse ponctuelle, ressort et amortisseur est préférée.

Les méthodes de co-simulation étant plus adaptées au traitement des maillages éléments finis volumique 3D, un maillage en élément fini de type hexaèdre représentatif d'un modèle de bloc réacteur simplifié a été construit. Pour ce faire, la construction du maillage tridimensionnel a été réalisée sur le logiciel Cast3m [alt23a], illustré par le schéma présent sur la Figure 4.1 avec une géométrie simplifiée illustrée en Figure 4.2. La géométrie finale comporte plusieurs éléments : l'enveloppe de cœur, la cuve, les six tubulures et les 4 clés radiales et leurs supports.

Un maillage hexaédrique structuré composé d'éléments CUB8 [alt23a] est obtenu à partir du logiciel Cast3m. Le maillage complet ainsi qu'une coupe verticale sont présentés au sein de la Figure 4.4 et de la Figure 4.5 respectivement.

Plusieurs géométries et interfaces ont été modifiées. Les tubulures sont modélisées afin d'éviter d'appliquer directement les excitations sismiques sur des noeuds de la cuve. Cette partie fait la jonction entre la cuve et le génie civil sur lesquels sont appliqués les

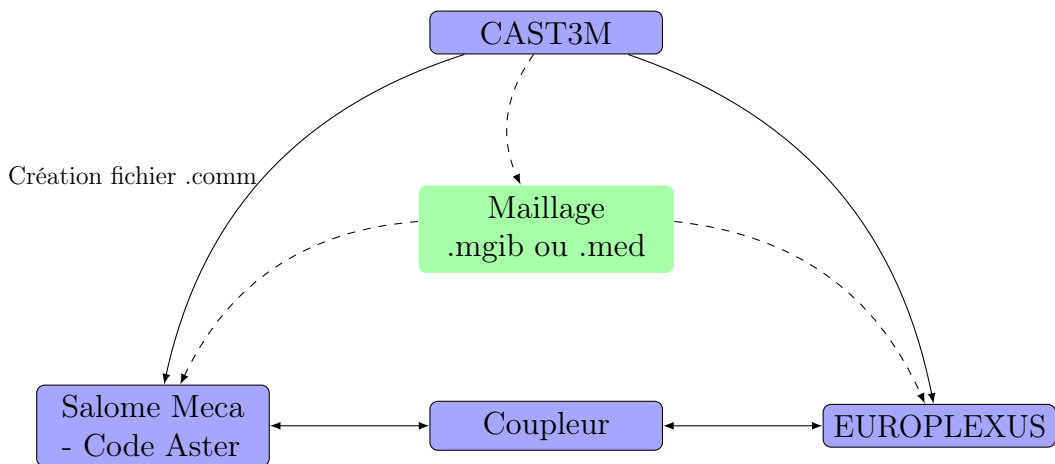


FIGURE 4.1 – Chaîne de calculs finale

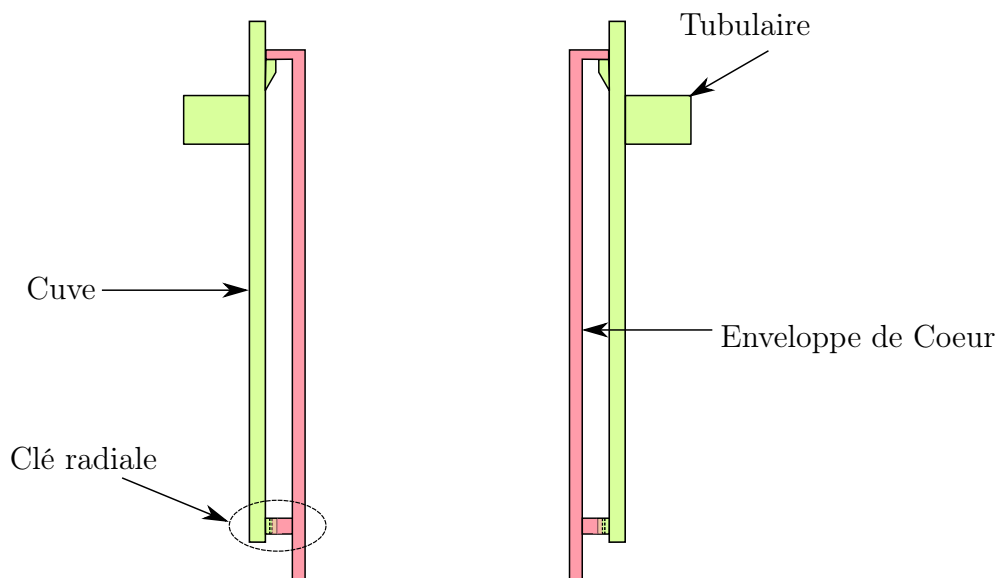
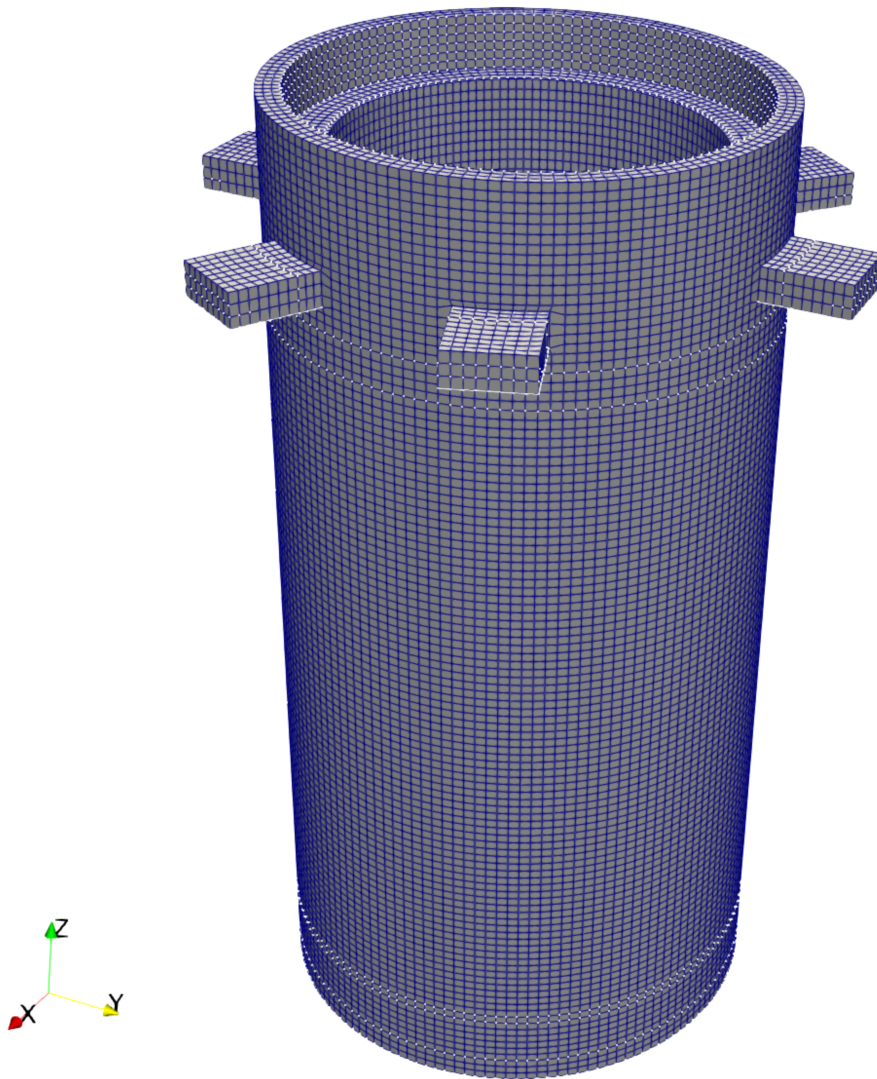


FIGURE 4.2 – Modélisation simplifiée du bloc réacteur, vue en coupe

excitations sismiques. La géométrie des tubulaires, qui était originellement cylindrique, n'a pas d'importance significative dans la transmission des efforts vers le reste de la structure et a donc été simplifiée par des pavés droits. Le contact entre l'enveloppe de coeur et la cuve a été simplifié comme le montre la Figure 4.5. Dans cette modélisation, ces deux parties sont liées et encastrées au niveau de l'interface présentée sur cette même Figure 4.5. Enfin, les clés radiales et leurs supports sont modélisés avec quelques simplifications concernant la position de certaines coordonnées afin d'optimiser le maillage et d'obtenir un maillage compatible. La Figure 4.6 montre le jeu présent entre les deux solides. Ce jeu reprend les efforts tangentiels permettant ainsi de limiter le balancement de l'enveloppe de coeur par rapport à la cuve. Le contact entre ces deux solides est modélisé dans notre



**FIGURE 4.3** – Vue 3D du maillage complet composé d'éléments hexaèdres

modèle. Il y a 2 zones de contact par clé radiale soit 8 zones de contact pour la structure globale comportant 4 clés radiales. La taille des mailles composant ces clés radiales impacte directement la taille des mailles de l'enveloppe de coeur par leurs éléments communs à l'interface afin d'assurer la compatibilité des maillages. Ce critère, la compatibilité des maillages, influe également sur la taille des mailles de la cuve. Le modèle total est composé de 96546 noeuds, soit 65835 éléments hexaèdres.

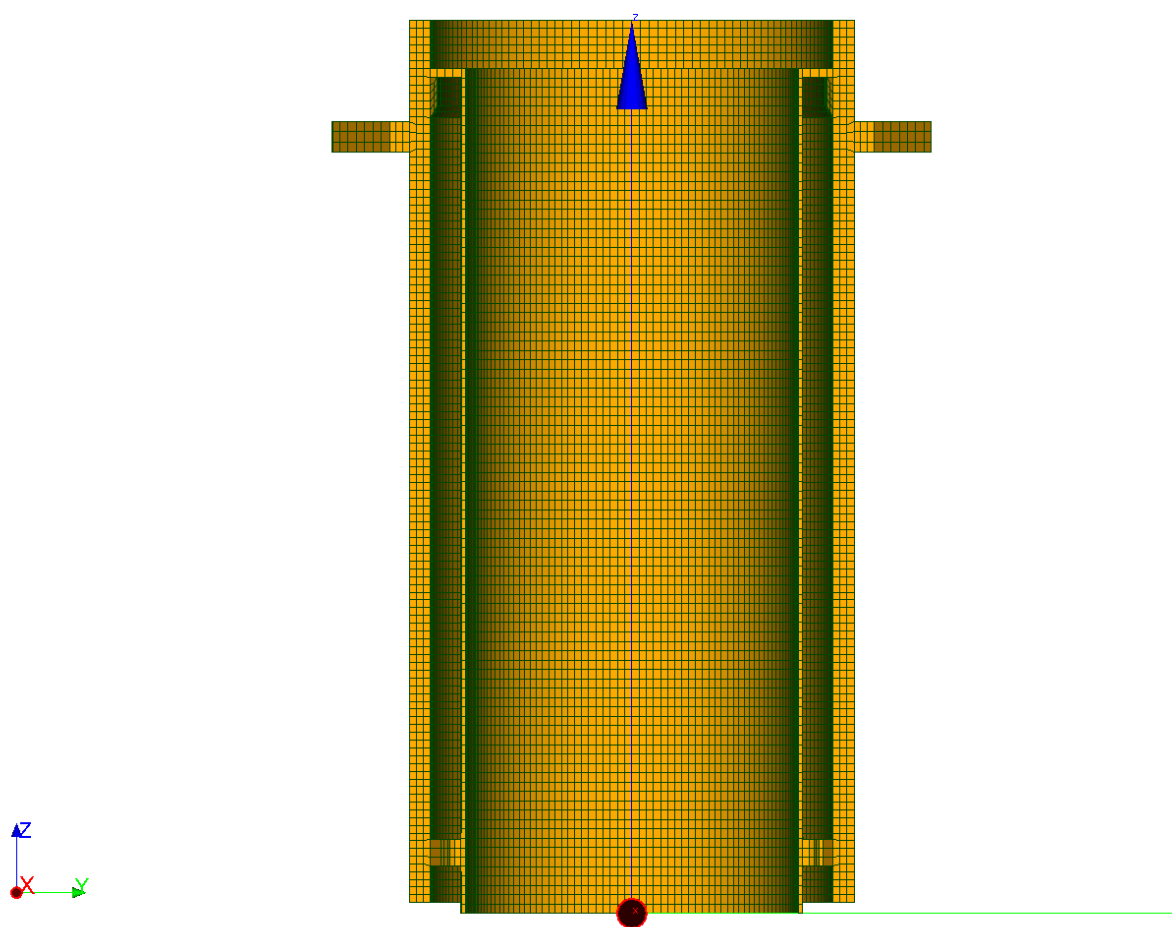


FIGURE 4.4 – Vue de coupe du maillage complet

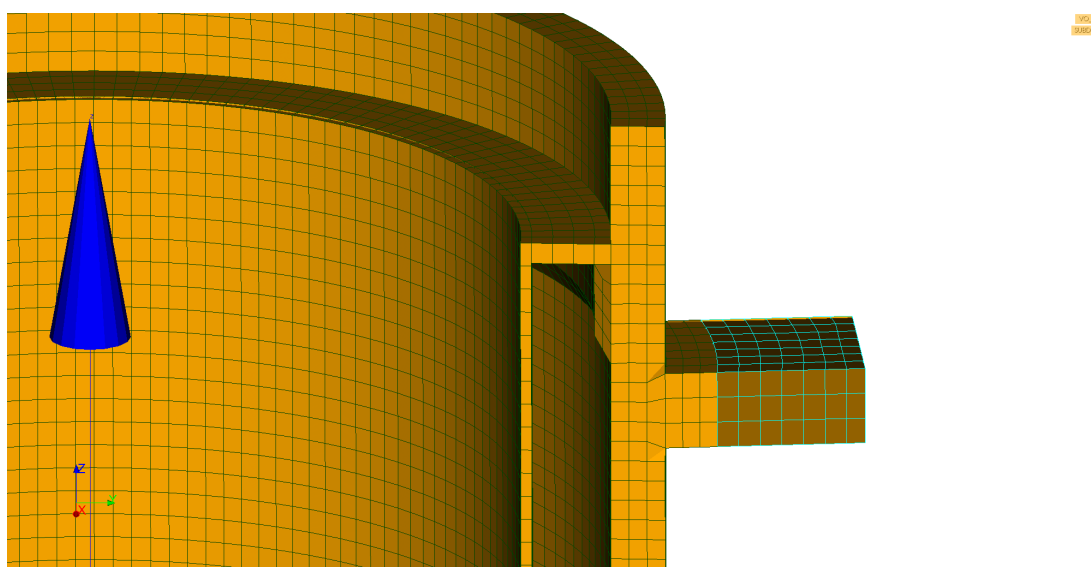


FIGURE 4.5 – Zoom sur la partie encastrée reliant l'enveloppe de coeur à la cuve

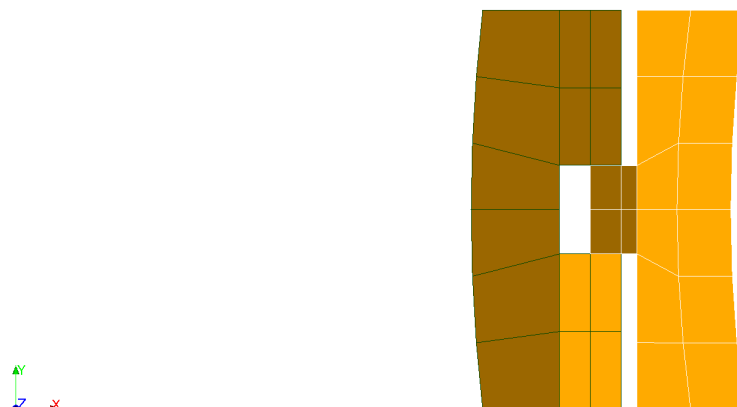


FIGURE 4.6 – Vue de dessus pour une clé radiale

## 4.2.2 Présentation des logiciels utilisés

Lors de la simulation de calculs de bloc réacteur sous sollicitation extrême telle que le séisme, des impacts sur la cuve sont induits pas les mouvements lents de balancement de l'enveloppe de cœur au niveau des clés radiales. Les problèmes de contact sont habituellement discrétisés finement et résolus par un logiciel de dynamique rapide. Cette méthode d'intégration temporelle est adéquate pour la zone sujette au contact mais surdimensionnée pour le reste de la structure. C'est la raison pour laquelle une méthode de co-simulation est privilégiée. Les logiciels utilisés pour simuler le comportement du bloc réacteur simplifiés sont : Europlexus [alt23b] pour les zones comprenant les contacts (clés radiales) et Code aster [Fra23] pour le reste de la structure.

### 4.2.2.1 Code Aster

Code Aster est un logiciel libre de calcul par éléments finis, développé par le groupe EDF (Électricité de France) et diffusé depuis 2001 [Dur]. Ce logiciel permet de réaliser des simulations numériques en mécanique des structures, en thermique, en acoustique, en écoulement de fluides, en électromagnétisme et en couplage multi-physique. Le logiciel originellement développé en langage Fortran est depuis quelques années mis à jour avec un portage des fonctions vers le langage Python pour faciliter la lecture et la compréhension du code source. De plus, le récent développement d'un "container" facilite grandement l'installation et le

développement du Code Aster. En effet, le "container" permet de créer un environnement disposant de toutes les conditions nécessaires au bon fonctionnement du logiciel.

Code Aster dispose d'une grande communauté d'utilisateurs et de développeurs, ce qui permet de bénéficier d'un support technique de qualité et d'une documentation abondante. Il est également intégré à la suite logicielle Salomé-Meca, qui offre une interface graphique conviviale pour la préparation des modèles, l'exécution des simulations et la visualisation des résultats.

En utilisant Code Aster, il est possible de résoudre des problèmes complexes dans de nombreux domaines de l'ingénierie, tels que la conception de structures, l'optimisation de pièces mécaniques, la simulation de procédés industriels, la modélisation de phénomènes physiques complexes, etc.

#### 4.2.2.2 Europlexus

Europlexus est un logiciel de simulation sous licence, issu de la fusion des codes Plexus, Eurodyn et Plexis-3C, développé par le CEA (Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives) et le JRC (Joint Research Centre) depuis 2013. Il est conçu pour l'analyse de phénomènes transitoires rapides, tels que la dynamique des structures et l'interaction fluide-structure. La discrétisation spatiale se base sur des méthodes éléments finis, de volumes finis, d'éléments spectraux et de particules SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Pour l'intégration en temps, le logiciel utilise une méthode explicite. Le calcul dynamique est non-linéaire en termes de géométrie (grands déplacements et rotations) et de matériaux. Il propose une bibliothèque de modèles de matériaux, allant du verre aux métaux en passant par les polymères, qui prend en compte les domaines plastiques et les dommages.

En utilisant Europlexus, il est possible de résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure et de dynamique rapide tels que des impacts, des chocs, des explosions et des propagations d'ondes, pour finalement calculer les conséquences de ces phénomènes sur des structures complètes.

La gestion des contacts est modélisée sur le logiciel Europlexus. Europlexus dispose de plusieurs modèles de contact : la méthode du contact glissant et la méthode Pinball.

#### Méthode du contact glissant

La méthode du contact glissant (ayant comme mot clé GLISS) concerne des lignes (2D) ou des surfaces (3D). Cette méthode, développée par Hallquist et Benson [HGB85 ; BH90], est basée sur la détection du contact "maître/esclave". Cette technique calcule le "gap" entre

les noeuds "esclaves" et les surfaces "maîtres" afin de vérifier si il y a interpénétration. La définition des surfaces "maître" et "esclave" influence les résultat obtenus. Il existe en effet plusieurs configurations, référencées dans la littérature [BY93], pour lesquelles les contacts ne sont pas détectés. Les forces de contacts sont calculées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange dans Europlexus.

### Méthode Pinball

La méthode Pinball (ayant pour mot clé PINB) a été développée par Belytschko et O'Neil [BN91]. Cette méthode simplifie les détections de contact et d'interpénétration, par rapport aux méthodes de ligne et de surface glissantes, en associant à chaque élément une sphère (Pinball).

Les conditions de contact telles que le calcul du gap et l'interpénétration sont directement calculées sur les sphères ce qui réduit considérablement les étapes de l'algorithme. L'interpénétration se calcule facilement en mesurant la distance entre les sphères. Si celle-ci est inférieure à la somme de leurs rayons alors il y a interpénétration :

$$d < R_1 + R_2 \tag{4.1}$$

avec  $d$  la distance entre le centre de deux éléments,  $R_1$  et  $R_2$  respectivement les rayons des éléments 1 et 2. Si une interpénétration entre des éléments est détectée, les efforts de contact sont appliqués au système par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode de la pénalité en imposant une relation sur les vitesses. Cette méthode repose sur la définition de la sphère. Le rayon de la sphère est défini de deux manières différentes :

- Le rayon de la sphère comprend tous les noeuds de l'élément,
- Le rayon de la sphère est calculé afin d'obtenir un volume équivalent de l'élément fini.

Ces deux définitions posent des problèmes de détection spatiale pour des éléments irréguliers et déformés et pour les éléments ayant de très faibles épaisseurs (poutre, plaque, barre). BELYTSCHKO et YEH [BY93] ont proposé une amélioration de l'algorithme Pinball. Afin d'améliorer la précision de la détection spatiale en cas de détection d'interpénétration, une méthode consiste à subdiviser le PINBALL initial, nommé PINBALL parent (de niveau 0), en deux PINBALLs plus petits appelés PINBALLs descendants (de niveau 1).

Cette subdivision est répétée jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interpénétration détectée entre les descendants. Pour améliorer la précision de la détection spatiale, il est important de choisir judicieusement le niveau de fragmentation des PINBALLs, tout en veillant à ne pas réduire excessivement le pas de temps. Cette approche est recommandée dans [Cas02].

La méthode de contact choisie pour la modélisation du contact entre les clés radiales est la méthode PINBALL. Ce choix s'appuie sur la détection des interpénétrations plus pertinente. La fragmentation des PINBALL est fixée à 1. Ce choix est un compromis entre pertinence des résultats et temps de calcul.

### 4.2.3 Présentation de la stratégie de co-simulation

L'objectif industriel de cette thèse est la création d'un démonstrateur pour la co-simulation. Pour réaliser ce couplage implicite-explicite dans un milieu industriel, il faut choisir un logiciel modélisant chaque partie. Le logiciel Code Aster a été choisi pour simuler la partie implicite de la géométrie présentée dans la Figure 4.7a. Quant à la partie explicite représentée par la Figure 4.7b, elle est simulée par le logiciel Europlexus. Un code extérieur, appelé dans la suite du chapitre "coupleur", est nécessaire pour communiquer les informations d'un logiciel à l'autre.

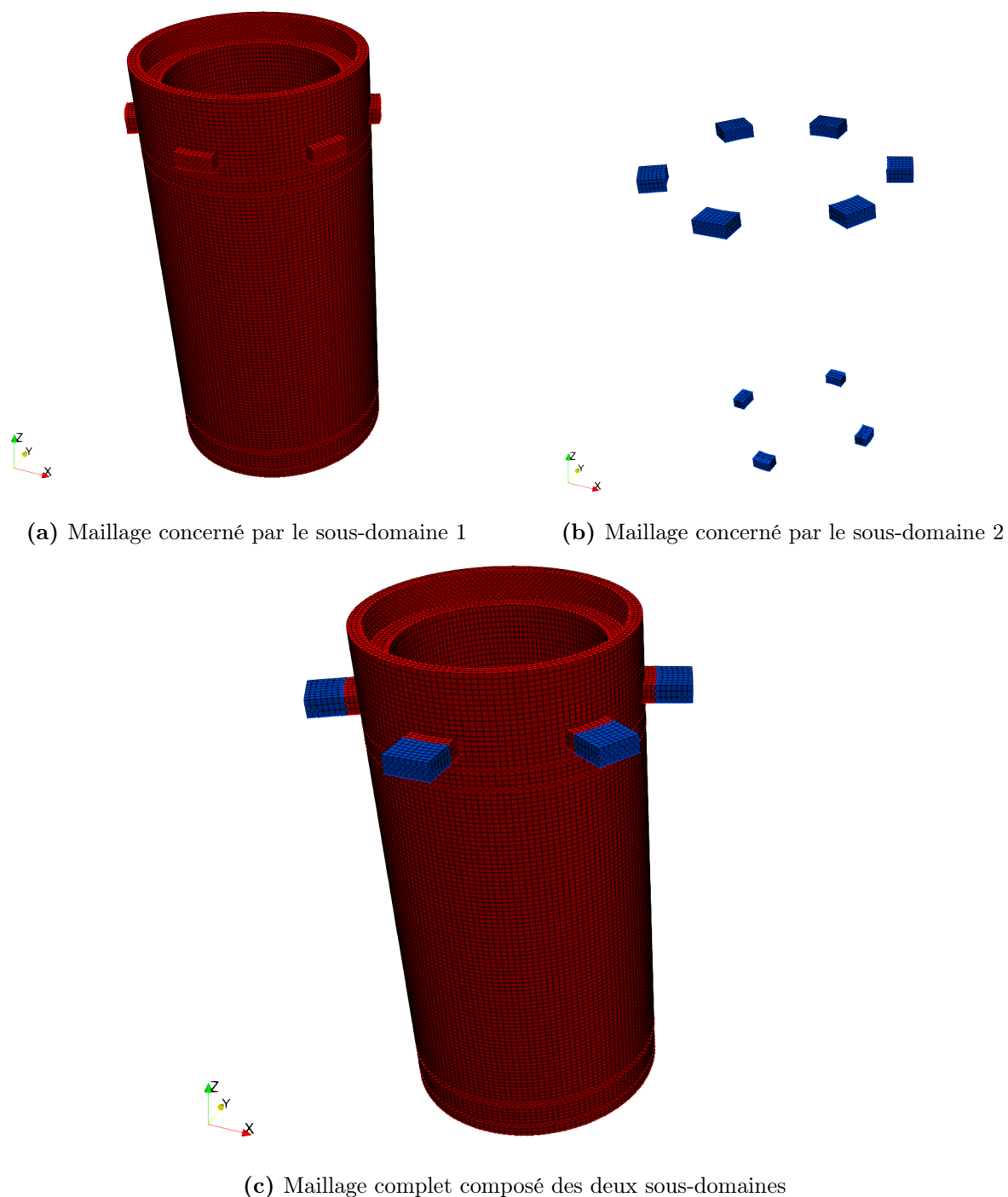
#### 4.2.3.1 Communication entre Code Aster, Europlexus et le coupleur

La communication entre les logiciels avec le coupleur est assurée par un mécanisme de type tubes, aussi appelé "pipe". Les tubes sont majoritairement utilisés sous UNIX ou LINUX. Ce procédé permet de passer outre la sauvegarde temporaire sur le disque dur des données et de directement les envoyer en mémoire des processus concernés. Ce transfert est effectué par des fichiers nommés, de tailles nulles, ouverts lors du premier appel du coupleur pour devenir des tubes. Chaque logiciel dispose de deux fichiers tubes propres permettant des échanges d'informations dédiés. Le nombre de tubes par processus est de deux car le transfert d'information est unidirectionnel. Chaque côté du tube entre le coupleur et le logiciel est soit ouvert en écriture, soit en lecture. La lecture du tube a pour effet de détruire l'information qui y est stockée, un seul processus peut lire les données stockées par le tube. De plus, il convient de noter que la lecture d'un tube peut entraîner un blocage, c'est-à-dire que le processus de lecture sera mis en attente si aucune donnée n'est disponible. Cette caractéristique permet de synchroniser les processus, les processus de lecture étant synchronisés avec les processus d'écriture.

#### 4.2.3.2 Procédures effectuées sur Code Aster et Europlexus

Les logiciels Code Aster et Europlexus construisent les matrices de masse  $\mathbf{M}$  (2.14) et de raideur  $\mathbf{K}$  (2.18) directement à partir des maillages fournis en entrée et des caractéristiques matériaux. Les flèches dessinées en pointillées rouges sur la Figure 4.8 représentent les





**FIGURE 4.7** – Répartition du maillage complet en 2 sous-domaines distincts

principaux échanges entre le coupleur et les logiciels Code Aster et Europlexus. Les matrices de condensation  $\mathbf{H}^E$  et  $\mathbf{H}^I$  (3.32) sont construites en fonction des matrices de masses effectives  $\tilde{\mathbf{M}}$  (3.20) propres aux deux sous-domaines calculées à partir des paramètres des schémas de Newmark choisis  $\gamma$  et  $\beta$ , ainsi que des pas de temps relatifs à chacun des

sous-domaines. Seules les valeurs des quantités relatives aux noeuds se situant au niveau de l'interface des sous-domaines sont envoyées au coupleur. Par souci d'optimisation des temps de calcul, la décomposition L.U. des opérateurs  $\mathbf{H}$  est effectuée au début et une fois pour toute. La matrice  $\mathbf{H}^{-1}$  ne varie pas en fonction du temps, elle est donc stockée pour être utilisée par la suite dans le calcul des multiplicateurs de Lagrange. Les deux logiciels réalisent la simulation en parallèle sans prendre en compte les forces d'interface entre les sous-domaines, puis le coupleur résout le problème condensé à l'interface Eq. (2.104) permettant de calculer les forces d'interface, ce qui permet de compléter finalement les quantités. Le second membre  $\mathbf{b}$  est construit à partir des vitesses libres (3.32) envoyées par Code Aster et Europlexus. Code Aster n'envoie que les vitesses libres sur l'échelle macroscopique, une interpolation linéaire est ensuite réalisée par le coupleur pour assurer la continuité des vitesses sur l'échelle microscopique du sous-domaine explicite simulé par Europlexus. Les forces d'interface, c'est-à-dire issues des multiplicateurs de Lagrange, sont calculées à chaque micro pas de temps à partir de la décomposition L.U. des opérateurs d'interfaces  $\mathbf{H}^E$  et  $\mathbf{H}^I$ , ainsi que le vecteur  $\mathbf{b}$ . Ces forces sont ensuite transmises aux noeuds d'interfaces afin d'assurer la continuité et de calculer les quantités sur chaque sous-domaine provenant des efforts d'interface. Les différents échanges entre les logiciels et le coupleur, ainsi que les opérations réalisées à chaque étape sont résumés dans la Figure 4.8.

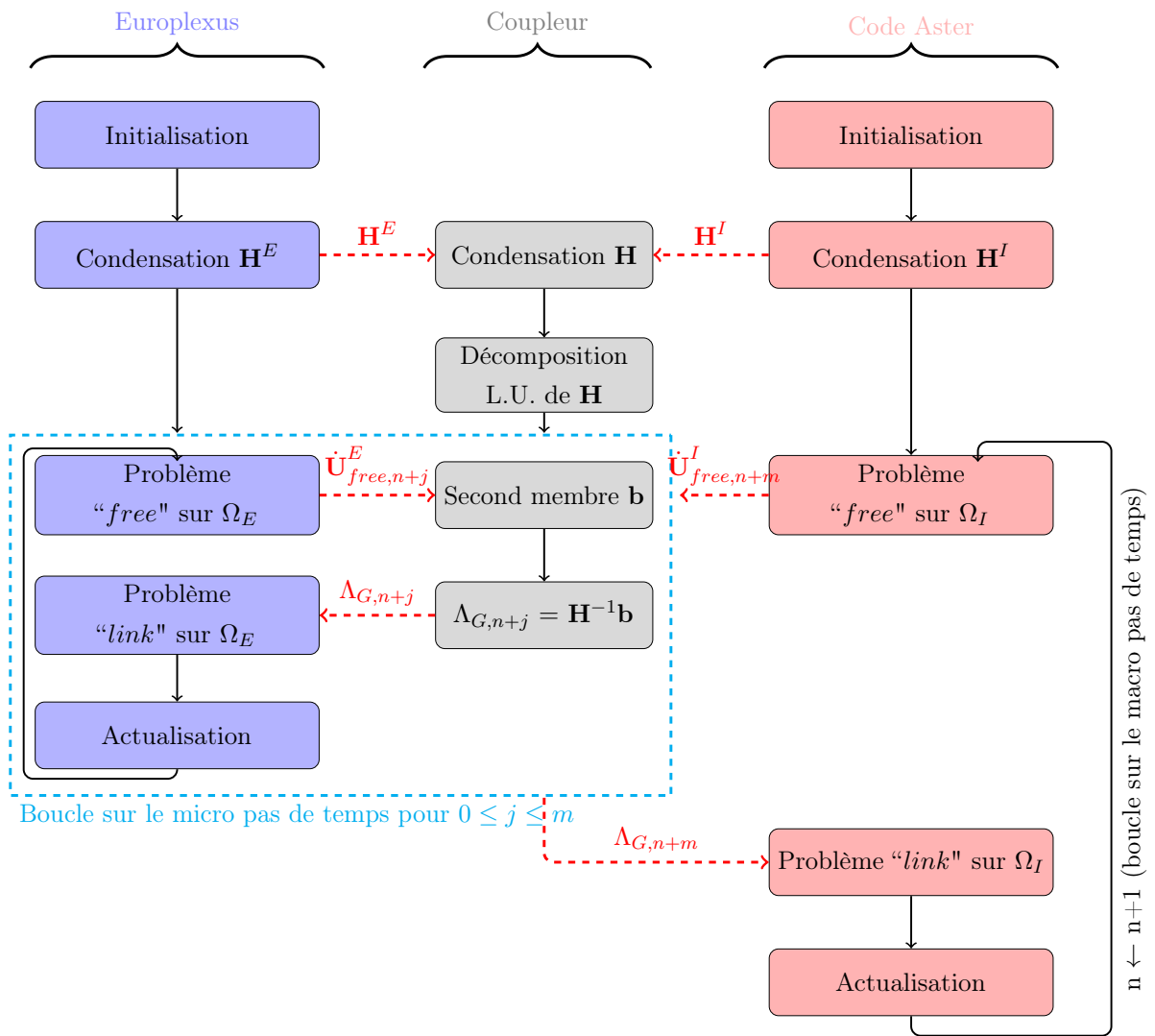


FIGURE 4.8 – Co-simulation avec les logiciels Code Aster et Europlexus pour la méthode GC

La co-simulation avec la méthode BLG suit globalement la même architecture que celle présentée par la Figure 4.8. La modification s'opère à deux endroits : lors de la réception des opérateurs  $\mathbf{H}$  en définissant un nouvel opérateur  $\mathbf{H}_{acc}$  (3.46) et lors de la réception des quantités libres du coupleur envoyées par les logiciels. Pour le dernier pas de temps de l'échelle microscopique entre deux pas de temps macroscopique, les accélérations libres sont envoyées à la place des vitesses libres. Ce processus est décrit dans la Figure 4.9 ci-dessous.

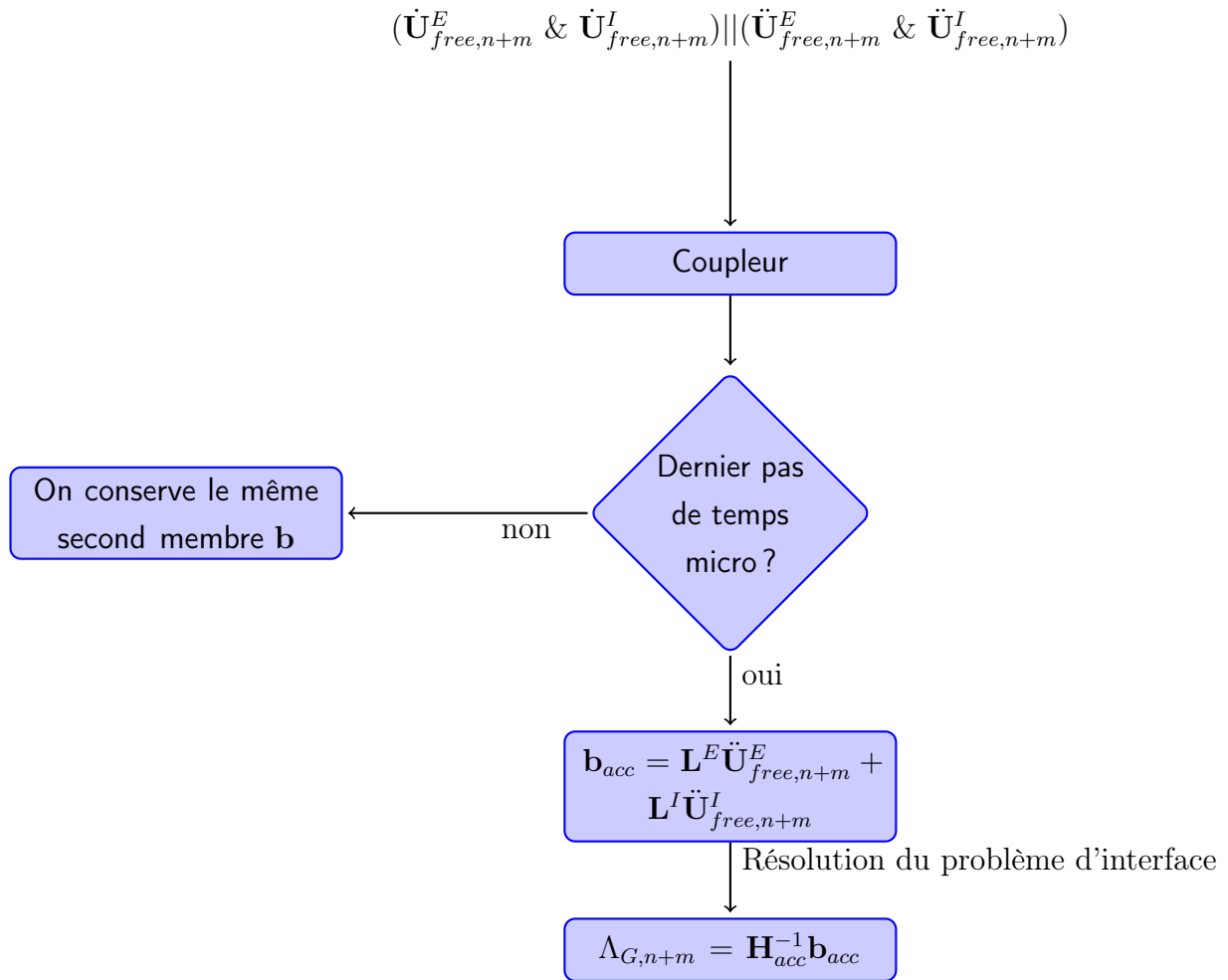


FIGURE 4.9 – Modification dans le coupleur pour effectuer la méthode BLG

## 4.2.4 Application numérique

### 4.2.4.1 Description du modèle

La co-simulation entre les logiciel Code Aster et Europlexus est réalisée sur la géométrie divisée en deux-sous domaines présentée dans la Figure 4.7c. Le sous-domaine (SD) implicite, en Figure 4.7a, est résolu par le logiciel Code Aster en utilisant un schéma d'intégration temporelle de Newmark (schéma CAA). Le sous-domaine (SD) explicite, en Figure 4.7b, est résolu par le logiciel Europlexus par un schéma d'intégration temporelle explicite (schéma CD). Le nombre de degrés de liberté (ddl) et les pas de temps utilisés pour chacun des sous-domaines sont indiqués dans le Tableau 4.1. Le choix de fixer le micro pas de temps et de faire varier le macro pas de temps n'influe pas sur la présence de dissipation d'énergie à l'interface. En effet, augmente le macro pas de temps va diminuer

la précision et peut créer un déphasage des résultats obtenus. Cependant, les schémas d'accélération moyennes (CAA) sont par définition inconditionnellement stables, ce qui permet d'assurer la non présence d'amortissements numériques.

	SD explicite	SD implicite	Interface
ddl	7728	282744	1320
Pas de temps	$2 \cdot 10^{-6}$ s	$m \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ s	-

**TABEAU 4.1** – Pas de temps  $h$  et degrés de liberté associés à chaque sous-domaine

Les propriétés matériaux pour les deux sous-domaines sont choisies de manière arbitraire et correspondent à un acier "standard" :

- La masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$
- Le module de Young  $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
- Le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Le modèle tridimensionnel est étudié suivant deux analyses : une analyse modale et une analyse temporelle.

### Analyse modale

Une analyse modale est réalisée afin d'étudier les fréquences propres du modèle. Ces résultats sont nécessaires à l'analyse des résultats temporels pour comprendre si des fréquences propres sont mises en résonance par le chargement utilisé. L'analyse modale est effectuée avec le logiciel Code Aster par l'opérateur "CALC\_MODES". Cet opérateur résout l'équation (4.2) pour trouver les valeurs propres  $\omega$  et les modes propres  $\mathbf{X}$  du système étudié.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0 \quad (4.2)$$

Cet opérateur donne pour résultat une liste classée par ordre croissant des fréquences propres du système.

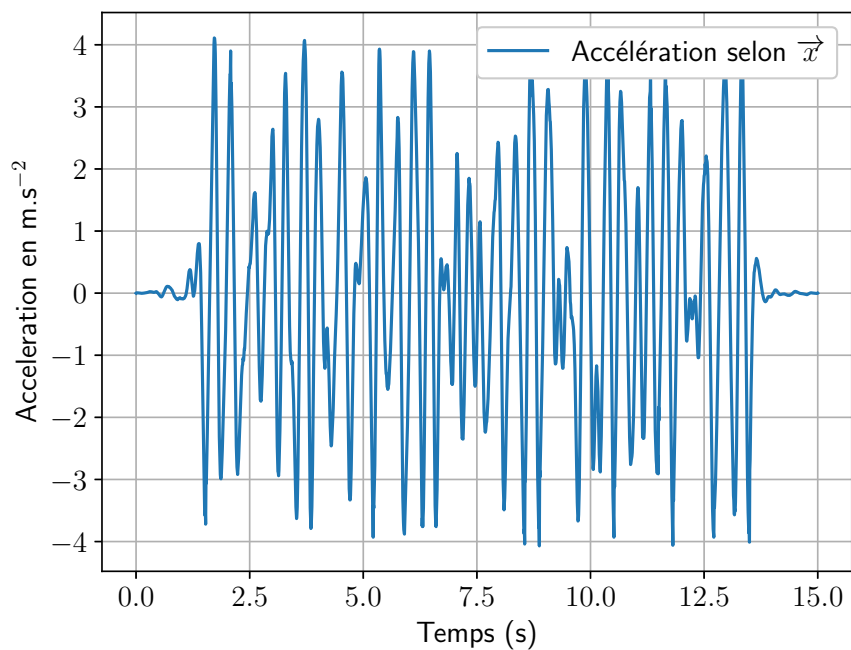
### Analyse temporelle

Le chargement extérieur pour cette simulation correspond à un chargement sismique. Les spectres d'accélérogramme fournis sont illustrés sur les Figures 4.10a, 4.10b et correspondent à des sollicitations horizontales.

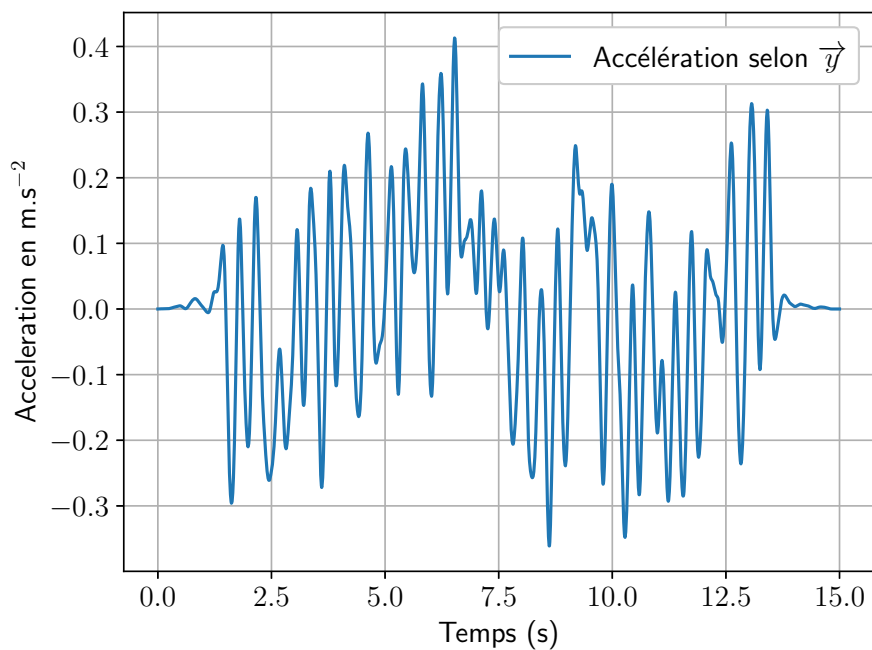
Le chargement sismique peut être imposé au modèle de deux manières différentes :

- En calculant l'effort équivalent en chacun des noeuds avec la force définie comme :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{M}\gamma\Delta \quad (4.3)$$



(a) Accélérogramme selon l'axe x



(b) Accélérogramme selon l'axe y

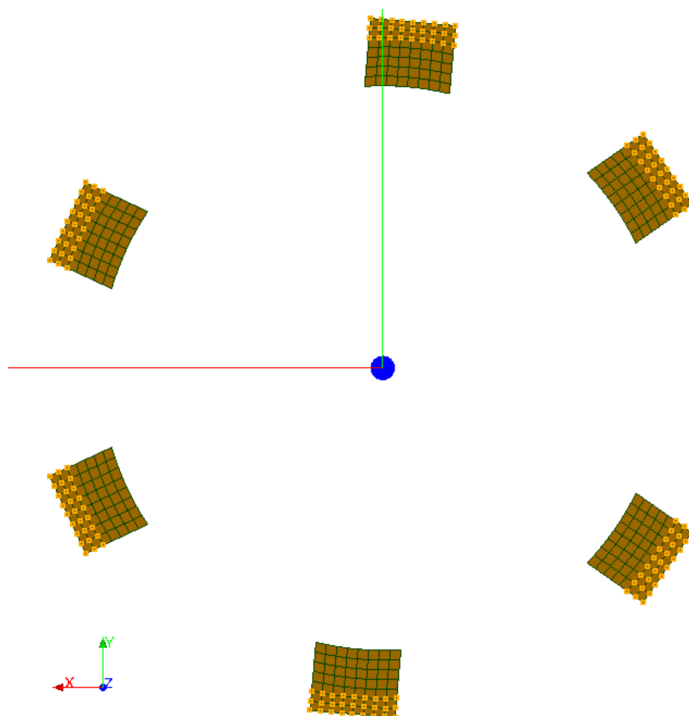
**FIGURE 4.10** – Sollicitation sismique horizontale

avec  $\mathbf{F}$  le vecteur des forces sismiques,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\gamma$  l'accélération du séisme et  $\Delta$  le vecteur donnant la direction du séisme (x, y ou z). Dans cette situation, qui correspond à la situation classique d'un calcul sismique, les quantités obtenues sont exprimées dans un repère relatif au sol et les forces extérieures sismiques résultent de la mise en mouvement des masses du modèle avec le séisme.

- En appliquant directement les accélérations provenant du séisme aux noeuds en contact avec le sol. Dans cette situation, les quantités obtenues sont exprimées dans un référentiel absolu en pilotant directement les quantités imposées au cours du temps. Dans un code explicite, on peut imposer les accélérations ou les vitesses.

La deuxième modélisation est celle utilisée pour appliquer le séisme à la structure complète. Les accélérations sont imposées plutôt que les vitesses. Cela permet d'utiliser les accélérogrammes fournis directement, sans avoir à intégrer les signaux en temps.

Ce choix d'imposer les accélérations s'appuie sur la facilité d'implémentation proposée par Europlexus sur les sous-domaines explicites.



**FIGURE 4.11** – Noeuds soumis aux sollicitations sismiques

La validation des résultats provenant de la co-simulation implicite-explicite passe par une comparaison avec un calcul de référence réalisé par Europlexus. Le calcul de référence utilise le même pas de temps  $2 \cdot 10^{-6}$  s et est réalisé pour une durée simulée de 4 secondes. Pour vérifier la validité des résultats, un observateur est placé (voir Figure 4.12) sur

la géométrie et sert d'indicateur de comparaison. L'observateur est un noeud nommé. Le déplacement est la quantité cinématique observée pour l'observateur 1 se trouvant dans la zone explicite proche du contact.

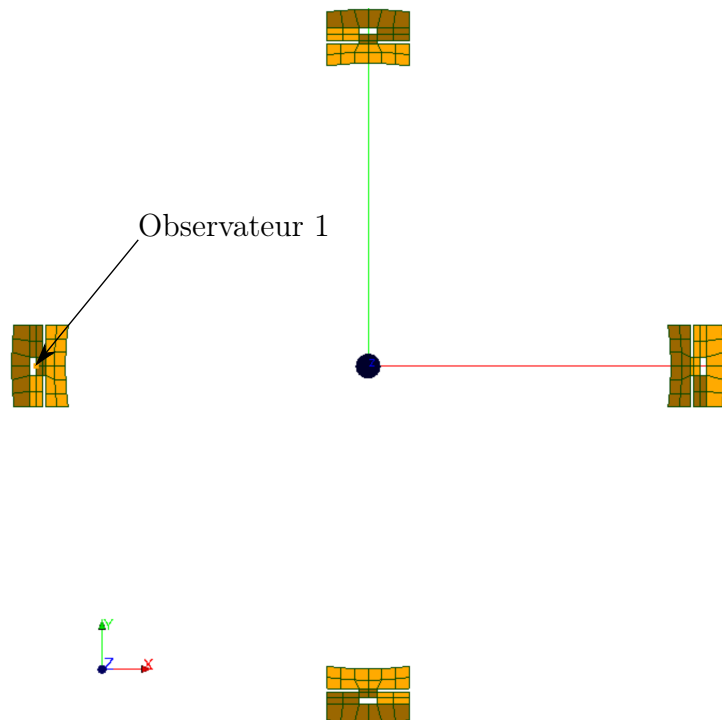


FIGURE 4.12 – Observateur 1 placé au niveau d'une des clés radiales

#### 4.2.4.2 Résultats numériques

L'analyse modale effectuée sur la géométrie complète permet de connaître les premières valeurs propres du système, elles sont notées dans le Tableau 4.2. Les premières déformées de ces valeurs propres sont représentées dans les Figures 4.13 et 4.14.

Mode	Fréquence propre (Hz)
1	17.7 Hz
2	17.7 Hz
3	25.86 Hz
4	25.86 Hz
5	38.49 Hz
6	38.49 Hz

TABLEAU 4.2 – Premières fréquences propres issues de l'analyse modale



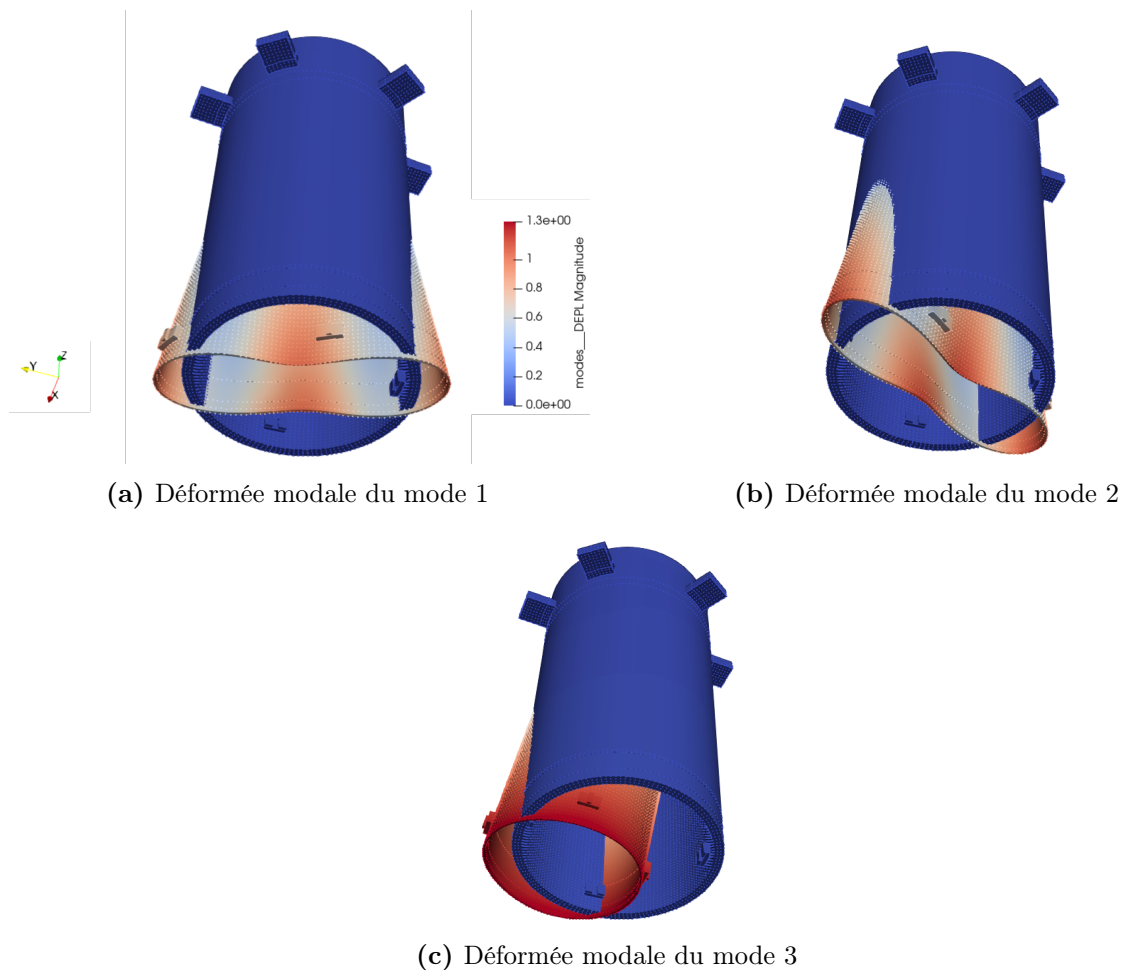
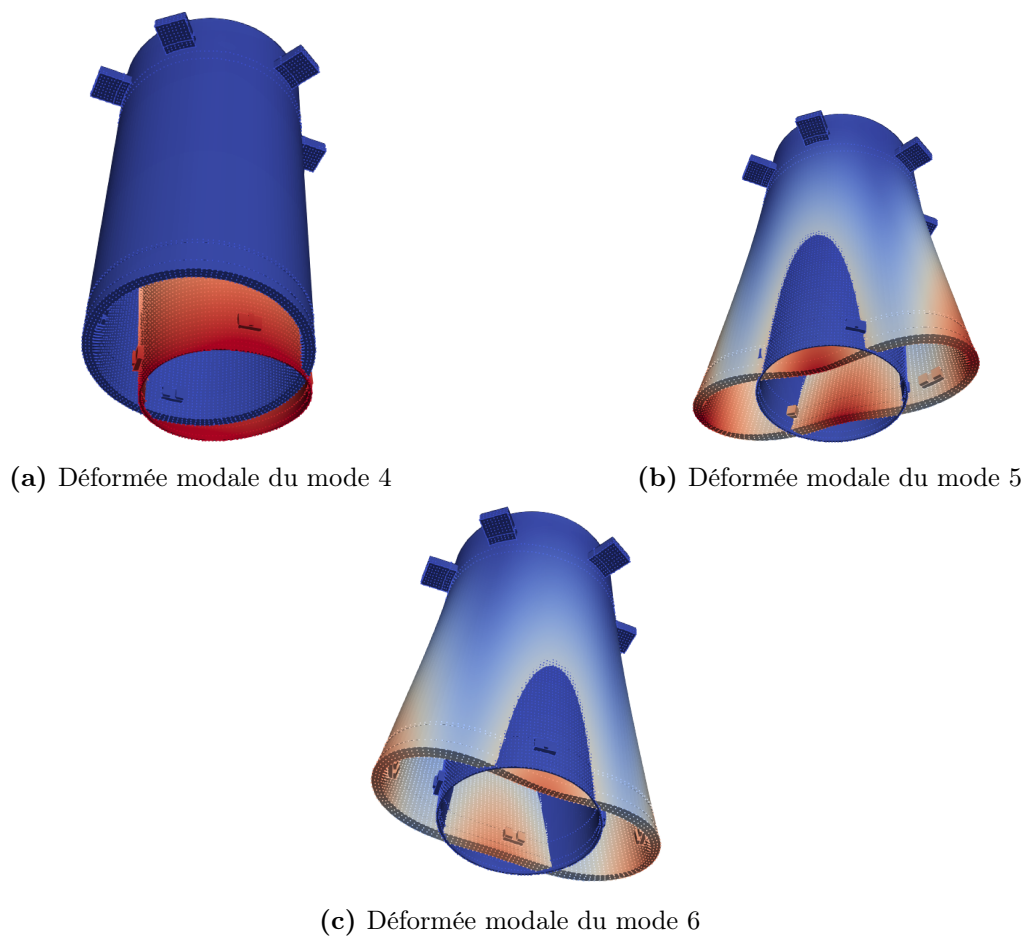


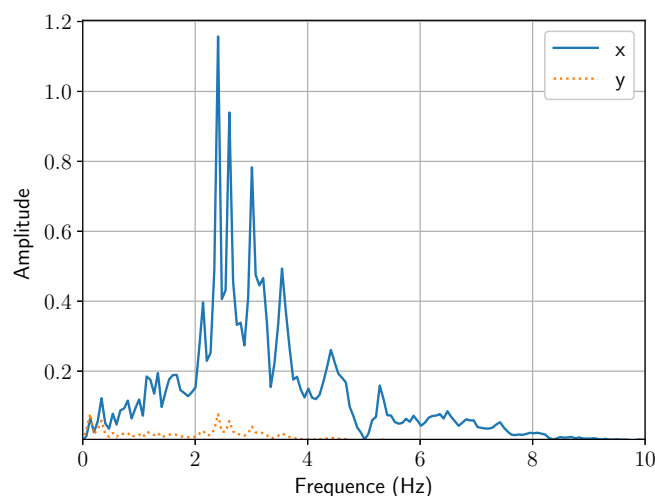
FIGURE 4.13 – Déformées modales du bloc réacteur

Le modèle prenant en compte uniquement les parties cylindriques de la cuve et de l'enveloppe de cœur, la plaque de fond support n'a pas été prise en compte. C'est la raison principale pour laquelle les modes de coques présentent des fréquences propres inférieures à celle du mode de balancement. En ce qui concerne le mode de balancement en air de l'enveloppe de cœur, il manque uniquement la masse du fond support. Quand bien même cette masse est omise, la fréquence du mode de balancement de cœur est proche de celle obtenue à la suite de multiples essais réalisés en air par le passé. Dans la dynamique du bloc réacteur, la prise en compte de l'interaction fluide-structure entre la cuve et l'enveloppe de cœur joue un rôle de premier ordre. Ainsi, une des améliorations du modèle serait d'ajouter la modélisation de la présence d'eau dans l'espace annulaire. Pour se faire de multiples modélisations peuvent être envisagées telles que des masses ajoutées, des mailles acoustiques, etc. Une fois l'influence de l'eau ajoutée dans le modèle, la fréquence propre du balancement de cœur devrait descendre sous la dizaine de hertz.



**FIGURE 4.14** – Déformées modales du bloc réacteur

Les excitations sismiques utilisées comme chargement pour l'analyse temporelle sont aussi étudiées dans le domaine fréquentiel afin d'anticiper les résultats de l'analyse temporelle. Par la méthode des transformées de Fourier, l'excitation initialement exprimée dans le domaine temporel est visualisée dans le domaine fréquentiel. Plusieurs pics d'énergie sont présents, comme observé sur la Figure 4.15. L'énergie fournie par les excitations suivant la direction  $x$  prédomine sur celle suivant la direction  $y$ . Les pics sont aux fréquences suivantes : 2.4 Hz, 2.6 Hz, 3 Hz. Plus largement, les fréquences sollicitées par ces excitations sismiques se trouvent dans la plage de fréquence  $[0; 8]$  Hz. La fréquence de balancement de l'enveloppe de coeur est sensé être à 8Hz. Cependant, aucune fréquence propre du modèle 3D du bloc réacteur simplifié ne risque de rentrer en résonance compte tenu des simplifications apportées et expliquées dans le paragraphe ci-dessus. La mise en résonance d'une des fréquences propres de l'enveloppe de coeur ou de la cuve aurait des répercussions directes, accompagnées de risques de concentration de contraintes.

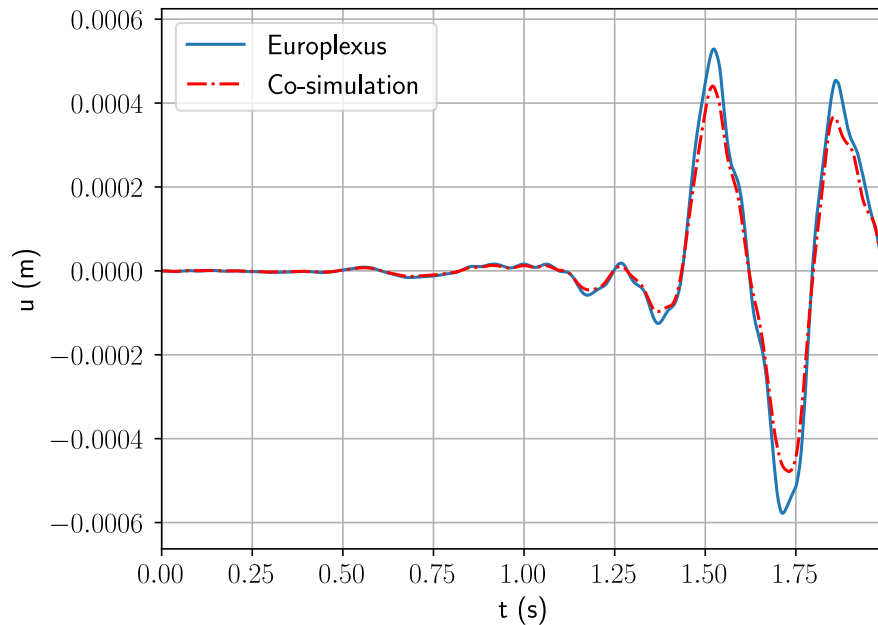


**FIGURE 4.15** – Transformée de Fourier des sollicitations sismiques

La Figure 4.16 trace le déplacement de l'observateur 1 en fonction du temps pour un rapport de pas de temps  $m = 4000$  entre l'échelle implicite et explicite. Le déplacement obtenu par une simulation complète Europlexus est tracée pour comparaison (résultat de référence). On constate que la réponse prédite par la co-simulation est amortie aux niveaux des pics de réponse. Par contre, la réponse prédite par la co-simulation ne semble présenter qu'un déphasage très faible par rapport aux résultats de référence.

Sur la Figure 4.17, différents rapports de pas de temps sont explorés et comparés aux résultats de référence provenant du calcul complet Europlexus pour le déplacement enregistré en l'observateur 1. Plus le rapport de pas de temps  $m$  devient grand et plus les pics de réponse obtenus sont amortis. Ce résultat général était attendu car la méthode de couplage multi-échelles génère une dissipation à l'interface. Pour des grands rapports de pas de temps  $m = 5000$  ou  $m = 10000$ , les différences aux pics deviennent importantes. Dans la pratique du calcul sismique, il faut aussi noter que de tels rapports entre les pas de temps ne seront pas utilisés car cela conduit à des pas de temps dans le logiciel implicite de l'ordre de 20 ms, ce qui paraît trop grand pour un calcul sismique implicite qui adopte généralement des pas de temps de l'ordre de quelques millisecondes afin de représenter correctement fréquences du signal sismique [Peg01].

La figure 4.17 est agrandie en début de simulation (voir figure 4.18) afin de visualiser le déplacement pour tous les rapports de pas de temps  $m$ . Les résultats présentés sont pour un temps de simulation très courts, la raison est expliquée dans la section 4.2.4.3. Pour ce temps de simulation très court, de légers écarts supérieurs à la solution de référence



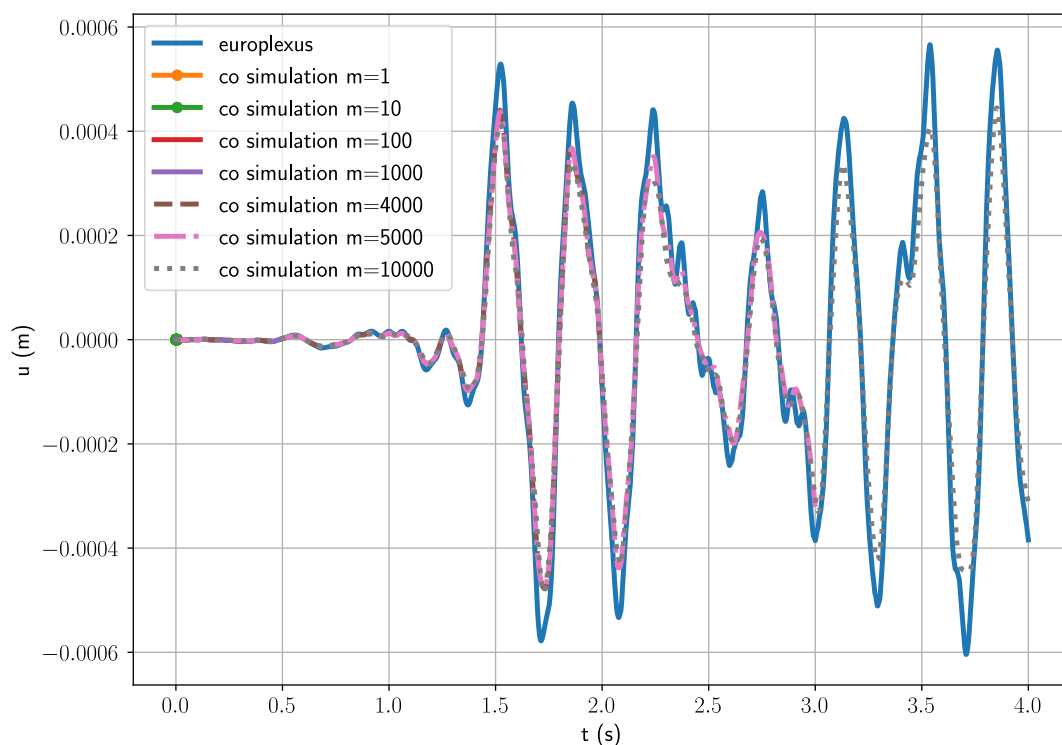
**FIGURE 4.16** – Evolution du déplacement de l'observateur 1 au cours du temps pour  $m = 4000$

apparaissent à mesure que le rapport de pas de temps augmente. Pour le rapport de pas de temps  $m = 10000$ , un écart plus important est visible. Cet écart est marqué par une perte d'amplitude comparé aux autres rapport de pas de temps représentés.

Le bilan énergétique pour un calcul réalisé par la méthode de co-simulation pour un rapport de pas de temps  $m = 4000$  est représenté sur la Figure 4.19. La dissipation de l'énergie à l'interface, représentée par la Figure 4.20 et calculée selon l'Equation (3.131), en fin de simulation représente 3.5% du bilan énergétique. Cette dissipation est liée au rapport entre les échelles de temps  $m$ . Il serait intéressant d'effectuer la même simulation avec un rapport de pas de temps plus petit pour la même durée de calcul simulée.

Cette dissipation d'énergie se retrouve également dans la réponse de l'observateur 1 d'un point de vue fréquentiel illustré sur Figure 4.21. Toutes les fréquences sont retranscrites sauf aux alentours de 15 Hz. De plus, les amplitudes sont plus faibles pour le résultat provenant de la co-simulation. Ces résultats expriment à la fois la dissipation énergétique à l'interface provenant de l'algorithme de couplage et de l'effet de distorsion en fréquence provenant du pas de temps grossier du sous-domaine implicite.

Cet exemple d'utilisation de la méthode de co-simulation présente le principal avantage de cette méthode en réduisant considérablement le temps de calcul d'une même simulation. En effet, lors d'une simulation du modèle de la maquette soumise à une excitation sismique de 4 secondes avec un rapport de pas de temps entre les deux sous-domaine  $m = 10000$ , le



**FIGURE 4.17** – Evolution du déplacement de l’observateur 1 au cours du temps pour différents rapports de pas de temps  $m$

temps CPU est réduit de 2 fois, comme indiqué dans la Figure 4.22. D’après cette Figure, il est observable que la majeure partie du temps de calcul est consacrée au sous-domaine explicite dans le calcul implicite-explicite. Ainsi, l’effort numérique est focalisé sur ce sous-domaine sans compromettre la qualité des résultats. La stratégie de co-simulation implicite-explicite proposée permet donc d’accélérer le temps de résolution pour ce cas d’application. Elle permet en effet de réduire les coûts de calcul tout en garantissant une précision de calcul élevée dans les zones d’intérêt, notamment les zones de contact. D’après notre retour d’expérience, le gain obtenu en terme de temps de calcul est proportionnel au temps de calcul simulé. La simulation du chargement sismique complet de 15 secondes offrirait un gain en temps plus important.

Enfin, la comparaison des temps de calcul entre un calcul complet explicite et une co-simulation en présence d’amortissements haute fréquence, comme dans le cas de la matrice visqueuse de Rayleigh proportionnelle à la matrice de raideur, serait bien plus avantageuse pour la stratégie de co-simulation proposée. En effet, dans cette situation, le pas de temps critique du calcul complet explicite est drastiquement réduit, d’un facteur pouvant

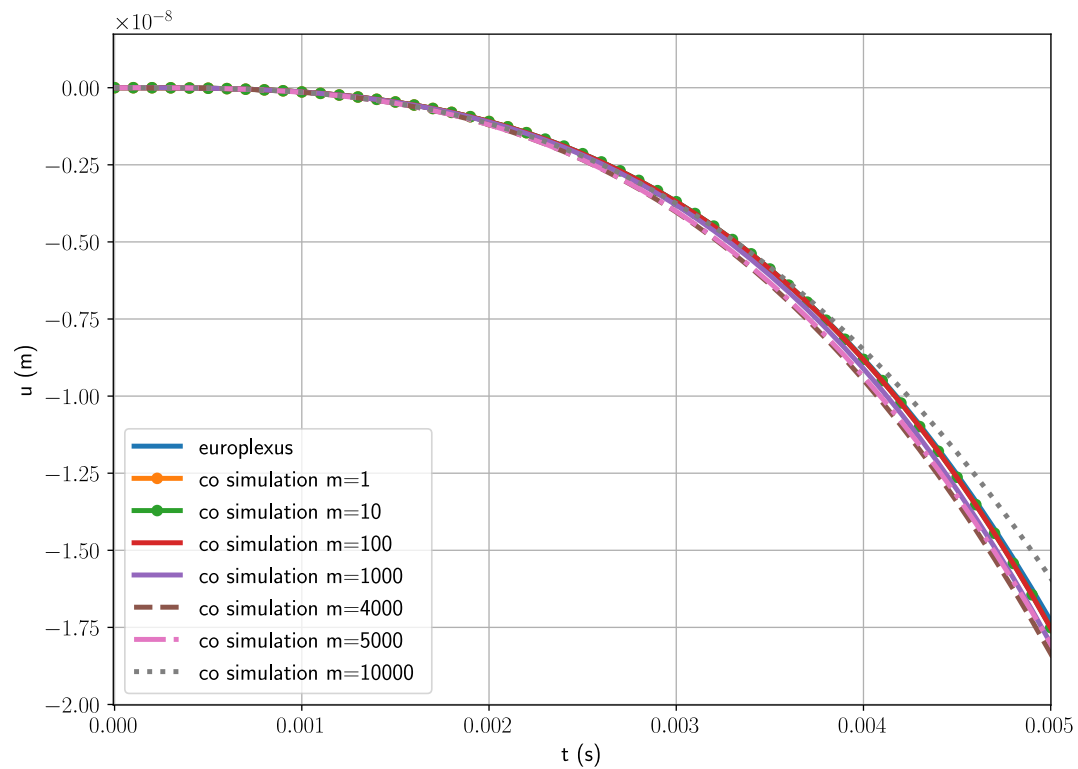


FIGURE 4.18 – Evolution du déplacement de l'observateur 1 au cours du temps pour différents rapports de pas de temps  $m$  pour un temps simulé plus court

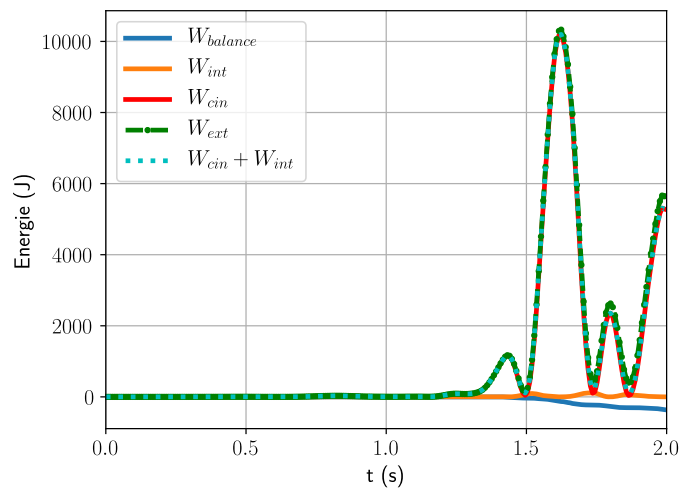


FIGURE 4.19 – Bilan énergétique de la co-simulation pour  $m=4000$

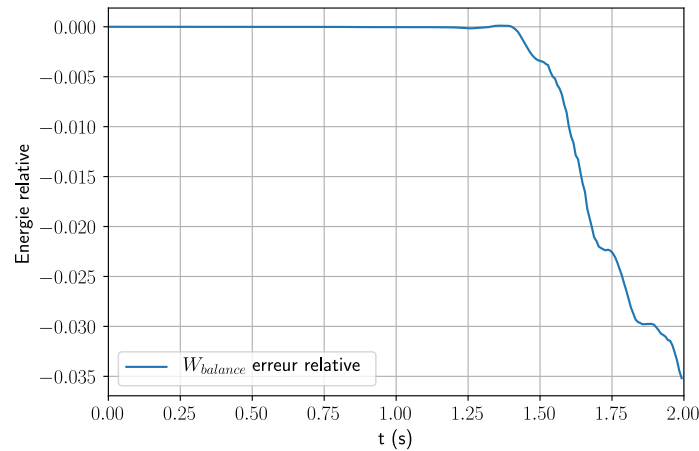


FIGURE 4.20 – Evolution de l’erreur relative de l’énergie d’interface en fonction du temps pour  $m = 4000$

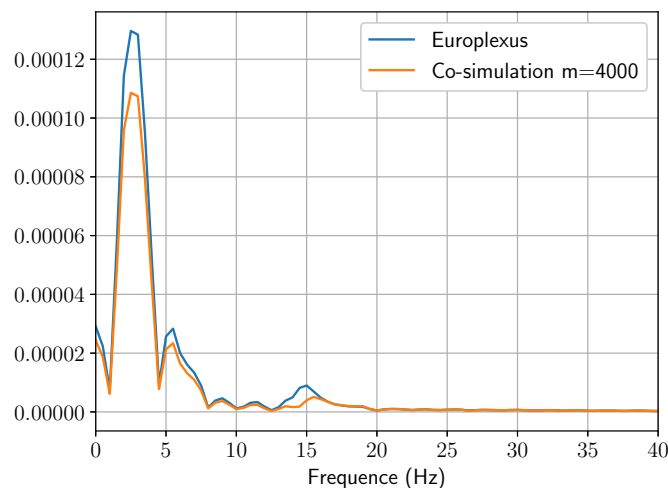
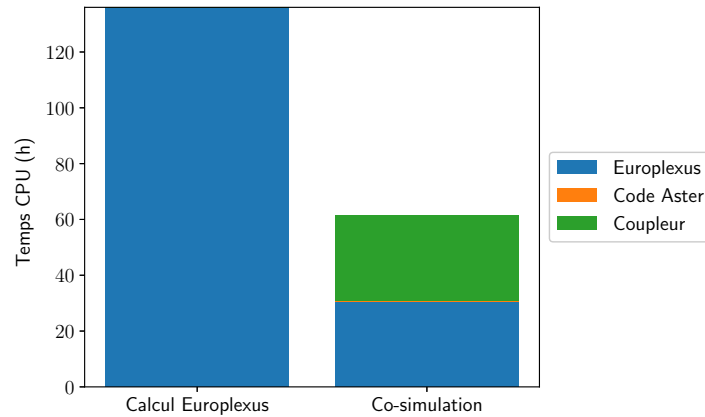


FIGURE 4.21 – Transformée de Fourier du déplacement de l’observateur 1

atteindre 100, alors que le pas de temps explicite de la co-simulation ne serait pas touché en introduisant l’amortissement haute fréquence uniquement dans le Code Aster.

#### 4.2.4.3 Limitation technique

Le développement et les calculs sont développés sur un ordinateur portable. Le développement sur une machine en local permet d’avoir une version figée des logiciels Europlexus et Code Aster et d’avoir plus de flexibilité pour effectuer des modifications. Cependant, effectuer des calculs sur une machine portable peut également entraîner des limitations. La principale limitation rencontrée concerne la mémoire allouée par le logiciel Code Aster.



**FIGURE 4.22** – Comparaison des temps CPU entre un calcul complet sur Europlexus et un calcul co-simulé

En effet, avec la géométrie choisie comme sous-domaine implicite, il est possible de réaliser seulement 300 pas de temps implicites seulement. Une fois cette valeur excédée, le programme s'arrête par manque de mémoire. Cette limitation technique explique le choix d'avoir présenté des résultats pour des rapports de pas de temps  $m$  grand afin d'arriver aux instants où les valeurs des excitations sismiques sont importantes.

### 4.3 Conclusion

Un démonstrateur de la méthode de co-simulation implicite-explicite est présenté dans cette partie. Il permet de coupler les logiciels Code Aster et Europlexus d'une manière peu intrusive. Cette démarche est définie pour ces deux logiciels, mais peut être appliquée à d'autres logiciels. La modélisation choisie concerne la réponse dynamique d'un bloc réacteur soumis à une sollicitation sismique. Le modèle est composé d'un maillage élément fini volumique 3D provenant d'une simplification des géométries de la cuve et de l'enveloppe de coeur composant le bloc réacteur. Un calcul effectué par le logiciel Europlexus sert de référence afin de valider les résultats obtenus par la co-simulation. Les résultats obtenus sont globalement corrects, l'utilisation de la co-simulation avec des différences importantes entre les différentes échelles de temps du modèle ( $m = 10000$ ) amortit les réponses. La dissipation énergétique, pour un rapport de pas de temps  $m = 4000$ , représente 3.5% de l'énergie totale du système. Un rapport de pas de temps  $m$  plus petit offrirait une dissipation énergétique plus faible.



Le modèle utilisé ici ne comporte pas d'amortissement. La prochaine étape est la quantification de l'amortissement numérique comparé aux amortissements de Rayleigh. En effet, il serait pertinent de savoir si la dissipation énergétique induite par ces méthodes de co-simulation sont négligeables pour des simulations longues comme des séismes (une dizaine de secondes). Le gain en temps de calcul sera beaucoup plus marqué dans cette configuration car l'amortissement serait appliqué sur le sous-domaine implicite permettant ainsi de conserver le pas de temps critique propre à la condition de CFL pour le sous-domaine explicite.

D'autre part, 50% du temps de calcul est consacré au coupleur (figure 4.22). Plusieurs optimisations sont envisageables à ce niveau (échange des données, lectures et écritures sur disque, solveur correspondant à l'opérateur de condensation H) afin d'obtenir un gain CPU supplémentaire.



---

# 5

## Conclusions et perspectives

### 5.1 Conclusions

Cette thèse propose une nouvelle méthode de co-simulation à pas de temps asynchrone permettant de s'attaquer à la problématique de l'augmentation des temps de calculs de simulation intégrant des phénomènes multi-échelles spatiaux et temporels de plus en plus fins. A l'heure de la sobriété numérique, développer des moyens permettant de réduire les temps de calcul, et donc *in fine* la consommation électrique des ordinateurs et/ou des serveurs de calcul, est une direction de recherche justifiée de bien des points vus. Une telle direction de recherche répond à une problématique éthique de réduction d'impact environnemental, mais répond également à des besoins industriels de réduction des temps de réalisation des études. De même, à l'heure de la légifération des impacts du numériques sur l'environnement, taxes supplémentaires telle que la taxe GAFA, la réduction des temps de calcul s'inclue également dans une démarche d'anticipation de taxe supplémentaire potentielle.

A cela vient s'ajouter les enjeux actuels concernant les justifications de plus en plus poussées des centrales nucléaires. Les éléments composant les centrales nucléaires sont dimensionnés pour résister à des conditions extrêmes d'utilisation telles que des séismes, des crashes d'avion ou encore des ruptures de tuyauterie. Or, les normes sur les seuils de

tolérances liés à ces éléments sont régulièrement mises à jour, impliquant ainsi l'utilisation de modélisations de plus en plus fines et donc de temps de calcul plus importants. Ainsi, l'obtention de méthodes de calculs permettant la réduction du temps de simulation permet également d'augmenter la qualité et la précision des résultats fournis tout en conservant des temps de calculs compatibles avec les contraintes industrielles.

Le développement d'un démonstrateur de co-simulation implicite/explicite multi-échelle en temps dans le cadre de cette thèse démontre la faisabilité de la réduction des temps de calculs et s'inscrit donc pleinement dans la problématique évoquée.

Le développement du démonstrateur passe premièrement par la compréhension des phénomènes physiques en jeu lors de ces incidents extrêmes par l'étude de la réponse dynamique d'une structure. Il est possible d'étendre ces méthodes aux calculs multi-échelles en temps par les intégrateurs temporels hétérogènes asynchrones. L'intérêt de ces méthodes réside dans la capacité à diviser une structure en plusieurs sous-domaines, chacun comportant leur propre méthode de résolution et leur propre échelle de temps. Concrètement, les zones d'impact et de non-linéarités sont regroupées dans le même sous-domaine tandis que le reste de la structure, comportant des parties plus régulières, est regroupé dans un sous-domaine. Les zones de contact sont résolues par des algorithmes explicites. Le reste de la structure est résolu par des algorithmes implicites permettant ainsi d'avoir des pas de temps plus grands grâce aux propriétés de stabilité inconditionnelle de ces schémas d'intégration temporelle. Plusieurs méthodes existent pour résoudre ces méthodes multi-échelles en temps dont la méthode GC.

Basée sur la méthode GC, une nouvelle méthode multi-échelle en temps est proposée, la méthode BLG. Les deux approches reposent sur la continuité de la vitesse au pas de temps fin. En revanche, la méthode BLG requiert une continuité de l'accélération plutôt qu'une continuité de la vitesse pour le dernier pas de temps fin correspondant au pas de temps grossier. Cette nouvelle méthode est étudiée afin de déterminer ses propriétés. Par une analyse spectrale de la matrice d'amplification liée à un oscillateur partitionné, les caractéristiques de stabilité, de précision, de dissipation numérique et d'allongement de période sont étudiées pour des cas de couplage implicite/explicite et explicite/explicite. La méthode BLG converge avec un ordre en plus que la méthode GC, ce qui permet de conserver l'ordre de convergence des schémas de Newmark. Par conséquent, la dissipation d'énergie liée à l'utilisation de la méthode GC est atténuée avec la méthode BLG. La nouvelle méthode est conditionnellement stable contrairement à la méthode GC qui est

inconditionnellement stable si chaque sous-domaine respecte ses conditions de stabilité.

Enfin une stratégie de co-simulation multi-échelle en temps est présentée pour répondre à la problématique industrielle initialement posée. Plusieurs zones d'impact sont présentes dans le bloc réacteur, entraînant la nécessité de considérer plusieurs échelles de temps. Du fait de la complexité à modéliser l'ensemble des phénomènes multi-échelles présents dans le bloc réacteur, le modèle de réacteur 3D a été simplifié pour seulement modéliser les contacts entre les clés radiales qui permettent de reprendre les efforts radiaux. Parmi les chargements externes possibles (APRP, crash d'avion et séisme), un séisme caractérisé par des sollicitations horizontales selon les deux directions est adopté. Ce séisme est appliqué au niveau des tubulures du bloc réacteur.

Un démonstrateur de la méthode de co-simulation dans un cadre industriel est présenté. Cette preuve de concept réalise le couplage entre le logiciel Code Aster pour le sous-domaine implicite et le logiciel Europlexus pour le sous-domaine explicite. Un développement conséquent a été nécessaire afin d'implémenter la méthode GC dans les fichiers sources de ces deux logiciels, et de réaliser des échanges entre ces logiciels et le coupleur pour résoudre le problème d'interface.

Les résultats présentés dans le cadre de ce travail résultent de l'utilisation de la méthode GC pour coupler les différents domaines. Un calcul de référence explicite complet est réalisé avec le logiciel Europlexus. L'utilisation de la méthode de co-simulation pour le modèle étudié permet un gain en temps de calcul notable en dégradant légèrement les résultats. En effet, les comportements globaux sont correctement représentés, mais les amplitudes de déplacements aux pics de réponse et les hautes fréquences sont amorties. Ce résultat s'explique par le fait que la méthode GC dissipe de l'énergie à l'interface et l'utilisation d'un rapport entre les pas de temps des deux sous-domaines très grands ( $m \geq 1000$ ) qui a pour effet de distordre les hautes fréquences du séisme.

## 5.2 Perspectives

Les avancées proposées durant ces travaux de recherche conduisent à de nouvelles perspectives de développement scientifiques et industrielles :

Tout d'abord, le déploiement du démonstrateur sur une plateforme bénéficiant de moyens techniques plus avancés permettrait de ne plus avoir la limitation du nombre de pas de

temps implicites réalisables par le logiciel Code Aster. Des rapports de pas de temps plus cohérents ( $50 \leq m \leq 1000$ ) pourraient être ainsi expérimentés pour des temps de calcul simulés correspondant aux chargements (15s) et finalement avoir une plus faible dissipation numérique à l'interface et moins de filtration des hautes fréquences.

L'enrichissement des modèles par la prise en compte de l'amortissement dans les structures permettrait d'avoir une modélisation plus complète. Il serait introduit par la notion d'amortissement de Rayleigh, permettant de définir la matrice d'amortissement comme étant une combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse ou simplement en fonction de la matrice de rigidité pour filtrer uniquement les hautes fréquences provenant de la discrétisation finie des modèles et des contacts. L'amortissement serait ajouté pour le sous-domaine implicite afin de ne pas dégrader le pas de temps critique du sous-domaine explicite. Des modifications seraient également à apporter aux développements effectués sur le Code aster pour la construction de la matrice d'amortissement et la modification de la matrice de masse effective.

Le démonstrateur actuel est également capable de coupler les logiciels avec la méthode BLG. Cependant, il n'a pas été testé au cours de ce travail de thèse sur le modèle du bloc réacteur simplifié. Les résultats encourageants obtenus sur le problème académique de l'oscillateur partitionné laissent penser que cette méthode pourrait diminuer de manière significative les erreurs à l'interface. La méthode BLG semble aussi prometteuse pour des applications fluide-structure pour lesquelles les deux sous-domaines, solide et fluide, sont traités avec des schémas explicites. En effet, dans cette situation, la stabilité du couplage par la méthode BLG est quasiment identique à celle de la méthode GC avec l'avantage important de conserver le second ordre de précision, contrairement à la méthode GC.

Les méthodes partitionnées proposées sont particulièrement appropriées pour les applications d'interaction fluide-structure car elles permettent d'assurer la stabilité du couplage grâce au formalisme versatile des approches duales. Pour des problèmes combinant des physiques différentes, nécessitant des approches hybrides à différentes échelles d'espace et de temps, les méthodes de co-simulation peuvent devenir précieuses pour répondre aux exigences industrielles.

---

# Bibliographie

- [23] *Ansys*. 16 juin 2023.
- [Abb+19] Giuseppe ABBIATI et al. « A computational framework for fast-time hybrid simulation based on partitioned time integration and state-space modeling ». en. In : *Structural Control and Health Monitoring* 26.10 (2019), e2419.
- [Abb+20] Giuseppe ABBIATI et al. « A Real-Time Hybrid Fire Simulation Method Based on Dynamic Relaxation and Partitioned Time Integration ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 146.9 (2020), p. 04020104.
- [alt23a] Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies ALTERNATIVES. *Cast3m, logiciel de calcul par la méthode des éléments finis pour la mécanique des structures et des fluides*. Licensed software, <http://www-cast3m.cea.fr/>. 1980–2023.
- [alt23b] Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies ALTERNATIVES. *Europlexus, a Computer Program for the Finite Element Simulation of Fluid-Structure Systems under Transient Dynamic Loading*. Licensed software, <https://europlexus.jrc.ec.europa.eu/>. 1999–2023.
- [Amb+22] José Henrique Krahenbuhl AMBIEL et al. « Three-dimensional analysis of eccentric pounding between two-storey structures using explicit non-smooth dynamics ». In : *Engineering Structures* 251 (2022), p. 113385.
- [Ans23] ANSYS. *Ls Dyna*. 16 juin 2023.
- [Apa23] APACHE SOFTWARE FOUNDATION. *Systus*. 16 juin 2023.
- [BCD06] B. BOUREL, A. COMBESURE et L. DI VALENTIN. « Handling contact in multi-domain simulation of automobile crashes ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 42.8 (2006), p. 766-779.
- [BDR21] Michael BRUN, Florent DE MARTIN et Nicolas RICHART. « Hybrid asynchronous SEM/FEM co-simulation for seismic nonlinear analysis of concrete gravity dams ». In : *Computers & Structures* 245 (2021), p. 106459.

- [Bet+17] Omar BETTINOTTI et al. « Simulation of delamination under impact using a global–local method in explicit dynamics ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 125 (2017), p. 1-13.
- [BH90] David J. BENSON et John O. HALLQUIST. « A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 78.2 (1990), p. 141-163.
- [BJW09] Oreste S BURSI, Chuanguo JIA et Zhen WANG. « Monolithic and partitioned L-Stable Rosenbrock methods for dynamic substructure tests ». In : (2009).
- [BLM00] Ted BELYTSCHKO, Wing Kam LIU et Brian MORAN. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. English. John Wiley & Sons, Ltd, 2000.
- [BMP93] C. BERNARDI, Y. MADAY et A. T. PATERA. « Domain Decomposition by the Mortar Element Method ». In : *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*. Sous la dir. d'Hans G. KAPER, Marc GARBEY et Gail W. PIEPER. Dordrecht : Springer Netherlands, 1993, p. 269-286.
- [BN91] Ted BELYTSCHKO et Mark O. NEAL. « Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31.3 (1991), p. 547-572.
- [Bon+08] A. BONELLI et al. « Convergence analysis of a parallel interfield method for heterogeneous simulations with dynamic substructuring ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75.7 (2008), p. 800-825.
- [Bru+15] M. BRUN et al. « Two FETI-based heterogeneous time step coupling methods for Newmark and alpha-schemes derived from the energy method ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283 (jan. 2015), p. 130-176.
- [Bru+16] Michael BRUN et al. « Hybrid Asynchronous Perfectly Matched Layer for seismic wave propagation in unbounded domains ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 122 (2016), p. 1-15.
- [Bur+10] O.S. BURSI et al. « Novel generalized- methods for interfield parallel integration of heterogeneous structural dynamic systems ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234.7 (2010). Fourth International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN 2008), p. 2250-2258.
- [Bur+17] Oreste S. BURSI et al. « Nonlinear heterogeneous dynamic substructuring and partitioned FETI time integration for the development of low-discrepancy



- simulation models ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 112.9 (2017), p. 1253-1291.
- [BY93] T. BELYTSCHKO et I.S. YEH. « The splitting pinball method for contact-impact problems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 105.3 (1993), p. 375-393.
- [Cas02] F CASADEI. « A hierarchic pinball method for contact-impact in fast transient dynamics ». In : *VI Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale (SIMAI 2002), Chia (Cagliari), Italy.* 2002, p. 27-31.
- [CFL28] Richard COURANT, Kurt FRIEDRICHS et Hans LEWY. « Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik ». In : *Mathematische annalen* 100.1 (1928), p. 32-74.
- [CG02] Alain COMBESCURE et Anthony GRAVOUIL. « A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis ». en. In : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2002), p. 29.
- [CH93] J. CHUNG et G. M. HULBERT. « A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation : The Generalized-alpha Method ». en. In : *Journal of Applied Mechanics* 60.2 (juin 1993), p. 371-375.
- [Cha14] Teddy CHANTRAIT. « Approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie ». fr. In : (2014), p. 170.
- [Cho+19] S. S. CHO et al. « Explicit multistep time integration for discontinuous elastic stress wave propagation in heterogeneous solids ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 118.5 (mai 2019), p. 276-302.
- [CMP20] M CREMONESI, S MEDURI et U PEREGO. « Lagrangian–Eulerian enforcement of non-homogeneous boundary conditions in the particle finite element method ». In : *Computational Particle Mechanics* 7.1 (2020), p. 41-56.
- [CR08] Cheng CHEN et James M. RICLES. « Stability Analysis of Direct Integration Algorithms Applied to Nonlinear Structural Dynamics ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 134.9 (2008), p. 703-711.
- [Cre+17] Massimiliano CREMONESI et al. « An explicit Lagrangian finite element method for free-surface weakly compressible flows ». In : *Computational Particle Mechanics* 4.3 (2017), p. 357-369.
- [CRG14] T. CHANTRAIT, J. RANNOU et A. GRAVOUIL. « Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 86 (2014), p. 23-33.

- [Dah63] Germund G. DAHLQUIST. « A special stability problem for linear multistep methods ». en. In : *BIT* 3.1 (mars 1963), p. 27-43.
- [Dhi98] Hachmi Ben DHIA. « Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin ». In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy* 326.12 (1998), p. 899-904.
- [DR05] Hashmi Ben DHIA et Guillaume RATEAU. « The Arlequin method as a flexible engineering design tool ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62.11 (2005), p. 1442-1462.
- [Dur] C DURAND. « Code\_Aster, l'outil de modélisation en mécanique à EdF : objectifs et enjeux. » fr. In : ().
- [FCR94] Charbel FARHAT, Luis CRIVELLI et Francois-Xavier ROUX. « A transient FETI methodology for large-scale parallel implicit computations in structural mechanics ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.11 (1994), p. 1945-1975.
- [Fek+17] Fatima-Ezzahra FEKAK et al. « A new heterogeneous asynchronous explicit-implicit time integrator for nonsmooth dynamics ». In : *Computational mechanics* 60.1 (2017), p. 1-21.
- [Fek17] Fatima-Ezzahra FEKAK. « Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme : Co-simulation implicite / explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact ». Theses. Université de Lyon, mai 2017.
- [FLL98] C. FARHAT, M. LESOINNE et P. LE TALLEC. « Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157.1-2 (avr. 1998), p. 95-114.
- [FR91a] Charbel FARHAT et Francois-Xavier ROUX. « A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.6 (1991), p. 1205-1227.
- [FR91b] Charbel FARHAT et Francois-Xavier ROUX. « A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.6 (1991), p. 1205-1227.
- [Fra23] Electricité de FRANCE. *Finite element code\_aster, Analysis of Structures and Thermomechanics for Studies and Research*. Open source on [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org). 1989–2023.

- 
- [Gan06] Martin J. GANDER. « Optimized Schwarz Methods ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.2 (2006), p. 699-731.
- [GC01] Anthony GRAVOUIL et Alain COMBESURE. « Multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.1 (2001), p. 199-225.
- [GCB15] A. GRAVOUIL, A. COMBESURE et M. BRUN. « Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics : HETEROGENEOUS ASYNCHRONOUS TIME INTEGRATORS ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.3-4 (avr. 2015), p. 202-232.
- [Gha+13] A. GHANEM et al. « Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254 (2013), p. 292-308.
- [GR15] M. GERADIN et D.J. RIXEN. « Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics ». In : (2015).
- [GR97] Michel GÉRADIN et Daniel RIXEN. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. en. 2nd ed. Chichester ; New York : John Wiley, 1997.
- [Gra00] Anthony GRAVOUIL. « Methode multi-echelles en temps et en espace avec decomposition de domaines pour la dynamique non-lineaire des structures ». 2000DENS0026. Thèse de doct. 2000, 229 p.
- [HGB85] J.O. HALLQUIST, G.L. GOUDREAU et D.J. BENSON. « Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51.1 (1985), p. 107-137.
- [HHT77a] Hans M. HILBER, Thomas J. R. HUGHES et Robert L. TAYLOR. « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics ». In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 5.3 (1977), p. 283-292.
- [HHT77b] Hans M. HILBER, Thomas J. R. HUGHES et Robert L. TAYLOR. « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics ». en. In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 5.3 (1977), p. 283-292.
- [HOU50] JOHN C. HOUBOLT. « A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft ». In : *Journal of the Aeronautical Sciences* 17.9 (1950), p. 540-550.
- [Hug83] Thomas JR HUGHES. « Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior ». In : *Computational methods for transient*
-

- analysis*(A 84-29160 12-64). Amsterdam, North-Holland, 1983, (1983), p. 67-155.
- [Hug87] Thomas J. R. HUGHES. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. eng. OCLC : 14187987. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1987.
- [Kam19] Tristan KAMIN. *L'accident nucléaire majeur : un scénario*. fr-FR. Fév. 2019.
- [KC99] D. KUHL et M. A. CRISFIELD. « Energy-conserving and decaying Algorithms in non-linear structural dynamics ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45.5 (1999), p. 569-599.
- [KH05] S. KRENK et J. R. HOGSBERG. « Properties of time integration with first order filter damping ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64.4 (2005), p. 547-566.
- [KN14] S KARIMI et KB NAKSHATRALA. « On multi-time-step monolithic coupling algorithms for elastodynamics ». In : *Journal of Computational Physics* 273 (2014), p. 671-705.
- [Kre06a] Steen KRENK. « Energy conservation in Newmark based time integration algorithms ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.44-47 (sept. 2006), p. 6110-6124.
- [Kre06b] Steen KRENK. « State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear dynamic systems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65.5 (2006), p. 595-619.
- [Kre08] Steen KRENK. « Extended state-space time integration with high-frequency energy dissipation ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73.12 (2008), p. 1767-1787.
- [Li+18] Sijia LI et al. « Numerical modelling of wave barrier in 2D unbounded medium using Explicit/Implicit multi-time step co-simulation ». In : *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering* 365.4 (juin 2018), p. 042062.
- [Li+21] Sijia LI et al. « Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers ». In : *Computers and Geotechnics* 131 (2021), p. 103808.
- [Lio88] P-L LIONS. « On the Schwarz alternating method. I ». en. In : *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Paris, 1987)* (1988), p. 1-42.
- [Lio90] P. L. LIONS. « On the Schwarz Alternating Method III : A Variant for Nonoverlapping Subdomains ». In : *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Sous la dir. de Tony

- 
- F. CHAN et al. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1990. Chap. 11, p. 202-223.
- [LR56] P. D. LAX et R. D. RICHTMYER. « Survey of the stability of linear finite difference equations ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 9.2 (1956), p. 267-293.
- [Mah+11] Najib MAHJOUBI et al. « A monolithic energy conserving method to couple heterogeneous time integrators with incompatible time steps in structural dynamics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.9-12 (2011), p. 1069-1086.
- [MCP19] S MEDURI, M CREMONESI et U PEREGO. « An efficient runtime mesh smoothing technique for 3D explicit Lagrangian free-surface fluid flow simulations ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 117.4 (2019), p. 430-452.
- [Med+18] S MEDURI et al. « A partitioned fully explicit Lagrangian finite element method for highly nonlinear fluid-structure interaction problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 113.1 (2018), p. 43-64.
- [Med+22] Simone MEDURI et al. « A Lagrangian fluid–structure interaction approach for the simulation of airbag deployment ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 198 (2022), p. 103659.
- [MGC09] Najib MAHJOUBI, Anthony GRAVOUIL et Alain COMBESCURE. « Coupling subdomains with heterogeneous time integrators and incompatible time steps ». In : *Computational mechanics* 44.6 (2009), p. 825-843.
- [New59] Nathan M. NEWMARK. « A Method of Computation for Structural Dynamics ». In : *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85.3 (1959), p. 67-94.
- [Nun+17] Jorge NUNEZ-RAMIREZ et al. « A partitioned approach for the coupling of SPH and FE methods for transient nonlinear FSI problems with incompatible time-steps ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 109.10 (2017), p. 1391-1417.
- [Peg01] Pierre PEGON. « Alternative characterization of time integration schemes ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), p. 2707-2727.
- [PH04] A. PRAKASH et K. D. HJELMSTAD. « A FETI-based multi-time-step coupling method for Newmark schemes in structural dynamics ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61.13 (2004), p. 2183-2204.

- [PTH14] Arun PRAKASH, Ertugrul TACIROGLU et Keith D. HJELMSTAD. « Computationally efficient multi-time-step method for partitioned time integration of highly nonlinear structural dynamics ». In : *Computers & Structures* 133 (2014), p. 51-63.
- [QSS07] A. QUARTERONI, R. SACCO et F. SALERI. *Numerical Mathematics*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2007.
- [R82] FORTIN M ; GLOWINSKI R. *METHODES DE LAGRANGIEN AUGMENTE : APPLICATIONS A LA RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES AUX LIMITES*. French. 1982.
- [SBG96] Barry F. SMITH, Petter E. BJØRSTAD et William D. GROPP. *Domain Decomposition : Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. English (US). United Kingdom : Cambridge University Press, 1996.
- [Smi91] I. M. SMITH. « Practical time-stepping schemes, by W. L. Wood, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford, 1990. Price : £17.50. ISBN : 8596774. No. pages : 373 pp ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31.1 (1991), p. 195-195.
- [SR19] Andreas S. SEIBOLD et Daniel J. RIXEN. « Asynchronous time integration in structural mechanics ». In : *PAMM* 19.1 (2019), e201900495.
- [STW92] J.C. SIMO, N. TARNOW et K.K. WONG. « Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 100.1 (1992), p. 63-116.
- [TW06] A. TOSELLI et O. WIDLUND. *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [WBZ80] W. L. WOOD, M. BOSSAK et O. C. ZIENKIEWICZ. « An alpha modification of Newmark's method ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15.10 (1980), p. 1562-1566.
- [WFB72] E. L. WILSON, I. FARHOOMAND et K. J. BATHE. « Nonlinear dynamic analysis of complex structures ». In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 1.3 (1972), p. 241-252.
- [WT04] Olof WIDLUND et Andrea TOSELLI. « Domain decomposition methods - algorithms and theory ». English (US). In : *Computational mathematics*. T. 34. Springer, oct. 2004.
- [Wu06] Shen R. WU. « Lumped mass matrix in explicit finite element method for transient dynamics of elasticity ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.44 (2006), p. 5983-5994.

- [YD22] Peng YUAN et You DONG. « High-efficient decoupling method for coupling systems with multiple subdomains and time steps ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 163 (2022), p. 108159.
- [Zaf+16] Eliass ZAFATI et al. « Design of an efficient multi-directional explicit/implicit Rayleigh absorbing layer for seismic wave propagation in unbounded domain using a strong form formulation ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 106.2 (2016), p. 83-112.
- [Zie71] O.C. ZIENKIEWICZ. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, 1971.
- [ZTZ05] Olek C ZIENKIEWICZ, Robert Leroy TAYLOR et Jian Z ZHU. *The finite element method : its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON

NOM : LE NÔTRE

DATE de SOUTENANCE : 07/09/2023

Prénoms : Yvan

TITRE : Etude de la réponse dynamique du Bloc Réacteur soumis à une sollicitation extrême : Co-simulation implicite/explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2023ISAL0055

Ecole doctorale : MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique)

Spécialité : Génie Mécanique

RESUME : Les centrales nucléaires sont une source de production d'énergie importante en France. Cependant, suite aux différents accidents et aux risques encourus avec cette technologies, la sûreté nucléaire est une préoccupation mondiale. En France, des normes sont imposées continuellement sur les installations nucléaires existantes et sur les prochaines générations en développement. Parmi les nombreux aspects de la sûreté nucléaire, le dimensionnement des structures mécaniques est un sujet important pour les acteurs industriels. L'activité principale de l'entreprise Framatome concerne le dimensionnement et la justification des centrales nucléaires. Celles-ci doivent être conçues pour résister à des conditions extrêmes d'utilisation tel que des séismes, des crashes d'avion ou encore des ruptures de tuyauterie. La modélisation numérique de ce type de chargement passe par des analyses dynamiques temporelles afin de considérer ces phénomènes multi-échelles en temps. Cependant réaliser ces analyses demande beaucoup de temps CPU et de mémoire. L'objectif de la thèse est le développement d'un nouvel intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps), basé sur la méthode de couplage GC, ayant de meilleures propriétés relatives à la conservation énergétique. En effet, les phénomènes multi-échelles en temps présents dans le bloc réacteur sont des cas d'usages favorables aux méthodes multi-échelles en temps, avec un intégrateur explicite pour les zones de contact et un intégrateur implicite pour le reste de la structure. Un démonstrateur de co-simulation est développé entre les logiciels Code Aster et Europlexus pour se rapprocher d'un développement industriel et ainsi montrer le gain sur un modèle tridimensionnel atteignable avec ces méthodes multi-échelles en temps.

En effet, les phénomènes multi-échelles en temps présents dans le bloc réacteur sont simulés avec un intégrateur explicite et des petits pas de temps pour les zones de contact et un intégrateur implicite avec des gros pas de temps pour le reste de la structure. Un démonstrateur de co-simulation est développé entre les logiciels Code Aster et Europlexus pour se rapprocher d'un développement industriel et ainsi montrer le gain de performance, pour un modèle tridimensionnel de bloc réacteur, apporté par les approches de co-simulation multi-échelles en temps.

MOTS-CLÉS : bloc réacteur, intégrateur temporel hétérogène asynchrone, co-simulation, séisme, contact, Code Aster, Europlexus, conservation énergie

Laboratoire (s) de recherche : LaMCoS, INSA Lyon, Université de Lyon

Directeur de thèse: Anthony GRAVOUIL, Michael BRUN

Président de jury :

Composition du jury : Thouraya BARANGER, Pierre PEGON, Régis COTTEREAU, Clément GRENAT