



**HAL**  
open science

# Analyse de la stabilité d'un échangeur générateur de vapeur à plaques

Martin Rudkiewicz

► **To cite this version:**

Martin Rudkiewicz. Analyse de la stabilité d'un échangeur générateur de vapeur à plaques. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Toulouse, 2024. Français. NNT : 2024TLSEP016 . tel-04584313

**HAL Id: tel-04584313**

**<https://theses.hal.science/tel-04584313v1>**

Submitted on 23 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Doctorat de l'Université de Toulouse

préparé à Toulouse INP

---

Analyse de la stabilité d'un échangeur générateur de vapeur à  
plaques

---

Thèse présentée et soutenue, le 10 avril 2024 par

**Martin RUDKIEWICZ**

## École doctorale

MEGEP - Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés

## Spécialité

Dynamique des fluides

## Unité de recherche

IMFT - Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse

## Thèse dirigée par

Franck PLOURABOUE et Gérald DEBENEST

## Composition du jury

M. Christophe MARVILLET, Président, CNAM Paris

M. Frédéric PLOURDE, Rapporteur, ISAE-ENSMA

M. Frédéric LEFÈVRE, Rapporteur, INSA Lyon

Mme Nadia CANEY, Examinatrice, CEA-Liten

M. Franck PLOURABOUE, Directeur de thèse, Toulouse INP

M. Gérald DEBENEST, Co-directeur de thèse, Toulouse INP

## Membres invités

M. Thomas Prusek, EDF R&D

M. Franck David, EDF R&D

# Nomenclature

$B$	Paramètre utilisé dans les conditions de stabilités d'un micro-canal chauffé
$C_p$	Capacité thermique massique adimensionnée
$C$	Constante
$c_n$	Convolution d'ordre n avec la condition pariétale
$c_p$	Capacité thermique massique
Co	Nombre de Confinement
$D_h$	Diamètre hydraulique
$F$	Fonctionnelle
$G$	Débit massique surfacique
$H$	demi-hauteur du canal
$h$	Enthalpie massique
$k$	Conductivité thermique
$\mathcal{L}_{vap}$	Chaleur latente de vaporisation
$L$	Longueur
$L_{cap}$	Longueur capillaire
$\dot{m}$	Débit massique
$\Delta P_c$	Pertes de charge dans le canal
$P$	Pression
Pe	Nombre de Péclet
Pe <sub>c</sub>	Nombre de Péclet critique
Pr	Nombre de Prandtl
$P_c$	Pression critique
$q$	Flux thermique surfacique
$\mathcal{R}_{Pe}$	Rapport du Péclet primaire sur le Péclet secondaire

$R$	Rayon
$r, y, z$	Coordonnées spatiales
Re	Nombre de Reynolds
Ste	Nombre de Stefan
$\Delta T_h$	Écart de température de référence
$\Delta T_{su}$	Surchauffe par rapport à la saturation
$T$	Champ de température
$t$	Temps
$T_\infty$	Température d'établissement
$w$	Champ de vitesse
$W_s$	Vitesse moyenne
$x$	Titre enthalpique
$x_n$	n-ième amplitude
$Z$	Variable externe utilisée lors des développements asymptotiques
$z_i$	Position du front de vaporisation

CHF	Critical Heat Flux
DWO	Density Wave oscillations
GV	Générateur de Vapeur
ONB	Onset of Nucleate Boiling
PCI	Parallel Channel Instabilities
PDO	Pressure Drop Oscillations
SMR	Small Modular Reactor

$\alpha$	Taux de vide
$\alpha_n$	n-ième coefficient de la composante pariétal des modes de Graetz
$\chi$	Paramètre introduit au Chapitre V
$\delta$	Épaisseur de la couche limite thermique
$\epsilon$	Petit paramètre utilisé lors des développements asymptotiques
$\Gamma$	Section de passage



$\kappa$	Conductivité thermique adimensionnée
$\kappa_c$	Conductivité thermique critique adimensionnée
$\lambda_n$	n-ième valeur propre
$\mu$	Viscosité dynamique
$\Delta\nu$	Écart adimensionné des viscosités cinématiques des phases vapeur et liquide
$\nu$	Viscosité cinématique
$\Omega$	Volume de contrôle
$\phi_w$	Flux thermique surfacique
$\varphi_w$	Flux thermique surfacique adimensionné
$\Delta\rho$	Écart adimensionné des masses volumiques des phases vapeur et liquide
$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Tension de surface
$\theta_n$	n-ième fonction propre

**B, S, R,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$**  Vecteurs

**M, U, P, D,  $\mathcal{U}$**  Matrices

**r, y** Vecteurs des coordonnées

**u** Vecteur des inconnues

**x** Vecteur des amplitudes

### **Notations**

**\*** Point d'équilibre

**$\langle \rangle_c$**  Moyenne surfacique pondérée par  $\rho c_p w$

**$\tilde{\sim}$**  Grandeur dimensionnée

### **Indices et exposants**

**$f$**  Fluide

**$I$**  Primaire

**$i$**  Interface

**$II$**  Secondaire

**$l$**  Liquide

**$s$**  Solide

*sat* Saturation

*V* Virtuel

*v* Vapeur

# Table des matières

<b>I</b>	<b>État de l'art : Ébullition convective en micro-canaux</b>	<b>8</b>
I.1	Introduction . . . . .	8
1.a	Fonctionnement d'une centrale nucléaire . . . . .	8
1.b	Le Small Modular Reactor (SMR) . . . . .	9
I.2	Physique de l'évaporation convective en canal . . . . .	10
I.3	Changement de phase dans les canaux de faible diamètre . . . . .	13
3.a	Identification des micro-canaux . . . . .	13
3.b	Pertes de charge en micro-canal . . . . .	15
3.c	Échange de chaleur dans les micro-canaux . . . . .	20
I.4	Instabilités en écoulement diphasique . . . . .	25
4.a	Instabilités statiques . . . . .	26
4.b	Instabilités dynamiques . . . . .	35
4.c	Synthèse . . . . .	43
<b>II</b>	<b>Méthode des modes de Graetz généralisés</b>	<b>52</b>
<b>III</b>	<b>Application de la méthode des modes de Graetz généralisés aux boucles monophasiques en circulation naturelle</b>	<b>66</b>
III.1	Introduction . . . . .	66
<b>IV</b>	<b>Modèle d'évaporation convective en micro-canal et extension de la méthode des modes de Graetz généralisés</b>	<b>76</b>
IV.1	Structure des écoulements en vaporisation forcée confinée . . . . .	76
IV.2	Méthodes numériques et modèles de vaporisation confinée . . . . .	78
2.a	Représentations bi- et tri-dimensionnelles . . . . .	78
2.b	Autres familles de modèles . . . . .	79
IV.3	Description du modèle . . . . .	79
3.a	Objectifs et sélection du modèle . . . . .	79
3.b	Prescription de la structure de l'écoulement . . . . .	80
3.c	Effets de courbure de l'interface liquide/vapeur . . . . .	81
3.d	Caractérisation des phases . . . . .	81
IV.4	Adaptation de la méthode des modes de Graetz généralisés . . . . .	83
4.a	Monocanal chauffé . . . . .	84
4.b	Co-courant semi-infini . . . . .	87
<b>V</b>	<b>Application du modèle d'évaporation en écoulement confiné à un mono-canal à flux imposé</b>	<b>95</b>
V.1	Analyse de l'évaporation dans un micro-canal chauffé . . . . .	95
1.a	Structure du champ de température . . . . .	95
1.b	Prédiction de la position de l'interface . . . . .	103
1.c	Expression analytique du champ de température dans la phase liquide . . . . .	111

1.d	Confrontation du modèle d'évaporation en milieu confiné . . . . .	113
V.2	Application au phénomène de mal-distribution de débit dans un réseau de canaux parallèles chauffés . . . . .	114
2.a	Évaluation des pertes de charge appliquée au modèle d'évaporation en micro-canal . . . . .	115
2.b	Modèle de stabilité . . . . .	116
<b>VI</b>	<b>Application et résultats pour un échangeur diphasique co-courant</b>	<b>125</b>
VI.1	Description de l'évaporation dans un échangeur à micro-canaux co-courant . . . .	125
1.a	Structure des échanges thermiques dans un micro-échangeur . . . . .	125
1.b	Régimes de fonctionnement dans un micro-échangeur co-courant diphasique	132
1.c	Caractérisation thermique de la paroi solide et de son impact sur les transferts de chaleur . . . . .	136
VI.2	Application au phénomène de mal-distribution de débit dans un échangeur- générateur de vapeur compact co-courant . . . . .	143
2.a	Mise en œuvre de la détermination des plages de sensibilité à l'instabilité de mal-distribution de débit . . . . .	143
2.b	Exploitation du modèle de stabilité . . . . .	145
2.c	Discussion du modèle d'évaporation et de la méthode numérique . . . . .	154

# Chapitre I

## État de l'art : Ébullition convective en micro-canaux

### I.1 Introduction

#### 1.a Fonctionnement d'une centrale nucléaire

La production d'électricité dans les centrales nucléaires repose sur trois circuits hydrauliques séparés, voir Fig. I.1, qui ne communiquent entre eux qu'aux travers d'échangeurs : le générateur de vapeur et le condenseur. Le premier circuit, ou circuit primaire, permet de transporter la chaleur produite dans le cœur du réacteur par la fission du combustible nucléaire. Comme celui-ci est maintenu à haute pression, l'eau y reste liquide malgré le haut niveau de température, environ  $320^{\circ}\text{C}$  à la sortie du cœur. Le second circuit, dit secondaire, a pour but d'entraîner une turbine couplée à des alternateurs, au travers de la détente d'un écoulement vapeur. Le dernier circuit, dit de refroidissement, évacue l'énergie thermique vers l'extérieur soit dans l'atmosphère, via des tours aéroréfrigérantes, soit dans un grand volume d'eau à proximité (fleuve ou mer). Pour produire la vapeur du circuit secondaire, de l'énergie thermique est prélevée au circuit primaire lors de son passage dans le générateur de vapeur. Le fluide initialement liquide du circuit secondaire se vaporise alors en traversant le générateur de vapeur, actionne la turbine, puis retrouve son état liquide après avoir communiqué son énergie thermique au circuit de refroidissement via le condenseur.

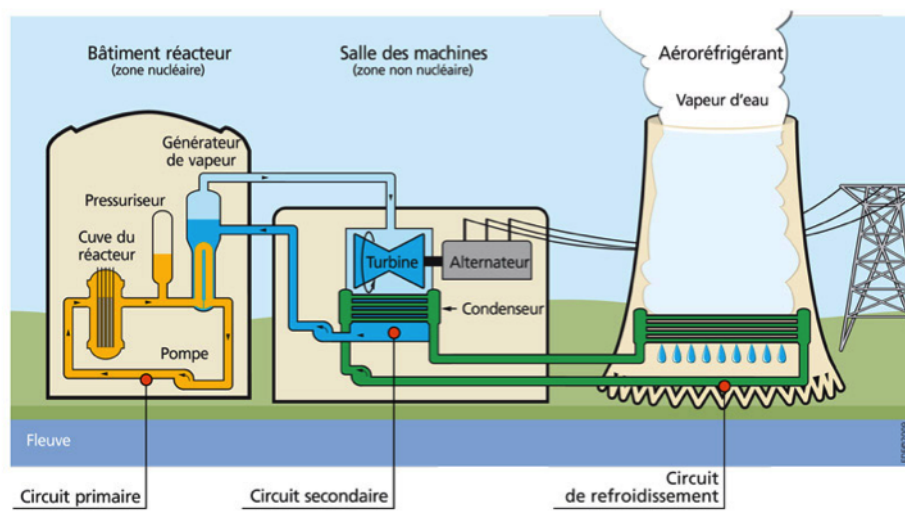


Figure I.1: Schéma d'une centrale nucléaire issu du site de l'IRSN [1]

## 1.b Le Small Modular Reactor (SMR)

L'électricité d'origine nucléaire ne repose pas sur la combustion de matières fossiles mais sur la fission d'isotopes radioactifs. Elle profite de ce fait d'un très faible coût carbone, supérieur à celui de certaines énergies renouvelables, tout en gardant un caractère pilotable qui fait souvent défaut aux énergies bas carbone. Cette faible production de gaz à effets de serre lui permet de figurer dans les futurs mix énergétiques bas-carbone. Décarboner sa production d'énergie électrique, en remplaçant des centrales à énergies fossiles par leurs homologues nucléaires paraît donc tout à fait légitime, seul bémol, ces centrales ne fonctionnent pas sur les mêmes gammes de puissance que les centrales nucléaires « classiques », généralement 1.5 à 4 fois plus puissantes. A cela s'ajoute que nombre de pays ne disposent pas des infrastructures nécessaires à l'installation de centrale de plus de 1000MWe. Tous ces indicateurs mettent en avant le besoin d'un réacteur nucléaire de faible puissance, fonctionnant dans la gamme des 300-400MWe. Forts d'une puissance délivrée plus faible, la taille réduite et le design modulaire des Small Modular Reactors (SMR) autorisent des gains en termes de coûts, d'encombrement et permettent d'envisager des options de sûreté passives. C'est dans cette optique que le concept de SMR connaît un récent regain d'intérêt, avec notamment un projet français (*Nuward<sup>TM</sup>*) réalisé dans un cadre de coopération entre EDF, CEA, Technicatome et NavalGroup.

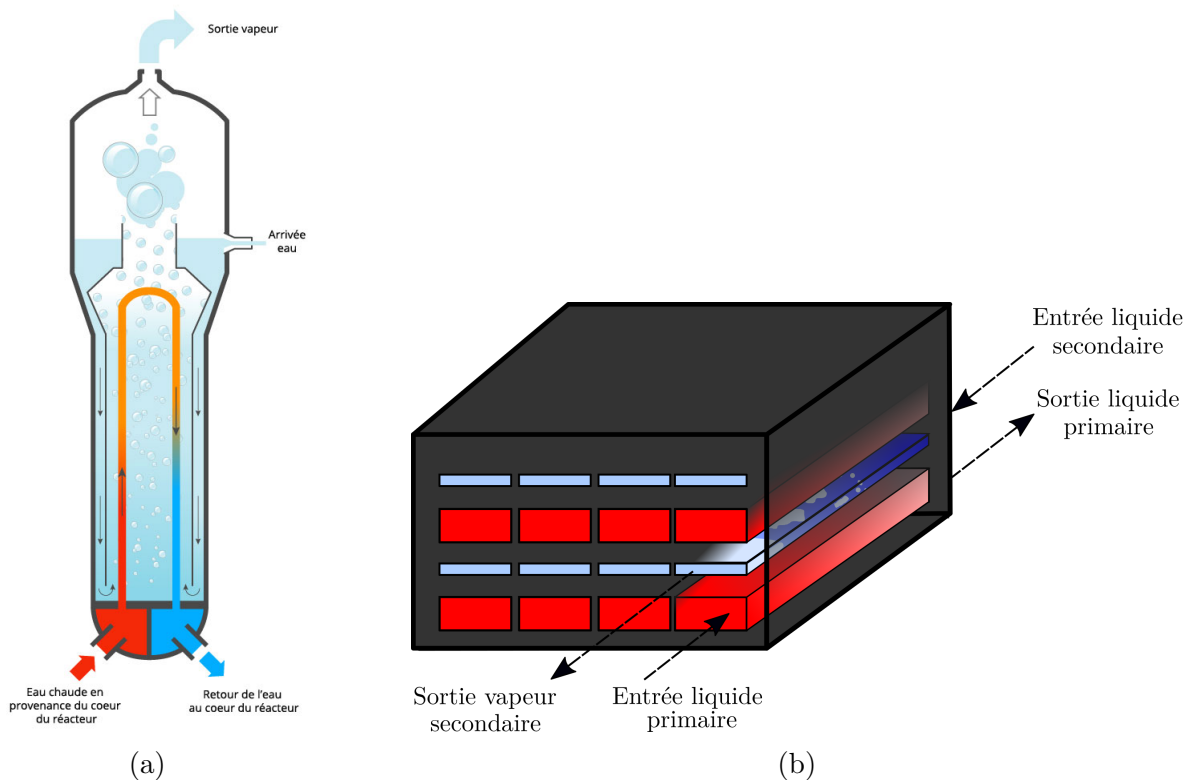


Figure I.2: (a) schéma de principe d'un générateur de vapeur usuel provenant du site de l'IRSN [1]. (b), représentation schématique de l'agencement des canaux dans le générateur de vapeur

Il faut toutefois noter que le design d'un SMR, très compact, pousse à considérer certains changements dans les technologies usuellement utilisées pour les REP de grandes puissances. C'est en particulier le cas pour les générateurs de vapeur, qui doivent assurer l'évaporation du fluide du circuit secondaire alors que la compacité visée des SMR pousse à restreindre leurs dimensions. Pour répondre à ses exigences une nouvelle technologie d'échangeur/générateur de vapeur compact à plaques a été développée. Les générateurs de vapeur usuels à tubes en

U (Cf Fig. I.2a), ont ainsi été remplacés par une superposition de plaques creusées de canaux de petites dimensions dans lesquelles circulent alternativement et à contre-courant les fluides des circuits primaire et secondaire (Cf Fig. I.2b). Seconde différence majeure, alors que les générateurs de vapeurs usuels s'appuient sur un système de recirculation pour vaporiser le fluide du circuit secondaire en plusieurs passes, l'échangeur du SMR se contente d'un seul passage du fluide. En effet, le nouvel échangeur intensifie les échanges entre les deux fluides et autorise une miniaturisation conséquente du générateur de vapeur. Il faut ajouter à cela que son procédé de fabrication reposant sur le soudage par diffusion de plaques préalablement gravées le qualifie pour supporter à la fois les hautes pressions et les hautes températures habituellement utilisées dans les REP (typiquement 150 bar et 320°C côté primaire et 50 bar et 250 °C côté secondaire).

Néanmoins certaines interrogations subsistent, en effet, les mécanismes de changement de phase dans les mini/micro-canaux en eau/vapeur sont mal connus par rapport aux canaux à grands diamètres hydrauliques et pour lesquels de nombreux essais ont été réalisés. Le type d'échangeur considéré peut également être sujet à des instabilités d'écoulement diphasique, intimement liées au processus d'évaporation du fluide secondaire. Ces instabilités peuvent fortement impacter le fonctionnement du système, dont les phénomènes de déposition auxquels les canaux de petites dimensions sont particulièrement sensibles. Ces effets de déposition peuvent être abordés par des couplages entre la thermo-hydraulique locale et le transports des espèces chimiques. De plus, certaines instabilités diphasiques sont caractérisées par le passage successif des phases liquide et vapeur, qui peuvent éventuellement conduire à un cyclage et des phénomènes de fatigues thermiques. A ceci peut également s'ajouter une sollicitation vibratoire qui risque de provoquer l'usure prématurée du système. Enfin, certaines gammes de débit et de pression pourraient dégrader l'efficacité de l'échangeur en déséquilibrant la distribution de débit entre les canaux. Il paraît donc judicieux d'anticiper ces problèmes de stabilité lors du design du système, afin d'assurer une bonne compréhension de son comportement et de son vieillissement.

Cette revue de littérature a pour but, dans un premier temps, de rappeler les principes de l'échange thermique en évaporation, de souligner les particularités associées aux échanges et aux écoulements en micro-canaux, puis, dans un second temps, d'identifier les différentes instabilités thermo-hydrauliques. Cette seconde partie permettra de déterminer les instabilités auxquelles le générateur de vapeur serait le plus exposé et préparera le travail de modélisation pour la suite du travail de thèse.

## I.2 Physique de l'évaporation convective en canal

Avant de se pencher sur les processus à l'origine des instabilités d'écoulement diphasique, cette première partie a pour but d'introduire les phénomènes physiques et les spécificités de l'ébullition en écoulement forcé. La notion d'ébullition en écoulement forcé est ici à opposer à l'ébullition en vase qui prend place dans un liquide au repos. La présence d'un écoulement forcé et le confinement imposé par la conduite particularisent les processus physiques qui s'exécutent lors de l'ébullition dans le générateur de vapeur (inertie du fluide, friction aux parois, échange de chaleur, effets de capillarité).

Pour comprendre la phénoménologie de l'évaporation en écoulement forcé, il est intéressant de se ramener au cas de la conduite monophasique chauffée uniformément. On se retrouve alors dans un problème classique de convection forcée en conduite : le liquide froid au contact de la paroi se réchauffe, cet apport d'énergie se traduit, depuis l'entrée de la zone chauffée, par le

développement des couches limites thermiques depuis les parois vers le centre du canal au fur et à mesure que le fluide progresse dans la conduite, jusqu'à ce qu'elles s'y rejoignent. Autrement dit à cet endroit l'ensemble de l'écoulement dans la conduite est affecté thermiquement par le chauffage, et il ne reste plus de fluide froid.

Comme dans le cas monophasique, les premières étapes de l'ébullition convective sont fortement dépendantes du développement de ces couches limites thermiques (Cf Fig. I.3). En effet, l'ébullition commence au niveau de la paroi, dans ses rugosités, où des nucléi de gaz sont piégés. A partir de ces poches de gaz, et à condition que la température y atteigne la température de saturation fixée par la pression locale, des bulles de vapeur peuvent commencer à croître, c'est le départ de l'ébullition nucléé ou Onset of Nucleate Boiling (ONB). En pratique, l'ébullition ne commence pas à la température de saturation définie par la pression du fluide mais à une température légèrement plus haute puisque la pression dans le nucléus de vapeur y est supérieure du fait de la tension de surface et de la courbure de l'interface liquide/nucléus (Loi de Laplace, et, pour les très petites bulles, l'effet de Kelvin). Ces bulles vont alors, sous l'effet de l'écoulement et des forces de flottabilité, se décrocher de la paroi. A ce moment, la bulle peut soit se condenser, en rencontrant le fluide froid à l'extérieur des couches thermiques, soit subsister dans le canal si l'ensemble du fluide a atteint la température de saturation. On parle alors d'ébullition nucléée saturée et c'est ce point en température qui sert habituellement d'origine pour définir le taux de présence massique de la vapeur (titre massique). Un peu plus haut en température, les bulles de vapeur sont de plus en plus nombreuses dans le canal, et commencent à coalescer les unes avec les autres, pour former d'abord des petites poches de vapeur—on parle d'écoulement à poches ou slug flow—puis occuper la quasi-totalité de la section du canal—on parle alors d'écoulement à bouchons—. Plus en aval ces bouchons de vapeur vont former une veine vapeur au centre de la conduite entourée d'un film d'eau au niveau des parois, c'est l'écoulement annulaire. Le film d'eau qui subsiste sur les parois s'amincit de plus en plus jusqu'à évaporation totale, il ne reste alors plus qu'un écoulement vapeur éventuellement ensemencé de gouttelettes liquides décrochées par l'écoulement vapeur lors du régime annulaire. Une fois celles-ci évaporées, on se retrouve dans une configuration d'écoulement monophasique vapeur [2]. Comme décrit plus haut, tout au long de la traversée du canal, le fluide emmagasine de l'énergie ; cette énergie, après avoir amené le fluide à température de saturation, permet l'évaporation progressive du liquide. Le taux de présence de vapeur dans l'écoulement ne cesse donc de croître passant d'un écoulement purement liquide à un écoulement constitué uniquement de vapeur. Or les propriétés thermo-physiques de la phase vapeur sont très différentes de la phase liquide, voir Table I.1. La répartition et la proportion de chaque

Pression [ <i>bar</i> ]	46	
Température de saturation [ <i>°C</i> ]	259	
Enthalpie de changement d'état liq/vap [ <i>kJ/kg</i> ]	1668	
Tension de surface [ <i>J/m<sup>2</sup></i> ]	0.02396	
<b>Phases</b>	<b>Liquide</b>	<b>Vapeur</b>
Masse volumique [ <i>kg/m<sup>3</sup></i> ]	785.7	23.23
Viscosité dynamique [ <i>Pl</i> ]	$102.210^{-6}$	$17.8310^{-6}$
Conductivité thermique [ <i>W/m/K</i> ]	0.5994	0.0526

Tableau I.1: Grandeurs caractéristiques de l'eau à saturation

phase dans l'écoulement joue ainsi un rôle déterminant dans l'évolution des propriétés thermo-hydrauliques, telles que les pertes de charges et le transfert de chaleur, pendant l'ébullition [4], [5]. La variété de configurations d'écoulement présente pendant le processus d'ébullition, a été



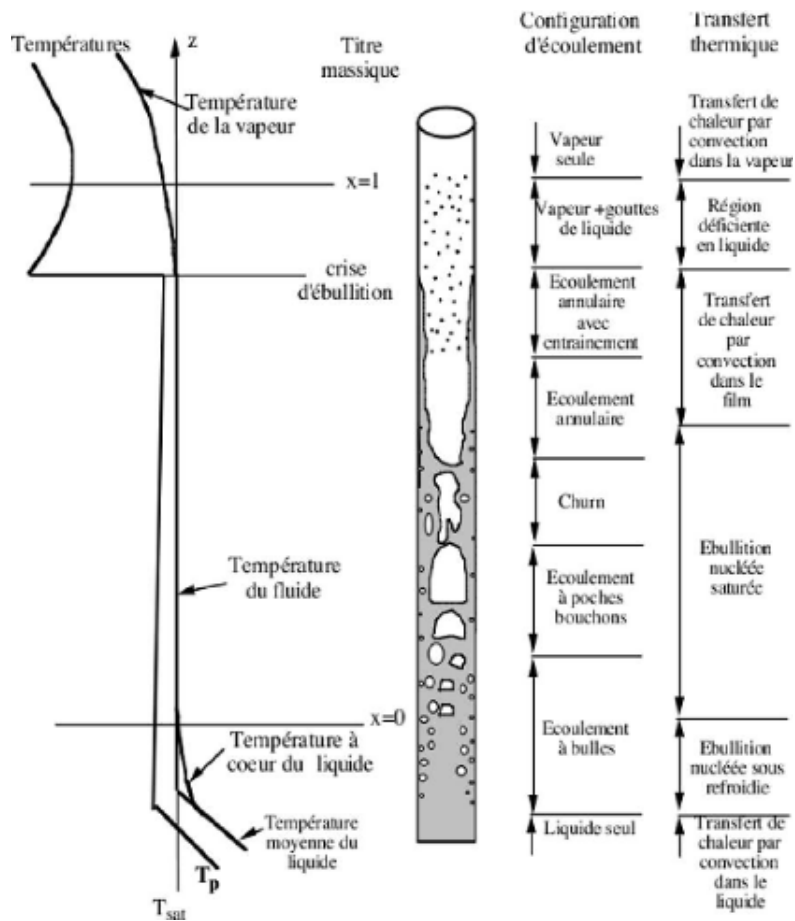


Figure I.3: Régimes d'écoulement dans un évaporateur vertical d'après [3]

identifiée expérimentalement et est aujourd'hui bien connue. De multiples expérimentations ont permis d'identifier les régimes d'écoulement et de synthétiser ces informations sous forme de cartes qui font intervenir les vitesses superficielles des phases liquide et vapeur (Cf Fig. I.4), ou bien encore le débit massique et le titre en vapeur. Ces expériences sont basées en grande partie soit sur des écoulements adiabatiques, dont la proportion des phases est contrôlée artificiellement (injection d'air dans un écoulement d'eau liquide), soit sur des expérimentations avec chauffage reproduisant le phénomène d'ébullition. L'une des principales conséquences de ces changements de régime est d'une part l'augmentation brutale de la température à la paroi lors de l'assèchement du canal (*burn-out*), voir Fig. I.3, cette montée marquée de la température est remplacée, dans une configuration échangeur, par une baisse équivalente du coefficient d'échange thermique, et d'autre part l'évolution atypique des pertes de charge et coefficient d'échange de chaleur le long de la conduite. A titre d'exemple, lors de l'ébullition nucléée, le brassage du liquide provoqué par le détachement des bulles augmente l'échange de chaleur entre le fluide et la paroi, cet effet est en revanche nettement moins marqué en régime annulaire. De même l'évolution des pertes de charges en fonction du débit pour un flux thermique fixé, appelée courbe de demande, n'est plus monotone comme en écoulement monophasique. Or c'est cette courbe qui permet à la fois de caractériser l'écoulement dans le canal et de prévoir la sensibilité du système à certaines instabilités diphasiques. La décroissance de la courbe de demande est notamment à l'origine des instabilités de Ledinegg [7]. L'occupation par tel ou tel régime d'écoulement d'une partie de la conduite devient donc un élément clé pour décrire le comportement du fluide, puisqu'il résulte de l'interaction des différents processus physiques mis en jeu dans l'écoulement (inertie, évaporation, conduction, frottement, gravité, capillarité...) mais influe également sur eux rétroactivement, à titre d'illustration, une augmentation du flux

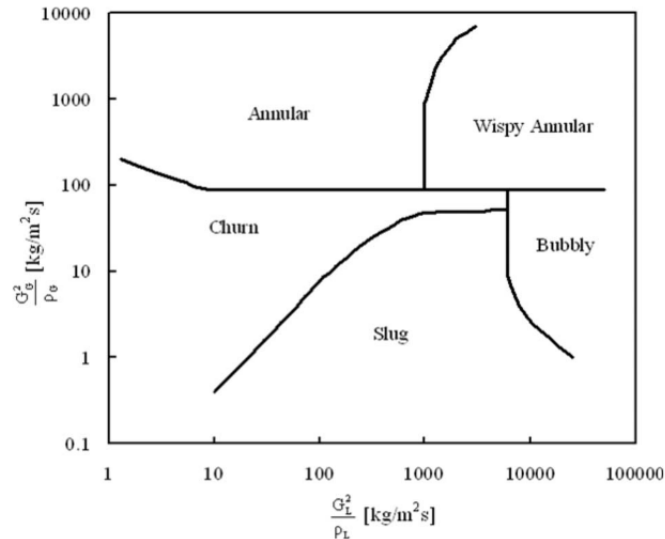


Figure I.4: Carte des régimes d'écoulements obtenue pour un mélange eau-air par [6]

thermique, en augmentant le titre vapeur peut modifier le mode d'écoulement et aura tendance à augmenter le niveau de pertes de charge.

Modifier les rapports de force pendant l'évaporation en écoulement forcé, équivaut donc vraisemblablement à modifier les régimes d'écoulement et ce qui va de paire, les niveaux de pertes de charges et de transferts de chaleur. A partir de ce constat, les petites dimensions utilisées pour le design des futurs GV, n'est pas anecdotique. Expérimentalement, l'impact de la diminution du diamètre des canaux a effectivement été identifiée : les cartes de régimes d'écoulement usuelles ne correspondent plus lorsque le diamètre des conduites diminuent [8, 9]. L'interprétation privilégiée par les expérimentateurs s'est concentrée sur les rapports de forces usuelles (inertie, gravité, friction, capillarité) qui changent avec le diamètre : la gravité devient négligeable et les effets de capillarité sont de plus en plus importants [10]. **En conséquence, l'application des modèles établis pour des macro-canaux aux GV compacts est discutable et mérite une attention particulière afin de déterminer si le domaine de validité de ces modèles peut être élargi à notre système.**

### I.3 Changement de phase dans les canaux de faible diamètre

Ce chapitre a pour but d'identifier les caractéristiques de l'ébullition en écoulement forcé dans les conduites de faible diamètre. Les propriétés ainsi mises en valeur seront comparées avec les modèles développés pour les macro-canaux, afin de déterminer si des lois spécifiques seront nécessaires pour assurer une bonne modélisation de l'écoulement dans le GV compact.

#### 3.a Identification des micro-canaux

L'amélioration et l'apparition de nouvelles méthodes d'usinage a permis l'utilisation de canaux de plus en plus petits dans les échangeurs thermiques. Cette descente vers les petites dimensions répond, à la fois, à l'apparition de systèmes eux-mêmes de plus en plus petits et compacts, particulièrement dans l'électronique et les biotechnologies [11, 12], et à l'augmentation des échanges thermiques lorsque le diamètre des canaux diminue. A partir de ce constat, de nombreuses

mesures expérimentales de pertes de charge, de coefficients d'échange thermique et de régimes d'écoulement ont été menées pour valider ou non l'extension des corrélations réservées aux canaux de plus grandes dimensions. Ces interrogations se sont traduites par une littérature particulièrement foisonnante et diversifiée en termes de géométries, de fluides ou de méthodes de mesure utilisées mais aussi en termes de conclusions apportées par ces mêmes études, qui tantôt infirment tantôt valident l'extension des lois usuelles aux micro-canaux.

Rapidement, l'utilisation de canaux de petits diamètres a révélé des mécanismes spécifiques lors de l'ébullition : les cartes de régime d'écoulement utilisées pour les canaux conventionnels s'écartent des données expérimentales, voir Fig. I.5b, lorsque le diamètre des conduites diminue. En plus de cela, il y a apparition d'un nouveau régime appelé régime de bulle confinée [8]. La modification des régimes d'écoulement est en partie attribuée à la prééminence croissante des effets de capillarité avec la diminution des diamètres des canaux [13]. La question levée par ces observations a été la définition d'un diamètre critique à partir duquel les lois usuelles ne seraient plus adaptées pour décrire l'écoulement. Kandlikar et Grande ont ainsi proposé différents intervalles pour catégoriser les canaux selon leurs diamètres hydrauliques, voir Table I.2. Cette méthode présente le désavantage de ne pas prendre en compte les propriétés du fluide,

Canaux conventionnels / macro-canaux	$D_h > 3mm$
Mini-canaux	$0.2 < D_h < 3mm$
Micro-canaux	$D_h < 0.2mm$

Tableau I.2: Critère de transition entre macro/mini/micro-canaux de [14]

ou les conditions de fonctionnement du système, et ne semble donc être adaptée qu'à certains fluides dans une gamme de température et de pression déterminées (Cf Fig. I.5a). Pour pallier ce défaut d'autres critères reposent sur le rapport des forces de flottabilité et de capillarité, ce rapport définit une échelle de longueur sur laquelle la tension de surface est dominante, c'est la longueur capillaire,  $L_{cap} = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_g)}}$ . Comparer la longueur capillaire avec le diamètre de la conduite permet ainsi de discriminer les écoulements dans lesquels la croissance des bulles sera limitée par les dimensions du canal avec un rôle dominant de la tension de surface de ceux laissant croître les bulles "librement", avec une influence plus anecdotique de la capillarité. Plusieurs nombres adimensionnels ont été construits en suivant ce même principe :

- le nombre de confinement  $Co = \frac{L_{cap}}{D_h}$
- le nombre de Bond  $Bd = \frac{1}{Co^2}$
- le nombre d'Eötvös  $EO = \frac{Bo}{8}$ .

La notion de micro-canal est alors majoritairement définie par le respect d'une inégalité basée sur ces nombres adimensionnels comme le critère de [15],  $Co > 0.79$  ou de [16],  $Co > 1$ . Remplir un de ces critères revient alors à décrire un écoulement spécifique aux petits canaux dans lequel la croissance des bulles n'est plus libre, car par définition les bulles de vapeur sont stables sur une dimension supérieure au diamètre de la conduite ( $L_{cap} > Co_{crit} D_h$ ), mais peuvent croître jusqu'à occuper l'ensemble de la section de passage du canal, c'est l'écoulement à bulles confinées. En parallèle, d'autres nombres adimensionnels ont été construits pour comparer les effets capillaires respectivement aux forces visqueuses et inertielles :

- le nombre Capillaire  $Ca = \frac{\mu U}{\sigma}$

- le nombre de Weber  $We = \frac{\rho U^2 D_h}{\sigma} = \frac{G^2 D_h}{\rho \sigma}$ .

Comme décrit dans les paragraphes suivants, ces nombres interviennent régulièrement dans les corrélations créées pour prendre en compte la particularité des écoulements en petits diamètres et les contributions jusqu'à présent négligeables de la capillarité. Dans les faits, l'effet de confinement ne se traduit pas seulement par une nouvelle carte de régimes d'écoulement ou des nouvelles corrélations, mais aussi par l'apparition de nouveaux phénomènes. On peut citer l'identification de mécanismes d'instabilités diphasiques propres aux micro-canaux, en particulier des oscillations de pression et de débit, parfois accompagnées de refoulements vapeur, assimilés à la croissance particulière des bulles de vapeur en micro-canal [17]. Ces comportements spécifiques aux micro-canaux illustrent le besoin de particulariser la physique de l'ébullition et, avec elle, les instabilités diphasiques qui l'accompagne, ainsi que l'évaluation des pertes de charge et des transferts de chaleur dans les micro-canaux.

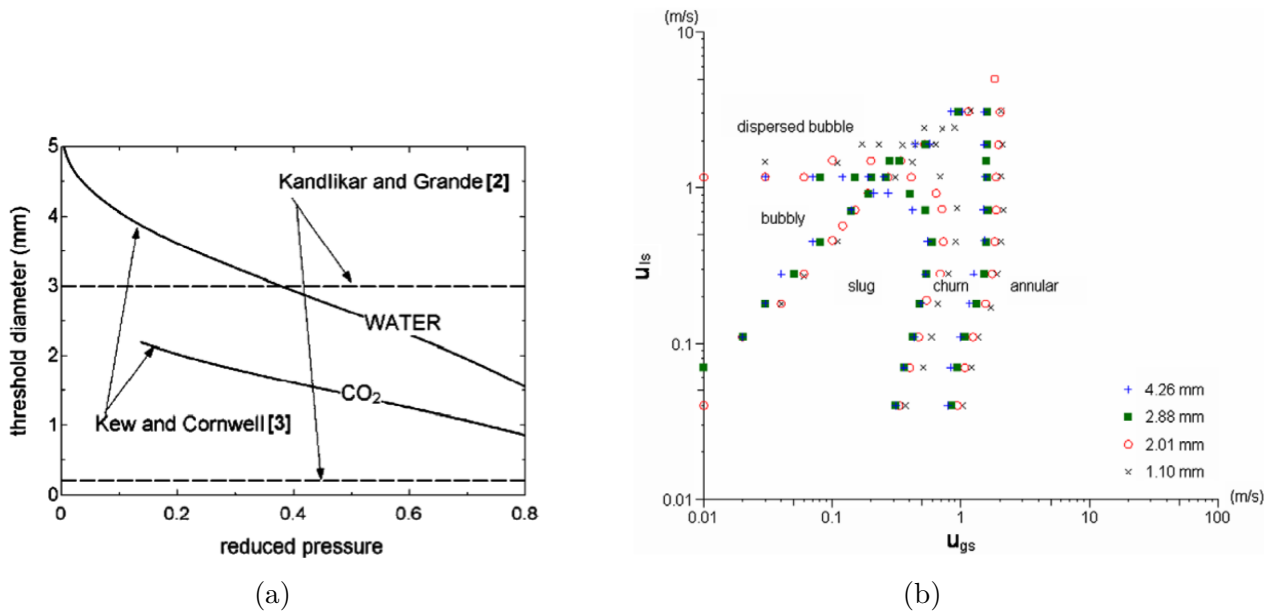


Figure I.5: (a) Evolution du diamètre de transition macro/micro-canaux en fonction de la pression selon les critères de Kandlikar et Grande et Kew et Cornwell ; (b) Superposition des cartes de régimes d'écoulement pour plusieurs diamètres de conduite ( $Co \in [0.16; 0.68]$ ), d'après les travaux de [8]

### 3.b Pertes de charge en micro-canal

#### Pertes de charge monophasiques

Ce paragraphe se focalise sur la modélisation des pertes de charge monophasiques visqueuses dans les canaux de petites dimensions, selon les critères établis précédemment. Plus précisément cette revue de littérature cherche à déterminer si les lois usuelles sont applicables pour le système étudié ou si des lois spécifiques sont à considérer.

Pour mieux appréhender le comportement des micro-canaux, quelques corrélations et outils de prédictions de pertes de charges sont présentés pour références. Parmi les lois usuelles le modèle de Darcy-Weisbach exprime les pertes de charge induites par un écoulement développé dans une conduite en fonction d'un coefficient de frottement qui intègre les propriétés de l'écoulement

et du fluide  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{1}{D_h} \Lambda \rho U^2$ . Le diagramme de Moody représente graphiquement l'évolution de ce coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds, pour différents régimes d'écoulements et pour plusieurs niveaux de rugosité (Cf Fig. I.6). On y retrouve en particulier les lois de Blasius,  $\Lambda = 0.3164 Re^{-0.25}$ , et d'Hagen-Poiseuille,  $\Lambda = \frac{64}{Re}$ . On notera qu'en régime laminaire, la rugosité n'intervient pas, contrairement au régime turbulent, où la loi de Blasius, qui représente le cas d'une conduite lisse, s'écarte des coefficients associés à des parois plus rugueuses. Précisons, que l'on se place ici dans le cas où les équations de Navier-Stokes

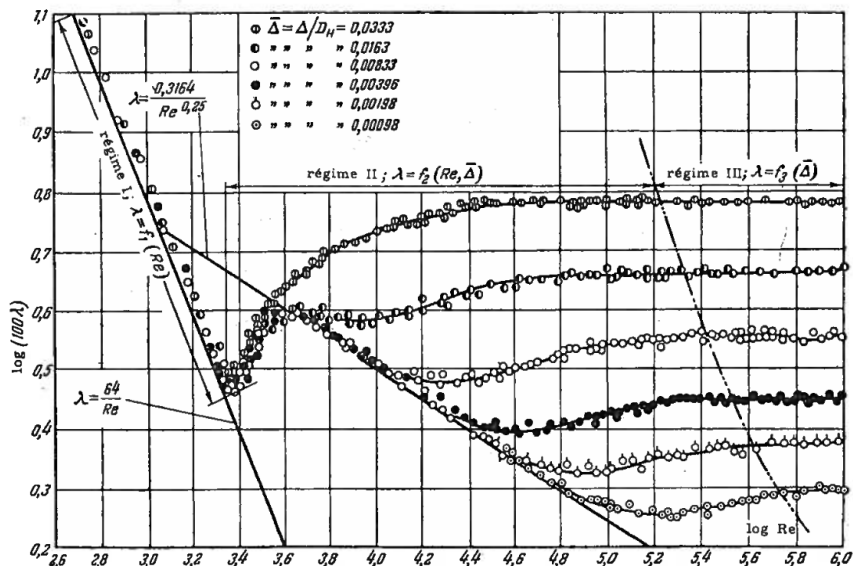


Figure I.6: Coefficient usuel de pertes de charge en fonction du Reynolds pour différentes rugosités [18]

sont valides, c'est-à-dire que les dimensions des conduites sont très supérieures devant le libre parcours moyen d'une molécule comme le rappelle [19],  $Kn = \frac{l}{D} < 0.001$ , où  $l$  est le libre parcours moyen et  $D$  la plus petite dimension de la conduite. La suite du paragraphe se focalise sur les pertes de charge dans des configurations adiabatiques. Il est intéressant de noter que selon [20] l'effet du chauffage tend à compenser l'influence croissante de la rugosité pour les canaux de petites dimensions se rattachant ainsi aux lois usuelles adiabatiques de pertes de charge. La multiplicité et la disparité des résultats expérimentaux lorsque le diamètre des conduites descend -en dessous du mm pour l'eau- a été interprétée par [12] et [21] comme liées d'une part à une incertitude mal contrôlée et potentiellement importante des mesures de pressions et de dimensions des canaux, et, d'autre part, à la difficulté de mesurer et caractériser la rugosité des parois et son impact sur les pertes de charge. Ils font de plus l'hypothèse que le coefficient de frottement et la transition laminaire-turbulente dépendent de la rugosité lorsque le diamètre des canaux diminue. Les résultats [22], [23], [24] confirment l'impact de la rugosité relative sur la transition laminaire-turbulente et le coefficient de frottement en particulier dans le régime laminaire. Plus précisément comme l'avait postulé [25] lorsque le diamètre des conduites diminue, la rugosité relative peut atteindre des valeurs supérieures aux 5% du diagramme de Moody, dans ce cas, l'effet de la rugosité n'est plus négligeable même dans le régime laminaire et conduit à sous-estimer les pertes de charge. Kandlikar propose alors d'utiliser un diamètre réduit  $D_{cf} = D_h - 2\epsilon$ , auquel on a retiré la hauteur des rugosités, pour corriger le coefficient de frottement, ce qui lui permet de recoller à la corrélation d'Hagen-Poiseuille basée sur le  $Re_{cf}$ , voir Fig. I.7.

En ce qui concerne la transition laminaire-turbulente qui prend classiquement place autour de  $Re = 2300$  en conduite circulaire, les mesures  $(Re, \bar{\Delta})$  expérimentales montrent une transition sur une gamme de Reynolds plus étroite et qui se produit à des plus petits nombres de Reynolds

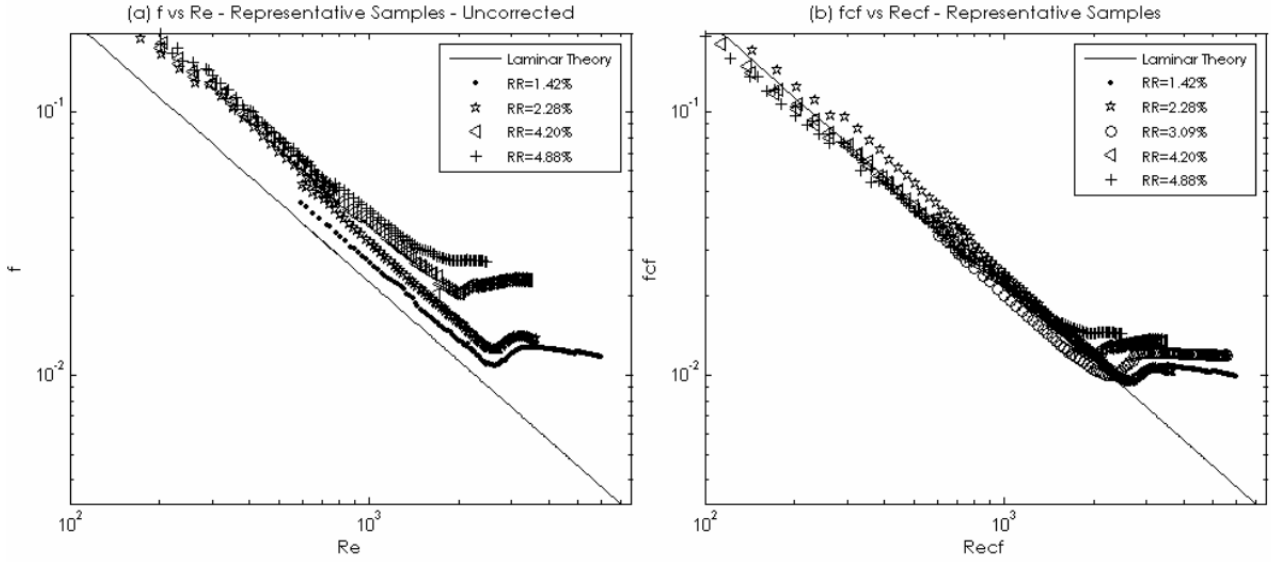


Figure I.7: Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds basé sur les résultats de [23] obtenus pour un écoulement en eau pour des diamètres de 198 à 1084 $\mu m$

Sample(D=1000 $\mu m$ )	Ra( $\mu m$ )	$\epsilon/D$	Re <sub>start</sub>	Re <sub>end</sub>
Glass Tube	0	0	1815	4274
Surface I	2.7	0.002705	2030	3483
Surface II	3.2	0.003206	2056	3303
Surface III	3.6	0.003607	2129	3200
Surface IV	4.3	0.004308	2120	3098

Figure I.8: Reynolds de début et de fin de la transition laminaire-turbulente pour différentes rugosités Données de [12] pour un écoulement en eau, D = 1000  $\mu m$

lorsque la rugosité augmente et que le diamètre diminue (Cf Fig. I.8). [26] arrivent à la même conclusion en compilant les données de plusieurs expériences et indiquent une expression corrigée du Reynolds critique lorsque la rugosité relative dépasse 1%,

$$Re_c = \begin{cases} 2300 & \text{si } \frac{\epsilon}{D_h} < 0.01 \\ 2300 - 12000\left(\frac{\epsilon}{D_h} - 0.01\right) & \text{si } 0.01 < \frac{\epsilon}{D_h} < 0.2 \end{cases}$$

Les corrélations qui permettent d'évaluer les pertes de charge pour les canaux de "grandes" dimensions semblent en général sous-estimer les pertes de charge générées dans les micro-canaux, et ce, de manière plus prononcée lorsque la rugosité relative est élevée. En se basant sur les conclusions des auteurs cités ci-dessus, les lois usuelles seraient suffisantes pour décrire les pertes de charge monophasiques de notre système avec un diamètre hydraulique  $D_h = 1400\mu m$  et une rugosité contrôlée. Néanmoins ces études ont été réalisées dans des conditions de pression et de température "ambiantes" qui diffèrent fortement des conditions de fonctionnement du générateur de vapeur considéré. Il paraît donc légitime de s'interroger sur l'impact de ces paramètres sur le niveau de rugosité relative à partir duquel les pertes de charge divergent des lois usuelles et de savoir si ces conclusions sont extensibles à un écoulement vapeur à plus haut Reynolds.



## Pertes de charge diphasiques

Les pertes de charge d'un écoulement diphasique sont, elles, plus sensibles à la variation du diamètre des conduites. Alors qu'en écoulement monophasique les paramètres impactant étaient essentiellement géométriques, en écoulement diphasique la modification des régimes d'écoulement intègre de nombreux paramètres supplémentaires (hydrauliques et thermiques) qui vont potentiellement modifier le niveau de pertes de charge. Mais avant de s'intéresser à l'évaluation des pertes de charge diphasiques en micro-canaux, un bref rappel des lois usuelles est effectué dans l'optique de servir de solution de référence.

Tout comme en écoulement monophasique les pertes de charges peuvent être attribuées à trois sources distinctes :

- Inertielle
- Visqueuse
- Gravitaire

A la différence, cette fois-ci que le terme inertiel n'est plus nul ou négligeable, du fait de la grande variation de masse volumique entre les phases liquide et vapeur, on observe pour l'eau un rapport proche de 30 pour une pression de 46bar. Physiquement, cela se traduit par l'accélération de la phase vapeur et l'apparition de contraintes de cisaillement entre les phases dues aux différences de vitesses entre les phases. Toujours à cause de la faible densité de la vapeur, le terme gravitaire tend habituellement à devenir négligeable dans les écoulements diphasiques verticaux. Avec une approche monodimensionnelle, ces deux termes s'expriment simplement de manière analytique (I.1), à condition d'imposer une relation entre le taux de vide et le titre vapeur, en général fonction du rapport des masses volumiques des deux phases à saturation. Comme cette relation équivaut à relier les vitesses des deux phases, cela signifie que l'on se place en général dans une situation plus ou moins favorable à l'un des régimes d'écoulement. Par exemple, le modèle homogène qui suppose que les phases se déplacent à la même vitesse soit  $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-x}{x} \frac{\rho_g}{\rho_l}$ , est plus représentatif d'un régime à bulle que d'un régime annulaire caractérisé par des vitesses vapeur et liquide très différentes. D'autres modèles plus complexes ont été développés pour prendre en compte des différences de vitesses entre les phases comme celui de [27], pour lequel  $\alpha = \frac{1}{1+(\frac{1-x}{x})(\frac{\rho_g}{\rho_l})^{2/3}}$ .

$$\frac{dP}{dz} = G^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{x^2}{\rho_g \alpha} + \frac{(1-x)^2}{\rho_l (1-\alpha)} \right) + (\alpha \rho_g + (1-\alpha) \rho_l) g + \left( \frac{dP}{dz} \right)_{friction} \quad (I.1)$$

Pour ce qui est du terme rassemblant les pertes de charge visqueuses, en utilisant le même formalisme qu'au paragraphe précédent on peut encore écrire que  $\left( \frac{dP}{dz} \right)_{friction} = \frac{1}{2} \frac{1}{D_h} \Lambda_{tp} \rho_m U_m^2$ . Le coefficient de frottement est, par contre, plus complexe que pour le cas monophasique, en cause la grande variété de régimes d'écoulement rencontrés dans les écoulements diphasiques. Celui-ci rassemble les nombreux effets de paramètres tenant tout autant de la thermo-hydraulique, (morphologie de l'écoulement, propriété des phases, vitesse de glissement) que des propriétés géométriques (rapport de forme, dimensions, état de surface). Cette variété s'est traduite dans la littérature par une écriture "par régime" du terme visqueux, ie  $\Lambda_{tp}$  (régime d'écoulement), c'est l'approche choisie par [28] pour l'écoulement à bulles et par [29] qui compile plusieurs formes de coefficient de frottement adapté à chaque régime.

Une autre approche, plus globale et largement utilisée dans les pratiques industrielles, consiste à écrire le gradient de pression de friction comme proportionnel au gradient de pression monophasique liquide par exemple,  $(\frac{dP}{dz})_{tp} = \Phi_l(\frac{dP}{dz})_l$ . C'est l'approche utilisée dans le modèle de Lockhart et Martinelli qui sert lui-même de base à la majeure partie des corrélations du terme de friction. Dans le modèle de [30], le coefficient de proportionnalité est fonction du paramètre de Martinelli  $X$  et de la combinaison des régimes d'écoulement des phases liquide et gazeuse, voir Table I.3,  $\Phi_l = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2}$  et  $X^2 = \frac{(dP/dz)_l}{(dP/dz)_g}$ . On peut remarquer que la forme du paramètre de Martinelli dépend donc de la corrélation choisie pour exprimer les pertes de charge monophasiques liquide et gazeuse, voir paragraphe précédent. Depuis de nombreux modèles ont

C	Gas laminaire	Gas turbulent
Liquide laminaire	5	12
Liquide turbulent	10	20

Tableau I.3: Valeurs du coefficient C dans le modèle de Lockhart et Martinelli [30]

repris la forme de cette corrélation en modifiant l'expression de  $\Phi_l$  et de C : [31], par exemple, rajoute une dépendance au diamètre pour les conduites rectangulaires  $C = 21(1 - e^{-0.319D_h})$ , tandis que [32] change les puissances de  $X$ ,

$$\begin{cases} \text{si } G > 200 \text{ kg/m}^2/\text{s} : & \Phi_g = 1 + 9.4X^{0.62} + 0.564X^{2.45} \\ \text{sinon} : & \Phi_l = 1 + \frac{C}{X^{0.872}} + \frac{1}{X^2} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

$$\text{où } C = 4.566 \cdot 10^{-6} Re_{f_0}^{0.938} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)^{2.15} \left(\frac{\mu_l}{\mu_g}\right)^{5.1}.$$

De manière classique, les pertes de charge générées par l'écoulement dans un canal croissent avec le débit massique qui le traverse. C'est le cas pour un écoulement de liquide ou de vapeur pure mais ayant un gradient de pression plus élevé dans le cas vapeur. A contrario, la courbe de demande d'un écoulement diphasique présente, elle, une forme caractéristique en "S" (Cf Fig. I.9). Qualitativement, à flux fixé, pour des forts débits l'apport énergétique n'est plus suffisant pour atteindre la température de saturation, l'écoulement reste donc liquide jusqu'à la sortie du canal et la courbe de demande tend vers le cas liquide monophasique. Aux faibles débits, au contraire l'évaporation est favorisée et l'écoulement se divise en trois zones, chacune contribuant à la perte de charge totale du canal : une zone liquide, une zone diphasique et une zone vapeur. Cependant, la forte perte de charge dans la phase vapeur rend les autres contributions négligeables et la courbe de demande tend alors vers la configuration monophasique vapeur. Entre ces deux comportements asymptotiques, augmenter le débit dans la conduite revient à réduire le titre en vapeur de l'écoulement, *i.e.* à retarder l'ONB, et donc à réduire les pertes de charge engendrées.

Pour les conduites au diamètre plus restreint, il a déjà été mentionné auparavant que les régimes d'écoulement se trouvent modifiés et avec eux les niveaux de pertes de charge. Les corrélations des macro-canaux prédisent alors des valeurs de pertes de charge assez éloignées des mesures réalisées en laboratoire [35], avec selon certains auteurs une erreur maximale pour les régimes slug-annulaire et annulaire pour les écoulements en eau [36]. Pour améliorer les résultats des corrélations usuelles, des auteurs tels [37], préconisent d'intégrer l'influence grandissante des forces de capillarité au travers de nouveaux nombres adimensionnels pour mieux capter la physique des pertes de charge en micro-canaux, c'est par exemple le cas de la corrélation proposée par [38] en introduisant le nombre de Suratman  $Su = \frac{Re^2}{We}$ ,

$$\text{si } Re_l > 2000, Re_g > 2000; C = (0.39 Re_{f_0}^{0.03} Su_{g_0}^{0.10} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g}\right)^{0.35}) * (1 + 60 We_{f_0}^{0.32} (Bo \frac{P_H}{P_F})^{0.78})$$



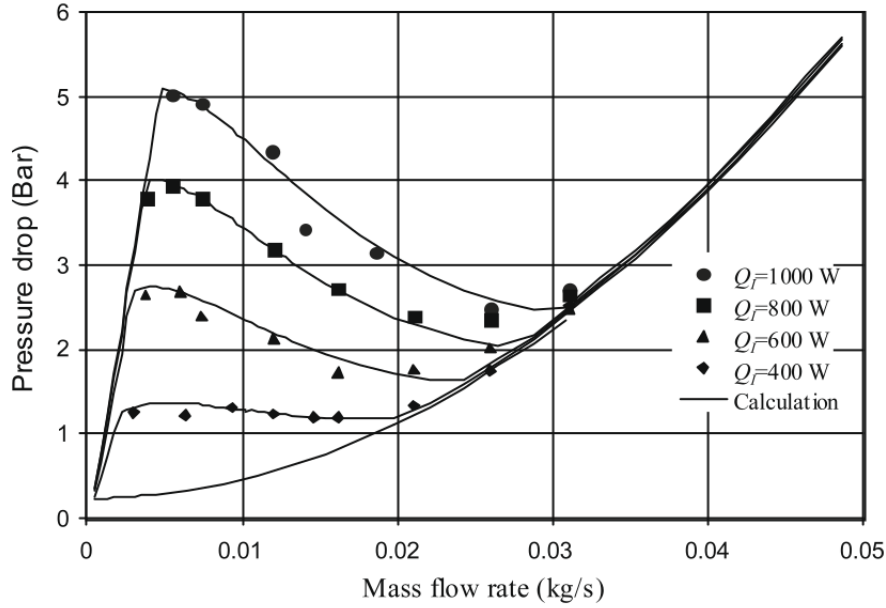


Figure I.9: Modèle de la courbe de demande développé [33] et données expérimentales de [34], pour un écoulement vertical

Où  $P_H$  et  $P_F$  représentent les périmètres respectivement chauffé et mouillé.

D'après les comparaisons avec des données expérimentales, l'usage des corrélations créées pour les macro-canaux, génère des écarts parfois importants avec les mesures réalisées (souvent plus de 20%). Les corrélations sont alors le plus souvent adaptées pour prendre en compte les spécificités de l'ébullition en micro-canal. Les canaux du GV étant situés sur la frontière haute des micro-canaux, l'usage de corrélations incluant les effets de la capillarité paraît donc plus adapté.

### 3.c Échange de chaleur dans les micro-canaux

De la même manière que pour les pertes de charges, ce paragraphe s'articulera d'abord autour d'une courte présentation des modélisations classiques du transfert de chaleur en écoulement monophasique, dans un premier temps, puis diphasique par la suite. Ces corrélations auront pour but de servir de référence lorsque le comportement des canaux de petits diamètres sera traité. On se concentrera après sur la physique des transferts de chaleur dans un écoulement diphasique d'un canal de diamètre réduit afin de déterminer si les lois usuelles sont applicables aux canaux qui composent le générateur de vapeur.

En convection forcée monophasique interne en régime établi le nombre de Nusselt est classiquement considéré comme indépendant de la géométrie de la conduite et du chauffage. Ainsi, dans la corrélation de Shah et London [39] le Nusselt d'une conduite de section rectangulaire dépend également d'un rapport de forme  $\gamma$ , rapport de la plus petite arête sur la plus grande, tant que  $Re < 2000$ ,  $Nu = 8.235(1 - 2.0421\gamma + 3.0853\gamma^2 - 2.4765\gamma^3 + 1.0578\gamma^4 - 0.1861\gamma^5)$ . Lorsque le régime d'écoulement devient turbulent, le Nusselt s'exprime classiquement comme une fonction du nombre de Reynolds et de Prandtl, Dittus et Boelter [40] indiquent, par exemple, qu'en cas de chauffage,  $Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4}$  ou de façon équivalente,  $h_{liq} = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \frac{k_f}{D_h}$ . Pour un écoulement diphasique, la physique qui assure les échanges de chaleur entre la paroi de

la conduite et le fluide se complexifient considérablement par la démultiplication des configurations d'écoulement. Comme précédemment discuté, le régime d'écoulement change le long de la conduite, ainsi que le poids relatif de ces différents phénomènes dans l'échange de chaleur. Il faut ajouter à cela que la carte des régimes d'écoulement et donc les contributions au coefficient d'échange dépendent de nombreux paramètres tels que la pression, le débit, le flux thermique ou la température de paroi, la tension de surface, le rapport de densité, de viscosité entre phases, la géométrie, etc... Cela complique l'écriture d'une corrélation valable pour plusieurs fluides et sur toutes les phases de l'ébullition.

On se concentre dans cette partie sur la phénoménologie des transferts de chaleur lors de l'ébullition, c'est-à-dire, avant l'assèchement du film liquide (*dryout completion*) et à partir du moment où survient l'ébullition sous-saturée au niveau de la paroi. Les transferts en amont et en aval de cette zone peuvent en effet être traités avec des modèles monophasiques, exception faite de la partie vapeur qui suit la disparition du film liquide puisque cette zone contient encore des gouttelettes de liquide qui s'évaporeront en aval.

Il est admis que le coefficient d'échange d'un écoulement diphasique est généralement composé de deux contributions :

- une contribution liée à l'ébullition nucléée
- une contribution associée à l'ébullition convective.

La première est majoritaire de l'ébullition sous-saturée au régime de slugs ; elle repose sur l'agitation créée par le départ des bulles, la convection du liquide entre les sites de nucléation, l'évaporation du liquide à la paroi et le transport de chaleur latente par les bulles. La seconde est, elle, dominante sur le régime annulaire ; le transfert thermique s'y fait alors par conduction à travers le film liquide, à la surface duquel on retrouve à la fois de l'évaporation qui consume le film liquide, un échange convectif avec le cœur de vapeur, voire un entraînement de gouttelettes dans la veine vapeur [5], [41]. Le coefficient d'échange qui est donc la somme de ces deux contributions, change de forme en fonction du poids relatif de ces deux phénomènes, c'est-à-dire en fonction de la famille de régime d'écoulement dominant dans le canal. On peut alors distinguer, en réduisant à l'extrême l'influence de l'ébullition nucléée ou convective, deux grandes familles de coefficient d'échange (Cf Fig. I.10). L'ébullition nucléée se traduit par une brusque augmentation du coefficient d'échange lors du déclenchement de l'ébullition sous-saturée, puis le coefficient d'échange atteint un plateau haut légèrement décroissant – c'est la composante de nucléation qui s'amointrit de plus en plus – avant de s'effondrer lors de la rupture du film liquide aux forts titres (Cf Fig. I.10). En ce qui concerne l'ébullition convective, celle-ci se caractérise plutôt par une première montée plus restreinte lors des régimes d'ébullition nucléée, puis par une augmentation progressive à partir du moment où le régime annulaire s'établit – due à la réduction du film liquide qui réduit la résistance de conduction thermique – pour finalement retrouver la même chute du coefficient d'échange lors de l'effondrement du film liquide (Cf Fig. I.10). Entre ces deux états, tout un éventail de possibilités peuvent se traduire par autant de comportements distincts. Expérimentalement, il a été observé, que les transferts de chaleur de types nucléés, sont relativement insensibles aux variations de débit, mais sont distinctement flux-dépendant, voir Fig. I.12b, de l'autre côté les échanges de types convectifs dépendent fortement du débit et varient peu avec le flux thermique imposé (Cf Fig. I.11).

En outre, les figures Fig. I.12b et Fig. I.11 mettent en avant le fait qu'une augmentation du débit, une diminution du flux thermique ou une diminution de la pression de saturation, voir Fig. I.13, renforcent généralement la contribution convective aux transferts de chaleur et réciproquement [44, 43]. Le comportement parfois antagoniste des contributions nucléée et convective aux transferts de chaleur se retrouve dans la construction des corrélations de coefficient d'échange diphasique, qui prennent souvent la forme  $(A + B)h_{liq}$  où  $A$  représente la

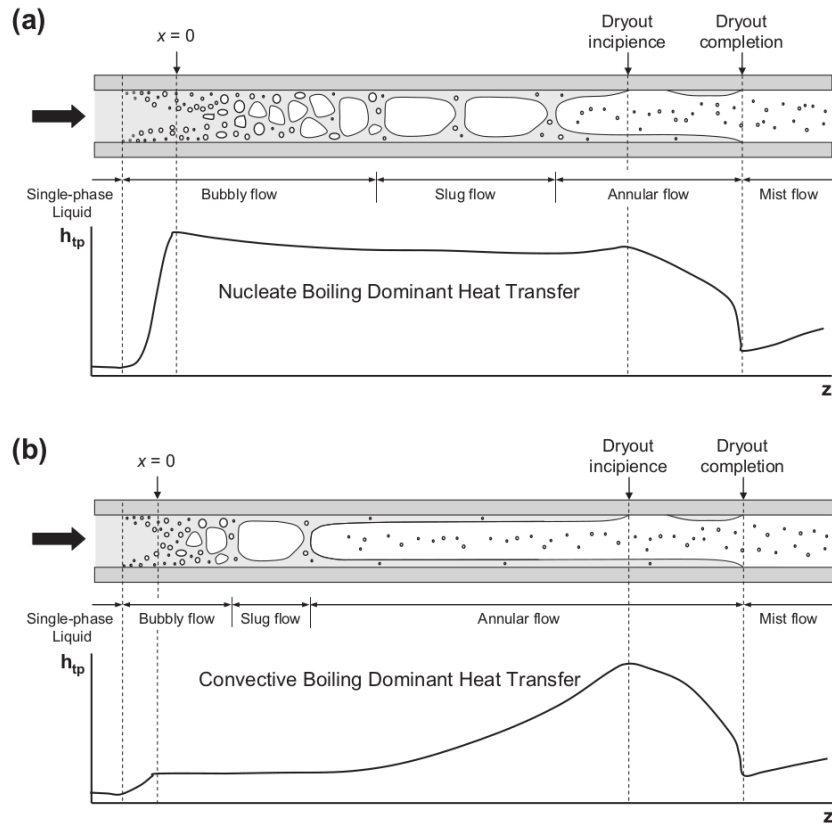


Figure I.10: Différentes évolutions du coefficient d'échange diphasique le long d'une conduite chauffée, d'après [42]

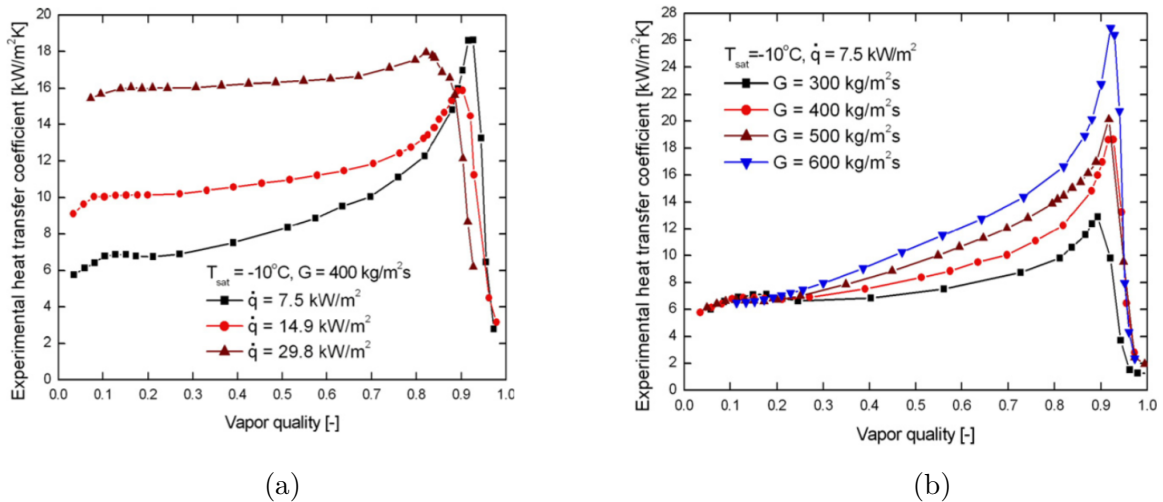


Figure I.11: Variation d'un coefficient d'échange de chaleur de type convectif en fonction du flux imposé, *graphique de gauche*, et du flux massique imposé, *graphique de droite*, les données expérimentales de [Wu 2011] sont issues d'un écoulement de  $\text{CO}_2$

composante de l'ébullition nucléée et  $B$  la composante convective. Les coefficients  $A$  et  $B$  font généralement intervenir le nombre d'ébullition  $Bo = \frac{q}{G\mathcal{L}_{vap}}$ , le coefficient turbulent de Lockhart et Martinelli  $X_{tt} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0,9} \left(\frac{\mu_L}{\mu_g}\right)^{0,1} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)^{0,5}$ , les nombres de Reynolds et de Prandtl via la corrélation de Dittus-Boetler [45]. Le  $Bo$  qui caractérise la vaporisation joue un rôle prépondérant dans la partie nucléée tandis que la dépendance du coefficient  $A$  à  $X_{tt}$  est beaucoup plus anecdotique. Au contraire, les échanges en ébullition convective sont plus sensibles aux variations de

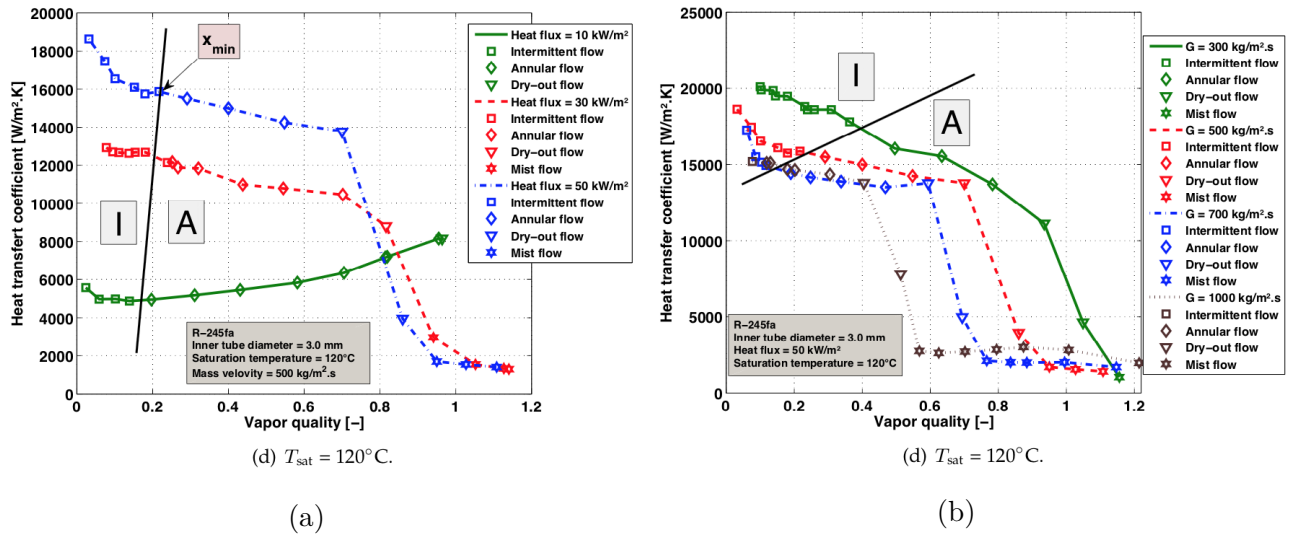


Figure I.12: Variation d'un coefficient d'échange de chaleur de type nucléé en fonction du flux imposé, (a), et du flux massique imposé, (b), les données expérimentales de [43] sont issues d'un écoulement de R-245fa,  $Co$  varie entre 0.29 et 0.18

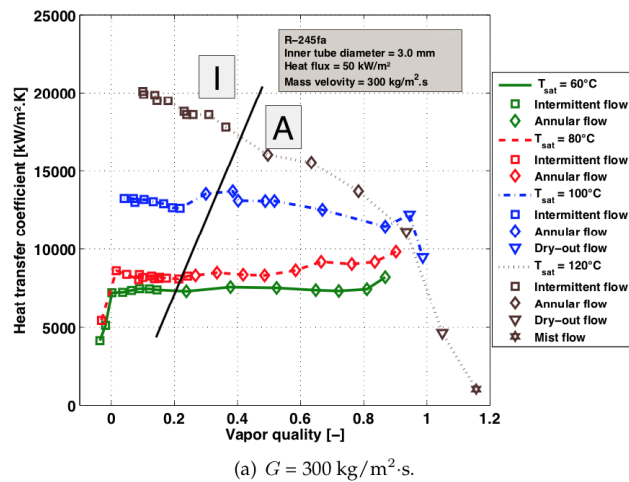


Figure I.13: Variation d'un coefficient d'échange de chaleur en fonction de la température de saturation, les données expérimentales de [43] sont issues d'un écoulement de R-245fa, la gamme de température de saturation [60 ; 120] °C correspond à une gamme de pression relative de [0.13 ; 0.53]

$X_{tt}$  [5, 44]. Certaines corrélations, à l'instar de [46], prises sur des échantillons de données avec une domination marquée de l'ébullition nucléée, négligent les effets convectifs et sont donc peu représentatives d'un écoulement majoritairement annulaire,  $h_{tp} = 30 Re_{l0} Bo^{0,714} \frac{k_l}{D_h}$ , d'autres comme [47] prennent  $A, B(Bo, X_{tt})$ , avec par exemple,  $h_{tp} = 7390(Bo + 0,00015(\frac{1}{X_{tt}})^{2/3})h_l$ .

Comme pour les pertes de charges, l'application des corrélations établies pour les conduites de "grandes" tailles aux micro-canaux a été précédemment questionnée. L'influence du changement de diamètre est néanmoins plus perceptible que pour les pertes de charges monophasiques car expérimentalement, les cartes de régimes d'écoulement sont modifiées lorsque le diamètre des conduites diminuent [8], [9]. En effet, les rapports de forces usuels (inertie, gravité, friction, capillarité) changent pour des diamètres réduits, la gravité devient négligeable et les effets

de capillarité sont de plus en plus forts [10]. La nouvelle carte de régime va donc directement modifier les transferts de chaleur qui sont très fortement dépendants de la succession des régimes d'écoulement dans le canal chauffé. Pour tenir compte de ces nouveaux rapports de force, des nombres adimensionnels tels que le nombre de Weber  $We = \frac{G^2 D_h}{\rho \sigma}$ , de Confinement  $Co = \frac{\sigma / (g(\rho_g - \rho_l))}{D_h}$  ou de capillarité  $Ca = \frac{\mu v}{\sigma}$  font leur apparition dans les corrélations adaptées aux micro-canaux [48], [49]. D'un point de vue plus global Fig. I.14, la diminution du diamètre des conduites améliore les échanges avec la paroi, et favorise la composante nucléée du coefficient d'échange [50], [51], [44].

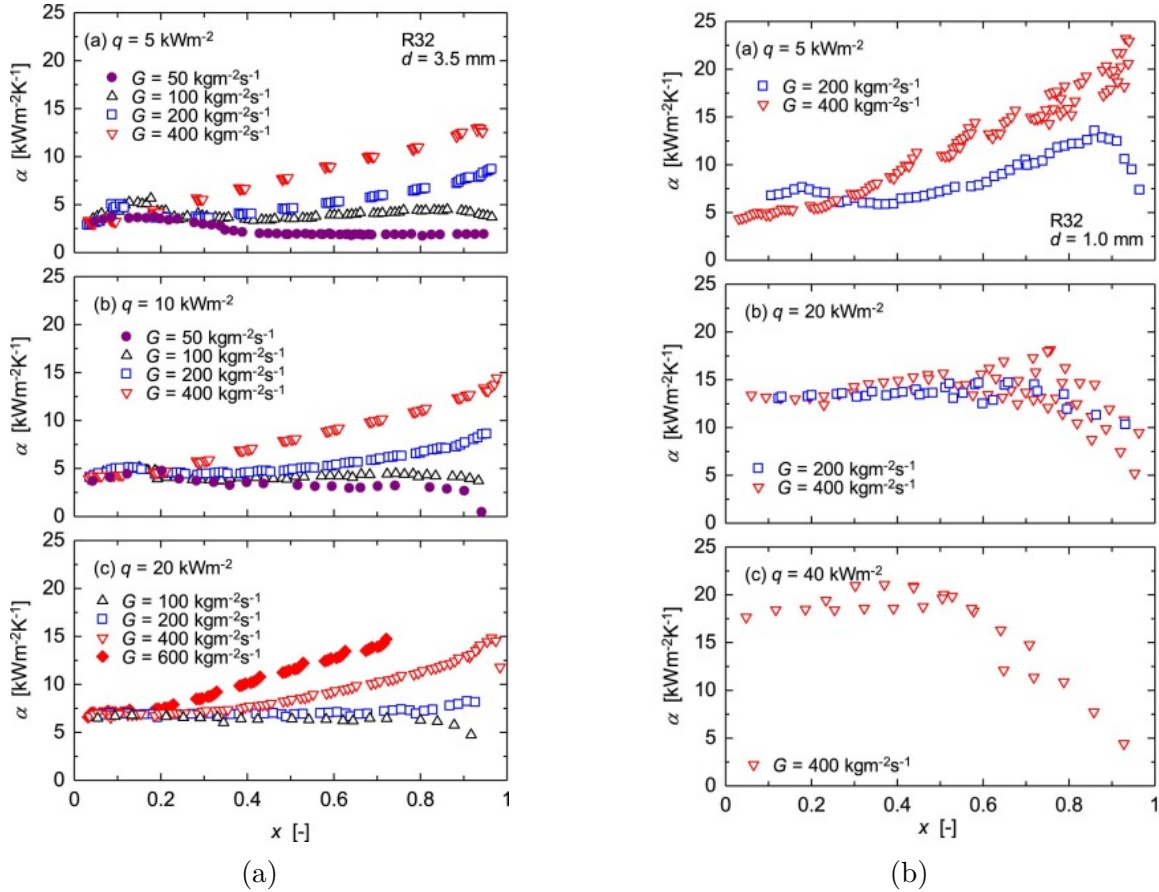


Figure I.14: Variation du coefficient d'échange en fonction du flux thermique et du flux massique imposé, dans une conduite lisse de diamètre respectivement 3.5mm ( $Co = 0.27$ ), (a) et 1mm ( $Co = 0.94$ ), (b), les données expérimentales de [51] sont issues d'un écoulement de R32.

Dans les conditions de fonctionnement envisagées pour le GV, l'utilisation de la corrélation de [44] (I.3), issue du traitement d'une large base de données comprenant nos gammes de paramètres de fonctionnement et prenant en considération à la fois la composante nucléée et convective, a permis d'évaluer la sensibilité du coefficient d'échange diphasique aux variations de pression, de débit massique (Cf Fig. I.15b) et de flux thermique (Cf Fig. I.15c) en s'assurant que les spécificités liées aux faibles diamètres des canaux sont prises en compte. La corrélation

de Kim et Mudawar se présente sous la forme ci-contre :

$$\begin{cases} 19 < G < 1608 \text{ kg/m}^2/\text{s} \\ 57 < Re_l < 49.820 \\ 0.19 < D_h < 6.5 \text{ mm} \\ 0.005 < P_R < 0.69 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{h_{tp}}{h_l} = \sqrt{(2345(Bo \frac{P_H}{P_F})^{0.70}(\frac{P}{P_{crit}})^{0.38}(1-x)^{-0.51})^2 + (5, 2(Bo \frac{P_H}{P_F})^{0.08}We_{f_0}^{-0.54} + 3, 5(\frac{1}{X_{tt}})^{0.94}(\frac{\rho_g}{\rho_l})^{0.25})^2} \quad (\text{I.3})$$

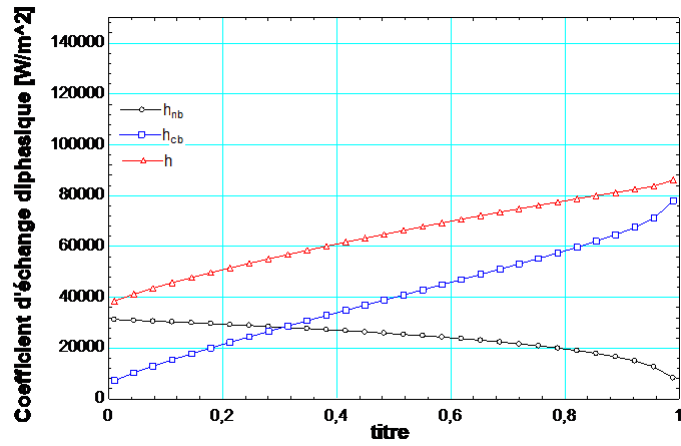
L'ensemble des résultats indique unanimement une évolution de type convective, en accord avec ce qui est observé à pression ambiante, pour des coefficients d'échange variant de  $40 \text{ kW/m}^2/\text{K}$  à  $80 \text{ kW/m}^2/\text{K}$ , dans les conditions nominales de fonctionnement.

## I.4 Instabilités en écoulement diphasique

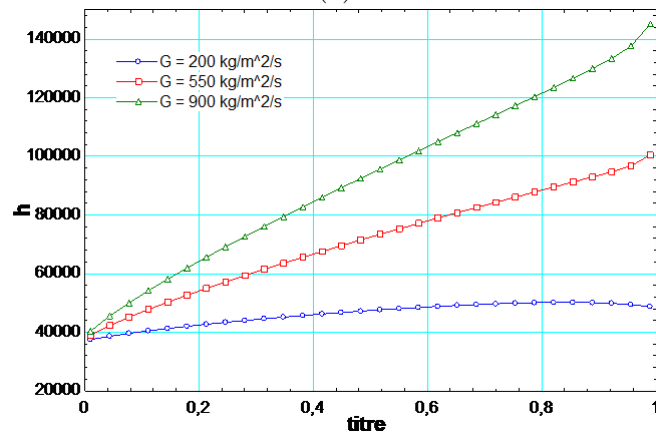
L'utilisation de générateurs de vapeur once-through pour les futurs SMR nécessite de porter une attention particulière aux phénomènes d'instabilité inhérents au caractère diphasique de l'écoulement. Une bonne compréhension et modélisation du GV passe donc par l'identification des instabilités susceptibles de prendre place dans le système et par l'analyse des processus physiques qui se cachent derrière ces instabilités. Dans cette optique, la section qui suit décrit succinctement les principales instabilités thermo-hydrauliques rencontrées dans les écoulements diphasiques pour apporter ensuite une étude plus détaillée des quelques instabilités jugées plus susceptibles de survenir et d'affecter le comportement du GV. Une attention toute particulière sera apportée à l'instabilité de Ledinegg et ses différentes formes.

Dès 1934, Ledinegg, en étudiant les écoulements diphasiques en canal, rapporte l'existence de points de fonctionnement, c'est-à-dire de couples débit-pression, qui ne peuvent être maintenus, l'écoulement tendant naturellement vers d'autres points de fonctionnement. [7] identifiera que derrière ses observations, se cache une instabilité liée aux propriétés particulières des pertes de charge en écoulement diphasique. La famille des instabilités diphasiques a depuis pris de l'ampleur et est restée un sujet d'actualité, voire fait même l'objet, depuis les années 2000, d'un regain d'intérêt initié par le développement des micro-échangeurs diphasiques, reconnus pour leur compacité et leur efficacité [52], [53]. Expérimentalement, ces nouvelles instabilités se traduisent le plus souvent par des transitions instationnaires de régimes d'écoulement, accompagnées d'oscillations des principales grandeurs thermo-hydrauliques comme la pression, le débit, le profil de température ou la position de l'interface liquide-vapeur. Les mesures menées sur les écoulements diphasiques ont ainsi pu mettre en plusieurs instabilités diphasiques distinctes et possédant leurs propres processus physiques [54], [55]. Certains auteurs ont cherché à synthétiser et classifier les différents travaux portant sur ces instabilités diphasiques. Ces synthèses ont conduit à la définition de deux grandes familles d'instabilités dites statiques ou dynamiques [56, 57]. Cette distinction est reprise dans la suite du chapitre. Seules les instabilités globales qui font intervenir l'ensemble de l'écoulement sont traitées dans cette revue au détriment des instabilités que l'on peut qualifier de locales telles que les instabilités de Taylor ou de Helmholtz. Ce chapitre fera plusieurs fois appel à la notion de stabilité d'un point de fonctionnement ; on parlera alors d'un point de fonctionnement stable d'un système, si le système une fois perturbé, tend asymptotiquement vers son état d'origine, *i.e.* si le système retourne vers son point de fonctionnement de départ.

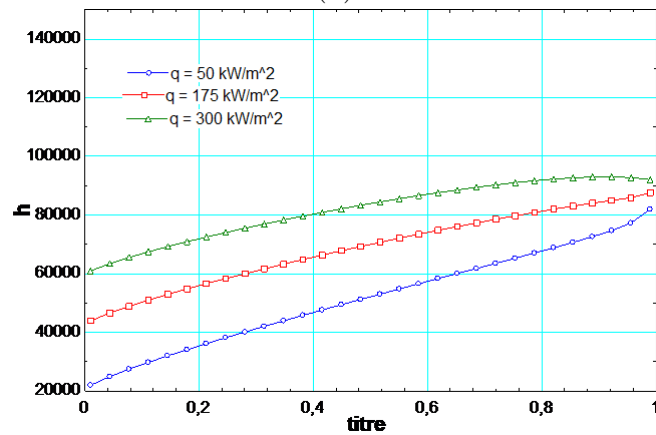




(a)



(b)



(c)

Figure I.15: Estimation du coefficient d'échange de chaleur en  $W/m/K$ , dans les conditions nominales de fonctionnement, (a), en fonction du flux massique, (b) et du flux thermique imposé, (c). Les composantes associées à l'ébullition nucléée (nb) et l'ébullition convective (nc) ont été représentées.

#### 4.a Instabilités statiques

Les instabilités statiques se caractérisent par la transition unique d'un point de fonctionnement de départ, instable, vers un second point de fonctionnement distinct, lui stable. Contrairement aux instabilités dynamiques il n'y a donc pas d'oscillations entre un ensemble de points de fonctionnement mais un simple déplacement d'un point de fonctionnement A vers un point de

fonctionnement B. Le départ du point A est fréquemment associé à l'arrivée d'une perturbation d'un ou plusieurs paramètres du système, cette perturbation qui peut aussi bien provenir de l'écoulement lui-même (coalescence de bulles de vapeur, rupture de film liquide) que d'éléments extérieurs (à-coup de pression ou de débit dus à la pompe, vibration des parois de la conduite, variation de flux thermique) est considérée comme l'élément déclencheur de l'instabilité.

### Transition de régime d'écoulement

Les instabilités de transition de régime d'écoulement indiquent, comme elles le suggèrent, le passage d'un régime d'écoulement diphasique vers un autre. Ces passages ont fait l'objet de nombreux relevés expérimentaux qui sont souvent synthétisés sous forme de cartes, voir Fig. I.4, fonction des vitesses superficielles ou des nombres de Weber des phases [8]. Passer d'un régime à l'autre s'accompagne de sauts de propriétés associés aux coefficients d'échange à la paroi et aux pertes de charge. Un point de fonctionnement situé à la jonction de deux régimes soumis à une perturbation, pourra occasionner avec le changement de régime, une évolution significative des propriétés de l'écoulement initial, *i.e.* un déplacement vers un nouveau point de fonctionnement éloigné du point de départ [57]. Le processus décrit ici relève donc des instabilités statiques, pourtant certaines transitions de régime peuvent mettre en avant les propriétés d'une instabilité dynamique.

Il existe alors deux interprétations dans la littérature, la première, est que, dans certains cas, le changement de régime d'écoulement peut s'auto-entretenir et produire une instabilité dynamique à part entière [55]. Par exemple, [56] mentionne qu'une légère diminution du débit en écoulement à bulle peut faire transiter l'écoulement vers un écoulement annulaire. Or celui-ci se caractérise par des pertes de charge moindres, le débit en réponse augmente, entraînant avec lui une baisse du taux de vide (retour à un écoulement à bulle) et une augmentation des pertes de charges et ainsi de suite.

La seconde interprétation, affirme, quant à elle, que la plupart des transitions de régime dynamiques doivent être vues comme la conséquence d'autres instabilités, qui en faisant varier les paramètres thermo-hydrauliques de l'écoulement, entraînent des transitions de régime mais n'en sont pas le fruit. Le cas des "Pressure Drop Oscillations" est particulièrement parlant puisque lors de cette instabilité, l'écoulement oscille constamment entre un écoulement monophasique liquide et un écoulement annulaire en sortie de conduite [58]. C'est d'ailleurs sur cette alternance de régimes que les auteurs se basent pour expliquer les oscillations de températures observées (un écoulement essentiellement vapeur est plus isolant qu'un écoulement majoritairement liquide, voir Fig. I.16).

### Vapor Burst

Lorsque le fluide de travail est très mouillant, que les parois sont dépourvues de sites de nucléation et/ou que le fluide a été dégazé, l'ébullition nucléée est retardée. En effet, le déficit de nucléi retarde la formation de bulles de vapeur. Pour compenser ce manque, l'ONB se déclare à un niveau de surchauffe supérieur, jusqu'à ce qu'à partir d'un certain niveau, la vapeur finisse par se former. C'est ce processus qui est à l'origine de l'hystérésis de la courbe d'ébullition, voir Fig. I.17b. A ce moment, une légère augmentation du flux suffit pour déclencher l'ébullition. Il s'ensuit la vaporisation soudaine et intense d'une grande quantité du fluide, appelée *flashing*. Il découle de cette vaporisation éclair une modification de la pression du système et un abaissement de la température qui revient à la normale (Cf Fig. I.17a). C'est cette formation rapide de vapeur qui est désignée par le terme d'explosion vapeur ou *vapor burst*.



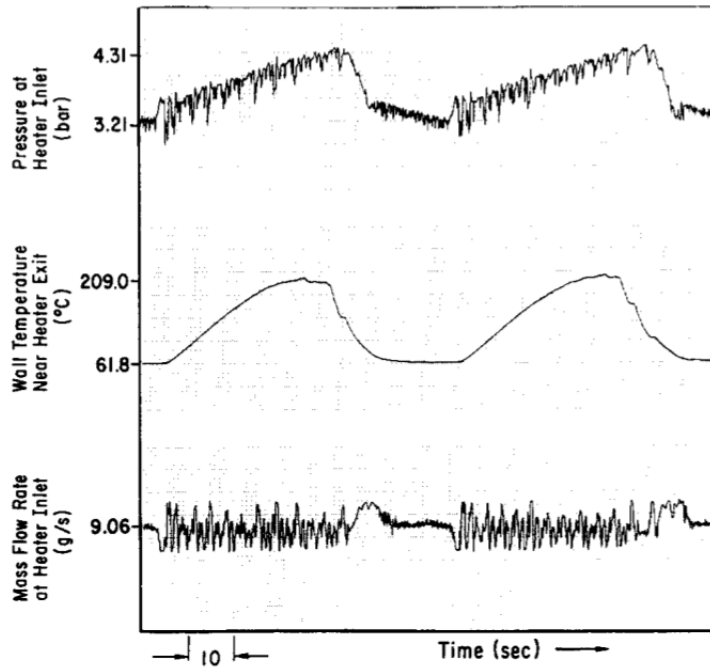


Figure I.16: Relevés de température, de débit et de pression lors de PDO réalisés par [58]

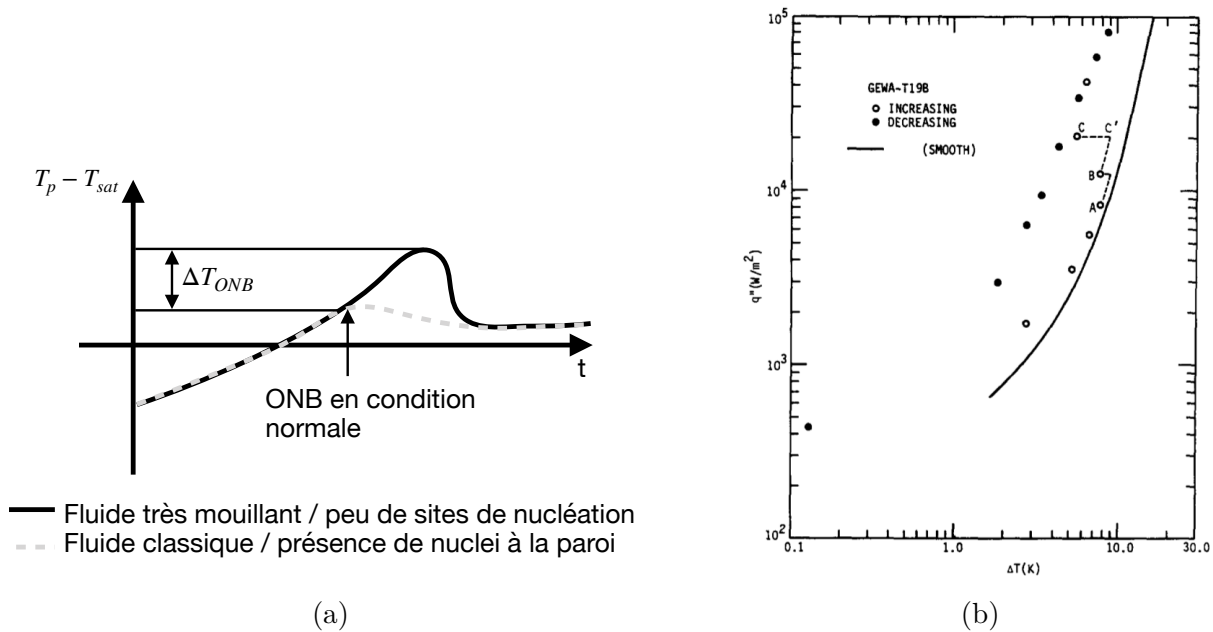


Figure I.17: (a) Évolution de la température avec et sans occurrence de *vapor burst* ; (b), hystérésis de la courbe d'ébullition obtenue dans une configuration de *pool boiling*, d'après les données de [59]

### Crise d'ébullition

Pour appréhender les mécanismes de la caléfaction aussi appelée crise d'ébullition, considérons un canal chauffé de telle façon que le liquide en contact avec la paroi ne nécessite qu'un faible apport d'énergie pour être vaporisé. Dans ce cas, une faible diminution du débit liquide ou une légère augmentation du flux à la paroi va créer une poche de vapeur pariétale. Le canal qui jusqu'alors bénéficiait d'un coefficient d'échange important du fait de l'ébullition se retrouve alors dans une configuration de convection forcée avec de la vapeur isolante [55]. La température

de paroi s'envole jusqu'à se stabiliser lors de l'atteinte d'un nouvel équilibre stable (Cf Fig. I.18). La violente augmentation de la température qui accompagne la crise d'ébullition est un élément critique dans de nombreux systèmes, car les matériaux des canaux ne sont généralement pas dimensionnés pour ce niveau de température. Un fort travail de recherche a donc été mené pour chercher à prédire la crise d'ébullition et pouvoir dimensionner les systèmes diphasiques [42].

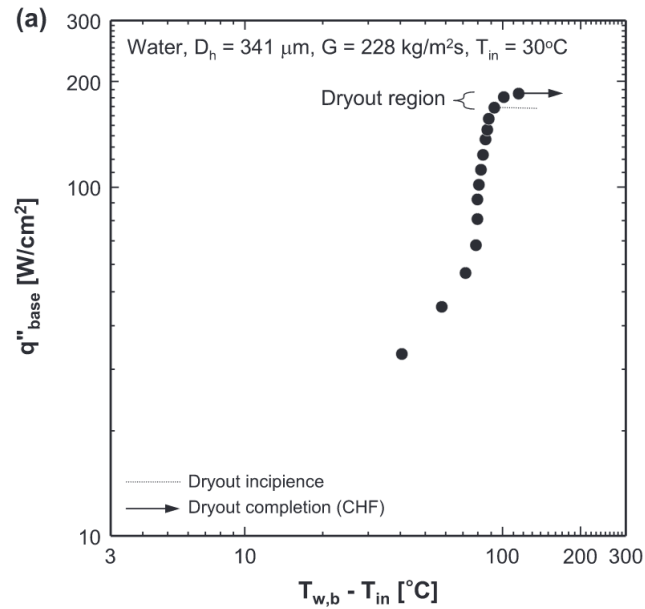


Figure I.18: Évolution de la température en paroi en fonction du flux thermique imposé dans un écoulement en eau, d'après [60]

## Instabilité de Ledinegg

**Description phénoménologique** Pour déterminer les points de fonctionnement d'un système, il suffit de préciser sa courbe de demande (pertes de charge en fonction du débit) et la courbe caractéristique de la pompe qui relie le débit injecté au niveau de pression généré. En superposant ces deux courbes on obtient, à de leurs intersections, les points de fonctionnement du système, qu'ils soient stables ou instables (Cf Fig. I.19). Considérons, dans un premier temps, un point de fonctionnement dans un canal monophasique (courbes grisées). Dans ce cas, le point de fonctionnement (intersection entre la courbe bleue et une courbe grise) est unique, et stable. Effectivement, si l'écoulement est sujet à un incrément de débit, le niveau de pertes de charge augmentera en conséquence (courbe de demande croissante). Mais le niveau de pertes de charge sera supérieur à ce que la pompe peut fournir pour le débit incrémenté. Graphiquement parlant, la pente de la courbe caractéristique de la pompe au point de fonctionnement est inférieure à celle de la courbe de demande. Le débit va donc diminuer jusqu'à retrouver son état d'origine. Dans le cas d'un écoulement diphasique, l'intersection entre la courbe de demande et la courbe de la pompe n'est plus unique, il peut exister jusqu'à 3 points de fonctionnement (A, B et C). Les intersections A et C correspondent à des sorties respectivement vapeur et liquide sur des portions croissantes de la courbe de demande, tandis que le point B est associé à une sortie diphasique, sur une partie décroissante de la courbe de demande. En revanche A et C se retrouvent dans le même cas de figure que l'écoulement monophasique et sont donc stables. Ce n'est pas le cas de B, cette fois-ci la variation des pertes de charge engendrée par un incrément de débit est inférieure à ce qui peut être fourni par la pompe. Le débit au lieu de diminuer augmente, amplifiant encore l'écart entre les pertes de charge générées et le niveau de pression

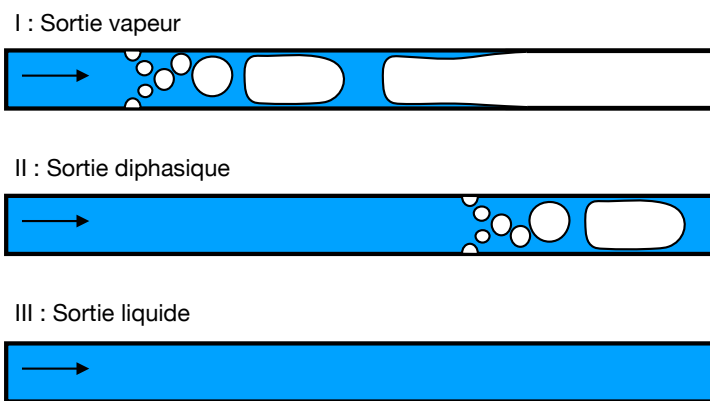
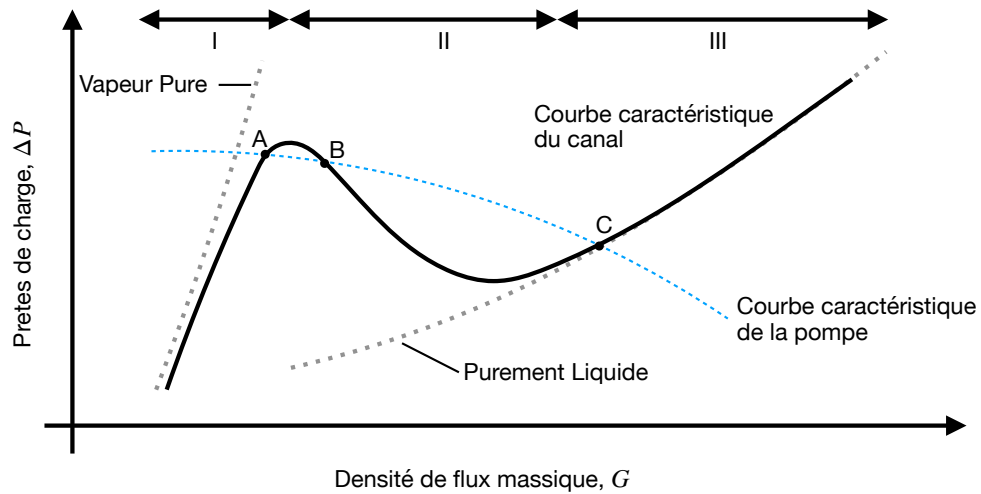


Figure I.19: Schéma de principe d'une courbe de demande et d'une courbe caractéristique de pompe d'après Van Oevelen

de la pompe qui, à son tour, provoque l'augmentation du débit, ceci jusqu'à atteindre le point C (Cf Fig. I.19) : c'est l'excursion de débit, ou instabilité de Ledinegg [61, 56].

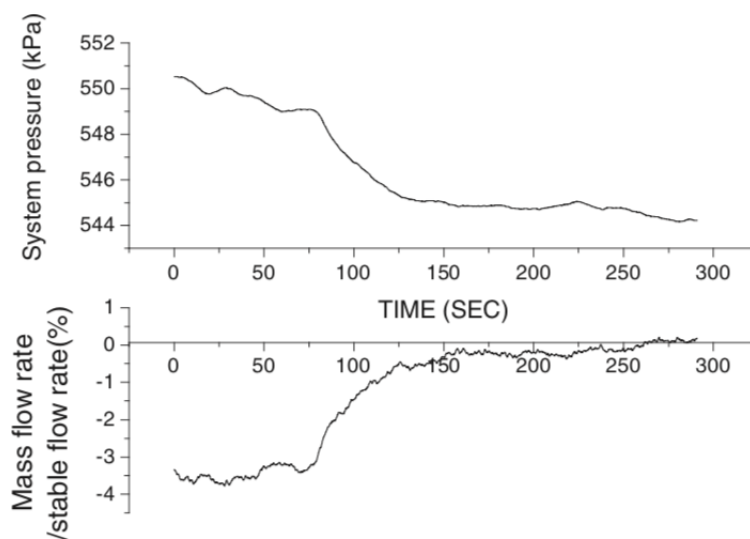


Figure I.20: Instabilité de Ledinegg dans un générateur de vapeur compact par [62]

**Observations expérimentales et modèles** L'instabilité de Ledinegg est une excursion de débit (et de pression) intrinsèquement liée à la forme de la courbe de demande diphasique. La courbe caractéristique du canal peut être désignée de façon équivalente par les expressions courbe de pression interne et courbe de demande. L'"excursion" désigne alors le fait que pour un point de fonctionnement dont la pente de la courbe caractéristique du canal est moindre que celle de la courbe caractéristique de la pompe (I.4), ou courbe de pression externe, l'écoulement va évoluer (voir Fig. I.20) vers un autre point de fonctionnement, lui, stable. Cette condition s'écrit

$$[\text{le point d'équilibre } G^* \text{ est stable}] \Leftrightarrow \frac{\partial \Delta P_{canal}}{\partial G}(G^*) > \frac{\partial \Delta P_{pompe}}{\partial G}(G^*). \quad (\text{I.4})$$

En l'occurrence, un dispositif fonctionnant initialement au point B de la Fig. I.19, qui ne vérifie pas (I.4) va donc voir son écoulement dériver équiprobablement vers l'un des deux points stables (A ou C). A titre d'illustration, les relevés de pression et de débit de [62] montrent une augmentation du débit et une baisse de pression dues à une excursion de débit (analogue à la transition B → C) en Fig. I.20. Un élément d'intérêt lors de l'établissement de la stabilité d'un écoulement est que la courbe de pression externe est généralement décroissante ; avoir une courbe de demande croissante revient alors à avoir un écoulement stable ( $\partial \Delta P_{canal} / \partial G(G^*) > 0$ ). Cette condition, outre son utilisation spécifique dans les réseaux de canaux, revêt ainsi une importance toute particulière à la caractérisation du minimum et du maximum centraux de la courbe de demande. Le critère (I.4) est historiquement attribué aux travaux de [7] qui identifie les excursions de débit et établie la condition de stabilité à la fin des années 1930. Depuis, l'instabilité de Ledinegg fait régulièrement l'objet d'études [63, 56, 57] et a récemment connu un regain d'intérêt lié en partie au développement des centrales vapeur solaire [64, 65] et des technologies de refroidissement de l'électronique (heat-sink) [57, 66]. En effet, une excursion de débit peut être à l'origine du déplacement du point de fonctionnement initialement dimensionné pour des conditions de fonctionnement en dehors des plages de tolérance des matériaux. En particulier un déplacement du B → A conduit à la formation de vapeur associée à des niveaux de température de la paroi bien plus importants. Le nouveau point de fonctionnement atteint à l'issue de l'instabilité de Ledinegg peut conduire l'écoulement dans des conditions propices à la formation d'autres instabilités (absentes au point de fonctionnement initial). C'est par exemple l'objectif des travaux expérimentaux de [31] sur le déclenchement des conditions de CHF post-Ledinegg et des travaux numériques de [67, 68] sur le couplage Ledinegg-DWO.

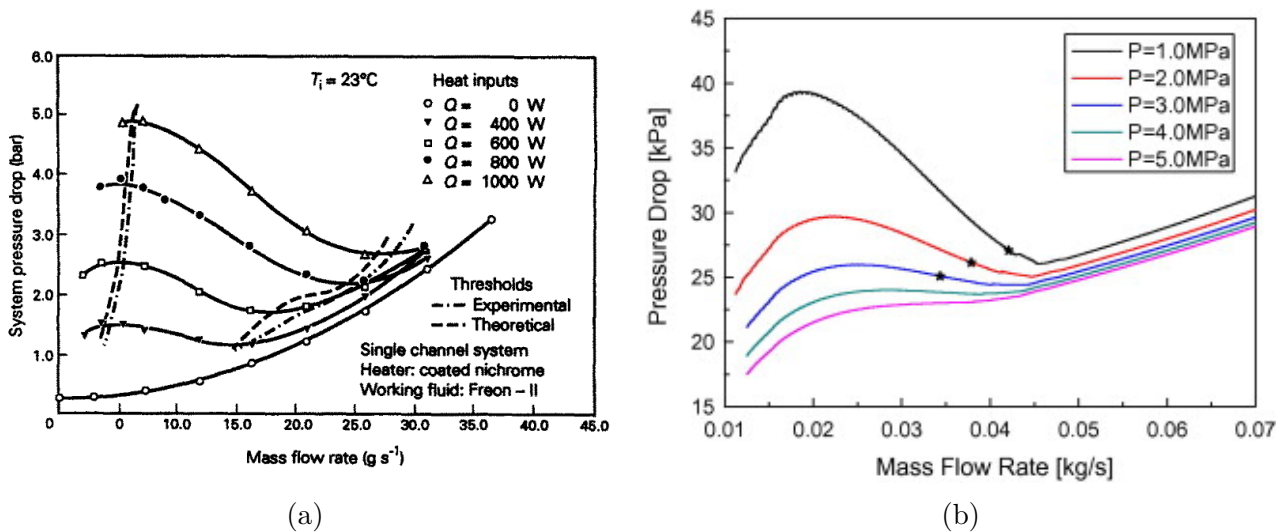


Figure I.21: Courbes de demande de canaux chauffés en fonction de la puissance de chauffe établies expérimentalement par [69], I.21a et produites par le modèle numérique de [70] pour différentes pressions de fonctionnement, I.21b

**Courbe caractéristique du canal** Le critère de stabilité de l'instabilité de Ledinegg s'exprime comme un rapport entre les pentes des courbes de pression interne et externe. La détermination des zones de stabilité est donc, en particulier, intrinsèquement dépendante des variables qui dictent l'allure des courbes de pression interne, *i.e.* la géométrie des canaux, les propriétés du fluide, les conditions aux limites, les modèles d'évaporation, de pertes de charge et d'échanges thermiques ou encore le traitement de la paroi solide [71, 65, 72]. Les effets de deux de ces paramètres sont mis en exergue dans la Fig. I.21. Dans la Fig. I.21a, [69] présente des courbes de demande déduites expérimentalement en faisant varier la puissance du chauffage pariétal. Dans la Fig. I.21b, c'est la sensibilité de la courbe de pression interne à la pression globale du système qui est étudiée par l'intermédiaire d'un modèle numérique [70]. L'impact de ces deux paramètres sur la forme des courbes caractéristiques est indéniable. En effet, la courbe du canal de [70] à 5MPa est entièrement croissante et assure une stabilité inconditionnelle de l'écoulement. *A contrario*, le même système à 1MPa est instable si le débit est compris entre 0.02 et 0.043kg.s<sup>-1</sup> (l'étoile indiquant la limite supérieure de la zone instable). Les paramètres influents ne se limitent toutefois pas aux seules propriétés du canal. Ils peuvent provenir des caractéristiques du système et son environnement global. Ainsi l'introduction de pertes de charge singulières supplémentaires en entrée des canaux, analysée expérimentalement et numériquement [57, 70, 31], peut participer à la stabilisation de l'écoulement en redressant la courbe de demande au dépend de pertes de charge accrues.

La quasi totalité des modèles utilisés pour délimiter la zone de stabilité associée aux excursions de débit s'appuie sur des configurations de canaux à flux pariétal imposé. Les bilans monodimensionnels utilisés lors de ces études se traduisent le plus souvent par une augmentation linéaire de l'enthalpie du fluide (à l'inertie thermique du solide près) au fur et à mesure de la progression du fluide dans le canal [66]. Or, les échanges qui ont lieu dans les échangeurs de chaleur et plus précisément dans les générateurs de vapeur compacts qui nous concernent, sont régis par des transferts thermiques qui ne sauraient être décrits par une augmentation linéaire de l'enthalpie dans le circuit secondaire. **Du fait du couplage thermique, les courbes de demandes associées aux GV compacts ne pourront, *a priori*, pas être obtenues en utilisant, d'une part, des modèles dédiés aux canaux à flux imposé et de l'autre, en omettant les spécificités de l'évaporation dans les micro-canaux.**

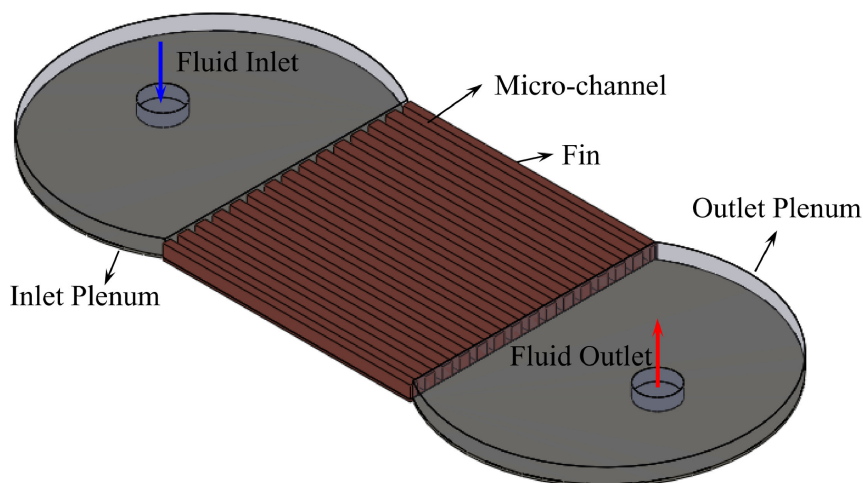


Figure I.22: Schéma d'un heat sink utilisé dans le montage expérimental de [73]

**Réseaux de canaux parallèles** De nombreux systèmes sont composés de canaux disposés parallèlement sous forme de grands réseaux (Cf Fig. I.22). Or, quand le système considéré

ne se limite plus à un unique canal mais qu'il est constitué d'un réseau de canaux parallèles, comme dans le cas des échangeurs compacts, l'instabilité de Ledinegg prend une forme plus complexe du fait des interactions hydrauliques possibles entre les canaux. On parle alors d'un phénomène de mal-distribution (de débit), qu'il faut différencier des *Parallel Channel Instabilities* désignant une instabilité dynamique dans les réseaux de canaux. Expérimentalement, le phénomène de mal-distribution est scruté sur des bancs composés de quelques canaux suivis individuellement [71, 74], l'instrumentation d'un système à grand nombre de canaux étant généralement plus difficilement réalisable tout comme l'interprétation de leurs résultats. Ces expériences permettent néanmoins de valider de manière très satisfaisante les prédictions de stabilité établies théoriquement. [75] parviennent, par exemple, à obtenir, pour un réseau de deux canaux chauffés, des cartes de stabilité en excellent accord avec leurs résultats expérimentaux, Cf Fig. I.23. De manière remarquable, le cas équilibré,  $R_k = 0.5$ , dans lequel le débit

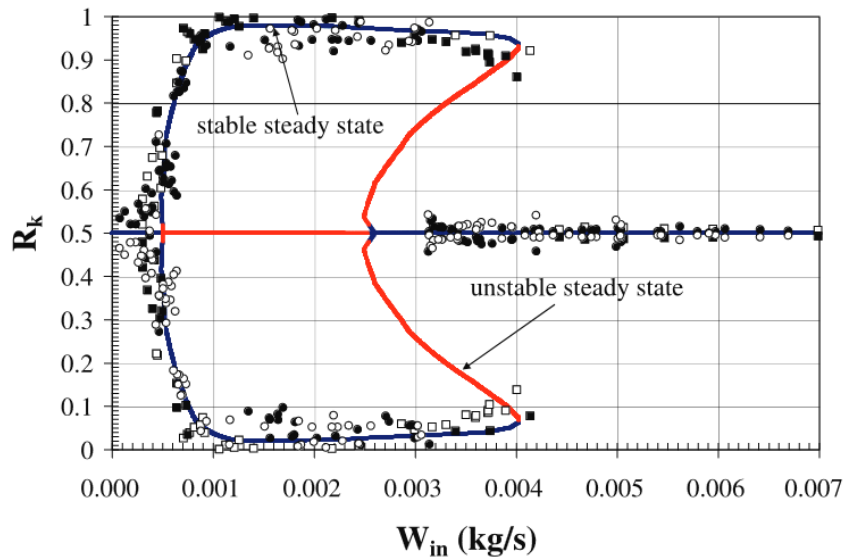


Figure I.23: Points d'équilibre dans un réseau de deux canaux chauffés parallèles. La proportion du débit circulant dans le  $k$ -ième canal est portée en fonction du débit total injecté dans le réseau. Les courbes correspondent aux équilibres obtenus par le modèle numérique quand les points indiquent les états permanents obtenus par l'expérience. [75]

total est réparti équitablement entre les deux canaux, ne correspond pas toujours à un état stable. En effet, pour une gamme de débit total modéré ( $W_{in}$  compris entre 0.0006 et 0.0026) les états stables sont très déséquilibrés : avec un canal en fort sur-débit, par exemple  $R_1 > 0.9$  et le second en fort sous-débit  $R_2 < 0.1$ . Cela se traduit par la coexistence d'un écoulement à fort taux de vide et d'un écoulement liquide et non pas d'un écoulement à taux de vide modéré dans les deux canaux comme on aurait pu le penser. [76] réalisent des montages expérimentaux rassemblant de trois à quatre canaux chauffés parallèles et valident d'une part, le modèle prédictif des comportements instationnaires et montrent, d'autre part, la qualité des cartes de stabilité générées par le modèle numérique. La Fig. I.24a représente les variations des débits dans un système de trois canaux parallèles chauffés. Le débit de chaque canal et la pression aux bornes du réseau sont relevés et reportés pendant une instabilité de mal-distribution de débit ainsi que les déplacements associés des points de fonctionnement sur la courbe de demande. On peut voir sur la sous-figure de gauche que suite à la diminution du débit total entrant, la répartition homogène de débit dans le réseau est désormais un point d'équilibre instable. Le point d'équilibre stable atteint, après l'excursion de débit, compte en effet deux canaux en sur-débit (courbes rouge et verte) par rapport au cas équilibré et un canal en sous-débit (courbe bleue). Cette disjonction est spécialement visible sur la courbe de demande, se référée à Fig. I.24b, où le



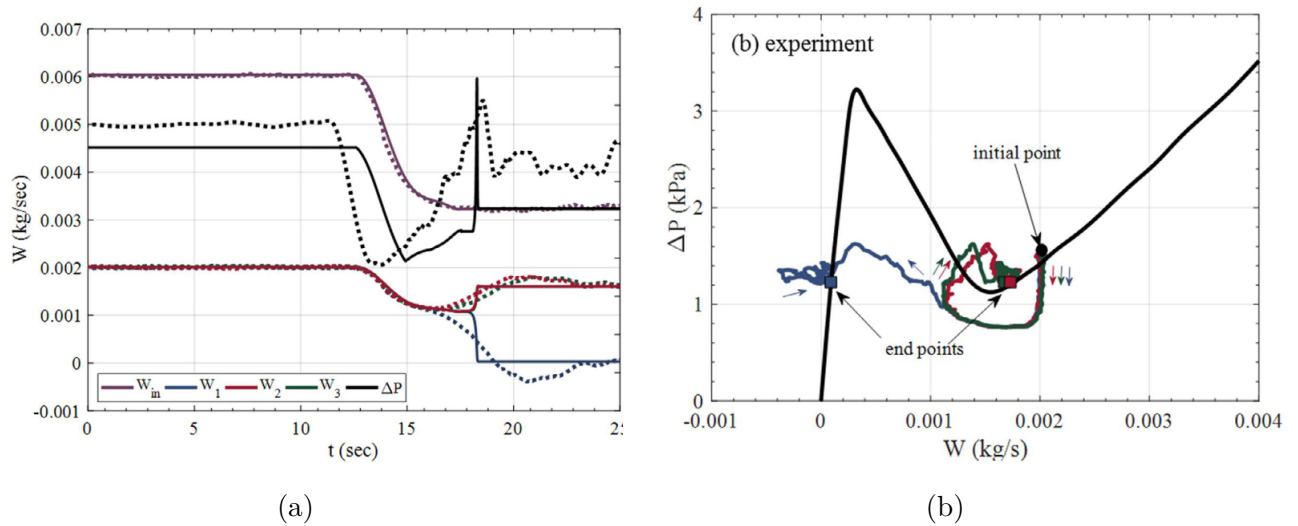


Figure I.24: Phénomène de maldistribution dans un système de 3 canaux parallèles lorsque le débit total est abaissé de 0.006 à 0.0032 kg/s, les évolutions temporelles des débits et pression en (a), alors que les mouvements des canaux sont représentés (b), avec les données de [76] pour un écoulement en eau dans des conduites de 3mm de diamètre

point de fonctionnement du canal 1 (en bleu) s'est séparé des points rouge et vert : l'équilibre post instabilité est ici décrit par un canal 1 à fort taux de vide et deux canaux liquides (2 et 3) et non pas trois canaux diphasiques. Cependant, la méthode de détermination de la stabilité utilisée dans ces travaux est limitée par une complexité qui augmente exponentiellement avec le nombre de canaux [75]. Le modèle présenté par [77] apporte une solution théorique à moindre coût pour ces grands réseaux de canaux, en réduisant le système d'équation à cinq relations indépendamment du nombre de canaux, dans le cas de canaux identiques. L'auteur s'appuie sur une étude linéaire de stabilité et aboutit aux conclusions suivantes :

- La stabilité du système est assurée si les pentes des courbes de demandes sont toutes positives aux points de fonctionnement,
- si deux canaux fonctionnent avec une pente négative le système est instable,
- enfin si un seul canal possède une courbe de demande décroissante, il est nécessaire d'évaluer la plus grande valeur propre du jacobien du système d'équation.

Dans ce dernier cas, Van Oevelen obtient pour un système à débit total imposé une plage de stabilité de plus en plus réduite au fur et mesure que le nombre de canaux augmente (Cf Fig. I.25) pour tendre finalement vers la condition de stabilité imposée pour un système à pression imposée.

Les travaux expérimentaux de [78, 79] présentent un fort intérêt puisqu'ils font partie des rares études ayant observé et caractérisé des instabilités de mal-distribution de débit dans des réseaux de micro-canaux. Leurs résultats confirment l'existence de mal-distribution dans leurs réseaux, avec des déséquilibres très francs entre les deux canaux, allant jusqu'à 96.5% du débit total dans un des canaux. Ces études ont été complétées par un travail mixte de modélisation et d'expérimentation mettant en jeu le même banc expérimental mais connectant thermiquement les canaux [80]. Les auteurs peuvent ainsi isoler l'effet du couplage thermique sur l'instabilité de mal-distribution et trouvent que la présence de la paroi thermique entre les canaux améliore la stabilité du réseau. Le modèle développé par [81] permet de mettre évidence

le rôle majeur joué par la paroi lors du phénomène de mal-distribution, avec une grande capacité à redistribuer l'énergie et contribuant ainsi à fortement diminuer les gradients de température. Les travaux numériques de [82] permettent de considérer non seulement le couplage thermique entre les canaux, mais aussi la présence de passages entre ceux-ci. Les résultats montrent un amoindrissement des déséquilibres liés à l'instabilité de mal-distribution. Ces éléments nous conduisent à considérer les effets de la conduction solide (transverse et longitudinale) comme des éléments clés dans la modélisation des GV compacts.

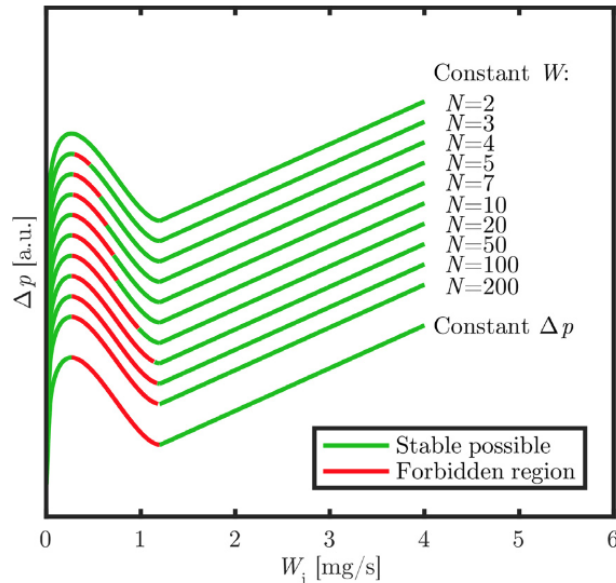


Figure I.25: Plage de stabilité pour un réseau de canaux identiques à nombre de canaux variable, dans le cas où un canal fonctionne dans la partie décroissante de la courbe de demande calculée avec le modèle de [77], les courbes ont été décalées verticalement pour permettre leur lecture

## Conclusion

Sur l'ensemble des instabilités statiques décrites ci-dessus, seules quelques-unes sont susceptibles d'apparaître dans le GV nouvelle génération. De même seule une partie d'entre elles peut impacter considérablement le fonctionnement ou la durée de vie du système. De ce point de vue, en considérant les forts flux thermiques auxquels sont soumis les canaux d'une part et en supposant que l'état de surface des canaux sera compatible avec la formation de *nuclei*, la présence de *vapor burst* peut être a priori écartée. De la même façon, la crise d'ébullition ne nécessite pas une étude renforcée en tant qu'instabilité puisque le système est dimensionné de telle sorte que la crise d'ébullition ne soit pas atteinte dans le GV. En revanche, les méthodes de prédictions de la crise d'ébullition joueront un rôle crucial pour modéliser l'écoulement et par extension décrire les autres instabilités. Enfin, la mal-distribution de débit dans les réseaux de canaux se révèle être potentiellement bien plus néfaste que ces consœurs. Elle demande donc une attention renforcée [83]. La présence de sur et sous-débites affecte la qualité des échanges thermiques, les niveaux de température et de pression. Ces modifications peuvent s'avérer critiques lors de l'étude des *scenarii* accidentels et de fonctionnements dégradés.

## 4.b Instabilités dynamiques

La plupart des travaux de synthèses sur les instabilités diphasiques opposent aux instabilités statiques, brièvement décrites plus haut, des instabilités dites *dynamiques*. Quand une instabilité statique décrit la transition d'un point de fonctionnement instable vers un nouveau point



stable, une instabilité dynamique décrit une oscillation contenue entre plusieurs points de fonctionnement stables. Ce qui est aussi appelé un cycle limite dans le vocabulaire des systèmes dynamiques. Ce type d'instabilité est fréquemment caractérisé par des phénomènes de rétroaction entre le débit, le taux de vide et les pertes de charge. Il nécessite – à ce titre – la prise en compte de processus instationnaires, en opposition aux instabilités statiques [56]. La section qui suit liste les principales instabilités qui constituent cette famille.

## Geysering

Le phénomène de *geysering* est rattaché à l'ébullition d'une colonne de liquide close à sa base. Lorsque cette colonne est soumise à de faibles flux thermiques, le liquide contenu dans la colonne est alors régulièrement éjecté vers l'extérieur. Les travaux précurseurs de [84] expliquent ce phénomène de la manière suivante : lors de la formation des premières bulles de vapeur, du liquide s'échappe au sommet de la colonne, ce qui réduit la pression statique dans la colonne, cette pression réduite favorise la vaporisation supplémentaire du liquide, ce qui diminue à nouveau la pression en poussant le liquide hors de la colonne. En suivant ce raisonnement, une fois initiée, l'ébullition devient de plus en plus intense, et le liquide se retrouve expulsé de la colonne, à ce moment la vapeur rejoint le sommet où, au contact du liquide froid elle se recondense. La colonne à nouveau remplie de liquide froid, se retrouve dans les conditions initiales et le cycle peut se répéter. Cette instabilité est particulièrement étudiée pour les thermosiphons [57] qui peuvent alors être sujet à des comportements instables et perdre en efficacité.

## Oscillations acoustiques

Par oscillations acoustiques, on entend l'ensemble des instabilités qui possèdent des fréquences caractéristiques supérieures à une certaine valeur, en général, 20 Hz. Cette notion intervient dans la revue de [56] lorsque celui-ci cherche à caractériser les instabilités dynamiques en fonction de leur fréquence caractéristique, sachant qu'une grande majorité de ces instabilités (PDO, DWO, ...) occupent des bandes fréquentielles basses, il rassemble sous la notion d'instabilité acoustiques les oscillations de "hautes" fréquences. Ces instabilités impactent en général très peu l'écoulement et se manifestent par la propagation d'ondes acoustiques dans le domaine fluide, c'est par exemple le cas des « *Boiling songs* » relevées par [85]. Ces ondes sont supposées issues de l'effondrement et /ou de la formation des bulles vapeur ou encore de l'impact de gouttes sur un film liquide, elles peuvent également provenir des vibrations induites par la machinerie en contact avec le système, une pompe par exemple [57].

## Density Wave Oscillation (DWO)

Très largement détectées dans les systèmes diphasiques, les DWO ont généré un volume considérable de travaux et demeurent aujourd'hui encore un sujet de recherche actif notamment dans les réseaux de canaux. Avant de décrire plus précisément le fonctionnement de ces instabilités, il faut d'abord préciser que le terme de DWO rassemble plusieurs sous-catégories d'instabilités discernées expérimentalement [86]. [87] précise que ces DWO se différencient par le terme entretenant les oscillations ; celui-ci pouvant être gravitaire, inertiel, ou frictionnel. Alors que les DWO gravitaires sont surtout observées dans des boucles naturelles et/ou munies d'une longue zone verticale non chauffée en aval de la zone active, les DWO inertielles ont été relativement peu traitées et c'est les DWO d'origine frictionnelle qui rassemblent la grande majorité des observations et des études [53]. La dominance des ondes de densité d'origine frictionnelle est telle que le terme générique DWO sous-entend habituellement DWO frictionnelle et c'est pour

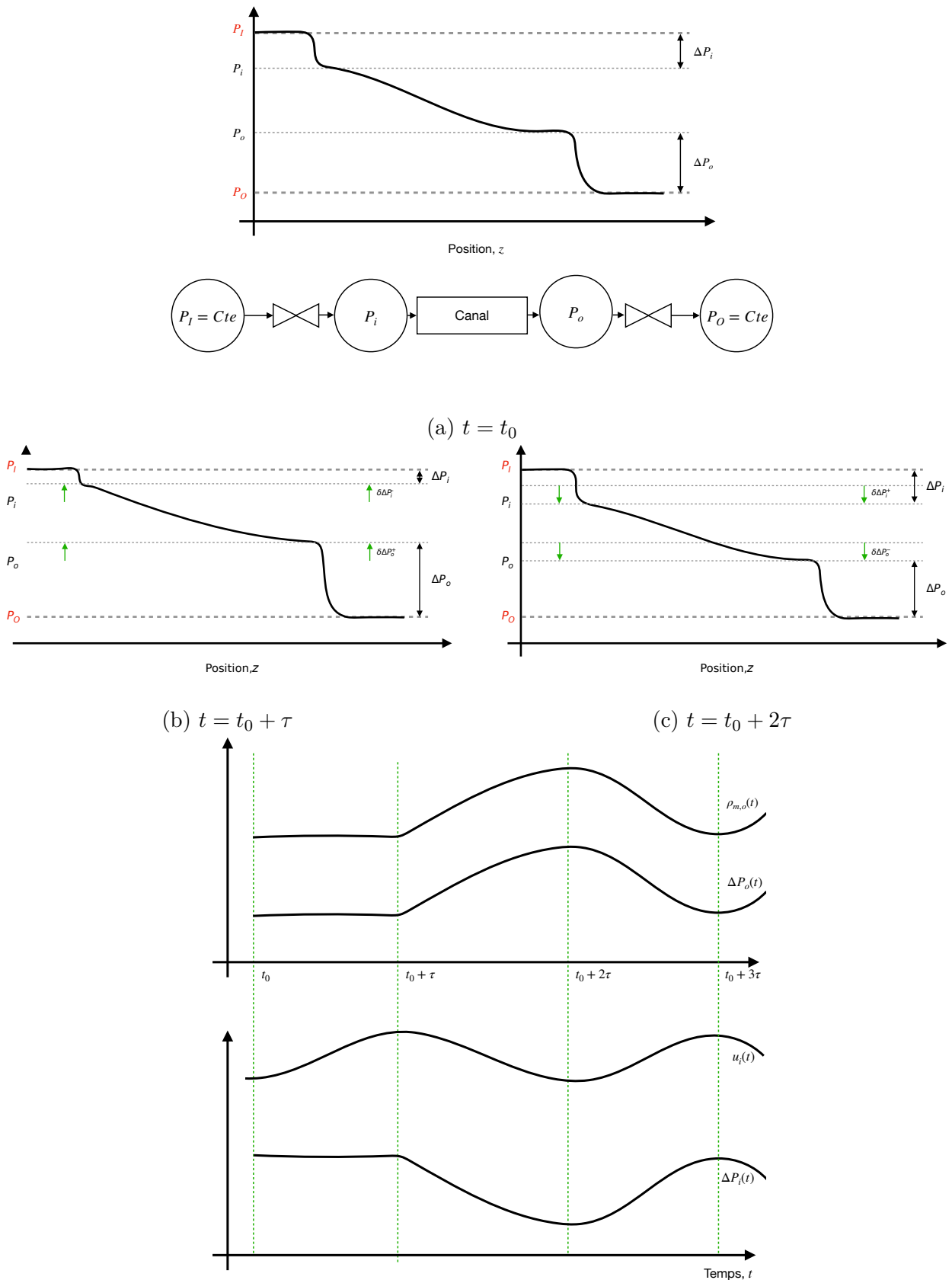
cette même raison que la suite de ce paragraphe se concentre sur cette sous-famille d'ondes de densité.

Les ondes de densité se forment dans les écoulements à fort taux de vide, c'est-à-dire dans la première partie de la courbe de demande d'un système diphasique. En effet, les DWO naissent du délai de propagation entre les variations des pertes de charge liquide et diphasique et nécessitent donc la présence d'une quantité conséquente de vapeur. D'après [63], le processus de formation d'une DWO dans un système à pression imposée, peut se résumer comme suit, en considérant dans un premier temps que les pertes de charges sont majoritairement générées en entrée et en sortie de la conduite chauffée Fig. I.26a :

- une perturbation vient incrémenter la vitesse d'entrée du canal  $\delta u_i^+$
- comme le fluide est accéléré, les pertes de charge augmentent  $\delta \Delta P_o^+$  (écoulement à fort titre), l'accélération du fluide se traduit aussi par une densité plus forte pour une position donnée de la conduite (d'où le nom d'ondes de densité) Fig. I.26b
- le système fonctionnant à pression imposée,  $\delta \Delta P \simeq \delta \Delta P_i + \delta \Delta P_o = 0$ , l'augmentation des pertes de charge induit une augmentation de la pression en entrée de la conduite,  $\delta \Delta P_o^+ = \delta \Delta P_i^-$
- cette montée en pression entraîne, à son tour, une diminution de la vitesse en entrée du canal,  $\delta \Delta P_i^- = \rho_{m,i} \delta u_i^- (1 + K_i)$
- c'est donc une vague de fluide de faible densité qui va parcourir la conduite et abaisser le niveau de pertes de charge en sortie  $\delta \Delta P_o^-$  Fig. I.26c
- l'incrément des pertes de charge en entrée, provoque une nouvelle augmentation de vitesse en entrée et le cycle peut alors se répéter

Les pressions en entrée et en sortie de canal oscillent alors en opposition de phase et les variations de pression en sortie se font en phase avec les variations de densité Fig. I.26d. Une période de DWO se constitue donc par la traversée d'une vague de fluide dense, suivie par une seconde vague de faible densité. Avec cette description la période des ondes de densité se rapproche de deux fois le temps de traversée de la conduite. Ces hypothèses ont été vérifiées expérimentalement, cependant certaines observations notent des périodes beaucoup plus longues lorsque la température du liquide en entrée est basse (fort sous-refroidissement). [88] relève même que, dans ce cas, ce ne sont plus les variations de densité qui contrôlent les variations de pression, mais celles de la vitesse de mélange. [89], réconcilie les deux descriptions en faisant l'hypothèse que les oscillations des DWO sont en réalité une superposition de deux sources distinctes : les vagues de densité et les vagues de vitesses de mélange, dont le poids dépend du niveau de sous-refroidissement. Il conclut que pour des entrées faiblement refroidies, les effets de densité dominent, alors que pour des forts niveaux de sous-refroidissement c'est la variation de vitesse de mélange qui pilote les oscillations.

Outre la relative diversité des ondes de densité observée dans les macro-canaux, les DWO ont aussi été enregistrées dans des micro-canaux mais avec un processus de formation foncièrement différent des DWO observées en macro-canaux [57]. Il a déjà été précisé dans les chapitres précédents que l'ébullition est affectée par la taille réduite des micro-canaux, notamment, la croissance des bulles devient de plus en plus contrainte par les parois de la conduite au fur et à mesure que le diamètre des canaux s'amenuise. Lorsque les bulles de vapeur occupent la quasi totalité de la section de la conduite, la croissance de la bulle se poursuit alors dans la



(d) Suivi des pertes de charge, de la densité et de la vitesse pendant une période de DWO

Figure I.26: Phénoménologie des ondes de densités

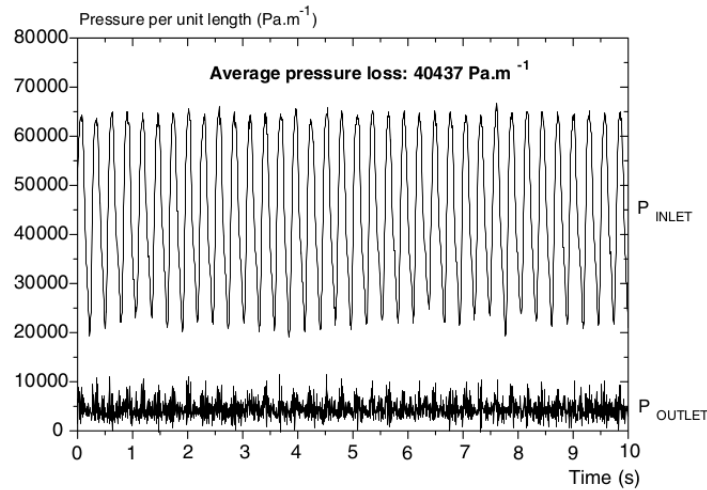


Figure I.27: Relevés de pression pendant l'occurrence de DWO, avec les données de [90], écoulement de n-pentane,  $D_h = 889\mu\text{m}$ ,  $G = 240\text{kg/m}^2/\text{s}$ ,  $q = 9.6\text{W/cm}^2$

direction longitudinale de la conduite. Elle est alimentée directement par la paroi au travers de films liquide et sa taille croît exponentiellement [17]. Durant ces fortes phases de croissance, les bulles de vapeur se développent bien sûr en aval, mais elles peuvent aussi parvenir à remonter l'écoulement du fait de la force d'évaporation. Le retour de vapeur qui s'ensuit affecte fortement le débit dans la conduite et fait monter la pression jusqu'à ce que la bulle vapeur atteigne l'entrée du canal où, au contact du liquide froid, elle commence à se condenser. Ce faisant, le liquide réintègre la conduite et la pression comme le débit se rétablissent à leurs niveaux initiaux [17]. Les auteurs font remarquer que pour que ce type de DWO se produise, le circuit doit comprendre un volume compressible en amont du canal, soit issu d'un réservoir, soit provenant d'incondensables ou de résidus de vapeur piégés dans le système de distribution de liquide en entrée de la conduite chauffée [91]. L'observation de Gedupudi se rapproche des conclusions de [92] qui précise que bien que l'intensité des DWO ne dépend pas de la quantité de volume compressible quand l'existence d'un tel volume amplifie, par contre, les oscillations des DWO.

### Parallel Channel Instability (PCI)

Les PCI doivent être distinguées du phénomène de mal-distribution qui est une instabilité statique reposant sur l'instabilité de Ledinegg tandis que les PCI reposent sur l'occurrence simultanée de DWO dans des réseaux de canaux et sont donc des instabilités dynamiques. En pratique cette instabilité présente des caractéristiques communes aux DWO, et semble être composée par la présence simultanée de DWO qui interagissent entre elles entre les différents canaux [57]. Expérimentalement, plusieurs configurations sont testées (nombre de canaux, chauffage uniforme ou non, connections entre les canaux) et font ressortir des configurations d'écoulement parfois distinctes : des oscillations en phase ou en opposition de phase pour tout ou partie du réseau ont été mises en évidence, en fonction notamment du nombre de canaux [63], [52]. Il faut préciser que les expériences à échelle réelle restent compliquées, car, comme pour les effets de maldistribution de débit, des mesures individuelles sur des canaux de petites dimensions restent un défi à part entière.

### Pressure Drop Oscillation (PDO)

Dans de nombreux systèmes on peut noter la présence d'un volume compressible en amont de la zone chauffée. Ce volume provient le plus souvent d'un réservoir, soit de gaz incondensables

piégés dans le circuit, dans le distributeur d'entrée du réseau de canal par exemple. Ce volume compressible peut interagir avec les instabilités de Ledinegg en ajoutant des effets d'inertie. De cette manière, lorsqu'un point de fonctionnement est susceptible de subir une instabilité de Ledinegg, des extensions de débit croissantes et décroissantes peuvent se succéder formant un cycle auto-entretenu : ce sont les PDO [56]. Les descriptions des PDO introduisent usuellement un réservoir en amont du canal chauffé pour tenir compte des effets de compressibilité [63], le processus des PDO, déclenché par un soudain incrément de débit peut alors se décrire comme suit :

- Étape (a) : Le point de fonctionnement étant instable vis à vis des instabilités de Ledinegg, l'incrément de débit provoque une excursion de débit vers le point B ; comme les pertes de charge diminuent, la pression du réservoir est supérieure à celle de l'écoulement et du liquide quitte le réservoir, voir Fig. I.28.

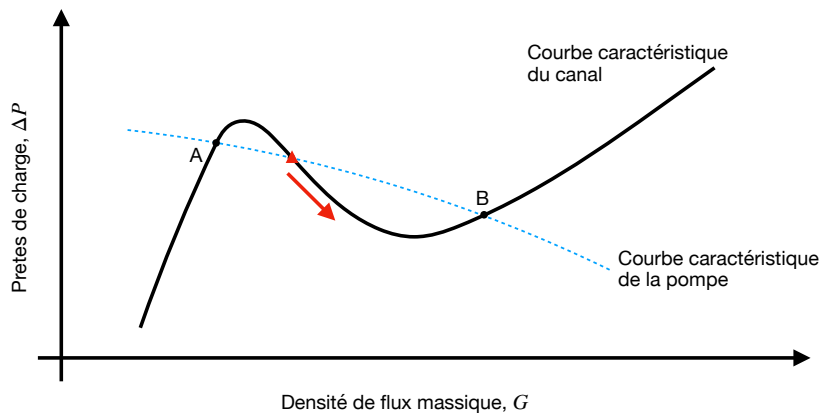


Figure I.28: Etape (a)

- Étape (b) : Avant d'atteindre le point B, les pertes de charge commencent à remonter, l'écart de pression entre le réservoir et l'écoulement s'inverse, mais à cause de l'inertie du liquide, la pression du réservoir descend en dessous de celle de l'écoulement, point B' (Cf Fig. I.29)

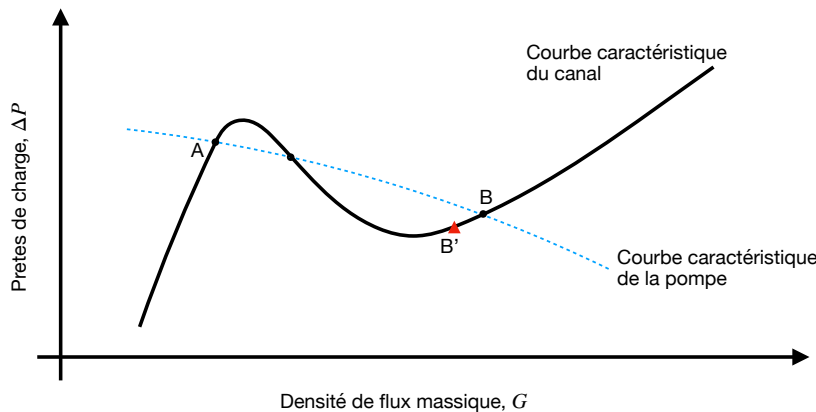


Figure I.29: Etape (b)

- Étape (c) : La pression du réservoir étant inférieure à celle de l'écoulement, le réservoir commence à absorber du liquide, le débit dans le canal diminue donc et déclenche une

nouvelle excursion de débit vers le point A cette fois-ci. Pendant ce temps les pertes de charge augmentent de telle sorte que la pression dans l'écoulement reste supérieure à celle du réservoir (Cf Fig. I.30)

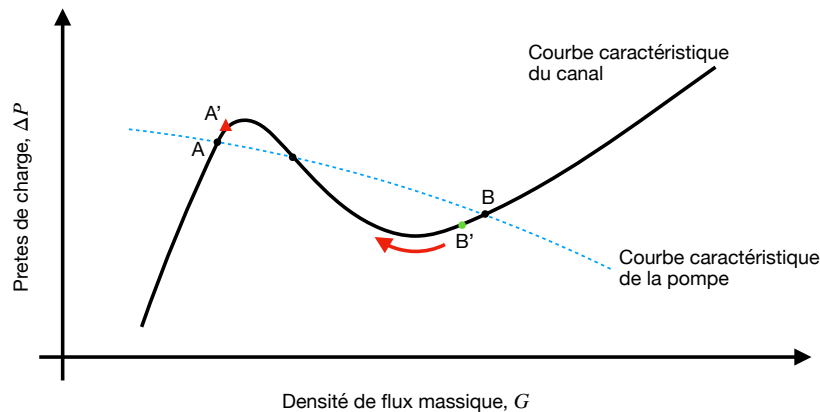


Figure I.30: Etape (c)

- Etape (d) : Avant d'atteindre le point A, les pertes de charge diminuent, inversant l'écart de pression entre le réservoir et l'écoulement, l'inertie du liquide dans le réservoir provoque un léger dépassement de la pression de l'écoulement par celle du réservoir. Comme la pression dans l'écoulement est inférieure à celle du réservoir, un peu de liquide quitte le réservoir et le débit dans le canal augmente. L'excédent de débit induit une nouvelle excursion du point A' vers le point B (Cf Fig. I.31)

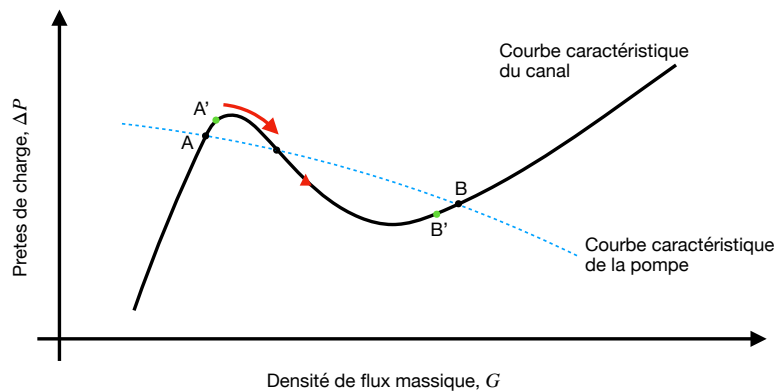


Figure I.31: Etape (d)

- Les quatre étapes précédentes forment ainsi une période de PDO. Puis le processus se répète, voir Fig. I.32.

Dans la description des PDO, l'écoulement oscille entre un écoulement quasi liquide, point B', et un écoulement à fort taux de vide, point A'. Autour du point A', l'écoulement entre dans les conditions permettant de développer des DWO. Cette considération théorique est confirmée sur les bancs expérimentaux dans lesquels les PDO sont très souvent mesurées et superposées à des DWO [58]. Suite à ces observations, quelques auteurs ont analysé les couplages entre les DWO et les PDO d'un point de vue numérique [53] et expérimental [92]. Ces travaux ont permis de conclure que les effets compressibles sont nécessaires pour la formation de DWO superposées à des PDO. Plus précisément, le niveau de compressibilité influe à la fois sur les PDO et sur

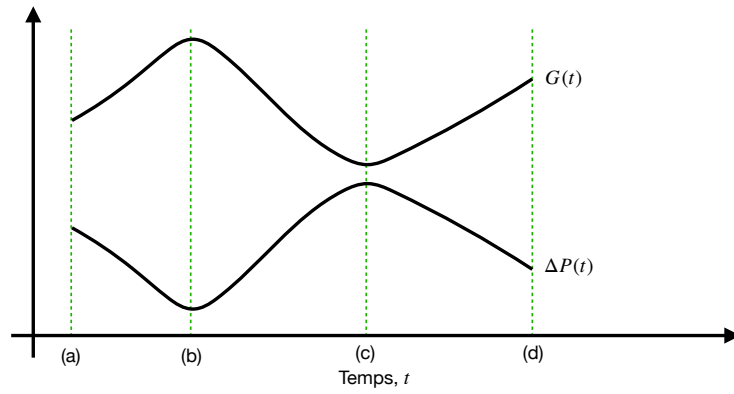


Figure I.32: Variations temporelles des pertes de charge et du débit massique pendant une période de PDO

les DWO lorsque celles-ci se produisent simultanément, par exemple, sur leur intensité (Cf Fig. I.33). Enfin, certains auteurs ont fait l'hypothèse que le démarrage des DWO peut être amorcé par les changements de débit issu des PDO, à l'instar d'une perturbation, à la condition que la variation de débit soit suffisamment brusque.

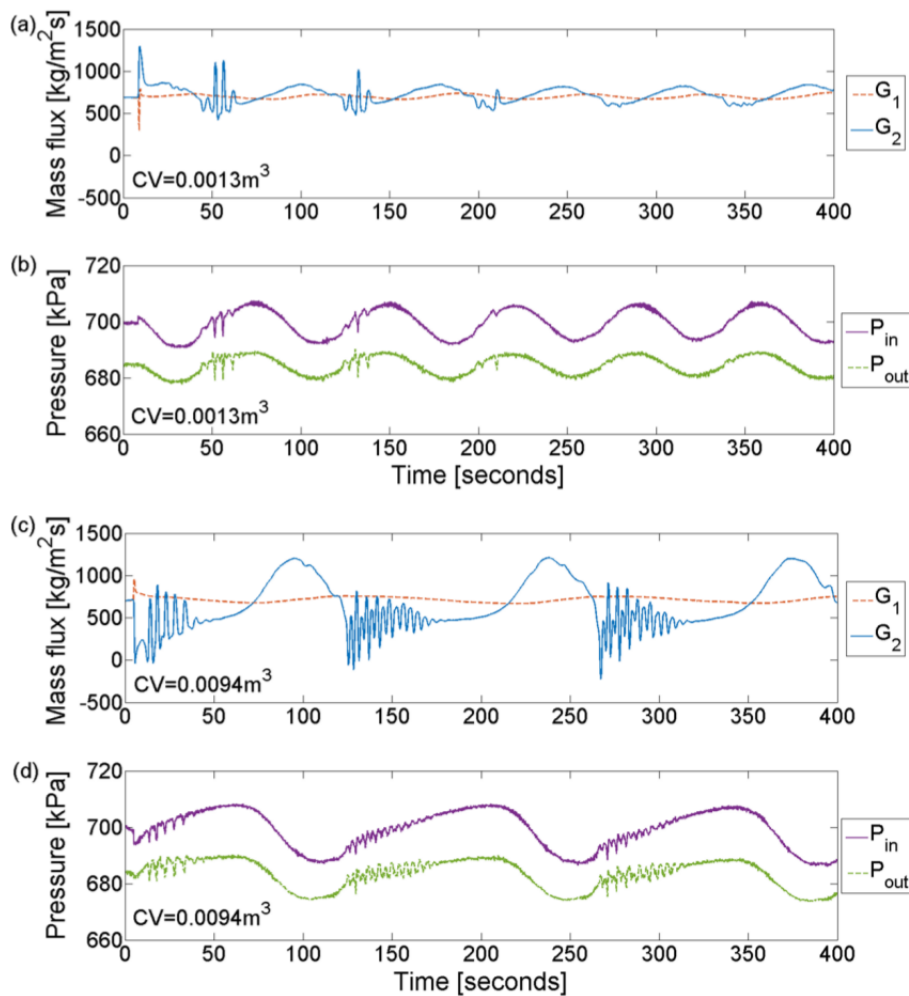


Figure I.33: Mesure de la pression et du débit massique pendant des PDO, pour un volume compressible de  $0.0094m^3$  figures (c,d) et  $0.0013m^3$  (a,b), d'après les données de [92]

Les spécificités du système étudié, *i.e.* la présence d'un grand nombre de canaux de petites dimensions ne semblent pas faire obstacle à la génération de PDO. En effet, des manifestations de PDO ont déjà été identifiées dans des réseaux de canaux en parallèles [93] et dans des micro-canaux. En revanche, les PDO prenant place dans des réseaux de canaux ont toutes montré des canaux oscillant en phase, contrairement au PCI qui peuvent prendre plusieurs configurations [94]. Du point de vue de la taille des canaux, les PDO ont été aussi observées dans les micro-canaux [95]. Il semble alors que, dans ces systèmes, la présence d'un réservoir ou d'un volume compressible ne soit pas obligatoire [94].

## Oscillation Thermique

Les oscillations thermiques ne forment pas en soi une nouvelle catégorie d'instabilité mais sont plutôt à considérer comme un phénomène accompagnant ou faisant partie d'une autre instabilité. Le terme d'oscillation thermique fait en effet référence à l'oscillation périodique de la température de la paroi du canal, mais celle-ci est principalement due au changement de régime d'écoulement dans le canal qui s'accompagne de changements brusques du coefficient d'échange entre le fluide et la paroi, impactant directement le niveau de température lorsque le flux est imposé. L'occurrence de PDO ou de DWO en modifiant cycliquement les régimes d'écoulement peuvent alors tout à fait générer des montées et descentes régulières de la température en paroi [57, 63, 56].

## Conclusion

Dans le même esprit que pour les instabilités statiques, ce paragraphe a pour but d'identifier les instabilités qui modifient de manière conséquente les paramètres du système. A ce titre, la *geysering* qui naît généralement dans des configurations de colonne d'eau, ne concerne que peu notre cas d'étude et les oscillations acoustiques qui ont a priori une action moins marquée sur les systèmes diphasiques que les autres instabilités mentionnées dans ce chapitre, semblent être moins critiques que leurs voisines. Au contraire, les DWO, les PDO et leur pendant en réseaux de canaux parallèles (PCI) peuvent avoir un impact crucial sur le fonctionnement du générateur de vapeur. [96] insiste sur l'intérêt d'anticiper ces cas d'instabilités afin d'éviter ou de prendre en compte la possible génération de cyclage thermique de grande amplitude (oscillations thermiques), l'apparition de vibrations mécaniques (variations de débit et de pression rapides) et bien entendu l'affectation du coefficient d'échange et des pertes de charge, en d'autres termes de l'efficacité de l'échangeur.

## 4.c Synthèse

Le chapitre sur les mécanismes de l'ébullition en écoulement forcé a permis de mettre en lumière les points sur lesquels la description de l'ébullition en micro-canaux nécessite une approche spécifique. Des lois et corrélations adaptées (pertes de charge, coefficient d'échange, prédiction de *burnout*, carte de régime d'écoulement) ont été identifiées pour pouvoir décrire au mieux à la physique de l'évaporation dans les canaux de petites dimensions et permettre une bonne modélisation du GV. Ces outils seront un élément de base pour appréhender la sensibilité du GV aux différentes formes d'instabilités d'écoulement diphasiques. Parmi ces instabilités, les plus intenses et les plus probables ont été sélectionnées (phénomène de mal-distribution, DWO, PDO, PCI), et méritent une approche plus approfondie. En particulier la conception du GV avec de nombreux canaux parallèles, permet le développement d'instabilités spécifiques généralement plus complexes que celles prenant place dans un unique canal. Plus précisément, il serait intéressant de connaître l'effet sur les domaines de stabilité et sur l'intensité des instabilités



de l'augmentation du nombre de canaux et de leurs interactions tant sur le point thermique, qu'hydraulique.

Dans la suite des travaux de thèse, l'attention se porte sur la modélisation des instabilités de Ledinegg et de mal-distribution de débit. La revue de littérature menée plus haut a souligné la nécessité de traiter de façon spécifique le développement de ces instabilités dans les GV compacts. Ceci implique d'incorporer dans les modèles de stabilités, d'une part, les processus physiques propres à l'évaporation en micro-canal, et, d'autre part, les caractéristiques inhérentes aux transferts thermiques dans les échangeurs diphasiques. Les développements ultérieurs visent plus précisément à établir les plages de stabilités associées à l'instabilité de Ledinegg, au sein d'un échangeur-générateur de vapeur compact à plaques. La qualité et la représentativité du modèle de stabilité reposent sur sa capacité à prendre en compte les trois éléments suivants :

1. Être représentatif du phénomène d'évaporation en micro-canal.
2. Appréhender avec une grande fidélité les transferts caractéristiques des échangeurs compacts.
3. Disposer d'une méthode de résolution compatible avec le couplage des deux points précédents.

Le premier point (Cf 1) se traduit par la construction d'un modèle simplifié de vaporisation convective en milieu confiné. L'élaboration de ce dernier est détaillée au chapitre IV. La réponse aux second et troisième points (Cf 2 et 3) s'appuie sur l'utilisation de la méthode des modes de Graetz généralisés. Cette méthodologie particulière permet de résoudre semi-analytiquement, et sous certaines conditions, des problèmes de convection-diffusion (tels que la conservation de l'énergie dans les équations de Navier-Stokes). Un avantage clé de la décomposition en modes de Graetz généralisés réside, en outre, en sa capacité à prendre en compte les trois composantes des flux thermiques entre et au sein de volumes solides et fluides couplés. Le chapitre suivant (voir chapitre II) présente le principe de résolution de cette méthode ainsi que quelques exemples illustratifs. Le chapitre III porte sur l'utilisation de la méthode des modes de Graetz généralisés pour caractériser les transferts thermiques dans des boucles de circulation naturelle. Dans le chapitre IV, la méthode des modes de Graetz généralisés est étendue au modèle développé d'évaporation en milieu confiné. Finalement, le modèle de vaporisation proposé est appliqué à des mono-canaux à flux imposé, au chapitre V, et des échangeurs co-courant, dans le chapitre VI.

# Références

- [1] *Site de l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire*. URL: <https://www.irsn.fr/>.
- [2] Rémi Revellin Jocelyn Bonjour Catherine Colin. “Ébullition. Vaporisation, condensation, fusion, solidification”. In: *Les changements de phase solide-liquide-vapeur*. 2016.
- [3] J. R. Thome John G. Collier. *Convective boiling and condensation*. 1981.
- [4] M.L. Riethmuller J.M. Delhaye M. Giot. *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*. 1981.
- [5] Long sun Tong. *Boiling Heat Transfer and Two-phase Flow*. 1965.
- [6] D. N. Roberts G. F. Hewitt. *Studies of two-phase flow patterns by simultaneous x-ray and fast photography*. Technical Report. Atomic Energy Research Establishment, 1969.
- [7] M. Ledinegg. “Instability of flow during natural and forced circulation”. In: *Die Waerme* (1938).
- [8] T.G. Karayiannis L. Chen Y.S. Tian. “The effect of tube diameter on vertical two-phase flow regimes in small tubes”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2006).
- [9] K. Cornwell P.A. Kew. “Correlations for the prediction of boiling heat transfer in small-diameter channels”. In: *Applied Thermal Engineering* (1997).
- [10] C.C. Shieh C.Y. Yang. “Flow pattern of air–water and two-phase R134a in small circular tubes”. In: *International Journal of Multiphase Flow* (2001).
- [11] B. X. Wang X. F. Peng G. P. Peterson. “FRICTIONAL FLOW CHARACTERISTICS OF WATER FLOWING THROUGH RECTANGULAR MICROCHANNELS”. In: *Experimental Heat Transfer: A Journal of Thermal Energy Generation, Transport, Storage, and Conversion* (1994).
- [12] H. K. Tam Q. Wen A. J. Ghajar L. M. Tam. “The Effect of Inner Surface Roughness on Friction Factor in Horizontal Micro-tubes”. In: *2010 2nd International Conference on Mechanical and Electronics Engineering*. 2010.
- [13] Satish G. Kandlikar. “Two-Phase Flow Patterns, Pressure Drop, and Heat Transfer during Boiling in Minichannel Flow Passages of Compact Evaporators”. In: *Heat Transfer Engineering* (2002).
- [14] W.J. Grande S.G. Kandlikar. “Evolution of microchannel flow passages – thermohydraulic performance and fabrication technology”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2003).
- [15] A Ullmann N Brauner. “The Prediction of Flow Boiling Maps in Minichannels”. In: *4th Japanese–European Two-Phase Flow Group Meeting*. 2006.
- [16] S. I. Abdel-Khalik D. L. Sadowski K. A. Triplett S M Ghiaasiaan. “Gas–liquid two-phase flow in microchannels Part I: two-phase flow patterns”. In: *International Journal of Multiphase Flow* (1999).

- [17] Run-gang Yan Liang-ming Pan Hui He Peng-fei Li. “Modeling of reversal flow and pressure fluctuation in rectangular microchannel”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2016).
- [18] I. E. Idel’cik. *Memento des pertes de charge*. Moscou, 1960.
- [19] M. A. Kedzierski. “Microchannel heat transfer, pressure drop and macro prediction methods”. In: *2nd International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*. 2003.
- [20] Afshin J.Ghajar Hou Kuan Tam Lap Mou Tam. “Effect of inlet geometries and heating on the entrance and fully-developed friction factors in the laminar and transition regions of a horizontal tube”. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* (2011).
- [21] Satish G. Kandlikar M. E. Steinke. “Single-phase liquid friction factors in microchannels”. In: *International Journal of Thermal Sciences* (2006).
- [22] Y. L. He W. Q. Tao G. H. Tang Z. Li. “Experimental Study of Compressibility, Roughness and Rarefaction Influences on Microchannel Flow”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2007).
- [23] S. G. Kandlikar T. P. Brackbill. “Effect of Sawtooth Roughness on Pressure Drop and Turbulent Transition in Microchannels”. In: *Heat Transfer Engineering* (2007).
- [24] M. Guglielmi G. Zummo G. P. Celata M. Cumo. “Experimental Investigation of Hydraulic and Single-Phase Heat Transfer in 0.130-mm Capillary Tube”. In: *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering* (2002).
- [25] Andres L. Carrano James B. Taylor Satish G. Kandlikar Derek Schmitt. “Characterization of surface roughness effects on pressure drop in single-phase flow in minichannels”. In: *PHYSICS OF FLUIDS* (2005).
- [26] Yitai Ma Baomin Dai Minxia Li. “Effect of surface roughness on liquid friction and transition characteristics in micro- and mini-channels”. In: *Applied Thermal Engineering* (2014).
- [27] S. M. Zivi. “Estimation of Steady-State Steam Void-Fraction by Means of the Principle of Minimum Entropy Production”. In: *Journal of Heat Transfer* (1964).
- [28] S. G. Bankoff. “A variable density single-fluid model for two-phase flow with particular reference to steam-water flow”. In: *Journal of Heat Transfer* (1960).
- [29] D. R. H. Beattie. “A note on the calculation of two-phase pressure losses”. In: *Nuclear Engineering and Design* (1973).
- [30] R.C. Martinelli R.W. Lockhart. “Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes”. In: *Chem. Eng. Progr.* (1949).
- [31] T. Hibiki K. Mishima. “Some characteristics of air-water two-phase flow in small diameter vertical tubes”. In: *International Journal of Multiphase Flow* (1996).
- [32] D.C. Lu C.C. Wang C.S. Chiang. “Visual observation of two-phase flow pattern of R-22, R-134a, and R-407C in a 6.5-mm smooth tube”. In: *Exp. Thermal Fluid Sci.* (1997).
- [33] Liping Cao Sadık Kakaç. “Analysis of convective two-phase flow instabilities in vertical and horizontal in-tube boiling systems”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2009).
- [34] H. T. Liu. “Parametric study of two-phase flow instabilities in a force-convective boiling upflow system”. PhD thesis. University of Miami, 1989.

- [35] Björn Palm Wahib Owhaib Claudi martin-callizo. “Two-Phase Flow Pressure Drop of R-134A in a Vertical Circular Mini/Micro Channel”. In: *ASME 2008 6th International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels*. 2008.
- [36] A. Balakrishnan M. Venkatesan S. Das. “Effect of diameter on two-phase pressure drop in narrow tubes”. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* (2011).
- [37] Chi-Chung Wang Ing Youn Chen Kai-Shing Yang. “An empirical correlation for two-phase frictional performance in small diameter tubes”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2002).
- [38] Issam Mudawar Sung-Min Kim. “Review of databases and predictive methods for pressure drop in adiabatic, condensing and boiling mini/micro-channel flows”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2014).
- [39] A.L. London R.K. Shah. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data*. 1978.
- [40] L. M. K. Boelter F. W. Dittus. “Heat transfer in automobile radiators of the tubular type”. In: *University of California Publications in Engineering* (1930).
- [41] Chia-Jung Hsu. “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”. In: *Nuclear Science and Engineering* (1981).
- [42] Issam Mudawar Sung-Min Kim. “Universal approach to predicting saturated flow boiling heat transfer in mini/micro-channels – Part II. Two-phase heat transfer coefficient”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2013).
- [43] Romain Charnay. “EXPERIMENTAL STUDY OF FLOW BOILING IN HORIZONTAL MINICHANNELS AT HIGH SATURATION TEMPERATURE”. PhD thesis. INSA Lyon, 2014.
- [44] Issam Mudawar Sung-Min Kim. “Universal approach to predicting saturated flow boiling heat transfer in mini/micro-channels – Part I. Dryout incipience quality”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2013).
- [45] J.E. Hesselgreaves. *Compact Heat Exchangers: Selection, Design and Operation*. 2011.
- [46] S.H. Black G.M. Lazarek. “Evaporative heat transfer, pressure drop and critical heat flux in a small vertical tube with R-113”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (1982).
- [47] L.M. Grossman V.E. Schrock. “Forced convection boiling in tubes”. In: *Nucl. Sci. Eng.* (1962).
- [48] Z. Wu W. Li. “A general correlation for evaporative heat transfer in micro/mini-channels”. In: *Int. J. Heat Mass Transfer* (2010).
- [49] J. Bonjour P. Haberschill M. Ducoulombier S. Colasson. “Carbon dioxide flow boiling in a single microchannel – Part II: Heat transfer”. In: *Exp. Therm. Fluid Sci.* (2011).
- [50] Eiji Hihara Shizuo Saitoh Hirofumi Daiguji. “Effect of tube diameter on boiling heat transfer of R-134a in horizontal small-diameter tubes”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2005).
- [51] Norihiro Inoue Daisuke Jige Kentaro Sagawa. “Effect of tube diameter on boiling heat transfer and flow characteristic of refrigerant R32 in horizontal small-diameter tubes”. In: *International Journal of Refrigeration* (2017).
- [52] L. Tadrist. “Review on two-phase flow instabilities in narrow spaces”. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* (2007).

- [53] Leonardo Carlos Ruspini. “Experimental and numerical investigation on two-phase flow”. PhD thesis. NTNU, 2013.
- [54] S. Kakaç H. Yuncu O. T. Yildirim. “Two-phase flow instabilities in a horizontal single boiling channel”. In: *Applied Scientific Research* (1991).
- [55] G. Yadigaroglu. “Two-phase flow instabilities and propagation phenomena”. In: *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*. 1981.
- [56] L.S. Tong J.A . Boure A .E. Bergles. “Review of two-phase flow instability”. In: *Nucl. Eng. Des.* (1973).
- [57] Issam Mudawar Lucas E. O'Neill. “Review of two-phase flow instabilities in macro- and micro-channel systems”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2020).
- [58] S. Kakac M. M. Padki H. T. Liu. “Two-phase flow pressure-drop type and thermal oscillations”. In: *Int. J. Heat and Fluid Flow* (1991).
- [59] Arthur E. Bergles Zahid H. Ayub. “Nucleate Pool Boiling Curve Hysteresis for GEWA-T Surfaces in Saturated R-113”. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* (1990).
- [60] I. Mudawar W. Qu. “Measurement and correlation of critical heat flux in two-phase micro-channel heat sinks”. In: *Int. J. Heat Mass Transfer* (2004).
- [61] Agung Julius Yoav Peles Michael K. Jensen TieJun Zhang John T. Wen. “Stability analysis and maldistribution control of two-phase flow in parallel evaporating channels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2011).
- [62] Hee Cheon NO Chang Wook Shin. “Experimental study for pressure drop and flow instability of two-phase flow in the PCHE-type steam generator for SMRs”. In: *Nuclear Engineering and Design* (2017).
- [63] S. Kakac. “A Review of two-phase flow dynamic instabilities in tube boiling systems”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2008).
- [64] Markus Eck and Tobias Hirsch. “Dynamics and control of parabolic trough collector loops with direct steam generation”. In: *Solar Energy* 81.2 (Feb. 1, 2007), pp. 268–279. ISSN: 0038-092X. DOI: [10.1016/j.solener.2006.01.008](https://doi.org/10.1016/j.solener.2006.01.008). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X06000636>.
- [65] Sivan Natan, Dvora Barnea, and Yehuda Taitel. “Direct steam generation in parallel pipes”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 29.11 (Nov. 1, 2003), pp. 1669–1683. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2003.07.002](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2003.07.002). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932203001423>.
- [66] Tiejun Zhang et al. “Ledinegg instability in microchannels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.25 (Dec. 1, 2009), pp. 5661–5674. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.09.008](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.09.008). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001793100900489X>.
- [67] Vikas Pandey and Suneet Singh. “Characterization of stability limits of Ledinegg instability and density wave oscillations for two-phase flow in natural circulation loops”. In: *Chemical Engineering Science* 168 (Aug. 31, 2017), pp. 204–224. ISSN: 0009-2509. DOI: [10.1016/j.ces.2017.04.041](https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.04.041). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250917302865>.
- [68] Vishal Garg et al. “A unified approach to simulate thermal hydraulic instabilities and the mutual interactions using transient distributed model”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 168 (Nov. 1, 2023), p. 104567. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2023.104567](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2023.104567). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030193222300188X>.

- [69] M.M. Padki et al. “Bifurcation analysis of pressure-drop oscillations and the Ledinegg instability”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 35.2 (Feb. 1, 1992), pp. 525–532. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/0017-9310\(92\)90287-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90287-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931092902873>.
- [70] Genglei Xia, Minjun Peng, and Yun Guo. “Research of two-phase flow instability in parallel narrow multi-channel system”. In: *Annals of Nuclear Energy* 48 (Oct. 1, 2012), pp. 1–16. ISSN: 0306-4549. DOI: [10.1016/j.anucene.2012.05.014](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2012.05.014). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306454912001788>.
- [71] Y. Taitel U Minzer D. Barnea. “Evaporation in Parallel Pipes–Splitting Characteristics”. In: *International Journal of Multiphase Flow* (2004).
- [72] R.H. Whittle and R. Forgan. “A correlation for the minima in the pressure drop versus flow-rate curves for sub-cooled water flowing in narrow heated channels”. In: *Nuclear Engineering and Design* 6.1 (Aug. 1, 1967), pp. 89–99. ISSN: 0029-5493. DOI: [10.1016/0029-5493\(67\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0029-5493(67)90049-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029549367900490>.
- [73] Gaurav Hedau et al. “Experimental and numerical investigation of the effect of number of parallel microchannels on flow boiling heat transfer”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 158 (Sept. 2020), p. 119973. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119973](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119973). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931020303197>.
- [74] D. Barnea Y. Taitel. “ransient Solution for Flow of Evaporating Fluid in Parallel Pipes Using Analysis Based on Flow Patterns”. In: *International Journal of Multiphase Flow* (2011).
- [75] Dvora Barnea, Michael Simkhis, and Yehuda Taitel. “Transient data for flow of evaporating fluid in parallel mini pipes and comparison with theoretical simulations”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 77 (Dec. 1, 2015), pp. 58–64. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2015.08.005](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2015.08.005). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932215001779>.
- [76] Yehuda Taitel Ron Rene Hayat Dvora Barnea. “Transient flow of evaporating fluid in multiple parallel pipes, theory and experiments”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2020).
- [77] Suresh V. Garimella Tijs Van Oevelen Justin A. Weibel. “Predicting two-phase flow distribution and stability in systems with many parallel heated channels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2017).
- [78] Todd A. Kingston, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “Ledinegg instability-induced temperature excursion between thermally isolated, heated parallel microchannels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 132 (Apr. 1, 2019), pp. 550–556. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.017](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.017). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931018337086>.
- [79] Ankur Miglani, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “Measurement of flow maldistribution induced by the Ledinegg instability during boiling in thermally isolated parallel microchannels”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 139 (June 1, 2021), p. 103644. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103644](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103644). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932221000926>.



- [80] Ankur Miglani, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “An experimental investigation of the effect of thermal coupling between parallel microchannels undergoing boiling on the Ledinegg instability-induced flow maldistribution”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 139 (June 1, 2021), p. 103536. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103536](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103536). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932220306479>.
- [81] Tijs Van Oevelen, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “The effect of lateral thermal coupling between parallel microchannels on two-phase flow distribution”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 124 (Sept. 1, 2018), pp. 769–781. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.073](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.073). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017356272>.
- [82] Qi Jin. “Limit cycle analysis and maldistribution mitigation for multi-channel cooling system”. In: *Applied Thermal Engineering* 204 (Mar. 5, 2022), p. 117982. ISSN: 1359-4311. DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2021.117982](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.117982). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431121014022>.
- [83] J. M. Robertson John Jr Kitto. “Effects of Maldistribution of Flow on Heat Transfer Equipment Performance”. In: *Heat Transfer Engineering* (1989).
- [84] P. Griffith. “Geysering in Liquid Filled Lines”. In: *ASME-AICHE Heat Transfer Conference*. 1962.
- [85] H. Firstenberg. *Boiling songs and associated mechanical vibratins*. Technical Report. Nuclear Development Corp. of America, 1960.
- [86] Tetsuo KOBORI Kenji FUKUDA. “Classification of Two-Phase Flow Instability by Density Wave Oscillation Model”. In: *Journal of Nuclear Science and Technology* (1979).
- [87] A. Mihaila J. Boure. “OSCILLATIONS AUTO · ENTRETENUES DANS LES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES CHAUFFÉS”. In: *Comité technique de la Société Hydrotechnique de France*. 1967.
- [88] Rizwan-Uddin. “On density-wave oscillations in two-phase flows”. In: *International Journal of Multiphase Flow* (1994).
- [89] J.C. Ferreri W. Ambrosini P. Di Marco. “Linear and nonlinear analysis of density-wave instability phenomena”. In: *Heat and Tech* (2000).
- [90] L. Tadrist D. Brutin F. Topin. “Experimental study of unsteady convective boiling in heated minichannels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2003).
- [91] T.G. Karayiannis D.B.R. Kenning Y.Y. Yan S. Gedupudi Y.Q. Zub. “Confined bubble growth during flow boiling in a mini/micro-channel of rectangular cross-section Part I: Experiments and 1-D modelling”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2010).
- [92] Carlos A. Dorao Il Woong Park Maria Fernandino. “On the occurrence of superimposed density wave oscillations on pressure drop oscillations and the influence of a compressible volume”. In: *AIP ADVANCES* (2018).
- [93] T.N. Veziroglu S. Kakac K. Akyuzlu. “Sustained boiling flow instabilities in a cross-connected four parallel system”. In: *J. Pure Appl. Sci.* (1977).
- [94] C. A. Dorao E. Manavela Chiapero M. Fernandino. “Review on pressure drop oscillations in boiling systems”. In: *NuclearEngineeringandDesign* (2012).
- [95] I. Mudawar W. Qu. “Measurement and prediction of pressure drop in two-phase micro-channel heat sinks”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2003).

- [96] M. Colombo M. Ricotti D. Papini A. Cammi. “On Density Wave Instability Phenomena – Modelling and Experimental Investigation”. In: (2011).



## Chapitre II

### Méthode des modes de Graetz généralisés

# Unidimensionnal forced convection generalized Graetz solutions

M. Rudkiewicz<sup>a,b</sup>, G. Debenest<sup>b</sup>, F. Plouraboué<sup>b</sup>, F. David<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*EDF Lab Chatou, 6 Quai Watier, 78400 Chatou*

<sup>b</sup>*IMFT, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France*

---

## Abstract

Heat exchangers are essential in daily life and industries, but evolving demands, like miniaturization and electrification, challenge traditional designs. The Generalized Graetz Decomposition method offers a powerful solution, capable of efficiently modeling heat exchangers, even under these new conditions. Unlike conventional approaches, it generates analytical expressions that require minimal meshing, reducing computational costs. It accounts for all diffusion components, facilitating realistic modeling of low-velocity flows. This method provides a versatile tool for various boundary conditions. The software based on this method simplifies heat exchanger analysis, enables parametric studies, and has the potential to help heat exchanger design, impacting both research and industry.

*Keywords:* heat transfer, numerical method, Generalized Graetz decomposition

---

## Metadata

### 1. Motivation and significance

Heat exchangers are ubiquitous in many various industrial applications. They find applications across multiple domains, including transportation, electronic devices, cooling and heating systems, chemistry, and the agri-food industry [1, 2]. These devices are fundamental for efficiently transferring thermal energy within systems of all sizes. In the current era of energy management and optimization, having precise tools for describing and predicting their behavior is of utmost importance. This is why, since numerical simulations are faster and less costly than empirical experimental essays, they are

---

*Email address:* `martin.rudkiewicz@toulouse-inp.fr` ()

<b>Nr.</b>	<b>Code metadata description</b>	<b>Please fill in this column</b>
C1	Current code version	v1.0
C2	Permanent link to code/repository used for this code version	For example: <a href="https://github.com/mozart/mozart2">https://github.com/mozart/mozart2</a>
C3	Permanent link to Reproducible Capsule	For example: <a href="https://codeocean.com/capsule/0270963/tree/v1">https://codeocean.com/capsule/0270963/tree/v1</a>
C4	Legal Code License	
C5	Code versioning system used	none
C6	Software code languages, tools, and services used	Maple
C7	Compilation requirements, operating environments & dependencies	
C8	If available Link to developer documentation/manual	For example: <a href="http://mozart.github.io/documentation/">http://mozart.github.io/documentation/</a>
C9	Support email for questions	

Table 1: Code metadata (mandatory)

used in many cases in the design strategy [3, 4], although not always being able to account for every physical mechanisms involved.

Extensive analytical, numerical, and experimental research has been dedicated to the study of heat exchangers. However, recent trends in miniaturization and electrification have led to an increase in the heat flux that heat exchangers must manage, often surpassing the capabilities of traditional technologies. As a result, new designs have emerged, featuring compact dimensions, smaller footprints [5], and innovative phase change flows [6].

The generalized Graetz decomposition is a semi-analytical method rooted in the classic Graetz problem [7]. It is designed to solve stationary convection-diffusion problems within extruded-like domains, which are challenging to compute accurately due to their highly hyperbolic nature. These problems can typically be solved analytically in the convection dominated limit -neglecting longitudinal diffusion-, or numerically using discretization methods, which can be computationally intensive. For instance, achieving accurate results with finite volume or finite difference methods often hinges on high-quality meshing, which can be demanding for high-velocity flows, domains with high aspect ratios, or large volumes. The Generalized Graetz Decomposition offers several advantages, chief among them being the generation of an analytical expression that requires, at most, a 2D meshing of the extruded base and remains independent of the domain size in terms of computational cost [8]. Moreover, unlike other analytical solutions that are

restricted to high Péclet flows, it accounts for all range of diffusion [9], facilitating a realistic visualization of heat transfers in scenarios with low-velocity flows and conjugated problems. Lastly, this method equips users with a versatile tool for solving various spatially-dependent boundary conditions, including Neumann, Dirichlet, and Robin-Fourier conditions, in contrast to other solutions tailored to specific boundary conditions [10]. The subsequent sections will delve into the resolution of the Navier-Stokes energy equation using the Generalized Graetz Decomposition and its practical implementation in various configurations.

## 2. Software description

### 2.1. Generalized Graetz theory

In the Generalized Graetz method, the domain  $\mathcal{V}$  is defined as  $\mathcal{V} = \Omega \times [a, b]$ , where  $[a$  and  $b$  are real numbers. In other words, the volume is obtained by extending the base  $\Omega$  along a specific direction,  $z$ , over a range  $[a, b]$ , which could be infinite, i.e.  $a$  or  $b \rightarrow \pm\infty$ . Analytical expressions for eigenmodes (3) are feasible only for ducts consisting of concentric layers or plate geometries formed by stacking infinite planes.

Under the following assumptions:

1. The domain is invariant in the  $z$  direction.
2. The solution is stationary.
3. Velocity is parallel to the  $z$  direction.
4. Thermodynamic properties (including velocity profile) do not depend on the  $z$  direction.
5. Lateral boundary conditions are either non-homogeneous Dirichlet or Neumann and depend only on  $z$ .

The stationary dimensionless energy convection-diffusion problem is expressed as:

$$\frac{1}{2}w_f(r)\frac{\partial T_f}{\partial z} - \frac{1}{\text{Pe}}\Delta T_f = 0 \quad (1)$$

In (1), the spatial variables, namely the radial and axial coordinates, the length of the domain, and the outer radius,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{L}$ , and  $\tilde{R}_0$ , are rescaled by the inner radius  $\tilde{R}$  (or the half height of the channel). The non-dimensional velocity  $w_f$  is defined with respect to the mean velocity  $\tilde{W}_s$ , as  $w_f(r) = \tilde{W}(r)/\tilde{W}_s$ . For Poiseuille flow,  $w_f$  takes the form  $w_f = a(1 - r^2)$ , with  $a = 2$  for circular ducts and  $3/2$  for plate channels. The Péclet number  $Pe = \tilde{W}_s 2\tilde{R}/\alpha_f$  compares convection effects to thermal conduction, with thermal diffusivity defined as  $\alpha_f = k_f/(\rho c_p)$ . The dimensionless fluid temperature  $T_f$

is expressed as  $T_f = (\tilde{T} - \tilde{T}_0) / \Delta\tilde{T}_h$ , where  $\Delta\tilde{T}_h$  and  $\tilde{T}_0$  represent characteristic temperature differences and temperatures in the problem, respectively. The non-dimensional thermal conductivity is defined as  $\kappa = \tilde{k} / k_f$ . Within each compartment of the domain, properties may change, particularly the velocity, which is set to 0 inside solid compartments.

The solution to equation (1) relies on the properties of the associated operator, which guarantees the existence of an orthogonal basis of eigenvectors. With  $T_i$  as the  $i$ -th eigenmode and  $\lambda_i$  as the associated eigenvalue, the temperature field is given by:

$$T(r, z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^*} \alpha_i c_i(z) T_i(r) e^{\lambda_i z} + f(z) + \sum_{i \geq 0} x_i T_i(r) e^{\lambda_i(z - z_{in})} + \sum_{i < 0} x_i T_i(r) e^{\lambda_i(z - z_{out})} \quad (2)$$

Eigenmodes are divided into two groups based on the sign of their eigenvalues: positive eigenvalues correspond to upstream modes with negative indexes, while negative eigenvalues correspond to downstream modes with positive values of  $i$ . Due to symmetric lateral boundary conditions, eigenmodes depend solely on the radial coordinate [9]. Furthermore, as shown in [8], these eigenmodes can be expressed as analytical functions of eigenvalues  $\lambda_i$  involving closure functions  $t_p$ , as:

$$\forall i \in \mathbb{Z}^* : T_i(r) = \sum_{p=0}^{\infty} t_p(r) \lambda_i^p \quad (3)$$

The closure functions can be evaluated recursively following the relation (4), while conditions between each compartment are imposed by the continuity of thermal heat flux and temperature. In the  $j$ -th compartment,

$$\Delta t_p = \frac{\text{Pe}_j}{2} w_f(r) t_{p-1} - t_{p-2}, \quad (4)$$

with in each compartment,  $\text{Pe}_j = \tilde{W}_{Sj} 2\tilde{R} / \alpha_j$ . The closure functions are determined by fluid flow characteristics, material properties, compartment organization, and lateral boundary conditions, ensuring the temperature field's shape and satisfaction of equation (1). In equation (4), an infinite sum is mathematically prescribed, but numerically only a finite number  $N$  of closure functions is computed, defining the method's order. At this stage, the amplitudes  $x_i$  remain unknown, since the inlet and outlet boundary conditions are not yet specified.

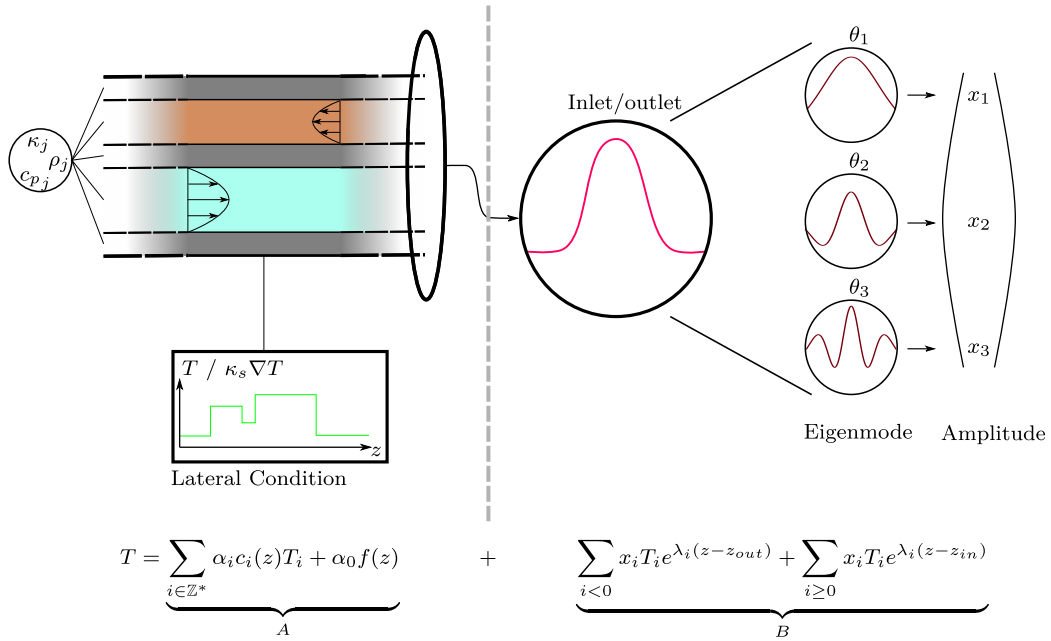


Figure 1: Structure of the temperature field

## 2.2. Resolution

To determine the coefficients  $x_i$ , appropriate values satisfying the inlet and outlet conditions, a unique cost function is minimized, as considered in [8]. This cost function is specific to a given class of inlet/outlet conditions. Several examples illustrating its formulation are presented in Section 3.

Fig. 1 illustrates the structure of the temperature decomposition in a counter-current heat exchanger with five compartments (two fluid compartments and three solid walls). The temperature field is divided into two components: Part A, which accounts for the impact of lateral boundary conditions, and Part B, which enforces conditions at the inlet and outlet of the domain. Part B is further subdivided into two sums: negative indices control the behavior at the outlet of the domain, and positive indices govern the inlet conditions. Similar to a Fourier decomposition, the amplitudes correspond to the projection of the conditions onto the basis of eigenvectors.

## 2.3. Software architecture

The software is organized into five sections:

1. *Configuration and Setup*: in this initial section, users can specify various parameters, including the number of compartments, their dimensions and arrangement, the various velocity profiles, and material properties (thermal conductivity, thermal capacity, and density). Addi-

tionally, boundary conditions and numerical parameters, such as the method's order and digital precision, are prescribed.

2. *Spectrum and Eigenmodes Computation*: this section is dedicated to computing the spectrum and eigenmodes. It begins by solving the differential equation (4) from solving the closure functions in each compartments. The eigenvalues are then deduced from these closure functions, considering the type of lateral boundary conditions. Finally, the eigenmodes are assembled as in (3).
3.  *$\alpha_i$  and  $c_i(z)$  evaluation*: calculate  $\alpha_i$  and  $c_i(z)$ , based on the Dirichlet or Neumann nature of the lateral conditions. These quantities involve convolution products which can be computed analytically if the longitudinal applied boundary conditions are given analytically.
4. *Cost Function Minimization*: regarding this step, the software constructs and minimizes the cost function, resulting in the determination of the missing amplitudes  $x_i$ . The minimization of this cost function leads to the resolution of a linear system defined over the amplitude vector  $\mathbf{x}$ , i.e,  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{B}$ . Notably, the matrix  $\mathbf{M}$  depend on cross-projections between the eigenmodes and can be evaluated whatever the applied inlet or outlet conditions (thus it can be pre-computed and stored if one would like to explore a lot of inlet/outlet conditions). On the contrary vector  $\mathbf{B}$  depends on the projections between the eigenmodes and applied inlet/outlet conditions.
5. *Temperature Field Assembly*: this final section assembles the temperature field, making it ready for post-processing, exportation, and grid evaluation, since the code provides a mesh-less analytical solution.

### 3. Illustrative examples

To illustrate the range of possibilities within the field, we provide detailed results in three examples. The first two examples present local temperature profiles within channels, with the first one involving a channel without solid walls and the second featuring a channel with solid walls. The third example delves into global measurements, specifically the characterization of the efficiency of a co-current heat exchanger.

#### 3.1. Imposing a Gaussian inlet temperature profile

This example demonstrates how to apply an inlet boundary condition, such as a Gaussian temperature profile, to a straightforward circular semi-infinite channel with fixed wall temperature. In this case, the channel extends

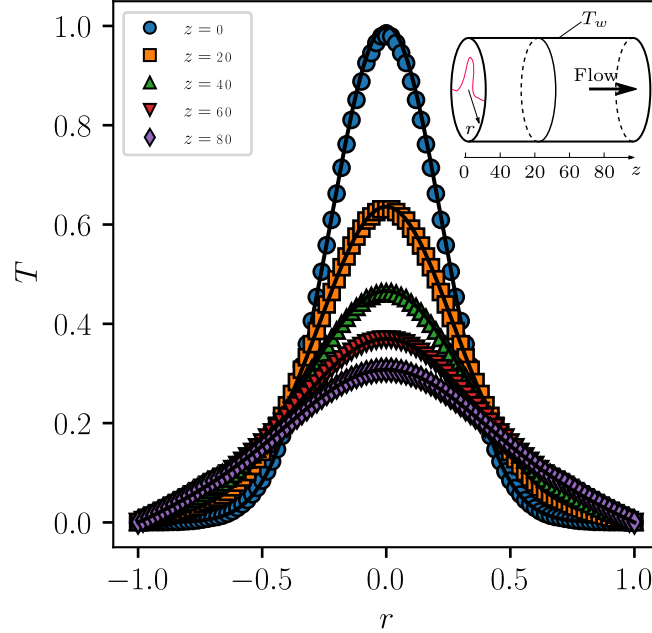


Figure 2: Temperature profiles in a circular tube with prescribed wall and inlet temperatures. Black lines represent the results obtained using the Graetz model, while the symbols illustrate those obtained through a CFD simulation performed with Code\_Saturne.

from  $z \in [0, +\infty[$ . A laminar velocity profile is imposed within this single-compartment domain, and the wall temperature  $\tilde{T}_w$  remains constant, serving as a reference temperature.

Consequently, the non-dimensional temperature field adheres to the following conditions:  $T(r, 0) = \exp(-10r^2)$  and  $T(1, z) = 0$ . The outlet of the channel at  $z \rightarrow +\infty$  doesn't necessitate a specific boundary condition, and its temperature  $T_\infty$  is an outcome of the problem.

For a Dirichlet lateral boundary condition [10], we have the following equations:

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \mathbb{Z}^* : \alpha_i &= -\frac{2\pi R}{\lambda_i^2} \frac{dT_i}{dr}(R) ; \alpha_0 = 1 ; f(z) = T_w = 0 \\
 \forall i > 0 : c_i(z) &= -\int_0^z \frac{dT_w}{dz} e^{\lambda_i(z-\xi)} d\xi \\
 \forall i < 0 : c_i(z) &= \int_z^{+\infty} \frac{dT_w}{dz} e^{\lambda_i(z-\xi)} d\xi
 \end{aligned} \tag{5}$$

In this particular case, part A of the temperature field (discussed in Fig.



1) is reduced to zero. The determination of the amplitudes  $x_i$  in part B is based on the minimization of the cost function  $F(\mathbf{x}) = \int_0^1 r(T(r,0) - T_{in})^2 dr$ . Figure Fig. 2 presents successive radial temperature profiles within the channel at increasing axial positions. The results obtained with the generalized Graetz model are overlaid with those from a CFD simulation of the same configuration, demonstrating excellent agreement between the two methods. Both indicate the widening of the Gaussian profile along the channel due to thermal radial diffusion.

### 3.2. Effect of Solid Wall Thermal Conductivity

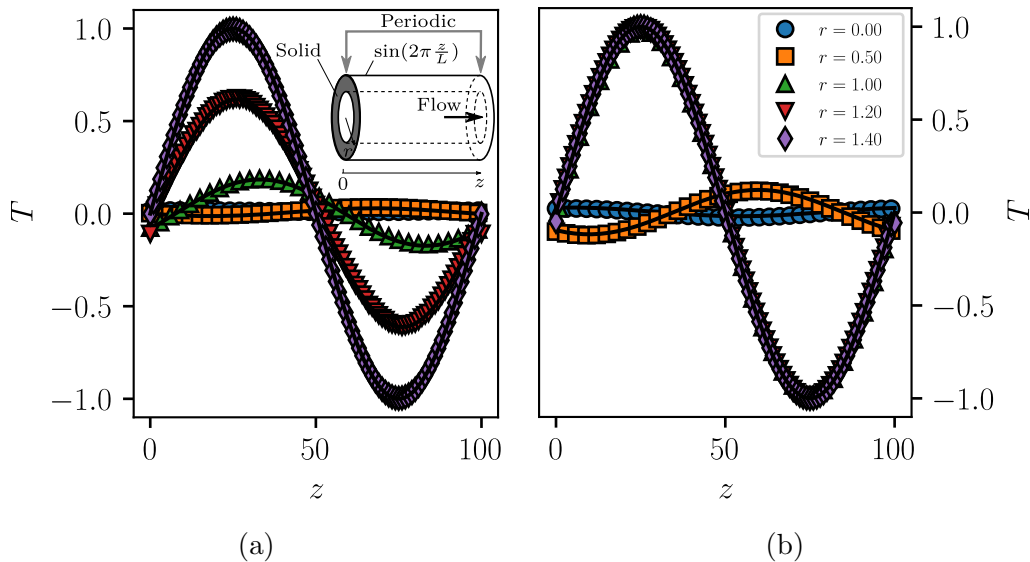


Figure 3: Temperature profiles in a circular channel with a solid wall,  $1 \leq r \leq 1.4$ , the temperature is imposed at the outer extremity of the wall,  $r = 1.4$ , with a periodic condition in  $z$ . Black lines highlight the profiles obtained through the Graetz method ; the symbols, those with Code\_Saturne. Two configurations are considered with the same conditions except for the thermal conductivity ratio between the fluid and the solid wall,  $\kappa_s$ , respectively imposed at two values,  $\kappa_s = 0.25$ , in 3a and  $\kappa_s = 678$ , in 3b.

In this example, we demonstrate the use of a  $z$ -dependent lateral boundary condition within a two-compartment domain. The domain consists of a finite circular channel with a solid wall. At the outer border of the wall ( $r = R_0$ ), a sinusoidal temperature profile,  $\tilde{T}_w = \Delta\tilde{T}_h \sin\left(\frac{2\pi\tilde{z}}{L}\right) + \tilde{T}_0$ , is imposed, while a periodic condition is applied between the outlet and the inlet of the tube at  $z = 0$  and  $z = L$ . The inner compartment ( $0 \leq r \leq 1$ ) features fluid flow according to the Poiseuille law (but any analytical radial dependence for the longitudinal velocity field can be chosen), while the outer compartment

( $1 \leq r \leq R_0$ ) represents the solid wall. Using the non-dimensional expression of the lateral condition,  $T_w = \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)$  and the relations detailed in (5), the  $c_i(z)$  are no longer equal to zero.

For the B part of the temperature field, the amplitudes can be determined analytically [11]:

$$\begin{aligned} \forall i \geq 0 : x_i &= \alpha_i \frac{c_i(L) - c_i(0)}{1 - e^{\lambda_i L}} \\ \forall i < 0 : x_i &= \alpha_i \frac{c_i(L) - c_i(0)}{e^{-\lambda_i L} - 1} \end{aligned} \tag{6}$$

In Figure Fig. 3, we present five temperature profiles along the channel for two values of the wall thermal conductivity. Generally, the temperature variation in the fluid (blue and orange symbols) remains slightly lower than in the solid (red and purple symbols). On the left, a significant radial temperature gradient within the wall is observed, which is due to a relatively insulating material. On the other side, when the wall is an excellent thermal conductor, it is nearly impossible to distinguish the temperature profile in the solid, indicating that the temperature is almost constant in the radial direction. As in Section 3.1, a comparison between the results obtained with the Graetz methodology and those from a CFD simulation shows a very good agreement.

### 3.3. Characterizing the efficiency of a parallel co-current heat exchanger

This example shows the implementation of a finite co-current heat exchanger with semi-infinite inlet and outlet channels. In practice, specifying inlet and outlet conditions can be a challenging aspect of simulating heat exchangers. While it is straightforward to impose a temperature profile, it often doesn't account for the effect of thermal diffusion, which can alter the imposed temperature. To address this concern, inlet conditions need to be placed at a significant upstream position, which, in turn, increases the domain's volume and computational cost in the case of CFD simulations. Outlet conditions can be equally challenging, as the shape of the outlet temperature profile is typically a result of the simulation and cannot be prescribed in advance. The common solution is to extend the outlet of the heat exchanger far enough from the heat exchanger to allow the temperature profile to establish. In contrast, solving this configuration with the generalized Graetz decomposition incurs only a modest additional cost, as the domain's length does not significantly influence the numerical cost of the Graetz method [12].

In this configuration, the heat exchanger comprises two fluid channels,  $-2H_{II} - h \leq y \leq -h$  and  $h \leq y \leq 2H_I + h$ , separated by a solid wall ( $-h \leq y \leq h$ ).

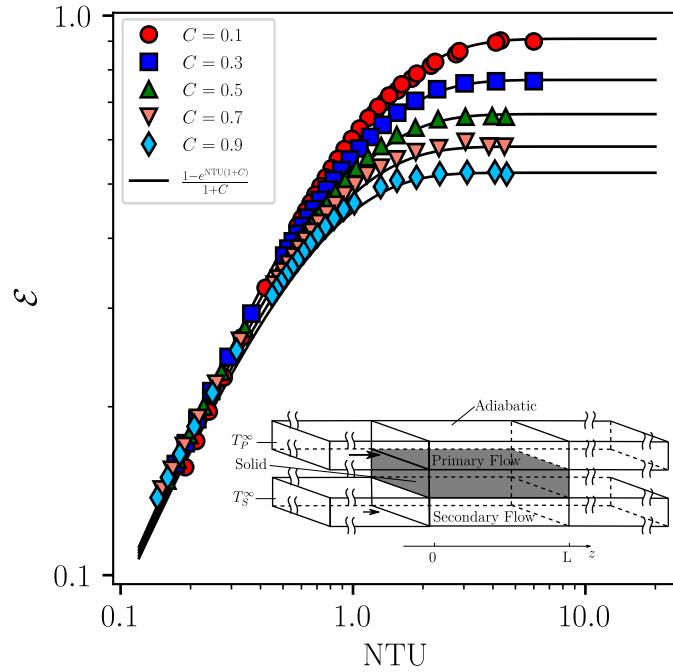


Figure 4: Variation in the efficiency of a co-current plate heat exchanger versus the Number of Transfer Units (NTU) for different mass flow ratios between 0.1 and 0.9. Black lines represent the analytical solution for a 2D co-current heat exchanger, while the symbols depict the results achieved with the generalized Graetz decomposition.

The channel with the higher mass flow is identified as the primary channel, and the other as the secondary channel. The semi-infinite tubes that enter and exit the heat exchanger, along with the heat exchanger's extremities, are insulated. Inlet temperatures are imposed at  $-\infty$  for both the primary,  $T_P^\infty$ , and the secondary,  $T_S^\infty$ , channels.

For Neumann lateral boundary conditions, the coefficients  $\alpha_i$  and  $c_i$  are determined as follows [10]:

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{Z}^* : \alpha_i &= \frac{2\pi R}{\lambda_i} T_i(R) ; \alpha_0 = \frac{\mathcal{P}}{\int_{-2H_{II}-h}^{2H_I+h} \frac{Pe w_f}{2\kappa} dy} ; f(z) = \int \varphi_w dz = 0 \\
\forall i > 0 : c_i(z) &= - \int_0^z \varphi_w e^{\lambda_i(z-\xi)} d\xi \\
\forall i < 0 : c_i(z) &= \int_z^{+\infty} \varphi_w e^{\lambda_i(z-\xi)} d\xi \\
\text{with } \mathcal{P} &= \int_{\partial\Omega} dl, \text{ and } \varphi_w = \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\partial\Omega}
\end{aligned} \tag{7}$$

Since the lateral boundaries are adiabatic, the A contribution to the temperature field equals zero. However, the amplitudes' determination is more complex in this case. In addition to the inlet conditions at  $-\infty$ , there are four junctions between the semi-infinite channels and the inlets and outlets of the heat exchanger. Each junction enforces the continuity of temperature and heat flux, resulting in a cost function:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_0^I \cup \Gamma_0^{II}} (T_u - T_{exc})^2 + \left( \frac{\partial T_u}{\partial z} - \frac{\partial T_{exc}}{\partial z} \right)^2 d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_0^s} \left( \kappa_s \frac{\partial T_{exc}}{\partial z} \right)^2 d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_L^I \cup \Gamma_L^{II}} (T_{exc} - T_d)^2 + \left( \frac{\partial T_{exc}}{\partial z} - \frac{\partial T_d}{\partial z} \right)^2 d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_L^s} \left( \kappa_s \frac{\partial T_{exc}}{\partial z} \right)^2 d\Omega
\end{aligned} \tag{8}$$

Here,  $\Gamma_{0/L}^{I/II/s}$  represents the normal section to  $z$  of one of the compartments at either  $z = 0$  or  $z = L$ . The subscripts  $u$ ,  $d$ , and  $exc$  correspond to upstream, downstream, and heat exchanger, respectively, and denote the volumes placed before  $z \in ]-\infty, 0]$ , after  $z \in [L, +\infty[$ , and within the heat exchanger  $z \in [0, L]$ . Figure Fig. 4 illustrates the efficiency of the heat exchanger,  $\mathcal{E} = (\langle T_{II} \rangle(L) - T_{II}^\infty) / (T_I^\infty - T_{II}^\infty)$ , where  $\langle T_{II} \rangle = \int_{\Gamma_{II}} w_f T d\Omega / \int_{\Gamma_{II}} w_f d\Omega$ , as a function of the Number of Transfer Units (NTU), defined by (9), for various mass flow ratios,  $C = (\tilde{W}_{SII} \tilde{H}_{II}) / (\tilde{W}_{SI} \tilde{H}_I)$ . The results obtained with the generalized Graetz decomposition are in excellent agreement with the analytical solution [1].

$$NTU = \int_0^L \frac{\kappa_s \frac{\partial T}{\partial y}}{\langle T_I \rangle - \langle T_{II} \rangle} dz \frac{k_f}{\tilde{\rho}_{II} \tilde{W}_{SII} \Gamma^{II} \tilde{c}_{pII}} \quad (9)$$

#### 4. Impact and conclusion

The implementation of a semi-analytical solution to solve general 2D conjugated heat transfer convection/diffusion has been presented and illustrated. This methodology has undergone successful validation against computational fluid dynamics (CFD) simulations and analytical solutions across a range of configurations.

The analytical expression for temperature, derived from this software, facilitates straightforward and versatile post-processing. This becomes particularly valuable when evaluating temperature gradients or collecting global measurements based on integrated variables. Notably, the Generalized Graetz modes method proves highly adaptable for deducing simplified expressions or asymptotic behaviors in specific scenarios [13].

One distinctive advantage of the Generalized Graetz Decomposition is the elimination of a meshing stage, which significantly reduces the computational cost, making it especially attractive for large domains. This feature proves invaluable when dealing with the imposition of inlet and outlet conditions. However, it's essential to acknowledge that the quality of these boundary conditions directly hinges on the method's order and the complexity of the conditions. For instance, imposing a variety of conditions in a multi-compartment domain may necessitate a higher-order method compared to a single-compartment setup.

Another key attribute of the Graetz Method is its capacity to account for thermal conduction along the flow direction. This capability is crucial for modeling entrance regions, thick solid walls, and low Péclet number flows – characteristics commonly encountered in miniaturized or micro-scale heat transfer problems.

Furthermore, the Generalized Graetz Modes offer a notable advantage in terms of computational efficiency, making it an attractive option for parametric optimization processes, code validations and the generation of extensive datasets solutions. The combination of low computational time and analytical rigor positions this method as a powerful tool in the field of thermal analysis.

#### Acknowledgements

We thank Dr. C. Pierre from UPPA Univ., Pau, France, for sharing his maple code that we have adapted for various configurations.

## References

- [1] R. Shah, D. Sekulic, *Fundamentals of Heat Exchanger Design*, Wiley, 2003.
- [2] Q. Li, G. Flamant, X. Yuan, P. Neveu, L. Luo, Compact heat exchangers: A review and future applications for a new generation of high temperature solar receivers, *Renew. sustain. energy rev.* 15 (9) (2011) 4855–4875.
- [3] M. M. Aslam Bhutta, N. Hayat, M. H. Bashir, A. R. Khan, K. N. Ahmad, S. Khan, Cfd applications in various heat exchangers design: A review, *Appl. Therm. Eng.* 32 (2012) 1–12.
- [4] C. Abeykoon, Compact heat exchangers – design and optimization with cfd, *Int. J. Heat Mass Tran.* 146 (2020) 118766.
- [5] J. E. Hesselgreaves, R. Law, D. A. Reay, Chapter 1 - introduction, in: J. E. Hesselgreaves, R. Law, D. A. Reay (Eds.), *Compact Heat Exchangers (Second Edition)*, second edition Edition, Butterworth-Heinemann, 2017, pp. 1–33.
- [6] A. E. Bergles, *High-flux processes through enhanced heat transfer*, 2003.
- [7] L. Graetz, Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten, *Annalen der Physik* 261 (7) (1885) 337–357.  
URL <https://doi.org/10.1002/andp.18852610702>
- [8] C. Pierre, J. Bouyssier, F. de Gournay, F. Plouraboué, Numerical computation of 3d heat transfer in complex parallel heat exchangers using generalized graetz modes 268 84–105.
- [9] C. Pierre, F. Plouraboué, Analytical properties of graetz modes in parallel and concentric configurations 55 (8) 1545–1559.  
URL <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01192-4>
- [10] J. Bouyssier, C. Pierre, F. Plouraboué, Mathematical analysis of parallel convective exchangers with general lateral boundary conditions using generalized graetz modes 24 (4) 627–665.
- [11] J. Fehrenbach, f. De Gournay, C. Pierre, F. Plouraboué, The generalized graetz problem in finite domains 72 (1) 99–123.

# Chapitre III

## Application de la méthode des modes de Graetz généralisés aux boucles monophasiques en circulation naturelle

### III.1 Introduction

Les boucles de circulation naturelles sont des dispositifs passifs de transfert d'énergie reconnus pour leur robustesse et leur simplicité. Ils sont aussi bien utilisés dans les domaines du nucléaire, de l'électronique ou de la géothermie, que dans les centrales solaires. Ces dispositifs bien connus et largement utilisés sont le plus souvent pré-dimensionnés à l'aide de corrélations semi-empiriques. L'application de la méthode des modes de Graetz généralisés aux boucles de circulation naturelle a pour but de caractériser, localement les transferts thermiques sans passer par des corrélations de coefficients d'échange. Cette approche permet ainsi de prendre en compte les effets du développement des couches limites thermiques et de la conduction thermique dans les parois solides sur les transferts thermiques. Parallèlement, la modélisation des boucles de circulation naturelles a permis de développer et utiliser une condition de périodicité, inexistante dans le formalisme de Graetz.





Contents lists available at ScienceDirect

## International Journal of Heat and Mass Transfer

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ijhmt](http://www.elsevier.com/locate/ijhmt)

## Natural convective loops heat transfer scaling analysis

F. Plouraboué<sup>a,\*</sup>, M. Rudkiewicz<sup>a,b</sup>, F. David<sup>b</sup>, H. Neau<sup>a</sup>, G. Debenest<sup>a</sup><sup>a</sup> Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, IMFT, Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, 31400, France<sup>b</sup> EDF Lab Chatou, 6 Quai Watier, Chatou, 78400, France

## ARTICLE INFO

## Keywords:

Convection in cavities  
 Buoyancy-driven instability  
 Coupled diffusion and flow  
 Natural convection  
 Heat transfer  
 Boundary layer

## ABSTRACT

Heat transfer arising in natural convective loops is analyzed numerically and theoretically. Combining 3D direct numerical simulations, unidirectional heat-transfer semi-analytical computations, scaling arguments and asymptotic analysis new universal scaling laws are proposed to account for dimensionless heat transfer behavior of natural convective loops. It is found that the Reynolds number  $Re$  resulting from the buoyancy driven rotating convection (as well as the Péclet number) scales as Grashof number  $Gr$  as  $Re \sim Gr^{3/4}$  for imposed temperature boundary conditions and  $Re \sim Gr^{3/5}$  for mixed imposed temperature/flux heating conditions. These scaling laws are successfully confronted with experimental measurements in both heating configurations. It is shown that these scaling result from boundary layers dominated transfers without noticeable influence of possibly complex 3D flow patterns found in the fluid flow. These simple scaling laws constitute a progress over previously existing correlations which have disregarded the effect of boundary layers, heating configurations as well as fluid to solid variable diffusivity/conductivity.

## 1. Introduction

Natural Convective Loops (NCL) are passive thermal systems heated from below, cooled from above, where critical heating conditions produce a supercritical Hopf bifurcation above which a self-sustained “steady” flow is produced [1] (cf. Fig. 1a, b) breaking symmetry from producing a rotating flow in one given direction. This first limit-cycle associated with the rotating periodic flow turns-out to be stable over a wide range of applied thermal conditions hence producing a self-sustained buoyancy-driven steady flow interesting for heat transfer. This is a cooling flow without any pump, a so-called passive exchanger. These natural convective loops are thus ubiquitous heat exchangers in various applicative contexts such as nuclear plants [2–4], passive housing thermal exchangers, solar heaters [5], geothermal processes [2]. As they are low-cost, simple in design and fabrication, sparse in maintenance requirements and environment friendly, these natural convection loops are still of potential interests for many applications: solar dryer, solar heaters photovoltaic-assisted hybrid solar heaters, data center cooling etc... Since they are known for more than forty years many studies have permitted important progress regarding their predicted behaviors as well as in their improved adaptation to applicative needs [6,7]. Hence not only performances of dedicated applications have been improved but also a better understanding of the unstable behavior of

many dedicated configurations [7]. Nevertheless albeit many progress have been obtained in this area of research, since NCL’s whole process relies on already complex 3D configurations having their specific sizes, material, thermal conditions, additional accelerating forces (e.g. rotation [8], rolling [9], heaving [10], etc...), possibly including additional geometrical specificities (valves, orifices, [11]) various dedicated and not necessarily related modeling of both the steady-state and its stability have been investigated in the literature. Hence, even if NCL have been widely studied, a generic modeling of their behavior has not been clearly established yet. Furthermore, NCL’s complexity exceeds the first bifurcation stable limit-cycle rotating state. This stable limit-cycle, can indeed become unstable for higher heating forcing condition, where increasingly complex dynamical states (period doubling, quasi-periodic oscillations) can be reached from successive bifurcations, possibly leading to chaotic behavior switching between various states [12–14]. Since these complex dynamical states are not clearly related to some specific applications they have mostly been considered as an hindrance rather than an opportunity. This is why most of the applied NCL’s literature focus on the analysis of the stable range of the first self-rotating limit-cycle. For example, [15,16] consider the relation between the loop flow-rate and the applied thermal conditions using semi-empirical relations. Aiming for a more general description of NCL’s self-rotating steady-state, various dimensionless modeling have also been proposed

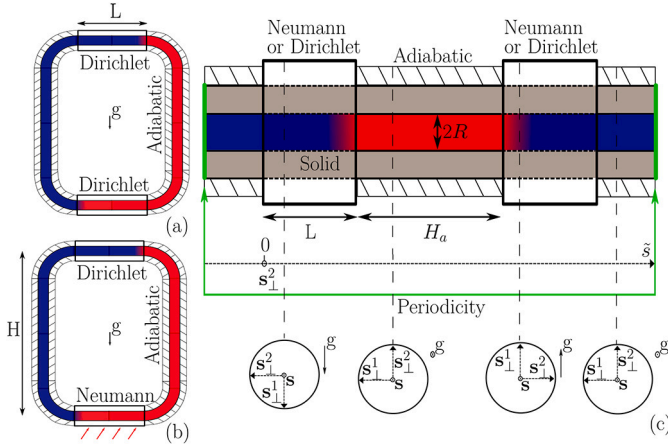
\* Corresponding author.

E-mail address: [fplourab@imft.fr](mailto:fplourab@imft.fr) (F. Plouraboué).<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124743>

Received 3 May 2023; Received in revised form 24 August 2023; Accepted 22 September 2023

Available online 12 October 2023

0017-9310/© 2023 Elsevier Ltd. All rights reserved.



**Fig. 1.** Natural Convection Loops (NCL) having horizontal heated/cooled regions length  $\tilde{L}$  ( $\tilde{L} = L\tilde{R}$ ) and vertical height  $\tilde{H}$  ( $\tilde{H} = H\tilde{R}$ ), adiabatic length  $\tilde{H}_a$  ( $\tilde{H}_a = H_a\tilde{R}$ ) are considered in this study. 2D slices in the vertical mean-plane of the 3D loop are represented in (a-b). The interior fluid loop where thermal field iso-values drawn from hot (red) to cold (blue), has circular section of radius  $\tilde{R}$  in the transverse plane (cf. bottom c). (a) Dirichlet/Dirichlet configuration (b) Neumann/Neumann one. (Top c) Deployed loop along the centerline periodic coordinate  $s$ . In 3D simulations provided in §2 the solid conduction is ignored (infinite solid conductivity limit) so that boundary conditions are directly applied at the fluid edge. (For interpretation of the colors in the figure(s), the reader is referred to the web version of this article.)

to set-up and design the exchanges properties [17,3]. These correlations produce a sensible power-law relation between the convective Reynolds number  $Re = \tilde{W}_s 2\tilde{R}/\nu$  based upon the steady average velocity  $\tilde{W}_s$ , pipe/tube radius  $\tilde{R}$ , fluid kinematic viscosity  $\nu$  and the Grashof number  $Gr = 8\beta g \Delta\tilde{T}_h \tilde{R}^3/\nu^2$  related to fluid density  $\rho$ , gravity acceleration  $g$ , thermal expansion coefficient  $\beta$  and the reference forced temperature difference  $\Delta\tilde{T}_h = \tilde{T}_H - \tilde{T}_C$  between the lower hot-pipe temperature  $\tilde{T}_H$  and the cold bottom one  $\tilde{T}_C$  in the case of Dirichlet type boundary conditions, or, in Neumann/Dirichlet case  $\Delta\tilde{T}_h = \phi_w \tilde{R}/k_f$  where  $\phi_w$  [ $\text{W m}^{-2}$ ] is the heat flux surface density, and  $k_f$  [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ] the fluid thermal conductivity. Although partially based upon energy balance and rational derivation, previous correlations derived in the literature have disregarded the effect of boundary layers and considered one-dimensional modeling only [18,2,19]. Furthermore, even if they are useful for some class of NCL, these dimensionless correlations are not connected to any specific heat forcing (it only considers an “effective Grashof number” for Neumann or Dirichlet conditions, as previously mentioned), thus disregarding the precise set of boundary conditions.

The aim of this contribution is to establish a generic dimensionless model for the scaling of NCL’s steady-state emerging from boundary layers analysis and depending on the applied boundary conditions. The paper is organized as follows. §2 analyzes the generated flow field and transfer in a natural convective loop from 3D numerical simulations. §3 considers the modeling of unidirectional flow with generalized Graetz mode decomposition, the use of which permits to obtain a quasi-analytical solution for the 2D (axi-symmetric) temperature field. One outcome obtained in §3.3 is the evaluation of loop’s exchanger efficiency, given by the dimensionless ratio between the averaged temperature difference  $\Delta\tilde{T}$  between the outlet heated temperature at  $\tilde{s} = \tilde{L}$  and the inlet cold one at  $\tilde{s} = 0$ , i.e.  $\Delta\tilde{T} = \langle \tilde{T}_f \rangle(\tilde{L}) - \langle \tilde{T}_f \rangle(0)$  ( $\langle \rangle$  stands for cross-section average inside the circular loop), and the reference forced temperature difference  $\Delta\tilde{T}_h$ , i.e.  $\mathcal{E} = \Delta\tilde{T}/\Delta\tilde{T}_h$ . The large Péclet asymptotic behavior of  $\mathcal{E}$  is further analyzed within a boundary layer analysis in §3.4. §4 then discusses the comparison between the resulting asymptotic predictions for relations between  $Re$ ,  $Gr$  and  $\mathcal{E}$  confronted with experimental data both taking into account the heating configuration and the conductivity heterogeneity of fluid and solid.

## 2. Numerical study of 3D natural convection loop flow

### 2.1. Numerical method and validation

The purpose of this section is to investigate the relevance of 3D flow field and geometry for heat-transfer in natural convective loops previously analyzed in the literature from a Computational Fluid Dynamic (CFD) approach. Since the flow Reynolds number associated with our various test-case computations are within the range [317-441] (cf. Table 2) no turbulence model has been used in the reported computations. In most considered loops the aspect ratio between the inner tube radius and the loop’s corner radius of curvature was small, so that 3D effects are expected to be moderate in this context, but the reported simulations have been conducted to investigate this point precisely. For this, finite-volume 3D simulations have been performed using a pressure-correction scheme [20] in a 3D domain similar to Fig. 1a for the configuration studied in [21] the details of which is given in Table 2. The open-source software Saturne [22,20,23] has been used with dimensional formulation (using tilde fields) so as to permit a better comparison with experiments over a wide range of relevant Grashof number, i.e. from  $Gr = 7.10^3$  to  $Gr = 5.10^6$ . This code has been previously used successfully for analyzing NCL in wider parameter range in [24]. It has been tested and validated in simplified configurations such as a single horizontal tube in the presence of small buoyancy effects and successfully compared with the asymptotic predictions of [25].

In these simulations boundary conditions are directly applied at the fluid flow frontier without considering conduction effects. Incompressible, non-stationary, Boussinesq buoyancy-driven Navier-Stokes equations for velocity field  $\tilde{\mathbf{u}}_f$ , pressure  $\tilde{p}$ , temperature  $\tilde{T}$ , are solved in the 3D domain depicted in Fig. 1a associated with the Dirichlet/Neumann configuration

$$\rho \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_f}{\partial t} + \rho \nabla \tilde{\mathbf{u}}_f \cdot \tilde{\mathbf{u}}_f = -\nabla \tilde{p} + \beta \rho g (\tilde{T} - \tilde{T}^*) + \mu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}_f, \quad (1)$$

whereby the fluid density and viscosity have been linearized around their value at reference temperature  $\tilde{T}^*$ , i.e.  $\rho(\tilde{T}^*) \equiv \rho$ ,  $\mu(\tilde{T}^*) \equiv \mu$ , and  $\beta$  is the thermal expansion coefficient.  $\tilde{T}^*$  is provided by a shift from the imposed cold temperature  $\tilde{T}_C$ , i.e.  $\tilde{T}^* = \tilde{T}_C + \Delta\tilde{T}^*/2$  where  $\Delta\tilde{T}^*$  is the temperature drop gained from heat flux, i.e.  $\rho \tilde{W}_s \pi \tilde{R}^2 c_p \Delta\tilde{T}^* = \phi_w 2\pi R_0 L$  where the longitudinal velocity  $\tilde{W}_s$  is related to the viscous pressure drop  $\Delta\tilde{P}$  from  $\tilde{W}_s = \Delta\tilde{P} \tilde{R}^2 / (8\mu \tilde{L}_t)$  with the  $\tilde{L}_t = 2(\tilde{L} + \tilde{H}_a)$  the total length of the heat loop along  $s$ . The pressure drop  $\Delta\tilde{P}$  is compensated by buoyancy effects so that  $\Delta\tilde{P} = \rho g \beta \Delta\tilde{T}^* H$ , leading to

$$\Delta\tilde{T}^* = \sqrt{16 \frac{\phi_w \mu \tilde{L}_t L R_0}{\rho^2 \beta c_p g \tilde{H} \tilde{R}^4}}. \quad (2)$$

Navier-Stokes equations are coupled with the energy transport equations

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_f \tilde{T} - \alpha_f \nabla \tilde{T}) = 0, \quad (3)$$

where thermal diffusivity  $\alpha_f = k_f / \rho c_p$  is related to thermal fluid conductivity  $k_f$  and fluid specific heat capacity  $c_p$ . No-slip boundary conditions are applied at the fluid domain edges. Also, at these edges, three distinct temperature boundary conditions are considered (i) imposed cold temperature  $\tilde{T}_C$  at  $\Gamma_D$  (ii) heated region at  $\Gamma_N$  (iii) adiabatic condition at  $\Gamma_A$  i.e.

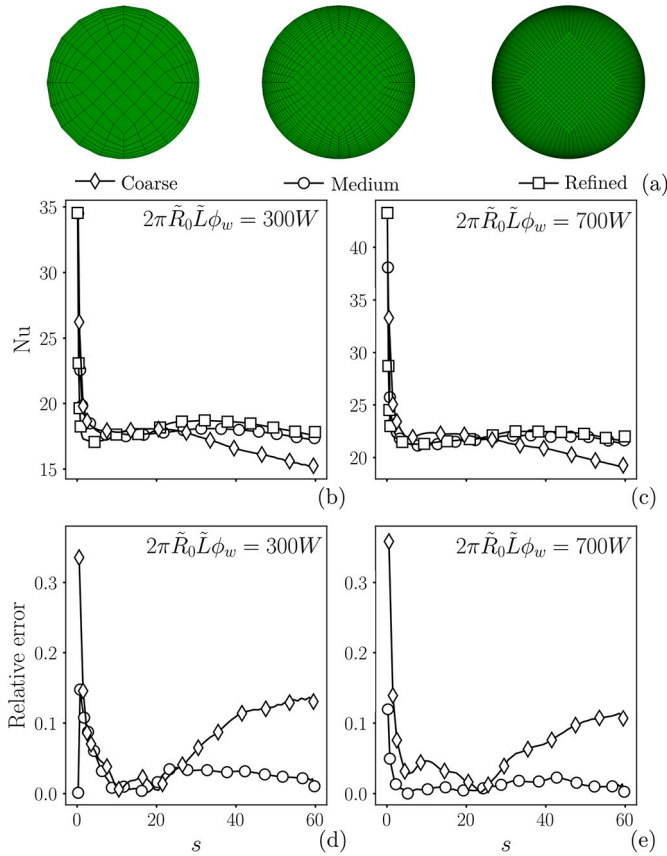
$$\tilde{T} \Big|_{\Gamma_D} = \tilde{T}_C \quad \& \quad k_f \nabla \tilde{T} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_N} = \phi_w \quad \& \quad \nabla \tilde{T} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_A} = 0 \quad (4)$$

The loop boundary is hence decomposed into two parts: thermally active regions where the loop is either heated or cooled and passive adiabatic ones where zero heat-flux is imposed. The domain itself is split in three regions: horizontal heated/cooled ones, bended parts, and vertical adiabatic ones. All thermo-physical quantities are taken for water at temperature  $\tilde{T}^*$ . A 3D mesh-grid is generated from a 2D mesh

**Table 1**

Convergence of the 3D computations for the Coarse (C), Medium (M) and refined (R) meshes provided in Fig. 2a for different applied power of 300 W and 700 W. A constant time step  $\Delta t$  is chosen equal to  $\Delta t = 0.04$  for the C & M mesh and  $\Delta t = 0.01$  for R mesh. The absolute residuals of each field  $Y(x, t)$  provided by the relative dimensionless  $L^2$  norm between two successive times steps  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  over the entire 3D domain  $\Omega$  given by  $\sqrt{\int_0^L [Y(x, t_{i+1}) - Y(x, t_i)]^2 d\Omega / \int_0^L d\Omega}$  has been evaluated for each field: velocity, pressure and temperature. The relative  $L^2$  norm residual  $\sqrt{\int_0^L [Y(x, t_{i+1}) - Y(x, t_i)]^2 d\Omega / \int_0^L [Y(x, t_{i+1})]^2 d\Omega}$  is also provided. Also the relative variations of the Nusselt number  $\overline{\delta Nu} = \sqrt{\frac{1}{N_{time}} \sum_i \int_0^L [Nu(s, t_i) - Nu(s, t_{max})]^2}$  over the last  $N_{time} = 100$  steps (the total number of time steps is approximately  $4 \cdot 10^4$ ) is computed so as to verify that the wall-to-fluid transfer has safely reached steady-state. Finally the number of mesh  $N_y$  in the boundary layer is estimated from evaluating the temperature gradient from the imposed flux and the temperature difference at the inlet, divided by  $y_w$  the width of the first mesh at the wall i.e.  $N_y = \frac{(\bar{T}_w - \bar{T}_c)k_f}{\phi_w y_w}$  where  $\bar{T}_{in} = \langle \bar{T} \rangle(0)$  is the inlet temperature at  $s = 0$  and  $\bar{T}_c$  is the imposed cold temperature at the wall.

Po	mesh	Absolute Residuals			Relative Residuals			$\overline{\delta Nu}$	$N_y$
		Vel.	Press.	Temp.	Vel.	Press.	Temp.		
300	C	$6.6 \cdot 10^{-8}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-2}$	7
	M	$5.2 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	12
	R	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	0.15	19
700	C	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	-	3
	M	$6.7 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	0.27	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	0.13	5
	R	$5.3 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$	0.21	$9.3 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	-	9



**Fig. 2.** Mesh convergence sensitivity analysis for the two range limit of the imposed flux 300 and 700 W. (a) Upper subplots display the 2D mesh structure in the transverse section of the loop for increasing refinement from left to right. (b) Local Nusselt number along the axial coordinate  $s$  for the three mesh grid for imposed power 300 W. (c) Same as (b) for imposed power 700 W. (d) Relative differences of the Nusselt between coarse and medium mesh with the refined one for imposed power 300 W. (e) Same as (d) for imposed power 700 W.

extrusion. Local refinements of the grid have been performed in the bended regions and in the boundary layers so as to correctly capture temperature gradients. Fig. 2a display the various mesh refinement that have been considered in the study, whereas the successive panels 2b, c, d, e shows the local mesh-refinement sensitivity analysis of the heat

**Table 2**

Comparison between the reported experimental temperature difference (experimental set-up MTT-1) of [21] and CFD ones. Reynolds number have been estimated from an energy balance on the heater [26], i.e.  $Re = 4\pi \tilde{R}_0 \tilde{L} \phi_w \tilde{R} / \rho_f c_p \Delta \tilde{T} v$ . The loop parameters are  $\tilde{R} = 0.01$  m,  $\tilde{L}_H = 0.72$  m,  $\tilde{L}_C = 0.6$  m,  $\tilde{H} = 0.637$  m,  $\tilde{H}_a = 0.759$  m. The total heat flux is  $2\pi \tilde{R}_0 \tilde{L} \phi_w$ .

$2\pi \tilde{R}_0 \tilde{L} \phi_w [W]$	$Re$	$\Delta \tilde{T} [K]$ Exp	$\Delta \tilde{T} [K]$ CFD
300	317	16	11.4
400	354	19.5	14.9
500	378	22.5	17.1
700	441	27.2	20.3

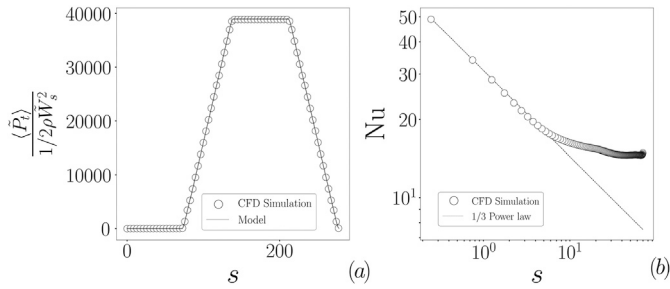
transfer evaluation along the axial coordinate  $s$ . An average relative error of less than 0.5% difference between the medium mesh and the more refined one is found on the total Nusselt number whilst integrating the relative error along the  $s$  direction.

A time-stepping approach is adopted starting from a uniform initial condition to converge toward the stable oscillating limit-cycle whilst imposing the prescribed boundary conditions. A criterion of convergence toward this self-rotating steady flow is found close within less than 0.04% of its previous value, i.e. the computation is stopped when finding temperature/pressure/velocity  $L^2$  residual variations from one times-step to the following lower than  $4 \cdot 10^{-4}$ . More precisely Table 1 provides the absolute and relative residual of the time stepping numerical convergence. The stationary convergence of the transfer is investigated and found close within 1.8% for the adopted mesh (the medium mesh). Furthermore, it is found that given the medium grid, there is between twelve to five mesh cells within the boundary layer over the entire flux range confirming a safe transfer estimation.

## 2.2. 3D numerical results

The numerical results are now analyzed in order to quantify the deviation from a one dimensional unidirectional flow of the 3D components one.

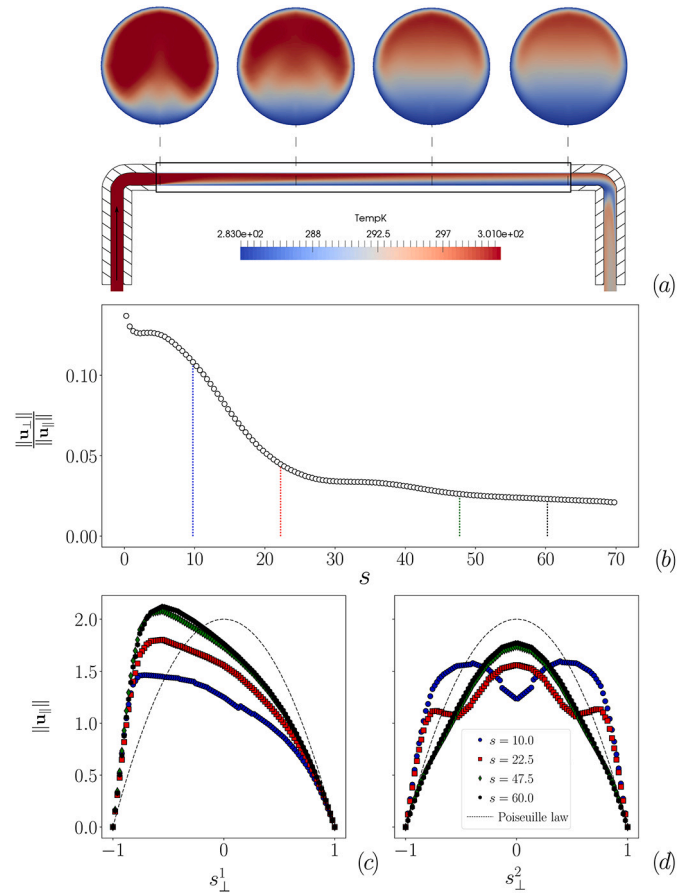
First, the hot to cold temperature difference  $\Delta \tilde{T}$  obtained from numerical simulations are compared with the experimental results of [21] in Table 2. The agreement obtained over these temperature differences is reasonable (from 23 to 28%) albeit not perfect. This difference might be attributable to idealized boundary conditions in the modeling side, whilst, at the same time, hardly controllable in experiments. This motivates a deeper analysis of the influence of solid conduction performed in the next section.



**Fig. 3.** (a) Average pressure and variations along the center-line axis  $s$  inside each cross-section of the heat loop. The static buoyancy pressure is superposed with continuous lines. Plateau regions correspond to horizontal parts of the NCL whereas linear ascending and descending parts of the pressure variations arise within the vertical portion of it. (b) Cross-sectional averaged Nusselt number versus the dimensionless loop centerline distance  $s$ . A L ev e behavior  $Nu \sim s^{-1/3}$  is depicted with dotted lines.

The influence of 3D effects on the surface-averaged pressure drop variations along the loop are first considered. Fig. 3 compares the pressure variations along the curvilinear axial coordinate  $s$  along the loop center-line with the static pressure associated with the buoyancy Boussinesq static term. These results show a poor influence of other contributions to pressure variations i.e. viscous dissipation in bended regions (the so-called singular perturbation on pressure drop) or inertial pressure drop in the tube. Secondly, the temperature non-axi-symmetry and the resulting 3D velocity are illustrated and analyzed in Fig. 4. The temperature field (Fig. 4a) display a clear, axi-symmetric thin boundary layer structure along the circular tube periphery, whereas in the center, a top-to-bottom asymmetry is found. The non-axial components of the velocity field are also analyzed along the loop in Fig. 4, the relative amplitude of which are compared to the axial ones. A 10% maximal variations of non-axial components relative to axial ones are found either within the straight portions of the loop, or in the heated/cooled regions. Furthermore, in average along centerline  $s$  the transverse velocity amplitude represents less than 5% of the longitudinal velocity. Also, deviations from Poiseuille flow of the longitudinal velocity component  $\bar{W}(r) = 2\bar{W}_s(1 - (\bar{r}/\bar{R})^2)$  have been quantified in Fig. 4 at various distances from the entrance of the upper cooled region (i.e. 10, 22.5, 47.5 and 60 dimensionless diameter units). Since the 3D longitudinal velocity profiles are not axi-symmetric, two profiles (in the plane perpendicular to the center-line coordinate  $s$  (cf. Fig. 1c) have been extracted in the direction parallel to gravity ( $s_{\perp}^1$ ) or perpendicular to it ( $s_{\perp}^2$ ). A clear buoyancy driven, gravity-enhanced a-symmetric longitudinal velocity profile is visible in the left-bottom Fig. 4 along  $s_{\perp}^1$ . The profile a-symmetry is enhanced along the longitudinal direction increasing along the center-line coordinate  $s$ . On the contrary, neither symmetric breakage of the velocity profile nor a-symmetry increase along  $s$  are found along  $s_{\perp}^2$  profiles in Fig. 4's right-bottom. There, it is interesting to observe that the fluid boundary-layers effect at the entrance clearly decay along  $s$  leading to a closely parabolic profile far from it. Since both temperature and velocity display boundary layers, there are worth of a careful investigation. Fig. 3 display the cross-sectional integrated transfer from evaluating the local Nusselt number along the curvilinear center-line coordinates  $s$ . As expected, heat transfer is decreasing from the entrance of the heated zone, down along the channel. A  $s^{-1/3}$  decay of the local heat transfer is more precisely shown in Fig. 3, as expected from L ev e approximation [27]. This behavior of the heat transfer indicates the dominant effect of boundary layers on heat exchanges. This observation thus weakens the relevance of buoyancy effects shown for velocity profiles to heat transfer. Since most of the transfer is controlled by thin regions near the solid boundary, the a-symmetry of the velocity profile is not expected to impact much the near-wall radial temperature gradients.

Finally it is interesting to mention that since Saturne has embedded tabulated laws, numerical simulations using real water thermo-physics



**Fig. 4.** 3D Numerical simulations of natural convection stationary flow within a Dirichlet/Neumann thermal loop. (a-top) 2D temperature field in the transverse plane at various dimensionless axial distance  $s$  from the top-left of the loop. (a-bottom) 2D temperature field into the loop longitudinal plane. (b) Longitudinal to transverse flow velocity components ratio along the center-line coordinate  $s$ . (c) Radial velocity profile along directions direction  $s_{\perp}^1$  (parallel to gravity) in the iso- $s$  cross-section (cf. Fig. 1c) have been extracted. (d) same convention as (c) for direction  $s_{\perp}^2$  (perpendicular to gravity).

properties with temperature varying density, viscosity, specific heat capacity have also been produced and compared with the hereby discussed Boussinesq approximation results. A poor difference lower than 2% has been found between both. For this reason, the Boussinesq approximation has been kept as a relevant framework in the following sections. Furthermore, since a boundary-layer dominated heat transfer has been found from 3D simulations, the following section is further analyzing the expected predictions from heat-transfer resulting only from convection-diffusion arising within a axially invariant velocity profile ignoring the effect of transverse velocity components been small compared to longitudinal ones. Thus, we now proceed to the further analysis of the temperature field within unidirectional dimensionless flow field  $\mathbf{u}_f = (0, 0, w_f(r))$  with  $w_f(r) = \bar{W}(r)/\bar{W}_s$ , now taking into account (possibly heterogeneous) conductive effects in the solid. Next section develops the leading order analysis of the bended-loop in the limit of asymptotically small pipe radius to loop radius of curvature ratio.

### 3. Unidirectional convective exchanges in natural convection loop

#### 3.1. Dimensionless formulation

The relevant dimensionless numbers in this context are Péclet number  $Pe = \bar{W}_s 2\bar{R}/\alpha_f$  and Graetz number  $G_{ra} = Pe\bar{R}/L$ . Rescaling the radial and axial coordinates  $\bar{r}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{H}_a$ , &  $\bar{H}$  by  $\bar{R}$  (so that the



fluid/solid interface  $\Gamma$  is at  $r = 1$  whereas external boundary conditions  $\Gamma_A, \Gamma_D, \Gamma_N$  are set at  $r = R_0 \equiv \tilde{R}_0/\tilde{R}$ , the velocity by  $\tilde{W}_s$ , then, stationary dimensionless energy balance for the dimensionless fluid temperature  $T_f$  reads

$$\frac{1}{2}w_f(r)\frac{\partial T_f}{\partial s} - \frac{1}{Pe}\nabla^2 T_f = 0, \quad (5)$$

with dimensionless velocity  $w_f(r) = 2(1 - r^2)$ . Distinct conductive properties of solid walls within each compartment (i.e. cooled or heated region, adiabatic regions) of the loop are considered. For each solid  $i$ , an harmonic temperature field associated with stationary conduction is prescribed for the dimensionless solid temperature  $T_s$

$$\nabla^2 T_s = 0. \quad (6)$$

Continuity of temperature and fluxes are prescribed between fluid and solid domains

$$T_f \Big|_{\Gamma} = T_s \Big|_{\Gamma} \quad \& \quad \frac{\partial T_f}{\partial r} \Big|_{\Gamma} = \kappa \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{\Gamma}, \quad (7)$$

with  $\kappa = k_s/k_f$  being the dimensionless solid to fluid conductivity ratio. In the following the field  $w$  is introduced being  $w = w_f(r)/2$  in the fluid and  $w = 0$  in the solid for  $1 < r < R_0$ . At external solid wall, either an adiabatic (homogeneous Neumann), Dirichlet or a constant heat flux (constant Neumann) are prescribed. Two distinct dimensionless temperature are thus considered. In the case of Dirichlet/Dirichlet configurations (i.e. D/D case) dimensionless  $T = (\tilde{T} - \tilde{T}_C)/(\tilde{T}_H - \tilde{T}_C)$  is considered leading to dimensionless boundary conditions

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{\Gamma_A} = 0 \quad \& \quad T_s \Big|_{\Gamma_D^C} = 0 \quad \& \quad T_s \Big|_{\Gamma_D^H} = 1, \quad (8)$$

where  $\Gamma_D^C$  and  $\Gamma_D^H$  are where the cold temperature  $\tilde{T}_C$  and the hot one  $\tilde{T}_H$  are prescribed. In the Dirichlet/Neumann case (i.e. D/N case),  $T = \phi_w(\tilde{T} - \tilde{T}_C)/(k_f \tilde{R})$  and dimensionless boundary conditions read

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{\Gamma_a} = 0 \quad \& \quad T_s \Big|_{\Gamma_D} = 0 \quad \& \quad \kappa \frac{\partial T_f}{\partial r} \Big|_{\Gamma_N} = 1. \quad (9)$$

### 3.2. Semi-analytical solutions

Problem (5)-(8) & (5)-(9) can be solved by separation of variables using generalized Graetz modes decompositions [28,29]. For homogeneous boundary conditions there is an orthogonal base decomposition upon discrete radial modes  $\Theta_n(r)$  which fulfill the following radial problem in both fluid and solid domains

$$\kappa(\nabla_r^2 + \lambda_n^2)\Theta_n = \lambda_n w(r)Pe\Theta_n, \quad (10)$$

where  $\nabla_r^2$  stands for the radial part of the Laplacian operator. These modes are denoted with an upper D for Dirichlet when they fulfill boundary condition  $\Theta_n^D(R_0) = 0$  or N for Neumann in the case  $\partial_r \Theta_n^N(R_0) = 0$ . General solutions for non-homogeneous boundary conditions of Dirichlet, Neumann have been derived in [28,30,31]. In each stretch of the loop, having non-homogeneous constant boundary conditions, solutions (taking in each case the origin  $s = 0$  of axial coordinate as the entrance of the boundary condition stretch) are provided. These solutions are decomposed into a general solution associated with uniform boundary conditions, and a particular one taking care off the non-homogeneous boundary condition (uniform in our case), the amplitude of which is given by  $\alpha_n^{D,N}$  [29]

$$\alpha_n^D = -\frac{2\pi R_0 \kappa}{\lambda_n^2} \frac{d\Theta_n^D}{dr} \Big|_{R_0} \quad \& \quad \alpha_n^N = \frac{2\pi R_0}{\lambda_n} \Theta_n^N \Big|_{R_0}. \quad (11)$$

#### 3.2.1. Dirichlet/Dirichlet case

In this case, since the adiabatic regions do not play a role in the solid/fluid heat transfer, we disregard their role, and consider a succession of hot/cold temperature boundary conditions i.e.

$$T(R_0, s) \Big|_{0 < s < L} = 1 \quad \& \quad T(R_0, s) \Big|_{L < s < 2L} = 0 \quad (12)$$

The solution reads

$$T(r, s) = \Pi\left(\frac{s + L/2}{L}\right) + \sum_{n>0} x_n^D \Theta_n^D e^{\lambda_n^D s} + \sum_{n<0} x_n^D \Theta_n^D e^{\lambda_n(s-2L)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N c_n(s) \Theta_n^D \quad (13)$$

with  $\Pi(s)$  is the rectangular function equal to one between  $s = \pm 1/2$  and  $c_{\pm n}(s)$  functions

$$c_n(s) = -(H(s) - H(s-L))e^{-\lambda_n L} e^{\lambda_n s} \quad (14)$$

$$c_{-n}(s) = (H(s)e^{-2\lambda_n L} - [1 - H(s-L)]e^{-\lambda_n L}) e^{\lambda_n s}, \quad (15)$$

with  $x_{\pm n}^D$  amplitudes given by

$$x_n^D = \alpha_n^D \frac{1 - (1 - e^{-\lambda_n L})e^{2\lambda_n L}}{1 - e^{2\lambda_n L}}, \quad (16)$$

$$x_{-n}^D = \alpha_{-n}^D \frac{1 - (1 - e^{\lambda_n L})e^{-2\lambda_n L}}{e^{2\lambda_n L} - 1}, \quad (17)$$

and for  $n \in \mathbb{N}^*$ . From the numerical viewpoint, the behavior of (13) solution to mode truncation is not very favorable, so that, ones should alternatively consider regularized boundary conditions (e.g. erf-function shapes), for which some alternative analytical solutions using generalized Graetz modes could similarly be deduced from [29], the mode-convergence of which better behaves.

#### 3.2.2. Dirichlet/Neumann case

In this case, boundary conditions at the solid surface are given by

$$T(R_0, s) \Big|_{0 < s < L} = 0, \quad \frac{\partial T(R_0, s)}{\partial r} \Big|_{-(L+2H_a) < s < -(L+H_a)} = 0 \quad (18)$$

$$\kappa \frac{\partial T(R_0, s)}{\partial r} \Big|_{-(L+H_a) < s < -H_a} = 1, \quad \frac{\partial T(R_0, s)}{\partial r} \Big|_{-H_a < s < 0} = 0. \quad (19)$$

The solution within the Dirichlet region  $0 < s < L$  reads

$$T^D(r, s) = T_w + \sum_{n>0} x_{+n}^D \Theta_{+n}^D e^{\lambda_n^D s} + \sum_{n<0} x_{-n}^D \Theta_{-n}^D e^{\lambda_n(s-L)}, \quad (20)$$

whilst the solution in the non-homogeneous Neumann region  $-(L + 2H_a) < s < 0$  is

$$T^N(r, s) = \sum_{n>0} x_{+n}^N \Theta_{+n}^N e^{\lambda_n(s+2s_0)} + \sum_{n<0} x_{-n}^N \Theta_{-n}^N e^{\lambda_n s} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n c_n(s) - (s' + \frac{L}{2})\Pi\left(\frac{2s'}{L}\right) \frac{R_0}{Pe}, \quad (21)$$

where we have introduced the translated coordinate  $s' = s + s_0$  with  $s_0 = (L + 2H_a)/2$ . Albeit analytical, this solution is not explicit for needing unknown amplitudes  $x_{\pm n}^{D,N}$ . These amplitudes are found from imposing continuity of temperature and fluxes between the beginning of the first adiabatic region at  $s = -2s_0$  with Dirichlet region outlet at  $s = L$  and between the end of the second adiabatic region at  $s = 0$  with Dirichlet one at  $s = 0$ . Hence, minimizing functional

$$J[x_n^D, x_n^N] = \int_0^1 \left[ (T^D - T^N)^2 + \left( \frac{\partial T^D}{\partial s} - \frac{\partial T^N}{\partial s} \right)^2 \right]_{s=0} r dr + \int_0^1 \left[ \left( T \Big|_{s=L}^D - T \Big|_{s=-2s_0}^N \right)^2 + \left( \frac{\partial T^D}{\partial s} \Big|_{s=L} - \frac{\partial T^N}{\partial s} \Big|_{s=-2s_0} \right)^2 \right] r dr, \quad (22)$$

one can find the linear system to be solved in order to find the unknown vector  $[x_n^D, x_n^N]$ , the detail of which is provided in Appendix A.

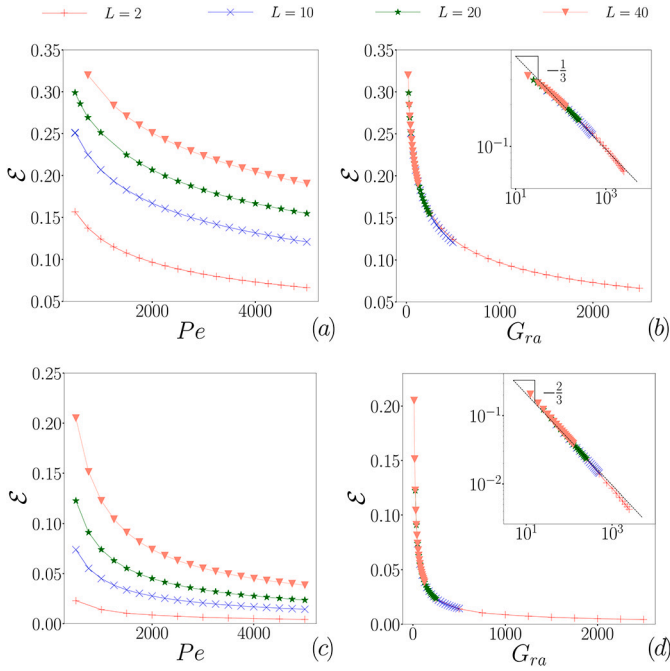


Fig. 5. Efficiency of the loops computed from  $\mathcal{E} = \Delta\bar{T}/\Delta\bar{T}_h = \Delta T$ . (a-b) Dirichlet/Dirichlet case. (c-d) Dirichlet-Neumann case.

### 3.3. 2D numerical results for the loop efficiency

From the computed temperature fields provided in previous sections, one can evaluate the loop's efficiency whose expression simplifies to  $\mathcal{E} = \langle T_f \rangle(L) - \langle T_f \rangle(0)$  for dimensionless temperature. This efficiency has been evaluated in Fig. 5 for both D/D and D/N cases for rectangular loops with  $L = H = H_a$  varying between 2 to 100, for various Péclet numbers from unity to one thousand. In each case, the variation of the efficiency with Péclet follows the same qualitative trend, i.e. a sharp increase for moderate Péclet values followed by a gentle decrease as observed in most heat-exchangers (e.g. [32]). This secondary decay can be collapsed into a single curve from using the Graetz number rather than the Péclet as illustrated in Fig. 5b, d. Furthermore, the inset of Fig. 5b, d also show that the decay of the efficiency follows an asymptotic power-law decay with Graetz number, the slope of which is distinct in the D/D case and D/N one. Hence, when  $Gr_a \gg 1$  the efficiency follows the simple scaling

$$\mathcal{E}^{D/D} = \mathcal{E}_0 \left( \frac{Pe}{L} \right)^{-1/3} \quad \& \quad \mathcal{E}^{D/N} = \mathcal{E}_0 \left( \frac{Pe}{L} \right)^{-2/3}. \quad (23)$$

Note that since  $R = 1$  for the dimensionless internal radius, the Péclet to Graetz relation simplifies to  $Gr_a = Pe/L$ . The respective values of this power-law decay are further analyzed in the next section within an asymptotic analysis. The prefactor  $\mathcal{E}_0$  of this power-law depends on the various conductivity ratios of the loop. For a loop having solid to fluid conductivity ratio  $\kappa = k_s/k_f$ , the asymptotic regime  $Gr_a \gg 1$  is further investigated. For this, in the D/D case the quantity  $\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{E}Gr_a^{1/3}$  has been analyzed in Fig. 6. One can observe on Fig. 6a that this prefactor very weakly changes within large variations of the Péclet number, as expected from (23). Furthermore, when considering the variation of this prefactor in a large range of variations of conductivity ratio  $\kappa$  parameter, a significant variation is found, with distinct asymptotic behaviors. For  $\kappa \rightarrow \infty$ , one can see in Fig. 6b that  $\mathcal{E}_0$  reaches a plateau value, associated with the limit of a perfectly conductive solid (analyzed in the next section). On the other hand, in the limit  $\kappa \ll 1$ , one finds a linear decay  $\mathcal{E}_0 \sim \kappa$  (a fit capturing both trends is provided in Fig. 6's legend).

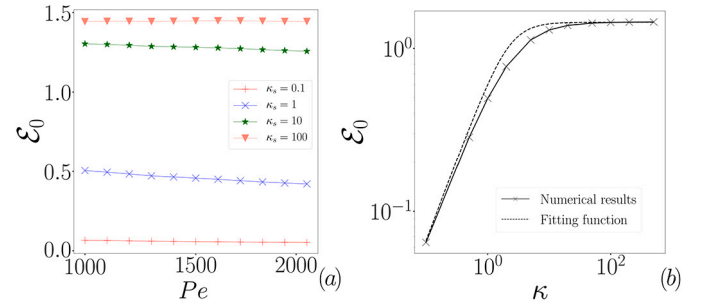


Fig. 6. (a)  $\mathcal{E}_0$  prefactor defined as  $\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{E}Gr_a^{1/3}$  variation versus  $Pe$  number. (b) Continuous line is  $\mathcal{E}_0$  versus conductivity ratio  $\kappa$ . Dotted lines provide a fit of this numerical result with the following fitting function  $1.45 \frac{\kappa^{2/2}}{\sqrt{1+(\kappa/2.2)^2}}$ . A loop of dimensionless length  $L = 4$  and  $R_0 = 6/5$  has been chosen here.

### 3.4. Boundary layer analysis

Now considering the local boundary layer dimensionless thickness  $\delta = Pe^{-1/3} \ll 1$  following [27], the dimensionless longitudinal velocity  $w(r)$  nearby the wall, can be expressed with near wall outer variable  $Y = 1 - r$ , or inner one  $y = Y/\delta$ , so that  $w_f(r)/2 = (1 - r^2) = Y(2 - Y) = \delta y(2 - \delta y)$  exhibiting an approximately linear behavior in the boundary layer where (5) then leads to  $Pe\delta y\partial_s T \sim Pe\delta \sim (1/\delta^2)\partial_y^2 T \sim (1/\delta^2)$  justifying the boundary layer dimensionless thickness scaling with  $Pe$ . In this section, since we wish to address the effect of the fluid boundary layer in the limit of large Péclet number we consider the limiting case on infinite solid conductivity  $\kappa \rightarrow \infty$  for which the thermal boundary conditions are imposed at the fluid/solid interface.

#### 3.4.1. Dirichlet/Dirichlet case

On the one hand, the leading order boundary layer dimensionless temperature  $T_{in}^0$  deduced from (5) fulfills

$$2y \frac{\partial T_{in}^0}{\partial s} - \frac{\partial^2 T_{in}^0}{\partial y^2} = 0, \quad (24)$$

with, boundary condition  $T_{in}^0(y=0) = 1$ , complemented with matching conditions with the dimensionless outer temperature  $T_{out}^0$  such as  $T_{in}^0(y \rightarrow \infty) = T_{out}^0(Y \rightarrow 0) \equiv T_{out}^0(0)$ . It admits Lévêque self-similar solution introducing self-similar variable  $\mathcal{Y} = y/(9s/2)^{1/3}$  so that classical result is recovered [27],

$$T_{in}^0(\eta) = T_{out}^0(0) + (1 - T_{out}^0(0)) \frac{3}{\Gamma(1/3)} \int_{\mathcal{Y}}^{\infty} \exp^{-t^3} dt \quad (25)$$

On the other hand, from (5), one can find that the leading-order outer field verifies  $\partial_s T_{out}^0 = 0$ , i.e. is invariant along  $s$  –this property holds, up to  $O(\delta^3)$  corrections–. Since the efficiency  $\mathcal{E} = \Delta\bar{T}/(\bar{T}_H - \bar{T}_C) = \langle T_f \rangle(L) - \langle T_f \rangle(0)$  can be evaluated using boundary-layer leading-orders from

$$\langle T_f \rangle(L) = \int_0^{\delta L^{1/3}} T_{in}(y)(1 - \delta y)dy + \int_{\delta L^{1/3}}^1 T_{out}(Y)(1 - Y)dY \quad (26)$$

$$= \delta L^{1/3} + \int_{\delta L^{1/3}}^1 T_{out}^0(Y)(1 - Y)dY + O(\delta^2) \quad (27)$$

At  $s = 0$ , since  $\partial_s T_{out}^0 = 0$ , one gets

$$\langle T_f \rangle(0) = \int_0^{\delta L^{1/3}} T_{out}(Y)(1 - Y)dY + \int_{\delta L^{1/3}}^1 T_{out}(Y)(1 - Y)dY \quad (28)$$

$$= T_{out}^0(0)\delta L^{1/3} + \int_{\delta L^{1/3}}^1 T_{out}^0(Y)(1 - Y)dY + O(\delta^2) \quad (29)$$

From (27) and (29), one finds that, in the D/D case, the loop efficiency scales as

$$\mathcal{E}^{D/D} = \langle T_f \rangle(L) - \langle T_f \rangle(0) = [1 - T_{out}^0(0)]\delta L^{1/3} + O(\delta^2) \sim (L/Pe)^{1/3} \quad (30)$$

This result is consistent with Fig. 5b inset behavior, i.e. (23) scaling.

### 3.4.2. Dirichlet/Neumann case

In this case, the leading-order solution of the  $O(1)$  boundary-layer problem (24) associated with homogeneous boundary condition  $\partial_y T_{in}^0(y=0) = 0$  is constant, i.e.  $T_{in}^0 = T_{out}^0(0)$ , given by the matching condition with the  $s$ -invariant,  $\partial_s T_{out}^0 = 0$ , outer solution. Next order  $O(\delta)$  correction also fulfills (24) with the non-homogeneous uniform boundary condition  $\partial_y T_{in}^1(y=0) = 1$  preventing a self-similar solution in this case, but for a linear profile  $T_{in}^1(y) = y$  (cf. Appendix B for more details). Using (26) one finds in this D/N case

$$\langle T_f \rangle(L) = T_{out}^0(0)\delta L^{1/3} + \int_{\delta L^{1/3}}^1 T_{out}^0(Y)(1-Y)dY + O(\delta^3), \quad (31)$$

and using definition (28),

$$\begin{aligned} \langle T_f \rangle(0) &= T_{out}^0(0)\delta L^{1/3} \left(1 - \frac{\delta}{2} L^{1/3}\right) + \frac{\partial T_{out}^0}{\partial Y}(0) \frac{\delta^2}{2} L^{2/3} \\ &+ \int_{\delta L^{1/3}}^1 T_{out}^0(Y)(1-Y)dY + O(\delta^3). \end{aligned} \quad (32)$$

From matching condition  $\partial_y T_{out}^0(0) = 1$  (cf. Appendix B for more details), one gets

$$\mathcal{E}^{D/N} = \langle T_f \rangle(L) - \langle T_f \rangle(0) = \frac{[T_{out}^0(0) - 1]}{2} \delta^2 L^{2/3} + O(\delta^3) \sim (L/Pe)^{2/3} \quad (33)$$

Again, this is consistent with Fig. 5d inset behavior and (23) scaling.

## 4. Results

Balancing the fluid pressure including both viscous pressure drop and singular perturbation contributions associated with loop's corners (provided by  $\xi_s$  parameter), with Archimedian one leads to

$$\beta \rho g \Delta \bar{T} \bar{H} = \frac{1}{2} \rho \bar{W}_s^2 \left( \frac{64}{Re} L_t + \xi_s \right). \quad (34)$$

Using previous dimensionless number definitions and dimensionless notation  $N_g = (L_t + Re\xi_s/64)$  in (34) leads to the simple relation between the Grashof number  $Gr$ , the efficiency  $\mathcal{E}$  and the Reynolds number  $Re$

$$HGr\mathcal{E} = 32ReN_g. \quad (35)$$

Now using scalings (23) in (35) provides new scaling laws for the  $Re$ - $Gr$  relation

$$D/D : Re \sim \left( \frac{Gr}{N_g} H \left( \frac{L}{Pr} \right)^{1/3} \right)^{3/4} \quad \& \quad D/N : Re \sim \left( \frac{Gr}{N_g} H \left( \frac{L}{Pr} \right)^{2/3} \right)^{3/5}. \quad (36)$$

Both scaling are tested upon experimental results of [21,33,11,34,26,35] in Fig. 7. Fig. 7 also depicts the correlations  $Re \sim \sqrt{Gr}$  proposed by [3]. In the D/N case, the predicted slope of our scaling (36) (continuous line) compared to previous correlations ( $Re \sim \sqrt{Gr}$ ) (dotted line) provides a better trend to the experimental points which have been gathered from numerous experimental configurations (having distinct loops dimensions, thermal conditions, as well as materials). The comparison between Fig. 7a and 7b trend, clearly shows that the experimental  $Re$ - $Gr$  relation also depends on the applied sets of boundary conditions. To be specific, the experimental points collapsed into Fig. 7a show a  $Re \sim Gr^{3/4}$  scaling (continuous curve) distinct from the  $Re \sim Gr^{3/5}$  of Fig. 7b as well as from [3] correlation's  $Re \sim Gr^{1/2}$ . Thermal conditions, i.e. boundary-conditions dependant behavior of natural

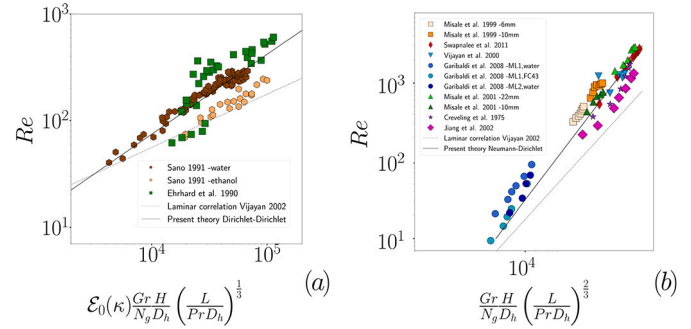


Fig. 7. Log-log plot of the Reynolds number versus Grashof number for various experimental natural convection loops. Dotted lines are the correlation proposed in [3]. (a) D/D case. Continuous line is the D/D scaling (36)  $Re \sim Gr^{3/4}$ . (b) D/N case. Continuous line is the D/N scaling (36)  $Re \sim Gr^{3/5}$ .

convective loops is indeed a previously disregarded issue. Furthermore, it is worth observing that the data collapse obtained in Fig. 7 is not perfect, as also found in previous scaling analysis of the Reynolds-Grashof relation in natural convective loops [3,36]. However, here, the data collapse has been improved from considering the all sets of parameters and dimensionless number given in (36), among whose prefactor  $\mathcal{E}_0(\kappa)$  improved it significantly. This suggests that some other features of specific experimental loops could be responsible for this imperfect data collapse, as for example, another additional solid (with a different conductivity) used in the adiabatic regions.

## 5. Conclusion

Natural convective loops are practical, sparse, pump-free buoyancy driven heat exchangers, heated from below and cooled from above. Above a critical Grashof number, and within a wide range of  $Gr$ , they display a stable, self-sustained rotating flow. This work has investigated the origin of experimentally reported scaling-laws for the Reynolds-Grashof relation within these loops. Numerical simulations have permitted to analyze the 3D complex flow field resulting from both complex geometry and inertia. Albeit the flow-field significantly differs from a laminar unidirectional buoyancy driven Poiseuille flow, deviations from it are found poorly relevant to heat transfer, being dominated by entrance exchanges within boundary layers. This has motivated forthcoming efforts to analyze heat transfer in these loops within unidirectional flow approximation. Using a semi-analytical approach, the complete advection-diffusion-conduction transport problem (both in fluid and solid) has been solved using generalized Graetz-mode solutions. Studying the loop thermal efficiency, distinct and well-defined power-law scalings are found for the efficiency versus Graetz number relation in the large  $Gr_a$  limit. These semi-analytical results have been complemented with an asymptotic analysis of heat transfer within boundary layers providing consistent scaling for the thermal efficiency. Using this efficiency scaling within a one-dimensional pressure balance within the loop leads to new scaling relationship for the Reynolds-Grashof relation dependant on the chosen set of applied thermal boundary conditions. These predictions have been convincingly compared with experimental observation collapsed into proper combination of dimensionless parameters. This analysis could help designing convective loop exchange's capabilities.

### CRedit authorship contribution statement

**F. Plouraboué:** Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Investigation, Methodology, Supervision, Validation, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing. **M. Rudkiewicz:** Data curation, Formal analysis, Investigation, Validation, Visualization, Writing – review & editing. **F. David:** Conceptualization, Project administration, Resources, Software, Supervision. **H. Neau:** Resources,

Software. **G. Debenest**: Conceptualization, Project administration, Supervision, Validation.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Data availability

No data was used for the research described in the article.

### Acknowledgements

This work is under a CC-BY 4.0 license. This work was supported by Electricité de France (EDF) and ANRT number 05864.

### Appendix A. Dirichlet-Neumann linear problem

Let us first define matrix  $\mathbf{P}_{DD}^{\pm\pm}$ , from its elements  $[\mathbf{P}_{DD}^{\pm\pm}]_{ij}$  for  $(i, j) \in \mathbb{N}^*$ ,

$$[\mathbf{P}_{DD}^{\pm\pm}]_{ij} = \int_0^1 \left(1 + \lambda_{\pm i}^D \lambda_{\pm j}^D\right) \Theta_{\pm i}^D \Theta_{\pm j}^D r dr. \quad (\text{A.1})$$

Similarly  $\mathbf{P}_{DN}^{\pm\pm}$  defined by

$$[\mathbf{P}_{DN}^{\pm\pm}]_{ij} = \int_0^1 \left(1 + \lambda_{\pm i}^D \lambda_{\pm j}^N\right) \Theta_{\pm i}^D \Theta_{\pm j}^N r dr. \quad (\text{A.2})$$

Furthermore, for  $(i, j) \in \mathbb{N}^*$ , let us define diagonal matrices  $\mathbf{D}_D^{\pm}(s)$  parametrized by  $s$  as

$$[\mathbf{D}_D^+ ]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda_{\pm j}^D s}, \quad [\mathbf{D}_D^- ]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda_{\pm j}^D (s-L)} \quad (\text{A.3})$$

and  $\mathbf{D}_N^{\pm}(s)$  as

$$[\mathbf{D}_N^+ ]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda_{\pm j}^N s} \quad \& \quad [\mathbf{D}_N^- ]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda_{\pm j}^N (s+2s_0)} \quad (\text{A.4})$$

with  $2s_0 = L + 2H$ . Now defining symmetric matrix  $\mathbf{M}_1$  (associated with the top part of functional (22)) as

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{DD}^{++} & \mathbf{P}_{DD}^{+-} \mathbf{D}_D^-(0) & \mathbf{P}_{DN}^{++} \mathbf{D}_N^+(0) & \mathbf{P}_{DN}^{+-} \\ \cdots & \mathbf{D}_N^-(0) \mathbf{P}_{DD}^{--} \mathbf{D}_N^-(0) & \mathbf{D}_D^-(0) \mathbf{P}_{DN}^{+-} \mathbf{D}_N^+(0) & \mathbf{D}_D^-(0) \mathbf{P}_{DN}^{--} \\ \cdots & \cdots & \mathbf{D}_N^-(0) \mathbf{P}_{NN}^{++} \mathbf{D}_N^+(0) & \mathbf{D}_N^-(0) \mathbf{P}_{NN}^{+-} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{P}_{NN}^{--} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

and symmetric matrix  $\mathbf{M}_2$  (associated with the bottom part of functional (22)) as

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_D^+(L) \mathbf{P}_{DD}^{++} \mathbf{D}_D^+(L) & \mathbf{D}_D^+(L) \mathbf{P}_{DD}^{+-} & \mathbf{D}_D^+(L) \mathbf{P}_{DN}^{++} & \mathbf{D}_D^+(L) \mathbf{P}_{DN}^{+-} \mathbf{D}_N^-(2s_0) \\ \cdots & \mathbf{P}_{DD}^{--} & \mathbf{P}_{DN}^{+-} & \mathbf{P}_{DN}^{--} \mathbf{D}_N^-(2s_0) \\ \cdots & \cdots & \mathbf{P}_{NN}^{++} & \mathbf{P}_{NN}^{+-} \mathbf{D}_N^-(2s_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D}_N^-(2s_0) \mathbf{P}_{NN}^{--} \mathbf{D}_N^-(2s_0) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

with, again,  $-2s_0 = -L - 2H$ . Unknown vector  $\mathbf{X}$  is build from unknown amplitudes vectors  $\mathbf{x}_{\pm}^D$  —resp—  $-\mathbf{x}_{\pm}^N$ —whose components are  $x_{\pm n}^D$  —resp—  $-x_{\pm n}^N$  — from  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{\pm}^D, \mathbf{x}_{\pm}^D, \mathbf{x}_{\pm}^N, \mathbf{x}_{\pm}^N)^T$ . Vectors  $\mathbf{S}_{\pm}^N(s)$  are defined from their components

$$\mathbf{S}_{\pm n}^N(s) = \alpha_{\pm n}^N c_{\pm n}(s) \quad (\text{A.7})$$

with  $c_{\pm n}(s)$  given in (16) and  $\alpha_{\pm n}^N$  in (11). Defining  $\mathbf{R}_{\pm}^D$  vectors  $\mathbf{R}_{\pm}^N$  with their components

$$\mathbf{R}_{\pm n}^D = \int_0^1 \Theta_{\pm n}^D r dr \quad \& \quad \mathbf{R}_{\pm n}^N = \int_0^1 \Theta_{\pm n}^N r dr, \quad (\text{A.8})$$

with generalized Graetz modes  $\Theta_n$  defined in (10). Vectors  $\mathbf{B}_1$  is then defined as

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2R_0 L}{Pe} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_D^+(0) \mathbf{R}_+^D \\ \mathbf{D}_D^-(0) \mathbf{R}_-^D \\ \mathbf{D}_N^+(0) \mathbf{R}_+^N \\ \mathbf{D}_N^-(0) \mathbf{R}_-^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_D^+(0) \mathbf{P}_{DN}^{++} \mathbf{S}_+^N(0) + \mathbf{D}_D^+(0) \mathbf{P}_{DN}^{+-} \mathbf{S}_-^N(0) \\ \mathbf{D}_D^-(0) \mathbf{P}_{DN}^{+-} \mathbf{S}_+^N(0) + \mathbf{D}_D^-(0) \mathbf{P}_{DN}^{--} \mathbf{S}_-^N(0) \\ \mathbf{D}_N^+(0) \mathbf{P}_{NN}^{++} \mathbf{S}_+^N(0) + \mathbf{D}_N^+(0) \mathbf{P}_{NN}^{+-} \mathbf{S}_-^N(0) \\ \mathbf{D}_N^-(0) \mathbf{P}_{NN}^{+-} \mathbf{S}_+^N(0) + \mathbf{D}_N^-(0) \mathbf{P}_{NN}^{--} \mathbf{S}_-^N(0) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

and

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_D^+(L) \mathbf{P}_{DN}^{++} \mathbf{S}_+^N(-2s_0) + \mathbf{D}_D^+(L) \mathbf{P}_{DN}^{+-} \mathbf{S}_-^N(-2s_0) \\ \mathbf{D}_D^-(L) \mathbf{P}_{DN}^{+-} \mathbf{S}_+^N(-2s_0) + \mathbf{D}_D^-(L) \mathbf{P}_{DN}^{--} \mathbf{S}_-^N(-2s_0) \\ \mathbf{D}_N^+(-2s_0) \mathbf{P}_{NN}^{++} \mathbf{S}_+^N(-2s_0) + \mathbf{D}_N^+(-2s_0) \mathbf{P}_{NN}^{+-} \mathbf{S}_-^N(-2s_0) \\ \mathbf{D}_N^-(-2s_0) \mathbf{P}_{NN}^{+-} \mathbf{S}_+^N(-2s_0) + \mathbf{D}_N^-(-2s_0) \mathbf{P}_{NN}^{--} \mathbf{S}_-^N(-2s_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Assembling

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad \& \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \quad (\text{A.11})$$

The linear system to be solved is finally:

$$\mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{A.12})$$

### Appendix B. Dirichlet-Neumann boundary layer analysis

#### B.1. Inner analysis

It is first interesting to provide the expansion of the radial Laplacian of the r.h.s. of (5) in the inner variable  $y$

$$\frac{1}{(1-\delta y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( (1-\delta y) \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \delta \frac{\partial}{\partial y} - \delta^2 y \frac{\partial}{\partial y} + O(\delta^3) \quad (\text{B.1})$$

In the inner region, the temperature field is expanded as

$$T_{in} = T_{in}^0 + \delta T_{in}^1 + \delta^2 T_{in}^2 + O(\delta^3) \quad (\text{B.2})$$

At  $O(1)$ , (5) leads to

$$2y \frac{\partial T_{in}^0}{\partial s} - \frac{\partial^2 T_{in}^0}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{B.3})$$

with boundary condition  $\partial_y T_{in}^0(0) = 0$ . The leading order solution then reads

$$T^0 = a_0^0 + a_1^0 \left( \frac{y^3}{3} + s \right) \quad (\text{B.4})$$

At  $O(\delta)$ , (5) with  $w_f(r)/2 = \delta y(2 - \delta y)$  provides

$$2y \frac{\partial T_{in}^1}{\partial s} - \frac{\partial^2 T_{in}^1}{\partial y^2} = y^2 \frac{\partial T_{in}^0}{\partial s} - \frac{\partial T_{in}^0}{\partial y}, \quad (\text{B.5})$$

associated with boundary condition  $\partial_y T_{in}^1(0) = 1$ . The first order solution is decomposed into a particular solution dealing with the non-zero boundary condition and the r.h.s. of (B.5) and a general solution which is a copy of the leading order (B.4). Since the contribution associated with r.h.s. of (B.5) evaluated with (B.4) cancels out, one finds

$$T_{in}^1 = y + a_0^1 + a_1^1 \left( \frac{y^3}{3} + s \right) \quad (\text{B.6})$$

At  $O(\delta^2)$ , using (B.1)

$$2y \frac{\partial T_{in}^2}{\partial s} - \frac{\partial^2 T_{in}^2}{\partial y^2} = y^2 \frac{\partial T_{in}^1}{\partial s} - \frac{\partial T_{in}^1}{\partial y} - y \frac{\partial T_{in}^0}{\partial y}, \quad (\text{B.7})$$

with boundary condition  $\partial_y T_{in}^2(0) = 0$ . Again, the solution is decomposed into the general and particular ones, so that

$$T_{in}^2 = -\frac{1}{2} y^2 + a_0^2 y^3 + a_1^2 \left( \frac{y^3}{3} + s \right) \quad (\text{B.8})$$



### B.2. Outer analysis

The outer region temperature field is expanded as

$$T_{out} = T_{out}^0(0) + O(\delta^3) \tag{B.9}$$

because up to  $O(\delta^3)$  corrections, (5) with  $w_f(r) = 2Y(2 - Y)$  provides

$$\frac{1}{2}w_f(Y)\frac{\partial T_{out}^0}{\partial s} = 0. \tag{B.10}$$

Hence, the leading order outer temperature is independent of the axial coordinate  $s$ , so that  $T^0(Y)$  which is both determined by the inlet profile and the matching. Since the inlet profile is  $O(1)$ , there is no  $O(\delta)$  and  $O(\delta^2)$  corrections to the outer solution.

### B.3. Matching

Using the intermediate variable  $\eta = y\delta^{1-\gamma} = Y\delta^{-\gamma}$  with  $0 < \gamma < 1$ , and expanding  $T_{out}$  in  $\eta$  leads to

$$T_{out} = T_{out}^0(0) + \eta\delta^\gamma \frac{\partial T_{out}^0}{\partial Y}(0) + \frac{1}{2}\eta^2\delta^{2\gamma} \frac{\partial^2 T_{out}^0}{\partial Y^2}(0) + \dots \tag{B.11}$$

Expanding the inner solution leads to

$$T_{in} = \frac{a_0^0}{3}\eta^2\delta^{3(\gamma-3)} + \frac{a_1^1}{3}\eta^2\delta^{3(\gamma-2)} + \left(\frac{a_2^2}{3} + a_1^0\right)\eta^3\delta^{3(\gamma-1)} + a_0^0 + a_1^0s + \delta(a_0^1 + a_1^1s) + \eta\delta^\gamma - \frac{1}{2}\eta^2\delta^{2\gamma}\delta^2(a_0^2 + a_2^1s) + \dots$$

Matching at  $O(\delta^{3(\gamma-3)})$ ,  $O(\delta^{3(\gamma-2)})$ ,  $O(\delta^{3(\gamma-1)})$  gives  $a_0^1 = a_1^1 = a_2^1 = 0$ . Matching  $O(1)$  and  $O(\delta^\gamma)$  gives

$$a_0^0 = T_{out}^0(0), \quad \& \quad 1 = \frac{\partial T_{out}^0}{\partial Y}(0), \tag{B.12}$$

whilst matching  $O(\delta)$  and  $O(\delta^2)$  gives  $a_0^1 = a_0^2 = 0$ . This finally leads to

$$T_{in}^0 = T_{out}^0(0) + \delta y + O(\delta^3) \tag{B.13}$$

### References

[1] A. Pacheco-Vega, F. Walfre, H.-C. Chang, M. Sen, Nonlinear analysis of tilted toroidal thermosyphon models, *Int. J. Heat Mass Transf.* 45 (7) (2002) 1379–1391.  
 [2] P. Vijayan, A.W. Mehta, K.S. Date, On the steady-state performance of natural circulation loops, *Int. J. Heat Mass Transf.* 34 (9) (1991) 2219–2230.  
 [3] P. Vijayan, H. Austregesilo, Scaling laws for single-phase natural circulation loops, *Nucl. Eng. Des.* 152 (1) (1994) 331–347.  
 [4] N. Bordoloi, A. Sharma, H. Nautiyal, V. Goel, An intense review on the latest advancements of Earth air heat exchangers, *Renew. Sustain. Energy Rev.* 89 (2018) 261–280.  
 [5] V.T. Morgan, The overall convective heat transfer from smooth circular cylinders, in: T.F. Irvine, J.P. Hartnett (Eds.), *Adv. Heat Transf.*, vol. 11, Elsevier, 1975, pp. 199–264.  
 [6] R. Greif, A review of modern advances in analyses and applications of single-phase natural circulation loop in nuclear thermal hydraulics, *J. Heat Transf.* 110 (4b) (1988) 1243–1258.  
 [7] D. Basu, S. Bhattacharyya, P. Das, A review of modern advances in analyses and applications of single-phase natural circulation loop in nuclear thermal hydraulics, *Nucl. Eng. Des.* 280 (2014) 326–348.  
 [8] D. Lu, Z. Xiao, B. Chen, Investigation on scaling law for reactor natural circulation under motion conditions, *Ann. Nucl. Energy* 37 (3) (2010) 691–700.  
 [9] B. Yan, L. Yu, Y. Yang, The model of laminar pulsatile flow in tubes in rolling motion, *Nucl. Eng. Des.* 240 (2010) 2805–2811.

[10] T. Ishida, T. Yoritsune, Effects of ship motion on natural circulation of deep sea research reactor drx, *Nucl. Eng. Des.* 215 (2002) 51–67.  
 [11] M. Misale, M. Frogheri, Stabilization of a single-phase natural circulation loop by pressure drops, *Exp. Therm. Fluid Sci.* 25 (5) (2001) 277–282.  
 [12] P. Welander, On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop, *J. Fluid Mech.* 29 (1) (1967) 17–30.  
 [13] P.J. Widmann, M. Gorman, K.A. Robbins, Nonlinear dynamics of a convection loop ii: chaos in laminar and turbulent flows, *Physica D* 36 (1989) 157–166.  
 [14] P. Ehrhard, U. Muller, Dynamical behaviour of natural convection in a single-phase loop, *J. Fluid Mech.* 217 (1990) 487–518.  
 [15] A. Zerrouki, A. Boumediene, K. Bouhadef, The natural circulation solar heater model with linear temperature distribution, *Renew. Energy* 26 (2002) 549–559.  
 [16] P. Vijayan, A. Date, Experimental and theoretical investigations on the steady-state and transient behavior of a thermosyphon with throughflow in a figure-of-eight loop, *Int. J. Heat Mass Transf.* 33 (11) (1990) 2479–2489.  
 [17] M. Ishii, I. Kataoka, Scaling laws for thermal-hydraulic system under single phase and two-phase natural circulation, *Nucl. Eng. Des.* 81 (3) (1984) 411–425.  
 [18] D.N. Basu, S. Bhattacharyya, P. Das, Development of a unified model for the steady-state operation of single-phase natural circulation loops, *Int. J. Heat Mass Transf.* 62 (2013) 452–462.  
 [19] R. Saha, S. Sen, S. Mookherjee, K. Ghosh, A. Mukhopadhyay, D. Sanyal, Experimental and numerical investigation of a single-phase square natural circulation loop, *J. Heat Transf.* 137 (12) (08 2015).  
 [20] F. Archambeau, J.-M. Hérard, J. Laviéville, Comparative study of pressure-correction and Godunov-type schemes on unsteady compressible cases, *Comput. Fluids* 38 (8) (2009) 1495–1509.  
 [21] M. Misale, M. Frogheri, Influence of pressure drops on the behavior of a single-phase natural circulation loop: preliminary results, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 26 (5) (1999) 597–606.  
 [22] F. Archambeau, N. Méchitoua, M. Sakiz, Code Saturne: a finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows - industrial applications, *Int. J. Finite Vol.* 1 (1) (2004).  
 [23] Z. Shang, Performance analysis of large scale parallel CFD computing based on code Saturne, *Comput. Phys. Commun.* 184 (2013) 381–386.  
 [24] C. Katsamis, CFD modelling of passive cooling natural circulation loops, Ph.D. thesis, Manchester University, Stanford, CA, Aug. 2022.  
 [25] G.N. Faris, R. Viskanta, An analysis of laminar combined forced and free convection heat transfer in a horizontal tube, *Int. J. Heat Mass Transf.* 12 (10) (1969) 1295–1309.  
 [26] H.F. Creveling, J.F. De Paz, J.Y. Baladi, R.J. Schoenhals, Stability characteristics of a single-phase free convection loop, *J. Fluid Mech.* 67 (1) (1975) 65–84.  
 [27] W.M. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, 1998.  
 [28] C. Pierre, F. Plouraboué, Numerical analysis of a new mixed formulation for eigenvalue convection-diffusion problems, *SIAM J. Appl. Math.* 70 (3) (2009) 658–676.  
 [29] C. Pierre, F. Plouraboué, Analytical properties of Graetz modes in parallel and concentric configurations, *Meccanica* 55 (8) (2020) 1545–1559.  
 [30] J. Bouyssier, C. Pierre, F. Plouraboué, Mathematical analysis of parallel convective exchangers with general lateral boundary conditions using generalized Graetz modes, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 24 (4) (2014) 627–665.  
 [31] C. Pierre, J. Bouyssier, F. de Gournay, F. Plouraboué, Numerical computation of 3d heat transfer in complex parallel heat exchangers using generalized Graetz modes, *J. Comput. Phys.* 268 (2014) 84–105.  
 [32] J. Dichamp, F. de Gournay, F. Plouraboué, Theoretical and numerical analysis of counter-flow parallel convective exchangers considering axial diffusion, *Int. J. Heat Mass Transf.* 107 (2017) 154–167.  
 [33] P. Garibaldi, M. Misale, Experiments in single-phase natural circulation miniloops with different working fluids and geometries, *J. Heat Transf.* 130 (10) (08 2008).  
 [34] B. Swapnalee, P. Vijayan, A generalized flow equation for single phase natural circulation loops obeying multiple friction laws, *Int. J. Heat Mass Transf.* 54 (11) (2011) 2618–2629.  
 [35] Y. Jiang, M. Shoji, Flow stability in a natural circulation loop: influences of wall thermal conductivity, *Nucl. Eng. Des.* 222 (1) (2003) 16–28.  
 [36] P. Vijayan, M. Bade, D. Saha, R. Sinha, V. Venkat Raj, A generalised correlation for the steady state flow in single-phase natural circulation loops, *Tech. rep.*, Bhabha Atomic Research Center, 2000.

# Chapitre IV

## Modèle d'évaporation convective en micro-canal et extension de la méthode des modes de Graetz généralisés

Ce chapitre détaille dans un premier temps, le cheminement qui a conduit à l'élaboration du modèle d'ébullition et à l'utilisation de la décomposition en modes de Graetz généralisés pour simuler la formation de vapeur dans un micro-échangeur.

### IV.1 Structure des écoulements en vaporisation forcée confinée

Comme cela a été discuté au chapitre I, une inversion des rapports de force intervenant dans l'ébullition se produit aux petites dimensions. Cette limite est le plus souvent définie à partir du rapport entre forces de capillarité/flottabilité [1, 2]. Concrètement, une fois cette limite atteinte, la croissance des bulles de vapeur se singularise : une étape d'expansion rapide intervient lorsque celle-ci atteint la taille de la section de passage et interagit de manière privilégiée avec les parois [3, 4, 5]. Ce sont d'ailleurs des structures telles que plugs, régime de Taylor, bulles confinées, ou bien régime annulaire, dans lesquelles la phase gazeuse occupe une majorité de la section, qui sont le plus souvent observées expérimentalement [6, 2]. Les visualisations réalisées par ces derniers (et leurs références) permettent d'affiner les structures de l'écoulement. En effet, après le décrochage du *nucleus* et l'occupation de la section de passage par la bulle, deux *scenarii* principaux se dégagent :

- soit la production de vapeur est suffisamment importante pour prendre le pas sur l'écoulement liquide incident, et la queue du bouchon vapeur remonte l'écoulement ou reste quasi-immobile [7, 8, 9]
- soit l'inertie liquide est plus importante et la production de vapeur ne suffit pas à contrecarrer la traînée ; la queue du bouchon est alors convectée plus ou moins rapidement jusqu'à ce que ce dernier soit chassé du canal et qu'une nouvelle bulle croisse pour débiter un second cycle. [10, 11]

Dans le premier cas (Cf Fig. IV.1a), la remontée d'une poche de vapeur contre l'écoulement s'accompagne de brusques variations de débit et de pression : il s'agit en réalité de DWO. Dans ce cas de figure, la portion longitudinale du canal occupé par la vapeur varie très rapidement. A contrario, en dehors de ce régime instable, la portion aval de l'ONB est occupée majoritairement par la vapeur et l'extrémité amont de ce volume vapeur demeure, en moyenne, relativement

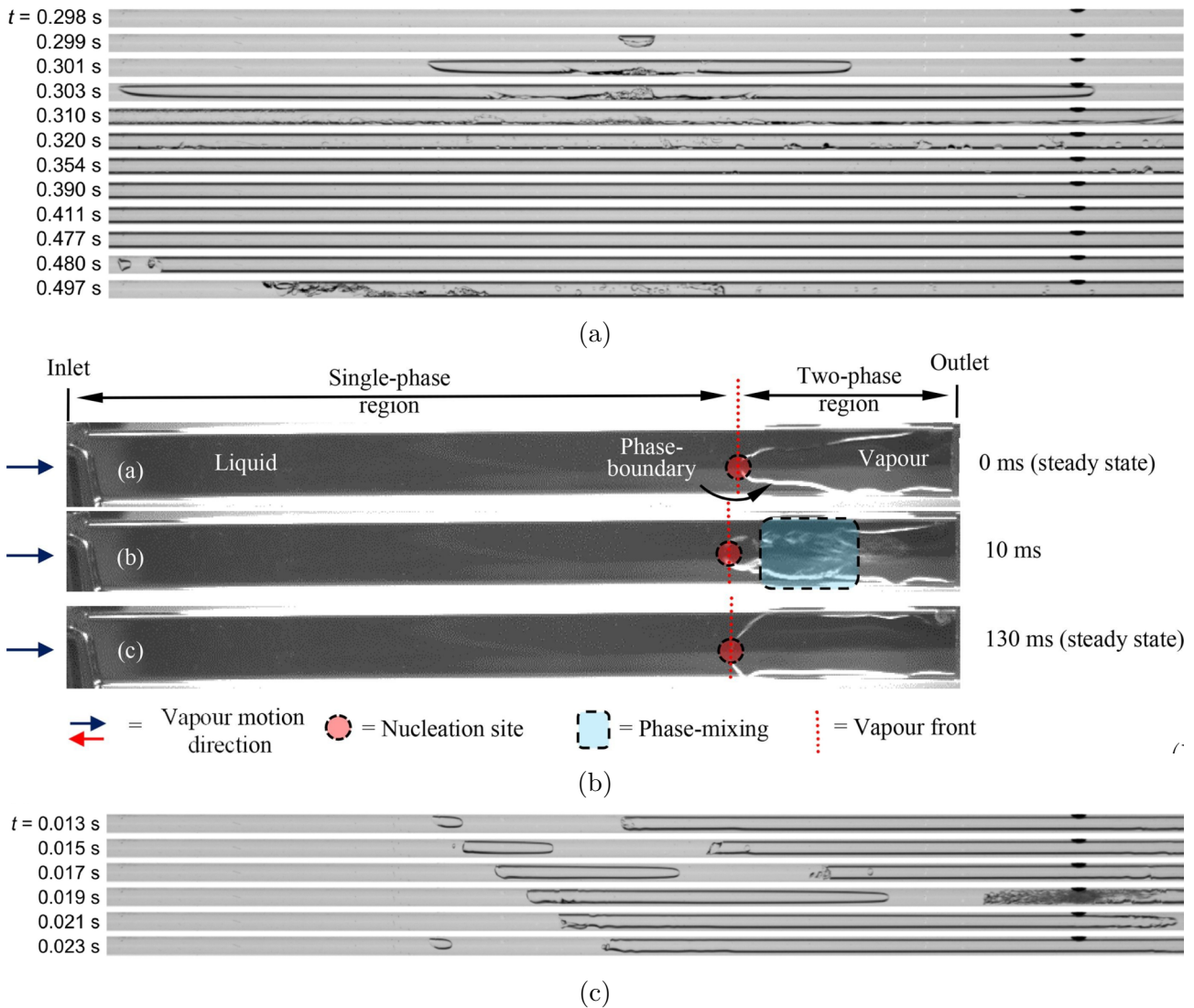


Figure IV.1: (a) Remontée d'un bouchon vapeur contre le sens de l'écoulement ; Écoulement de HFE-7100 ( $Co = 1.74$ ) [7]. (b) Mise en place d'un front d'évaporation stationnaire dans un écoulement en micro-canal de FC-72 ; ( $Co = 0.797$ ) [8]. (c) Dérive d'un bouchon vapeur convecté par l'écoulement ; Écoulement de HFE-7100 ( $Co = 1.74$ ) [10].

stationnaire (d'autant plus que le canal est élancé), voir Fig. IV.1b et Fig. IV.1c. A l'extrême, on peut considérer qu'en général et indépendamment du temps, lors de l'ébullition du fluide dans un micro-canal, l'écoulement se divise en un premier domaine globalement liquide, suivi d'un second, cette fois, essentiellement gazeux entre lesquels est intercalée une courte zone de transition. Cette structure repose sur la dynamique spécifique de la croissance des bulles en espace confiné. Autrement dit, elle doit être associée à l'intensité de la tension de surface qui assure la cohésion de ces volumes de vapeur sur l'ensemble du canal. Or c'est précisément la prise en compte de la capillarité qui constitue l'un des obstacles majeurs pour certaines familles de modèle, comme c'est le cas en particulier pour les simulations CFD de ces écoulements.

## IV.2 Méthodes numériques et modèles de vaporisation confinée

La littérature concernant l'ébullition confinée présente une grande variété d'approches de modélisation qui ne sont d'ailleurs pas limitées aux calculs CFD 3D. Ce paragraphe a pour but de présenter les principales stratégies mises en œuvre pour simuler les écoulements diphasiques liquide/gaz confinés afin de mettre en avant les difficultés associées. Il n'a cependant pas la vocation d'être exhaustif car le sujet est vaste et technique. Il vise plutôt à donner une brève synthèse de l'existant et présenter ainsi un panorama des différentes stratégies de modélisation des écoulements diphasiques dans le cadre de l'ébullition en micro-canaux.

### 2.a Représentations bi- et tri-dimensionnelles

Plutôt récemment, comme de façon générale en mécanique des fluides, la modélisation de l'ébullition en microcanal a, de plus en plus régulièrement recours aux simulations CFD. Que cela soit à l'échelle d'une bulle [12], d'un canal [13] ou d'une série de canaux parallèles [14]. Ces approches numériques possèdent le grand avantage de permettre l'accès à des grandeurs peu accessibles expérimentalement -comme la température au cœur du fluide- en raison des faibles dimensions des dispositifs. Ces simulations pâtissent, en revanche d'une réelle difficulté à tenir compte des effets capillaires aux interfaces et aux parois. A titre d'exemple, la prise en compte de la rugosité des surfaces requiert un effort de maillage très significatif. Les effets de mouillage en l'absence de rugosité peuvent se traduire par une condition de glissement à la paroi et un retardement de l'ONB [15]. Plus généralement, les interactions fluide/paroi proches de la ligne triple sont particulièrement complexes et demeurent une source d'incertitude conséquente lors de l'établissement des modèles. L'indétermination de certains paramètres régissant les phénomènes à très petites échelles, tels que la partition des flux thermiques, les angles de contact ou les propriétés des parois impactent jusqu'aux échelles macroscopiques la structure des phases et leur dynamique. A titre d'illustration, la micro-région, zone délimitée par la proximité immédiate de la paroi et d'une interface diphasique, dont la taille est inférieure au millimètres peut, dans le cas des caloducs, concentrer de l'ordre de 60 à 80% du flux injecté, comme le rapporte [16].

Concernant les forces de tension de surface, leurs effets sont doubles : d'une part le gradient de la tension de surface génère des efforts tangentiels à l'interface, appelé force de Marangoni, à l'origine de mouvements de convection, d'autre part, les efforts normaux à l'interface, décrits par la pression de Laplace, dépendent et agissent sur les pressions de part et d'autre de l'interface ainsi que sa courbure. L'estimation de cette dernière composante est souvent réalisée par le biais d'une force volumique, focalisée autour de l'interface, dont l'intensité et l'orientation repose sur une formulation *Continuum Surface Force*, telle que proposée par [17]. Outre la génération de courants parasites à proximité de l'interface, le fait que son expression fasse intervenir la normale à l'interface et surtout sa courbure produit de nombreuses difficultés numériques conduisant à une diversité d'approche pour les traiter. A l'exception des modèles Lattice Boltzmann, ce panel méthodologique peut être scindé en deux sous-catégories appelées '*interface-tracking*' et '*interface-capturing*'. Bien qu'elles reposent toutes les deux sur une formulation mono-fluide, elles se distinguent nettement par leur traitement de l'interface. Ainsi les méthodes de capture d'interface s'appuient sur la reconstruction de celles-ci via l'utilisation d'un champ ou d'une fonction, d'un point de vue Eulérien. Parmi ces méthodes les plus connues sont

- les méthodes VoF, qui reposent sur le taux de vide, auquel est appliqué une reconstruction géométrique ou un schéma compressif pour positionner l'interface. Elles sont néanmoins

sensibles à la discrétisation spatiale et s’accompagnent, par conséquent, d’un certain coût de calcul [18].

- les méthodes level-set qui s’appuient sur l’advection d’une fonction associée positionnant l’interface. Ces méthodes permettent une évaluation précise de la courbure et de la normale de l’interface. Cependant elles ne respectent pas nécessairement la conservation de la masse, et donc la condition d’incompressibilité [18].

Les méthodes de suivi d’interface, utilisent, à l’opposé un point de vue Lagrangien : l’interface est représentée par des marqueurs qui permettent d’interpoler la géométrie de l’interface. Au cours du temps ces marqueurs sont convectés et une nouvelle position de l’interface est obtenue [19]. Ces méthodes peuvent se révéler assez coûteuses en puissance de calcul et gourmandes en mémoire, en particulier lorsque l’interface présente une géométrie complexe comprenant des bifurcations géométriques [20]. Elles offrent en revanche un positionnement précis de l’interface et un calcul des efforts de tension de surface exempts de courants parasites (ou *spurious currents*) et tout en respectant le bilan de masse [21].

## 2.b Autres familles de modèles

Ces problématiques sont particulièrement suivies dans la communauté scientifique et évoluent rapidement mais la puissance prérequisée pour les utiliser a longtemps limité leurs domaines d’applications, cédant la place à des modèles analytiques ou du moins numériquement moins coûteux, tels que les modèles phénoménologiques ou des modèles 0D ou 1D. Ces modèles ont notamment été très utilisés dans un premier temps car ils permettent une détermination parfois analytique, quasi-analytique ou à très faible coup de calcul, du comportement et de la stabilité des écoulements diphasiques [22, 23, 24]. Ces approches simplifiées sont toujours utilisées aujourd’hui pour représenter des phénomènes à l’échelle du système à l’instar des PDO ou des réseaux de canaux. De tels résultats et prédictions restent pour l’instant difficiles à obtenir avec les outils de CFD. En parallèle de ces modèles, certains auteurs se sont appuyés sur des observations expérimentales pour déduire une structure ou un comportement type de l’écoulement ; ce motif sert ensuite d’élément de base pour ériger le modèle. C’est le cas des modèles de succession de bouchons [25, 26] ou encore de la description mécaniste des DWO [27]. De la même façon, le modèle qui sera décrit plus loin repose sur des hypothèses déduites des observations expérimentales synthétisées dans la section IV.1. Comme cela sera précisé plus bas, le modèle développé dans cette thèse considèrera un front de vaporisation plan. Cette hypothèse est très restrictive et ne permettra donc pas de tenir compte du développement des films liquides pariétaux. L’impact de cette hypothèse sur les transferts de chaleur et les niveaux de température sera analysé plus loin dans le chapitre V. Une attention particulière y sera portée sur la génération d’une surchauffe de la phase liquide située en amont de l’interface liquide/vapeur.

## IV.3 Description du modèle

### 3.a Objectifs et sélection du modèle

Le choix du modèle phénoménologique a été réalisé en tenant compte d’un certain nombre de contraintes propres aux échangeurs-générateurs de vapeur compacts à plaques :

- Une évaluation a permis d’identifier très rapidement le fort impact des effets capillaires dans les canaux fortement confinés du circuit secondaire.



- L'évaporation en une seule passe du fluide dans le GV ; en d'autres termes, l'écoulement ne se restreint pas à des structures caractéristiques des faibles ou des forts taux de vide, mais traverse, bien au contraire, une grande variété de régimes d'écoulement. Exit, donc les modèles locaux qui représentent finement une famille restreinte de régimes d'écoulement et ne seront utilisables que sur une portion limitée de l'échangeur.
- Une gamme de vitesse relativement élevée et une géométrie caractérisée par un énorme rapport de forme (de l'ordre d'un facteur 1000). Les dimensions des sections de passage fluide sont extrêmement petites devant leur longueur, qui contraignent lourdement le niveau de discrétisation et par conséquent l'espace mémoire requis par ces simulations (ainsi que le temps de calcul).
- La dynamique rapide voire violente de certaines instabilités qui impose une discrétisation temporelle fine
- L'existence de processus instables à l'échelle du système, comme les PCI ou les PDO impose en outre, non seulement une bonne prédiction de l'évaporation locale (en particulier lors de la croissance des bulles) mais aussi, une bonne prise en compte des interactions globales (entre les canaux consécutifs par conduction thermique, et avec l'ensemble de l'échangeur par communication hydraulique).

Les quelques points cités plus haut, pointent la difficulté, voire l'impossibilité de traiter dans leur ensemble les phénomènes d'importance en utilisant un unique outil de modélisation numérique tout en respectant les contraintes associées. A partir de ce constat, il est apparu plus judicieux de focaliser notre recherche sur une instabilité précise, qui pourra être traitée de manière plus approfondie. Ceci permet également d'établir un modèle dans lequel seuls les éléments ayant un impact de premier ordre dans l'instabilité choisie seront représentatifs.

En l'occurrence, la suite des développements se concentrera sur l'instabilité de Ledinegg et le phénomène de mal-distribution de débits. Pour rappel, il est possible de caractériser le comportement de cette instabilité à l'aide de la courbe caractéristique du système considéré. Il est intéressant de noter que les courbes trouvées dans la littérature s'appuient essentiellement sur des configurations de mono-canal à flux imposé ; or rien ne garantit que celles-ci soient représentatives des échanges dans un échangeur-générateur de vapeur. Au contraire, la présence d'une paroi solide et les effets de conduction en son sein, l'échange conjugué avec le canal primaire sont autant d'éléments qui s'écartent de la configuration de mono-canal à flux imposé et questionnent/interrogent sur, par la même occasion, la validité dans le contexte des GV des plages de stabilités de Ledinegg proposées dans la littérature. Un second élément d'intérêt tient au fait que la plage de stabilité du phénomène de mal-distribution est entièrement caractérisée par les propriétés de l'état stationnaire du système considéré et ne demande donc pas d'analyser les comportements transitoires du GV. L'intérêt de modéliser la thermo-hydraulique à l'équilibre des CSG est donc double : d'une part il se justifie par le besoin de caractériser dans l'état nominal le comportement thermique de ces échangeurs et, dans une approche plus macroscopique, les pertes de charge et son efficacité, d'autre part cela offre la possibilité d'invalider ou non la nécessité de particulariser l'espace de stabilité associé à l'instabilité de Ledinegg.

### 3.b Prescription de la structure de l'écoulement

Dans cette optique, à savoir la détermination de l'efficacité, des pertes de charge et de la courbe caractéristique, seule la connaissance de l'état stationnaire suffit. Pour cela, on suppose que la topologie de l'écoulement diphasique issu du processus d'évaporation se hiérarchise, à l'instar des écoulements décrits en section IV.1, en trois zones successives :

1. une zone liquide
2. une zone diphasique qui correspond à la production de la vapeur
3. une zone majoritairement constituée de vapeur

De plus, nous prenons le parti de considérer que, dans un milieu confiné, les forces capillaires dominant ou sont du même ordre de grandeur que les autres forces mises en jeu dans le processus d'évaporation (flottabilité, inertie, viscosité). La spécificité de l'évaporation en micro-canal consiste en une limitation spatiale de la zone de changement de phase, i.e. une réduction drastique de la largeur de la zone diphasique. Cette dernière peut, en outre, être considérée immobile à condition que l'expansion de la vapeur ne soit pas supérieure aux efforts engendrés par le débit liquide incident. L'intégration de ces deux hypothèses fortes permet d'idéaliser le processus d'évaporation en considérant que l'ensemble de l'écoulement liquide se transforme instantanément en vapeur au niveau d'une interface infinitésimale, voir [Fig. IV.2](#).

### 3.c Effets de courbure de l'interface liquide/vapeur

A priori l'interface à l'équilibre est courbe, et son plus petit rayon de courbure est contrôlé par la plus petite dimension du canal que nous appellerons  $h$ . Par la suite, cette courbure sera négligée, une hypothèse qui peut paraître grossière à première vue. Cela veut dire que nous nous affranchirons de la modélisation fine et locale des écoulements se produisant à proximité de l'interface et dont les dimensions caractéristiques sont encore de l'ordre de  $h$ . Plus précisément, l'écoulement du liquide en aval de l'interface n'est plus unidirectionnel autour de l'interface à une distance de l'ordre de  $h$ . Toutefois le mécanisme essentiel de l'instabilité de Ledinegg est associé à la variation différentielle de perte de pression produite par le déplacement de l'interface. Comme la correction produite sur la différence de pression par les déviations à l'unidirectionnalité des écoulements liquides/gaz est de l'ordre de  $h/L$ , négliger les effets de courbures revient à négliger des contributions relatives sur la perte de charge de l'ordre de  $h/L$ . Comme nous l'avons vu  $h/L \approx 10^{-3}$ , ce qui permet de mieux comprendre, dans ce contexte le fondement de cette hypothèse.

De plus, et de façon consistante, les possibles effets Marangoni ne sont pas pris en compte. Cette dernière hypothèse est aussi tout à fait justifiée au centre du canal car la condition thermodynamique de changement de phase impose une température constante de l'interface, conduisant à l'absence de gradient de tension de surface, donc la nullité de la force de Marangoni. Bien entendu, dans les micro-régions proche de la paroi des effets Marangoni peuvent se produire, mais la taille des régions concernées par ces écoulements est faible, et leurs contributions aux pertes de charge longitudinales sont inférieures à celles, déjà négligées, liées aux corrections de non-parallélisme de l'écoulement amont et aval de l'interface. En bref, notre modèle ne rend pas compte des effets de courbure, et ne prétend donc pas pouvoir placer l'interface avec une précision relative meilleure que  $h/L$ . Mais ces effets ont une faible incidence sur les analyses que nous allons faire.

### 3.d Caractérisation des phases

Pour résumer, la zone diphasique séparant le domaine liquide du domaine vapeur se développe ici sur une épaisseur infinitésimale et sera prise plane (en négligeant sa courbure et les effets qui y sont associés). L'écoulement diphasique est donc composé de deux domaines indépendants, dont les propriétés thermo-hydrauliques sont fixées à l'avance : on suppose que la pression dans le canal ou l'échangeur est proche de la pression de saturation. En pratique cette hypothèse

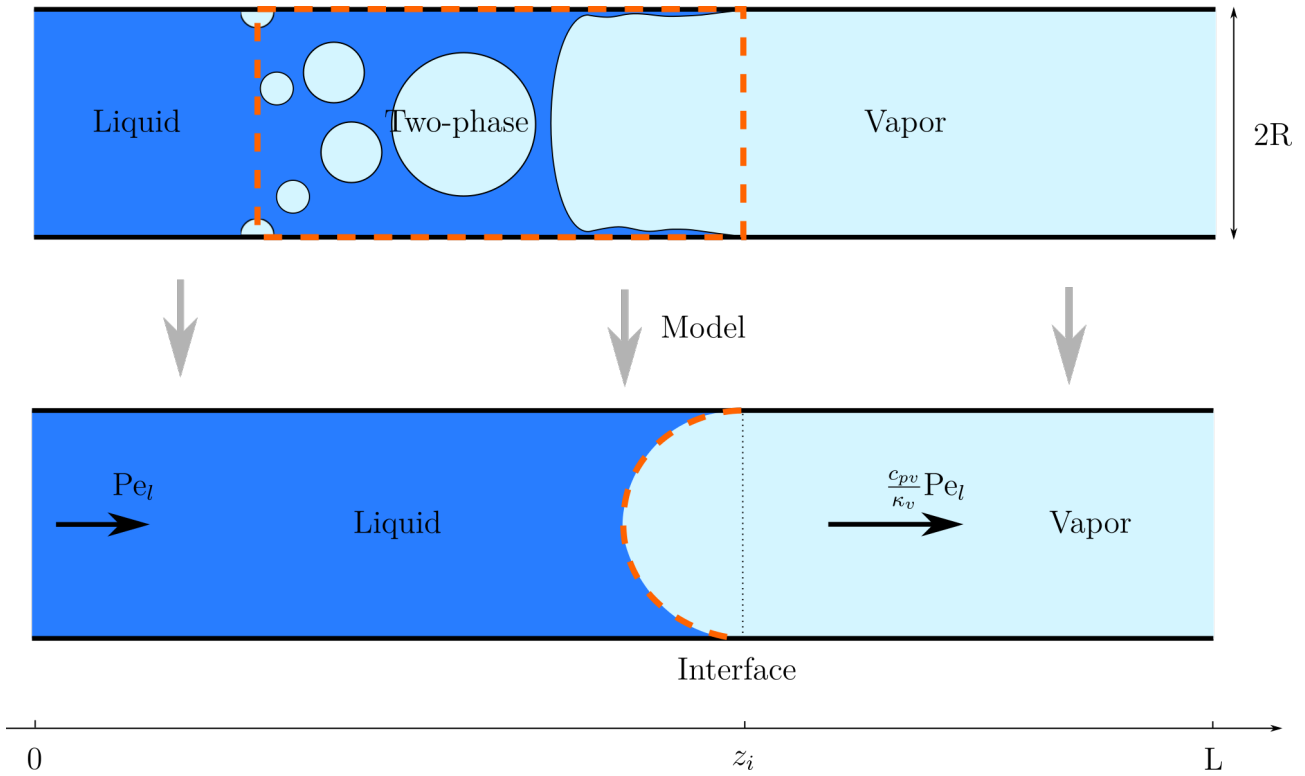


Figure IV.2: Schéma de principe de la structure de l'écoulement diphasique

n'est pas scrupuleusement respectée, mais une évaluation de l'ordre de grandeurs des pertes de charges le long du canal à l'aide des données expérimentales et de corrélations montre que celles-ci restent généralement bien inférieures à la pression de saturation. En connaissant la pression de saturation et en faisant l'hypothèse que l'écoulement reste laminaire et établi, on peut prescrire les propriétés physiques respectives des fluides ainsi que la forme et l'amplitude des champs de vitesse dans chaque domaine. Ces conditions assurent le couplage hydraulique entre les deux domaines, ce qui consiste essentiellement à garantir, dans notre cas, que le débit massique soit conservé d'une phase à l'autre. Les champs de vitesses possèdent chacun un profil de Poiseuille. L'amplitude de ce profil est imposée par les rapports des propriétés thermophysiques et le débit liquide initialement injecté :  $Pe_l = \frac{\kappa_v}{C_p} Pe_v$ . Le couplage thermique s'avère, quant à lui, plus riche puisque c'est au niveau de l'interface que la vaporisation prend place. La consommation d'énergie qui accompagne la vaporisation du débit liquide incident est notamment prise en compte lors du couplage de ces deux domaines. Plus exactement la thermodynamique du changement de phase se traduit par le respect d'une relation de saut portant sur l'équation de l'énergie (IV.1) et par une température homogène au niveau de l'interface  $T_{sat}$ . Au niveau des autres sections, la paroi solide ou le canal primaire, on impose simplement la continuité de la température et du flux thermique. Bien entendu les niveaux de vitesse sont également conservés. La conservation de l'enthalpie à l'interface [28] compte tenu de nos hypothèses peut alors s'exprimer sous la forme d'une discontinuité des flux thermiques de part et d'autre de l'interface liquide/vapeur. Cette relation est intimement liée à l'absence de changement de phase à la paroi (absence de films minces) et impacte de façon conséquente les transferts thermiques. En particulier, elle est à l'origine des surchauffes excessives observées dans le chapitre suivant.

$$\sum_j [\tilde{\rho}_j(\tilde{\mathbf{w}}_j - \tilde{\mathbf{w}}_i)\tilde{h}_j + \tilde{k}_j \nabla \tilde{T}_j] \cdot \mathbf{n}_j = 0$$

$$\tilde{k}_v \frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial \tilde{z}} - \tilde{k}_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial \tilde{z}} = \tilde{\rho}_l \tilde{w}_l \mathcal{L}_{vap}.$$



Soit après adimensionnement,

$$\begin{aligned}
\kappa_v \frac{\partial T_v}{\partial z} - \frac{\partial T_l}{\partial z} &= \frac{\tilde{R}}{\tilde{k}_l \Delta \tilde{T}_h} \mathcal{L}_{vap} \\
&= \frac{\dot{m} \tilde{c}_{pl} 2 \tilde{R}}{\tilde{k}_l \tilde{\Gamma}} \frac{\mathcal{L}_{vap}}{\tilde{c}_{pl} \Delta \tilde{T}_h} \frac{1}{2} w_l \\
&= \frac{\text{Pe}_l w_l}{\text{Ste} 2}.
\end{aligned} \tag{IV.1}$$

Où  $\tilde{\Gamma}$  est la section du canal,  $\tilde{R}$  le rayon du canal et  $\Delta \tilde{T}_h$  un écart de température caractéristique du système, par exemple l'écart des températures d'entrée dans le cas d'un échangeur. Les conditions à l'interface s'écrivent :

$$\begin{cases} T_l = T_v = T_{sat}(P_{sat}) \\ \kappa_v \frac{\partial T_v}{\partial z} - \frac{\partial T_l}{\partial z} = \frac{\text{Pe}_l w_l}{\text{Ste} 2}. \end{cases} \tag{IV.2}$$

Chaque domaine étant monophasique, la conservation de l'énergie est régie par :

$$\begin{cases} \frac{\text{Pe}_l w_l}{2} \frac{\partial T_l}{\partial z} = \Delta T_l \\ \frac{\text{Pe}_l \mathcal{C}_p w_v}{2} \frac{\partial T_v}{\partial z} = \kappa_v \Delta T_v. \end{cases} \tag{IV.3}$$

Les conditions aux limites, la méthode de résolution du champ de température ainsi que la détermination de la position de l'interface sont maintenant explicitées.

## IV.4 Adaptation de la méthode des modes de Graetz généralisés

Deux configurations ont été étudiées avec le modèle diphasique :

- un canal simple, sans paroi, infini, dont une portion finie est chauffée par un flux imposé au niveau de la paroi, voir section 4.a
- et un échangeur, co-courant, semi-infini, composé d'une paire de canaux, séparés par une paroi solide, voir section 4.b.

Pour chacune de ces géométries, la décomposition en modes de Graetz généralisés, décrite au chapitre II, permet d'obtenir le champ de température d'un écoulement monophasique dans l'ensemble du domaine. Pour les écoulements diphasiques, cette méthode ne peut être appliquée à l'identique. En effet, pour être applicable elle nécessite plus spécifiquement l'invariance des propriétés de l'écoulement (champ de vitesse, propriétés du fluide) dans la direction longitudinale. Cette hypothèse est, bien entendu, rarement respectée au sein d'un liquide en ébullition. Dans le cas qui nous intéresse en revanche, la structure particulière de l'écoulement permet d'envisager d'adapter la méthode : en effet, si l'on considère les régions amonts et avals de la zone de changement de phase dans lesquelles on a soit du liquide soit sa vapeur l'invariance longitudinale est bien respectée. Il est dès lors envisageable d'appliquer la méthode de Graetz par bloc, ou autrement dit, de résoudre (IV.3) dans chacune des phases. De plus, en négligeant l'extension spatiale de la zone de changement de phase, idéalisée comme un front (Cf la discussion du paragraphe précédent) on peut alors chercher à résoudre un problème de raccord entre les phases liquide et vapeur dans lequel les relations thermodynamiques sont respectées.

Il faut alors appliquer les conditions adéquates aux frontières de ces deux domaines, de façon à respecter, d'une part, les conditions d'entrée (températures et vitesses des écoulements injectés dans le système) et, d'autre part, les conditions thermodynamiques à l'interface données par (IV.2). Le respect de ces deux dernières conditions va traduire, à l'exception du changement des propriétés physiques entre le fluide liquide et son pendant gazeux, l'ensemble du processus de vaporisation, lié à la fois au pompage d'énergie par le changement de phase à l'interface mais aussi l'advection/diffusion dans l'ensemble du système.

Comme discuté au chapitre II, la vérification des conditions aux limites est établie via la minimisation d'une fonctionnelle. La même méthode peut être appliquée aux conditions d'entrée et de sortie du système ainsi qu'aux conditions d'interface par l'ajout de termes supplémentaires. Pour cela il faut évidemment inclure les conditions d'interface (IV.3), mais il reste aussi et surtout, à déterminer la position de l'interface, qui est a priori une inconnue supplémentaire du problème et fixe le positionnement des domaines liquide et vapeur. Afin de déterminer cette position,  $z_i$  on utilise les trois conditions imposées au niveau de l'interface diphasique, à savoir la prescription de la température de saturation côté liquide et côté vapeur (deux conditions de Dirichlet homogène imposées de part et d'autre) et la relation de saut (IV.2). Alors que les deux conditions portant sur la saturation serviront à fermer les équations différentielles (IV.3), la relation de saut va permettre de déterminer, dans un second temps, la valeur de la position de l'interface, car seule une unique valeur de  $z_i$  permet au champ de température de vérifier la relation de saut. L'expression de cette fonctionnelle spécifique aux écoulements diphasiques est maintenant développée dans le cas du mono-canal et de l'échangeur co-courant.

#### 4.a Monocanal chauffé

Dans cette configuration, on définit les domaines liquide  $\Omega_l$  et vapeur,  $\Omega_v$  comme suit :  $\Omega_l = \Gamma \times ] - \infty, z_i]$ ,  $\Omega_v = \Gamma \times [z_i, +\infty[$ , voir Fig. IV.3. Les propriétés du liquide et de la vapeur sont prises à la saturation et on exprime, plus spécifiquement, la conductivité thermique par :

$$\kappa(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega_l \\ \kappa_v & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega_v \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Le champ de température est divisé en deux composantes associées à chaque domaine. Chacune de ces composantes est elle-même constituée de trois termes qui décrivent

- \* l'effet de l'évaporation au niveau de l'interface
- \*\* l'effet du chauffage pariétal
- \*\*\* la température de mélange du fluide entrant dans le domaine

Le champ de température prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{cases} T_l(\mathbf{r}) = \underbrace{\sum_{n < 0} x_n^l \theta_n^l e^{\lambda_n^l (z - z_i)}}_* + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^l c_n^l(z) \theta_n^l}_{**} + \frac{4}{\text{Pe}_l} z + \underbrace{T_{in}}_{***}; \quad \mathbf{r} \in \Omega_l \\ T_v(\mathbf{r}) = \underbrace{\sum_{n > 0} x_n^v \theta_n^v e^{\lambda_n^v (z - z_i)}}_* + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^v c_n^v(z) \theta_n^v}_{**} + \frac{4}{\text{Pe}_l \mathcal{C}_p} (z - z_i) + \underbrace{T_{sat}}_{***}; \quad \mathbf{r} \in \Omega_v \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

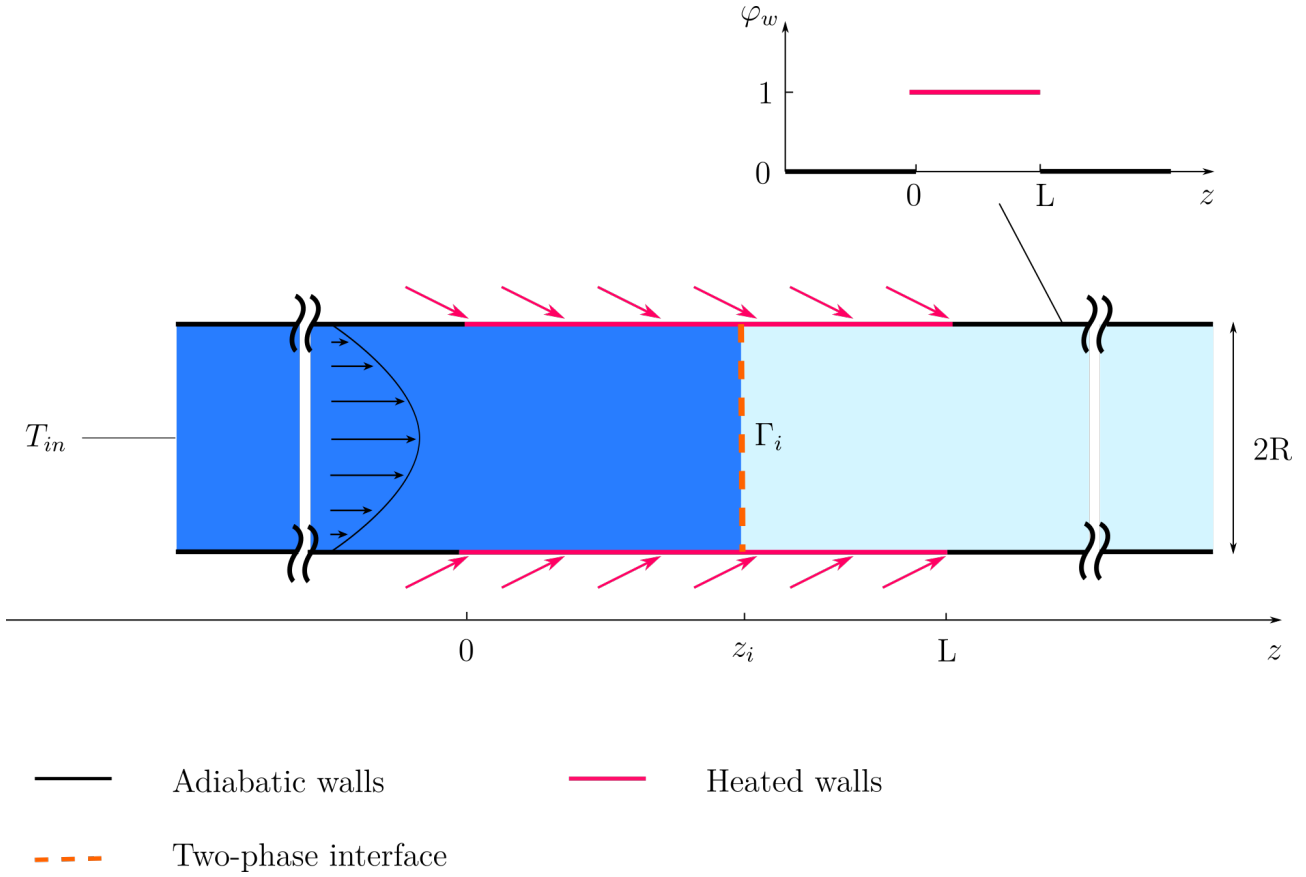


Figure IV.3: Schéma d'un monocanal chauffé diphasique

où  $\mathbf{r} = (r, z)$  et les  $c_{\pm n}(z)$ ,  $\alpha_{\pm n}$  sont explicités ci-dessous :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
 c_{-n}^l(z) &= H(-z) \frac{1 - e^{-\lambda_n^l z_i}}{\lambda_n^l} + \frac{1 - e^{\lambda_n^l (z - z_i)}}{\lambda_n^l} & \& \quad c_{-n}^v(z) = H(L - z) \frac{1 - e^{\lambda_n^v (z - L)}}{\lambda_n^v} \\
 c_{+n}^v(z) &= H(z - L) \frac{1 - e^{-\lambda_n^v (L - z_i)}}{\lambda_n^v} + \frac{1 - e^{\lambda_n^v (z - z_i)}}{\lambda_n^v} & \& \quad c_{+n}^l(z) = H(z) \frac{1 - e^{\lambda_n^l z}}{\lambda_n^l}
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{dc_{-n}^l}{dz}(z) &= -H(z) e^{\lambda_n^l (z - z_i)} & \& \quad \frac{dc_{-n}^v}{dz}(z) = -H(z - L) e^{\lambda_n^v (z - L)} \\
 \frac{dc_{+n}^v}{dz}(z) &= -H(z - L) e^{\lambda_n^v (z - z_i)} & \& \quad \frac{dc_{+n}^l}{dz}(z) = -H(z) e^{\lambda_n^l z}
 \end{aligned} \tag{IV.7}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* : \quad \alpha_n^l = \frac{2\pi R}{\lambda_n^l} \theta_n^l(R) \quad \& \quad \alpha_n^v = \frac{2\pi R}{\lambda_n^v} \theta_n^v(R) \tag{IV.8}$$

On pose, ensuite,  $(\mathbf{x}_-^l, \mathbf{x}_+^v, z_i)^t = (\mathbf{x}, z_i)^t$ , le vecteur des inconnues, de taille  $N_x = N_-^l + N_+^v + 1$ . Pour rappel, les  $x_n$  et  $z_i$  peuvent être déterminés en imposant les conditions de température et de flux à l'interface via la minimisation de la fonctionnelle  $F$ ,

$$F(z_i, \lambda) = F_2(\mathbf{x}, z_i) + \lambda \|\nabla_x F_1(\mathbf{x}, z_i)\|^2, \text{ avec} \tag{IV.9}$$

$$F_1 = \int_{\Gamma_{z_i}} (T_l - T_{sat})^2 + (T_v - T_{sat})^2 d\Omega \tag{IV.10}$$

$$F_2 = \int_{\Gamma_{z_i}} \left( \kappa_v \frac{\partial T_v}{\partial z} - \frac{\partial T_l}{\partial z} - \frac{\text{Pe}_l w_l}{\text{Ste}_2} \right)^2 d\Omega \tag{IV.11}$$

La construction de  $F$  s'appuie donc sur les deux fonctionnelles  $F_1$  et  $F_2$  qui imposent respectivement la température et les flux thermiques au niveau de l'interface. On aurait pu construire  $F$  comme une simple somme des deux fonctionnelles  $F = F_1 + F_2$  mais la forme (IV.11) faisant intervenir la contrainte associée au multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  s'avère plus simple de mise en œuvre. Ces deux fonctionnelles  $F_1$  et  $F_2$  peuvent s'écrire comme une forme quadratique sur les amplitudes

$$F_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x} - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{x} + C_i \quad (\text{IV.12})$$

On a bien entendu,

$$\nabla_x F_i = \mathbf{M}_i \mathbf{x} - \mathbf{B}_i \quad (\text{IV.13})$$

Il est intéressant de remarquer que si  $F_1$  et  $F_2$  s'écrivent comme une fonction quadratique de  $\mathbf{x}$ , la dépendance de  $F$  avec  $z_i$  est, elle, plus compliquée (et bien-sûr aussi non-linéaire). La minimisation de  $F_1$ , puisque c'est une fonctionnelle quadratique est analytique et se résout directement par l'inversion d'un problème linéaire en dimension  $N_x = N_-^l + N_+^v + 1$ .  $F$  définie comme une fonction du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et de  $z_i$  est alors un problème de minimisation en dimension deux. Il est beaucoup plus facile à écrire de cette façon et moins coûteux car chaque itération de la méthode de Newton est associée à la minimisation de  $F_1$  qui est un problème linéaire. Pour être explicite, montrons que minimiser la fonctionnelle  $F$  revient à minimiser  $F_1$  en fonction de  $\mathbf{x}$  puis  $F_2$  en fonction de  $\mathbf{x}$  et  $z_i$ . En effet, pour minimiser la fonctionnelle, le vecteur des solutions doit annuler le gradient de  $F$  :

$$\begin{aligned} \nabla F = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dF}{d\lambda} = \|\nabla_x F_1\|^2 = 0 \\ \frac{dF}{dz_i} = \nabla_x F_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z_i} + \frac{\partial F_2}{\partial z_i} + \frac{d(\lambda \|\nabla_x F_1\|^2)}{dz_i} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x F_1 = 0 \\ \nabla_x F_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z_i} + \frac{\partial F_2}{\partial z_i} + 2\lambda \frac{d\nabla_x F_1}{dz_i} \nabla_x F_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.14}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{M}_1 \mathbf{x} - \mathbf{B}_1 = 0 \\ \nabla_x F_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z_i} + \frac{\partial F_2}{\partial z_i} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'obtention du zéro de (IV.14) est réalisée grâce à une méthode de Newton appliquée à  $\|\nabla_x F_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z_i} + \frac{\partial F_2}{\partial z_i}\|^2$ , dans laquelle  $\mathbf{x}$  aura été préalablement substitué et où  $\nabla_x F_2$  utilise (IV.13). Dans le but d'explicitier  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  et  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  constituant les formes quadratiques (IV.12) on définit une série de matrices et de vecteurs qui interviennent directement dans l'expression de ces derniers. On pose  $[\mathbf{U}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij}$ ,  $[\mathbf{U}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij}$  et  $[\mathbf{U}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij}$  pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^*$ , les matrices définies par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij} &= \int_0^1 \theta_{\pm i}^l \theta_{\pm j}^l r dr, \quad [\mathbf{U}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij} = \int_0^1 \theta_{\pm i}^l \theta_{\pm j}^v r dr, \\ [\mathbf{U}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij} &= \int_0^1 \theta_{\pm i}^v \theta_{\pm j}^v r dr. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Les matrices  $[\mathcal{U}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij}$ ,  $[\mathcal{U}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij}$  et  $[\mathcal{U}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij}$ , pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^*$  s'écrivent, quant à elles :

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij} &= \int_0^1 \lambda_{\pm i}^l \lambda_{\pm j}^l \theta_{\pm i}^l \theta_{\pm j}^l r dr, \quad [\mathcal{U}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij} = \int_0^1 \lambda_{\pm i}^l \lambda_{\pm j}^v \theta_{\pm i}^l \theta_{\pm j}^v r dr, \\ [\mathcal{U}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij} &= \int_0^1 \lambda_{\pm i}^v \lambda_{\pm j}^v \theta_{\pm i}^v \theta_{\pm j}^v r dr. \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

On donne finalement les vecteurs  $[\mathbf{R}_l]_n$  et  $[\mathbf{R}_v]_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$[\mathbf{R}_l^{\pm}]_n = \int_0^1 \theta_{\pm n}^l r dr, \quad [\mathbf{R}_v^{\pm}]_n = \int_0^1 \theta_{\pm n}^v r dr. \quad (\text{IV.17})$$

Les vecteurs  $[\mathcal{R}_l]_n$  et  $[\mathcal{R}_v]_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$[\mathcal{R}_l^\pm]_n = \int_0^1 \lambda_{\pm n}^l \theta_{\pm n}^l r dr, \quad [\mathcal{R}_v^\pm]_n = \int_0^1 \lambda_{\pm n}^v \theta_{\pm n}^v r dr. \quad (\text{IV.18})$$

Puis  $[\mathbf{S}_l]_n$  et  $[\mathbf{S}_v]_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$[\mathbf{S}_l^\pm]_n = \alpha_{\pm n}^l c_{\pm n}^l(z), \quad [\mathbf{S}_v^\pm]_n = \alpha_{\pm n}^v c_{\pm n}^v(z). \quad (\text{IV.19})$$

De même,  $[\mathcal{S}_l]_n$  et  $[\mathcal{S}_v]_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$[\mathcal{S}_l^\pm]_n = \alpha_{\pm n}^l \frac{dc_{\pm n}^l}{dz}(z), \quad [\mathcal{S}_v^\pm]_n = \alpha_{\pm n}^v \frac{dc_{\pm n}^v}{dz}(z). \quad (\text{IV.20})$$

On construit alors

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{ll}^{--} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{vv}^{++} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.21})$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{ll}^{--} & \kappa_v \mathcal{U}_{lv}^{-+} \\ \dots & \kappa_v^2 \mathcal{U}_{vv}^{++} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.22})$$

$$\mathbf{B}_1 = (T_{sat} - T_{in} - \frac{4}{\text{Pe}_l} z_i) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_l^- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{ll}^{+-} \mathbf{S}_+^l(z_i) \\ \mathbf{P}_{vv}^{+-} \mathbf{S}_-^v(z_i) \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.23})$$

$$\mathbf{B}_2 = \left( \frac{4}{\text{Pe}_l} \left( \frac{\kappa_v}{\mathcal{C}_p} - 1 \right) + \frac{\text{Pe}_l w_l}{\text{Ste} 2} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{R}_l^- \\ -\kappa_v \mathcal{R}_v^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_v \mathbf{P}_{lv}^{--} \mathcal{S}_-^v(z_i) - \mathbf{P}_{ll}^{+-} \mathcal{S}_+^l(z_i) \\ \kappa_v (-\kappa_v \mathbf{P}_{vv}^{+-} \mathcal{S}_-^v(z_i) + \mathbf{P}_{vl}^{++} \mathcal{S}_+^l(z_i)) \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.24})$$

puis finalement,

$$C_2 = \int_{\Gamma_i} \left( \kappa_v \left( \sum_{n < 0} \alpha_n^v \frac{dc_n^v}{dz}(z) \theta_n^v + \frac{4}{\text{Pe}_l \mathcal{C}_p} \right) - \left( \sum_{n > 0} \alpha_n^l \frac{dc_n^l}{dz}(z) \theta_n^l + \frac{4}{\text{Pe}_l} \right) - \frac{\text{Pe}_l w_l}{\text{Ste} 2} \right)^2 d\Omega \quad (\text{IV.25})$$

et  $C_1 = 0$ .

## 4.b Co-courant semi-infini

Au regard du monocanal chauffé, la configuration en échangeur plat co-courant est plus complexe (Cf Fig. IV.4). Pour commencer, deux canaux semi-infinis sont ajoutés en amont de l'échangeur. C'est donc à l'infini amont que sont imposées les températures d'entrée des écoulements secondaire,  $T_\infty^I$ , et primaire,  $T_\infty^{II}$ . L'intérêt de ce choix est de pouvoir assurer que les champs de température uniformes prescrits à l'entrée de ces canaux vont parfaitement produire les conditions thermiques d'entrée complexes (non-homogènes) de l'échangeur. Les conditions de jonction entre les canaux amonts et l'échangeur doivent donc être incluses dans la fonctionnelle et rajoutent des composantes au champ de température. En outre, la paroi solide qui sépare les canaux primaires et secondaires n'existe qu'à partir de l'entrée de l'échangeur, il faut donc lui imposer une condition aux limites supplémentaire, en l'occurrence une condition d'adiabaticité (Cf  $\Gamma_0^s$ ), pour résoudre la thermique. A cela s'ajoute le fait que le processus d'évaporation n'a plus lieu sur l'ensemble du domaine, comme c'était le cas pour le mono-canal, mais se restreint au canal secondaire. Les conditions à l'abscisse de l'interface  $z_i$ , sont donc divisées en deux parties : la première servant à représenter l'ébullition sur  $\Gamma_{z_i}^{II}$ , quand le but de la seconde sera de maintenir la continuité de température et des flux thermiques sur les autres sections ( $\Gamma_{z_i}^I, \Gamma_{z_i}^s$ ). De façon analogue au mono-canal, on découpe le volume en plusieurs sous-domaines,  $\Omega_s, \Omega_I, \Omega_{II}^l$  et  $\Omega_{II}^v$  comme suit :  $\Omega_s = \Gamma^s \times \mathbb{R}_+, \Omega_I = \Gamma^I \times \mathbb{R}, \Omega_{II}^l =$

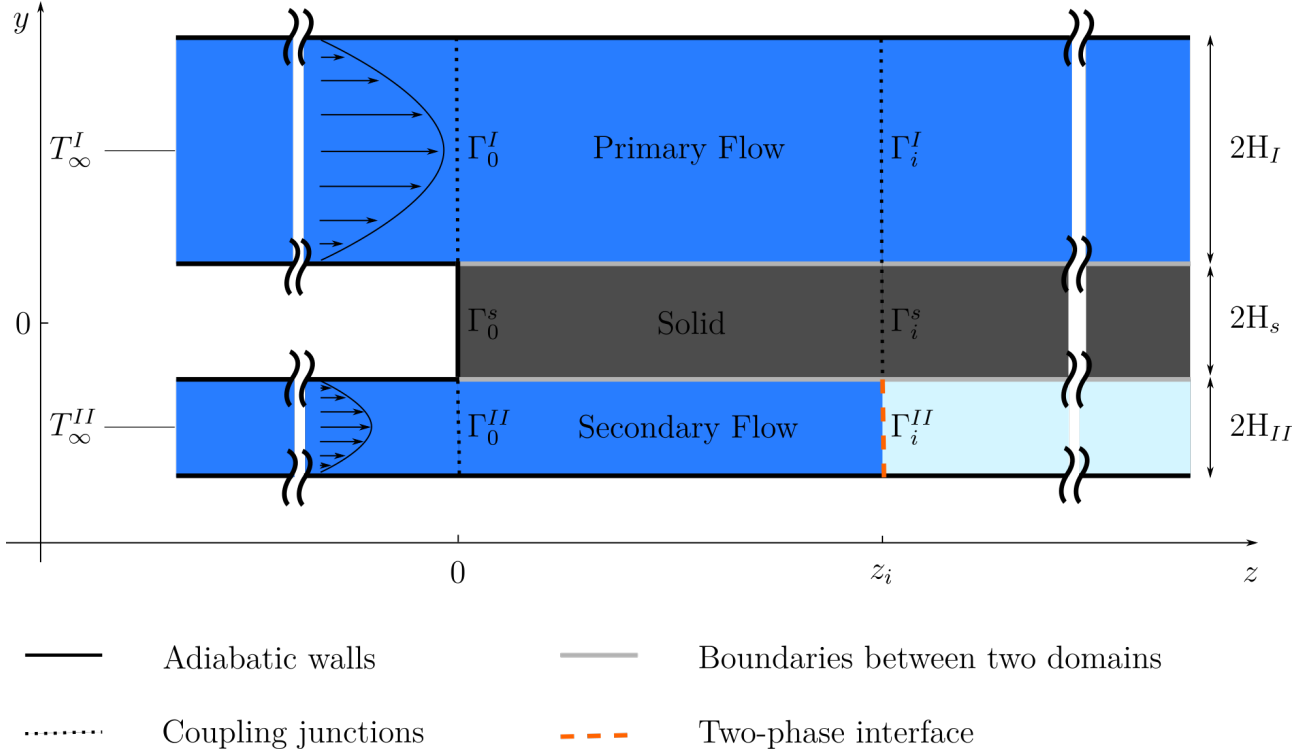


Figure IV.4: Schéma d'un échangeur co-courant infini diphasique

$\Gamma^{II} \times ] - \infty, z_i], \Omega_{II}^v = \Gamma^{II} \times [z_i, +\infty[$ . On peut alors exprimer adéquatement la conductivité thermique par domaine,

$$\kappa(\mathbf{y}) = \begin{cases} \kappa_s & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_s \\ 1 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_I \\ 1 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_{II}^l \\ \kappa_v & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega_{II}^v \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Cette fois-ci, le champ de température admet quatre composantes associées respectivement au canal primaire amont, au canal secondaire amont, à la partie de l'échangeur située en amont de l'interface et à celle située en aval de l'interface (IV.27). Pour chacune de ces composantes, il n'y a, bien sûr plus de termes pour la prise en compte d'un chauffage pariétal, mais uniquement des termes associés à la prescription des entrées et sorties des sous-domaines listés ci-dessus.

$$\begin{cases} T_u^I(\mathbf{y}) = \sum_{n<0} x_n^I \theta_n^u e^{\lambda_n^u z} + T_{\infty}^I; \mathbf{y} \in \Gamma^I \times ] - \infty, 0] \\ T_u^{II}(\mathbf{y}) = \sum_{n<0} x_n^{II} \theta_n^u e^{\lambda_n^u z} + T_{\infty}^{II}; \mathbf{y} \in \Gamma^{II} \times ] - \infty, 0] \\ T_l(\mathbf{y}) = \sum_{n \geq 0} x_n^l \theta_n^l e^{\lambda_n^l z} + \sum_{n<0} x_n^l \theta_n^l e^{\lambda_n^l (z-z_i)}; \mathbf{y} \in \Gamma^I \cup \Gamma^s \cup \Gamma^{II} \times [0, z_i] \\ T_v(\mathbf{y}) = \sum_{n \geq 0} x_n^v \theta_n^v e^{\lambda_n^v (z-z_i)}; \mathbf{y} \in \Gamma^I \cup \Gamma^s \cup \Gamma^{II} \times [z_i, +\infty[ \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

On pose  $\mathbf{u} = (\mathbf{x}_+^l, \mathbf{x}_-^l, \mathbf{x}_+^v, \mathbf{x}_-^v, \mathbf{x}_-^I, \mathbf{x}_-^{II}, z_i)^t$  le vecteur des inconnues, et on définit à nouveau une fonctionnelle  $F$  sur la base de (IV.11), avec  $F_1$  et  $F_2$  définies plus-bas :

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_0^I \cup \Gamma_0^{II}} (T_u - T_l)^2 + \left( \frac{\partial T_u}{\partial z} - \frac{\partial T_l}{\partial z} \right)^2 d\Omega \quad (a) \\
&+ \int_{\Gamma_0^s} \left( \kappa_s \frac{\partial T_l}{\partial z} \right)^2 d\Omega \quad (b) \\
&+ \int_{\Gamma_i^I \cup \Gamma_i^s} (T_l - T_v)^2 + \left( \kappa(y) \frac{\partial T_l}{\partial z} - \kappa(y) \frac{\partial T_v}{\partial z} \right)^2 d\Omega \quad (c) \\
&+ \int_{\Gamma_i^{II}} (T_l - T_{sat})^2 + (T_v - T_{sat})^2 d\Omega \quad (d)
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

et

$$F_2(\mathbf{x}_+^l, \mathbf{x}_-^l, \mathbf{x}_+^v, \mathbf{x}_-^v, z_i) = \int_{\Gamma_i^{II}} \left( \kappa_v \frac{\partial T_v}{\partial z} - \frac{\partial T_l}{\partial z} - \frac{\text{Pe}_{II} w_l}{\text{Ste}} \right)^2 d\Omega \tag{IV.29}$$

Dans ces expressions,  $F_2$  impose la relation de saut de flux au niveau de l'interface diphasique dans le canal secondaire.  $F_1$  est partitionnée en 4 groupes :

- (a) Continuité de température et de flux thermique entre les canaux amonts et l'échangeur
- (b) Adiabaticité de la paroi solide en entrée d'échangeur
- (c) Continuité de température et de flux thermique au niveau de l'interface dans le canal primaire et la paroi solide
- (d) Atteinte de la saturation à l'interface dans le canal secondaire.

Les fonctionnelles  $F_1$  et  $F_2$  sont ici encore des fonctionnelles quadratiques des amplitudes (IV.12). Les matrices définies ci-dessous permettent d'exprimer les matrices  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$  et vecteurs  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  associés à ces fonctionnelles quadratiques (IV.12). On définit, pour  $(i, j) \in \mathbb{N}$ , les matrices diagonales  $\mathbf{D}_l^\pm(z)$  par :

$$[\mathbf{D}_l^+]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda^l_{+j} z} \quad \& \quad [\mathbf{D}_l^-]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda^l_{-j}(z-z_i)} \tag{IV.30}$$

et  $\mathbf{D}_v^\pm(z)$  comme

$$[\mathbf{D}_v^+]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda^v_{+j}(z-z_i)} \quad \& \quad [\mathbf{D}_v^-]_{ij} = \delta_{ij} \exp^{\lambda^v_{-j}(z-L)} \tag{IV.31}$$

Les matrices  $[\mathbf{P}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij}, [\mathbf{P}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij}$  et  $[\mathbf{P}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij}$ , pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^*$  s'écrivent, quand à elles :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij} &= [\mathbf{U}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij} + \kappa_v^2 [\mathcal{U}_{ll}^{\pm\pm}]_{ij}, & [\mathbf{P}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij} &= [\mathbf{U}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij} + \kappa_v^2 [\mathcal{U}_{lv}^{\pm\pm}]_{ij}, \\
[\mathbf{P}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij} &= [\mathbf{U}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij} + \kappa_v^2 [\mathcal{U}_{vv}^{\pm\pm}]_{ij}.
\end{aligned} \tag{IV.32}$$

Par soucis de simplicité, il est préférable de traiter les termes associés à la partie (a) séparément des autres parties. Les composantes b à d seront, elles, incluses dans les sous-matrices carrées

$\mathbf{M}_b, \mathbf{M}_c$  et  $\mathbf{M}_d$ , de taille  $N_+^l + N_-^l + N_+^v + N_-^v$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 = & \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{U}_{ll}^{++} & \mathbf{U}_{ll}^{+-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_l^-(0)\mathbf{U}_{ll}^{+} & \mathbf{D}_l^-(0)\mathbf{U}_{ll}^{--}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{0} & & \\ \hline \mathbf{U}_{ul}^{I+} & \mathbf{U}_{ul}^{II-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_{ul}^{I+} & \mathbf{U}_{ul}^{II-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)_{|\Gamma_0^I \cup \Gamma_0^{II}} \\
+ & \left( \begin{array}{cc|cc} \mathcal{U}_{ll}^{++} & \mathcal{U}_{ll}^{+-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_l^-(0)\mathcal{U}_{ll}^{+} & \mathbf{D}_l^-(0)\mathcal{U}_{ll}^{--}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{0} & & \\ \hline \mathcal{U}_{ul}^{I+} & \mathcal{U}_{ul}^{II-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{U}_{ul}^{I+} & \mathcal{U}_{ul}^{II-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)_{|\Gamma_0^I \cup \Gamma_0^{II}} \\
+ & \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_d & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{IV.33}$$

Où,

$$\mathbf{M}_b = \kappa^2 \left( \begin{array}{cc|cc} \mathcal{U}_{ll}^{++} & \mathcal{U}_{ll}^{+-}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \mathbf{D}_l^-(0)\mathcal{U}_{ll}^{--}\mathbf{D}_l^-(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \end{array} \right)_{|\Gamma_0^s}, \tag{IV.34}$$

$$\mathbf{M}_c = \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{P}_{ll}^{++}\mathbf{D}_l^+(z_i) & \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{P}_{ll}^{+-} & -\mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{P}_{lv}^{++} & -\mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{P}_{lv}^{+-}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \cdots & \mathbf{P}_{ll}^{--} & \mathbf{P}_{lv}^{+} & -\mathbf{P}_{lv}^{--}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \cdots & \cdots & \mathbf{P}_{vv}^{++} & \mathbf{P}_{vv}^{+-}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D}_v^-(z_i)\mathbf{P}_{vv}^{--}\mathbf{D}_v^-(z_i) \end{array} \right)_{|\Gamma_i^I \cup \Gamma_i^s} \tag{IV.35}$$

$$\mathbf{M}_d = \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{U}_{ll}^{++}\mathbf{D}_l^+(z_i) & \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{U}_{ll}^{+-} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \mathbf{U}_{ll}^{--} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \mathbf{U}_{vv}^{++} & \mathbf{U}_{vv}^{+-}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D}_v^-(z_i)\mathbf{U}_{vv}^{--}\mathbf{D}_v^-(z_i) \end{array} \right)_{|\Gamma_i^{II}}. \tag{IV.36}$$

Le vecteur  $\mathbf{B}_1$  se décompose sous la forme  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_d$ , avec :

$$\mathbf{B}_a = T_\infty^I \left( \begin{array}{c} \mathbf{R}_l^+ \\ \mathbf{D}_l^-(0)\mathbf{R}_l^- \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_u^I \\ \mathbf{0} \end{array} \right)_{|\Gamma_0^I} + T_\infty^{II} \left( \begin{array}{c} \mathbf{R}_l^+ \\ \mathbf{D}_l^-(0)\mathbf{R}_l^- \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_u^{II} \end{array} \right)_{|\Gamma_0^{II}} \tag{IV.37}$$

$$\mathbf{B}_d = T_{sat} \left( \begin{array}{c} \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathbf{R}_l^+ \\ \mathbf{R}_l^- \\ \mathbf{R}_v^+ \\ \mathbf{D}_v^-(z_i)\mathbf{R}_v^- \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right)_{|\Gamma_i^{II}}. \tag{IV.38}$$



Pour ce qui est de la fonctionnelle  $F_2$ , sa matrice associée,  $\mathbf{M}_2$ , de taille  $N_+^l + N_-^l + N_+^v + N_-^v$ , est définie par :

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathcal{U}_{ll}^{++}\mathbf{D}_l^+(z_i) & \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathcal{U}_{ll}^{+-} & \kappa_v\mathbf{D}_l^+(z_i)\mathcal{U}_{lv}^{++} & \kappa_v\mathbf{D}_l^+(z_i)\mathcal{U}_{lv}^{+-}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \dots & \mathcal{U}_{ll}^{--} & \kappa_v\mathcal{U}_{lv}^{--} & \kappa_v\mathcal{U}_{lv}^{--}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \dots & \dots & \kappa_v^2\mathcal{U}_{vv}^{++} & \kappa_v^2\mathcal{U}_{vv}^{+-}\mathbf{D}_v^-(z_i) \\ \dots & \dots & \dots & \kappa_v^2\mathbf{D}_v^-(z_i)\mathcal{U}_{vv}^{--}\mathbf{D}_v^-(z_i) \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_i^{II}} \quad (\text{IV.39})$$

et le vecteur  $\mathbf{B}_2$  par :

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\text{Pe}_l w_l}{\text{Ste } 2} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_l^+(z_i)\mathcal{R}_l^+ \\ \mathcal{R}_l^- \\ -\kappa_v\mathcal{R}_v^+ \\ -\mathbf{D}_v^-(z_i)\kappa_v\mathcal{R}_v^- \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_i^{II}} \quad (\text{IV.40})$$

Dans le cas particulier de l'échangeur co-courant,  $C_2$  ne dépend pas de  $z_i$  il n'interviendra donc pas dans la dérivée de  $F_2$  par rapport à  $z_i$ , et ne sera donc pas explicité. On trouve alors le zero de la fonctionnelle (IV.14) où on utilise bien sûr les fonctionnelles  $F_1$  et  $F_2$  définies dans cette section par une méthode de Newton en deux dimensions associées au multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et à la variable réelle  $z_i$ .

# Références

- [1] Peter A. Kew and Keith Cornwell. “Correlations for the prediction of boiling heat transfer in small-diameter channels”. In: *Applied Thermal Engineering* 17.8 (Aug. 1997), pp. 705–715. ISSN: 1359-4311. DOI: [10.1016/S1359-4311\(96\)00071-3](https://doi.org/10.1016/S1359-4311(96)00071-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431196000713>.
- [2] K.A. Triplett et al. “Gas–liquid two-phase flow in microchannels Part I: two-phase flow patterns”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 25.3 (Apr. 1999), pp. 377–394. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/S0301-9322\(98\)00054-8](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(98)00054-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932298000548>.
- [3] Hui He et al. “Modeling of reversal flow and pressure fluctuation in rectangular microchannel”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 102 (Nov. 2016), pp. 1024–1033. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.102](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.102). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931015315672>.
- [4] Mark E. Steinke and Satish G. Kandlikar. “An Experimental Investigation of Flow Boiling Characteristics of Water in Parallel Microchannels”. In: *Journal of Heat Transfer* 126.4 (May 2004). eprint: [https://asmedigitalcollection.asme.org/heattransfer/article-pdf/126/4/518/6846127/518\\_1.pdf](https://asmedigitalcollection.asme.org/heattransfer/article-pdf/126/4/518/6846127/518_1.pdf), pp. 518–526. ISSN: 0022-1481. DOI: [10.1115/1.1778187](https://doi.org/10.1115/1.1778187). URL: <https://doi.org/10.1115/1.1778187>.
- [5] D. Bogojevic et al. “Bubble dynamics and flow boiling instabilities in microchannels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 58.1 (Mar. 2013), pp. 663–675. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.11.038](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.11.038). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931012008939>.
- [6] Satish G. Kandlikar. “Two-Phase Flow Patterns, Pressure Drop, and Heat Transfer during Boiling in Minichannel Flow Passages of Compact Evaporators”. In: *Heat Transfer Engineering* 23.1 (Jan. 2002). Publisher: Taylor & Francis, pp. 5–23. ISSN: 0145-7632. DOI: [10.1080/014576302753249570](https://doi.org/10.1080/014576302753249570). URL: <https://doi.org/10.1080/014576302753249570>.
- [7] Todd A. Kingston, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “High-frequency thermal-fluidic characterization of dynamic microchannel flow boiling instabilities: Part 1 – Rapid-bubble-growth instability at the onset of boiling”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 106 (Sept. 2018), pp. 179–188. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.05.007](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.05.007). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932218300417>.
- [8] Marius Vermaak et al. “Pressure and Thermal Characterisation of Dynamic Instabilities During Flow Boiling in Micro/Mini-channels at Different Azimuth Orientations”. In: *Applied Thermal Engineering* 218 (Jan. 2023), p. 119292. ISSN: 1359-4311. DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2022.119292](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119292). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431122012224>.

- [9] G. Hetsroni, Albert Mosyak, and Zelik Segal. “Nonuniform temperature distribution in electronic devices cooled by flow in parallel microchannels”. In: *Components and Packaging Technologies, IEEE Transactions on* 24 (Apr. 2001), pp. 16–23. DOI: [10.1109/6144.910797](https://doi.org/10.1109/6144.910797).
- [10] Todd A. Kingston, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “High-frequency thermal-fluidic characterization of dynamic microchannel flow boiling instabilities: Part 2 – Impact of operating conditions on instability type and severity”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 106 (Sept. 2018), pp. 189–201. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.05.001](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.05.001). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932218300727>.
- [11] R Mertz, A Wein, and M Groll. “Experimental investigation of flow boiling heat transfer in narrow channels”. In: *Proceedings of the 2nd European Thermal-Sciences (EUROTHERM) and 14th UIT National Heat Transfer Conference 1996* (1996).
- [12] Abhijit Mukherjee and Satish G. Kandlikar. “Numerical simulation of growth of a vapor bubble during flow boiling of water in a microchannel”. In: *Microfluidics and Nanofluidics* 1.2 (May 2005), pp. 137–145. ISSN: 1613-4990. DOI: [10.1007/s10404-004-0021-8](https://doi.org/10.1007/s10404-004-0021-8). URL: <https://doi.org/10.1007/s10404-004-0021-8>.
- [13] Rahim Jafari and Tuba Okutucu-Özyurt. “Numerical simulation of flow boiling from an artificial cavity in a microchannel”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 97 (June 2016), pp. 270–278. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.028](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.028). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931015304798>.
- [14] Gaurav Hedau et al. “Experimental and numerical investigation of the effect of number of parallel microchannels on flow boiling heat transfer”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 158 (Sept. 2020), p. 119973. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119973](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119973). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931020303197>.
- [15] David Fletcher et al. “Modeling of microfluidic devices”. In: *Micro Process Engineering*. Vol. 1. Jan. 2009.
- [16] Rémi Bertossi. “Modélisation des transferts de chaleur et de masse dans les caloducs : Contribution à l’analyse des phénomènes d’interfaces intervenant dans les écoulements diphasiques”. PhD thesis. 2009.
- [17] J.U Brackbill, D.B Kothe, and C Zemach. “A continuum method for modeling surface tension”. In: *Journal of Computational Physics* 100.2 (June 1992), pp. 335–354. ISSN: 0021-9991. DOI: [10.1016/0021-9991\(92\)90240-Y](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-Y). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290240Y>.
- [18] R. Gupta, D.F. Fletcher, and B.S. Haynes. “Taylor Flow in Microchannels: A Review of Experimental and Computational Work”. In: *The Journal of Computational Multiphase Flows* 2.1 (Mar. 2010). Publisher: SAGE Publications Ltd STM, pp. 1–31. ISSN: 1757-482X. DOI: [10.1260/1757-482X.2.1.1](https://doi.org/10.1260/1757-482X.2.1.1). URL: <https://doi.org/10.1260/1757-482X.2.1.1> (visited on 07/05/2023).
- [19] Salih Ozen Unverdi and Grétar Tryggvason. “A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows”. In: *Journal of Computational Physics* 100 (1992), pp. 25–37. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:6962137>.
- [20] Jian Du et al. “A simple package for front tracking”. In: *Journal of Computational Physics* 213.2 (Apr. 2006), pp. 613–628. ISSN: 0021-9991. DOI: [10.1016/j.jcp.2005.08.034](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.034). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105003955>.

- [21] Stéphane Popinet and Stéphane Zaleski. “A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension”. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30.6 (July 1999). Publisher: John Wiley & Sons, Ltd, pp. 775–793. ISSN: 0271-2091. DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990730\)30:6<775::AID-FLD864>3.0.CO;2-#](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990730)30:6<775::AID-FLD864>3.0.CO;2-#). URL: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990730\)30:6<775::AID-FLD864>3.0.CO;2-#](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990730)30:6<775::AID-FLD864>3.0.CO;2-#) (visited on 08/09/2023).
- [22] J.L. Achard, D.A. Drew, and R.T. Lahey. “THE EFFECT OF GRAVITY AND FRICTION ON THE STABILITY OF BOILING FLOW IN A CHANNEL”. In: *Chemical Engineering Communications* 11.1-3 (July 1981). Publisher: Taylor & Francis, pp. 59–79. ISSN: 0098-6445. DOI: [10.1080/00986448108910987](https://doi.org/10.1080/00986448108910987). URL: <https://doi.org/10.1080/00986448108910987>.
- [23] P. Saha. “An analytical study of the thermally induced two-phase flow instabilities including the effect of thermal non-equilibrium”. PhD thesis. Apr. 1978. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931078900753>.
- [24] Y.P. Peles, L.P. Yarin, and G. Hetsroni. “Steady and unsteady flow in a heated capillary”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 27.4 (Apr. 2001), pp. 577–598. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/S0301-9322\(00\)00041-0](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932200000410). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932200000410>.
- [25] J.R. Thome, V. Dupont, and A.M. Jacobi. “Heat transfer model for evaporation in microchannels. Part I: presentation of the model”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.14 (July 2004), pp. 3375–3385. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.01.006](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931004000316). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931004000316>.
- [26] M. Magnini and J.R. Thome. “An updated three-zone heat transfer model for slug flow boiling in microchannels”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 91 (May 2017), pp. 296–314. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.01.015](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932216305055). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932216305055>.
- [27] Lucas E. O’Neill and Issam Mudawar. “Mechanistic model to predict frequency and amplitude of Density Wave Oscillations in vertical upflow boiling”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 123 (Aug. 2018), pp. 143–171. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.078](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017356764). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017356764>.
- [28] Mamoru Ishii and Takashi Hibiki. “Local Instant Formulation”. In: *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Ed. by Mamoru Ishii and Takashi Hibiki. New York, NY: Springer New York, 2011, pp. 11–53. ISBN: 978-1-4419-7985-8. DOI: [10.1007/978-1-4419-7985-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7985-8_2). URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7985-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7985-8_2).

# Chapitre V

## Application du modèle d'évaporation en écoulement confiné à un mono-canal à flux imposé

Le modèle de changement de phase et la méthode de résolution du champ de température qui viennent d'être présentés sont, par la suite, appliqués à deux configurations : un mono-canal uniformément chauffé et un échangeur co-courant. Ces derniers sont traités consécutivement au sein des chapitres V et VI. Dans ce premier pan, l'effort est porté sur l'analyse de l'évaporation dans un micro-canal chauffé. L'exploitation des résultats qui en découlent permettra de statuer sur la sensibilité d'un réseau de micro-canaux parallèles au phénomène de mal-distribution de débit. Il faut bien garder à l'esprit que les éléments des chapitres V et VI sont analysés dans le cadre théorique imposé et décrit au chapitre précédent.

### V.1 Analyse de l'évaporation dans un micro-canal chauffé

#### 1.a Structure du champ de température

Afin de faciliter l'analyse des résultats tout au long de ce chapitre, le champ de température de chacune des phases est divisé en deux parties distinctes. Ces composantes, dénommées respectivement *heating* et *interface*, notées  $T_l^h$  et  $T_l^i$ , font référence aux contributions respectives du chauffage pariétal et de l'interface diphasique. Il est intéressant de rappeler que seules les amplitudes  $x_n$  de la contribution de l'interface ainsi que la position de l'interface  $z_i$  sont des inconnues au début du calcul. Des deux composantes du champ de température, seule la composante de l'interface est donc indéterminée. La composante associée au chauffage pariétal est, en effet connue analytiquement à une constante près, en l'occurrence la position axiale de l'interface  $z_i$  (V.1). Concernant l'expression de la composante  $T_l^i$ , elle est constituée de modes 'amonts' définis par la condition  $\lambda_n > 0$ . Autrement dit, ces modes sont associés aux gradients thermiques antérogrades. Ils sont donc liés à des mécanismes de transports diffusifs contrairement aux modes 'avals' qui cumulent, eux, les effets de la convection et de la conduction thermique dans le fluide.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_l(\mathbf{r}) = \underbrace{\sum_{n<0} x_n^l \theta_n^l e^{\lambda_n^l (z-z_i)}}_{T_l^i} + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^l c_n^l(z) \theta_n^l + \frac{4}{\text{Pe}_l} z + T_{in}}_{T_l^h}; \quad \mathbf{r} \in \Omega_l \\ T_v(\mathbf{r}) = \underbrace{\sum_{n>0} x_n^v \theta_n^v e^{\lambda_n^v (z-z_i)}}_{T_v^i} + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^v c_n^v(z) \theta_n^v + \frac{4}{\text{Pe}_l \mathcal{C}_p} (z - z_i) + T_{sat}}_{T_v^h}; \quad \mathbf{r} \in \Omega_v \end{array} \right. \quad (\text{V.1})$$

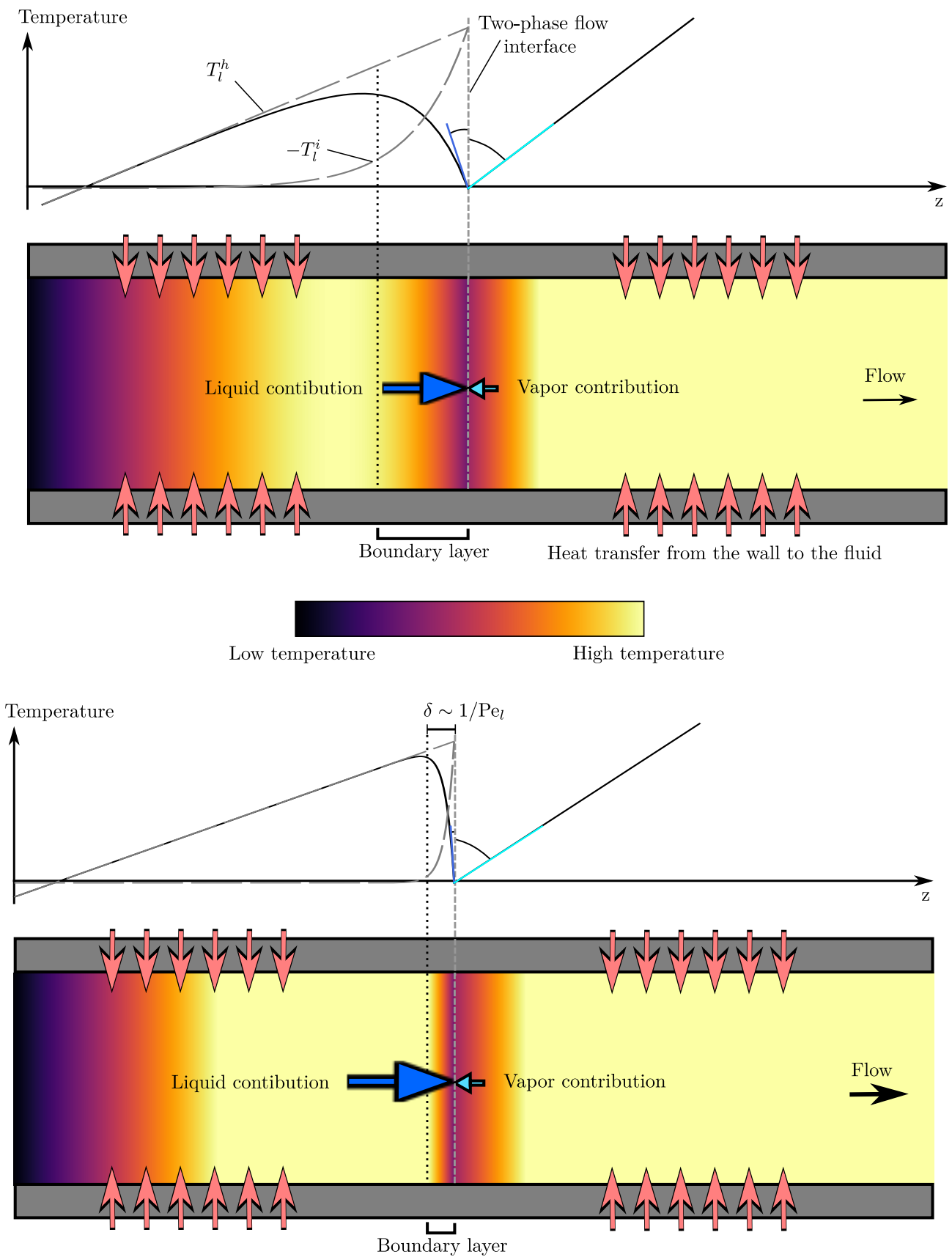


Figure V.1: Illustration de la phénoménologie de la vaporisation en micro-canaux obtenue par le modèle développé

Les figures Fig. V.2 et Fig. V.3 montrent, respectivement pour de l'eau et de l'ammoniaque, la température de mélange (ou *mixing-cup*, notée  $\langle \cdot \rangle_c$ ) le long de la section chauffée —en (a)—, les profils de température pour différentes positions radiales —en (b)—, le champ de température local proche de l'interface diphasique —en (c)— et enfin la dépendance de l'épaisseur de couche limite thermique en fonction du nombre de Péclet liquide —en (d)—. Comme illustré dans les sous-figures Fig. V.2.a et Fig. V.3.a, le champ de température peut être divisé en trois zones :

1. *Chauffage liquide* Une première zone dans laquelle la température de mélange augmente linéairement.
2. *Couche limite* Une seconde, située juste en amont de l'interface liquide vapeur, mise en évidence par des tirets gris, au sein de laquelle la température décroît brutalement jusqu'à la température de saturation, dans notre choix d'adimensionnement  $T_{sat} = 0$ . Un zoom et un rectangle cyan permettent de mieux discerner le comportement du champ de température et délimiter cette zone très étroite.
3. *Chauffage vapeur* Une dernière section qui débute derrière l'interface diphasique se caractérisant elle aussi par une croissance linéaire de la température avec, cette fois-ci, une pente supérieure à celle de la première zone. Cette différence de pente est directement reliée au rapport des capacités thermiques respectives des phases vapeur et liquide généralement inférieur à 1,  $C_p < 1$  (V.1).

La mesure des poids respectifs des composantes associées au chauffage pariétal et à l'interface diphasique permet de mieux comprendre l'existence de la seconde zone identifiée. En effet on peut voir sur la figure Fig. V.4 que dans la première zone, la composante liée au chauffage pariétal domine le champ de température. Toutefois cette hégémonie n'existe que loin de l'interface liquide/vapeur. A proximité de celle-ci, le terme  $T_l^i$  devient, au contraire, du même ordre de grandeur que le terme de chauffage. Comme  $T_l^i$  décrit des effets de conduction thermique remontant l'écoulement, on en déduit que la chute de température en amont de l'interface provient des effets de conduction thermique eux-mêmes issus au respect de la condition de température à l'interface. En d'autres termes, il s'agit d'une couche limite thermique que l'on pourrait qualifier d' » interfaciale « par opposition aux couches limites pariétales. Cette couche limite interfaciale est également représentative de la zone liquide dans laquelle l'interface vient puiser l'énergie nécessaire à l'évaporation du débit liquide incident. Les sous-figures suivantes vont désormais permettre de mieux caractériser les propriétés et les effets sur le processus de vaporisation confinée du champ de température d'un côté et de la couche limite interfaciale de l'autre.

Les sous-figures (b) complètent les tendances générales dégagées par l'observation des variations de la température de mélange. En particulier, un gradient radial de température nettement plus marqué se développe au sein de la phase vapeur en comparaison des niveaux de température observés dans la phase liquide. Cet écart de température est clairement distinguable entre le profil central, c-à-d en  $r = 0$  et pariétal c-à-d en  $r = 1$ , avec une surchauffe visible en proche paroi. Ce comportement propre à la phase vapeur est encore une fois la conséquence des différences de propriétés physiques entre les phases vapeur et liquide. Cette fois-ci ce sont les propriétés isolantes de la vapeur,  $\kappa_v \gg 1$ , qui engendrent un gradient radial thermique plus important dans la phase vapeur que dans la phase liquide pour un même flux pariétal imposé. La surchauffe pariétale découle donc directement du caractère isolant de la vapeur. Cet isolement thermique associé au phénomène de caléfaction, est un phénomène étroitement étudié dans le domaine nucléaire. En effet, la surchauffe des crayons de combustibles en situation accidentelle peut aboutir à l'atteinte de la température de fusion des métaux qui composent l'enveloppe des crayons [1]. On peut également identifier une courte zone d'établissement thermique en



entrée de la zone vapeur, reconnaissable aux variations non linéaires en  $z$ , des différents profils de température. Là encore, les propriétés de la phase vapeur sont à l'origine d'un nombre de Péclet vapeur plus élevé que le Péclet d'entrée liquide,  $Pe_v = Pe_l C_p / \kappa_v \gg Pe_l$ , ce qui équivaut à rallonger d'autant la longueur d'établissement thermique -directement proportionnelle au nombre de Péclet côté vapeur-.

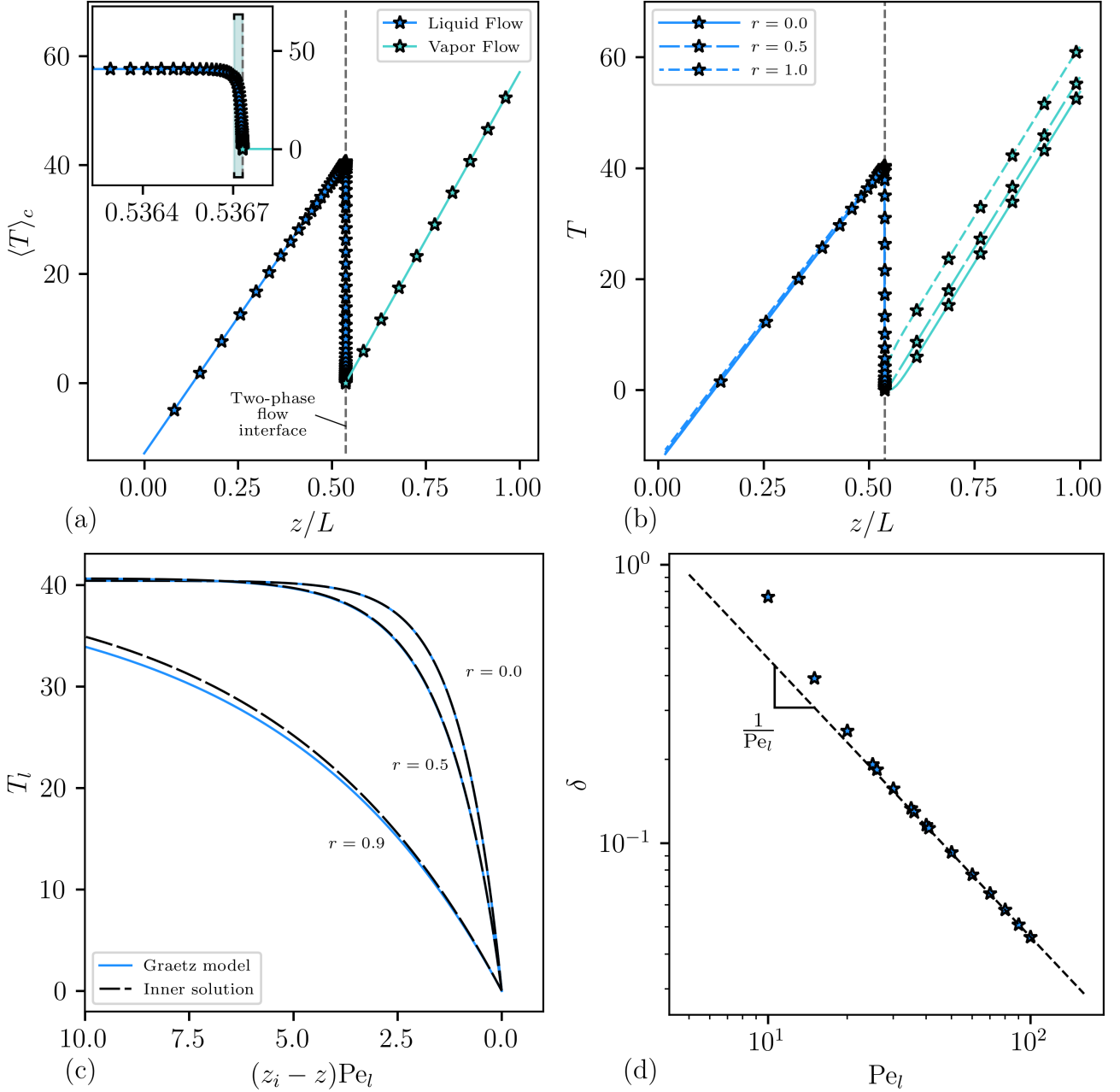


Figure V.2: (a) température de mélange au sein d'un écoulement diphasique en eau, dans un monocanal chauffé,  $Pe_l = 80$  ; (b) Profils de la température locale ; (c) Profils de température dans la phase liquide dans la zone proche interface liquide/vapeur comparé à la solution interne explicitée en (V.28) ; (d) Variation de l'épaisseur de la couche limite en amont de l'interface diphasique en fonction du Péclet d'entrée

Les sous-figures Fig. V.2.c et Fig. V.3.c illustrent la violente chute de température dans la couche limite interfaciale. Les profils de température en courbes pleines sont comparés avec une solution analytique (V.28), représentée par des courbes tiretées. La prédiction analytique du



champ de température de couche limite (solution interne asymptotique) est très proche de la solution numérique de la région centrale du canal. Cette comparaison se détériore légèrement près de la paroi. La solution asymptotique interne du champ de température est particulièrement intéressante puisqu'elle fournit une solution de référence qui n'est pas soumise à la convergence modale numérique de la méthode de Graetz. Une mauvaise convergence de la décomposition modale en mode de Graetz se traduit, en effet, par une mauvaise évaluation des amplitudes de  $T_l^i$  et, par conséquent, par une mauvaise évaluation de  $z_i$ . Pour assurer une évaluation précise du champ de température, il est nécessaire de calculer des fonctions propres d'ordre de plus en plus élevé au fur et à mesure que le Péclet augmente. La solution analytique permet ainsi d'extrapoler l'estimation du champ de température dans la limite  $Pe_l \gg 1$  inatteignables numériquement.

Finalement, les sous-figures [Fig. V.2.d](#) et [Fig. V.3.d](#) montrent l'évolution de l'épaisseur de couche limite interfaciale en fonction du nombre de Péclet liquide. La droite en tirets noirs, permet de visualiser la prédiction réalisée à partir de la solution interne du champ de température dans l'approximation des hauts nombres de Péclet ([V.33](#)). Cette figure montre que l'épaisseur de la couche limite interfaciale  $\delta$  est inversement proportionnelle au nombre de Péclet liquide,  $\delta \sim 1/Pe_l$ . En changeant de perspective, cela implique une élévation du gradient de température côté liquide directement proportionnel au nombre de Péclet. Cette prédiction est en très bon accord avec les résultats obtenus avec la méthode de Graetz dès lors que  $Pe_l > 20$ . La diminution de l'épaisseur de couche limite est un excellent exemple de la compétition entre les effets convectifs qui poussent le fluide vers l'interface et les effets conductifs qui remontent l'écoulement pour acheminer l'énergie jusqu'à l'interface où a lieu le processus d'évaporation : plus la convection l'emporte sur la conduction thermique, i.e.  $Pe_l \nearrow$ , plus la distance sur laquelle le pompage de l'énergie par conduction en amont de l'interface est confinée aux abords de cette dernière.

Dans le but d'offrir une palette représentative des grandes familles de fluides utilisées dans l'industrie, six candidats ont été sélectionnés pour illustrer les effets des propriétés du fluide. La figure [Fig. V.5](#) présente ainsi les valeurs du rapport de la chaleur latente de vaporisation/capacité thermique du liquide en fonction de la pression critique pour les fluides sélectionnés. Les symboles colorés représentent les gammes de pression critique pour lesquelles des données expérimentales ont été trouvées dans la littérature. Les marqueurs entourés par un cercle rouge symbolisent, quant à eux, les conditions de pression dans lesquelles ces fluides évolueront dans ce chapitre et celui qui suit. D'un point de vue général, le rapport  $\mathcal{L}_{vap}/\tilde{c}_{pl}$  est de l'ordre de 210K pour les faibles pressions réduites, à l'exception notable de l'hélium pour qui le rapport n'excède pas les 10K sur toute la gamme de pression et de l'eau qui maximise la valeur de la surchauffe avec un maximum à  $\sim 235K$ . Avec la montée en pression, le rapport diminue d'abord faiblement, avec une variation d'environ 15% pour  $P_R < 0.5$  puis chute brusquement au voisinage de la pression critique  $P_R > 0.9$ , avec une diminution de l'ordre de 100%. L'évaluation des variations de ce rapport est particulièrement intéressante car elle permet d'approximer l'amplitude de la surchauffe à l'interface  $\Delta\tilde{T}_{su} = \langle \tilde{T}_h^l \rangle_c(z_i) - \tilde{T}_{sat}$  pour un fluide donné, comme cela sera illustré en [Table V.3](#), puis démontré à la section [1.b](#) par la suite.

Afin d'étudier l'effet de la disparité des propriétés des différents fluides sur le processus d'évaporation, on cherche tout d'abord à établir des conditions de test 'équivalentes' pour l'ensemble des fluides. Il ne suffit effectivement pas d'imposer un débit, une puissance de chauffe ou une température d'entrée identiques pour tous, puisqu'à titre d'exemple, une température d'entrée de 200°C est tout à fait envisageable pour un écoulement d'eau à 46 bar mais totalement aberrante pour un écoulement de R134a avec une température de saturation de 9°C. Pour

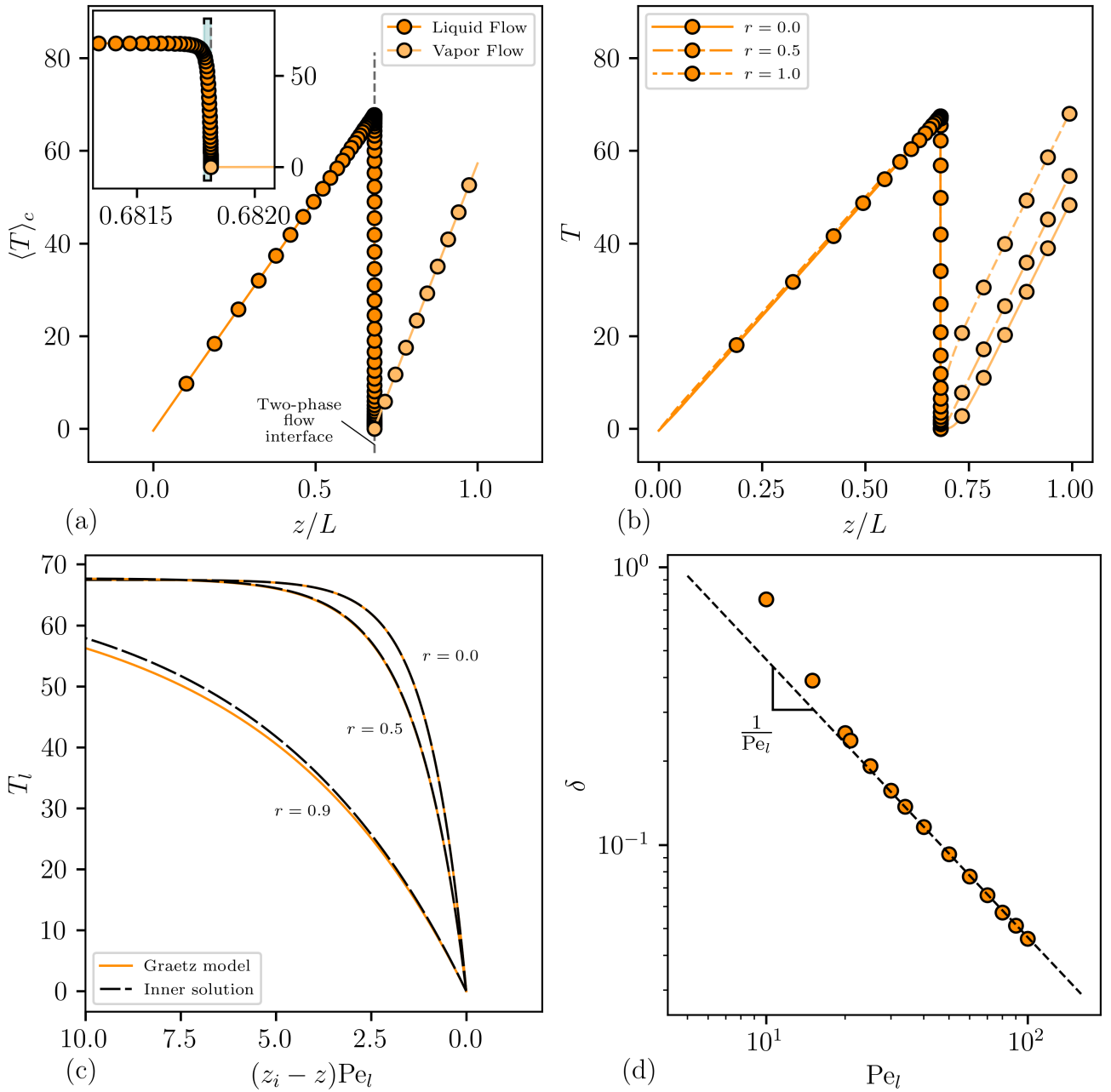


Figure V.3: (a) Température de mélange au sein d'un écoulement diphasique d'ammoniac, dans un monocanal chauffé,  $Pe_l = 80$  ; (b) Profils de la température locale ; (c) Profils de température dans la phase liquide dans la zone proche interface liquide/vapeur comparé à la solution interne explicitée en (V.28) ; (d) Variation de l'épaisseur de la couche limite en amont de l'interface diphasique en fonction du Péclet d'entrée

assurer une certaine homogénéité entre les conditions de test de chaque fluide, il est plus adapté de considérer des unités construites à partir des propriétés du fluide et de la géométrie de la conduite. On s'appuie pour cela sur trois nombres adimensionnels qui seront choisis constants :

- $Pe_l = 30$ , fixe le débit entrant,
- $N_{pch} = \frac{\tilde{P}_w}{\dot{m}\mathcal{L}_{vap}} \frac{\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_v} = 74.5$ , la puissance de chauffe adimensionnée

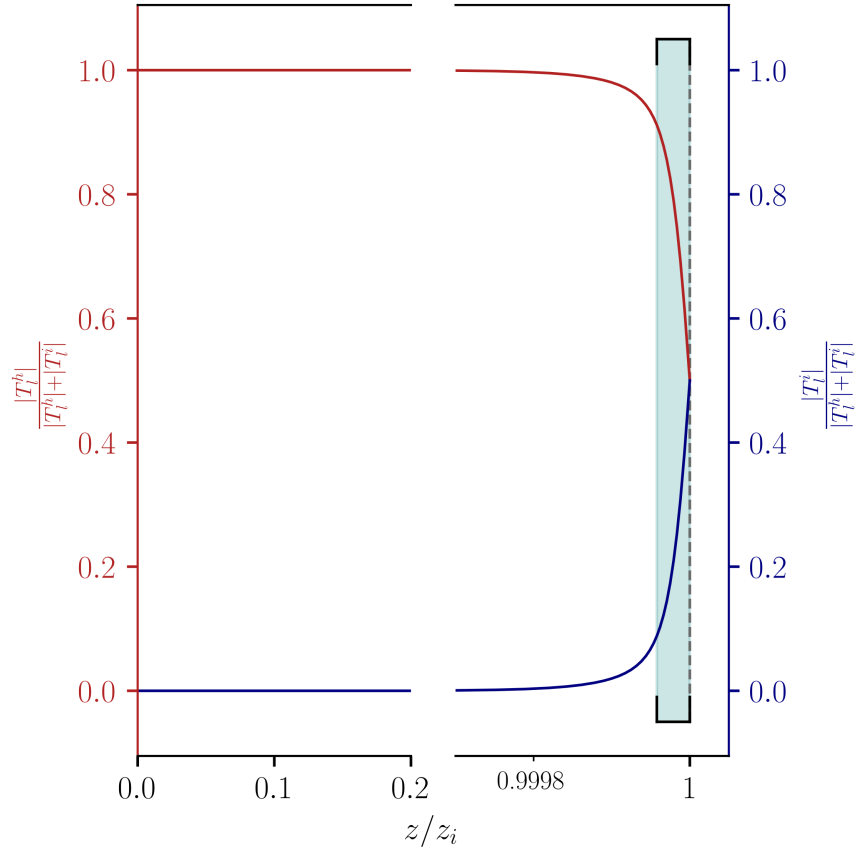


Figure V.4: Evolution des poids relatifs des contributions du chauffage et de l'interface liquide/vapeur au champ de température liquide. Les conditions sont identiques à celles décrites aux figures V.2 et V.3

Fluide		Hélium	CO2	Eau	NH3	R134a	Isobutane
$\tilde{c}_{pl}$	$[J.K^{-1}.kg^{-1}]$	5082	4605	4958	4560	1368	2459
$\tilde{c}_{pv}$	$[J.K^{-1}.kg^{-1}]$	9938	5124	4026	2534	942.3	1830
$\tilde{k}_l$	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$	0.0186	0.08252	0.5994	0.5922	0.09052	0.08847
$\tilde{k}_v$	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$	0.00892	0.03571	0.0526	0.02245	0.01301	0.01708
$\mathcal{L}_{vap}$	$[J.kg^{-1}]$	20711	144741	1668000	1299000	191263	327622
$P_{sat}$	$[bar]$	1	59	46	2.833	4.059	3.64
$\tilde{\rho}_l$	$[kg.m^{-3}]$	125.3	759.4	785.7	652.9	1263	548.2
$\tilde{\rho}_v$	$[kg.m^{-3}]$	16.66	204.6	23.23	2.333	19.81	9.463
$(\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_v)/\tilde{\rho}_v$	$[-]$	6.52	2.71	32.8	279	62.8	56.9
$\tilde{T}_{sat}$	$[K]$	-268.9	21.27	258.8	-10.64	9.34	26.31
$P_R$	$[-]$	0.44	0.8	0.2085	0.025	0.1	0.1

Tableau V.1: Table des propriétés thermo-hydrauliques des fluides utilisés

- $N_{sub} = \frac{\tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in})}{\mathcal{L}_{vap}} \frac{\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_v} = 3.94$ , la température d'entrée adimensionnée

La figure Fig. V.6 rassemble les profils de température de mélange lors de l'évaporation des différents fluides dans les conditions décrites précédemment. Il est remarquable de noter que l'ensemble des fluides possèdent une structure du champ de température en accord avec l'analyse déjà effectuée. Notamment, la présence d'un éventail de taux croissance de la température dans le domaine vapeur,  $d\langle T_v \rangle_c / dz = 4 / (Pe_l \mathcal{C}_p)$ , illustre bien la disparité des propriétés entre les fluides, avec une progression de la température trois fois plus rapide dans la vapeur de

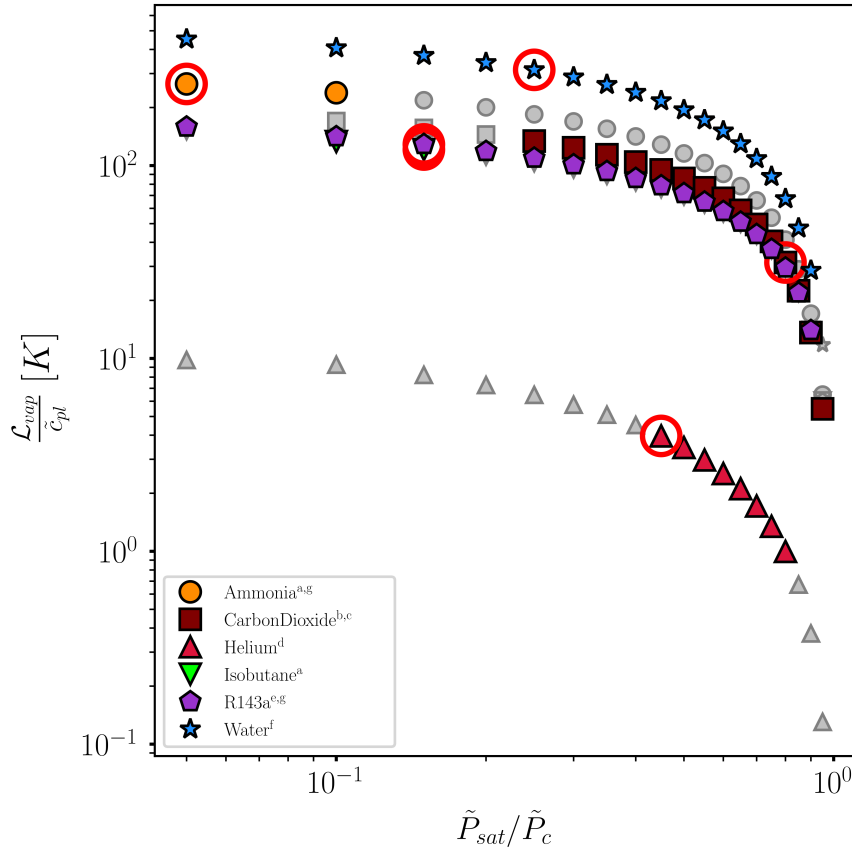


Figure V.5: Surchauffe pour différents fluides en fonction de la pression réduite. Les symboles colorés correspondent à certaines conditions de fonctionnement trouvées dans la littérature. Les points encerclés indiquent les pressions de saturation qui seront utilisées pour les simulations. a : Thome et al. (2008) [2], b : Thome et al. (2004) [3], c : Cabeza et al. (2017) [4], d : Ganesan et al. (2021) [5], e : Thome (1996) [6], f : Groeneveld et al. (2007) [7], g : Marchetto et al. (2022) [8]

R134a que dans l'hélium gazeux par exemple. A contrario, la pente dans le domaine liquide est en revanche commune, en effet, le même nombre de Péclet est imposé pour tous les fluides et  $d\langle T_l \rangle_c / dz = 4/Pe_l$ . En outre, le niveau de surchauffe atteint et la position de l'interface fournissent eux-aussi des éléments distinctifs entre les fluides. Avec pour certains d'entre eux, une apparition précoce de la phase vapeur, comme c'est le cas pour l'hélium et le CO2 ; et pour d'autres, tels que le R134a et l'isobutane, une interface diphasique beaucoup plus en aval dans la conduite. Nous verrons un peu plus bas qu'il est possible de tisser un lien pertinent (V.5) entre la longueur de la phase liquide et le paramètre  $\mathcal{X} = \dot{m}L(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in})) / \tilde{P}_w = L((\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_v) / \tilde{\rho}_v + N_{sub}) / N_{pch}$ . Le tableau Table V.2 met en lumière, la similitude marquée entre les variations du paramètre  $\mathcal{X}$  et la position du front de changement de phase  $z_i$  conduisant à une relation de proportionnalité entre eux. Dans la même logique et par anticipation des résultats obtenus plus bas section 1.b, le tableau Table V.3 montre une dépendance claire entre le niveau de surchauffe et l'inverse du nombre de Stefan  $Ste = \tilde{c}_{pl}\Delta\tilde{T}_h / \mathcal{L}_{vap}$ .

Fluide	CO2	Hélium	Eau	Isobutane	R134a	NH3
$\mathcal{X}/\mathcal{X}_{CO2}$	1	1.6	5.5	9.2	10	43
$z_i/z_{iCO2}$	1	1.6	5.6	9.7	10	-

Tableau V.2: Comparaison entre les rapports de position de l'interface liquide/vapeur et les rapports de  $\mathcal{X}$

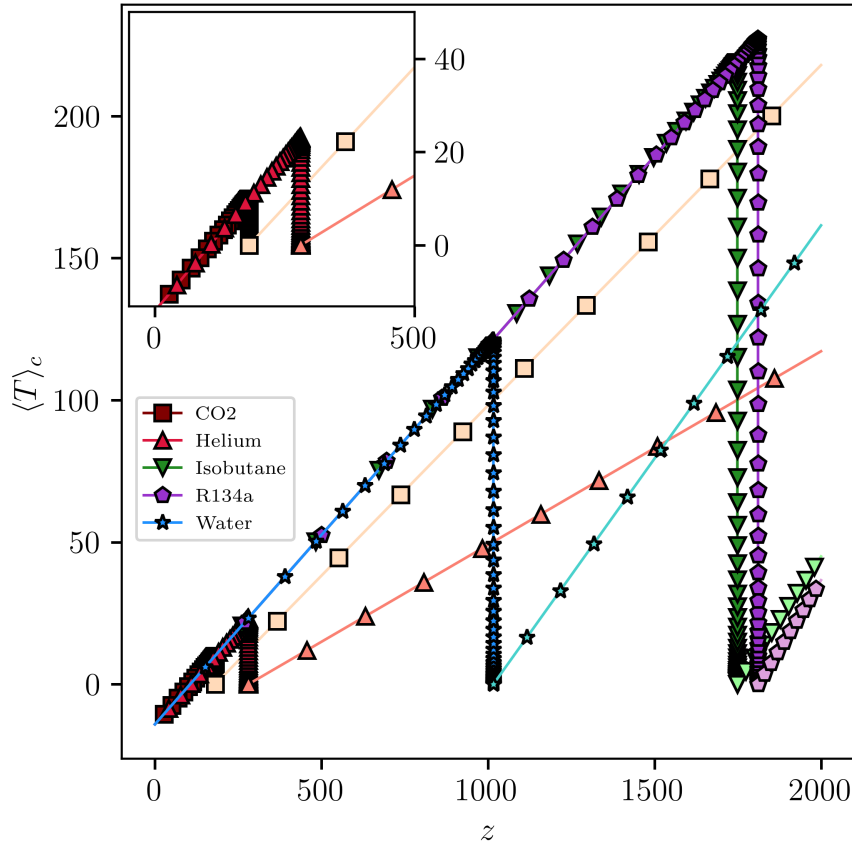


Figure V.6: Température de mélange lors de l'ébullition de différents fluides pour  $N_{pch} = 74.5$ ,  $N_{sub} = 3.94$ ,  $Pe_l = 30$  ; Dans ces conditions un écoulement d'ammoniac n'atteint pas les conditions d'évaporation

Fluide	CO2	Helium	Eau	Isobutane	R134a
$\Delta T_{su}$	9.9	23.2	121	219	227
$1/Ste$	9.7	22.7	119	214	222

Tableau V.3: Comparaison des niveaux de surchauffe et du nombre de Stefan

## 1.b Prédiction de la position de l'interface

Pour décrire l'écoulement diphasique associé au modèle choisi, il est nécessaire d'exprimer la position de l'interface liquide/vapeur en fonction des différents paramètres géométriques, thermiques et fluides. Dans cette section l'analyse du positionnement du front d'évaporation se décompose en deux phases. Dans une première partie, on trouve que la position de l'interface est liée à différents paramètres thermo-fluidiques. Les résultats obtenus conduisent à l'identification d'une loi linéaire entre cette position et le paramètre  $Pe_l (1/Ste - T_{in}) = 4\mathcal{X}$ . Dans un second temps, un bilan d'énergie est réalisé dans le domaine liquide et confirme cette loi simple.

### Analyse des calculs obtenus par décomposition sur les modes de Graetz

Le déplacement de l'interface est analysé en modifiant quatre paramètres : la température d'entrée du liquide  $\tilde{T}_{in}$ , du flux pariétal  $\phi_w$ , la chaleur latente  $\mathcal{L}_{vap}$  et le rayon du canal  $\tilde{R}$ . Pour chaque combinaison de ces quatre paramètres, un balayage du Péclet d'entrée est mené sur l'intervalle  $[5, 85]$ . L'ensemble des huit mix utilisés est rassemblé dans le tableau [Table V.4](#).

La figure Fig. V.7.a donne l'évolution de l'interface diphasique obtenue en fonction du nombre de Péclet liquide. L'interface semble se déplacer linéairement avec le nombre de Péclet d'entrée. Néanmoins la valeur de la pente change sensiblement avec les variations des différents paramètres, en particulier lors des modifications de la puissance de chauffe, du rayon et de la chaleur latente d'évaporation. En revanche, lorsque l'on trace la position de l'interface en fonction du paramètre adimensionnel  $Pe_l(1/Ste - T_{in})$  (Cf Fig. V.7.b), toutes les droites se superposent adoptant une pente commune de  $1/4$ . La proportionnalité entre la position de l'interface et le nombre de Péclet est assez naturelle dans la mesure où cette dernière traduit un recul de l'interface lorsque le débit liquide augmente. Le coefficient de proportionnalité entre  $z_i$  et  $Pe_l$  est composé de deux termes : la température d'entrée adimensionnée, et l'inverse du nombre de Stefan. Concernant le premier terme, celui-ci tient compte du niveau de sous-refroidissement du liquide en entrée du canal. Ainsi, un liquide plus froid impliquera un  $T_{in}$  plus négatif retardant l'apparition de la phase vapeur. Le second terme, est de son côté directement proportionnel à la chaleur latente. Il représente l'énergie nécessaire à la vaporisation totale du fluide. En règle générale, l'énergie nécessaire à la montée en température du liquide de la température d'entrée à la température de saturation est bien plus faible que l'énergie requise pour vaporiser le débit liquide. C'est en particulier le cas pour l'eau qui dispose d'une grande chaleur latente, suffisamment élevée pour que  $\mathcal{L}_{vap} \gg \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in})$ . En pratique, cela signifie que pour des écoulements peu sous-refroidis ou utilisant des fluides à grand rapport  $\mathcal{L}_{vap}/\tilde{c}_{pl}$ , la position de l'interface peut être approchée par,

$$z_i \approx \frac{1}{4} \frac{Pe_l}{Ste} \quad (V.2)$$

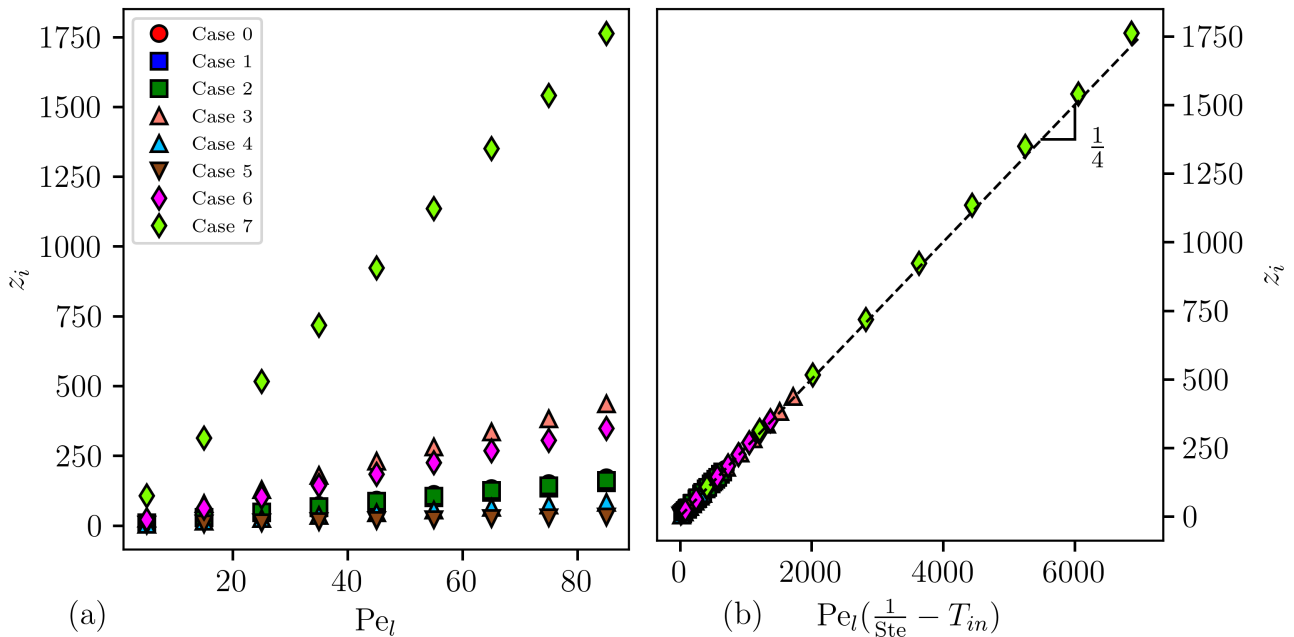


Figure V.7: (a) Variations de la position de l'interface en fonction du nombre de Péclet liquide pour différents jeux de paramètres reportés dans le tableau Table V.4 ; (b) Collapse des courbes précédentes représentées cette fois-ci en fonction de  $Pe_l(\frac{1}{Ste} - T_{in})$  sur la droite de pente  $1/4$  prévue par la théorie (V.5)

Case	$\tilde{T}_{in}[K]$	$\phi_w[kW/m^2]$	$\mathcal{L}_{vap}[kJ/kg]$	$\tilde{R}[mm]$
0	296	50	2258	1
1	362	50	2258	1
2	329	50	2258	1
3	296	20	2258	1
4	296	100	2258	1
5	296	50	216.972	1
6	296	50	2258	0.5
7	296	50	2258	0.1

Tableau V.4: Valeurs des paramètres utilisées dans les différents cas de la figure Fig. V.7

### Bilan d'énergie dans la phase liquide

Pour confronter et valider la relation déduite dans le paragraphe précédent, on cherche maintenant à exprimer la position de l'interface en utilisant un bilan énergétique. La traduction de la conservation de l'énergie dans le domaine liquide,  $\Gamma \times ] - \infty, z_i^- ]$ , avec  $\Gamma$  la section du canal, s'écrit en utilisant le théorème de la divergence comme un bilan de flux de surface

$$\int_{\Gamma_{z_i^-}} \tilde{\rho}_l \tilde{w}_l \tilde{h}_l d\Omega - \int_{\Gamma_{-\infty}} \tilde{\rho}_l \tilde{w}_l \tilde{h}_l d\Omega - \left( \int_{\Gamma_{z_i^-}} \tilde{k}_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial \tilde{z}} d\Omega - \int_{\Gamma_{-\infty}} \tilde{k}_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial \tilde{z}} d\Omega + 2\pi \tilde{R} \tilde{z}_i \phi_w \right) = 0 \quad (\text{V.3})$$

Comme les deux premiers termes sont évalués en  $\Gamma_{-\infty}$  (c'est à dire en amont dans une région homogène) et au niveau de l'interface  $\Gamma_{z_i^-}$  où, dans les deux cas, la température est homogène alors ils conduisent à une expression proportionnelle à  $(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in})$ . Concernant les deux termes suivant associés aux flux diffusifs pariétaux, le terme amont en  $\Gamma_{-\infty}$  ne donne aucune contribution alors que le terme interfacial sur  $\Gamma_{z_i^-}$ , par la relation de saut (IV.1), produit une contribution proportionnelle à  $\dot{m} \mathcal{L}_{vap}$ . Si on néglige la contribution du flux de vapeur dans cette relation de saut, car le gradient dans la phase liquide est dominé par la contribution dominante de la couche limite (on verra par la suite en (V.6) que cette hypothèse est justifiée) alors on obtient

$$\dot{m} \tilde{c}_{pl} (\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) - 2\pi \tilde{R} \tilde{z}_i \phi_w + \dot{m} \mathcal{L}_{vap} = 0 \quad (\text{V.4})$$

Cette relation se simplifie en

$$(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) - \frac{2\pi \tilde{R} \tilde{z}_i \phi_w}{\dot{m} \tilde{c}_{pl}} + \frac{\mathcal{L}_{vap}}{\tilde{c}_{pl}} = 0$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}}{\frac{\phi_w \tilde{R}}{k_l}} - \frac{2\pi \tilde{z}_i}{\frac{\dot{m} \tilde{c}_{pl}}{k_l}} + \frac{\mathcal{L}_{vap}}{\tilde{c}_{pl} \frac{\phi_w \tilde{R}}{k_l}} = 0$$

ou encore, en faisant apparaître les nombres adimensionnels, sous la forme

$$-T_{in} - \frac{4z_i}{\text{Pe}_l} + \frac{1}{\text{Ste}} = 0$$

Soit,

$$z_i = \frac{\text{Pe}_l}{4} \left( \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} \right) \quad (\text{V.5})$$

Pendant l'établissement de cette relation, le passage (V.3) à (V.4) s'appuie sur trois hypothèses :

- l'enthalpie est constante dans les sections situées à l'infinie amont et au niveau de l'interface,
- la relation de saut (IV.1),
- la contribution du flux thermique liquide est très grande comparée à la composante vapeur (V.6).

$$\kappa_v \frac{\partial T_v}{\partial z} = q_v \ll -q_l = -\frac{\partial T_l}{\partial z} \quad (\text{V.6})$$

Cette dernière hypothèse n'est pas évidente même si les résultats obtenus précédemment sur la couche limite la suggère. Une analyse systématique des deux apports énergétiques au niveau du front de changement de phase a donc été menée et est synthétisée en figure Fig. V.8. Cette figure rassemble l'évolution du rapport entre les flux thermiques vapeur et liquide au niveau de l'interface, pour différents fluides et en fonction de  $Pe_l$ . Sur ces courbes, la domination du terme liquide sur le terme vapeur s'observe sans ambiguïté, avec un rapport  $q_v / -q_l > 1000$  qui s'accroît avec l'augmentation du  $Pe_l$ . L'inégalité (V.6) est par conséquent bien vérifiée, en particulier à haut Péclet. Dans le but de caractériser plus finement la dépendance du rapport des flux en fonction de  $Pe_l^{3/2}$  un encadré en échelle bi-logarithmique a été ajouté sur la figure Fig. V.8. Il montre que la proportion de l'énergie acheminée à l'interface par la zone liquide augmente en  $Pe_l^{3/2}$  et que le paramètre  $C_p / \kappa_v$  permet d'obtenir un collapse des courbes.

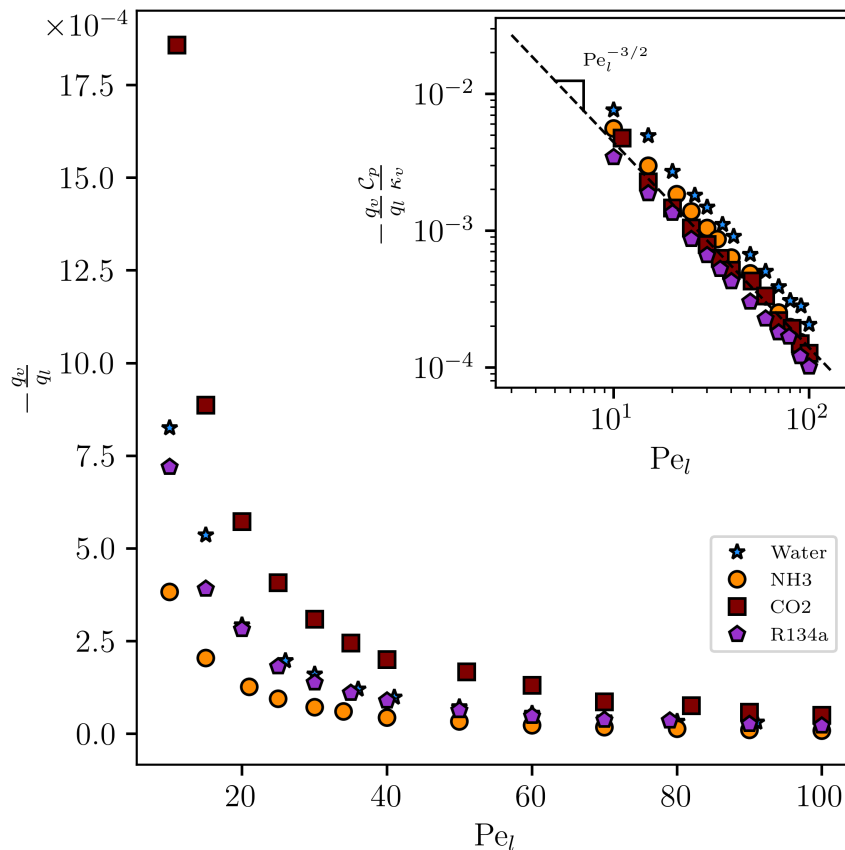


Figure V.8: Rapport des flux thermiques au niveau de l'interface liquide/vapeur pour différents  $Pe_l$  pour différents fluides. Une représentation logarithmique des mes courbes pondérées par le facteur  $C_p / \kappa_v$  montre un comportement indépendant du fluide considéré.

### Généralisation et dépendance aux régimes d'écoulement

On réobtient donc finalement bien la même loi de proportionnalité entre  $z_i$  et  $Pe_l$  que celle établie par la méthode des modes de Graetz. La similitude des résultats obtenus par ces deux



approches indépendantes conforte la validité de la relation (V.5). Mieux encore, en poussant l'analyse plus loin, il s'avère que les hypothèses utilisées lors du bilan d'énergie sont beaucoup moins fortes que celles liées à la méthode des modes de Graetz. En effet, aucune contrainte n'a été imposée ni sur la forme du champ de vitesse, ni sur son établissement, ce qui permet a priori d'étendre le résultat pour des écoulements dynamiquement non établis et/ou pour des écoulements turbulents. Un second point important, est que le résultat obtenu est indépendant de la topologie de l'écoulement sous la condition que l'énergie injectée dans l'écoulement soit exclusivement réservée au chauffage de la phase liquide puis à la vaporisation de celui-ci jusqu'à complétion de cette évaporation. On peut donc effectuer le même bilan pour une répartition quelconque de la phase vapeur, en particulier en présence de film gazeux pariétaux liés à une ébullition pariétale qui pourrait se produire dans la région liquide surchauffée. Dans ce cas, un nombre fini de bulles de vapeurs sera inclus dans le volume de contrôle. Énergétiquement, ces volumes vapeur sont transparents, ils ne peuvent accumuler de l'énergie puisque, par hypothèse, l'énergie est réservée au chauffage du liquide et son évaporation, ils ne font donc que transmettre l'énergie qu'ils reçoivent, comme le traduit le bilan d'énergie établi sur la phase vapeur (V.7).

$$\sum_{k=1}^N \oint_{\partial\Omega_v^k} \tilde{k}_v \nabla \tilde{T}_v \cdot \mathbf{n} dl = 0 \quad (\text{V.7})$$

Où  $\Omega_v^k$  est le k-ième volume vapeur inclus dans le volume de contrôle. On peut alors établir que la portion de l'énergie pariétale captée par la vapeur sur  $\Gamma_w^v = \bigcup_{1 \leq k \leq N} \partial\Gamma \times ]-\infty, z_i^-] \cap \Omega_v^k$  est redistribuée au liquide par les interfaces liquide/vapeur où s'effectue l'évaporation  $\Gamma_i = \bigcup_{1 \leq k \leq N} \partial\Omega_v^k \setminus (\Gamma_w^v \cup \Gamma_{z_i^-})$

$$\int_{\Gamma_{z_i^-}} \tilde{k}_v \nabla \tilde{T}_v \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\Gamma_i} \tilde{k}_v \nabla \tilde{T}_v \cdot \mathbf{n} dl = -\Gamma_w^v \phi_w$$

Lorsque l'évaporation du fluide n'est pas concentrée en  $z_i$ , on suppose que les échanges peuvent y être négligés.

$$\int_{\Gamma_i} \tilde{k}_v \nabla \tilde{T}_v \cdot \mathbf{n} dl \simeq -\Gamma_w^v \phi_w \quad (\text{V.8})$$

Le bilan d'énergie dans la phase liquide s'écrit alors,

$$\dot{m} \tilde{c}_{pl} (\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) - \left( - \int_{\Gamma_{-\infty}} \tilde{k}_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial \tilde{z}} d\Omega + \Gamma_w^l \varphi_w + \int_{\Gamma_i} \tilde{k}_l \nabla \tilde{T}_l \cdot \mathbf{n} dl \right) = 0$$

En appliquant la relation de saut le long des interfaces liquide/vapeur,

$$\dot{m} \tilde{c}_{pl} (\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) + \int_{\Gamma_{-\infty}} \tilde{k}_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial \tilde{z}} d\Omega - \Gamma_w^l \varphi_w + \dot{m} \mathcal{L}_{vap} - \int_{\Gamma_i} \tilde{k}_v \nabla \tilde{T}_v \cdot \mathbf{n} dl = 0$$

En se rappelant que le champ de température est uniforme à l'infini amont, on en déduit que,

$$\dot{m} \tilde{c}_{pl} (\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) - \Gamma_w^l \varphi_w + \dot{m} \mathcal{L}_{vap} - \int_{\Gamma_i} \tilde{k}_v \nabla \tilde{T}_v \cdot \mathbf{n} dl = 0$$

En substituant (V.8) on retrouve le bilan issu du modèle à évaporation focalisée,

$$\begin{aligned} \dot{m} \tilde{c}_{pl} (\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) - (\Gamma_w^v + \Gamma_w^l) \phi_w + \dot{m} \mathcal{L}_{vap} &= 0 \\ \Leftrightarrow \dot{m} \tilde{c}_{pl} (\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}) - 2\pi \tilde{R} \tilde{z}_i \phi_w + \dot{m} \mathcal{L}_{vap} &= 0 \\ \Leftrightarrow & \quad (\text{V.5}) \end{aligned}$$

La relation (V.5) qui a été obtenue avec une hypothèse forte sur la vaporisation du liquide en  $z_i$  ne change donc pas lorsque l'on considère une répartition des phases plus complexe. Elle est donc robuste à la présence de film amont liquide dans le cas d'ébullition pariétale. Intuitivement, on comprend qu'à partir du moment où l'on suppose que l'ensemble de l'énergie injectée dans le canal est utilisé pour la transformation du liquide en vapeur, la fin de la vaporisation est indépendante du lieu de formation de la vapeur. Cette conclusion repose sur le fait que l'énergie reçue par l'écoulement est imposée par les conditions aux limites, en l'occurrence un flux pariétal fixé, et ne dépend pas de la structure ou des propriétés de l'écoulement comme cela aurait été le cas dans une configuration d'échangeur.

### Répartition de l'énergie lors du processus d'évaporation

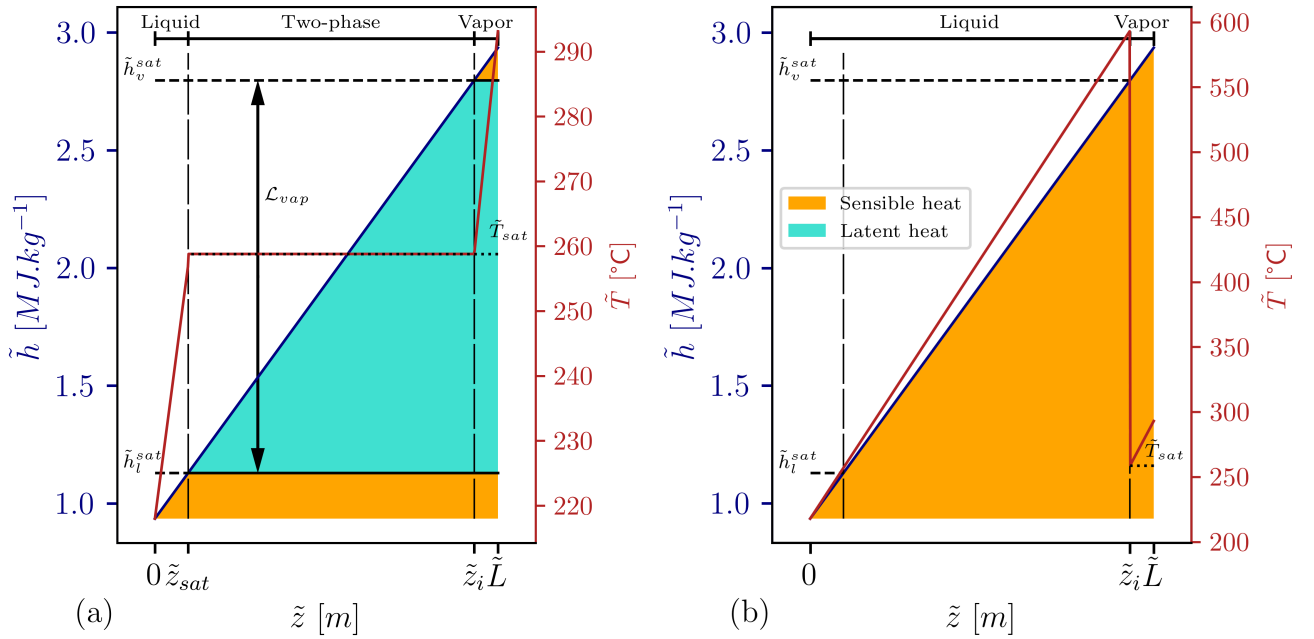


Figure V.9: Allure de la distribution enthalpique entre chaleur latente et chaleur sensible pour un écoulement diphasique avec une zone diphasique étalée (a) et selon le modèle développé (b) ; Les valeurs sont issues d'un bilan 1D pour de l'eau à 46 bar.

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de constater qu'une surchauffe conséquente apparaissait en amont de l'interface, sans commenter son origine. Cette surchauffe est, a priori, (Cf Table V.3) directement contrôlée par le nombre de Stefan, plus exactement  $\Delta T_{su} \sim 1/Ste$ . Elle se traduit par des niveaux de température qui dépassent allégrement les niveaux de surchauffe conventionnellement acceptés, de l'ordre généralement de quelques degrés jusqu'à la dizaine de degrés au-dessus de la saturation. Pour comprendre l'origine de ces niveaux de température, il est nécessaire de revenir sur les hypothèses du modèle d'évaporation sur lesquelles il se fonde. En effet, le modèle focalise le changement de phase au niveau du front liquide/vapeur et c'est à ce niveau qu'est consommée l'énergie requise à la vaporisation du liquide incident. D'un certain point de vue, cela équivaut à retarder l'évaporation alors même que l'énergie présente dans le fluide permettrait théoriquement la transformation d'une portion du débit liquide en vapeur. L'énergie accumulée dans le liquide se stocke par conséquent uniquement sous forme sensible et ne peut pas se répartir en une fraction sensible et latente. L'effet secondaire de cette distribution spécifique a pour conséquence de faire monter de manière inhabituelle la température du liquide. Pour illustrer cet effet, les figures Fig. V.9.a et Fig. V.9.b représentent l'augmentation -linéaire- de l'enthalpie, sa répartition entre les composantes sensibles et

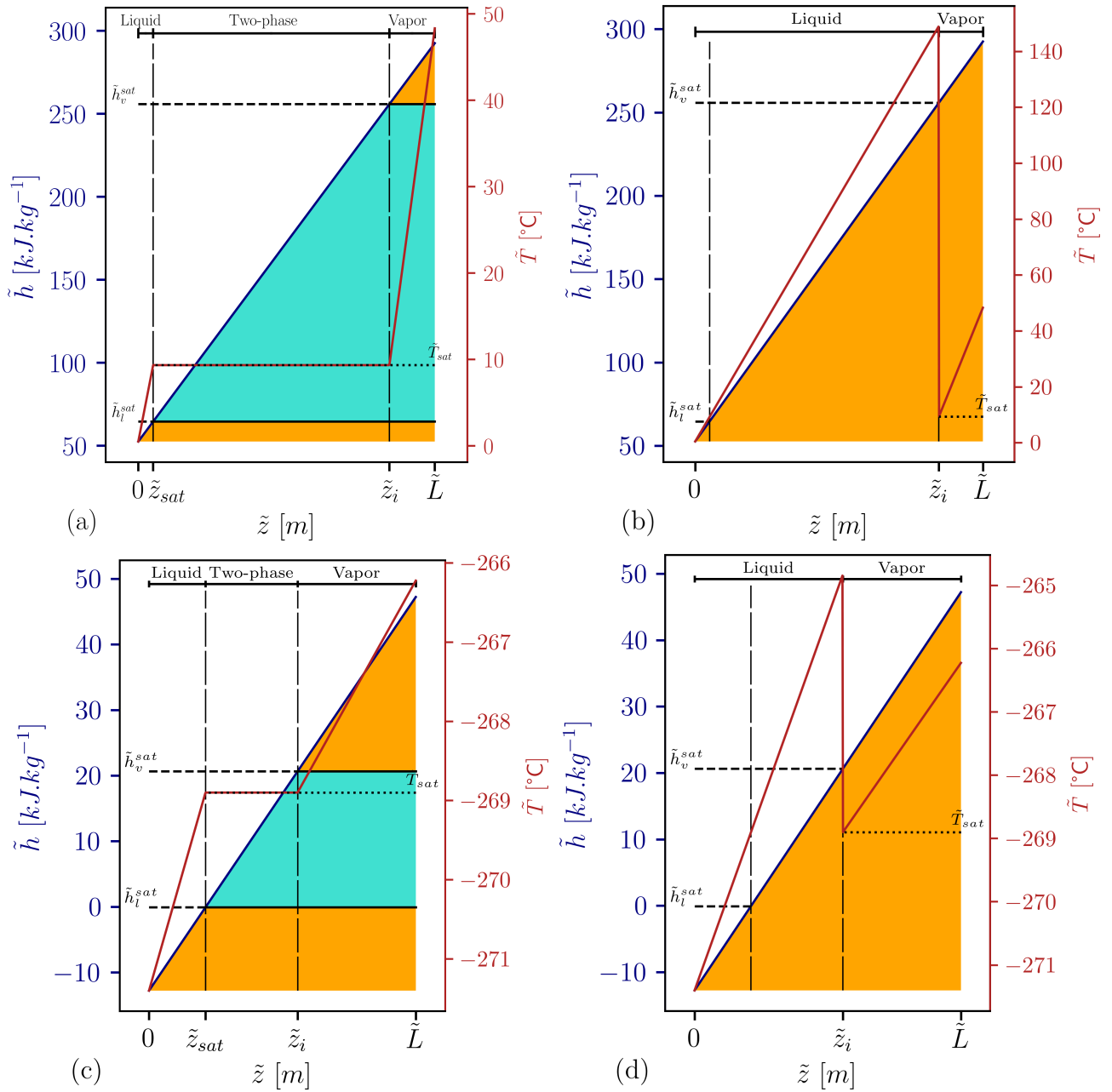


Figure V.10: Allure de la distribution enthalpique entre chaleur latente et chaleur sensible pour un écoulement diphasique avec une zone diphasique étalée (a,c) et selon le modèle développé (b,d) ; Les valeurs sont issues d'un bilan 1D pour du R134a (a,b) et de l'hélium (c,d) aux conditions reportées en [Table V.1](#).

latente ainsi que le niveau de la température de mélange, respectivement pour une évaporation progressive du fluide à partir de l'atteinte de l'enthalpie de saturation et dans le modèle développé ici. On voit clairement dans la figure [Fig. V.9.a](#), la stagnation de la température à saturation pendant le changement de phase ainsi que l'importance de la partie latente vis-à-vis des parties sensibles. Ces éléments diffèrent fortement avec la répartition des phases considérée dans notre modèle car l'ensemble de l'énergie y est alors stockée sous forme sensible en amont de l'interface. La température du liquide monte donc sans cesse, occasionnant une forte surchauffe, jusqu'à l'atteinte de l'enthalpie de saturation vapeur (Cf [Fig. V.9.b](#)). Malgré cet écart de température entre les deux modèles, les figures [Fig. V.9.a](#) et [Fig. V.9.b](#) montrent que le niveau d'enthalpie atteint au niveau de  $z = z_i$  est le même quelle que soit la structure en amont de la zone diphasique. Ce point est fondamental, car il permet de comprendre la robustesse

des expressions de la position de l'interface (V.2) et (V.5). L'expression analytique élaborée en section 1.c va permettre d'exprimer formellement le niveau de surchauffe avec le nombre de Stefan. A cet effet, la position du maximum de température atteint dans la phase liquide  $z_m$  est déterminée en se basant sur la solution interne du champ de température liquide (V.28). Cette position est régie par la condition  $d\langle T_l \rangle_c / dz(z_m) = 0$  qui donne en utilisant la solution de couche limite (V.28)

$$\frac{d}{dz} \left[ \langle T_l^h \rangle_c(z) - \langle T_l^h \rangle_c(z_i) e^{(z-z_i)\text{Pe}_l} \right] (z_m) = 0, \quad (\text{V.9})$$

soit,

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{4}{\text{Pe}_l} \left( z - z_i e^{(z-z_i)\text{Pe}_l} \right) \right] (z_m) = 0 \quad (\text{V.10})$$

ou encore,

$$\left( \frac{4}{\text{Pe}_l} - 4z_i e^{(z_m-z_i)\text{Pe}_l} \right) = 0 \quad (\text{V.11})$$

D'où la position de maximum de surchauffe,

$$z_m = z_i + \frac{1}{\text{Pe}_l} \ln \left( \frac{1}{\text{Pe}_l z_i} \right) \quad (\text{V.12})$$

Il vient, en réinjectant l'expression de  $z_m$  dans l'expression de la température de mélange,

$$\begin{aligned} \max(\langle T_l \rangle_c) &= \frac{4}{\text{Pe}_l} \left( z_m - z_i e^{(z_m-z_i)\text{Pe}_l} \right) \\ &= \frac{4}{\text{Pe}_l} \left( z_i + \frac{1}{\text{Pe}_l} \ln \left( \frac{1}{\text{Pe}_l z_i} \right) - \frac{1}{\text{Pe}_l} \right) \\ &= \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} + \frac{4}{\text{Pe}_l^2} \ln \left( \frac{1}{\text{Pe}_l z_i} \right) - \frac{4}{\text{Pe}_l^2} \\ &\underset{\text{Pe}_l \gg 1}{\simeq} \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} \end{aligned}$$

Ce qui, pour des fluides tels que  $\mathcal{L}_{vap}/\tilde{c}_{pl} \gg 1$ , c-à-d  $\text{Ste} \ll 1$  conduit à

$$\Delta T_{su} \underset{\text{Ste} \ll 1}{\simeq} \frac{1}{\text{Ste}} \quad (\text{V.13})$$

On retrouve donc bien la même approximation (Cf Table V.3) de la surchauffe basée sur le Stefan, mais cette fois-ci muni de termes correctifs fonction du sous-refroidissement d'une part et du Péclet d'autre part. Le niveau de surchauffe est donc fortement dépendant des propriétés physiques du fluide utilisé, avec un nombre de Stefan qui peut augmenter d'un facteur 20 dans les mêmes conditions d'utilisation entre un écoulement en hélium et un écoulement d'eau. Les figures V.10.(a-d) comparent justement les degrés de surchauffe pour de l'hélium et du R134a. Le cas de l'hélium est notable, du fait de sa très faible chaleur latente, la proportion de l'enthalpie stockée sous forme latente est du même ordre de grandeur que celle sous forme sensible (Cf Fig. V.10.c). La surchauffe associée dans le modèle de vaporisation (voir Fig. V.10.d) en est donc réduite d'autant avec une surchauffe très modérée de  $4K$ . Les niveaux de température mesurés dans les cas les plus extrêmes, lors de l'évaporation de l'eau par exemple, restent par contre bien supérieurs et nécessitent une discussion plus approfondie de la représentativité du modèle d'évaporation conduite ci-dessous.

## 1.c Expression analytique du champ de température dans la phase liquide

### Solution interne

Le champ de température de la phase liquide admet la forme donnée en (V.1). Des deux termes présents, seul celui lié à l'interface liquide/vapeur est inconnu, l'expression du terme décrivant le chauffage pariétal étant entièrement dicté par la géométrie, l'écoulement et le forçage thermique. Il est toutefois possible d'approcher analytiquement  $T_l^i$  par un développement asymptotique. Ce développement fournira par ailleurs l'occasion de mieux caractériser la couche limite interfaciale située en amont de l'interface diphasique. Lors des développements de ce paragraphe,  $\mathbf{r}$  sera à valeur dans  $\Omega_l$  et la coordonnée longitudinale naturelle sera marquée d'un astérisque pour la distinguer des variables externe et interne. On introduit les variables externe  $Z = z^* - z_i^*$  et interne  $z = Z/\epsilon = ZPe_l$ .  $T_l^i(\mathbf{r})$  vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_l^i}{\partial r}(r = 1, Z) = 0 \\ \lim_{Z \rightarrow -\infty} T_l^i(r, Z) = 0 \\ T_l^i(r, Z = 0) = -T_l^h(r, 0) \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

La conservation de l'énergie dans le liquide s'écrit alors dans la région interne,

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_l^i}{\partial z} = \frac{\partial^2 T_l^i}{\partial z^2} + \epsilon^2 \Delta_r T_l^i \quad (\text{V.15})$$

On cherche la solution interne, notée  $T_{In}$ , sous la forme du développement asymptotique régulier

$$T_{In} = T_{In}^0 + \epsilon T_{In}^1 + \epsilon^2 T_{In}^2 + O(\epsilon^3) \quad (\text{V.16})$$

En substituant  $T_l^i$  par  $T_{In}$  dans (V.15), on obtient à l'ordre  $O(1)$

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_{In}^0}{\partial z} - \frac{\partial^2 T_{In}^0}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{V.17})$$

qui, muni de la condition en  $Z = 0$ , conduit à la solution

$$\forall r \in [0, 1[ : T_{In}^0 = -(C_0^0 - T_l^h(r, 0))e^{(1-r^2)z} + C_0^0 \quad (\text{V.18})$$

Où deux constantes  $C_0^0$  et  $C_0^1$  ont été introduites. A l'ordre  $O(\epsilon)$  on trouve une copie du problème obtenu à l'ordre dominant (V.17) qui vérifie aussi les mêmes conditions aux limites. La solution à l'ordre  $O(\epsilon)$  est donc aussi

$$\forall r \in [0, 1[ : T_{In}^1 = -(C_0^1 - T_l^h(r, 0))e^{(1-r^2)z} + C_0^1 \quad (\text{V.19})$$

### Solution externe

La conservation de l'énergie dans le liquide exprimée, cette-fois, en fonction de la variable externe donne :

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_l^i}{\partial Z} = \epsilon \left( \Delta_r T_l^i + \frac{\partial^2 T_l^i}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{V.20})$$

La solution externe, notée  $T_{Out}$ , se développe également en,

$$T_{Out} = T_{Out}^0 + \epsilon T_{Out}^1 + \epsilon^2 T_{Out}^2 + O(\epsilon^3) \quad (\text{V.21})$$

En substituant on obtient  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 - r^2) \frac{\partial T_{Out}^k}{\partial Z} = \left( \Delta_r T_{Out}^{k+1} + \frac{\partial^2 T_{Out}^{k+1}}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{V.22})$$

A l'ordre 0, cela se traduit par l'équation différentielle suivante

$$\forall r \in [0, 1[ : \frac{\partial T_{Out}^0}{\partial z} = 0, \quad (\text{V.23})$$

qui associée à la condition en  $Z \rightarrow -\infty$ , découle sur :

$$T_{Out}^0 = 0 \quad (\text{V.24})$$

En substituant  $T_{Out}^0$ , pour obtenir l'ordre 1, on obtient à nouveau le même jeu d'EDP (V.23), avec une solution identique ; de même pour les ordres supérieurs,

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 : T_{Out}^k = 0 \quad (\text{V.25})$$

Le champ de température externe prend ainsi de la forme

$$T_{Out} = O(\epsilon^2). \quad (\text{V.26})$$

## Raccordement

On pose  $\eta$  la variable intermédiaire  $\eta = z\epsilon^{1-\gamma} = Z\epsilon^{-\gamma}$ , avec  $0 < \gamma < 1$ . Le développement de  $T_{In}$  et  $T_{Out}$  en fonction de  $\eta$  conduit alors à

$$T_{Out} = 0 \quad (\text{V.27})$$

$$\begin{aligned} T_{In} = & (-C_0^0 - T_l^h(r, 0))e^{(1-r^2)\eta\epsilon^{(\gamma-1)}} + C_0^0\eta\epsilon^\gamma + \\ & (-C_0^1 - T_l^h(r, 0))e^{(1-r^2)\eta\epsilon^{(\gamma-1)}} + C_0^1\eta\epsilon^{(\gamma+1)} + \dots \end{aligned}$$

On en déduit que  $C_0^0 = C_0^1 = 0$ , soit

$$T_{In} = -T_l^h(r, 0)e^{(1-r^2)z}(1 + \epsilon) + O(\epsilon^2) \quad (\text{V.28})$$

## Épaisseur de la couche limite frontale

On cherche maintenant à exprimer et caractériser l'épaisseur de la couche limite frontale située entre  $z_i^*$  et  $z_{bl}^*$ , i.e. d'épaisseur  $\delta = z_i^* - z_{bl}^*$ , en injectant (V.28) dans la relation de définition de l'épaisseur de couche limite  $|T_l^i(0, z_{bl}^*)| = 0.01T_l^h(0, z_{bl}^*)$ . En outre, on peut supposer qu'à condition que l'échange thermique soit établi aux environs de l'interface, la composante  $T_l^h$  du champ de température liquide suit une loi affine en  $z^*$ ,  $T_l^h(r, z^*) = az^* + b(r)$ , avec  $a = 4/Pe_l$ . Il vient en  $z_{bl}^* = z_i^* - \delta$

$$(az_i^* + b(0))e^{-\delta Pe_l} = 0.01 (az_i^* - \delta + b(0)) \quad (\text{V.29})$$

En se plaçant dans un écoulement à haut Péclet, la relation se simplifie en

$$e^{-\delta Pe_l} = 0.01 \left( 1 + \frac{\delta}{z_i^* + b(0)/a} \right) \quad (\text{V.30})$$

$$e^{-\delta Pe_l} = 0.01 \left( 1 + \frac{\delta}{\frac{Pe_l}{4} \left( \frac{1}{Ste} - T_{in} + b(0) \right)} \right) \quad (\text{V.31})$$

$$\delta \underset{Pe_l \gg 1}{\sim} -\frac{\ln(0.01)}{Pe_l} \quad (\text{V.32})$$

$$(\text{V.33})$$

On retrouve bien une épaisseur de couche limite inversement proportionnelle au Péclet d'entrée, comme cela avait été mis en avant dans les figures Fig. V.2.d et Fig. V.3.d. Le coefficient est quant à lui dépendant du critère sélectionné ici pour délimiter la couche limite, en l'occurrence un écart de 1% avec le champ de température sans interface. Il est particulièrement intéressant de voir que du fait du resserrement progressif de la couche limite vers l'interface diphasique au fur et à mesure que le débit liquide augmente, les gradients thermiques aux abords de l'interface seront également de plus en plus marqués. Cette remarque est tout à fait compatible avec le besoin d'énergie croissant au niveau de l'interface pour évaporer le débit liquide incident. En effet, plus le Péclet liquide sera important plus le captage d'énergie par diffusion thermique se fera sur une zone réduite, que cela soit dû à un fort débit liquide ou à une très faible conductivité thermique du fluide, engendrant des variations de températures de plus en plus focalisées autour de l'interface.

## 1.d Confrontation du modèle d'évaporation en milieu confiné

A ce stade, l'attention s'est focalisée sur l'analyse et l'interprétation des résultats obtenus avec le modèle d'évaporation en micro-canal. Bien que celui-ci soit distinct de la plupart des autres modèles d'évaporation en canaux non-confinés, les travaux de [9] présentent un modèle dont les hypothèses sont similaires aux nôtres. C'est pourquoi nous comparons donc notre modèle à celui de Peles dans le premier paragraphe de cette section. Pour compléter la validation des résultats obtenus plus haut, une confrontation entre prédiction de notre modèle et observations expérimentales est également réalisée avec une série de mesures portant sur la mesure du flux critique, dans un second temps.

### Comparaison avec le modèle analytique de Peles

Le modèle de [9] est également destiné aux écoulements diphasiques en micro-canaux. Des observations expérimentales ont motivé cet auteur à considérer une zone diphasique restreinte qu'il considère infinitésimale. Il parle d'ailleurs de 'front d'évaporation' et non pas de zone diphasique. Mathématiquement, Peles résout les équations 1D de conservations de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans chaque phase et les relations de saut nécessaires pour coupler les domaines liquide et vapeur. Un calcul d'ordre de grandeur l'amène à négliger les effets de courbures au niveau du front d'évaporation. L'approche monodimensionnelle choisie par Peles, lui permet notamment de résoudre analytiquement le champ de température dans un canal chauffé. C'est sur ce point que porteront les comparaisons entre les deux modèles.

La figure Fig. V.11 superpose les champs de température provenant du modèle de Peles et de notre modèle pour un nombre de Péclet égal à 15 en Fig. V.11.a et 100 en Fig. V.11.b pour différentes puissances de chauffe imposées. Les deux profils de température présentent la même structure -deux phases de croissance linéaire et une période décroissante correspondant à la couche limite interfaciale-, plus précisément la croissance du champ de température dans les phases vapeur et liquide sont également identiques. Toutefois on décèle une sur-évaluation de la position de l'interface dans le modèle développé en comparaison du modèle de Peles. Cet écart est très largement amenuisé pour les résultats à haut Péclet (Cf Fig. V.11.b). La relation entre la position de l'interface et les paramètres de l'écoulement déduite par Peles a été transcrite en (V.34). On y reconnaît la formule obtenue en section 1.b à laquelle s'ajoute un second terme faisant intervenir les rapports de la conductivité thermique et de la capacité thermique des deux phases  $(1 - \kappa_v/C_p)/Pe_l$ . Pour  $Pe_l \gg 1$  ces deux expressions deviennent identiques, ce qui



explique la quasi superposition des courbes de la figure (b).

$$z_i^{Peles} = \frac{Pe_l}{4} \left( \frac{1}{Ste} - T_{in} \right) + \frac{1 - \kappa_v / C_p}{Pe_l} \quad (V.34)$$

Les hypothèses et les équations au niveau de l'interface sont semblables dans les deux modèles. La différence entre les prédictions de  $z_i$  provient du caractère 2D du champ thermique considéré par la méthode des modes de Graetz. En effet, dans l'expression du champ de température vapeur obtenu par Peles on peut obtenir une pente à l'interface  $d\langle T_v \rangle_c / dz(z_i) \sim 4 / (Pe_l C_p)$  qui correspond à la croissance de la température lorsque les échanges sont établis. Or cette expression dépasse les valeurs obtenues avec la méthode de Graetz, qui se base, elles, sur une moyenne des flux sur toute la section de l'interface. La prise en compte de la variation du flux thermique dans la section pourrait donc être à l'origine de cet écart et notamment expliquer qu'une évolution en  $d\langle T_v \rangle_c / dz(z_i) \sim 1 / \sqrt{Pe_l}$  de la pente au front d'évaporation est obtenu avec la méthode de Graetz, voir Fig. V.8. En conclusion, les résultats des deux méthodes sont d'une part cohérents entre eux et d'autre part sont en accord dès-lors que le  $Pe_l$  est suffisamment important. Les écarts obtenus à faibles Péclet paraissent pouvoir être expliqué par la prise en compte d'effets bidimensionnels.

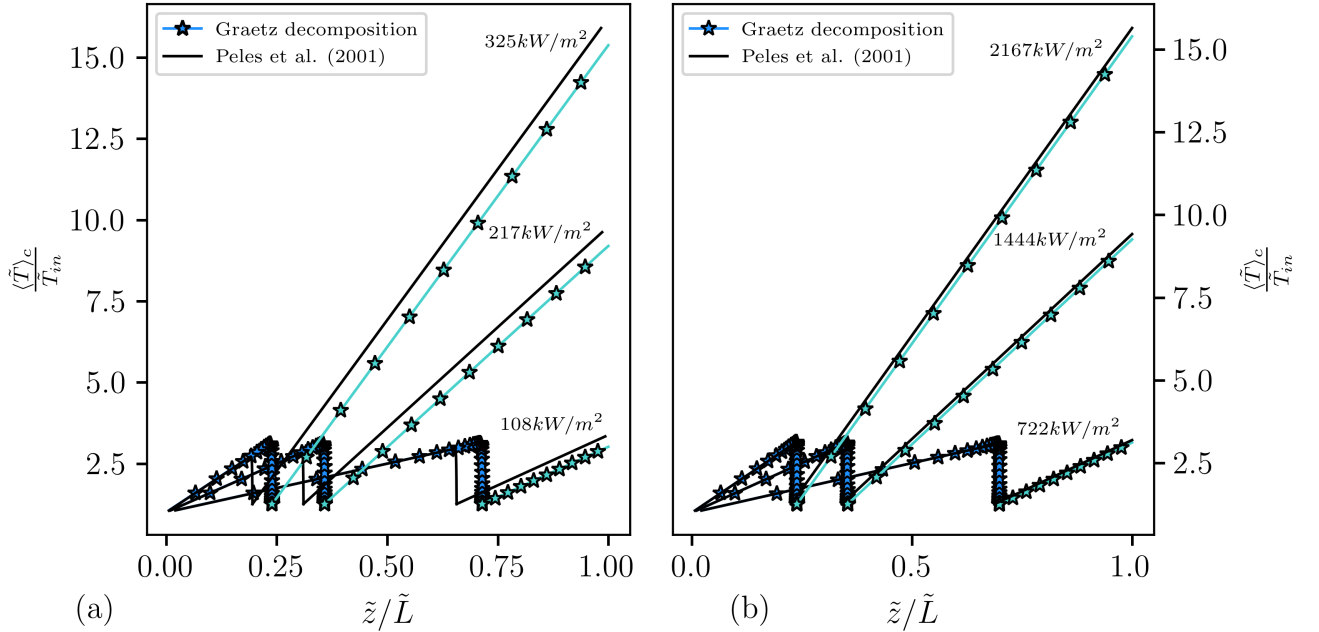


Figure V.11: Profils de la température de de mélange selon le modèle de Peles et la méthodologie développée dans un écoulement respectivement à  $Pe_l = 15$  en (a) et 100 en (b)

## V.2 Application au phénomène de mal-distribution de débit dans un réseau de canaux parallèles chauffés

L'objectif de ce travail est, à terme, de permettre une cartographie des contours des zones de stabilité associées au phénomène de mal-distribution. L'établissement de telles cartes requiert d'estimer les pertes de charge générées par un écoulement stationnaire en fonction du débit d'entrée injecté et des conditions thermo-hydrauliques imposées. La première partie de ce chapitre a permis de décrire, quantifier et analyser l'écoulement diphasique dans un mono-canal chauffé mais aussi de construire une relation entre la position du front d'évaporation et des paramètres thermo-hydrauliques. Cette relation est un élément majeur dans l'élaboration des



cartes de stabilité puisque le modèle de perte de charge (V.37) nécessite de spécifier la position de l'interface notamment en fonction du débit imposé dans le canal. L'expression de  $z_i$  doit être perçue, non pas comme une donnée locale, mais comme une image, une caractéristique de l'état d'ensemble du système diphasique incluant notamment ses interactions avec l'extérieur. L'élaboration de cette loi dans un échangeur sera d'ailleurs la principale préoccupation du chapitre suivant.

## 2.a Évaluation des pertes de charge appliquée au modèle d'évaporation en micro-canal

Pour rappel, les hypothèses du modèle d'évaporation considèrent des écoulements laminaires au sein des deux phases et l'invariance des propriétés du fluide. La structure de l'écoulement imposée par le modèle assure les deux phases ne coexistent en aucuns points, une intégration par morceau de la conservation de quantité de mouvement permet donc de manipuler des écoulements monophasiques et par extension conduit à des lois de pertes de charge caractéristiques d'écoulements monophasiques. L'établissement des pertes de charge dans un canal chauffé,  $\Delta P_c$  repose sur la disjonction de deux cas de figure :

- soit l'écoulement est entièrement liquide,  $z_i > L$ , alors l'intégration des pertes de charge sur toute la longueur du canal obéit à la loi de Poiseuille,

$$\Delta \tilde{P}_c = \frac{32\tilde{G}}{\tilde{D}_h^2} \tilde{\nu}_l \tilde{L} \quad (\text{V.35})$$

- L'écoulement comprend une zone liquide et une zone vapeur,  $z_i < L$ . Dans ce cas les pertes de charge visqueuses sont encore pilotées par la loi de Poiseuille pondérée pour chaque phase. Un terme supplémentaire lié à l'accélération de l'écoulement de part et d'autre de l'interface apparaît également.

$$\Delta \tilde{P}_c = \tilde{G}^2 \left( \frac{1}{\tilde{\rho}_v} - \frac{1}{\tilde{\rho}_l} \right) + \frac{32\tilde{G}}{\tilde{D}_h^2} (\tilde{\nu}_l \tilde{z}_i + \tilde{\nu}_v (\tilde{L} - \tilde{z}_i)) \quad (\text{V.36})$$

L'expression des pertes de charges diphasiques (V.36) peut être adimensionnée en introduisant les écarts relatifs de masse volumique  $\Delta\rho = (\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_v)/\tilde{\rho}_v$ , de viscosité cinématique  $\Delta\nu = (\tilde{\nu}_l - \tilde{\nu}_v)/\tilde{\nu}_v$  et le rapport  $\nu = \tilde{\nu}_l/\tilde{\nu}_v$ . (V.36) prend alors la forme suivante,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{P}_c \frac{\tilde{D}_h^2}{\tilde{\nu}_v \tilde{\mu}_l} &= \left( \frac{\tilde{W}_S \tilde{D}_h}{\tilde{\nu}_l} \right)^2 \frac{\tilde{\nu}_l}{\tilde{\nu}_v} \frac{\tilde{\rho}_l - \tilde{\rho}_v}{\tilde{\rho}_v} + 32 \frac{\tilde{W}_S \tilde{D}_h}{\tilde{\nu}_l} \left( \frac{\tilde{\nu}_l - \tilde{\nu}_v}{\tilde{\nu}_v} \frac{\tilde{z}_i}{\tilde{D}_h} + \frac{\tilde{L}}{\tilde{D}_h} \right) \\ \Delta P_c &= \nu \Delta\rho \text{Re}^2 + 16\text{Re}(\Delta\nu z_i + L), \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

où la pression adimensionnée est définie par  $\Delta \tilde{P}_c = (\tilde{\mu}_l \tilde{\nu}_v / (\tilde{D}_h^{II})^2) \Delta P_c$ . En injectant (V.5) dans l'expression (V.37),  $\Delta P_c$  s'écrit comme un polynôme du second ordre en  $G$  :

$$\begin{aligned} \Delta P_c &= \nu \Delta\rho \text{Re}^2 + 16\text{Re} \left( \Delta\nu \frac{\text{RePr}}{4} \left( \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} \right) + L \right) \\ \Delta P_c &= (\nu \Delta\rho + 4\Delta\nu \text{Pr} \left( \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} \right)) \text{Re}^2 + 16\text{Re}L \end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

La courbe caractéristique du canal, voir le chapitre I,  $\Delta P_c(\text{Re})$  est ainsi entièrement déterminée et va permettre d'établir la stabilité des différents points d'équilibre du système.

## 2.b Modèle de stabilité

La stabilité de l'écoulement se base sur l'étude de la variation de la quantité de mouvement intégrée sur la longueur du canal (V.39). Après intégration le long du canal, le bilan de quantité de mouvement s'écrit,

$$2L \frac{\partial \text{Re}}{\partial t} = P_{in} - P_{out} - \Delta P_c \quad (\text{V.39})$$

En considérant un réseau de canaux parallèles, la relation précédente est vérifiée dans chacun des canaux individuels. Dans cette configuration, les extrémités des canaux débouchent sur la même conduite, c'est pourquoi les pressions d'entrées et de sorties de chaque canal sont considérées identiques. En pratique, la pression de sortie est souvent maintenue constante, à un niveau fixé par l'expérimentateur. Contrairement à cette dernière, la pression d'entrée, peut, elle, suivre une loi différente en fonction de la configuration expérimentale étudiée. En partant du bilan de quantité de mouvement d'un canal isolé (V.39), il est possible de trouver les points d'équilibres d'un réseau de canaux parallèles. Identifier ces points d'équilibre revient en pratique à déterminer les combinaisons de flux massiques ou de manière équivalente de Reynolds  $\mathbf{Re} = (\text{Re}_1, \dots, \text{Re}_N)$  qui vérifient individuellement une solution stationnaire de (V.39), c'est à dire avec un membre de gauche nul. Comme ces solutions stationnaires sont fonctions de la relation entre la pression d'entrée et du débit imposé à l'entrée du réseau (courbe caractéristique de la pompe), notre étude sera conduite dans deux cas particuliers :

- $\tilde{P}_{in} = cte$
- $\tilde{G} = cte$

### Points d'équilibre dans un réseau de canaux parallèles à pression d'entrée constante

Dans la suite de cette section, les astérisques indiquent une grandeur évaluée au point d'équilibre. Le réseau est constitué d'un ensemble de  $N$  canaux disposés en parallèle. Les canaux sont chauffés individuellement et isolés thermiquement de leurs voisins, leurs entrées et leurs sorties débouchent respectivement sur les mêmes volumes, i.e.  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket : P_{in,n} = P_{in}$  et  $P_{out,n} = P_{out}$ . Dans un premier temps, on considère que la pression d'entrée est maintenue constante, cette hypothèse revient à isoler hydrauliquement les canaux. Les débits à l'équilibre vérifient donc,

$$\forall n \in [1; N] : P_{in} - P_{out} = \Delta P_c(\text{Re}_n^*) \quad (\text{V.40})$$

Le système d'équation vérifié à l'équilibre (V.40) peut se réécrire sous la forme,

$$2L \frac{\partial \mathbf{Re}^*}{\partial t} = \begin{pmatrix} P_{in} - P_{out} - \Delta P_c(\text{Re}_1^*) \\ \vdots \\ P_{in} - P_{out} - \Delta P_c(\text{Re}_N^*) \end{pmatrix} \quad (\text{V.41})$$

En linéarisant autour du point  $\mathbf{Re}^*$ ,

$$2L \frac{\partial \mathbf{Re} - \mathbf{Re}^*}{\partial t} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_N} \end{pmatrix} (\mathbf{Re} - \mathbf{Re}^*)$$

Les valeurs propres de la jacobienne étant triviales, la condition d'équilibre s'écrit ici,

$$\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket : \frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n}(\text{Re}_n^*) > 0 \quad (\text{V.42})$$

Cette relation est toujours vérifiée si l'écoulement est entièrement liquide mais implique une restriction sur les  $\text{Re}_n^*$  lorsque l'écoulement est diphasique. Pour trouver cette condition, on substitue (V.37) dans l'inégalité (V.42) :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket : \frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n}(\text{Re}_n^*) &> 0 \\
&\Leftrightarrow 2(\nu \Delta \rho + 4\Delta \nu \text{Pr}(\frac{1}{\text{Ste}} - T_{in}))\text{Re}_n^* + 16L > 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\left( \underbrace{-\nu \Delta \rho}_{<0} + 4\Delta \nu \text{Pr} \left( \underbrace{T_{in} - \frac{1}{\text{Ste}}}_{>0} \right) \right)}_B \text{Re}_n^* < 8L
\end{aligned} \tag{V.43}$$

Ce qui revient à considérer les deux cas suivants :

$$\text{Si } B < 0 : \text{ Inconditionnellement stable} \tag{V.44}$$

$$\text{Si } B > 0 : \text{ Stable si } \text{Re}_n^* < 8\frac{L}{B} \tag{V.45}$$

3 cas de figures se distinguent alors :

1. l'écoulement est monophasique liquide donc stable
2. l'écoulement est diphasique
  - (a) Si  $B < 0$ , l'écoulement diphasique est inconditionnellement stable
  - (b) Si  $B > 0$ , l'écoulement diphasique n'est stable que pour les débits inférieurs à  $8L/B$ .

En parallèle, étendre la plage de débits instables revient à :

- avoir une grande différence de viscosité cinématique entre les phases vapeur et liquide
- travailler à faible puissance de chauffe
- utiliser des fluides avec un faible  $\Delta \rho$

Il est possible en fixant la géométrie des canaux et les propriétés du fluide, de délimiter la zone instable dans un plan  $\tilde{G}, \tilde{P}_w$ . Dans ce cas, la zone de stabilité est formée de deux frontières. La frontière orientale est une droite qui correspond à l'apparition de la phase vapeur à l'extrémité du canal,  $z_i = L$ , d'équation,

$$L = \frac{\text{PrRe}}{4} \left( \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} \right), \tag{V.46}$$

qui se traduit en grandeurs dimensionnelles par

$$\tilde{P}_w = \tilde{G} \tilde{\Gamma} (\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in})). \tag{V.47}$$

La frontière occidentale correspond, elle, à la condition (V.45), qui s'écrit,

$$\left( -\nu \Delta \rho + 4\Delta \nu \text{Pr} \left( T_{in} - \frac{1}{\text{Ste}} \right) \right) \text{Re}_n^* < 8L, \tag{V.48}$$

ce qui revient à

$$\tilde{P}_w = 8\tilde{L}\pi \frac{(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))(\tilde{\nu}_v - \tilde{\nu}_l)}{1/\tilde{\rho}_v - 1/\tilde{\rho}_l} \frac{\tilde{G}}{\frac{16\tilde{\nu}_v\tilde{L}}{(1/\tilde{\rho}_v - 1/\tilde{\rho}_l)\tilde{D}_h^2} + \tilde{G}}. \tag{V.49}$$

Les figures Fig. V.12 et Fig. V.13 visualisent la plage d'instabilité pour un réseau de canaux parallèles à pression d'entrée imposée. Les cartes de stabilité ont été évaluées pour des paramètres géométriques fixés à  $\tilde{D}_h = 0.1mm$  et  $\tilde{L} = 0.1m$ . La surface colorée, notée (U), indique les couples  $(\tilde{G}, \tilde{P}_w)$  pour lesquels les points d'équilibres sont instables. Les encadrés placés à gauche de la figure Fig. V.12 représentent l'évolution des pertes de charges en fonction de  $\tilde{G}$  pour trois puissances distinctes A, B et C, indiquées par des flèches sur la zone instable. Les valeurs de pression colorées correspondent à des conditions instables. La zone instable a été, dans chaque cas, représentée dans son entièreté néanmoins, la formulation des pertes de charge est restreinte aux écoulements laminaires. Les pertes de charge obtenues pour les débits surfaciques les plus élevés, sortent donc du cadre du modèle.

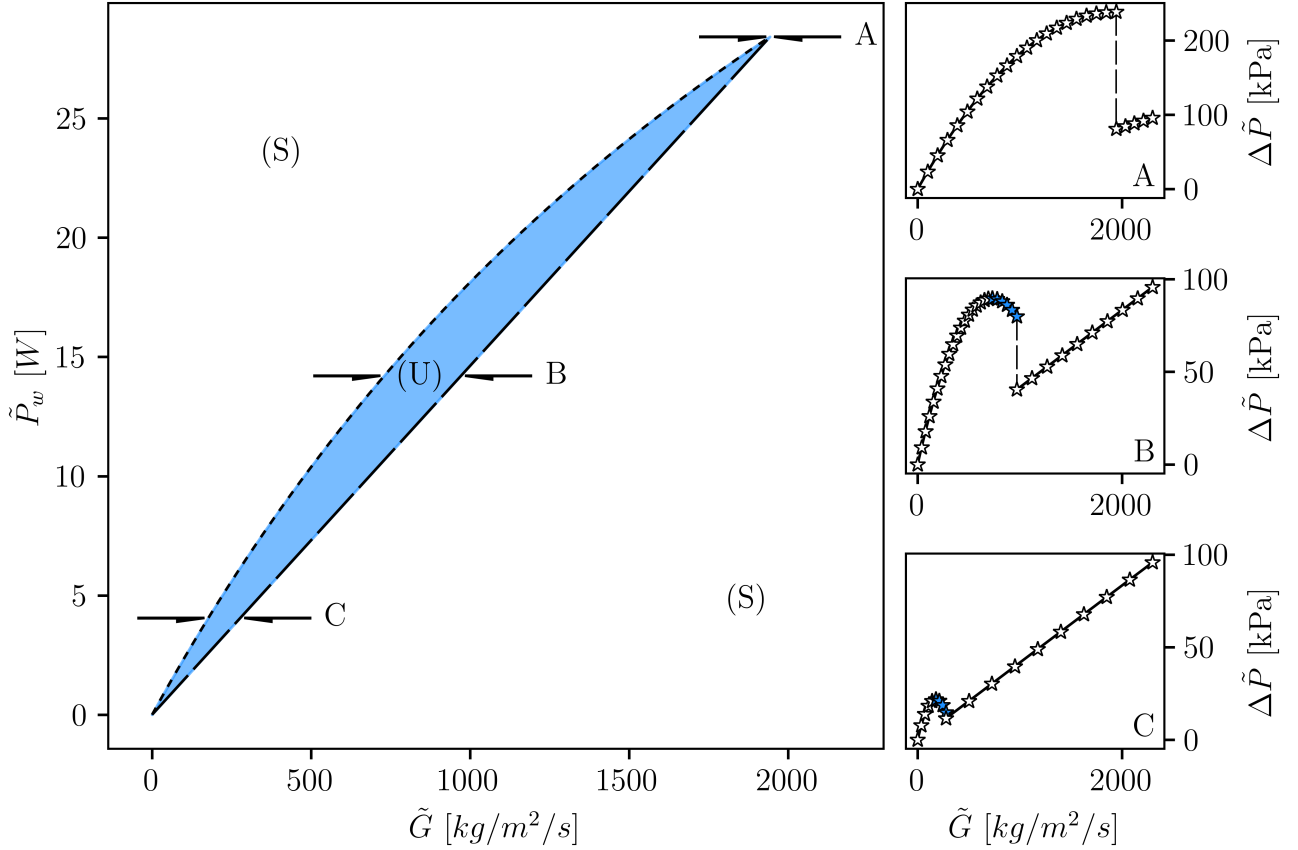


Figure V.12: Carte de stabilité pour un réseau de canaux isolés thermiquement, le gradient de pression est imposé. Les courbes caractéristiques associées aux puissances de chauffe A, B et C sont illustrées à droite. La zone instable, (Unstable), a été colorée. La droite tiretée représente l'apparition de la phase vapeur (V.47), quand la courbe en pointillé illustre le critère (V.49). Eau,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$ ,  $\tilde{T}_{in} = 218^\circ C$

L'expression des pertes de charge diphasiques utilisée est relativement courante, toutefois quelques spécificités liées à la structure de l'écoulement sont à noter. D'une part, comme les phases liquide et vapeur ne coexistent à aucun endroit, la modélisation du glissement entre les phases est ici anecdotique et sans effet. De plus, les propriétés du fluide dans chaque phase étant constantes, les pertes de charges inertielles  $\tilde{G}^2(1/\tilde{\rho}_v - 1/\tilde{\rho}_l)$ , interviennent d'une manière spécifique. En effet ce terme augmente en général progressivement avec la formation de la vapeur. Ici, au contraire, de la vapeur pure apparaît brutalement avec la formation du front liquide/vapeur. Le processus d'évaporation introduit ainsi une discontinuité qui impacte l'évolution des pertes de charge et plus particulièrement du terme inertiel. Proportionnelle à  $\tilde{G}^2$  (V.50) cette discontinuité est nettement identifiable dans les encadrés A et B de la figure

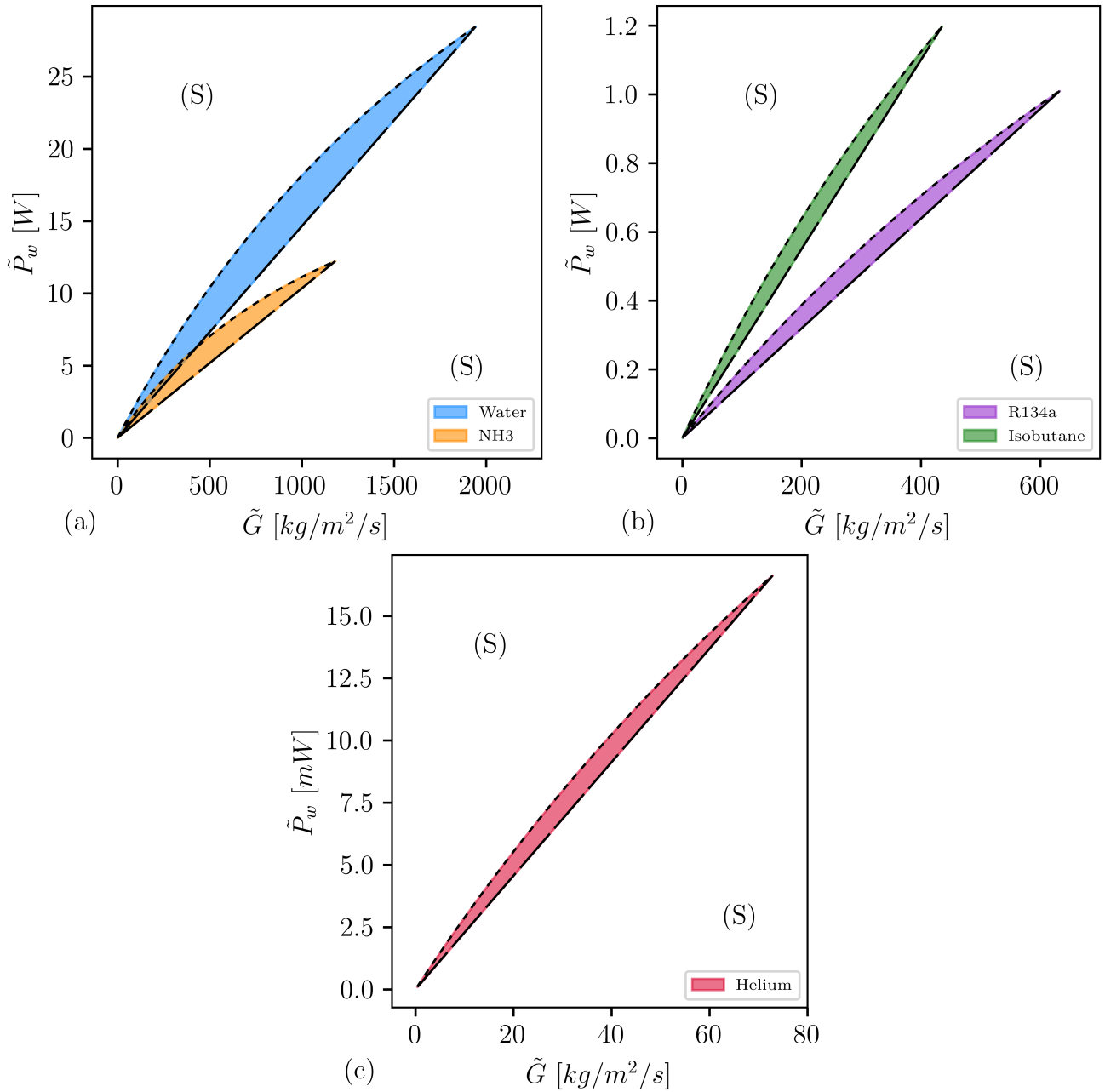


Figure V.13: Carte de stabilité dans un réseau de canaux isolés thermiquement pour différents fluides, le gradient de pression est imposé. La zone instable, a été colorée. La droite tirée représente l'apparition de la phase vapeur (V.47), quand la courbe en pointillé illustre le critère (V.49).  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$ ,  $N_{sub} = 3.98$

Fig. V.12 et dans les profils de la figure Fig. V.13. Son expression exacte est explicitée ci-dessous

$$(\Delta\tilde{P}_c^v - \Delta\tilde{P}_c^l)(z_i = L) = \tilde{G}^2\left(\frac{1}{\tilde{\rho}_v} - \frac{1}{\tilde{\rho}_l}\right) \quad (V.50)$$

A part cela, on retrouve une évolution classique des pertes de charge en écoulement laminaire, avec une variation linéaire à très faibles débits —pour des configurations d'écoulement proches d'être purement vapeur— et pour les hauts débits —pour des configurations d'écoulement proches d'être purement liquide—. Qualitativement, la zone instable présente une forme semi-elliptique de faible épaisseur pour les couples faibles débits/faibles puissances d'un côté et forts débits/fortes puissances de l'autre. Entre ces deux extrémités, la zone s'épaissit en son centre. La hauteur de la zone instable est indépendante du diamètre de la conduite tandis qu'elle

suit linéairement les variations de la longueur de chauffe. Au contraire, l'étalement horizontal de la zone instable est, quant à lui, non seulement sensible au diamètre hydraulique (évoluant comme  $\tilde{D}_h^2$ ), mais proportionnellement à la longueur du canal  $\tilde{L}$ . Ces tendances seront précisées et confirmées en (V.51).

En se focalisant sur les point extrêmes de la zone instable,  $O : (0, 0)$  et  $A : (\tilde{G}^A, \tilde{P}_w^A)$ , il est possible d'approximer la zone instable et de suivre ses déplacements en fonction des valeurs de  $\tilde{L}$  et  $\tilde{D}_h$ . Les coordonnées de  $A$  peuvent être déterminées analytiquement. Le point  $A$  vérifie

$$\begin{cases} \text{Re}^A = 8 \frac{L}{B} \\ L = \frac{\text{PrRe}^A}{4} \left( \frac{1}{\text{Ste}} - T_{in} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{G}^A = \frac{16\tilde{L}\tilde{\nu}_v}{\tilde{D}_h^2 B} \\ \tilde{G}^A = \frac{\tilde{P}_w^A}{\tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))} \end{cases}$$

On en déduit l'expression de  $\tilde{P}_w^A$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{P}_w^A}{\tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))} &= \frac{16\tilde{L}\tilde{\nu}_v}{\tilde{D}_h^2 B} \\ \Leftrightarrow \tilde{P}_w^A \left[ \left( \frac{1}{\tilde{\rho}_l} - \frac{1}{\tilde{\rho}_v} \right) + \frac{32\tilde{L}\tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))}{\tilde{D}_h^2 \tilde{P}_w^A} (\tilde{\nu}_v - \tilde{\nu}_l) \right] &= \frac{16\tilde{L}\tilde{\nu}_v \tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))}{\tilde{D}_h^2} \\ \Leftrightarrow \tilde{P}_w^A \left( \frac{1}{\tilde{\rho}_l} - \frac{1}{\tilde{\rho}_v} \right) &= \frac{16\tilde{L}\tilde{\nu}_v \tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))}{\tilde{D}_h^2} - \frac{32\tilde{L}}{\tilde{D}_h^2} \tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in})) (\tilde{\nu}_v - \tilde{\nu}_l) \\ \Leftrightarrow \tilde{P}_w^A &= \frac{1}{\left( \frac{1}{\tilde{\rho}_l} - \frac{1}{\tilde{\rho}_v} \right)} \frac{16\tilde{L}\tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_{vap} + \tilde{c}_{pl}(\tilde{T}_{sat} - \tilde{T}_{in}))}{\tilde{D}_h^2} (2\tilde{\nu}_l - \tilde{\nu}_v) \end{aligned}$$

Puis de  $\tilde{G}^A$  en substituant l'expression de  $\tilde{P}_w^A$ . Les coordonnées du point  $A$  dans le plan  $(\tilde{G}, \tilde{P}_w)$  pour une conduite circulaire sont

$$\tilde{G}^A = \frac{16\tilde{L}(2\tilde{\nu}_l - \tilde{\nu}_v)}{\tilde{D}_h^2 \left( \frac{1}{\tilde{\rho}_l} - \frac{1}{\tilde{\rho}_v} \right)} ; \tilde{P}_w^A = 4\pi\tilde{L}\mathcal{L}_{vap} \frac{2\tilde{\nu}_l - \tilde{\nu}_v}{1/\tilde{\rho}_l - 1/\tilde{\rho}_v} \quad (\text{V.51})$$

La figure Fig. V.14 matérialise les déplacements de  $A$  dans le plan  $\tilde{G}, \tilde{P}_w$ . Les courbes pleines représentent les positions de  $A$  à iso-diamètre hydraulique tandis que celles tiretées représentent les positions à iso-longueur de chauffe. Les intersections de ces droites positionnent précisément l'apex de la zone instable. La surface hachurée symbolise l'espace potentiellement impactée par le phénomène de mal-distribution. On retrouve bien l'indépendance de  $\tilde{P}_w^A$  au diamètre hydraulique,  $\tilde{P}_w^A \propto \tilde{L}$  et l'évolution de  $\tilde{G}^A \propto \tilde{L}/\tilde{D}_h^2$ , qui montre par la même occasion un élargissement conséquent de la zone instable pour les micro-canaux.

La figure V.13 illustre l'effet des propriétés physiques sur la forme de la zone de stabilité. Les expressions de  $\tilde{G}^A, \tilde{P}_w^A$  montrent en effet que la chaleur latente et les écarts de volume spécifique et de viscosité cinématique altèrent fortement l'amplitude de la zone instable. A titre d'exemple, le  $\text{CO}_2$  proche de sa pression critique à  $P_R = 0.8$ , dispose de volumes spécifiques liquide/vapeur proches  $(1/\tilde{\rho}_v - 1/\tilde{\rho}_l) \ll 1$  en comparaison des autres fluides considérés. Le domaine de stabilité du  $\text{CO}_2$  traduit ces propriétés spécifiques, avec, en l'occurrence, un critère (V.45) qui est toujours vérifié dans la zone diphasique. En d'autres termes, l'écoulement de  $\text{CO}_2$  est, dans ces conditions de pression, inconditionnellement stable. L'amplitude verticale semble pour sa part majoritairement pilotée par la chaleur latente du fluide et de façon plus anecdotique par les viscosités et les densités des phases. La figure Fig. V.15 complète les cartes de stabilité en visualisant les variations des pertes de charge évaluées à la puissance

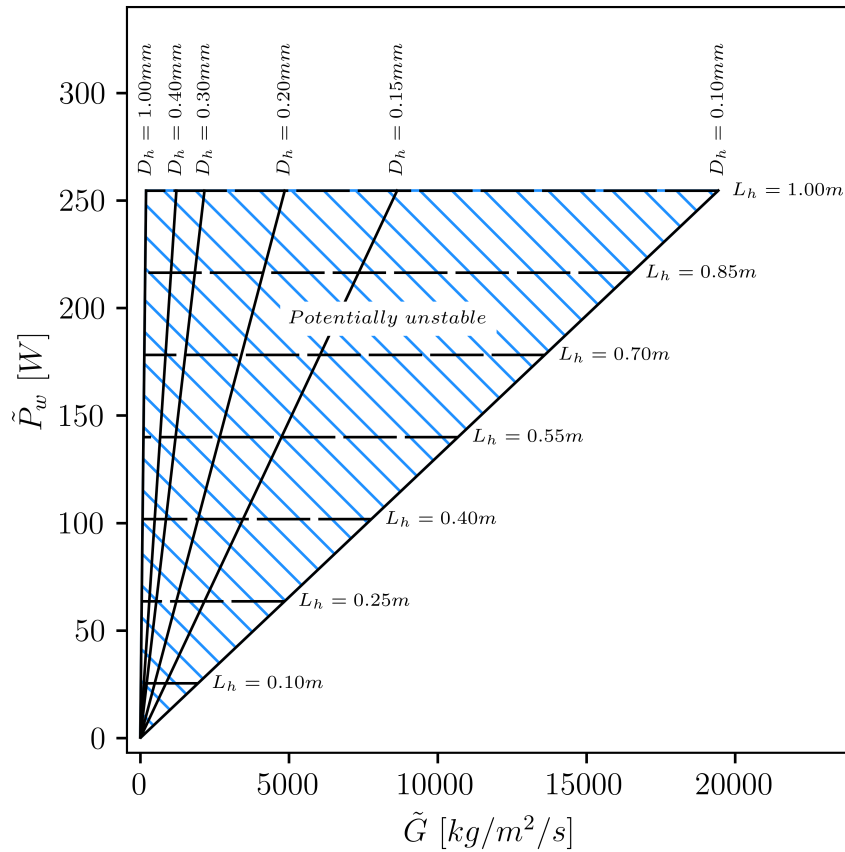


Figure V.14: Dépendance de la puissance maximale instable pour un réseau de canaux isolés thermiquement, le gradient de pression est imposé. Les courbes pleines sont des iso-longueurs tandis que les courbes tiretées sont des iso-diamètres. La zone hachurée correspond aux points de fonctionnement potentiellement inclus dans la zone instable pour les gammes de paramètres choisies :  $0.1\text{mm} < \tilde{D}_h < 1\text{mm}$ ,  $0.1\text{m} < \tilde{L} < 1\text{m}$ . Eau

médiane de la zone instable  $\tilde{P}_w^B$ . Le rôle joué par le terme inertiel sur l'intensité du saut de pression est spécialement marqué pour l'ammoniaque qui présente le plus grand  $1/\tilde{\rho}_v - 1/\tilde{\rho}_l$ . A contrario, la discontinuité est quasi indiscernable pour le  $\text{CO}_2$  ; une ligne indiquant la position du passage d'un écoulement monophasique liquide à un écoulement diphasique a été ajoutée pour en faciliter l'identification. L'influence du terme inertiel étant très faible pour le  $\text{CO}_2$ , les variations de pression y sont conduites par le terme visqueux qui évolue linéairement avec le débit contrairement aux autres fluides qui présente des variations non-linéaires.

### Stabilité dans un réseau de canaux parallèles à débit total fixe

L'étude de ce cas de figure a longtemps été limitée par une croissance exponentielle du nombre d'états à considérer au fur et à mesure que le nombre de canaux du système augmentait. Relativement récemment [10] a élaboré une méthodologie permettant de traiter efficacement la stabilité de système pour une loi quelconque de  $\tilde{P}_{in}$  et pour des systèmes potentiellement constitués d'un grand nombre de canaux. Lors de ces travaux [10] arrive à la conclusion que dans le cas des réseaux à débits imposés, la plage de stabilité tend asymptotiquement, lorsque  $N \rightarrow \infty$  vers la plage de stabilité d'un réseau à pression d'entrée constante. Les réseaux envisagés industriellement correspondant à des ensembles de plusieurs centaines de canaux. Il semble alors tout à fait légitime de considérer que la plage de stabilité soit similaire à celles étudiées dans la section précédente.

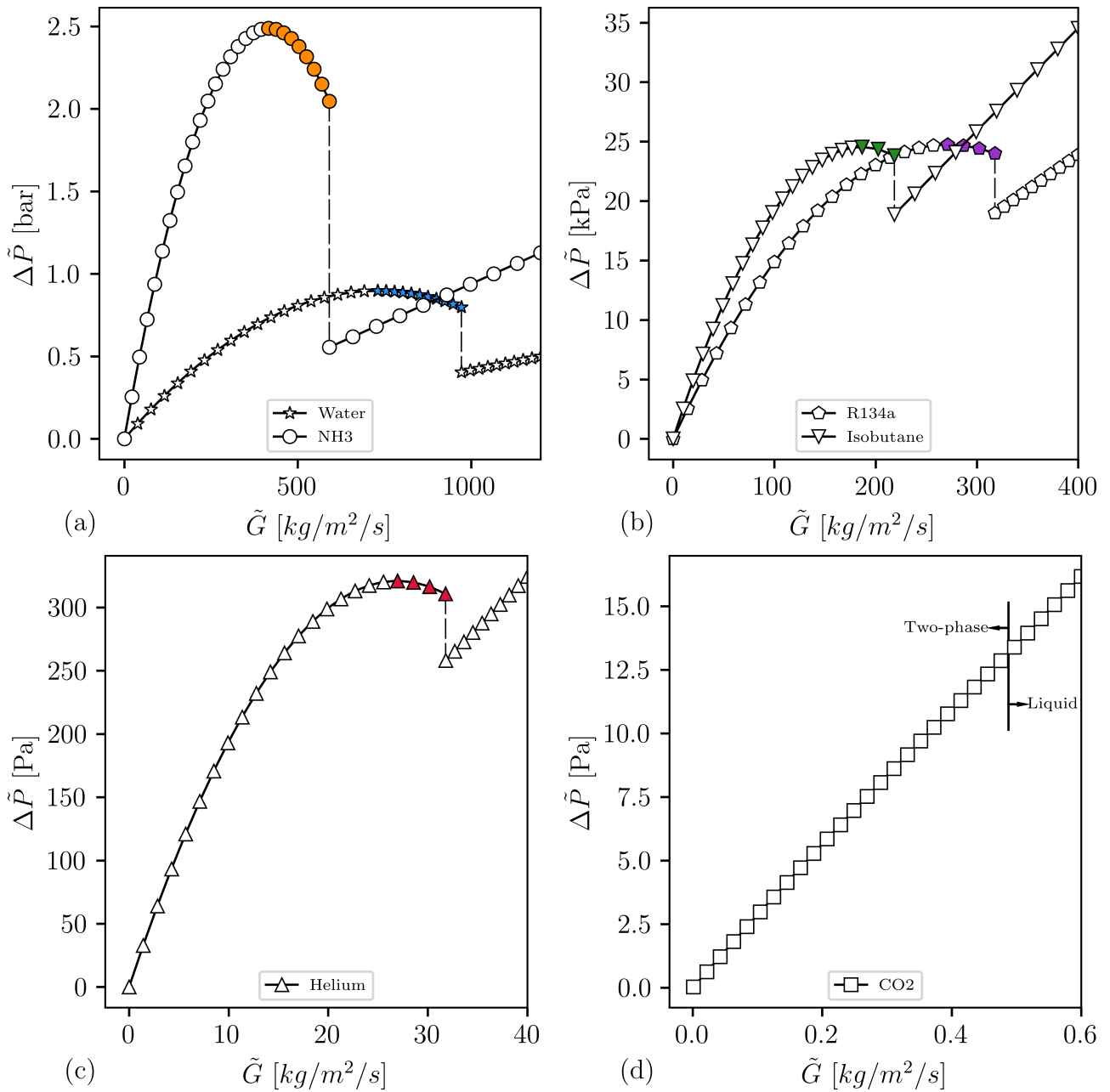


Figure V.15: Profils de pertes de charge pour différents fluides évalués à la puissance  $\tilde{P}^B$  (Cf Fig. V.12), pour  $N_{sub} = 3.98$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$  et  $\tilde{L} = 0.1m$  (a,b,c). Les couleurs indiquent la gamme de débits instables. En (d), l'écoulement de  $CO_2$ , dans les conditions de test sélectionnées (Cf Table V.1), est intrinsèquement stable ; des flèches ont été ajoutées pour identifier le changement de régime liquide/vapeur ; la courbe a été établie pour  $\tilde{P}_w = 0.001W$

## Synthèse

Les résultats obtenus sont qualitativement proches de ceux présents dans la littérature. Toutefois, et de façon prévisible, des écarts sont observés avec l'apparition d'une discontinuité et d'une forte réduction de la partie décroissante des pertes de charge diphasiques, traditionnellement associée aux régimes d'écoulements où se mêlent les phases vapeur et liquide. L'étude de stabilité a identifié les paramètres clés qui pilotent la zone de stabilité associée au phénomène de mal-distribution de débit. Ces plages de stabilité et les résultats de ce chapitre dans leur ensemble serviront d'éléments de référence lors de l'élaboration des lois comportementales de l'évaporation dans un échangeur co-courant.



# Références

- [1] Volker Noack Gerhard Schanz Peter Hofmann Siegfried J. L. Hagen and Leo K. Sepold. “Chemical-Physical Behavior of Light Water Reactor Core Components Tested Under Severe Reactor Accident Conditions in the CORA Facility”. In: *Nuclear Technology* 118.3 (1997), pp. 200–224. DOI: [10.13182/NT118-200](https://doi.org/10.13182/NT118-200). URL: <https://doi.org/10.13182/NT118-200>.
- [2] John R. Thome et al. “Flow boiling of ammonia and hydrocarbons: A state-of-the-art review”. In: *Refrigeration with Ammonia and Hydrocarbons* 31.4 (June 2008), pp. 603–620. ISSN: 0140-7007. DOI: [10.1016/j.ijrefrig.2007.11.010](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140700707002228). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140700707002228>.
- [3] John R. Thome and Jean El Hajal. “Flow boiling heat transfer to carbon dioxide: general prediction method”. In: *International Journal of Refrigeration* 27.3 (May 2004), pp. 294–301. ISSN: 0140-7007. DOI: [10.1016/j.ijrefrig.2003.08.003](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140700703001282). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140700703001282>.
- [4] Luisa F. Cabeza et al. “Supercritical CO<sub>2</sub> as heat transfer fluid: A review”. In: *Applied Thermal Engineering* 125 (Oct. 2017), pp. 799–810. ISSN: 1359-4311. DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2017.07.049](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431116320646). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431116320646>.
- [5] Vishwanath Ganesan et al. “Universal Critical Heat Flux (CHF) Correlations for Cryogenic Flow Boiling in Uniformly Heated Tubes”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 166 (Feb. 2021), p. 120678. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120678](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931020336140). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931020336140>.
- [6] John R Thome. “Boiling of new refrigerants: a state-of-the-art review”. In: *International Journal of Refrigeration* 19.7 (Sept. 1996), pp. 435–457. ISSN: 0140-7007. DOI: [10.1016/S0140-7007\(96\)00004-7](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S01407007(96)00004-7). URL: [https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S01407007\(96\)00004-7](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S01407007(96)00004-7).
- [7] D.C. Groeneveld et al. “The 2006 CHF look-up table”. In: *NURETH-11* 237.15 (Sept. 2007), pp. 1909–1922. ISSN: 0029-5493. DOI: [10.1016/j.nucengdes.2007.02.014](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029549307002002). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029549307002002>.
- [8] D.B. Marchetto et al. “A state-of-the-art review on flow boiling at high reduced pressures”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 193 (Sept. 2022), p. 122951. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122951](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931022004240). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931022004240>.
- [9] Y.P. Peles, L.P. Yarin, and G. Hetsroni. “Steady and unsteady flow in a heated capillary”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 27.4 (Apr. 2001), pp. 577–598. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/S0301-9322\(00\)00041-0](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932200000410). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932200000410>.

- [10] Tijs Van Oevelen, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “Predicting two-phase flow distribution and stability in systems with many parallel heated channels”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 107 (Apr. 2017), pp. 557–571. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.050](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.050). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931016324395>.

# Chapitre VI

## Application et résultats pour un échangeur diphasique co-courant

### VI.1 Description de l'évaporation dans un échangeur à micro-canaux co-courant

#### 1.a Structure des échanges thermiques dans un micro-échangeur

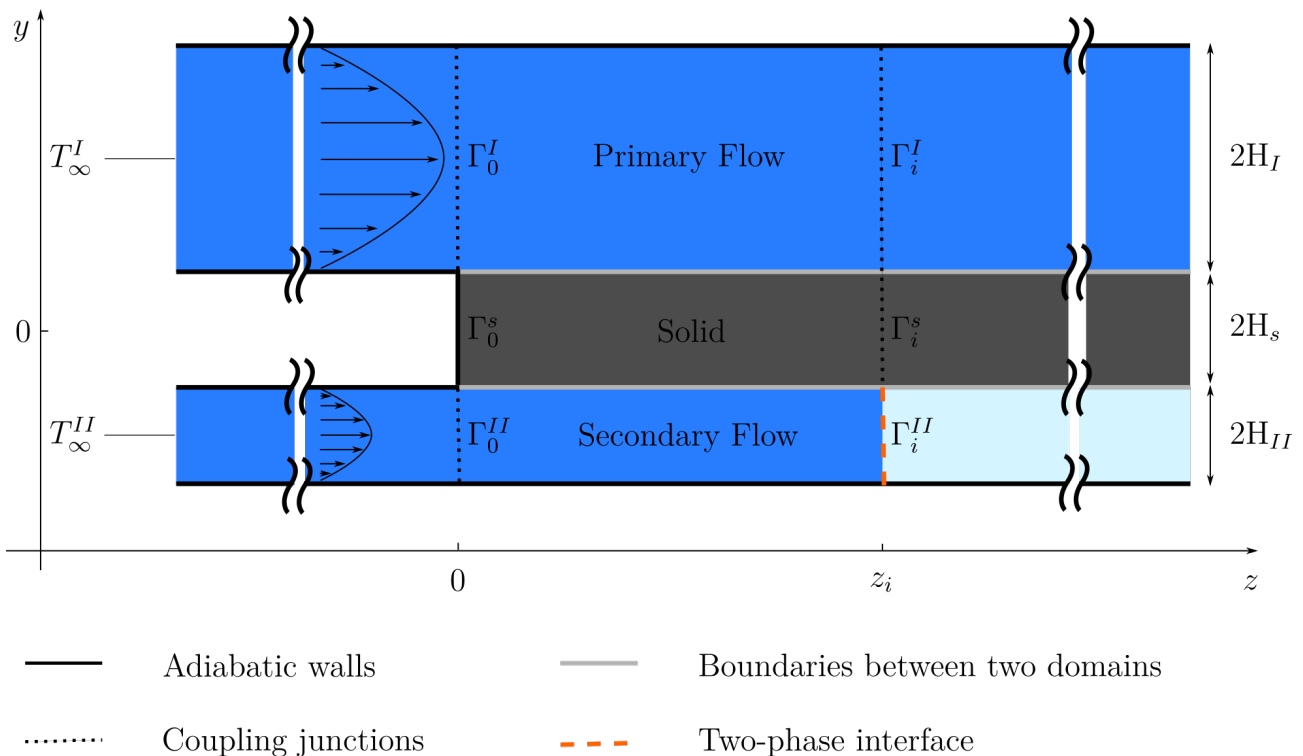


Figure VI.1: Schéma d'un échangeur élémentaire co-courant infini diphasique

Ce chapitre se focalise sur l'application du modèle de vaporisation à un échangeur à micro-canaux co-courant. Tout comme dans le chapitre précédent, l'objectif consiste, dans un premier temps, à établir une relation entre la position du front de vaporisation, les propriétés du fluide et celle de l'échangeur. Dans un second temps, il s'agira alors d'injecter cette loi dans l'expression des pertes de charge afin d'obtenir les plages de stabilité d'un échangeur compact.

## Analyse globale du champ de température

Dans cette section le processus de vaporisation est étudié au sein d'un échangeur élémentaire, i.e. un canal primaire et un canal secondaire séparés par une paroi solide. Conjointement avec l'étude de l'évaporation dans cet échangeur co-courant, des calculs ont été menés dans des conditions identiques (conditions aux limites, géométrie) en supprimant volontairement l'évaporation du fluide secondaire. Les propriétés de la phase liquide sont donc étendues en dehors du domaine liquide et le transfert d'énergie ne s'y fait plus que sous forme de chaleur sensible. L'écoulement et les champs de température issus de ces calculs ne correspondent donc pas à un écoulement de fluides réels mais à celui d'un fluide virtuel. Bien que les résultats provenant de ces écoulements virtuels ne soient bien entendu pas réalistes, ils s'avèrent en revanche être de précieux éléments de comparaison et d'analyse des résultats diphasiques, afin de mieux comprendre l'influence de la présence du changement de phase dans la physique des échanges.

La figure Fig. VI.2 présente l'évolution longitudinale (le long de l'échangeur, voir Fig. VI.1) de la température de mélange au sein des canaux primaire  $I$  et secondaire  $II$  ainsi que la température solide moyennée dans la section. Ces tracés sont superposés aux champs de température virtuels (courbes grisées) obtenus dans la même configuration. On retrouve dans le canal secondaire (courbes orangées) un comportement similaire à celui décrit dans le chapitre V. A savoir, une première phase de montée en température,  $z \in [0, 17]$ , suivie par une chute brutale au niveau de l'interface liquide/vapeur (en  $z = 17$  sur la figure Fig. VI.2) puis une remontée de température plus en aval  $z > 17$ . Ces variations de température se distinguent toutefois des profils de température obtenus lors de l'évaporation dans un micro-canal chauffé. En effet, les phases de montée en température ne sont plus de croissance linéaire en  $z$  mais semblent suivre une loi plus complexe. On voit de plus que dans le cas de l'échangeur, la surchauffe de la phase vapeur (courbes jaune-orangé) est moins intense que lors la phase de chauffe de la phase liquide, par opposition à ce qui a été observé en mono-canal chauffé. Ces distinctions s'expliquent par le changement de nature des transferts thermiques non plus pilotés par un apport d'énergie fixé mais par un écart de température entre la veine chaude et la veine froide. Effectivement, ceux-ci passent d'un niveau imposé d'énergie injectée dans le fluide, dans le cas d'un chauffage à puissance fixée, à des échanges conjugués dont l'intensité est fonction des propriétés locales de l'écoulement. Dans ce cas, une bonne estimation des niveaux d'énergie transférées au fluide secondaire nécessite la prise en compte de l'état thermique des deux canaux et de la paroi solide ainsi que de leurs couplages.

Ce couplage se traduit plus particulièrement par la proportionnalité des transferts aux écarts de température entre les canaux. Ces écarts étant maximaux à l'entrée de l'échangeur, c'est aussi dans cette zone que l'on observe les transferts d'énergie les plus importants, illustrés par la chute de température adimensionnelle dans le primaire (courbe rouge), de 0.9 à 0.6 sur l'étendue de la phase liquide. La sensibilité des échanges aux écarts de température de part et d'autre de la paroi solide s'observe également pour les échanges entre la phase vapeur et l'écoulement primaire avec à nouveau un effet d'«entrée» derrière l'interface liquide/vapeur,  $\langle T \rangle_c$  passe de 0 à 0.2 pour  $z$  allant de 17 à 50 quand il faut parcourir 50 unités de longueur pour incrémenter la température de 0.1 un peu plus loin. En portant l'attention sur la température solide (courbe beige) on peut noter que son niveau relativement aux températures fluides change entre l'amont et l'aval du front de vaporisation. Alors qu'avant l'interface diphasique la température moyenne solide se situe à environ égale distance des courbes primaire et secondaire, celle-ci se rapproche, juste en aval de l'interface, de la température primaire. Ce comportement indique en fait l'importance du changement de conductivité thermique consécutif de la vaporisation du

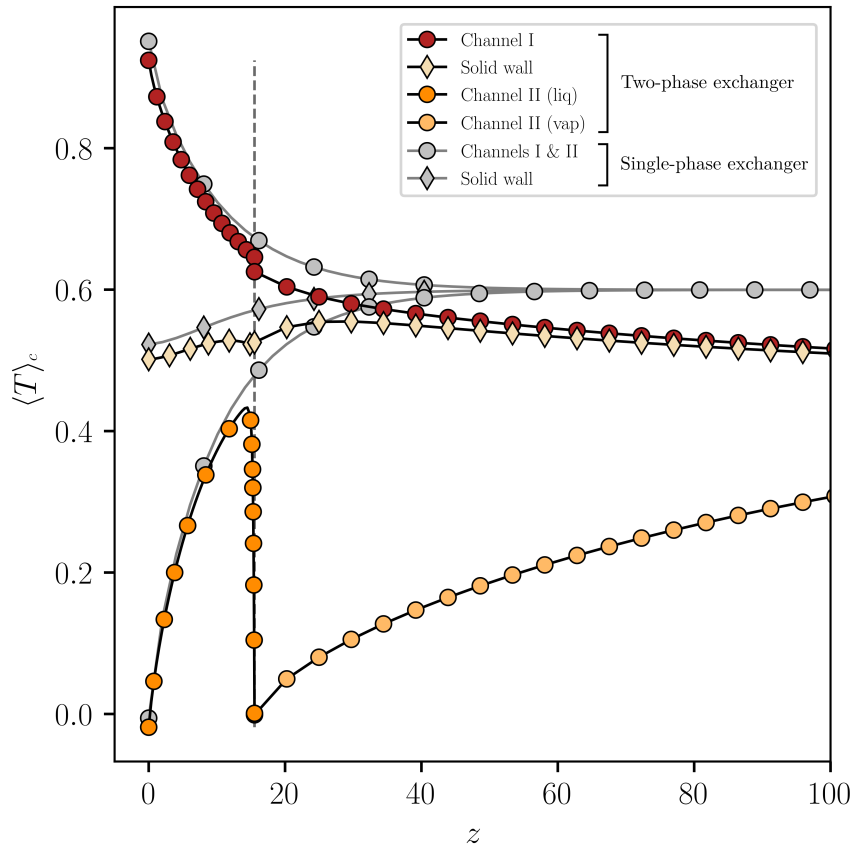


Figure VI.2: Variations de température au sein d'un échangeur diphasique co-courant. Les niveaux de température de mélange dans les canaux primaire et secondaires ainsi que la température moyenne de la paroi solide sont représentés. Les relevés gris correspondent à un échangeur étudié dans une configuration identique mais sans évaporation. Écoulement d'ammoniaque,  $Pe^{II} = 9$ ,  $Pe^I = 16$ ,  $\kappa_s = 17$

fluide dans la canal secondaire. On passe alors, d'un échange entre deux fluides aux mêmes conductivités, à un échange entre fluides primaire/secondaire présentant un fort contraste de conductivité thermique, avec par exemple, un rapport 27 dans le cas de l'ammoniaque. Dans ce dernier cas, la grande différence de propriété entre les canaux : d'une part, asymétrisent les gradients thermiques, avec des faibles variations de températures transverse et, d'autre part, détériore les transferts d'énergie du canal primaire vers le canal secondaire. Il est également possible de retrouver l'influence des nombres de Péclet d'entrée respectifs des circuits primaire et secondaire ; en général le Péclet du circuit primaire  $Pe^I$  sera supérieur à celui du circuit secondaire  $Pe^{II}$ . Ici, en l'occurrence le Péclet primaire est supérieur au Péclet du circuit secondaire,  $Pe^I = 1.8Pe^{II}$ , cela se manifeste par exemple par des variations de température de même rapport côté secondaire que côté primaire en amont de l'interface, avec une chute de  $\langle T \rangle_c$  de 0.4 pour le fluide secondaire contre seulement 0.3 pour le primaire.

Si les niveaux de température et les propriétés du fluide contrôlent les échanges de chaleur, il n'en reste pas moins que la paroi solide qui sépare physiquement le fluide secondaire du fluide primaire ne conduit pas toujours l'énergie prélevée au primaire vers le secondaire par le chemin le plus court. Au contraire, celle-ci, en autorisant des gradients thermiques potentiellement importants dans la direction de l'écoulement, joue un rôle clef dans la redistribution longitudinale de l'énergie issue du primaire. Cette influence est analysée dans la figure Fig. VI.3. Cette dernière confronte les relevés de température dans deux configurations dont seule la conductivité de la paroi solide a été modifiée. La mise en parallèle des solutions des figures Fig. VI.3.(a-b)

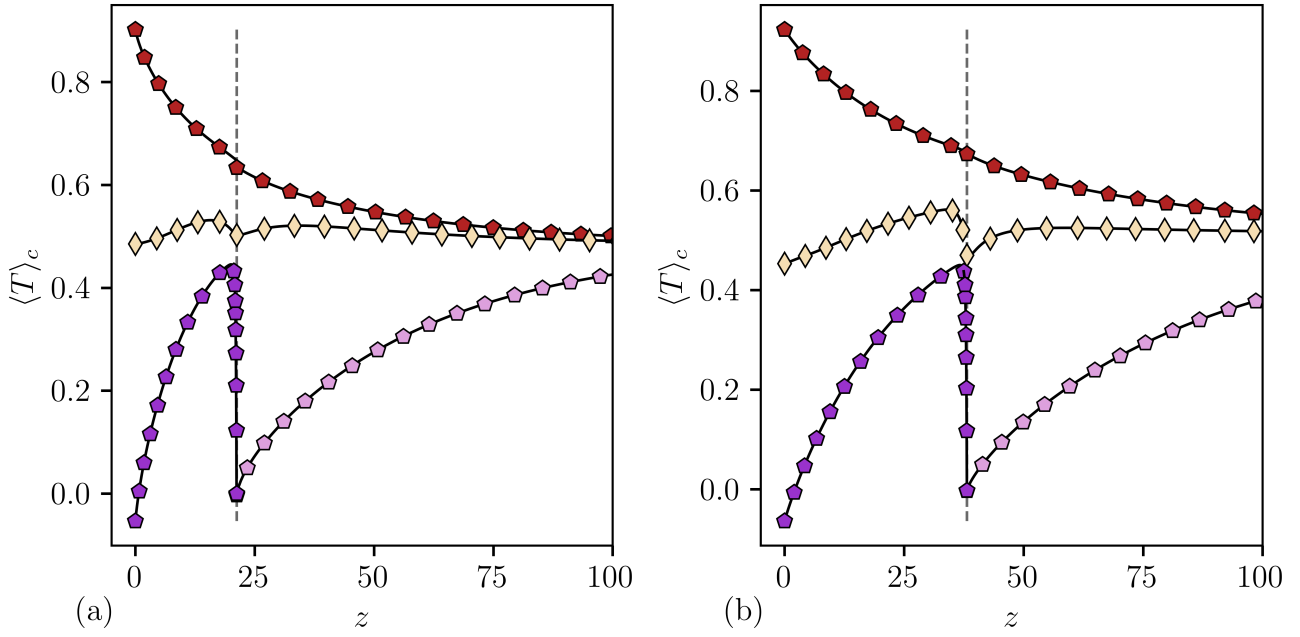


Figure VI.3: Profils de température d'un écoulement de R134a pour des échangeurs munis respectivement d'une paroi de conductivité thermique  $\kappa_s = 13$  en (a) et  $\kappa_s = 1$  en (b), dans des conditions thermohydrauliques similaires.  $Pe^H = 11$ ,  $Pe^I = 24$

met en évidence une plus forte homogénéisation longitudinale de la température dans le solide mais aussi une amélioration des transferts thermiques primaire/secondaire lorsque la paroi est constituée d'un matériau plus conducteur (Cf Fig. VI.3.(a)). A contrario, les gradients longitudinaux sont renforcés dans l'échangeur composé d'un matériau isolant, notamment au voisinage de l'interface liquide/vapeur (Cf Fig. VI.3.(b)). De plus, le décalage du front de vaporisation vers l'aval, de  $z_i = 21$  à  $z_i = 33$ , et la plus faible température de la phase vapeur en  $z = 100$  montrent tous deux une dégradation des échanges thermiques associée à la baisse de la conductivité de la paroi solide. Une analyse de la thermique locale de la paroi confirmera un peu plus bas le rôle du solide dans le comportement de l'échangeur. La dépendance de  $z_i$  à l'épaisseur et la conductivité thermique de la paroi solide sera aussi étudiée un peu plus loin.

### Loi d'évolution du front de vaporisation

Comme dans le cas du chapitre V, la capacité à prédire la position du front de vaporisation est un élément critique permettant la délimitation des zones de stabilité associées à l'instabilité de Ledinegg. Dans cette optique il peut être judicieux de s'intéresser au champ de température virtuel tracé en gris sur la figure Fig. VI.2. Plus précisément, l'intérêt de cette prédiction numérique réside dans le fait que, en amont de l'interface, les profils de température du fluide virtuel sont très proches de ceux du fluide réel. Les champs de température virtuels et réels ne sont bien entendu pas strictement égaux. Cependant le cas virtuel représente une bonne approximation de l'énergie accumulée dans la phase liquide du canal secondaire. On peut alors considérer que le champ de température virtuel, plus simple que le réel diphasique, permet d'évaluer le niveau d'énergie possiblement transféré au fluide secondaire et dans un second temps estimer la position du front de vaporisation.

En toute généralité, le champ de température virtuel se présente sous la forme

$$\langle T_l \rangle_c = \sum_{n>0} x_n^l \langle \theta_n^l \rangle_c e^{\lambda_n^l z} + T_\infty^V, \quad (\text{VI.1})$$

où l'on a introduit la température d'équilibre virtuelle  $T_\infty^V$  qui est la température asymptotique de l'échangeur co-courant. On s'intéresse ensuite à l'approximation de champ lointain de (VI.1), appelée aussi approximation "pleinement développée" dans la littérature des échangeurs. Cette approximation consiste à considérer une région 'loin' de l'entrée de l'échangeur, dans laquelle seul persiste le mode de décroissance exponentielle associé à la plus petite valeur propre aval dans la somme des modes de (VI.1). Dans cette limite, une expression asymptotique en  $z$  de la température s'écrit

$$\langle T_l \rangle_c \underset{z \gg 1}{\sim} x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c e^{\lambda_1^l z} + T_\infty^V. \quad (\text{VI.2})$$

Le terme constant doit ici être interprété comme la température d'établissement de l'échangeur,  $\lim_{z \rightarrow +\infty} T_l = T_\infty^V$ . La valeur de cette température peut être établie grâce à un bilan d'énergie réalisé sur l'échangeur  $T_\infty^V = (\mathcal{R}_{\text{Pe}} T_\infty^{II} + T_\infty^I)/(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}})$ . En règle générale,  $\mathcal{R}_{\text{Pe}} = (\dot{m}_{II} \tilde{c}_{pl}^{II})/(\dot{m}_I \tilde{c}_{pl}^I)$ , ce rapport se réécrit pour des canaux à sections rectangulaires et des propriétés identiques du fluide primaire et secondaire,  $\mathcal{R}_{\text{Pe}} = \text{Pe}^{II}/\text{Pe}^I$ . La valeur propre  $\lambda_1^l$  peut être prise asymptotiquement inversement proportionnelle à la racine du Péclet secondaire  $\lambda_1^l \propto \sqrt{1/\text{Pe}^{II}}$  dans la limite  $\text{Pe}^{II} \gg 1$ , voir Fig. VI.15. On aura donc, dans cette limite

$$\frac{\partial}{\partial \text{Pe}^{II}} \left( \frac{1}{\lambda_1^l} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1^l \text{Pe}^{II}} \quad (\text{VI.3})$$

A partir de cette expression simplifiée on peut approximer (VI.2) la position de l'interface liquide/vapeur en utilisant le profil de température du fluide virtuel dans le canal secondaire. L'idée consiste alors à confondre la position de l'interface liquide/vapeur avec l'atteinte par le fluide virtuel du niveau d'énergie sensible requis pour la vaporisation du débit secondaire. Cette position, dans le cas d'un mono-canal chauffé coïncidait avec la position du front de vaporisation. Dans un échangeur toutefois, cette position sera différente. L'écart entre la prédiction virtuelle et la position réelle est due à la modification du champ de température virtuel par la couche limite interfaciale, le chauffage de la vapeur. Nous verrons, par la suite, que la précision de cette estimation dépend des propriétés du fluide et des caractéristiques de l'échangeur. L'atteinte d'un niveau d'énergie suffisant pour déclencher l'évaporation s'écrit dans ce cas,

$$\langle \tilde{T}_l^{II} \rangle_c(z_i) = \tilde{T}_{sat} + \frac{\mathcal{L}_{vap}}{\tilde{c}_{pl}}. \quad (\text{VI.4})$$

En substituant le champ de température secondaire par l'expression asymptotique (VI.2) et en adimensionnant, c'est à dire en divisant (VI.4) par  $\Delta \tilde{T}_h$ , et en prenant comme température de référence  $\tilde{T}_{sat}$  de sorte que la température soit nulle à l'interface on obtient :

$$x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c e^{\lambda_1^l z_i} + T_\infty^V = \frac{\mathcal{L}_{vap}}{\tilde{c}_{pl} \Delta \tilde{T}_h} = \frac{1}{\text{Ste}}. \quad (\text{VI.5})$$

$\langle T_l^{II} \rangle_c$  est une fonction croissante de  $z$  qui tend vers une température seuil  $T_\infty^V$  quand  $z \rightarrow \infty$  (qui est donc aussi la température maximale atteignable). Pour que l'équation (VI.5) admette une solution, il faut donc que  $1/\text{Ste} < T_\infty^V$ . Si cette condition est remplie, (VI.5) permet de trouver explicitement  $z_i$ ,

$$z_i = \frac{1}{\lambda_1^l} \ln \left[ \frac{1}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \left( \frac{1}{\text{Ste}} - T_\infty^V \right) \right].$$

En introduisant, la variable  $\Theta$

$$\Theta = \frac{1}{\text{Ste}} - T_\infty^V = \frac{1}{\text{Ste}} - \frac{\mathcal{R}_{\text{Pe}} T_\infty^{II} + T_\infty^I}{(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}})}, \quad (\text{VI.6})$$

on peut écrire la position de l'interface

$$z_i = \frac{1}{\lambda_1^l} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right). \quad (\text{VI.7})$$

La nature de l'équation (VI.7) souligne l'existence d'une gamme de nombre de Péclet pour

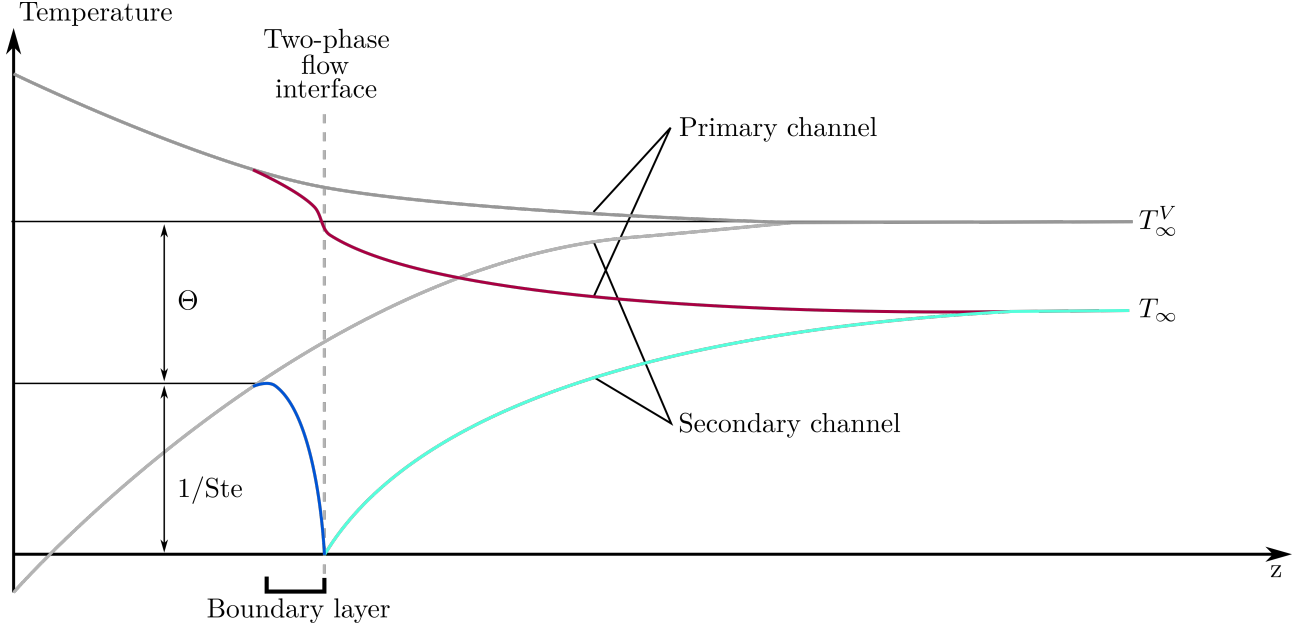


Figure VI.4: Illustration du critère d'existence de vapeur sèche et allure des champs de températures dans un échangeur diphasique. Les courbes grises indiquent le niveau de température dans un échangeur à fluide virtuel, tandis que celles en couleur (rouge : circuit primaire, bleu : circuit secondaire liquide, cyan : circuit secondaire vapeur) représentent les températures en présence d'évaporation.

laquelle il n'existe pas de solution. L'argument du logarithme doit en effet être strictement positif soit

$$\begin{aligned} \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\Theta}{\Theta} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\text{Ste}} - \frac{\mathcal{R}_{\text{Pe}} T_\infty^{II} + T_\infty^I}{1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}}} &< 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{R}_{\text{Pe}} &< \frac{T_\infty^I - 1/\text{Ste}}{1/\text{Ste} - T_\infty^{II}} \end{aligned}$$

et ce qui revient à ne pas dépasser une certaine valeur limite de Péclet secondaire,  $\text{Pe}_c^{II}$ , valeur au-delà de laquelle il n'y a plus d'évaporation (VI.8) définie par

$$\text{Pe}_c^{II} = \frac{\text{Ste} T_\infty^I - 1}{1 - \text{Ste} T_\infty^{II}} \text{Pe}^I \quad (\text{VI.8})$$

L'existence d'une valeur seuil au-delà de laquelle le processus de vaporisation ne peut avoir lieu, permet d'anticiper à partir des configurations virtuelles, les gammes des paramètres, notamment les températures et débits d'entrée, pour lesquelles l'état de vapeur sèche est atteint en sortie du canal secondaire. Le schéma dessiné en figure Fig. VI.4 permet d'illustrer graphiquement la relation entre  $\Theta$ ,  $T_\infty^V$  et  $1/\text{Ste}$  et d'interpréter l'inégalité. On y retrouve bien la décomposition de  $T_\infty^V$  en deux termes,  $\Theta$  et  $1/\text{Ste}$ . Or, le rapport  $1/\text{Ste}$  quantifie physiquement le niveau



de surchauffe, où de manière équivalente dans notre modèle d'évaporation, le niveau d'énergie requis pour vaporiser le débit liquide secondaire. En d'autres termes, la vaporisation du débit secondaire est asservie par l'atteinte par la température de mélange du canal secondaire de ce niveau de température dans la longueur de l'échangeur. Dans cette optique, la température d'établissement virtuelle équivaut au niveau de température maximal atteignable dans un échangeur de longueur infinie et le terme  $\Theta$  caractérise alors le surplus d'énergie contenu dans le primaire par rapport à l'énergie requise pour l'évaporation. En pratique l'inégalité portant sur  $\Theta$  assure que le primaire convecte suffisamment d'énergie pour assurer la vaporisation du débit secondaire.

L'expression analytique asymptotique de  $z_i$  (Cf (VI.7)) est confrontée aux résultats des simulations numériques dans les figures Fig. VI.5.(a-b) pour différents fluides avec des Péclets primaire respectivement de 16 et 24. Les  $Pe_c$  et les prédictions analytiques de  $z_i$  sont représentés par des droites verticales grises en tirets allongés pour les premiers et par des courbes tiretées noires pour les seconds. On voit sur ces deux graphiques que les résultats numériques, reportés sur les graphiques sous la forme de symboles en couleur, suivent les mêmes tendances que les prédictions analytiques. La variété des fluides considérées et par conséquent des propriétés physiques, valident les dépendances entre  $z_i$  et les paramètres physiques décrites en (VI.7). La dépendance de la relation (VI.7) au Péclet primaire semble également être cohérente (Cf Fig. VI.5.(b)), avec comme le prédisait (VI.8), une translation de  $Pe_c$  proportionnelle au  $Pe^I$ . De façon évidente,  $z_i$  est une fonction strictement croissante du Péclet secondaire, avec une sensibilité au débit secondaire croissante au fur et à mesure que l'on se rapproche du Péclet critique. Cette sensibilité est maximale au voisinage immédiat de  $Pe_c$  avec une courbe analytique admettant une asymptote verticale en  $Pe_c$ . Nous verrons d'ailleurs un peu plus loin que cette région correspond à une structure bien particulière des champs de température dans l'échangeur.

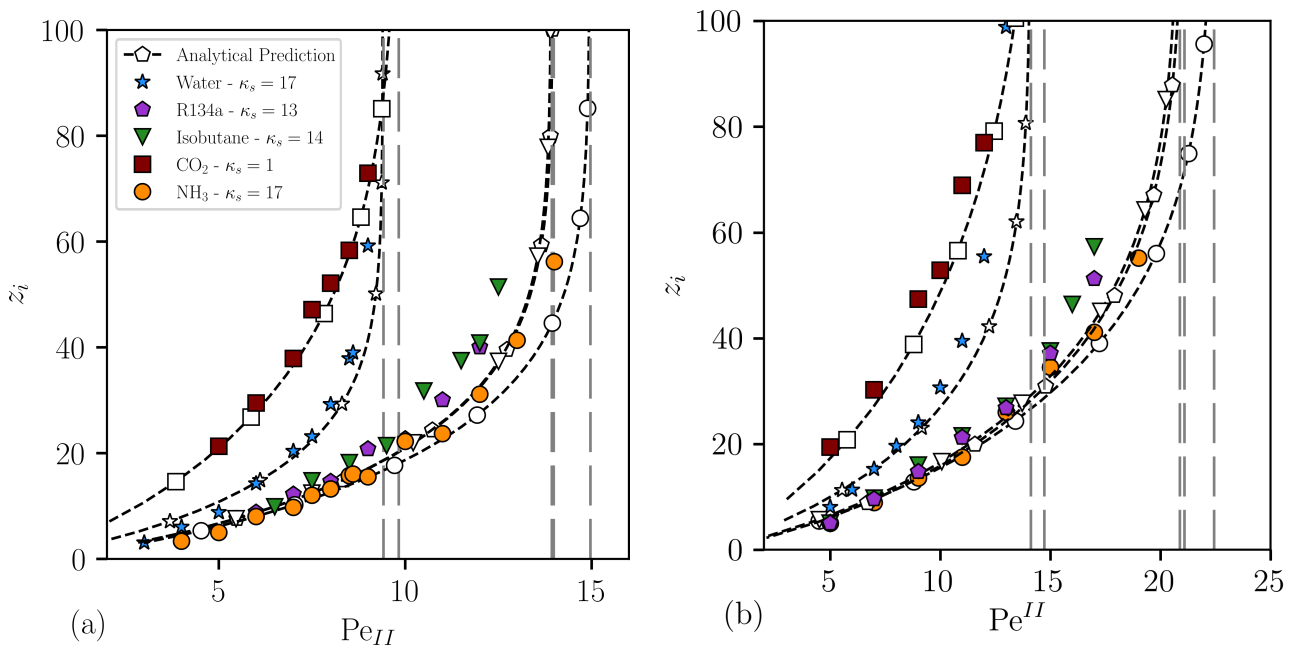


Figure VI.5: Déplacement du front de vaporisation dans un échangeur co-courant en fonction du Péclet secondaire pour différents fluides. En (a)  $Pe^I = 16$ , en (b)  $Pe^I = 24$ .

## 1.b Régimes de fonctionnement dans un micro-échangeur co-courant diphasique

### Identification des régimes de fonctionnement

Les relevés de température rassemblés dans la figure Fig. VI.6 ont été effectués pour des valeurs croissantes de Péclet secondaire tout en maintenant les autres paramètres constants. Les graphiques sont rangés la manière suivante : à chaque ligne est assignée un fluide, sur chacune de ces lignes, les graphiques sont ordonnés par ordre croissant de  $Pe^{II}$ . Bien que les profils de températures varient avec le  $Pe^{II}$  (d'une colonne à l'autre) les caractéristiques des profils paraissent, elles, communes aux trois fluides (d'une ligne à l'autre). Chaque colonne, ou chaque plage de  $Pe^{II}$ , est ainsi caractérisée par des invariants.

- Pour les faibles  $Pe^{II}$ 
  - l'établissement thermique est atteint plus rapidement que dans les autres cas,
  - la température d'établissement est proche de la température du primaire passé le front de vaporisation,
  - la température solide admet un minimum local au niveau de l'interface, autrement dit, le solide collecte des flux thermiques de l'amont et l'aval vers l'interface,
  - la température du primaire est bien supérieure à la surchauffe du fluide secondaire
  
- Pour les Péclets secondaires modérés
  - comme le Péclet secondaire est plus élevé, l'établissement thermique est retardé,
  - la température solide n'admet plus de minimum au niveau du front de vaporisation, et continue de décroître derrière l'interface liquide/vapeur,
  - la température d'établissement auparavant supérieure à la surchauffe du liquide secondaire est maintenant du même ordre de grandeur
  - l'écart de température entre le primaire et le secondaire au niveau de l'interface est également plus ténue,
  
- Pour les  $Pe^{II}$  proche de  $Pe_c^{II}$ 
  - l'établissement thermique recule encore une fois,
  - la température solide possède les mêmes tendances que précédemment, toutefois, elle atteint localement des températures inférieures à la température du secondaire proche de l'interface liquide/vapeur,
  - la température d'établissement diminue cette fois encore pour atteindre des niveaux proches de la température de saturation,
  - les températures sont extrêmement proches au niveau de l'interface et forment un pincement.

L'indépendance de ces caractéristiques au fluide considéré ou à la géométrie utilisée, met en fait en exergue l'universalité de ces trois régimes. L'objectif dans la suite de cette section consiste à définir ces régimes de fonctionnement puis à caractériser certaines de leurs propriétés.

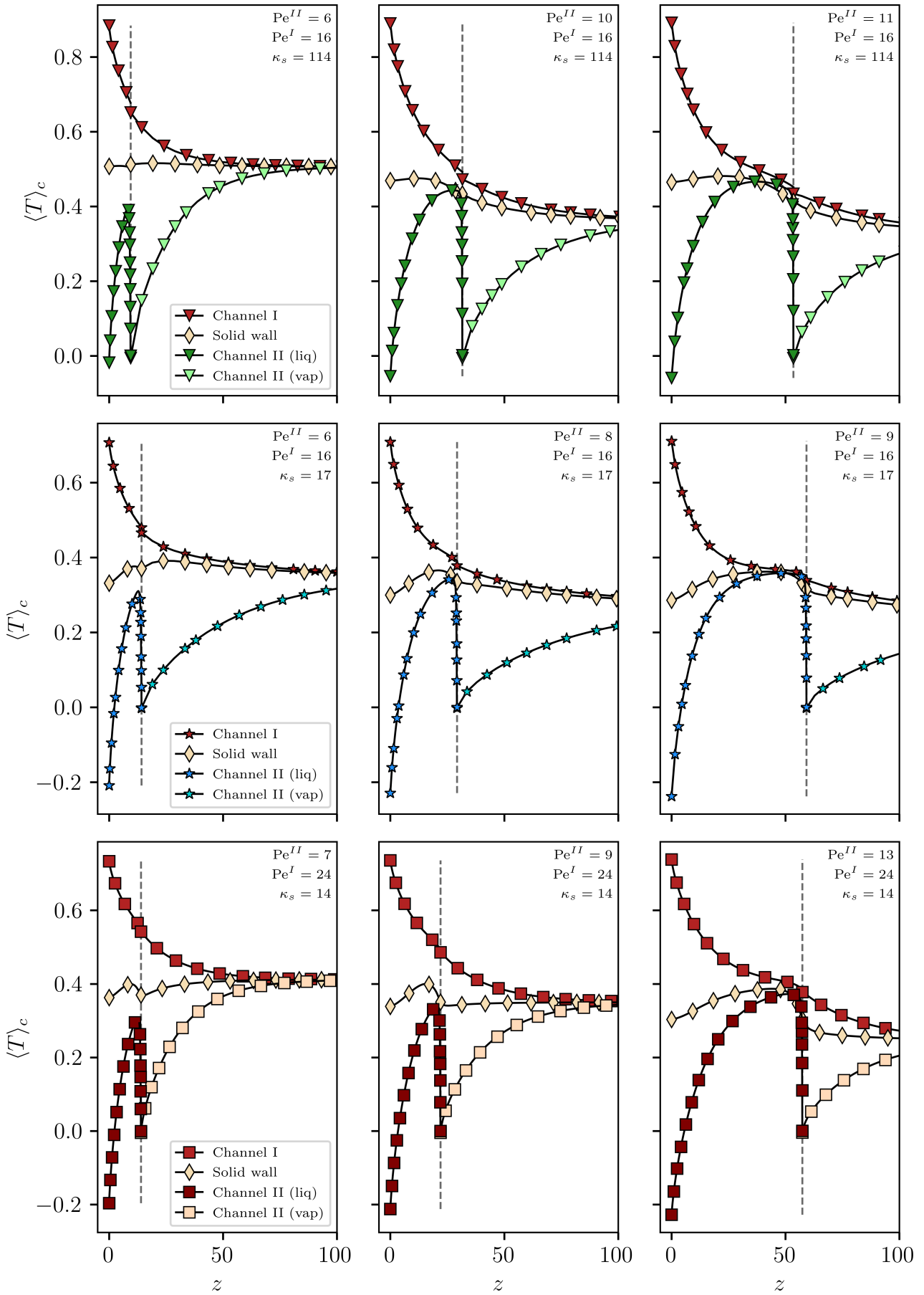


Figure VI.6: Profils des températures de mélange primaire et secondaire ainsi que des température moyenne solide. Les graphiques d'une même ligne sont obtenus pour différents  $Pe^{II}$ . De bas en haut on retrouve des écoulements de  $CO_2$ , d'eau et d'isobutane.

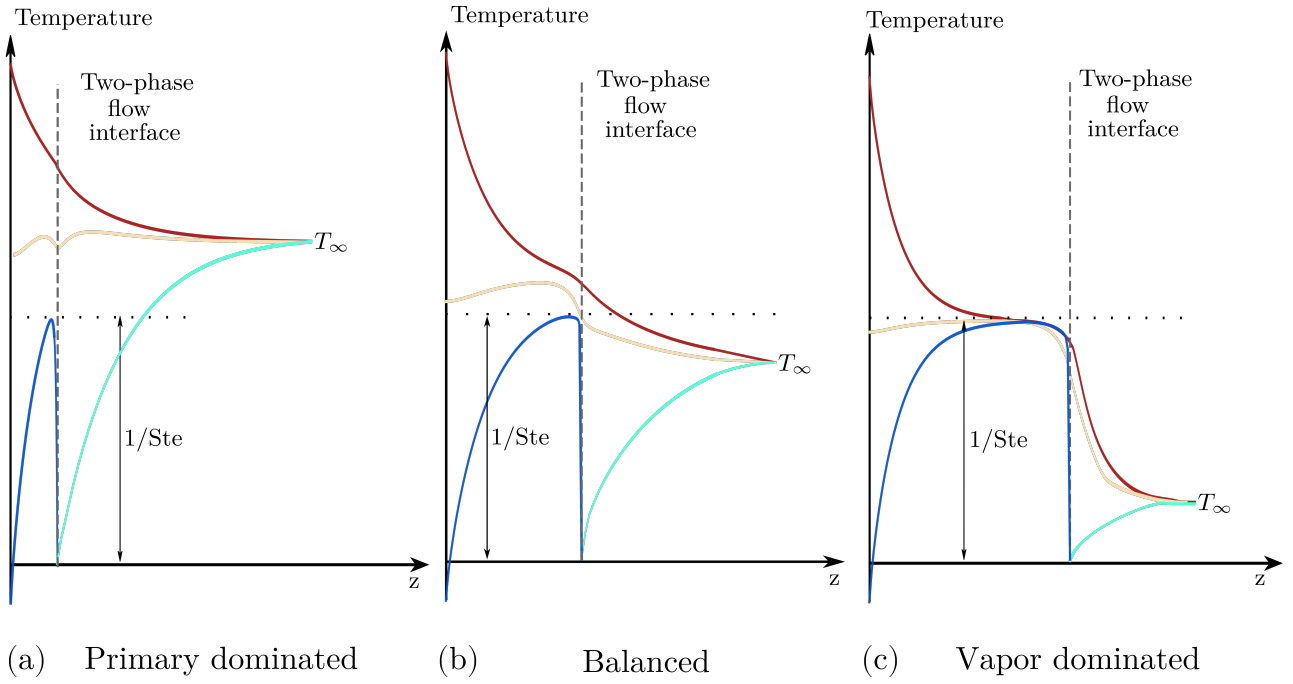


Figure VI.7: Synthèse des différents régimes de fonctionnement dans un échangeur co-courant diphasique, de gauche à droite : Régime dominé vapeur  $T_\infty Ste > 1$ , Régime équilibré  $T_\infty Ste \sim 1$  et Régime dominé vapeur  $T_\infty Ste < 1$

### Définition et propriétés des régimes dominé primaire, équilibré et dominé vapeur

La distinction entre les trois régimes de fonctionnement de l'échangeur-générateur de vapeur se base sur deux critères : la valeur de la température d'établissement thermique relativement à la surchauffe du liquide et la présence ou non d'un pincement des températures secondaire et primaire. La valeur de  $T_\infty$  permet de discerner le régime primaire dominé du régime équilibré (Cf Fig. VI.7.(a-b)), quand le second critère sépare le régime équilibré du régime dominé vapeur, voir Fig. VI.7.(b-c). Le régime dominé vapeur est défini par une température d'établissement supérieure à la surchauffe liquide  $T_\infty > 1/Ste$ , qui le différencie du régime équilibré. La somme des bilans d'énergie réalisés sur les parties de l'échangeur situées en amont et en aval du front de vaporisation permet d'exprimer la température d'établissement  $T_\infty$  atteinte dans l'échangeur diphasique (VI.9).

$$\tilde{T}_\infty \left(1 + \frac{\dot{m}_{II} \tilde{c}_{pv}}{\dot{m}_I \tilde{c}_{pl}}\right) = \tilde{T}_\infty^I + \tilde{T}_\infty^{II} \frac{\dot{m}_{II}}{\dot{m}_I} - \frac{\dot{m}_{II} \mathcal{L}_{vap}}{\dot{m}_I \tilde{c}_{pl}} + \tilde{T}_{sat} \frac{\dot{m}_{II}}{\dot{m}_I} \left(\frac{\tilde{c}_{pv}}{\tilde{c}_{pl}} - 1\right) \quad (\text{VI.9})$$

En soustrayant  $\tilde{T}_{sat}$  à (VI.9) et en divisant par  $\Delta \tilde{T}_h$  on obtient (VI.10),

$$T_\infty = \frac{\frac{\tilde{T}_\infty^I}{\Delta \tilde{T}_h} + \frac{\tilde{T}_\infty^{II}}{\Delta \tilde{T}_h} \mathcal{R}_{Pe} - \frac{\mathcal{R}_{Pe}}{Ste} - \frac{\tilde{T}_{sat}}{\Delta \tilde{T}_h} (1 + \mathcal{R}_{Pe})}{(1 + \mathcal{R}_{Pe} \mathcal{C}_p)} \quad (\text{VI.10})$$

L'introduction des grandeurs adimensionnelles permet de réécrire l'équation (VI.10) en (VI.11).

$$T_\infty = \frac{T_\infty^I + T_\infty^{II} \mathcal{R}_{Pe} - \frac{\mathcal{R}_{Pe}}{Ste}}{(1 + \mathcal{R}_{Pe} \mathcal{C}_p)} \quad (\text{VI.11})$$

En utilisant l'expression de  $T_\infty$  (VI.11), il est possible d'exprimer le passage du régime dominé primaire à équilibré sous la forme d'une condition sur le  $\mathcal{R}_{Pe}$ . Plus précisément, on définit  $\mathcal{R}_{Pe}^P$ ,

voir (VI.12), tel que l'échangeur est en régime dominé vapeur ssi  $\mathcal{R}_{\text{Pe}} < \mathcal{R}_{\text{Pe}}^P$ .

$$\mathcal{R}_{\text{Pe}}^P = \frac{\text{Ste}T_\infty^I - 1}{\mathcal{C}_p - \text{Ste}T_\infty^{II} + 1}, \quad (\text{VI.12})$$

Au fur et à mesure que le Péclet secondaire augmente, le champ de température en amont de l'interface liquide/vapeur se rapproche de l'établissement. En d'autres termes, on observe un pincement de plus en plus prononcé entre les températures des circuits secondaire et primaire (Cf Fig. VI.7). Le pic de température en amont de l'interface étant dicté par le nombre de Stefan, indépendant des nombres de Péclet, la surchauffe dans le canal secondaire, reste elle aussi, constante, et c'est la température du circuit primaire qui va alors tendre vers cette constante. La dégradation des transferts thermiques associée à cette configuration se traduit par la formation d'un plateau de température –autour de  $1/\text{Ste}$ – lorsque le Péclet secondaire est proche du Péclet critique. Il faut comprendre que dans ce cas, une faible augmentation du débit secondaire entraîne un décalage de l'interface vers l'aval très important. Pour être plus précis, comme le surplus d'énergie nécessaire à l'évaporation de cet incrément de débit est capté par des échanges entre des fluides de températures très proches (pincement des températures), il faut allonger la distance d'échange pour compenser la faible intensité des transferts thermiques.

L'atteinte d'un pincement de température entre les deux circuits de l'échangeur permet donc de séparer le régime équilibré du régime dominé vapeur. En pratique on pose que dans le régime dominé vapeur le champ de température vérifie  $|T_l(z_m) - 1/\text{Ste}| \ll 1/\text{Ste}$ , *i.e.* on impose que la température au niveau de maximum de température liquide dans la section de l'échangeur soit de l'ordre de la surchauffe liquide  $1/\text{Ste}$  près. En étant en dehors de la couche limite interfaciale, on peut légitimement négliger les composantes amont de  $T_l$ . Comme le régime dominé vapeur est caractérisé par un front de vaporisation tardif, on admet que  $z_m \gg -1/\lambda_1^l$ . Les termes exponentiels de la décomposition de  $T_l$  sont alors négligeables et  $T_l(z_m)$  peut être approchée par  $T_\infty^V$ . Le régime dominé vapeur vérifie donc

$$|\text{Ste}T_\infty^V - 1| = |\Theta|\text{Ste} \ll 1. \quad (\text{VI.13})$$

En pratique on définit  $\mathcal{R}_{\text{Pe}}^B$ , le rapport au-delà duquel l'échangeur amorce sa transition du régime équilibré vers le régime dominé vapeur, par  $|\text{Ste}T_\infty^V(\mathcal{R}_{\text{Pe}}^B) - 1| < 0.01$ . Soit par définition de  $T_\infty^V$ ,

$$\mathcal{R}_{\text{Pe}}^B = \frac{\text{Ste}T_\infty^I - 1.01}{1.01 - \text{Ste}T_\infty^{II}}. \quad (\text{VI.14})$$

La discussion s'est jusqu'ici focalisée sur la caractérisation des régimes de fonctionnement par l'analyse des températures moyennées. On souhaite maintenant relier le modèle asymptotique de la position du front de vaporisation  $z_i$  avec les frontières des différents régimes de fonctionnement de l'échangeur. De cette façon, il sera possible d'associer la progression du front de vaporisation aux régimes de fonctionnement de l'échangeur et à leurs propriétés. A cette fin, la figure Fig. VI.8 superpose les positions de l'interface liquide/vapeur obtenues numériquement (symboles colorés), le modèle numérique de positionnement de l'interface diphasique (courbe en tiret noir) et les plages des différents régimes de fonctionnement. On retrouve sans surprise que le régime dominé primaire est rattaché à une apparition précoce de la zone vapeur,  $z_i < 20$ , par opposition au régime dominé vapeur qui se distingue par une zone liquide très développée,  $z_i > 40$ . Le régime équilibré semble, quant à lui, jouer le rôle d'un régime aux propriétés intermédiaires, en assurant le passage du régime dominé primaire vers le régime dominé vapeur. Cela se traduit notamment par une répartition des phases liquide et vapeur plus équilibrée ainsi qu'une courbure plus marquée des variations de  $z_i$ . On peut, en outre, constater que le régime

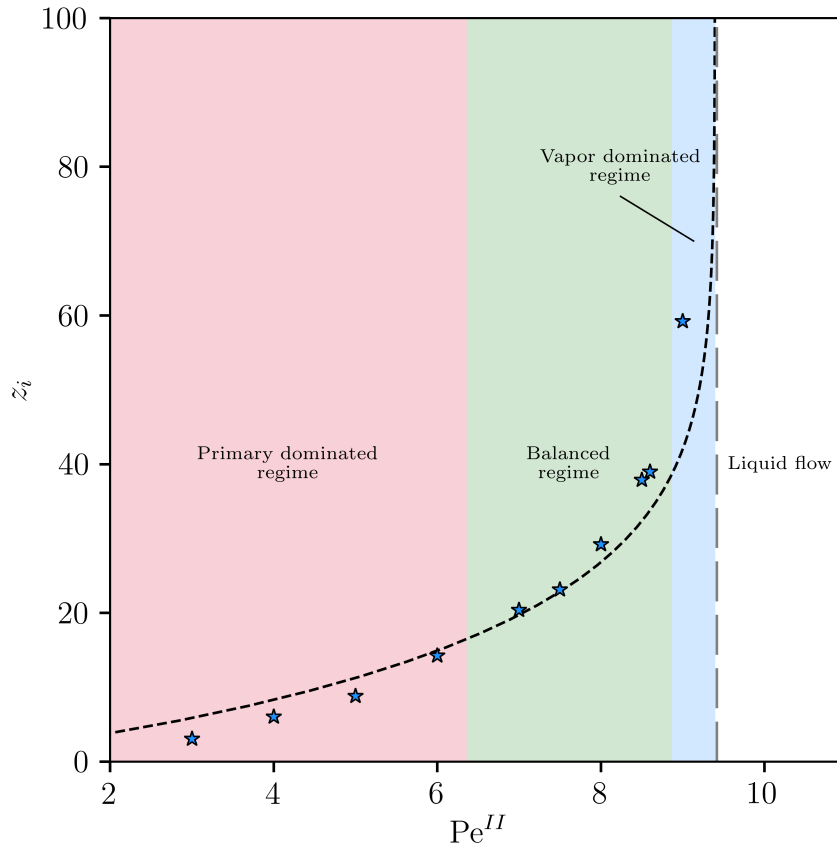


Figure VI.8: Régimes d'écoulement dans un échangeur co-courant diphasique. Écoulement d'eau,  $Pe^I = 16$

dominé vapeur est clairement associé à une gamme de  $Pe^{II}$  pour laquelle  $z_i$  varie très fortement. Ce comportement est cohérent avec la dégradation des transferts thermiques et l'allongement de la zone liquide qui en découle décrits un peu plus tôt. Il est enfin important de garder à l'esprit que ce sont généralement ces écoulements, présentant une faible longueur vapeur, qui seront aussi les plus susceptibles d'être instables.

Les frontières des régimes de fonctionnement de l'échangeur diphasique reposent sur trois rapports de Péclets  $\mathcal{R}_{Pe}^P$ ,  $\mathcal{R}_{Pe}^B$ , et  $\mathcal{R}_{Pe}^C$  qui permettent de délimiter ces régimes. Jusqu'à présent les dépendances de ces rapports critiques aux paramètres du problème n'ont pas été explicitement étudiées. En pratique, il s'avère que les expressions de ces frontières sont entièrement déterminées en fixant les températures d'entrée et le fluide utilisé, voir (VI.8), (VI.12) et (VI.14). En effet, la sélection du fluide de travail spécifie le rapport des capacités thermiques liquide/vapeur  $\mathcal{C}_p$  et la combinaison des propriétés de ce fluide avec le choix des températures d'entrée,  $T_\infty^I$  et  $T_\infty^{II}$ , détermine le nombre de Stefan. Ces dépendances sont illustrées dans les figures Fig. VI.9.(a-d). D'abord en fonction du fluide utilisé pour les figures Fig. VI.9.(a-c), puis en fonction du niveau de sous-refroidissement dans la figure Fig. VI.9.(d). L'ensemble des fluides suivent les mêmes tendances avec un étalement du régime dominé primaire relativement à la plage diphasique  $[0, \mathcal{R}_{Pe}^C]$  lorsque le nombre de Ste augmente.

### 1.c Caractérisation thermique de la paroi solide et de son impact sur les transferts de chaleur

La paroi solide, à l'interface entre les canaux primaire et secondaire, est au cœur du processus de transfert de chaleur. Son introduction dans le modèle de l'échangeur est d'autant

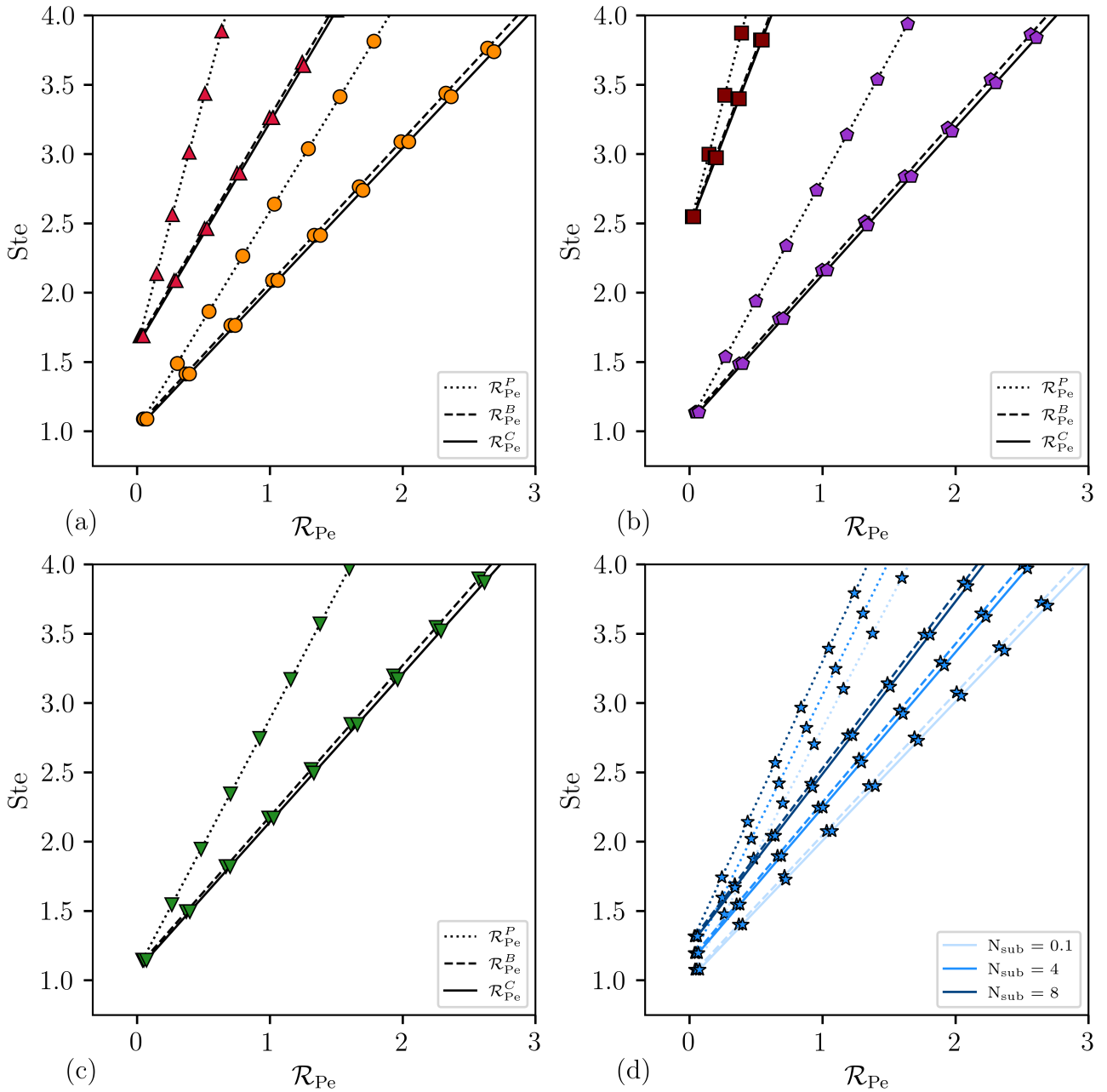


Figure VI.9: Cartes des régimes de fonctionnement de l'échangeur dans le plan  $(\mathcal{R}_{Pe}, Ste)$  pour différents fluides à niveau de sous-refroidissement fixé ( $N_{sub} = 4$ ) (a-c) et pour de l'eau à  $N_{sub}$  variables (d)

plus essentielle, que contrairement à la condition de flux pariétal utilisée pour le mono-canal, les transferts conjugués caractéristiques de l'échangeur, ne vont pas de pair avec un taux imposé d'énergie injectée dans le canal secondaire, mais sont fonction des écarts de température entre les deux fluides. On peut ainsi s'attendre à ce que la présence d'une paroi solide, qui dispose généralement d'une bien meilleure conductivité thermique que les fluides qui l'entoure, modifie la cartographie des gradients thermiques et par extension la qualité des transferts primaire/secondaire.

### Propriétés locales des transferts thermiques dans la paroi solide

Les quelques paragraphes qui suivent cherchent ainsi à étudier plus en détail l'organisation des flux thermiques dans la paroi solide et à en déduire les comportements thermiques induits

à l'échelle de l'échangeur. Pour chacun des régimes de fonctionnement le champ local de température solide a été extrait et représenté sous forme de courbes isothermes. Le gradient de la température solide moyenné dans la section, reporté en parallèle, indique la direction globale du flux thermique dans la direction de l'écoulement, voir Fig. VI.10, Fig. VI.11 et Fig. VI.12. Globalement, le champ thermique de la paroi en amont de l'interface liquide/vapeur s'organise

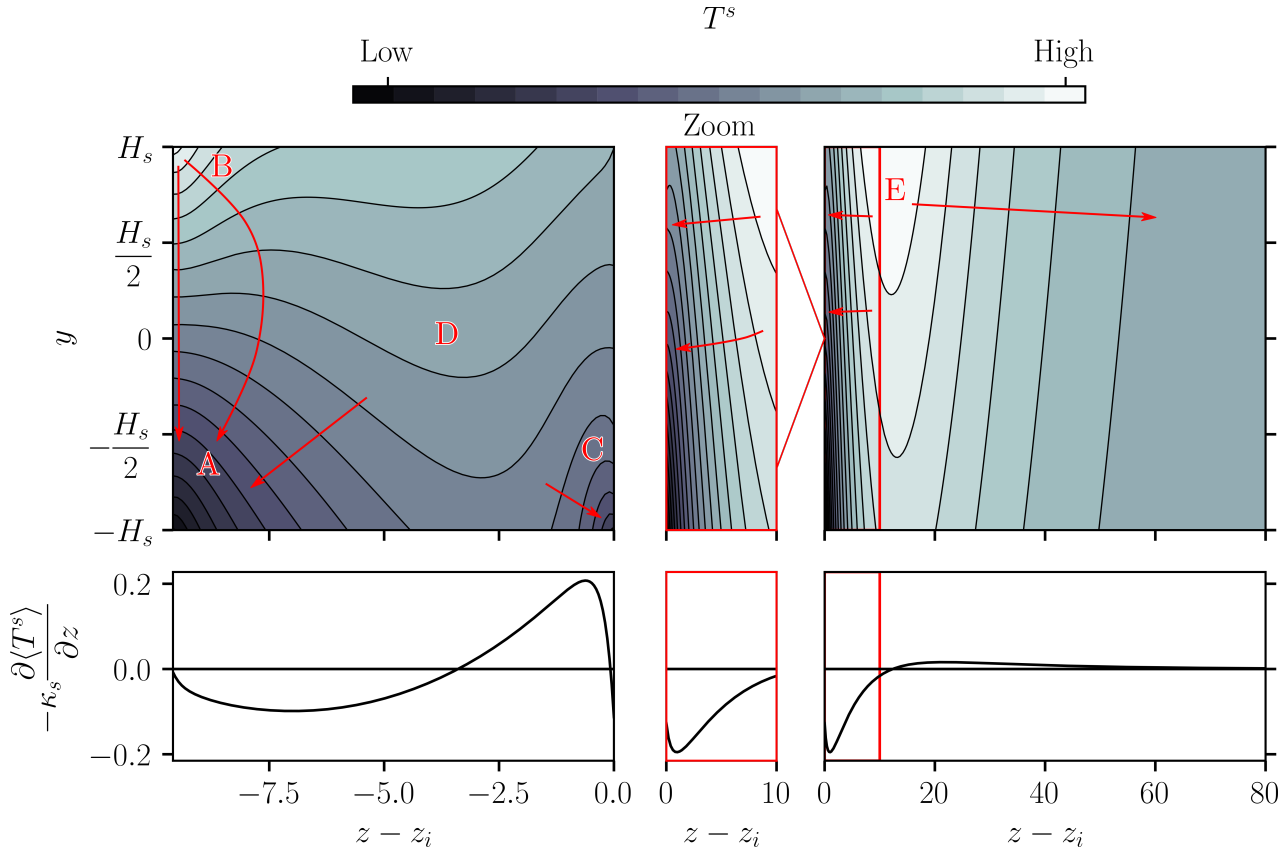


Figure VI.10: Champ de température dans la paroi solide d'un échangeur co-courant, en haut et variations du gradient longitudinal de température moyenné dans la section, en bas. Régime dominé primaire  $T_\infty Ste > 1$ . Écoulement de R134a,  $Pe^I = 6$ ,  $Pe^I = 16$ ,  $\kappa_s = 13$ ,  $T_\infty Ste = 1.14$ ,  $|\Theta| Ste = 0.66$ . Les flèches rouges indiquent la direction du flux thermique

autour de 5 zones, identifiées par les points A, B, C, D et E (Cf Fig. VI.10) :

A : entrée secondaire de l'échangeur,

B : entrée primaire de l'échangeur,

C : région au contact de la couche limite thermique liquide,

D : zone de transition où la paroi solide produit un pompage thermique longitudinal aval ou amont et

E : zone d'influence en aval de l'interface de changement de phase.

On constate de façon très intéressante sur ces figures Fig. VI.10, Fig. VI.11 et Fig. VI.12 que les isothermes du solide ne sont pas toujours parallèles à la direction de l'écoulement (axe  $z$ ). Ceci traduit le fait que le flux vertical de chaleur pris à une abscisse donnée au primaire n'est pas nécessairement restitué à la même position dans le secondaire. Autrement dit, la composante longitudinale des gradients thermiques joue un rôle non négligeable dans les transferts thermiques solides. On remarque, par ailleurs, que ce gradient longitudinal varie fortement le long



de  $z$  mais surtout change de signe autour de la région D. On peut, par conséquent, en déduire que plusieurs zones, analogues à des 'puits', concentrent l'énergie transitant par le solide. Ces puits caractérisés par leurs faibles températures sont placés côté secondaire du solide, à l'entrée de l'échangeur (Cf région A) et au niveau du front de vaporisation (Cf région C). L'allure du gradient longitudinal permet, en outre, de délimiter les zones d'influence de ces deux puits, en effet, en moyenne, l'énergie prélevée au primaire sur l'intervalle  $[-9.5, -2]$  est en partie dirigée vers l'entrée du secondaire alors que celle prélevée sur l'intervalle  $[-2, 0]$  rejoint partiellement le front de vaporisation. Cela signifie que la rapide montée en température du fluide secondaire froid, qui rentre dans l'échangeur, affecte les flux thermiques récoltés sur les deux tiers de la longueur liquide. Cette caractéristique ressemble à l'effet d'entrée bien connu dans les échangeurs. Similairement, la consommation de l'énergie au niveau de l'interface diphasique collecte une partie du flux sur près d'un tiers de la longueur liquide. Ce dernier comportement est bien entendu tout à fait spécifique des générateurs de vapeur.

La déviation des gradients thermiques est plus flagrante encore en aval de l'interface diphasique,

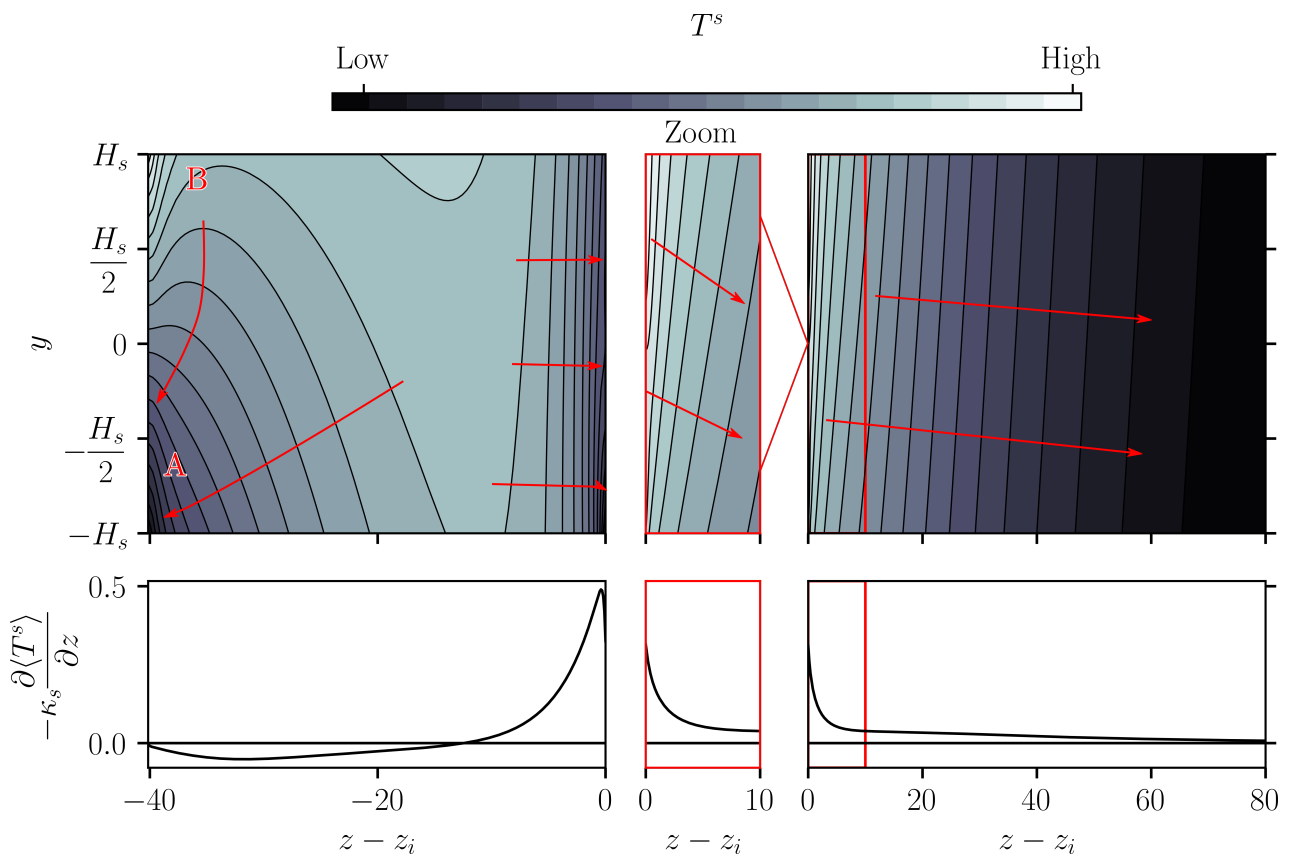


Figure VI.11: Champ de température dans la paroi solide d'un échangeur co-courant, en haut et variations du gradient longitudinal de température moyenné dans la section, en bas. Régime équilibré  $T_\infty Ste < 1$ . Écoulement de R134a,  $Pe^{II} = 12$ ,  $Pe^I = 16$ ,  $\kappa_s = 13$ ,  $T_\infty Ste = 0.66$ ,  $|\Theta| Ste = 0.08$

dans la zone accolée au front de vaporisation. A cet endroit, la majorité du flux est dirigée vers l'interface et non pas vers le canal secondaire, (isothermes perpendiculaires à la direction de l'écoulement). On notera, que de manière générale, les gradients sont majoritairement parallèles à l'écoulement dans la zone vapeur de l'échangeur. Ces flux thermiques proviennent d'un point 'source', ou point chaud (Cf région E) à partir duquel le flux thermique change de direction amont/aval. Près de l'interface, le flux thermique est dirigé de façon prédominante vers l'amont car il doit alimenter le pompage énergétique du changement de phase. A partir du point E, qui marque la limite de la *zone d'influence aval de l'interface de changement de*

*phase*, le flux thermique longitudinal est dirigé vers l'aval, avec une faible intensité du gradient transverse pour  $z > 12$ . Ces observations montrent que de manière analogue avec l'entrée du fluide secondaire dans l'échangeur, la vapeur à température de saturation entre soudainement en 'contact' avec l'écoulement primaire et la paroi qui sont bien plus chauds. Le chauffage de cette vapeur 'froide' cumulé avec la consommation d'énergie liée à la vaporisation du fluide accapare le flux thermique à l'entrée de la zone vapeur (gradient longitudinal fortement négatif).

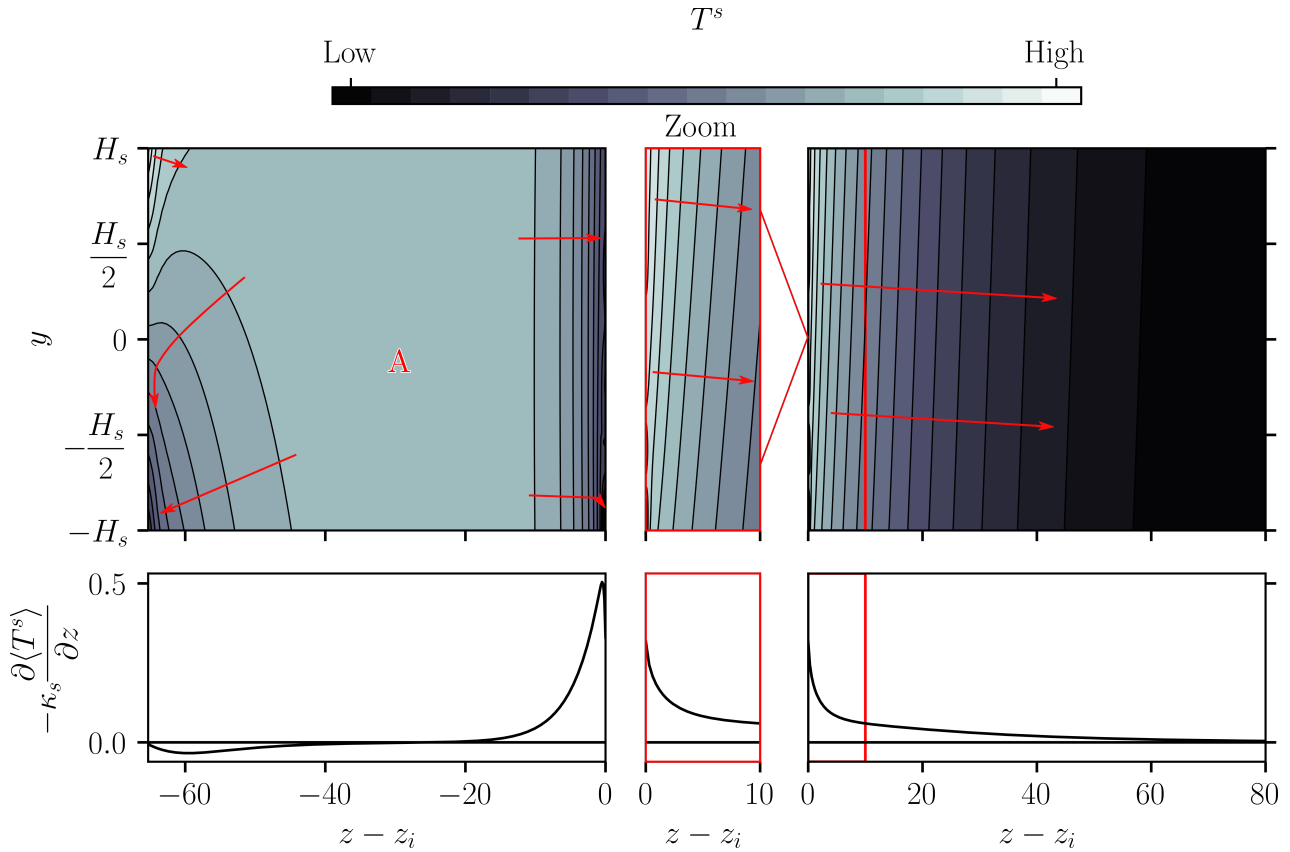


Figure VI.12: Champ de température dans la paroi solide d'un échangeur co-courant, en haut et variations du gradient longitudinal de température moyenné dans la section, en bas. Régime dominé vapeur  $|\Theta|Ste \ll 1$ . Écoulement de R134a,  $Pe^{II} = 8.6$ ,  $Pe^I = 10$ ,  $\kappa_s = 13$ ,  $|\Theta|Ste = 0.009$

Dans le cas du régime équilibré, la portion du solide en amont de l'interface est hiérarchisée de la même façon que dans le cas précédent (dominé primaire), à ceci près que seul un petit fragment du flux dirigé vers l'interface parvient au secondaire (Cf Fig. VI.11). Ce comportement est confirmé par la grande valeur du gradient longitudinal à l'interface. De l'autre côté du front de vaporisation, en revanche, le flux thermique s'agence différemment du régime dominé primaire. Alors que le flux longitudinal était négatif (dirigé vers l'interface) à la sortie de l'interface liquide/vapeur (Cf Fig. VI.10), le flux reste ici positif. Une autre conséquence de cette distribution de la température, est qu'il n'existe plus de point source en aval de l'interface liquide/vapeur. On s'aperçoit, dans le régime équilibré, que le solide conduit une partie de l'énergie captée en amont de l'interface vers la zone aval, où elle sert à réchauffer la vapeur progressivement. Si l'on regarde attentivement, la région située, derrière l'interface diphasique, on peut remarquer un gradient thermique intense qui décroît rapidement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'interface. Ce comportement est analogue à celui d'une couche limite et sera étudié un peu plus bas.

Finalement, le champ thermique solide du régime dominé vapeur possède globalement les mêmes spécificités que le régime équilibré, voir Fig. VI.12. Avec de manière plus prononcée encore, la quasi totalité du flux thermique en amont de l'interface conduite vers la zone aval. On peut identifier la région correspondant au pincement des températures primaire et secondaire dans laquelle la température du solide reste proche de  $1/Ste$ , zone A. Cette région est suivie par un lieu d'intenses gradients essentiellement longitudinaux, qui correspondent à la déviation de l'énergie captée en amont de l'interface non pas vers l'interface mais bien plus loin vers aval. Or on sait que la température solide baisse drastiquement en amont de l'interface, en particulier dans le régime dominé vapeur, voir Fig. VI.6. Néanmoins, cette baisse n'est pas attribuable à la couche limite interfaciale dont la portée est bien plus petite. Il semblerait plutôt que ce soit le chauffage de la zone vapeur à l'aval de l'interface qui viennent soutirer de l'énergie par le biais de la paroi solide. Cela explique par la même occasion pourquoi la température solide peut être en dessous des températures de canaux primaire et secondaire, dans cette région.

### Étude paramétrique des transferts thermiques dans les régimes équilibré et dominé vapeur

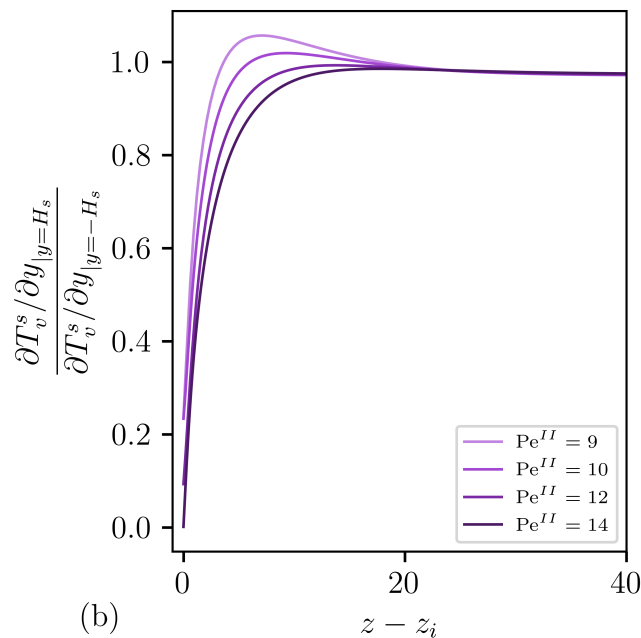


Figure VI.13: Rapport des gradients transverses de température aux frontières fluide/solide en aval du front de vaporisation. Écoulement de R134a,  $Pe^I = 16$ ,  $\kappa_s = 13$ ,  $H_s = 1$

Les régimes équilibré et dominé vapeur sont tous deux caractérisés par une gamme de Péclet secondaire plus importante que dans le cas du régime dominé primaire. Les conséquences directes de cela, sont d'une part, un prélèvement plus important de l'énergie du primaire dû à l'évaporation du débit secondaire et d'autre part une montée en température de la vapeur qui absorbe plus d'énergie. Le chauffage de la vapeur devient alors, relativement à l'énergie restante dans le primaire en aval de l'interface, un terme de plus en plus conséquent. L'étude des champs de température solide, a d'ailleurs montré que le chauffage de la vapeur induisait une migration du flux thermique via le solide vers la zone en aval de l'interface. Un autre moyen de considérer le développement des gradients longitudinaux dans le solide consiste à voir le gradient longitudinal comme le fruit d'un déséquilibre entre l'«offre», représentée par l'apport d'énergie à la frontière solide/primaire et la «demande», figurée par le prélèvement de

l'énergie à la frontière solide/secondaire. Cette analogie illustre bien la relation obtenue entre les variations du flux longitudinal et les gradients transverses aux jonctions entre les fluides et la paroi solide (VI.15). Cette relation est issue de l'intégration d'un bilan d'énergie réalisé sur une portion de longueur infinitésimale  $dz$  de la paroi solide

$$\frac{d}{dz} \int_{\Gamma^s} \frac{\partial T_v^s}{\partial z} dy = \frac{\partial T_v^s}{\partial y} \Big|_{y=-H_s} - \frac{\partial T_v^s}{\partial y} \Big|_{y=H_s}. \quad (\text{VI.15})$$

On peut voir sur la figure Fig. VI.13 que le déséquilibre entre l'énergie quittant le primaire et arrivant dans la vapeur est d'autant plus marqué que le  $Pe^{II}$  est élevé. Cette dépendance au Péclet s'estompe toutefois loin de l'interface, où le rapport des gradients tend vers une valeur indépendante du  $Pe^{II}$ . La figure Fig. VI.14.(a) permet de mieux comprendre la dépendance entre le  $Pe^{II}$  et l'allure des gradients longitudinaux. En effet, on constate que les courbes col-lapsent lorsqu'elles sont portées en fonction de l'inverse du Péclet. On en déduit l'existence d'un échelle caractéristique proportionnelle à  $Pe^{II}$  sur laquelle l'écart des flux primaire/secondaire diminue drastiquement. Cette distance dépend aussi de l'épaisseur de la paroi solide comme mis en avant dans la figure Fig. VI.14.(b). On comprend que plus la paroi est épaisse, plus la de déséquilibre sera étalée. Autrement dit, plus la section de passage est importante, plus les flux primaire/solide et secondaire/solide mettent de temps à atteindre leur valeur asymptotique.

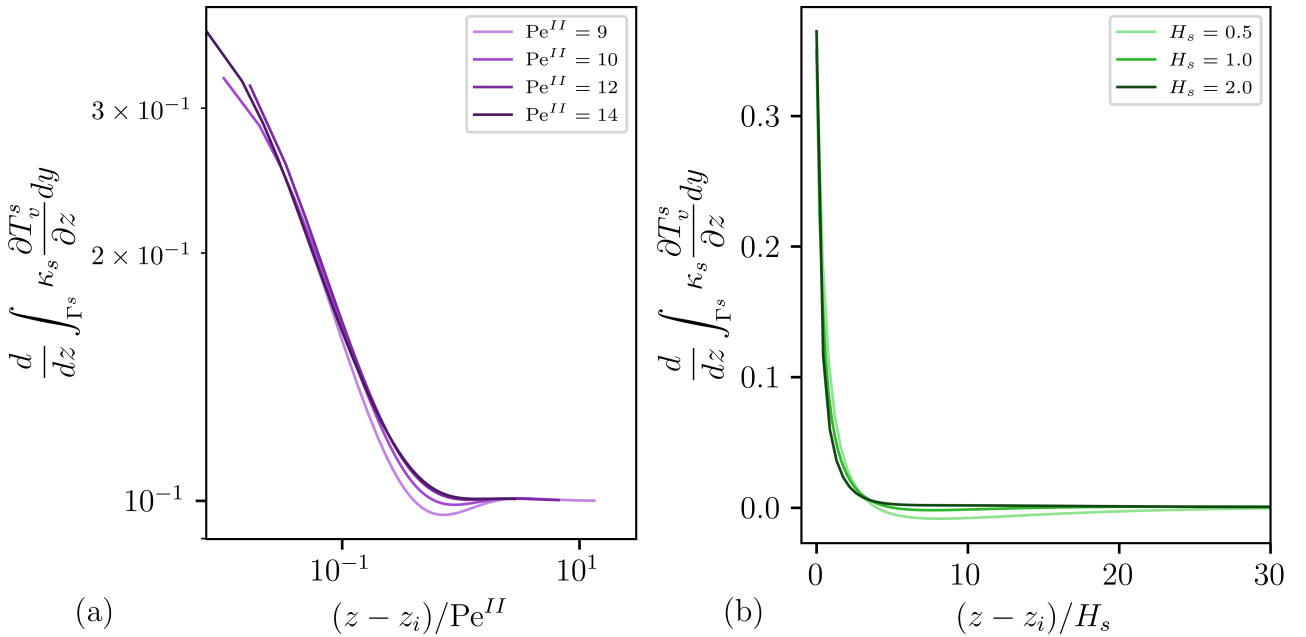


Figure VI.14: Étude paramétrique des flux de conduction thermique en aval du front de vaporisation. En (a), variation intégrée dans la section du gradient longitudinal solide pour différents  $Pe^{II}$  ; en (b), variation intégrée dans la section du gradient longitudinal solide pour différentes épaisseurs de la paroi solide  $H_s$ . (a) a été mesuré sur un écoulement de R134a,  $Pe^I = 16$ ,  $\kappa_s = 13$ ,  $H_s = 1$  et (b) sur un écoulement d'isobutane,  $Pe^{II} = 9$ ,  $Pe^I = 16$ ,  $\kappa_s = 14$

## VI.2 Application au phénomène de mal-distribution de débit dans un échangeur-générateur de vapeur compact co-courant

### 2.a Mise en œuvre de la détermination des plages de sensibilité à l'instabilité de mal-distribution de débit

#### Condition de stabilité dans un échangeur-générateur de vapeur compact

De façon similaire au déroulé du chapitre précédent, l'expression de la position de l'interface (VI.7) est substituée dans le modèle de pertes de charge (VI.16). Il est alors possible de générer les courbes de demande pour un micro-échangeur diphasique co-courant. La forme des pertes de charge induites par l'écoulement diphasique qui circule dans le canal secondaire est identique, à un facteur 4 près, à celle établie précédemment (V.37). En effet, les canaux infinis plans qui constituent l'échangeur n'admettent pas la même relation entre leur diamètre hydraulique et la distance caractéristique choisie (ici la demie hauteur du canal secondaire)  $\tilde{D}_h^{II} = 4\tilde{H}_{II}$  que dans le cas des conduites circulaires. Les pertes de charge associées à l'écoulement secondaire s'écrivent ainsi

$$\Delta P_c = 4\nu\Delta\rho\text{Re}^2 + 16\text{Re}(\Delta\nu z_i + L). \quad (\text{VI.16})$$

Cette fois-ci, la dépendance de  $z_i$  avec les nombres de Stefan et de Péclet, n'est plus linéaire mais tient compte des transferts d'énergie plus complexes se produisant lors la vaporisation dans l'échangeur (VI.7). Il en résulte que la perte de charge dans le générateur de vapeur s'écrit

$$\Delta P_c = 4\nu\Delta\rho\text{Re}^2 + 16\text{Re} \left( \frac{\Delta\nu}{\lambda_1^l} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) + L \right). \quad (\text{VI.17})$$

La condition de stabilité de l'écoulement vis à vis des instabilités de Ledinegg et de sa déclinaison en réseau de canaux parallèles –le phénomène de mal-distribution de débit– reste inchangée dans le cas de l'échangeur-générateur de vapeur. Déterminer la stabilité des points de fonctionnement de l'échangeur équivaut donc à étudier le signe des variations de pertes de charge dans le canal secondaire en fonction du débit injecté (ou de manière équivalente en fonction du  $\text{Re}^{II}$ ) (Cf (V.42)). Par la suite, le système étudié consistera en un réseau formé de N échangeurs élémentaires mis en parallèle. Les variations des pertes de charge dans le canal secondaire du n-ième échangeur peuvent alors se réarranger comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n^{II}} &= 8\nu\Delta\rho\text{Re}_n^{II} + 16 \left( \frac{\Delta\nu}{\lambda_1^l} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) + L \right) \\ &+ 16\text{Re}_n^{II} \Delta\nu \left[ \frac{\partial 1/\lambda_1^l}{\partial \text{Re}_n^{II}} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) + \frac{1}{\lambda_1^l} \frac{\partial}{\partial \text{Re}_n^{II}} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

Comme le nombre de Stefan est indépendant de  $\text{Re}_n^{II}$ ,  $\partial\Theta/\partial\text{Re}_n^{II} = \partial T_\infty^V/\partial\text{Re}_n^{II}$ , en utilisant (VI.3) le terme entre crochet de l'expression précédente se développe en,

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial 1/\lambda_1^l}{\partial \text{Re}_n^{II}} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) + \frac{1}{\lambda_1^l} \frac{\partial}{\partial \text{Re}_n^{II}} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\text{Re}_n^{II}} \frac{1}{\lambda_1^l} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) + \frac{1}{\lambda_1^l} \frac{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c}{\Theta} \left( -\frac{1}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \frac{\partial T_\infty^V}{\partial \text{Re}_n^{II}} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

Où la dérivée de  $T_\infty^V$  est donnée par,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_\infty^V}{\partial \text{Re}_n^{II}} &= \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{Pe}}}{\partial \text{Re}_n^{II}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}_{\text{Pe}}} \left( \frac{\mathcal{R}_{\text{Pe}} T_\infty^{II} + T_\infty^I}{1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}}} \right) \\ &= \frac{1}{\text{Re}^I} \frac{(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}}) T_\infty^{II} - (\mathcal{R}_{\text{Pe}} T_\infty^{II} + T_\infty^I)}{(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}})^2} \\ &= \frac{1}{\text{Re}^I} \frac{T_\infty^{II} - T_\infty^I}{(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}})^2}\end{aligned}\quad (\text{VI.20})$$

Avec l'aide des relations (VI.19) et (VI.20), la pente de la courbe caractéristique (VI.18) peut alors s'écrire,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n^{II}} &= 8\nu \Delta \rho \text{Re}_n^{II} + 16 \left( \frac{\Delta \nu}{\lambda_1^l} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) + L \right) \\ &+ 16 \text{Re}_n^{II} \Delta \nu \left[ \frac{1}{2 \text{Re}_n^{II}} \frac{1}{\lambda_1^l} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) - \frac{1}{\lambda_1^l} \frac{1}{\Theta} \left( \frac{1}{\text{Re}^I} \frac{T_\infty^{II} - T_\infty^I}{(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}})^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{VI.21})$$

D'où,

$$\frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n^{II}} = 8\nu \Delta \rho \text{Re}_n^{II} + 16 \left[ \frac{\Delta \nu}{\lambda_1^l} \left( \frac{3}{2} \ln \left( \frac{\Theta}{x_1^l \langle \theta_1^l \rangle_c} \right) - \frac{\mathcal{R}_{\text{Pe}}}{(1 + \mathcal{R}_{\text{Pe}})^2} \frac{T_\infty^{II} - T_\infty^I}{\Theta} \right) + L \right]\quad (\text{VI.22})$$

La nature transcendante de (VI.22) ne permet pas d'exprimer analytiquement ses zéros. L'étude de son signe est donc menée numériquement, sous Maple. Malgré l'impossibilité de résoudre analytiquement les zéros de (VI.22), il est toutefois possible de s'assurer de leur existence. Pour cela, on se place dans un premier temps, dans l'approximation des faibles Reynolds  $\text{Re}_n^{II} \ll 1$ ,  $\text{Re}_n^{II} \ll \text{Re}^I$ , dans ce cas

$$\frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n^{II}} \sim 16L > 0. \quad (\text{VI.23})$$

Si on considère dans un second temps, le cas où  $\text{Re}_n^{II} \rightarrow \text{Re}_c^{II}$  tel que  $\mathcal{R}_{\text{Pe}} \xrightarrow{\text{Re}_n^{II} \rightarrow \text{Re}_c^{II}} \mathcal{R}_{\text{Pe}}^C < \infty$ , c'est-à-dire que lorsque le Reynolds secondaire tend vers le Reynolds d'apparition de la phase vapeur (potentiellement très grand), le rapport des Péclets tend, lui, vers une valeur finie. Dans ce cas,  $\Theta \rightarrow 0^-$  et

$$\frac{\partial \Delta P_c}{\partial \text{Re}_n^{II}} \sim -16 \frac{\Delta \nu}{\lambda_1^l} \frac{T_\infty^{II} - T_\infty^I}{\Theta} < 0. \quad (\text{VI.24})$$

$\partial \Delta P_c / \partial \text{Re}_n^{II}$  étant continue sur l'intervalle  $[0, \text{Re}_c^{II}]$ , on en déduit l'existence d'au moins un zéro sur cet intervalle.

## Dépendance de la position du front de vaporisation aux paramètres du problèmes

Avant de poursuivre l'étude des conditions de stabilité, il est souhaitable de s'arrêter quelques instants sur la valeur propre du premier mode de Graetz liquide  $\lambda_1^l$ . Celle-ci, en effet, intervient dans l'expression de la position de changement de phase  $z_i$  (VI.7), et par conséquent dans la stabilité de l'écoulement (VI.22). Or ce terme renferme, grâce à la méthode des modes de Graetz généralisés, l'influence des propriétés du fluide mais aussi et surtout de la paroi solide (conductivité thermique, épaisseur). Ces dépendances n'interviennent nulle part ailleurs dans les conditions de stabilités. Si l'on parvient à préciser l'expression de  $\lambda_1^l$  en fonction des paramètres tout juste évoqués, il sera alors possible de prendre en compte l'influence de la paroi solide d'une part, sur la position du front de vaporisation, mais aussi sur la stabilité de l'écoulement. La figure Fig. VI.15 présente le calcul de  $1/\lambda_1^l$  en fonction de quatre paramètres

$Pe^I$ ,  $Pe^{II}$ ,  $\kappa_s$  et  $H_s$ . Pour chacune de ces propriétés, un modèle analytique est comparé au calcul numérique des modes de Graetz généralisés. On obtient ainsi une expression approchée de  $\lambda_1^l$ ,

$$-\frac{1}{\lambda_1^l} = \sqrt{Pe^I Pe^{II}} (1 + \kappa_c/\kappa_s) (0.051H_s + 0.765). \quad (\text{VI.25})$$

Dans cette expression, la dépendance de  $\lambda_1^l$  aux propriétés des écoulements secondaire et primaire est d'une part, symétrique puisqu'elle dépend du produit des nombres de Péclet. D'autre part, (VI.25) fait apparaître une sorte de « Péclet équivalent » qui n'est autre que la moyenne géométrique des nombres de Péclet (Cf Fig. VI.15.(a)). Les variations de  $\lambda_1^l$  associées à une modification de la conductivité de la paroi font elles ressortir un effet de seuil, voir Fig. VI.15.(b). Effectivement, passée une certaine valeur critique de la conductivité thermique  $\kappa_c = 1.2$ , la première valeur propre devient indépendante de la conductivité. Cette tendance respecte la thermique puisque si le rapport de conductivité fluide/solide tend vers zéro, les transferts sont alors limités par les fluides et le solide sera quasi-isotherme n'influençant pas les transferts. *A contrario*,  $1/|\lambda_1^l|$  croît considérablement lorsque la conductivité de la paroi tend vers 0. Cette tendance indique que la position de l'interface de changement de phase (VI.7) – inversement proportionnelle à  $\lambda_1^l$  – recule vers l'aval avec la dégradation des qualités thermiques de la paroi solide. Finalement, la figure Fig. VI.15.(c) montre une croissance linéaire de  $1/\lambda_1^l$  en fonction de l'épaisseur de la paroi solide. La corrélation de  $\lambda_1^l$  à l'épaisseur solide  $H_s$  se traduit visiblement par des variations de moindre ampleur que les paramètres précédents. La tendance qui découle de cette relation montre à nouveau que l'augmentation de la résistance thermique – par l'épaississement de la paroi par exemple – entre les canaux secondaire et primaire repousse l'interface liquide/vapeur en diminuant la valeur de  $|\lambda_1^l|$ .

## 2.b Exploitation du modèle de stabilité

### Construction et interprétation des cartes de stabilité

Lors de la construction des cartes de stabilité dans le cas mono-canal, l'apparition de la phase vapeur était une condition *sine qua non* à l'apparition d'instabilité de Ledinegg. Il en est évidemment de même pour la configuration échangeur. Ainsi, pour assurer la génération de vapeur dans un échangeur de longueur  $L$ , il faut imposer que  $z_i(\text{Re}_n^{II}) \leq L$ . Cette condition revient à imposer une première contrainte sur le Reynolds secondaire,

$$\text{Re}_n^{II} < \text{Re}_{sup}^{II}. \quad (\text{VI.26})$$

Où  $\text{Re}_{sup}^{II}$  est déterminé numériquement en résolvant l'équation  $z_i(\text{Re}_{sup}^{II}) = L$ . Additionnellement au déclenchement de la vaporisation, la stabilité de l'écoulement est conditionnée par la positivité de (VI.22), ou encore par la position de ses zéros. Une étude numérique permet d'ailleurs de montrer qu'il n'existe qu'un unique zéro dans la gamme de Reynolds associée aux écoulements diphasiques, noté  $\text{Re}_{inf}^{II}$ . Sachant que  $\Delta P_c$  est croissante pour les faibles débits (VI.23) et décroissante vers  $\text{Re}_c^{II}$  (VI.24), on en conclut que  $\Delta P_c$  est une fonction décroissante de  $\text{Re}_n^{II}$  ssi  $\text{Re}_n^{II} > \text{Re}_{inf}^{II}$ . L'existence d'une plage instable est donc liée au respect de la condition

$$\text{Re}_{inf}^{II} < \text{Re}_n^{II} < \text{Re}_{sup}^{II}. \quad (\text{VI.27})$$

La figure Fig. VI.16 montre l'évolution de ces deux bornes dans le plan  $(\tilde{G}_{II}, \tilde{G}_I \tilde{c}_{pl} \Delta \tilde{T}_h)$ . L'ordonnée  $\tilde{G}_I \tilde{c}_{pl} \Delta \tilde{T}_h$  représente la densité surfacique d'énergie entrant dans le primaire. Dans le cas des micro-canaux, l'aire de la section de passage est typiquement de l'ordre de  $10^{-6} - 10^{-8} \text{m}^2$ , ce qui implique des densités surfaciques d'énergie de l'ordre de  $10^7 - 10^1 \text{0W.m}^{-2}$ . Sur ce graphique la région instable est signalisée par une zone colorée, celle-ci est bornée par les deux

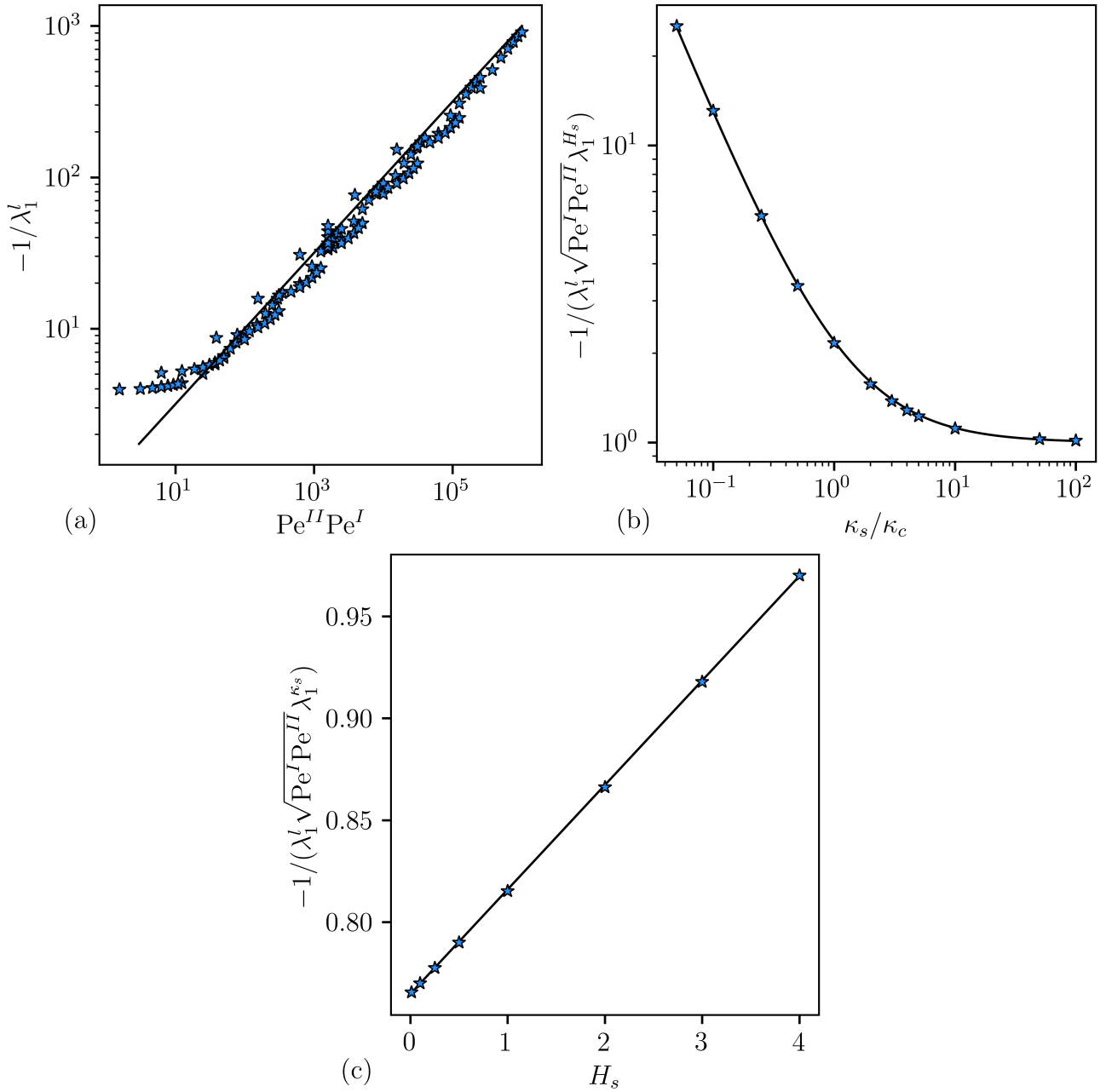


Figure VI.15: Dépendance de  $1/\lambda_1^l$  dans un échangeur co-courant aux (a)  $Pe^I$  et  $Pe^{II}$ , (b) à la conductivité thermique de la paroi solide et (c) à l'épaisseur de la paroi solide. Écoulement d'eau. Les symboles indiquent les valeurs issues de la décomposition en modes de Graetz généralisés et les courbes pleines les modèles proposés. Modèle : en (a)  $Cte\sqrt{Pe^I Pe^{II}}$ , en (b)  $1 + \kappa_c/\kappa_s$  et en (c)  $0.051H_s + 0.765$ .



courbes d'équations respectives  $Re_n^{II} = Re_{inf}^{II}$  (tirets courts) et  $Re_n^{II} = Re_{sup}^{II}$  (tirets longs). Cette carte a été réalisée en maintenant le débit primaire et la température d'entrée secondaire constants, les variations de l'ordonnée sont donc liées aux variations de la température du primaire. Les pertes de charge ont été calculées pour trois niveaux de température (repérés par les flèches A, B et C). Les niveaux B et C intersectent chacun la zone instable sur une gamme de débits indiquée sur les courbes de droite par des symboles colorés, voir Fig. VI.16. On remarque que ces débits instables correspondent bien à une portion décroissante de la courbe de demande. Le point A, quant à lui, ne fait que tangenter la zone instable. Cela se traduit sur la courbe de demande par l'absence de zone décroissante des pertes de charge. La topographie de la zone instable montre l'intérêt de travailler à des hauts niveaux de surchauffe (supérieurs au point A) pour éviter totalement la zone instable, ou de se restreindre à des écoulements munis d'un grand domaine vapeur (limite gauche du plan).

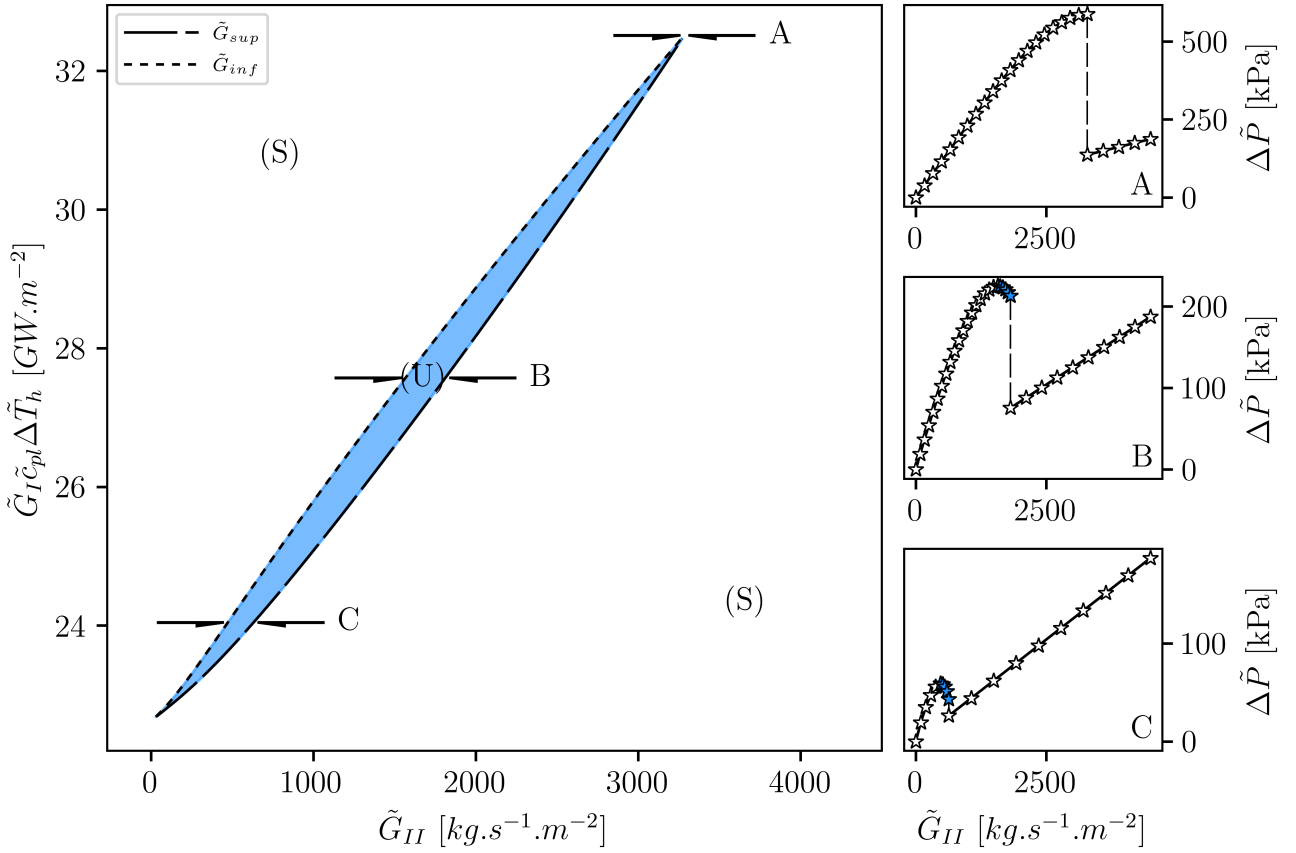


Figure VI.16: Carte des zones instables dans un échangeur-générateur de vapeur co-courant, établie pour un débit primaire constant. La région du plan sensible à l'instabilité de Ledinegg a été coloriée et estampillée 'Unstable'. Trois courbes de demande ont été tracées dans les conditions indiquées par les points A, B et C. La gamme des débits instables y est repérée par des symboles colorés. Écoulement d'eau,  $Pe^I = 5000$ ,  $\kappa_s = 17$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$

Les figures Fig. VI.17.(a-b) établissent le lien entre les différentes régions du plan ( $\tilde{G}_{II}$ ,  $\tilde{G}_{I\tilde{c}_{pi}}\Delta\tilde{T}_h$ ), la forme de la courbe de demande et le régime d'écoulement dans le canal secondaire. Pour un niveau de surchauffe choisi, matérialisé sur la Fig. VI.17.(a) par une ligne horizontale noire, trois points A, B et C ont été placés correspondant à trois niveaux distincts de débit secondaire. Le point A est situé dans la zone stable, il correspond à un faible niveau de débit secondaire et est très en amont de la frontière d'apparition du changement de phase (courbe à tirets longs). Ce point est donc associé à un front de changement de phase proche de l'entrée de l'échangeur, environ 20% de la longueur de l'échangeur (Cf vignette A). La majeure partie du canal secondaire

étant occupée par de la vapeur, les pertes de charge totales sont proches de celles générées par un écoulement monophasique vapeur, caractérisées par une croissance linéaire de pente  $32\tilde{\nu}_v\tilde{L}/\tilde{D}_h^2$  (voir courbe grise en pointillée). Le point C, à l'antipode du point A, est lui aussi inclus dans la zone stable mais cette fois-ci pour une gamme de débits secondaires bien plus importants. L'écoulement y est alors purement liquide, l'énergie convectée par le primaire étant trop faible pour assurer l'évaporation d'un tel niveau de débit. Cela se reflète très clairement sur la courbe de perte de charge, qui épouse le même comportement qu'un écoulement purement liquide (croissance linéaire de pente  $32\tilde{\nu}_l\tilde{L}/\tilde{D}_h^2$ ) une fois passé  $\tilde{G}_{II} \sim 1700$ . Le point B est, quant à lui, placé dans la région diphasique, en plein centre de la zone instable. La proximité du point B avec la courbe d'apparition de phase vapeur reflète un écoulement muni d'un long domaine liquide (Cf vignette B). Il occupe sur la courbe de demande une position intermédiaire entre les pertes de charge purement liquide et purement vapeur qui s'accompagne d'une portion décroissante de la courbe de demande. C'est bien de cette même famille d'écoulement, transitionnant de pertes de charge dominées par le terme vapeur vers des pertes de charge dominées par le terme liquide, qu'était constituée la zone instable des écoulements en mono-canaux.

### Influence des paramètres thermohydrauliques sur la plage instable

Alors que le paragraphe précédent a traité de la construction et de l'interprétation des cartes de stabilités d'un réseau d'échangeurs, on cherche maintenant à déterminer l'effet de paramètres, tels que les propriétés physiques des fluides, les dimensions de l'échangeur ou les caractéristiques de la paroi solide, sur la forme de la zone instable. Les figures Fig. VI.18.(a-c) permettent de comparer les plages de stabilité obtenues pour différents fluides et établies dans les mêmes conditions. On constate que l'utilisation de tel ou tel fluide modifie en profondeur, à la fois la forme mais aussi l'« étalement » de la zone instable. A titre d'exemple, la région instable de l'eau (Cf Fig. VI.18.(a)) occupe une gamme de température  $\sim 900$  fois plus importante et un intervalle de débit  $\sim 17$  fois plus large que l'hélium, voir Fig. VI.18.(c). Les propriétés des fluides influent également sur l'« orientation » de la zone instable, ces dernières semblant légèrement « pivoter » autour de l'origine. Cette orientation se manifeste par des ratios hauteur/largeur très différents en fonction des fluides, passant de 0.3 pour le R134a à 0.5 pour l'isobutane (Cf Fig. VI.18.(b)) ou encore  $1.7MJ.kg^{-1}$  pour l'ammoniaque. Globalement, la zone instable d'un réseau d'échangeur couvre une gamme de débit plus vaste que celle associée à un réseau de micro-canaux, néanmoins, leur épaisseur reste grossièrement du même ordre, avec, à titre indicatif, une épaisseur de  $\sim 300-400kg.s^{-1}.m^{-2}$  pour l'eau, voir Fig. V.15.(a) et Fig. VI.18.(a). Pour visualiser l'impact des propriétés des fluides sur l'allure des courbes de demandes, celles-ci ont été tracées sur les figures Fig. VI.19.(a-c). Les courbes de demande ont été générées pour chaque fluide en se plaçant à mi-hauteur de leur zone instable, *i.e.* pour une densité surfacique d'énergie médiane,  $\sim 28GW.m^{-2}$  pour l'eau par exemple. Tout comme dans les mono-canaux, la diversité des propriétés physiques des fluides considérés est à l'origine d'une grande variété de courbes de demande (Cf la description réalisée en section 2.b). C'est cette variété de propriétés fluides qui induit également un large éventail de pentes dans la zone instable, avec notamment des pentes très marquées pour l'ammoniaque, le R134a ou l'hélium, *a contrario* de l'eau et l'isobutane. Si l'intensité du gradient de pression ne joue pas sur la stabilité de l'écoulement, elle joue, en revanche, sur la cinétique de l'instabilité, forçant une excursion bien plus lente pour l'eau et l'isobutane que pour les autres fluides par exemple.

La forme des courbes de demande donne aussi des informations sur l'intensité des déséquilibres de débits engendrés par l'instabilité de Ledinegg, voir Fig. VI.20. De façon plus détaillée, lorsque le niveau de pertes de charge est imposé par le système  $\tilde{P}_{in} - \tilde{P}_{out} = Cte$ , les points d'équilibres vers lesquels peuvent tendre les écoulements instables sont déterminés par

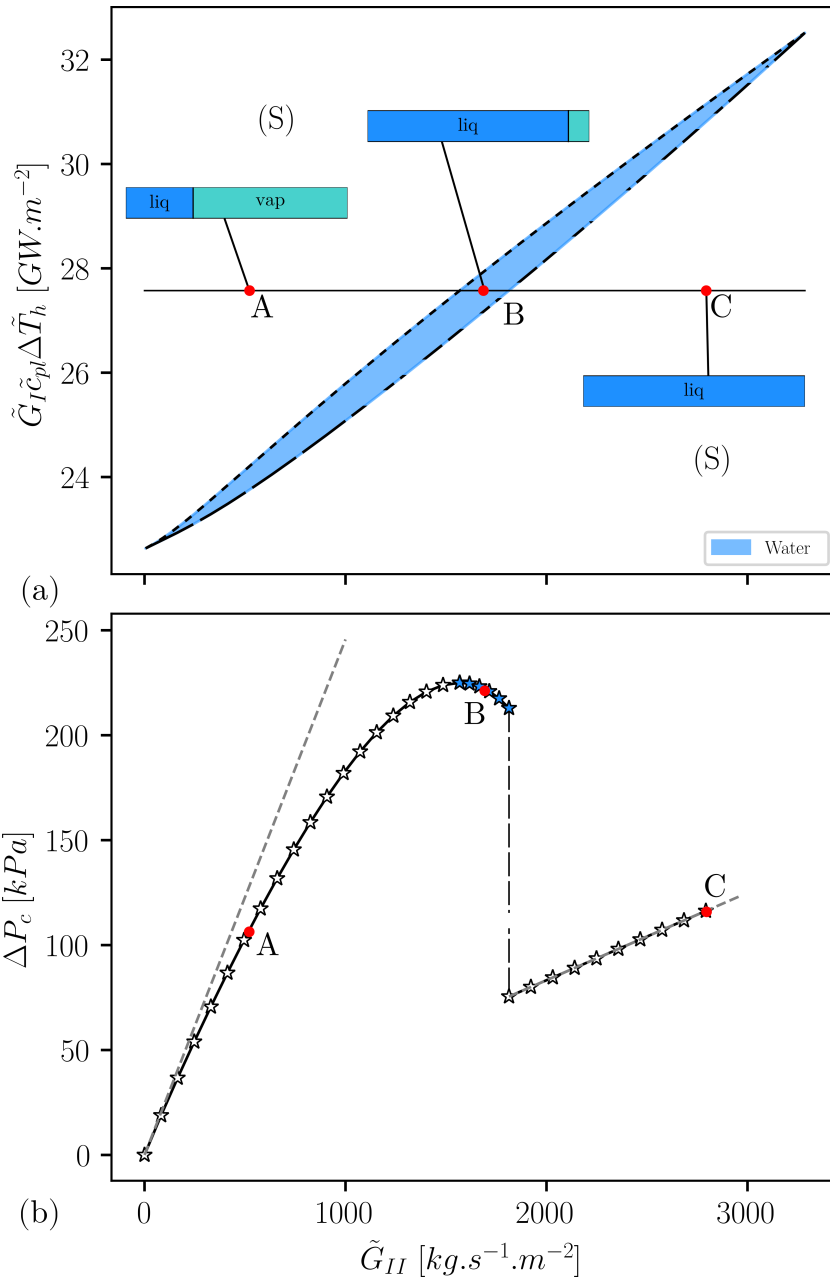


Figure VI.17: Plage de stabilité dans un évaporateur co-courant en (a) ; la configuration de l'écoulement dans le canal secondaire est illustrée en trois points (A, B et C) pour un débit primaire et des températures d'entrée constantes. Sur la figure (b), évolution des pertes de charge dans les mêmes conditions que les points A, B et C. Écoulement d'eau,  $Pe^I = 5000$ ,  $\kappa_s = 17$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$

l'intersection entre la droite horizontale d'équation  $\Delta \tilde{P}_c = \tilde{P}_{in} - \tilde{P}_{out}$  et la courbe de demande. On peut voir que ces intersections sont plus ou moins éloignées l'une de l'autre en fonction des fluides, ce qui permet de prédire la sévérité des hétérogénéités de débits entre les canaux. Cette sensibilité aux caractéristiques thermo-hydrauliques des fluides est particulièrement notable sur la figure Fig. VI.20. Les courbes de demande d'un écoulement d'isobutane et de R134a ont été évaluées dans les mêmes conditions que la figure Fig. VI.19. Pour chaque fluide, un niveau de pression imposé aux bornes du système est représenté par le biais d'une courbe de couleur horizontale tiretée. Les points d'équilibre correspondant sont indiqués –s'ils sont instables– par une croix rouge et –s'ils sont stables– par des ronds rouges. Le report des points d'équilibres stables sous la forme d'un intervalle sur l'axe des abscisses permet de se rendre compte de la

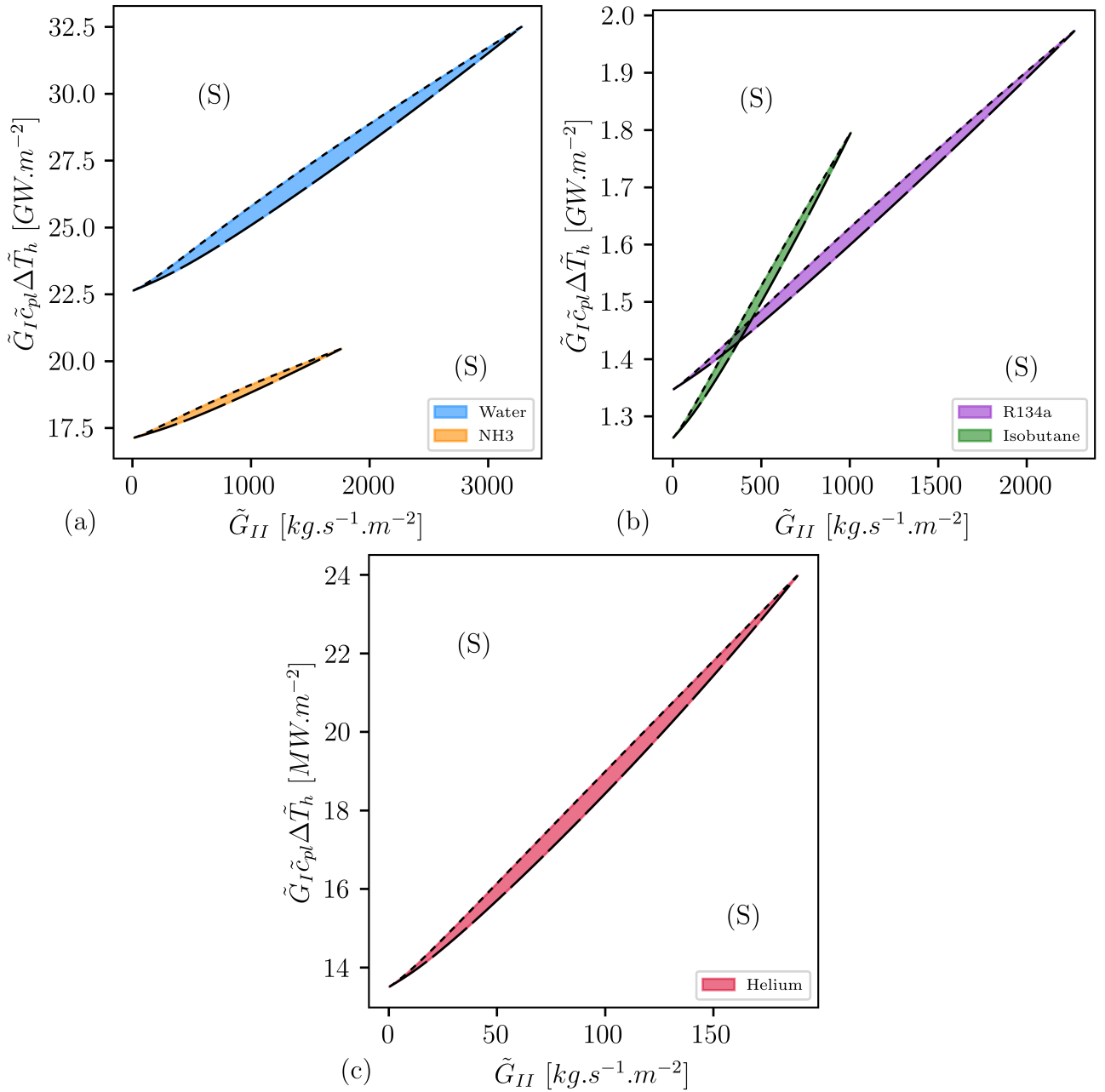


Figure VI.18: Cartes de stabilité établies pour différents fluides.  $Pe^I = 5000$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$ ,  $\tilde{k}_s = 10W.m^{-1}.K^{-1}$

grande disparité de débit qui peut découler d'une excursion de débit. Ces intervalles dépendent bien entendu des propriétés fluides mais aussi des températures d'entrée, ainsi on observe près d'un rapport deux entre l'intervalle du R134a et celui de l'isobutane.

Les figures Fig. VI.21.(a-b) et Fig. VI.22.(a-b) regroupent les déformations engendrées par la variation de la conductivité thermique de la paroi solide, de son épaisseur, du  $Pe^I$  et enfin de la longueur de l'échangeur, sur la plage de stabilité d'un réseau parallèle d'échangeurs co-courant. Les transformations de la zone de stabilité ont été compilées pour trois matériaux : du verre, du titane et du cuivre de conductivités adimensionnées respectives  $\kappa_s = 2, 17$  et  $633$ , voir Fig. VI.21.(a). Tandis que les plages associées au titane et au cuivre sont relativement identiques, la zone d'instabilité associée à des parois en verre a considérablement grossi et c'est déplacée vers les faibles débits. Il faut se rappeler, que les effets de la conductivité de la paroi

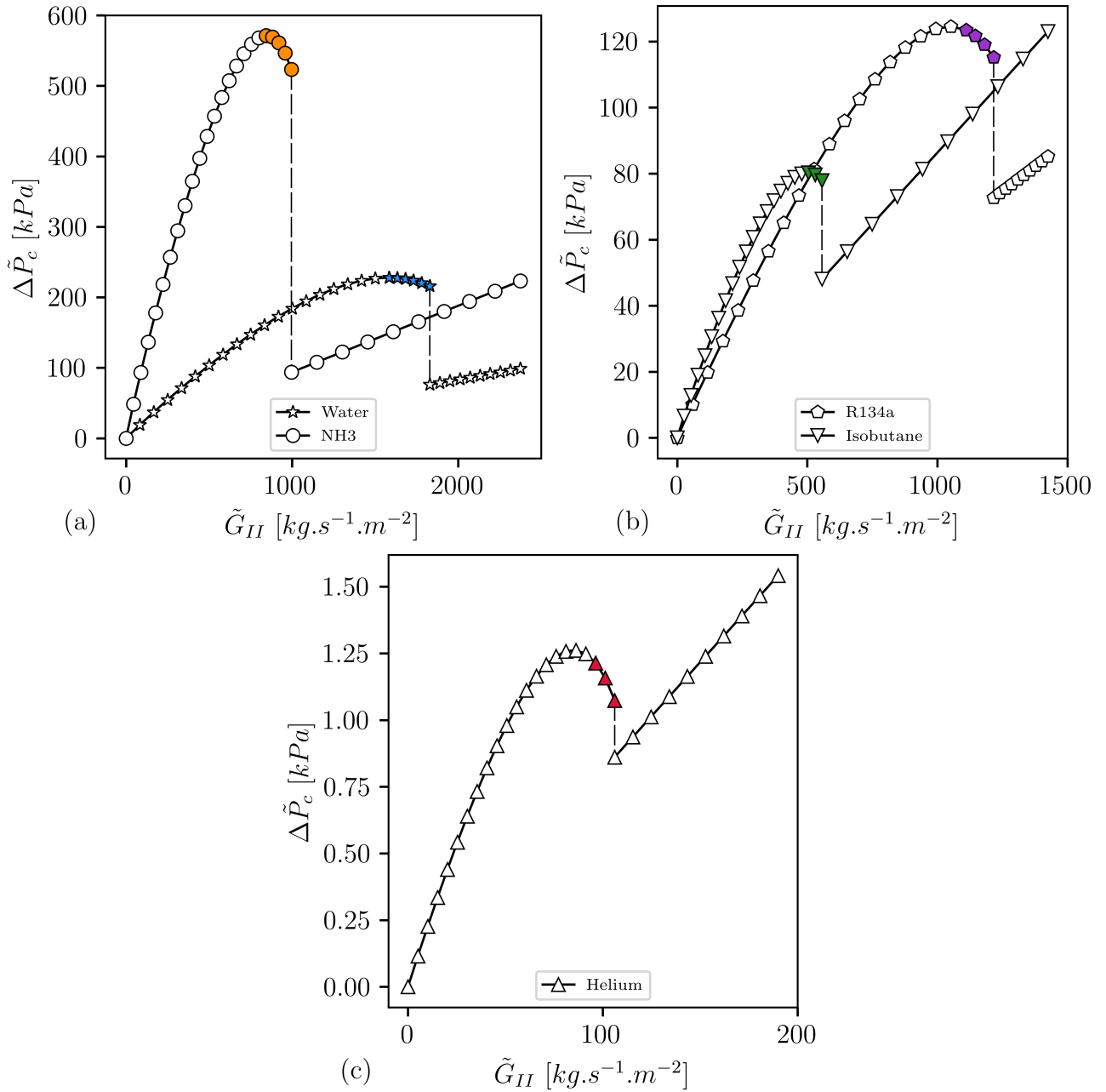


Figure VI.19: Pertes de charges générées par l'écoulement du canal secondaire pour différents fluides.  $Pe^I = 5000$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$ ,  $\tilde{k}_s = 10W \cdot m - 1 \cdot K^{-1}$

interviennent via l'expression de  $\lambda_1^l$ , établie en (VI.25). L'effet de seuil qui y est observé pour les parois très conductrices  $-\kappa_s \gg \kappa_c = 1.2$  explique la similitude des plages obtenues pour des parois en titane et en cuivre. En ce qui concerne le verre, son caractère thermiquement isolant le différencie des deux autres matériaux, comme en témoigne le déplacement de la limite d'apparition de changement de phase vers les plus faibles débits. En effet, l'utilisation d'une paroi isolante, en dégradant les échanges thermiques, requiert une plus grande température primaire pour permettre la vaporisation du fluide secondaire dans la longueur de l'échangeur. Il semble, en outre, que l'isolation thermique de la paroi conduit à un épaissement de la zone instable. En analysant la forme de (VI.24), on voit effectivement, que si  $1/|\lambda_1^l|$  augmente –ce qui est le cas si  $\kappa_s$  diminue– alors le facteur devant le terme négatif augmente lui aussi, diminuant par la même occasion la position du zéro, c'est-à-dire déplaçant vers la gauche la frontière  $Re_n^{II} = Re_{inf}^{II}$  (Cf courbe en pointillés courts sur le graphe Fig. VI.21.(a)), d'où l'extension de la zone instable. L'influence de l'épaisseur de la paroi solide est étudiée dans la

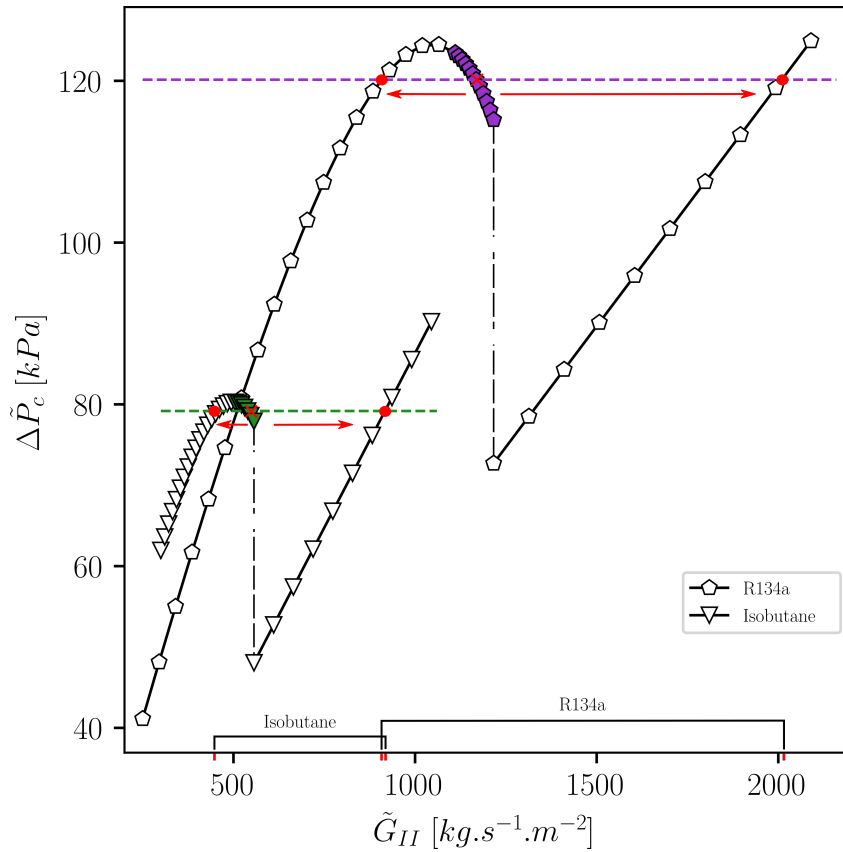


Figure VI.20: Effet du fluide sur la sévérité de l’instabilité de Ledinegg. Le point d’équilibre instable est marqué par une croix rouge, tandis que les points d’équilibres stables sont indiqués par des points rouges. Les lignes tiretées colorées font figurer le niveau de pression imposé pour chaque fluide. Les intervalles adjoints à l’axe des abscisses indiquent l’écart de densité surfacique de flux massique maximal généré par des excursions de débit.  $Pe^I = 5000$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$ ,  $\tilde{k}_s = 10W.m^{-1}.K^{-1}$

figure Fig. VI.21.(b), où sont superposées les plages de stabilités générées pour trois épaisseurs différentes. Contrairement à la conductivité thermique qui peut provoquer de grandes variations de  $\lambda_1^l$ , l’effet de l’épaisseur de la paroi est bien plus discret, ce qui se ressent également sur les plages de stabilité. Plus exactement, on remarque que l’augmentation de l’épaisseur solide élargie la zone instable et la dévie légèrement vers les faibles débits. Mathématiquement, l’épaississement de la paroi solide augmente, elle aussi,  $1/|\lambda_1^l|$  et a donc les mêmes effets sur la stabilité de l’écoulement que la diminution de la conductivité thermique de la paroi.

La figure Fig. VI.22.(a)) mesure, quant à elle, l’impact du Péclet primaire sur la délimitation de la zone instable. Cette dernière montre que la région instable se réduit drastiquement lorsque le Péclet primaire augmente. On notera que dans ce cas bien particulier,  $\tilde{G}_I$  varie. Finalement, la figure Fig. VI.22.(b) évalue l’incidence de la longueur de l’échangeur sur la forme de la zone instable. Celle-ci démontre que l’utilisation de longs canaux induit un étalement conséquent de la zone instable. S’il est compliqué de conclure quant à l’effet de  $L$  sur la limite occidentale de la zone de stabilité, il est en revanche possible d’interpréter son effet sur la frontière orientale. A titre d’exemple, considérons, pour des conditions d’entrée données, les variations de  $z_i$  dans un échangeur de longueur infinie, voir Fig. VI.9. Dans ce cas, raccourcir la longueur  $L$  de l’échangeur revient à amputer progressivement la région de la courbe de  $z_i(Pe^{II})$  la plus proche du Péclet critique. Autrement dit, à un niveau de température primaire donné, plus l’échangeur sera court, plus le régime dominé vapeur (où se trouvent les points d’équilibres instables)

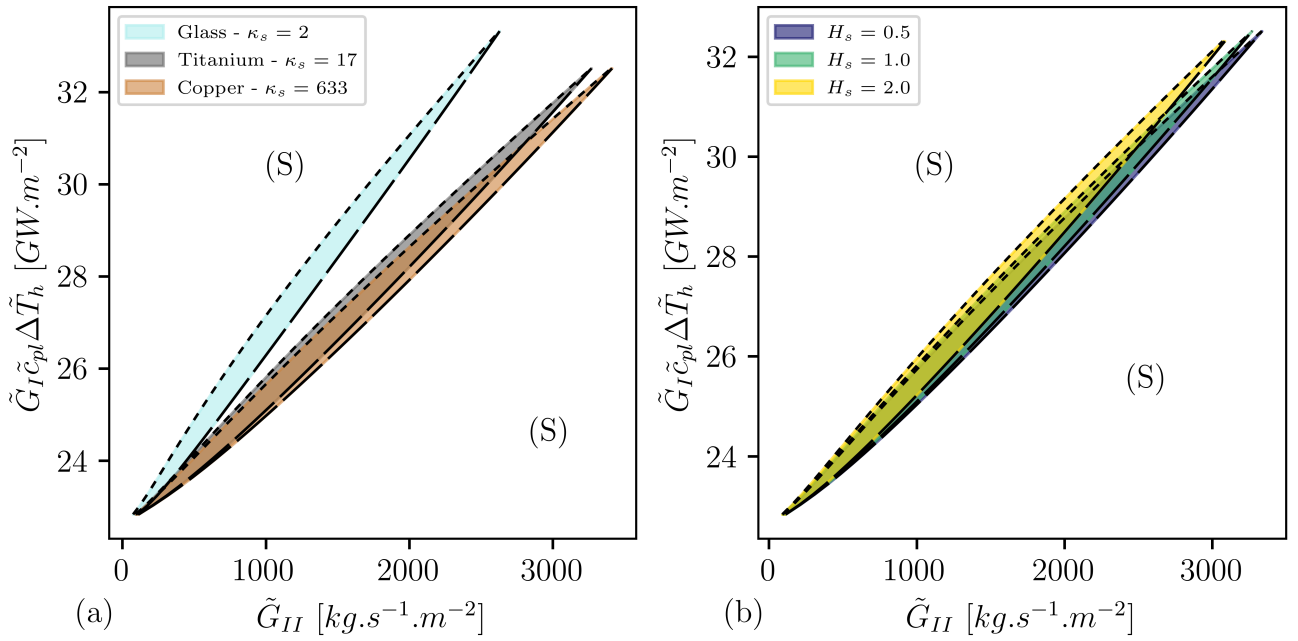


Figure VI.21: Dépendance des cartes de stabilité aux matériaux de la paroi solide (a), à l'épaisseur des parois (b). Configuration par défaut : Écoulement d'eau,  $Pe^I = 5000$ ,  $\kappa_s = 17$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$ ,  $\tilde{k}_s = 10W.m^{-1}.K^{-1}$

deviendra peu ou pas accessible. D'un certain point de vue, l'atteinte du régime dominé vapeur nécessiterait une longueur d'échange supplémentaire pour permettre la vaporisation.

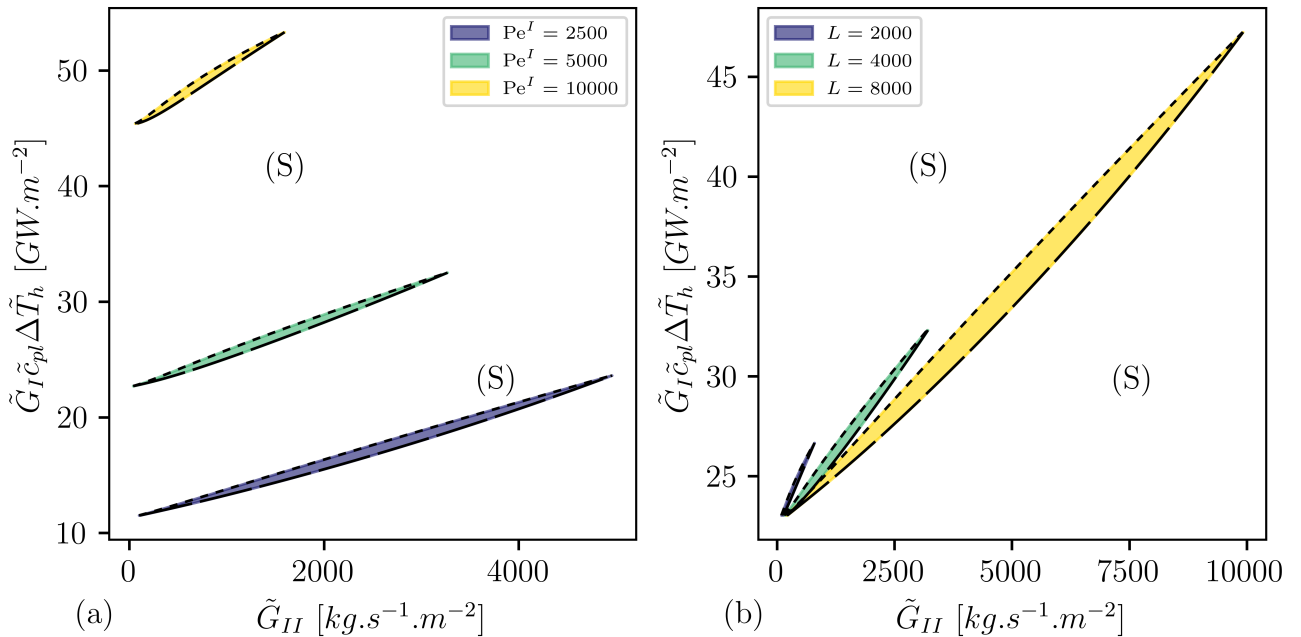


Figure VI.22: Dépendance des cartes de stabilité au Péclet primaire d'entrée (a) et à la longueur de l'échangeur (b). Configuration par défaut : Écoulement d'eau,  $Pe^I = 5000$ ,  $\kappa_s = 17$ ,  $\tilde{D}_h = 0.1mm$ ,  $\tilde{L} = 0.1m$

## Synthèse

Le modèle de vaporisation en écoulement confiné proposé a été appliqué avec succès à un échangeur co-courant élémentaire générateur de vapeur. L'analyse des champs de tempéra-



tures et des transferts thermiques issus de ce modèle ont abouti d'une part à l'identification de trois régimes de fonctionnement dans un échangeur co-courant et d'autre part la détermination d'une expression reliant la position de l'interface de changement de phase avec les paramètres physiques du modèle. L'expression analytique de  $z_i$  a permis de déterminer, grâce à la formulation de la pente de la courbe de demande, les conditions de stabilité associées à l'instabilité de Ledinegg d'un réseau d'échangeurs élémentaires parallèles à pression imposée. L'exploitation de ces résultats a mis en évidence la dépendance de la plage de stabilité aux propriétés des fluides et la réduction de la zone instable : en augmentant la conductivité thermique de la paroi solide, en accroissant le nombre de Péclet primaire ou en diminuant la longueur de l'échangeur.

## 2.c Discussion du modèle d'évaporation et de la méthode numérique

Cette section a été rédigée dans l'optique de recontextualiser l'utilisation du modèle d'évaporation et de sa méthode de résolution. Ce sera également l'occasion de discuter des limitations pratiques et techniques de la méthodologie qui a été développée.

### Limitations du modèle

Les résultats établis à partir du modèle d'évaporation en milieu confiné et de l'utilisation de la méthode des modes de Graetz généralisés reposent sur un certain nombre d'hypothèses. Celles-ci concernent principalement la structure de l'écoulement diphasique (régime d'écoulement diphasique), le processus de changement de phase, mais aussi les propriétés intrinsèques des fluides, comme leur dépendance à la température et à la pression. En particulier, la focalisation du processus de changement de phase en une interface d'épaisseur infinitésimale est évidemment idéalisée. Mais comme discuté précédemment, l'effet de la courbure de l'interface sur les pertes de charge liquide ou gaz sont faibles, et on peut penser que cette hypothèse n'aura pas un gros impact sur le diagramme de stabilité. Cette affirmation ne peut être étendue aux mesures locales. Ainsi la réduction de la zone diphasique en une interface est à l'origine d'une réduction de la portion décroissante de la courbe de demande et de l'apparition d'une discontinuité. Le fait que les plages de stabilité calculées dans les chapitres V et VI se basent sur des comportements locaux des courbes de demande font penser que les résultats sous-estiment très certainement l'étendue de la zone instable pour les débits proches de l'apparition de la phase vapeur.

La surchauffe du liquide en amont de l'interface de changement de phase peut également être questionnée, en effet ce niveau de surchauffe qui a déjà été discuté au chapitre V provient d'un effet conjugué de la focalisation du changement de phase et du placement de l'interface. Des surchauffes de l'ordre de quelques unités à quelques dizaines de Kelvin restent physiquement acceptables et réalistes. Cependant, les niveaux de surchauffe liquide sont bien supérieurs pour certains fluides caractérisés par une grande chaleur latente (en particulier l'eau). Cette surchauffe n'impacte pas les résultats obtenus pour les micro-canaux chauffés, mais ce n'est pas le cas pour l'échangeur générateur de vapeur. Pour ce dernier cas, la surchauffe du liquide impose un niveau de température minimal au circuit primaire, généralement supérieur aux températures d'usage. Ces niveaux de température intensifient les échanges à l'entrée de l'échangeur par rapport au cas réel dans lequel une zone diphasique existe forcément.

Il est aussi intéressant de noter que les interactions entre la paroi et l'écoulement diphasique sont affectées par l'introduction d'un changement de phase ponctuel. En effet, le front de vaporisation ne possède, par définition, pas de surface d'échange avec la paroi solide (la relation de saut ne fait d'ailleurs pas intervenir un potentiel flux provenant de la paroi), or nous avons



pu constater que le solide joue un rôle important dans les transferts thermiques, en particulier au voisinage de l'interface. On peut imaginer que les flux thermiques prédits par notre modèle dans la paroi solide puissent être affectés par l'existence d'une "épaisseur" de la zone diphasique.

Un autre élément d'incertitude sur les frontières des plages de stabilités concerne la prise en compte du couplage thermique dans les réseaux. Effectivement, lors de l'établissement des plages de stabilité, les réseaux étudiés sont composés de canaux ou d'échangeurs élémentaires mis en série. Ceux-ci communiquent bien les uns avec les autres par le biais de l'écoulement fluide mais sont isolés thermiquement de leurs voisins. Or les travaux de Miglani *et al.* et Oevelen *et al.* [1, 2] ont montré que le couplage thermique dans des configuration type *heat-sink* d'une part diminue la taille de la zone instable et d'autre part réduit l'intensité des hétérogénéités de débits. Les résultats obtenus précédemment seraient donc conservatifs de ce point de vue.

### Limitations numériques

A plusieurs reprises, des comportements ont été observés et des lois validées sur des gammes de Péclet limitée (généralement  $<100$ ) ; ces derniers ont ensuite été étendus et appliqués en dehors de cette gamme. En effet, l'application des résultats sur les plages de Péclet couramment observées (de l'ordre du millier voire la dizaine de millier) est inaccessible numériquement et nécessite de passer systématiquement par un prolongement asymptotique des résultats numériques. Pour comprendre l'origine de ces difficultés numériques, il faut comprendre que la couche limite interfaciale assure la jonction entre le pic de température de la phase liquide et l'interface, à température de saturation. Or, cette couche limite est d'autant plus mince que le Péclet incident est grand. Cela signifie qu'au fur et à mesure que le Péclet liquide augmente, le gradient de température interfaciale diverge (ce gradient est proportionnel au Péclet liquide). Le champ de température dans la couche limite se rapproche donc très rapidement d'une marche en température. Capturer numériquement une telle discontinuité requiert l'utilisation de modes dits 'amonts' d'ordre élevé. La construction de tels modes devient inaccessible dans des temps et pour des puissances de calculs acceptables et disponibles. L'absence de ces modes de haut ordre, se traduit notamment par la détérioration de la conservation de l'énergie entre le domaine liquide et vapeur et vient donc entacher d'erreurs le positionnement de l'interface et l'évaluation des flux transmis. En outre, on peut noter la sensibilité du positionnement de l'interface aux choix de certains paramètres numériques lorsque l'échangeur atteint le régime dominé vapeur. Dans ce régime, le niveau d'énergie restant dans le primaire après l'évaporation du fluide secondaire devient très faible. Lorsque ce niveau devient du même ordre que la précision du bilan d'énergie atteint pour un ordre de la méthode donné, l'incertitude sur la position de l'interface augmente, rendant difficile l'évaluation des points de fonctionnement dans ce régime. C'est pourquoi nous avons toujours veillé à produire des résultats numériques pour lesquels la gamme des Péclets étudiée était compatible avec le nombre de modes retenu dans les calculs. Le bilan d'énergie a aussi été vérifié et validé pour les simulations à plus hauts Péclets.

# Références

- [1] Ankur Miglani, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “An experimental investigation of the effect of thermal coupling between parallel microchannels undergoing boiling on the Ledinegg instability-induced flow maldistribution”. In: *International Journal of Multiphase Flow* 139 (June 1, 2021), p. 103536. ISSN: 0301-9322. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103536](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103536). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932220306479>.
- [2] Tijs Van Oevelen, Justin A. Weibel, and Suresh V. Garimella. “The effect of lateral thermal coupling between parallel microchannels on two-phase flow distribution”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 124 (Sept. 1, 2018), pp. 769–781. ISSN: 0017-9310. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.073](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.073). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017356272>.

# Conclusion

**Contexte** Pour répondre aux enjeux de décarbonation de la production électrique, de nombreux projets de réacteurs nucléaires en rupture sont à l'étude ou en développement. Ainsi, les SMR développent des architectures compactes permettant d'accélérer les temps de construction. La puissance réduite de ces réacteurs (inférieure à 300 MWe) permettra de remplacer des centrales à combustible fossile ou, dans certains cas, d'alimenter d'autres usages tels que la production de chaleur. Dans ce cadre un projet de SMR français, NUWARD, développe un générateur de vapeur en rupture avec les technologies usuellement utilisées dans le parc nucléaire. Ce nouveau GV, constitué de plaques, se distingue par sa grande compacité et sa capacité à vaporiser le fluide en une seule passe. Son design s'appuie conjointement sur la réduction des sections de passage fluide – avec l'utilisation de canaux millimétriques – et la multiplication de ces canaux – de l'ordre de  $10^4$  canaux. Ces caractéristiques innovantes pour équiper une centrale nucléaire sont toutefois sources de questionnements et nécessitent d'approfondir plusieurs aspects tels que les performances et la présence d'instabilités thermo-hydrauliques. L'état de l'art a effectivement montré qu'une variété d'instabilités pouvait prendre place dans le GV, conduisant à une possible altération de son efficacité, voire, sa durée de vie.

**Objectifs** Les travaux menés dans cette thèse se sont plus spécialement tournés vers l'étude de l'instabilité de Ledinegg dans des canaux simples ou en réseau. Bien que cette instabilité soit déjà bien connue dans les canaux à flux imposé, le couplage des effets hydrauliques avec les transferts thermiques a cependant peu été considérée auparavant. Par ailleurs, il existe peu de modèles qui prennent en compte les spécificités de l'évaporation convective en milieux confinés. Dans les échangeurs thermiques, la connaissance de ces phénomènes instables se réduit plus encore et semble se limiter à leur observation sur quelques prototypes. Le cœur des travaux de cette thèse s'articule ainsi autour du développement d'un modèle 'simplifié' **d'évaporation convective en milieux confinés** afin de permettre **l'étude de la stabilité des échangeurs-générateurs de vapeur tenant compte des couplages thermiques**.

**Modèle d'évaporation convective en milieu confiné** Lorsque le confinement de l'écoulement s'accroît, la synthèse des travaux expérimentaux et des modèles de la littérature a mis en évidence l'augmentation du poids/influence des forces de capillarité dans le processus d'évaporation. La hausse des effets de tension de surface – quantifiés par le nombre de confinement – modifie les régimes d'écoulements diphasiques ordinairement rencontrés. Si la section du canal est de l'ordre de la longueur capillaire, la croissance d'une bulle de vapeur suffit pour que l'écoulement passe des régimes d'ébullition nucléée au régime annulaire puis vapeur en quelques diamètres. En partant de ce constat, le modèle de changement de phase considéré dans ce travail est un domaine liquide suivi d'un domaine vapeur, séparés par un front de vaporisation plan, d'épaisseur infinitésimale.

**Décomposition du champ de température en modes de Graetz généralisés** Dans cette approche, les champs de vitesses liquide et vapeur sont déterminées par la loi de Poiseuille

et les champs de température sont résolus à l'aide de la méthode des modes de Graetz généralisés spécifiquement adaptée, dans la thèse, au modèle d'évaporation. La décomposition en modes de Graetz généralisés est une méthode de résolution semi-analytique de problèmes tridimensionnels de convection-diffusion. A la condition que le champ de vitesse, la section du domaine et le nombre de Péclet soient invariants dans la direction de l'écoulement, cette méthode est un puissant outil d'analyse des échanges convectifs et conjugués.

**Méthode de Graetz appliquée aux thermo-siphons monophasiques** Dans un premier temps, la méthode des modes de Graetz généralisés a été utilisée pour analyser les transferts thermiques dans les boucles monophasiques en circulation naturelle. La conception de ces systèmes s'appuie couramment sur des corrélations semi-empiriques. A la place de ces corrélations, nous analysons les transferts avec la méthode des modes de Graetz généralisés en incluant la paroi solide et la nature des conditions aux limites appliquées. La pertinence des hypothèses du modèle développé (température axisymétrique, champ de vitesse établi (profil de poiseuille), écoulements tri-dimensionnels négligeables) ont été confirmées à l'aide de calculs CFD 3D. Dans ce cadre d'hypothèse, le bilan de quantité de mouvement appliqué au thermosiphon permet d'obtenir une relation entre les nombres de Reynolds, le nombre de Grashof et l'efficacité de la boucle. Cette dernière s'exprime sous la forme d'une loi de puissance du nombre de Péclet dont l'exposant est fonction des conditions de chauffage et de refroidissement appliquées (Dirichlet-Dirichlet, Neumann-Dirichlet ou Neumann-Neumann) et dont le coefficient de proportionnalité dépend de la conductivité de la paroi solide. Ces résultats sont soutenus par une étude asymptotique du développement des couches limites thermiques. L'efficacité une fois substituée dans le bilan de quantité de mouvement aboutie à l'établissement d'une loi comportementale universelle reliant les nombres de Grashof et Reynolds. Cette loi a été confrontée avec succès avec des données expérimentales tout en mettant en défaut les corrélations empiriques précédemment proposées. Cette étude a plus spécifiquement mis en lumière le pilotage des échanges par le développement des couches limites thermiques ainsi que l'impact de la conductivité de la paroi solide et du type des sources froides et chaudes utilisées sur le régime établi des thermo-siphons.

**Adaptation de la méthode des modes de Graetz généralisés au modèle de vaporisation** Dans un second temps, la méthode des modes de Graetz généralisés a été adaptée à la résolution d'écoulements diphasiques décrits selon le modèle de vaporisation en milieu confiné – dont les inconnus sont le champ de température et la position de l'interface liquide/vapeur  $z_i$ . L'extension de la méthode de Graetz au modèle de vaporisation passe par la construction de deux domaines respectivement associés à la phase liquide et la phase vapeur. En prescrivant les propriétés de chaque phase (propriétés évaluées à saturation), il est possible de décomposer leurs champs de température dans les bases des modes de Graetz respectives, à condition d'explicitier les conditions aux limites de chaque domaine (en particulier au niveau de l'interface de changement de phase). Ce couplage est réalisé de deux façons, tout d'abord en reliant le Péclet de l'écoulement liquide à celui vapeur, de manière à respecter l'équation de continuité. Puis à l'aide de la minimisation d'une fonctionnelle qui impose la température de saturation en entrée et sortie du front de vaporisation, la continuité des flux et de la température sur les autres jonctions potentielles et enfin, la relation de saut des flux thermiques de part et d'autre de l'interface liquide/vapeur. Cette méthodologie est ensuite appliquée à deux configurations : un micro-canal chauffé uniformément et un échangeur à micro-canaux co-courant.

**Modélisation et analyse d'un micro-canal chauffé** Le modèle développé a, d'abord, été appliqué à un micro-canal chauffé à flux imposé constant. L'analyse des champs de température dans ces canaux permet de distinguer trois zones : deux d'entre elles sont associées au

chauffage du fluide (croissance linéaire de la température de mélange), la dernière est associée à une couche limite thermique ‘frontale’, située en amont de l’interface liquide/vapeur. Cette couche limite est issue de la compétition entre le pompage thermique de l’énergie depuis l’interface de changement de phase – effet de conduction – et la convection du fluide chaud par l’écoulement. Les études numériques et analytiques – développement asymptotique de la température liquide – de la couche limite interfaciale ont montré que l’énergie consommée au niveau du changement de phase provient préférentiellement de la phase liquide et que l’épaisseur de la couche limite dépend étroitement du Péclet incident (décroissance en  $1/Pe_l$ ).

La focalisation du processus d’évaporation (stockage de l’énergie sous forme sensible) fait apparaître un maximum de température dans la phase liquide, qui dépasse la température de saturation. Le front de vaporisation a été suivi lors d’une étude paramétrique. Cette dernière a mis en évidence la proportionnalité de la position du front de vaporisation avec, d’une part, le Péclet liquide incident et, d’autre part l’inverse du nombre de Stefan (vaporisation du liquide) et enfin la température d’entrée (sous-refroidissement). Parallèlement un bilan d’énergie réalisé sur l’ensemble du canal a permis de valider l’expression de la position du changement de phase et permet de prouver que ce résultat est indépendant du régime d’écoulement turbulent et diphasique. Une comparaison de ces résultats a montré un très bon accord avec le modèle de Peles dans la limite des hauts nombres de Péclet. L’application de la loi de positionnement du front de vaporisation a également été utilisée pour prédire la crise d’ébullition, les valeurs numériques obtenues sont cohérentes avec les résultats expérimentaux dans les gammes de débits faibles à modérés. Pour étudier les plages de stabilité d’un réseau de micro-canaux mis en parallèle, la loi d’évolution du front d’évaporation est substituée dans le modèle de pertes de charge. L’étude du signe de la pente de la courbe de demande d’un micro-canal isolé permet d’exprimer analytiquement les frontières de la zone instable. Les effets des propriétés du fluide et de la géométrie du canal des plages de stabilité sont mesurées et montrent que l’étalement de la zone instable est maximisé lorsque les canaux sont longs et étroits.

**Modélisation et analyse d’un échangeur co-courant** Le modèle de vaporisation en écoulement confiné a été appliqué avec succès à un échangeur co-courant élémentaire à micro-canaux, i.e. composé d’un canal primaire et d’un canal secondaire séparés par une paroi solide. On retrouve dans ce cas encore la même succession de régions le long de l’écoulement secondaire (circuit où a lieu l’évaporation) que dans le cas du mono-canal chauffé (le chauffage liquide, la couche limite interfaciale puis le chauffage vapeur). Les transferts thermiques conjugués au sein de l’échangeur sont, en revanche, d’une nature différente. L’analyse utilisant les calculs de Graetz montre, en effet, que les transferts, sensibles aux écarts de température locaux et aux propriétés des fluides, suivent des comportements plus complexes (proches d’une loi exponentielle suffisamment loin de l’entrée).

Les variations de la position de l’interface liquide/vapeur ont été analysés en s’appuyant sur un fluide virtuel ne s’évaporant pas et dont les propriétés sont en tout point identiques à la phase liquide. Ce champ de température virtuel – plus simple à analyser que le champ de température diphasique – permet d’estimer l’énergie cumulée dans l’écoulement secondaire liquide. Nous avons pu en déduire que la position de l’interface  $z_i$  évolue comme le logarithme de l’écart entre l’inverse du nombre de Stefan et la température d’établissement de l’écoulement virtuel. L’analyse approfondie des champs de températures et des transferts thermiques a permis de distinguer trois régimes de fonctionnement dans l’échangeur co-courant : les régimes dominé primaire, équilibré et dominé vapeur.

L’expression analytique de  $z_i$  a permis de déterminer, grâce à la formulation de la pente de la courbe de demande, les conditions de stabilité associées à l’instabilité de Ledinegg dans un réseau d’échangeurs élémentaires parallèles à pression imposée. Afin de mesurer l’impact des propriétés de la paroi solide sur les plages de stabilité, les dépendances de  $z_i$  vis à vis de

l'épaisseur et de la conductivité thermique de la paroi solide ont été analysés analytiquement. L'exploitation de ces résultats a mis en évidence, dans un premier temps, la dépendance de la plage de stabilité aux propriétés des fluides et, dans un second temps, la réduction de la zone instable lorsque la conductivité thermique de la paroi solide augmente, le nombre de Péclet primaire croît ou que la longueur de l'échangeur diminue. Dans le cas de l'échangeur co-courant, l'état de l'art reste très lacunaire et il est donc difficile de trouver des éléments expérimentaux permettant de valider les résultats obtenus.

**Perspectives** La modélisation d'un échangeur co-courant à micro-canaux a démontré la nécessité de considérer des lois spécifiques lors de l'établissement des plages de stabilité pour ces systèmes. L'application directe des résultats issus du manuscrit aux générateurs de vapeur du SMR est cependant limitée notamment par l'agencement des canaux en contre-courant dans ces systèmes. Le comportement des GV diffère donc très probablement des échangeurs co-courant étudiés plus haut. Par conséquent, il serait intéressant d'étendre la méthode décrite plus tôt à des configurations d'échangeur contre-courant élémentaire pour analyser la stabilité des points de fonctionnement des GV. Les modèles d'échangeur utilisés dans ces travaux, s'appuient sur une configuration d'échangeur semi-infini, qui s'écarte, *a priori* aussi de la réalité. La prise en compte des effets induits par l'utilisation d'un échangeur de longueur finie revêt donc un intérêt réel dans l'optique de se rapprocher des systèmes industriels. De la même façon, on peut s'interroger sur la représentativité du profil de vitesse choisi et plus généralement sur son impact (qui n'a pas été étudiée dans ces travaux) sur la qualité des échanges et l'étendue de la zone instable.

Il est aussi important de mentionner à nouveau l'absence de données expérimentales permettant la comparaison de la modélisation proposée dans le deux derniers chapitre de cette thèse. Le développement d'un banc expérimental visant à étudier la stabilité de quelques échangeurs élémentaires isolés thermiquement serait en effet d'un grand intérêt. Il permettrait de caractériser l'influence de la nature des échanges sur les excursions de débits tout en ayant accès à des mesures locales indisponibles dans la littérature. Par ailleurs, la confrontation des résultats obtenus avec d'autres modèles (simulations CFD ou modèles analytiques tel que celui de Thome et al.) permettrait de mesurer l'erreur associée aux hypothèses sur lesquelles est construit le modèle d'évaporation en milieu confiné (en particulier la localisation du changement de phase). L'adaptation de la méthode de Graetz à un modèle de changement de phase étalé (soit en ayant recours à un terme puits volumique homogène, soit sous forme de terme puits à la jonction liquide/solide) fournirait ainsi des éléments de comparaison intéressants pour évaluer l'impact de la focalisation de l'évaporation sur les résultats.

De plus dans toutes les configurations étudiées les champs thermiques obtenus numériquement dans le modèle permettraient d'évaluer les déformations mécaniques de la structure liées au forçage thermique, et en particulier aux fluctuations des modes instables. En comparant ces champs thermiques pour plusieurs régimes de fonctionnement, il serait également envisageable d'estimer la fatigue engendrée par des changements réguliers de régime lors du fonctionnement d'un thermosiphon, ce qui donnerait des indications intéressantes pour son dimensionnement.

**Titre :** Analyse de la stabilité d'un échangeur générateur de vapeur à plaques

**Mots clés :** Ecoulements diphasiques, Microcanaux, Transferts couplés, Générateur de vapeur, Instabilités, Echangeur thermique

**Résumé :** Dans un contexte de réduction des Gaz à Effet de Serre, une attention croissante est portée sur les sources de production d'énergie électrique décarbonée. Pour répondre à cette demande des projets de réacteurs nucléaires de petite taille, les Small Modular Reactor sont en phase de développement, à l'instar du projet NUWARD et de son réacteur à eau pressurisé de 170MWe. Cette technologie se distingue par sa modularité et le design très compact de ses générateurs de vapeur (GV) en comparaison des GV usuels. Le fluide secondaire est, en outre, vaporisé en une unique passe dans des canaux de taille millimétrique. Ces GV sont susceptibles d'être le siège d'instabilités thermohydrauliques diphasiques statiques (Ledinegg) ou dynamiques (onde de densité, ...). Ces instabilités modifient les niveaux de températures, débits et pressions, capables d'impacter l'efficacité, la durée de vie, voire l'intégrité des GV. Elles justifient ainsi une bonne compréhension et modélisation des conditions d'apparition de ces instabilités. Cette thèse analyse l'instabilité de Ledinegg dans les conditions de fonctionnement des GV compacts à plaques. Un modèle simplifié d'évaporation en convection forcée en domaine confiné est proposé et exploré. Considérant que les interfaces sont dominées par la capillarité et localisées par les gradients longitudinaux de température, ce modèle décrit le couplage thermique se produisant dans le cas d'un front de vaporisation, plan, d'épaisseur infinitésimale, séparant un domaine liquide d'un domaine vapeur. Les champs de température sont résolus à l'aide de la méthode des modes de Graetz généralisés, spécifiquement adaptée au modèle d'évaporation choisi. La décomposition en modes de Graetz généralisés résout semi-analytiquement des problèmes tridimensionnels de convection-diffusion permettant d'analyser finement les échanges convectifs conjugués. Dans le premier chapitre cette approche est utilisée pour étudier les transferts thermiques dans les boucles monophasiques en circulation naturelle. Une analyse numérique a permis d'établir une nouvelle loi d'échelle universelle reliant les nombres de Grashof et Reynolds, confirmée par une analyse asymptotique des couches limites pariétales. Cette loi a été confrontée avec succès aux corrélations empiriques existantes et à des jeux de données expérimentales. L'étude a mis en évidence le pilotage des transferts thermiques par la nature des conditions aux limites, les couches limites et le rapport des conductivités thermiques fluide/solide. Dans le second chapitre, la méthode des modes de Graetz généralisés est étendue à la résolution des champs de température avec un front d'évaporation permettant de déterminer le positionnement de celui-ci. Cette méthode est ensuite appliquée à un mono-canal chauffé uniformément et un échangeur co-courant. L'étude de la vaporisation dans un micro-canal à flux imposé a permis d'établir une loi linéaire entre position du front et nombre de Peclet. Les résultats numériques sont cohérents avec l'analyse analytique du bilan d'énergie et les données expérimentales de la littérature, à des débits et puissances de chauffe modérés. La loi d'évolution du front d'évaporation associée à un modèle de pertes de charge ont mené aux contours des zones instables pour un micro-canal chauffé isolé et/ou en réseau ont été tracés et caractérisés. Dans le cas de l'échangeur co-courant, la majorité des études de stabilité considère des canaux à flux thermique imposé et thermiquement isolés. Or les transferts conjugués dans un échangeur s'écartent a priori, par nature, des échanges à flux imposé. Le modèle d'évaporation confiné prédit ainsi une relation logarithmique entre position du front et Peclet d'entrée. Les dépendances de cette relation aux propriétés du fluide et de la paroi, des débits du circuit primaire ont été étudiées et permis d'établir des critères de stabilité pour un échangeur seul et/ou en réseau, représentatifs des GV considérés.

**Title:** Stability analysis of a compact steam generator exchanger

**Key words:** Instabilities, Microchannel, Heat exchanger, Multiphase flows, Conjugated heat transfers, Steam generator

**Abstract:** In the context of greenhouse gases reduction, an increasing attention is dedicated to carbon-free power plants solutions. To answer to this growing demand, tiny nuclear reactors or Small Modular Reactors (SMR), are being developed such as the 170Mwe Pressurized Water Reactor within the NUWARD project. This technology is downscaled, modular, with a very compact Steam Generators (SG) design in comparison to current recirculating SG. Moreover, the secondary fluid is vaporized through one unique passage in millimetric channels. However, such devices potentially include static (Ledinegg) and dynamic (density wave oscillations, ...) two-phase flow instabilities. These instabilities can alter the SG's efficiency, lifetime, and even integrity from modifying the temperature, mass flow and pressure levels. Consequently, it justifies a more precise analysis and understanding of the instability's mechanism. In this PhD, a thorough study of the Ledinegg instability and the flow maldistribution phenomenon is carried out in the compact plates SG's operating conditions. In a capillary dominated regime we consider a localized, infinitesimally thin interfacial front plunged into a forced longitudinal temperature gradient whereby vaporization arises leading to successive liquid-gas phases distribution within the channel. Whereas the liquid and vapor velocity profiles are provided by the Poiseuille's law, the temperature fields in the solid and the fluid are obtained using the generalized Graetz modes method, specifically adapted to the considered vaporization model. The generalized Graetz modes decomposition permits a semi-analytical solution of the 3D convection-diffusion problems provided that the velocity field, domain's section and Peclet's number are longitudinally invariant along the flow direction. In the first chapter, this methodology is used to analyse heat transfers in single-phase natural convection circulation loop. A new universal scaling law for the relation between the Grashof and the Reynolds numbers is obtained, this is confirmed by an asymptotic analysis and direct numerical simulations and is successfully compared with experimental data sets. This analysis has highlighted the influence of boundary conditions, boundary layers, and fluid to solid thermal conductivity ratio in the heat transfer control. In the second chapter, the generalized Graetz modes method is extended to solve the temperature fields as well as the two-phase interface position within the vaporization model. This methodology is applied to two configurations: a uniformly heated single channel and a co-current heat exchanger. The vaporization's numerical computation with imposed heat flux in a microchannel depicts the proportionality between the front's position and the liquid Peclet's number. The results are consistent with the theoretical energy balance analysis as well as with experimental data obtained in the literature for moderated mass flows and heating powers. Using the resulting interface's position law into a pressure drops model, the boundaries of the stability areas in a single heated microchannel and many parallel channels have been computed and analysed. In the case of the co-current heat exchanger, the state-of-the-art remains spotty because most of stability studies deals with imposed heat flux and thermally insulated channels, not relevant for conjugated heat transfers in a heat exchanger which deviate from such simplified assumptions. Our confined vaporization model predicts a logarithmic dependence between the two-phase interface's position and the secondary inlet Peclet's number. The influence of the fluid properties, primary mass flow and the wall thermal conductivity on this law has been studied and allowed to specify the stability criteria for a single heat exchanger and a network composed of parallel heat exchangers, closer to the compact plates' SG.